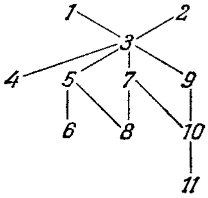
Л.С.Понтрягин
НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

СОДЕРЖАНИЕ

УКАЗАТЕЛЬ

Схема зависимости глав



ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

С точки зрения чисто логической непрерывная или, что то же самое, топологическая группа представляет собой простое соединение двух основных математических понятий: группы и топологического пространства, именно, элементы одного и того же множества составляют группу и в то же время топологическое пространство. Ясно, что такое объединение не имело бы никакого смысла, если бы алгебраические и топологические операции, определенные на одном и том же множестве, не были связаны между собой. Связь эта существует и заключается в том, что групповые операции умножения и взятия обратного элемента непрерывны в смысле заданной топологии. Возникающее таким образом понятие и представляет собой топологическую группу. Аналогично может быть определено топологическое кольцо и топологическое тело. Приведем примеры:

1) конечномерное векторное пространство с групповой операцией сложения является топологической группой;

2) совокупность всех квадратных матриц данного порядка с действительными элементами с обычными для матриц операциями сложения и умножения является топологическим кольцом;

3) совокупность всех квадратных матриц данного порядка с действительными элементами и детерминантами, отличными от нуля, с обычной операцией матричного умножения является топологической группой;

4) тела действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов являются топологическими.

Тот факт, что такого рода тополого-алгебраические объекты довольно часто встречаются в математике, сам по себе не мог бы служить убедительным основанием для их изучения. Оказалось, однако, что, налагая на тополого-алгебраический объект ограничения (аксиомы) весьма общего характера, мы приходим к чрезвычайно конкретным математическим понятиям. Например, непрерывное алгебраическое тело, если оно связно и локально бикомпактно, изоморфно либо телу действительных чисел, либо телу комплексных чисел, либо телу кватернионов (результат, полученный мною в начале тридцатых годов [34]). Несколько позже мною было обнаружено [37], что между коммутативными бикомпактными топологическими группами и дискретными коммутативными группами имеется естественное взаимно однозначное соответствие, которое осуществляется образованием группы характеров. Такого рода факты сделали теорию топологических групп содержательной и привлекли к ней внимание.

На основе нескольких своих лекционных курсов я составил монографию «Непрерывные группы», которая была опубликована в 1938 г. Второе, гораздо более обширное, издание книги вышло в 1954 г.

Настоящее, третье, издание отличается от второго очень мало — только исправлением одной неточности, допущенной в седьмой главе второго издания, что повлекло некоторые незначительные изменения десятой главы.

В этой книге в двух случаях я пользуюсь несколько устарелой терминологией, на что необходимо обратить внимание читателя.

1. Последнее время вместо термина бикомпактность стали употреблять термин компактность, так как термин компактность в старом смысле слова перестал употребляться. Я же сохраняю термин бикомпактность.

2. При рассмотрении топологических групп иногда приходится рассматривать лишь их алгебраические свойства, отвлекаясь от свойств топологических. Так рассматриваемую топологическую группу я называю группой алгебраической, между тем термин алгебраическая группа применяется теперь в совершенно другом смысле, который, однако, не употребляется в настоящей книге.

Л. С. Понтрягин

ВВЕДЕНИЕ

Первоначально понятие непрерывной, или, что то же самое, топологической группы возникло в математике в связи с рассмотрением групп непрерывных преобразований. Группа непрерывных преобразований, например геометрических, сама естественным образом представляет собой топологическое многообразие. В дальнейшем оказалось, что для трактовки большей части возникающих здесь проблем нет надобности рассматривать группу как группу преобразований, достаточно изучать лишь группу саму по себе, помня, однако, что в ней установлены соотношения предельного перехода. Таким образом возникло новое математическое понятие: *топологическая группа*.

С точки зрения чисто логической топологическая группа представляет собой простое соединение двух основных математических понятий: группы и топологического пространства. Поэтому аксиоматика понятия топологической группы крайне естественна. Рассматривая группы, мы изучаем в наиболее чистом виде алгебраическую операцию умножения. Точно так же, рассматривая топологические пространства, мы в столь же чистом виде изучаем операцию предельного перехода. Так как обе эти операции принадлежат к числу основных математических операций, то они весьма часто объединяются. Топологическая группа и представляет собой то понятие, в котором объединены и тесно связаны между собой обе указанные операции. В конструктивном отношении аксиоматика топологических групп не представляет собой ничего интересного, так как в основном лишь повторяет аксиоматику абстрактных групп. Таковы же и первые шаги теории топологических групп: они не содержат почти ничего специфического. Однако совмещение в одном множестве связанных между собой алгебраических и топологических операций приводит к сравнительно большой конкретности рассматриваемых объектов. Это особенно ярко видно на примере непрерывных тел, детально изученных в четвертой главе. Третья глава в основном посвящена сравнительно тривиальному изложению аксиоматики топологических групп и установлению их простейших свойств. В первой и второй главах собраны те сведения из теории групп и абстрактной топологии, которые используются на протяжении дальнейших глав.

После того как построена аксиоматика и дана общая теория топологических групп, возникает более интересная задача: дать конструктивное исследование нового абстрактного понятия, т. е. привести его в связь со старыми более конкретными понятиями. На этом пути освещаются с новой общей точки зрения старые конкретные понятия и в то же время конкретизируется новое абстрактное понятие. То, что было проделано для непрерывных тел в четвертой главе без применения какого-либо аппарата, не удается сделать для топологических групп столь простыми средствами. Основным аппаратом при изучении топологических групп служит теория линейных представлений, данная в пятой главе. При помощи этого аппарата удается детально изучить структуру бикомпактных и коммутативных топологических групп, что сделано в восьмой и шестой главах.

К числу конкретных понятий теории топологических групп относится понятие группы Ли. Первоначально теория топологических групп и возникла в форме теории групп Ли. Как обычно в теориях сравнительно давнего происхождения, в теории групп Ли остались нерешенными некоторые вопросы принципиального характера. Решению этих принципиальных вопросов посвящается седьмая глава. Там же дается подготовительный материал для главы восьмой, так как бикомпактные топологические группы изучаются при помощи приведения их в связь с группами Ли. Более детально группы Ли исследуются в десятой и одиннадцатой главах. Там даются основы теории групп Ли, а также классификация компактных групп Ли. В девятой главе дается понятие универсальной накрывающей группы. Оно устанавливает связь между локальными свойствами топологической группы и ее свойствами в целом.

Почти каждый параграф книги заканчивается примерами, характер которых весьма разнообразен. С одной стороны, здесь имеются почти тривиальные иллюстрации теоретического материала; с другой же стороны, часто дается краткое изложение доказательств некоторых теорем, имеющих вполне самостоятельное значение.

Книгу не обязательно читать всю подряд. Схема зависимости глав приложена выше.

Книга не предполагает у читателя обширных математических познаний, но требует значительной математической культуры. В основном предполагается знание лишь самого элементарного математического материала типа аналитической геометрии, теории матриц, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и т. п.

К книге прилагается список литературы. Ссылки на литературу будут даваться указанием номера по этому списку, заключенного в квадратные скобки.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В основу изложения книги кладется понятие *множества*, которое предполагается известным (см. [13]). Здесь я привожу некоторые обозначения, связанные с понятием множества и элементарными операциями над множествами.

A) Запись $a \in M$ означает, что элемент a принадлежит множеству M. Иногда мы будем задавать множество M простым перечислением входящих в него элементов: $M = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Написанное означает, что множество M составлено из элементов $a_1, \ldots, a_n, \ldots$

B) Запись $M = N$ означает, что множества M и N совпадают.

C) Запись $M \subset N$ или $N \supset M$ означает, что каждый элемент множества M входит в множество N, т. е. что множество M составляет часть множества N. Возможность совпадения обоих множеств не исключена.

D) Через $M \cap N$ обозначается *пересечение* множеств M и N, т. е. множество, составленное из всех элементов, одновременно принадлежащих множествам M и N.

E) Через $M \cup N$ обозначается *сумма* (*объединение*) множеств M и N, т. е. множество, составленное из всех элементов, принадлежащих по крайней мере одному из множеств M и N.

F) Через $M \setminus N$ обозначается *разность* между множеством M и множеством N, т. е. множество, составленное из всех элементов, входящих в M, но не входящих в N. Таким образом, операция вычитания выполнима всегда, независимо от того, является ли множество N частью множества M или нет. Если $M \subset N$, то в результате вычитания получается *пустое множество*, т. е. множество, не содержащее элементов.

G) Пусть M и N — два множества. Допустим, что каждому элементу x множества M поставлен в соответствие один определенный элемент $y = f(x)$ множества N. Тогда мы будем говорить, что имеется *отображение* f множества M *в* множество N. Элемент y называется *образом* элемента x при отображении f, а элемент x — *прообразом* или одним из прообразов элемента y.

Говорят, что f есть отображение множества M *на* множество N, если каждый элемент b множества N имеет хоть один прообраз a при отображении f, т. е. $b = f(a)$.

Если A есть подмножество множества M, т. е. $A \subset M$, то через $f(A)$ мы будем обозначать множество всех таких элементов из N, которые являются образами элементов, принадлежащих A; множество $f(A)$ будем называть *образом* множества A. Если $B \subset N$, то через $f^{-1}(B)$ мы будем обозначать множество всех таких элементов из M, которые переходят в B при отображении f; множество $f^{-1}(B)$ будем называть *полным прообразом* множества B при отображении f.

Отображение f множества M на множество N называется *взаимно однозначным*, если каждый элемент множества N имеет лишь один прообраз при отображении f. Если f есть взаимно однозначное отображение, то уравнение $y = f(x)$ можно разрешить относительно x, т. е. можно однозначно определить x, зная элемент y, и мы имеем $x = f^{-1}(y)$. Отображение f^{-1} называется *обратным* по отношению к отображению f.

ГРУППЫ

Теория групп изучает алгебраическую операцию в ее наиболее чистом виде: элементы, составляющие группу, рассматриваются лишь с точки зрения операции, установленной в группе; все остальные возможные свойства этих элементов оставляются в стороне.

Настоящая глава посвящается изложению основных понятий теории групп.

§ 1. Понятие группы

Определение 1. Множество G элементов называется *группой*, если в G установлена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов a, b из G некоторый элемент c из G, так что выполнены формулируемые ниже условия 1), 2), 3), называемые *групповыми аксиомами*. Операция эта по большей части называется *умножением*, и результат ее обозначается через ab, $c=ab$ (*произведение* ab может зависеть от порядка сомножителей a и b: ab, вообще говоря, не равно ba).

1) *Ассоциативность*: для всяких трех элементов a, b, c из G выполнено соотношение $(ab)c=a(bc)$.

2) В G имеется левая *единица*, общая для всех элементов группы, т. е. такой элемент e, что $ea = a$ для всякого элемента a из G.

3) Для всякого элемента a из G существует левый *обратный элемент*, т. е. такой элемент a^{-1}, что $a^{-1}a=e$.

Множество элементов группы G может быть как конечным, так и бесконечным. Если множество G конечно, то сама группа называется *конечной*, а число элементов множества G называется *порядком* группы G. В противоположном случае группа G называется *бесконечной*.

Если сверх указанных трех аксиом в группе выполнено еще условие *коммутативности*, т. е. для всяких двух элементов a и b из G имеет место равенство

$$ab = ba, \tag{1}$$

то группа называется *коммутативной* или *абелевой*. Для коммутативных групп вместо мультипликативных обозначений часто употребляются аддитивные, т. е. вместо произведения ab пишется *сумма* $a+b$; в соответствии с этим групповая операция называется не умножением, а *сложением*. В этом случае единица e группы называется *нулем* и обозначается через 0, а элемент a^{-1}, обратный к элементу a, называется *противоположным* и обозначается через $-a$.

A) В силу аксиомы 1) $(ab)c=a(bc)$; таким образом, этот элемент можно обозначить просто через abc. Точно так же, если имеется произведение четырех элементов, например $((ab)c)d$, то оно, как легко видеть, не зависит от способа расстановки скобок и обозначается просто через $abcd$. То же самое правило имеет место и для произвольного числа сомножителей.

B) Левая единица e группы является также и правой единицей, т. е. $ae=a$ для всякого элемента a. Левый обратный элемент a^{-1} к элементу a является также и правым обратным, т. е. $aa^{-1}=e$. Элемент, обратный к элементу a^{-1}, совпадает с a, $(a^{-1})^{-1}=a$.

Докажем утверждение B). Из аксиом 2) и 3) следует, что $a^{-1}aa^{-1}=a^{-1}$; умножая обе части этого соотношения слева на левый обратный элемент к элементу a^{-1}, получаем $aa^{-1}=e$, т. е. левый обратный элемент является одновременно и правым обратным; сверх того, элемент, обратный к a^{-1}, есть a. Далее, имеем $ae=$ $=aa^{-1}a=ea=a$, т. е. левая единица одновременно является и правой.

C) В группе G каждое из уравнений

$$ax=b \tag{2}$$

и

$$ya=b \tag{3}$$

относительно неизвестных x и y имеет решение и притом единственное. Из этого, в частности, следует единственность единицы и единственность обратного элемента, ибо e является решением уравнения $xa=a$, а элемент a^{-1}—решением уравнения $xa=e$.

Для доказательства разрешимости уравнений (2) и (3) достаточно указать, что элемент $a^{-1}b$ является решением уравнения (2), а элемент ba^{-1}—решением уравнения (3). Очевидно, далее, что указанные решения являются единственными, ибо, умножая уравнение (2) слева на a^{-1}, получаем $x=a^{-1}b$; точно так же, умножая уравнение (3) справа на a^{-1}, получаем $y=ba^{-1}$.

D) После того как доказана единственность единицы и обратного элемента (см. C)), естественно ввести обычные для элементарной алгебры обозначения. Если m—натуральное число, то a^{m+1} определим индуктивно, положив $a^{m+1}=a^m a$, считая, что $a^1=a$. Отрицательную степень определим, положив $a^{-m}=(a^{-1})^m$. Степень a^0 определим, положив $a^0=e$. Если p и q—два целых числа, то нетрудно показать, что выполнены обычные правила: $a^p a^q=a^{p+q}$, $(a^p)^q=a^{pq}$. При аддитивных обозначениях вместо a^n пишут na.

E) Если для элемента a группы существует такое натуральное число m, что $a^m=e$, то мы скажем, что элемент a имеет *конечный порядок*; в противоположном случае будем приписывать элементу a *порядок бесконечность* или *нуль*, или же назовем элемент a *свободным*. Если элемент a имеет конечный порядок, то числовое значение этого порядка определим как минимальное натуральное число r, для которого $a^r=e$. Оказывается, что если $a^n=e$, где n—произвольное целое число, то n делится на r.

Для доказательства этого утверждения разделим n на r, т. е. представим n в форме $n=pr+q$, где

$$0 \leqslant q < r. \tag{4}$$

Тогда имеем:

$$e=a^n=a^{pr+q}=(a^r)^p a^q=a^q.$$

Таким образом, $a^q=e$ и, следовательно, в силу неравенства (4) $q=0$, т. е. n делится на r.

Весьма важным примером группы является *группа преобразований* множества. Группы в математике и возникли как группы преобразований, и только позднее, в результате абстракции, стали рассматриваться независимо от преобразований.

F) Взаимно однозначное отображение некоторого множества Γ на себя называется *преобразованием* множества Γ. Если x и y— два преобразования множества Γ, то их *произведение* $z=xy$ определяется соотношением $z(\xi)=x(y(\xi))$ при произвольном $\xi \in \Gamma$. Легко видеть, что определенное таким образом отображение z является преобразованием множества Γ. Роль единицы при этом умножении играет *тождественное преобразование* e множества Γ, определяемое соотношением $e(\xi)=\xi$ при произвольном $\xi \in \Gamma$. Ясно, что $ex=xe=x$. Преобразование x^{-1}, обратное к преобразованию x, определяется тем, что переводит всякий элемент $x(\xi)$ множества Γ в элемент ξ. Ясно, что $x^{-1}x=e$, так что преобразование x^{-1} является левым обратным к преобразованию x. Ниже будет показано, что для определенного таким образом закона умножения преобразований имеет место ассоциативность. Таким образом, всякое непустое множество G преобразований множества Γ, содержащее наряду с каждыми двумя преобразованиями их произведение и наряду с каждым преобразованием—ему обратное, есть группа в силу установленного закона перемножения преобразований. Всякая такая группа называется *группой преобразований* множества Γ. Группа G преобразований множества Γ называется *транзитивной*, если для всяких двух элементов ξ, η множества Γ существует такое преобразование $x \in G$, что $x(\xi)=\eta$. В частности, группа *всех* преобразований множества Γ является транзитивной; преобразование x, переводящее ξ в η, может быть задано соотношениями:

$$x(\xi)=\eta, \quad x(\eta)=\xi, \quad x(\zeta)=\zeta \text{ при } \zeta \neq \xi, \quad \zeta \neq \eta.$$

Докажем ассоциативность умножения преобразований. Пусть x, y и z—три преобразования множества Γ, и пусть $\xi \in \Gamma$. Мы имеем:

$$(xy)z(\xi)=(xy)(z(\xi))=x(y(z(\xi))),$$
$$x(yz)(\xi)=x\ (yz\ (\xi))=x(y(z(\xi))),$$

так что $(xy)z=x(yz)$.

Пример 1. Пусть G_n—группа всех преобразований конечного множества Γ_n, содержащего n элементов, например, чисел $1, 2, \ldots, n$. Каждое преобразование множества Γ_n называется также *подстановкой*, а группа G_n—*группой всех подстановок* множества Γ_n. Каждая подстановка, как известно, единственным образом распадается на *циклические подстановки*. Циклическая подстановка $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ переводит число i_1 в число i_2, число i_2—в число i_3 и т. д., наконец, число i_k—в число i_1. Группа G_n преобразований множества Γ_n содержит $n!$ элементов. Выпишем для примера все элементы группы G_3. Элементы эти суть $a=(1, 2)(3)$; $b=(1, 3)(2)$; $ab=(1, 3, 2)$; $ba=(1, 2, 3)$; $aba=(1)(2, 3)$; $e=(1)(2)(3)=a^0$. Таким образом, все элементы группы G_3 выражаются через два ее элемента a и b. Последние служат в этом смысле *образующими* группы G_3. Элементы $(1, 2)(3)$, $(1, 3)(2)$ и $(1)(2, 3)$ имеют порядок два, элементы $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$—порядок три. Группа G_3 некоммутативна, так как $ab\neq ba$.

Пример 2. Пусть $r=\|r_j^i\|$ и $s=\|s_k^j\|$, $i=1, \ldots, a$; $j=1, \ldots, b$; $k=1, \ldots, c$,—две матрицы, составленные из комплексных чисел. Как видно из обозначений, число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. При этом условии можно определить произведение rs матриц r и s как матрицу $t=\|t_k^i\|$, положив:

$$t_k^i=\sum_{j=1}^{b} r_j^i s_k^j, \qquad i=1, \ldots, a; \qquad k=1, \ldots, c.$$

Если r и s суть квадратные матрицы порядка n, т. е. $a=b=c=n$, то rs есть квадратная матрица порядка n. Покажем, что множество G всех квадратных матриц порядка n, детерминанты которых отличны от нуля, есть группа относительно определенного выше умножения. Ассоциативность непосредственно вытекает из определения умножения матриц.

Единицей является единичная матрица $e=\|\delta_j^i\|$, где $\delta_i^i=1$ и $\delta_j^i=0$ при $i\neq j$. Для того чтобы найти матрицу $r=\|r_j^i\|$, обратную к матрице $s=\|s_j^i\|$, достаточно разрешить систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} r_j^i s_k^j=\delta_k^i$$

относительно неизвестных r_j^i. Эта система разрешима, так как при фиксированном i она превращается в систему n уравнений с n неизвестными, детерминант $|s_k^j|$ которой отличен от нуля.

Легко видеть, что подмножество G' множества G, составленное из действительных матриц, также есть группа.

§ 2. Подгруппа. Нормальный делитель. Факторгруппа

В дальнейшем нам часто придется рассматривать различные подмножества группы и некоторые операции над ними. Здесь мы введем обозначения для этих операций.

A) Если A и B—два подмножества группы G, то через AB обозначим подмножество, составленное из всех элементов вида xy, где $x \in A$, $y \in B$. Через A^{-1} обозначим подмножество, составленное из всех элементов вида x^{-1}, где $x \in A$. При натуральном m подмножество A^{m+1} определим индуктивно, считая, что $A^1=A$ и $A^{m+1}=A^mA$. Подмножество A^{-m} определим, положив $A^{-m}=(A^{-1})^m$. Подмножество A^0 определим, положив $A^0=\{e\}$. Пользуясь установленными обозначениями, можно составить произведение произвольного числа подмножеств, возведенных в произвольные целые степени. В дальнейшем мы иногда не будем делать различия между множеством, содержащим один элемент, и самим этим элементом, поэтому для нас имеет теперь смысл обозначение Ab, где $A \subset G$, $b \in G$. Отметим, что если A не пусто, то

$$AG=GA=G, \tag{1}$$

$$G^{-1}=G, \tag{2}$$

$$Ae=eA=A. \tag{3}$$

При аддитивных обозначениях вместо AB будем писать $A+B$, а вместо A^n будем писать nA.

Имея некоторую группу G, мы можем, исходя из нее, конструировать новые группы. Простейший способ такого конструирования дается следующим определением.

Определение 2. Множество H элементов некоторой группы G называется *подгруппой* группы G, если H есть группа в силу того же закона перемножения, который имеет место в G.

B) Для того чтобы подмножество H группы G было подгруппой, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено любое из двух следующих условий:

а) Наряду со всякими двумя элементами a и b в H должен входить также элемент ab^{-1}. Пользуясь обозначениями замечания A), это условие можно записать в виде

$$HH^{-1} \subset H. \tag{4}$$

b) Наряду со всякими двумя элементами a и b в H должны также входить элементы ab и b^{-1}. Пользуясь обозначениями замечания A), это условие можно записать в виде

$$H^2 \subset H \tag{5}$$

и

$$H^{-1} \subset H. \tag{6}$$

Необходимость указанных условий очевидна; докажем их достаточность. Если $a \in H$, то в силу условия a) имеем $aa^{-1}=e \in H$. Так как, далее, $e \in H$ и $a \in H$, то в силу условия a) имеем $ea^{-1}=a^{-1} \in H$. Если a и b суть два элемента из H, то по доказанному $b^{-1} \in H$ и, следовательно, в силу условия a) имеем $ab=a(b^{-1})^{-1} \in H$. Таким образом, при выполнении условия a) множество H оказывается подгруппой. Вполне аналогично доказывается и достаточность условия b).

Каждая группа содержит в качестве своей подгруппы множество, состоящее из всех целых степеней какого-либо ее элемента. Группа, состоящая исключительно из степеней некоторого ее элемента, называется *циклической*. Бесконечные циклические группы называются *свободными*: все их элементы (за исключением, конечно, единицы)—свободные (см. § 1, E)).

При конструировании новых понятий современная математика пользуется принципом эквивалентности, который формулируется следующим определением.

C) Говорят, что в некотором множестве M установлен признак *эквивалентности*, если о каждых двух его элементах a и b можно сказать, эквивалентны они или нет, в обозначениях $a \sim b$ или $a \not\sim b$, причем выполнены следующие условия:

a) *рефлексивность*: $a \sim a$;

b) *симметрия*: если $a \sim b$, то $b \sim a$;

c) *транзитивность*: если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.

При выполнении указанных условий признак эквивалентности, установленный в M, автоматически разбивает M на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов.

Применим теперь этот общий принцип эквивалентности к группам.

D) Пусть G—некоторая группа и H—ее подгруппа. Если a и b суть два элемента из G, то будем считать, что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $ab^{-1} \in H$. Оказывается, что установленный таким образом в множестве G признак эквивалентности удовлетворяет всем условиям определения C), и, следовательно, G распадается на классы эквивалентных между собой элементов. Каждый из получаемых классов называется *правым смежным классом* группы G по подгруппе H. Оказывается, далее, что если A есть некоторый правый смежный класс по подгруппе H и $a \in A$, то $A=Ha$ (см. A)); при этом каждое подмножество вида Hb является правым смежным классом. Так как $H=He$, то сама подгруппа H является одним из смежных классов. Из сказанного и из однозначной разрешимости уравнения $c=xa$ (см. § 1, C)) следует, что мощность каждого правого смежного класса равна мощности подгруппы H. В частности, если G есть конечная группа порядка g, а подгруппа H имеет порядок h, то g делится на h, и $\frac{g}{h}$ есть число правых смежных классов.

Покажем прежде всего, что данный в D) признак эквивалентности удовлетворяет условиям определения C).

Действительно, $a\sim a$, так как $aa^{-1}=e\in H$. Если $a\sim b$, т. е. $ab^{-1}\in H$, то и $(ab^{-1})^{-1}=ba^{-1}\in H$, т. е. $b\sim a$. Если $a\sim b$ и $b\sim c$, т. е. $ab^{-1}\in H$ и $bc^{-1}\in H$, то $ac^{-1}=ab^{-1}bc^{-1}\in H$, т. е. $a\sim c$. Таким образом, все три условия выполнены.

Покажем, далее, что если A—некоторый смежный класс по подгруппе H и $a\in A$, то $A=Ha$. Действительно, пусть $x\in A$; тогда $xa^{-1}\in H$, и следовательно, $x\in Ha$. Если $y\in Ha$, то $ya^{-1}\in H$, и, следовательно, $y\in A$.

Покажем, наконец, что всякое множество Hb есть смежный класс. Действительно, элемент b принадлежит одному из смежных классов, например B; следовательно, по только что доказанному, $B=Hb$.

Итак, утверждение D) доказано.

E) Наряду с введенным в D) признаком эквивалентности можно ввести другой, вполне аналогичный, считая, что $a\sim b$ тогда и только тогда, когда $a^{-1}b\in H$. Получаемые таким образом классы называются *левыми смежными классами* по подгруппе H. Точно так же, как и в D), доказывается, что каждый левый смежный класс представим в форме aH и, обратно, каждое подмножество вида bH является левым смежным классом.

Поставим теперь вопрос, при каких условиях разбиения на правые и левые смежные классы группы G по подгруппе H совпадают. Если A есть одновременно правый и левый смежный класс по H, то $A=Ha=aH$, где a есть произвольный элемент из A. Если всякий правый смежный класс одновременно является и левым, то мы имеем $Ha=aH$ при всяком $a\in G$. Умножая последнее соотношение слева на a^{-1}, получаем $a^{-1}Ha=H$. Подгруппы, обладающие указанным свойством, выделяются следующим определением.

Определение 3. Подгруппа N группы G называется *инвариантной подгруппой*, или *нормальным делителем* группы G, если при всяком $n\in N$ и всяком $a\in G$ имеем $a^{-1}na\in N$, или, что то же, $a^{-1}Na\subset N$ при всяком $a\in G$.

Если N есть нормальный делитель, т. е. $a^{-1}Na\subset N$ при всяком $a\in G$, то $a^{-1}Na=N$ при всяком $a\in G$. Действительно, пусть $a=b^{-1}$; тогда $bNb^{-1}\subset N$; умножая это соотношение слева на b^{-1} и справа на b, получаем $N\subset b^{-1}Nb$; но b—произвольный элемент из G, поскольку элемент a был произвольным; таким образом, $b^{-1}Nb=N$ при произвольном $b \in G$. Последнее соотношение можно выразить в форме

$$Nb=bN. \qquad (7)$$

F) Для того чтобы правое и левое разбиения на смежные классы по подгруппе N совпадали, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа N была инвариантной.

Необходимость этого условия была доказана выше. Докажем его достаточность. Если A есть правый смежный класс по подгруппе N, то $A=Na$; но $Na=aN$ (см. (7)) и, следовательно, A есть левый смежный класс.

Следующее определение дает второй способ конструирования групп, исходя из заданной группы G.

Определение 4. Пусть N—нормальный делитель группы G. Пусть, далее, A и B—смежные классы по N, $A=Na$, $B=Nb$. Составим произведение AB (см. A)); имеем $AB=NaNb=NNab=$ $=Nab$, т. е. произведение AB также есть смежный класс по N. Таким образом, в множестве смежных классов установлен закон перемножения, и он, как будет сейчас показано, удовлетворяет групповым аксиомам. Получаемая указанным способом группа смежных классов называется *факторгруппой* группы G по нормальному делителю N и обозначается через G/N.

Покажем, что для G/N выполнены аксиомы 1), 2) и 3) определения 1. Ассоциативность очевидна, так как она имеет место в G. Единицей группы G/N является N. Действительно, если Na есть какой-либо смежный класс, то $N(Na)=Na$. Элементом, обратным для aN, является Na^{-1}. Действительно, $(Na^{-1})(aN)=N$.

G) Во всякой группе G имеется по крайней мере два нормальных делителя, именно, подгруппа $\{e\}$, содержащая только один элемент—единицу e, и подгруппа, совпадающая с G. Если в G не имеется нормальных делителей, отличных от этих двух тривиальных, то G называется *простой* группой.

Пример 3. Пусть $s=\|s^i_j\|$—произвольная матрица. *Транспонированную* к ней матрицу $s^*=\|t^i_j\|$ определим, положив $t^i_j=s^j_i$. Легко видеть, что для любых двух матриц r и s, для которых определено произведение rs (см. пример 2), имеем: $(rs)^*=s^*r^*$. Квадратная матрица s с действительными элементами называется *ортогональной*, если $s^*s=e$. Покажем, что множество H всех ортогональных матриц порядка n есть подгруппа группы G' всех действительных квадратных матриц с детерминантами, отличными от нуля (см. пример 2).

Пусть r и s—две матрицы из H, т. е. $r^*r=e$, $s^*s=e$. Тогда $(rs)^*rs=s^*r^*rs=s^*s=e$, т. е. $rs \in H$. Далее, из $r^*r=e$ следует $r^*=r^{-1}$, и потому $rr^*=e$. Транспонируя это равенство, получаем $(rr^*)^*=$

$=e^*=e$, т. е. $r^{**}r^*=e$, а это значит, что матрица r^* ортогональна. Таким образом, матрица $r^{-1}=r^*$ ортогональна, т. е. $r^{-1}\in H$.

Легко показать, что при $n\geqslant 2$ подгруппа H не есть нормальный делитель группы G.

Пример 4. Пусть G—группа матриц, данная в примере 2. Обозначим через H множество всех матриц из G, детерминант которых равен единице. Так как при перемножении матриц детерминанты перемножаются, то H есть нормальный делитель группы G.

§ 3. Изоморфизм. Гомоморфизм

В начале настоящей главы было указано, что теория групп изучает группу лишь с точки зрения установленной в этой группе операции. Это положение отчетливо выражается следующим определением.

Определение 5. Отображение f группы G на группу G' называется *изоморфным отображением* или *изоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и сохраняет операцию умножения, т. е. $f(xy)=f(x)f(y)$ для всяких двух элементов x, y из G. Легко видеть, что если отображение f изоморфно, то обратное ему отображение также является изоморфным. Две группы G и G' называются *изоморфными*, если существует изоморфное отображение одной группы на другую.

A) Можно рассматривать изоморфные отображения группы G на себя. Такие изоморфные отображения называются *автоморфизмами* группы G. Всякий автоморфизм группы G ввиду его взаимной однозначности является преобразованием множества G (см. § 1, F)). Таким образом, два автоморфизма можно перемножать, и получающееся в качестве их произведения преобразование группы G также является автоморфизмом этой группы. Легко видеть, далее, что тождественное преобразование является автоморфизмом и что обратное преобразование к некоторому автоморфизму также есть автоморфизм. Таким образом, множество всех автоморфизмов группы G есть группа.

B) Пусть a—некоторый фиксированный элемент группы G. Определим, исходя из него, автоморфизм f_a группы G, положив

$$f_a(x)=axa^{-1} \tag{1}$$

при всяком $x\in G$. Получаемый таким образом автоморфизм называется *внутренним*. Множество всех внутренних автоморфизмов группы G есть подгруппа группы всех автоморфизмов, причем

$$f_af_b=f_{ab}. \tag{2}$$

Покажем, что соотношение (1) действительно дает автоморфизм. Прежде всего, для отображения f_a существует обратное f_a^{-1}, определяемое равенством

$$f_a^{-1} = f_{a^{-1}}. \tag{3}$$

В самом деле, $f_a(f_{a^{-1}}(x)) = a(a^{-1}xa)a^{-1} = x$. Таким образом, отображение f_a взаимно однозначно. Далее,

$$f_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f_a(x)f_a(y).$$

Для того чтобы доказать, что совокупность внутренних автоморфизмов есть подгруппа группы всех автоморфизмов, достаточно теперь доказать соотношение (2) (см. § 2, В)). Мы имеем:

$$f_a(f_b(x)) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = f_{ab}(x).$$

Более слабую связь, чем изоморфное отображение, устанавливает между двумя группами так называемое *гомоморфное* отображение.

Определение 6. Отображение g группы G в группу G^* называется *гомоморфным отображением* или *гомоморфизмом*, если оно сохраняет операцию умножения, т. е. если

$$g(xy) = g(x)g(y) \tag{4}$$

для всяких двух элементов x и y из G. Множество $g^{-1}(e^*)$ всех элементов группы G, отображающихся в единицу e^* группы G^* при гомоморфизме g, называется *ядром* гомоморфизма g.

Если g есть гомоморфизм группы G в группу G^*, то

$$g(e) = e^*, \tag{5}$$

т. е. единица e группы G переходит в единицу e^* группы G^*; сверх того

$$g(x^{-1}) = (g(x))^{-1} \tag{6}$$

при произвольном $x \in G$. Действительно, $g(e)g(x) = g(ex) = g(x)$. Таким образом, $g(e) = e^*$. Далее, $g(x^{-1})g(x) = g(x^{-1}x) = g(e) = e^*$, а это значит, что $g(x^{-1}) = (g(x))^{-1}$.

Следующая теорема дает связь между гомоморфными и изоморфными отображениями.

Теорема 1. *Пусть g—гомоморфное отображение группы G на группу G^* и N—ядро гомоморфизма g. Тогда N есть нормальный делитель группы G, и группа G^* изоморфна группе G/N* (см. определение 4). *Более полно: если x^* есть некоторый элемент группы G^* и $X = g^{-1}(x^*)$, то X есть смежный класс группы G по подгруппе N, т. е. $X \in G/N$. Получаемое таким образом взаимно однозначное соответствие между элементами групп G/N и G^* осуществляет изоморфизм этих групп. Этот изоморфизм мы будем называть* естественным *в отличие от других возможных изоморфизмов между теми же группами.*

Доказательство. Покажем, что N есть группа. Если $x \in N$, $y \in N$, то это значит, что $g(x) = e^*$, $g(y) = e^*$. Тогда $g(xy) =$

$=g(x)g(y)=e^*e^*=e^*$, т. е. $xy \in N$. Далее, если $x \in N$, то $g(x)=e^*$; но тогда (см. (6)) $g(x^{-1})=(g(x))^{-1}=e^{*-1}=e^*$, т. е. $x^{-1} \in N$. Таким образом (см. § 2, В)), N есть подгруппа группы G.

Покажем, что N есть инвариантная подгруппа группы G. Пусть $x \in N$, $a \in G$; тогда $g(a^{-1}xa)=g(a^{-1})g(x)g(a)=(g(a))^{-1}e^*g(a)=e^*$, т. е. $a^{-1}xa \in N$.

Пусть теперь a^*—некоторый элемент из G^* и $A=g^{-1}(a^*)$. Если a и a'—два элемента из A, то

$$g(a'a^{-1})=g(a')g(a^{-1})=g(a')(g(a))^{-1}=a^*a^{*-1}=e^*;$$

таким образом, $a'a^{-1} \in N$, т. е. a и a' принадлежат одному смежному классу по N. Обратно, если x принадлежит тому же смежному классу, что и a, т. е. если $xa^{-1} \in N$, то $g(x)a^{*-1}=g(x)g(a^{-1})=g(xa^{-1})=$ $=e^*$, т. е. $g(x)=a^*$. Таким образом, A есть полный смежный класс по N, и мы имеем взаимно однозначное соответствие между смежными классами по N с одной стороны, и элементами из G^*— с другой. Именно, каждому элементу a^* из G^* соответствует смежный класс $g^{-1}(a^*)$. Но каждый смежный класс является элементом группы G/N (см. определение 4); следовательно, каждому элементу $A \in G/N$ ставится в соответствие элемент $f(A)=a^* \in G^*$, причем f—взаимно однозначное отображение. Покажем, что f есть изоморфное отображение. Пусть A и B—два элемента из G/N и $a \in A$, $b \in B$. Положим $g(a)=a^*$, $g(b)=b^*$; тогда $f(A)=a^*$, $f(B)=b^*$. Далее, $ab \in AB$; следовательно,

$$f(AB)=g(ab)=a^*b^*=f(A)f(B),$$

и условия изоморфизма выполнены. Таким образом, f есть изоморфизм.

Следующее предложение стоит в тесной связи с теоремой 1:

С) Пусть G—некоторая группа и N—ее нормальный делитель. Построим отображение g группы G на группу G/N, поставив в соответствие каждому элементу $x \in G$ тот элемент $g(x)=X \in G/N$, который в качестве смежного класса содержит x, $x \in X$. Получаемое таким образом отображение группы G на группу G/N оказывается гомоморфным. Мы будем называть его *естественным* гомоморфизмом группы на ее факторгруппу в отличие от других возможных здесь гомоморфизмов.

Пусть a и b—два элемента из G. Положим $a \in A \in G/N$, $b \in B \in G/N$; тогда по определению

$$g(a)=A, \qquad (7)$$

$$g(b)=B. \qquad (8)$$

С другой стороны, $ab \in AB$ и, следовательно,

$$g(ab)=AB. \qquad (9)$$

Сопоставляя соотношения (7), (8) и (9), получаем $g(ab)=g(a)g(b)$, а это и означает, что g есть гомоморфизм.

D) Отметим, что если гомоморфизм g имеет своим ядром единицу, $N=\{e\}$, то g есть изоморфизм. Действительно, тогда в каждый элемент из G^* отображается только один элемент из G, так как каждый смежный класс содержит лишь один элемент.

E) Если гомоморфизм g отображает группу G в G^*, а не *на* G^*, то множество $H^*=g(G)$ есть подгруппа группы G^*.

Если x^* и y^* суть два элемента из H^*, то $x^*=g(x)$, $y^*=g(y)$, и тогда $x^*y^{*-1}=g(xy^{-1})$, т. е. $x^*y^{*-1}\in H^*$. Таким образом (см. § 2, B)), H^* есть подгруппа группы G^*.

F) Пусть g—некоторый гомоморфизм группы G на группу G^*. Если H—некоторая подгруппа группы G, то $g(H)$ есть подгруппа группы G^*. Если H—нормальный делитель группы G, то $g(H)$ есть нормальный делитель группы G^*.

Тот факт, что $g(H)$ есть подгруппа, следует из предложения E), ибо g дает гомоморфизм группы H в группу G^*. Разберем случай, когда H—нормальный делитель. Пусть $x^*\in G^*$; тогда существует такой элемент $x\in G$, что $g(x)=x^*$. Мы имеем $x^{-1}Hx\subset H$, откуда $x^{*-1}g(H)x^*=g(x^{-1}Hx)\subset g(H)$. Таким образом, $g(H)$ есть нормальный делитель группы G^*.

G) Пусть g—некоторый гомоморфизм группы G в группу G^*. Если H^*—подгруппа группы G^*, то $g^{-1}(H^*)$—подгруппа группы G. Если H^*—нормальный делитель группы G^*, то $g^{-1}(H^*)$—нормальный делитель группы G.

Пусть H^*—подгруппа и $a\in g^{-1}(H^*)$, $b\in g^{-1}(H^*)$. Тогда $g(ab^{-1})=$ $=g(a)(g(b))^{-1}\subset H^*$, т. е. $ab^{-1}\in g^{-1}(H^*)$. Следовательно (см. § 2, B)), $g^{-1}(H^*)$ есть подгруппа. Пусть H^*—нормальный делитель и $a\in g^{-1}(H^*)$, $x\in G$. Тогда $g(x^{-1}ax)=(g(x))^{-1}g(a)g(x)\in H^*$, т. е. $x^{-1}ax\in$ $\in g^{-1}(H^*)$. Следовательно, $g^{-1}(H^*)$ есть нормальный делитель группы G.

H) Нетрудно видеть, что если g есть гомоморфизм группы G в группу G^*, а g^*—гомоморфизм группы G^* в группу G^{**}, то отображение $h=g^*g$ является гомоморфизмом группы G в группу G^{**}.

Определим теперь группу преобразований несколько более широко, чем это было сделано в предложении F) § 1.

I) Группа G называется *группой преобразований* множества Γ, если каждому элементу $x\in G$ поставлено в соответствие преобразование x^*, $x^*=\tau(x)$, множества Γ, причем $\tau(xy)=\tau(x)\tau(y)$ (см. § 1, F)). Положим $G^*=\tau(G)$. Очевидно, что G^* есть группа преобразований множества Γ в смысле определения F) § 1, а τ—гомоморфное отображение группы G на группу G^*. Ядро гомоморфизма τ называется *ядром неэффективности* группы преобразований G. Если τ есть изоморфизм, то группа G называется *эффективной* группой преобразований; в этом случае ее можно отождествить с группой G^*, положив $x=x^*$, и считать, что каждый элемент из G есть преобразование множества Γ. Группа G преобразований множества Г называется *транзитивной*, если транзитивна группа G^*, т. е. если для каждых двух элементов ξ и η множества Г найдется такой элемент $x \in G$, что $x^*(\xi)=\eta$. Пусть G—группа преобразований множества Г и G'—группа преобразований множества Г'. Пара отображений φ, ψ называется *подобием* пары G, Г на пару G', Г', если φ есть изоморфное отображение группы G на группу G', а ψ—взаимно однозначное отображение множества Г на множество Г' и если из $x'=\varphi(x)$, $\xi'=\psi(\xi)$ следует: $x'^*(\xi')=\psi(x^*(\xi))$. Пары G, Г и G', Г' называются *подобными*, если существует подобие пары G, Г на пару G', Г'.

Перейдем теперь к рассмотрению транзитивных групп преобразований.

J) Пусть G—группа, H—ее подгруппа и G/H—множество левых смежных классов группы G по подгруппе H. Каждому элементу $x \in G$ поставим в соответствие отображение x^* множества G/H в себя, положив $x^*(\Xi)=x\Xi$; $\Xi \in G/H$. Оказывается, что определенное таким образом отображение x^* есть преобразование множества G/H и что в силу соответствия $x \rightarrow x^*$ группа G есть транзитивная группа преобразований множества G/H (см. I)). Далее, совокупность K всех элементов $x \in G$, удовлетворяющих условию $x^*(H)=$ $=H$, совпадает с H. Ядро N неэффективности группы преобразований G входит в H и содержит все нормальные делители группы G, содержащиеся в H; в этом смысле N есть максимальный нормальный делитель группы G, входящий в H.

Пусть x и y—два элемента из G, $z=xy$ и $\Xi \in G/H$. Мы имеем $z^*(\Xi)=z\Xi=xy\Xi=x^*(y^*(\Xi))$. Таким образом, $(xy)^*=x^*y^*$. Так как e^* есть тождественное отображение множества G/H на себя, то каждое отображение x^* имеет обратное ему $(x^{-1})^*$ и потому является преобразованием множества G/H. Соотношение $(xy)^*=$ $=x^*y^*$ показывает, что G есть группа преобразований множества G/H. Пусть aH и bH—два произвольных элемента из G/H. Элементу $x=ba^{-1}$, очевидно, соответствует преобразование x^*, удовлетворяющее условию $x^*(aH)=bH$. Таким образом, группа преобразований G транзитивна.

Если $x \in K$, то $x^*(H)=xH=H$ и, следовательно, $x \in H$. Если $x \in H$, то $x^*(H)=xH=H$ и, следовательно, $x \in K$. Таким образом, $K=H$. Если $x \in N$, $g \in G$, то $x^*(gH)=xgH=gH$, т. е. $g^{-1}xg \in H$, и, следовательно, $x \in gHg^{-1}$. Если, наоборот, $x \in gHg^{-1}$ при произвольном $g \in G$, то $g^{-1}xg \in H$ и $x^*(gH)=gH$, так что $x \in N$. Таким образом, N есть пересечение всех множеств вида gHg^{-1}, а это пересечение, как легко видеть, есть максимальный нормальный делитель группы G, содержащийся в H.

K) Пусть G—транзитивная группа преобразований множества Г (см. I)) и α—некоторый фиксированный элемент множества Г. Обозначим через $\psi(\xi)$ множество всех таких элементов $x \in G$, что $x^*(\alpha)=\xi$, и положим $H_\alpha=\psi(\alpha)$. Оказывается, что H_α

есть подгруппа группы G (*стабильная подгруппа* группы преобразований), $\psi(\xi)$—левый смежный класс группы G по подгруппе H_α и ψ—взаимно однозначное отображение множества Γ на множество G/H_α левых смежных классов группы G по подгруппе H_α. Пусть φ—тождественное отображение группы G на себя. Оказывается, что пара φ, ψ отображений есть подобие пары G, Γ на пару G, G/H_α (см. I), J)). Далее, если $\beta \in \Gamma$ и x—такой элемент группы G, что $x(\alpha)=\beta$, то $H_\beta = xH_\alpha x^{-1}$.

Докажем предложение K). Множество $\psi(\xi)$ не пусто, так как группа G преобразований транзитивна. Пусть x и y—два элемента множества $\psi(\xi)$. Тогда $x^*(\alpha)=y^*(\alpha)$, и мы имеем $(x^{-1}y)^*(\alpha)=\alpha$. В частном случае, когда $\xi=\alpha$, соотношение это приводит нас к выводу, что $H_\alpha^{-1}H_\alpha \subset H_\alpha$, т. е. что H_α есть подгруппа группы G. При произвольном ξ мы выводим из него, что x и y принадлежат одному и тому же левому смежному классу группы G по подгруппе H_α. Если теперь $y \in \psi(\xi)$ и x принадлежит к тому же левому смежному классу по подгруппе H_α, что и y, то $(x^{-1}y)^*(\alpha)=\alpha$, т. е. $x^*(\alpha)=y^*(\alpha)=\xi$ и, следовательно, $x \in \psi(\xi)$. Таким образом, $\psi(\xi)$ есть левый смежный класс группы G по подгруппе H_α. Очевидно, что если ξ и η суть различные элементы множества Γ, то множества $\psi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ не пересекаются и потому $\psi(\xi) \neq \psi(\eta)$. Далее, если xH_α есть произвольный левый смежный класс, то $\psi(x^*(\alpha)) = xH_\alpha$. Таким образом, ψ есть взаимно однозначное отображение множества Γ на множество G/H_α. Элементу $x \in G$ соответствуют преобразование x^* множества Γ и преобразование множества G/H_α (см. J)), которое мы также обозначаем через x^*. Применяя к элементу $\psi(x^*(\alpha))=xH \in G/H_\alpha$ преобразование y^*, получаем:

$$y^*(\psi(x^*(\alpha)))=y^*(xH)=yxH=(yx)^*(H)=\psi((yx)^*(\alpha))=\psi(y^*(x^*(\alpha))).$$

Если в этом соотношении заменить $x^*(\alpha)$ через ξ, то получим $y^*(\psi(\xi))=\psi(y^*(\xi))$, а это означает, что пара φ, ψ отображений есть подобие пары G, Γ на пару G, G/H_α (φ—тождественное отображение).

Если $x^*(\alpha)=\beta$, то все преобразования, соответствующие элементам множества $xH_\alpha x^{-1}$, оставляют β на месте, и потому $xH_\alpha x^{-1} \subset H_\beta$. Аналогично получаем, что $x^{-1}H_\beta x \subset H_\alpha$. Из этих двух соотношений следует, что $H_\beta = xH_\alpha x^{-1}$.

П р и м е р 5. Пусть Γ—евклидова плоскость, рассматриваемая как множество точек. *Движением* плоскости, как известно, называется такое преобразование, при котором сохраняется расстояние между каждыми двумя ее точками и обход против часовой стрелки переходит в обход против часовой стрелки. Очевидно, что, производя последовательно два движения, т. е. перемножая их как преобразования, мы вновь получим движение; точно так же преобразование, обратное движению, является движением. Таким образом, совокупность G всех движений плоскости является группой ее преобразований. Группа эта, очевидно, транзитивна. Фиксируя какую-либо точку α плоскости, мы получаем подгруппу H_α всех движений, оставляющих α на месте, т. е. всех вращений плоскости вокруг точки α. По доказанному (см. J), K)), подгруппа H_α не содержит нормальных делителей группы G, отличных от $\{e\}$, и потому H_α не есть нормальный делитель группы G. Из этого, в частности, следует, что группа G некоммутативна. Подгруппа N всех параллельных сдвигов плоскости является, как легко видеть, нормальным делителем группы G. Рассматриваемая сама по себе, группа N транзитивна.

Пример 6. Пусть G—аддитивная группа всех действительных чисел и G'—мультипликативная группа всех положительных действительных чисел. Покажем, что группы G и G' изоморфны. Действительно, отображение f, ставящее каждому элементу $x \in G$ в соответствие элемент $f(x) = e^x \in G'$, есть изоморфизм группы G на группу G'.

Пример 7. Пусть G—группа матриц, данная в примере 2, и G^*—мультипликативная группа всех комплексных чисел, отличных от нуля. Дадим гомоморфное отображение g группы G на G^*. Если s есть матрица из G, то положим $g(s) = |s|$, где $|s|$ обозначает детерминант матрицы s. Тогда мы имеем $g(st) = |st| = |s| \cdot |t|$. Сверх того, в G имеются матрицы с любым детерминантом, отличным от нуля. Таким образом, g есть гомоморфное отображение группы G на G^*. Так как единицей группы G^* является число 1, то ядром гомоморфизма g служит совокупность всех матриц с детерминантом, равным единице.

§ 4. Центр. Коммутант

В настоящем параграфе исследуется вопрос о зависимости произведения от порядка сомножителей.

A) Два элемента a и b группы G называются *перестановочными*, если их произведение не зависит от порядка сомножителей, $ab = ba$.

Определение 7. Элемент z группы G называется *центральным*, если он перестановочен со всяким элементом группы G, т. е. если $zx = xz$ для всякого $x \in G$, или, что то же, $x^{-1}zx = z$. Множество Z всех центральных элементов группы G называется *центром* группы G.

Покажем, что центр Z является подгруппой группы G. Действительно, если z и z'—элементы из Z, то для всякого $x \in G$ имеем $xzz' = zxz' = zz'x$, т. е. $zz' \in Z$. Умножим, далее, обе части равенства $xz = zx$ слева и справа на z^{-1}. Получим $z^{-1}x = xz^{-1}$, т. е. $z^{-1} \in Z$. Таким образом, Z есть подгруппа группы G.

B) Каждая подгруппа H группы Z является нормальным делителем группы G. Действительно, если $h \in H$, то $h \in Z$ и, следовательно, $x^{-1}hx = h \in H$ при всяком $x \in G$. В частности, сам центр является нормальным делителем. Подгруппы группы Z называются *центральными нормальными делителями.*

C) Для того чтобы выяснить вопрос, являются ли элементы a и b перестановочными, достаточно составить произведение $ab(ba)^{-1}=$ $=aba^{-1}b^{-1}$; если оно равно единице, то a и b перестановочны, если же нет, то не перестановочны. Произведение $aba^{-1}b^{-1}$ называется *коммутатором* элементов a, b.

Определение 8. Составим множество Q всех элементов группы G, представимых в форме $q_1q_2 \ldots q_m$, где каждый сомножитель q_i есть коммутатор каких-либо двух элементов группы G. Множество Q называется *коммутантом* группы G.

Покажем, что коммутант Q группы G есть нормальный делитель этой группы.

Пусть x и y — элементы из Q, $x=q_1 \ldots q_m$, $y=q'_1 \ldots q'_n$, где множители, стоящие в правых частях, суть коммутаторы. Тогда $xy=q_1 \ldots q_m q'_1 \ldots q'_n$, следовательно, $xy \in Q$. Если q есть коммутатор, то $q=aba^{-1}b^{-1}$ и $q^{-1}=bab^{-1}a^{-1}$, т. е. q^{-1}—также коммутатор. Таким образом, $x^{-1}=q_m^{-1} \ldots q_1^{-1}$ принадлежит Q. Итак, Q есть подгруппа группы G. Если $q=aba^{-1}b^{-1}$, то тогда получаем $c^{-1}qc=(c^{-1}ac)(c^{-1}bc)(c^{-1}ac)^{-1}(c^{-1}bc)^{-1}$, т. е. $c^{-1}qc$ есть коммутатор. Если $x=q_1 \ldots q_m$, то $c^{-1}xc=(c^{-1}q_1c) \ldots (c^{-1}q_mc)$, следовательно, $c^{-1}xc \in Q$ при всяком $c \in G$ и всяком $x \in Q$.

D) Факторгруппа G/Q группы G по ее коммутанту Q коммутативна; сверх того Q есть наименьший нормальный делитель группы G, факторгруппа по которому коммутативна, т. е. если группа G/N коммутативна, то $Q \subset N$.

Пусть A и B—смежные классы по Q. Составим произведение $ABA^{-1}B^{-1}$. Это произведение содержит коммутатор, именно $aba^{-1}b^{-1}$, где $a \in A$, $b \in B$. Так как, кроме того, $ABA^{-1}B^{-1}$ есть смежный класс, то $ABA^{-1}B^{-1}=Q$ (см. определение 4). Таким образом, если трактовать A и B как элементы группы G/Q, то $ABA^{-1}B^{-1}$ есть единица этой группы, т. е. A и B перестановочны в G/Q, и G/Q—коммутативная группа.

Пусть N—такой нормальный делитель группы G, что $N \not\supset Q$. Тогда подгруппа N не может содержать всех коммутаторов группы G, так как в противном случае подгруппа N содержала бы все произведения коммутаторов и, следовательно, содержала бы Q. Пусть a и b—такие два элемента из G, что $aba^{-1}b^{-1}$ не есть элемент из N. Обозначим через A и B смежные классы по подгруппе N, содержащие a и b; так как $aba^{-1}b^{-1}$ не входит в N, то $ABA^{-1}B^{-1}$, как элемент группы G/N, не есть единица, т. е. A и B не перестановочны в G/N. Таким образом, группа G/N некоммутативна.

E) Пусть N—нормальный делитель группы G и Q—коммутант группы N. Тогда Q есть нормальный делитель группы G.

Очевидно, что Q есть подгруппа группы G. Пусть q—коммутатор элементов группы N: $q=aba^{-1}b^{-1}$, где $a \in N$, $b \in N$. Тогда при всяком $c \in G$ имеем $c^{-1}qc=(c^{-1}ac)(c^{-1}bc)(c^{-1}ac)^{-1}(c^{-1}bc)^{-1}$, а так как N—нормальный делитель группы G, то $c^{-1}ac \in N$, $c^{-1}bc \in N$, т. е. $c^{-1}qc$ есть коммутатор элементов из N. Таким образом, Q—нормальный делитель группы G.

Определение 9. Пусть G—некоторая группа. Составим ряд ее подгрупп $Q_1, \ldots, Q_i, \ldots$, где Q_1 есть коммутант группы G, а Q_{i+1} есть коммутант группы Q_i. Все Q_i являются нормальными делителями группы G (см. E)). Если построенный ряд содержит подгруппу, состоящую из одной только единицы группы G, то группа G называется *разрешимой*.

Понятия центра и коммутанта играют важную роль в теории непрерывных групп.

Пример 8. Пусть G—группа матриц, данная в примере 2. Обозначим через Z множество всех матриц из G вида λe, где λ—комплексное число, а e—единичная матрица. Легко видеть, что Z является центральным нормальным делителем группы G. Можно показать, что Z есть центр группы G. Обозначим, далее, через Q нормальный делитель группы G, составленный из всех матриц с детерминантом, равным единице (см. пример 4). Так как G/Q, как нетрудно видеть,—коммутативная группа (см. пример 7), то коммутант группы G входит в группу Q (см. D)). Можно показать, что Q есть коммутант группы G.

Пример 9. Преобразование f евклидовой плоскости E называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между каждыми двумя точками плоскости E и сохраняет ее ориентацию. Из аналитической геометрии известно, что каждое движение f плоскости в декартовых координатах может быть записано в виде:

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi+a; \qquad y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi+b,$$

где $(x, y)=\xi$ есть произвольная точка плоскости, а $(x', y')=\xi'=f(\xi)$—точка, в которую переходит ξ в результате движения f. Числа φ, a, b задают движение f. Угол φ является *углом поворота*, а точка (a, b)—образом начала координат при движении f. Очевидно, что множество G всех движений плоскости составляет группу преобразований плоскости (см. § 1, F)). Далее, очевидно, что подмножество H всех движений f, оставляющих на месте начало координат, т. е. удовлетворяющих условию $a=b=0$, составляет подгруппу группы G. Множество N всех *параллельных переносов* плоскости, т. е. тех движений f, для которых $\varphi=0$, также составляет подгруппу группы G. Обе подгруппы H и N группы G коммутативны, пересечение их содержит лишь единицу группы G, но сама группа G некоммутативна. Легко проверяется, что подгруппа N является нормальным делителем группы G и что фактор-группа G/N изоморфна группе H. Из сказанного следует, что коммутант группы G содержится в N, и потому G есть некоммутативная разрешимая группа (см. определение 9).

§ 5. Прямое произведение групп

Прямое произведение играет важную роль в теории групп: оно позволяет конструировать новые группы из заданных и сводить изучение более сложных групп к изучению более простых. Здесь прямое произведение определяется сначала для двух сомножителей, а затем уже для произвольного их множества.

А) Пусть N_1 и N_2—две группы с единицами e_1 и e_2. Обозначим через G' множество всех пар вида (x_1, x_2), где $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$. В множестве G' естественно определяется операция умножения; именно, если $(x_1, x_2) \in G'$, $(y_1, y_2) \in G'$, то полагаем: $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$. Определенная таким образом в множестве G' операция умножения удовлетворяет всем групповым аксиомам. Ассоциативность умножения очевидна, так как она имеет место в каждой из групп N_1 и N_2. Единицей служит пара $e' = (e_1, e_2)$. Наконец, парой, обратной к (x_1, x_2), служит пара $(x_1, x_2)^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$. Группа G' называется *прямым произведением* групп N_1 и N_2; в обозначениях $G' = N_1 \times N_2$. Поставим теперь каждому элементу $x_1 \in N_1$ в соответствие элемент $f_1(x_1) = (x_1, e_2) \in G'$. Аналогично определим отображение f_2 группы N_2 в G', положив $f_2(x_2) = (e_1, x_2)$. Оказывается, что f_i, $i = 1, 2$, есть изоморфное отображение группы N_i в группу G', что подгруппа $N_i' = f_i(N_i)$ есть нормальный делитель группы G' и что выполнены соотношения

$$N_1' N_2' = G', \tag{1}$$

$$N_1' \cap N_2' = e'. \tag{2}$$

Докажем, что f_1 есть изоморфизм. Мы имеем:

$$f_1(x_1 y_1) = (x_1 y_1, e_2) = (x_1, e_2)(y_1, e_2) = f_1(x_1) f_1(y_1).$$

Таким образом, f_1 есть гомоморфизм. Далее, если $f_1(x_1) = e'$, то $(x_1, e_2) = (e_1, e_2)$ и, следовательно, $x_1 = e_1$. Таким образом, ядро гомоморфизма f_1 содержит лишь единицу, и потому f_1 есть изоморфизм. Точно так же доказывается, что f_2 есть изоморфизм.

Пусть теперь (x_1, e_2) есть произвольный элемент из N_1' и (c_1, c_2)—произвольный элемент из G'; тогда $(c_1, c_2)^{-1}(x_1, e_2)(c_1, c_2) = (c_1^{-1} x_1 c_1, e_2) \in N_1'$. Таким образом, N_1' есть нормальный делитель группы G'. Точно так же доказывается, что N_2' есть нормальный делитель группы G'.

Докажем теперь соотношения (1) и (2). Если (x_1, x_2) есть произвольный элемент из G', то $(x_1, x_2) = (x_1, e_2)(e_1, x_2)$, и, следовательно, соотношение (1) верно. Допустим теперь, что $(x_1, e_2) = (e_1, x_2)$; тогда $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$, и, следовательно, $(x_1, e_2) = (e_1, x_2) = e'$. Таким образом, соотношение (2) верно.

Свойства (1) и (2) нормальных делителей N_1' и N_2' группы G' дают новый подход к понятию прямого произведения.

В) Если для двух нормальных делителей N_1 и N_2 группы G с единицей e выполнены условия

$$N_1N_2=G, \tag{3}$$

$$N_1\cap N_2=e, \tag{4}$$

то говорят, что G *распадается в прямое произведение* своих подгрупп N_1 и N_2. Оказывается, что при этих условиях каждый элемент подгруппы N_1 перестановочен с каждым элементом подгруппы N_2 и что каждый элемент группы G однозначно записывается в форме x_1x_2, где $x_1\in N_1$, $x_2\in N_2$. Оказывается, далее, что отображение f группы $G'=N_1\times N_2$ (см. А)) в группу G, определяемое соотношением $f((x_1, x_2))=x_1x_2$, есть изоморфизм группы G' на группу G, причем ff_i есть тождественное отображение группы N_i на себя.

Докажем перестановочность. Пусть $x_1\in N_1$, $x_2\in N_2$. Составим коммутатор $q=x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ элементов x_1, x_2. Мы имеем тогда $q=(x_1x_2x_1^{-1})x_2^{-1}$. Так как N_2—нормальный делитель группы G, то $x_1x_2x_1^{-1}\in N_2$, и, следовательно, $q\in N_2$. Аналогично, $q=x_1(x_2x_1^{-1}x_2^{-1})$, и, так как N_1 есть нормальный делитель группы G, то $x_2x_1^{-1}x_2^{-1}\in N_1$ и $q\in N_1$. Из этого в силу (4) следует, что $q=e$, т. е. $x_1x_2=x_2x_1$.

Из (3) следует, что каждый элемент из G можно записать в форме x_1x_2, где $x_1\in N_1$, $x_2\in N_2$. Докажем единственность такой записи. Пусть имеется другая аналогичная запись: $y_1y_2=x_1x_2$. Умножая это соотношение слева на x_1^{-1} и справа на y_2^{-1}, получаем $x_1^{-1}y_1=x_2y_2^{-1}$. Так как левая часть этого соотношения принадлежит к N_1, а правая—к N_2, то в силу (4) имеем $x_1^{-1}y_1=x_2y_2^{-1}=e$, а это значит, что $x_1=y_1$, $x_2=y_2$.

Покажем теперь, что f есть изоморфное отображение группы G' на группу G. Из того, что каждый элемент из G однозначно записывается в форме x_1x_2, $x_1\in N_1$, $x_2\in N_2$, следует, что f есть взаимно однозначное отображение группы G' на группу G. Докажем его гомоморфность. Пусть $(x_1, x_2)\in G'$, $(y_1, y_2)\in G'$; тогда мы имеем в силу перестановочности элементов подгруппы N_1 с элементами подгруппы N_2:

$$f((x_1, x_2)(y_1, y_2))=f((x_1y_1, x_2y_2))=x_1y_1x_2y_2=x_1x_2y_1y_2=$$
$$=f((x_1, x_2))f((y_1, y_2)).$$

Покажем, наконец, что ff_1 есть тождественное отображение группы N_1 на себя. Пусть $x\in N_1$; тогда $f(f_1(x_1))=f((x_1, e))=x_1e=x_1$ (так как группы N_1 и N_2 имеют общую единицу e, то здесь $e_1=$ $=e_2=e$). Точно так же доказывается, что ff_2 есть тождественное отображение группы N_2 на себя.

Перейдем теперь к построению прямого произведения произвольного множества групп. Для того чтобы в этом случае ввести соотношения, заменяющие соотношения (3) и (4), рассмотрим пересечение и произведение произвольного множества подгрупп некоторой группы.

C) Пусть Ω—некоторая совокупность подмножеств группы G и $\Delta(\Omega)$—пересечение всех множеств совокупности Ω. Оказывается, что если все множества совокупности Ω являются подгруппами группы G, то $\Delta(\Omega)$ также есть подгруппа группы G, а если все множества совокупности Ω являются нормальными делителями группы G, то $\Delta(\Omega)$ также есть нормальный делитель группы G.

Действительно, пусть совокупность Ω состоит из подгрупп, и $x \in \Delta(\Omega)$, $y \in \Delta(\Omega)$. Если $H \in \Omega$, то $x \in H$, $y \in H$, и потому $xy^{-1} \in H$, а так как H есть произвольный элемент совокупности Ω, то $xy^{-1} \in \Delta(\Omega)$. Таким образом, $\Delta(\Omega)$ есть подгруппа группы G. Допустим теперь, что Ω состоит из нормальных делителей, и пусть $x \in \Delta(\Omega)$, $c \in G$. Если $N \in \Omega$, то $x \in N$ и потому $c^{-1}xc \in N$, а так как N есть произвольный элемент совокупности Ω, то $c^{-1}xc \in \Delta(\Omega)$. Таким образом, в этом случае $\Delta(\Omega)$ есть нормальный делитель группы G.

D) Пусть M—некоторое множество элементов группы G. Через Ω обозначим совокупность всех подгрупп группы G, содержащих множество M. Подгруппа $H(M)=\Delta(\Omega)$ (см. C)) представляет собой *минимальную* подгруппу группы G, содержащую множество M, т. е. всякая подгруппа H группы G, удовлетворяющая условию $M \subset H$, удовлетворяет условию $H(M) \subset H$. Оказывается, что группа $H(M)$ составлена из всех элементов вида

$$x = x_1 x_2 \ldots x_r, \tag{5}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$—произвольная конечная система элементов множества $M \cup M^{-1}$. Говорят, что подгруппа $H(M)$ *порождена* множеством M. Обозначим, далее, через Ω' совокупность всех нормальных делителей группы G, содержащих M. Нормальный делитель $N(M)=\Delta(\Omega')$ представляет собой *минимальный* нормальный делитель группы G, содержащий множество M, т. е. каждый нормальный делитель N группы G, удовлетворяющий условию $M \subset N$, удовлетворяет и условию $N(M) \subset N$. Оказывается, что нормальный делитель $N(M)$ составлен из всех элементов вида

$$x = c_1^{-1} x_1 c_1 c_2^{-1} x_2 c_2 \ldots c_r^{-1} x_r c_r, \tag{6}$$

где $c_1, \ldots, c_r$—произвольная конечная система элементов группы G, а $x_1, \ldots, x_r$—произвольная конечная система элементов множества $M \cup M^{-1}$.

Покажем, что $H(M)$ состоит из всех элементов вида (5). Так как $H(M)$ есть подгруппа группы G, содержащая множество M, то $H(M)$ содержит все элементы вида (5). С другой стороны, произведение двух элементов вида (5) есть элемент вида (5), и элемент, обратный к элементу вида (5), есть элемент вида (5). Таким образом, множество всех элементов вида (5) есть минимальная подгруппа, содержащая M, и потому оно совпадает с $H(M)$. Аналогично доказывается, что $N(M)$ состоит из всех элементов вида (6); здесь дополнительно следует отметить только, что если x есть элемент вида (6) и $c \in G$, то $c^{-1}xc$ также есть элемент вида (6); действительно,

$$c^{-1}xc=(c_1c)^{-1}x_1(c_1c)(c_2c)^{-1}x_2(c_2c)\ \ldots\ (c_rc)^{-1}x_r(c_rc).$$

E) Пусть H—подгруппа и N—нормальный делитель группы G. Оказывается, что $HN=NH$ и что HN есть подгруппа группы G; если же H также есть нормальный делитель группы G, то и HN есть нормальный делитель группы G. Из этого следует, что если $N_1, \ldots, N_r$ суть нормальные делители группы G, то произведение $N_1N_2\ldots N_r$ не зависит от порядка сомножителей и является нормальным делителем группы G. Пусть, далее, Ω—произвольная совокупность нормальных делителей группы G. Обозначим через M теоретикомножественную сумму всех множеств совокупности Ω; тогда $N(M)$ (см. D)) есть *минимальный* нормальный делитель группы G, содержащий все нормальные делители совокупности Ω. Оказывается, что $N(M)$ есть теоретикомножественная сумма всех нормальных делителей вида $N_1N_2\ldots N_r$, где $N_1 \in \Omega$, $N_2 \in \Omega$, $\ldots$, $N_r \in \Omega$. Из того, что произведение $N_1N_2\ldots N_r$ не зависит от порядка сомножителей, следует, что каждый множитель можно считать входящим в него лишь один раз. Нормальный делитель $N(M)$ естественно назвать *произведением* всех нормальных делителей, входящих в совокупность Ω. Мы будем обозначать его через $\Pi(\Omega)$. Если совокупность Ω конечна и состоит из нормальных делителей $N_1, \ldots, N_r$, то $\Pi(\Omega)=N_1N_2\ldots N_r$.

Равенство $HN=NH$ следует из того, что при произвольном $h \in H$ имеем $hN=Nh$. Покажем, что HN есть подгруппа. Действительно, мы имеем:

$$HN(HN)^{-1}=HNN^{-1}H^{-1}=HNH^{-1}=NHH^{-1}=NH=HN.$$

Если H—нормальный делитель и $c \in G$, то $c^{-1}HNc=c^{-1}Hcc^{-1}Nc=$ $=HN$, и потому HN есть нормальный делитель.

Покажем теперь, что $N(M)$ есть теоретикомножественная сумма всех нормальных делителей вида $N_1N_2\ldots N_r$. Очевидно, что $M^{-1}=M$ и что при произвольном $c \in G$ имеем $c^{-1}Mc=M$. Из этого следует, что произведение вида (6) превращается в нашем случае в произведение вида $y_1y_2\ldots y_r$, где $y_1, y_2, \ldots, y_r$—произвольная конечная система элементов из M. Для каждого y_i существует такой нормальный делитель N_i совокупности Ω, что $y_i \in N_i$; таким образом, $y_1y_2\ldots y_r \in N_1N_2\ldots N_r$, и, следовательно, нормальный делитель $N(M)$ содержится в теоретикомножественной сумме всех нормальных делителей вида $N_1N_2\ldots N_r$. Обратное включение очевидно.

Определим теперь прямое произведение произвольного множества групп.

Определение 10. Пусть Ω — произвольное множество групп. Пусть α—функция, ставящая в соответствие каждой группе $N\in\Omega$ элемент $\alpha(N)$ группы N. Обозначим через G^* множество всех функций α указанного вида и введем в множестве G^* операцию умножения. Если α и β—два элемента множества G^*, то произведение их $\gamma=\alpha\beta$ определим, положив $\gamma(N)=\alpha(N)\beta(N)$ для всякого $N\in\Omega$. Множество G^* с так определенной в нем операцией умножения представляет собою группу: ассоциативность умножения имеет место в G^* ввиду того, что она имеет место в каждой группе множества Ω; единицей в G^* служит функция e', ставящая в соответствие каждой группе $N\in\Omega$ ее единицу $e'(N)$; элемент β, обратный к элементу α, определяется соотношением $\beta(N)=(\alpha(N))^{-1}$. Так определенную группу G^* будем называть *полным прямым произведением* групп множества Ω. В G^* выделим подмножество G', состоящее из всех тех функций α, каждая из которых лишь на конечном, зависящем от нее множестве групп принимает значения, отличные от единиц этих групп. Очевидно, что G' есть подгруппа группы G^*. Группа G' называется *прямым произведением* групп множества Ω.

Полное прямое произведение G^* играет роль в теории топологических групп. Здесь будет использоваться лишь прямое произведение G'. В случае, когда множество Ω конечно, полное прямое произведение G^* совпадает с прямым произведением G'. Если Ω состоит из двух групп, то прямое произведение, определенное только что, совпадает с прямым произведением, определенным в А).

F) Пусть G'—прямое произведение групп множества Ω и пусть $x\in N\in\Omega$. Паре N, x поставим в соответствие функцию $\alpha\in G'$, определяемую условиями $\alpha_{N,x}(P)=x$ при $P=N$; $\alpha_{N,x}(P)=e'(P)$ при $P\neq N$. Положим, далее, $f_N(x)=\alpha_{N,x}$. Функция f_N, зависящая от N, ставит в соответствие каждому элементу $x\in N$ элемент $f_N(x)\in G'$. Оказывается, что f_N есть изоморфное отображение группы N на некоторый нормальный делитель N' группы G'. Легко видеть, что N' состоит из всех функций $\alpha\in G'$, удовлетворяющих условию

$$\alpha(P)=e'(P) \quad \text{при} \quad P\neq N. \tag{7}$$

Множество всех нормальных делителей N' группы G', для которых $N\in\Omega$, обозначим через Ω', а множество, остающееся от Ω' после удаления группы N', обозначим через $\Omega'_{N'}$. Положим, далее, $K'_{N'}=\Pi(\Omega'_{N'})$ (см. E)). Оказывается, что группа $K'_{N'}$ состоит из всех функций $\alpha\in G'$, удовлетворяющих условию

$$\alpha(N)=e'(N). \tag{8}$$

Множество всех нормальных делителей $K'_{N'}$, для которых $N'\in\Omega'$, обозначим через $\hat{\Omega}'$. Оказывается, что имеют место соотношения

$$\Pi(\Omega')=G', \tag{9}$$

$$\Delta(\hat{\Omega}')=e', \tag{10}$$

играющие здесь роль соотношений (1), (2). Если совокупность Ω конечна и состоит из групп $N_1, \ldots, N_r$, то в этом случае $K'_{N'_i}=N'_1N'_2\ldots N'_{i-1}N'_{i+1}\ldots N'_r$.

Тот факт, что f_N есть изоморфное отображение группы N на нормальный делитель группы G', устанавливается так же, как соответствующий факт в А). То, что $K'_{N'}$ есть нормальный делитель группы G', состоящий из всех функций $\alpha\in G'$, удовлетворяющих условию (8), и соотношение (9) следуют из определения операции Π, ее свойств, приведенных в Е), и из соотношения (7). Соотношение (10) вытекает из соотношения (8).

Предложение F) дает новый подход к понятию прямого произведения.

Определение 10′. Пусть G—группа и Ω—некоторое множество ее нормальных делителей. Если $N\in\Omega$, то положим $\Omega_N=\Omega\setminus N$, $K_N=\Pi(\Omega_N)$ и обозначим через $\hat\Omega$ множество всех нормальных делителей K_N, для которых $N\in\Omega$. Говорят, что группа G *распадается в прямое произведение* множества Ω своих подгрупп, если выполнены условия

$$\Pi(\Omega)=G, \tag{11}$$

$$\Delta(\hat\Omega)=e. \tag{12}$$

G) Пусть группа G распадается в прямое произведение множества Ω своих подгрупп (см. определение 10′). Оказывается, что каждый элемент любой группы $N\in\Omega$ перестановочен с каждым элементом любой другой группы $P\in\Omega$ $(N\neq P)$ и что каждый элемент $x\in G$, отличный от единицы e, однозначно записывается в виде произведения

$$x=x_1x_2\ldots x_r \tag{13}$$

элементов $x_1, x_2, \ldots, x_r$, отличных от единицы, причем элементы эти принадлежат к различным группам множества Ω: $x_i\in N_i$, и при $i\neq j$ имеем $N_i\neq N_j$. Порядок сомножителей $x_1, x_2, \ldots, x_r$, конечно, не определен ввиду их перестановочности. Пусть, далее, G'—прямое произведение групп множества Ω (см. определение 10) и $\alpha\in G'$. Пусть $N_1, N_2, \ldots, N_r$—совокупность всех тех групп множества Ω, на которых функция α принимает значения, отличные от единицы (единицы всех групп множества Ω совпадают здесь с единицей группы G). Положим

$$f(\alpha)=\alpha(N_1)\alpha(N_2)\ldots\alpha(N_r). \tag{14}$$

Оказывается, что f есть изоморфное отображение группы G' на группу G, а ff_N есть тождественное отображение группы N на себя (см. F)).

Докажем прежде всего перестановочность. Обозначим через $\hat\Omega_N$ множество всех групп K_P, для которых $P\neq N$, $P\in\Omega$. Так как при $P \neq N$ группа K_P содержит группу N, то

$$N \subset \Delta(\hat{\Omega}_N). \tag{15}$$

Из этого и из соотношения (12) следует:

$$N \cap K_N = e. \tag{16}$$

Далее, из самого определения группы K_N следует:

$$NK_N = G. \tag{17}$$

Таким образом, группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп N и K_N (см. В)). Из этого и вытекает доказываемая перестановочность (см. В)). Докажем теперь, что каждый элемент $x \in G$, $x \neq e$, однозначно записывается в виде произведения (13). Из (11) вытекает, что

$$x = x_1 x_2 \ldots x_r, \tag{18}$$

где $x_i \in N_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, r$, причем все группы $N_1, N_2, \ldots, N_r$ различны (см. Е)). В записи (18) множители, равные единице, можно опустить, и мы будем считать, что их нет. Допустим теперь, что наряду с разложением (13) имеется аналогичное разложение

$$x = y_1 y_2 \ldots y_s, \tag{19}$$

где $y_j \in P_j \in \Omega$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Допустим, что группа N_i не входит в совокупность $P_1, P_2, \ldots, P_s$; тогда мы имеем:

$$x_i(x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_r) = y_1 y_2 \ldots y_s, \tag{20}$$

причем $x_i \in N_i$, $x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_r \in K_{N_i}$, $y_1 y_2 \ldots y_s \in K_{N_i}$. Так как, по доказанному, группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп N_i и K_{N_i}, то из (20) следует $x_i = e$, что противоречит предположению. Таким образом, каждая группа N_i входит в совокупность $P_1, P_2, \ldots, P_s$. Точно так же доказывается, что и каждая группа P_j входит в совокупность $N_1, N_2, \ldots, N_r$. Следовательно, $r = s$, и мы можем считать, что $N_i = P_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Теперь мы имеем:

$$x_i(x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_r) = y_i(y_1 \ldots y_{i-1} y_{i+1} \ldots y_r),$$

причем $x_i \in N_i$, $x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_r \in K_{N_i}$, $y_i \in N_i$, $y_1 \ldots y_{i-1} y_{i+1} \ldots y_r \in K_{N_i}$, откуда в силу распадения группы G в прямое произведение своих подгрупп N_i и K_{N_i} следует $x_i = y_i$. Таким образом, единственность разложения доказана. Из единственности разложения следует, что f есть взаимно однозначное отображение группы G' на группу G. Изоморфность отображения f доказывается, как в B). Тот факт, что ff_N есть тождественное отображение группы N на себя, доказывается так же, как в B).

H) Пусть G'—прямое произведение групп множества Ω и пусть множество Ω есть сумма двух непересекающихся множеств Ω_1 и Ω_2. Обозначим через N'_1 множество всех функций $\alpha \in G'$, принимающих значения, равные единицам, на всех группах множества Ω_2, и, аналогично, через N'_2—множество всех функций $\alpha \in G'$, принимающих значения, равные единицам, на всех группах множества Ω_1. Непосредственно проверяется, что N'_1 и N'_2 суть нормальные делители группы G' и что $N'_1 N'_2 = G'$, а $N'_1 \cap N'_2 = e'$. Таким образом, группа G' распадается в прямое произведение двух своих подгрупп N'_1 и N'_2. Ввиду эквивалентности определений 10 и 10′, из этого непосредственно следует, что если группа G распадается в прямое произведение множества Ω своих подгрупп, причем Ω есть сумма двух непересекающихся множеств Ω_1 и Ω_2, то группа G распадается в прямое произведение двух своих подгрупп $\Pi(\Omega_1)$ и $\Pi(\Omega_2)$.

I) Пусть группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп N_1 и N_2. Тогда факторгруппа G/N_1 изоморфна группе N_2; именно, ставя в соответствие каждому элементу $x \in N_2$ смежный класс $f(x) \in G/N_1$, содержащий элемент x, мы получаем изоморфное отображение группы N_2 на группу G/N_1.

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственно.

Дадим еще один естественный подход к понятию прямого произведения.

J) Пусть G—группа и Ω—некоторое множество ее подгрупп. Допустим, что каждый элемент любой подгруппы $N \in \Omega$ перестановочен с каждым элементом любой другой подгруппы $P \in \Omega$, $N \neq P$, и что каждый элемент $x \in G$, отличный от единицы e, однозначно разлагается в произведение

$$x = x_1 x_2 \ldots x_r \tag{21}$$

отличных от единицы элементов различных групп множества Ω. Оказывается, что тогда G распадается в прямое произведение множества Ω своих подгрупп.

Из возможности разложения (21) и предположенной перестановочности вытекает, что каждая группа $N \in \Omega$ есть нормальный делитель группы G. Из возможности разложения (21) вытекает соотношение (11), а из единственности разложения (21) вытекает соотношение (12). Таким образом, G действительно распадается в прямое произведение подгрупп множества Ω.

П р и м е р 10. Пусть G—мультипликативная группа всех квадратных действительных матриц данного порядка с положительным детерминантом (см. пример 2)). Обозначим через N_1 нормальный делитель группы G, состоящий из всех матриц с детерминантом, равным единице, и через N_2—нормальный делитель, состоящий из всех матриц вида λe, где λ—положительное число, а e—единичная матрица. Легко видеть, что $N_1N_2=G$ и что $N_1 \cap N_2=e$; таким образом, группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп N_1 и N_2.

Пример 11. Пусть G—коммутативная группа, все элементы которой, за исключением, конечно, единицы, имеют своим порядком одно и то же простое число p. Оказывается, что группа G распадается в прямое произведение некоторого множества своих циклических подгрупп порядка p.

Для доказательства предположим, что элементы группы G, отличные от единицы, занумерованы в трансфинитную последовательность $x_1, x_2, \ldots$ Через N_1 обозначим циклическую подгруппу группы G с образующей x_1. Допустим, что уже построена такая трансфинитная последовательность циклических подгрупп N_1, $N_2, \ldots$ с индексами, меньшими некоторого трансфинитного индекса α, что подгруппа H_α, порожденная всеми этими подгруппами, распадается в их прямое произведение и содержит все элементы $x_1, x_2, \ldots$, индексы которых меньше некоторого трансфинитного индекса β, причем $\beta \geqslant \alpha$. Пусть теперь γ—наименьший трансфинитный индекс, для которого элемент x_γ не входит в подгруппу H_α; тогда за N_α принимают циклическую подгруппу с образующей x_γ. Когда трансфинитный процесс оборвется, мы получим искомое разложение.

Пример 12. Пусть G—группа всех рациональных чисел, отличных от нуля, с обычным законом перемножения. Занумеруем все простые числа в возрастающем порядке, обозначив их через $p_1, p_2, \ldots$, и положим $p_0=-1$. Циклическую подгруппу группы G с образующей p_i обозначим через P_i. При $i>0$ группа P_i свободна, в то время как P_0 есть группа второго порядка. Легко проверить, что группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп $P_0, P_1, P_2, \ldots$ (см. J)).

§ 6. Коммутативные группы

В настоящем параграфе излагается доказательство основной теоремы теории коммутативных групп (теоремы 2). Результат этот будет использован лишь в пятой главе и для понимания других частей книги не нужен.

Здесь будут рассматриваться только коммутативные группы и для них будут использоваться аддитивные обозначения. В частности, прямое произведение будет называться *прямой суммой*.

A) Конечная система $g_1, \ldots, g_k$ элементов группы G называется *линейно независимой*, если из соотношения

$$a_1g_1 + \ldots + a_kg_k=0, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_k$—целые числа, следует

$$a_1=0, \ldots, a_k=0.$$

Бесконечная система элементов группы G называется *линейно независимой*, если каждая ее конечная подсистема линейно независима. *Рангом* группы G называется максимальное число содержащихся в ней линейно независимых элементов. Очевидно, что линейно независимая система не может содержать элементов конечного порядка.

B) Конечная или бесконечная система M элементов группы G называется *системой образующих* этой группы, если каждый элемент $g \in G$ представим в форме

$$g=a_1g_1+\ldots+a_kg_k, \tag{2}$$

где $g_i \in M$, а a_i—целое число, $i=1, \ldots, k$. Если система $g_1, \ldots, g_k$ образующих группы G линейно независима, то представление (2) каждого элемента g, как легко видеть, единственно. Коммутативная группа, обладающая системой линейно независимых образующих, называется *свободной*.

C) Пусть G—свободная группа, допускающая конечную си-систему

$$g_1, \ldots, g_k \tag{3}$$

линейно независимых образующих. Тогда каждая подгруппа H группы G также свободна и допускает конечную систему линейно независимых образующих, причем число их не превосходит k.

Доказательство будем вести индуктивно. Для $k=0$ утверждение наше очевидно, так как G в этом случае содержит лишь нуль, и H совпадает с G. Допустим, что утверждение доказано для $k=m$, и докажем его для $k=m+1$.

Итак, пусть $k=m+1$. Обозначим через G' подгруппу группы G с образующими $g_1, \ldots, g_m$ и через H'—пересечение H с G', $H'=H \cap G'$. В силу предположения индукции подгруппа H' группы G' допускает конечную систему линейно независимых образующих

$$h_1, \ldots, h_n, \tag{4}$$

причем $n \leqslant m$. Пусть теперь

$$h=a_1g_1+\ldots+a_mg_m+a_{m+1}g_{m+1}$$

—произвольный элемент группы H. По условию линейной независимости число a_{m+1} определено здесь однозначно элементом h. Если при всяком выборе элемента h число a_{m+1} равно нулю, то $H \subset G'$, т. е. $H=H'$ и, следовательно, для H уже имеется система линейно независимых образующих (4). Допустим, что для некоторых элементов $h \in H$ число a_{m+1} отлично от нуля. Тогда существуют и такие элементы h, для которых число a_{m+1} положительно, ибо наряду с h в группу H входит и элемент $-h$. Обозначим теперь через h_{n+1} какой-нибудь определенный элемент, для которого число a_{m+1} достигает своего наименьшего положительного значения a'_{m+1},

$$h_{n+1}=a'_1g_1+\ldots+a'_mg_m+a'_{m+1}g_{m+1},$$

и покажем, что при каждом $h\in H$ число a_{m+1} делится на a'_{m+1}. Число a_{m+1} представим в форме $a_{m+1}=b_{n+1}a'_{m+1}+r$, где b_{n+1} и r — целые числа и $0\leqslant r<a'_{m+1}$. Тогда

$$h-b_{n+1}h_{n+1}=(a_1-b_{n+1}a'_1)g_1+\ldots+(a_m-b_{n+1}a'_m)g_m+rg_m$$

есть элемент группы H, для которого число a_{m+1} имеет значение r. Так как $0\leqslant r<a'_{m+1}$, а a'_{m+1} есть наименьшее возможное положительное значение числа a_{m+1}, то $r=0$. Таким образом, a_{m+1} делится на a'_{m+1}, и элемент $h-b_{n+1}h_{n+1}$ принадлежит G', а потому и H'; следовательно, мы имеем:

$$h-b_{n+1}h_{n+1}=b_1h_1+\ldots+b_nh_n$$

(см. (4)) и, значит,

$$h=b_1h_1+\ldots+b_nh_n+b_{n+1}h_{n+1}.$$

Итак, $h_1,\ldots, h_n, h_{n+1}$ есть система образующих подгруппы H. Линейная независимость этой системы непосредственно следует из линейной независимости системы (4) и определения элемента h_{n+1}.

Нижеследующее предложение D) послужит для нас основой доказательства теоремы 2.

D) Пусть $a=\|a_{ij}\|$ — целочисленная матрица, число строк которой равно p, а число столбцов равно q. Тогда существуют такие две целочисленные квадратные матрицы s и t порядков p и q с детерминантами, по модулю равными единице, что матрица $b=\|b_{ij}\|=sat$ (см. пример 2) имеет так называемый канонический вид, т. е. удовлетворяет следующим условиям: a) $b_{ij}=0$ при $i\neq j$; b) число $b_{i+1,i+1}$ является целочисленным кратным числа b_{ii}; c) числа b_{ii} неотрицательны.

Для доказательства введем так называемые *элементарные операции* над целочисленной матрицей x. Операция 1) заключается в умножении какой-либо строки матрицы x на -1; операция 2) заключается в обмене местами двух каких-либо строк матрицы x; операция 3) заключается в прибавлении к некоторой строке матрицы x целочисленного кратного другой ее строки. Аналогично определяются операции 1′), 2′) и 3′), относящиеся уже не к строкам, а к столбцам матрицы x. Легко видеть, что каждая из операций 1), 2), 3) может быть осуществлена путем умножения матрицы x слева на квадратную целочисленную матрицу, детерминант которой по модулю равен единице. Аналогично, каждая из операций 1'), 2'), 3') осуществляется путем умножения матрицы x справа на квадратную целочисленную матрицу, детерминант которой по модулю равен единице. Таким образом, для доказательства утверждения D) нам достаточно показать, что матрицу a можно привести к каноническому виду путем последовательного применения к ней элементарных операций.

Покажем, что если в матрице $x=\|x_{ij}\|$ элемент x_{11} является делителем всех элементов первой строки и первого столбца, то путем последовательного применения к x ряда элементарных операций матрицу x можно преобразовать в такую матрицу $y=\|y_{ij}\|$, что $y_{11}=x_{11}$, а все остальные элементы матрицы y, находящиеся в первом столбце и первой строке, равны нулю.

Так как x_{i1} по условию делится на x_{11}, то полагаем $x_{i1}=-rx_{11}$, где r—целое число. Прибавляя к i-й строке матрицы x первую, умноженную на r, мы получим новую матрицу, у которой на i-м месте первого столбца стоит нуль. Применяя эту операцию к каждой строке, начиная со второй, а затем аналогичную операцию к каждому столбцу, начиная со второго, мы достигнем требуемого результата.

Обозначим теперь для краткости через (x) минимум модулей отличных от нуля элементов ненулевой матрицы x и покажем, что если не всякий элемент матрицы x делится на (x), то матрицу x можно элементарными операциями преобразовать в такую матрицу y, что $(y)<(x)$.

Легко видеть, что путем перемены порядка строк и столбцов матрицы x и перемены знака у строки матрицу x можно привести к виду, удовлетворяющему условию $(x)=x_{11}$. Если теперь в первом столбце матрицы x имеется элемент x_{i1}, не делящийся на x_{11}, то положим $x_{i1}=-rx_{11}+n$, где $0<n<x_{11}$. Прибавляя к i-й строке матрицы x ее первую строку, умноженную на r, получим новую матрицу y, для которой $(y)\leqslant n<(x)$. Если все элементы первого столбца матрицы x делятся на x_{11}, но не все элементы первой строки делятся на x_{11}, то мы можем применить аналогичную операцию и получить опять матрицу y, удовлетворяющую условию $(y)<(x)$. Если же все элементы первого столбца и первой строки матрицы x делятся на x_{11}, то эту матрицу можно привести к такому виду, что в первом ее столбце и первой строке будет отличен от нуля лишь элемент x_{11}. Если теперь в полученной матрице имеется элемент x_{ij}, не делящийся на x_{11}, то прибавим к первой строке i-ю, и мы вновь получим матрицу, у которой не все элементы первой строки делятся на x_{11}, так что к этой матрице применимы прежние рассуждения.

Из только что доказанного вытекает, что с помощью элементарных операций ненулевую матрицу x можно перевести в такую матрицу z, что каждый ее элемент делится на (z). Действительно, если не каждый элемент матрицы x делится на (x), то, как мы доказали, можно элементарными операциями перевести матрицу x в матрицу y, для которой $(y)<(x)$. Так как мы имеем здесь дело лишь с целыми числами, то указанное уменьшение числа (x) можно производить только конечное число раз, и потому после конечного числа шагов наш процесс закончится приведением матрицы к желательному виду.

Итак, путем применения элементарных операций можно привести ненулевую матрицу x к такому виду, что каждый элемент ее будет делиться на (x). Далее, также при помощи элементарных операций, можно достичь того, чтобы число x_{11} равнялось (x), а все остальные элементы матрицы x, расположенные в первом столбце и первой строке, были равны нулю; при этом делимость всех элементов матрицы на (x) не нарушится. Полученный таким образом вид матрицы x назовем полуканоническим. Обозначим через x' матрицу, получаемую из матрицы x путем вычеркивания первого столбца и первой строки. Каждый элемент матрицы x' делится на x_{11}. Приводя матрицу x', если она ненулевая, к полуканоническому виду и продолжая этот процесс дальше, мы приведем матрицу x уже к каноническому виду.

Таким образом, доказательство предложения D) закончено.

E) Пусть X—группа, допускающая конечную систему линейно независимых образующих, и Y—ее подгруппа. Тогда в X можно выбрать такую систему $x'_1, \ldots, x'_q$ линейно независимых образующих, что элементы

$$d_1x'_1, \ldots, d_rx'_r, \qquad r\leqslant q,$$

составляют систему линейно независимых образующих группы Y, причем $d_i>0$, $i=1, \ldots, r$, и d_{i+1} делится на d_i, $i=1, \ldots, r-1$.

Пусть

$$x_1, \ldots, x_q \tag{5}$$

—некоторая система линейно независимых образующих группы X и

$$y_1, \ldots, y_p \tag{6}$$

—произвольная система линейно независимых образующих группы Y (см. C)). Тогда мы имеем следующие соотношения:

$$y_i=a_{i1}x_1+\ldots+a_{iq}x_q, \qquad i=1, \ldots, p, \tag{7}$$

где $\|a_{ij}\|=a$ есть целочисленная матрица. Обозначим, далее, через $s=\|s_{ki}\|$ и $t=\|t_{jl}\|$ две целочисленные квадратные матрицы порядков p и q, детерминанты которых по модулю равны единице. Пользуясь этими матрицами, введем в группах X и Y новые системы образующих

$$x'_1, \ldots, x'_q, \tag{8}$$

$$y'_1, \ldots, y'_p \tag{9}$$

при помощи соотношений

$$x_j = t_{j1}x'_1 + \ldots + t_{jq}x'_q, \qquad j=1, \ldots, q, \tag{10}$$

$$y'_k = s_{k1}y_1 + \ldots + s_{kp}y_p, \qquad k=1, \ldots, p. \tag{11}$$

Соотношения эти действительно могут служить для введения новых систем образующих в группах X и Y, так как матрицы t и s имеют детерминанты, по модулю равные единице, т. е. соотношения (10) и (11) разрешимы относительно элементов (8) и (6), причем эти последние выражаются в виде линейных форм элементов (5) и (9) с целочисленными коэффициентами. Для новых систем образующих вместо соотношений (7) получаем:

$$y'_k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{q} s_{ki}a_{ij}t_{jl}x'_l = a'_{k1}x'_1 + \ldots + a'_{kq}x'_q, \qquad k=1, \ldots, p,$$

где $\|a'_{kl}\| = a'$ есть целочисленная матрица и $a' = sat$. Подбирая матрицы s и t таким образом, чтобы матрица a' имела канонический вид (см. D)), мы тем самым приходим к нужной системе образующих $x'_1, \ldots, x'_q$ группы X.

Теорема 2. *Группа G, допускающая конечную систему образующих, разлагается в прямую сумму циклических подгрупп*

$$U_1, \ldots, U_m; \quad V_1, \ldots, V_n,$$

где U_i, $i=1, \ldots, m$, есть свободная циклическая группа, а V_j, $j=1, \ldots, n$,—циклическая группа конечного порядка $\tau_j > 1$, причем τ_{j+1} делится на τ_j, $j=1, \ldots, n-1$. Такое разложение. вообще говоря, не единственно; но, как бы оно ни выбиралось, число m и числа $\tau_1, \ldots, \tau_n$ всегда одни и те же.

Доказательство. Пусть $g_1, \ldots, g_q$—некоторая конечная система образующих группы G. Обозначим через X множество всех линейных форм вида

$$x = a_1x_1 + \ldots + a_qx_q \tag{12}$$

с целочисленными коэффициентами $a_1, \ldots, a_q$ относительно переменных $x_1, \ldots, x_q$. В X естественно определяется операция сложения, так что X становится группой, допускающей систему $x_1, \ldots, x_q$ линейно независимых образующих. Каждому элементу $x \in X$ (см. (12)) поставим в соответствие элемент $f(x) = a_1g_1 + \ldots + a_qg_q$ группы G. Отображение f, очевидно, является гомоморфизмом группы X на группу G. Ядро гомоморфизма f обозначим через Y. Выберем теперь в X систему

$$x'_1, \ldots, x'_q \tag{13}$$

линейно независимых образующих, сконструированную в предложении E). Положим $g'_i = f(x'_i)$, $i=1, \ldots, q$. Тогда $g'_1, \ldots, g'_q$ есть система образующих группы G. Образующие эти удовлетворяют следующим соотношениям:

$$d_1g_1'=0, \ \ldots, \ d_rg_r'=0$$

(см. E)). С другой стороны, пусть имеет место соотношение

$$b_1g_1'+\ldots+b_qg_q'=0.$$

Полагая

$$x'=b_1x_1'+\ldots+b_qx_q',$$

мы будем иметь $f(x')=0$, т. е. $x'\in Y$. Так как элементы $d_1x_1', \ldots, d_rx_r'$ составляют линейно независимую систему образующих группы Y, то b_i делится на d_i при $i=1, \ldots, r$ и $b_i=0$ при $i=r+1, \ldots, q$.

Пусть теперь $d_1, \ldots, d_s$—те числа системы $d_1, \ldots, d_r$, которые равны единице. Обозначим числа $d_{s+1}, \ldots, d_r$ через $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Далее, положим $g'_{s+j}=v_j$, $j=1, \ldots, n$, $g'_{r+i}=u_i$, $i=1, \ldots, q-r=m$. Подгруппу группы G с образующей u_i обозначим через U_i, а подгруппу с образующей v_j обозначим через V_j. Легко видеть, что сконструированные таким образом подгруппы осуществляют разложение группы G в прямую сумму.

Для доказательства инвариантности чисел m; $\tau_1, \ldots, \tau_n$ введем операцию, ставящую в соответствие коммутативной группе A и степени p^k простого числа p определенную группу Ap^k. Обозначим через p^kA множество всех элементов группы A вида p^kx, где $x\in A$. Очевидно, что p^kA есть подгруппа группы $p^{k-1}A$, $k\geqslant 1$. Группу Ap^k мы определим как факторгруппу $p^{k-1}A/p^kA$. Легко проверяется, что если A есть прямая сумма групп $A_1, \ldots, A_t$, то Ap^k есть прямая сумма групп $A_1p^k, \ldots, A_tp^k$. Выясним, какова группа Ap^k, когда A есть циклическая группа.

Пусть a—образующая группы A. Если A есть свободная группа, то группа $p^{k-1}A$ имеет свободную образующую $a'=p^{k-1}a$, а ее подгруппа p^kA имеет свободную образующую pa'. Из этого непосредственно видно, что Ap^k в этом случае есть циклическая группа порядка p. Если же A—конечная циклическая группа порядка α, то пусть p^l—общий наибольший делитель чисел α и p^k и $\alpha''=\frac{\alpha}{p^l}$. Образующей группы p^kA будет элемент $a''=p^ka$. Покажем, что он имеет порядок α''. В самом деле, для того чтобы элемент rp^ka равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы число rp^k делилось на α, а это будет тогда и только тогда, когда r делится на α''. Таким образом, порядок группы p^kA равен α''. Аналогичным образом вычисляется порядок α' группы $p^{k-1}A$. Легко видеть, что порядок $\frac{\alpha'}{\alpha''}$ группы Ap^k (см. § 2, D)) равен единице, когда α не делится на p^k, и простому числу p, когда α делится на p^k. В последнем случае Ap^k есть циклическая группа порядка p.

Из доказанного следует, что группа Gp^k есть прямая сумма конечного числа циклических групп порядка p; число их мы обозначим через $g(p^k)$. Так как порядок группы Gp^k равен $p^{g(p^k)}$, то число $g(p^k)$ однозначно определяется группой Gp^k и, следовательно, группой G и числом p^k. Каждое прямое слагаемое U_i группы G непременно порождает циклическое слагаемое порядка p группы Gp^k, и, следовательно, $g(p^k)=m+h(p^k)$, где $h(p^k)$ есть число прямых слагаемых порядка p, порожденных прямыми слагаемыми V_j. Прямое слагаемое V_j порождает прямое слагаемое порядка p тогда и только тогда, когда число τ_j делится на p^k. Так как число чисел $\tau_1, \ldots, \tau_n$, делящихся на p^k при достаточно большом k, равно нулю, то $\lim\limits_{k\to\infty} g(p^k)=m$. Таким образом, m есть инвариант группы G. Число $h(p^k)-h(p^{k+1})$ равно числу тех из чисел $\tau_1, \ldots, \tau_n$, которые делятся на p^k и не делятся на p^{k+1}. Таким образом, зная функцию $g(p^k)$ двух переменных p и k и принимая во внимание, что τ_{i+1} делится на τ_i, можно найти всю систему чисел $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

Итак, теорема 2 полностью доказана.

F) Пусть G—коммутативная группа. Последовательность

$$x_1, \ldots, x_k \tag{14}$$

ее линейно независимых элементов называется *максимальной*, если, каков бы ни был элемент $x \in G$, последовательность $x, x_1, \ldots, x_k$ линейно зависима. Оказывается, что если в группе G существует максимальная система линейно независимых элементов длины k, т. е. состоящая из k элементов, то всякая последовательность элементов группы G, длина которой больше k, линейно зависима. Это обстоятельство позволяет определить инвариант группы G— ее *ранг* как длину максимальной последовательности линейно независимых элементов, имеющейся в G, или как бесконечность, если в G существуют как угодно длинные последовательности линейно независимых элементов. Легко проверяется, что если G допускает конечную систему образующих, то в разложении группы G, описанном в теореме 2, число свободных слагаемых равно рангу группы.

Покажем, что если (14) есть максимальная система линейно независимых элементов, то всякая последовательность

$$y_1, \ldots, y_l \tag{15}$$

длины $l>k$ линейно зависима. Ввиду максимальности последовательности (14) мы имеем:

$$b_j y_j=\sum_{i=1}^{k} a_{ji} x_i, \qquad j=1, \ldots, l, \tag{16}$$

где a_{ji} и b_j суть целые числа, причем $b_j \neq 0$. Так как целочисленная матрица $\|a_{ji}\|$ имеет больше строк, чем столбцов, то между строками ее существует линейная зависимость с рациональными коэффициентами. Умножая все эти коэффициенты на их общий знаменатель, получаем целые коэффициенты $c_1, \ldots, c_l$, осуществляющие линейную зависимость между строками матрицы $\|a_{ji}\|$. Таким образом, умножая соотношение (16) на c_j, мы получаем:

$$\sum_{j=1}^{l} c_j b_j y_j = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} c_j a_{ji} x_i = 0,$$

что дает линейную зависимость между элементами (15), так как числа $c_1 b_1, \ldots, c_l b_l$ не все равны нулю.

Пример 13. Пусть R—множество всех рациональных чисел с обычной для них операцией сложения. Легко видеть, что R есть коммутативная группа ранга 1, все элементы которой, за исключением, конечно, нуля, имеют бесконечный порядок. Группа R не допускает конечной системы образующих, так как если бы она ее допускала, то в силу теоремы 2 она была бы свободной циклической группой, т. е. все рациональные числа выражались бы в виде ar_0, где r_0—фиксированное рациональное число—образующая группы, а a—целочисленный коэффициент.

Пусть γ—функция, ставящая в соответствие каждому простому числу p целое число или $-\infty$ и принимающая лишь конечное число положительных значений. Через R_γ обозначим подгруппу группы R, состоящую из нуля и всех рациональных чисел вида

$$r = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$—произвольная конечная система различных простых чисел, содержащая все простые числа, для которых функция γ принимает положительные значения, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$—целые числа, удовлетворяющие условию $\alpha_i \geqslant \gamma(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Легко видеть, что группами R_γ исчерпываются все подгруппы группы R. Группа R_γ в том и только в том случае является циклической, если сумма всех значений функции γ конечна. Если группа R_γ не является циклической, то каждый ее элемент r допускает безграничное деление, т. е. существуют сколь угодно большие натуральные числа n, для которых $\frac{r}{n} \in R_\gamma$. Группы R_γ и $R_{\gamma'}$ тогда и только тогда изоморфны между собой, когда функции γ и γ' отличаются друг от друга лишь для конечного числа значений аргумента и для каждого значения аргумента лишь на конечное число. Отсюда легко усмотреть, что попарно неизоморфных подгрупп группы R имеется континуум.

Пример 14. Обозначим через R^k множество всех линейных форм

$$r_1\xi_1 + \ldots + r_k\xi_k \tag{17}$$

с рациональными коэффициентами $r_1, \ldots, r_k$. Легко видеть, что при обычным образом определенной операции сложения форм множество R^k представляет собой коммутативную группу ранга k. Обозначим через R_i подгруппу группы R^k, состоящую из всех форм вида (17), для которых $r_1=0, \ldots, r_{i-1}=0, r_{i+1}=0, \ldots, r_k=0$. Легко проверить, что R^k распадается в прямую сумму своих подгрупп $R_1, \ldots, R_k$ (см. определение 10′) и что каждая группа R_i изоморфна группе рациональных чисел.

Пусть G—коммутативная группа ранга k, все элементы которой, за исключением нуля, свободны. Покажем, что группа G изоморфна некоторой подгруппе группы R^k.

Пусть $x_1, \ldots, x_k$—некоторая максимальная линейно независимая система элементов группы G. Тогда для каждого элемента $x \in G$ имеет место целочисленное соотношение

$$ax=a_1x_1+\ldots+a_kx_k, \quad a\neq 0. \tag{18}$$

Допустим, что наряду с (18) имеет место другое целочисленное соотношение

$$bx=b_1x_1+\ldots+b_kx_k, \quad b\neq 0. \tag{19}$$

Умножая соотношение (18) на b, а соотношение (19) на a и вычитая одно из другого, получаем:

$$(ba_1-ab_1)x_1+\ldots+(ba_k-ab_k)x_k=0,$$

что ввиду линейной независимости элементов $x_1, \ldots, x_k$ дает $ba_i-ab_i=0$ или $\frac{b_i}{b}=\frac{a_i}{a}$. Таким образом, рациональные числа $r_i=\frac{a_i}{a}$, $i=1, \ldots, k$, при фиксированной системе $x_1, \ldots, x_k$ определены элементом x однозначно. С другой стороны, если элемент x, которому указанным образом соответствуют рациональные числа $r_1, \ldots, r_k$, существует, то он определен ими однозначно; это следует из отсутствия в группе G элементов конечного порядка. Таким образом, числа $r_1, \ldots, r_k$ можно считать координатами элемента $x \in G$. Ставя в соответствие элементу $x \in G$ с координатами $r_1, \ldots, r_k$ элемент $\varphi(x)=r_1\xi_1+\ldots+r_k\xi_k \in R^k$, мы получаем изоморфное отображение группы G на некоторую подгруппу группы R^k.

П р и м е р 15. Теорема 2 показывает, что коммутативная группа с конечным числом образующих разлагается в прямую сумму простейших (циклических) групп. Покажем, что аналогичной теоремы для групп без конечного числа образующих быть не может; именно, мы построим группу G ранга 2, неразложимую в прямую сумму, т. е. не допускающую разложения вида $G=N_1\times N_2$, где N_1 и N_2—ненулевые группы.

Пусть R^2—аддитивная группа всех линейных форм $r\xi+s\eta$ с рациональными коэффициентами r и s. Группу G мы определим как подгруппу группы R^2, порожденную (см. § 5, D)) множеством элементов η, $\xi_0=\xi$, ξ_1, ξ_2, ... Элемент ξ_{i+1} $(i\geqslant 0)$ определим соотношением

$$\xi_{i+1}=\frac{\xi_i+\eta}{2^{k_{i+1}}} \tag{20}$$

где k_1, k_2, ...—натуральные числа, среди которых имеются сколь угодно большие. Так как каждый элемент группы R^2 всегда делится, и притом однозначно, на любое натуральное число, то соотношение (20) имеет смысл и рекуррентно определяет последовательность ξ_1, ξ_2, ... элементов группы R^2. Простые вычисления показывают, что

$$\xi_i=\frac{\xi+(1+2^{k_1}+2^{k_1+k_2}+\ldots+2^{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}})\eta}{2^{k_1+k_2+\ldots+k_i}}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{21}$$

Из соотношения (20) видно, что каждый элемент последовательности ξ_0, ξ_1, ξ_2, ... целочисленно выражается через следующий элемент той же последовательности и через элемент η. Из этого следует, что для каждого $x \in G$ существует настолько большой номер i, что x целочисленно выражается через ξ_i и η. Из этого на основании соотношения (21) заключаем, что если $s\eta \in G$, то s есть целое число. Покажем теперь, что в группе G не существует ненулевых элементов, допускающих безграничное деление; это значит, что для каждого ненулевого элемента $x \in G$ существует настолько большое натуральное число n, что при $a>n$ уравнение $ay=x$ неразрешимо в группе G, т. е. элемент $y=\frac{x}{a}\in R^2$ не принадлежит группе G. Допустим, что в G существует элемент $x\neq 0$, допускающий безграничное деление. Тогда и всякое его целочисленное кратное допускает безграничное деление, и потому можно считать, что безгранично делящийся элемент x имеет вид $a\xi+b\eta$, где a и b—целые числа. Из того, что в соотношении (21) в знаменателе появляются лишь степени двойки, легко заключить, что если безграничное деление элемента x возможно, то возможно деление на произвольно высокую степень двойки. Таким образом, в G существует элемент $u_i=\frac{x}{2^{k_1+k_2+\ldots+k_i}}$ при произвольном i. Элемент этот записывается в виде

$$u_i=\frac{a\xi+b\eta}{2^{k_1+k_2+\ldots+k_i}}.$$

Вычитая из u_i элемент $a\xi_i$, получаем в силу формулы (21):

$$u_i-a\xi_i=\frac{b-a(1+2^{k_1}+\ldots+2^{k_1+\ldots+k_{i-1}})}{2^{k_1+\ldots+k_i}}\eta=s_i\eta.$$

Заменяя сумму $1+2^{k_1}+\ldots+2^{k_1+\ldots+k_{i-1}}$ геометрической прогрессией, получаем:

$$\frac{1+2^{k_1}+\ldots+2^{k_1+\ldots+k_{i-1}}}{2^{k_1+\ldots+k_i}}<\frac{2}{2^{k_i}}.$$

На основании этой оценки получаем: $|s_i|<\frac{2(|a|+|b|)}{2^{k_i}}$. Так как a и b фиксированы, а k_i может быть произвольно велико, то из целочисленности s_i следует, что при достаточно большом k_i имеем $s_i=0$, т. е.

$$b-a(1+2^{k_1}+\ \ldots\ +2^{k_1+\ldots+k_{i-1}})=0,$$

что явно невозможно, так как k_i может быть произвольно велико. Таким образом, G не имеет безгранично делящихся элементов, за исключением, конечно, нуля.

Допустим теперь, что G разлагается в прямую сумму двух ненулевых подгрупп N_1 и N_2. Ранг каждой из них равен единице, так как при образовании прямой суммы ранги суммируются и так как R^2 не содержит отличных от нуля элементов конечного порядка. Ни одна из групп N_1, N_2 не имеет безгранично делящихся элементов, а для группы ранга 1 это значит, что она является свободной циклической (см. примеры 13 и 14). Таким образом, мы пришли к выводу, что G есть прямая сумма двух свободных циклических групп; неверность этого вывода очевидна

§ 7. Кольца и тела

Наряду с группами в математике важную роль играют *кольца* и *тела*—алгебраические образования, в которых определены две операции, сложение и умножение. В настоящем параграфе определяются эти понятия и устанавливаются их простейшие свойства. В заключение параграфа дается описание проективной геометрии над произвольным телом. Результаты этого параграфа будут использоваться только в §§ 25—27.

Определение 11. Коммутативная группа R, взятая в аддитивной записи, называется *кольцом*, если наряду с операцией *сложения* в множестве R определена операция *умножения*, ставящая в соответствие каждой паре элементов x, y из R их *произведение* $xy\in R$, так что при этом выполнены следующие условия:

1) *Ассоциативность*: если x, y, z суть три элемента из R, то $(xy)z=x(yz)$.

2) *Дистрибутивность*: если x, y, z суть три элемента из R, то $(x+y)z=xz+yz$, $z(x+y)=zx+zy$.

Нуль аддитивной группы R называется *нулем* кольца R. Кольцо R называется *телом*, если выполнено следующее условие:

3) Элементы кольца R, отличные от нуля, составляют группу в силу той операции умножения, которая определена в кольце R. Единица этой группы называется *единицей* тела.

Умножение в кольце, вообще говоря, некоммутативно; если оно коммутативно, то кольцо называется *коммутативным*. Коммутативное тело называется *полем*.

Пусть R—кольцо и $x \in R$; тогда $0x=x0=0$. Действительно, $0x=(0+0)x=0x+0x$, и, следовательно, $0x=0$. Так же доказывается, что $x0=0$. Далее, пусть $y \in R$; тогда $(-x)y=x(-y)=-xy$. Действительно, $(-x)y+xy=(-x+x)y=0y=0$, и потому $(-x)y=-xy$. Так же доказывается, что $x(-y)=-xy$.

A) Отображение g кольца R в кольцо R' называется *гомоморфным*, если оно сохраняет операции сложения и умножения, т. е. если при произвольных x и y из R имеем $g(x+y)=g(x)+g(y)$ и $g(xy)=g(x)g(y)$. Множество всех элементов кольца R, переходящих в нуль кольца R' при гомоморфизме g, называется *ядром* гомоморфизма g. Ядро I гомоморфизма g, будучи ядром гомоморфного отображения аддитивной группы R в аддитивную группу R', является подгруппой аддитивной группы R и, сверх того, удовлетворяет условиям

$$RI \subset I, \tag{1}$$

$$IR \subset I. \tag{2}$$

Действительно, пусть $x \in R$, $y \in I$; тогда $g(xy)=g(x)g(y)=g(x)0=0$, т. е. $xy \in I$. Так же доказывается включение $yx \in I$.

B) Подмножество I кольца R называется его *левым* или соответственно *правым идеалом*, если I есть подгруппа аддитивной группы R и если выполнено условие (1) или соответственно (2). Множество I, являющееся одновременно левым и правым идеалом, называется *двусторонним идеалом* или просто *идеалом*. Легко видеть, что тело R не имеет ни левых, ни правых идеалов, за исключением тривиальных: $\{0\}$ и R. Разбивая аддитивную группу кольца R на смежные классы по его идеалу I, мы получаем аддитивную группу R/I, в которой естественным образом определяется умножение, так что R/I становится кольцом, которое называется *факторкольцом* или *кольцом вычетов* кольца R по идеалу I. Именно, если X и Y суть два элемента из R/I и $x \in X$, $y \in Y$, то произведение xy принадлежит к одному и тому же смежному классу Z независимо от выбора элементов x и y из смежных классов X и Y. Элемент Z и считается по определению произведением элементов X, Y в R/I. Без труда доказывается, что в силу этого закона перемножения R/I становится кольцом. Ставя в соответствие каждому элементу $x \in R$ содержащий его элемент $g(x) \in R/I$, мы получим *естественное гомоморфное отображение* g кольца R на кольцо R/I с ядром I.

C) Гомоморфное отображение одного кольца на другое называется *изоморфным*, если оно взаимно однозначно. Легко видеть, что отображение, обратное к изоморфному, также является изоморфным. Два кольца называются *изоморфными*, если существует изоморфное отображение одного из них на другое.

D) Пусть I—ядро гомоморфного отображения кольца R на кольцо R^*. Легко доказывается, что естественное изоморфное отображение f аддитивной группы R/I на аддитивную группу R^* (см. теорему 1) является одновременно изоморфным отображением кольца R/I на кольцо R^*.

В предложениях E), F), G), H) приводятся некоторые элементарные сведения из теории алгебраических полей.

E) Отличный от нуля элемент a некоторого кольца называется *делителем нуля* этого кольца, если в кольце существует такой отличный от нуля элемент b, что $ab=0$ или $ba=0$. Очевидно, что в теле нет делителей нуля. Пусть R—коммутативное кольцо без делителей нуля. Оказывается, что кольцо R можно включить в поле R^*, которое не имеет истинных подполей, содержащих кольцо R. Оказывается, далее, что если f есть изоморфное отображение кольца R в некоторое тело K и R' есть минимальное подтело тела K, содержащее кольцо $f(R)$, то изоморфизм f единственным образом распространяется в изоморфизм поля R^* на тело R'. В этом смысле поле R^* однозначно определено кольцом R; оно называется *полем частных* кольца R. Полем частных кольца целых чисел является поле рациональных чисел.

Для построения поля R^* рассмотрим множество M всех пар $\frac{a}{b}$, где a и $b\neq 0$ суть элементы кольца R. Две пары $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ множества M будем считать эквивалентными, $\frac{a_1}{b_1}\sim\frac{a_2}{b_2}$, если имеет место равенство $a_1b_2=a_2b_1$. Очевидно, что так введенное соотношение эквивалентности рефлексивно и симметрично; оказывается. что оно и транзитивно. Пусть, в самом деле. $\frac{a_1}{b_1}\sim\frac{a_2}{b_2}\sim\frac{a_3}{b_3}$; тогда

$$a_1b_2=b_1a_2, \quad a_2b_3=b_2a_3.$$

Умножая первое из этих равенств на b_3, а второе—на b_1, получаем $a_1b_2b_3=b_2a_3b_1$; ввиду отсутствия делителей нуля последнее равенство можно сократить на b_2, и мы получаем $a_1b_3=a_3b_1$, т. е. $\frac{a_1}{b_1}\sim\frac{a_3}{b_3}$. В силу введенного соотношения эквивалентности множество M распадается на классы попарно эквивалентных элементов. Множество этих классов мы обозначим через R^*. Класс, содержащий пару $\frac{a}{b}$, будем обозначать через $\left\{\frac{a}{b}\right\}$. Оказывается, что в множестве R^* естественным образом вводятся операции сложения и умножения, так что множество R^* превращается в поле. Сумму и произведение в R^* определим, положив

$$\left\{\frac{a_1}{b_1}\right\}+\left\{\frac{a_2}{b_2}\right\}=\left\{\frac{a_1b_2+b_1a_2}{b_1b_2}\right\}, \quad \left\{\frac{a_1}{b_1}\right\}\cdot\left\{\frac{a_2}{b_2}\right\}=\left\{\frac{a_1a_2}{b_1b_2}\right\}.$$

Непосредственно проверяется, что так определенные сложение и умножение не зависят от случайности выбора пар $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ из классов $\left\{\frac{a_1}{b_1}\right\}$ и $\left\{\frac{a_2}{b_2}\right\}$. Нулем служит класс $\left\{\frac{0}{b}\right\}$, единицей — класс $\left\{\frac{b}{b}\right\}$, обратным к классу $\left\{\frac{a}{b}\right\}\neq 0$ служит класс $\left\{\frac{b}{a}\right\}$. Таким образом, R^* есть поле. Наконец, ставя в соответствие каждому элементу $a\in R$ элемент $\left\{\frac{ac}{c}\right\}$ поля R^*, мы получаем естественное изоморфное вложение кольца R в поле R^*. Пусть теперь a и b — два произвольных элемента кольца R, из которых второй отличен от нуля. Любое подполе поля R^*, содержащее кольцо R, должно содержать элемент $\left\{\frac{ac}{c}\right\}\cdot\left\{\frac{bc}{c}\right\}^{-1}=$ $=\left\{\frac{ac}{c}\right\}\left\{\frac{c}{bc}\right\}=\left\{\frac{a}{b}\right\}$. Таким образом, поле R^* есть минимальное поле, содержащее кольцо R.

Пусть теперь f—изоморфное отображение кольца R в тело K и R'—минимальное подтело тела K, содержащее кольцо $f(R)$. Отображение g поля R^* в тело K определим, положив $g\left\{\frac{a}{b}\right\}=$ $=f(a)(f(b))^{-1}$. Непосредственно проверяется, что так определенное отображение g поля R^* в тело K является изоморфным отображением поля R^* на тело R' и что построенное продолжение g отображения f является единственным изоморфизмом поля R^* в тело K, совпадающим с f на R.

Таким образом, предложение E) доказано.

F) Пусть K—произвольное алгебраическое тело и e—его единица. Элемент e, рассматриваемый как элемент аддитивной группы K, имеет некоторый порядок, который мы обозначим через r (см. § 1, E)). Число r называется *характеристикой* тела K. Легко видеть, что каждый элемент $a\neq 0$ аддитивной группы K также имеет порядок r. Оказывается, что характеристика r равна либо нулю, либо простому числу. В первом случае, ставя в соответствие каждому целому числу m элемент $f(m)=me$ тела K, мы получаем изоморфное отображение кольца Z целых чисел на подкольцо $f(Z)$ тела K. Таким образом, в случае, характеристики нуль тело K содержит поле P^0 частных кольца $f(Z)$, состоящее из всех элементов вида $(me)(ne)^{-1}$; поле P^0 изоморфно полю рациональных чисел. Каждый элемент поля P^0 будем записывать в виде

$\frac{m}{n}e=(me)(ne)^{-1}$. В случае простой характеристики $r=p$ совокупность всех кратных единицы e исчерпывается множеством $P^p=\{0, e, 2e, \ldots, (p-1)e\}$, которое изоморфно полю вычетов по модулю p. Подполе P^r, $r=0$, p, является *минимальным* подполем тела K и называется его *простым подполем*.

Для доказательства предложения F) поставим в соответствие каждому целому числу m элемент $f(m)=me$ тела K. Отображение f есть, очевидно, гомоморфизм кольца Z целых чисел в тело K. Пусть I—ядро гомоморфизма f. Очевидно, что идеал I состоит из всех целочисленных кратных числа r. Если $r=0$, то f есть изоморфизм. Случай $r=1$ невозможен, так как $e\neq 0$. Пусть $r>1$. Покажем, что тогда r есть простое число. Допустим противоположное, т. е. что $r=mn$, где m и n суть натуральные числа, отличные от единицы. Тогда мы имеем: $me\neq 0$; $ne\neq 0$; $me\cdot ne=re=0$, что невозможно, так как тело не имеет делителей нуля. Если образующая r идеала I есть простое число p, то кольцо вычетов $Z/I=P^p$ является полем. Итак, предложение F) доказано.

G) Пусть P—произвольное поле. Назовем *многочленом* над P выражение $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ суть элементы поля P, а x—буква или, как мы будем говорить, *неопределенное переменное*. Совокупность $P[x]$ всех многочленов над полем P естественным образом составляет кольцо. Законы сложения и умножения многочленов определяются обычным образом. *Кольцо $P[x]$ многочленов* над полем P относительно неопределенного переменного x коммутативно и не имеет делителей нуля. Таким образом, это кольцо можно включить в поле $P(x)$ частных кольца $P[x]$ (см. E)), называемое *полем рациональных функций* над полем P относительно неопределенного переменного x. Кольцо $P[x]$ и поле $P(x)$ однозначно определяются исходным полем P.

H) Пусть K—произвольное тело. Его *центром* называется совокупность всех его элементов, перестановочных с каждым элементом тела K. Легко видеть, что центр тела K является его подполем. Каждое подполе центра называется *центральным подполем* тела K. Легко видеть, что простое подполе P^r (см. F)) каждого тела является центральным. Пусть P—некоторое центральное подполе тела K и t—некоторый элемент тела K. Если многочлен $\varphi(x)$ над полем P (см. G)) при подстановке в него вместо буквы x элемента t обращается в нуль лишь при условии $\varphi(x)=0$, то элемент t называется *трансцендентным* относительно поля P. Пусть t—трансцендентный элемент из K относительно поля P. Ставя в соответствие каждому элементу $\varphi=\varphi(x)\in P[x]$ элемент $f(\varphi)=\varphi(t)$, мы получаем изоморфное отображение кольца многочленов $P[x]$ на кольцо $P[t]\subset K$. Переходя от кольца $P[x]$ к полю частных, мы получаем изоморфное отображение поля $P(x)$ на поле $P(t)\subset K$ рациональных функций элемента t над полем P.

Дальнейшая часть этого параграфа посвящена построению некоторых геометрических понятий, именно, *векторного пространства* и *проективной геометрии* над произвольным телом.

I) Пусть K—некоторое тело и R—коммутативная группа, взятая в аддитивной записи, для элементов которой определено умножение на элементы тела K, именно, если $a \in K$, $x \in R$, то определен элемент ax группы R. Коммутативная группа R называется *векторным пространством* над телом K, если для умножения ее элементов на элементы тела K выполнены следующие условия: пусть e—единица тела K, a и b—произвольные его элементы, а x и y—произвольные элементы из R; тогда

$$ex=x, \quad (a+b)x=ax+bx,$$
$$a(bx)=(ab)x, \quad a(x+y)=ax+ay.$$

Элементы векторного пространства называются *векторами*. Система $u_1, \ldots, u_n$ векторов пространства R над телом K называется *линейно независимой*, если из соотношения

$$a_1u_1+ \ldots +a_nu_n=0; \quad a_i \in K, \quad i=1, \ldots, n,$$

следует $a_1= \ldots =a_n=0$. Если в пространстве R существует система из n линейно независимых векторов, а всякая система из $n+1$ векторов уже линейно зависима, то векторное пространство $R=R^n$ называется *конечномерным*, а число n называется его *размерностью*. В дальнейшем будут рассматриваться лишь конечномерные векторные пространства, так что условие конечномерности оговариваться не будет. Линейно независимая система $u_1, \ldots, u_n$ векторов n-мерного векторного пространства R^n называется его *базисом*. При заданном базисе $u_1, \ldots, u_n$ каждый вектор $x \in R$ однозначно записывается в виде

$$x=x_1u_1+ \ldots +x_nu_n; \quad x_i \in K, \quad i=1, \ldots, n.$$

Элементы $x_1, \ldots, x_n$ тела K называются *координатами* вектора x в базисе $u_1, \ldots, u_n$. Если $x=\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $y=\{y_1, \ldots, y_n\}$ суть два вектора из R, заданные своими координатами относительно базиса $u_1, \ldots, u_n$, то вектор $z=ax+by$, где $a \in K$, $b \in K$, имеет координатную запись:

$$z=\{ax_1+by_1, \ldots, ax_n+by_n\}. \tag{3}$$

Таким образом, векторное пространство R размерности n можно определить как совокупность всех последовательностей $\{x_1, \ldots, x_n\}$ элементов из K, в которой естественным образом определены операции сложения и умножения на элементы тела K (см. (3)). Отсюда следует, что при произвольном n существует n-мерное векторное пространство R размерности n над заданным телом K, и притом с точностью до изоморфизма только одно.

J) Пусть R—векторное пространство над телом K. Подгруппа S аддитивной группы R называется *векторным* (*линейным*) *подпространством* или просто *подпространством* пространства R, если $ax \in S$ при $a \in K$, $x \in S$. Каждое векторное подпространство S пространства R само является векторным пространством над телом K и потому имеет определенную размерность.

K) Пусть R^{n+1}—векторное пространство размерности $n+1$ над некоторым телом K. Множество всех $(k+1)$-мерных подпространств пространства R^{n+1} обозначим через G_k. Система P^n множеств $G_0, G_1, \ldots, G_n$ называется *n-мерной проективной геометрией* над телом K. Элементы множества G_0 называются *точками* в геометрии P^n, элементы множества G_1—*прямыми*, элементы множества G_2—*плоскостями*, наконец, элементы множества G_k называются *k-мерными плоскостями* в геометрии P^n. Если линейные подпространства $a \in G_k$ и $b \in G_l$, $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$, векторного пространства R^{n+1} связаны соотношением $a \subset b$, то говорят, что плоскость a *содержится* в плоскости b или что плоскость b *проходит* через плоскость a, и пишут $a \prec b$. Соотношение $\prec$ является основным для проективной геометрии. Две проективные геометрии $P^n = \{G_0, G_1, \ldots, G_n\}$ и $\overline{P^n} = \{\overline{G}_0, \overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_n\}$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества $Q = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_n$ на множество $\overline{Q} = \overline{G}_0 \cup \overline{G}_1 \cup \ldots \cup \overline{G}_n$, сохраняющее размерность и соотношение $\prec$, т. е. удовлетворяющее условиям

$$f(G_k) = \overline{G}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n; \tag{4}$$

$$\text{при } a \prec b, \quad a \in Q, \quad b \in Q \quad \text{имеем} \quad f(a) \prec f(b), \tag{5}$$

$$\text{при } \overline{a} \prec \overline{b}, \quad \overline{a} \in \overline{Q}, \quad \overline{b} \in \overline{Q} \quad \text{имеем} \quad f^{-1}(\overline{a}) \prec f^{-1}(\overline{b}). \tag{6}$$

Очевидно, что n-мерная проективная геометрия над телом K однозначно, с точностью до изоморфизма, определена телом K.

L) Соотношение $\prec$ в проективной геометрии $P^n = \{G_0, G_1, \ldots, G_n\}$ над телом K удовлетворяет нижеследующим условиям I—VII, которые называются *аксиомами соединения* проективной геометрии. Для формулировки этих аксиом введем понятие *линейной зависимости*. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_q$—система точек. Эта система называется *линейно зависимой*, если все ее точки принадлежат некоторой плоскости $a \in G_{q'}$, $q' < q$. Если это условие не выполняется, то система точек называется *линейно независимой*.

I. Если $a \prec b$, $b \prec c$, то $a \prec c$.

II. Каждая прямая содержит по крайней мере три различные точки.

III. Через каждые $q+1$ линейно независимых точек проходит одна и только одна q-мерная плоскость, $q = 1, 2, \ldots, n$.

IV. Любая q-мерная плоскость содержит $q+1$ линейно независимых точек, $q = 1, \ldots, n$.

V. Пусть b—плоскость некоторой размерности, содержащая систему $a_0, \ldots, a_q$ линейно независимых точек, и a—q-мерная плоскость, проходящая через точки $a_0, \ldots, a_q$. Тогда $a \prec b$.

VI. Если $a_0, \ldots, a_p$—линейно независимые точки p-мерной плоскости a, а $b_0, \ldots, b_q$—линейно независимые точки q-мерной плоскости b, причем система точек $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q$ линейно зависима, то плоскости a и b имеют по крайней мере одну общую точку.

VII. Существует единственная n-мерная плоскость, т. е. множество G_n состоит из одного элемента.

Условия I—VII легко проверяются. Покажем, как проверить справедливость условия II; проверку остальных предоставляем читателю. Пусть l—произвольная прямая, т. е. двумерное векторное подпространство пространства R^{n+1}, a и b—базис этого подпространства. Одномерные векторные подпространства, содержащие векторы a, b и $a+b$, очевидно, различны и являются точками, принадлежащими прямой l. Заметим, что если K есть поле вычетов по модулю 2, то прямая l других точек, кроме указанных трех, не содержит.

Пример 16. Дадим синтетическое построение проективной геометрии.

Система P^n некоторых множеств $G_0, G_1, \ldots, G_n$ называется *n-мерной проективной геометрией*, если определено соотношение $\prec$, именно, для всяких двух элементов $a \in G_k$, $b \in G_l$, где $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$, имеет место или соотношение $a \prec b$, или его отрицание $a \not\prec b$, причем выполнены условия I—VII предложения L). Элементы множества G_0 называются *точками*, элементы множества G_1—*прямыми*, элементы множества G_2—*плоскостями* и т. д. *Изоморфизм* двух проективных геометрий определяется так же, как в предложении K).

В проективной геометрии размерности $\geqslant 3$ из аксиом соединения можно вывести теорему Дезарга, играющую важную роль. Для формулировки теоремы Дезарга введем следующую терминологию. *Треугольником* называются три линейно независимые точки геометрии P^n. Говорят, что две последовательности точек $a_1, \ldots, a_r$ и $b_1, \ldots, b_r$ находятся *в перспективе*, если существует центр s перспективы, именно, такая точка, что три точки a_i, b_i, s линейно зависимы при произвольном $i=1, \ldots, r$.

Теорема Дезарга (прямая и обратная). *Пусть a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3—два треугольника проективной геометрии P^n, $n \geqslant 3$. Если треугольники a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 перспективны, то существуют такие три точки c_1, c_2, c_3, что все нижеследующие тройки точек* (7) *линейно зависимы*:

$$\left.\begin{array}{c} a_1,\ a_2,\ c_3;\quad b_1,\ b_2,\ c_3;\quad a_1,\ a_3,\ c_2;\quad b_1,\ b_3,\ c_2; \\ a_2,\ a_3,\ c_1;\quad b_2,\ b_3,\ c_1;\quad c_1,\ c_2,\ c_3. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Если, наоборот, существуют три точки c_1, c_2, c_3, *для которых все тройки* (7) *линейно зависимы, то треугольники* a_1, a_2, a_3 *и* b_1, b_2, b_3 *перспективны.*

Легко проверить, что в случае выполнения условий теоремы Дезарга (прямой или обратной) все точки a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, s лежат в одной трехмерной плоскости. Если они при этом не лежат в одной плоскости (двумерной), то доказательство теоремы Дезарга проводится очень просто. Если же треугольники a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 лежат в одной плоскости $f \in G_2$, то для доказательства теоремы требуется провести дополнительную конструкцию треугольника b'_1, b'_2, b'_3, не лежащего в плоскости f и перспективного с каждым из треугольников a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Без этого теорема Дезарга доказана быть не может. Для двумерной проективной геометрии она, вообще говоря, не верна, именно, существуют двумерные *недезарговы геометрии.*

Основным вопросом проективной геометрии является вопрос о том, каждая ли аксиоматически определенная проективная геометрия изоморфна проективной геометрии над некоторым телом. Вопрос этот для проективных геометрий размерности $n \geqslant 3$ решается положительно. В его решении важную роль играет теорема Дезарга. Наметим здесь путь положительного решения этого вопроса.

Пусть l—некоторая прямая проективной геометрии P^n, $n \geqslant 3$, и 0, e, u—три различные ее точки. Пусть, далее, K—множество всех отличных от u точек геометрии P^n, лежащих на прямой l. Оказывается, что, пользуясь проективными конструкциями, можно, и притом единственным образом, определить в множестве K операции сложения и умножения, так что множество K становится алгебраическим телом с нулем 0 и единицей e, причем n-мерная геометрия над телом K изоморфна исходной геометрии P^n.

Сложение в множестве K определим следующим образом (рис. 1). Пусть a и b—две точки прямой l, отличные от u. Пусть m—двумерная плоскость, содержащая прямую l, а l_a, l_b, l'_u—отличные от l и не пересекающиеся в одной точке прямые этой плоскости, проходящие соответственно через точки a, b, u. Точки пересечения прямой l'_u с прямыми l_a и l_b обозначим соответственно через a' и b'. Точку пересечения прямых $(0, b')$ и l_a обозначим через a'', а точку пересечения прямых (a'', u) и l_b—через b''. Наконец, точку пересечения прямой (a', b'') с прямой l обозначим через d и положим: $a+b=d$. Для доказательства корректности этого определения следует установить, что точка d однозначно определяется точками a, b, 0, u, т. е. не зависит от выбора прямых l_a, l_b, l'_u. Пусть $\bar{l}_a$, $\bar{l}_b$, $\bar{l}'_u$—три другие прямые (см. пунктирные линии на рис. 1), аналогичные прямым l_a, l_b, l'_u и лежащие в некоторой плоскости $\bar{m}$. Через $\bar{a}'$, $\bar{a}''$, $\bar{b}'$, $\bar{b}''$ обозначим точки, аналогичные точкам a', a'', b', b''. Тогда треугольники a', b', a'' и $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{a}''$ в силу обратной теоремы Дезарга перспективны, так же как и треугольники b', b'', a'' и $\bar{b}'$, $\bar{b}''$, $\bar{a}''$. Таким образом, последовательности точек a', b', a'', b'' и $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{a}''$, $\bar{b}''$ перспективны, так что, в частности, перспективны треугольники a', a'', b'' и $\bar{a}'$, $\bar{a}''$, $\bar{b}''$.

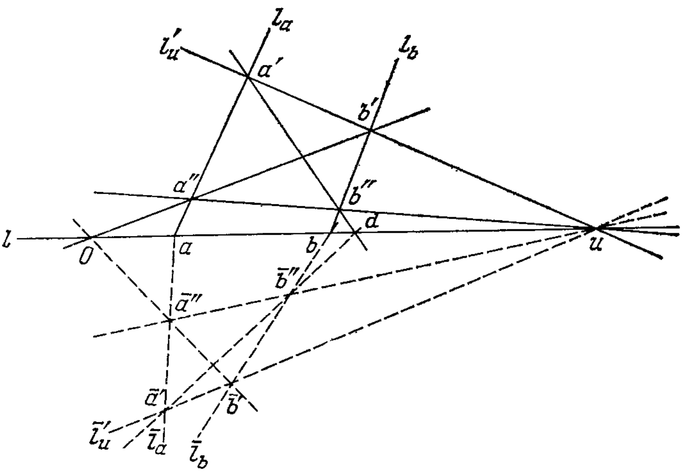


Рис. 1.

Отсюда в силу прямой теоремы Дезарга следует, что прямые (a', b'') и $(\bar{a}', \bar{b}'')$ пересекаются на прямой $(a, u)=l$. Таким образом, точка d определена однозначно.

Коммутативность введенной операции сложения следует из того, что прямые $l'_u=(a', b')$ и $l''_u=(a'', b'')$ можно поменять ролями; при этом точки a и b поменяются ролями, а точка d не изменится. Очевидно, что $a+0=a$. Далее, производя построение рис. 1 в ином порядке, мы сможем по точкам 0, a, d, u найти точку b, так что уравнение $a+b=d$ разрешимо относительно b.

Для доказательства ассоциативности сложения дополним рис. 1 произвольной точкой $c\neq u$ (рис. 2). Точку пересечения прямых $(0, b'')$ и l'_u обозначим через c' и прямую (c, c') обозначим через l_c. Через c'' обозначим точку пересечения прямой l_c с l''_u. Тогда, приняв за l_{a+b} прямую (a', b''), мы найдем, что $(a+b)+c$ есть точка пересечения прямой l с прямой (a', c''). Далее, точка $b+c$ лежит на прямой (b', c''), которую мы и примем за l_{b+c}. Наконец, так как прямые l_a и l_{b+c} уже определены, то точка $a+(b+c)$ лежит на прямой (a', c''), т. е. совпадает с $(a+b)+c$.

Итак, K есть аддитивная группа.

Умножение в множестве K определим следующим образом (рис. 3). Пусть a и b—две точки прямой l, отличные от u. Пусть

m—двумерная плоскость, содержащая прямую l, а l_a, l_b и l''_u—отличные от u и не пересекающиеся в одной точке прямые этой плоскости, проходящие соответственно через точки a, b, u. Точки пересечения прямой l'_u с прямыми l_a и l_b обозначим соответственно через a' и b'. Точку пересечения прямых (e, b') и l_a обозначим

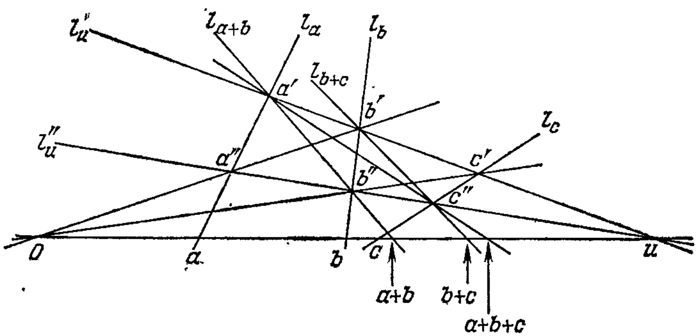


Рис. 2.

через a'', а точку пересечения прямых $(0, a'')$ и l_b—через b''. Наконец, точку пересечения прямых (a', b'') и l примем за произведение ab. Корректность этого определения доказывается дословно так же, как для сложения. Равенство $ea=a$ и существование

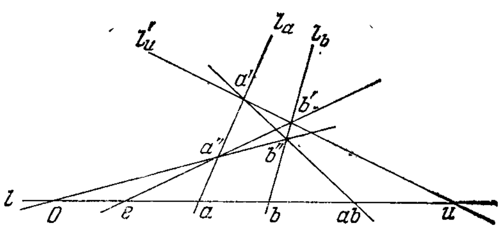


Рис. 3.

обратного элемента проверяются непосредственно. Ассоциативность умножения и дистрибутивность проверяются при помощи построений, аналогичных предыдущим.

Таким образом, K есть тело, которое, вообще говоря, некоммутативно. В проективной геометрии доказывается, что n-мерная проективная геометрия над телом K изоморфна исходной.

Для того чтобы тело K было коммутативным, необходимо и достаточно, чтобы в проективной геометрии над телом K имела место теорема Паскаля для шестиугольника, вписанного в распадающуюся (т. е. состоящую из двух пересекающихся прямых) кривую второго порядка.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Подобно тому как теория групп исследует алгебраическую операцию умножения в ее наиболее чистом виде, так абстрактная топология ставит своей целью изучение операции предельного перехода, отвлекаясь при этом от всех посторонних свойств рассматриваемых элементов.

Если задано какое-либо множество M действительных чисел, то о каждом действительном числе можно сказать, что оно либо является *предельным* для множества M, либо нет. В терминах предельных точек можно формулировать условие сходимости последовательности действительных чисел и вообще все понятия, связанные с предельным переходом. Именно понятие предельной точки и кладется в основу аксиоматики топологического пространства. Однако оказывается рациональным аксиоматизировать не непосредственно понятие предельной точки, а вполне эквивалентное ему понятие *замыкания*. Присоединяя к данному множеству M все предельные для него точки, мы получим так называемое *замыкание* $\overline{M}$ множества M; оно составлено из всех точек, входящих в M, и всех точек, предельных для M. Таким образом, зная, что такое предельная точка, мы уже знаем, что такое замыкание.

Обратно, в терминах замыкания можно формулировать понятие предельной точки.

Если точка a не принадлежит множеству M, то a тогда и только тогда является предельной точкой для M, когда $a \in \overline{M}$. Однако в случае, когда $a \in M$, этого критерия недостаточно, так как a может быть изолированной точкой множества M. Но если a, входя в множество M, одновременно является предельной точкой для M, то тогда a будет предельной и для множества $M \setminus a$, т. е. $a \in \overline{M \setminus a}$. Это условие является и достаточным; более того, оно применимо и тогда, когда a не принадлежит M, ибо в этом случае $M = M \setminus a$.

Итак, окончательно, a есть предельная точка для M тогда и только тогда, когда $a \in \overline{M \setminus a}$.

Аксиоматизируя понятие замыкания, мы и приходим к понятию *топологического пространства*.

§ 8. Понятие топологического пространства

Определение 12. Множество R элементов какого-либо рода называется *топологическим пространством*, если каждому множеству M элементов пространства R поставлено в соответствие множество $\overline{M}$, называемое *замыканием* множества M, так что выполнены следующие условия:

1) если M содержит только один элемент a, то $\overline{M}=M$, или, что то же, $\overline{a}=a$;

2) если M и N суть два множества элементов пространства R, то $\overline{M\cup N}=\overline{M}\cup\overline{N}$, т. е. замыкание суммы равно сумме замыканий;

3) $\overline{\overline{M}}=\overline{M}$, т. е. дважды примененная операция замыкания дает тот же результат, что и операция замыкания, примененная один раз.

Элементы топологического пространства называются его *точками*. Точка a называется *точкой прикосновения* множества M, если $a\in\overline{M}$. Точка a пространства R называется *предельной* для множества M, если $a\in\overline{M\setminus a}$.

A) Покажем, что $M\subset\overline{M}$.

Действительно, пусть $a\in M$. Тогда $M=M\cup a$. Взяв замыкание от обеих частей равенства, получаем

$$\overline{M}=\overline{M\cup a}=\overline{M}\cup\overline{a}=\overline{M}\cup a,$$

т. е. $a\in\overline{M}$. Следовательно, $M\subset\overline{M}$.

B) Если $M\subset N$, то $\overline{M}\subset\overline{N}$.

Действительно, $N=M\cup N$. Замыкая обе части равенства, получаем $\overline{N}=\overline{M}\cup\overline{N}$, т. е. $\overline{N}\supset\overline{M}$.

Определение 13. Множество F элементов топологического пространства R называется *замкнутым*, если $\overline{F}=F$. Множество G элементов из R называется *открытым* или *областью*, если $R\setminus G$ есть замкнутое множество.

Как видно из определения 13, замкнутые множества и области являются дополнениями друг для друга в пространстве R. Поэтому каждому утверждению относительно замкнутых множеств соответствует некоторое утверждение относительно областей. Это замечание мы примем во внимание при доказательстве нижеследующих простых предложений.

C) Сумма конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Действительно, если E и F суть два замкнутых множества, то

$$\overline{E\cup F}=\overline{E}\cup\overline{F}=E\cup F;$$

следовательно, $E\cup F$ замкнуто. Путем индукции утверждение переносится и на произвольное конечное число слагаемых.

Соответствующим предложением для областей является следующее:

D) Пересечение любого конечного числа областей есть область.

Доказательство этого предложения вполне тривиально, и в дальнейшем подобные доказательства будут опускаться, но один раз провести его стоит. Пусть G и H—две области из R. Тогда $E=R\setminus G$ и $F=R\setminus H$ суть замкнутые множества. Пересечение $G\cap H$ есть дополнение к $E\cup F$, т. е. $G\cap H=R\setminus(E\cup F)$. Но $E\cup F$—замкнутое множество (см. C)) и, следовательно, $G\cap H$—область.

E) Пусть Σ—некоторая система замкнутых множеств пространства R и D—пересечение всех множеств, входящих в Σ. Тогда D—замкнутое множество.

Действительно, пусть F—некоторое множество системы Σ. Тогда $D\subset F$ и, следовательно, $\overline{D}\subset\overline{F}=F$ (см. B)). Так как F—произвольный элемент системы Σ, то $\overline{D}\subset D$. Но $\overline{D}\supset D$ (см. A)), следовательно, $\overline{D}=D$.

Соответствующее предложение для областей следующее:

F) Сумма произвольного множества областей есть область.

G) Отметим, что если отвлечься от тривиального случая, когда пространство R содержит лишь одну точку, то само множество R и пустое множество одновременно замкнуты и открыты.

Действительно, замыкание всякого множества из R входит в R и, следовательно, $\overline{R}\subset R$, а из этого и из предложения A) следует, что $\overline{R}=R$, т. е. что R замкнуто. Далее, если R содержит две различные точки a и b, то пустое множество как пересечение множеств, содержащих по одной точке a и b, замкнуто (см. E)).

H) Множество M пространства R называется *всюду плотным*, если $\overline{M}=R$.

Пример 17. Пусть R—некоторое бесконечное множество. Определим в R операцию замыкания следующими условиями: если M есть конечное множество из R, то положим $\overline{M}=M$; если M есть бесконечное множество из R, то положим $\overline{M}=R$. Легко проверить, что эта операция замыкания удовлетворяет условиям определения 12.

Пример 18. Пусть R—некоторое множество; определим в нем операцию замыкания, положив $\overline{M}=M$ для всякого множества M из R. В силу этого R становится топологическим пространством, ибо, как легко проверить, условия 1), 2), 3) определения 12 выполнены. Всякое подмножество пространства R замкнуто. Определенное таким образом пространство R будем называть *дискретным*.

§ 9. Окрестности

В настоящем параграфе будет дан способ задания топологического пространства при помощи окрестностей. Этот способ весьма важен и часто кладется в основу аксиоматического определения понятия топологического пространства.

Согласно определению 12, для задания топологического пространства R следует поставить в соответствие каждому подмножеству M множества R его замыкание $\overline{M}$. Оказывается, однако, что нет необходимости задавать замыкание каждого множества, достаточно задать лишь замкнутые множества, и тогда замыкание всякого множества из R определится однозначно. Оправданием этого утверждения является следующее предложение:

А) Пусть M—некоторое множество из R и Σ—совокупность всех замкнутых множеств из R, содержащих M. Обозначим через D пересечение всех множеств из Σ. Тогда $\overline{M}=D$. Иначе говоря, $\overline{M}$ есть *минимальное* замкнутое множество, содержащее M.

Действительно, так как $\overline{\overline{M}}=\overline{M}$, то $\overline{M}$ есть замкнутое множество. Сверх того, $\overline{M}\supset M$ и, следовательно, $\overline{M}\in\Sigma$, так что $D\subset\overline{M}$. Далее, $D\supset M$ и, так как D есть пересечение замкнутых множеств, то $D=\overline{D}\supset\overline{M}$. Следовательно, $D=\overline{M}$.

Для того чтобы задать все замкнутые множества пространства R, достаточно задать все области пространства R, ибо всякое замкнутое множество является дополнением к некоторой области и всякое дополнение к области есть замкнутое множество. Таким образом, для задания пространства R достаточно задать все области из R. Пользуясь тем обстоятельством, что сумма произвольного множества областей есть также область, мы приходим к дальнейшему упрощению.

Определение 14. Система Σ областей пространства R называется *базисом* пространства R, если всякая непустая область из R может быть получена как сумма некоторого множества областей, входящих в Σ. Базис Σ пространства R иначе называется *полной системой окрестностей* пространства R и каждая область системы Σ—*окрестностью* всякой точки, содержащейся в этой области. Среди всех базисов пространства R существуют базисы *минимальной мощности*, так как множество всех мощностей вполне упорядочено. Эта минимальная мощность называется *весом* пространства R.

Простейшим примером базиса пространства R является совокупность всех областей из R.

Зная базис пространства R, мы тем самым знаем все его области, а следовательно, замыкание в R определено однозначно. Таким образом, для задания пространства R достаточно указать некоторый его базис.

Как видно из определения 14, понятие окрестности не определяется целиком установленной в R операцией замыкания, но зависит также от выбора базиса Σ. Всюду в дальнейшем, говоря об окрестностях, будем иметь в виду, что выбран некоторый определенный базис Σ.

В) Для того чтобы система областей Σ пространства R была его базисом, необходимо и достаточно, чтобы для всякой области G и всякой точки a, принадлежащей G, нашлась такая область U системы Σ, что $a \in U \subset G$.

Действительно, если Σ есть базис пространства R, то существует такая система Σ' областей из Σ, что G есть сумма всех областей, входящих в Σ'. Тогда найдется такая область $U \in \Sigma'$, что $a \in U$. Так как область G получена как сумма некоторого множества областей, в которое входит и U, то $U \subset G$.

Допустим теперь, что сформулированное выше условие выполнено для Σ, и пусть G—произвольная область в R. Тогда для всякой точки $x \in G$ найдется такая область $U_x \in \Sigma$, что $x \in U_x \subset G$. Сумма всех областей U_x, $x \in G$, очевидно, равна G, и, следовательно, Σ есть базис пространства R.

По аналогии с критерием В) дадим следующее определение:

В') Система Σ' окрестностей точки a называется *базисом в точке* a или *полной системой окрестностей* точки a, если для каждой области G, содержащей точку a, найдется такая окрестность $U \in \Sigma'$, что $U \subset G$. Из В) непосредственно следует, что если Σ есть базис всего пространства, то совокупность всех областей системы Σ, содержащих точку a, есть базис в точке a.

Как уже отмечалось выше, задание полной системы окрестностей в пространстве R дает возможность однозначно определить операцию замыкания в этом пространстве. Покажем конкретно, как совершается указанный переход от окрестностей к операции замыкания.

С) Пусть a—некоторая точка и M—некоторое множество из R. Точка a тогда и только тогда входит в $\overline{M}$, когда всякая окрестность U точки a содержит точку, принадлежащую M. Под окрестностями точки a здесь следует понимать элементы базиса в точке a (см. В')).

В самом деле, допустим, что a не входит в $\overline{M}$. Тогда $R \setminus \overline{M}$ есть область, содержащая a и, следовательно, существует такая область $U \in \Sigma'$, что $a \in U \subset R \setminus \overline{M}$ (см. В')). Таким образом, существует окрестность U точки a, не пересекающаяся с M. Если, далее, V есть окрестность точки a, не пересекающаяся с M, то $M \subset R \setminus V = F$, причем F—замкнутое множество, так как V—область. Тогда $\overline{M} \subset \overline{F} = F$, т. е. $\overline{M}$ не содержит a. Итак, для того чтобы множество $\overline{M}$ не содержало a, необходимо и достаточно, чтобы точка a имела окрестность, не пересекающуюся с M. Но это утверждение равносильно утверждению C).

D) Если Σ есть полная система окрестностей топологического пространства R (см. определение 14), то выполнены следующие условия:

a) Для всяких двух различных точек a и b пространства R найдется окрестность $U \in \Sigma$ точки a, не содержащая точки b.

b) Для всяких двух окрестностей $U \in \Sigma$ и $V \in \Sigma$ точки $a \in R$ найдется такая окрестность $W \in \Sigma$ той же точки, что $W \subset U \cap V$.

Для доказательства того, что выполнено условие a), отметим, что $R \setminus b$ есть область и, следовательно, в силу замечания B) существует окрестность U точки a, содержащаяся в $R \setminus b$. Для доказательства того, что выполнено условие b), применим то же замечание B) к области $U \cap V$, содержащей точку a.

Условия a) и b) предыдущего замечания важны тем, что они в свою очередь могут быть приняты за аксиомы при определении топологического пространства с помощью окрестностей. Более полно эта мысль выражается теоремой 3, которая одновременно является обращением предложений C) и D), вместе взятых.

Т е о р е м а 3. *Пусть R — некоторое множество и Σ — некоторая система его подмножеств, для которой выполнены следующие условия:*

a) *Для всяких двух различных точек a и b из R найдется такое множество U системы Σ, что $a \in U$, но b не содержится в U.*

b) *Для всяких двух множеств U и V системы Σ, содержащих точку $a \in R$, найдется такое множество W системы Σ, что $a \in W \subset U \cap V$.*

Определим в R операцию замыкания, считая, что $a \in \overline{M}$ тогда и только тогда, когда всякое множество системы Σ, содержащее a, пересекается с M. Определенная таким образом операция замыкания удовлетворяет условиям определения 12 и, следовательно, R является топологическим пространством. При этом исходная система Σ представляет собой полную систему окрестностей полученного пространства R.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операция замыкания определена. Докажем, что выполнены условия 1), 2), 3) определения 12; при этом мы будем называть множество $U \in \Sigma$ *окрестностью* точки $a \in R$, если $a \in U$.

Пусть M содержит только одну точку a. Так как всякая окрестность точки a содержит a, то $a \in \overline{M}$. Пусть теперь b — точка из R, отличная от a. Тогда по условию a) теоремы существует окрестность U точки b, не содержащая a. Следовательно, b не принадлежит $\overline{M}$. Таким образом, $\overline{M} = a$, и условие 1) определения 12 выполнено.

Пусть M и N—два множества из R. Если $a \in \overline{M} \cup \overline{N}$, то всякая окрестность U точки a пересекается или с M, или с N. Но тогда U пересекается и с $M \cup N$, т. е. $a \in \overline{M \cup N}$. Если теперь a не принадлежит $\overline{M} \cup \overline{N}$, то существуют такие окрестности U и V точки a, что U не пересекается с M, а V—с N. По условию b) теоремы существует окрестность W точки a, содержащаяся в пересечении $U \cap V$. Окрестность W не пересекается с $M \cup N$ и, следовательно, a не входит в $\overline{M \cup N}$. Таким образом, $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$, и условие 2) определения 12 выполнено.

Раньше чем перейти к условию 3) определения 12, заметим, что для введенной в теореме 3 операции замыкания $N \subset \overline{N}$. Действительно, если $x \in N$, то всякая окрестность точки x пересекается с N, ибо она содержит x. Таким образом, $x \in \overline{N}$, т. е. $N \subset \overline{N}$.

Пусть $a \in \overline{\overline{M}}$; это значит, что всякая окрестность U точки a пересекается с $\overline{M}$, т. е. существует такая точка $b \in \overline{M}$, что $b \in U$; но тогда U есть окрестность точки b, а так как $b \in \overline{M}$, то U пересекается с M. Таким образом, произвольная окрестность U точки a пересекается с M, т. е. $a \in \overline{M}$ и, следовательно, $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$. С другой стороны, по вышедоказанному, $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Таким образом, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, т. е. условие 3) определения 12 выполнено.

Покажем теперь, что Σ есть полная система окрестностей пространства R. Докажем прежде всего, что всякое множество $U \in \Sigma$ есть область пространства R. Для этого достаточно доказать, что множество $F = R \setminus U$ замкнуто. Если точка x не принадлежит F, то $x \in U$, и, следовательно, окрестность U точки x не пересекается с F. Таким образом, x не принадлежит к $\overline{F}$; поэтому $\overline{F} = F$ и, следовательно, U есть область. Если теперь G—произвольная область в R и $a \in G$, то множество $R \setminus G = E$ замкнуто и не содержит a. Следовательно, существует окрестность W точки a, не пересекающаяся с F. Таким образом, для произвольных области G и точки $a \in G$ существует такая окрестность $W \in \Sigma$, что $a \in W \subset G$, т. е. Σ есть базис пространства R (см. В)).

Итак, теорема 3 полностью доказана.

Е) Теорема 3 позволяет задавать топологическое пространство R не непосредственно при помощи операции замыкания, а при помощи указания системы Σ подмножеств пространства R, удовлетворяющей условиям a) и b) теоремы 3. При заданной системе Σ операция замыкания в R определяется способом, указанным в теореме 3, а сама система Σ называется *определяющей системой окрестностей* пространства R.

Если пространство R задано с помощью определяющей системы окрестностей, то операция замыкания в R определяется однозначно. Обратное, однако, неверно: если пространство R задано операцией замыкания, то определяющая система окрестностей не устанавливается однозначно. Поэтому возникает вопрос, при каких условиях две различные определяющие системы окрестностей, заданные в одном и том же множестве R, приводят к одной и той же операции замыкания.

F) Две определяющие системы окрестностей Σ и Σ' называются *эквивалентными*, если они приводят к одной и той же операции замыкания в R. Для того чтобы две определяющие системы Σ и Σ' окрестностей в пространстве R были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки a и всякой ее окрестности $U \in \Sigma$ нашлась такая окрестность $U' \in \Sigma'$ точки a, что $U' \subset U$, и, обратно, для всякой окрестности $V' \in \Sigma'$ произвольной точки a нашлась такая окрестность $V \in \Sigma$ той же точки, что $V \subset V'$.

Докажем необходимость этого условия. Так как U есть область, содержащая a, а Σ'—базис R, то существует такая окрестность $U' \in \Sigma'$, что $a \in U' \subset U$. Так же доказывается и существование V для V'. Докажем достаточность, т. е. что если условие эквивалентности для Σ и Σ' выполнено, то Σ и Σ' приводят к одной и той же операции замыкания. Действительно, пусть $a \in \overline{M}$, где замыкание построено, исходя из Σ. Пусть V'—произвольная окрестность точки a, взятая из системы Σ'. Существует по условию эквивалентности такая окрестность $V \in \Sigma$ точки a, что $V \subset V'$. Но V пересекается с M, следовательно, и V' пересекается с M. Так как V' есть произвольная окрестность точки a из системы Σ', то $a \in \overline{M}$, где операция замыкания определена, исходя из системы Σ'.

Формулируем теперь в терминах окрестностей необходимое и достаточное условие того, чтобы подмножество G пространства R было областью. Условие это следующее:

G) Подмножество G пространства R тогда и только тогда является областью, когда для всякой точки $a \in G$ имеется окрестность U точки a, содержащаяся в G.

Необходимость этого условия следует непосредственно из того, что определяющая система окрестностей есть базис пространства R. Пусть теперь G удовлетворяет высказанному условию; докажем, что $R \setminus G = F$ есть замкнутое множество. Пусть a не принадлежит F. Тогда $a \in G$ и, следовательно, существует окрестность U точки a, не пересекающаяся с F. Таким образом, a не принадлежит $\overline{F}$. Следовательно, множество F замкнуто.

Укажем еще в терминах окрестностей условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка a была предельной для множества M. Условие это формулируется следующим образом:

H) Для того чтобы точка a была предельной для множества M, необходимо, чтобы каждая окрестность точки a содержала бесконечное множество точек из M, и достаточно, чтобы каждая окрестность точки a содержала хотя бы одну точку из M, отличную от a.

Действительно, допустим, что $a \in \overline{M \setminus a}$, и предположим, что некоторая окрестность U точки a содержит лишь конечную совокупность N точек множества $M \setminus a$. Тогда $U \setminus N$ есть область, содержащая a. Следовательно, существует окрестность V точки a, входящая в $U \setminus N$, и она не пересекается с множеством $M \setminus a$, что невозможно, так как $a \in \overline{M \setminus a}$. Если, обратно, каждая окрестность точки a содержит точку из M, отличную от a, то это значит, что каждая окрестность точки a пересекается с $M \setminus a$, т. е. $a \in \overline{M \setminus a}$. Следовательно, a есть предельная точка для M.

Пример 19. Пусть R^n есть n-мерное *евклидово пространство*. Каждая точка из R^n определяется своими n декартовыми координатами. Рассмотрим последовательность точек x_k, $k = 1, 2, \ldots$ Координаты точки x_k обозначим через x_k^i, $i = 1, \ldots, n$. Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ *сходится* к точке x с координатами x^i, если $\lim\limits_{k \to \infty} x_k^i = x^i$ при всяком i. Пусть M — множество точек из R^n. Говорят, что x есть *предельная точка* для множества M, если в M существует последовательность точек, отличных от x, сходящаяся к x. Определим *замыкание* $\overline{M}$ множества M как совокупность всех точек, либо принадлежащих к M, либо являющихся предельными для M. Легко видеть, что определенная таким образом операция замыкания удовлетворяет всем требованиям определения 12. Таким образом, R^n становится топологическим пространством.

Так как R^n есть евклидово пространство, то в нем определено *расстояние* между каждыми двумя точками. Множество всех точек из R^n, расстояние которых от некоторой фиксированной точки a меньше, чем заданное положительное число r, называется *шаром* с центром a и радиусом r. Легко видеть, что всякий шар есть область в R^n. Нетрудно показать, что множество всех шаров есть базис пространства R^n. Точно так же и множество всех шаров с рациональными центрами и рациональными радиусами есть базис пространства R^n.

Пример 20. В настоящем параграфе был указан способ задания операции замыкания при помощи окрестностей. Другим весьма важным способом задания той же операции является задание при помощи *метрики*. Правда, при помощи метрики можно задать операцию замыкания не во всяком топологическом пространстве. Поэтому выделяется весьма важный класс *метризуемых* топологических пространств.

Множество R элементов некоторого рода называется *метрическим пространством*, если каждой паре его точек x, y поставлено в соответствие их *расстояние*, т. е. неотрицательное действительное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим условиям: a) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

c) $\rho(x, y)+\rho(y, z)\geqslant\rho(x, z)$. Условие c) носит название *аксиомы треугольника*.

В метрическом пространстве естественно вводится операция замыкания, удовлетворяющая условиям определения 12, так что метрическое пространство превращается в топологическое. Это делается следующим образом. Пусть M—некоторое подмножество и a—некоторая точка метрического пространства R. Будем называть *расстоянием* точки a до множества M нижнюю грань $\rho(a, M)$ чисел $\rho(a, x)$ при $x\in M$. Замыкание $\overline{M}$ множества M определяется как совокупность всех точек, расстояние от которых до M равно нулю. Топологическое пространство, операция замыкания в котором может быть определена указанным образом с помощью некоторой метрики, называется *метризуемым*.

Шаром с центром a и радиусом $\varepsilon>0$ в метрическом пространстве R называется множество всех точек, отстоящих от точки a на расстоянии, меньшем ε. Легко видеть, что всякий шар в R есть область и что множество всех шаров есть базис топологического пространства R.

Важными примерами метрических пространств являются *евклидовы пространства* конечных размерностей (см. пример 19) и их бесконечномерное обобщение—так называемое *гильбертово пространство* H. Элементами пространства H являются все последовательности $x=\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ действительных чисел, для которых сходится ряд $x_1^2+\ldots+x_n^2+\ldots$ Расстояние в H определяется соотношением

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2+\ldots}\,.$$

§ 10. Гомеоморфизм. Непрерывное отображение

С точки зрения топологии два топологических пространства с одинаково устроенными операциями замыкания являются одинаковыми; их называют *гомеоморфными*. Более точно это выражается следующим определением.

Определение 15. Отображение f топологического пространства R на топологическое пространство R' называется *гомеоморфным* или *топологическим*, если оно 1) взаимно однозначно и 2) сохраняет операцию замыкания: $f(\overline{M})=\overline{f(M)}$ для всякого $M\subset R$. Легко видеть, что если отображение f гомеоморфно, то обратное ему отображение f^{-1} также гомеоморфно. Два топологических пространства R и R' называются *гомеоморфными*, если одно из них можно гомеоморфно отобразить на другое.

Понятие гомеоморфизма для топологических пространств является аналогом понятия изоморфизма для групп. *Топологическими свойствами* топологического пространства мы считаем лишь те, которые не меняются при гомеоморфных отображениях.

Из определения 15 явствует, что топологическими свойствами являются те и только те, которые выражаются в терминах замыканий. Таким образом, свойство некоторого множества быть областью или замкнутым множеством является топологическим; напротив, свойство быть окрестностью не является топологическим, так как одна и та же область может входить в один базис пространства и не входить в другой. Ввиду неинвариантности понятия окрестности всякий раз, формулируя какое-либо определение в терминах окрестностей, мы должны убеждаться в топологической инвариантности этого определения. Для того чтобы убедиться в инвариантности определения, достаточно показать, что при замене одной системы окрестностей эквивалентной ей (см. § 9, F)) это определение остается в силе.

Связь между двумя пространствами, более слабую, чем гомеоморфное отображение, дает отображение *непрерывное*. Если гомеоморфное отображение является аналогом изоморфного, то непрерывное служит аналогом гомоморфного.

Определение 16. Отображение g топологического пространства R в топологическое пространство R' называется *непрерывным*, если для всякого множества $M \subset R$ выполнено соотношение

$$g(\overline{M}) \subset \overline{g(M)}.$$

A) Покажем, что если отображение g взаимно однозначно и взаимно непрерывно, т. е. непрерывны оба отображения g и g^{-1}, то оно является гомеоморфным.

Так как отображение g непрерывно, то $g(\overline{M}) \subset \overline{g(M)}$. Обозначая множество $g(M)$ через M' и применяя отображение g^{-1}, получаем отсюда $\overline{g^{-1}(M')} \subset g^{-1}(\overline{M'})$. Но так как отображение g^{-1} непрерывно, то $\overline{g^{-1}(M')} \supset g^{-1}(\overline{M'})$. Последние два соотношения вместе дают $g^{-1}(\overline{M'}) = \overline{g^{-1}(M')}$, т. е. отображение g^{-1} является гомеоморфным, ибо вследствие произвольности множества M множество M' также произвольно. Так как g^{-1} есть гомеоморфное отображение, то и g также гомеоморфно.

Дадим следующий важный критерий непрерывности отображения одного топологического пространства в другое.

B) Каждое из двух нижеследующих условий a) и b) является необходимым и достаточным для непрерывности отображения g пространства R в пространство R'.

a) Если F' — произвольное замкнутое множество пространства R', то полный прообраз его $F = g^{-1}(F')$ также замкнут.

b) Если G' — произвольная область в пространстве R', то полный прообраз ее $G = g^{-1}(G')$ также есть область.

Покажем прежде всего, что условия a) и b) эквивалентны. Пусть F' и G' — два непересекающихся множества пространства

R', сумма которых есть R'. Очевидно, что множества $g^{-1}(F')$ и $g^{-1}(G')$ также не пересекаются и в сумме дают R. Если выполнено условие a) и G' есть область, то F' есть замкнутое множество, $g^{-1}(F')$ есть замкнутое множество, и потому $g^{-1}(G')$ есть область, т. е. условие b) выполнено. Аналогично доказывается, что из b) следует a).

Покажем теперь, что если условие a) выполнено, то отображение g непрерывно. Пусть M—произвольное множество пространства R и $M'=g(M)$. Множество $\overline{M}'$ замкнуто, и потому его полный прообраз $F=g^{-1}(\overline{M}')$ замкнут. Мы имеем: $M\subset F$ и, следовательно, $\overline{M}\subset\overline{F}=F$. Таким образом, $g(\overline{M})\subset\overline{M}'=\overline{g(M)}$, и критерий непрерывности (см. определение 16) выполнен.

Допустим, наконец, что отображение g непрерывно, и покажем, что условие a) выполнено. Пусть F'—произвольное замкнутое множество пространства R' и $F=g^{-1}(F')$. Так как отображение g непрерывно, то $g(\overline{F})\subset\overline{g(F)}=\overline{F}'=F'$, а так как F есть полный прообраз множества F', то из соотношения $g(\overline{F})\subset F'$ следует, что $\overline{F}\subset F$, т. е. что множество F замкнуто. Следовательно, условие a) выполнено.

Дадим теперь необходимое и достаточное условие непрерывности отображения в терминах окрестностей—условие, практически наиболее употребительное и интуитивно ясное.

C) Отображение g пространства R в пространство R' тогда и только тогда непрерывно, когда для каждой точки $a\in R$ и для каждой окрестности U' точки $a'=g(a)$ существует такая окрестность U точки a, что $g(U)\subset U'$. Отображение g называется *непрерывным в точке* a, если условие это выполнено в точке a.

Для доказательства воспользуемся критерием b) предложения B). Допустим, что отображение g непрерывно. Тогда $g^{-1}(U')$ есть область, содержащая точку a, и потому существует окрестность U точки a, входящая в $g^{-1}(U')$ (см. § 9, G)), и тогда $g(U)\subset U'$. Допустим теперь, что условие, приведенное в C), выполнено, и пусть G' есть область в R'; покажем, что $G=g^{-1}(G')$ есть область в R. Пусть $a\in G$. Тогда $a'=g(a)\in G'$, и так как G' есть область, то существует окрестность U' точки a', входящая в G'. В силу условия, приведенного в C), существует такая окрестность U точки a, что $g(U)\subset U'\subset G'$. Так как G есть полный прообраз области G', то из соотношения $g(U)\subset G'$ следует, что $U\subset G$. Таким образом, G есть область (см. § 9, G)).

D) Нетрудно видеть, что если g есть непрерывное отображение пространства R в пространство R', а g'—непрерывное отображение пространства R' в пространство R'', то $h=g'g$ есть непрерывное отображение пространства R в пространство R''.

В теории топологических групп вместе с непрерывными отображениями существенную роль играют *открытые* отображения.

E) Отображение f топологического пространства R в топологическое пространство R' будем называть *открытым*, если всякая область U пространства R переходит при отображении f в область: $f(U)$ есть область. Отображение f является открытым тогда и только тогда, когда для всякой точки $a \in R$ и всякой ее окрестности V существует такая окрестность V' точки $f(a)=a'$, что $V' \subset f(V)$.

Действительно, если отображение f открыто, то существование требуемой окрестности V' очевидно, ибо $f(V)$ есть область, содержащая точку a'. Допустим теперь, что предположение о существовании окрестности V' выполнено для всякой точки a и для всякой ее окрестности V. Пусть U—некоторая область пространства R. Покажем, что $f(U)$ есть область. Пусть $a' \in f(U)$; тогда $a'=f(a)$, где $a \in U$. Обозначим через V некоторую окрестность точки a, содержащуюся в U; такая окрестность существует, так как U есть область. По предположению, существует такая окрестность V' точки a', что $V' \subset f(V)$. Так как $V \subset U$, то $f(V) \subset f(U)$ и, следовательно, $V' \subset f(U)$. Но отсюда следует, что $f(U)$—область (см. § 9, G)).

§ 11. Подпространство

Если проводить аналогию между понятиями второй и первой глав, то гомеоморфизм и непрерывное отображение являются аналогами изоморфизма и гомоморфного отображения. Перейдем теперь к построению аналога подгруппы.

Определение 17. Пусть R—топологическое пространство и R^*—некоторое множество из R. В R^* можно естественным образом внести топологию, *индуцируемую* топологией пространства R, так что множество R^* станет само топологическим пространством—*подпространством* пространства R. Замыкание $\widetilde{M}$ множества M в пространстве R^* определяется следующим образом: $\widetilde{M}=\overline{M} \cap R^*$.

Покажем, что условия 1), 2) и 3) определения 12 выполнены.

Если M содержит только одну точку a, то $\widetilde{M}=\overline{M} \cap R^*=M \cap R^*=$ $=M$. Таким образом, условие 1) выполнено.

Пусть M и N—два множества из R^*. Тогда

$$\widetilde{M \cup N}=\overline{M \cup N} \cap R^*=(\overline{M} \cup \overline{N}) \cap R^*=(\overline{M} \cap R^*) \cup (\overline{N} \cap R^*)=\widetilde{M} \cup \widetilde{N},$$

т. е. условие 2) выполнено.

Переходя к условию 3), заметим, что $N \subset \widetilde{N}$. Действительно, $\widetilde{N}=\overline{N} \cap R^* \supset N \cap R^*=N$. Далее, мы имеем: $\overline{M} \cap R^* \subset \overline{M}$, так что $\overline{\overline{M} \cap R^*} \subset \overline{M}$ и, следовательно,

$$\widetilde{\widetilde{M}}=\overline{\widetilde{M}} \cap R^*=(\overline{\overline{M} \cap R^*}) \cap R^* \subset \overline{M} \cap R^*=\widetilde{M}.$$

Но так как, по только что доказанному, $\widetilde{M}\subset\widetilde{\widetilde{M}}$, то $\widetilde{\widetilde{M}}=\widetilde{M}$, т. е. условие 3) выполнено.

Установим теперь некоторые элементарные свойства понятия подпространства.

A) Пусть R^*—некоторое подпространство пространства R (см. определение 17). Если F есть замкнутое множество в R, то $E=F\cap R^*$ есть замкнутое множество в R^* и, обратно, всякое замкнутое множество E в R^* может быть получено как пересечение некоторого замкнутого множества F из R с R^*.

В самом деле, пусть F—замкнутое множество в R и $E=F\cap R^*$. Тогда $E\subset F$ и $\overline{E}\subset\overline{F}=F$. Пересекая обе части последнего соотношения с R^*, получаем $\overline{E}\cap R^*\subset F\cap R^*$, т. е. $\widetilde{E}\subset E$. Но так как всегда $E\subset\widetilde{E}$, то $\widetilde{E}=E$ и, следовательно, E есть замкнутое множество в R^*.

Пусть теперь, наоборот, E есть замкнутое множество в R^*. Это значит, что $E=\widetilde{E}=\overline{E}\cap R^*$, т. е. E есть пересечение замкнутого множества $\overline{E}$ с R^*.

B) Пусть R^*—некоторое подпространство пространства R. Если G—область в R, то $H=G\cap R^*$ есть область в R^*. Обратно, каждая область H в R^* может быть получена как пересечение некоторой области G в R с R^*.

Пусть G—произвольная область в R. Тогда $F=R\setminus G$ есть замкнутое множество. Положим $H=G\cap R^*$ и $E=F\cap R^*$. Легко видеть, что $H=R^*\setminus E$. Но, по ранее доказанному (см. A)), E есть замкнутое множество в R^*; следовательно, H есть область в R^*.

Если, наоборот, H есть область в R^*, то $E=R^*\setminus H$ есть замкнутое множество в R^* и, следовательно, $E=F\cap R^*$, где F—замкнутое множество в R (см. A)). Тогда $G=R\setminus F$ есть область в R и $H=G\cap R^*$.

C) Пусть R—топологическое пространство, R^*—его подпространство и Σ—некоторый базис в R. Обозначим через Σ^* совокупность всех множеств вида $U\cap R^*$, где $U\in\Sigma$. Тогда Σ^* есть базис в R^*. Аналогичное предложение имеет место и для базиса в точке.

Действительно, так как все элементы из Σ суть области в R, то, по ранее доказанному (см. B)), Σ^* есть множество областей в R^*. Докажем, что каждая область H в R^* может быть получена как сумма областей, принадлежащих множеству Σ^*. По ранее доказанному (см. B)), $H=G\cap R^*$, где G есть некоторая область в R. Так как Σ—базис в R, то G можно получить как сумму некоторого множества Δ областей, принадлежащих Σ. Обозначим через Δ^* совокупность всех множеств вида $U\cap R^*$, где $U\in\Delta$. Тогда $\Delta^*\subset\Sigma^*$ и H есть сумма всех множеств, входящих в Δ^*.

D) Пусть R^*—подпространство пространства R. Каждой точке $x \in R^*$ поставим в соответствие точку $f(x)=x \in R$. Тогда отображение f есть непрерывное отображение пространств R^* в пространство R.

Для доказательства воспользуемся условием a) пункта B) из § 10 и замечанием A). Если F есть некоторое подмножество пространства R, то полный прообраз множества F при отображении f есть $F \cap R^*$. При замкнутом F множество $F \cap R^*$ замкнуто в R^* и, следовательно, отображение f непрерывно.

E) Пусть g—непрерывное отображение пространства R в пространство R'. Допустим, что $g(R) \subset R^* \subset R'$. Тогда R^* как подмножество пространства R' само является топологическим пространством. Оказывается, что g есть непрерывное отображение пространства R в пространство R^*.

Для доказательства достаточно заметить, что если $F \subset R'$, то полный прообраз множества F при отображении g совпадает с полным прообразом множества $F \cap R^*$ при том же самом отображении, и затем применить это замечание к случаю, когда F есть замкнутое множество в R'.

Предложения D) и E) показывают, что определение 17 дано, как говорят, правильно. Действительно, если бы мы поставили перед собой задачу дать топологию в подпространстве, то стремились бы дать ее так, чтобы предложения D) и E) имели место. Интересно отметить, что с этой точки зрения топология в подпространстве определяется однозначно. Именно, если потребовать, чтобы предложения D) и E) были выполнены, то мы придем к определению 17.

Пример 21. Пусть R—совокупность всех действительных чисел; R можно трактовать как множество всех точек числовой прямой. Определим в R операцию замыкания, как это сделано в примере 19 ($n=1$). Пусть R^*—подпространство пространства R, составленное из всех чисел y, для которых $-1<y<+1$. Покажем, что R и R^* гомеоморфны. Положим $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. В силу этого соотношения каждой точке x числовой прямой R ставится в соответствие точка интервала R^*, причем соответствие это взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Пример 22. Пусть R—плоскость с естественной для нее топологией (см. пример 19). Обозначим через R^* подпространство пространства R, составленное из всех точек единичной окружности, т. е. из всех точек (x, y), удовлетворяющих соотношению $x^2+y^2=1$. Через R^{**} обозначим множество всех точек оси абсцисс, для которых абсцисса φ удовлетворяет соотношению $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Дадим непрерывное и взаимно однозначное отображение пространства R^{**} на пространство R^* с помощью соотношения $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$. Непрерывность и взаимную однозначность этого отображения проверить нетрудно. Интересным здесь является тот факт, что отображение это не является взаимно непрерывным, т. е. обратное отображение пространства R^* на пространство R^{**} не является непрерывным. Действительно, отображение это терпит разрыв в точке с координатами 1,0.

§ 12. Аксиомы отделимости

Топологические пространства, используемые для различных целей, большей частью удовлетворяют дополнительным ограничениям. К числу наиболее важных дополнительных ограничений принадлежат так называемые *аксиомы отделимости*. Две из этих аксиом тесно связаны с вопросом о существовании на топологическом пространстве непостоянных непрерывных числовых функций. Поэтому формулировке аксиом отделимости здесь предпосылается рассмотрение понятия непрерывной функции.

A) В множестве D всех действительных чисел существует естественная топология, которую можно задать базисом Σ, состоящим из всех интервалов $I_{p,q}$ $(p<q)$; интервал $I_{p,q}$ есть множество всех действительных чисел x, для которых $p<x<q$. Из базиса Σ можно выделить часть Σ', эквивалентную Σ (см. § 9, F)), состоящую из всех интервалов $I_{p,q}$ с рациональными концами p, q; таким образом, пространство D допускает счетный базис. Непрерывное отображение топологического пространства R в топологическое пространство D называется *непрерывной действительной числовой фунцией*, заданной на R. Оказывается, что функция f, ставящая в соответствие каждой точке $x \in R$ действительное число $f(x)$, тогда и только тогда непрерывна в точке $a \in R$ (см. § 10, C)), когда для каждого положительного числа ε существует такая окрестность U точки a в пространстве R, что при $x \in U$ имеем $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Докажем правильность этого критерия непрерывности. Пусть $a \in R$ и $a'=f(a)$. Допустим, что критерий выполнен, и пусть $I_{p,q}$ — окрестность из базиса Σ, содержащая точку a'. Так как $p<a'<q$, то меньшее из чисел $a'-p$, $q-a'$ положительно, и, принимая его за ε, мы видим, что если $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, то $f(x) \in I_{p,q}$. Таким образом, отображение f непрерывно (см. § 10, C)). Если теперь отображение f непрерывно, то, полагая $p=a'-\varepsilon$, $q=a'+\varepsilon$, мы получим такую окрестность $I_{p,q}$, что из соотношения $f(x) \in I_{p,q}$ следует, что $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Определение 18. Формулируем теперь четыре аксиомы отделимости, расположив их в порядке постепенного усиления:

1) Для всяких двух различных точек a и b пространств R существуют такие непересекающиеся области G и H, что $a \in G$, $b \in H$. Аксиома эта носит имя ее автора Хаусдорфа, и пространство R, удовлетворяющее ей, называется *хаусдорфовым*.

2) Для всякой точки a и всякого не содержащего ее замкнутого множества B пространства R существуют такие непересекающиеся области G и H, что $a \in G$, $B \subset H$. Пространство, удовлетворяющее этой аксиоме, называется *регулярным.*

3) Для всякой точки a и всякого не содержащего ее замкнутого множества B пространства R существует такая непрерывная числовая функция f, заданная на R, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при $x \in R$, $f(a)=0$, $f(x)=1$ при $x \in B$. Пространство R, удовлетворяющее этой аксиоме, называется *вполне регулярным.*

4) Для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств A и B пространства R существуют такие непересекающиеся области G и H, что $A \subset G$, $B \subset H$. Пространство R, удовлетворяющее этой аксиоме, называется *нормальным.*

Покажем, что каждое из условий 2), 3), 4) имеет своим следствием ему предшествующее. То, что из 2) следует 1), очевидно. Для вывода условия 2) из условия 3) обозначим через I множество всех действительных чисел, меньших числа $\frac{1}{2}$, и через I' — множество всех действительных чисел, бо́льших числа $\frac{1}{2}$. Множества $G=f^{-1}(I)$ и $H=f^{-1}(I')$ суть непересекающиеся области (см. § 10, В)), причем $a \in G$, $B \subset H$. Следовательно, условие 2) выполнено. Наконец, тот факт, что из условия 4) вытекает условие 3), является прямым следствием леммы Урысона (см. ниже).

В действительности каждое из условий 1), 2), 3), 4) является реальным ограничением: существуют топологические пространства, не удовлетворяющие условию 1), и для каждого из условий 2), 3), 4) существуют пространства, удовлетворяющие предыдущему условию и не удовлетворяющие данному.

Дадим теперь аксиомы отделимости 1), 2), 4) в несколько измененной форме.

В) Условия 1), 2), 4) определения 18 эквивалентны условиям:

1а) Для всяких двух различных точек a и b пространства R существует область G, содержащая a, замыкание которой не содержит b.

2а) Для всякой точки a и всякого не содержащего ее замкнутого множества B пространства R существует область G, содержащая a, замыкание которой не пересекается с B.

4а) Для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств A и B пространства R существует область G, содержащая A, замыкание которой не пересекается с B.

В условиях 1), 2), 1а), 2а) область G можно заменить окрестностью заданного базиса, а в условии 1) — одновременно и область H. Далее, условие 2) можно сформулировать следующим образом.

2b) Для всякой окрестности U произвольной точки a пространства R существует такая окрестность V точки a, что $\overline{V} \subset U$.

Доказательство предложения B) проводится совершенно тривиальным образом.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству весьма нетривиальной леммы Урысона, играющей в топологии важную роль.

Лемма Урысона. *Для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств E и F нормального пространства R* (см. определение 18, условие 4)) *существует такая непрерывная числовая функция f, заданная на R* (см. A)), *что* $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *при* $x \in R$, $f(x)=0$ *при* $x \in E$, $f(x)=1$ *при* $x \in F$.

Идея доказательства заключается в следующем. Каждой правильной двоичной дроби r ($0<r<1$) ставится в соответствие такая область G_r пространства R, что $E \subset G_r$, $\overline{G}_r$ не пересекается с F и $\overline{G}_{r'} \subset G_{r''}$ при $r'<r''$. После построения такой системы областей значение $f(x)$ функции f в точке $x \in R$ определяется как нижняя грань чисел r, для которых $x \in G_r$; если же точка x не принадлежит ни одной области G_r, то полагают $f(x)=1$.

Доказательство. Построим сначала в R конечную систему Σ_n областей G_r, где r есть рациональное число, представимое в форме $\frac{q}{2^n}$ ($q = 1, 2, \ldots, 2^n-1$), обладающую следующими свойствами: a) $E \subset G_r$, $\overline{G}_r$ не пересекается с F; b) $\overline{G}_{r'} \subset G_{r''}$ при $r'<r''$.

Построение будем вести индуктивно по n, причем Σ_{n+1} будет получаться путем расширения системы Σ_n.

Система Σ_1 должна содержать лишь одну область $G_{\frac{1}{2}}$. В силу условия 4a) (см. B)) существует такая область G, что $E \subset G$ и $\overline{G}$ не пересекается с F. Положим $G_{\frac{1}{2}}=G$. Условие a) для Σ_1 выполнено, условие же b) пока бессодержательно.

Допустим, что система Σ_n уже построена, и построим систему Σ_{n+1}. Пусть $r=\frac{q}{2^{n+1}}$; если q четно, $q=2p$, то $r=\frac{p}{2^n}$, и тогда имеем $G_r \in \Sigma_n$, так что область G_r уже построена. Пусть теперь $q=2p+1$; положим $s=\frac{p}{2^n}$ и $t=\frac{p+1}{2^n}$. Здесь следует различать три случая: 1) $s>0$, $t<1$; в этом случае G_s и G_t уже построены, и мы положим $A=\overline{G}_s$, $B=R \setminus G_t$. A и B суть замкнутые непересекающиеся множества, так как $\overline{G}_s \subset G_t$. 2) $s=0$; тогда G_t существует, и мы положим $A=E$, $B=R \setminus G_t$. A и B суть замкнутые непересекающиеся множества, так как $E \subset G_t$. 3) $t=1$; тогда G_s существует, и мы положим $A=\overline{G}_s$, $B=F$. A и B суть замкнутые непересекающиеся множества, так как $\overline{G}_s$ и F не пересекаются. В силу условия 4a) во всех трех случаях существует такая область

G, что $A \subset G$ и $\overline{G}$ не пересекается с B. Положим $G_r = G$. Таким образом, система областей Σ_{n+1} построена.

Покажем, что для построенной таким образом системы Σ_{n+1} условие а) выполнено. В случае 1) $E \subset G_s \subset G_r$, $\overline{G}_r \subset G_t \subset R \setminus F$; таким образом, $E \subset G_r$ и $\overline{G}_r$ не пересекается с F. В случае 2) $E \subset G_r$ и $\overline{G}_r \subset G_t \subset R \setminus F$; таким образом, $E \subset G_r$ и $\overline{G}_r$ не пересекается с F. Наконец, в случае 3) $E \subset G_s \subset G_r$ и $\overline{G}_r \subset R \setminus F$; таким образом, $E \subset G_r$ и $\overline{G}_r$ не пересекается с F. Итак, условие а) выполнено.

Перейдем теперь к условию b). Пусть $r' < r''$, причем $r' = \frac{q'}{2^{n+1}}$, $r'' = \frac{q''}{2^{n+1}}$. Если q' и q'' четны, то $G_{r'}$ и $G_{r''}$ принадлежат Σ_n и, следовательно, по предположению индукции, $\overline{G}_{r'} \subset G_{r''}$. Пусть $q' = 2p'$, $q'' = 2p'' + 1$. Положим $s = \frac{p''}{2^n}$. Тогда $r' \leqslant s$, и мы имеем $\overline{G}_{r'} \subset \overline{G}_s \subset G_{r''}$, так что $\overline{G}_{r'} \subset G_{r''}$. Если $q' = 2p' + 1$, $q'' = 2p''$, то положим $t = \frac{p'+1}{2^n}$. Тогда $t \leqslant r''$, и мы имеем $\overline{G}_{r'} \subset G_t \subset G_{r''}$, так что $\overline{G}_{r'} \subset G_{r''}$. Если $q' = 2p' + 1$, $q'' = 2p'' + 1$, то положим $s = \frac{p''}{2^n}$. Тогда $r' < s$, и, по ранее доказанному, мы имеем $\overline{G}_{r'} \subset G_s \subset G_{r''}$, так что $\overline{G}_{r'} \subset G_{r''}$. Таким образом, условие b) также выполнено.

Пусть теперь Σ' — объединение систем Σ_n, $n = 1, 2, \ldots$ Пополним Σ' еще областью $G_1 = R$. Пополненную таким образом систему обозначим через Σ''. Σ'' содержит все области G_r, где r — произвольная положительная двоичная дробь, не превосходящая единицы, причем $E \subset G_r$ и $\overline{G}_r$ не пересекается с F, за исключением лишь того случая, когда $r = 1$; сверх того, $\overline{G}_{r'} \subset G_{r''}$ при $r' < r''$.

Пусть x — произвольная точка из R. Обозначим через $f(x)$ нижнюю грань значений всех чисел r, для которых $x \in G_r$. Полученная таким образом функция f удовлетворяет условиям леммы. Действительно, если $x \in E$, то $x \in G_r$ при всяком r, а так как нижняя грань значений всех r есть нуль, то $f(x) = 0$. Если $x \in F$, то $x \in G_r$ лишь при условии $r = 1$ и, следовательно, $f(x) = 1$. Далее, так как r принимает лишь положительные значения, не превосходящие единицы, то для всех $x \in R$ имеем $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Докажем теперь непрерывность функции f в произвольной точке $a \in R$. Пусть ε — произвольное положительное число. Предположим сначала, что $f(a) = 0$. Пусть r — положительная двоичная дробь, меньшая ε. Тогда $a \in G_r$. Обозначим через U такую окрестность точки a, что $U \subset G_r$. Тогда для всякой точки $x \in U$ имеем $f(x) \leqslant r < \varepsilon$, ибо $x \in G_r$; но так как $f(x) \geqslant 0$, то $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Пусть теперь $f(a) > 0$ и r, s, t — такие три положительные двоичные дроби, не превосходящие единицы, что при $f(a) < 1$ имеем: $f(a) - \varepsilon < r < s < f(a) < t < f(a) + \varepsilon$, а при $f(a)=1$ имеем: $f(a)-\varepsilon<r<s<f(a)=t=1$. Очевидно, что a не принадлежит G_s и, так как $r<s$, то a не принадлежит и $\overline{G}_r$; кроме того, $a\in G_t$. Таким образом, a принадлежит области $G_t\setminus\overline{G}_r$. Обозначим через U такую окрестность точки a, что $U\subset G_t\setminus\overline{G}_r$. При всяком $x\in U$ мы имеем $r\leqslant f(x)\leqslant t$ и, следовательно, $|f(x)-f(a)|<$ $<\varepsilon$. Таким образом, функция f непрерывна.

Итак, лемма Урысона доказана.

Следует отметить, что если в пространстве R верна лемма Урысона, т. е. если для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств E и F существует непрерывная числовая функция f, удовлетворяющая условиям $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ при $x\in R$, $f(x)=0$ при $x\in E$, $f(x)=1$ при $x\in F$, то пространство R нормально. Действительно, обозначим через I множество всех чисел, меньших числа $\frac{1}{2}$, и через I' — множество всех чисел, бо́льших числа $\frac{1}{2}$. Множества $G=f^{-1}(I)$ и $H=f^{-1}(I')$ суть такие непересекающиеся области, что $E\subset G$, $F\subset H$. Таким образом, пространство R нормально.

C) Свойство пространства называется *наследственным*, если всякое подпространство пространства, обладающего этим свойством, также им обладает. Оказывается, что свойства 1), 2), 3) (см. определение 18) наследственны, свойство же 4) не наследственно.

Докажем наследственность свойств 1), 2), 3). Пусть R — топологическое пространство, R^* — его подпространство и пусть a — произвольная точка и B — произвольное не содержащее ее замкнутое множество пространства R^*. Тогда $B=\overline{B}\cap R^*$, и потому замкнутое множество $\overline{B}$ пространства R не содержит точки a. При доказательстве наследственности аксиомы 1) будем считать, что B содержит только одну точку b. Если в пространстве R выполнена аксиома 1) или 2), то существуют в R такие непересекающиеся области G и H, что $a\in G$, $\overline{B}\subset H$. Области $G'=G\cap R^*$ и $H'=H\cap R^*$ пространства R^* содержат соответственно a и B. Если в R выполнена аксиома 3), то существует такая заданная на R непрерывная функция f, что $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ при $x\in R$, $f(a)=0$, $f(x)=1$ при $x\in\overline{B}$. Функция f, рассматриваемая на R^*, осуществляет условие 3) для пространства R^*.

В применении к аксиоме 4) аналогичное доказательство не проходит. Как показывают примеры, нормальность и не является наследственным свойством.

П р и м е р 23. Покажем, что метрическое пространство всегда нормально. Пусть R — метрическое пространство, A и B — два его замкнутых непересекающихся множества. Пусть $x\in A$ и $y\in B$. Обозначим через U_x шар с центром x и радиусом $\frac{1}{2}\rho(x, B)$ и через

V_y—шар с центром y и радиусом $\frac{1}{2}\rho(y, A)$. Легко устанавливается, что сумма G всех областей U_x, $x \in A$, не пересекается с суммой H всех областей V_y, $y \in B$. Таким образом, множества A и B заключены в непересекающиеся области G и H.

Пример 24. Покажем, что *регулярное топологическое пространство со счетной базой нормально*. Результат этот принадлежит А. Н. Тихонову.

Пусть R—регулярное пространство со счетной базой Σ и A, B—два его замкнутых непересекающихся множества. Для каждой точки $x \in A$ существует ее окрестность $U_x \in \Sigma$, замыкание $\overline{U}_x$ которой не пересекается с B (см. В)). Таким образом, существует конечная или счетная последовательность областей U_1, U_2, ..., сумма которых содержит A и замыкание каждой из которых не пересекается с B. Пусть V_1, V_2, ...—аналогичная последовательность для пары B, A. Положим теперь $G_1 = U_1$, $H_1 = V_1 \setminus \overline{G}_1$ и, вообще, $G_n = U_n \setminus (\overline{H}_1 \cup \ldots \cup \overline{H}_{n-1})$, $H_n = V_n \setminus (\overline{G}_1 \cup \ldots \cup \overline{G}_n)$. Легко показать, что покрывающая A сумма G областей G_1, G_2, ... не пересекается с покрывающей B суммой H областей H_1, H_2, ...

§ 13. Бикомпактность

К числу важнейших ограничительных условий, которые часто налагают на топологические пространства, принадлежит введенное в топологию П. С. Александровым условие *бикомпактности*. Условие бикомпактности может быть сформулировано в нескольких эквивалентных между собой формах, также принадлежащих П. С. Александрову. Доказательству эквивалентности четырех различных формулировок условия бикомпактности в основном посвящен настоящий параграф.

Бикомпактность представляет собой обобщение на топологические пространства хорошо известных свойств замкнутого числового отрезка: всякое бесконечное множество чисел отрезка имеет предельную точку; из каждого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное; наконец, каждая убывающая последовательность замкнутых отрезков имеет непустое пересечение.

Для формулировки условий бикомпактности введем следующую терминологию:

А) Система Σ множеств пространства R называется *покрытием* множества M того же пространства, если сумма всех множеств, входящих в Σ, содержит множество M. Система Δ множеств пространства R называется *центрированной*, если каждая конечная подсистема системы Δ имеет непустое пересечение. Точка a пространства R называется *точкой полного накопления* множества

$M \subset R$, если пересечение каждой окрестности точки a с множеством M имеет ту же мощность, что и само множество M.

Определение 19. Топологическое пространство R называется *бикомпактным*, если из каждого его покрытия областями можно выбрать конечное покрытие. Подмножество M пространства R называется *бикомпактным*, если рассматриваемое как подпространство (см. определение 17) оно бикомпактно; очевидно, что подмножество M пространства R тогда и только тогда бикомпактно, когда из всякого его покрытия областями пространства R можно выбрать конечное покрытие. Топологическое пространство R называется *локально бикомпактным*, если у каждой его точки существует окрестность, замыкание которой бикомпактно.

Нижеследующая теорема дает четыре критерия бикомпактности пространства, включая и критерий, приведенный в определении 19.

Теорема 4. *Каждые два из приводимых ниже четырех условий эквивалентны между собой и каждое из них означает бикомпактность пространства R:*

1) *Из всякого покрытия пространства R областями можно выбрать конечное покрытие.*

2) *Всякая центрированная система замкнутых множеств пространства R имеет непустое пересечение.*

3) *Всякое бесконечное множество пространства R имеет точку полного накопления.*

4) *Всякая трансфинитная последовательность F_1, F_2, ... непустых замкнутых множеств, удовлетворяющая тому условию, что $F_\alpha \supset F_\beta$ при $\alpha < \beta$, имеет в пространстве R непустое пересечение.*

Доказательство. Покажем, что условия 1) и 2) эквивалентны. Допустим, что условие 1) выполнено, и покажем, что тогда выполнено условие 2). Пусть Δ — произвольная центрированная система замкнутых множеств пространства R. Обозначим через Σ совокупность всех областей вида $R \setminus F$, где $F \in \Delta$. Допустим, что система Δ имеет пустое пересечение. Это значит, что Σ покрывает R. В силу предположения 1) из Σ можно выбрать конечное покрытие $G_1, \ldots, G_k$. Тогда конечная система $R \setminus G_1, \ldots$ $\ldots, R \setminus G_k$ множеств системы Δ имеет пустое пересечение, что невозможно ввиду центрированности системы Δ. Допустим, наоборот, что выполнено условие 2), и пусть Σ' — произвольное покрытие пространства R областями. Обозначим через Δ' совокупность всех замкнутых множеств вида $R \setminus G$, где $G \in \Sigma'$. Так как Σ' покрывает R, то система Δ' имеет пустое пересечение, а потому не может быть центрированной. Это значит, что существует конечная подсистема $F_1, \ldots, F_k$ системы Δ', пересечение которой пусто. Из пустоты этого пересечения следует, что области $R \setminus F_1, \ldots$ $\ldots, R \setminus F_k$ системы Σ' в сумме составляют пространство R.

Покажем, что из 1) следует 3). Пусть M—бесконечное подмножество пространства R. Допустим, что M не имеет точки полного накопления, т. е. что для каждой точки $x \in R$ существует окрестность U_x, пересечение которой с M имеет мощность, меньшую мощности самого множества M. Система Σ всех областей U_x, $x \in R$, покрывает пространство R, и потому из нее можно выделить конечное покрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$. Так как пересечение каждой области U_{x_i} с M имеет мощность меньшую, чем мощность самого множества M, то бесконечное множество M представляется в виде суммы конечного числа множеств меньшей мощности, что невозможно. Итак, если верно 1), то верно и 3).

Покажем, что как из 3), так и из 4) следует 2). Допустим, что одно из условий 3), 4) выполнено, а условие 2) не выполнено, и приведем это предположение к противоречию. Так как 2) не выполнено, то существует такая минимальная, и притом бесконечная, мощность $\mathfrak{m}$, что имеется в R центрированная система Δ мощности $\mathfrak{m}$, пересечение которой пусто. Обозначим через $\omega_{\mathfrak{m}}$ такое минимальное трансфинитное число, что мощность множества трансфинитных чисел, ему предшествующих, равна $\mathfrak{m}$. Элементы системы Δ занумеруем всеми трансфинитными числами, меньшими $\omega_{\mathfrak{m}}$: $\Delta = \{F_1, F_2, \ldots\}$. Положим $E_1 = R$ и для всякого трансфинитного числа α, большего единицы и меньшего $\omega_{\mathfrak{m}}$, определим E_α как пересечение всех множеств F_β при $\beta < \alpha$. Каждое из множеств E_α, $1 \leqslant \alpha < \omega_{\mathfrak{m}}$, не пусто, так как представляет собой пересечение центрированной системы множеств F_β, $\beta < \alpha$, мощность которой меньше $\mathfrak{m}$. Достаточно доказать, что пересечение всех множеств E_α не пусто, так как оно совпадает с пересечением множеств системы Δ. При $\alpha < \beta$ мы имеем $E_\alpha \supset E_\beta$, и потому, если верно 4), то пересечение всех E_α не пусто. Будем исходить из предположения, что верно 3). Множества E_α, $1 \leqslant \alpha < \omega_{\mathfrak{m}}$, образуют вполне упорядоченную систему Δ', различно занумерованные множества которой могут, однако, совпадать. Выберем из системы Δ' подсистему Δ'' с тем же пересечением, но составленную из попарно различных множеств. Для этого систему Δ' разобьем на классы попарно совпадающих множеств и в каждом классе выберем множество с наименьшим номером. Полученную таким образом совокупность попарно различных множеств и обозначим через Δ''. Так как система Δ' вполне упорядочена, то совокупность Δ'' также вполне упорядочена. Непосредственно видно, что Δ'' представляет собой центрированную систему, и потому, если мощность ее меньше $\mathfrak{m}$, то пересечение ее не пусто. Таким образом, нам остается разобрать случай, когда мощность совокупности Δ'' равна $\mathfrak{m}$. Пусть E_α—множество совокупности Δ'' и E_β—непосредственно следующее за ним множество той же совокупности. Пусть x_α—фиксированная точка разности $E_\alpha \setminus E_\beta$.

Таким образом, каждому множеству $E_\alpha \in \Delta''$ поставлена в соответствие точка $x_\alpha \in E_\alpha$, причем различным множествам соответствуют различные точки. Множество всех точек x_α обозначим через M; его мощность равна $\mathfrak{m}$. Так как 3) верно, то у M существует точка a полного накопления. Покажем, что a принадлежит каждому из множеств $E_\alpha \in \Delta''$, так что пересечение множеств совокупности Δ'' не пусто. Действительно, область $G_\alpha = R \setminus E_\alpha$ содержит лишь точки x_β, для которых $\beta < \alpha$, а мощность множества таких точек меньше $\mathfrak{m}$. Таким образом, точка a полного накопления множества M не может лежать в области G_α и, следовательно, $a \in E_\alpha$.

Покажем, наконец, что из 2) следует 4). Трансфинитная последовательность $F_1, F_2, \ldots$ непустых замкнутых множеств пространства R, удовлетворяющих условию $F_\alpha \supset F_\beta$ при $\alpha < \beta$, очевидно, есть центрированная система, и потому из 2) следует, что пересечение ее не пусто. Таким образом, 4) верно.

Итак, доказана эквивалентность каждых двух условий, формулированных в теореме 4, и теорема 4 тем самым доказана.

Установим теперь некоторые элементарные свойства бикомпактных пространств.

В) Замкнутое подмножество бикомпактного пространства бикомпактно. Замкнутое подмножество локально бикомпактного пространства, рассматриваемое как подпространство (см. § 11), локально бикомпактно.

Действительно, пусть M — замкнутое подмножество бикомпактного пространства R и Σ — некоторое покрытие множества M областями пространства R. К покрытию Σ присоединим область $G = R \setminus M$ и полученную систему обозначим через Σ'. Система Σ', очевидно, есть покрытие всего пространства R, и потому из нее можно выбрать конечное покрытие Σ'_1. Выбрасывая из системы Σ'_1 область G, если она в ней содержится, мы получим конечное покрытие множества M, выбранное из покрытия Σ.

Пусть теперь R^* — замкнутое подмножество локально бикомпактного пространства R и $a \in R^*$. Выберем такую окрестность U точки a в пространстве R, что множество $\overline{U}$ бикомпактно. Покажем, что окрестность $U^* = U \cap R^*$ точки a в пространстве R^* имеет бикомпактное замыкание $\widetilde{U}^*$ в пространстве R^*. Мы имеем: $\widetilde{U}^* = \overline{U}^* \cap R^*$. Таким образом, будучи пересечением двух замкнутых множеств пространства R, множество $\widetilde{U}^*$ замкнуто в R. Но так как $\widetilde{U}^* \subset \overline{U}$, то множество $\widetilde{U}^*$ замкнуто и в пространстве $\overline{U}$. Так как последнее бикомпактно, то из первой части предложения В) следует, что и множество $\widetilde{U}^*$ бикомпактно.

С) Бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто (см. определение 18).

Действительно, пусть M—бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства R и пусть $a \in R \setminus M$. Для каждой точки $x \in M$ найдутся непересекающиеся окрестности U_x и V_x точек x и a. Области U_x, $x \in M$, составляют покрытие множества M, и из него можно выбрать конечное покрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$. Пересечение $V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_k}$ содержит окрестность V точки a. Таким образом, точка a имеет окрестность V, не пересекающуюся с M, и потому a не принадлежит к $\overline{M}$.

D) Непрерывный образ бикомпактного пространства есть бикомпактное пространство.

Действительно, пусть f—непрерывное отображение бикомпактного пространства R на пространство R'. Пусть Σ'—произвольное покрытие пространства R' областями. Через Σ обозначим покрытие пространства R областями $f^{-1}(G')$, где $G' \in \Sigma'$ (см. § 10, B)). Из покрытия Σ можно выбрать конечное покрытие $G_1, \ldots, G_k$. Области $f(G_1), \ldots, f(G_k)$ входят в покрытие Σ' и составляют конечное покрытие пространства R'.

E) Взаимно однозначное и непрерывное отображение бикомпактного пространства на хаусдорфово является взаимно непрерывным.

Действительно, пусть f—непрерывное взаимно однозначное отображение бикомпактного пространства R на хаусдорфово пространство R'. Для доказательства непрерывности отображения f^{-1} достаточно доказать, что образ каждого замкнутого множества F пространства R при отображении f является замкнутым множеством в R' (см. § 10, B)). Так как пространство R бикомпактно, то замкнутое его множество F также бикомпактно (см. (B)). Таким образом, и множество $f(F)$ бикомпактно (см. D)), а так как пространство R' хаусдорфово, то множество $f(F)$ замкнуто в нем (см. C)).

F) Бикомпактное хаусдорфово пространство нормально (см. определение 18).

Действительно, пусть R—бикомпактное хаусдорфово пространство. Докажем сначала, что оно регулярно (см. определение 18). Пусть a—точка и B—не содержащее ее замкнутое множество пространства R. Для каждой точки $x \in B$ существуют непересекающиеся окрестности U_x и V_x точек a и x. Из покрытия бикомпактного множества B областями V_x, $x \in B$, выберем конечное покрытие $V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}$ и сумму областей $V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}$ обозначим через H. Пересечение $U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_k}$ обозначим через G Области G и H, содержащие a и B соответственно, не пересекаются. Таким образом, пространство R регулярно.

Пусть A и B—два замкнутых непересекающихся подмножества бикомпактного хаусдорфова пространства R. Так как, по доказанному, пространство R регулярно, то для каждой точки $x \in A$

найдутся такие непересекающиеся области G_x и H_x, что $x \in G_x$, $B \subset H_x$. Из покрытия бикомпактного множества A областями G_x, $x \in A$, выберем конечное покрытие $G_{x_1}, \ldots, G_{x_k}$ и сумму областей $G_{x_1}, \ldots, G_{x_k}$ обозначим через G. Пересечение $H_{x_1} \cap \ldots \cap H_{x_k}$ обозначим через H. Тогда G и H суть такие непересекающиеся области, что $A \subset G$, $B \subset H$. Таким образом, нормальность пространства R доказана.

G) Заданная на бикомпактном топологическом пространстве непрерывная функция ограничена и достигает своих верхней и нижней граней.

Действительно, пусть f—непрерывное отображение бикомпактного пространства R в пространство D действительных чисел (см. § 12, A)). Так как множество $f(R) \subset D$ бикомпактно (см. D)), то оно ограничено и замкнуто и потому содержит свои верхнюю и нижнюю грани.

H) Пусть R—бикомпактное топологическое пространство, Δ—некоторая система его замкнутых множеств, пересечение которых есть множество F, и G—некоторая область пространства R, содержащая множество F. Существует тогда конечная совокупность множеств системы Δ, пересечение которых содержится в G. Если же пересечение двух любых множеств системы Δ содержит третье множество той же системы, то в системе Δ найдется множество, содержащееся в G.

Для доказательства рассмотрим систему Δ' множеств вида $(R \setminus G) \cap A$, где $A \in \Delta$. Так как пересечение всех множеств системы Δ равно F, то пересечение всех множеств системы Δ' равно $(R \setminus G) \cap F$, т. е. пусто, и потому система Δ' не может быть центрированной. Таким образом, существует в Δ конечная совокупность множеств, пересечение которых содержится в G. Вторая часть утверждения H) является непосредственным следствием первой.

П р и м е р 25. Исторически раньше, чем понятие бикомпактности, возникло понятие *компактности*, которое, однако, в настоящее время настолько утратило свое значение, что некоторые авторы считают правильным вовсе отбросить его, а слово «бикомпактность» заменить словом «компактность». Понятие компактности, как и понятие бикомпактности, можно формулировать в четырех различных формах, эквивалентных между собой. Приведем их здесь:

a) Из всякого счетного покрытия пространства R областями можно выбрать конечное.

b) Всякая счетная центрированная система замкнутых множеств пространства R имеет непустое пересечение.

c) Всякое счетное (а потому и всякое бесконечное) множество имеет в пространстве R предельную точку.

d) Всякая последовательность F_1, F_2, ... занумерованных натуральными числами замкнутых непустых множеств пространства R, удовлетворяющих условию $F_i \supset F_j$ при $i<j$, имеет непустое пересечение.

Эквивалентность всех этих условий доказывается примерно так же, как теорема 4, но проще.

Пространство называется *локально компактным*, если каждая его точка обладает окрестностью, замыкание которой компактно

Покажем, что компактное пространство R со счетной базой бикомпактно.

Пусть Ω—счетная база пространства R и Σ—произвольное его покрытие. Каждая из областей системы Σ может быть представлена как сумма некоторых областей системы Ω. Таким образом, обозначая через Ω' совокупность всех областей базиса Ω, каждая из которых входит хотя бы в одну из областей системы Σ, мы получаем счетное покрытие Ω' пространства R. В силу компактности пространства R из счетного его покрытия Ω' можно выделить конечное покрытие $U_1, \ldots, U_k$. По предположению, каждая область U_i содержится в некоторой области $G_i \in \Sigma$. Области $G_1, \ldots, G_k$ и составляют конечное покрытие пространства R, выбранное из покрытия Σ.

Пример 26. Компактное метрическое пространство всегда имеет счетную базу и потому бикомпактно (см. примеры 20 и 25).

Пусть R—компактное метрическое пространство; покажем, что оно имеет счетную базу. Для доказательства построим в пространстве R конечную ε-сеть, т. е. такое конечное множество, что для каждой точки $x \in R$ найдется точка этого конечного множества, отстоящая от x меньше чем на ε. Допустим, что в пространстве R уже имеется последовательность точек $a_1, \ldots, a_n$, расстояние между каждыми двумя из которых не меньше ε. Если последовательность $a_1, \ldots, a_n$ еще не есть ε-сеть, то существует точка a_{n+1}, расстояние которой до каждой из точек $a_1, \ldots, a_n$ не меньше ε. Таким образом, мы или придем к конечной ε-сети пространства R, или получим противоречие с компактностью пространства R, так как бесконечная последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$, каждые две из которых отстоят друг от друга на расстоянии, не меньшем ε, не может иметь предельной точки в R. Суммируя конечные ε-сети, взятые для $\varepsilon=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, мы получим в пространстве R счетное всюду плотное множество. Беря в пространстве R шары всевозможных рациональных радиусов с центрами в точках счетного всюду плотного множества, мы получим счетный базис этого пространства.

Стоит отметить, что наличие счетного всюду плотного множества в топологическом пространстве не всегда означает наличие счетного базиса пространства.

§ 14. Прямое произведение топологических пространств

Прямое произведение топологических пространств, или, иначе, *топологическое произведение* является аналогом прямого произведения групп; оно дает возможность из заданных пространств конструировать новые и сводить изучение более сложных пространств к изучению более простых. Наиболее известный пример топологического произведения представляет собой плоскость, рассматриваемая как совокупность пар действительных чисел; рассматриваемая таким образом плоскость представляет собой прямое произведение двух действительных числовых прямых. Настоящий параграф посвящается определению понятия прямого произведения топологических пространств и изучению основных его свойств. Определение сперва дается для двух сомножителей, и оно очевидным образом может быть обобщено на произвольное конечное число сомножителей. Затем произведение определяется для произвольного множества сомножителей. Последнее определение оказывается целесообразным лишь для бикомпактных сомножителей; оно принадлежит А. Н. Тихонову.

А) Пусть R_1 и R_2—два топологических пространства. Обозначим через T множество всех пар (x_1, x_2), где $x \in R_1$, $x_2 \in R_2$. Пусть $M_1 \subset R_1$, $M_2 \subset R_2$; обозначим через (M_1, M_2) подмножество множества T, состоящее из всех пар (x_1, x_2), где $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. Определим в множестве T топологию при помощи базиса Σ, исходя из базисов Σ_1 и Σ_2 пространств R_1 и R_2. За Σ примем совокупность всех множеств (U_1, U_2), где $U_1 \in \Sigma_1$, $U_2 \in \Sigma_2$. Оказывается, что совокупность Σ удовлетворяет условиям теоремы 3 и потому определяет топологическое пространство T и что определенная таким образом в T топология не зависит от случайного выбора базисов Σ_1 и Σ_2, а определяется пространствами R_1 и R_2. Пространство T называется *прямым произведением* топологических пространств R_1 и R_2 или их *топологическим произведением*: $T = R_1 \times R_2$. Оказывается, далее, что если G_1 и G_2 суть области пространств R_1 и R_2, то (G_1, G_2) есть область пространства T, а если F_1 и F_2 суть замкнутые множества пространств R_1 и R_2, то (F_1, F_2) есть замкнутое множество пространства T. Сверх того, если R_1^* и R_2^* суть подпространства пространств R_1 и R_2 (см. определение 17), то их топологическое произведение $R_1^* \times R_2^*$ естественным образом гомеоморфно подпространству (R_1^*, R_2^*) пространства T.

Покажем прежде всего, что совокупность Σ удовлетворяет условиям теоремы 3. Пусть (x_1, x_2) и (y_1, y_2)—две различные точки из T. Так как они различны, то имеет место хотя бы одно из неравенств $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$. Допустим для определенности, что $x_1 \neq y_1$. Существует тогда окрестность U_1 точки x_1 в пространстве R_1, не содержащая точки y_1. Если теперь U_2—произвольная окрестность точки x_2 в пространстве R_2, то окрестность (U_1, U_2) точки (x_1, x_2) в пространстве T не содержит точки (y_1, y_2). Пусть, далее, (U_1, U_2) и (V_1, V_2)—две окрестности некоторой точки (x_1, x_2). Существуют тогда окрестность W_1 точки x_1, входящая в $U_1 \cap V_1$, и окрестность W_2 точки x_2, входящая в $U_2 \cap V_2$. Окрестность (W_1, W_2) точки (x_1, x_2), очевидно, содержится в $(U_1, U_2) \cap \cap (V_1, V_2)$. Таким образом, условия теоремы 3 выполнены. С такой же легкостью проверяется эквивалентность (см. § 9, F)) системы Σ с другой системой Σ' окрестностей в пространстве T, полученной из систем Σ_1' и Σ_2', эквивалентных Σ_1 и Σ_2.

Если $(x_1, x_2) \in (G_1, G_2)$, то $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$, а так как G_1 и G_2—области, то существуют такие окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2, что $U_1 \subset G_1$, $U_2 \subset G_2$. Тогда $(x_1, x_2) \in (U_1, U_2) \subset (G_1, G_2)$, и, таким образом, (G_1, G_2) есть область в T. Так как F_1 и F_2 суть замкнутые множества, то дополнения их $G_1 = R_1 \setminus F_1$ и $G_2 = R_2 \setminus F_2$ суть облсти. Легко проверяется, что дополнение к (F_1, F_2) в T можно представить как сумму $(R_1, G_2) \cup (G_1, R_2)$, а так как, по только что доказанному, (R_1, G_2) и (G_1, R_2) суть области в T, то их сумма также есть область. Таким образом, (F_1, F_2) есть замкнутое множество в T.

Каждой точке (x_1, x_2) топологического произведения $R_1^* \times R_2^*$ поставим в соответствие точку (x_1, x_2) пространства $R_1 \times R_2$. Пользуясь предложением C) § 11, легко проверить, что полученное таким образом отображение пространства $R_1^* \times R_2^*$ на подпространство (R_1^*, R_2^*) пространства $R_1 \times R_2$ является гомеоморфизмом.

Определим теперь прямое произведение произвольного множества топологических пространств, совпадающее с вышеприведенным для случая двух сомножителей.

Определение 20. Пусть Ω — произвольное множество топологических пространств. Рассмотрим функцию α, ставящую в соответствие каждому пространству $R \in \Omega$ точку $\alpha(R) \in R$. Множество всех таких функций обозначим через T и при $\alpha \in T$ положим $\alpha(R) = R(\alpha)$. Таким образом, буква R употребляется не только для обозначения топологического пространства, но и для обозначения «проектирующего» отображения множества T на это пространство. При $M \subset R$ определено множество $R^{-1}(M)$. В множестве T зададим топологию базисом Σ, определяемым базисами пространств множества Ω следующим образом: произвольную окрестность $U \in \Sigma$ определим, исходя из произвольного конечного подмножества $R_1, \ldots, R_k$ множества Ω и произвольных окрестностей $U_1, \ldots, U_k$ пространств $R_1, \ldots, R_k$, положив $U = R_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap R_k^{-1}(U_k)$. Оказывается, что определенная так система Σ удовлетворяет условиям теоремы 3 и задает, следовательно, топологию в множестве T, причем эта топология не зависит от случайно выбранных базисов пространств множества Ω, а определяется самими этими пространствами. Полученное топологическое пространство T называется *прямым произведением* топологических пространств множества Ω, или *топологическим произведением* этих пространств.

Покажем, что для системы Σ выполнены условия теоремы 3. Пусть α и β—две различные точки пространства T. Тогда существует пространство $R_1 \in \Omega$, для которого $\alpha(R_1) \neq \beta(R_1)$. Пусть U_1—окрестность точки $\alpha(R_1)$ в пространстве R_1, не содержащая точки $\beta(R_1)$. Тогда окрестность $U = R_1^{-1}(U_1)$ точки α в пространстве T не содержит точки β. Переходя к условию b) теоремы 3, заметим, что если окрестность U определена по конечному подмножеству $R_1, \ldots, R_k$ множества Ω, то подмножество это можно расширить, не меняя окрестности U, присоединив к нему любые другие пространства $R_{k+1}, \ldots, R_l$ из Ω и полагая $U_{k+1} = R_{k+1}, \ldots$ $\ldots, U_l = R_l$. Таким образом, если U и V суть две окрестности точки α в пространстве T, то мы можем считать, что

$$U = R_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap R_k^{-1}(U_k), \quad V = R_1^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap R_k^{-1}(V_k).$$

Обозначим через W_i окрестность точки $\alpha(R_i)$ в пространстве R_i, входящую в пересечение $U_i \cap V_i$, и определим окрестность W, положив $W = R_1^{-1}(W_1) \cap \ldots \cap R_k^{-1}(W_k)$. Очевидно, что $W \subset U \cap V$. Таким образом, оба условия теоремы 3 выполнены, и система Σ может быть принята за базис. Независимость топологии пространства T от случайного выбора базисов сомножителей доказывается столь же просто.

Отметим теперь одно весьма простое, но существенное свойство топологического произведения.

B) Прямое произведение хаусдорфовых топологических пространств также является хаусдорфовым (см. определение 18).

Действительно, пусть T—прямое произведение множества Ω хаусдорфовых пространств и α и β—две различные точки пространства T. Существует тогда такое пространство R_1, что $\alpha(R_1) \neq \beta(R_1)$. Так как пространство R_1 хаусдорфово, то в R_1 найдутся непересекающиеся окрестности U_1 и V_1 точек $\alpha(R_1)$ и $\beta(R_1)$. Окрестности $U = R_1^{-1}(U_1)$ и $V = R_1^{-1}(V_1)$ точек α и β в пространстве T, очевидно, не пересекаются. Таким образом, пространство T хаусдорфово.

Докажем теперь важную и нетривиальную теорему А. Н. Тихонова.

Теорема 5. *Прямое произведение произвольного множества бикомпактных топологических пространств бикомпактно.*

Для доказательства этой теоремы докажем предварительно два предложения: C) и D), представляющие собой видоизменение одного из критериев бикомпактности (см. условие 2) теоремы 4).

C) Для того чтобы топологическое пространство было бикомпактно, необходимо и достаточно, чтобы любая центрированная система его произвольных множеств имела общую точку прикосновения (см. определение 12).

Действительно, пусть R—топологическое пространство. Допустим, что для него выполнен критерий, приведенный в С), и докажем, что оно бикомпактно. Пусть Δ—произвольная центрированная система замкнутых множеств пространства R. По предположению, система эта имеет общую точку прикосновения a. Так как каждое множество системы Δ замкнуто, то a принадлежит всем множествам этой системы и, следовательно, пространство R бикомпактно. Допустим, наоборот, что R есть бикомпактное пространство, и пусть Δ—нроизвольная центрированная система его множеств. Рассмотрим систему $\overline{\Delta}$, составленную из всех множеств $\overline{M}$, где $M \in \Delta$. Система $\overline{\Delta}$, очевидно, центрирована, и ввиду бикомпактности пространства R пересечение ее содержит некоторую точку a. Эта точка и является общей точкой прикосновения всех множеств системы Δ.

D) Центрированная система называется *максимальной*, если к ней нельзя присоединить никакое новое множество без нарушения центрированности. Очевидно, что максимальная центрированная система является *мультипликативной*, т. е. наряду с каждыми своими двумя множествами содержит и их пересечение. Оказывается, что всякую центрированную систему можно включить в максимальную центрированную систему. Таким образом, для того чтобы топологическое пространство было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая его максимальная центрированная система имела общую точку прикосновения.

Покажем, что всякую центрированную систему Δ пространства R можно включить в некоторую максимальную центрированную систему Δ'. Занумеруем все подмножества пространства R в трансфинитную последовательность M_1, M_2, ... трансфинитными числами, меньшими некоторого трансфинитного числа θ. Построим теперь неубывающую трансфинитную последовательность центрированных систем Δ_0, Δ_1, ... Систему Δ_0 определим, положив $\Delta_0 = \Delta$. Допустим, что центрированные системы Δ_α уже определены для всех трансфинитных чисел α, меньших некоторого трансфинитного числа β. Так как центрированные системы Δ_α, $\alpha < \beta$, образуют неубывающую последовательность, то их объединение Δ'_β также является центрированной системой. Присоединяя к системе Δ'_β множество M_β, мы получим новую систему Δ''_β. Если эта система не центрирована, то положим $\Delta_\beta = \Delta'_\beta$; если она центрирована, то положим $\Delta_\beta = \Delta''_\beta$. Легко видеть, что объединение всех полученных таким образом центрированных систем Δ_β, $\beta < \theta$, представляет собой максимальную центрированную систему.

Доказательство теоремы 5. Пусть Ω — произвольное множество бикомпактных топологических пространств, T—их прямое произведение и Δ—произвольная максимальная центрированная система множеств пространства T. Докажем, что система Δ имеет общую точку прикосновения; этим бикомпактность пространства T будет доказана (см. D)). Пусть $R \in \Omega$; обозначим через $R(\Delta)$ систему подмножеств пространства R, составленную из всех множеств вида $R(M)$, где $M \in \Delta$. Так как система Δ центрирована, то система $R(\Delta)$ также центрирована, и ввиду бикомпактности пространства R она имеет общую точку прикосновения $\alpha(R)$. Покажем, что $\alpha \in T$ есть общая точка прикосновения системы Δ. Пусть U—произвольная окрестность точки α в T, $U = R_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap R_k^{-1}(U_k)$. Так как $\alpha(R_i)$ есть точка прикосновения всех множеств системы $R_i(\Delta)$, то окрестность U_i пересекается с каждым множеством системы $R_i(\Delta)$, а из этого следует, что окрестность $R_i^{-1}(U_i)$ пересекается с каждым множеством системы Δ. Покажем, что множество $R_i^{-1}(U_i)$ входит в систему Δ. Для этого достаточно показать, что система Δ_i, получаемая присоединением к системе Δ множества $R_i^{-1}(U_i)$, центрирована; из этого ввиду максимальности системы Δ будет следовать, что $R_i^{-1}(U_i) \in \Delta$. Пусть $M_1, \ldots, M_s$—произвольная конечная система множеств из Δ. Так как система Δ мультипликативна, то пересечение $M = M_1 \cap \ldots \cap M_s$ также принадлежит системе Δ и, следовательно, пересечение $M_1 \cap \ldots \cap M_s \cap R_i^{-1}(U_i) = M \cap R_i^{-1}(U_i)$ не пусто. Это значит, что система Δ_i центрирована. Так как каждое из множеств $R_i^{-1}(U_i)$, $i = 1, \ldots, k$, входит в систему Δ, то ввиду мультипликативности системы Δ и их пересечение U входит в систему Δ, и потому пересечение множества U с любым множеством системы Δ не пусто. Итак, любая окрестность U точки α пересекается с каждым множеством системы Δ. Таким образом, точка α является общей точкой прикосновения множеств системы Δ. Этим теорема 5 доказана.

Как непосредственное следствие теоремы 5 докажем следующее предложение:

E) Прямое произведение конечного числа локально бикомпактных пространств локально бикомпактно.

Доказательство достаточно провести для двух локально бикомпактных сомножителей R_1 и R_2. Пусть (x_1, x_2)—произвольная точка пространства $R_1 \times R_2$ (см. A)) и U_i—такая окрестность точки x_i в R_i, что множество $\overline{U}_i$ бикомпактно, $i = 1, 2$. Так как $(U_1, U_2) \subset (\overline{U}_1, \overline{U}_2)$ и множество $(\overline{U}_1, \overline{U}_2)$ замкнуто (см. A)), то $\overline{(U_1, U_2)} \subset (\overline{U}_1, \overline{U}_2)$. Множество $(\overline{U}_1, \overline{U}_2)$ как произведение двух бикомпактных пространств (см. A)) бикомпактно в силу теоремы 5, и потому его замкнутое подмножество $\overline{(U_1, U_2)}$ также бикомпактно. Таким образом, найдена окрестность (U_1, U_2) точки (x_1, x_2) в пространстве $R_1 \times R_2$, замыкание которой бикомпактно.

Нижеследующая теорема А. Н. Тихонова не будет применяться в теории непрерывных групп, но она настолько значительна, что я привожу ее здесь для полноты изложения теории бикомпактных пространств. Для ее формулировки введем пространство S_τ.

F) Пусть τ — произвольная бесконечная мощность и Γ — некоторое множество мощности τ. Каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ поставим в соответствие экземпляр I_γ действительного числового отрезка $0 \leqslant t_\gamma \leqslant 1$. Прямое произведение всех пространств I_γ, $\gamma \in \Gamma$, обозначим через R_τ. С точностью до гомеоморфизма оно определяется мощностью τ. Точку $t \in R_\tau$ можно рассматривать как действительную числовую функцию, ставящую в соответствие каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ действительное число $t(\gamma) = t_\gamma$. Так как все пространства I_γ хаусдорфовы и бикомпактны, то пространство R_τ хаусдорфово и бикомпактно (см. B) и теорему 5).

Т е о р е м а 6. *Всякое вполне регулярное топологическое пространство R веса τ гомеоморфно некоторому подпространству пространства R_τ* (см. определения 18 и 14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если мощность τ конечна, то пространство R состоит из конечного числа точек, и теорема очевидна. Пусть Σ — базис пространства R, имеющий бесконечную мощность τ. Пару окрестностей G, H, принадлежащих Σ, назовем *отмеченной*, если существует непрерывная действительная числовая функция f, заданная на R и удовлетворяющая условиям:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \text{ при } x \in R; \quad f(x) < 1/2 \text{ при } x \in G;$$
$$f(x) = 1 \text{ при } x \in R \setminus H. \qquad (1)$$

Покажем, что если H есть окрестность точки a, то существует такая окрестность G той же точки a, что G, H есть отмеченная пара. Действительно, в силу полной регулярности пространства R существует непрерывная функция f, заданная на R и удовлетворяющая условиям: $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при $x \in R$; $f(a) = 0$; $f(x) = 1$ при $x \in R \setminus H$. Обозначим через G' множество всех тех $x \in R$, для которых $f(x) < \frac{1}{2}$. Множество G' есть область в R, содержащая точку a, и потому существует окрестность G точки a, содержащаяся в G'. Окрестности G, H и образуют искомую отмеченную пару. Так как мощность τ бесконечна, то из доказанного следует, что мощность множества всех отмеченных пар равна τ. Таким образом, отмеченные пары можно поставить во взаимно однозначное соответствие с элементами множества Γ (см. F)), записав каждую отмеченную пару окрестностей в виде G_γ, H_γ, $\gamma \in \Gamma$. Какую-либо вполне определенную функцию, удовлетворяющую условиям (1) в отношении пары G_γ, H_γ, обозначим через f_γ.

Поставим теперь в соответствие каждой точке $x \in R$ точку $t = \varphi(x) \in R_\tau$, определяемую соотношениями $t(\gamma) = f_\gamma(x)$, и покажем, что φ есть взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства R на подпространство $S = \varphi(R)$ пространства R_τ.

Покажем, что две различные точки a и b пространства R переводятся отображением φ в различные точки множества S. Пусть H—окрестность точки a, не содержащая точки b, и G—такая окрестность точки a, что G, H образуют отмеченную пару. Мы имеем: $G=G_\gamma$, $H=H_\gamma$, где γ—некоторый элемент из Γ. Так как функция f_γ принимает в точках a и b различные значения $\left(f_\gamma(a)<\frac{1}{2}\right.$, $\left.f_\gamma(b)=1\right)$, то $\varphi(a)\neq\varphi(b)$.

Покажем, что отображение φ непрерывно. Пусть $U=$ $=I_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1})\cap\ldots\cap I_{\gamma_k}^{-1}(U_{\gamma_k})$—произвольная окрестность точки $\varphi(a)$, $a\in R$. Так как функции f_{γ_1}, ..., f_{γ_k} все непрерывны, то существует такая окрестность V точки a, что $f_{\gamma_i}(x)\in U_{\gamma_i}$ при $x\in V$, $i=1$, ..., k. Очевидно, что $\varphi(V)\subset U$.

Покажем, наконец, что отображение φ^{-1} пространства S на пространство R непрерывно. Пусть $\varphi(a)$, $a\in R$,—произвольная точка из S, H—произвольная окрестность точки a в R и G—такая окрестность точки a, что пара G, H является отмеченной: $G=G_\gamma$, $H=H_\gamma$. Окрестность U точки $\varphi(a)$ определим, положив $U=I_\gamma^{-1}(U_\gamma)$, где U_γ есть множество всех чисел отрезка I_γ, меньших $\frac{1}{2}$. Тогда $\varphi^{-1}(U)\subset H$, и непрерывность отображения φ^{-1} доказана.

Итак, теорема 6 полностью доказана.

Нижеследующая теорема 7 будет использоваться в главе V при построении теории интегральных уравнений на бикомпактной топологической группе. Она дает возможность аппроксимировать непрерывное ядро интегрального уравнения «вырожденными ядрами». Для ее формулировки дадим определение непрерывной функции двух переменных; оно очевидным образом распространяется на функции произвольного конечного числа переменных.

G) Пусть R и S—два топологических пространства и f—действительная числовая функция двух переменных $x\in R$ и $y\in S$. Функцию f можно трактовать как отображение топологического произведения $R\times S$ в пространство D действительных чисел, ставящее в соответствие каждой паре $(x, y)\in R\times S$ действительное число $f(x, y)$. Если это отображение непрерывно, то функция f называется *непрерывной функцией двух переменных* x, y. Легко проверить, что функция f непрерывна тогда и только тогда, когда для всякой пары $a\in R$, $b\in S$ и всякого положительного числа ε существуют такие окрестности U и V точек a и b, что при $x\in U$, $y\in V$ мы имеем $|f(x, y)-f(a, b)|<\varepsilon$ (см. § 12, A)).

Теорема 7. *Пусть R и S—два бикомпактных хаусдорфовых топологических пространства и h—непрерывная действительная функция двух переменных $x\in R$ и $y\in S$. Оказывается, что для произвольного положительного ε существуют такое натуральное число n, такие непрерывные функции f_1, ..., f_n, заданные на R,* *и такие непрерывные функции* $g_1, \ldots, g_n$, *заданные на* S, *что*

$$\left|h(x, y)-\sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)\right|<\varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство разобьем на несколько пунктов.

а) Пусть ξ—действительное переменное, изменяющееся на сегменте $-\alpha \leqslant \xi \leqslant \alpha$; покажем, что функцию $|\xi|$ можно разложить на этом сегменте в равномерно сходящийся ряд полиномов, или, что то же, равномерно аппроксимировать полиномами.

Рассмотрим функцию $+\sqrt{1-\zeta}$ действительного переменного ζ. Функция эта при $-1<\zeta<1$ разлагается в ряд по формуле бинома Ньютона; именно, мы имеем:

$$+\sqrt{1-\zeta}=1-\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^k, \tag{2}$$

где

$$\alpha_1=\frac{1}{2}, \quad \alpha_k=\frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-3)}{2 \cdot 4 \ldots 2k}, \quad k \geqslant 2.$$

Так как все числа α_k положительны и ряд (2) при $0 \leqslant \zeta<1$ сходится к неотрицательному числу, то при $0 \leqslant \zeta<1$ и любом r мы имеем: $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \zeta^k \leqslant 1$, и потому $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \leqslant 1$, а из этого следует, что ряд (2) равномерно сходится к функции $+\sqrt{1-\zeta}$ на всем сегменте $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$. Далее, мы имеем при $-\alpha \leqslant \xi \leqslant \alpha$: $|\xi|= =+\alpha \sqrt{1-\left(1-\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)}$. Таким образом, умножая равенство (2) на α и подставляя в него $\zeta=1-\frac{\xi^2}{\alpha^2}$, получаем разложение функции $|\xi|$ на сегменте $-\alpha \leqslant \xi \leqslant \alpha$ в равномерно сходящийся ряд полиномов.

b) Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_s$—действительные переменные. Функцию m этих переменных определим, приняв за ее значение $m(\eta_1, \ldots, \eta_s)$ максимальное из чисел $\eta_1, \ldots, \eta_s$. Покажем, что функцию m можно равномерно аппроксимировать полиномами в любом кубе $-\beta \leqslant \eta_i \leqslant \beta$, $i=1, \ldots s$.

Доказательство достаточно провести для двух переменных; дальше построение аппроксимирующих полиномов идет по индукции. Легко видеть, что $m(\eta_1, \eta_2)=\frac{1}{2}|\eta_1-\eta_2|+\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$. Так как функция $|\eta_1-\eta_2|$ может быть равномерно аппроксимирована полиномами (см. а)), то и функция m двух переменных может быть равномерно аппроксимирована полиномами.

с) Пусть T—бикомпактное хаусдорфово и, следовательно, нормальное топологическое пространство с фиксированным базисом Σ. Пару окрестностей W, W' из Σ будем называть *отмечен-*

ной, если она удовлетворяет условию $\overline{W} \subset W'$. *Функцией Урысона* для отмеченной пары W, W' будем называть непрерывную функцию w, заданную на T, обращающуюся в нуль на $T \setminus W'$, в единицу на W и удовлетворяющую условию $0 \leqslant w(z) \leqslant 1$, $z \in T$. Поставим в соответствие каждой отмеченной паре некоторую вполне определенную функцию Урысона (см. лемму Урысона в § 12) и совокупность Ω всех полученных таким образом функций назовем *полной системой функций Урысона* пространства T. Покажем, что каждую непрерывную функцию, заданную на T, можно равномерно аппроксимировать полиномами от функций, входящих в множество Ω.

Так как любая непрерывная функция, заданная на T, отличается от положительной функции на аддитивную постоянную (см. § 13, G)), то предложение с) достаточно доказать для положительной функции h. Пусть δ — произвольное положительное число. Для каждой точки $c \in T$ выберем такую ее окрестность $W'_c \in \Sigma$, что при $z \in W'_c$ имеем: $|h(z) - h(c)| < \frac{\delta}{2}$. Далее, выберем такую окрестность $W_c \in \Sigma$ точки c, что $\overline{W}_c \subset W'_c$. Функцию Урысона, поставленную в соответствие отмеченной паре W_c, W'_c, обозначим через w_c. Минимум функции h на множестве $\overline{W}_c$ обозначим через h_c. Очевидно, что

$$h_c w_c(z) \leqslant h(z); \quad \text{при} \quad z \in W_c \quad \text{имеем:} \quad h(z) \leqslant h_c w_c(z) + \delta. \tag{3}$$

Совокупность окрестностей W_c, $c \in T$, покрывает пространство T. Пусть $W_{c_1}, \ldots, W_{c_s}$ — конечное покрытие пространства T (см. определение 19). Положим $h'(z) = m(h_{c_1} w_{c_1}(z), \ldots, h_{c_s} w_{c_s}(z))$. Из (3) непосредственно вытекает, что $|h(z) - h'(z)| < \delta$, а так как в силу b) функцию m можно равномерно аппроксимировать полиномами, то этим предложение с) доказано.

d) Для доказательства теоремы 7 выберем в пространствах R и S некоторые полные системы функций Урысона Ω' и Ω''. Легко видеть, что множество Ω всех функций вида $w(x, y) = u(x)v(y)$, где $u \in \Omega'$, $v \in \Omega''$, есть полная система функций Урысона пространства T. Так как любой полином от функций вида $u(x)v(y)$ имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)$, то из с) следует справедливость теоремы 7.

П р и м е р 27. Рассмотрим пространство R_τ (см. F)) для случая, когда τ есть счетная мощность. В этом случае за множество Γ можно принять совокупность всех натуральных чисел, и точка $t \in R_\tau$ определяется обыкновенной бесконечной последовательностью своих координат: $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots)$; $0 \leqslant t_n \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Точке $t \in R_\tau$ поставим в соответствие точку $x = \psi(t)$

гильбертова пространства (см. пример 20), положив $x_n = \frac{1}{n} t_n$, где x_1, x_2, ... суть координаты точки x в H. Легко доказывается, что ψ есть гомеоморфное отображение пространства R_τ на подпространство $Q = \psi(R_\tau)$ пространства H, состоящее из всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Пространство Q бикомпактно и называется *гильбертовым параллелепипедом.* Так как регулярное пространство со счетной базой нормально (см. пример 24) и потому вполне регулярно, то в случае счетной мощности τ теорема 6 превращается в известную теорему П. С. Урысона:

Регулярное пространство со счетной базой гомеоморфно подпространству гильбертова параллелепипеда и потому метризуемо.

Пример 28. Дадим пример компактного (см. пример 25), но не бикомпактного пространства. Для этого в пространстве R_τ (см. F)), где τ — несчетная мощность, определим следующим образом подпространство R_τ^*. Точку $t \in R_\tau$ тогда и только тогда причислим к R_τ^*, когда среди ее координат t_γ имеется не более счетного числа отличных от нуля. Покажем, что пространство R_τ^* компактно. Пусть M — произвольное счетное множество в R_τ^*. Так как каждая точка $t \in M$ имеет лишь счетное число отличных от нуля координат, а все множество M счетно, то существует такая счетная последовательность γ_1, γ_2, ... элементов множества Γ, что если точка t принадлежит к M и ее координата t_γ отлична от нуля, то γ принадлежит к последовательности γ_1, γ_2, ... Прямое произведение R отрезков I_{γ_1}, I_{γ_2}, ... естественным образом можно рассматривать как подпространство пространства R_τ^*, а так как пространство R бикомпактно, то множество M имеет в R_τ^* предельную точку. Следовательно, пространство R_τ^* компактно. С другой стороны, легко проверить, что множество R_τ^* всюду плотно в пространстве R_τ, и $R_\tau^* \neq R_\tau$ ввиду несчетности τ. Таким образом. множество R_τ^* не замкнуто в R_τ. Так как пространство R_τ хаусдорфово и бикомпактно, то его незамкнутое подмножество R_τ^* не может быть бикомпактно (см. § 13, С)).

§ 15. Связность

К числу ограничительных условий, налагаемых на топологические пространства, принадлежит условие *связности*, исследованию которого посвящен настоящий параграф.

А) Топологическое пространство R называется *связным*, если его нельзя разбить на сумму двух непустых непересекающихся замкнутых множеств A и B. Очевидно, что то же самое определение можно выразить в другой форме: топологическое пространство R называется связным, если его нельзя разбить на сумму двух непустых непересекающихся областей A и B.

Применяя это определение к подпространству, мы получим понятие связного множества: множество M точек пространства R называется *связным*, если оно, рассматриваемое как подпространство (см. определение 17), связно.

Определение связности множества целесообразнее, впрочем, формулировать в следующей более непосредственной форме:

B) Подмножество M пространства R называется связным, если его нельзя разбить на сумму двух таких непересекающихся непустых множеств A и B, что множество $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap M$ пусто. Очевидно, что если $M = R$, то определение это совпадает с определением A).

C) Пусть Δ—некоторая совокупность таких связных подмножеств пространства R (см. B)), что все они имеют общую точку a. Тогда сумма M всех множеств, входящих в Δ, связна.

Допустим, что множество M несвязно. Тогда M можно разбить на сумму двух таких непересекающихся непустых множеств A и B, что $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cap M$ пусто. Пусть $a \in A$, b—некоторая точка из B и P—множество системы Δ, содержащее точку b. Положим $A' = A \cap P$, $B' = B \cap P$. Тогда A' и B' суть два непересекающихся непустых множества, на сумму которых распадается P. Далее, $\bar{A}' \subset \bar{A}$, $\bar{B}' \subset \bar{B}$ и $P \subset M$. Мы имеем, следовательно, $(\bar{A}' \cap \bar{B}') \cap P \subset (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap M$. Так как правая часть этого соотношения, по предположению, пуста, то и левая пуста. Таким образом, множество P оказывается несвязным, что противоречит предположению.

D) Пусть a—некоторая точка топологического пространства R. Тогда в R существует *максимальное* связное подмножество K, содержащее точку a. Максимальность множества K заключается в том, что каждое связное подмножество пространства R, содержащее точку a, входит в K. Множество K всегда замкнуто и называется *компонентой* точки a в пространстве R. Очевидно, что компонента K точки a является компонентой и любой другой точки, входящей в K. Поэтому иногда мы будем называть K просто компонентой пространства R. Если все компоненты пространства R суть отдельные точки, то пространство R называется *вполне несвязным*.

Докажем предложение D).

Пусть Δ—совокупность всех связных подмножеств пространства R, содержащих точку a. Сумма K всех множеств, входящих в Δ, связна в силу замечания C) и, по самой конструкции, является максимальным связным множеством, содержащим точку a. Покажем, что множество K замкнуто. Для этого достаточно показать, что множество $\bar{K}$ связно, ибо тогда в силу максимальности множества K мы будем иметь $\bar{K} \subset K$ и, следовательно, $\bar{K} = K$.

Допустим, что $\bar{K}$ несвязно. Тогда $\bar{K}$ распадается на сумму двух таких непересекающихся непустых множеств A и B, что $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{K}$ пусто. Положим $A' = A \cap K$, $B' = B \cap K$. Допустим, что $a \in A'$, и покажем, что B' пусто. Действительно, если бы B' было не пусто, то оказалось бы, что K распадается в сумму двух таких непересекающихся непустых множеств A' и B', что $\bar{A}' \cap \bar{B}' \cap K$ пусто, ибо последнее пересечение входит в множество $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{K}$, которое по предположению пусто, и, таким образом, мы пришли бы к противоречию со связностью множества K. Итак, B' пусто. Но это значит, что $K \subset A$ и, следовательно, пересечение $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{K} \supset \bar{K} \cap \bar{B} \cap \bar{K} = \bar{K} \cap \bar{B} \supset \bar{K} \cap B$ не пусто, ибо множество B не пусто и входит в $\bar{K}$.

E) Если имеется непрерывное отображение g связного топологического пространства R на некоторое пространство R', то пространство R' также связно.

Допустим противоположное. Тогда пространство R' можно разбить на два непересекающихся замкнутых непустых подмножества E' и F'. Прообразы E и F этих подмножеств в R также замкнуты (см. § 10, В)) и, очевидно, в сумме дают R. Следовательно, пространство R оказывается разбитым на сумму двух непересекающихся непустых замкнутых множеств, что противоречит его связности.

Нижеследующее предложение, установленное М. Р. Шурой-Бурой, находит свое применение при изучении вполне несвязных топологических групп (см. § 22).

F) Любая компонента хаусдорфова бикомпактного пространства равна пересечению всех содержащих ее замкнутых областей (под *замкнутой областью* здесь, естественно, понимается множество, являющееся одновременно замкнутым и открытым).

Докажем это. Пусть R—бикомпактное хаусдорфово пространство, K—некоторая его компонента и L—пересечение всех содержащих компоненту K замкнутых областей пространства R. Для доказательства того, что $K = L$, достаточно показать, что L есть связное множество. Допустим противоположное. Тогда множество L можно представить как сумму двух непустых непересекающихся замкнутых множеств A и B пространства R. Так как множество K связно, то оно содержится либо в A, либо в B; мы будем считать, что $K \subset A$. Ввиду нормальности пространства R (см. § 13, F)) существуют такие непересекающиеся области G и H пространства R, что $A \subset G$, $B \subset H$. Мы имеем: $L \subset G \cup H$. Так как совокупность всех замкнутых областей, содержащих K, *мультипликативна* (т. е. вместе с каждыми двумя множествами содержит их пересечение), и пересечение их равно L, то существует такая замкнутая область P, что $L \subset P \subset G \cup H$ (см. § 13, H)). Легко видеть, что множества $G' = P \cap G$ и $H' = P \cap H$ являются замкнутыми областями в R. Далее, так как $K \subset A$, то G' есть замкнутая область, содержащая K и не содержащая L, что противоречит определению множества L. Этим предложение F) доказано.

Как прямое следствие предложения F) докажем предложение G), которое и используется в теории топологических групп.

G) Пусть R—локально бикомпактное хаусдорфово пространство, K—некоторая его бикомпактная компонента и G—область, ее содержащая. Существует тогда такая бикомпактная область P, что $K \subset P \subset G$.

Докажем это. Для каждой точки $x \in K$ выберем такую ее окрестность U_x, что замыкание $\overline{U}_x$ бикомпактно и содержится в G. Из покрытия множества K областями U_x, $x \in K$, выберем конечное; сумму входящих в это конечное покрытие областей U_x обозначим через U. Множество $\overline{U}$ бикомпактно, содержит K и содержится в G. Очевидно, что K есть компонента пространства $\overline{U}$. Так как совокупность всех замкнутых областей пространства $\overline{U}$, содержащих K, мультипликативна и пересечение их равно K (см. F)), то существует такая замкнутая область P пространства $\overline{U}$, что $K \subset P \subset U$ (см. § 13, H)). Множество P и представляет собой искомую замкнутую область пространства R.

Следующее понятие, примыкающее к понятию связности, найдет применение в теории топологических групп (см. § 38).

H) Топологическое пространство называется *локально связным*, если для всякой его точки a и всякой ее окрестности U существует такая ее окрестность $V \subset U$, что для всякой точки $x \in V$ существует в U связное множество, содержащее a и x. Легко видеть, что образ локально связного пространства при открытом (см. § 10, E)) непрерывном отображении всегда локально связен.

§ 16. Размерность

Понятие *числа измерений*, или *размерности*, пространства играет существенную роль во всей математике и особенно важно в топологии. Здесь будут приведены определение размерности и важнейшие ее свойства, нужные в теории топологических групп.

Для формулировки определения размерности введем некоторые термины.

A) Пусть Σ—конечная система подмножеств некоторого множества M. При $x \in M$ обозначим через $r(x)$ число множеств системы Σ, содержащих точку x. Максимум функции r, заданной на множестве M, называется *кратностью* системы Σ. Говорят, что система Σ' подмножеств множества M *вписана* в систему Σ, если для каждого множества $A' \in \Sigma'$ имеется такое множество $A \in \Sigma$, что $A' \subset A$. Оказывается, что для всякого конечного покрытия Ω бикомпактного хаусдорфова пространства R областями существует конечное покрытие Δ пространства R замкнутыми множествами, вписанное в Ω. При этом покрытие Δ всегда можно выбрать так, чтобы кратность его не превосходила кратности покрытия Ω.

Действительно, каждой точке $x \in R$ можно поставить в соответствие ее окрестность U_x, замыкание $\overline{U}_x$ которой содержится в одной из областей системы Ω. Выбирая из покрытия пространства R областями U_x, $x \in R$, конечное покрытие, мы получим конечное покрытие Δ пространства R замкнутыми множествами вида $\overline{U}_x$, вписанное в Ω. Обозначим теперь через F_U сумму всех множеств системы Δ, содержащихся в области $U \in \Omega$. Замкнутые множества F_U, $U \in \Omega$, образуют покрытие Δ' пространства R, вписанное в покрытие Ω, и кратность покрытия Δ' не превосходит кратности покрытия Ω.

О п р е д е л е н и е 21. Бикомпактное хаусдорфово пространство R имеет конечную *размерность* $n \geqslant 0$, если выполнены следующие два условия: 1) Каково бы ни было конечное покрытие пространства R областями, существует вписанное в него конечное покрытие Δ пространства R замкнутыми множествами, кратность которого не превосходит $n+1$. 2) Существует такое конечное покрытие пространства R областями, что всякое вписанное в него конечное покрытие Δ пространства R замкнутыми множествами имеет кратность, бо́льшую n. В случае, если не существует числа n, обладающего указанными свойствами, говорят, что размерность пространства R равна *бесконечности*.

Определение это оправдывается прежде всего нижеследующей теоремой 8, доказательство которой (см. [39]) не приводится здесь, так как оно сложно и требует аппарата, далекого от основного содержания этой книги. В этой теореме под *кубом* n-мерного евклидова пространства понимается множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i=1, \ldots, n$.

Т е о р е м а 8. *Размерность* (в смысле определения 21) *куба n-мерного евклидова пространства равна n.*

Докажем теперь нижеследующие свойства D) и E) размерности, играющие существенную роль и находящие приложение в теории топологических групп. Предшествующие им предложения B) и C) играют вспомогательную роль.

B) Пусть $A_1, \ldots, A_k$ и $A'_1, \ldots, A'_k$ — две конечные системы множеств, элементы которых находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом: $A_i \leftrightarrow A'_i$. Говорят, что системы эти имеют *одинаковые схемы пересечений*, если из того, что пересечение $A'_{i_1} \cap A'_{i_2} \cap \ldots \cap A'_{i_r}$ не пусто, следует, что пересечение $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}$ также не пусто, и наоборот. Оказывается, что если Γ есть произвольная конечная система замкнутых множеств бикомпактного хаусдорфова пространства R, то каждому множеству $E \in \Gamma$ можно поставить в соответствие такую область U_E, его содержащую, что система областей U_E, $E \in \Gamma$, будет иметь ту же схему пересечений, что и система Γ. Из этого и из А) следует, в частности, что если в определении 21 вместо системы Δ замкнутых множеств говорить о системе Δ областей, то мы придем к тому же понятию размерности.

Докажем предложение В). Покажем прежде всего, что если Γ есть произвольная конечная система замкнутых множеств бикомпактного хаусдорфова пространства R и $E \in \Gamma$, то, заменяя в системе Γ множество E замыканием надлежаще выбранной его окрестности U_E, мы получим новую систему с той же схемой пересечений, что и у системы Γ. Обозначим через F сумму всех пересечений подсистем системы Γ, которые не пересекаются с множеством E. Пусть U_E—область, содержащая E, замыкание $\overline{U}_E$ которой не пересекается с F. Легко видеть, что U_E есть искомая окрестность множества E. Производя описанную операцию замены последовательно, мы в конце концов и получим искомую систему окрестностей U_E, $E \in \Gamma$.

С) Пусть Γ—конечная система замкнутых множеств бикомпактного топологического пространства R, каждому множеству E которой поставлена в соответствие некоторая содержащая его область U_E. Существует тогда такое конечное покрытие Ω_Γ пространства R областями, что если $E \in \Gamma$, $V \in \Omega_\Gamma$ и пересечение $E \cap V$ не пусто, то $V \subset U_E$.

Пусть $x \in R$ и пусть $E_1, \ldots, E_r$—те множества системы Γ, которые содержат точку x, а $F_1, \ldots, F_s$—те множества системы Γ, которые точку x не содержат. Положим $V_x = U_{E_1} \cap U_{E_2} \cap \ldots$ $\ldots \cap U_{E_r} \setminus (F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_s)$. Среди построенных областей V_x, $x \in R$, имеется лишь конечное число различных, и они образуют искомое конечное покрытие Ω_Γ пространства R.

D) Размерность суммы конечного числа замкнутых подмножеств бикомпактного хаусдорфова пространства равна наибольшей из размерностей слагаемых.

Доказательство достаточно провести для суммы двух слагаемых: $R = A \cup B$. Очевидно, что размерность пространства R не меньше размерности каждого из слагаемых A, B. Пусть бо́льшая из размерностей слагаемых равна n. Докажем, что размерность пространства R не превосходит n.

Пусть Ω—произвольное конечное покрытие пространства R областями, и Γ—покрытие множества A его замкнутыми подмножествами, вписанное в Ω, причем кратность покрытия Γ не превосходит $n+1$. Каждому множеству $E \in \Gamma$ поставим в соответствие его окрестность U_E так, чтобы система окрестностей U_E, $E \in \Gamma$, имела ту же схему пересечений, что и система Γ (см. В), и чтобы она была вписана в покрытие Ω. Для системы Γ замкнутых множеств E с их окрестностями U_E построим покрытие Ω_Γ (см. С)) пространства R. Пусть, далее, Δ—конечное покрытие множества B

его замкнутыми подмножествами, вписанное одновременно в Ω и Ω_Γ, кратности, не превосходящей $n+1$.

Множества системы Γ, пересекающиеся с множеством B, занумеруем в последовательность $E_1, \ldots, E_k$. К каждому из множеств $E_1, \ldots, E_k$ прибавим некоторые множества системы Δ, с ним пересекающиеся, так, чтобы каждое множество системы Δ, пересекающееся с A, было прибавлено к одному и только одному множеству последовательности $E_1, \ldots, E_k$. Мы получим новую последовательность $E'_1, \ldots, E'_k$. Очевидно, что $E'_i \subset U_{E_i}$, так что система $E'_1, \ldots, E'_k$ вписана в систему Ω, и система Γ', получаемая из системы Γ путем замены каждого из множеств E_i множеством E'_i, $i=1, \ldots, k$, имеет кратность, не превосходящую $n+1$. Подсистему системы Δ, составленную из всех ее множеств, не пересекающихся с A, обозначим через Δ'. Очевидно, что система Σ, получаемая объединением систем Γ' и Δ', дает покрытие пространства R замкнутыми множествами, вписанное в Ω. Покажем, что покрытие Σ имеет кратность, не превосходящую $n+1$.

Пусть $x \in R$. Если $x \in A$, то ни одно из множеств системы Δ' не содержит точку x, и потому точка x принадлежит лишь множествам системы Γ', кратность которой не превосходит $n+1$. Таким образом, точка x принадлежит не более чем $n+1$ множествам системы Σ. Пусть теперь $x \in R \setminus A$ и пусть $E'_{i_1}, \ldots, E'_{i_\alpha}$—те множества системы $E'_1, \ldots, E'_k$, которые содержат точку x, а $F_1, \ldots, F_\beta$—те множества системы Δ', которые содержат точку x. Так как точка x не принадлежит множеству A, то, принадлежа множеству E'_{i_j}, она не может принадлежать множеству E_{i_j}, а принадлежит одному из тех множеств системы Δ, которые были прибавлены к множеству E_{i_j} при построении множества E'_{i_j}. Это прибавленное к E_j множество системы Δ мы обозначим через F'_{i_j}. Так как множества $E_{i_1}, \ldots, E_{i_\alpha}$ суть различные элементы системы $E_1, \ldots, E_k$, то и множества $F'_{i_1}, \ldots, F'_{i_\alpha}$ суть различные элементы системы Δ. Таким образом, все множества $F'_{i_1}, \ldots, F'_{i_\alpha}$, $F_1, \ldots, F_\beta$ суть различные элементы системы Δ, и все они содержат точку x. Так как кратность системы Δ не превосходит $n+1$, то $\alpha+\beta \leqslant n+1$, и этим доказано, что точка x принадлежит не более чем $n+1$ множествам системы Σ. Итак, предложение D) доказано.

E) Пусть f—непрерывное отображение бикомпактного хаусдорфова пространства R на хаусдорфово пространство S, и Ω—конечное покрытие пространства R областями. Говорят, что отображение f *вписано* в покрытие Ω, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in S$ содержится в одной из областей системы Ω. Пусть n—размерность пространства R, если эта размерность конечна, и произвольное натуральное число, если эта размерность бесконечна. Оказывается, что существует такое конечное покрытие Ω пространства R областями, что, каково бы ни было вписанное в Ω непрерывное отображение f пространства R на хаусдорфово пространство S, размерность последнего не меньше n. За покрытие Ω можно принять любое такое покрытие, что всякое вписанное в него конечное покрытие замкнутыми множествами имеет кратность, не меньшую $n+1$.

Допустим, что отображение f вписано в покрытие Ω, выбранное указанным способом. Так как пересечение замыканий всех областей пространства S, содержащих точку $y \in S$, совпадает с y, то пересечение прообразов этих замыканий совпадает с $f^{-1}(y)$ и потому содержится в одной из областей U системы Ω. Таким образом, в S существует такая область V_y, содержащая точку y, что прообраз $f^{-1}(\overline{V}_y)$ ее замыкания содержится в U (см. § 13, H)). Из покрытия пространства S областями V_y, $y \in S$, выберем конечное покрытие Ω'. В силу построения, прообраз каждой области системы Ω' содержится в одной из областей системы Ω. Допустим теперь, что размерность пространства S меньше n. Тогда существует конечное покрытие Δ' пространства S замкнутыми множествами, вписанное в Ω', кратность которого не превосходит n. Обозначим через Δ систему множеств $f^{-1}(F)$, где $F \in \Delta'$. Очевидно, что системы Δ' и Δ имеют одинаковую кратность и что система Δ вписана в систему Ω. Таким образом, кратность вписанной в Ω системы Δ не превосходит n, что противоречит предположению.

F) Бикомпактное хаусдорфово пространство тогда и только тогда имеет размерность нуль, когда оно вполне несвязно (см. § 15, D)).

Докажем это. Пусть R—вполне несвязное бикомпактное хаусдорфово пространство и Ω—произвольное конечное покрытие пространства R областями. Каждой точке $x \in R$ поставим в соответствие какую-нибудь область $U_x \in \Omega$, содержащую x. В силу предложения G) § 15, существует такая замкнутая область V_x, что $x \in V_x \subset U_x$. Из покрытия пространства R областями V_x, $x \in R$, выберем конечное покрытие $W_1, \ldots, W_k$ и положим: $F_1 = W_1$, $F_2 = W_2 \setminus W_1, \ldots, F_k = W_k \setminus (W_1 \cup \ldots \cup W_{k-1})$. Полученная таким образом система замкнутых множеств $F_1, \ldots, F_k$, вписанная в покрытие Ω, является конечным покрытием кратности 1 пространства R. Так как покрытие Ω было произвольно, то, следовательно, размерность пространства R равна нулю.

Пусть теперь R—нульмерное бикомпактное хаусдорфово пространство и a, b—две его различные точки. Области $U = R \setminus a$, $V = R \setminus b$ составляют покрытие пространства R. Пусть $F_1, \ldots$ $\ldots, F_k$—покрытие кратности 1 пространства R замкнутыми множествами, вписанное в покрытие U, V, причем $a \in F_1$. Пространство R распадается в сумму двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и $F_2 \cup \ldots \cup F_k$. Таким образом, компонента точки a содержится в F_1 и входит, следовательно, в $R \setminus b$, т. е. не содержит точки b. Так как точка b произвольна, то компонента точки a совпадает с a.

Глава третья

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

С логической точки зрения понятие *топологической группы* возникает как простое соединение понятий группы и топологического пространства. В одном и том же множестве G задаются одновременно операции группового перемножения и топологического замыкания. Операции эти, однако, не независимы, а связаны условием непрерывности: групповые операции, имеющиеся в G, должны быть непрерывны в топологическом пространстве G. Ввиду такого определения понятие топологической группы на первых шагах своего развития не имеет почти ничего специфического. Основные соотношения, имеющиеся для групп и топологических пространств, более или менее непосредственно переносятся на топологические группы. Так появляются здесь подгруппа, нормальный делитель, факторгруппа и пр. Возникают, конечно некоторые специфические обстоятельства, но они сравнительно поверхностны. Изложению этих весьма общих и мало специфических свойств топологических групп и посвящается настоящая глава.

Более глубокое изучение топологических групп будет дано позже.

Исторически понятие топологической группы возникло в связи с рассмотрением групп непрерывных преобразований. Если какое-либо непрерывное многообразие, например евклидово пространство, подвергается группе непрерывных преобразований, то в самой этой группе естественным образом возникают предельные соотношения. Она превращается в топологическую группу. Таким образом, первоначально топологическая группа трактовалась как группа непрерывных преобразований. Развитие этой области показало, однако, что наиболее интересные из изучаемых свойств не связаны с тем обстоятельством, что рассматриваемая группа есть группа преобразований, а опираются лишь на предельные соотношения, имеющиеся в самой группе.

Именно поэтому целесообразно дать сперва теорию топологических групп, не трактуя их как группы преобразований, и лишь затем в качестве приложения указать связь с непрерывными преобразованиями.

§ 17. Понятие топологической группы

Здесь будет дано определение топологической группы и будут указаны ее простейшие свойства.

Определение 22. Множество G называется *топологической группой*, если:

1) G есть группа (см. определение 1).

2) G есть топологическое пространство (см. определение 12).

3) Групповые операции, имеющиеся в G, непрерывны в топологическом пространстве G. Более полно требование это формулируется так:

a) Если a и b суть два элемента множества G, то для всякой окрестности W элемента ab найдутся такие окрестности U и V элементов a и b, что $UV \subset W$ (см. определение 14 и § 2, A)).

b) Если a есть некоторый элемент множества G, то для всякой окрестности V элемента a^{-1} найдется такая окрестность U элемента a, что $U^{-1} \subset V$.

Нетрудно видеть, что условия a) и b) могут быть заменены одним условием:

c) Если a и b суть два элемента множества G, то для всякой окрестности W элемента ab^{-1} найдутся такие окрестности U и V элементов a и b, что $UV^{-1} \subset W$.

Топологическую инвариантность этого определения, т. е. независимость условия 3) от выбора определяющей системы окрестностей, доказать нетрудно (см. § 9, F)).

Если, рассматривая топологическую группу, мы захотим подчеркнуть, что говорим только о ее алгебраических свойствах, отвлекаясь от топологических, то мы будем называть ее *алгебраической группой* *).

Установим теперь некоторые весьма элементарные свойства топологических групп.

A) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — некоторая конечная система элементов топологической группы G, $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n} = c$ — некоторое произведение их степеней, причем могут встречаться как положительные, так и отрицательные степени, и W — произвольная окрестность элемента c; тогда существуют такие окрестности $U_1, \ldots, U_n$ элементов $a_1, \ldots, a_n$, что $U_1^{r_1} U_2^{r_2} \ldots U_n^{r_n} \subset W$, причем если $a_i = a_j$, то U_i можно принять равным U_j, и то же для большего числа равных элементов.

---

*) Термин «алгебраическая группа» приобрел в современной теории групп совершенно иной смысл, однако я сохраняю здесь свою старую терминологию. Возможность возникновения недоразумений исключается, поскольку на протяжении всей книги алгебраическая группа служит синонимом абстрактной группы.

Утверждение это доказывается путем последовательного применения условия 3) определения 22 и использования при этом условия b) замечания D) § 9.

B) Положим

$$f(x)=xa,\ f'(x)=ax,\ \varphi(x)=x^{-1},$$

где a—фиксированный элемент группы G, а x—переменный элемент этой группы. Тогда каждая из функций f, f' и φ дает топологическое отображение пространства G на себя (см. определение 15).

Мы докажем это только для f. Прежде всего отображение f взаимно однозначно. Действительно, для всякого элемента y' найдется такой элемент x', и притом только один, что $y'=x'a$. Далее, отображение f непрерывно. Действительно, если $y'=x'a$ и W есть некоторая окрестность элемента y', то согласно условию 3) определения 22 существуют такие окрестности U и V элементов x' и a, что $UV\subset W$; но $a\in V$ и, следовательно, $Ua\subset W$, т. е. $f(U)\subset W$, что и означает непрерывность отображения f (см. § 10, C)). Непрерывность обратного отображения $f^{-1}(y)=ya^{-1}$ доказывается так же.

C) Пусть F—замкнутое множество, U—область, P—произвольное множество и a—некоторый элемент топологической группы G. Тогда Fa, aF, F^{-1} суть замкнутые множества; UP, PU, U^{-1} суть области (см. § 2, A)).

Утверждение это непосредственно вытекает из B). Действительно, отображение $f(x)=xa$ есть отображение топологическое и, следовательно, замкнутое множество F переходит в замкнутое же множество $f(F)=Fa$. Точно так же показываем, что множество Ua есть область, но тогда UP есть сумма областей и, следовательно, также область.

D) Топологическое пространство G *однородно*. Это значит, что для любых двух элементов p и q группы G найдется топологическое отображение пространства G на себя, переводящее p в q.

Для доказательства достаточно положить $a=p^{-1}q$, и тогда определенное в B) топологическое отображение f удовлетворяет условию $f(p)=q$.

E) Из однородности топологического пространства G следует, что его локальные свойства достаточно проверять и утверждать лишь для одного элемента. Например, для того чтобы убедиться в том, что пространство G локально бикомпактно, достаточно показать, что единица e допускает окрестность U, замыкание $\overline{U}$ которой бикомпактно. Точно так же можно проверить и регулярность. Далее, если единица e допускает окрестность, содержащую лишь e, то и всякий другой элемент группы G также имеет окрестность, состоящую из одного элемента.

F) Топологическое пространство G топологической группы G регулярно (см. определение 18).

Согласно замечанию E) регулярность пространства G достаточно доказать, рассматривая лишь окрестности единицы e. Пусть U—некоторая окрестность единицы e. Так как $ee^{-1}=e$, то согласно A) существует такая окрестность V единицы, что $VV^{-1}\subset U$. Покажем, что $\overline{V}\subset U$. Пусть p—некоторая точка из $\overline{V}$. Тогда всякая окрестность точки p пересекается с V (см. § 9, C)). Согласно замечанию C) множество pV содержит окрестность точки p и, следовательно, в V существует такая точка b, что $pb=a\in V$; но тогда $p=ab^{-1}\in VV^{-1}\subset U$, а это и значит, что $\overline{V}\subset U$.

G) Если P и Q—два бикомпактных подмножества топологической группы G, то их групповое произведение PQ (см. § 2, A)) также бикомпактно.

Для доказательства построим отображение f топологического произведения $P\times Q$ пространств P и Q на множество PQ, поставив в соответствие каждому элементу $(x, y)\in P\times Q$ элемент $f(x, y)=xy$. Отображение f непрерывно. Действительно, пусть $a\in P$, $b\in Q$, $c=ab$ и W—произвольная окрестность точки c в G. В силу непрерывности умножения существуют такие окрестности U и V точек a и b в P и Q, что $UV\subset W$. Очевидно, что $f((U, V))\subset \subset W$, а так как (U, V) есть окрестность точки (a, b) в $P\times Q$, то непрерывность отображения f доказана. Так как топологическое произведение $P\times Q$ бикомпактно (см. теорему 5), то и непрерывный его образ PQ бикомпактен (см. § 13, D)).

Пример 29. Множество векторов r-мерного евклидова пространства есть аддитивная группа. В примере 19 в это множество была внесена топология. Нетрудно проверить, что операция сложения векторов непрерывна в этой топологии. Мы получаем, следовательно, топологическую группу векторов r-мерного евклидова пространства или r-мерную *векторную группу*.

§ 18. Система окрестностей единицы

Из рассмотрений предыдущего параграфа явствует, что условие 3) определения 22 устанавливает теснейшую связь между алгебраическими и топологическими операциями в топологической группе G. Благодаря этому оказывается, в частности, что если алгебра в G уже задана, то для задания там топологии нет надобности указывать базис всего пространства G (см. определение 14), а достаточно указать лишь полную *систему окрестностей единицы* (см. § 9, B′)). Простейшую иллюстрацию этого факта дают так называемые *дискретные* группы.

A) Топологическая группа G называется *дискретной*, если она не содержит предельных элементов, т. е. если каждый ее элемент допускает окрестность, содержащую лишь одну точку. В силу замечания E) § 17 топологическая группа G тогда и только тогда дискретна, когда ее единица является изолированным элементом группы.

Легко видеть, что, какова бы ни была группа G, в нее всегда можно таким образом внести топологию, чтобы группа G стала дискретной группой. Из этого следует, что теория дискретных топологических групп совпадает, по существу, с теорией групп.

Вопрос о том, каким образом топология в группе G определяется полной системой окрестностей единицы и каким образом можно в группе устанавливать топологию, в общем случае решается нижеследующим предложением B) и теоремой 9.

B) Пусть G—топологическая группа, Σ^*—некоторая полная система окрестностей ее единицы e и M—некоторое множество, всюду плотное в G (см. § 8, H)). Тогда совокупность Σ всех множеств вида Ux, где $U\in\Sigma^*$, $x\in M$, есть полная система окрестностей пространства G, а система Σ^* удовлетворяет следующим пяти условиям:

a) Пересечение всех множеств системы Σ^* содержит лишь e.

b) Пересечение всяких двух множеств системы Σ^* содержит некоторое третье множество системы Σ^*.

c) Для всякого множества U системы Σ^* найдется такое множество V той же системы, что $VV^{-1}\subset U$.

d) Для всякого множества U системы Σ^* и всякого элемента $a\in U$ найдется такое множество V системы Σ^*, что $Va\subset U$.

e) Если U есть некоторое множество системы Σ^* и a—произвольный элемент группы G, то существует такое множество V системы Σ^*, что $a^{-1}Va\subset U$.

Докажем предложение B). Согласно замечанию C) § 17 множества системы Σ суть области пространства G. Покажем, что система Σ есть базис пространства G. Пусть W—некоторая область пространства G и $a\in W$. Тогда Wa^{-1} есть область, содержащая единицу, и, следовательно, существует, согласно замечанию A) § 17, такая окрестность U единицы e, $U\in\Sigma^*$, что $UU^{-1}\subset Wa^{-1}$. Так как множество M всюду плотно в G, то множество aM^{-1} также всюду плотно в G и, следовательно, существует элемент d, одновременно входящий в U и aM^{-1}. Заметим, что тогда $d^{-1}a\in M$. Из этого следует, что $Ud^{-1}a\in\Sigma$. С другой стороны, $Ud^{-1}a\subset W$. Действительно, мы имеем $UU^{-1}\subset Wa^{-1}$. Так как $d\in U$, то получаем $Ud^{-1}\subset Wa^{-1}$; но это значит, что $Ud^{-1}a\subset W$. Далее, так как $d\in U$, то $e\in Ud^{-1}$ и, следовательно, $a\in Ud^{-1}a$. Таким образом, условие полноты системы Σ выполнено (см. § 9, B)).

Что касается пяти условий a),..., e), то условия a) и b) выполнены во всяком топологическом пространстве (см. § 9, D)), условия же c), d) и e) непосредственно вытекают из замечания A) § 17.

Теорема 9. *Пусть G — алгебраическая группа и Σ^*—некоторая система подмножеств множества G, удовлетворяющая пяти условиям замечания* B). *Тогда в множество G можно внести топологию, и притом единственным способом, так что при этом групповые операции, имеющиеся в G, будут непрерывны в этой* *топологии и система Σ^* будет полной системой окрестностей единицы. Иначе это можно сформулировать, сказав, что группа G допускает одну и только одну топологизацию, при которой система Σ^* есть полная система окрестностей единицы.*

Заметим, что в случае коммутативной группы G условие e) всегда выполнено.

Доказательство. Если группа G допускает топологизацию, при которой Σ^* есть полная система окрестностей единицы, то согласно замечанию B) полная система окрестностей топологического пространства G может быть составлена из всех множеств вида Ux, где $U \in \Sigma^*$, $x \in G$. Обозначим через Σ совокупность всех множеств этого вида и покажем, что, во-первых, Σ удовлетворяет условиям теоремы 3 и, во-вторых, групповые операции, имеющиеся в G, непрерывны в получаемой таким образом топологии.

Пусть a и b — два различных элемента группы G. Так как пересечение всех множеств системы Σ^* содержит лишь e, то существует такая окрестность $U \in \Sigma^*$, что ba^{-1} не принадлежит U; но тогда Ua не содержит b. Таким образом, условие a) теоремы 3 выполнено.

Для доказательства того, что выполнено условие b), заметим прежде всего, что если $b \in Ua$, где $U \in \Sigma^*$, то существует такая окрестность $V \in \Sigma^*$, что $Vb \subset Ua$. Действительно, $ba^{-1} \in U$ и согласно условию d) существует такая окрестность $V \in \Sigma^*$, что $Vba^{-1} \subset U$; но тогда $Vb \subset Ua$.

Пусть теперь Ua и Vb суть две окрестности точки c, т. е. $c \in Ua$, $c \in Vb$, $U \in \Sigma^*$, $V \in \Sigma^*$. По только что сделанному замечанию, существуют такие окрестности $U' \in \Sigma^*$ и $V' \in \Sigma^*$, что $U'c \subset Ua$ и $V'c \subset Vb$. Так как согласно условию b) существует окрестность $W \in \Sigma^*$, содержащаяся в пересечении $U' \cap V'$, то $Wc \subset Ua$, $Wc \subset Vb$. Но Wc есть окрестность точки c и, следовательно, условие b) теоремы 3 также выполнено.

Покажем теперь, что групповые операции непрерывны в полученной топологии.

Пусть $c = ab^{-1}$ и $W'c'$ — некоторая окрестность точки c. По ранее доказанному тогда существует такая окрестность $W \in \Sigma^*$, что $Wc \subset W'c'$. Согласно условию c) существует такая окрестность $U \in \Sigma^*$, что $UU^{-1} \subset W$. Далее, согласно условию e) существует такая окрестность $V \in \Sigma^*$, что $ab^{-1}Vba^{-1} \subset U$. Но тогда $ab^{-1}V^{-1} \subset U^{-1}ab^{-1}$ и, следовательно,

$$Ua(Vb)^{-1} = Uab^{-1}V^{-1} \subset UU^{-1}ab^{-1} \subset Wab^{-1} = Wc \subset W'c'.$$

Таким образом, условие 3) определения 22 выполнено.

Итак, группа G с внесенной в нее при помощи системы окрестностей Σ топологией является топологической группой.

Покажем теперь, что Σ^* есть базис в точке e (см. § 9, B′)). Пусть W — произвольная область пространства G, содержащая e.

Так как Σ есть базис пространства G, то существует такая окрестность $Ua \in \Sigma$ точки e, что $Ua \subset W$ (см. § 9, B)). Из соотношения $e \in Ua$ получаем: $a^{-1} \in U$ и, следовательно, в силу условия d) существует такая окрестность $V \in \Sigma^*$, что $Va^{-1} \subset U$, т. е. $V \subset Ua \subset W$, а так как $e \in V$, то это значит, что Σ^* есть базис в точке e.

Покажем теперь, что если в группе G задана какая-либо топологизация T, при которой система Σ^* может быть принята за полную систему окрестностей единицы e, то эта топологизация T совпадает с топологизацией, построенной при помощи системы Σ. Для этого достаточно доказать, что система Σ может быть принята за полную систему окрестностей в топологизации T.

Согласно предположению, Σ^* есть полная система окрестностей единицы e в топологизации T. Следовательно, все множества системы Σ^* суть области в топологизации T. Тогда все множества системы Σ также суть области (см. § 17, C)). Пусть теперь W— некоторая область в топологизации T, содержащая точку a. Тогда Wa^{-1} содержит e и согласно замечанию C) § 17 также есть область. Так как Σ^* есть полная система окрестностей единицы, то в Σ^* существует такая область U, что $U \subset Wa^{-1}$; но тогда $Ua \subset W$. Таким образом, система Σ есть полная система окрестностей при топологизации T (см. § 9, B)).

Пример 30. Пусть G—аддитивная группа целых чисел. Внесем в G ряд различных топологизаций.

Пусть p—некоторое простое число. Обозначим через U_k множество всех целых чисел, делящихся на p^k. За полную систему Σ^* окрестностей нуля примем совокупность всех множеств U_k, $k=1, 2, \ldots$

Нетрудно проверить, что все условия, налагаемые в теореме 9 на систему Σ^*, выполнены. Проверим только c). Если $a \in U_k$ и $b \in U_k$, то $a-b \in U_k$. Стало быть, условие c) осуществляется здесь особенно простым образом.

Легко видеть, что топологизации, получаемые указанным способом для двух различных простых чисел p и p', различны. Действительно, последовательность $p, p^2, \ldots, p^k, \ldots$ имеет нуль своей предельной точкой в первой топологизации, но во второй это обстоятельство места не имеет.

Пример 31. Пусть G—множество всех комплексных квадратных матриц порядка n с детерминантом, отличным от нуля. В примере 2 в G была определена операция умножения. Зададим теперь в G топологию. Обозначим через U_k множество всех таких матриц $x \in G$, что все элементы матрицы $x-e$ по модулю меньше $\frac{1}{k}$ (e есть единичная матрица). За Σ^* примем совокупность всех множеств U_k, $k=1, 2, \ldots$ Нетрудно видеть, что система Σ^* удовлетворяет всем требованиям теоремы 9 и что топологическая группа G локально бикомпактна и обладает счетным базисом.

§ 19. Подгруппа. Нормальный делитель. Факторгруппа

В этом параграфе дается распространение на топологические группы тех понятий, которые были даны в § 2 для групп.

Определение 23. Пусть G—топологическая группа. Некоторое множество H ее элементов называется *подгруппой* топологической группы G, если a) H есть подгруппа алгебраической группы G (см. определение 2), b) H есть замкнутое подмножество топологического пространства G (см. определение 13). Подгруппа N топологической группы G называется ее *нормальным делителем*, если N есть нормальный делитель алгебраической группы G (см. определение 3).

Таким образом, тот факт, что G есть не просто группа, а топологическая группа, налагает на H и N лишь одно дополнительное условие замкнутости.

A) Пусть H—некоторое подмножество топологической группы G, являющееся подгруппой группы G, рассматриваемой без топологии. Тогда H есть топологическая группа в силу той топологии, которая возникает в H как в подпространстве пространства G (см. определение 17). В частности, подгруппа H топологической группы G есть также топологическая группа.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что групповые операции, имеющиеся в H, непрерывны в топологическом пространстве H. Пусть a и b—два элемента множества H, и $ab^{-1}=c$. Всякая окрестность W' элемента c в пространстве H может быть получена как пересечение некоторой окрестности W элемента c, взятой в пространстве G, с H: $W'=H\cap W$ (см. § 11, B)). Так как G—топологическая группа, то существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что $UV^{-1}\subset W$. Пересечения $U'=H\cap U$ и $V'=H\cap V$ суть окрестности элементов a и b в пространстве H. Мы имеем $U'V'^{-1}\subset W$, и, сверх того, $U'V'^{-1}\subset H$. Таким образом, $U'V'^{-1}\subset W'$, т. е. условие 3) определения 22 для группы H выполнено.

B) Пусть G—топологическая группа и H—подгруппа или нормальный делитель алгебраической группы G. Тогда $\overline{H}$ есть подгруппа или соответственно нормальный делитель топологической группы G. Если H—область в G, то $\overline{H}=H$.

Допустим, что $a\in\overline{H}$, $b\in\overline{H}$, и покажем, что $ab^{-1}\in\overline{H}$. Пусть W—некоторая окрестность элемента ab^{-1}. Тогда существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что $UV^{-1}\subset W$. Так как $a\in\overline{H}$, $b\in\overline{H}$, то существуют такие элементы x и y из H, что $x\in U$, $y\in V$. Мы имеем $xy^{-1}\in H$ и одновременно $xy^{-1}\in W$. Таким образом, произвольная окрестность W элемента ab^{-1} пересекается с H и, следовательно, $ab^{-1}\in\overline{H}$. Итак, $\overline{H}$ есть подгруппа алгебраической группы G. Так как множество $\overline{H}$ замкнуто в пространстве G, то $\overline{H}$ есть подгруппа и топологической группы G.

Пусть теперь H—нормальный делитель алгебраической группы G и пусть $a \in \overline{H}$, $c \in G$. Пусть, далее, V—произвольная окрестность элемента $c^{-1}ac$. Тогда существует такая окрестность U элемента a, что $c^{-1}Uc \subset V$. Так как $a \in \overline{H}$, то существует элемент $x \in H$, принадлежащий к U. Далее, $c^{-1}xc \in H$ и $c^{-1}xc \in V$, так что произвольная окрестность V элемента $c^{-1}ac$ пересекается с H; следовательно, $c^{-1}ac \in \overline{H}$. Итак, $\overline{H}$ есть нормальный делитель топологической группы G.

Если H—область в G и $a \in \overline{H}$, то a содержится в области aH, и потому aH пересекается с H. Следовательно, $a \in HH^{-1} = H$. Таким образом, $\overline{H} = H$.

В § 2 было установлено понятие смежного класса группы G по подгруппе H. В случае топологических групп смежные классы естественным образом составляют топологическое пространство, играющее существенную роль.

Определение 24. Пусть G—топологическая группа и H—ее подгруппа. Обозначим через G/H совокупность всех *правых смежных классов* группы G по подгруппе H (см. § 2, D)). В множество G/H мы внесем топологию следующим образом. Пусть Σ—некоторая полная система окрестностей пространства G (см. определение 14). Пусть, далее, $U \in \Sigma$. Обозначим через U^* множество всех смежных классов вида Hx, где $x \in U$. Совокупность всех множеств вида U^*, где U—произвольный элемент системы Σ, примем за полную систему Σ^* окрестностей пространства G/H. Оказывается, что система Σ^* удовлетворяет условиям теоремы 3. Получаемое таким образом топологическое пространство G/H будем называть *пространством правых смежных классов* топологической группы G по подгруппе H. Аналогично определим и *пространство левых смежных классов*; в качестве обозначения для него оставим G/H. В тех случаях, когда не будет опасности недоразумения, мы не будем делать различия между пространствами левых и правых смежных классов.

Нетрудно показать, что данное здесь определение топологии в пространстве G/H инвариантно, т. е. не зависит от выбора системы Σ (см. § 9, F)).

Покажем теперь, что система Σ^* удовлетворяет условиям теоремы 3.

Пусть A и B—два различных смежных класса и $a \in A$. Так как $B = Hb$—замкнутое множество (см. § 17, C)) и a не принадлежит B, то существует окрестность U элемента a, которая не пересекается с B. Тогда множество U^* всех смежных классов вида Hx, где $x \in U$, есть окрестность класса A, не содержащая B. Таким образом, условие a) теоремы 3 выполнено.

Пусть теперь U^* и V^*—две окрестности некоторого смежного класса A и $a \in A$. Тогда U^* есть множество всех смежных классов вида Hx, где $x \in U$, $U \in \Sigma$; V^* есть совокупность всех классов вида Hy, где $y \in V$, $V \in \Sigma$. HU и HV суть области в G, содержащие a (см. § 17, C)); таким образом, существует окрестность W элемента a, содержащаяся в обеих областях HU и HV. Обозначим через W^* множество всех классов вида Hz, где $z \in W$. Легко видеть, что W^* есть окрестность класса A, содержащаяся в пересечении $U^* \cap V^*$. Таким образом, условие b) теоремы 3 также выполнено.

C) Пусть G—топологическая группа, H—ее подгруппа и G/H—пространство смежных классов (см. определение 24). Каждому элементу x пространства G поставим в соответствие элемент $X=f(x)$ пространства G/H, причем $f(x)$ определим как класс, содержащий элемент x. Получаемое таким образом отображение f топологического пространства G на пространство G/H является непрерывным открытым (см. § 10, E)) отображением. Это отображение мы будем называть *естественным отображением* пространства G на пространство G/H.

Предположим для определенности, что G/H есть пространство правых смежных классов. Пусть $a \in G$ и $A=Ha$, так что $f(a)=A$. Пусть, далее, U^*—некоторая окрестность элемента A пространства G/H. Тогда U^* есть совокупность всех классов вида Hx, где $x \in U$, а U есть некоторая окрестность в пространстве G. Множество HU есть область в G, содержащая элемент a (см. § 17, C)); следовательно, существует окрестность V элемента a, содержащаяся в HU. Легко видеть, что $f(V) \subset U^*$. Таким образом, отображение f непрерывно (см. § 10, C)).

Пусть $a \in G$ и $A=Ha=f(a)$. Обозначим через U некоторую окрестность элемента a. Множество всех классов вида Hx, где $x \in U$, есть окрестность U^* элемента A. Мы имеем $f(U)=U^*$; следовательно, $U^* \subset f(U)$. Таким образом, отображение f открыто.

Особенно важен случай, когда подгруппа H есть нормальный делитель. Здесь мы имеем следующее определение:

Определение 25. Пусть G—топологическая группа и N—ее нормальный делитель. Множество G/N смежных классов согласно определению 4 есть группа, и точно так же множество G/N согласно определению 24 есть топологическое пространство. Ниже будет показано, что групповые операции, имеющиеся в G/N, непрерывны в топологическом пространстве G/N. Таким образом, G/N есть топологическая группа. Она называется *факторгруппой* топологической группы G по нормальному делителю N.

Докажем непрерывность групповых операций в G/N.

Пусть A и B—два элемента из G/N, $C=AB^{-1}$ и W^*—некоторая окрестность элемента C. Тогда W^* есть совокупность всех классов вида Nz, где $z \in W$, а W—некоторая окрестность в G. Так как $C \in W^*$, то существует такой элемент $c \in W$, что $C=Nc$. Пусть b—

произвольный элемент из B и $a=cb$; тогда $a\in A$. В силу непрерывности групповых операций в G существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что $UV^{-1}\subset W$. Обозначим через U^* окрестность элемента A, составленную из всех классов вида Nx, где $x\in U$, и через V^*—окрестность элемента B, составленную из всех классов вида Ny, где $y\in V$. Мы имеем:

$$Nx(Ny)^{-1}=Nxy^{-1}N^{-1}=NN^{-1}xy^{-1}=Nxy^{-1}\in W^*.$$

Таким образом, $U^*V^{*-1}\subset W^*$, т. е. условие 3) определения 22 выполнено.

D) Во всякой топологической группе G имеется два нормальных делителя. Это—подгруппа $\{e\}$, содержащая лишь один элемент e, и вся группа G. В отличие от терминологии, установленной в теории групп (см. § 2, G)), *простой* топологическая группа G называется только тогда, когда всякий ее нормальный делитель или *дискретен* или совпадает с G (см. § 18, A)). Вообще, дискретные нормальные делители играют в теории топологических групп особую роль.

Установим теперь некоторые свойства пространства смежных классов.

E) Пространство G/H смежных классов топологической группы G по ее подгруппе H *однородно*, т. е. для каждых двух элементов A и B этого пространства можно подобрать топологическое отображение φ этого пространства на себя, при котором A переходит в B. Из этого следует, в частности, что локальные свойства пространства G/H, как, например, регулярность, локальную бикомпактность и т. п., достаточно доказывать лишь для одной точки пространства G/H; естественнее всего делать это для точки $H\in G/H$.

При построении отображения φ будем считать для определенности, что G/H есть пространство правых смежных классов. Пусть $A=Ha$, $B=Hb$. Отображение φ определим, положив $\varphi(X)=Xa^{-1}b$, $X\in G/H$. Непосредственно проверяется, что φ есть топологическое отображение пространства G/H на себя, переводящее A в B.

F) Пространство смежных классов группы по ее подгруппе регулярно.

Докажем это. Пусть G—топологическая группа, H—ее подгруппа и пусть G/H—пространство правых, для определенности, смежных классов. В силу замечания E) достаточно доказать, что для всякой окрестности U^* элемента H найдется такая окрестность V^* того же элемента, что $\overline{V}^*\subset U^*$. Без ограничения общности можно считать, что окрестность U^* составлена из всех смежных классов вида Hx, $x\in U$, где U есть окрестность единицы в группе G. Пусть V—такая окрестность единицы в G, что $VV^{-1}\subset U$ (см. § 17, A)). Покажем, что $\overline{HV}\subset HU$. Пусть $x\in\overline{HV}$; тогда всякая окрестность точки x пересекается с областью HV; в частности, окрестность xV имеет с HV общую точку. Таким образом, существуют такие элементы $h \in H$, $a \in V$, $b \in V$, что $ha = xb$. Мы имеем $x = hab^{-1} \in HVV^{-1} \subset HU$. Итак, $\overline{HV} \subset HU$. Искомую окрестность V^* определим как совокупность всех смежных классов вида Hy, где $y \in V$. Естественное отображение пространства G на пространство G/H (см. C)) обозначим через f. Мы имеем: $f(HV) = V^*$, $f(HU) = U^*$. Так как топологическое отображение пространства G на себя, происходящее в результате умножения всех его элементов слева на элемент $h \in H$, отображает область HV на HV, то оно отображает и ее замыкание $\overline{HV}$ на $\overline{HV}$. Из этого следует, что множество $\overline{HV}$ и его дополнение $G \setminus \overline{HV}$ составлены из целых смежных классов, и потому образы их при отображении f также являются дополнительными друг к другу. Из этого и открытости отображения f вытекает замкнутость множества $f(\overline{HV})$. Мы имеем, таким образом:

$$\overline{V}^* \subset f(\overline{HV}) \subset f(HU) = U^*,$$

и регулярность пространства G/H установлена.

Существенным усилением предложения F) является нижеследующая теорема 10. Теорема эта решает важный принципиальный вопрос о структуре пространства топологической группы и пространства смежных классов, но в дальнейшем использоваться не будет. Доказательство теоремы 10 сходно с доказательством леммы Урысона (см. § 12).

Т е о р е м а 10. *Пространство смежных классов топологической группы* (см. определение 24), *в частности, пространство самой топологической группы, вполне регулярно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — топологическая группа, H — ее подгруппа и G/H — пространство правых (для определенности) смежных классов. Ввиду однородности пространства G/H (см. E)) достаточно построить для произвольной окрестности U^* элемента $H \in G/H$ непрерывную функцию f^*, заданную на G/H и удовлетворяющую условиям

$$0 \leqslant f^*(X) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad X \in G/H; \quad f^*(H) = 0;$$
$$f^*(X) = 1 \quad \text{при} \quad X \in G/H \setminus U^*.$$

Без ограничения общности можно считать, что окрестность U^* составлена из всех смежных классов вида Hx, $x \in U$, где U есть окрестность единицы в группе G. Построим сначала непрерывную функцию f на пространстве G, удовлетворяющую условиям

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in G; \quad f(e) = 0; \tag{1}$$
$$f(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in G \setminus HU$$

и постоянную на каждом смежном классе $X \in G/H$. Переход от функции f к функции f^* будет сделан в конце; впрочем, он довольно очевиден. Приступим к построению функции f.

Пусть $U_0 = U$, U_1, U_2, ...—бесконечная последовательность окрестностей единицы e в G, удовлетворяющих условию

$$U_{k+1}^2 \subset U_k, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

Такая последовательность существует в силу предложения А) § 17, так как $e^2 = e$. Положим:

$$V_{n,k} = U_{n+1} U_{n+2} \ldots U_k, \quad 0 \leqslant n < k, \tag{3}$$

и покажем, что

$$V_{n,k} U_k \subset U_n. \tag{4}$$

Соотношение это будем доказывать индуктивно по k. При $k = n+1$ имеем: $V_{n,k} = U_{n+1}$, и в этом случае соотношение (4) очевидно (см. (2)). Допустим, что верно (4), и докажем, что тогда $V_{n,k+1} U_{k+1} \subset U_n$. Действительно, мы имеем: $V_{n,k+1} U_{k+1} = V_{n,k} U_{k+1} U_{k+1} \subset V_{n,k} U_k \subset U_n$.

Поставим теперь в соответствие каждой двоичной дроби $r = \frac{q}{2^k}$, $0 < r < 1$, область W_r, содержащую единицу, следующим образом. Представим число r в виде

$$r = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_k}{2^k}, \tag{5}$$

где каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равно нулю или единице. Представление (5) числа r единственно. Положим:

$$W_r = H U_1^{a_1} U_2^{a_2} \ldots U_k^{a_k}. \tag{6}$$

Заметим, что при произвольном r имеет место включение

$$W_r \subset HU. \tag{7}$$

Действительно, $W_r \subset H U_1 U_2 \ldots U_k = H V_{0,k} \subset H U_0 = HU$ (см. (4)). Покажем теперь, что

$$W_r \subset W_{r'} \quad \text{при} \quad r < r'. \tag{8}$$

Пусть $r' = \frac{a_1'}{2} + \frac{a_2'}{2^2} + \ldots + \frac{a_k'}{2^k}$ — запись числа r', аналогичная записи (5). Пусть n—наименьшее из натуральных чисел i, для которых $a_i' \neq a_i$; тогда $a_n = 0$, $a_n' = 1$, и мы имеем:

$$W_r \subset H U_1^{a_1} U_2^{a_2} \ldots U_{n-1}^{a_{n-1}} V_{n,k} \subset H U_1^{a_1} U_2^{a_2} \ldots U_{n-1}^{a_{n-1}} U_n \subset W_{r'}.$$

Значение $f(x)$ функции f в точке $x \in G$ определим следующим образом: если x принадлежит хотя бы одной из построенных областей

W_r, то $f(x)$ определим как нижнюю грань всех значений r, для которых $x \in W_r$; если же точка x не принадлежит ни одной из областей W_r, то положим $f(x) = 1$. Так как все допустимые значения числа r лежат в интервале $(0, 1)$, то при всяком x имеем: $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Так как единица e принадлежит всем областям W_r, то $f(e) = 0$. Далее, в силу (7), при $x \in G \setminus HU$ имеем $f(x) = 1$. Таким образом, условия (1) для построенной функции f выполнены. Отметим еще, что

$$\text{при} \quad f(x) < r_0 \quad \text{имеем} \quad x \in W_{r_0}. \tag{9}$$

Действительно, если x не принадлежит ни одной области W_r, то $f(x)=1$, и тогда неравенство $f(x) < r_0$ невозможно, так как число r_0 есть, по предположению, правильная дробь; если же существуют такие числа r, что $x \in W_r$, но число r_0 не находится среди них, то оно меньше всякого числа r, для которого $x \in W_r$, и поэтому $f(x) \geqslant r_0$.

Для доказательства непрерывности функции f достаточно показать, что если $x^{-1}y \in U_k \cap U_k^{-1} = U'_k$, то $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$ (этим будет доказана даже равномерная непрерывность функции f (см. § 28, В)), но это здесь не существенно). Так как в условии $x^{-1}y \in U'_k$ элементы x и y равноправны, то при доказательстве соотношения $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$ мы можем предположить, что $f(x) \leqslant f(y)$. Итак, достаточно доказать, что при $x^{-1}y \in U_k$ и $f(x) \leqslant f(y)$ мы имеем $f(y) - f(x) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$. Среди чисел $1, 2, 3, \ldots, 2^k$ выберем такое число q, что $\frac{q-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{q}{2^k}$; тогда $\frac{q}{2^k} - f(x) \leqslant \frac{1}{2^k}$. Если $q = 2^k$ или $q = 2^k - 1$, то $1 - f(x) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, а так как $f(y) \leqslant 1$, то $f(y) - f(x) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$. Допустим теперь, что $q < 2^k - 1$, и положим $r = \frac{q}{2^k}$. Тогда $x \in W_r$ (см. (9)), и в разложении (5) числа r не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равны единице. Пусть последнее из них, не равное единице, есть a_n. Положим $r' = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$. Из соотношений $x^{-1}y \in U_k$ и $W_r U_k \subset W_{r'}$ (см. (4) и (6)) следует, что $y \in W_{r'}$ и потому $f(y) \leqslant r'$. Так как $r' - r = \frac{1}{2^k}$, то $f(y) - f(x) \leqslant r' - \left(r - \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k-1}}$.

Так как всякая область W_r (см. (6)) отображается при умножении всех элементов группы G слева на элемент $h \in H$ на себя, то функция f постоянна на каждом смежном классе $X \in G/H$.

Значение функции f^* на элементе $X \in G/H$ определим, положив $f^*(X) = f(x)$, где $x \in X$. Так как функция f постоянна на каждом классе X, то соотношением $f^*(X)=f(x)$ функция f^* определена однозначно. Функция f^* непрерывна, так как ввиду открытости естественного отображения пространства G на пространство G/H (см. C)) и непрерывности функции f прообразом области для отображения f^* всегда является область (см. § 10, B)).

Итак, теорема 10 полностью доказана.

Установим теперь некоторые связи между свойствами топологических пространств G, H и G/H.

G) Пусть G—топологическая группа и H—ее подгруппа. Веса пространств H и G/H не превосходят веса пространства G (см. определение 14).

Правильность этого утверждения вытекает непосредственно из построений базисов пространств H и G/H, данных в пункте C) § 11 и в определении 24.

H) Пусть G—топологическая группа и H—ее подгруппа. Если пространство G бикомпактно, то пространства H и G/H также бикомпактны. Если пространство G локально бикомпактно, то пространства H и G/H также локально бикомпактны.

В отношении пространства H это вытекает из предложения B) § 13. Если пространство G бикомпактно, то пространство G/H бикомпактно как непрерывный образ бикомпактного пространства (см. § 13, D)). Пусть теперь пространство G локально бикомпактно; докажем локальную бикомпактность пространства G/H. Пусть f—естественное отображение пространства G на пространство G/H, a—произвольный элемент пространства G, $A=f(a)$ и U—такая окрестность элемента a в пространстве G, что множество $\overline{U}$ бикомпактно. Множество $f(\overline{U})$ пространства G/H бикомпактно (см. § 13, D)), а так как пространство G/H хаусдорфово (см. F)), то множество $f(\overline{U})$ замкнуто в пространстве G/H (см. § 13, C)). Так как $U\subset\overline{U}$, то $f(U)\subset f(\overline{U})$ и, следовательно, $\overline{f(U)}\subset f(\overline{U})$. Таким образом, $\overline{f(U)}$ есть бикомпактное множество. С другой стороны, очевидно, что окрестность U^* элемента A в пространстве G/H, составленная из всех смежных классов, пересекающихся с U, совпадает с $f(U)$, $U^*=f(U)$. Таким образом, $\overline{U}^*$ есть бикомпактное множество, и локальная бикомпактность пространства G/H доказана.

I) Пусть G—топологическая группа, H—ее бикомпактная подгруппа и f—естественное отображение группы G на пространство G/H (см. C)). Если множество $Q\subset G/H$ бикомпактно, то множество $P=f^{-1}(Q)$ также бикомпактно. В частности, если пространство G/H бикомпактно или локально бикомпактно, то группа G бикомпактна, соответственно локально бикомпактна.

Пусть Δ—произвольная центрированная система замкнутых подмножеств пространства P; покажем, что она имеет непустое пересечение. Без ограничения общности можно считать, что система Δ мультипликативна (см. § 15, F)). Будем считать для определенности, что G/H есть пространство правых смежных классов. В пространстве Q рассмотрим систему Δ^* всех множеств вида $f(F)$, где $F \in \Delta$. Из того, что система Δ—центрированная, следует, что система Δ^*—также центрированная, и, хотя замкнутость множеств этой системы не доказана, все же из бикомпактности пространства Q следует, что у всех множеств системы Δ^* имеется общая точка прикосновения A (см. § 14, C)). Таким образом, какова бы ни была окрестность U единицы группы G, окрестность U^*, состоящая из всех смежных классов, содержащихся в множестве AU, пересекается с любым множеством системы Δ^*. Из этого следует, что множество AU пересекается со всяким множеством системы Δ, а это значит, что каждое множество вида FU^{-1}, где $F \in \Delta$, пересекается с A. Из сказанного следует, что система Δ' всех множеств вида $(FU^{-1}) \cap A$, где $F \in \Delta$, а U—произвольная окрестность единицы, является центрированной. Так как смежный класс A, будучи гомеоморфным пространству H, бикомпактен, то для всех множеств системы Δ' существует общая точка прикосновения a. Таким образом, какова бы ни была окрестность V единицы группы G, множества FU^{-1} и aV имеют непустое пересечение, а это значит, что множество F имеет непустое пересечение с областью aVU, содержащей точку a. Так как для произвольной окрестности W единицы найдутся такие окрестности V и U единицы, что $VU \subset W$, то из доказанного следует, что любая окрестность aW точки a пересекается с любым множеством $F \in \Delta$, а так как F есть замкнутое множество, то $a \in F$. Таким образом, найдена общая точка a всех множеств центрированной системы Δ, и бикомпактность множества P доказана.

Пример 32. Вскоре после того, как было точно формулировано понятие топологической группы, А. Н. Колмогоровым было замечено, что пространство ее всегда регулярно. Сравнительно скоро был установлен и факт полной регулярности пространства топологической группы. После этого возник оказавшийся весьма трудным вопрос о том, не является ли пространство топологической группы нормальным. Вопрос этот был решен отрицательно А. А. Марковым, который для решения его построил весьма интересный и тонкий пример [27]. Не имея возможности провести сколько-нибудь полно все построение А. А. Маркова, привожу здесь лишь некоторые указания на способ построения примера. А. А. Марков показал, что всякое вполне регулярное топологическое пространство R может быть включено как замкнутое подмножество в пространство некоторой топологической группы G. Легко доказывается, что замкнутое подмножество нормального пространства является нормальным пространством. Таким образом, если бы группа G была нормальной, то и исходное пространство R было бы нормальным; между тем известно, что существуют вполне регулярные, но не нормальные пространства. Итак, существуют топологические группы, пространства которых не нормальны.

Пример 33. Найдем все подгруппы аддитивной группы G всех векторов r-мерного векторного пространства, или, что то же, r-мерной векторной группы.

Пусть
$$e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_t \tag{10}$$
—произвольная линейно независимая система векторов из G. Множество всех векторов вида
$$\lambda^1 e_1 + \ldots + \lambda^s e_s + \mu^1 f_1 + \ldots + \mu^t f_t, \tag{11}$$
где $\lambda^1, \ldots, \lambda^s$ суть целые числа, а $\mu^1, \ldots, \mu^t$—произвольные действительные числа, очевидно, есть подгруппа группы G. Оказывается, что для произвольной подгруппы H топологической группы G можно выбрать такую линейно независимую систему векторов (10), что H есть совокупность всех векторов вида (11). Если при этом подгруппа H дискретна, то $t=0$.

Доказательство будем вести индуктивно по размерности r векторной группы G. При $r=0$ наше утверждение верно. Пусть K—некоторое одномерное векторное подпространство пространства G, $G^*=G/K$ и φ—естественное линейное отображение векторного пространства G на векторное пространство G^*. Векторное пространство G будем считать евклидовым. Рассмотрим сначала случай, когда подгруппа H дискретна. Пусть e—вектор минимальной положительной длины α из H. Примем за K одномерное векторное пространство, содержащее вектор e. Легко видеть, что пересечение $H \cap K$ состоит из всех векторов λe, где λ—целое число, и что расстояние от множества $H \setminus K$ до K не меньше $\frac{\alpha}{2}$. Действительно, если $\rho(x, y) < \frac{\alpha}{2}$, где $x \in H \setminus K$, $y \in K$, $y = (\lambda + \vartheta)e$, $|\vartheta| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}$, λ—целое, то $\rho(x, \lambda e) < \alpha$, т. е. $\rho(x - \lambda e, 0) < \alpha$. Таким образом, $H^* = \varphi(H)$ есть дискретная подгруппа группы G^*, и потому в силу предположения индукции в G^* имеется такая линейно независимая система $e_1^*, \ldots, e_s^*$ векторов, что группа H^* состоит из всех векторов $\lambda^1 e_1^* + \ldots + \lambda^s e_s^*$, где $\lambda^1, \ldots, \lambda^s$ —целые числа. Пусть e_i—такой вектор из H, что $\varphi(e_i) = e_i^*$, $i = 1, \ldots, s$. Если теперь $x \in H$, то $\varphi(x) = \lambda^1 e_1^* + \ldots + \lambda_s e_s^*$, и потому $x - \lambda^1 e_1 - \ldots - \lambda^s e_s = \lambda e$. Таким образом, полагая $e_{s+1} = e$, мы получаем искомую систему $e_1, \ldots, e_{s+1}$. Допустим теперь, что подгруппа H не дискретна, и пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$—последовательность векторов положительной длины из H, сходящаяся к нулю. Положим $y_n = \frac{x_n}{|x_n|}$, и пусть f—предельная точка для последовательности $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ Легко видеть, что одномерное векторное пространство K, содержащее вектор f, входит в H, ибо подгруппа H группы G замкнута и содержит все векторы вида $m|x_n|y_n$, где m есть произвольное целое число. Легко видеть, что подгруппа $H^*=\varphi(H)$ алгебраической группы G^* замкнута в G^* и потому в силу предположения индукции в ней можно выбрать линейно независимую систему векторов $e_1^*, \ldots, e_s^*, f_1^*, \ldots, f_t^*$. Пусть e_i и f_j—такие векторы из H, что $\varphi(e_i)=e_i^*$, $\varphi(f_j)=f_j^*$. Покажем, что всякий вектор $\mu^1 f_1+\ldots+\mu^t f_t$, где $\mu^1, \ldots, \mu^t$—произвольные действительные числа, принадлежит группе H. Пусть $x\in H$—такой вектор, что $\varphi(x)=\mu^1 f_1^*+\ldots+\mu^t f_t^*$; тогда $x-\mu^1 f_1-\ldots-\mu^t f_t=\mu f$, и потому $\mu^1 f_1+\ldots+\mu^t f_t=x-\mu f\in H$. Пусть теперь $y\in H$; тогда $\varphi(y)=\lambda^1 e_1^*+\ldots+\lambda^s e_s^*+\mu^1 f_1^*+\ldots+\mu^t f_t^*$. Таким образом, $y=\lambda^1 e_1+\ldots+\lambda^s e_s+\mu^1 f_1+\ldots+\mu^t f_t+\mu f_{t+1}$, где $f_{t+1}=f$.

Пример 34. Пусть G—топологическая группа всех комплексных квадратных матриц порядка n с детерминантами, отличными от нуля (см. пример 31). Множество G' всех действительных матриц из G есть подгруппа топологической группы G. Точно так же множество G'' всех действительных матриц с положительными детерминантами есть подгруппа топологической группы G'. Множество H' всех ортогональных матриц из G' (см. пример 3) есть подгруппа группы G', а множество H'' всех ортогональных матриц из G'' есть подгруппа группы G''. Топологические группы G' и G'' локально бикомпактны, а топологические группы H' и H'' бикомпактны. Все эти группы обладают счетными базисами.

§ 20. Изоморфизм. Гомоморфизм

В этом параграфе дается распространение на топологические группы тех понятий и соотношений, которые были установлены в § 3 для групп.

С точки зрения нашей теории две топологические группы являются одинаковыми, если они обладают одинаковым тополого-алгебраическим строением. Более полно эта мысль выражается следующим определением.

Определение 26. Отображение f топологической группы G на топологическую группу G' называется *изоморфным отображением* или *изоморфизмом*, если 1) f является изоморфным отображением алгебраической группы G на алгебраическую группу G' (см. определение 5); 2) f является гомеоморфным отображением топологического пространства G на топологическое пространство G' (см. определение 15). Если $G'=G$, то изоморфизм называется *автоморфизмом*. Две топологические группы называются *изоморфными*, если одну из них можно изоморфно отобразить на другую.

Ниже на примерах будет показано, что две топологические группы могут быть изоморфны как алгебраические группы, но не изоморфны как топологические группы.

Определение 27. Отображение g топологической группы G в топологическую группу G^* называется *гомоморфным*, если: 1) g является гомоморфным отображением алгебраической группы G в алгебраическую группу G^* (см. определение 6); 2) g является непрерывным отображением топологического пространства G в топологическое пространство G^* (см. определение 16). Гомоморфное отображение g топологической группы G в топологическую группу G^* называется *открытым*, если g есть открытое отображение топологического пространства G в топологическое пространство G^* (см. § 10, E)).

Различие между открытыми и неоткрытыми гомоморфизмами в теории топологических групп является весьма существенным. Именно открытый гомоморфизм является естественным обобщением понятия гомоморфизма, данного для алгебраических групп, на группы топологические.

A) Пусть G и G^*—две топологические группы и g—гомоморфное отображение алгебраической группы G в алгебраическую группу G^*. Для того чтобы отображение g было непрерывным или открытым, достаточно, чтобы оно было таковым лишь в единице e группы G, т. е. достаточно, чтобы было выполнено условие a) или соответственно условие b):

a) для всякой окрестности U^* единицы e^* группы G^* существует такая окрестность U единицы e, что $g(U) \subset U^*$;

b) для всякой окрестности V единицы e существует такая окрестность V^* единицы e^*, что $g(V) \supset V^*$.

Допустим, что условие a) выполнено. Пусть $a \in G$, $g(a) = a^*$ и U^*—произвольная окрестность элемента a^*. Тогда $U^* a^{*-1}$ есть область, содержащая единицу e^*, и, следовательно, по условию a), существует такая окрестность U' единицы e, что $g(U') \subset U^* a^{*-1}$. Область $U = U'a$ содержит окрестность V элемента a, и мы имеем $g(V) \subset g(U) = g(U')g(a) \subset U^* a^{*-1} a^* = U^*$. Таким образом, отображение g непрерывно. Вполне аналогично из условия b) выводится, что отображение g является открытым.

B) Пусть G—топологическая группа, N—ее нормальный делитель и G/N—факторгруппа. Поставим в соответствие каждому элементу $x \in G$ тот смежный класс X по делителю N, который содержит x; $x \in X$, $g(x) = X$. Отображение g топологической группы G на топологическую группу G/N является открытым гомоморфным отображением. Это отображение мы будем называть *естественным отображением* группы G на ее факторгруппу G/N.

В § 3 было показано, что g является гомоморфным отображением алгебраической группы G на алгебраическую группу G/N (см. § 3, C)). В § 19 было показано, что g есть открытое непрерывное отображение топологического пространства G на топологическое пространство G/N (см. § 19, С)). Таким образом, согласно определению 27 g есть открытое гомоморфное отображение топологической группы G на топологическую группу G/N.

Обратной к утверждению В) является следующая теорема:

Теорема 11. *Пусть G и G^*—две топологические группы и g—открытое гомоморфное отображение группы G на G^* с ядром гомоморфизма N. Тогда N есть нормальный делитель топологической группы G, и топологическая группа G^* изоморфна топологической группе G/N. Устанавливаемый здесь изоморфизм между группами G^* и G/N совпадает с установленным в теореме* 1. *Его мы будем называть* естественным.

Доказательство. Согласно теореме 1, ядро N есть нормальный делитель алгебраической группы G. Далее, так как N является полным прообразом одного элемента e^* при непрерывном отображении g, то N есть замкнутое подмножество топологического пространства G (см. § 10, В)). Таким образом, N есть нормальный делитель топологической группы G.

Пусть x^*—некоторый элемент группы G^* и $X=g^{-1}(x^*)$. Согласно теореме 1, X есть смежный класс группы G по делителю N. Положим $f(x^*)=X$; в силу теоремы 1 f является изоморфным отображением алгебраической группы G^* на алгебраическую группу G/N. Покажем, что f есть гомеоморфное отображение пространства G^* на пространство G/N. Для этого достаточно доказать взаимную непрерывность отображения f, так как взаимная однозначность его уже следует из алгебраической изоморфности.

Пусть $a^*\in G^*$ и $f(a^*)=A$. Обозначим через U^* некоторую окрестность элемента A в пространстве G/N. Согласно определению 24 окрестность U^* составлена из всех смежных классов вида Nx, где $x\in U$, причем U есть некоторая фиксированная окрестность в пространстве G. Пусть a—такой элемент из U, что $A=Na$. Так как отображение g открыто, то существует такая окрестность V^* элемента a^*, что $g(U)\supset V^*$, ибо $g(a)=a^*$. Отсюда следует, что $f(V^*)\subset U^*$. Действительно, пусть $x^*\in V^*$. Тогда существует такой элемент $x\in U$, что $g(x)=x^*$. Следовательно, $f(x^*)=Nx\in U^*$. Таким образом, отображение f непрерывно.

Пусть $A=Na\in G/N$ и $f^{-1}(A)=a^*$. Пусть, далее, U^*—некоторая окрестность элемента a^*. Так как отображение g непрерывно, то существует такая окрестность V элемента a, что $g(V)\subset U^*$, ибо $g(a)=a^*$. Обозначим через V^* окрестность элемента A, составленную из всех смежных классов вида Nx, где $x\in V$. Так как $g(V)\subset U^*$, то $f^{-1}(V^*)\subset U^*$. Таким образом, отображение f^{-1} непрерывно.

Итак, мы видим, что отображение f алгебраически изоморфно и взаимно непрерывно. Таким образом, f есть изоморфное отображение топологической группы G^* на топологическую группу G/N.

Следует отметить, что если бы отображение g не было открытым, то возможно было бы доказать лишь непрерывность отображения f^{-1}, но не непрерывность отображения f.

C) Отметим, что если открытое гомоморфное отображение g топологической группы G на топологическую группу G^* имеет ядро, содержащее лишь единицу, то отображение это является изоморфным.

Действительно, при этих условиях гомоморфизм g является взаимно однозначным и совпадает с естественным изоморфизмом групп G/N и G^*, построенным в теореме 11.

D) Пусть G и G^*—две топологические группы и f—открытое гомоморфное отображение группы G на группу G^* с ядром N'. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между подгруппами группы G^* и подгруппами группы G, содержащими ядро N'. Соответствие это устанавливается следующим образом: если N^* есть подгруппа группы G^*, то соответствующая ей подгруппа N группы G определяется как полный прообраз $N=f^{-1}(N^*)$ группы N^* при отображении f; если N есть подгруппа группы G, содержащая N', то соответствующая ей подгруппа N^* определяется как образ $N^*=f(N)$ группы N при отображении f. Установленные таким образом два соответствия оказываются взаимно обратными. Далее, нормальные делители соответствуют друг другу. Сверх того, если N и N^*—два соответствующих друг другу нормальных делителя, то факторгруппы G/N и G^*/N^* изоморфны.

Разберем сперва переход от N^* к N.

Как полный прообраз замкнутого множества N^*, множество N также замкнуто, и оно содержит N'. Далее, N есть подгруппа алгебраической группы G (см. § 3, G)). Таким образом, N есть подгруппа топологической группы G. Если теперь N^*—нормальный делитель группы G^*, то обозначим через g естественное гомоморфное отображение группы G^* на группу $G^*/N^*=G^{**}$. Тогда $h=gf$ есть открытое гомоморфное отображение группы G на группу G^{**} с ядром N. Таким образом, в силу теоремы 11 N есть нормальный делитель группы G, а факторгруппы G/N и G^*/N^* изоморфны между собой.

Рассмотрим теперь переход от N к N^*, где $N^*=f(N)$ и $N\supset N'$. Покажем прежде всего, что полный прообраз множества N^* в группе G при отображении f совпадает с N. Действительно, если $f(a)\in N^*$, то существует такой элемент $b\in N$, что $f(a)=f(b)$; тогда $f(ab^{-1})=e^*$, т. е. $ab^{-1}\in N'\subset N$ или $a\in Nb=N$. Но из этого следует, что $f(G\setminus N)=G^*\setminus N^*$, а так как отображение f является открытым и $G\setminus N$ есть область, то $G^*\setminus N^*$ также есть область, т. е. множество N^* замкнуто в G^*. Тот факт, что N^* есть подгруппа или соответственно нормальный делитель группы G^*, устанавливается непосредственно (см. § 3, F)).

Нижеследующая теорема 12 показывает, что для широкого класса топологических групп гомоморфное отображение автоматически оказывается открытым.

Теорема 12. *Пусть G—локально бикомпактная топологическая группа, пространство которой можно представить как теоретико-множественную сумму счетного числа бикомпактных подмножеств, и g—гомоморфное отображение этой группы на локально бикомпактную топологическую группу G^*. Оказывается, что отображение g является открытым.*

Доказательство. В силу замечания А) достаточно показать, что для произвольной окрестности U единицы группы G найдется такая окрестность U^* единицы группы G^*, что $g(U) \supset U^*$. Выберем такую окрестность V единицы группы G, что множество $F = \overline{V}$ бикомпактно и $FF^{-1} \subset U$. Пусть Σ—счетная совокупность бикомпактных множеств пространства G, сумма которых совпадает с самим пространством G. Каково бы ни было множество $E \in \Sigma$, система областей Vx, где $x \in E$, покрывает множество E, и потому существует конечное покрытие множества E областями вида Vx, $x \in E$. Так как система Σ содержит лишь счетное число множеств, то существует в группе G такая последовательность $a_1, a_2, \ldots$ элементов, что множества $F_i = Fa_i$, $i = 1, 2, \ldots$, покрывают пространство G. Положим $F_i^* = g(F_i)$. Множества $F_1^*, F_2^*, \ldots$ покрывают пространство G^*.

Докажем, что множество $g(F)$ содержит область пространства G^*. Допустим противоположное; тогда ни одно из множеств F_i^* не содержит области пространства G^*. Покажем, что это невозможно. Пусть W_0^*—произвольная окрестность в пространстве G^*, замыкание которой бикомпактно. Так как множество F_1^* не содержит области, то существует окрестность W_1^*, замыкание которой бикомпактно и целиком содержится в множестве $W_0^* \setminus F_1^*$. Так как множество F_2^* не содержит области, то существует окрестность W_2^*, замыкание которой бикомпактно и содержится в множестве $W_1^* \setminus F_2^*$. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную последовательность окрестностей $W_0^*, W_1^*, W_2^*, \ldots$ с бикомпактными замыканиями, удовлетворяющую условию $\overline{W}_i^* \subset W_{i-1}^* \setminus F_i^*$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как все множества $\overline{W}_i^*$ бикомпактны и непусты, то пересечение их непусто (см. теорему 4), и оно не принадлежит сумме множеств F_i^*, $i = 1, 2, \ldots$ Но это невозможно, так как эта сумма совпадает с G^*. Итак, доказано, что множество $g(F)$ содержит некоторую область V^*.

Пусть $a^* \in V^*$ и a—такая точка из F, что $g(a) = a^*$. Так как $FF^{-1} \subset U$, то $Fa^{-1} \subset U$. Следовательно, имеет место соотношение $g(U) \supset g(F)a^{*-1} \supset V^*a^{*-1}$. Но V^*a^{*-1} есть область, содержащая единицу группы G^*.

Таким образом, теорема 12 доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы 12 была использована не локальная бикомпактность пространства G^*, а лишь его локальная компактность (см. пример 25).

Отметим здесь два естественных класса топологических групп, к которым применима теорема 12 (см. E) и F)).

E) Локально бикомпактная топологическая группа G, пространство которой допускает счетный базис, может быть представлена как сумма счетного числа своих бикомпактных подмножеств.

Выбирая из каждой окрестности счетного базиса пространства G по одной точке, мы получим счетное всюду плотное множество M точек пространства G. Пусть U—окрестность единицы в G, замыкание которой бикомпактно. Так как множество M всюду плотно в G, то для любой точки $x \in G$ область $U^{-1}x$ пересекается с M. Следовательно, существует точка $a \in M$, входящая в $U^{-1}x$, и мы имеем $x \in Ua$. Таким образом, бикомпактные множества $\overline{U}a$, $a \in M$, покрывают всю группу G, и предложение E) доказано.

F) Будем говорить, что топологическая группа G имеет *бикомпактное происхождение*, если существует окрестность V единицы этой группы с бикомпактным замыканием $\overline{V}$, *порождающая* всю группу G (последнее означает, что минимальная подгруппа алгебраической группы G, содержащая множество V, совпадает с G). Тогда $U = V \cup V^{-1}$ есть *симметричная* ($U^{-1} = U$) окрестность единицы группы G с бикомпактным замыканием, порождающая группу G, и $G = U \cup U^2 \cup \ldots \cup U^n \cup \ldots$ Так как каждое множество $\overline{U^n}$ бикомпактно (см. § 17, G)), то пространство G есть сумма счетного числа бикомпактных множеств, и потому к группе G применима теорема 12. Важный класс групп бикомпактного происхождения образуют *связные локально бикомпактные группы* (см. теорему 14). Заметим, что если группа G обладает бикомпактным нормальным делителем N с факторгруппой G/N бикомпактного происхождения, то группа G имеет бикомпактное происхождение.

Докажем последнее утверждение. Пусть f—естественный гомоморфизм группы G на группу G/N, и V^*—окрестность с бикомпактным замыканием, порождающая G/N. Тогда $V = f^{-1}(V^*)$ есть окрестность, порождающая G, и так как $f^{-1}(\overline{V}^*)$ есть бикомпактное множество (см. § 19, I)), то множество $\overline{V} \subset f^{-1}(\overline{V}^*)$ бикомпактно.

Простым следствием теоремы 12 является предложение

G) Пусть G—локально бикомпактная группа, пространство которой есть сумма счетного числа бикомпактных множеств, а H и N—подгруппа и нормальный делитель группы G. Допустим, что HN есть замкнутое множество пространства G. Тогда $HN = NH$ есть подгруппа группы G, $H \cap N$—нормальный делитель группы H, и факторгруппы $(HN)/N$ и $H/(H \cap N)$ изоморфны между собой.

Докажем это. Так как нормальный делитель N перестановочен со всяким элементом группы G, то $HN=NH$. Поэтому $HN(HN)^{-1}=HNN^{-1}H^{-1}=HN$, и HN есть подгруппа алгебраической группы G, а так как множество HN замкнуто в G, то HN есть подгруппа группы G. Естественное гомоморфное отображение группы HN на группу $(HN)/N$ обозначим через f. Так как группа G локально бикомпактна, то и группа $(HN)/N$ локально бикомпактна (см. § 19, H)). Так как N есть ядро гомоморфизма f, то $f(HN)=f(H)$, и ядро гомоморфизма f, рассматриваемого на H, есть $H\cap N$. Так как группа H локально бикомпактна и пространство ее есть счетная сумма бикомпактных множеств, то к гомоморфизму f группы H на группу $(HN)/N$ применима теорема 12, и потому (см. теорему 11) группа $(HN)/N$ изоморфна группе $H/(H\cap N)$.

П р и м е р 35. Пусть G—аддитивная группа действительных чисел с дискретной топологией и G^*—аддитивная группа действительных чисел с ее естественной топологией. Поставим в соответствие каждому действительному числу $x\in G$ то же самое действительное число $x^*\in G^*$, $g(x)=x^*$. Очевидно, что g есть гомоморфное отображение группы G на группу G^*. Алгебраически отображение g даже изоморфно. Однако g не есть открытое отображение и потому не является изоморфизмом для топологических групп G и G^*. Действительно, каждый элемент x группы G составляет область, однако соответствующий ему элемент x^* отнюдь не составляет области. Невозможность применения теоремы 12 объясняется здесь тем, что группа G не может быть представлена как счетная сумма бикомпактных множеств.

П р и м е р 36. Пусть G—плоскость, взятая в определенных декартовых координатах. Ее точки, или, что то же, векторы, образуют аддитивную топологическую группу. Пусть, далее, H—прямая, взятая в плоскости G и проходящая через начало координат. Угловой коэффициент этой прямой обозначим через α. Множество H, очевидно, представляет собой подгруппу топологической группы G. Обозначим, далее, через N совокупность всех точек плоскости G, обладающих целочисленными координатами. Множество N также есть подгруппа группы G. Положим $G^*=G/N$ и обозначим через g естественное гомоморфное отображение группы G на G^* (см. B)). При гомоморфизме g подгруппа H переходит в некоторое множество H^*, являющееся подгруппой алгебраической группы G^* (см. § 3, F)). Однако H^* может не быть замкнутым подмножеством топологического пространства G^*. Если α—рациональное число, то нетрудно убедиться в том, что H^*—замкнутое множество; именно, в этом случае H^* представляет собой замкнутую кривую, проходящую в G^*. Если же α—иррациональное число, то H^* есть всюду плотное множество в G^*.

Чтобы дать полное доказательство этого факта, сошлемся на результат, изложенный в примере 65. Легко видеть, что если α иррационально, то существует такое число β, что β и $\alpha\beta$ линейно независимы, т. е. из соотношения $p\beta+q\alpha\beta=r$, где p, q и r—целые, следует $p=q=r=0$. Обозначим через a элемент группы G с координатами β и $\alpha\beta$ и через A—подгруппу с образующей a. Тогда $A\subset H$; сверх того, из результата, изложенного в примере 65, следует, что подгруппа $g(A)$ всюду плотна в G^*. Таким образом, подгруппа H^* также всюду плотна в G^*.

Мы видим, что в случае иррационального α подгруппа H^* отнюдь не замкнута. Таким образом, H^* не является подгруппой топологической группы G^*, но тем не менее является топологической группой (см. § 19, А)). При отображении g топологическая группа H отображается на топологическую группу H^* гомоморфно, однако гомоморфизм этот не открытый. Алгебраически отображение g группы H на группу H^* является даже изоморфизмом. Нетрудно проверить, что группа H^* не является локально компактной. Этим и объясняется неприменимость теоремы 12 в этом случае. Алгебраические группы H и H^* изоморфны, но топологические группы H и H^* не изоморфны. Они даже не гомеоморфны, так как одна из них локально бикомпактна, а другая не является локально компактной.

П р и м е р 37. Пусть G—бикомпактная топологическая группа. Покажем, что в каждой окрестности U единицы e группы G существует нормальный делитель N, факторгруппа G/N по которому имеет пространство со счетным базисом (см. определение 14). Предложение это позволяет сводить доказательство многих теорем с общего случая бикомпактных групп к случаю бикомпактных групп, допускающих счетный базис.

В силу леммы Урысона существует на G непрерывная числовая функция f, всюду неотрицательная, обращающаяся в нуль на множестве $G\setminus U$ и положительная в точке e. Введем для элементов группы G принцип эквивалентности, считая, что элементы a и b эквивалентны, $a\sim b$, если $f(xay)=f(xby)$ при произвольных x и y из G. Очевидно, что здесь имеют место рефлексивность, симметрия и транзитивность. Класс эквивалентных между собой элементов, содержащий единицу e, обозначим через N. Покажем, что N есть нормальный делитель топологической группы G и что классы эквивалентных между собой элементов суть смежные классы группы G по подгруппе N.

Замкнутость множества N вытекает из непрерывности функции f. Пусть, далее, a и b—два элемента из N. Мы имеем: $f(xay)=$ $=f(xy)$; так как соотношение это верно при произвольных x и y, то в нем x можно заменить на xa^{-1}, и мы получаем $f(xy)=f(xa^{-1}y)$, т. е. $a^{-1}\in N$. Далее, при $a\in N$, $b\in N$ имеем: $f(xaby)=f(xa(by))=$ $=f(xby)=f(xy)$; таким образом, $ab\in N$. Следовательно, N есть подгруппа топологической группы G. Пусть теперь z—произвольный элемент из G. Мы имеем $f(xay)=f(xy)$ при произвольных x и y. Заменяя x через xz^{-1} и y через zy, получаем $f(xz^{-1}azy)=f(xy)$, т. е. $z^{-1}az \in N$. Следовательно, N есть нормальный делитель группы G. Пусть, наконец, $c \sim d$. Тогда $f(xcy)=f(xdy)$. Заменяя в этом соотношении y через $d^{-1}y$, получаем $f(xcd^{-1}y)=f(xy)$, т. е. $cd^{-1} \in N$. Если, наоборот, $cd^{-1} \in N$, то $f(xcd^{-1}y)=f(xy)$, и, заменяя y через dy, получаем $f(xcy)=f(xdy)$, т. е. $c \sim d$.

Из доказанного следует, что при фиксированных x и y функция $f(xay)$ аргумента a принимает одинаковые значения на всех элементах a, принадлежащих одному и тому же смежному классу A группы G по нормальному делителю N. Таким образом, можно определить $f(xAy)$, положив $f(xAy)=f(xay)$, где $a \in A$. В алгебраической группе G/N введем теперь расстояние, определив $\rho(A, B)$ как максимум модуля $|f(xAy)-f(xBy)|$ при произвольных x, y из G. Без труда доказывается, что вытекающая из этой метрики топология совпадает с топологией факторгруппы G/N (см. определение 24). Так как бикомпактное метрическое пространство имеет счетный базис (см. пример 26), то этим предложение наше доказано.

§ 21. Прямое произведение топологических групп

В настоящем параграфе дается определение *прямого произведения* топологических групп, получаемое в результате простого соединения определений прямого произведения групп (см. § 5) и прямого произведения топологических пространств (см. § 14). Здесь в первую очередь я определяю прямое произведение конечного числа произвольных топологических групп, а затем прямое произведение произвольного множества бикомпактных топологических групп. Последнее определение в случае конечного множества групп совпадает с первым; однако соответствующее ему определение *распадения* топологической группы в прямое произведение ее подгрупп и в случае конечного числа подгрупп пригодно лишь для бикомпактных топологических групп. Ввиду этого здесь, в случае конечного числа сомножителей, я не могу ограничиться рассмотрением двух сомножителей, как это было сделано для алгебраических групп в § 5.

Определение 28. Пусть $N_1, \ldots, N_k$—конечная последовательность топологических групп. Обозначим через G' совокупность всех последовательностей $x=(x_1, \ldots, x_k)$, где $x_i \in N_i$, $i=1, \ldots, k$. Множество G' есть алгебраическая группа (см. § 5, А) и определение 10) и топологическое пространство (см. § 14, А) и определение 20). Оказывается, что групповые операции, имеющиеся в группе G', непрерывны в топологическом пространстве G', так что G' есть топологическая группа (см. определение 22).

Топологическая группа G' называется *прямым произведением* топологических групп $N_1, \ldots, N_k$: $G'=N_1\times\ldots\times N_k$.

Покажем, что групповые операции, имеющиеся в группе G', непрерывны в топологическом пространстве G'. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_k)$ и $y=(y_1, \ldots, y_k)$—два элемента из G' и $xy^{-1}=z=(z_1, \ldots, z_k)$, т. е. $z_i=x_iy_i^{-1}$, $i=1, \ldots, k$. Пусть, далее, $W=(W_1, \ldots, W_k)$—произвольная окрестность элемента z в пространстве G'. Здесь W_i есть окрестность элемента z_i в пространстве N_i. Ввиду непрерывности операций, имеющихся в топологической группе N_i, в ней существуют такие окрестности U_i и V_i элементов x_i и y_i,что $U_iV_i^{-1}\subset W_i$. Легко видеть, что окрестности $U=(U_1, \ldots, U_k)$ и $V=(V_1, \ldots, V_k)$ элементов x и y в пространстве G' удовлетворяют условию $UV^{-1}\subset W$. Таким образом, непрерывность групповых операций в G' доказана.

A) Пусть $N_1, \ldots, N_k$—последовательность топологических групп с единицами $e_1, \ldots, e_k$ и G'—прямое произведение этих групп. Каждому элементу $x_i\in N_i$ поставим в соответствие элемент $f_i(x_i)=(e_1, \ldots, x_i, \ldots, e_k)\in G'$. Оказывается, что f_i есть изоморфное отображение топологической группы N_i на некоторый нормальный делитель N'_i топологической группы G'. Из предложения F) § 5 следует, что алгебраическая группа G' распадается в прямое произведение своих подгрупп $N'_1, \ldots, N'_k$ (см. определение 10′). Оказывается далее, что, каковы бы ни были окрестности $U'_1, \ldots, U'_k$ единицы e' группы G' в топологических группах $N'_1, \ldots, N'_k$, их групповое произведение $U'_1U'_2\ldots U'_k$ содержит некоторую окрестность U' единицы e' группы G'.

Тот факт, что f_i есть изоморфизм алгебраической группы N_i на нормальный делитель алгебраической группы G', уже был установлен в предложении F) § 5. Замкнутость множества N'_i вытекает из предложения A) § 14. Докажем, что f_i есть непрерывное открытое отображение топологической группы N_i на топологическую группу N'_i. Выясним, что представляет собой произвольная окрестность U'_i единицы e' топологической группы N'_i. Окрестности в пространстве N'_i определяются как в подпространстве пространства G'. Поэтому, строя окрестность U'_i, мы должны исходить из окрестности $U'=(U_1, \ldots, U_k)$ единицы e' в пространстве G'; здесь $U_1, \ldots, U_k$ суть окрестности единиц в пространствах $N_1, \ldots, N_k$. Окрестность U'_i определяется как пересечение $N'_i\cap U'$, так что $U'_i=f_i(U_i)$. Таким образом, для произвольной окрестности U'_i единицы e' группы N'_i существует такая окрестность U_i единицы в группе N_i, что $U'_i=f_i(U_i)$, и наоборот, если U_i есть произвольная окрестность единицы в группе N_i, то $U'_i=f_i(U_i)$ есть окрестность единицы в группе N'_i. Отсюда следует, что отображение f_i открыто и непрерывно (см. § 20, A)). Будучи алгебраически изоморфным, оно является поэтому и изоморфным отображением топологической группы N_i на топологическую группу N'_i. Далее, очевидно, что групповое произведение $U'_1U'_2\ldots$ $\ldots U'_k$ равно U'. Отсюда вытекает справедливость последнего утверждения предложения A).

Предложение A) дает новый подход к определению прямого произведения топологических групп.

Определение 28′. Пусть G—топологическая группа и $N_1, \ldots, N_k$—ее нормальные делители. Говорят, что топологическая группа G *распадается в прямое произведение* своих подгрупп $N_1, \ldots, N_k$, если алгебраическая группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп $N_1, \ldots, N_k$ (см. определение 10′) и если, сверх того, выполнено следующее условие: каковы бы ни были окрестности $U_1, \ldots, U_k$ единицы e в группах $N_1, \ldots, N_k$, их групповое произведение $U_1U_2\ldots U_k$ содержит некоторую окрестность U единицы группы G.

Связь между определениями 28 и 28′ устанавливается предложением A) и нижеследующим предложением B).

B) Пусть топологическая группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп $N_1, \ldots, N_k$ (см. определение 28′) и пусть G'—прямое произведение топологических групп $N_1, \ldots, N_k$ (см. определение 28). Каждому элементу $x=(x_1, \ldots, x_k)\in G'$ поставим в соответствие элемент $f(x)=x_1x_2\ldots x_k\in G$. Оказывается, что f есть изоморфное отображение топологической группы G' на топологическую группу G и что ff_i (см. A)) есть тождественное отображение группы N_i на себя.

То, что f есть изоморфное отображение алгебраической группы G' на алгебраическую группу G и что ff_i есть тождественное отображение группы N_i на себя, было уже доказано (см. § 5, B) и G)). Остается доказать, что отображение f открыто и непрерывно в единице (см. § 20, A)). Докажем сначала непрерывность. Пусть U—произвольная окрестность единицы в группе G и V—такая окрестность единицы в G, что $V^k\subset U$. Положим $V_i=N_i\cap V$; тогда $V'=(V_1, \ldots, V_k)$ есть окрестность единицы в группе G'. Очевидно, что $f(V')=V_1V_2\ldots V_k\subset V^k\subset U$. Таким образом, отображение f непрерывно. Пусть теперь $U'=(U_1, \ldots, U_k)$—произвольная окрестность единицы в группе G'; здесь U_i есть окрестность единицы в группе N_i. В силу определения 28′ групповое произведение $U_1U_2\ldots U_k$ содержит некоторую окрестность U единицы группы G, т. е. $f(U')=U_1U_2\ldots U_k\supset U$. Таким образом, открытость отображения f доказана.

Нижеследующая теорема 13 показывает, что в некоторых важных случаях условия определения 28′ удается ослабить.

Теорема 13. *Пусть G—локально бикомпактная топологическая группа, пространство которой можно представить как сумму счетного числа бикомпактных подмножеств, и $N_1, \ldots, N_k$—нормальные делители топологической группы G. Если алгебраическая группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп*

$N_1, \ldots, N_k$, то и топологическая группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп $N_1, \ldots, N_k$.

Доказательство. Достаточно показать, что, каковы бы ни были окрестности $U_1, \ldots, U_k$ единицы в группах $N_1, \ldots, N_k$, их групповое произведение содержит некоторую окрестность U единицы группы G. Легко видеть, что каждая группа N_i может быть представлена как сумма счетного числа своих бикомпактных подмножеств. Далее, прямое произведение G' топологических групп $N_1, \ldots, N_k$ также можно представить как сумму счетного числа бикомпактных подмножеств, пользуясь тем, что прямое произведение бикомпактных пространств бикомпактно. Так как каждая из групп N_i локально бикомпактна, то и группа G' локально бикомпактна (см. § 14, E)). Поставим теперь элементу $x=(x_1, \ldots, x_k)$ группы G' в соответствие элемент $f(x)=x_1x_2\ldots x_k$. Так же, как в B), доказывается, что f есть непрерывное отображение пространства G' на пространство G, а так как f есть изоморфизм, то f есть открытое отображение (см. теорему 12). Таким образом, окрестность $U'=(U_1, \ldots, U_k)$ единицы в группе G' переходит в окрестность $U=U_1U_2\ldots U_k$ единицы группы G, и теорема 13 доказана.

Для того чтобы определить прямое произведение произвольного множества бикомпактных топологических групп, введем в рассмотрение пересечение и произведение произвольного множества нормальных делителей топологической группы.

C) Пусть Ω—произвольное множество нормальных делителей топологической группы G. Пересечение $\Delta(\Omega)$ всех нормальных делителей, входящих в Ω, есть нормальный делитель топологической группы G. Это следует из того, что $\Delta(\Omega)$ есть нормальный делитель алгебраической группы G (см. § 5, C)), и из того, что $\Delta(\Omega)$ есть замкнутое множество пространства G. Минимальный нормальный делитель $\Pi(\Omega)$ (см. § 5, E)) алгебраической группы G, содержащий все нормальные делители множества Ω, вообще говоря, не является нормальным делителем топологической группы G, так как множество $\Pi(\Omega)$ может быть не замкнутым в пространстве G; однако замыкание $\overline{\Pi}(\Omega)=\overline{\Pi(\Omega)}$ множества $\Pi(\Omega)$ является нормальным делителем топологической группы G (см. § 19, B)) и, как легко видеть, представляет собой *минимальный* нормальный делитель топологической группы G, содержащий все нормальные делители множества Ω.

Определение 29. Пусть Ω—произвольное множество бикомпактных топологических групп и α—функция, ставящая в соответствие каждой группе $N\in\Omega$ элемент $\alpha(N)\in N$. Множество всех функций вида α обозначим через G^*. Множество G^* есть алгебраическая группа, именно, полное прямое произведение всех групп множества Ω (см. определение 10); с другой стороны, G^* есть бикомпактное топологическое пространство (см. определение 20 и теорему 5). Оказывается, что групповые операции, имеющиеся в G^*, непрерывны в топологическом пространстве G^*. Полученная бикомпактная топологическая группа G^* называется *прямым произведением* бикомпактных топологических групп множества Ω.

Очевидно, что если Ω есть конечное множество бикомпактных групп, то определение 29 совпадает с определением 28.

Докажем непрерывность групповых операций в G^*. Пусть α и β—два элемента из G^* и $\gamma=\alpha\beta^{-1}$. Пусть, далее, $W=N_1^{-1}(W_1)\cap\ldots\cap N_k^{-1}(W_k)$—произвольная окрестность элемента γ в пространстве G (см. определение 20). Так как $\alpha(N_i)(\beta(N_i))^{-1}=\gamma(N_i)$ и так как N_i есть топологическая группа, то существуют такие окрестности U_i и V_i элементов $\alpha(N_i)$ и $\beta(N_i)$, что $U_iV_i^{-1}\subset W_i$. Легко видеть, что окрестности $U=N_1^{-1}(U_1)\cap\ldots\cap N_k^{-1}(U_k)$ и $V=N_1^{-1}(V_1)\cap\ldots\cap N_k^{-1}(V_k)$ элементов α и β удовлетворяют условию $UV^{-1}\subset W$. Таким образом, непрерывность групповых операций в G^* доказана.

D) Пусть G^*—прямое произведение бикомпактных топологических групп множества Ω (см. определение 29) и пусть $x\in N\in\Omega$. Паре N, x поставим в соответствие функцию $\alpha_{N,x}\in G^*$, определяемую условиями $\alpha_{N,x}(P)=x$ при $P=N$, $\alpha_{N,x}(P)=e^*(P)$ при $P\neq N$. Положим, далее, $f_N(x)=\alpha_{N,x}$. Функция f_N, зависящая от N, ставит в соответствие каждому элементу $x\in N$ элемент $f_N(x)\in G^*$. Оказывается, что f_N есть изоморфное отображение топологической группы N на некоторый нормальный делитель N^* топологической группы G^*. Множество всех нормальных делителей N^*, $N\in\Omega$, обозначим через Ω^* и положим $\Omega^*_{N^*}=\Omega^*\setminus N^*$, $K^*_{N^*}=\overline{\Pi}(\Omega^*_{N^*})$ (см. C)). Обозначим через $\widehat{\Omega}^*$ множество всех нормальных делителей $K^*_{N^*}$ топологической группы G^*, $N\in\Omega$. Оказывается, что

$$\overline{\Pi}(\Omega^*)=G^*, \tag{1}$$

$$\Delta(\widehat{\Omega}^*)=e^*. \tag{2}$$

Тот факт, что f_N есть изоморфное отображение алгебраической группы N на нормальный делитель алгебраической группы G^* и что оно непрерывно, доказывается так же, как в предложении A). Непрерывность отображения f_N^{-1} и замкнутость множества N^* в G^* вытекают из бикомпактности группы N на основании предложений D), C), E) § 13. Непосредственно видно, что группа N^* состоит из всех функций $\alpha\in G^*$, удовлетворяющих условию $\alpha(P)=e^*(P)$ при $P\neq N$. Из этого вытекает, что $\Pi(\Omega^*_{N^*})$ состоит из всех функций $\beta\in G^*$, удовлетворяющих условию $\beta(N)=e^*(N)$ и принимающих лишь на конечном числе групп множества Ω значения, отличные от единиц этих групп. Учитывая топологию пространства G^*, из этого легко заключить, что замыкание $\overline{\Pi}(\Omega^*_{N^*})=K^*_{N^*}$ множества $\Pi(\Omega^*_{N^*})$ состоит из всех функций $\beta\in G^*$, удовлетворяющих условию $\beta(N)=e^*(N)$. Из сказанного видно, что пересечение $\Delta(\hat{\Omega}^*)$ всех групп $K^*_{N^*}$ содержит лишь единицу e^* группы G^*, т. е. что соотношение (2) верно. Из структуры группы N^* вытекает, что $\Pi(\Omega^*)$ состоит из всех функций $\alpha \in G^*$, принимающих значения, отличные от единиц, лишь на конечном числе групп множества Ω, а из этого непосредственно вытекает, что замыкание $\overline{\Pi}(\Omega^*)$ множества $\Pi(\Omega^*)$ совпадает со всей группой G^*. Таким образом, соотношение (1) верно, и предложение D) полностью доказано.

Предложение D) дает новый подход к понятию прямого произведения произвольного множества бикомпактных топологических групп.

Определение 29′. Пусть G—бикомпактная топологическая группа с единицей e и Ω—некоторое множество ее нормальных делителей. При $N \in \Omega$ положим $\Omega_N = \Omega \setminus N$ и $K_N = \overline{\Pi}(\Omega_N)$. Множество всех нормальных делителей K_N, $N \in \Omega$, обозначим через $\hat{\Omega}$. Говорят, что бикомпактная топологическая группа G *распадается в прямое произведение* своих подгрупп $N \in \Omega$, если выполнены условия

$$\overline{\Pi}(\Omega) = G, \tag{3}$$

$$\Delta(\hat{\Omega}) = e. \tag{4}$$

Если множество Ω конечно, то в силу теоремы 13 определение 29′ эквивалентно определению 28′.

Связь между определениями 29 и 29′ устанавливается предложением D) и нижеследующим предложением E).

E) Пусть бикомпактная топологическая группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп $N \in \Omega$ (см. определение 29′). Оказывается, что

$$G = N \times K_N \tag{5}$$

для любой группы $N \in \Omega$ и что для двух различных групп N и P из Ω каждый элемент подгруппы N перестановочен с каждым элементом подгруппы P. Пусть, далее, G^*—прямое произведение групп множества Ω (см. определение 29). Оказывается тогда, что существует, и притом единственное, изоморфное отображение f топологической группы G^* на топологическую группу G, удовлетворяющее тому условию, что ff_N есть тождественное отображение группы N на себя для всякой группы $N \in \Omega$.

Докажем прежде всего соотношение (5). Из определения группы K_N и из соотношения (3) следует:

$$NK_N = G. \tag{6}$$

Обозначим теперь через $\hat{\Omega}_N$ множество $\hat{\Omega} \setminus K_N$ и положим $N' = \Delta(\hat{\Omega}_N)$. Очевидно, что $N \subset N'$; сверх того, из соотношения (4) следует $N' \cap K_N = e$. Таким образом,

$$N \cap K_N = e. \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) вместе дают (5).

Так как при $P \neq N$ мы имеем $P \subset K_N$, то из (5) следует перестановочность каждого элемента подгруппы N с каждым элементом подгруппы P.

Перейдем теперь к построению отображения f. Пусть

$$\Sigma = \{N_1, N_2, \ldots, N_k\} \tag{8}$$

—произвольное конечное подмножество множества Ω. Положим:

$$K(\Sigma) = K_{N_1} \cap K_{N_2} \cap \ldots \cap K_{N_k}. \tag{9}$$

Определенное таким образом множество $K(\Sigma)$ есть нормальный делитель группы G (см. C)). Очевидно, что

$$\text{при } N \notin \Sigma \text{ имеем } N \subset K(\Sigma). \tag{10}$$

Положим, далее, при $\alpha \in G^*$

$$K(\alpha, \Sigma) = \alpha(N_1)\alpha(N_2)\ldots\alpha(N_k)K(\Sigma) \tag{11}$$

и покажем, что совокупность всех подмножеств $K(\alpha, \Sigma)$, где α есть фиксированный элемент группы G^*, а Σ—произвольное конечное подмножество множества Ω, есть центрированная система в G. Для этого, как легко видеть, достаточно показать, что если

$$\Sigma' = \{N_1, N_2, \ldots, N_k, N_{k+1}, \ldots, N_l\} \tag{12}$$

есть конечное подмножество множества Ω, содержащее множество Σ, как это предусмотрено обозначениями, то $K(\alpha, \Sigma') \subset \subset K(\alpha, \Sigma)$. Последнее соотношение следует из (10), именно, мы имеем $\alpha(N_{k+1})\alpha(N_{k+2})\ldots\alpha(N_l)K(\Sigma') \subset K(\Sigma)$. Ввиду центрированности системы всех множеств $K(\alpha, \Sigma)$ пересечение ее не пусто; покажем, что оно содержит только одну точку. Допустим противоположное: пусть x и y—две различные точки этого пересечения. Так как $xy^{-1} \neq e$, а пересечение всех нормальных делителей $K(\Sigma)$ содержит лишь единицу (см. (4)), то существует такое конечное подмножество Σ множества Ω, что $xy^{-1} \notin K(\Sigma)$. С другой стороны,

$$xy^{-1} \in K(\alpha, \Sigma)(K(\alpha, \Sigma))^{-1} = K(\Sigma)(K(\Sigma))^{-1} = K(\Sigma).$$

Таким образом, существует лишь одна точка x, принадлежащая всем множествам $K(\alpha, \Sigma)$ с фиксированным элементом $\alpha \in G^*$; эту точку мы и примем за $f(\alpha)$. Мы имеем:

$$f(\alpha) \in K(\alpha, \Sigma), \quad \Sigma \subset \Omega, \tag{13}$$

и это соотношение является для $f(\alpha)$ определяющим.

Непосредственно проверяется, что ff_N есть тождественное отображение группы N на себя.

Покажем, что f есть алгебраический гомоморфизм. Пусть α и β—два элемента из G^* и $\gamma=\alpha\beta$; тогда

$$f(\alpha)f(\beta)\in K(\alpha,\ \Sigma)K(\beta,\ \Sigma)=K(\gamma,\ \Sigma),\quad \Sigma\subset\Omega,$$

и следовательно, $f(\alpha)f(\beta)=f(\gamma)$ (см. (13)).

Докажем непрерывность отображения f. Пусть U—произвольная окрестность единицы группы G. Так как пересечение всех групп $K(\Sigma)$ содержит лишь единицу, то существует такое конечное подмножество Σ множества Ω, что $K(\Sigma)\subset U$ (см. § 13, H)). Будем считать, что множество Σ задано соотношением (8). Пересечение всех множеств вида $\overline{V^k}K(\Sigma)$, где V—произвольная окрестность единицы группы G, а множество Σ фиксировано, совпадает с $K(\Sigma)$, и потому существует такая окрестность V единицы, что

$$V^kK(\Sigma)\subset U$$

(см. § 13, H)). Положим $V_i=N_i\cap V$, $i=1,\ \ldots,\ k$, и зададим окрестность V^* единицы группы G^*, положив:

$$V^*=N_1^{-1}(V_1)\cap N_2^{-1}(V_2)\cap\ldots\cap N_k^{-1}(V_k).$$

Пусть $\alpha\in V^*$; тогда $f(\alpha)\in\alpha(N_1)\alpha(N_2)\ldots\alpha(N_k)K(\Sigma)\subset V^kK(\Sigma)\subset U$. Таким образом, $f(V^*)\subset U$, и отображение f непрерывно.

Покажем, что $f(G^*)=G$. В силу того, что ff_N есть тождественное отображение группы N на себя, множество $f(G^*)$ содержит все группы множества Ω и потому содержит $\overline{\Pi}(\Omega)$; последнее же множество совпадает с G (см. (3)).

Покажем, что f есть изоморфизм, т. е. отображает в единицу группы G только единицу группы G^*. Допустим, что $f(\alpha)=e$; тогда $e\in\alpha(N)K_N$ (см. (13)) или $\alpha(N)\in K_N$, что возможно лишь при условии $\alpha(N)=e$ (см. (7)).

Таким образом, f есть взаимно однозначное и непрерывное отображение группы G^* на группу G; в силу бикомпактности группы G^* оно является взаимно непрерывным.

Итак, доказано, что f есть изоморфное отображение топологической группы G^* на топологическую группу G.

Единственность отображения f следует из того, что поставленными условиями оно однозначно определено на всюду плотном подмножестве $\Pi(\Omega^*)$ пространства G^*.

Итак, предложение E) полностью доказано.

F) Пусть G^*—прямое произведение групп множества Ω, конечного, если не все группы этого множества бикомпактны (см. определение 28), и произвольного, если все группы этого множества бикомпактны (см. определение 29). Допустим, далее, что множество Ω есть сумма двух непересекающихся множеств Ω_1 и Ω_2. Обозначим через N_1^* множество всех функций $\alpha\in G^*$, принимающих значения, равные единицам, на всех группах множества Ω_2, и, аналогично, через N_2^*—множество всех функций $\alpha \in G^*$, принимающих значения, равные единицам, на всех группах множества Ω_1. Непосредственно проверяется, что N_1^* и N_2^* суть нормальные делители топологической группы G^*, что алгебраическая группа G^* распадается в прямое произведение своих подгрупп N_1^* и N_2^* и что выполнено условие определения 28′ относительно окрестностей единиц. Таким образом, топологическая группа G^* распадается в прямое произведение своих подгрупп N_1^* и N_2^*. Из этого в силу эквивалентности определений 28 и 28′, или соответственно 29 и 29′, следует, что если топологическая группа G распадается в прямое произведение множества Ω своих подгрупп (см. определение 28′ или соответственно 29′), причем множество Ω есть сумма двух непересекающихся множеств Ω_1 и Ω_2, то топологическая группа G распадается в прямое произведение своих подгрупп $\overline{\Pi}(\Omega_1)$ и $\overline{\Pi}(\Omega_2)$.

G) Пусть топологическая группа G распадается в прямое произведение двух своих подгрупп N_1 и N_2 (см. определение 28′). Тогда факторгруппа G/N_1 изоморфна группе N_2; именно, оказывается, что, ставя в соответствие каждому элементу $x \in N_2$ смежный класс $f(x) \in G/N_1$, содержащий x, мы получаем изоморфное отображение топологической группы N_2 на топологическую группу G/N_1.

Предложение это доказывается непосредственно.

П р и м е р 38. Пусть G—плоскость, взятая в некоторых декартовых координатах. Точки ее образуют аддитивную топологическую группу. Обозначим через N прямую с угловым коэффициентом α и через H—множество всех точек с целочисленными координатами. Множества H и N суть нормальные делители группы G. Обозначим, далее, через P сумму $H+N$, т. е. множество всех элементов вида $h+n$, где $h \in H$, $n \in N$. Если α—рациональное число, то множество P замкнуто в G, если же α иррационально, то множество P не замкнуто.

Остановимся на случае иррационального α. Множество P есть топологическая группа (см. § 19, A)). Пересечение $D=H \cap N$ содержит лишь нуль. Очевидно, однако, что условие определения 28′ относительно окрестностей единицы здесь не выполнено, так что топологическая группа P не распадается в прямое произведение своих подгрупп H и N.

П р и м е р 39. Дадим пример компактной, но не бикомпактной группы, аналогичный примеру 28 компактного, но не бикомпактного топологического пространства.

Пусть Ω—несчетное множество бикомпактных топологических групп, каждая из которых содержит по меньшей мере два элемента, т. е. не сводится к единице. Обозначим через G^* прямое произведение групп множества Ω и через G—множество всех таких функций $\alpha \in G^*$, каждая из которых принимает значения, отличные от единиц, лишь на конечном или счетном множестве групп из Ω. Так как множество Ω несчетно, то G не совпадает с G^*. С другой стороны, очевидно, что замыкание $\overline{G}$ множества G совпадает с G^*, $G^*=\overline{G}$. Множество G в силу закона умножения, имеющегося в G^*, представляет собой группу и потому есть топологическая группа (см. § 19, А)). Тот факт, что пространство G компактно, но не бикомпактно, доказывается так же, как в примере 28.

Пример 40. Пусть Ω—счетное множество циклических групп N_1. N_2, ... второго порядка. Рассматривая каждую группу множества Ω как топологическую группу с дискретной топологией, мы можем образовать бикомпактное прямое произведение G^* групп множества Ω. Каждый элемент $\alpha \in G^*$ можно задать последовательностью $\alpha=\{x_1, x_2, \ldots\}$ чисел, равных нулю или единице. Число x_k считается равным нулю, если $\alpha(N_k)$ есть единица группы N_k, и единице, если $\alpha(N_k)$ не есть единица группы N_k. Закон перемножения элементов группы G^*, или, лучше, их сложения, очевиден. Интересно отметить, что пространство G^* гомеоморфно *канторову совершенному множеству*. Каждый элемент канторова совершенного множества, как известно, также записывается в виде последовательности x_1, x_2, ... чисел, равных нулю или единице. Получаемое таким образом соответствие между элементами группы G и точками канторова совершенного множества, как легко видеть, является гомеоморфизмом. Так как групповое пространство однородно, то однородно и канторово совершенное множество.

Нетрудно доказать, что прямое произведение счетного множества конечных групп, каждая из которых не сводится к единице, всегда гомеоморфно канторову совершенному множеству.

§ 22. Связные и вполне несвязные группы

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые специально топологические свойства топологических групп, не имеющие никакого аналога в теории нетопологических групп.

А) Пусть G—некоторая топологическая группа и N—компонента единицы e в топологическом пространстве G (см. § 15, D)). Тогда N есть нормальный делитель группы G.

Пусть a и b—два элемента из N. Так как множество N связно, то множество aN^{-1} также связно (см. § 17, В)). Сверх того, aN^{-1} содержит e. Таким образом, $aN^{-1}\subset N$, и мы имеем $ab^{-1}\in N$, т. е. N есть подгруппа алгебраической группы G. Ввиду того, что множество N замкнуто в G (см. § 15, D)), N является подгруппой и топологической группы G. Если теперь x—произвольный элемент из G, то $x^{-1}Nx$ есть связное множество, содержащее единицу e, и следовательно, $x^{-1}Nx\subset N$; таким образом, N есть нормальный делитель топологической группы G.

B) Если топологическая группа G *связна* (т. е. пространство G связно), то компонента единицы группы G совпадает с G. Если, напротив, компонента единицы группы G содержит лишь единицу, то, как легко видеть, все компоненты пространства G суть отдельные точки, и потому группа G *вполне несвязна* (см. § 15, D)).

C) Пусть G—топологическая группа и N—компонента единицы в G. Тогда факторгруппа $G/N=G^*$ вполне несвязна.

Пусть f—естественное гомоморфное отображение группы G на группу G^* (см. § 20, B)). Тогда f есть открытое гомоморфное отображение группы G на группу G^*. Обозначим через P^* компоненту единицы группы G^* и через P—полный прообраз множества P^* при отображении f, $f^{-1}(P^*)=P$. Покажем, что отображение f пространства P на пространство P^* является открытым. Пусть U—некоторая область пространства P. Тогда существует такая область V пространства G, что $U=P\cap V$ (см. § 11, B)). Легко видеть, что $f(U)=P^*\cap f(V)$. Но так как f есть открытое отображение группы G на группу G^*, то $f(V)$ есть область в G^* и, следовательно, $f(U)$ есть область в пространстве P^*.

Допустим теперь, что P^* содержит элементы, отличные от единицы. Тогда N есть правильная часть множества P и, следовательно, множество P несвязно. Таким образом, P распадается на два непересекающихся множества A и B, каждое из которых не пусто и является областью в пространстве P (см. § 15, A)). Если $a\in A$, то $Na\subset A$, так как если бы множество Na пересекалось еще с B, то оно распалось бы на два непересекающихся замкнутых множества, тогда как на самом деле множество Na связно одновременно с N. Из этого следует, что множества $f(A)$ и $f(B)$ не пересекаются. Но эти множества являются открытыми в пространстве P^*. Таким образом, P^* распадается на два непересекающихся подмножества, являющихся областями в пространстве P^*, что невозможно, так как пространство P^* связно.

Остановимся теперь несколько подробнее на свойствах связных групп.

Т е о р е м а 14. *Связная топологическая группа G порождается любой окрестностью U единицы. Это значит, что G совпадает с суммой всех множеств вида U^n, $n=1, 2, \ldots$, или, что то же самое, что каждый элемент из G может быть представлен как конечное произведение элементов, принадлежащих U.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть V есть сумма всех множеств вида U^n. Так как все множества вида U^n суть области (см. § 17, C)), то и V есть область. Покажем, что V есть вместе с тем замкнутое множество. Допустим, что a входит в замыкание множества V, $a\in\overline{V}$. Тогда aU^{-1} есть окрестность элемента a и, следовательно, она пересекается с V, т. е. существует такой элемент $b\in V$, что $b\in aU^{-1}$. Так как $b\in V$, то существует такой номер m, что $b\in U^m$, и, следовательно, $b=u_1u_2\ldots u_m$, где $u_i\in U$, $i=1, \ldots, m$. Так как

$b \in aU^{-1}$, то $b = au_{m+1}^{-1}$, где $u_{m+1} \in U$. Мы имеем, таким образом, $a = u_1 u_2 \ldots u_m u_{m+1}$, причем $u_j \in U$, $j = 1, \ldots, m, m+1$. Следовательно, $a \in U^{m+1} \subset V$, т. е. множество V замкнуто. Пусть теперь $W = G \setminus V$. Так как V—замкнутая область, то W—также замкнутая область. Если бы множество W было непусто, то пространство G распалось бы в сумму двух непересекающихся замкнутых множеств, что, однако, противоречит связности группы G. Таким образом, $G = V$.

D) *Центром* Z топологической группы G будем называть центр алгебраической группы G (см. определение 7). Множество Z является нормальным делителем топологической группы G. Всякая подгруппа N топологической группы Z также является нормальным делителем топологической группы G и называется *центральным нормальным делителем*.

В § 4 было показано, что Z есть нормальный делитель алгебраической группы G. Покажем, что множество Z замкнуто в G. Пусть $a \in \overline{Z}$. Допустим, что существует такой элемент $x \in G$, что $a' = x^{-1}ax \neq a$. Так как пространство G регулярно (см. § 17, F)), то существуют непересекающиеся окрестности U и U' элементов a и a'. Положим $V = Z \cap U$. Легко видеть, что $a \in \overline{V}$. Но тогда $a' = x^{-1}ax \in x^{-1}\overline{V}x = \overline{x^{-1}Vx} = \overline{V}$ (см. § 17, B)). Однако это невозможно, так как окрестность U' не пересекается с $\overline{V}$. Таким образом, $x^{-1}ax = a$ и $a \in Z$, т. е. $\overline{Z} = Z$.

Если N есть подгруппа группы Z, то, будучи замкнутой в Z, группа N замкнута и в G (см. § 11, A)), а так как N есть нормальный делитель алгебраической группы G (см. § 4, B)), то N есть нормальный делитель и топологической группы G.

Теорема 15. *Всякий дискретный нормальный делитель N связной топологической группы G является центральным нормальным делителем этой группы* (см. § 18, A)).

Доказательство. Так как N—дискретная группа, то для всякого ее элемента a найдется окрестность V, не содержащая никаких элементов группы N, за исключением самого элемента a. Так как $e^{-1}ae = a$, то существует такая окрестность U единицы, что $U^{-1}aU \subset V$ (см. § 17, A)). Пусть теперь $u \in U$; тогда $u^{-1}au \in V$, но так как N—нормальный делитель группы G, то $u^{-1}au \in N$ и, следовательно, $u^{-1}au = a$. Если теперь x—произвольный элемент из G, то, согласно теореме 14, $x = u_1 u_2 \ldots u_n$, где $u_i \in U$, $i = 1, \ldots, n$. Будучи перестановочным с каждым элементом u_i, элемент a перестановочен и с элементом x, т. е. $x^{-1}ax = a$. Таким образом, N входит в центр Z группы G, и теорема 15 доказана.

Теорема 15 весьма существенна, так как она облегчает нахождение дискретных нормальных делителей связной топологической группы. Дискретные нормальные делители играют в теории топологических групп важную роль.

Перейдем теперь к рассмотрению вполне несвязных групп. Мы ограничимся при этом локально бикомпактными группами.

Теорема 16. *Пусть G—локально бикомпактная вполне несвязная топологическая группа. Если U есть некоторая окрестность единицы группы G, то существует такая открытая бикомпактная подгруппа H группы G, что $H \subset U$. Так как H—область, то пространство G/H дискретно* (см. определение 24).

Доказательство. Так как e есть компонента пространства G, то в силу предложения G) § 15 существует такая бикомпактная область P, что $e \in P \subset U$.

Обозначим через Q множество всех таких элементов $q \in G$, что $Pq \subset P$, и покажем, что $Q \cap Q^{-1} = H$ есть открытая бикомпактная подгруппа группы G, содержащаяся в U.

Покажем, что Q есть область. Пусть q—фиксированная точка из Q и x—произвольная точка из P. Так как $xq \in P$ и P есть область, то существуют такие окрестности U_x и V_x точек x и q, что $U_x V_x \subset P$. Области U_x составляют покрытие множества P, и в силу его бикомпактности у него имеется конечное покрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$. Положим $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \cdots \cap V_{x_k}$; тогда $PV \subset P$ и, следовательно, $V \subset Q$. Таким образом, наряду с точкой q в множество Q входит и вся ее окрестность V. Отсюда следует, что Q есть область.

Покажем, что множество Q замкнуто, или, иначе, что $G \setminus Q$ есть область. Пусть $r \in G \setminus Q$. Так как Pr не содержится в P, то существует в P такая точка p, что $pr \in G \setminus P$. Так как $G \setminus P$ есть область, то существует такая окрестность W точки r, что $pW \subset G \setminus P$, а это значит, что $W \subset G \setminus Q$. Таким образом, $G \setminus Q$ есть область, и потому множество Q замкнуто.

Так как $e \in P$, то при $y \in Q$ имеем $y = ey \in P$, и потому $Q \subset P$. Далее, так как $Pe = P \subset P$, то $e \in Q$. Ввиду бикомпактности множества P, мы заключаем из сказанного, что Q есть бикомпактная область, содержащая единицу, а из этого следует, что $H = Q \cap Q^{-1}$ также есть бикомпактная область, содержащая единицу.

Покажем теперь, что H есть подгруппа алгебраической группы G. Пусть h_1 и h_2—элементы множества H. Тогда $h_1 \in Q$, $h_2^{-1} \in Q$, и мы имеем $P(h_1 h_2^{-1}) = (Ph_1) h_2^{-1} \subset Ph_2^{-1} \subset P$, т. е. $h_1 h_2^{-1} \in Q$. Таким же образом доказывается, что $(h_1 h_2^{-1})^{-1} = h_2 h_1^{-1} \in Q$. Следовательно, $h_1 h_2^{-1} \in H$, и H есть подгруппа группы G.

Итак, теорема 16 доказана.

В случае бикомпактной группы G теорема эта допускает усиление.

Теорема 17. *Пусть G—бикомпактная вполне несвязная топологическая группа и U—некоторая окрестность ее единицы. Существует тогда открытый нормальный делитель N группы G, содержащийся в U. Так как факторгруппа G/N дискретна и бикомпактна одновременно, то она конечна.*

Доказательство. Пусть H—бикомпактная открытая подгруппа группы G, содержащаяся в U (см. теорему 16). Обозначим через N пересечение всех множеств вида $x^{-1}Hx$, где $x \in G$. Непосредственно проверяется, что N есть нормальный делитель топологической группы G. Покажем, что множество N есть область. Так как $x^{-1}ex = e \in H$, то существуют такие окрестности V_x и W_x единицы e и элемента x, что $W_x^{-1}V_xW_x \subset H$. Области W_x, $x \in G$, составляют покрытие бикомпактного пространства G, и потому существует конечное покрытие $W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}$ пространства G. Положим $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \cdots \cap V_{x_k}$; тогда $x^{-1}Vx \subset H$ при $x \in G$. Таким образом, $V \subset N$ и, следовательно, для произвольного элемента $n \in N$ имеем $Vn \subset N$, а это значит, что N есть область.

Итак, теорема 17 доказана.

Обращением теоремы 16 служит следующее очевидное предложение:

E) Если во всякой окрестности U единицы e топологической группы G содержится открытая подгруппа H, то группа G вполне несвязна.

Группа G распадается в сумму двух непересекающихся областей: H и $G \setminus H$. Таким образом, компонента единицы группы G, будучи связной, должна входить в H и, следовательно, в U. Но так как U есть произвольная окрестность единицы, то компонента единицы группы G содержит лишь единицу.

Пример 41. Пусть G^*—бикомпактное прямое произведение множества Ω конечных групп, которые мы трактуем как дискретные группы. Пусть, далее, Ω_2—некоторое конечное подмножество множества Ω, и $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2$. Нормальные делители N_1^* и N_2^* определим множествами Ω_1 и Ω_2, как это сделано в предложении F) § 21. Легко видеть, что для каждой окрестности U^* единицы группы G^* можно подобрать такое конечное множество Ω_2, что $N_1^* \subset U^*$. Далее, в силу предложения G) § 21, факторгруппа G^*/N_1^* изоморфна группе N_2^* и потому конечна. Из этого следует, что G^* есть вполне несвязная группа (см. E)).

Пример 42. Пусть G—аддитивная топологическая группа действительных чисел. Обозначим через H множество всех рациональных чисел. H, очевидно, есть подгруппа алгебраической группы G, и потому H представляет собой топологическую группу (см. § 19, A)). Очевидно, что компонента нуля группы H содержит лишь нуль. Таким образом, H—вполне несвязная группа. Следует, однако, отметить, что, какова бы ни была окрестность U нуля группы H, вся группа H порождается этой окрестностью. Таким образом, не только связные группы обладают свойством, сформулированным в теореме 14. Ясно, что в H не существует открытой подгруппы, содержащейся в U. Таким образом, теорема 16 не имеет места для общих вполне несвязных групп. Группа H не является локально бикомпактной.

§ 23. Локальные свойства. Локальный изоморфизм

Специфическими для топологических групп являются так называемые *локальные свойства*, т. е. те свойства топологических групп, которые определяются поведением группы вблизи единицы. *Локальный изоморфизм* есть важнейшее относящееся сюда понятие.

Определение 30. Две топологические группы G и G' называются *локально изоморфными*, если существуют такие окрестности U и U' их единиц e и e' и такое гомеоморфное отображение f окрестности U на окрестность U', что: a) если элементы x, y и xy принадлежат U, то $f(xy)=f(x)f(y)$; b) если элементы x', y' и $x'y'$ принадлежат U', то $f^{-1}(x'y')=f^{-1}(x')f^{-1}(y')$.

A) Отметим, что из выполнения сформулированных условий следует выполнение условий c) $f(e)=e'$ и d) если элементы x и x^{-1} принадлежат U, то $f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$.

Действительно, элементы e, e и $ee=e$ принадлежат U и, следовательно, $f(e)=f(e)f(e)$, откуда следует, что $f(e)=e'$. Далее, если x и x^{-1} принадлежат U, то, так как $x^{-1}x=e\in U$, мы получаем $e'=f(e)=f(x^{-1})f(x)$, т. е. $f(x^{-1})=(f(x))^{-1}$.

B) Отметим, что из условия a) определения 30 следует условие b). Точнее говоря: если существуют окрестности U и U', удовлетворяющие условию a), то найдутся окрестности V и V', удовлетворяющие обоим условиям a) и b).

Пусть V—такая окрестность единицы, что $V^2\subset U$. Тогда мы положим $V'=f(V)$. Легко видеть, что для окрестностей V и V' выполнено условие a). Проверим выполнение условия b). Пусть элементы x', y' и $x'y'$ принадлежат V'. Положим $x=f^{-1}(x')$, $y=f^{-1}(y')$. Так как x и y принадлежат V, то $xy\in U$, и $f(xy)=f(x)f(y)=$ $=x'y'$; отсюда получаем $f^{-1}(x'y')=xy=f^{-1}(x')f^{-1}(y')$, т. е. условие b) выполнено.

C) Пусть G—топологическая группа и N—дискретный нормальный делитель группы G. Тогда группы G и $G/N=G'$ локально изоморфны.

Пусть f—естественное гомоморфное отображение группы G на группу G' (см. § 20, B)). Обозначим через W окрестность единицы группы G, не содержащую элементов группы N, кроме единицы. Пусть, далее, U—такая окрестность единицы в G, что $UU^{-1}\subset W$. Положим $f(U)=U'$. Нетрудно видеть, что на U отображение f взаимно однозначно. Действительно, допустим, что два элемента x и y, принадлежащие U, переводятся в один и тот же элемент отображением f. Тогда $xy^{-1}\in N$; но, сверх того, $xy^{-1}\in W$, и, следовательно, $xy^{-1}=e$, или $x=y$. Отображение f открыто и непрерывно (см. § 20, B)) и, значит, на U оно взаимно непрерывно. Условие a) определения 30 для отображения f выполнено в силу того, что f есть отображение гомоморфное. Таким образом, согласно замечанию B), группы G и G' локально изоморфны.

Предложение C) дает способ конструирования групп, локально изоморфных с данной. Следующая теорема показывает, что способ этот является весьма общим:

Теорема 18. *Пусть G и G' — две связные локально изоморфные топологические группы. Тогда существует такая группа H, что группа G изоморфна факторгруппе H/N и группа G' изоморфна факторгруппе H/N', где N и N' суть дискретные нормальные делители группы H.*

При доказательстве мы будем пользоваться лишь тем свойством групп G и G', вытекающим из их связности, что обе они порождаются произвольными окрестностями своих единиц (см. теорему 14).

Доказательство. Пусть U и U' — окрестности единиц групп G и G', для которых выполнены условия определения 30, и f — соответствующее отображение. Обозначим через K прямое произведение групп G и G' (см. определение 28). Пусть V — множество всех элементов группы K, представимых в форме $(x, f(x))$, где $x \in U$. Для того чтобы не усложнять рассмотрений, предположим, что окрестность U обладает симметрией, т. е. что $U^{-1} = U$. Обозначим, далее, через H сумму всех множеств вида V^n, $n = 1, 2, \ldots$ Иначе H можно определить как совокупность всех элементов группы K, представимых в форме конечных произведений элементов, принадлежащих V. Множество H очевидным образом представляет собой подгруппу алгебраической группы K, но может быть незамкнутым множеством в топологическом пространстве K. Тем не менее, согласно замечанию A) § 19, множество H естественным образом является топологической группой. Мы, однако, введем в H топологию иным способом.

Пусть $\{U_\alpha\}$ — некоторая полная система окрестностей единицы группы G, где α — индекс, пробегающий, вообще говоря, несчетное множество. Без ограничения общности можно предположить, что $U_\alpha \subset U$ при произвольном α. Положим $U'_\alpha = f(U_\alpha)$ и обозначим через V_α множество всех элементов группы K вида $(y, f(y))$, где $y \in U_\alpha$. Согласно замечанию B) § 18 для системы окрестностей $\{U_\alpha\}$ выполнены условия теоремы 9. То же самое имеет место и для системы окрестностей U'_α. Отсюда мы непосредственно заключаем, что система множеств V_α удовлетворяет требованиям теоремы 9 в отношении алгебраической группы H. Мы теперь примем систему множеств V_α за полную систему окрестностей единицы топологической группы H (см. теорему 9).

Каждому элементу $z = (x, x') \in K$ поставим в соответствие элемент $x \in G$, положив $g(z) = x$. Тогда g есть гомоморфное отображение группы K на группу G. Отсюда следует, что g является также гомоморфным отображением алгебраической группы H на некоторую подгруппу G^* алгебраической группы G. Покажем, что $G^* = G$. Действительно, $g(V) = U$, так что $U \subset G^*$. Но так как G порождается всякой окрестностью единицы, то мы получаем $G = G^*$.

Покажем, что g есть открытое гомоморфное отображение топологической группы H на топологическую группу G. Из соотношения $g(V_\alpha)=U_\alpha$ непосредственно следует, что отображение g является непрерывным и открытым в единице. Отсюда заключаем, что g есть открытое непрерывное отображение (см. § 20, A)).

Таким образом, согласно теореме 11 группа G изоморфна факторгруппе H/N, где N есть ядро гомоморфизма g. Покажем, что N есть дискретный нормальный делитель группы H. Для этого достаточно показать, что существует окрестность единицы группы H, не содержащая никаких элементов группы N, кроме единицы. Такому условию удовлетворяет любая окрестность системы V_α, так как отображение g на множестве V_α взаимно однозначно.

Точно так же группа G' изоморфна факторгруппе H/N', где N' есть дискретный нормальный делитель топологической группы H. Таким образом, теорема 18 доказана.

Утверждение теоремы 18 будет развито и углублено в девятой главе. Там будет найдена единая группа H уже не для двух, а сразу для всех локально изоморфных между собой групп, правда, групп весьма специального вида. Такой результат позволяет весьма резко расчленить все изучение топологической группы на изучение локальное и изучение в целом.

Локальными свойствами топологических групп мы будем называть те, которые имеют место одновременно для всех локально изоморфных между собой групп. Следует отметить, что локальное поведение группы весьма сильно отражается на поведении группы в целом и потому изучение локальных свойств весьма важно.

Так как при изучении локальных свойств топологической группы G нас интересует поведение группы G лишь в произвольно малой окрестности U ее единицы, то, естественно, возникает вопрос, нельзя ли изучать U как самостоятельное понятие, отвлекаясь от того, что группа G существует в целом. Именно такая постановка вопроса имеет место в классической теории групп Ли (см. седьмую и десятую главы). Там изучается математический объект, оказывающийся позднее окрестностью единицы топологической группы Ли. Здесь я ввожу понятие *локальной группы*, обладающей важнейшими свойствами окрестности единицы топологической группы. В остающейся части этого параграфа изложение ведется более бегло, чем в других частях книги, так как оно лишь повторяет в новой обстановке ранее изложенные факты. Все нижеследующее содержание настоящего параграфа нужно лишь для понимания седьмой, восьмой и десятой глав.

D) Топологическое пространство G называется *локальной группой*, если для некоторых пар a, b элементов множества G определено *произведение* $ab \in G$, причем выполнены следующие условия:

a) Если определены произведения ab, $(ab)c$, bc, $a(bc)$, то имеет место равенство $(ab)c=a(bc)$.

b) Если определено произведение ab, то для всякой окрестности W элемента ab существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что при $x \in U$, $y \in V$ произведение xy определено и $xy \in W$.

c) В G отмечен элемент e, играющий особую роль и называемый *единицей*. Он обладает следующим свойством: если $a \in G$, то произведение ea определено и $ea = a$.

d) Если для пары a, b произведение определено и $ab = e$, то говорят, что a есть *левый обратный элемент* для b, $a = b^{-1}$. Если для b существует левый обратный элемент b^{-1}, то для всякой окрестности U элемента b^{-1} имеется такая окрестность V элемента b, что для каждого элемента $y \in V$ существует левый обратный элемент y^{-1}, принадлежащий к U.

E) Если G есть локальная группа и n—некоторое натуральное число, то в G существует столь малая окрестность U единицы e, что для каждого элемента $a \in U$ существует обратный элемент a^{-1} в G и для каждых n элементов $a_1, \ldots, a_n$ окрестности U определено произведение

$$(\ldots((a_1 a_2) a_3) \ldots a_n) = b,$$

не зависящее от расстановки скобок, так что имеет смысл запись $b = a_1 \ldots a_n$.

Докажем это. Из условия c) следует, что произведение ee определено и $ee = e$. Отсюда в силу условий b) и d) непосредственно вытекает существование такой окрестности W единицы e, что при $a \in W$ существует обратный элемент a^{-1} и при $a \in W$, $b \in W$ определено произведение ab. Далее, из условия b) следует существование такой окрестности V, что $V^2 \subset W$. Для V, как легко видеть, уже осуществляется E) при $n = 3$. Продолжая конструкцию дальше, мы получим требуемую окрестность U и для произвольного натурального n.

F) Если G есть локальная группа, то существуют такие окрестности единицы U и $V \subset U$, что выполнены следующие условия:

a) при $a \in U$ произведение ae определено и $ae = a$;

b) при $a \in U$ существует такой элемент a^{-1}, что произведения aa^{-1} и $a^{-1}a$ определены, причем $aa^{-1} = a^{-1}a = e$;

c) если элементы a и b принадлежат V, то уравнения $ax = b$ и $ya = b$ разрешимы в области U, и там каждое из них имеет единственное решение.

Утверждение F) доказывается совершенно так же, как утверждения B) и C) § 1. При этом нужно лишь выбрать столь малые окрестности U и V, чтобы все проводимые в § 1 выкладки были возможны. Существование столь малых окрестностей U и V обеспечивается предложением E).

G) Пусть G—локальная группа. Всякую окрестность U единицы e группы G будем называть *частью* локальной группы G. Всякая часть U локальной группы G сама является локальной группой в силу тех операций, которые имеются в G. Именно, мы будем считать, что произведение ab определено в U, если оно определено в G и принадлежит U, и что единицей в U служит единица из G.

H) Пусть G и G'—две локальные группы, U и U'—их части. Говорят, что f есть *локальное изоморфное отображение* группы G на группу G', если f есть топологическое отображение части U на часть U', причем выполнены нижеследующие условия. Если произведение ab определено в U, то произведение $f(a)f(b)$ определено в U' и $f(ab)=f(a)f(b)$. Далее, единица при отображении f переходит в единицу. Наконец, для отображения f^{-1}, обратного к f, выполнены те же условия, что и для самого f. Если для локальных групп G и G' существует локальное изоморфное отображение одной группы на другую, то говорят, что группы G и G' *локально изоморфны*. Два локальных изоморфных отображения f и f' группы G на группу G' называются *эквивалентными*, если они совпадают на некоторой части группы G. В дальнейшем мы будем изучать локальные изоморфизмы лишь с точностью до эквивалентности.

Очевидно, что определение 30 является частным случаем определения H), когда локальные группы G и G' являются топологическими группами.

Подлинным объектом изучения являются не все свойства локальной группы, но лишь те, которые не меняются при локальных изоморфных отображениях.

Здесь возникает одна проблема, связанная с понятием локальной группы. Не будет ли каждая локальная группа локально изоморфна некоторой топологической группе? Проблема эта решена положительно для групп Ли с применением весьма сложного специального аппарата (см. § 59). Для общих локальных групп она решается отрицательно [22].

Перейдем теперь к определению дальнейших основных понятий: *подгруппы, нормального делителя, факторгруппы и гомоморфного отображения* для локальных групп.

I) Пусть G—локальная группа и H—некоторое ее подмножество, содержащее e. В силу определения 17 H есть топологическое пространство. Будем считать, что для пары a, b элементов из H определено произведение ab, если оно определено в G и принадлежит H. Если так определенные в H топологические и алгебраические операции удовлетворяют требованиям определения D), то множество H есть локальная группа. Если, сверх того, существует окрестность U единицы e, в которой пересечение $U \cap H$ замкнуто, то H называется *подгруппой* локальной группы G. Локальная подгруппа N локальной группы G называется *нормальным делителем*, если существует такая окрестность V единицы e в G, что при $x \in V$, $y \in V \cap H$ имеем $x^{-1}yx \in H$. Две подгруппы H и H'

локальной группы G называются *эквивалентными*, если существует такая окрестность U единицы, что $H \cap U = H' \cap U$.

Легко видеть, что класс эквивалентных между собой подгрупп локальной группы G инвариантен относительно локально изоморфных отображений. Мы будем интересоваться структурой подгруппы лишь с точностью до замены ее любой эквивалентной подгруппой.

J) Пусть G—локальная группа и H—ее подгруппа. Определим *локальное пространство G/H левых смежных классов* группы G по подгруппе H. Для этого выберем окрестность U единицы в G, малость которой будет определяться дальнейшими построениями. Множество U разобьем на *левые смежные классы* по подгруппе H, относя элементы x и y из U к одному классу, если $x^{-1}y \in H$. При достаточной малости окрестности U все аксиомы эквивалентности (см. § 2, C)) будут выполнены. Далее, каждый смежный класс X будет представляться в форме $X = U \cap (xH)$, где x—произвольный элемент из X, и, обратно, каждое множество вида $U \cap (xH)$, где $x \in U$, будет представлять собой левый смежный класс. Пусть Σ—некоторый базис пространства U. Если $W \in \Sigma$, то через W^* обозначим совокупность всех левых смежных классов, пересекающихся с W. Совокупность Σ^* всех множеств W,* где $W \in \Sigma$, как легко видеть, удовлетворяет условиям теоремы 3, и мы примем ее за базис пространства G/H. Локальное пространство G/H левых смежных классов не определяется однозначно заданием локальной группы G и ее подгруппы H, а зависит еще от выбора окрестности U. Аналогично определяется локальное пространство *правых смежных классов*. Пусть теперь $H = N$—нормальный делитель локальной группы G. Построим факторгруппу G/N. Существует столь малая окрестность V единицы в G, что если X и Y суть два смежных класса, пересекающихся с V, то $U \cap (XY) = Z$ вновь есть смежный класс. В этом случае мы будем считать, что определено произведение $XY = Z$. Таким образом, для каждых двух элементов пространства G/N, принадлежащих V^*, определено произведение, принадлежащее G/N. В силу установленных операций множество G^* оказывается локальной группой. Эта локальная группа называется *факторгруппой* G/N.

Ясно, что группа $G/N = G^*$ не определяется однозначно заданием локальной группы G и ее нормального делителя N, а зависит еще от выбора окрестностей U и V; однако нетрудно видеть, что все получающиеся факторгруппы G/N локально изоморфны между собой, так что интересующие нас свойства факторгруппы G/N определены однозначно. Точно так же при замене нормального делителя N эквивалентным ему делителем N' мы получим факторгруппу G/N', локально изоморфную факторгруппе G/N.

K) Пусть G и G^*—две локальные группы, а U и U^*—их части. Скажем, что f есть *локальное гомоморфное отображение* группы G

в G^*, если f есть непрерывное отображение части U в часть U^*, удовлетворяющее нижеследующим условиям. Если произведение ab определено в U, то произведение $f(a)f(b)$ определено в U^* и $f(ab)=f(a)f(b)$. Сверх того, единица при отображении f переходит в единицу. Множество N элементов, переходящих в единицу при отображении f, называется *ядром* гомоморфизма f и оказывается нормальным делителем локальной группы G. Если f есть открытое отображение части U на часть U^*, то f называется *открытым гомоморфизмом* локальной группы G на локальную группу G^*. В этом случае между группой G^* и факторгруппой G/N устанавливается *естественный локальный изоморфизм.* Два локальных гомоморфных отображения f и f' группы G в группу G^* называются *эквивалентными*, если они совпадают на некоторой части группы G. В дальнейшем мы будем изучать локальные гомоморфизмы лишь с точностью до эквивалентности.

L) Пусть N_1 и N_2—две локальные группы с единицами e_1 и e_2. Множество всех пар вида (x_1, x_2), где $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$, обозначим через G'. В силу определения A) § 14 множество G' есть топологическое пространство. Введем в нем операцию умножения, считая, что пары (x_1, x_2) и (y_1, y_2) можно перемножить, если можно перемножить элементы x_1 и y_1 из N_1 и элементы x_2 и y_2 из N_2, и полагая в этом случае $(x_1, x_2)(y_1, y_2)=(x_1y_1, x_2y_2)$. В качестве единицы отметим пару $e'=(e_1, e_2)$. Легко проверяется, что в силу этого закона перемножения пространство G' становится локальной группой. Локальная группа G' называется *прямым произведением* локальных групп N_1 и N_2. Каждому элементу $x_1 \in N_1$ поставим в соответствие элемент $f_1(x_1)=(x_1, e_2) \in G'$. Точно так же каждому элементу $x_2 \in N_2$ поставим в соответствие элемент $f_2(x_2)=(e_1, x_2) \in G'$. Непосредственно проверяется, что f_i есть локальное изоморфное отображение локальной группы N_i на некоторый локальный нормальный делитель N'_i локальной группы G' и что локальные нормальные делители N'_1 и N'_2 удовлетворяют следующим условиям: 1) $N'_1 \cap N'_2=e'$; 2) каковы бы ни были окрестности U'_1 и U'_2 единицы e' в N'_1 и N'_2, их групповое произведение $U'_1U'_2$ содержит некоторую окрестность U' единицы e' в G'. Эти свойства нормальных делителей приводят нас к другому определению прямого произведения локальных групп. Говорят, что локальная группа G *распадается в прямое произведение* своих локальных нормальных делителей N_1 и N_2, если: 1) $N_1 \cap N_2=e$, где e есть единица группы G, и 2) для произвольных окрестностей U_1 и U_2 единицы e в N_1 и N_2 существует такая окрестность U единицы e в G, что $U \subset U_1U_2$. Легко проверяется, что прямое произведение G' локальных групп N_1 и N_2 локально изоморфно локальной группе G. Именно, ставя в соответствие паре (x_1, x_2), где x_1 и x_2 принадлежат некоторой окрестности единицы e, элемент $f(x_1, x_2)=x_1x_2 \in G$, мы получаем локальное изоморфное отображение группы G' на группу G;

при этом ff_i есть тождественное отображение локальной группы N_i на себя. Приведенные определения прямого произведения двух локальных групп очевидным образом распространяются на произвольное конечное число локальных групп.

Введем здесь еще одно, хотя и весьма специальное, но все же важное понятие.

M) Пусть G—локальная группа и D—аддитивная топологическая группа действительных чисел. Локальный гомоморфизм g группы D в группу G (см. K)) называется *однопараметрической подгруппой* группы G. Существует, таким образом, настолько малое положительное число α, что при $|s|<\alpha$, $|t|<\alpha$, $|s+t|<\alpha$ значения $g(s)$, $g(t)$, $g(s+t)$ функции g определены и выполнено условие

$$g(s+t)=g(s)g(t). \tag{1}$$

Интервал $|t|<\alpha$ будем называть *областью существования* однопараметрической подгруппы g. Пусть g и h—две однопараметрические подгруппы с областями существования $|t|<\alpha$ и $|t|<\beta$. Если существует такое положительное число γ, что при $|t|<\gamma$ имеем $g(t)=h(t)$, то в силу (1) $g(t)=h(t)$ при $|t|<\min(\alpha, \beta)$. Если G есть топологическая группа, то однопараметрическая подгруппа g с областью существования $|t|<\alpha$ может быть в силу соотношения (1) единственным образом продолжена в обычный гомоморфизм топологической группы D в топологическую группу G.

N) Пусть G—локальная группа. Если существует такая окрестность U единицы в G, что множество $\overline{U}$ бикомпактно, то локальная группа G называется *локально бикомпактной*. Если окрестность V единицы локальной группы G содержится в окрестности U с бикомпактным замыканием $\overline{U}$, то множество $\overline{V}$ бикомпактно. Из этого следует, что локальная бикомпактность есть локальный инвариант локальной группы. Пусть U—достаточно малая окрестность единицы группы G с бикомпактным замыканием $\overline{U}$. Если V—окрестность единицы, содержащаяся в U, то $\overline{U}$ содержится в сумме конечного числа множеств вида $a\overline{V}$, $a\in\overline{U}$, так что размерность множества $\overline{U}$ равна размерности множества $\overline{V}$ (см. § 16). Таким образом, можно определить *размерность* локальной группы G как размерность множества $\overline{U}$. Если G есть бикомпактная топологическая группа, то размерность ее как локальной группы равна размерности пространства G, так как за U можно принять всю группу G.

П р и м е р 43. Пусть G—аддитивная топологическая группа действительных чисел и N—подгруппа всех целых чисел. Согласно предложению C), группы G и G/N локально изоморфны. Очевидно, однако, что группы эти не изоморфны. Здесь мы имеем простейший пример локально изоморфных, но не изоморфных групп. Более сложные примеры будут даны позже.

Пример 44. Пусть G^n—аддитивная топологическая группа векторов n-мерного евклидова пространства, взятая в определенных декартовых координатах. Обозначим через G^k подгруппу группы G^n, порожденную первыми k координатными осями, а через N^k—совокупность всех векторов пространства G^k, обладающих целочисленными координатами. Множество N^k есть дискретная подгруппа группы G^n, и потому факторгруппа $G^n/N^k = G^n_k$ локально изоморфна группе G^n (см. С)). Таким образом, все группы G^n_k, $k=0, 1, \ldots, n$, локально изоморфны между собой, однако никакие две из этих групп не изоморфны и даже не гомеоморфны между собой. Группа G^n_n бикомпактна, все остальные некомпактны. Группа G^n_0 изоморфна группе G^n.

Оказывается, что всякая связная группа G, локально изоморфная группе G^n, изоморфна одной из групп G^n_k (см. пример 97).

§ 24. Непрерывные группы преобразований

В §§ 1 и 3 было рассмотрено понятие группы преобразований произвольного множества (см. § 1, F); § 3, I), J), K)). В том случае, когда преобразуемое множество есть топологическое пространство, из всех преобразований естественно выделить *гомеоморфные* отображения пространства на себя. Так как, очевидно, произведение двух гомеоморфных отображений пространства на себя есть также гомеоморфное отображение его на себя и отображение, обратное к гомеоморфному, является гомеоморфным, то множество всех топологических преобразований топологического пространства есть группа. Однако в геометрии и других отделах математики предметом исследования является обычно не группа всех топологических преобразований данного пространства, а какая-либо ее подгруппа, сама представляющая собой, конечно, группу топологических преобразований. При этом почти всегда в эту группу вносится некоторая топология, так что группа становится топологической. Представляет значительный интерес вопрос о том, каким образом топология группы преобразований определяется топологией преобразуемого пространства. В классических задачах всегда бывает ясно, какую именно топологию нужно внести в группу преобразований пространства, и эта топология однозначно определяется существом задачи. Желательно, однако, установить общую теорему единственности топологии группы топологических преобразований и найти легко проверяемые условия, обеспечивающие правильный выбор топологии. Решению этих двух вопросов посвящены теорема 19 и определение 31. Другим важным вопросом общей теории групп преобразований является вопрос о том, как, зная топологическую группу, найти те топологические пространства, в которых заданная группа может действовать как транзитивная группа топологических преобразований. Решение этого вопроса дается теоремой 20; она аналогична предложению K) § 3.

Определение 31. Топологическая группа G называется *непрерывной группой преобразований* топологического пространства Γ, если каждому элементу $x \in G$ поставлено в соответствие преобразование x^* множества Γ, $x^* = \tau(x)$, таким образом, что $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$ (ср. § 3, I)) и что функция σ двух переменных $x \in G$ и $\xi \in \Gamma$, определяемая соотношением $\sigma(x, \xi) = x^*(\xi)$, является непрерывной, т. е. дает непрерывное отображение прямого произведения $G \times \Gamma$ топологических пространств G и Γ (см. § 14, A)) на топологическое пространство Γ. Очевидно, что все преобразования x^*, $x \in G$, являются топологическими. Если различным элементам группы G соответствуют различные преобразования, то G называется *эффективной группой преобразований*. В этом случае элементы группы G сами могут считаться преобразованиями ($x = x^*$).

Легко видеть, что ядро N неэффективности алгебраической группы G (см. § 3, I)) замкнуто в пространстве G. Факторгруппа $G^* = G/N$ в понятном смысле есть эффективная непрерывная группа преобразований пространства Γ. Непрерывная группа G преобразований пространства Γ называется *транзитивной*, если транзитивна алгебраическая группа G преобразований множества Γ (см. § 3, I)).

Теорема 19. *Пусть Γ — хаусдорфово топологическое пространство и G — эффективная группа преобразований множества* Γ (см. § 3, I)). *Пусть, далее, в группу G внесены две топологии, превращающие ее в непрерывные группы G' и G'' преобразований пространства* Γ (см. определение 31). *Если каждая из групп G' и G'' локально бикомпактна и может быть представлена как сумма счетного числа своих бикомпактных подмножеств, то топологии в группах G' и G'' одинаковы, так что топологические группы G' и G'' тождественны между собой.*

Доказательству теоремы 19 предпошлем один критерий бикомпактности подмножества топологической группы.

A) Пусть M — произвольное множество элементов топологической группы G. Замыкание $\overline{M}$ множества M тогда и только тогда бикомпактно, когда всякая центрированная система подмножеств множества M имеет общую точку прикосновения в G. Так как всякую центрированную систему можно дополнить до максимальной (см. § 14, D)), то в этой формулировке центрированную систему можно заменить максимальной (в M) центрированной системой.

Докажем это. Если множество $\overline{M}$ бикомпактно, то всякая центрированная система подмножеств множества M, будучи центрированной системой подмножеств множества $\overline{M}$, имеет в $\overline{M}$ общую точку прикосновения. Допустим, что, наоборот, каждая центрированная система подмножеств множества M имеет в G общую точку прикосновения, и докажем бикомпактность множества $\overline{M}$. Пусть Δ^*—произвольная центрированная система подмножеств множества $\overline{M}$ и Σ—полная система окрестностей единицы группы G. Обозначим через Δ совокупность всех множеств вида $M \cap (AU)$, где $A \in \Delta^*$, а $U \in \Sigma$. Непосредственно проверяется, что Δ есть центрированная система и, так как она состоит из подмножеств множества M, то, по предположению, она имеет общую точку прикосновения, принадлежащую $\overline{M}$, которую мы обозначим через a. Покажем, что a есть общая точка прикосновения множеств системы Δ^*. Пусть V—произвольная окрестность единицы группы G и U—такая окрестность единицы, что $UU^{-1} \subset V$. Каково бы ни было множество A из Δ^*, множество $M \cap (AU)$ принадлежит системе Δ и потому пересекается с окрестностью aU точки a. Из этого непосредственно следует, что множество A пересекается с множеством aUU^{-1}, а потому и с окрестностью aV точки a. Таким образом, произвольная окрестность aV точки a пересекается с произвольным множеством $A \in \Delta^*$. Точка a является, следовательно, общей точкой прикосновения системы Δ^*. Так как Δ^* есть произвольная центрированная система подмножеств множества $\overline{M}$, то из доказанного следует бикомпактность множества $\overline{M}$.

Доказательство теоремы 19. Пусть Σ'—полная система окрестностей пространства G' и Σ''—полная система окрестностей пространства G''. Обозначим через Σ_0 систему всех непустых множеств вида $U' \cap U''$, где $U' \in \Sigma'$, $U'' \in \Sigma''$, и покажем, что система Σ_0 удовлетворяет условиям a) и b) теоремы 3, т. е. может быть принята за полную систему окрестностей некоторого топологического пространства G_0, точки которого суть элементы множества G. Проверим a). Пусть x и y—две различные точки множества G, $U' \in \Sigma'$—окрестность точки x в G', не содержащая y, и $U'' \in \Sigma''$—произвольная окрестность точки x в G''. Множество $U' \cap U'' \in \Sigma_0$ содержит x и не содержит y. Проверим b). Пусть $U' \cap U''$ и $V' \cap V''$—два множества системы Σ_0, содержащих точку x. Здесь U' и V' принадлежат системе Σ', а U'' и V'' принадлежат системе Σ''. Пусть, далее, $W' \in \Sigma$ и $W'' \in \Sigma''$—такие окрестности точки x, что $W' \subset U' \cap V'$ и $W'' \subset U'' \cap V''$. Множество $W' \cap W''$ системы Σ_0 удовлетворяет условию $W' \cap W'' \subset (U' \cap U'') \cap (V' \cap V'')$ и содержит точку x. Таким образом, оба условия теоремы 3 выполнены.

Покажем, что G_0 есть топологическая группа, т. е. что операции, имеющиеся в G, непрерывны в топологии, заданной системой Σ_0. Пусть x и y—два элемента из G и $W' \cap W''$—произвольная окрестность элемента $z = xy^{-1}$, взятая из системы Σ_0. Здесь $W' \in \Sigma'$ и $W'' \in \Sigma''$. Так как G' и G'' суть топологические группы, то существуют такие окрестности U' и V' элементов x и y, принадлежащие системе Σ', и такие окрестности U'' и V'' элементов x и y, принадлежащие системе Σ'', что $U'V'^{-1} \subset W'$ и $U''V''^{-1} \subset W''$. Окрестности $U' \cap U''$ и $V' \cap V''$ элементов x и y, принадлежащие системе Σ_0, удовлетворяют условию $(U' \cap U'')(V' \cap V'')^{-1} \subset W' \cap W''$. Таким образом, G_0 есть топологическая группа.

Покажем, что если замыкания $\overline{M}'$ и $\overline{M}''$ одного и того же множества M в пространствах G' и G'' бикомпактны, то замыкание $\overline{M}$ того же множества в пространстве G_0 также бикомпактно. Пусть Δ—произвольная максимальная центрированная система подмножеств множества M (см. § 14, D)). Покажем, что система Δ имеет общую точку прикосновения в пространстве G_0; этим будет доказана бикомпактность множества $\overline{M}$ (см. A)). Так как множество $\overline{M}'$ бикомпактно, то центрированная система Δ имеет в топологическом пространстве G' по крайней мере одну общую точку прикосновения x'. Так как Δ есть максимальная центрированная система в M, то пересечение $U' \cap M$ любой окрестности $U' \in \Sigma'$ точки x' с множеством M входит в нее. Покажем, что x' есть единственная общая точка прикосновения системы Δ в пространстве G'. Пусть y'—другая такая точка. Так как групповое пространство G' хаусдорфово, то существуют в нем непересекающиеся окрестности U' и V' точек x' и y'. Множества $U' \cap M$ и $V' \cap M$ оба входят в центрированную систему Δ, пересечение же их пусто. Таким образом, мы пришли к противоречию. Точно так же доказывается, что и в топологическом пространстве G'' система Δ имеет единственную общую точку прикосновения x''. Покажем, что точки x' и x'' совпадают. Здесь и только здесь будет использован тот факт, что группы G' и G'' суть эффективные непрерывные группы преобразований пространства Γ. Допустим, что $x' \neq x''$. Таким образом, x' и x'' суть различные преобразования пространства Γ, и потому существует такая точка $\alpha \in \Gamma$, что $x'(\alpha) \neq x''(\alpha)$. Так как пространство Γ хаусдорфово, то для различных его точек $x'(\alpha)$ и $x''(\alpha)$ существуют непересекающиеся окрестности H' и H''. В силу того, что G' есть непрерывная группа преобразований, существует в пространстве G' такая окрестность U' преобразования x', что все принадлежащие к ней преобразования переводят точку α в точки окрестности H'. Точно так же существует в группе G'' такая окрестность U'' преобразования x'', что все принадлежащие к ней преобразования переводят точку α в точки окрестности H''. Так как H' и H'' не пересекаются, то U' и U'' также не пересекаются; между тем, как было уже доказано, оба множества $U' \cap M$ и $U'' \cap M$ принадлежат центрированной системе Δ и потому должны пересекаться. Таким образом, мы пришли к противоречию, и потому $x' = x''$. Так как $x' = x'' = x$ есть общая точка прикосновения системы Δ как в пространстве G', так и в пространстве G'', то, каковы бы ни были окрестности $U' \in \Sigma'$ и

$U''\in\Sigma''$ точки x, пересечения $U'\cap M$ и $U''\cap M$ оба принадлежат максимальной центрированной системе Δ, а потому и пересечение $U'\cap U''\cap M$ принадлежит системе Δ. Таким образом, произвольная окрестность $U'\cap U''$ точки x в G_0 пересекается с каждым множеством системы Δ, т. е. x есть общая точка прикосновения системы Δ в пространстве G_0. Этим бикомпактность множества $\overline{M}$ доказана.

Покажем теперь, что топологическое пространство G_0 локально бикомпактно и может быть представлено как счетная сумма своих бикомпактных подмножеств. Так как пространства G' и G'' локально бикомпактны, то системы Σ' и Σ'' могут быть выбраны так, чтобы замыкания входящих в них окрестностей были бикомпактны. Из только что доказанного следует, что при таком выборе каждая окрестность системы Σ_0 имеет в пространстве G_0 бикомпактное замыкание. Пусть, далее, F'_1, F'_2, ...—последовательность бикомпактных множеств пространства G', сумма которых равна G', и F''_1, F''_2, ...—последовательность бикомпактных множеств пространства G'', сумма которых равна G''. Положим $F_{ij}=F'_i\cap F''_j$. В силу доказанного все множества $\overline{F}_{ij}$ бикомпактны в пространстве G_0, сумма же их, очевидно, равна G_0.

Определим отображение группы G_0 на группу G', поставив в соответствие каждому элементу $x\in G_0$ тот же элемент $x\in G'$. В силу самого построения топологии в G_0 отображение это непрерывно и, будучи алгебраически изоморфным, оно является в силу теоремы 12 изоморфным отображением топологической группы G_0 на топологическую группу G'. Точно так же доказывается, что, ставя в соответствие каждому элементу $x\in G_0$ тот же элемент $x\in G''$, мы получим изоморфное отображение топологической группы G_0 на топологическую группу G''. Комбинируя полученные изоморфизмы, мы видим, что, ставя в соответствие каждому элементу $x\in G'$ тот же элемент $x\in G''$, мы получаем изоморфное отображение топологической группы G' на топологическую группу G''.

Итак, теорема 19 доказана.

В) Пусть G—топологическая группа, H—ее подгруппа и G/H—пространство левых смежных классов (см. определение 24). Определяя преобразование x^* соотношением $x^*(\Xi)=x\Xi$, где $x\in G$, $\Xi\in G/H$, мы получаем транзитивную группу G преобразований множества G/H (см. § 3, J)). Оказывается, что G есть непрерывная группа преобразований топологического пространства G/H. Ядром неэффективности группы G служит максимальный нормальный делитель группы G, содержащийся в H (см. § 3, J)).

Покажем, что функция σ (см. определение 31) непрерывна. Пусть $x\in G$, $\Xi=aH\in G/H$ и $x^*(\Xi)=xaH=\mathrm{H}$. Произвольную окрестность W^* элемента H в пространстве G/H можно задать, исходя из некоторой окрестности W элемента xa в группе G и определяя W^* как множество всех смежных классов, содержащихся в множестве WH. Пусть теперь U и V—такие окрестности элементов x и a в группе G, что $UV \subset W$. Обозначим через V^* окрестность элемента Ξ в пространстве G/H, состоящую из всех смежных классов, содержащихся в множестве VH. Из соотношения $UV \subset W$ непосредственно следует, что $\sigma(U, V^*) \subset W^*$. Таким образом, предложение B) доказано.

C) Пусть G—непрерывная группа преобразований топологического пространства Γ и G'—непрерывная группа преобразований топологического пространства Γ'. Пара отображений φ, ψ называется *подобием* пары G, Γ на пару G', Γ', если φ есть изоморфное отображение топологической группы G на топологическую группу G', а ψ—гомеоморфное отображение топологического пространства Γ на топологическое пространство Γ' и если из $x' = \varphi(x)$, $\xi' = \psi(\xi)$ следует: $x'^*(\xi') = \psi(x^*(\xi))$. Пары G, Γ и G', Γ' называются *подобными*, если существует подобие пары G, Γ на пару G', Γ'.

Теорема 20. *Пусть G—непрерывная транзитивная группа преобразований топологического пространства* Γ *и* α*—некоторая фиксированная точка пространства* Γ. *Обозначим через* $\psi(\xi)$ *множество всех элементов* $x \in G$, *удовлетворяющих условию* $x^*(\alpha) = \xi$. *Оказывается, что* $H_\alpha = \psi(\alpha)$ *есть подгруппа топологической группы G. Согласно предложению* K) § 3 ψ *есть взаимно однозначное отображение множества* Γ *на множество* G/H_α *левых смежных классов. Оказывается, что* ψ^{-1} *есть непрерывное отображение пространства* G/H *на пространство* Γ. *Пусть* φ*—тождественное отображение группы G на себя. Если пространства G и* Γ *локально бикомпактны и пространство G представимо как сумма счетного множества своих бикомпактных подмножеств, то пара* φ, ψ *есть подобие пары G,* Γ *на пару G,* G/H_α (см. B) и C)).

Доказательство. В силу предложения K) § 3 доказательства требуют лишь топологические утверждения теоремы 20, а именно, замкнутость множества H_α, непрерывность отображения ψ^{-1} в общем случае и его топологичность в специальном случае.

Замкнутость множества H_α следует из непрерывности отображения σ (см. определение 31).

Обозначим через f естественное отображение группы G на пространство G/H_α левых смежных классов (см. § 19, C)) и положим $g = \psi^{-1} f$. Покажем, что из непрерывности отображения g вытекает непрерывность отображения ψ^{-1}. Действительно, пусть L—произвольная область в Γ; мы имеем: $\psi(L) = f(g^{-1}(L))$. Так как, по предположению, отображение g непрерывно, то $g^{-1}(L)$ есть область в G, а в силу открытости отображения f из этого вытекает, что $f(g^{-1}(L))$ есть область в G/H_α. В силу взаимной однозначности отображения ψ отсюда следует, что отображение ψ^{-1} непрерывно. Покажем теперь, что из открытости отображения g вытекает непрерывность отображения ψ. Пусть M—произвольная область в G/H_α. Мы имеем $\psi^{-1}(M)=g(f^{-1}(M))$; из непрерывности отображения f и открытости отображения g следует, что $\psi^{-1}(M)$ есть область, т. е. что отображение ψ непрерывно. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно теперь доказать, что отображение g непрерывно в общем случае и открыто в специальном случае.

Легко видеть, что отображение g определяется условием $g(x)=x(\alpha)$, $x\in G$. Непрерывность отображения g вытекает, таким образом, непосредственно из непрерывности отображения σ (см. определение 31). Докажем открытость отображения g в специальном случае. Доказательство это аналогично доказательству теоремы 12.

Пусть U—произвольная окрестность единицы группы G; покажем, что $g(U)$ содержит некоторую окрестность точки α в пространстве Γ. Выберем такую окрестность V единицы группы G, что множество $F=\overline{V}$ бикомпактно и $F^{-1}F\subset U$. Пусть Σ—счетная совокупность бикомпактных множеств пространства G, сумма которых совпадает с самим пространством G. Каково бы ни было множество $E\in\Sigma$, система областей xV, где $x\in E$, покрывает множество E, и потому существует конечное покрытие множества E областями вида xV, $x\in E$. Так как система Σ содержит лишь счетное число множеств, то существует в группе G такая последовательность $x_1, x_2, \ldots$ элементов, что множества $F_i=x_iF$, $i=1, 2, \ldots$, покрывают пространство G. Положим $C_i=g(F_i)$. Множества $C_1, C_2, \ldots$ покрывают пространство Γ.

Докажем, что множество $g(F)$ содержит область пространства Γ. Для этого достаточно доказать, что хотя бы одно из множеств C_i содержит область пространства Γ. Действительно, $C_i=g(x_iF)=x_i^*(g(F))$, так что C_i получается из $g(F)$ гомеоморфным преобразованием x_i^* всего пространства Γ. Допустим, что ни одно из множеств C_i не содержит области. Пусть L_0—произвольная окрестность в Γ, замыкание которой бикомпактно. Так как множество C_i не содержит области, то в Γ существует окрестность L_1, замыкание которой бикомпактно и целиком содержится в $L_0\setminus C_1$. Так как множество C_2 не содержит области, то существует окрестность L_2, замыкание которой бикомпактно и содержится в $L_1\setminus C_2$. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную последовательность окрестностей $L_0, L_1, L_2, \ldots$ с бикомпактными замыканиями, удовлетворяющую условию $\overline{L}_i\subset L_{i-1}\setminus C_i$, $i=1, 2, \ldots$ Так как все множества $\overline{L}_i$ бикомпактны и не пусты, то пересечение их не пусто (см. теорему 4), и оно не принадлежит сумме множеств C_i, $i=1, 2, \ldots$ Но это невозможно, так как эта сумма совпадает с Γ. Итак, доказано, что множество $g(F)$ содержит некоторую область L.

Пусть $\beta\in L$ и x—такая точка из F, что $g(x)=\beta$, т. е. что $x^*(\alpha)=\beta$. Так как $F^{-1}F\subset U$, то $x^{-1}F\subset U$. Следовательно, имеет место

$g(U)\supset g(x^{-1}F)=(x^{-1})^*(g(F))\supset(x^{-1})^*(L)$. Но $(x^{-1})^*(L)$ есть область в Γ, содержащая точку α. Итак, доказано, что, какова бы ни была окрестность U единицы группы G, множество $g(U)$ содержит некоторую окрестность точки α.

Докажем, наконец, открытость отображения g. Пусть $x\in G$, W—произвольная окрестность элемента x и $g(x)=\gamma$, т. е. $x^*(\alpha)=\gamma$. Область $x^{-1}W$ содержит единицу группы G, и потому $g(x^{-1}W)$ содержит некоторую окрестность L' точки α: $\alpha\in L'\subset g(x^{-1}W)$. Применяя к этому соотношению преобразование x^*, получаем $\gamma=x^*(\alpha)\in x^*(L')\subset x^*(g(x^{-1}W))=g(W)$. Итак, $g(W)$ содержит окрестность $x^*(L')$ точки γ, и открытость отображения g доказана.

Таким образом, теорема 20 полностью доказана.

Пример 45. Пусть Γ—метрическое (и следовательно, топологическое; см. пример 20) пространство. Преобразование x множества Γ называется *изометрическим преобразованием* или *движением* пространства Γ, если оно сохраняет расстояние, т. е. если при произвольных ξ и η из Γ имеем $\rho(x(\xi),\ x(\eta))=\rho(\xi,\ \eta)$. Очевидно, что множество всех изометрических преобразований пространства Γ есть группа. Различные подгруппы этой группы называются *группами изометрических преобразований* пространства Γ.

Пусть G—некоторая группа изометрических преобразований компактного метрического пространства Γ. Введем в G метрику и, следовательно, топологию, определив расстояние $\rho(x,\ y)$ между двумя преобразованиями x и y как максимум расстояния $\rho(x(\zeta),\ y(\zeta))$ в пространстве Γ при $\zeta\in\Gamma$. Для определенного таким образом в множестве G расстояния выполнены аксиомы метрического пространства. Легко видеть, что топологическая группа G есть непрерывная группа преобразований пространства Γ. Если G есть группа всех изометрических преобразований пространства Γ, то пространство G, как легко видеть, компактно (и следовательно, бикомпактно, см. пример 26), и из теоремы 19 следует, что введенная в G топология есть единственная бикомпактная топология, превращающая группу G в непрерывную группу преобразований пространства Γ. Если группа G всех изометрических преобразований пространства Γ транзитивна, то к ней применима и теорема 20. Такова, например, группа всех изометрических преобразований единичной сферы $\Sigma x_i^2=1$ евклидова пространства размерности $n+1$. Группа эта изоморфна топологической группе всех ортогональных матриц порядка $n+1$ (см. пример 34).

Пример 46. Пусть Γ—действительное векторное пространство размерности n, взятое в определенных координатах, и G—топологическая группа всех действительных квадратных матриц порядка n с детерминантами, отличными от нуля (см. пример 34). Каждой матрице $\|x_j^i\|\in G$ поставим в соответствие преобразование x пространства Γ, переводящее вектор $\xi=(\xi^1,\ \ldots,\ \xi^n)$ в вектор

$x(\xi)=(\eta^1, \ldots, \eta^n)$, определяемый соотношениями

$$\eta^i=\sum_{j=1}^{n} x_j^i \xi^j, \quad i=1, \ldots, n.$$

Легко видеть, что различным матрицам соответствуют различные преобразования и произведению матриц соответствует произведение преобразований. Таким образом, алгебраическая группа G есть эффективная группа преобразований множества Γ. Легко проверить, что топологическая группа G есть непрерывная группа преобразований топологического пространства Γ. Так как группа G локально компактна и обладает счетным базисом, то здесь применима теорема 19. Таким образом, топология, введенная нами в рассматриваемой группе преобразований пространства Γ, есть единственная топология, превращающая ее в локально компактную со счетной базой непрерывную группу преобразований пространства Γ. Заметим, что G состоит из всех автоморфизмов топологической группы Γ (см. определение 26). Таким образом, в группе G всех автоморфизмов векторной группы Γ введена естественная топология, превращающая G в топологическую группу.

Глава четвертая

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕЛА

Наряду с топологическими группами в математике играют существенную роль *топологические кольца и тела*, т. е. такие кольца и тела, операции в которых непрерывны. Хотя в настоящей главе рассматриваются и топологические кольца, и топологические тела, содержание ее целиком направлено на изучение топологических тел или, точнее, на изучение *непрерывных*, т. е. локально бикомпактных недискретных топологических тел.

Непрерывное тело представляет собой тополого-алгебраический объект, описываемый сравнительно малым числом весьма естественных аксиом; однако этот объект оказывается чрезвычайно конкретным. Доказывается, что существуют лишь три различных связных непрерывных тела, именно, поле действительных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов. Несвязные непрерывные тела более многочисленны, и их полного описания не дано; тем не менее, они сравнительно конкретны. Доказывается, что каждое из них является конечным расширением или поля p-адических чисел, или поля рядов над полем вычетов по модулю p (§ 26).

Только что упомянутые конкретные непрерывные тела—поле действительных чисел, поле комплексных чисел, тело кватернионов, поле p-адических чисел и поле рядов над полем вычетов по модулю p—можно считать *классическими непрерывными телами*. Все они сравнительно давно известны и играют существенную роль в математике. Сформулированные выше результаты единственности показывают, что роль классических непрерывных тел в математике объясняется не исторической случайностью развития понятий, а логической необходимостью. Таким образом, результаты этой главы имеют некоторый философский интерес: они дают логическое оправдание историческому развитию понятий действительного и комплексного чисел. Результаты настоящей главы в дальнейшем изложении использоваться не будут.

§ 25. Топологические кольца и тела

В настоящем параграфе даются определения и изучаются простейшие свойства топологических колец и тел.

Определение 32. Множество R называется *топологическим кольцом* или соответственно *топологическим телом*, если:

1) R есть кольцо или соответственно тело (см. определение 11);

2) R есть топологическое пространство;

3) алгебраические операции, имеющиеся в R, непрерывны в топологическом пространстве R. Более полно: для произвольных элементов a и b из R и для произвольных окрестностей W и W' элементов $a-b$ и ab существуют такие окрестности U и V элементов a и b, что $U-V \subset W$ и $UV \subset W'$; в случае, когда R есть тело, предполагается дополнительно, что при $a \neq 0$ для произвольной окрестности W элемента a^{-1} существует окрестность U элемента a, удовлетворяющая условию $U^{-1} \subset W$.

Коммутативное топологическое тело называется *топологическим полем*.

Если, рассматривая топологическое кольцо, мы захотим подчеркнуть, что говорим только о его алгебраических свойствах, отвлекаясь от топологических, то мы будем называть его *алгебраическим* (т. е. *абстрактным*) *кольцом*.

A) Отображение g топологического кольца R в топологическое кольцо R' называется *гомоморфным*, если оно является гомоморфным отображением алгебраического кольца R в алгебраическое кольцо R' и непрерывным отображением топологического пространства R в топологическое пространство R'. Множество всех элементов кольца R, переходящих при гомоморфизме g в нуль кольца R', называется *ядром* этого гомоморфизма. Очевидно, что ядро гомоморфного отображения топологического кольца R является идеалом алгебраического кольца R и замкнутым множеством топологического пространства R.

B) Подмножество I топологического кольца R называется *идеалом* этого кольца, если оно есть идеал алгебраического кольца R и замкнутое подмножество топологического пространства R. Образуя факторгруппу R/I аддитивной топологической группы R топологического кольца R по его идеалу I, мы получим аддитивную топологическую группу R/I, в которой определено умножение (см. § 7, B)). Легко проверяется, что умножение это непрерывно в топологическом пространстве R/I, так что R/I представляет собой топологическое кольцо. Последнее называется *факторкольцом* или *кольцом вычетов* топологического кольца R по его идеалу I. *Естественное гомоморфное отображение* g алгебраического кольца R на алгебраическое кольцо R/I (см. § 7, B)) является одновременно открытым непрерывным отображением топологического пространства R на топологическое пространство R/I (см. § 20, B)). Таким образом, g представляет собой открытый гомоморфизм топологического кольца R на топологическое кольцо R/I.

C) Отображение топологического кольца R на топологическое кольцо R' называется *изоморфным*, если оно является изоморфным отображением алгебраического кольца R на алгебраическое кольцо R' и гомеоморфным отображением топологического пространства R на топологическое пространство R'.

Легко видеть, что отображение, обратное к изоморфному, является изоморфным.

D) Пусть I—ядро открытого гомоморфного отображения g топологического кольца R на топологическое кольцо R^*. *Естественное изоморфное отображение* f алгебраического кольца R/I на алгебраическое кольцо R^* (см. § 7, D)) является изоморфным отображением топологического кольца R/I на топологическое кольцо R^* (см. теорему 11). Из теоремы 12 непосредственно следует, что если топологические пространства R и R^* являются локально бикомпактными, а топологическое пространство R может быть представлено как счетная сумма своих бикомпактных подмножеств, то всякое гомоморфное отображение топологического кольца R на топологическое кольцо R^* является открытым.

В § 27 будет показано, что всякое локально бикомпактное топологическое тело удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, т. е. имеет счетный базис окрестностей в каждой своей точке. Наличие счетного базиса в каждой точке дает возможность положить в основу исследования топологических тел понятие *сходящейся последовательности*. Здесь мы используем это обстоятельство для установления некоторых свойств топологических тел, которые будут использованы в следующих двух параграфах.

E) Пусть K—топологическое тело, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Говорят, что последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ элементов тела K *сходится* к его элементу a и пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если для каждой окрестности U точки a найдется такое натуральное число k, что $a_n \in U$ при $n > k$. Пусть $U_1, \ldots, U_n, \ldots$—произвольный счетный базис некоторой точки $b \in K$; полагая

$$V_n = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n,$$

мы получаем счетный базис точки b, составленный из убывающей последовательности окрестностей:

$$V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots \tag{1}$$

Если M есть произвольное множество, содержащее точку b в своем замыкании, $b \in \overline{M}$, то, пользуясь системой окрестностей (1), можно найти последовательность $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ точек множества M, сходящуюся к b. Действительно, пусть b_n—произвольная точка из $M \cap V_n$; тогда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Если точка b является предельной для множества M, $b \in \overline{M \setminus b}$, то из M можно выбрать последовательность $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ точек, отличных от b, сходящуюся к b. Если

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

то в силу непрерывности операций в K мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab,$$

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -a \quad \text{и при} \quad a \neq 0 \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}.$$

Последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ точек тела K называется *фундаментальной*, если для всякой окрестности U нуля найдется настолько большое натуральное число k, что

$$a_n - a_m \in U \quad \text{при} \quad n > k, \quad m > k.$$

Две фундаментальные последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ называются *эквивалентными*, если последовательность $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ фундаментальна. Непосредственно доказывается, что если две последовательности сходятся к одной и той же точке, то они являются эквивалентными фундаментальными последовательностями. Нетрудно показать также, что если тело K локально бикомпактно, то всякая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Пользуясь понятием фундаментальной последовательности, докажем нижеследующие предложения, которые и будут использоваться в дальнейшем. При этом мы будем предполагать, что рассматриваемые локально бикомпактные тела удовлетворяют первой аксиоме счетности.

F) Пусть R — топологическое тело, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, T — его всюду плотное подкольцо и f — изоморфное отображение топологического кольца T на топологическое подкольцо T' локально бикомпактного тела K'. Тогда существует, и притом единственное, изоморфное отображение φ топологического тела R на топологическое подтело R' тела K', совпадающее с f на T.

Докажем это. Построим отображение φ. Пусть α — произвольный элемент тела R и $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — некоторая последовательность элементов кольца T, сходящаяся к элементу α. Так как последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ сходится в теле R, то она является в нем фундаментальной, а потому она является фундаментальной и в кольце T. Так как, далее, отображение f есть изоморфизм кольца T на кольцо T', то, полагая $a'_n = f(a_n)$, мы получаем фундаментальную последовательность $a'_1, \ldots, a'_n, \ldots$ элементов кольца T'. Эта последовательность является фундаментальной и в теле K', и потому она сходится в нем к некоторому элементу α'. Легко видеть, что элемент α' определяется элементом α и не зависит от случайного выбора последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, сходящейся к α. Ясно, что при $\alpha \in T$ имеем $\alpha' = f(\alpha)$. Если отображение φ, являющееся непрерывным продолжением отображения f, существует, то оно определяется соотношением $\varphi(\alpha) = \alpha'$. Примем это соотношение за определение отображения φ и докажем, что φ есть изоморфное отображение топологического тела R на топологическое тело $R' = \varphi(R) \subset K'$.

Покажем, что отображение φ сохраняет операции сложения и умножения, т. е. является гомоморфизмом алгебраического тела R в тело K'. Действительно, мы имеем:

$$\varphi(\alpha)+\varphi(\beta) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) + \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} (f(a_n)+f(b_n)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} f(a_n+b_n) = \varphi(\alpha+\beta).$$

Так же доказывается, что $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha\beta)$. Так как тело имеет лишь тривиальные идеалы, то ядром гомоморфизма φ является $\{0\}$, и потому φ есть изоморфное отображение алгебраического тела R на алгебраическое тело $R' = f(R)$.

Докажем, что отображение φ непрерывно и открыто в точке нуль; этим будет доказано, что оно является гомеоморфизмом (см. § 20, A)). Пусть Λ'—произвольная окрестность нуля в R', M'—такая окрестность нуля в R', что $\overline{\mathrm{M}}' \subset \Lambda'$ (здесь замыкание берется в R') и $V' = T' \cap \mathrm{M}'$. Положим $V = f^{-1}(V')$, и пусть M—такая окрестность нуля в R, что $\mathrm{M} \cap T = V$. Покажем, что $\varphi(\mathrm{M}) \subset \Lambda'$. Пусть α—произвольный элемент из M; тогда, как легко видеть, существует последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ элементов множества V, сходящаяся к α. Таким образом, $\varphi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \in \overline{V}' \subset \subset \overline{\mathrm{M}}' \subset \Lambda'$. Докажем теперь открытость отображения φ. Пусть Λ—произвольная окрестность нуля в R, M—такая окрестность нуля в R, что $\overline{\mathrm{M}} \subset \Lambda$, и $V = \mathrm{M} \cap T$. Положим $V' = f(V)$ и пусть M'—такая окрестность нуля в R', что $V' = \mathrm{M}' \cap T'$. Покажем, что $\varphi(\Lambda) \supset \mathrm{M}'$. Пусть α'—произвольный элемент из M'; тогда существует в T такая последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, сходящаяся к некоторому элементу $\alpha \in R$, что, полагая $a'_n = f(a_n)$, мы получаем последовательность $a'_1, \ldots, a'_n, \ldots$ элементов кольца T', сходящуюся к α'. Так как последовательность $a'_1, \ldots, a'_n, \ldots$ сходится к точке α' области M', то все ее элементы, начиная с достаточно большого номера, содержатся в $\mathrm{M}' \cap T' = V'$. Будем считать, что все элементы последовательности $a'_1, \ldots, a'_n, \ldots$ содержатся в V'. Тогда все элементы последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ содержатся в V. Таким образом, $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \in \overline{V} \subset \overline{\mathrm{M}} \subset \Lambda$, и мы видим, что $\varphi(\Lambda) \supset \mathrm{M}'$.

Итак, предложение F) доказано.

G) Топологическое тело будем называть *непрерывным*, если оно локально бикомпактно и недискретно. Будем говорить, что топологическое тело *допускает непрерывное замыкание*, если оно недискретно и может быть изоморфно отображено на подтело непрерывного тела или, как мы будем говорить, может быть *включено* в непрерывное тело. Пусть L—топологическое тело, допускающее непрерывное замыкание, и K—содержащее его непрерывное тело; оказывается, что непрерывное тело $\overline{L}$ однозначно определено исходным топологическим телом L и не зависит от выбора объемлющего тела K. Тело $\overline{L}$ мы будем называть *непрерывным замыканием* тела L.

Независимость замыкания $\overline{L}$ от выбора объемлющего тела K означает следующее. Пусть f—изоморфное отображение топологического тела L на топологическое подтело L' непрерывного тела K'; тогда существует, и притом только одно, изоморфное отображение φ тела $\overline{L}$ на тело $\overline{L'}$, совпадающее на L с f. Действительно, полагая $T=L$, $R=\overline{L}$ (см. F)), мы получаем единственное продолжение φ отображения f, являющееся изоморфизмом тела $\overline{L}$ на тело $\overline{L'}$.

§ 26. Классические непрерывные тела

Топологическое поле D^1 действительных чисел и топологическое поле D^2 комплексных чисел находят широкое применение в математике и всем хорошо известны. Здесь дается описание *тела D^4 кватернионов, поля K_0^p p-адических чисел и поля K_t^p рядов над полем вычетов по модулю p*. Роль всех этих топологических тел будет выяснена в следующем параграфе. Будем называть топологическое тело *непрерывным телом*, если оно локально бикомпактно и недискретно. В следующем параграфе будет показано, что поля D^1, K_0^p, K_t^p, где p—произвольное простое число, являются *простыми* и что всякое простое непрерывное поле изоморфно одному из них. Именно, будет показано, что поля D^1, K_0^p не содержат истинных непрерывных подполей, а всякое непрерывное подполе поля K_t^p изоморфно ему самому. Кроме того, будет показано, что каждое непрерывное тело содержит в качестве подполя одно из полей D^1, K_0^p, K_t^p и является его *конечным расширением*.

Значение поля комплексных чисел и тела кватернионов иное. Уже в этом параграфе будет доказана теорема Фробениуса (см. B)), утверждающая, что каждое тело, являющееся конечным расширением поля D^1 действительных чисел, или совпадает с D^1, или изоморфно полю D^2 комплексных чисел или телу D^4 кватернионов. Из сопоставления теоремы Фробениуса и сформулированных выше результатов следующего параграфа мы придем к выводу, что всякое связное локально бикомпактное тело изоморфно или полю действительных чисел, или полю комплексных чисел, или телу кватернионов.

Дадим прежде всего описание тела кватернионов.

А) Пусть D^4—четырехмерное евклидово векторное пространство с фиксированной в нем системой прямоугольных декартовых координат. Произвольный вектор $x=(x^0, x^1, x^2, x^3)\in D^4$ запишем в виде $x=x^0+ix^1+jx^2+kx^3$, где i, j, k—*кватернионные единицы*. Определим закон умножения в множестве D^4, считая, что умножение дистрибутивно, что действительные числа перестановочны с кватернионными единицами и что сами кватернионные единицы умножаются по формулам

$$ij=-ji=k; \quad jk=-kj=i; \quad ki=-ik=j;$$
$$ii=jj=kk=-1. \tag{1}$$

Оказывается, что множество D^4 в силу определенных в нем операций сложения и умножения является непрерывным телом. Тело D^4 называется *телом кватернионов*, а его элементы—*кватернионами*. Легко проверяется, что определенное таким образом в D^4 умножение ассоциативно. Кватернион $\bar{x}$, *сопряженный* к кватерниону x, определим, положив $\bar{x}=x^0-ix^1-jx^2-kx^3$. Непосредственно проверяется, что

$$\overline{xy}=\bar{y}\bar{x}. \tag{2}$$

Модуль кватерниона x определим как неотрицательное действительное число $|x|=\sqrt{x\bar{x}}=\sqrt{(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$. Мы имеем $|xy|^2=xy\overline{xy}=xy\bar{y}\bar{x}=x\cdot|y|^2\cdot\bar{x}=|y|^2x\bar{x}=|x|^2|y|^2$. Таким образом,

$$|xy|=|x|\cdot|y|. \tag{3}$$

Если $x\neq 0$, то $|x|\neq 0$, и существует кватернион x^{-1}, *обратный* к кватерниону x, именно $x^{-1}=\frac{\bar{x}}{|x|^2}$. Таким образом, совокупность D^4 всех кватернионов образует непрерывное тело. Тело D^4 кватернионов содержит поле D^1 действительных чисел, состоящее из всех кватернионов вида $x=x^0+0i+0j+0k$. Совокупность G всех кватернионов x, удовлетворяющих условию $|x|=1$, в силу (3) образует по умножению топологическую группу. Множество G есть трехмерная сфера евклидова пространства D^4. Кватернионы вида $x^1i+x^2j+x^3k$ называются *чисто мнимыми*. Их совокупность I образует трехмерное векторное пространство, ортогональное в D^4 к прямой D^1.

Докажем теперь предложение B), принадлежащее Фробениусу.

B) Пусть K—тело, являющееся *конечным расширением* поля D^1 действительных чисел, содержащегося в центре тела K. Это значит, что в теле K существует такая система $1, e_1, \ldots, e_k$ линейно независимых относительно поля D^1 элементов, что каждый элемент $x\in K$ может быть единственным способом записан в виде

$$x=d^0+d^1e_1+\ldots+d^ke_k, \quad d^i\in D^1,$$

причем каждый элемент $e_1, \ldots, e_k$ перестановочен с каждым элементом поля D^1. Тогда тело K либо совпадает с D^1, либо изоморфно полю D^2 комплексных чисел, либо изоморфно телу D^4 кватернионов.

Докажем предложение В). Если $K=D^1$, то утверждение В) верно. Будем поэтому считать, что $K \neq D^1$. Обозначим через I множество всех таких элементов $z \in K$, для которых выполнены условия $z^2 \in D$, $z^2 \leqslant 0$, и покажем, что каждый элемент $x \in K$ однозначно разлагается в сумму

$$x=d+z, \quad \text{где} \quad d \in D^1, \quad z \in I. \tag{4}$$

Рассмотрим последовательность

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{5}$$

степеней элемента x. Так как тело K представляет собой конечномерное векторное пространство, то элементы последовательности (5) линейно зависимы относительно тела D^1 действительных чисел. Поэтому существует многочлен $f(y)$ с действительными коэффициентами относительно y, обращающийся в нуль при замене неизвестного y элементом x, $f(x)=0$. Многочлен $f(y)$ мы можем предположить *неприводимым*, а известно, что неприводимый в области действительных коэффициентов многочлен имеет степень 1 или 2. Если $f(y)=y-d$, то $x=d \in D^1$, и разложение (4) установлено, именно, $z=0$. Пусть теперь $f(y)=y^2+py+q$. Простым алгебраическим преобразованием многочлен $f(y)$ приводится к виду $f(y)=(y-d)^2+c^2$. Положим $x-d=z$, тогда $z \in I$ и, следовательно, $x=d+z$.

Таким образом, разложение (4) установлено. Допустим, что одновременно имеем $x=d'+z'$, где $d' \in D^1$, $z' \in I$. Тогда $z'=z+d-d'$. Возводя это равенство в квадрат, получаем $z'^2=z^2+(d-d')^2+2(d-d')z$, откуда непосредственно следует, что $(d-d')z$ есть действительное число. Но это возможно лишь в двух случаях: когда либо $d-d'=0$, либо $z=0$. В том и другом случае единственность разложения (4) получается уже легко.

Покажем теперь, что I есть линейное подмножество элементов из K, т. е.

$$ax+by \in I, \tag{6}$$

если $x \in I$, $y \in I$, а a и b суть действительные числа.

Разберем сначала случай, когда элементы x, y, 1 линейно зависимы относительно тела D^1 действительных чисел, т. е. когда существуют такие действительные числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что $\alpha x=\beta y+\gamma$. Легко видеть, что элементы αx и βy принадлежат I, поэтому в силу единственности разложения (4) $\gamma=0$. Таким образом, $y=\frac{\alpha}{\beta}x$, и элемент $ax+by$ приобретает вид $\left(a+b\frac{\alpha}{\beta}\right)x$, откуда включение (6) следует непосредственно.

Будем теперь предполагать, что элемент $ax+by$ может принадлежать D^1 лишь при условии $a=0$, $b=0$. Положим

$$ax+by=d'+z', \tag{7}$$

где $d'\in D^1$, $z'\in I$ (см. (4)). Здесь элементы d' и z' зависят от выбора действительных чисел a и b; z' обращается в нуль лишь тогда, когда $a=b=0$. Покажем, что $d'=0$ при произвольном выборе чисел a и b. Положим

$$xy+yx=d+z \tag{8}$$

(см. (4)). Возводя в квадрат обе части равенства (7), получаем:

$$d'^2+z'^2+2d'z'=a^2x^2+b^2y^2+ab(xy+yx)=a^2x^2+b^2y^2+abd+abz. \tag{9}$$

Ввиду единственности разложения (4) из соотношения (9) следует, что

$$2d'z'=abz. \tag{10}$$

Допустим, что d' не равно нулю хотя бы для одной системы значений a, b. Тогда равенство (10) показывает, что $z\neq 0$, а это значит в свою очередь, что $d'\neq 0$, если только $ab\neq 0$, ибо z не зависит от выбора чисел a и b. Мы имеем, таким образом,

$$z'=\frac{ab}{2d'}z, \tag{11}$$

причем равенство это имеет смысл всегда, когда $ab\neq 0$. Следовательно,

$$ax+by=\frac{ab}{2d'}z+d'. \tag{12}$$

Так как z не зависит от чисел a и b и равенство (12) имеет смысл всегда, когда $ab\neq 0$, то из соотношения (12) можно получить два независимых уравнения, связывающих элементы x, y и z. Тогда, исключая из них z, получим соотношение $a'x+b'y=c'$, что противоречит исходному предположению. Таким образом, мы пришли к противоречию, допустив, что для некоторых чисел a и b число d' отлично от нуля. Это значит, что $d'\equiv 0$, и, таким образом, линейность множества I доказана.

Пусть теперь i и j—два таких элемента из K, что $i^2=-1$, $j^2=-1$, $k=ij\in I$. Покажем, что тогда элементы i, j, k линейно независимы относительно тела D^1 и образуют систему кватернионных единиц, т. е. удовлетворяют соотношениям (1).

Так как $ij\in I$, то ij можно представить в форме al, где $a\in D^1$ и $l^2=-1$. Мы имеем $(ij)(ji)=i(-1)i=1$. Таким образом, $ji=(al)^{-1}$. Элемент $(al)^{-1}$, как легко проверить, равен $-a^{-1}l$, следовательно, $ji=-a^{-1}l$. Так как I есть линейное множество, а элементы i и j принадлежат I, то $i+j\in I$. Таким образом, $(i+j)^2=i^2+j^2+ij+ji$

есть действительное число, а это значит, что и $ij+ji$ есть действительное число. Отсюда вытекает, что $\left(a-\frac{1}{a}\right)l\in D^1$, т. е. $a^2=1$, и, следовательно, для $k=al$ выполнено условие $k^2=-1$. Мы имеем, таким образом,

$$i^2=-1, \quad j^2=-1, \quad k^2=-1. \tag{13}$$

Возводя в степень -1 обе части равенства

$$ij=k, \tag{14}$$

получаем $j^{-1}i^{-1}=k^{-1}$, или, что то же (см. (13)), $ji=-k$. Умножая соотношение (14) слева на $-i$, получаем $j=-ik$. Остальные соотношения системы (1) получаются совершенно так же. Допустим теперь, что имеет место соотношение

$$bi+cj+dk=0 \tag{15}$$

с действительными коэффициентами. Умножая соотношение (15) слева на k, получаем $bj=ci+d$. Но в силу единственности разложения (4) имеем $d=0$, а это значит, что $bij=-c$, что в силу условия $(ij)^2=-1$ возможно лишь тогда, когда $b=c=0$. Таким образом, линейная независимость элементов i, j, k доказана.

Допустим теперь, что в множестве I всякие два элемента линейно зависимы относительно тела D^1. Тогда тело K изоморфно полю D^2 комплексных чисел. Действительно, выберем в I такой элемент i, что $i^2=-1$. Так как всякие два элемента множества I линейно зависимы, то в силу разложения (4) всякий элемент из K можно, и притом единственным образом, представить в форме $a+bi$, где a и b суть действительные числа, а это значит, что K изоморфно полю комплексных чисел.

Допустим, далее, что I содержит два элемента x и y, линейно независимых относительно поля D^1, и покажем, что тогда K содержит подтело D^4 кватернионов. Положим $xy=z+d$, где $z\in I$, $d\in D^1$ (см. (4)). Тогда можно подобрать такое действительное число a, что $ax^2=-d$, и для этого a мы будем иметь $x(y+ax)=z$. Так как x и y линейно независимы, то $x\neq0$ и $y'=y+ax\neq0$; при этом $y'\in I$, ибо множество I линейно. Нормируя x и $y'=y+ax$ действительными множителями, мы получим такие элементы i и j, что $i^2=-1$, $j^2=-1$, $ij=k\in I$. Тогда, как доказано, элементы i, j, k линейно независимы и удовлетворяют соотношениям (1). Таким образом, множество всех линейных форм вида $a+bi+cj+dk$ образует подтело тела K, изоморфное телу кватернионов.

Допустим, наконец, что тело K содержит подтело D^4 кватернионов, и покажем, что тогда $K=D^4$.

Пусть i, j, k—кватернионные единицы тела D^4. Если в теле K существуют элементы, не входящие в D^4, то найдется элемент $z\in I$, линейно независимый от единиц i, j, k. Положим

$$iz=d_1+z_1,\quad jz=d_2+z_2,\quad kz=d_3+z_3$$

(см. (4)). Положим, далее,

$$l=a(z+d_1i+d_2j+d_3k),$$

где a есть действительное число. Тогда в силу линейности множества I имеем: $il\in I$, $jl\in I$, $kl\in I$. Далее, так как I есть линейная система и z линейно независим от единиц i, j, k, то можно выбрать число a таким образом, чтобы $l^2=-1$. Тогда элементы i, l, il образуют систему кватернионных единиц (см. (13), (14)). В частности, $il=-li$, $(il)^2=-1$. То же самое справедливо и для элементов j, k, и мы получаем соотношения

$$(il)^2=(jl)^2=(kl)^2=-1,\quad il=-li,\quad jl=-lj,\quad kl=-lk. \tag{16}$$

Из соотношений (16) вытекает, что, с одной стороны,

$$(il)k=(-li)k=l(-ik)=lj, \tag{17}$$

а с другой стороны,

$$(il)k=i(lk)=i(-kl)=(-ik)l=jl. \tag{18}$$

Равенства (16), (17) и (18) дают $2jl=0$, что противоречит соотношению $(jl)^2=-1$. Таким образом, предположив, что $K\neq D^4$, мы пришли к противоречию.

Итак, предложение B) доказано.

Каждому простому числу p соответствует два непрерывных поля K_0^p и K_t^p со счетной топологической базой, однозначно определяемые числом p. Поле K_0^p есть *поле p-адических чисел*; поле K_t^p *есть поле рядов над полем P^p вычетов по модулю p*. Поля K_0^p и K_t^p весьма естественным образом гомеоморфны между собой и имеют некоторые другие черты сходства, поэтому их описание удобно провести одновременно.

C) Пусть R_0^p—топологическое поле рациональных чисел с обычными сложением и умножением и с полной системой окрестностей $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ нуля, причем V_n состоит из всех рациональных чисел вида $\frac{ap^n}{b}$, где a и b—целые числа, причем b не делится на p (здесь p—простое число, определяющее поле R_0^p). Оказывается, что поле R_0^p допускает непрерывное замыкание K_0^p (см. § 25, G)). Непрерывное поле K_0^p называется *полем p-адических чисел*. Пусть R_t^p—топологическое поле рациональных функций (см. § 7, G)) от неопределенного переменного t с коэффициентами из поля P^p вычетов по модулю p с обычными сложением и умножением и с полной системой окрестностей $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ нуля, причем V_n есть совокупность всех рациональных функций вида $\frac{a(t)t^n}{b(t)}$, где

$a(t)$ и $b(t)$—многочлены, причем $b(t)$ не делится на t. Оказывается, что поле R_t^p допускает непрерывное замыкание K_t^p. Непрерывное поле K_t^p называется *полем рядов над полем* P^p *вычетов по модулю* p.

Для доказательства предложения С) следует прежде всего проверить, что системы окрестностей, заданные в полях R_0^p и R_t^p, определяют в них топологии, при которых алгебраические операции непрерывны. Такая проверка не представляет труда и проводиться здесь не будет. Значительно сложнее доказательство того факта, что каждое из полей R_0^p и R_t^p допускает непрерывное замыкание. Это доказательство будет осуществлено непосредственным построением полей K_0^p и K_t^p.

Определим прежде всего топологическое пространство K^p, в котором далее будут заданы операции полей K_0^p и K_t^p. Множество K^p определим как совокупность всех формальных рядов вида

$$x=f(t)=\sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, \tag{19}$$

где t—неопределенное переменное, k—произвольное целое число, так что ряд (19) может содержать произвольное конечное число членов с отрицательными степенями, а a_i—целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant a_i < p$. Отрезок $\pi_n(x)$ ряда (19) определим как конечный ряд

$$\pi_n(x)=\sum_{i=k}^{n} a_i t^i. \tag{20}$$

Окрестность $U_n(a)$, $a \in K^p$, в пространстве K^p определим как совокупность всех $x \in K^p$, для которых $\pi_n(x)=\pi_n(a)$. Для окрестностей нулевого ряда введем отдельное обозначение, положив $U_n(0)=U_n$. Непосредственно проверяется, что система всех окрестностей $U_n(a)$, где n—произвольное целое число, а $a \in K^p$, счетна и действительно определяет топологию в множестве K^p (см. теорему 3). Видно при этом, что пространство K^p локально бикомпактно и вполне несвязно (см. § 15, D)). Локальная бикомпактность следует из того, что каждая окрестность $U_n(a)$ компактна и имеет счетный базис (см. пример 25).

Для введения операций сложения и умножения в K^p введем эти операции сначала в множестве S^p всех конечных рядов из K^p, которое, очевидно, всюду плотно в K^p. Пусть S_0^p—совокупность всех чисел из R_0^p, имеющих вид $\frac{a}{p^m}$, где $a \geqslant 0$ и m суть целые числа. Аналогично, обозначим через S_t^p множество всех рациональных функций из R_t^p, имеющих вид $\frac{a(t)}{t^m}$, где $a(t)$—многочлен, а m—целое число. Определим теперь отображение ω_δ множества S^p на множество S^p_δ, $\delta=0$, t. Для определения отображения ω_0 в конечном ряду $u=f(t)$ заменим неопределенное переменное t числом p и положим $\omega_0(u)=f(p)$. Для определения отображения ω_t в конечном ряду $u=f(t)$ заменим числа a_i (см. (19)) соответствующими им вычетами по модулю p; тогда мы получим рациональную функцию $f^*(t)$ переменного t над полем P^p вычетов по модулю p и положим $\omega_t(u)=f^*(t)$. Легко проверить, что ω_δ есть гомеоморфное отображение множества S^p на множество $S^p_\delta \subset R^p_\delta$, $\delta=0$, t. Непосредственно видно, что подмножество S^p_δ поля R^p_δ замкнуто относительно операций сложения и умножения, а S^p_δ—также и относительно операции вычитания, так что S^p_t есть подкольцо поля R^p_t. Перенося операции сложения и умножения, имеющиеся в S^p_δ, в множество S^p при помощи отображения ω_δ^{-1}, мы определим эти операции в множестве S^p, притом двумя способами: $\delta=0$, t. Оказывается, что операции эти, по непрерывности распространенные на все пространство K^p, превращают его либо в тело K^p_0, либо в тело K^p_t. Ниже следует доказательство того факта, что распространение операций, заданных в S^p, возможно и что в результате его мы получаем поля.

Пусть u и v—два элемента из S^p. Их сумма и произведение, определяемые при помощи отображения ω_δ, записываются в виде:

$$u+v=\omega_\delta^{-1}(\omega_\delta(u)+\omega_\delta(v)), \tag{21}$$

$$uv=\omega_\delta^{-1}(\omega_\delta(u)\omega_\delta(v)). \tag{22}$$

Займемся теперь распространением этих операций на все пространство K^p. Пусть $x \in K^p$; положим

$$\pi_n(x)=x_n. \tag{23}$$

Тогда, как легко видеть:

$$\pi_n(x_{n+1})=x_n, \tag{24}$$

и последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{25}$$

сходится к элементу x. Обратно, если задана последовательность (25) элементов из S^p, удовлетворяющая условию (24), то она сходится к некоторому элементу x из K^p, причем имеет место соотношение (23).

Пусть, далее,

$$\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n,\ \ldots \tag{26}$$

—последовательность функций одного или двух переменных из $M \cap S^p$ со значениями в S^p, где M—открыто-замкнутое подмножество пространства K^p. Будем считать, что для этих функций выполнены следующие условия:

$$\pi_n(\psi_{n+1}(u,\ v))=\psi_n(u,\ v), \tag{27}$$

$$\psi_n(u,\ v)=\psi_n(\pi_k(u),\ \pi_l(v)) \quad \text{при} \quad k\geqslant n+h, \quad l\geqslant n+h, \tag{28}$$

где h не зависит от u и v, $u\in M\cap S^p$, $v\in M\cap S^p$. Соотношение (28) показывает, что функция ψ_n непрерывна (и даже равномерно непрерывна, см. § 28, В)), а соотношение (27) указывает на то, что последовательность (26) сходится.

Исходя из последовательности функций (26), заданных на множестве $M\cap S^p$ и удовлетворяющих условиям (27), (28), мы построим непрерывную функцию ψ со значениями в K^p, заданную на множестве M и удовлетворяющую условию

$$\pi_n(\psi(u,\ v))=\psi_n(u,\ v); \quad u\in M\cap S^p, \quad v\in M\cap S^p. \tag{29}$$

Пусть x и y—два элемента множества M. Так как M—область, то при достаточно большом n элементы $\pi_n(x)$, $\pi_n(y)$ содержатся в M. Положим:

$$z_n=\psi_n(\pi_{n+h}(x),\ \pi_{n+h}(y)). \tag{30}$$

Мы имеем в силу (27), (28):

$$\pi_n(z_{n+1})=\pi_n(\psi_{n+1}(\pi_{n+h+1}(x),\ \pi_{n+h+1}(y)))=$$
$$=\psi_n(\pi_{n+h+1}(x),\ \pi_{n+h+1}(y))=z_n.$$

Таким образом, последовательность

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$$

сходится к некоторому элементу z (см. (24)), удовлетворяющему условию

$$\pi_n(z)=z_n.$$

Мы положим:

$$\psi(x,\ y)=z.$$

Соотношение (30) показывает, что n-е приближение z_n элемента z определяется $(n+h)$-ми приближениями элементов x и y, а это означает непрерывность функции ψ.

Операцию перехода от последовательности (26) к функции ψ используем теперь для построения в K^p непрерывных операций сложения и умножения, исходя из двух различных их заданий, при помощи отображений ω_δ, $\delta=0$, t (см. (21), (22)). Положим:

$$\psi_n(u,\ v)=\pi_n(u+v), \quad \text{где} \quad M=K^p, \quad h=0, \tag{31}$$

$$\psi'_n(u,\ v)=\pi_n(uv), \quad \text{где} \quad M=U_{-h} \tag{32}$$

Непосредственно проверяется, что функции ψ_n, ψ'_n, определенные этими равенствами, удовлетворяют условиям (27), (28) как в случае операций, определенных при помощи отображения ω_0, так и в случае операций, определенных при помощи отображения ω_t. Таким образом, операции сложения и умножения непрерывным образом распространяются с множества S^p на все пространство K^p. Так как на S^p они ассоциативны и дистрибутивны, то в силу непрерывности они ассоциативны и дистрибутивны также на K^p.

Перейдем теперь к построению операции вычитания. Для поля K_t^p это не представляет трудностей, так как S_t^p есть кольцо, и в нем определена операция вычитания, так что для этого случая достаточно положить

$$\psi_n(u) = -\pi_n(u).$$

Тогда предельная функция ψ удовлетворяет условию

$$x+\psi(x)=0, \quad x \in K^p,$$

так как функции ψ_n удовлетворяют условию

$$\pi_n(u)+\psi_n(u)=0.$$

Для отображения ω_0 дело обстоит сложнее, так как в множестве S_0^p операция вычитания не определена. Пусть $u \in S^p$. Положим $u_n = \pi_n(u)$, $u_n' = \omega_0(u_n)$. Число u_n', как легко видеть, не превосходит числа p^{n+1}, и потому для числа $w_n' = p^{n+1} - u_n'$ определен прообраз $w_n = \omega_0^{-1}(w_n')$. Положим $\psi_n(u) = \pi_n(w_n)$. Непосредственно видно, что число $w_{n+1}' - w_n'$ делится на p^{n+1}, а из этого следует, что $\pi_n(\pi_{n+1}(w_{n+1})) = \pi_n(w_n)$, и потому последовательность функций ψ_n удовлетворяет условию (27). Условие (28) для нее также выполнено, так как по самому построению элемент w_n' зависит лишь от элемента $\pi_n(u)$. Так как число $u_n' + w_n'$ делится на p^{n+1}, то элемент $\pi_n(u)+\psi_n(u)$ принадлежит окрестности U_{n+1} нуля:

$$\pi_n(u)+\psi_n(u) \in U_{n+1}.$$

Для предельной функции это дает:

$$\pi_n(x)+\pi_n(\psi(x)) \in U_{n+1}, \quad x \in K^p.$$

Таким образом, $x+\psi(x)=0$. Итак, в множестве K_0^p имеется непрерывная операция вычитания. Из сказанного также видно, что каждый элемент множества $-S_0^p$ является предельным для множества S_0^p.

Покажем, наконец, что в топологическом кольце K_δ^p, $\delta = 0, t$, для каждого элемента $x \neq 0$ имеется обратный элемент x^{-1}, причем он непрерывно зависит от x. Построение будем вести одновременно для обоих отображений ω_0 и ω_δ. Обозначим через M множество всех целых рядов $x \in K^p$ с отличными от нуля свободными членами. Множество M, очевидно, является открыто-замкнутым. Каждый элемент $x^* \neq 0$ из K^p может быть записан в виде $t^k x$, $x \in M$. Если для элемента $x \in M$ существует обратный элемент x^{-1}, то для элемента $t^k x$ обратным служит элемент $t^{-k}x^{-1}$. Из непрерывности элемента x^{-1}, $x \in M$, следует непрерывность элемента $t^{-k}x^{-1}$, так как все элементы, принадлежащие некоторой окрестности элемента $t^k x$, имеют одинаковое k. Таким образом, нам достаточно рассмотреть элементы $x \in M$. Пусть $u \in M \cap S^p$. Положим $u_n = \pi_n(u)$, $u'_n = \omega_\delta(u_n)$, $t'_{n+1} = \omega_\delta(t^{n+1})$. Так как в случае $\delta = 0$ числа u'_n и t'_{n+1} взаимно просты, а в случае $\delta = t$ многочлены u'_n и t'_{n+1} взаимно просты, то в обоих случаях имеется решение неопределенного уравнения

$$u'_n w'_n + t'_{n+1} s'_n = 1. \tag{33}$$

Здесь при $\delta = 0$ величины w'_n и s'_n суть целые числа, причем число w'_n можно считать положительным. При $\delta = t$ величины w'_n и s'_n являются многочленами из R_t^p. Положим $w_n = w_\delta^{-1}(w'_n)$, $\psi_n(u) = \pi_n(w_n)$, где $u \in M \cap S^p$, и покажем, что выполнено условие (27). Мы имеем $u'_{n+1} = u'_n + a t'_{n+1}$, где a — целое число или соответственно вычет по модулю p. Таким образом, имеем:

$$(u'_n + a t'_{n+1})\, w'_{n+1} + t'_{n+2} s'_{n+1} = 1. \tag{34}$$

Вычитая равенство (33) из равенства (34), получаем:

$$u'_n (w'_{n+1} - w'_n) = t'_{n+1} s_n - a t'_{n+1} w'_{n+1} - t'_{n+2} s'_{n+1},$$

а так как u'_n взаимно просто с t'_{n+1}, то $w'_{n+1} - w'_n$ делится на t'_{n+1}. Из этого вытекает, что $\pi_n(w_{n+1}) = \pi_n(w_n)$. Таким образом, последовательность функций ψ_n удовлетворяет условию (27). Условие (28) также выполнено, так как элемент w'_n по самому определению зависит лишь от элемента u_n. Применяя к соотношению (33) отображение $\pi_n w_\delta^{-1}$, получаем:

$$\pi_n(\pi_n(u)\psi_n(u)) = 1, \quad n \geqslant 1. \tag{35}$$

Пусть теперь x — произвольный элемент из M; полагая $u = \pi_n(x)$, получаем из (35):

$$\pi_n(\pi_n(x)\pi_n(\psi(x))) = 1.$$

Предельный переход дает (см. (32)):

$$x\psi(x) = 1.$$

Таким образом, обратный элемент существует и непрерывен. Из сказанного также видно, что каждый элемент множества $(S_\delta^p \setminus 0)^{-1}$ является предельным для множества S_δ^p, а из этого следует, что множество S_δ^p всюду плотно в теле R_δ^p.

Итак, построено непрерывное поле K_δ^p, и ω_δ^{-1} есть гомеоморфное отображение множества S_δ^p на множество $S^p \subset K_\delta^p$, сохраняющее операции сложения и умножения. В случае $\delta = t$ множество S_δ^p есть подкольцо поля R_t^p, и мы положим $T_t = S_t^p$ и $\omega_t^{-1} = f_t$. В случае

$\delta=0$ множество S_δ^p не является подкольцом, но его легко дополнить до кольца, положив $T_0=S_0^p\cup(-S_0^p)$. Определенное таким образом множество T_0 является подкольцом поля R_0^p. Отображение ω_0^{-1} множества S_0^p можно дополнить до изоморфного отображения f_0 топологического кольца T_0 в тело K_0^p. Именно, при $x\in S_0^p$ положим $f_0(x)=\omega_0^{-1}(x)$, $f_0(-x)=-\omega_0^{-1}(x)$. Непосредственно проверяется, что построенное отображение f_0 есть изоморфное отображение топологического кольца T_0 в тело K_0^p. Так как кольцо T_δ всюду плотно в R_δ^p, то в силу предложения F) § 25 имеется единственное изоморфное отображение φ поля R_δ^p в поле K_δ^p. Так как, далее, множество S^p всюду плотно в K^p, то поле K_δ^p является непрерывным замыканием поля R_δ^p (см. § 25, G)).

Итак, предложение C) доказано.

Пример 47. Пусть D^4—тело кватернионов, I—совокупность всех чисто мнимых кватернионов и

$$u=u_1i+u_2j+u_3k,\quad v=v_1i+v_2j+v_3k$$

—два чисто мнимых кватерниона. Непосредственные вычисления показывают, что их произведение uv выражается формулой

$$uv=-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_2v_3-u_3v_2)i+\\+(u_3v_1-u_1v_3)j+(u_1v_2-u_2v_1)k.$$

Это соотношение явилось исходным для введения *скалярного произведения* (u, v) и *векторного произведения* $[u, v]$ двух векторов u и v трехмерного векторного пространства I, определяемых формулами

$$(u,\ v)=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$
$$[u,\ v]=(u_2v_3-u_3v_2)i+(u_3v_1-u_1v_3)j+(u_1v_2-u_2v_1)k.$$

Таким образом, для произведения uv мы имеем:

$$uv=-(u,\ v)+[u\ \ v]$$

§ 27. Структура непрерывных тел

В настоящем параграфе дается весьма полное исследование непрерывных тел (см. § 25, G)). Наиболее законченный результат относится к связным телам. Соответствующая теорема принадлежит мне [34]; она утверждает, что всякое локально бикомпактное связное тело изоморфно или полю действительных чисел, или полю комплексных чисел, или телу кватернионов. Для произвольных непрерывных тел (без предположения связности) имеет место теорема 22, принадлежащая Ковальскому [19], которая весьма полно, хотя и не до конца, вскрывает структуру непрерывных тел. В основном доказательство, изложенное здесь, следует пути, данному в моей работе [34]; кроме того, здесь использованы некоторые остроумные построения, заимствованные из работы [19] и позволяющие распространить мое доказательство на несвязные тела. В заключение (см. пример 48) дается изложение работы А. Н. Колмогорова [18], содержащей применение теоремы 21 к аксиоматике проективной геометрии.

Теорема 21. *Всякое связное локально бикомпактное топологическое тело изоморфно топологическому полю действительных чисел, топологическому полю комплексных чисел или топологическому телу кватернионов.*

Доказательство. Так как всякое тело содержит по крайней мере два элемента: нуль и единицу, то, будучи связным, оно не может быть дискретным. Таким образом, связное локальное бикомпактное тело является непрерывным, и потому теорема 21 непосредственно вытекает из нижеследующей теоремы 22 и доказанной в предыдущем параграфе теоремы Фробениуса (см. § 26, B)).

Теорема 22. *Пусть K—непрерывное тело* (см. § 25, G)). *Если тело K имеет характеристику нуль, то в нем содержится простое поле P^0, изоморфное полю рациональных чисел, если же тело K имеет характеристику $p>1$, то в нем содержится простое поле P^p, изоморфное полю вычетов по модулю p* (см. § 7, F)). *Оказывается, что возможны три различных взаимно исключающих друг друга случая:*

1) *Тело K имеет характеристику нуль, и замыкание $D^1=\overline{P^0}$ поля P^0 в K изоморфно топологическому полю действительных чисел. В этом случае тело K связно.*

2) *Тело K имеет характеристику нуль, и замыкание $K_0^p=\overline{P^0}$ поля P^0 в K изоморфно полю p-адических чисел* (см. § 26, C)). *В этом случае тело K несвязно.*

3) *Тело K имеет характеристику $p>1$. В этом случае пусть t—произвольный отличный от нуля элемент тела K, последовательность $t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ степеней которого сходится к нулю. (Такие элементы в теле K имеются.) Оказывается, что элемент t является трансцендентным относительно поля P^p, и потому в теле K содержится подтело $P^p(t)$ рациональных функций элемента t с коэффициентами из P^p* (см. § 7, G)). *Оказывается, что замыкание $K_t^p=\overline{P^p(t)}$ поля $P^p(t)$ в теле K изоморфно полю рядов над полем P^p* (см. § 26, C)). *В этом случае тело K несвязно.*

В каждом из трех перечисленных случаев обозначим через K^* имеющееся в K поле D^1, K_0^p или K_t^p. Очевидно, что в случаях 1) и 2) подполе K^* является центральным. Оказывается, что во всех трех случаях тело K является конечным расширением над полем K^*, т. е. существует такая конечная система $x_1=e, x_2, \ldots, x_r$ элементов тела K, что каждый элемент $x \in K$ однозначно записывается *в виде*

$$x=a_1x_1+\ldots+a_rx_r,$$

где коэффициенты $a_1, \ldots, a_r$ *суть элементы поля* K^*.

Доказательство теоремы 22 вполне элементарно, но сравнительно сложно; оно опирается на ряд вспомогательных предложений. Их мы прежде всего и установим. Доказательство самой теоремы 22 будет дано как заключительный этап всего построения.

A) Всякое топологическое тело K либо связно, либо вполне несвязно (см. § 15, D)).

Докажем это. Допустим, что топологическое тело K не является вполне несвязным; тогда компонента нуля L в нем содержит элемент $a\neq 0$. Если b—произвольный отличный от нуля элемент из K, то связное множество $L'=ba^{-1}L$ содержит нуль и точку b. Таким образом, пространство K связно.

Лемма 1. *Пусть K—непрерывное тело. Оказывается, что пространство K имеет в каждой точке счетный базис* (см. § 9, B')). *Таким образом, в K существуют последовательности элементов, отличных от нуля, сходящиеся к нулю* (см. § 25, E)). *Пусть*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

—такая последовательность. Оказывается, что если F—произвольное компактное подмножество пространства K, а W—произвольная окрестность нуля, то существует настолько большое натуральное число ν, что

$$Fa_n\subset W,\quad a_nF\subset W\quad \text{при } n\geqslant\nu. \tag{2}$$

Из этого следует, что замкнутое компактное подмножество F пространства K бикомпактно. Далее, из этого следует, что если U есть окрестность нуля с компактным замыканием, то последовательность

$$Ua_1,\ \ldots,\ Ua_n,\ \ldots \tag{3}$$

является полной системой окрестностей нуля. Наконец, последовательность

$$a_1^{-1},\ \ldots,\ a_n^{-1},\ \ldots \tag{4}$$

расходится, т. е. не имеет предельных точек в K, так что пространство K некомпактно.

Доказательство. Пусть W—произвольная окрестность нуля в K, E—произвольное его бикомпактное множество. Найдем такую окрестность V нуля в K, что

$$EV\subset W. \tag{5}$$

Так как $x0=0$, то в силу непрерывности умножения для каждой точки $x\in E$ существуют такие окрестности V_x и V'_x элементов 0 и x, что $V'_xV_x\subset W$. Из покрытия $\{V'_x\}$, $x\in E$, множества E выберем конечное покрытие $V'_{x_1}, \ldots, V'_{x_m}$ множества E. Очевидно, что для пересечения $V=V_{x_1}\cap \ldots \cap V_{x_m}$ выполнено включение (5).

Так как тело K не дискретно, то существует в нем счетное множество элементов, отличных от нуля, имеющее нуль предельной точкой. Пусть $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ — такое множество. Пусть, далее, U — произвольная окрестность нуля с бикомпактным замыканием. Покажем, что совокупность окрестностей $Ub_1, \ldots, Ub_n, \ldots$ нуля составляет базис в нуле. Действительно, пусть W — произвольная окрестность нуля, $E=\overline{U}$ и V — такая окрестность нуля, что для нее выполнено соотношение (5). Так как нуль есть предельная точка множества $\{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$, то в V найдется точка b_m этого множества, и мы имеем $Ub_m\subset W$. Таким образом, доказано, что в K нуль, а потому и каждая точка имеют счетный базис.

Пусть теперь (1) — последовательность отличных от нуля элементов тела K, сходящаяся к нулю. Покажем, что для произвольной окрестности W нуля в K и произвольного компактного его подмножества F существует такое натуральное число ν, что имеют место включения (2). Проведем доказательство от противного. Допустим, что числа ν не существует; тогда для каждого номера n найдется элемент $c_n\in F$, удовлетворяющий условию $c_n a_n\notin W$. Так как множество F компактно и каждая его точка имеет счетный базис, то из последовательности $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что сама последовательность $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ сходится к элементу $c\in F$. Тогда в силу непрерывности умножения мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} c_n a_n = c0=0$, что невозможно, так как все точки $c_n a_n$ лежат вне W. Так же доказывается второе из включений (2).

Пусть теперь W — окрестность с бикомпактным замыканием и F — замкнутое компактное множество. Тогда для некоторого номера n мы имеем $Fa_n\subset W$. Так как множество F гомеоморфно множеству Fa_n, а последнее бикомпактно, будучи замкнутым подмножеством бикомпактного множества $\overline{W}$, то и множество F бикомпактно.

Пусть теперь U — окрестность с бикомпактным замыканием. Для достаточно большого номера n мы имеем $\overline{U}a_n\subset W$, а из этого следует, что последовательность (3) составляет базис в точке нуль.

Наконец, докажем, что последовательность (4) не имеет предельной точки. Если бы предельная точка последовательности (4) существовала, то можно было бы выбрать из нее подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу d. Можно просто считать, что последовательность (4) сама сходится к d. Мы имеем в силу непрерывности умножения $e=\lim\limits_{n\to\infty} a_n a_n^{-1}=0\ d=0$, что невозможно.

Итак, лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть K — непрерывное тело. Для каждого элемента $x \in K$ составим последовательность его целых положительных степеней:*

$$x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{6}$$

Множество всех таких элементов x, для которых последовательность (6) сходится к нулю, обозначим через A. Множество всех таких элементов x, для которых последовательность (6) расходится, т. е. не имеет предельных точек, обозначим через C. Наконец, множество всех таких элементов x, для которых последовательность (6) не имеет ни подпоследовательностей, сходящихся к нулю, ни расходящихся подпоследовательностей, обозначим через B. Оказывается, что

$$K = A \cup B \cup C. \tag{7}$$

Далее оказывается, что A есть окрестность нуля с бикомпактным замыканием $\bar{A}$, множество B бикомпактно, а C — область. Наконец, оказывается, что если последовательность

$$a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{8}$$

расходится, то последовательность

$$a_1^{-1},\ \ldots,\ a_n^{-1},\ \ldots \tag{9}$$

сходится к нулю. Из этого следует, что

$$C^{-1} = A \setminus 0, \quad B^{-1} = B. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть U — окрестность нуля, замыкание которой бикомпактно и не содержит единицы e, и пусть $F = \bar{U} \cup e$. Покажем, что если некоторая целая положительная степень x^k элемента x удовлетворяет условию

$$Fx^k \subset U, \tag{11}$$

то последовательность (6) сходится к нулю. Покажем для этого, что если элемент x удовлетворяет условию (11), то при произвольном целом положительном числе n мы имеем:

$$Fx^{nk} \subset U. \tag{12}$$

Соотношение (12) докажем индуктивно. Будем считать, что оно верно для данного n; тогда, умножая соотношение (12) на x^n, получаем:

$$Fx^{(n+1)k} \subset Ux^k \subset Fx^k \subset U.$$

Так как $e \in F$, то из (12) следует:

$$x^{nk} \in U.$$

Таким образом, последовательность

$$x^k,\ x^{2k},\ \ldots,\ x^{nk},\ \ldots \tag{13}$$

имеет в $\overline{U}$ предельный элемент c. Этот элемент не может быть отличен от нуля. Действительно, если бы было $c\neq 0$, то, так как в произвольной близости от c имеются сколь угодно большие степени x^{nk} элемента x^k, мы из непрерывности деления в K заключили бы, что произвольно большая положительная степень x^{mk} элемента x^k близка к единице e, а это невозможно, так как $x^{mk}\in\overline{U}$, а $e\notin\overline{U}$. Итак, последовательность (13) сходится к нулю. Умножая последовательность (13) на степени $x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{k-1}$ элемента x, мы убеждаемся, что и последовательность (6) сходится к нулю.

Если теперь последовательность (6) сходится к нулю, то существует настолько большая положительная степень x^k элемента x, что выполнено включение (11) (см. (2)). Таким образом, элемент x тогда и только тогда принадлежит множеству A, когда существует натуральное число k, для которого имеет место включение (11).

Покажем теперь, что если элемент x удовлетворяет условию (11), то и все элементы некоторой окрестности V элемента x удовлетворяют условию (11). Для всякого элемента $z\in F$ найдутся такая окрестность V'_z элемента z и такая окрестность V_z элемента x, что $V'_zV_z^k\subset U$. Из покрытия $\{V'_z\}$, $z\in F$, бикомпактного множества F выберем конечное покрытие $V'_{z_1},\ \ldots,\ V'_{z_m}$. Очевидно, что для всякого элемента $y\in V_{z_1}\cap\ldots\cap V_{z_m}$ выполнено условие $Fy^k\subset U$. Таким образом, установлено, что A есть окрестность нуля.

Пусть t—отличный от нуля элемент из K, удовлетворяющий условиям

$$Ft\subset U,\quad tF\subset U. \tag{14}$$

Из доказанного следует, что последовательность целых положительных степеней элемента t сходится к нулю, а последовательность целых отрицательных степеней расходится (см. лемму 1). Если теперь a—произвольный отличный от нуля элемент из K, то элемент at^n не принадлежит $\overline{U}$ при достаточно большом отрицательном n и принадлежит $\overline{U}$ при достаточно большом положительном n. Существует поэтому такое целое число r, что элемент at^n не принадлежит $\overline{U}$ при $n<r$ и принадлежит $\overline{U}$ при $n=r$. Таким образом, $r=r(a)$ есть целое число, удовлетворяющее условию

$$at^{r(a)}\in\overline{U}\diagdown\overline{U}t. \tag{15}$$

Точно так же существует целое число $s(a)$, удовлетворяющее условию

$$t^{s(a)}\in\overline{U}\diagdown t\overline{U}. \tag{16}$$

Покажем теперь, что если последовательность (8) расходится, то последовательность (9) обратных элементов сходится к нулю. Непосредственно видно, что последовательность (9) не может иметь предельную точку, отличную от нуля. Таким образом, нам нужно доказать, что последовательность (9) не может содержать расходящуюся подпоследовательность. Переходя к подпоследовательности, мы можем ограничиться доказательством невозможности того, что последовательность (9) является расходящейся. Так как последовательность (8) расходится, то последовательность чисел $r_n=r(a_n)$ (см. (15)) неограниченно возрастает. Если допустить, что последовательность (9) расходится, то последовательность целых чисел $s_n=s(a_n^{-1})$ (см. (16)) также неограниченно возрастает. Положим:

$$b_n=a_nt^{r_n}, \quad c_n=t^{s_n}a_n^{-1}. \tag{17}$$

Все элементы $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ принадлежат к $\overline{U}\setminus Ut$, и потому из последовательности $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу b, отличному от нуля. Для простоты будем считать, что последовательность $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ сходится к $b\neq 0$. Точно так же можно считать, что последовательность $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ сходится к элементу $c\neq 0$. Мы имеем:

$$c_nb_n=t^{r_n+s_n}$$

(см. (17)). Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем невозможное равенство $cb=0$. Итак, доказано, что если последовательность (8) расходится, то последовательность (9) обратных элементов сходится к нулю.

Из этого следует, что $C^{-1}\subset A\setminus 0$. Равенство $C^{-1}=A\setminus 0$ следует из леммы 1.

Покажем теперь, что каждый элемент x из K принадлежит одному из трех множеств A, B, C. Действительно, если в последовательности (6) степеней элемента x содержится подпоследовательность, сходящаяся к нулю, то найдется такая положительная степень x^k элемента x, что выполнено включение (11), и тогда, по доказанному, $x\in A$. Если в последовательности (6) степеней элемента x имеется расходящаяся подпоследовательность, то, переходя к обратным элементам, мы получаем $x^{-1}\in A$, т. е. $x\in C$. Таким образом, если элемент x не принадлежит ни A, ни C, то он принадлежит B.

Так как множество $A\setminus 0$ открыто, то множество $C=(A\setminus 0)^{-1}$ также открыто. Таким образом, множество B замкнуто. Докажем, наконец, что множество $A\cup B$ компактно (а следовательно, и бикомпактно, см. лемму 1); этим доказательство леммы будет закончено.

Допустим, что в множестве $A\cup B$ имеется расходящаяся последовательность (8). Тогда, по доказанному, последовательность (9) обратных элементов сходится к нулю, и потому найдется элемент a_n^{-1}, принадлежащий A, а элемент a_n должен принадлежать C. Таким образом, мы пришли к противоречию с первоначальным предположением, что $a_n \in A \cup B$.

Итак, лемма 2 доказана.

B) Пусть L—топологическое тело, допускающее непрерывное замыкание (см. § 25, G)), A—множество всех таких его элементов x, для которых последовательность $x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ сходится к нулю. Из леммы 2 следует, что A есть окрестность нуля в L; ее мы будем называть *главной окрестностью* тела L. Оказывается, что главная окрестность топологического тела, допускающего непрерывное замыкание, однозначно определяет его топологию. Более полно: пусть L и L'—два топологических тела, допускающих непрерывное замыкание, а A и A'—их главные окрестности; оказывается, что если f есть изоморфное отображение алгебраического тела L на алгебраическое тело L', причем $f(A)=A'$, то f есть гомеоморфизм и потому является изоморфным отображением топологического тела L на топологическое тело L'.

Докажем это.

Пусть c—произвольный элемент из A. Тогда последовательность $c, c^2, \ldots, c^n, \ldots$ сходится к нулю. Так как, далее, топологическое тело L можно рассматривать как подтело непрерывного тела K, то в силу лемм 1 и 2 последовательность $Ac, Ac^2, \ldots, Ac^n, \ldots$ составляет полную систему окрестностей нуля в L. Пусть, далее, $c'=f(c)$; тогда $c' \in A'$, и потому последовательность $c', c'^2, \ldots, c'^n, \ldots$ сходится к нулю. Таким образом, последовательность $A'c', \ldots, A'c'^n, \ldots$ составляет полную систему окрестностей нуля тела L'. Так как $f(Ac^n)=A'c'^n$, то отображение f взаимно непрерывно в нуле, а так как тела L и L' суть топологические группы по сложению и f есть изоморфизм, то в силу предложения A) § 20 отображение f есть гомеоморфизм пространства L на пространство L'.

C) Пусть P^0—топологическое поле рациональных чисел с топологией, индуцированной в нем полем действительных чисел, R_0^p—топологическое поле рациональных чисел с p-адической топологией (см. § 26, C)) и, наконец, R_t^p—топологическое поле рациональных функций неопределенного переменного t над полем P^p вычетов по модулю p с топологией, определенной в нем в предложении C) § 26. Все три поля P^0, R_0^p, R_t^p допускают непрерывные замыкания (см. § 26, C)). Непосредственно проверяется, что: a) главная окрестность поля P^0 состоит из всех рациональных чисел r, удовлетворяющих условию $|r|<1$; b) главная окрестность поля R_0^p состоит из всех рациональных чисел r вида $r=\frac{ap}{b}$, где a—произвольное целое число, а b—натуральное число, взаимно простое с p;

c) главная окрестность поля R_t^p состоит из всех рациональных функций r вида $\frac{at}{b}$, где a—произвольный многочлен из R_t^p, а b—произвольный многочлен из R_t^p, не делящийся на t.

D) Пусть A, B и C—множества непрерывного тела K, определенные в лемме 2, а x и y—два перестановочных между собой элемента тела K (т. е. $xy=yx$). Тогда

$$\text{если } x\in A, \quad y\in A, \quad \text{то} \quad xy\in A, \tag{18}$$

$$\text{если } x\in A, \quad y\in B, \quad \text{то} \quad xy\in A, \tag{19}$$

$$\text{если } x\in B, \quad y\in B, \quad \text{то} \quad xy\in B, \ y^{-1}\in B, \tag{20}$$

$$\text{если } x\in C, \quad y\in B, \quad \text{то} \quad xy\in C, \tag{21}$$

$$\text{если } x\in C, \quad y\in C, \quad \text{то} \quad xy\in C. \tag{22}$$

Соотношения (18)—(22) непосредственно вытекают из определения множеств A, B, C (см. лемму 2).

Лемма 3. *Всякое связное непрерывное тело K имеет характеристику нуль; замыкание $\overline{P^0}$ простого подполя P^0 тела K* (см. § 7, F)) *изоморфно полю действительных чисел.*

Доказательство. Здесь будут использованы множества A, B, C, введенные в лемме 2. Положим:

$$A_n = nA = A + A + \ldots + A, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

(см. § 2, A)). Так как A есть область, то A_n также есть область. Непосредственно проверяется, что

$$n\overline{A} = \overline{A}_n. \tag{24}$$

Так как множество $\overline{A}$ бикомпактно, то и множество $\overline{A}_n$ также бикомпактно. Так как тело K некомпактно и связно, а множество $\overline{A}_n$ компактно, то граница $\dot{A}_n$ области A_n, определяемая равенством

$$\dot{A}_n = \overline{A}_n \setminus A_n, \tag{25}$$

не пуста. Из самого определения (23) множества A_n следует, что

$$A_m + A_n = A_{m+n}, \tag{26}$$

$$\overline{A}_m + \overline{A}_n = \overline{A}_{m+n}. \tag{27}$$

Покажем, что

$$\overline{A}_m + A_n = A_{m+n}. \tag{28}$$

Действительно, пусть $x\in\overline{A}_m$, $y\in A_n$, а V—такая окрестность нуля, что $y - V \subset A_n$. Так как $x\in\overline{A}_m$, то в V найдется такой элемент v, что $x+v\in A_m$, и мы имеем $x+y=(x+v)+(y-v)\in A_m+A_n=A_{m+n}$. Таким образом, соотношение (28) доказано.

Покажем, что для каждого натурального числа $m \geqslant 2$ имеется в множестве $\overline{A}$ элемент ω_m, удовлетворяющий условию

$$m\omega_m \in K \setminus \overline{A}_{m-1}. \tag{29}$$

Для построения элемента ω_m выберем настолько малую окрестность U нуля, что

$$mU \subset A. \tag{30}$$

Из покрытия множества $\overline{A}$ областями вида $a+U$, $a \in \overline{A}$, выберем конечное покрытие $a_1+U, \ldots, a_k+U$. Пусть теперь $n=km$ и $z \in \dot{A}_n$. Тогда

$$z=x_1+x_2+\ldots+x_n; \quad x_j \in \overline{A}, \qquad j=1, \ldots, n. \tag{31}$$

Так как число элементов x_j равно $n=km$, а число областей a_q+U, покрывающих множество $\overline{A}$, равно k, то среди покрывающих областей найдется хоть одна область, например a_1+U, содержащая по крайней мере m элементов x_j, $j=1, \ldots, n$; пусть эти элементы будут $x_1, \ldots, x_m$. Из соотношений

$$x=x_1+\ldots+x_m \in \overline{A}_m,$$

$$y=x_{m+1}+\ldots+x_n \in \overline{A}_{n-m},$$

$$x+y=z \notin A_n$$

в силу соотношения (28) следует, что

$$x \in \dot{A}_m. \tag{32}$$

Далее, мы имеем $x_i=a_1+u_i$, $u_i \in U$, $i=1, \ldots, m$. Из этого и из (32) получаем:

$$ma_1+u \in \dot{A}_m, \tag{33}$$

где $u=u_1+\ldots+u_m$, $u_i \in U$, так что

$$u \in A. \tag{34}$$

Отсюда в силу (28) следует правильность соотношения (29) для $\omega_m=a_1$. Из доказанного уже следует, что тело K имеет характеристику нуль. В самом деле, из (29) вытекает, что

$$me\omega_m=m\omega_m \neq 0.$$

Таким образом, элемент me, где $m \geqslant 2$—натуральное число, всегда отличен от нуля, а это и значит, что характеристика тела K равна нулю. Таким образом, тело K содержит простое подтело P^0, состоящее из элементов вида re, где r—рациональное число. Покажем, что главная окрестность поля $P^0 \subset K$ состоит из всех элементов вида re, $|r|<1$. Из этого следует, что топологическое поле $\overline{P^0}$ изоморфно полю действительных чисел (см. § 25, G)). Пусть

m и n—натуральные числа; покажем, что при $m>n$ имеем:

$$\frac{m}{n} e \in C \tag{35}$$

(см. лемму 2). Допустим противоположное, т. е. что $\frac{m}{n} e \in A \cup B$. Так как элемент $\frac{m}{n} e$ перестановочен с каждым элементом из A, то $A \cdot \frac{m}{n} e \subset A$ (см. D)) и потому $\overline{A} \cdot \frac{m}{n} e \subset \overline{A}$. Таким образом, получаем:

$$\omega_m \cdot \frac{m}{n} e \in \overline{A}. \tag{36}$$

Из равенства (36) умножением его на n получаем:

$$m\omega_m \in \overline{A}_n,$$

что невозможно в силу (29), так как $\overline{A}_n \subset \overline{A}_{m-1}$. Итак, соотношение (35) доказано. Из него следует, что элемент re принадлежит множеству A тогда и только тогда, когда $|r|<1$ (см. лемму 2). Итак, лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если непрерывное вполне несвязное тело K имеет характеристику нуль, то замыкание $K_0^p = \overline{P}^0$ его простого подполя P^0 изоморфно полю p-адических чисел* (см. § 26, C)). *Простое число p однозначно определено телом K.*

Доказательство. Здесь будут использованы множества A, B, C, введенные в лемме 2. Пусть G—бикомпактная открытая подгруппа аддитивной топологической группы K, содержащаяся в окрестности A нуля (см. теорему 16). Кольцо всех целочисленных кратных единицы e тела K обозначим через Z. Пусть $a \neq 0$—произвольный элемент из G; так как G есть подгруппа, то все элементы $ma=(me)a$, где m—целое число, принадлежат G. Таким образом, множество Za содержится в G, а из этого следует, что кольцо Z содержится в компактном множестве Ga^{-1}. Если бы кольцо Z содержало хоть один элемент me, принадлежащий множеству C, то степени этого элемента, также входящие в кольцо Z, составляли бы расходящуюся последовательность (см. лемму 2), а это невозможно, так как кольцо Z содержится в компактном множестве Ga^{-1}. Таким образом,

$$Z \subset A \cup B. \tag{37}$$

Покажем теперь, что существует одно и только одно простое число p, удовлетворяющее условию

$$pe \in A. \tag{38}$$

Так как множество $A \cup B$ компактно, то из включения (37) следует, что у элементов кольца Z имеются предельные точки, а потому и точка нуль является предельной для Z. Таким образом, множество $A \cap Z$ содержит элементы, отличные от нуля. Пусть m—такое натуральное число, что $me \in A$, и пусть $m=m_1m_2$—его разложение на натуральные множители, отличные от единицы. Так как элементы m_1e и m_2e оба принадлежат $A \cup B$ (см. (37)), а их произведение me принадлежит A, то один из множителей m_1e или m_2e должен также принадлежать множеству A (см. (20)). Таким образом, существует простое число p, удовлетворяющее условию (38). Допустим, что существует отличное от p простое число q, удовлетворяющее условию $qe \in A$. Так как оба элемента pe и qe принадлежат A, то существует настолько большое натуральное число n, что элементы p^ne и q^ne принадлежат окрестности G нуля тела K. Так как G есть группа по сложению, то наряду с элементами p^ne и q^ne она содержит также и всякий элемент вида

$$\mu p^n e + \nu q^n e,$$

где μ и ν—произвольные целые числа. Подбирая числа μ и ν так, чтобы было $\mu p^n + \nu q^n = 1$, что возможно, так как числа p^n и q^n взаимно просты, мы приходим к невозможному включению $e \in G \subset A$. Итак, существует одно и только одно простое число p, удовлетворяющее условию (38).

Из доказанного непосредственно следует (см. (18), (19), (20), (37)), что элемент me кольца Z тогда и только тогда принадлежит A, когда целое число m делится на p. Точно так же элемент $\frac{cp^ke}{d}$, где c и d—целые числа, взаимно простые с p, принадлежит множеству A при $k>0$, множеству B при $k=0$ и множеству C при $k<0$. Таким образом, главная окрестность $A \cap P^0$ топологического тела P^0 состоит из всех элементов $\frac{ape}{b}$, где a и $b>0$—целые числа и b взаимно просто с p. Из этого следует, что замыкание $\overline{P^0}$ простого подполя $P^0 \subset K$ изоморфно полю p-адических чисел (см. C)).

Итак, лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если непрерывное тело K имеет характеристику $p \neq 0$. то каждый отличный от нуля элемент $t \in A$ является трансцендентным над простым полем P^p, и замыкание K_t^p поля $P^p(t)$ изоморфно полю рядов над полем P^p* (см. § 26, C)).

Доказательство. Доказательство леммы 5 сходно с доказательством леммы 4. Так как связное тело всегда имеет характеристику нуль (см. лемму 3), то тело K вполне несвязно (см. A)), и потому существует бикомпактная открытая подгруппа G аддитивной группы K, содержащаяся в окрестности A нуля (см. теорему 16).

Заметим прежде всего, что если ξ и η—два элемента некоторого поля характеристики $p \neq 0$, то

$$(\xi+\eta)^p = \xi^p + \eta^p. \tag{39}$$

Равенство (39) получается путем развертывания левой его части по формуле бинома Ньютона и учета того обстоятельства, что коэффициенты в этой формуле делятся на простое число p. Возводя соотношение (39) повторно в степень p, получаем:

$$(\xi+\eta)^{p^l}=\xi^{p^l}+\eta^{p^l}. \tag{40}$$

Далее, если ξ, η, ζ суть три элемента поля характеристики p, то в силу (40) имеем:

$$(\xi+\eta+\zeta)^{p^l}=\xi^{p^l}+\eta^{p^l}+\zeta^{p^l}. \tag{41}$$

Та же формула верна и для произвольного числа элементов поля характеристики p.

Пусть t—произвольный отличный от нуля элемент множества A и $P^p[t]$—кольцо всех многочленов от t с коэффициентами из P^p. Пусть $\varphi(x)$—многочлен относительно неопределенного переменного x с коэффициентами из P^p. Покажем, что элемент $\varphi(t)$ тела K тогда и только тогда принадлежит множеству A, когда многочлен $\varphi(x)$ не имеет свободного члена, или, что то же самое, делится на x. Из этого, в частности, следует, что элемент $\varphi(t)$ тогда и только тогда равен нулю, когда многочлен $\varphi(x)$ равен нулю, так что t есть трансцендентный элемент над полем P^p. Одновременно докажем, что

$$P^p[t]\subset A\cup B. \tag{42}$$

Пусть $\varphi(x)$—произвольный многочлен над полем P^p и k—настолько большое число, что

$$t^n\in G \quad \text{при} \quad n\geqslant p^k. \tag{43}$$

Так как G есть группа по сложению, то из (43) следует, что в G содержится всякий элемент $\psi(t)$, где $\psi(x)$—многочлен, делящийся на x^{p^k}. Из этого следует, что если многочлен $\varphi(x)$ делится на x, то элемент $[\varphi(t)]^{p^k}$содержится в $G\subset A$, а потому и элемент $\varphi(t)$ также содержится в A. Допустим напротив, что многочлен $\varphi(x)$ имеет свободный член; тогда при $l\geqslant k$ имеем: $[\varphi(x)]^{p^l}=a+\psi(x)$, где $a\in P^p$, $a\neq 0$, а многочлен $\psi(x)$ делится на x^{p^k} (см. (39)), так что $\psi(t)\in G$. Так как $a\in B$, то $[\varphi(t)]^{p^l}\in B+G$ при произвольно большом l. Отсюда в силу компактности множества $B+G$ следует, что $\varphi(t)\subset A\cup B$. Если предположить, что $\varphi(t)\in A$, то при достаточно большом l будем иметь $[\varphi(t)]^{p^l}\in G$, и потому $a=[\varphi(t)]^{p^l}-\psi(t)\in G\subset A$, что невозможно. Итак, доказано, что $\varphi(t)\in A\cup B$ и что элемент $\varphi(t)$ тогда и только тогда принадлежит A, когда многочлен $\varphi(x)$ делится на x.

Пусть $\frac{c(t)\,t^n}{d(t)}$—произвольный отличный от нуля элемент поля $P^p(t)$, где $c(x)$ и $d(x)$—многочлены, не делящиеся на x. Так как, по доказанному, элемент $\frac{c(t)}{d(t)}$ принадлежит B, то элемент $\frac{c(t)\,t^n}{d(t)}$ принадлежит множеству A при $n>0$, множеству B при $n=0$ и множеству C при $n<0$. Из этого следует, что главная окрестность $A\cap P^p(t)$ топологического поля $P^p(t)$ состоит из всех элементов вида $\frac{a(t)\,t}{b(t)}$, где $a(x)$ и $b(x)$—многочлены над полем P^p, причем $b(x)$ не делится на x. Таким образом, замыкание $\overline{P^p(t)}$ поля $P^p(t)\subset K$ изоморфно полю рядов с коэффициентами из поля P^p (см. С) и § 26, С)).

Итак, лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 22. Из лемм 3, 4, 5 вытекает, что для произвольного непрерывного тела K имеет место один из трех случаев, указанных в формулировке теоремы 22. Таким образом, нам остается доказать заключительную часть этой теоремы.

Пусть E—множество, состоящее из элементов 0, e тела K. Выберем в поле K^* такой элемент $u\in A$, $u\neq 0$, чтобы все ряды

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1 u+\varepsilon_2 u^2+\ldots+\varepsilon_n u^n+\ldots \tag{44}$$

с коэффициентами из множества E сходились. Такой элемент u в поле K^* можно найти во всех трех случаях. Действительно, в случае 1) за u можно принять элемент $\frac{1}{2}e$. В случае 2) за u можно принять элемент pe. В случае 3) за u можно принять элемент t. Выберем теперь такую конечную систему

$$v_1,\ \ldots,\ v_m \tag{45}$$

элементов множества $\overline{A}$, чтобы для каждого элемента $z\in\overline{A}$ нашлась линейная форма

$$\varepsilon_1 v_1+\ldots+\varepsilon_m v_m$$

с коэффициентами из E, удовлетворяющая условию

$$z-\varepsilon_1 v_1-\ldots-\varepsilon_m v_m\in uA. \tag{46}$$

Для построения системы (45) рассмотрим покрытие бикомпактного множества $\overline{A}$ областями вида $v+uA$, $v\in\overline{A}$. Пусть v_1+uA, … …, v_m+uA—конечное покрытие множества $\overline{A}$; тогда, очевидно, для каждого элемента $z\in\overline{A}$ найдется такой элемент v_i, что $z-v_i\in uA$, т. е. соотношение (46) выполнено.

Покажем теперь, что каждый элемент z тела K может быть записан в виде

$$z=a_1 v_1+\ldots+a_m v_m, \tag{47}$$

где коэффициенты $a_1,\ \ldots,\ a_m$ принадлежат полю K^*. Вопрос об однозначности будет решен ниже. Так как для каждого элемента $z\in K$ существует настолько большое натуральное число n, что

$u^n z \in \overline{A}$, то достаточно дать разложение (47) для каждого элемента z, принадлежащего множеству $\overline{A}$. Пусть $z_0 \in \overline{A}$ и пусть $\varepsilon_{01}v_1 + \ldots + \varepsilon_{0m}v_m$ — такая линейная форма с коэффициентами из E, что

$$z_0 - \varepsilon_{01}v_1 - \ldots - \varepsilon_{0m}v_m \in uA$$

(см. (46)); тогда мы имеем:

$$z_0 = \varepsilon_{01}v_1 + \ldots + \varepsilon_{0m}v_m + uz_1, \tag{48}$$

где z_1 вновь принадлежит $\overline{A}$. Применяя к элементу z_1 то же построение, которое было применено к элементу z_0, получаем:

$$z_1 = \varepsilon_{11}v_1 + \ldots + \varepsilon_{1m}v_m + uz_2, \quad z_2 \in \overline{A}. \tag{49}$$

Продолжая этот процесс дальше, находим:

$$z_n = \varepsilon_{n1}v_1 + \ldots + \varepsilon_{nm}v_m + uz_{n+1}; \quad z_{n+1} \in \overline{A}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{50}$$

откуда имеем:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} (\varepsilon_{0i} + \varepsilon_{1i}u + \varepsilon_{2i}u^2 + \ldots + \varepsilon_{ni}u^n)v_i + u^{n+1}z_{n+1}; \quad z^{n+1} \in \overline{A}. \tag{51}$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$z_0 = a_1v_1 + \ldots + a_mv_m,$$

где $a_1, \ldots, a_m$ суть элементы поля K^*.

Если существует линейная зависимость между элементами $v_1, \ldots, v_m$ с коэффициентами из K^*, т. е. имеет место равенство

$$b_1v_1 + \ldots + b_mv_m = 0,$$

где не все коэффициенты b_i равны нулю, то ее можно разрешить относительно одного из элементов v_i, $i = 1, \ldots, m$, и тем снизить число элементов системы $v_1, \ldots, v_m$. Таким образом, мы придем к линейно независимому базису $x_1, \ldots, x_r$. Легко добиться того, чтобы при этом было $x_1 = e$.

Итак, теорема 22 доказана.

Пример 48. Пусть K — топологическое тело, R^{n+1} — векторное пространство над телом K и $P^n = (G_0, G_1, \ldots, G_n)$ — проективная геометрия над телом K (см. § 7, K), L)). Векторное пространство R^{n+1} естественным образом представляет собой прямую сумму $n+1$ экземпляров топологической аддитивной группы K, и потому в нем, естественно, имеется топология. Введем топологию в множество G_k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Пусть a — произвольный элемент множества G_k, т. е. $(k+1)$-мерное линейное подпространство пространства R^{n+1}, и пусть $u_1, \ldots, u_{k+1}$ — некоторый базис пространства a. Выберем прежде всего такие окрестности $U_1, \ldots, U_{k+1}$ векторов $u_1, \ldots, u_{k+1}$ в пространстве R^{n+1}, что при $v_i \in U_i$ элементы $v_1, \ldots, v_{k+1}$

линейно независимы. Окрестность V в пространстве G_k определим как совокупность всех элементов $x \in G_k$ с базисами $v_1, \ldots, v_{k+1}$, где $v_i \in U_i$. Таким образом, множество G_k становится топологическим пространством. Легко видеть, что если точки $a_0, a_1, \ldots, a_k$ линейно независимы, то проходящая через них плоскость $a \in G_k$ размерности k зависит от них непрерывно. Используя результаты настоящего параграфа, можно доказать, что если тело K непрерывно, то все пространства G_k бикомпактны. Далее, если тело K вполне несвязно, то все пространства G_k также вполне несвязны. Таким образом, мы приходим к проективной геометрии $P^n = \{G_0, G_1, \ldots, G_n\}$ над непрерывным телом K. Здесь множества $G_0, G_1, \ldots, G_n$ являются бикомпактными топологическими пространствами, а операция проведения k-мерной плоскости через линейно независимые точки есть непрерывная операция.

Перейдем теперь к синтетическому рассмотрению.

Проективную геометрию $P^n = \{G_0, G_1, \ldots, G_n\}$ (см. пример 16) будем называть *непрерывной*, если множества G_0 и G_1 точек и прямых являются бикомпактными неконечными топологическими пространствами, а прямая (x, y), проходящая через две различные точки x, y, является непрерывной функцией этих точек. Оказывается, что всякая непрерывная проективная геометрия непрерывно изоморфна проективной геометрии над некоторым непрерывным телом K. Если пространство G_0 точек связно, то соответствующее непрерывное тело K связно, и в этом случае тело K изоморфно либо телу действительных чисел, либо телу комплексных чисел, либо телу кватернионов (см. теорему 21).

Докажем это утверждение. Тело K определяется из той же конструкции, как и в примере 16, а так как прямая (x, y) непрерывно зависит от точек x и y, то тело K оказывается топологическим. Из бикомпактности пространства G_0 следует бикомпактность множества всех точек, принадлежащих некоторой прямой l. Так как тело K получается выкидыванием из прямой l одной точки u, то тело K непрерывно. Если тело K несвязно, то оно вполне несвязно, и тогда пространство G_0 точек также вполне несвязно; таким образом, из связности пространства G_0 точек вытекает связность тела K.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БИКОМПАКТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

В третьей главе была дана общая теория топологических групп. В ней рассматривались понятия и соотношения наиболее общего вида. Дальнейшая задача заключается в более глубоком конструктивном изучении топологических групп. Желательно привести общие топологические группы в связь с объектами более конкретными, легче допускающими непосредственное изучение. Таковыми являются, например, группы матриц и группы Ли (о последних см. гл. VII и X). Такого рода приведение в связь позволяет свести вопросы, относящиеся к топологическим группам, к соответствующим вопросам относительно объектов более элементарных. Сверх того, удается сконструировать топологические группы весьма общего вида из топологических групп, вполне конкретных. Основным методом на указанном пути является метод *линейных представлений*.

Говорят, что топологическая группа G *линейно представлена*, если имеется некоторый гомоморфизм ζ группы G в топологическую группу матриц некоторого порядка.

Очевидно, однако, что всякая группа допускает тривиальное линейное представление, при котором все элементы группы переходят в единицу группы матриц. Такое тривиальное представление, конечно, ничего не может дать для изучения группы. Поэтому возникает вопрос о существовании для данной группы нетривиальных линейных представлений или даже более того — вопрос о существовании достаточной системы линейных представлений.

Говорят, что группа G допускает *достаточную систему линейных представлений*, если для каждого элемента g группы G, отличного от единицы, существует линейное представление группы G, при котором g не переходит в единичную матрицу.

Вопрос о существовании достаточной системы линейных представлений для локально бикомпактных топологических групп решается, вообще говоря, отрицательно [4]. Однако удается построить достаточную систему линейных представлений для всякой бикомпактной топологической группы. Изложению этой конструкции и посвящается в основном настоящая глава. Применения будут даны в шестой и восьмой главах, где на основе существования достаточной системы представлений для бикомпактных групп будут решены некоторые центральные проблемы теории топологических групп.

Первым шагом конструкции является установление на группе *инвариантной меры*, или, что то же, *инвариантного интегрирования.* Каждому множеству M элементов группы G, принадлежащему достаточно широкому классу измеримых множеств, приписывается в качестве его меры некоторое неотрицательное число, причем выполнено условие инвариантности, т. е. мера множества M равна мере множества Ma для произвольного элемента a группы G. Имея в группе G инвариантную меру, можно установить в ней инвариантное интегрирование. Первоначально инвариантная мера на любой локально компактной группе со счетной топологической базой была сконструирована Хааром (см. [12]). Несколько позже Нейман (см. [31]) непосредственно установил инвариантное интегрирование на компактных группах со счетной топологической базой, которое автоматически переносится на бикомпактные группы. Конструкция Неймана значительно проще конструкции Хаара, а так как в дальнейшем инвариантное интегрирование употребляется лишь для бикомпактных групп, то здесь я использую работу Неймана.

Еще до построения инвариантного интегрирования на общих компактных топологических группах со счетной топологической базой оно было использовано Петером и Вейлем (см. [33]) для конструкции достаточной системы линейных представлений компактных групп Ли, для которых инвариантное интегрирование устанавливается весьма просто. Петер и Вейль рассмотрели для своих целей некоторое интегральное уравнение на группе; при этом они существенным образом использовали компактность группы. В силу существования инвариантного интегрирования на произвольной бикомпактной группе их построение автоматически переносится на общие бикомпактные топологические группы. Распространить же его на группы локально бикомпактные, хотя бы и со счетной топологической базой, не удается.

§ 28. Непрерывные функции на топологической группе

Элементы топологической группы G образуют топологическое пространство; поэтому можно говорить о непрерывных функциях, заданных на G (см. § 12, A)). Однако то обстоятельство, что G есть группа, позволяет формулировать определение непрерывности несколько иначе, а главное—ввести понятие *равномерно непрерывной функции.*

A) Пусть G—топологическая группа и M—некоторое множество ее элементов. Числовая функция f, заданная на пространстве M (см. определение 17), тогда и только тогда непрерывна в точке $a \in M$, когда для всякого положительного числа ε найдется такая окрестность V единицы, что при $x \in M$, $xa^{-1} \in V$ имеем $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Для доказательства достаточно заметить, что точка xa^{-1} в том и только в том случае принадлежит окрестности V единицы e, когда точка x принадлежит окрестности $U=Va$ точки a.

B) Пусть M—некоторое подмножество топологической группы G и f—числовая функция, заданная на M. Функция f называется *равномерно непрерывной*, если для всякого положительного ε существует такая окрестность V единицы, что при $xy^{-1} \in V$, $x \in M$, $y \in M$ имеем $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Наряду с указанным определением равномерной непрерывности можно ввести другое, вполне аналогичное. Функция f называется равномерно непрерывной, если для каждого положительного ε существует такая окрестность V' единицы в пространстве G, что при $x^{-1}y \in V'$ имеем $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Приводимые здесь два определения равномерной непрерывности, вообще говоря, не эквивалентны, однако во всех важных для нас случаях они оказываются эквивалентными (см. C)). Очевидно, что равномерно непрерывная функция является и непрерывной.

Оказывается, что в некоторых случаях из простой непрерывности функции можно сделать заключение о ее равномерной непрерывности.

C) Пусть G—топологическая группа и M—ее бикомпактное подмножество. Непрерывная функция f, заданная на M, автоматически оказывается равномерно непрерывной в обоих смыслах (см. B)).

Действительно, пусть ε—произвольное положительное число. Так как функция f непрерывна, то для каждой точки $a \in M$ найдется такая окрестность V_a единицы группы G, что если $xa^{-1} \in V_a$, $x \in M$, то $|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть W_a—такая окрестность единицы, что $W_a^2 \subset V_a$. Очевидно, что система всех областей вида $W_a a$, где a—произвольный элемент из M, покрывает все множество M. В силу бикомпактности множества M из этого покрытия можно выбрать конечное. Таким образом, существует такая конечная система $a_1, \ldots, a_n$ элементов множества M, что система областей $W_{a_i} a_i$, $i=1, \ldots, n$, покрывает M. Обозначим через V пересечение всех областей системы W_{a_i}; V есть окрестность единицы в G. Покажем, что если $xy^{-1} \in V$, $x \in M$, $y \in M$, то $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Этим равномерная непрерывность функции f будет доказана. Так как система областей $W_{a_i} a_i$ покрывает M, то существует такой номер k, что $ya_k^{-1} \in W_{a_k}$ и, таким образом, $|f(y)-f(a_k)|<\varepsilon/2$. Далее, мы имеем $xa_k^{-1}=xy^{-1}ya_k^{-1} \in VW_{a_k} \subset W_{a_k}^2 \subset V_{a_k}$, так что $|f(x)-f(a_k)|<\varepsilon/2$. Объединяя оба неравенства, получаем $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Наряду с понятием равномерно непрерывной функции существенную роль играет понятие *равномерно непрерывного семейства* или *множества* функций.

D) Пусть M—некоторое подмножество топологической группы G. Множество Δ функций, заданных на M, называется *равномерно непрерывным*, если для всякого положительного числа ε существует такая окрестность V единицы группы G, что при $xy^{-1}\in V$, $x\in M$, $y\in M$ имеем $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ для всякой функции f множества Δ. Очевидно, что все функции равномерно непрерывного семейства сами равномерно непрерывны. Множество Δ называется *равномерно ограниченным*, если существует такое число m, что при $x\in M$, $f\in\Delta$ имеем $|f(x)|<m$.

Напомним теперь понятие *равномерно сходящейся последовательности функций*.

E) Говорят, что последовательность функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, заданных на множестве M, *равномерно сходится* к функции f, заданной там же, если для всякого положительного числа ε существует такое целое число m, что при $n>m$ имеем $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ при произвольном $x\in M$.

Точно так же, как в классическом анализе, доказывается необходимый и достаточный *признак равномерной сходимости* Коши, утверждающий следующее:

F) Последовательность функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, заданных на множестве M, тогда и только тогда равномерно сходится, когда для всякого положительного числа ε существует столь большое число m, что при $p>m$, $q>m$ имеем $|f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon$ при всяком $x\in M$.

G) Если последовательность непрерывных функций равномерно сходится, то предел ее есть функция непрерывная. Утверждение это доказывается так же, как в классическом анализе.

H) Равномерно сходящаяся последовательность $f_1, f_2, \ldots$ непрерывных функций, заданных на бикомпактном подмножестве M топологической группы G, равномерно непрерывна и равномерно ограничена.

Действительно, пусть f—предел последовательности $f_1, f_2, \ldots$ Так как функция f непрерывна, то она и равномерно непрерывна, и потому существует для данного положительного ε такая окрестность V единицы в G, что при $x\in M$, $y\in M$, $xy^{-1}\in V$ имеем: $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$. С другой стороны, существует настолько большое число p, что при $n>p$ имеем $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, $|f(y)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Из этих трех неравенств вытекает, что при $x\in M$, $y\in M$, $xy^{-1}\in V$ и $n>p$ имеем $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$. Обозначим, далее, через V_i, $i=1, \ldots, p$, такую окрестность единицы в G, что при $x\in M$, $y\in M$, $xy^{-1}\in V_i$ имеем $|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon$. Обозначая через U пересечение всех окрестностей V, V_1, ..., V_p, мы видим, что при $x \in M$, $y \in M$, $xy^{-1} \in U$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$ Таким образом, последовательность $f_1, f_2, \ldots$ равномерно непрерывна. Ее равномерная ограниченность следует из того, что при $n > p$ имеем $|f_n(x)| < |f(x)| + \frac{\varepsilon}{3}$, а функции $f, f_1, \ldots, f_p$ ограничены (см. § 13, G)).

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 23. *Пусть G — топологическая группа, M — ее бикомпактное подмножество и Δ — равномерно ограниченное и равномерно непрерывное множество действительных числовых функций, заданных на M* (см. D)). *Тогда из всякой последовательности функций множества Δ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность* (см. E)).

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число и V_ε — такая окрестность единицы в G, что

$$\text{при } x \in M,\ y \in M,\ xy^{-1} \in V_\varepsilon,\ f \in \Delta \ \text{ имеем } |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Пусть, далее, Δ' — некоторое бесконечное подмножество множества Δ и $a \in M$. Существует тогда такое бесконечное подмножество Δ'_a множества Δ', что

$$\text{при } x \in M,\ x \in V_\varepsilon a,\ f \in \Delta'_a,\ g \in \Delta'_a \ \text{ имеем } |f(x) - g(x)| < 3\varepsilon. \tag{2}$$

Действительно, ввиду равномерной ограниченности множества Δ' значения функций этого множества в точке a все расположены на ограниченном интервале, и потому существует такой числовой интервал I длины ε, что значения в точке a всех функций некоторого бесконечного подмножества Δ'_a множества Δ' принадлежат I. Таким образом,

$$\text{при } f \in \Delta'_a,\ g \in \Delta'_a \ \text{ имеем } |f(a) - g(a)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Сверх того, в силу (1)

$$\begin{gathered} \text{при } x \in M,\ x \in V_\varepsilon a,\ f \in \Delta'_a,\ g \in \Delta'_a \\ \text{имеем } |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (2).

Усилим теперь доказанное утверждение, отбросив требование $x \in V_\varepsilon a$ (см. (2)). Пусть снова ε — произвольное число и Δ' — некоторое бесконечное подмножество множества Δ. Существует тогда такое бесконечное подмножество Δ'_ε множества Δ', что

$$\text{при } x \in M,\ f \in \Delta'_\varepsilon,\ g \in \Delta'_\varepsilon \ \text{ имеем } |f(x) - g(x)| < 3\varepsilon. \tag{5}$$

Действительно, совокупность всех областей вида $V_\varepsilon a$ (см. (1)), где a пробегает M, а окрестность V_ε фиксирована, покрывает множество M, и в силу бикомпактности множества M из этого покрытия можно выбрать конечное покрытие $V_\varepsilon a_1, \ldots, V_\varepsilon a_r$. В силу уже доказанного существует бесконечное подмножество Δ'_{a_1} множества Δ', удовлетворяющее условию (2) при $a=a_1$. Точно так же из множества Δ'_{a_1} можно выбрать бесконечное подмножество Δ'_{a_1,a_2}, удовлетворяющее условию:

$$\text{при } x\in M,\quad x\in V_\varepsilon a_2,\quad f\in\Delta'_{a_1,\,a_2},\quad g\in\Delta'_{a_1,\,a_2} \text{ имеем } |f(x)-g(x)|<3\varepsilon$$

Продолжая этот процесс, мы и получим множество $\Delta'_{a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_r}$, удовлетворяющее условию (5).

Пусть теперь

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots \tag{6}$$

—некоторая последовательность функций множества Δ. Множество всех функций этой последовательности обозначим через Δ'. Если множество Δ' конечно, то справедливость утверждения очевидна. Допустим, что множество Δ' бесконечно, и зададим последовательность положительных чисел $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n,\ \ldots$, стремящихся к нулю. В силу уже доказанного из Δ' можно выбрать бесконечное подмножество $\Delta'_{\varepsilon_1}=\Delta'_1$, удовлетворяющее условию (5) при $\varepsilon=\varepsilon_1$. Точно так же из Δ'_1 можно выбрать бесконечное подмножество Δ'_2, удовлетворяющее условию:

$$\text{при } x\in M,\ f\in\Delta'_2,\ g\in\Delta'_2 \ \text{ имеем } |f(x)-g(x)|<3\varepsilon_2.$$

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность

$$\Delta'_1\supset\Delta'_2\supset\ldots\supset\Delta'_n\supset\ldots$$

бесконечных подмножеств множества Δ', удовлетворяющую условию:

$$\text{при } x\in M,\ f\in\Delta'_n,\ g\in\Delta'_n \ \text{ имеем } |f(x)-g(x)|<3\varepsilon_n, \tag{7}$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots$$

Выберем теперь в Δ'_1 произвольную функцию g_1, в Δ'_2—произвольную функцию g_2, номер которой в последовательности (6) превосходит номер функции g_1, в Δ'_3—произвольную функцию g_3, номер которой в последовательности (6) превосходит номер функции g_2, и т. д. Полученная таким образом подпоследовательность $g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots$ последовательности (6) удовлетворяет в силу (7) условию равномерной сходимости (см. F)). Этим теорема доказана.

Сделаем еще одно замечание о непрерывных функциях.

I) Пусть M—бикомпактное топологическое пространство и f—заданная на нем непрерывная функция. Минимум функции f обозначим через $K(f)$, а максимум—через $L(f)$ (см. § 13, G)). Число $S(f)=L(f)-K(f)$ называется *колебанием* функции f. Если последовательность $f_1,\ f_2,\ \ldots$ непрерывных функций равномерно сходится к функции f (см. E)), то имеют место следующие легко проверяемые соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} K(f_n)=K(f), \quad \lim_{n\to\infty} L(f_n)=L(f), \quad \lim_{n\to\infty} S(f_n)=S(f).$$

Пример 49. Пусть G—бикомпактная топологическая группа. Рассмотрим множество R всех непрерывных функций на G. В множестве R естественным образом можно ввести расстояние. Именно, расстояние между двумя непрерывными функциями f и g, заданными на G, т. е. между двумя элементами из R, мы определим как максимум функции $|f(x)-g(x)|$ переменного $x\in G$.

Нетрудно показать, что R есть метрическое пространство (см. пример 20). Прежде всего максимум $|f(x)-g(x)|$ равен нулю тогда и только тогда, когда $f=g$. Далее, если f, g и h суть три непрерывные функции, заданные на G, то мы имеем $|f(x)-h(x)|\leqslant\leqslant|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$, откуда аксиома треугольника в R непосредственно следует.

В терминах метрики пространства R легко формулировать условия равномерной сходимости последовательности функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, к функции f. Сходимость эта имеет место тогда и только тогда, когда последовательность f_n, $n=1, 2, \ldots$, сходится к f в смысле метрики, заданной в пространстве R.

Пусть Δ—некоторое ограниченное равномерно непрерывное семейство функций, заданных на G. Тогда $\Delta\subset R$. Смысл теоремы 23 заключается в том, что замыкание $\bar{\Delta}$ множества Δ в пространстве R компактно.

Пример 50. Если G есть аддитивная топологическая группа действительных чисел, а M—замкнутый отрезок на числовой прямой, то приведенные в этом параграфе предложения превращаются в хорошо известные предложения классического анализа.

§ 29. Инвариантное интегрирование

В настоящем параграфе я, следуя Нейману, даю построение инвариантного интегрирования на бикомпактной топологической группе.

Определение 33. Говорят, что на бикомпактной топологической группе G установлено *инвариантное интегрирование*, если каждой действительной непрерывной функции f, заданной на G, поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое через $\int f(x)dx$ и называемое *интегралом* функции f по группе G, так что выполнены следующие условия:

1) если α—действительное число, то

$$\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx;$$

2) если f и g—две непрерывные функции, то

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx;$$

3) если функция f всюду неотрицательна, то

$$\int f(x)dx\geqslant 0;$$

4) если $f(x)=1$ при всяком x, то $\int f(x)\,dx=1$;

5) если функция f всюду неотрицательна и не равна тождественно нулю, то $\int f(x)\,dx>0$;

6) если a—произвольный элемент из G, то

$$\int f(xa)dx=\int f(x)dx;$$

7) если a—произвольный элемент из G, то

$$\int f(ax)dx=\int f(x)dx;$$

8)
$$\int f(x^{-1})dx=\int f(x)dx.$$

Первые пять пунктов выражают требования, естественные для всякого понятия интеграла, последние же три выражают специальное групповое *свойство инвариантности*.

Заметим, что в силу условий 1), 2), 3) возможно интегрирование неравенств и интегрирование абсолютной величины: именно, если $f(x)\leqslant g(x)$, то мы имеем:

$$\int f(x)dx\leqslant\int g(x)dx,\qquad \left|\int f(x)dx\right|\leqslant\int |f(x)|dx.$$

Действительно, $g(x)-f(x)\geqslant 0$, и в силу услови 3) получаем $\int (g(x)-f(x))dx\geqslant 0$, а в силу условий 1) и 2) это соотношение принимает вид $\int g(x)dx-\int f(x)dx\geqslant 0$, т. е.

$$\int f(x)dx\leqslant\int g(x)dx.$$

Далее, $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$, и в силу только что установленной возможности интегрирования неравенств получаем $-\int |f(x)|dx\leqslant$ $\leqslant\int f(x)dx\leqslant\int |f(x)|dx$, а эти неравенства можно переписать в виде

$$\left|\int f(x)dx\right|\leqslant\int |f(x)|dx.$$

Т е о р е м а 24. *На всякой бикомпактной топологической группе G можно установить инвариантное интегрирование* (см.

определение 33) *и притом единственным способом. Если, далее, на G определен каким-либо образом интеграл, удовлетворяющий условиям* 1)—4) *и* 6), *то остальные условия* 5), 7) *и* 8) *оказываются выполненными для него автоматически.*

Доказательство теоремы 24 не просто и распадается на ряд последовательных шагов. Мы дадим их в форме предварительных замечаний и лишь заключительную часть озаглавим как доказательство теоремы. Всюду в доказательстве через G будет обозначаться бикомпактная топологическая группа.

A) Пусть f—непрерывная функция, заданная на G, и $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$—конечная система элементов группы G, среди которых могут быть и совпадающие. Введем следующее обозначение:

$$M(A, f; x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{f(xa_i)}{m}. \tag{1}$$

Функция $M(A, f)$ аргумента $x\in G$, определяемая равенством (1), непрерывна; она кладется в основу построения на G инвариантного интегрирования. Для нее выполнены следующие легко проверяемые соотношения (по поводу обозначений см. § 28, I)):

$$K(M(A, f))\geqslant K(f), \tag{2}$$

$$L(M(A, f))\leqslant L(f), \tag{3}$$

$$S(M(A, f))\leqslant S(f). \tag{4}$$

Легко проверяется также, что если $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$ и $B=\{b_1, \ldots, b_n\}$—две конечные системы элементов из G, то

$$M(A, M(B, f))=M(AB, f), \tag{5}$$

где AB есть система, состоящая из mn элементов a_ib_j, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$.

B) Если f—отличная от константы непрерывная функция, заданная на G, то в G существует такая конечная система A элементов, что

$$S(M(A, f))<S(f) \tag{6}$$

(см. A)).

Действительно, пусть k—минимум и l—максимум функции f. Так как функция f непрерывна и $k<l$, то существует такая область $U\subset G$, что для всех $x\in U$ выполняется неравенство $f(x)\leqslant h<l$. Множество всех областей вида Ua^{-1} покрывает группу G, и потому согласно теореме 4 существует такая конечная система $A=\{a_1, \ldots \ldots, a_m\}$ элементов из G, что система областей Ua_i^{-1}, $i=1, \ldots, m$, покрывает G. Покажем, что функция $M(A, f)$ имеет максимум, не превосходящий $\frac{(m-1)\,l+h}{m}<l$. Действительно, при всяком x имеем $f(xa_i)\leqslant l$, $i=1, \ldots, m$; но, каков бы ни был элемент x, всегда найдет-

ся такой номер j, что $x \in Ua_j^{-1}$, т. е. $xa_j \in U$, и, следовательно, $f(xa_j) \leqslant h$. Так как минимум функции $M(A, f)$ не меньше k (см. (2)), то соотношение (6) доказано.

C) Пусть f—непрерывная функция, заданная на группе G. Будем называть *правым средним* функции f каждое действительное число p, обладающее следующим свойством: для всякого положительного ε существует такая конечная система A элементов группы G, что при произвольном $x \in G$ имеем:

$$|M(A, f;\ x) - p| < \varepsilon. \tag{7}$$

Покажем, что всякая непрерывная функция f, заданная на G, имеет по крайней мере одно правое среднее.

Обозначим через Δ совокупность всех функций вида $M(A, f)$, где f—заданная фиксированная функция, а A—произвольная конечная система элементов из G. Из соотношений (2) и (3) следует, что семейство Δ ограничено; покажем, что оно равномерно непрерывно (см. § 28, D)).

Будучи непрерывной, функция f является и равномерно непрерывной (см. § 28, C)); поэтому для каждого положительного ε найдется такая окрестность V единицы, что при $xy^{-1} \in V$ будет $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Но если $xy^{-1} \in V$, то и $(xa_i)(ya_i)^{-1} = xy^{-1} \in V$. Следовательно, также $|f(xa_i) - f(ya_i)| < \varepsilon$. Суммируя это неравенство по i от 1 до m и деля результат на m, получаем $|M(A, f;\ x) - M(A, f;\ y)| < \varepsilon$. Последнее неравенство справедливо при $xy^{-1} \in V$ и при произвольной системе A. Таким образом, семейство Δ равномерно непрерывно.

Обозначим через s нижнюю грань всех чисел $S(M(A, f))$, т. е. нижнюю грань колебаний всех функций, входящих в Δ. Существует такая последовательность

$$f_1, \ \ldots, \ f_n, \ \ldots \tag{8}$$

функций, входящих в Δ, что

$$\lim_{n \to \infty} S(f_n) = s.$$

Так как семейство Δ ограничено и равномерно непрерывно, то в силу теоремы 23 из последовательности (8) можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность

$$g_1, \ \ldots, \ g_n, \ \ldots, \tag{9}$$

предел которой мы обозначим через g. Мы имеем $S(g) = s$ (см. § 28, I)). Покажем, что g есть константа, или, что то же, что $s = 0$.

Допустим, что g—не константа. Тогда согласно замечанию B) существует такая конечная система A элементов группы G, что

$$S(M(A, g)) = s' < s. \tag{10}$$

Положим $\varepsilon=\frac{s-s'}{3}$. Так как последовательность (9) равномерно сходится к g, то существует номер k, для которого $|g(x)-g_k(x)|<\varepsilon$. Заменяя в последнем неравенстве x на xa_i, суммируя полученное неравенство по i от 1 до m и деля результат на m, получаем:

$$|M(A,\ g;\ x)-M(A,\ g_k;\ x)|<\varepsilon. \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) непосредственно следует, что

$$S(M(A,\ g_k))\leqslant s'+2\varepsilon<s.$$

В силу соотношения (5) функция $M(A,\ g_k)$ принадлежит семейству Δ, и, следовательно, мы пришли к противоречию, так как нижняя грань колебаний всех функций, входящих в Δ, по предположению, равна s.

Итак, g есть константа: $g(x)\equiv p$.

Так как последовательность (9) равномерно сходится к g, то для всякого положительного ε существует такой номер n, что $|g_n(x)-p|<\varepsilon$. Но $g_n\in\Delta$ и, следовательно, для всякого положительного ε существует конечная система A элементов из G, для которой выполнено неравенство (7).

D) По аналогии с A) введем новую функцию $M'(B,\ f)$ аргумента $x\in G$, положив

$$M'(B,\ f;\ x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{f(b_jx)}{n}, \tag{12}$$

где

$$B=\{b_1,\ \ldots,\ b_n\}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$M(A,\ M'(B,\ f))=M'(B,\ M(A,\ f)). \tag{13}$$

E) По аналогии с C) введем *левое среднее*. Действительное число q будем называть *левым средним* непрерывной функции f, заданной на G, если оно обладает следующим свойством: для всякого положительного ε существует такая конечная система B элементов группы G, что

$$|M'(B,\ f;\ x)-q|<\varepsilon. \tag{14}$$

Покажем, что для каждой непрерывной функции, заданной на G, существует по крайней мере одно левое среднее. Для этого в множестве G элементов топологической группы G сохраним топологию, но введем по-новому операцию умножения; получаемую таким образом новую топологическую группу обозначим через G'. Именно, мы определим произведение $a\times b$ в группе G', полагая $a\times b=ba$, где ba есть произведение в группе G. Нетрудно проверить, что таким способом возникает некоторая топологическая группа G'. Нетрудно видеть, далее, что правое среднее для группы G' является левым средним для группы G; так как существование правого среднего уже доказано, то этим доказано и существование левого среднего.

F) Для каждой непрерывной функции f, заданной на G, существуют только одно правое среднее и только одно левое среднее, причем оба эти средние совпадают между собой. Получаемое таким образом единственное среднее называется *средним* функции f и обозначается через $M(f)$.

Пусть p — некоторое правое среднее функции f, а q — какое-либо левое среднее той же функции. Тогда выполнены соотношения (7) и (14). Подставляя в соотношение (7) вместо x элемент $b_j x$, суммируя по j от 1 до n и деля результат на n, получаем:

$$|M'(B,\ M(A,f);\ x)-p|<\varepsilon. \tag{15}$$

Подставляя в соотношение (14) вместо x элемент xa_i, суммируя по i от 1 до m и деля результат на m, получаем:

$$|M(A,\ M'(B,f);\ x)-q|<\varepsilon. \tag{16}$$

Из неравенств (15), (16) и соотношения (13) получаем $|p-q|<2\varepsilon$. Так как это последнее соотношение справедливо при произвольном положительном ε, то $p=q$. Таким образом, каждое правое среднее равно каждому левому среднему, и утверждение F) тем самым доказано.

G) Пусть f и g — две непрерывные функции, заданные на группе G. Тогда

$$M(f+g)=M(f)+M(g) \tag{17}$$

(см. F)).

Покажем прежде всего, что

$$M(M(B,f))=M(f). \tag{18}$$

Пусть

$$M(f)=p. \tag{19}$$

Тогда p есть левое среднее для f, и для произвольного положительного ε существует такая конечная система C элементов группы G, что

$$|M'(C,f;\ x)-p|<\varepsilon.$$

Заменяя в последнем соотношении x на xb_j, суммируя по j от 1 до n и деля результат на n, получаем:

$$|M(B,\ M'(C,f);\ x)-p|<\varepsilon.$$

Это последнее неравенство в силу соотношения (13) получает вид:

$$|M'(C,\ M(B,f);\ x)-p|<\varepsilon.$$

Таким образом, p есть левое среднее и для $M(B,f)$ и, следовательно, соотношение (18) выполнено.

Пусть теперь

$$M(g)=q. \tag{20}$$

Тогда q есть правое среднее для g и, следовательно, для произвольного положительного ε существует такая конечная система B элементов группы G, что

$$|M(B,\ g;\ x)-q|<\varepsilon.$$

Из этого неравенства следует, что

$$|M(A',\ M(B,\ g);\ x)-q|<\varepsilon,$$

где A'—произвольная конечная система элементов. На основании формулы (5) получаем:

$$|M(A'B,\ g;\ x)-q|<\varepsilon. \tag{21}$$

В силу соотношений (18) и (19) число p есть правое среднее для $M(B,\ f)$, т. е. существует такая конечная система A элементов группы G, что

$$|M(A,\ M(B,\ f);\ x)-p|<\varepsilon,$$

а это в силу соотношения (5) можно иначе переписать в виде

$$|M(AB,\ f;\ x)-p|<\varepsilon. \tag{22}$$

Соотношения (21) и (22) при $A'=A$ дают:

$$|M(AB,\ f+g;\ x)-(p+q)|<2\varepsilon.$$

Таким образом, $p+q$ есть правое среднее для суммы $f+g$, и тем самым соотношение (17) доказано.

H) Пусть f—непрерывная функция, заданная на G, и a—произвольный элемент группы G. Положим $f'(x)=f(xa)$, $f''(x)=f(ax)$. Тогда

$$M(f')=M(f), \tag{23}$$

$$M(f'')=M(f). \tag{24}$$

Заметим прежде всего, что

$$M(A,\ f')=M(Aa,\ f)$$

(см. (1)). Из этого соотношения непосредственно следует, что правые средние для функций f' и f совпадают, вследствие чего равенство (23) оказывается выполненным. Совершенно аналогично, путем использования левого среднего, доказывается и соотношение (24).

I) Пусть f—неотрицательная непрерывная функция, заданная на G и не равная тождественно нулю. Тогда

$$M(f)>0. \tag{25}$$

Действительно, существует такая область $U \subset G$, что при $x \in U$ имеем $f(x) > h > 0$. Множество всех областей вида Ua^{-1} покрывает группу G, и в силу бикомпактности группы G из этого покрытия можно выбрать конечное, т. е. существует такая конечная система элементов $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, что система областей Ua_i^{-1}, $i = 1, \ldots, m$, покрывает G. При всяком x имеем $f(x) \geqslant 0$; но, каков бы ни был элемент x, найдется такой номер k, что $x \in Ua_k^{-1}$, т. е. $xa_k \in U$ и, следовательно, $f(xa_k) > h$. Таким образом, $M(A, f; x) \geqslant \frac{h}{m}$, т. е. $M(f) = M(M(A, f)) \geqslant \frac{h}{m}$ (см. (1) и (18)).

Доказательство теоремы 24. Определим интеграл $\int f(x)\,dx$ для всякой непрерывной функции, заданной на группе G, положив

$$\int f(x)dx = M(f) \tag{26}$$

(см. F)). Выполнение условий 1), 3) и 4) определения 33 устанавливается весьма просто; выполнение условий 2), 5), 6) и 7) следует из доказанных выше предложений G), I) и H).

Покажем теперь, что если определен каким-либо способом интеграл $\overset{*}{\int} f(x)\,dx$, удовлетворяющий условиям 1)—4) и 6) определения 33, то

$$\overset{*}{\int} f(x)dx = M(f). \tag{27}$$

Пусть p—правое среднее функции f. Тогда имеем:

$$|M(A, f; x) - p| < \varepsilon.$$

Неравенство это можно интегрировать в силу условий 1), 2) и 3) определения 33. Мы имеем, таким образом, в силу условий 1)—4) и 6):

$$\left|\overset{*}{\int} M(A, f; x)dx - p\right| = \left|\overset{*}{\int} f(x)dx - p\right| \leqslant \varepsilon. \tag{28}$$

Так как неравенство (28) справедливо при любом положительном ε, то из него следует соотношение (27).

Таким образом, единственность интеграла, удовлетворяющего условиям 1)—4) и 6) определения 33, установлена.

Нам осталось еще показать, что выполнено условие 8) определения 33. Для этого определим на G интеграл $\overset{*}{\int} f(x)\,dx$, положив

$$\overset{*}{\int} f(x)dx = \int f(x^{-1})dx. \tag{29}$$

Нетрудно проверить, что для определенного таким образом интеграла выполнены условия 1)—4) и 6) определения 33. Проверим лишь, что выполнено условие 6). Мы имеем:

$$\overset{*}{\int} f(xa)dx = \int f(x^{-1}a)dx = \int f((a^{-1}x)^{-1})dx = \int f(x^{-1})dx = \overset{*}{\int} f(x)dx$$

(см. (24)). В силу доказанной ранее единственности получаем $\int f(x^{-1})dx = \int f(x)dx$, чем доказательство теоремы 24 и завершается.

В дальнейшем нам придется пользоваться интегрированием не только действительных, но и комплексных числовых функций, т. е. функций вида $h=f+ig$, где f и g—действительные функции. Такая функция h *непрерывна*, если непрерывны обе функции f и g, и ее интеграл определяется равенством $\int h(x)\,dx = \int f(x)\,dx + i\int g(x)\,dx$. Легко проверить, что интеграл комплексной функции обладает свойствами 1)—8) определения 33, причем под α можно понимать произвольное комплексное число. Кроме того, нам придется пользоваться интегрированием не только по одному переменному, но и по двум. Здесь необходимо доказать независимость результата от порядка интегрирования.

J) Пусть G и H—две бикомпактные топологические группы и f—непрерывная функция двух переменных $x \in G$ и $y \in H$ (см. § 14, G)). При фиксированном y функция f является непрерывной функцией от x, поэтому можно составить интеграл $\int f(x, y)\,dx = g(y)$ (см. определение 33 и теорему 24). Покажем, что g есть непрерывная функция, заданная на группе H.

Пусть P—прямое произведение топологических групп G и H (см. определение 28). Функцию f можно трактовать как непрерывную функцию одного переменного $z=(x, y) \in P$, заданную на P (см. § 14, G)). Так как группа P бикомпактна, то функция f, будучи непрерывной, является и равномерно непрерывной (см. § 28, C)). Таким образом, для заданного положительного ε существует такая окрестность W единицы группы P, что при $z'z^{-1} \in W$ имеем $|f(z')-f(z)| < \varepsilon$. Окрестность W составлена как множество всех таких пар (x, y), что $x \in U$, $y \in V$, где U и V суть окрестности единиц в группах G и H (см. § 14, A)). Таким образом, если $x'x^{-1} \in U$, $y'y^{-1} \in V$, то $|f(x', y')-f(x, y)| < \varepsilon$. В частности, при $y'y^{-1} \in V$ имеем $|f(x, y')-f(x, y)| < \varepsilon$. Отсюда получаем:

$$|g(y')-g(y)| \leqslant \int |f(x, y')-f(x, y)|dx < \varepsilon,$$

т. е. $g(y)$ есть равномерно непрерывная функция.

Теорема 25. *Пусть G и H—две бикомпактные топологические группы, P—их прямое произведение и f—непрерывная функция* *двух переменных* $x \in G$ *и* $y \in H$ (см. § 14, G)), $f(x, y) = f(z)$, $z = (x, y) \in P$. *Тогда мы имеем следующие соотношения:*

$$\int\left(\int f(x, y)dx\right)dy = \int\left(\int f(x, y)dy\right)dx = \int f(z)dz = \int\int f(x, y)dx\,dy$$

(см. определение 33 и теорему 24). *Вторичное интегрирование в первой и второй частях этого соотношения имеет смысл, так как функции, стоящие под знаком интеграла, непрерывны* (см. J)). *Последнюю же часть следует рассматривать как определяемую этим соотношением.*

Доказательство. Покажем, что интеграл $\int\left(\int f(x, y)dx\right)dy$ совпадает с $\int f(z)dz$. Для этого положим $\overset{*}{\int} f(z)dz = \int\left(\int f(x, y)dx\right)dy$. Нетрудно видеть, что определенный таким образом интеграл $\overset{*}{\int} f(z)dz$ удовлетворяет всем условиям определения 33. Проверим лишь выполнение условия 6). Пусть $c \in P$, $c = (a, b)$, $a \in G$, $b \in H$; тогда

$$\overset{*}{\int} f(zc)dz = \int\left(\int f(xa, yb)dx\right)dy = \int\left(\int f(x, yb)dx\right)dy =$$
$$= \int\left(\int f(x, y)dx\right)dy = \overset{*}{\int} f(z)dz.$$

Таким образом, в силу единственности инвариантного интегрирования (см. теорему 24) мы имеем $\int\left(\int f(x, y)dx\right)dy = \int f(z)dz$.

Точно так же доказывается, что и $\int\left(\int f(x, y)dy\right)dx = \int f(z)dz$. Таким образом, теорема 25 доказана.

Если группа H совпадает с группой G, то функция $f(x, y)$ есть непрерывная функция двух переменных, заданная на G. Этот случай является наиболее существенным.

Пример 51. Если группа G конечна, то интеграл заданной на ней функции определяется просто как среднее арифметическое значений, принимаемых этой функцией на элементах группы.

Пример 52. Пусть G^*—аддитивная топологическая группа действительных чисел и φ—непрерывная периодическая функция с периодом 1, заданная на G^*: $\varphi(x^* + 1) = \varphi(x^*)$. Обозначим через N подгруппу группы G^*, составленную из всех целых чисел. Функция φ благодаря своей периодичности принимает одинаковые значения на всех элементах каждого смежного класса группы G^* по подгруппе N. Таким образом, функции φ, заданной на G^*, соответствует непрерывная функция f, заданная на факторгруппе $G^*/N = G$. Обратно, каждая непрерывная функция f, заданная на G, может быть получена таким образом. Так как группа G

бикомпактна, то на ней существует интеграл $\int f(x)\,dx$, удовлетворяющий условиям определения 33. Нетрудно видеть, что $\int f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \varphi(x^*)\,dx^*$, где в правой части стоит обычный интеграл по действительному переменному.

§ 30. Интегральные уравнения на группе

Интегрирование по бикомпактной группе, построенное в предыдущем параграфе, позволяет рассматривать на ней *интегральные уравнения*. Изложению некоторых результатов теории интегральных уравнений с симметрическим ядром, необходимых для дальнейшего, с полными их доказательствами и посвящается настоящий параграф. Через G в нем будет всегда обозначаться бикомпактная группа. Все функции, рассматриваемые на G, будут предполагаться непрерывными.

А) Векторное пространство R над полем P (см. § 7, I)) называется *евклидовым*, соответственно *унитарным*, если P есть поле действительных, соответственно комплексных чисел и если определено *скалярное произведение* $(f, g) \in P$ двух произвольных элементов f и g из R, удовлетворяющее следующим условиям:

$$(\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f, h) + \mu(g, h), \quad (g, f) = \overline{(f, g)}, \quad (f, f) \geqslant 0,$$

причем последнее неравенство обращается в равенство лишь при $f = 0$ (черта сверху обозначает, как обычно, переход к комплексно сопряженной величине)*). *Нормой* $\|f\|$ элемента f называется действительное неотрицательное число $+\sqrt{(f, f)}$. Имеют место важные неравенства

$$|(f, g)|^2 \leqslant (f, f)(g, g), \tag{1}$$

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \tag{2}$$

которые будут доказаны ниже. Два элемента f и g из R называются *ортогональными* между собой, если $(f, g) = 0$. Элемент f называется *нормированным*, если $\|f\| = 1$. Система Ω элементов пространства R называется *нормированной ортогональной*, если она составлена из нормированных попарно ортогональных элементов. Очевидно, что нормированная ортогональная система $f_1, \ldots, f_n$ всегда линейно независима. Если $g_1, \ldots, g_n$ — произвольная линейно независимая система элементов из R, то ее можно *ортогонализировать*, именно построить нормированную ортогональную систему

*) Обычно к этим условиям присоединяют требование *полноты*, которое здесь не играет роли.

$f_1, \ldots, f_n$, определяемую при помощи рекуррентных соотношений

$$f_1=\frac{g_1}{\|g_1\|}, \quad f_i=\frac{g_i-(g_i, f_1)f_1-\ldots-(g_i, f_{i-1})f_{i-1}}{\|g_i-(g_i, f_1)f_1-\ldots-(g_i, f_{i-1})f_{i-1}\|}, \qquad i=2, \ldots, n.$$

Таким образом, конечномерное евклидово, соответственно унитарное пространство R всегда допускает нормированный ортогональный базис $e_1, \ldots, e_r$. Относительно него скалярное произведение двух произвольных элементов $f=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_re_r$, $g=\beta_1e_1+\ldots+\beta_re_r$ из R, очевидно, записывается в форме $(f, g)=\alpha_1\overline{\beta}_1+\ldots+\alpha_r\overline{\beta}_r$. Таким образом, неравенство (1) приобретает вид

$$|\alpha_1\overline{\beta}_1+\ldots+\alpha_r\overline{\beta}_r|^2\leqslant(\alpha_1\overline{\alpha}_1+\ldots+\alpha_r\overline{\alpha}_r)(\beta_1\overline{\beta}_1+\ldots+\beta_r\overline{\beta}_r), \tag{3}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и $\beta_1, \ldots, \beta_r$—произвольные комплексные числа. Легко видеть, что в разложении $f=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_re_r$ произвольного элемента f относительно нормированного ортогонального базиса имеем $\alpha_i=(f, e_i)$, и потому

$$(f, f)=(f, e_1)\overline{(f, e_1)}+\ldots+(f, e_r)\overline{(f, e_r)}. \tag{4}$$

Если $e_1, \ldots, e_n$—произвольная конечная нормированная ортогональная система, а не базис пространства R, которое может быть и бесконечномерным, то вместо равенства (4) имеет место важное неравенство

$$(f, e_1)\overline{(f, e_1)}+\ldots+(f, e_n)\overline{(f, e_n)}\leqslant(f, f), \tag{5}$$

которое будет доказано ниже.

Для доказательства неравенства (1) рассмотрим элемент $h=\lambda f+\mu g$. Так как скалярный квадрат каждого элемента неотрицателен, то

$$(h, h)=(f, f)\lambda\overline{\lambda}+(f, g)\lambda\overline{\mu}+\overline{(f, g)}\overline{\lambda}\mu+(g, g)\mu\overline{\mu}\geqslant 0 \tag{6}$$

при произвольных λ и μ. Если оба элемента f и g равны нулю, то неравенство (1) бессодержательно. Предположим для определенности, что $g\neq 0$, и положим в неравенстве (6) $\lambda=(g, g)$, $\mu=-(f, g)$; тогда получим:

$$(f, f)(g, g)^2-(f, g)(g, g)\overline{(f, g)}-\overline{(f, g)}(g, g)(f, g)+(g, g)(f, g)\overline{(f, g)}\geqslant 0,$$

откуда в силу неравенства $(g, g)>0$ вытекает (1).

Докажем неравенство (2). Мы имеем:

$$(f+g, f+g)=(f, f)+(f, g)+(g, f)+(g, g),$$

и в силу неравенства (1) получаем:

$$(f+g, f+g)\leqslant(f, f)+2\sqrt{(f, f)(g, g)}+(g, g).$$

Извлекая из обеих частей последнего неравенства квадратный корень, получаем неравенство (2).

Для доказательства неравенства (5) рассмотрим элемент $h = f - (f, e_1)e_1 - \ldots - (f, e_n)e_n$. Так как скалярный квадрат каждого элемента неотрицателен, то $(h, h) \geqslant 0$, из чего в результате небольших вычислений получаем (5).

B) Важнейшим для дальнейшего примером евклидова, соответственно унитарного пространства является множество всех непрерывных действительных, соответственно комплексных функций, заданных на группе G, в котором скалярное произведение двух элементов f и g определено формулой $(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Неравенство (1) приобретает здесь вид *неравенства Буняковского*

$$\left|\int f(x)\overline{g(x)}dx\right|^2 \leqslant \int f(x)\overline{f(x)}dx \cdot \int g(x)\overline{g(x)}dx. \tag{7}$$

Коэффициентами Фурье функции f относительно нормированной ортогональной системы Ω называются скалярные произведения (f, φ), где $\varphi \in \Omega$. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — конечная нормированная ортогональная система функций и f — произвольная непрерывная функция; тогда неравенство (5) получает вид неравенства для коэффициентов Фурье:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int f(x)\overline{\varphi_i(x)}dx\right|^2 \leqslant \int f(x)\overline{f(x)}dx. \tag{8}$$

Перейдем теперь к изложению основных результатов теории *интегральных уравнений с действительным симметрическим ядром*. Ниже в этом параграфе будут рассматриваться только действительные непрерывные функции, что не всегда будет оговариваться.

C) Пусть k — действительная непрерывная функция двух переменных, заданная на G и удовлетворяющая условию симметрии $k(x, y) = k(y, x)$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int k(x, y)\varphi(y)dy; \tag{9}$$

функция $k(x, y)$ называется *ядром* этого уравнения. Здесь φ — действительная непрерывная функция, а λ — действительный параметр. Если пара λ, φ удовлетворяет уравнению (9), причем функция φ не равна тождественно нулю, то λ называется *собственным значением* ядра $k(x, y)$, а φ — *собственной функцией* ядра $k(x, y)$, принадлежащей собственному значению λ. Очевидно, что собственное значение ядра не может равняться нулю. Очевидно также, что множество R_λ, составленное из всех собственных функций ядра $k(x, y)$, принадлежащих фиксированному собственному значению λ, и из функции, тождественно равной нулю, есть действительное векторное пространство. Ниже будет показано, что размерность его всегда конечна; она называется *кратностью* собственного значения λ. Будет показано также, что собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны между собой. Таким образом, выбрав в каждом *собственном подпространстве* R_λ ядра $k(x, y)$ произвольный нормированный ортогональный базис и объединив все эти базисы, мы получим нормированную ортогональную систему функций. Такая система называется *фундаментальной системой* собственных функций ядра $k(x, y)$. Оказывается, что если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ есть конечная нормированная ортогональная система собственных функций ядра $k(x, y)$, принадлежащих соответственно собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (среди которых могут быть равные), то имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\varphi_i(x))^2}{\lambda_i^2} \leqslant \int (k(x, y))^2 dy, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2} \leqslant \int\int (k(x, y))^2 dx\, dy. \tag{11}$$

Докажем прежде всего неравенства (10) и (11). Мы имеем $\int k(x, y)\varphi_i(y)dy = \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$. Соотношение это показывает, что коэффициенты Фурье функции $k(x, y)$ переменного y (x фиксировано) относительно системы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ равны $\frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}$, и потому неравенство (10) следует из неравенства (8). Интегрируя (10), получаем (11).

Докажем теперь, что размерность пространства R_λ конечна. Полагая в неравенстве (11) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, получаем:

$$n \leqslant \lambda^2 \int\int (k(x, y))^2 dx dy.$$

Это неравенство показывает, что размерность пространства R_λ не превосходит числа $\lambda^2 \int\int (k(x, y))^2\, dx\, dy$.

Пусть, наконец, φ и ψ — собственные функции ядра $k(x, y)$, принадлежащие различным собственным значениям λ и μ. Мы имеем:

$$\varphi(x) = \lambda \int k(x, y)\varphi(y)dy, \quad \psi(x) = \mu \int k(x, y)\psi(y)dy.$$

Умножая первое из этих равенств на $\mu\psi(x)$, второе на $\lambda\varphi(x)$, интегрируя каждое по x и вычитая второе из первого, получаем $(\mu - \lambda) \int \varphi(x)\psi(x)\, dx = 0$, что ввиду неравенства $\mu - \lambda \neq 0$ означает ортогональность функций φ и ψ.

Нижеследующие теоремы 26 и 27 посвящены построению фундаментальной системы собственных функций действительного симметрического ядра.

Теорема 26. *Пусть $k(x, y)$—симметрическое ядро, для которого «квадратичная форма»*

$$K(f, f)=\int\int k(x, y)f(x)f(y)dx\ dy \tag{12}$$

принимает при некоторых действительных функциях f, заданных на G, положительные значения. Оказывается, что на множестве S всех действительных функций f, заданных на G и удовлетворяющих условию $(f, f)=1$, форма (12) достигает своего максимума $\rho>0$ и что некоторая «экстремальная» функция $\varphi\in S$, т. е. функция, для которой $K(\varphi, \varphi)=\rho$, является собственной функцией ядра $k(x, y)$, принадлежащей собственному значению $\frac{1}{\rho}$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что для произвольного положительного ε существует симметрическое ядро $l(x, y)$ вида

$$l(x, y)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i l_i(x)l_i(y), \tag{13}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ суть действительные числа ,а функции $l_1, \ldots, l_m$ составляют нормированную ортогональную систему на G, удовлетворяющее неравенству

$$|k(x, y)-l(x, y)|<\varepsilon. \tag{14}$$

В силу теоремы 7 на G существуют такие функции $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$, что

$$|k(x, y)-\sum_{i=1}^{n}f_i(x)g_i(y)|<\varepsilon.$$

Положим $l(x, y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{f_i(x)g_i(y)+g_i(x)f_i(y)\}$. Функция $l(x, y)$ удовлетворяет неравенству (14) и $l(y, x)=l(x, y)$. Выразим $2n$ функций $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ линейно через функции некоторой нормированной ортогональной системы $p_1, \ldots, p_m$; тогда для $l(x, y)$ мы получим выражение

$$l(x, y)=\sum_{i, j=1}^{m}\alpha_{ij}p_i(x)p_j(y). \tag{15}$$

Умножая соотношение (15) на $p_s(x)p_t(y)$ и интегрируя, получаем:

$$\alpha_{st}=\int\int l(x, y)p_s(x)p_t(y)dx\ dy,$$

откуда следует в силу симметричности ядра $l(x, y)$, что $\alpha_{st}=\alpha_{ts}$, т. е. что билинейная форма $\sum\limits_{i, j=1}^{m} \alpha_{ij}\xi_i\eta_j$ симметрична. Приводя ее к главным осям, т. е. подвергая систему функций $p_1, \ldots, p_m$ подходящему ортогональному преобразованию, мы и приведем функцию $l(x, y)$ к виду (13).

Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$L(f, f)=\int\int l(x, y)f(x)f(y)dx\,dy \tag{16}$$

на множестве S. Вводя в рассмотрение коэффициенты Фурье $\xi_i=(f, l_i)$, мы можем придать ей алгебраический вид

$$L(f, f)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\xi_i^2 \tag{17}$$

(см. (13)), причем условие $f\in S$ в силу (8) дает:

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\leqslant 1. \tag{18}$$

Будем считать, что α_1 есть наибольшее из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, т. е. что $\alpha_1\geqslant\alpha_i$, $i=2, \ldots, n$, и положим $\alpha_1=\sigma$. Непосредственно видно, что максимум формы (17) при условии (18) равен σ и что он достигается при $\xi_1=1$, $\xi_2=\ldots=\xi_m=0$. Таким образом, форма (16) при условии $f\in S$ достигает своего максимума σ при $f=l_1=\psi$. Сверх того, нетрудно проверить, что

$$\psi(x)=\frac{1}{\sigma}\int l(x, y)\psi(y)dy. \tag{19}$$

Из соотношения (7) следует, что

$$\text{при } f\in S \text{ имеем } (K(f, f))^2\leqslant\int\int(k(x, y))^2dx\,dy. \tag{20}$$

Действительно, применяя неравенство (7) к функциям $k(x, y)$ и $f(x)f(y)$, заданным на группе $G\times G$, получаем (20). Таким образом, форма $K(f, f)$ на множестве S ограничена и имеет положительную верхнюю грань, которую мы обозначим через ρ. Из неравенства (14) следует:

$$|\rho-\sigma|<\varepsilon. \tag{21}$$

Действительно, неравенство (7) дает при $f\in S$:

$$|K(f, f)-L(f, f)|^2\leqslant\int\int(k(x, y)-l(x, y))^2\,dx\,dy<\varepsilon^2.$$

Таким образом, заданные на S функции $K(f, f)$ и $L(f, f)$ аргумента f отличаются друг от друга не более чем на ε, а потому и их верхние грани ρ и σ не могут отличаться друг от друга больше, чем на ε.

Пусть теперь $l_n(x, y)$—ядро вида (13), удовлетворяющее неравенству

$$|k(x, y)-l_n(x, y)|<\frac{\rho}{2^n}. \tag{22}$$

Число σ и функцию ψ, построенные для ядра $l(x, y)=l_n(x, y)$, обозначим через σ_n и ψ_n. Таким образом (см. (19) и (21)),

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sigma_n}\int l_n(x, y)\psi_n(y)dy, \tag{23}$$

$$|\rho-\sigma_n|<\frac{\rho}{2^n}. \tag{24}$$

Так как последовательность $l_1(x, y)$, $l_2(x, y)$, ... равномерно сходится к $k(x, y)$ (см. (22)), то множество функций этой последовательности равномерно непрерывно (см. § 28, H)), т. е. для всякого положительного δ существует такая окрестность U единицы в G, что

$$\text{при } x'x^{-1}\in U \qquad \text{имеем } |l_n(x', y)-l_n(x, y)|<\delta.$$

Отсюда и из неравенства (7) получаем в силу соотношений (23) и (24):

$$(\psi_n(x')-\psi_n(x))^2\leqslant\frac{\delta^2}{\sigma_n^2}\leqslant\frac{4\delta^2}{\rho^2},$$

а это означает, что множество функций $\psi_1, \psi_2, \ldots$ равномерно непрерывно. Далее, из соотношений (7), (22), (23) и (24) следует:

$$(\psi_n(x))^2\leqslant\frac{1}{\sigma_n^2}\int(l_n(x, y))^2dy\leqslant\frac{4}{\rho^2}\int\left(|k(x, y)|+\frac{\rho}{2}\right)^2dy,$$

а это означает, что множество функций $\psi_1, \psi_2, \ldots$ равномерно ограничено. Таким образом, в силу теоремы 23 из последовательности $\psi_1, \psi_2, \ldots$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции φ. Переходя в соотношении (23) к пределу по этой подпоследовательности, получаем:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\rho}\int k(x, y)\varphi(y)dy. \tag{25}$$

Очевидно, что $\varphi\in S$. Умножая соотношение (25) на $\rho\varphi(x)$ и интегрируя, получаем:

$$K(\varphi, \varphi)=\rho.$$

Таким образом, теорема 26 полностью доказана.

Теперь мы можем формулировать и доказать теорему, описывающую процесс построения фундаментальной системы собственных функций симметрического ядра (см. C)).

Теорема 27. *Пусть $k(x, y)$—симметрическое ядро, заданное на G* (см. C)). *Если квадратичная форма $K(f, f)$ принимает* *при некоторых действительных функциях f, заданных на G, положительные значения, то пусть φ_1—какая-нибудь экстремальная собственная функция ядра $k(x, y)$* (см. теорему 26) *и λ_1—соответствующее собственное значение. Если симметрическое ядро*

$$k_1(x, y)=k(x, y)-\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1}$$

обладает тем свойством, что его квадратичная форма $K_1(f, f)$ принимает (при некоторых f) положительные значения, то пусть φ_2—какая-нибудь экстремальная собственная функция ядра $k_1(x, y)$ и λ_2—соответствующее собственное значение. Если симметрическое ядро

$$k_2(x, y)=k_1(x, y)-\frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2}$$

обладает тем свойством, что его квадратичная форма $K_2(f, f)$ все еще принимает положительные значения, то пусть φ_3—какая-нибудь экстремальная собственная функция ядра $k_2(x, y)$ и λ_3—соответствующее собственное значение. Продолжая этот процесс, пока он возможен, мы получим конечную или бесконечную последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ и соответствующую последовательность положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Применяя тот же процесс к ядру $-k(x, y)$, мы получим конечную или бесконечную последовательность функций $\varphi_{-1}, \varphi_{-2}, \ldots$ и соответствующую последовательность положительных чисел $-\lambda_{-1}, -\lambda_{-2}, \ldots$ Оказывается, что, объединяя обе полученные системы функций, мы получим систему функций

$$\ldots, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \tag{26}$$

представляющую собой фундаментальную систему собственных функций ядра $k(x, y)$, причем функция φ_n принадлежит собственному значению λ_n, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ Далее, обе последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и $-\lambda_{-1}, -\lambda_{-2}, \ldots$ оказываются неубывающими и каждая из них неограниченно возрастает, если только содержит бесконечное число членов. Положим, наконец,

$$k_{mn}(x, y)=k(x, y)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_{-i}(x)\varphi_{-i}(y)}{\lambda_{-i}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i} \tag{27}$$

и

$$K_{mn}(g, h)=\int\int k_{mn}(x, y)g(x)h(y)dx\,dy.$$

Если двусторонняя последовательность (26) *обрывается с одной или с обеих сторон, то мы все же будем считать, что ядра $k_{mn}(x,y)$ определены для всех натуральных значений m, n, полагая $k_{mn}(x, y)=$ $=k_{m'n'}(x, y)$, где m', n'—ближайшие к m, n значения индексов,* *для которых функции системы* (26) *существуют. Оказывается, что при произвольных* g *и* h

$$\lim_{m,n\to\infty} K_{mn}(g, h)=0. \tag{28}$$

Доказательство. Допустим пока без доказательства, что нормированные функции

$$\varphi_{-m}, \dots, \varphi_{-1}, \varphi_1, \dots, \varphi_n \tag{29}$$

составляют ортогональную систему собственных функций ядра $k(x, y)$ с собственными значениями

$$\lambda_{-m}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_n.$$

Предположение это будем называть *гипотезой* $\{m, n\}$. Пусть f — произвольная функция на G; положим $c_i=(f, \varphi_i)$ и

$$f_{mn}=f-\sum_{i=1}^{m} c_{-i}\varphi_{-i}-\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i.$$

На основании гипотезы $\{m, n\}$ простыми выкладками доказывается, что

$$K_{mn}(f_{mn}, f_{mn})=K_{mn}(f, f). \tag{30}$$

При доказательстве соотношения (30), кроме гипотезы $\{m, n\}$, следует использовать соотношение (27) и ортогональность функции f_{mn} ко всем функциям системы (29). Если $f_{mn}\neq 0$, то функция $f'_{mn}=\dfrac{f_{mn}}{\sqrt{(f_{mn}, f_{mn})}}$ принадлежит к S, и, если $f\in S$, то мы имеем:

$$K_{mn}(f'_{mn}, f'_{mn})=\frac{1}{(f_{mn}, f_{mn})}K_{mn}(f, f)\geqslant K_{mn}(f, f), \tag{31}$$

причем последнее неравенство превращается в строгое равенство только в том случае, когда функция f ортогональна ко всем функциям системы (29). Действительно,

$$(f_{mn}, f_{mn})=1-\sum_{i=1}^{m} c_{-i}^2-\sum_{i=1}^{n} c_i^2,$$

и потому $(f_{mn}, f_{mn})\leqslant 1$, причем строгое равенство наступает лишь при $c_{-m}=\dots=c_{-1}=c_1=\dots=c_n=0$.

Перейдем теперь к доказательству гипотезы $\{m, n\}$. Правильность гипотезы $\{0, 1\}$ вытекает из самого определения функции φ_1 и числа λ_1 (см. теорему 26). Допустим, что справедлива гипотеза $\{0, n\}$, и докажем гипотезу $\{0, n+1\}$. Замечая, что $k_{0n}(x, y)=k_n(x, y)$, получаем из (30):

$$K_n(f_{0n}, f_{0n})=K_n(f, f). \tag{32}$$

Полагая здесь $f=\varphi_{n+1}$ и принимая во внимание, что φ_{n+1} осуществляет положительный максимум формы K_n на S, мы заключаем из (32), что $f_{0n}\neq 0$, и неравенство (31) дает:

$$K_n(f'_{0n}, f'_{0n})\geqslant K_n(f, f). \tag{33}$$

Так как функция $f=\varphi_{n+1}$ осуществляет максимум формы K_n на S и $f'_{0n}\in S$, то неравенство (33) в действительности есть равенство, и потому функция $f=\varphi_{n+1}$ согласно изложенному выше ортогональна к функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Далее, в силу построения

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda_{n+1}\int k_n(x, y)\varphi_{n+1}(y)dy$$

и из доказанной ортогональности вытекает соотношение

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda_{n+1}\int k(x, y)\varphi_{n+1}(y)dy.$$

Таким образом, гипотеза $\{0, n\}$ доказана для произвольного значения n. Для доказательства гипотезы $\{m, 0\}$ достаточно заметить, что она эквивалентна гипотезе $\{0, m\}$ для ядра $-k(x, y)$. Из гипотез $\{m, 0\}$ и $\{0, n\}$ гипотеза $\{m, n\}$ следует на основании того, что собственные функции, принадлежащие к различным собственным значениям, всегда ортогональны между собой (см. С)). Таким образом, гипотеза $\{m, n\}$ доказана.

Покажем, что

$$\lambda_{n+1}\geqslant\lambda_n. \tag{34}$$

Из ортогональности функции φ_{n+1} к функции φ_n следует:

$$K_n(\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})=K_{n-1}(\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1}). \tag{35}$$

Ввиду того, что φ_{n+1} осуществляет максимум формы K_n на S, равный $\frac{1}{\lambda_{n+1}}$, а максимум формы K_{n-1} на S равен $\frac{1}{\lambda_n}$, из равенства (35) получаем: $\frac{1}{\lambda_{n+1}}\leqslant\frac{1}{\lambda_n}$, откуда и следует (34).

Соотношение $-\lambda_{-(n+1)}\geqslant-\lambda_{-n}$ получается путем применения только что полученного результата к ядру $-k(x, y)$.

Покажем теперь, что двусторонняя последовательность

$$\ldots\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \tag{36}$$

не имеет предельных точек. Неравенство (11) показывает, что число r собственных значений ядра $k(x, y)$, по модулю не превосходящих числа a, удовлетворяет неравенству

$$r\leqslant a^2\int\int(k(x, y))^2\,dx\,dy.$$

Таким образом, на каждом ограниченном отрезке числовой прямой имеется лишь конечное число собственных значений ядра $k(x, y)$.

Докажем, наконец, соотношение (28). Верхнюю грань значений формы K_{0n} на S обозначим через ρ_{n+1}. Для всех значений n, для которых собственная функция φ_{n+1} (см. (26)) определена, $K_{0n}=K_n$, и потому для них $\rho_{n+1}=\frac{1}{\lambda_{n+1}}$. Таким образом, если последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ бесконечна, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n=0$. Если же последовательность эта конечна и содержит n' элементов, то при $n>n'$ имеем $K_{0n}=K_{n'}$, а верхняя грань значений формы $K_{n'}$ на S равна нулю; таким образом, и в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n=0$. Мы видим, следовательно, что во всех случаях

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n=0. \tag{37}$$

В силу самого определения чисел ρ_n мы для произвольной функции f имеем:

$$K_{0n}(f, f)\leqslant(f, f)\rho_{n+1}. \tag{38}$$

Точно так же, обозначая верхнюю грань значений формы $-K_{m0}$ на S через $\rho_{-(m+1)}$, получим:

$$\lim_{m\to\infty} \rho_{-m}=0, \tag{39}$$

$$K_{m0}(f, f)\geqslant-(f, f)\rho_{-(m+1)}. \tag{40}$$

Соотношение (28) мы докажем сначала в ослабленной форме, именно, при $g=h$. Так как функция f_{mn} ортогональна ко всем функциям системы (29), то в силу (30) получаем:

$$K_{mn}(f, f)=K_{mn}(f_{mn}, f_{mn})=K_{m0}(f_{mn}, f_{mn})=K_{0n}(f_{mn}, f_{mn}). \tag{41}$$

Так как $(f_{mn}, f_{mn})\leqslant(f, f)$, то из (38), (40) и (41) следует:

$$-(f, f)\rho_{-(m+1)}\leqslant K_{mn}(f, f)\leqslant(f, f)\rho_{n+1},$$

а это в силу соотношений (37) и (39) дает:

$$\lim_{m,n\to\infty} K_{mn}(f, f)=0. \tag{42}$$

Пусть теперь g и h—две произвольные функции. Мы имеем:

$$K_{mn}(g+h, g+h)=K_{mn}(g, g)+K_{mn}(h, h)+2K_{mn}(g, h),$$

откуда в силу (42) получаем (28).

Из соотношения (28) уже довольно непосредственно вытекает тот факт, что система (26) есть фундаментальная система собственных функций ядра $k(x, y)$. Пусть f—собственная функция ядра $k(x, y)$, принадлежащая собственному значению λ. Собственных функций, принадлежащих собственному значению λ и входящих в нормированную ортогональную систему (26), может быть только конечное число (см. C)); поэтому существуют настолько большие натуральные числа m и n, что система (29) уже содержит все собственные функции ядра $k(x, y)$, входящие в систему (26) и принадлежащие собственному значению λ. Если f не выражается линейно через собственные функции, принадлежащие значению λ и входящие в (26), то функция f_{mn} отлична от нуля, ортогональна ко всем функциям системы (26) и является собственной функцией ядра $k(x, y)$, принадлежащей собственному значению λ, и поэтому для нормированной функции $\varphi = f'_{mn}$ мы имеем: соотношение: $\varphi(x) = \lambda \int k(x, y)\, \varphi(y)\, dy$. Умножая его на $\frac{1}{\lambda}\varphi(x)$ и интегрируя его, получаем: $K(\varphi, \varphi) = \frac{1}{\lambda}$, а так как функция φ ортогональна ко всем функциям системы (26), то при произвольных m и n отсюда следует $K_{mn}(\varphi, \varphi) = \frac{1}{\lambda}$, что противоречит предельному соотношению (28).

Таким образом, теорема 27 полностью доказана.

В дальнейшем будет использована не сама теорема 27, а лишь ее нижеприводимое следствие.

D) Пусть $k(x, y)$ — симметрическое ядро и g — функция, заданная на G. Тогда функция $f(x) = \int k(x, y) g(y)\, dy$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_n \psi_n(x),$$

где $\psi_1, \psi_2, \ldots$ — собственные функции ядра $k(x, y)$.

Для доказательства предложения D) введем в рассмотрение коэффициенты Фурье $b_i = (g, \varphi_i)$, $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$, функции g по функциям системы (26). Коэффициенты Фурье функции f по той же системе выражаются тогда формулой $(f, \varphi_i) = \frac{b_i}{\lambda_i}$, $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Покажем, что ряд

$$\sum \frac{b_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) \tag{43}$$

равномерно и абсолютно сходится. В силу неравенств (3) и (10) мы имеем:

$$\left(\sum \left|\frac{b_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right|\right)^2 \leqslant \left(\sum b_i^2\right) \cdot \left(\sum \frac{(\varphi_i(x))^2}{\lambda_i^2}\right) \leqslant \left(\sum b_i^2\right) \int (k(x, y))^2 dy,$$

где суммирование распространено на любую конечную систему значений индекса i. Так как числа b_i являются коэффициентами Фурье функции g, то ряд, составленный из суммы их квадратов, сходится (см. (8)), и потому для произвольного положительного ε существует настолько большое p, что $\sum b_i^2$, где суммирование распространено на произвольную конечную систему значений i, по модулю превосходящих p, меньше ε. Из этого и из ограниченности функции $\int (k(x, y))^2\,dy$ мы заключаем на основании признака сходимости Коши, что ряд (43) равномерно и абсолютно сходится. Покажем, что его сумма f' равна f. Пусть h—произвольная функция на G. Мы имеем:

$$\int \Big(f(x)-\sum_{i=1}^{m}\frac{b_{-i}}{\lambda_{-i}}\varphi_{-i}(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\Big)h(x)dx=K_{mn}(g,\ h).$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $m,\ n\to\infty$, мы получаем в силу (28):

$$\int (f(x)-f'(x))h(x)=0.$$

Таким образом, функция $f-f'$ ортогональна к произвольной функции и потому тождественно равна нулю. А это значит, что $f=f'$, и предложение D) доказано.

Пример 53. Пусть G—бикомпактная топологическая группа и Ω—некоторая нормированная ортогональная система функций, заданная на ней. Покажем, что мощность множества Ω не превосходит веса пространства G.

Если G есть конечная группа порядка r, то множество всех функций, заданных на G, представляет собой векторное пространство размерности r, и потому число функций системы Ω не превосходит r; вес же пространства G равен r.

Рассмотрим теперь случай бесконечной группы G. Пусть f—произвольная функция, заданная на G. Обозначим через Ω_f множество всех таких функций $\varphi\in\Omega$, что $(f,\ \varphi)\neq 0$, и покажем, что множество Ω_f конечно или счетно. Для доказательства обозначим через Ω_f^k множество всех функций $\varphi\in\Omega_f$, для которых $|(f,\ \varphi)|>\frac{1}{k}$. Пусть $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$—произвольное конечное подмножество множества Ω_f^k. Из неравенства (8) следует, что $n<k^2(f,\ f)$; таким образом, множество Ω_f^k конечно, а так как Ω_f есть сумма множеств Ω_f^k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, то множество Ω_f не более чем счетно. Пусть теперь Ω^*—некоторая полная система функций Урысона пространства G (см. доказательство теоремы 7,c)). Будем считать, что за основу при построении системы Ω^* принят базис минимальной мощности; тогда мощность множества Ω^* равна весу пространства G. Покажем, что каждая функция $\varphi\in\Omega$ принадлежит хотя бы к одному множеству Ω_u, где $u\in\Omega^*$. Действительно, так как $(\varphi,\ \varphi)=1$, то существует окрестность U', в которой действительная или мнимая часть функции φ сохраняет знак. Пусть U—такая окрестность, что $\overline{U}\subset U'$, и u—функция системы Ω^*, построенная по паре окрестностей U, U'. Очевидно, что $(u,\ \varphi)\neq 0$. Таким образом, доказано,

что каждая функция $\varphi \in \Omega$ входит хотя бы в одно множество Ω_u, и так как множество Ω_u не более чем счетно, а мощность множества Ω^* равна весу пространства G, то мощность множества Ω не превосходит веса пространства G.

Мощность ортогональной системы не превосходит веса пространства G и в том случае, если функции системы не нормированы, а лишь не обращаются тождественно в нуль. Действительно, в этом случае систему можно нормировать.

Пример 54. Пусть G^*—аддитивная топологическая группа действительных чисел, N—подгруппа всех целых чисел, а $G = G^*/N$—факторгруппа. В примере 52 уже было отмечено, что всякую функцию φ, заданную на G, можно трактовать как периодическую функцию действительного переменного с периодом 1, и обратно. Рассмотрим функцию $\varphi_n(x) = e^{2\pi i n x}$ действительного переменного x, где e есть основание натуральных логарифмов, $i = \sqrt{-1}$, а n—целое число. Функция $\varphi_n(x)$ имеет период 1 и, следовательно, ее можно рассматривать как заданную на G. Непосредственно устанавливается, что система функций $\varphi_n(x)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, есть нормированная ортогональная система функций, заданных на G.

§ 31. Предварительные сведения о матрицах

Здесь я напомню ряд элементарных предложений из теории матриц и изложу сверх того доказательство леммы Шура, которая играет весьма важную роль в теории линейных представлений.

A) Пусть R—r-мерное векторное пространство над полем P (см. § 7, I)) и f—его *линейное отображение* в себя. Требование линейности отображения f выражается в форме

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \tag{1}$$

где x и y суть два вектора пространства R, а α и β—элементы поля P. Выберем в R некоторый базис и обозначим через $x_1, \ldots, x_r$ координаты вектора x, а через $f_1(x), \ldots, f_r(x)$—координаты вектора $f(x)$. Тогда имеют место соотношения

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{r} d_{ij} x_j, \tag{2}$$

где коэффициенты $d_{ij} \in P$ не зависят от выбранного вектора x, а определяются отображением f. Этим при фиксированном базисе пространства R устанавливается взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями этого пространства в себя и *квадратными матрицами* порядка r:

$$f \rightarrow \|d_{ij}\| = d. \tag{3}$$

Если отображение f — *невырождающееся*, т. е. обладает обратным (в этом случае отображение f мы будем называть *линейным преобразованием* пространства R), то детерминант матрицы $\|d_{ij}\|$ не равен нулю, и наоборот. Произведению двух преобразований соответствует произведение соответствующих матриц (см. пример 2), и преобразованию f^{-1}, обратному к f, соответствует матрица, обратная к матрице $\|d_{ij}\|$. Совокупность всех линейных преобразований (или матриц с детерминантами, отличными от нуля) есть группа по умножению. В случае, когда P есть поле действительных или комплексных чисел, группа эта естественным образом становится топологической, если за базисную окрестность в ней принять совокупность всех таких матриц $\|x_{ij}\|$, что $|x_{ij}-a_{ij}|<\varepsilon$, где $\|a_{ij}\|$ есть произвольная матрица с рациональными элементами, а ε — произвольное рациональное положительное число. Таким образом, топологическая группа матриц обладает счетной топологической базой.

B) Заменим базис в R некоторым другим. Тогда новые и старые координаты одного и того же вектора будут связаны соотношениями

$$x'_i=\sum_{j=1}^{r} t_{ij}x_j, \tag{4}$$

где матрица $\|t_{ij}\|=t$ имеет необращающийся в нуль детерминант. В этом новом базисе отображению f будет соответствовать некоторая новая матрица $\|d'_{ij}\|=d'$, причем

$$d'=tdt^{-1}. \tag{5}$$

Говорят, что матрица d переходит в матрицу d' с помощью *трансформации* матрицей t. Таким образом, инвариантами отображения f являются те и только те, которые принадлежат одновременно всем матрицам, связанным соотношением (5). Примером такого инварианта является *след* $\mathrm{Sp}(d)$ *матрицы* d,

$$\mathrm{Sp}(d)=\sum_{i=1}^{r} d_{ii}, \tag{6}$$

ибо $\mathrm{Sp}(d')=\mathrm{Sp}(d)$. Таким образом, можно говорить о *следе отображения* f, $\mathrm{Sp}(f)=\mathrm{Sp}(d)$. Если a и b суть две матрицы, то след их произведения не зависит от порядка сомножителей

$$\mathrm{Sp}(ab)=\mathrm{Sp}(ba). \tag{7}$$

C) Пусть линейное отображение f пространства R в себя *оставляет инвариантным* некоторое векторное подпространство S размерности s, $f(S)\subset S$, причем $0<s<r$. Выберем базис в пространстве R таким образом, чтобы первые s его векторов лежали

в подпространстве S. Тогда матрица d, соответствующая отображению f, получит вид

$$d=\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

где a и c символически обозначают некоторые квадратные матрицы соответственно порядков s и $r-s$, b—некоторую прямоугольную матрицу, а 0—прямоугольную матрицу, составленную из нулей. Пусть d^*—матрица, полученная транспонированием из матрицы d (см. пример 3); тогда отображение f^*, соответствующее матрице d^*, оставляет инвариантным подпространство, порожденное $r-s$ последними векторами базиса, и размерность $r-s$ этого подпространства также отлична от нуля и r. Не следует думать, что отображения f и f^* связаны между собой инвариантно; связь их случайна, она зависит от выбора базиса.

D) Пусть Δ—некоторое множество линейных отображений r-мерного векторного пространства R в себя. Множество Δ называется *приводимым*, если существует подпространство S пространства R размерности s, $0<s<r$, остающееся инвариантным при всех отображениях множества Δ. Если условие приводимости не выполнено, то множество Δ называется *неприводимым*. Пусть Σ—некоторое множество квадратных матриц порядка r, а Δ—множество линейных отображений пространства R в себя, соответствующих матрицам множества Σ при некотором выборе базиса в R. Множество Σ матриц называется *приводимым* или *неприводимым*, смотря по тому, будет ли приводимым или неприводимым множество отображений Δ. Легко видеть, что это определение корректно, т. е. приводимость или неприводимость множества Σ не зависит от выбора базиса, определяющего переход от Σ к Δ. Покажем, что если множество Σ матриц приводимо, то и множество Σ^* транспонированных матриц также приводимо.

Согласно замечанию C) существует такая постоянная матрица t, что все матрицы множества $t\Sigma t^{-1}$ имеют специальный вид (8), т. е. что если $x \in \Sigma$, то $txt^{-1}=x'$ имеет вид (8). Все отображения, соответствующие матрицам x'^*, ввиду замечания C) оставляют инвариантным некоторое подпространство S' пространства R, одно и то же для всех $x \in \Sigma$. Транспонируем соотношение $txt^{-1}=x'$ и разрешим его относительно x^*. Мы получим $t^{*-1}x^*t^*=x'^*$, $x^*=$ $=t^*x'^*t^{*-1}$. Так как все отображения, соответствующие матрицам x'^*, оставляют инвариантным подпространство S', то и все отображения, соответствующие (в том же базисе) матрицам x^*, оставляют инвариантным некоторое подпространство S'', одно и то же для всех $x \in \Sigma$, и, следовательно, семейство Σ^* матриц x^* приводимо.

Докажем теперь следующее важное предложение, принадлежащее И. Шуру.

Лемма Шура. *Пусть Σ—некоторое неприводимое множество квадратных матриц порядка m, Ω—некоторое также неприводимое множество квадратных матриц порядка n и a—прямоугольная матрица, число строк которой равно m, а число столбцов равно n. Допустим, что имеет место соотношение*

$$\Sigma a = a\Omega, \tag{9}$$

т. е. что для всякой матрицы $u \in \Sigma$ найдется матрица $v \in \Omega$, для которой

$$ua = av, \tag{10}$$

и, обратно, для всякой матрицы $v' \in \Omega$ найдется матрица $u' \in \Sigma$, для которой

$$u'a = av'.$$

При этих условиях возможны лишь два случая: либо все элементы матрицы a равны нулю, либо $m = n$, и квадратная матрица a имеет детерминант, отличный от нуля.

Доказательство. Пусть R—векторное пространство размерности m, взятое с определенным базисом. Тогда матрицы множества Σ могут быть истолкованы как линейные отображения пространства R. Пусть, далее, $a = \|a_{ij}\|$ и a_k—вектор пространства R с координатами $a_{1k}, \ldots, a_{mk}$; координаты вектора a_k суть элементы k-го столбца матрицы a. Обозначим через S линейное подпространство пространства R, порожденное векторами $a_1, \ldots, a_n$, и покажем, что подпространство S остается инвариантным при всех отображениях множества Σ.

Пусть $u = \|u_{ij}\|$—некоторая матрица множества Σ и $v = \|v_{ij}\|$—такая матрица множества Ω, что $ua = av$. Применяя отображение u к вектору a_k, мы получим некоторый вектор b_k с координатами $b_{ik} = \sum_{j=1}^{m} u_{ij}a_{jk}$, $i = 1, \ldots, m$. Определяя соответствующий член правой части равенства $ua = av$, мы получим $b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_{jk}$, $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, координаты вектора b_k линейно выражаются через координаты векторов $a_1, \ldots, a_n$, а это и значит, что $b_k \in S$. Следовательно, все отображения множества Σ оставляют инвариантным пространство S.

Так как множество Σ неприводимо, то размерность пространства S должна быть равна нулю или m. В первом случае все векторы a_k, порождающие пространство S, обращаются в нуль, т. е. все элементы матрицы a равны нулю. Во втором случае среди векторов системы $a_1, \ldots, a_n$ имеется ровно m линейно независимых, а это значит, что среди столбцов матрицы a имеется m линейно независимых. Из этого уже следует, что

$$n \geqslant m. \tag{11}$$

Обозначим теперь через Σ^* множество матриц, получаемых транспонированием из матриц множества Σ, и через Ω^*—аналогичное множество матриц, получаемое из Ω. Согласно замечанию D) множества Σ^* и Ω^* неприводимы. Через a^* обозначим матрицу, получаемую транспонированием из матрицы a. Транспонируя соотношение (9), получим $\Omega^* a^* = a^* \Sigma^*$. Применяя к этому соотношению те же рассуждения, что и к соотношению (9), мы убедимся в том, что имеются лишь две возможности: либо все элементы матрицы a^* равны нулю, либо в матрице a^* существует n линейно независимых столбцов. Первое предположение уже было разобрано. Во втором же случае в матрице a имеется n линейно независимых строк, т. е. $n \leqslant m$. Последнее в соединении с ранее полученным неравенством (11) означает, что матрица a—квадратная и детерминант ее не равен нулю. Таким образом, лемма Шура доказана.

В качестве непосредственного следствия леммы Шура докажем следующее предложение, справедливое в отличие от всего ранее сказанного в этом параграфе лишь для *алгебраически замкнутого* поля P (т. е. поля, в котором каждое алгебраическое уравнение имеет корень). Мы ограничимся при формулировке случаем, когда P есть поле D^2 комплексных чисел.

E) Пусть Ω—некоторое неприводимое в комплексной области множество квадратных матриц порядка r и b—некоторая квадратная матрица также порядка r, перестановочная со всеми матрицами множества Ω. Тогда матрица b имеет вид βe, где β—некоторое комплексное число, а e—единичная матрица.

Для доказательства введем в рассмотрение матрицу $a = b - \beta e$, где β—такое комплексное число, что детерминант матрицы a равен нулю. Так как детерминант матрицы $b - \beta e$ является многочленом с комплексными коэффициентами относительно переменного β, то комплексное число β, обладающее указанным свойством, существует. Так как, далее, матрица b перестановочна со всеми матрицами множества Ω, то тем же свойством обладает и матрица a. Мы имеем, таким образом, соотношение $\Omega a = a\Omega$. На основании леммы заключаем из этого соотношения, что все элементы матрицы a равны нулю, ибо детерминант матрицы a равен нулю по условию. Таким образом, $b = \beta e$.

F) Пусть Ω—неприводимая в комплексной области система матриц, всякие две матрицы которой перестановочны между собой. Тогда все матрицы множества Ω имеют порядок 1.

На основании предложения E) мы заключаем, что все матрицы множества Ω имеют вид βe, где β—комплексное число, а e—единичная матрица. Но множество матриц такого вида может быть неприводимым лишь тогда, когда все матрицы имеют порядок 1.

Остановимся теперь несколько подробнее на свойствах *унитарных* матриц.

G) Пусть R—унитарное пространство конечной размерности r (см. § 30, A)). Линейное преобразование f пространства R называется *унитарным*, если оно сохраняет скалярное произведение, т. е. если $(f(x), f(y))=(x, y)$ для произвольных x и y из R. Матрица унитарного преобразования относительно нормированного ортогонального базиса называется *унитарной* матрицей. Непосредственные вычисления показывают, что матрица d унитарна тогда и только тогда, когда $\overline{d}^*d=e$, где черта обозначает замену всех элементов матрицы комплексно сопряженными, звездочка—транспонирование, а e—единичную матрицу. Это соотношение эквивалентно каждому из соотношений: $\overline{d}^*=d^{-1}$, $d\overline{d}^*=e$. Если все элементы унитарной матрицы действительны, то условие унитарности превращается в условие ортогональности (см. пример 3). Так как унитарные преобразования в силу самого своего определения образуют группу, то все унитарные матрицы данного порядка r образуют группу по умножению. Группа эта как подгруппа топологической группы всех матриц порядка r с детерминантом, отличным от нуля, является топологической и обладает счетной топологической базой. Так как каждый элемент унитарной матрицы в силу соотношения $\overline{d}^*d=e$ не превосходит по модулю единицы, то группа эта компактна и, следовательно, бикомпактна. Множество всех ортогональных матриц порядка r есть подгруппа группы унитарных матриц.

H) Пусть R—комплексное векторное пространство. Комплексная функция $\varphi(x, y)$ двух векторов x, y из R называется *эрмитовой билинейной формой*, если $\varphi(\lambda x+\mu y, z)=\lambda\varphi(x, z)+\mu\varphi(y, z)$, где λ, μ—комплексные числа, и $\varphi(y, x)=\overline{\varphi(x, y)}$. Эрмитова форма $\varphi(x, y)$ называется *положительно определенной*, если $\varphi(x, x)>0$ при $x\neq 0$. Очевидно, что любая положительно определенная эрмитова билинейная форма может быть принята за скалярное произведение в R, после чего R превращается в унитарное пространство.

I) Пусть Σ—некоторое приводимое (см. D)) множество унитарных матриц порядка r. Тогда существует такая унитарная матрица t порядка r, что для всякой матрицы $d\in\Sigma$ матрица $d'=$ $=t\,dt^{-1}$ имеет специальный вид

$$d'=\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}; \tag{12}$$

здесь a и b—унитарные матрицы. Этот факт выражают, говоря, что всякое приводимое множество унитарных матриц *вполне приводимо*.

Будем трактовать матрицы множества Σ как матрицы унитарных преобразований унитарного пространства R размерности r относительно некоторого его нормированного ортогонального базиса. Так как множество Σ приводимо, то все преобразования, соответствующие его матрицам, оставляют инвариантным одно и то же подпространство S размерности s, $0<s<r$. Выберем теперь в R новый нормированный ортогональный базис таким образом, чтобы первые s его векторов лежали в S. Матрица t, осуществляющая переход от старых координат к новым, унитарна, и матрица $d'=tdt^{-1}$, где $d\in\Sigma$, имеет, очевидно, специальный вид (12).

§ 32. Соотношения ортогональности

Так же как и в § 30, через G здесь будет обозначаться бикомпактная топологическая группа.

Определение 34. Гомоморфное отображение g топологической группы G в топологическую группу действительных или комплексных матриц некоторого порядка (см. § 31, A)) называется *линейным представлением* топологической группы G. В случае надобности мы будем различать *действительные* и *комплексные* представления группы G. Таким образом, каждому элементу $x\in G$ соответствует матрица $g(x)$, элементы которой мы будем обозначать через $g_{ij}(x)$, $g(x)=\|g_{ij}(x)\|$. Порядок матриц $g(x)$ называется *степенью* представления g. Два линейных представления g и h группы G, имеющие одинаковую степень, называются *эквивалентными*, если существует такая постоянная (не зависящая от x) матрица t, что

$$h(x)=tg(x)t^{-1} \tag{1}$$

при всяком $x\in G$.

Если g есть линейное представление топологической группы G, $g(x)=\|g_{ij}(x)\|$, то функции g_{ij} непрерывны, ибо речь идет здесь о гомоморфном отображении топологической группы в топологическую, т. е. о непрерывном отображении. Обратно, если имеется гомоморфное отображение g алгебраической группы G в алгебраическую группу матриц, $g(x)=\|g_{ij}(x)\|$, и функции g_{ij} непрерывны на топологической группе G, то g есть гомоморфное отображение топологической группы G в топологическую группу матриц, т. е. g есть линейное представление топологической группы G.

Теорема 28. *Если g есть некоторое комплексное линейное представление бикомпактной группы G, то существует эквивалентное ему представление g', все матрицы которого унитарны* (см. § 31, G)). *Таким образом, для всякого линейного представления существует эквивалентное ему унитарное.*

Доказательство. Пусть r — степень представления g. Через R обозначим r-мерное комплексное векторное пространство, взятое с определенным базисом, и рассмотрим положительно определенную эрмитову форму

$$\psi(u, v)=\sum_{i=1}^{r} u_i\bar{v}_i, \tag{2}$$

где $u_1, \ldots, u_r$; $v_1, \ldots, v_r$—координаты векторов u, v. Каждой матрице $g(x)$ соответствует некоторое линейное преобразование пространства R; преобразование это мы обозначим через g_x. Подставляя в эрмитову форму (2) вместо векторов u, v векторы $g_x(u)$, $g_x(v)$, мы получим функцию

$$\psi_x(u, v)=\psi(g_x(u), g_x(v)), \tag{3}$$

которая, как легко видеть, также является положительно определенной эрмитовой формой. Составим теперь новую эрмитову форму

$$\varphi(u, v)=\int \psi_x(u, v)\,dx. \tag{4}$$

Форма $\varphi(u, v)$ также является положительно определенной. Покажем, что форма эта остается инвариантной при замене векторов u, v векторами $g_y(u)$, $g_y(v)$, где $y \in G$. Действительно, принимая во внимание, что $g_x g_y=g_{xy}$, получаем в силу инвариантности интегрирования:

$$\varphi(g_y(u), g_y(v))=\int \psi(g_{xy}(u), g_{xy}(v))dx=\int \psi_{xy}(u, v)dx= \\ =\int \psi_x(u, v)dx=\varphi(u, v).$$

Примем форму $\varphi(u, v)$ за скалярное произведение в R (см. § 31, Н)) и выберем в R какой-нибудь нормированный ортогональный базис. В этом базисе преобразованию g_y соответствует некоторая матрица $g'(y)$. Так как преобразование g_y сохраняет скалярное произведение $\varphi(u, v)$, то матрица $g'(y)$ унитарна. Таким образом, g' есть унитарное представление группы G. Обозначая через t матрицу перехода от старого базиса к новому, получаем $g'(x)=tg(x)t^{-1}$. Итак, теорема 28 доказана.

Определение 35. *Характером* $\chi(x)$ линейного представления g группы G называется след матрицы $g(x)$ (см. § 31, В)). Таким образом, характер представления есть числовая функция, заданная на группе G, именно, $\chi(x)=\mathrm{Sp}(g(x))$. Очевидно, что два эквивалентных представления имеют равные характеры, ибо следы матриц $g(x)$ и $tg(x)t^{-1}$ равны. Характер представления обладает *свойством инвариантности*, именно:

$$\chi(a^{-1}xa)=\chi(x), \tag{5}$$

где a—произвольный элемент из G. Действительно,

$$\chi(a^{-1}xa)=\mathrm{Sp}(g(a^{-1}xa))=\mathrm{Sp}((g(a))^{-1}g(x)g(a))=\mathrm{Sp}(g(x))=\chi(x).$$

А) Пусть g—некоторое приводимое комплексное представление группы G. В силу теоремы 28 и замечания I) § 31 найдется такая матрица t, что матрицы $h(x)=tg(x)t^{-1}$ имеют специальный вид

$$h(x)=\begin{Vmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & g''(x) \end{Vmatrix},$$

где $g'(x)$ и $g''(x)$ суть унитарные матрицы. Мы скажем, что представление g *распалось* в два представления g' и g''. Если представления g' и g'' опять приводимы, то их можно подвергнуть дальнейшему расщеплению. Таким образом, всякое представление g распадается в конечную систему неприводимых представлений $g_1, \ldots, g_n$. Если обозначить через χ характер представления g и через χ_i—характер представления g_i, то имеет место очевидное равенство

$$\chi=\chi_1+\cdots+\chi_n.$$

Теорема 29. *Пусть g и h—два унитарных неприводимых неэквивалентных представления группы G, $g(x)=\|g_{ij}(x)\|$, $h(x)=\|h_{ij}(x)\|$. Через χ и χ' обозначим характеры представлений g и h. Тогда имеют место следующие соотношения ортогональности:*

$$\int g_{ij}(x)\overline{h}_{kl}(x)dx=0, \tag{6}$$

$$\int \chi(x)\overline{\chi'}(x)dx=0. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть m—степень представления g и n—степень представления h. Обозначим через b произвольную постоянную матрицу, число строк которой равно m, а число столбцов равно n. Положим $a(x)=g(x)bh(x^{-1})$. Пусть, далее, $a=\int a(x)\,dx$ (под *интегралом от матрицы* $a(x)$ понимается такая матрица a, элементами которой являются интегралы от соответствующих элементов исходной матрицы $a(x)$).

Покажем, что $g(y)ah(y^{-1})=a$. Действительно,

$$g(y)ah(y^{-1})=\int g(y)g(x)bh(x^{-1})h(y^{-1})dx=\int g(yx)bh((yx)^{-1})dx=a.$$

(см. определение 33, 7)). Мы имеем, таким образом, $g(x)a=ah(x)$. В силу леммы Шура (см. § 31) возможны два случая. Если предположить, что $m=n$ и детерминант матрицы a не равен нулю, то получаем $h(x)=a^{-1}g(x)a$, т. е. представления g и h эквивалентны, что противоречит предположению. Таким образом, матрица a составлена из нулей, и мы имеем:

$$\int g(x)bh(x^{-1})dx=a=0.$$

Выберем матрицу b специальным образом, именно, предположим, что ее элемент, стоящий в j-й строке и l-м столбце, есть единица, а все остальные элементы—нули. Тогда, принимая во внимание соотношение $h(x^{-1})=(\overline{h(x)})^*$ (см. § 31, G)), получаем:

$$\int g_{ij}(x)\overline{h}_{kl}(x)dx=0.$$

Соотношение (7) для характеров χ и χ' следует непосредственно из (6), так как $\chi(x)$ и $\chi'(x)$ линейно выражаются соответственно через $g_{ii}(x)$ и $h_{jj}(x)$.

Теорема 30. *Пусть g—некоторое унитарное неприводимое представление группы G степени r, $g(x)=||g_{ij}(x)||$. Обозначим через χ характер представления g:*

$$\chi(x)=\sum_{i=1}^{r} g_{ii}(x). \tag{8}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\int g_{ij}(x)\overline{g}_{ij}(x)dx=\frac{1}{r}; \tag{9}$$

далее, если $i\neq k$ или $j\neq l$, то 101

$$\int g_{ij}(x)\overline{g}_{kl}(x)dx=0. \tag{10}$$

Наконец,

$$\int \chi(x)\overline{\chi}(x)dx=1. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $b=||b_{ij}||$—квадратная постоянная матрица порядка r. Положим $a(x)=g(x)bg(x^{-1})$, $a=\int a(x)dx$. Покажем, что матрица a обладает следующим свойством инвариантности:

$$g(y)ag(y^{-1})=a. \tag{12}$$

Действительно,

$$g(y)ag(y^{-1})=\int g(y)g(x)bg(x^{-1})g(y^{-1})dx=\int g(yx)bg((yx)^{-1})dx=a$$

(см. определение 33, 7)). Из соотношения (12) следует, что $g(x)a=ag(x)$ при произвольном x. Отсюда на основании замечания E) § 31 мы заключаем, что матрица a имеет вид $\alpha e'$, где e'—единичная матрица, а α—комплексное число, зависящее от матрицы b. Таким образом,

$$\int g(x)bg(x^{-1})dx=\alpha e'. \tag{13}$$

Определим число α. Для этого возьмем след от обеих частей соотношения (13). Мы имеем:

$$\mathrm{Sp}\left(\int g(x)bg(x^{-1})dx\right)=\int \mathrm{Sp}(g(x)bg(x^{-1}))dx=\int \mathrm{Sp}(b)dx=\mathrm{Sp}(b)$$

(см. § 31, B)). Но след правой части соотношения (13) равен αr. Таким образом, $\alpha = \frac{1}{r}\operatorname{Sp}(b)$.

Выберем теперь матрицу b специальным образом. Именно, предположим, что только ее элемент, стоящий в j-й строке и l-м столбце, отличен от нуля и равен единице. Тогда $\operatorname{Sp}(b) = \delta_{jl}$. Принимая во внимание, что $g(x^{-1}) = \overline{(g(x))}^*$ (см. § 31, G)), мы при этих условиях получаем из соотношения (13):

$$\int g_{ij}(x)\overline{g}_{kl}(x)dx = \frac{1}{r}\,\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{14}$$

Но соотношение (14) эквивалентно соотношениям (9), (10). Из него же вытекает и соотношение (11). Таким образом, теорема 30 доказана.

Остановимся теперь более подробно на характерах представлений.

B) Обозначим через Δ множество характеров всех неэквивалентных между собой неприводимых комплексных представлений группы G. Из соотношений (7) и (11) следует, что Δ есть нормированная ортогональная система функций, заданных на G. Пусть g—произвольное представление группы G и χ—его характер. Согласно замечанию A) представление g распадается в систему неприводимых представлений, и мы имеем:

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_i(x), \tag{15}$$

где m_i есть целое неотрицательное число, обозначающее кратность, с которой неприводимое представление g_i, обладающее характером χ_i, входит в представление g. Умножая соотношение (15) на $\overline{\chi}_k(x)$ и интегрируя, получаем:

$$m_k = \int \chi(x)\overline{\chi}_k(x)dx.$$

Таким образом, число m_k является коэффициентом Фурье функции χ по системе Δ. Это значит, что числа m_k определены однозначно функцией χ. Таким образом, характер χ представления g определяет это представление однозначно с точностью до эквивалентности.

Умножим соотношение (15) на сопряженное ему и проинтегрируем; тогда мы получим:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = \int \chi(x)\overline{\chi}(x)dx. \tag{16}$$

Последнее соотношение дает нам критерий неприводимости представления g; именно, представление g неприводимо тогда и только тогда, когда его характер χ удовлетворяет условию

$$\int \chi(x)\bar{\chi}(x)dx=1. \tag{17}$$

Если представление g приводимо, то

$$\int \chi(x)\bar{\chi}(x)dx>1.$$

Теорема 31. *Если группа G коммутативна, то все ее неприводимые представления имеют степень 1. В этом случае неприводимое представление g совпадает со своим характером χ, $g(x)=\|\chi(x)\|$, ибо матрица $g(x)$ при этих условиях есть просто число.*

Эта теорема непосредственно следует из замечания F) § 31.

Пример 55. Пусть G и H — две бикомпактные топологические группы. Обозначим через F их прямое произведение. Каждый элемент $z\in F$ представляет собой пару (x, y), где $x\in G$, $y\in H$. Пусть g — некоторое неприводимое представление группы G степени m и h — неприводимое представление группы H степени n, $g(x)=\|g_{ij}(x)\|$, $h(y)=\|h_{kl}(y)\|$.

Исходя из представлений g и h групп G и H, построим некоторое представление f группы F, также неприводимое. Для этого введем в рассмотрение парный индекс (i, k), где первый элемент пары принимает значения $1, \ldots, m$, а второй — значения $1, \ldots, n$. Можно, конечно, занумеровать все пары (i, k) числами $1, \ldots, mn$, однако этим мы явно пользоваться не будем. Введем теперь в рассмотрение новую квадратную матрицу $f(z)=\|f_{(i,k)(j,l)}(z)\|$ порядка mn, положив $f_{(i,k)(j,l)}(z)=g_{ij}(x)h_{kl}(y)$, где $z=(x, y)$. Нетрудно проверить, что матрица $f(z)$ дает нам представление группы F. Покажем, что представление это неприводимо. Для этого вычислим характер χ представления f, обозначив через χ' и χ'' характеры представлений g и h. Непосредственные вычисления показывают, что $\chi(z)=\chi'(x)\chi''(y)$, где $z=(x, y)$. Применим к представлению f критерий неприводимости (17). Мы имеем:

$$\int \chi(z)\bar{\chi}(z)dz=\int\int \chi'(x)\chi''(y)\bar{\chi}'(x)\bar{\chi}''(y)dx\,dy=1$$

(см. теорему 25). Таким образом, представление f неприводимо. В следующем параграфе будет показано, что все (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления группы F могут быть получены этой конструкцией (см. пример 59).

Пример 56. Пусть G — топологическая группа, рассмотренная в примерах 52 и 54, и φ_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — система функций, определенная на ней в примере 54, $\varphi_n(x)=e^{2\pi inx}$. Рассмотрим матрицу первого порядка $g_n(x)=\|\varphi_n(x)\|$. Тогда g_n есть линейное представление группы G, имеющее первую степень; более того, представление g_n является унитарным. Характером представления g_n служит функция $\varphi_n(x)$. Как известно из анализа, не существует нормированной функции, ортогональной ко всем функциям $e^{2\pi i n x}$. Отсюда следует, что представлениями g_n исчерпываются все неприводимые представления группы G.

§ 33. Полнота системы неприводимых представлений

В настоящем параграфе будет дано доказательство (см. [33]) теоремы Петера и Вейля о полноте системы функций, возникающих из неприводимых представлений группы. Доказательство проводится методом, изложенным в [38]. Здесь, как и в предыдущем параграфе, через G обозначается бикомпактная топологическая группа. Все рассматриваемые функции непрерывны.

A) Множество Δ действительных или комплексных функций, заданных на G, называется *равномерно полным*, если для всякой (действительной или соответственно комплексной) функции f, заданной на G, и всякого положительного числа ε существуют такие функции $f_1, \ldots, f_n$ из Δ и такие действительные или соответственно комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

Очевидно, что всякое равномерно полное множество действительных функций является также равномерно полным, если его рассматривать как множество комплексных функций.

Теорема 32. *Из каждого класса попарно эквивалентных между собой неприводимых унитарных представлений группы G выберем по одному представлению и множество всех полученных таким образом представлений обозначим через Ω. Множество всех функций g_{ij}, возникающих из представлений $g\in\Omega$, $\|g_{ij}(x)\|=g(x)$, обозначим через Δ. Оказывается, что множество Δ комплексных функций равномерно полно* (см. A)).

Доказательство. Пусть k—действительная непрерывная функция, заданная на G и удовлетворяющая условию симметрии

$$k(z^{-1})=k(z). \tag{2}$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int k(x^{-1}y)\varphi(y)dy. \tag{3}$$

Из соотношения (2) вытекает, что ядро уравнения (3) симметрично:

$$k(x^{-1}y)=k(y^{-1}x).$$

Обозначим через Δ' совокупность всех собственных функций всех ядер вида $k(x^{-1}y)$ (см. § 30, C)) и докажем, что система Δ' действительных функций является равномерно полной.

Пусть f—произвольная действительная функция, заданная на G. Функция f, будучи непрерывной, является равномерно непрерывной (см. § 28, C)), т. е. для всякого положительного ε существует такая окрестность U единицы e группы G, что при $x^{-1}y \in U$ имеем:

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

причем $U^{-1}=U$. Пусть V—такая окрестность единицы e, что $\overline{V}\subset U$. Согласно лемме Урысона (см. § 12) существует такая непрерывная функция q, что $0\leqslant q(z)\leqslant 1$ при всяком $z\in G$, $q(z)=0$ при $z\in G\setminus U$ и $q(z)=1$ при $z\in\overline{V}$. Положим $k'(z)=\alpha(q(z)+q(z^{-1}))$, где α—действительное положительное число, выбранное так, что $\int k'(z)\,dz=1$. Функция k' отлична от нуля лишь на U и удовлетворяет условию симметрии (2). Положим:

$$f'(x)=\int k'(x^{-1}y)f(y)dy.$$

Благодаря специальному выбору функции k' и неравенству (4) мы имеем:

$$|f(x)-f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Действительно,

$$|f'(x)-f(x)|=\left|\int k'(x^{-1}y)(f(y)-f(x))dy\right|\leqslant\int k'(x^{-1}y)\frac{\varepsilon}{2}\,dy=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно предложению D) § 30 функцию f' можно разложить в равномерно сходящийся ряд

$$f'(x)=\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\ldots, \tag{6}$$

где φ_i, $i=1, 2, \ldots$, суть собственные функции ядра $k'(x^{-1}y)$. Существует, таким образом, столь большое число n, что действительная функция

$$f''(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x) \tag{7}$$

удовлетворяет неравенству

$$|f'(x)-f''(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Соединяя неравенства (5) и (8), получаем:

$$|f(x)-f''(x)|<\varepsilon. \tag{9}$$

Так как все функции φ_i, $i=1, \ldots, n$, принадлежат системе Δ' и ε произвольно мало, то из (9) и (7) следует равномерная полнота системы Δ'.

Обозначим теперь через Δ'' множество всех комплексных функций g_{ij}, возникающих из всех (не только неприводимых) представлений g, $\|g_{ij}(x)\|=g(x)$, группы G, и покажем, что система комплексных функций Δ'' является равномерно полной.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что всякая функция системы Δ' выражается в виде конечной линейной формы с постоянными коэффициентами относительно функций системы Δ'', ибо равномерная полнота системы Δ' уже доказана.

Пусть φ'—некоторая функция системы Δ', т. е. пусть φ' удовлетворяет уравнению (3) при некотором выборе ядра $k(x^{-1}y)$. Пусть λ'—то собственное значение, которому принадлежит собственная функция φ', и

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{10}$$

—нормированный ортогональный базис собственного пространства ядра $k(x^{-1}y)$, принадлежащего собственному значению λ' (см. § 30, C)). Тогда φ' выражается линейно через функции системы (10), и достаточно показать, что все функции системы (10) линейно выражаются через функции системы Δ''.

Если функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (3), то и функция $\varphi(ax)$ также является решением уравнения (3) при том же λ. Действительно, так как x в уравнении (3) является произвольным переменным, то его можно заменить на ax; в то же время благодаря инвариантности интегрирования y можно заменить на ay, и мы получаем:

$$\varphi(ax)=\lambda\int k(x^{-1}a^{-1}ay)\varphi(ay)dy=\lambda\int k(x^{-1}y)\varphi(ay)dy.$$

Таким образом, функции

$$\varphi_1(ax), \ldots, \varphi_n(ax) \tag{11}$$

являются решениями уравнения (3) при $\lambda=\lambda'$ и, следовательно, линейно выражаются через функции системы (10). Мы имеем, таким образом:

$$\varphi_i(ax)=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(a)\varphi_j(x). \tag{12}$$

Кроме того, система (11) нормирована и ортогональна, ибо

$$\int\varphi_i(ax)\varphi_j(ax)dx=\int\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\delta_{ij}.$$

Таким образом, функции системы (11) линейно независимы, и через них могут быть линейно выражены функции системы (10).

Следовательно, матрица $\|g_{ij}(x)\|=g(x)$ имеет обратную. Более того, матрица $g(x)$ ортогональна, но это для нас неважно. Умножая соотношение (12) на $\varphi_k(x)$ и интегрируя, получим:

$$g_{ik}(a)=\int\varphi_i(ax)\varphi_k(x)dx,$$

откуда следует непрерывность функций g_{ij} (см. § 29, J)). Вычислим, далее, $g(ab)$. Мы имеем из соотношения (12):

$$\varphi_i(abx)=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(ab)\varphi_j(x). \tag{13}$$

Далее, из того же соотношения (12) получаем:

$$\varphi_i(abx)=\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(a)\varphi_k(bx)=\sum_{k,\ j=1}^{n} g_{ik}(a)g_{kj}(b)\varphi_j(x). \tag{14}$$

Сравнивая коэффициенты в правых частях равенств (13) и (14), получаем:

$$g_{ij}(ab)=\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(a)g_{kj}(b),$$

что в матричной форме записывается следующим образом:

$$g(ab)=g(a)g(b). \tag{15}$$

Из соотношения (15) и непрерывности функций g_{ij} мы заключаем, что g есть линейное представление группы G. Таким образом, все функции

$$g_{ij} \tag{16}$$

принадлежат системе Δ''.

Заменим теперь в равенстве (12) элемент x единицей e. Мы получим:

$$\varphi_i(a)=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(a)\varphi_j(e).$$

Но это означает, что функции системы (10) линейно выражаются через функции (16), т. е. через функции, принадлежащие системе Δ''. Тем самым доказано, что система Δ'' является равномерно полной.

Все функции системы Δ входят в систему Δ'', $\Delta\subset\Delta''$. Покажем теперь, что всякая функция системы Δ'' линейно выражается через функции системы Δ. Этим будет показано, что система Δ является равномерно полной, так как равномерная полнота системы Δ'' уже доказана.

Пусть p — произвольная функция системы Δ''. Существует такое комплексное представление g группы G, $g(x)=\|g_{ij}(x)\|$, что p

является одной из функций

$$g_{ij}. \tag{17}$$

Согласно замечанию I) § 31 и теореме 28 существует такая постоянная матрица t, что

$$g(x)=th(x)t^{-1}, \tag{18}$$

и матрица $h(x)$ имеет специальный вид:

$$h(x)=\begin{Vmatrix} g_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & g_2(x) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & g_n(x) \end{Vmatrix},$$

где

$$g_i,\ i=1,\ \ldots,\ n, \tag{19}$$

суть неприводимые унитарные представления группы G. При специальном выборе матрицы t можно достичь того, что все представления системы (19) принадлежали системе Ω, ибо в системе Ω найдется неприводимое представление, эквивалентное любому неприводимому представлению. Если теперь представления (19) принадлежат системе Ω, то соотношение (18) показывает, что все функции (17) выражаются линейно через функции системы Δ. В частности, это имеет место и для функции p. Таким образом, равномерная полнота системы Δ доказана.

Следующее предложение, играющее исключительно важную роль при изучении бикомпактных топологических групп, является непосредственным следствием теоремы 32.

Теорема 33. *Для всякого элемента a бикомпактной группы G, отличного от единицы e, существует такое неприводимое представление g группы G, что $g(a)$ не есть единичная матрица.*

Доказательство. Так как $a \neq e$, то в силу леммы Урысона (см. § 12) существует такая непрерывная функция f, заданная на G, что $f(a)\neq f(e)$. Если бы в противоречие с утверждением теоремы для всякого неприводимого представления g группы G имело место равенство $g(a)=g(e)$, то для всех функций системы Δ (см. теорему 32) мы имели бы равенство $g_{ij}(a)=g_{ij}(e)$; но тогда линейными формами функций системы Δ невозможно было бы аппроксимировать функцию f, ибо $f(a)\neq f(e)$. Таким образом, теорема 33 доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению системы характеров.

Теорема 34. *Пусть Σ—совокупность всех характеров неприводимых комплексных представлений группы G. Мы будем говорить, что комплексная функция f, заданная на G,* инвариантна, *если при произвольном $a \in G$ имеет место равенство*

$$f(a^{-1}xa)=f(x). \tag{20}$$

Согласно соотношению (5) § 32 функции системы Σ инвариантны

Оказывается, что система Σ *является равномерно полной в множестве всех инвариантных комплексных функций, заданных на* G. *Это значит, что для всякой инвариантной комплексной функции* f, *заданной на* G, *и всякого положительного* ε *найдется такая линейная форма* $f'(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i(x)$ *с постоянными комплексными коэффициентами, где* $\chi_i \in \Sigma$, $i=1, \ldots, n$, *что*

$$|f(x)-f'(x)|<\varepsilon. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть g — некоторое неприводимое унитарное представление группы G степени r, $g(x)=\|g_{ij}(x)\|$. Допустим, что функция

$$p(x)=\sum_{i,\,j=1}^{r} b_{ji}g_{ij}(x) \tag{22}$$

инвариантна, и покажем, что тогда

$$p(x)=\alpha\chi(x), \tag{23}$$

где χ есть характер представления g, а α — комплексное число.

Действительно, по предположению,

$$p(a^{-1}xa)=\sum_{i,\,j=1}^{r} b_{ji}g_{ij}(a^{-1}xa)=\sum_{i,\,j,\,k,\,l=1}^{r} b_{ji}g_{ik}(a^{-1})g_{kl}(x)g_{lj}(a)=p(x). \tag{24}$$

Так как все функции g_{ij} линейно независимы (см. теорему 30), то коэффициенты в (22) и (24) должны быть равны, и мы имеем:

$$b_{lk}=\sum_{i,\,j=1}^{r} g_{lj}(a)b_{ji}g_{ik}(a^{-1}).$$

В матричной форме это последнее равенство записывается в виде $b=g(a)bg(a^{-1})$, где $b=\|b_{ij}\|$, или, что то же, в виде $g(a)b=bg(a)$. На основании замечания Е) § 31 заключаем отсюда, что матрица b имеет вид $\alpha e'$, где e' — единичная матрица, а α — комплексное число. Но тогда равенство (22) принимает вид (23).

Пусть теперь q — некоторая инвариантная функция, заданная на G и выражающаяся в виде конечной линейной формы функций системы Δ (см. теорему 32), причем систему Δ мы предположим построенной по системе Ω унитарных представлений. Сумму $q(x)$ можно разбить на ряд частичных сумм $p_i(x)$, $q(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x)$, где каждая сумма $p_i(x)$ уже имеет вид (22), т. е. составлена из функций, относящихся к одному неприводимому представлению $g^{(i)}$. Из инвариантности функции q следует, что и все функции p_i также инвариантны. Действительно, $p_i(a^{-1}xa)$ как функция от x выражается линейно через функции $g_{kl}^{(i)}(x)$, относящиеся к представлению $g^{(i)}$ (см. равенство (24)), а из этого на основании линейной независимости функций системы Δ следует, что равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(a^{-1}xa) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$$

должно осуществляться почленно, т. е. $p_i(a^{-1}xa) = p_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Из ранее доказанного равенства (23) мы получаем, таким образом, $p_i(x) = \alpha_i \chi_i(x)$, т. е.

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_i(x). \tag{25}$$

Пусть, наконец, f—произвольная инвариантная функция, заданная на G. Согласно теореме 32 существует такая конечная линейная форма $f'(x)$ функций системы Δ, что

$$|f(x) - f'(x)| < \varepsilon, \tag{26}$$

где ε—наперед заданное положительное число. Из неравенства (26) следует:

$$\left| \int f(a^{-1}xa)\,da - \int f'(a^{-1}xa)\,da \right| < \varepsilon. \tag{27}$$

Но в силу инвариантности функции f имеем $\int f(a^{-1}xa)\,da = f(x)$. Положим $\int f'(a^{-1}xa)\,da = q(x)$. Тогда неравенство (27) примет вид

$$|f(x) - q(x)| < \varepsilon.$$

Так как функция $f'(x)$ есть конечная линейная форма функций системы Δ, то и $f'(a^{-1}xa)$ как функция от x имеет тот же вид (см. (24)); следовательно, функция q есть конечная линейная форма функций системы Δ. Нетрудно видеть, кроме того, что в силу инвариантности интегрирования (см. определение 33) функция q инвариантна. Из ранее доказанного соотношения (25) следует, что $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_i(x)$. Таким образом, $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_i(x)\right| < \varepsilon$, и теорема 34 доказана.

Подобно тому как из теоремы 32 следует теорема 33, так и из теоремы 34 непосредственно вытекает нижеследующая теорема 35, которая, впрочем, не важна для нас.

Теорема 35. *Пусть a и b—два несопряженных элемента группы G, т. е. таких, что не существует элемента $c \in G$, для которого $b = c^{-1}ac$. Тогда существует такой характер χ неприводимого представления группы G, что $\chi(a) \neq \chi(b)$.*

Доказательство. Множество B всех элементов, сопряженных с b, бикомпактно. Действительно, B есть образ бикомпактного пространства G при непрерывном отображении $y \to y^{-1}by$ (см. § 13, D)). Таким образом, в силу леммы Урысона (см. § 12) существует неотрицательная функция f, обращающаяся в нуль.

на B и отличная от нуля в точке a. Нетрудно видеть, далее, что функция $\varphi(x)=\int f(y^{-1}xy)\,dy$ инвариантна, причем $\varphi(b)=0$, $\varphi(a)\neq 0$. В силу теоремы 34 функцию $\varphi(x)$ можно равномерно аппроксимировать линейными формами функций системы Σ и, следовательно, в Σ существует функция, принимающая различные значения в точках a и b.

Пример 57. Пусть R—бикомпактное хаусдорфово топологическое пространство и Δ—равномерно полное множество (для определенности действительных) функций, заданных на нем (см. A)). Покажем, что мощность множества Δ не меньше веса пространства R.

Пусть M—конечное подмножество пространства R, состоящее из r точек. Каждой действительной функции f, заданной на R, поставим в соответствие функцию f', заданную на M, положив $f'(x)=f(x)$, $x\in M$. Из леммы Урысона (см. § 12) непосредственно следует, что на R существует непрерывная функция, принимающая в точках множества M произвольно заданные значения. Таким образом, множество всех функций вида f' совпадает с множеством всех функций на M и представляет собой r-мерное векторное пространство. Обозначим через Δ' множество всех функций вида φ', где $\varphi\in\Delta$. Из равномерной полноты множества Δ на R следует равномерная полнота множества Δ' на M, а так как множество всех функций на M есть r-мерное векторное пространство, то множество Δ', а вместе с ним и множество Δ содержит не менее r функций. Из доказанного следует, что если множество R состоит из конечного числа r точек, то число функций множества Δ не меньше r, т. е. не меньше веса пространства R. Если множество R бесконечно, то из доказанного следует, что множество Δ также бесконечно.

Будем теперь считать, что множество R бесконечно, и обозначим через Δ^* множество всех функций, представимых в виде конечных линейных комбинаций функций, входящих в Δ, с рациональными коэффициентами. Так как множество Δ бесконечно, то Δ^* имеет ту же мощность, что и Δ. Каждой функции $f\in\Delta^*$ поставим в соответствие множество U_f тех $x\in R$, для которых $f(x)>1/2$, и покажем, что множество Σ всех областей U_f, $f\in\Delta^*$, есть базис пространства R; этим наше утверждение будет доказано, так как мощность множества Σ не превосходит мощности множества Δ^*. Пусть a—произвольная точка из R и V—ее произвольная окрестность. В силу леммы Урысона существует неотрицательная функция g, заданная на R, обращающаяся в нуль на $R\setminus V$ и равная единице в точке a. Из равномерной полноты множества Δ следует, что существует такая функция $f\in\Delta^*$, что $|g(x)-f(x)|<1/4$. Очевидно, что $a\in U_f\subset V$. Таким образом, Σ есть базис пространства R.

Пример 58. Из теорем 29 и 32 на основании результатов, данных в примерах 53 и 57, заключаем, что мощность множества классов попарно эквивалентных неприводимых представлений бесконечной бикомпактной группы G равна весу пространства G.

Пример 59. Закончим разбор примера 55. Пусть Σ' — совокупность всех характеров неприводимых представлений группы G и Σ'' — совокупность всех характеров неприводимых представлений группы H. Обозначим через Σ совокупность всех функций $\chi(z)=\chi'(x)\chi''(y)$, где $z=(x, y)$, $\chi'\in\Sigma'$, $\chi''\in\Sigma''$. Согласно доказанному в примере 55 все функции системы Σ являются характерами неприводимых представлений группы F. Покажем теперь, что система Σ содержит все характеры неприводимых представлений группы F.

Покажем сначала, что множество Σ равномерно полно в множестве всех инвариантных функций, заданных на F. Пусть f — произвольная инвариантная функция, заданная на F. В силу теоремы 7 существует функция $\varphi(x, y)=g_1(x)h_1(y)+\ldots+g_n(x)h_n(y)$, удовлетворяющая условию $|f(x, y)-\varphi(x, y)|<\varepsilon$, где ε — наперед заданное положительное число. Положим:

$$g_i'(x)=\int g_i(a^{-1}xa)da,\quad h_i'(y)=\int h_i(b^{-1}yb)db,\quad i=1, \ldots, n,$$

$$\varphi'(x, y)=\int\int\varphi(a^{-1}xa,\ b^{-1}yb)da\,db.$$

Очевидно, что $\varphi'(x, y)=g_1'(x)h_1'(y)+\ldots+g_n'(x)h_n'(y)$ и что $|f(x, y)-\varphi'(x, y)|<\varepsilon$. Легко видеть, что функции $g_1', \ldots, g_n'$ и $h_1', \ldots, h_n'$ инвариантны на G и H, поэтому они могут быть с любой степенью точности аппроксимированы линейными формами функций из Σ' и Σ''. Из этого и из неравенства $|f(x, y)-\varphi'(x, y)|<\varepsilon$ вытекает, что функцию f можно с любой степенью точности аппроксимировать линейными формами функций множества Σ.

Покажем теперь, что множество Σ содержит характеры всех неприводимых представлений группы F. Допустим противоположное, и пусть χ — характер неприводимого представления группы F, не входящий в множество Σ. Тогда функция χ ортогональна ко всем функциям множества Σ. С другой стороны, существует линейная форма $\psi(z)=\alpha_1\chi_1(z)+\ldots+\alpha_n\chi_n(z)$ функций множества Σ, удовлетворяющая условию $|\chi(z)-\psi(z)|<1$. Мы имеем $(\chi-\psi, \chi-\psi)=$ $=1+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\ldots+\alpha_m\bar{\alpha}_m<1$, что невозможно.

Таким образом, конструкция, приведенная в примере 55, дает возможность получить все неприводимые представления прямого произведения F, исходя из неприводимых представлений прямых сомножителей G и H.

Пример 60. Дадим приложение теории линейных представлений к теории *почти периодических функций*.

Непрерывная комплексная функция f действительного переменного t, $-\infty<t<\infty$, называется *почти периодической*, если из всякой последовательности $f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}, \ldots$ функций вида $f_a(t) = f(t+a)$, где a_i—произвольные действительные числа, можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Простейшим примером почти периодической функции является периодическая функция вида $e^{i\lambda t}$, где λ—произвольное действительное число, а $i=\sqrt{-1}$. Множество всех функций вида $e^{i\lambda t}$ обозначим через Δ. Мы покажем, что система Δ является равномерно полной в множестве всех почти периодических функций. Предложение это является основной теоремой теории почти периодических функций.

Пусть f—фиксированная почти периодическая функция и H—множество всех функций вида $f(t+a)$, где a—действительное число. Обозначим через G множество всех функций, получаемых равномерным предельным переходом из функций семейства H. Множество G компактно в смысле равномерной сходимости и является компактным топологическим пространством со счетной базой. Множество H всюду плотно в G. В множестве H определим операцию сложения, положив $f_a+f_b=f_{a+b}$. Операция сложения, заданная таким способом в множестве H, однозначным образом по непрерывности распространяется на все элементы множества G. Таким образом, множество G становится компактной коммутативной топологической группой со счетной топологической базой. К группе G применима, следовательно, вся теория линейных представлений. Пусть $g_1, \ldots, g_n, \ldots$—совокупность всех неприводимых представлений группы G. Так как согласно теореме 31 все неприводимые представления группы G имеют степень 1, то g_n есть просто гомоморфное отображение группы G в мультипликативную группу K комплексных чисел, по модулю равных единице. Таким образом, $g_n(f_a)$ есть комплексное число, по модулю равное единице, причем

$$g_n(f_{a+b}) = g_n(f_a)g_n(f_b),$$

и если рассматривать $g_n(f_a)$ как функцию параметра a, то $g_n(f_a)$ дает гомоморфное отображение аддитивной группы действительных чисел в группу K. Отсюда мы непосредственно заключаем, что $g_n(f_a)=e^{i\lambda_n a}$, ибо, как легко видеть, всякий гомоморфизм указанного вида выражается в такой форме (см. § 36, F)).

Каждой функции $x \in G$ переменного t поставим в соответствие ее значение $x(0)$ в точке $t=0$. Полученную таким образом непрерывную функцию φ, заданную на G, $\varphi(x)=x(0)$ можно в силу теоремы 32 равномерно аппроксимировать линейными формами функций g_n. Рассматривая эту аппроксимацию на H и принимая во внимание, что $\varphi(f_a)=f(a)$ и $g_n(f_a)=e^{i\lambda_n a}$, мы получаем нужную нам аппроксимацию почти периодической функции $f(t)$ линейными формами функций $e^{i\lambda_n t}$.

Глава шестая

КОММУТАТИВНЫЕ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Настоящая глава посвящается детальному изучению коммутативных локально бикомпактных топологических групп. Все возникающие здесь вопросы решаются до конца или по крайней мере сводятся к вопросам, относящимся к алгебраическим коммутативным группам.

Основным методом исследования в настоящей главе служит изучение связей (*двойственности*) между данной группой и ее *группой характеров*. Каждой коммутативной локально бикомпактной топологической группе G ставится в соответствие также коммутативная локально бикомпактная топологическая группа X — *группа характеров* группы G. Установленное таким образом соответствие между группами G и X оказывается взаимным; именно, оказывается, что G естественным образом можно рассматривать как группу характеров группы X. Этот весьма нетривиальный факт является центральным результатом настоящей главы и представляет собою основную теорему двойственности, из которой другие соотношения двойственности между группами G и X вытекают уже сравнительно легко. Каждой подгруппе H группы G ставится в соответствие подгруппа Φ группы X — *аннулятор* группы H. Соответствие между подгруппами H и Φ оказывается взаимным. Оказывается, далее, что Φ есть группа характеров группы G/H, а X/Φ есть группа характеров группы H. Между группами G и X устанавливается также ряд других соотношений двойственности.

Если группа G дискретна, то группа X бикомпактна и наоборот. Это дает возможность рассматривать каждую бикомпактную коммутативную группу X как группу характеров дискретной коммутативной группы G, а ввиду того, что между группами G и X имеется ряд соотношений двойственности, возникает возможность весьма полной редукции изучения бикомпактной группы к изучению дискретной. Этот факт представляется наиболее существенным результатом главы с точки зрения выяснения структуры коммутативных топологических групп. Теория двойственности между бикомпактными и дискретными группами излагается в первую очередь как наиболее существенная и имеющая значительные приложения. Изложение ведется таким образом, чтобы читатель мог ознакомиться с ней, не углубляясь в изучение теории двойственности для общих локально бикомпактных групп. На основе теории двойственности между бикомпактными и дискретными группами проводится изучение структуры локально бикомпактных групп и затем уже строится теория двойственности для них.

В предыдущей главе было доказано, что всякое неприводимое представление коммутативной группы G есть представление первой степени, т. е. совпадает со своим характером. Оказывается, что множество всех характеров группы G естественным образом представляет собой группу, которая называется *группой характеров* группы G. Остановимся на ее определении несколько подробнее. Пусть g—унитарное неприводимое представление группы G. Так как оно имеет первую степень, то $g(x)$ есть комплексное число, по модулю равное единице, так что g представляет собою гомоморфное отображение группы G в группу комплексных чисел, по модулю равных единице. Если g и h—два таких гомоморфизма группы G, то отображение f, определяемое формулой $f(x)=g(x)h(x)$, есть тоже гомоморфное отображение группы G в группу комплексных чисел, по модулю равных единице. Этим способом в множестве характеров вводится умножение. Столь же естественно вводится в нем и топология.

В основном результаты этой главы принадлежат мне [36, 37]. Ряд важных обобщений и усовершенствований, полученных Кампеном [14, 15], также учтен здесь. Использованы, кроме того, некоторые улучшения доказательств, данные А. Вейлем [46].

Все рассматриваемые в этой главе топологические группы коммутативны и локально бикомпактны. Эти условия всегда будут предполагаться выполненными, хотя и не всюду будут оговариваться. Так как все рассматриваемые группы коммутативны, то обозначения для них принимаются аддитивные. Ввиду этого мультипликативная группа комплексных чисел, по модулю равных единице, заменяется изоморфной ей аддитивной группой K. Так как группа эта играет во всем изложении основную роль, то обозначение K закрепляется за ней на протяжении всей главы.

§ 34. Группа характеров

В настоящем параграфе определяется *группа характеров* X локально бикомпактной группы G и доказывается, что группа X всегда локально бикомпактна. Одновременно доказывается, что если G бикомпактна, то X дискретна, и наоборот, если G дискретна, то X бикомпактна. Далее, определяется естественное гомоморфное отображение ω группы G в группу характеров G' группы X. Значение гомоморфизма ω будет раскрыто в дальнейших параграфах: там будет показано, что в действительности ω есть изоморфное отображение группы G на всю группу G'. В этом и заключается точная формулировка основной теоремы двойственности, упомянутой во введении к главе.

A) Пусть D—аддитивная топологическая группа действительных чисел, взятых с естественной топологией, N—подгруппа всех целых чисел из D, $\mathrm{K}=D/N$ и $\varkappa$—естественный гомоморфизм группы D на группу K (см. § 20, B)). Топологическая группа K бикомпактна, и ее пространство имеет счетный базис. Множество всех элементов группы K вида $\varkappa(d)$, где $|d|<\frac{1}{3k}$ (k—целое положительное число), обозначим через Λ_k. Области Λ_1, Λ_2, ... составляют полную систему окрестностей нуля группы K. Непосредственно видно, что если для некоторого элемента $\gamma\in\mathrm{K}$ выполнены условия $\gamma\in\Lambda_1$, $2\gamma\in\Lambda_1$, ..., $k\gamma\in\Lambda_1$, то $\gamma\in\Lambda_k$. Из этого следует, что если α есть гомоморфизм некоторой группы G в группу K, удовлетворяющий условию $\alpha(G)\subset\Lambda_1$, то α есть нулевой гомоморфизм, т. е. $\alpha(G)=\{0\}$. Действительно, при $x\in G$ мы имеем $k\alpha(x)=\alpha(kx)\in\Lambda_1$, а следовательно, $\alpha(x)\in\Lambda_k$ при произвольном k; таким образом, $\alpha(x)=0$.

О п р е д е л е н и е 36. Пусть G—локально бикомпактная коммутативная топологическая группа. Каждый гомоморфизм группы G в группу K (см. A)) называется *характером* группы G. Множество всех характеров группы G обозначим через X. При $x\in G$, $\alpha\in\mathrm{X}$ мы будем обозначать элемент $\alpha(x)\in\mathrm{K}$ также через αx. Множество X следующим образом превращается в коммутативную топологическую группу—*группу характеров* группы G. Сумма $\alpha+\beta$ двух характеров α и β группы G определяется соотношением $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$. Непосредственно проверяется, что определенное таким образом отображение $\alpha+\beta$ группы G в группу K есть гомоморфизм. Нулем группы X служит нулевой гомоморфизм. Противоположный для элемента $\alpha\in\mathrm{X}$ элемент—α определяется соотношением $(-\alpha)x=-(\alpha x)$. Зададим теперь полную систему окрестностей нуля группы X. Пусть $A\subset G$, $M\subset\mathrm{K}$. Обозначим через $W(A, M)$ множество всех характеров $\alpha\in\mathrm{X}$, удовлетворяющих условию $\alpha(A)\subset M$. Совокупность Σ^* всех множеств вида $W(F, \Lambda_k)$, где F бикомпактно, удовлетворяет условиям теоремы 9 и принимается за полную систему окрестностей нуля группы X.

Т е о р е м а 36. *Пусть G—локально бикомпактная коммутативная группа и X—группа ее характеров. Оказывается, что группа X локально бикомпактна. Именно, если U есть окрестность нуля в G с бикомпактным замыканием, то окрестность $W(\overline{U}, \Lambda_4)$ нуля в X имеет бикомпактное замыкание. Далее, если G бикомпактна, то X дискретна, а если G дискретна, то X бикомпактна.*

Для случаев, когда группа G бикомпактна или дискретна, доказательство весьма просто, и я рассматриваю эти случаи в первую очередь и независимо от общего случая— с тем, чтобы читатель при желании мог ограничиться ими.

Доказательство. В случае бикомпактной группы G в систему Σ^* окрестностей нуля группы X входит окрестность $W(G, \Lambda_1)$, содержащая лишь нуль группы G (см. A)); таким образом, группа X в этом случае дискретна.

Пусть теперь G дискретна. Каждому элементу $x \in G$ поставим в соответствие экземпляр K_x группы K и составим бикомпактную прямую сумму T (в мультипликативных обозначениях прямое произведение; см. определение 29) всех групп K_x. Каждый элемент $\alpha \in T$ можно трактовать как функцию, заданную на G, со значениями в K, именно, следует положить $\alpha(x) = \alpha(\mathrm{K}_x)$. Среди этих функций характеры группы G выделяются условиями $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$, $x \in G$, $y \in G$. Каждое отдельное условие этого вида (при фиксированных x и y) выделяет из T замкнутое подмножество. Таким образом, совокупность всех характеров группы G замкнута в пространстве T и потому бикомпактна. Теперь остается только убедиться в том, что топология, заданная в группе X определением 36, совпадает с топологией, индуцированной в X из пространства T. Это непосредственно следует из того, что в дискретном пространстве G все бикомпактные множества конечны.

Пусть, наконец, G—произвольная коммутативная локально бикомпактная группа. Покажем, что замыкание $\overline{W}(\overline{U}, \Lambda_4)$ окрестности $W(\overline{U}, \Lambda_4)$ в группе X бикомпактно. Легко проверяется, что $\overline{W}(\overline{U}, \Lambda_4) \subset W(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$. Таким образом, достаточно доказать бикомпактность множества $W(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$.

Наряду с имеющейся в G топологией введем в G дискретную топологию и обозначим полученную таким образом дискретную группу через G', а группу ее характеров—через X$'$. Обозначим, далее, через $W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_k)$ множество всех характеров α' группы G', удовлетворяющих условию $\alpha'(\overline{U}) \subset \overline{\Lambda}_k$, и покажем, что $W(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4) = W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$. Для этого достаточно доказать, что каждый характер α' группы G', удовлетворяющий условию $\alpha'(\overline{U}) \subset \overline{\Lambda}_4$, является и характером группы G, т. е. непрерывен на G. Выберем в G для заданного k такую окрестность V нуля, что $kV \subset U$. Каков бы ни был элемент $x \in V$, все элементы $\alpha'(x)$, $2\alpha'(x)$, ..., $k\alpha'(x)$ принадлежат к $\overline{\Lambda}_4 \subset \Lambda_1$, и потому $\alpha'(x) \in \Lambda_k$ (см. A)). Таким образом, для окрестности Λ_k мы нашли окрестность V нуля группы G, удовлетворяющую условию $\alpha'(V) \subset \Lambda_k$, и потому гомоморфизм α' непрерывен на G.

Покажем теперь, что множество $W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$ замкнуто в X$'$. В силу замкнутости множества $\overline{\Lambda}_4$ каждое отдельное условие $\alpha'(x) \in \overline{\Lambda}_4$ (при фиксированном x) выделяет среди всех элементов $\alpha' \in$ X$'$ замкнутое множество. Таким образом, и совокупность всех таких условий ($x \in \overline{U}$) выделяет замкнутое множество.

Для доказательства теоремы достаточно теперь показать, что топологии, индуцированные в множестве $W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$ из пространств X и X′, совпадают между собой. Окрестность элемента $\alpha \in W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$ в топологии, индуцированной пространством X, состоит из всех элементов $\alpha+\xi \in W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$, $\xi \in W(F, \Lambda_k)$, где F — бикомпактное множество пространства X, а k — натуральное число. Окрестность того же элемента α в топологии, индуцированной пространством X′, состоит из всех элементов $\alpha+\xi' \in W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$ с $\xi' \in W(A, \Lambda_{k'})$, где A — конечное множество, а k' — натуральное число. Так как конечные множества бикомпактны, то каждая окрестность второго вида содержит некоторую окрестность первого вида. Покажем, что в каждой окрестности первого вида содержится окрестность второго вида; этим эквивалентность обеих топологий будет доказана. Зададим определенную окрестность первого вида, т. е. фиксируем F и k. Так как $\alpha \in W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$ и $\alpha+\xi' \in W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$, то $\xi' \in W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_2)$. Выберем теперь такую окрестность V' нуля группы G, что $2kV' \subset U$. Из этого включения и включения $\xi' \in W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_2)$ следует, что $\xi'(V') \subset \Lambda_{2k}$. Действительно, если $x \in V'$, то все элементы $\xi'(x)$, $2\xi'(x)$, ..., $2k\xi'(x)$ принадлежат к $\overline{\Lambda}_2 \subset \Lambda_1$, и потому $\xi'(x) \in \Lambda_{2k}$ (см. A)); таким образом, $\xi'(V') \subset \Lambda_{2k}$. Далее, совокупность всех областей вида $a+V'$, где $a \in F$, покрывает множество F, так что можно выбрать конечное покрытие множества F областями этого вида. Это значит, что существует конечное множество $A \subset F$, удовлетворяющее условию $A+V' \supset F$. Если теперь $\xi' \in W'(A, \Lambda_{2k})$, т. е. ξ' удовлетворяет условию $\xi'(A) \subset \Lambda_{2k}$, то $\xi'(F) \subset \xi'(A+V') \subset \Lambda_{2k}+\Lambda_{2k} \subset \Lambda_k$, т. е. $\xi' \in W'(F, \Lambda_k)$. Кроме того, ξ' есть непрерывный гомоморфизм группы G в K, ибо $\xi' = (\alpha+\xi')-\alpha$, а оба гомоморфизма $\alpha+\xi'$ и α, по предположению, принадлежат $W'(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$, т. е. непрерывны. Таким образом, $\xi' \in W(F, \Lambda_k)$. Итак, эквивалентность обеих топологий доказана и доказательство теоремы 36 этим закончено.

Естественным дополнением к теореме 36 является утверждение, что вес пространства X равен весу пространства G. Доказательство этого утверждения опирается, однако, на основную теорему двойственности и будет дано только в § 40. Здесь мы докажем лишь нижеследующее предложение.

B) Пусть X — группа характеров группы G. Если вес пространства G бесконечен, то вес пространства X не превосходит веса пространства G (см. определение 14).

Докажем это. Пусть τ — вес пространства G, Σ — базис пространства G, имеющий мощность τ и составленный из областей с бикомпактными замыканиями, а Δ — некоторый счетный базис группы K. Пусть U_1, ..., U_n — последовательность областей системы Σ и M_1, ..., M_n — последовательность областей системы Δ.

Совокупность всех элементов $\xi\in X$, удовлетворяющих условиям $\xi(\overline{U}_i)\subset M_i$, $i=1, \ldots, n$, обозначим через $W(\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n; M_1, \ldots, M_n)$. Совокупность всех непустых множеств вида $W(\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n; M_1, \ldots \ldots, M_n)$ обозначим через Σ^*. Из общей теории мощностей следует, что мощность множества Σ^* не превосходит τ. Мы покажем, что Σ^* есть базис пространства X. Этим предложение B) будет доказано.

Покажем прежде всего, что $W(\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n; M_1, \ldots, M_n)$ есть область в пространстве X. Так как

$$W(\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n; M_1, \ldots, M_n)=W(\overline{U}_1; M_1)\cap \ldots \cap W(\overline{U}_n; M_n),$$

то достаточно доказать, что каждое множество $W(\overline{U}_i; M_i)$ есть область в X. Мы покажем просто, что множество $W(F, M)$, где F есть бикомпактное множество из G, а M—область из K, является областью в X. Пусть $\alpha\in W(F, M)$. Тогда $\alpha(F)$ есть бикомпактное множество, лежащее в области M, и существует такая окрестность Λ_k нуля группы K, что $\alpha(F)+\Lambda_k\subset M$. Мы имеем $\alpha+W(F, \Lambda_k)\subset \subset W(F, M)$, и, таким образом, $W(F, M)$ есть область.

Покажем теперь, что Σ^* есть базис пространства X. Так как области вида $W(F, \Lambda_k)$ составляют базис пространства X в нуле, то области вида $\alpha+W(F, \Lambda_k)$, $\alpha\in X$, составляют базис всего пространства X. Покажем, что если $\beta\in\alpha+W(F, \Lambda_k)$, то существует область $W\in\Sigma^*$, удовлетворяющая условию $\beta\in W\subset\alpha+W(F, \Lambda_k)$. Этим будет доказано, что Σ^* есть базис пространства X. Так как $\beta\in\alpha+W(F, \Lambda_k)$, то существует настолько большое натуральное число h, что $\beta+W(F, \Lambda_h)\subset\alpha+W(F, \Lambda_k)$. Для каждой точки $x\in F$ существует такая область $M_x\in\Delta$, что $\beta(x)\in M_x\subset\beta(x)+\Lambda_{2h}$. Далее, ввиду непрерывности гомоморфизма β существует такая окрестность $U_x\in\Sigma$ точки x, что $\beta(\overline{U}_x)\subset M_x$. Из покрытия бикомпактного множества F областями U_x, $x\in F$, выберем конечное покрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Непосредственно проверяется, что

$$\beta\in W(\overline{U}_{x_1}, \ldots, \overline{U}_{x_n}; M_{x_1}, \ldots, M_{x_n})\subset\beta+W(F, \Lambda_h).$$

Определение 37. Пусть X—группа характеров группы G и G'—группа характеров группы X. Каждому элементу $x\in G$ поставим в соответствие отображение x' группы X в группу K, определяемое формулой $x'(\xi)=\xi(x)$, $\xi\in X$. Оказывается, что $x'\in G'$ и что отображение ω, определяемое формулой $\omega(x)=x'$, есть гомоморфизм группы G в группу G'. Отображение ω называется *естественным гомоморфизмом* группы G в ее вторую группу характеров G'.

Покажем, что $x'\in G'$. Мы имеем:

$$x'(\xi+\eta)=(\xi+\eta)x=\xi x+\eta x=x'(\xi)+x'(\eta).$$

Таким образом, x' есть гомоморфизм алгебраической группы X в группу K. Пусть Λ_k—заданная окрестность нуля группы K. Мы имеем $x'(W(x, \Lambda_k)) \subset \Lambda_k$. Таким образом, существует окрестность $W(x, \Lambda_k)$ нуля группы X, переходящая при отображении x' в заданную окрестность Λ_k нуля группы K, и потому x' есть характер топологической группы X.

Докажем теперь, что ω есть гомоморфизм группы G в группу G'. Мы имеем:

$$\omega(x+y)\xi = \xi(x+y) = \xi(x)+\xi(y) = \omega(x)\xi+\omega(y)\xi = (\omega(x)+\omega(y))\xi.$$

Таким образом, ω есть гомоморфное отображение алгебраической группы G в группу G'. Докажем непрерывность отображения ω. Пусть $U' = W(\Phi, \Lambda_k)$—заданная окрестность нуля группы G' (здесь Φ—бикомпактное множество из X). Возьмем произвольную окрестность U_0 нуля группы G с бикомпактным замыканием $\overline{U}_0$ и положим $W = W(\overline{U}_0, \Lambda_{2k})$. Области вида $\xi+W$, где $\xi \in \Phi$, покрывают Φ, и существует конечное покрытие множества Φ областями $\xi_1+W, \ldots, \xi_r+W$. Пусть U_i—такая окрестность нуля группы G, что $\xi_i(U_i) \subset \Lambda_{2k}$, $i=1, \ldots, r$. Положим $U = U_0 \cap U_1 \cap \ldots \cap U_r$. Если $\xi \in \Phi$, то существует такой номер i, $1 \leqslant i \leqslant r$, что $\xi = \xi_i + \xi_0$, где $\xi_0 \in W$. Мы имеем $\xi(U) = \xi_i(U) + \xi_0(U) \subset \Lambda_{2k} + \Lambda_{2k} = \Lambda_k$. Таким образом, при $x \in U$ получаем $\omega(x)\xi = \xi x \in \Lambda_k$, т. е. $\omega(U) \subset U'$. Этим непрерывность отображения ω доказана.

Нижеследующее предложение C) является единственным следствием теории линейных представлений, которое будет использовано в настоящей главе.

C) *Для всякого отличного от нуля элемента a бикомпактной группы G существует такой характер α этой группы, что $\alpha(a) \neq 0$.*

Докажем это. Так как группа G коммутативна, то в силу теоремы 31 все ее неприводимые представления имеют первую степень, в силу же теоремы 33 существует неприводимое представление g группы G, не переводящее a в единицу: $g(a) \neq 1$. Положим $\alpha(x) = \frac{\ln g(x)}{2\pi i}$. В силу этой формулы $\alpha(x)$ есть действительное число, определенное с точностью до целочисленного слагаемого, т. е. элемент группы K. Таким образом, α есть характер группы G. Так как $g(a) \neq 1$, то $\alpha(a) \neq 0$.

Пример 61. Пусть G_p—аддитивная группа целых p-адических чисел (см. § 26, C)). Каждый элемент $x \in G_p$ записывается в виде формального ряда $x = x_0 + x_1 p + \ldots + x_k p^k + \ldots$, где x_i—целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant x_i < p$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Обозначим через U_k подгруппу группы G_p, состоящую из всех элементов x, для которых $x_0 = x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0$. Подгруппы $G_p = U_0, U_1, \ldots$ открыты, бикомпактны и образуют базис в нуле. Положим $g = 1 + 0p + \ldots + 0p^k + \ldots$ Легко видеть, что кратные элемента g всюду плотны в G_p. Покажем, что группа характеров X_p

группы G_p есть *квазициклическая группа* порядка p, т. е. изоморфна подгруппе K_p алгебраической группы K, состоящей из элементов вида $\varkappa\left(\frac{m}{p^k}\right)$, где m и k—целые числа. Пусть $\alpha \in X_p$. Так как α есть непрерывное отображение группы G_p в K, то существует такая окрестность U_k нуля группы G_p, что $\alpha(U_k) \subset \Lambda_1$, и потому $\alpha(U_k)=0$ (см. A)). Естественное гомоморфное отображение группы G_p на факторгруппу G_p/U_k (см. § 20, B)) обозначим через f. Так как $\alpha(U_k)=0$, то существует такой гомоморфизм β группы G_p/U_k в группу K, что $\alpha=\beta f$. Группа G_p/U_k, как легко видеть, представляет собой циклическую группу порядка p^k с образующей $f(g)$. В группе K всякий элемент γ, удовлетворяющий условию $p^k\gamma=0$, записывается в форме $\gamma=\varkappa\left(\frac{m}{p^k}\right)$. Поэтому $\alpha(g)=\beta f(g)=\varkappa\left(\frac{m}{p^k}\right)$. Формула $\alpha \to \alpha(g)$ устанавливает естественное изоморфное отображение группы X_p на группу K_p.

§ 35. Группы характеров факторгруппы и открытой подгруппы

В теории групп важную роль играет изучение подгрупп и факторгрупп. С этой точки зрения понятно желание найти группу характеров каждой подгруппы H и каждой факторгруппы G/H данной группы G. В настоящем параграфе каждой подгруппе H группы G ставится в соответствие подгруппа $\Phi=(X, H)$ группы характеров X группы G—*аннулятор* подгруппы H—таким образом, что группой характеров группы G/H оказывается группа Φ, а группой характеров группы H—группа X/Φ. Последнее соотношение будет получено в этом параграфе лишь для открытых подгрупп, в общем случае оно будет установлено позже.

A) Пусть X—группа характеров группы G и H—некоторое множество элементов группы G. Множество всех характеров $\xi \in X$, удовлетворяющих условию $\xi(x)=0$ при произвольном $x \in H$, т. е. множество всех характеров, обращающихся в нуль на всех элементах из H, очевидно, есть подгруппа группы X. Подгруппа эта называется *аннулятором* множества H в группе X и обозначается через (X, H). В дальнейшем в роли множества H обычно будут выступать подгруппы группы G.

B) Пусть X_1 и X_2—группы характеров групп G_1 и G_2 и f—гомоморфное отображение группы G_1 в группу G_2. Каждому характеру ξ_2 группы G_2 поставим в соответствие характер ξ_1 группы G_1, положив $\xi_1=\xi_2 f$. Оказывается, что отображение φ, определяемое формулой $\xi_1=\varphi(\xi_2)$, есть гомоморфизм группы X_2 в группу X_1. Гомоморфизм φ называется *сопряженным* к гомоморфизму f. Оказывается далее, что ядром гомоморфизма φ служит подгруппа $(X_2, f(G_1))$ (см. A)) группы X_2. Очевидно, если f есть изоморфное отображение группы G_1 на группу G_2, то φ есть изоморфное отображение группы X_2 на группу X_1.

Покажем, что φ есть гомоморфизм алгебраической группы X_2 в группу X_1. Мы имеем:

$$\varphi(\xi_2+\eta_2)=(\xi_2+\eta_2)f=\xi_2 f+\eta_2 f=\varphi(\xi_2)+\varphi(\eta_2).$$

Покажем, что отображение φ непрерывно. Пусть $W(F_1, \Lambda_k)$—заданная окрестность нуля группы X_1 (здесь F_1—бикомпактное множество из G_1; см. определение 36). Множество $F_2=f(F_1)$ бикомпактно, и окрестность $W(F_2, \Lambda_k)$ нуля группы X_2 удовлетворяет условию $\varphi(W(F_2, \Lambda_k))\subset W(F_1, \Lambda_k)$. Таким образом, отображение φ непрерывно.

Покажем, наконец, что ядром гомоморфизма φ служит $(X_2, f(G_1))$. Если $\xi_2\in(X_2, f(G_1))$, то при $x_1\in G_1$ имеем $\varphi(\xi_2)x_1=$ $=\xi_2 f(x_1)=0$, т. е. $\varphi(\xi_2)=0$. Если $\varphi(\xi_2)=0$, то $\xi_2 f(x_1)=\varphi(\xi_2)x_1=0$, т. е. $\xi_2\in(X_2, f(G_1))$.

Теорема 37. *Пусть X—группа характеров группы G, H—подгруппа группы G и $\Phi=(X, H)$* (см. А)). *При $\xi\in\Phi$, $x^*\in G/H$ положим $\xi(x^*)=\xi(x)$, где $x\in x^*$. Непосредственно проверяется, что определенный таким образом элемент $\xi(x^*)$ группы K не зависит от случайного выбора элемента x в смежном классе x^*. Оказывается, что определенное таким образом отображение ξ группы G/H в группу K есть характер группы G/H и что Φ есть в этом смысле группа характеров группы G/H.*

Доказательство. Обозначим через X^* группу характеров группы $G^*=G/H$, через f—естественный гомоморфизм группы G на группу G^* (см. § 20, В)) и через φ—сопряженный ему гомоморфизм группы X^* в группу X (см. В)). Утверждение теоремы, очевидно, эквивалентно тому, что φ есть изоморфное отображение группы X^* на подгруппу Φ группы X. Докажем это.

Пусть $\xi\in\Phi$. Так как $\xi(H)=0$, то характер ξ постоянен на каждом смежном классе группы G по подгруппе H, и потому существует гомоморфизм η алгебраической группы G^* в группу K, удовлетворяющий условию $\xi=\eta f$. Покажем, что η есть непрерывное отображение группы G^* в группу K. Пусть Λ_k—заданная окрестность нуля группы K и U—такая окрестность нуля группы G, что $\xi(U)\subset\Lambda_k$. Для окрестности $f(U)$ нуля группы G^* мы имеем $\eta(f(U))=\xi(U)\subset\Lambda_k$. Таким образом, отображение η непрерывно. Так как для произвольного элемента $\xi\in\Phi$ нашелся элемент $\eta\in X^*$, удовлетворяющий условию $\xi=\eta f$, то $\Phi=\varphi(X^*)$. Так как $(X^*, f(G))=$ $=(X^*,G^*)=\{0\}$, то ядро гомоморфизма φ содержит лишь нуль (см. В)), и нам остается доказать открытость отображения φ группы X^* на группу Φ.

Пусть $W(F^*,\Lambda_k)$ — заданная окрестность нуля группы X^*. Построим сначала такое бикомпактное множество $F\subset G$, что $f(F)\supset F^*$. Для этого возьмем произвольную окрестность U нуля группы G с бикомпактным замыканием. Бикомпактное множество F^* содержится в сумме конечного числа областей вида $f(x_i+U)$, где $x_i \in G$, и за F можно принять соответствующую сумму бикомпактных множеств $x_i+\overline{U}$. Очевидно, что $f(F) \supset F^*$. Пусть теперь $\xi \in \Phi \cap W(F, \Lambda_k)$. Согласно ранее доказанному существует характер η группы G^*, удовлетворяющий условию $\xi=\eta f$. Мы имеем $\eta(F^*) \subset \eta(f(F))=\xi(F) \subset \Lambda_k$. Таким образом, $\eta \in W(F^*, \Lambda_k)$ и $\varphi(W(F^*, \Lambda_k)) \supset \Phi \cap W(F, \Lambda_k)$. Этим доказано, что φ есть открытое отображение группы X^* на группу Φ.

Итак, теорема 37 доказана.

Теорема 37 дает возможность найти группу характеров фактор-группы. Нижеследующая лемма решает аналогичный вопрос для подгруппы, но лишь в том частном случае, когда подгруппа является открытой. Общая теорема будет доказана позже (см. § 40).

Лемма. *Пусть X—группа характеров группы G, H—открытая подгруппа группы G и $\Phi=(\mathrm{X}, H)$. При $\xi^* \in \mathrm{X}/\Phi$, $x \in H$ положим $\xi^*(x)=\xi(x)$, где $\xi \in \xi^*$. Непосредственно проверяется, что определенный таким образом элемент $\xi^*(x)$ группы K не зависит от случайного выбора элемента ξ в смежном классе ξ^*. Оказывается, что отображение ξ^* группы H в группу K есть характер группы H и что X/Φ есть в этом смысле группа характеров группы H.*

Доказательство. Пусть Ψ—группа характеров группы H, f—тождественное отображение группы H в группу G и φ—сопряженное к f отображение группы X в группу Ψ (см. В)). Утверждение леммы, очевидно, эквивалентно тому, что φ есть открытое гомоморфное отображение группы X на группу Ψ с ядром Φ. Тот факт, что Φ есть ядро гомоморфизма φ, следует из того, что $(\mathrm{X}, f(H))=(\mathrm{X}, H)=\Phi$ (см. В)). Таким образом, нам остается доказать, что $\varphi(\mathrm{X})=\Psi$ и что отображение φ открыто.

Докажем, что $\varphi(\mathrm{X})=\Psi$. Для этого достаточно доказать, что всякий характер η подгруппы H можно продолжить в некоторый характер ξ всей группы G. Так как подгруппа H открыта, то всякий гомоморфизм алгебраической группы G в группу K, совпадающий с η на H, автоматически непрерывен. Поэтому для построения характера ξ достаточно продолжить характер η в гомоморфизм алгебраической группы G. Сделаем это.

Из каждого ненулевого смежного класса группы G по подгруппе H выберем по одному элементу и полученные таким образом элементы занумеруем в трансфинитную последовательность a_1, a_2, ... Обозначим через θ трансфинитное число, следующее за всеми числами, участвующими в этой нумерации, и через H_λ, $\lambda \leqslant \theta$,—минимальную подгруппу алгебраической группы G, содержащую H и все элементы a_μ с индексами $\mu<\lambda$. При этих обозначениях имеем $H_1=H$, $H_\theta=G$. Построим индуктивно для каждого $\lambda \leqslant \theta$ гомоморфизм η_λ алгебраической группы H_λ в группу K таким образом, чтобы при $\mu<\lambda\leqslant\theta$ гомоморфизм η_λ был продолжением гомоморфизма η_μ и чтобы $\eta_1=\eta$. Гомоморфизм η_1 определен равенством $\eta_1=\eta$. Допустим, что для всех $\mu<\lambda$ гомоморфизмы η_μ уже построены. Если число λ не имеет предшествующего, то группа H_λ есть объединение всех групп H_μ с индексами $\mu<\lambda$, и мы определим гомоморфизм η_λ как совпадающий на H_μ с η_μ. Если число λ имеет предшествующее $\lambda-1$, то каждый элемент $y\in H_\lambda$ записывается в форме $y=x+pa_{\lambda-1}$, где $x\in H_{\lambda-1}$, а p—целое число. Здесь следует различать два случая: 1) Элемент $pa_{\lambda-1}$ принадлежит к $H_{\lambda-1}$ только тогда, когда $p=0$. В этом случае каждый элемент $y\in H_\lambda$ записывается в форме $y=x+pa_{\lambda-1}$ единственным способом. Пусть γ—некоторый элемент из K. Положим $\eta_\lambda(y)=\eta_{\lambda-1}(x)+p\gamma$. Определенное таким образом отображение группы H в группу K, как легко проверить, есть гомоморфизм. 2) Существуют целые числа $p\neq 0$, удовлетворяющие условию $pa_{\lambda-1}\in H_{\lambda-1}$. Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию, обозначим через r. Каждый элемент $y\in H_\lambda$ однозначно записывается в форме $y=x+pa_{\lambda-1}$ с $0\leqslant p<r$. Так как в группе K возможно деление на любое целое число, то существует такой элемент $\gamma\in$ K, что $r\gamma=\eta_{\lambda-1}(ra_{\lambda-1})$, и мы положим $\eta_\lambda(y)=\eta_{\lambda-1}(x)+p\gamma$. Легко проверяется, что η_λ есть гомоморфизм группы H_λ в группу K. Гомоморфизм ξ группы G в группу K определим, положив $\xi=\eta_\theta$. Таким образом, доказано, что $\varphi(\mathrm{X})=\Psi$.

Докажем теперь, что гомоморфизм φ открыт. Пусть U—окрестность нуля группы H с бикомпактным замыканием $\overline{U}$. Окрестность $W(\overline{U}, \Lambda_4)$ нуля в группе X обозначим через W, а окрестность $W(\overline{U}, \Lambda_4)$ нуля в группе Ψ—через W'. Окрестности W и W' обладают бикомпактными замыканиями (см. теорему 36). Очевидно, что W и W' симметричны и что $\varphi(W)=W'$. Положим $\mathrm{X}_1=$ $=W\cup 2W\cup\ \ldots$, $\Psi_1=W'\cup 2W'\cup\ \ldots$ Так как $\varphi(W)=W'$, то $\varphi(\mathrm{X}_1)=\Psi_1$. Множества X_1 и Ψ_1 являются открытыми подгруппами групп X и Ψ и имеют бикомпактное происхождение (см. § 20, F)). Поэтому к гомоморфизму φ_1 группы X_1 на группу Ψ_1, индуцированному гомоморфизмом φ, применима теорема 12. Так как Ψ_1 есть открытая подгруппа группы Ψ, то из открытости гомоморфизма φ_1 следует открытость гомоморфизма φ.

Таким образом, лемма полностью доказана.

C) Пусть X—группа характеров группы G, G'—группа характеров группы X, H—открытая подгруппа группы G, $\Phi=(\mathrm{X}, H)$ и $H'=(G', \Phi)$. В силу леммы X/Φ есть группа характеров группы H, а в силу теоремы 37 H' есть группа характеров группы X/Φ. Таким образом, H' есть вторая группа характеров группы H. Оказывается, что естественный гомоморфизм ω группы G в группу G', рассматриваемый на H, есть естественный гомоморфизм группы H в группу H'.

Покажем это. Пусть $y \in H$, $\xi \in X$. Мы имеем:

$$\omega(y)\xi^* = \omega(y)\xi = \xi y = \xi^* y,$$

и это показывает, что рассматриваемое на H отображение ω есть естественный гомоморфизм группы H в группу H'.

Пример 62. Пусть H—открытая подгруппа группы G, η—характер группы H и a—элемент группы G, не принадлежащий H. Существует тогда характер ξ группы G, совпадающий на H с η и отличный от нуля на a.

Доказательство этого предложения получается из доказательства леммы этого параграфа, если положить $a_1 = a$ и при построении гомоморфизма η_2 выбрать $\gamma \neq 0$. Позже предложение это будет доказано для произвольной подгруппы H группы G (см. теорему 55).

В случае дискретной группы G за H можно принять нулевую подгруппу, и мы получаем теорему существования характера группы G, отличного от нуля на заданном ненулевом элементе $a \in G$.

§ 36. Группы характеров элементарных групп

В этом параграфе будут найдены группы характеров *элементарных групп*: дискретных циклических групп, группы K, группы действительных чисел и конечных прямых сумм этих групп. Далее, будет показано, что естественный гомоморфизм ω элементарной группы G в группу G' есть изоморфизм на (см. определение 37). В следующих параграфах этот факт будет использован при доказательстве основной теоремы двойственности для произвольных групп.

Прежде всего установим некоторые свойства группы K.

A) Всякая подгруппа топологической группы K либо совпадает с K, либо конечна. В последнем случае она циклична и состоит из всех элементов вида

$$\varkappa\left(\frac{p}{r}\right), \quad p = 0, 1, \ldots, r-1,$$

где r—порядок подгруппы; она содержит все элементы группы K, порядки которых являются делителями числа r.

Допустим, что группа N бесконечна. Тогда в K существует элемент, предельный для множества N, и, следовательно, в N существуют два элемента a и b, произвольно близких друг к другу. Разность $c = a - b$ произвольно близка к нулю, а ее кратные nc, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежащие N, произвольно плотно заполняют группу K. Так как N есть замкнутое в K множество, то, следовательно, $N = K$.

Разберем теперь случай конечной группы N порядка r. Если $a \in N$, то $ra = 0$, а это значит, что элемент a представляется в форме $\varkappa\left(\frac{p'}{r}\right)$. Очевидно, что всякий элемент вида $\varkappa\left(\frac{p'}{r}\right)$ может быть записан в виде $\varkappa\left(\frac{p}{r}\right)$, где $0 \leqslant p < r$. Совокупность всех элементов $\varkappa\left(\frac{p}{r}\right)$, $p=0, 1, \ldots, r-1$, есть группа порядка r; отсюда мы заключаем, что группа N составлена из всех элементов этого вида, ибо элементы, не представимые в этой форме, не могут войти в группу N, а элементов этого вида имеется ровно r.

B) Существуют лишь два автоморфизма группы K: один тождественный, $\alpha(x)=x$, и другой, β, для которого $\beta(x)=-x$.

Пусть γ — произвольный автоморфизм группы K. Единственный элемент порядка 2 группы K есть $\varkappa\left(\frac{1}{2}\right)$ (см. A)), поэтому $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\varkappa\left(\frac{1}{2}\right)$. Далее, в K существуют лишь два элемента порядка 4, именно $\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)$ и $\varkappa\left(-\frac{1}{4}\right)$; поэтому возможны два случая: $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)$ и $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)\right)=-\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)$. Эти случаи осуществляются соответственно автоморфизмами α и β. Покажем, что других автоморфизмов не существует. Рассмотрим случай $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)\right)=\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)$. Элемент $\varkappa\left(\frac{1}{8}\right)$ может при автоморфизме γ перейти лишь в элементы $\varkappa\left(\frac{1}{8}\right)$, $\varkappa\left(\frac{3}{8}\right)$, $\varkappa\left(\frac{5}{8}\right)$, $\varkappa\left(\frac{7}{8}\right)$; но так как автоморфизм γ есть гомеоморфное отображение, то он сохраняет циклический порядок на K, и, зная, что $\gamma(0)=0$, $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)\right)=$ $=\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)$, $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\varkappa\left(\frac{1}{2}\right)$, $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{3}{4}\right)\right)=\varkappa\left(\frac{3}{4}\right)$, мы заключаем, что $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{8}\right)\right)=\varkappa\left(\frac{1}{8}\right)$. Продолжая такие же рассмотрения дальше, мы убедимся, что $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)=\varkappa\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Умножая последнее равенство на произвольное положительное целое число $m<2^n$, получаем $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{m}{2^n}\right)\right)=\varkappa\left(\frac{m}{2^n}\right)$. Из непрерывности автоморфизма γ и последнего соотношения заключаем, что γ есть тождественный автоморфизм. Точно так же разбирается случай $\gamma\left(\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)\right)=-\varkappa\left(\frac{1}{4}\right)$; именно, мы получаем $\gamma=\beta$.

C) Всякий характер α группы K выражается в форме $\alpha(x)=mx$, где m есть некоторое целое число, характеризующее гомоморфизм α: $\alpha=\alpha_m$, и мы имеем $\alpha_m+\alpha_n=\alpha_{m+n}$. Таким образом, группа характеров группы K изоморфна группе целых чисел, причем изоморфизм устанавливается соответствием $m \rightarrow \alpha_m$.

Пусть N—ядро гомоморфизма α. Согласно замечанию A) группа N либо совпадает с K, либо конечна и характеризуется натуральным числом r. Если $N=K$, то $\alpha=\alpha_0$. Допустим, что группа N конечна. Тогда факторгруппа $K'=K/N$, как легко видеть, изоморфна группе K. Теперь речь идет о том, каким образом K' можно изоморфно отобразить на K, ибо на истинную подгруппу группы K группу K' изоморфно отобразить нельзя. В силу замечания B) существуют лишь два изоморфных отображения группы K' на K, и они соответствуют двум различным случаям: $\alpha=\alpha_r$ и $\alpha=\alpha_{-r}$. Таким образом, утверждение C) доказано.

D) Пусть C—бесконечная циклическая группа. Всякий характер β группы C задается соотношением $\beta(ng)=na$, где g—образующая группы C, а a—некоторый элемент группы K. Элемент a определяет характер β: $\beta=\beta_a$. Сумма двух характеров определяется по формуле $\beta_a+\beta_b=\beta_{a+b}$. Таким образом, группа характеров группы C изоморфна группе K, причем изоморфизм устанавливается соответствием $a\to\beta_a$.

Утверждение D) очевидно.

E) Пусть Z_r—конечная циклическая группа порядка r. Всякий характер α группы Z_r определяется соотношением $\alpha(ng)=na$, где $a\in K$ имеет вид $\varkappa\left(\frac{p}{r}\right)$. Характер α определяется элементом a: $\alpha=\alpha_a$. Сумма двух характеров определяется по формуле $\alpha_a+\alpha_b=$ $=\alpha_{a+b}$. Таким образом, группа характеров группы Z_r изоморфна Z_r.

Справедливость утверждения E) непосредственно следует из замечания A).

F) Пусть D—топологическая аддитивная группа действительных чисел. Всякий характер α группы D выражается в форме $\alpha(x)=\varkappa(dx)$, где d—действительное число, определяющее характер α: $\alpha=\alpha_d$. Сумма двух характеров группы D определяется формулой $\alpha_c+\alpha_d=\alpha_{c+d}$. Таким образом, группа характеров группы D изоморфна D, причем изоморфизм устанавливается соответствием $d\to\alpha_d$.

Пусть N—ядро гомоморфизма α. Если $N=D$, то $\alpha=\alpha_0$. Если N не совпадает с D, то нетрудно видеть, что в N существует наименьшее положительное число t и что N есть бесконечная циклическая группа с образующей t. Тогда группа $K'=D/N$ изоморфна группе K, и речь идет о том, чтобы группу K' изоморфно отобразить на K. В силу замечания B) мы имеем здесь два случая: $\alpha=\alpha_{1/t}$ и $\alpha=\alpha_{-1/t}$. Таким образом, утверждение F) доказано.

Перейдем теперь к построению группы характеров прямой суммы конечного числа топологических групп.

Теорема 38. *Пусть X_i—группа характеров группы G_i, G—прямая сумма групп $G_1, \ldots, G_n$ и X—прямая сумма групп $X_1, \ldots$ $\ldots, X_n$* (см. определение 28). *Каждый элемент $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$,*

$\xi_i \in X_i$, *группы* X *можно естественным образом трактовать как характер группы* G; *именно, если* $x=(x_1, \ldots, x_n) \in G$, $x_i \in G_i$, *то положим* $\xi(x)=\xi_1(x_1)+ \ldots +\xi_n(x_n)$. *Непосредственно проверяется, что определенное таким образом отображение* ξ *группы* G *в группу* K *есть характер группы* G. *Оказывается, что* X *есть в этом смысле группа характеров группы* G. *Пусть, далее,* G_i' — *группа характеров группы* X_i, G' — *прямая сумма групп* $G_1', \ldots, G_n'$ (*т. е. группа характеров группы* X) *и* ω_i — *естественный гомоморфизм группы* G_i *в группу* G_i'. *Оказывается, что естественный гомоморфизм* ω *группы* G *в группу* G' *определяется соотношением*

$$\omega(x)=(\omega_1(x_1), \ldots, \omega_n(x_n)).$$

Таким образом, если все гомоморфизмы $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *суть изоморфизмы на, то* ω *также есть изоморфизм на.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что различные элементы группы X дают различные характеры группы G. Покажем, что элементы группы X дают все характеры группы G. Пусть f_i — естественный изоморфизм группы G_i в группу G (см. § 21, A)). Для произвольного элемента $x=(x_1, \ldots, x_n) \in G$ имеем $x=f_1(x_1)+ \ldots +f_n(x_n)$. Если теперь ξ' — произвольный характер группы G, то $\xi_i=\xi' f_i$ есть характер группы G_i, и мы имеем: $\xi'(x)=\xi' f_1(x_1)+ \ldots +\xi' f_n(x_n)=\xi_1(x_1)+ \ldots +\xi_n(x_n)$. С другой стороны, для элемента $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ группы X, рассматриваемого как характер, имеем $\xi(x)=\xi_1(x_1)+ \ldots +\xi_n(x_n)$. Таким образом, элемент ξ группы X, рассматриваемый как характер группы G, совпадает с заданным характером ξ' группы G.

Пусть $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — два элемента группы X и $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный элемент группы G. Складывая элементы ξ и η как характеры, мы получаем $\xi x+\eta x=\xi_1 x_1+ \ldots$ $\ldots +\xi_n x_n+\eta_1 x_1+ \ldots +\eta_n x_n=(\xi_1+\eta_1)x_1+ \ldots +(\xi_n+\eta_n)x_n=(\xi+\eta)x$. В последней части равенства стоит уже сумма $\xi+\eta$ в смысле групповой операции в X. Таким образом, сложение в группе X совпадает со сложением характеров.

Пусть F_i — произвольное бикомпактное множество группы G_i. Тогда $W(F_i, \Lambda_k)$ (см. определение 36) есть окрестность нуля группы X_i, а совокупность $W(F_1, \ldots, F_n; \Lambda_k)$ всех элементов $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ группы X, удовлетворяющих условиям $\xi_i \in W(F_i, \Lambda_k)$, т. е. условиям $\xi_i(F_i) \subset \Lambda_k$, есть окрестность нуля группы X как прямой суммы групп $X_1, \ldots, X_n$. Легко видеть, что совокупность Σ всех окрестностей вида $W(F_1, \ldots, F_n; \Lambda_k)$ есть полная система окрестностей нуля группы X как прямой суммы групп $X_1, \ldots, X_n$. Полная система Σ^* окрестностей нуля группы X как группы характеров группы G может быть составлена из всех окрестностей вида $W(F, \Lambda_h)$, где F — бикомпактное множество группы G. Покажем, что в каждой окрестности из Σ содержится окрестность из Σ^* и, наоборот, в каждой окрестности из Σ^*

содержится окрестность из Σ; этим самым будет доказано, что рассматриваемые топологии в группе X совпадают. Пусть $W(F_1, \ldots, F_n; \Lambda_k)$—заданная окрестность из Σ. Пусть f_i, как и раньше,—естественный изоморфизм группы G_i в группу G. Положим $F=f_1(F_1)\cup \ldots \cup f_n(F_n)$. Пусть $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in W(F, \Lambda_k)$. Мы имеем $\xi_i(F_i)=\xi f_i(F_i)\subset\xi(F)\subset\Lambda_k$, так что $\xi\in W(F_1, \ldots, F_n; \Lambda_k)$. Пусть, наоборот, $W(F, \Lambda_k)$—заданная окрестность из Σ^* и φ_i—естественный гомоморфизм группы G на группу G_i (если $x=(x_1, \ldots, x_n)$, то $\varphi_i(x)=x_i$). Положим $F_i=\varphi_i(F)$. Если $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in W(F_1, \ldots, F_n; \Lambda_{nk})$, то при $x\in F$ имеем $\xi(x)=\xi_1(x_1)+\ldots+\xi_n(x_n)=\xi_1\varphi_1(x)+\ldots+\xi_n\varphi_n(x)\in\xi_1(F_1)+\ldots+\xi_n(F_n)\subset n\Lambda_{nk}=\Lambda_k$. Таким образом, $\xi\in W(F, \Lambda_k)$.

Пусть, наконец, $x=(x_1, \ldots, x_n)$—произвольный элемент группы G и $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$—произвольный элемент группы X. Мы имеем $\omega(x)\xi=\xi x=\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n=\omega_1(x_1)\xi_1+\ldots+\omega_n(x_n)\xi_n$, т. е. $\omega(x)=(\omega_1(x_1), \ldots, \omega_n(x_n))$.

Итак, теорема 38 полностью доказана.

G) Прямую сумму a экземпляров группы K, b экземпляров свободной циклической группы C, c экземпляров группы D действительных чисел и некоторой конечной коммутативной группы Z обозначим через $\mathrm{K}^aC^bD^cZ$. Всякую группу, изоморфную группе такого вида, будем называть *элементарной группой*. Из теорем 2 и 38 и предложений C), D), E), F) следует, что группа характеров группы $\mathrm{K}^aC^bD^cZ$ изоморфна группе $\mathrm{K}^bC^aD^cZ$.

H) Если G есть элементарная группа, то естественный гомоморфизм ω группы G в ее вторую группу характеров G' есть изоморфизм на.

В силу теорем 2 и 38 достаточно доказать предложение H) для групп K, C, D и конечной циклической группы Z_r, а для этих групп справедливость предложения H) непосредственно следует из предложений C), D), E), F).

Нижеследующее предложение показывает, что в некотором смысле группу характеров произвольной дискретной группы можно приблизить элементарными группами.

I) Пусть X—группа характеров дискретной группы G и W—некоторая окрестность нуля группы X. Существует тогда в G такая подгруппа H с конечным числом образующих, что $\Phi=(\mathrm{X}, H)\subset W$. Таким образом, группа X/Φ, будучи группой характеров группы H, т. е. группы вида C^pZ (см. G)), имеет вид K^pZ.

Докажем существование подгруппы H. Пусть Δ—множество всех подгрупп группы X, имеющих вид (X, H), где $H\subset G$—подгруппа с конечным числом образующих. Если (X, H_1) и (X, H_2)—две подгруппы из Δ, то $(\mathrm{X}, H_1)\cap(\mathrm{X}, H_2)=(\mathrm{X}, H_1+H_2)$ и, так как подгруппа H_1+H_2 также имеет конечную систему образующих, то $(\mathrm{X}, H_1)\cap(\mathrm{X}, H_2)\in\Delta$. Таким образом, совокупность Δ мультипликативна. Далее, так как всякий элемент группы G содержится в подгруппе с конечным числом образующих, то пересечение всех подгрупп из Δ содержит лишь нуль. Из сказанного в силу предложения Н) § 13 вытекает существование такой подгруппы H с конечным числом образующих, что $(X, H) \subset W$.

Пример 63. Пусть G—бикомпактная коммутативная топологическая группа. Если g есть некоторое линейное представление первой степени группы G, то $g(x)$ есть число, по модулю равное единице. Положим $\alpha(x)=\frac{\ln g(x)}{2\pi i}$; α есть характер группы G. Обратно, если β есть некоторый характер группы G, то $h(x)=e^{2\pi i\beta(x)}$ есть линейное представление первой степени группы G.

Пусть $G=K$. Тогда $g_n(x)=e^{2\pi inx}$ есть линейное представление группы G, а соответствующий характер $\alpha_n(x)=\frac{\lg g_n(x)}{2\pi i}=nx$. Характерами α_n, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, исчерпываются все характеры группы K (см. С)), а потому g_n дают полную систему линейных неприводимых представлений группы K. Таким образом, в силу теорем 31 и 32 система функций g_n является полной ортогональной системой. И обратно, из теоремы анализа о полноте этой системы функций следует предложение С).

§ 37. Теоремы двойственности для бикомпактных и дискретных групп

Согласно теореме 36 группа характеров бикомпактной группы дискретна, а группа характеров дискретной группы бикомпактна. Таким образом, бикомпактные и дискретные группы занимают в теории двойственности особое положение. Для них эта теория может быть построена отдельно, и ее построению посвящается настоящий параграф.

Основная теорема двойственности

Теорема 39. *Пусть G—бикомпактная или дискретная группа, X—группа ее характеров и G'—группа характеров группы X. Оказывается, что естественный гомоморфизм ω группы G в группу G'* (см. определение 37) *есть изоморфизм на всю группу G'. В силу этого изоморфизма группы G и G' можно отождествить и считать, что G есть группа характеров группы X; при этом элемент x группы G как характер группы X определяется соотношением $x(\xi)=\xi(x)$, $\xi \in X$.*

Доказательство. Пусть сначала G—дискретная группа и H—произвольная ее подгруппа с конечным числом образующих. Положим $\Phi=(X, H)$, $H'=(G', \Phi)$. В силу замечания С) § 35, H' есть вторая группа характеров группы H, и отображение ω, рассматриваемое на H, есть естественный гомоморфизм группы H в группу H'. Так как группа H разлагается в прямую сумму конечного числа циклических групп (см. теорему 2), то она является элементарной (см. § 36, G)), и потому ω есть изоморфное отображение группы H на группу H' (см. § 36, H)). Таким образом, для доказательства того, что ω есть изоморфное отображение группы G на группу G', нам достаточно подобрать для любой пары элементов $a \in G$, $b' \in G'$ такую подгруппу H с конечным числом образующих, что $a \in H$, $b' \in H'$. Займемся этим. Пусть W—такая окрестность нуля группы X, что $b'(W) \subset \Lambda_1$, и $H_1 \subset G$—такая подгруппа с конечным числом образующих, что $(X, H_1) \subset W$ (см. § 36, I)). За H примем минимальную подгруппу группы G, содержащую H_1 и a; тогда $\Phi = (X, H) \subset W$. Так как $b'(\Phi) \subset \Lambda_1$, то $b'(\Phi) = 0$ (см. § 34, A)), и потому $b' \in H'$. Итак, найдена подгруппа H с конечным числом образующих, удовлетворяющая условиям $a \in H$, $b' \in H'$, и тем самым доказано, что ω есть изоморфное отображение группы G на группу G'.

Пусть теперь G—бикомпактная группа. В силу предложения C) § 34 для каждого элемента a группы G, отличного от нуля, существует такой характер α, что $\alpha(a) \neq 0$, и мы имеем $\omega(a)\alpha = \alpha(a) \neq 0$. Таким образом, ядро гомоморфизма ω содержит лишь нуль, и потому ω есть изоморфное отображение группы G на подгруппу $\omega(G)$ группы G'. Покажем, что $\omega(G) = G'$. Так как X есть дискретная группа, то в силу уже доказанной первой части теоремы группа X есть группа характеров группы G'. Элемент ξ группы X, рассматриваемый как характер группы G', удовлетворяет соотношению $\xi\omega(x) = \omega(x)\xi = \xi x$, т. е. ξ как характер группы G' имеет на $\omega(x)$ то же значение, что ξ как характер группы G' на x. Из этого следует, что $(X, \omega(G)) = (X, G) = \{0\}$. В силу теоремы 37 $(X, \omega(G))$ есть группа характеров группы $G'/\omega(G)$. Если бы последняя группа была нетривиальна, то, будучи бикомпактной, она имела бы в силу предложения C) § 34 отличные от нуля характеры, и группа $(X, \omega(G))$ была бы нетривиальной. Таким образом, $G'/\omega(G)$ содержит лишь нуль, т. е. $\omega(G) = G'$. Итак, доказано, что ω есть изоморфное отображение группы G на группу G'.

Теорема 39, таким образом, полностью доказана.

Из основной теоремы двойственности для бикомпактных и дискретных групп остальные теоремы двойственности для этих групп (частично уже доказанные) вытекают довольно непосредственно; выведем их.

Теорема о взаимности аннуляторов

A) Для всякого отличного от нуля элемента a бикомпактной или дискретной группы G найдется такой характер α этой группы, что $\alpha(a) \neq 0$.

Предложение это уже было доказано отдельно для бикомпактных групп (см. § 34, C)) и отдельно для дискретных групп (см. пример 62). Здесь мы получим его как следствие теоремы 39. Пусть X — группа характеров группы G. В силу теоремы 39 a есть ненулевой характер группы X. Поэтому существует такой элемент $\alpha \in X$, что $a(\alpha) \neq 0$. Тогда $\alpha(a) = a(\alpha) \neq 0$.

Теорема 40. *Пусть X — группа характеров бикомпактной или дискретной группы G, H — подгруппа группы G, $\Phi = (X, H)$* (см. § 35, А)) *и $H' = (G, \Phi)$ (аннулятор (G, Φ) определен, поскольку G есть группа характеров группы Φ). Оказывается, что $H' = H$.*

Доказательство. Непосредственно видно, что $H \subset H'$. Допустим, что $H \neq H'$; тогда существует элемент $a \in H'$, не входящий в H. В силу теоремы 37 Φ есть группа характеров группы G/H, и так как элемент a^* группы G/H, содержащий как смежный класс элемент a, отличен от нуля, то существует такой характер $\alpha \in \Phi$ группы G/H, что $\alpha(a^*) \neq 0$ (см. А)). Но $\alpha(a^*) = \alpha(a)$, и следовательно, $\alpha(a) \neq 0$, а это противоречит соотношению $a \in H' = (G, \Phi)$.

Таким образом, теорема 40 доказана.

Группа характеров подгруппы

Нижеследующая теорема 41 служит естественным дополнением к теореме 37 и является прямым следствием ее и основной теоремы двойственности.

Теорема 41. *Пусть X — группа характеров бикомпактной или дискретной группы G, H — произвольная подгруппа группы G и $\Phi = (X, H)$. При $\xi^* \in X/\Phi$, $x \in H$ положим $\xi^*(x) = \xi(x)$, где $\xi \in \xi^*$. Непосредственно проверяется, что определенный таким образом элемент $\xi^*(x)$ группы K не зависит от случайного выбора элемента ξ в смежном классе ξ^*. Оказывается, что отображение ξ^* группы H в группу K есть характер группы H и что X/Φ есть в этом смысле группа характеров группы H.*

Доказательство. Будем рассматривать G как группу характеров группы X (см. теорему 39). Тогда $H = (G, \Phi)$ (см. теорему 40), и H есть группа характеров группы X/Φ (см. теорему 37), причем связь между элементом x как характером группы X/Φ и элементом x как характером группы X дается соотношением $x(\xi^*) = x(\xi)$. Трактуя X/Φ как группу характеров группы H (см. теорему 39), получаем из последнего соотношения $\xi^*(x) = \xi(x)$.

Таким образом, теорема 41 доказана.

Теорема о продолжении характера

Теорема 42. *Пусть H — подгруппа бикомпактной или дискретной группы G, a — некоторый элемент группы G, не входящий в H, и β — некоторый характер группы H. Существует тогда такой характер α группы G, совпадающий с β на H, что $\alpha(a) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть X—группа характеров группы G и $\Phi=(X, H)$. Согласно теореме 41 X/Φ есть группа характеров группы H, и, следовательно, существует элемент γ^* группы X/Φ, совпадающий как характер группы H с β. Пусть $\gamma\in\gamma^*$. Тогда γ совпадает на H с β. Если $\gamma(a)\neq 0$, то полагаем $\alpha=\gamma$. Если $\gamma(a)=0$, то требуется дополнительное построение. Элемент a^* факторгруппы G/H, содержащий как смежный класс элемент a, отличен от нуля, и следовательно, существует характер $\delta\in\Phi$ группы G/H, не обращающийся в нуль на a^* (см. А) и теорему 37). Мы имеем $\delta(a)=\delta(a^*)\neq 0$, и достаточно положить $\alpha=\gamma+\delta$.

Таким образом, теорема 42 доказана.

Вес бикомпактной группы

Теорема 43. *Вес бикомпактной группы равен мощности ее группы характеров.*

Доказательство. Пусть X—бикомпактная группа и G—ее группа характеров. Если группы G и X конечны, то они изоморфны (см. § 36, G)), и теорема очевидна. Если же группы G и X бесконечны, то теорема 43 является непосредственным следствием предложения B) § 34 и теоремы 39, так как вес дискретной группы равен ее мощности.

Ортогональные пары групп

Формулируем теперь связь между дискретной группой и ее бикомпактной группой характеров в несколько иной форме.

Определение 38. Будем говорить, что бикомпактная группа X и дискретная группа G образуют *пару*, если установлен дистрибутивный и непрерывный закон перемножения элементов группы X с элементами группы G. Это значит, что каждой паре $\xi\in X$, $x\in G$ поставлен в соответствие элемент $\xi x\in K$, так что при этом выполнены условия: 1) $(\xi+\eta)x=\xi x+\eta x$, $\xi(x+y)=\xi x+\xi y$; 2) каковы бы ни были элемент $a\in G$ и окрестность Λ_k нуля группы K, существует такая окрестность W нуля группы X, что при $\xi\in W$ имеем $\xi a\in\Lambda_k$. Если H есть подмножество группы G, то через (X, H) обозначим совокупность всех таких элементов $\xi\in X$, что $\xi x=0$ при произвольном $x\in H$. Очевидно, что (X, H) есть подгруппа группы X. Если Φ есть подмножество группы X, то через (G, Φ) обозначим совокупность всех таких элементов $x\in G$, что $\xi x=0$ при произвольном $\xi\in\Phi$. Если $(X, G)=0$ и $(G, X)=0$, то мы будем говорить, что группы X и G образуют *ортогональную пару*.

Теорема 44. *Пусть X, G—ортогональная пара групп* (см. определение 38). *Каждый элемент $\xi\in X$ можно рассматривать как характер группы G, определяемый соотношением $\xi(x)=\xi x$. Точно так же каждый элемент $x\in G$ можно рассматривать как* *характер группы* X, *определяемый соотношением* $x(\xi)=\xi x$. *Оказывается, что в этом смысле каждая из групп* X, G *есть группа характеров другой.*

Доказательство. Пусть G'—группа характеров группы X. Отображение, ставящее в соответствие каждому элементу x группы G характер x' группы X, обозначим через ω: $x'=\omega(x)$. Из дистрибутивности умножения элементов группы X на элементы группы G следует, что ω есть гомоморфное отображение группы G в группу G'. Из условия $(G, \mathrm{X})=0$ следует, что ядро гомоморфизма ω содержит только нуль, так что ω есть изоморфное отображение группы G на подгруппу $\omega(G)$ группы G'. Так как $(\mathrm{X}, \omega(G))=$ $=(\mathrm{X}, G)=0$, то $\omega(G)=(G',\{0\})=G'$ (см. теорему 40) и, следовательно, ω есть изоморфное отображение группы G на группу G'. Таким образом, G есть группа характеров группы X, а следовательно (см. теорему 39), и X есть группа характеров группы G.

Итак, теорема 44 доказана.

Двойственные разложения в прямую сумму

В) Пусть G—бикомпактная или дискретная группа и M— некоторое множество ее подгрупп. Будем обозначать через $\Delta(M)$ пересечение всех подгрупп множества M и через $\Pi(M)$—минимальную подгруппу группы G, содержащую все группы множества M. (В § 21 в случае бикомпактной группы G вместо $\Pi(M)$ употреблялось обозначение $\overline{\Pi}(M)$; обозначение $\Pi(M)$ мы употребляем здесь из соображений единообразия.) Пусть X—группа характеров группы G и Ω—множество всех подгрупп группы X, имеющих вид (X, H), где $H\in M$. Оказывается, что $\Delta(\Omega)=(\mathrm{X}, \Pi(M))$. Из этого соотношения, меняя ролями группы G и X и пользуясь взаимностью аннуляторов, получаем $\Pi(\Omega)=(\mathrm{X}, \Delta(M))$.

Докажем первое из этих соотношений. Пусть $\xi\in\Delta(\Omega)$; это значит, что характер ξ обращается в нуль на каждой подгруппе из M. Таким образом, ядро гомоморфизма ξ содержит все подгруппы из M, а потому содержит и $\Pi(M)$, так что $\xi\in(\mathrm{X}, \Pi(M))$. Если, наоборот, $\xi\in(\mathrm{X}, \Pi(M))$, то характер ξ обращается в нуль на каждой подгруппе из M, и потому $\xi\in\Delta(\Omega)$. Таким образом, $\Delta(\Omega)=(\mathrm{X}, \Pi(M))$.

Теорема 45. *Пусть G—бикомпактная или дискретная группа, разложенная в прямую сумму множества M своих подгрупп* (см. определения 29′ и 10′). *При $H\in M$ положим $K_H=\Pi(M\setminus H)$ и $\sigma(H)=(\mathrm{X}, K_H)$. При $x\in H$, $\xi\in\sigma(H)$ определено значение $\xi(x)$, так что ξ есть характер группы H; оказывается, что в этом смысле $\sigma(H)$ есть группа характеров группы H. Оказывается, далее, что* X *распадается в прямую сумму множества $\sigma(M)$ своих подгрупп $\sigma(H)$. Это разложение группы* X *называется* двойственным *к исходному разложению группы G. Определенное таким образом отношение двойственности разложений взаимно.*

Доказательство. Обозначим через $\hat{M}$ множество всех групп K_H, $H \in M$. Согласно определению прямой суммы имеем $\Pi(M)=G$, $\Delta(\hat{M})=\{0\}$. Положим $H'=\Delta(\hat{M}\setminus K_H)$. Очевидно, что $H\subset H'$. Покажем, что $H'=H$. Мы имеем $H'\cap K_H=\{0\}$ и $H'+K_H=G$. Таким образом, G распадается в прямую сумму своих подгрупп H' и K_H. Но G распадается также в прямую сумму своих подгрупп H и K_H, и так как $H\subset H'$, то отсюда следует, что $H'=H$.

Положим $K_{\sigma(H)}=\Pi(\sigma(M)\setminus\sigma(H))$ и обозначим совокупность всех групп $K_{\sigma(H)}$ через $\hat{\sigma}(M)$. Так как $H=H'=\Delta(\hat{M}\setminus K_H)$, то в силу В) $K_{\sigma(H)}=(\mathrm{X}, H)$. Из этого и соотношения $\Pi(M)=G$ следует, что $\Delta(\hat{\sigma}(M))=\{0\}$. Далее из соотношений $\sigma(H)=(\mathrm{X}, K_H)$ и $\Delta(\hat{M})=\{0\}$ следует, что $\Pi(\sigma(M))=\mathrm{X}$. Таким образом, X распадается в прямую сумму множества $\sigma(M)$ своих подгрупп $\sigma(H)$.

Из уже доказанного соотношения $K_{\sigma(H)}=(\mathrm{X}, H)$ благодаря взаимности аннуляторов следует, что $H=(G, K_{\sigma(H)})$. Таким образом, разложение группы G, двойственное к полученному разложению группы X, совпадает с исходным разложением группы G.

Докажем, наконец, что $\sigma(H)$ есть группа характеров группы H. Группы H и $\sigma(H)$ образуют пару, если положить $\xi x=\xi(x)$. Покажем, что пара эта ортогональна (см. определение 38). Мы имеем $(\sigma(H), H)=\sigma(H)\cap(\mathrm{X}, H)=\sigma(H)\cap K_{\sigma(H)}=\{0\}$. Точно так же $(H, \sigma(H))=\{0\}$. В силу теоремы 44 отсюда следует, что $\sigma(H)$ есть группа характеров группы H.

Итак, теорема 45 полностью доказана.

Пример 64. Покажем, что 1) если бикомпактная группа X содержит элемент α, кратные которого всюду плотны в X, то вес τ группы X не превосходит континуума, и 2) для всякой мощности τ, не превосходящей континуума, существует бикомпактная группа X веса τ, содержащая элемент α, кратные которого всюду плотны в X.

Докажем первую часть утверждения. Будем рассматривать X как группу характеров дискретной группы G. Тогда α есть гомоморфизм группы G в группу K. Так как кратные элемента α всюду плотны в X, то ядро гомоморфизма α содержит лишь нуль. Таким образом, α есть изоморфное отображение группы G на подгруппу алгебраической группы K и, следовательно, мощность группы G не превосходит континуума. Из этого и из теоремы 43 следует, что вес пространства X также не превосходит континуума.

Докажем теперь вторую часть утверждения. В случае конечной мощности τ за X следует принять циклическую группу порядка τ. Рассмотрим случай бесконечной мощности τ. Легко видеть, что в группе K существует множество M линейно независимых (в смысле целочисленных линейных комбинаций) элементов мощности τ. Каждому элементу $\gamma \in M$ поставим в соответствие символ x_γ и рассмотрим совокупность G всех конечных линейных форм с целыми коэффициентами относительно символов x_γ. Совокупность G представляет собою группу по сложению, в которую мы внесем дискретную топологию. Группа G распадается в прямую сумму своих свободных циклических подгрупп с образующими x_γ. Группа характеров X группы G есть, таким образом, прямая сумма множества мощности τ групп, изоморфных K. Элемент $\alpha \in$ X, кратные которого всюду плотны в X, мы определим соотношением $\alpha(x_\gamma)=\gamma$. Очевидно, что характер α обращается в нуль лишь в нуле группы G. Поэтому кратные элемента α действительно всюду плотны в X.

Пример 65. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$—конечная система линейно независимых иррациональных чисел (сумма $n_1\alpha_1+\ldots+n_r\alpha_r$, где коэффициенты—целые, может быть целым числом, лишь если все коэффициенты обращаются в нуль). Покажем, что, каковы бы ни были положительное число ε и система действительных чисел $d_1, \ldots, d_r$, всегда найдутся такая система целых чисел $n_1, \ldots, n_r$ и такое целое число m, что

$$|m\alpha_i-d_i-n_i|<\varepsilon, \quad i=1, \ldots, r.$$

Это предложение представляет собой элементарную теорему теории аппроксимаций действительных чисел целочисленными кратными иррациональных. Мы ее докажем, пользуясь результатами теории характеров.

Пусть G—дискретная группа с r линейно независимыми образующими $a_1, \ldots, a_r$. Каждому целому числу m поставим в соответствие характер β_m группы G следующим образом. Если $x=n_1a_1+\ldots+n_ra_r$, то положим $\beta_m(x)=\varkappa(m(n_1\alpha_1+\ldots+n_r\alpha_r))$. Легко видеть, что $\beta_m+\beta_n=\beta_{m+n}$. Таким образом, множество B всех характеров вида β_m есть группа. Обозначим через X группу характеров группы G; B есть подгруппа алгебраической группы X. Обозначим через Φ замыкание множества B в X. Легко видеть, что если $\beta_m(x)=0$ при всяком m, то $x=0$; это следует из линейной независимости чисел α_i. Отсюда мы заключаем, что $(G, \Phi)=\{0\}$, а из этого в силу взаимности аннуляторов получаем равенство $\Phi=$X. Таким образом, множество B всюду плотно в X, т. е. всякий характер β группы G можно приблизить с произвольной точностью характерами вида β_m. Из этого последнего предложения доказываемое утверждение следует непосредственно. Действительно, если $d_1, \ldots, d_r$—заданные числа, то определим характер β группы G, положив $\beta(a_i)=\varkappa(d_i)$, $i=1, \ldots, r$. Аппроксимируя характер β характерами β_m, мы получаем нужные нам соотношения.

§ 38. Размерность, связность и локальная связность бикомпактной группы

Основная теорема двойственности для бикомпактных и дискретных групп, доказанная в предыдущем параграфе, дает принципиальную возможность выразить все свойства бикомпактной группы X через свойства ее дискретной группы характеров G, т. е. в терминах чисто алгебраических. В частности, это справедливо в отношении чисто топологических свойств пространства X. В предыдущем параграфе мы показали, что вес пространства X равен мощности группы G. В этом параграфе будут найдены алгебраические свойства группы G, отвечающие связности, полной несвязности, размерности и локальной связности пространства X.

Результаты настоящего параграфа в дальнейшем использованы не будут.

Теорема 46. *Пусть X—бикомпактная группа, G—группа ее характеров и P—подгруппа группы G, составленная из всех элементов конечного порядка. Оказывается, что* (X, P) (см. § 35, A)) *есть компонента нуля группы X. В частности, группа X тогда и только тогда связна, когда G не имеет отличных от нуля элементов конечного порядка; группа X тогда и только тогда вполне несвязна, когда G состоит из элементов конечного порядка* (см. § 22).

Доказательство. Пусть a—отличный от нуля элемент группы G и H—циклическая подгруппа с образующей a. Положим $\Phi=(X, H)$. Если элемент a имеет конечный порядок, то группа X несвязна. Действительно, группа X/Ф, будучи группой характеров конечной группы H, сама конечна, и потому группа X несвязна. Если a—свободный элемент, то группа X не может быть вполне несвязной. Действительно, допустим противоположное. Будем рассматривать элемент a как характер группы X и выберем такую окрестность W нуля группы X, что $a(W)\subset\Lambda_1$. Так как группа X вполне несвязна, то в W содержится некоторая открытая подгруппа Ψ группы X (см. теорему 16), так что факторгруппа X/Ψ конечна. Положим $H'=(G, \Psi)$. Так как $a(\Psi)\subset a(W)\subset\Lambda_1$, то $a(\Psi)=0$ (см. § 34, A)); таким образом, $a\in H'$. Так как конечная группа X/Ψ есть группа характеров группы H', то группа H' конечна, и мы пришли к противоречию.

Пусть теперь X$'$—компонента нуля группы X. Положим $Q=(G, X')$. Так как группа X$'$ связна, то группа G/Q, имеющая X$'$ своей группой характеров, не имеет элементов конечного порядка, и потому $Q\supset P$. Так как группа X/X$'$ вполне несвязна (см. § 22, C)), то группа Q, имеющая X/X$'$ своей группой характеров, не может иметь свободных элементов, и потому $Q\subset P$. Следовательно, $P=Q=(G, X')$, и $X'=(X, P)$.

Таким образом, теорема 46 доказана.

Теорема 47. *Пусть* X—*бикомпактная группа и* G—*группа ее характеров. Оказывается, что размерность пространства* X (см. определение 21) *равна рангу группы* G (см. § 6, F)).

Доказательство. Покажем, что размерность пространства X не превосходит ранга r группы G. Пусть Ω—произвольное конечное покрытие пространства X областями. Для всякого элемента $\xi \in$ X существует такая окрестность W_ξ нуля в X, что область $\xi+2W_\xi$ содержится в одной из областей покрытия Ω. Из покрытия пространства X областями $\xi+W_\xi$, $\xi \in$ X, выберем конечное покрытие $\xi_1+W_{\xi_1}, \ldots, \xi_k+W_{\xi_k}$ и положим $W=W_{\xi_1} \cap W_{\xi_2} \cap \ldots \cap W_{\xi_k}$. Пусть $H \subset G$—такая подгруппа с конечным числом образующих, что $\Phi=(\mathrm{X}, H) \subset W$ (см. § 36, I)). Естественное отображение группы X на факторгруппу X/Ф вписано (см. § 16, E)) в покрытие Ω. Так как группа X/Ф имеет вид $\mathrm{K}^p Z$, где $p \leqslant r$, и p есть размерность этой группы, то размерность группы X не превосходит r (см. § 16, E)).

Пусть теперь n—натуральное число, не превосходящее r. Покажем, что размерность пространства X не меньше n. Пусть S—максимальная, т. е. не допускающая пополнения, система линейно независимых элементов группы G (в случае бесконечного ранга система S строится при помощи трансфинитной индукции). В системе S имеется не менее n элементов; поэтому из нее можно выделить подсистему $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимых элементов. Систему, оставшуюся после их удаления из S, обозначим через S', и подгруппу группы G, составленную из всех элементов x, для которых система $x \cup S'$ линейно зависима,—через H. Смежный класс группы G по подгруппе H, содержащий элемент x_i, обозначим через x_i^*. Легко видеть, что факторгруппа $G^*=G/H$ не имеет отличных от нуля элементов конечного порядка и что $x_1^*, \ldots, x_n^*$ есть максимальная линейно независимая система элементов этой группы. Положим $\mathrm{X}^*=(\mathrm{X}, H)$. Группа X* есть группа характеров группы G^*. Покажем, что она имеет размерность, не меньшую n; этим будет доказано, что и X имеет размерность, не меньшую n. Пусть Q^n—куб n-мерного евклидова пространства, составленный из всех точек $d=(d_1, \ldots, d_n)$, координаты которых удовлетворяют условиям $|d_i| \leqslant \frac{1}{3}$, $i=1, \ldots, n$. Точке $d \in Q^n$ поставим следующим образом в соответствие характер ξ_d группы G^*. Пусть $x^* \in G^*$; тогда $ax^*=a_1x_1^*+\ldots+a_nx_n^*$, где $a, a_1, \ldots, a_n$—целые числа, причем $a \neq 0$, и мы положим: $\xi_d(x^*)=\varkappa\left(\frac{a_1}{a}d_1+\ldots+\frac{a_n}{a}d_n\right)$ (см. § 34, A)). Легко видеть, что $d \rightarrow \xi_d$ есть гомеоморфное отображение куба Q^n в группу X*. Таким образом, размерность группы X* не меньше n.

Итак, теорема 47 полностью доказана.

A) Подгруппа H дискретной группы G называется *подгруппой с делением*, если из соотношения $ax \in H$, где a—натуральное число и $x \in G$, следует, что $x \in H$. Непосредственно проверяется, что подгруппа H тогда и только тогда есть подгруппа с делением, если факторгруппа G/H не имеет отличных от нуля элементов конечного порядка. Мы будем говорить, что дискретная группа G обладает *свойством* L, если каждое конечное множество ее элементов содержится в подгруппе с делением, допускающей конечную систему образующих.

Теорема 48. *Бикомпактная группа* X *тогда и только тогда локально связна, когда ее группа характеров* G *обладает свойством* L (см. А)).

Для доказательства этой теоремы докажем предварительно предложение В), в значительной степени выясняющее суть дела и имеющее самостоятельный интерес.

В) Пусть G—дискретная группа конечного ранга r, не содержащая отличных от нуля элементов конечного порядка, и X—группа ее характеров. Группа X тогда и только тогда локально связна, когда группа G допускает конечную систему образующих.

Докажем это. Если группа G допускает конечную систему образующих, то в силу теоремы 2 она имеет вид C^r (см. § 36, G)), а группа X имеет вид K^r и потому локально связна. Рассмотрим теперь случай, когда группа G не допускает конечной системы образующих. Пусть $F=\{x_1, \ldots, x_r\}$—максимальная линейно независимая система элементов группы G. Определим окрестность W нуля группы X, положив $W=W(F, \Lambda_1)$ (см. определение 36); обозначим, далее, через H подгруппу группы G, порожденную элементами $x_1, \ldots, x_r$, и положим $\Phi=(\mathrm{X}, H)$. Мы покажем, что пространство W гомеоморфно прямому произведению r-мерного евклидова пространства E^r на пространство Φ. Пусть $d=\{d_1, \ldots, d_r\}$—последовательность действительных чисел, по модулю меньших $\frac{1}{3}$. Определим следующим образом характер α_d группы G. Пусть $x \in G$. Тогда $ax=a_1x_1+\ldots+a_rx_r$, где $a, a_1, \ldots, a_r$ суть целые числа и $a \neq 0$. Положим $\alpha_d(x)=\varkappa(s_1d_1+\ldots+s_rd_r)$, где $s_i=\frac{a_i}{a}$, $i=1, \ldots, r$. Множество E^r всех характеров вида α_d, очевидно, гомеоморфно открытому r-мерному кубу или, что то же самое, r-мерному евклидову пространству. Пусть теперь ξ—произвольный элемент окрестности W. Положим $d_i=\xi(x_i)$, $i=1, \ldots, r$. Характер $\xi-\alpha_d$ обращается в нуль на всех элементах $x_1, \ldots, x_r$ и потому принадлежит к подгруппе Φ. Таким образом, $\xi=\alpha_d+\eta$, где $\alpha_d \in E^r$, $\eta \in \Phi$. Полученное разложение элемента ξ в сумму $\alpha_d+\eta$ единственно. Действительно, из соотношения $\xi=\alpha_d+\eta$, где $\alpha_d \in E^r$, $\eta \in \Phi$, следует, что $\xi(x_i)=\alpha_d(x_i)+\eta(x_i)=\alpha_d(x_i)$, так что характер α_d однозначно определяется характером ξ. Из сказанного легко следует, что окрестность W гомеоморфна прямому произведению пространства E^r и пространства Φ. Изучим теперь топологическую структуру пространства Ф. Так как группа G не имеет конечной системы образующих, а подгруппа H имеет ее, то группа G/H, как легко видеть, также не имеет конечной системы образующих, а из этого и из того, что все элементы группы G/H имеют конечные порядки, следует, что группа G/H бесконечна. Таким образом, группа Ф, являющаяся группой характеров группы G/H, есть бесконечная бикомпактная вполне несвязная группа (см. теорему 46) и, в частности, пространство Ф локально несвязно. Ставя в соответствие каждому элементу $\xi=\alpha_d+\eta\in W$ элемент $\eta\in\Phi$, мы получаем непрерывное открытое отображение пространства W на локально несвязное пространство Ф. Из существования такого отображения следует, что пространство W локально несвязно (см. § 15, Н)). Таким образом, группа X локально несвязна.

Доказательство теоремы 48. Будем считать, что группа G обладает свойством L, и покажем, что группа X локально связна. Пусть W—произвольная окрестность нуля группы X. В силу предложения I) § 36 существует такая подгруппа $H_1\subset G$ с конечным числом образующих, что $(X, H_1)\subset W$. Так как группа G обладает свойством L, то конечная система образующих группы H_1 содержится в подгруппе $H\subset G$ с делением, имеющей конечную систему образующих. Так как $H_1\subset H$, то $\Phi=(X, H)\subset W$, а так как факторгруппа G/H не имеет отличных от нуля элементов конечного порядка, то группа Ф связна (см. теорему 46). Естественное гомоморфное отображение группы X на группу $X^*=X/\Phi$ обозначим через φ. Группа X^* имеет вид K^rZ и потому обладает базисом Σ^* в нуле, составленным из связных окрестностей. Совокупность всех множеств вида $\varphi^{-1}(\overline{U})$, где $U\in\Sigma^*$, обозначим через Δ. Так как все множества совокупности Δ бикомпактны и пересечение их совпадает с Ф, то существует такая область $U\in\Sigma^*$, что $V=\varphi^{-1}(U)\subset W$ (см. § 13, Н)). Покажем, что область V связна; этим локальная связность группы X будет доказана. Допустим, что область V распадается в сумму двух непустых непересекающихся областей V_1 и V_2. Так как подгруппа Ф связна, то не существует смежного класса группы X по этой подгруппе, пересекающегося с обеими областями V_1 и V_2. Поэтому области $\varphi(V_1)$ и $\varphi(V_2)$ не пересекаются между собой. Таким образом, область U, в противоположность предположению, распадается в сумму двух непустых непересекающихся областей $\varphi(V_1)$ и $\varphi(V_2)$. Итак, область V связна, и локальная связность группы X доказана.

Доказательству второй части теоремы предпошлем следующее замечание. Пусть P—подгруппа группы G, составленная из всех ее элементов конечного порядка, и X'—компонента нуля группы X: $X'=(X, P)$ (см. теорему 46). Если группа P бесконечна, то группа X локально несвязна. Действительно, в этом случае группа X/X' вполне несвязна, бесконечна и бикомпактна и потому локально несвязна, а так как естественное отображение группы X на группу X/X′ непрерывно и открыто, то группа X также локально несвязна (см. § 15, H)). Если группа P конечна, то X′ есть открытая подгруппа группы X, и в этом случае группа X тогда и только тогда локально связна, когда группа X′ локально связна.

Допустим теперь, что группа G не обладает свойством L, и покажем, что группа X локально несвязна. Если подгруппа P бесконечна, то, по ранее доказанному, группа X локально несвязна. Пусть подгруппа P конечна, и пусть M—конечное множество элементов группы G, не содержащееся ни в какой подгруппе с делением, допускающей конечную систему образующих. Так как P есть подгруппа с делением, то M не лежит целиком в P, и потому образ M^* множества M в группе $G^*=G/P$ содержит элементы, отличные от нуля. Таким образом, минимальная подгруппа $H^*\subset G^*$ с делением, содержащая M^*, есть ненулевая подгруппа конечного ранга. Если бы группа H^* допускала конечную систему образующих, то полный прообраз ее в группе G также допускал бы конечную систему образующих, что противоречит предположению. Таким образом, группа H^* конечного ранга не имеет конечной системы образующих. Положим $\Phi^*=(X', H^*)$. Так как группа X'/Φ^* является группой характеров группы H^*, то в силу B) она локально несвязна, а из этого ввиду открытости и непрерывности естественного отображения группы X′ на группу X'/Φ^* следует локальная несвязность группы X′.

Таким образом, теорема 48 полностью доказана.

Если предположить наличие в группе счетного топологического базиса, то исследование структуры локально связной группы удается довести до конца.

Т е о р е м а 49. *Бикомпактная локально связная группа* X *со счетным топологическим базисом распадается в прямую сумму конечной подгруппы и конечного или счетного числа подгрупп, изоморфных* K; *иначе говоря, группа* X *имеет вид* K^rZ, *где* r *может принимать не только конечные значения, но и счетно-бесконечное значение. Обратно, каждая группа вида* K^rZ *локально связна.*

Для доказательства теоремы 49 докажем двойственное ей предложение C).

C) Счетная дискретная группа G, обладающая свойством L, распадается в прямую сумму конечной подгруппы и конечного или счетного числа свободных циклических подгрупп; иначе говоря, группа G имеет вид C^rZ, где r может принимать не только конечные значения, но и счетно-бесконечное значение. Обратно, всякая группа вида C^rZ обладает свойством L.

Докажем это. Подгруппа P группы G, составленная из всех элементов конечного порядка, конечна, а факторгруппа $G^*=G/P$ не имеет отличных от нуля элементов конечного порядка и обладает свойством L. Занумеруем все отличные от нуля элементы группы G^* в последовательность y_1^*, y_2^*, ... Будем строить индуктивно последовательность x_1^*, x_2^*, ... линейно независимых элементов группы G^* таким образом, чтобы подгруппа, порожденная элементами x_1^*, ..., x_s^*, была подгруппой с делением и содержала элементы y_1^*, ..., y_s^*, $s=1, 2, \ldots$ Пусть H_1^*—минимальная подгруппа с делением, содержащая элемент y_1^*. Так как группа G^* обладает свойством L, то группа H_1^* имеет конечную систему образующих, а будучи минимальной, содержащей y_1^*, она является свободной циклической. За x_1^* примем образующую группы H_1^*. Допустим, что элементы x_1^*, ..., x_i^* уже построены, притом так, что для них выполнены предположения индукции, и обозначим через H_i^* порожденную ими подгруппу. Если $H_i^*=G^*$, то построение последовательности x_1^*, x_2^*, ... закончено. Если же $H_i^* \neq G^*$, то пусть k— наименьшее значение номера j, при котором y_j^* не принадлежит к подгруппе H_i^*. Так как y_1^*, ..., y_i^* принадлежат H_i^*, то $k \geqslant i+1$. Пусть H_{i+1}^*—минимальная подгруппа с делением, содержащая элементы x_1^*, ..., x_i^*, y_k^*. Так как H_i^* есть подгруппа с делением, то элементы x_1^*, ..., x_i^*, y_k^* линейно независимы, и ранг группы H_{i+1}^* равен $i+1$. В силу свойства L подгруппа H_{i+1}^* допускает конечную систему образующих, и потому факторгруппа H_{i+1}^*/H_i^* также допускает конечную систему образующих, а так как G^*/H_i^* не имеет элементов конечного порядка, то H_{i+1}^*/H_i^* также не имеет элементов конечного порядка. Таким образом, H_{i+1}^*/H_i^* есть свободная циклическая группа; ее образующую мы обозначим через x_{i+1}^{**}. Один из элементов смежного класса x_{i+1}^{**} мы примем за x_{i+1}^*. Легко проверяется, что для последовательности x_1^*, ..., x_{i+1}^* предположения индукции вновь выполнены. Один из элементов смежного класса x_i^* группы G по подгруппе P обозначим через x_i, а циклическую группу с образующей x_i обозначим через G_i. Непосредственно проверяется, что G распадается в прямую сумму своих подгрупп P и G_1, G_2, ...

Обратно, пусть группа G имеет вид C^rZ, т. е. распадается в прямую сумму своих подгрупп P и G_1, G_2, ..., где P—конечная подгруппа, а G_i—свободная циклическая подгруппа, образующую которой мы обозначим через x_i. Каждый элемент группы G содержится в конечной сумме $P+G_1+\ldots+G_i$. Следовательно, и любое конечное множество элементов группы G содержится в конечной сумме такого вида, конечная же сумма такого вида, очевидно, есть подгруппа с делением. Таким образом, группа G обладает свойством L.

Доказательство теоремы 49. Справедливость теоремы 49 непосредственно вытекает из предложения C) и теорем 45 и 48.

Пример 66. Теорема 49 полностью вскрывает структуру бикомпактной локально связной группы, пространство которой имеет счетную базу. Аналогичная теорема для групп без счетной базы неверна, как показывает нижеследующий пример.

Пусть G—совокупность всех последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_1, x_2, \ldots$—целые числа. Сумму двух последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots)$ определим, положив $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots)$. В силу этой операции сложения множество G оказывается группой, которую мы будем рассматривать как дискретную (группа G есть полная прямая сумма счетного числа свободных циклических групп; см. определение 10). Как показано в книге Куроша [20], группа G обладает свойством L, но не распадается в прямую сумму своих циклических подгрупп. Непосредственно видно, что в G нет отличных от нуля элементов конечного порядка. Таким образом, группа характеров группы G есть связная локально связная бикомпактная группа, не распадающаяся в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе K.

Пример 67. Пусть X—связная бикомпактная группа, вес которой не превосходит континуума. Покажем, что существует такое гомоморфное отображение φ топологической группы D действительных чисел в группу X, что множество $\varphi(D)$ всюду плотно в X. Таким образом, в X существует всюду плотная однопараметрическая подгруппа.

Пусть G—группа характеров группы X. В силу теорем 46 и 43 группа G не имеет отличных от нуля элементов конечного порядка, и мощность ее не превосходит континуума. Наличие этих свойств позволяет дать изоморфное отображение f группы G в дискретную группу действительных чисел. Построим изоморфизм f. Пусть M—максимальная линейно независимая система элементов группы G. Так как мощность системы M не превосходит континуума, то можно каждому элементу $x \in M$ поставить в соответствие действительное число $f(x)$ таким образом, чтобы система, составленная из чисел $f(x)$, $x \in M$, была линейно независимой. Если теперь x—произвольный элемент группы G, то $ax=a_1x_1+\ldots+a_rx_r$, где $x_1, \ldots, x_r$ суть различные элементы системы M, а $a, a_1, \ldots, a_r$—целые числа, причем $a \neq 0$. Мы положим $f(x)=\frac{a_1}{a}f(x_1)+\ldots+\frac{a_r}{a}f(x_r)$. Легко видеть, что f есть изоморфное отображение. Отображение f можно рассматривать как гомоморфизм группы G в топологическую группу D с нулевым ядром. Группа характеров группы D есть D, и гомоморфизм φ определяется как сопряженный к f (см. § 35, В)). Тот факт, что множество $\varphi(D)$ всюду плотно в X, следует из того, что ядро гомоморфизма f содержит лишь нуль, а f есть гомоморфизм, сопряженный с φ (последнее без труда вытекает из теоремы 39).

Пример 68. В примере 15 была построена дискретная группа G ранга 2 без отличных от нуля элементов конечного порядка, неразложимая в прямую сумму. Группа характеров X группы G есть связная двумерная бикомпактная группа, неразложимая в прямую сумму.

§ 39. Структура локально бикомпактных групп

В настоящем параграфе полностью раскрывается структура коммутативных групп бикомпактного происхождения (см. § 20, F)), именно, доказывается, что всякая группа такого вида распадается в прямую сумму бикомпактной группы и элементарной группы вида C^pD^q (см. § 36, G)). Так как всякая бикомпактная группа может рассматриваться как группа характеров дискретной группы (см. теорему 39), то этим изучение коммутативных групп бикомпактного происхождения полностью сводится к изучению алгебраических групп. Следует помнить, что не всякая локально бикомпактная группа является группой бикомпактного происхождения (см. пример 71). Однако, как показывает нижеследующее предложение А), всякая локально бикомпактная группа может быть аппроксимирована «изнутри» группами бикомпактного происхождения. В частности, эта аппроксимация позволит нам в следующем параграфе вывести теорему двойственности для общих локально бикомпактных групп из теоремы двойственности для групп бикомпактного происхождения.

А) В локально бикомпактной группе G имеется открытая подгруппа H бикомпактного происхождения, содержащая заданное бикомпактное множество $F \subset G$.

Докажем это. Пусть W—произвольная окрестность нуля группы G с бикомпактным замыканием $\overline{W}$. Положим $V = W \cup (W + F)$, $U = V \cup (-V)$. Множество U есть, очевидно, симметричная окрестность нуля с бикомпактным замыканием $\overline{U}$. Множество $H = U \cup 2U \cup \ldots$ представляет собой искомую подгруппу группы G.

Перейдем теперь к изучению структуры групп бикомпактного происхождения.

Л е м м а 1. *Пусть G—локально бикомпактная топологическая группа, a—ее элемент и A—порожденная элементом a циклическая подгруппа алгебраической группы G. Оказывается, что либо 1) множество A содержится в бикомпактном подмножестве пространства G, либо 2) множество A замкнуто в G и представляет собой дискретную свободную циклическую подгруппу топологической группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве мы будем рассматривать только локально бикомпактную группу $H = \overline{A}$. Допустим, что случай 2) не имеет места, и докажем, что тогда H есть бикомпактная группа. Этим лемма будет доказана.

Пусть U—произвольная симметричная $(-U = U)$ окрестность нуля группы H. Покажем, что для всякого натурального числа p существует такое натуральное число $n > p$, что $na \in U$. Допустим противоположное. Тогда алгебраическая группа A, очевидно, является свободной циклической, и в окрестность U могут входить лишь ее элементы 0, $\pm a$, ..., $\pm pa$. Таким образом, существует окрестность нуля группы H, пересекающаяся с A лишь по нулевому элементу, а это значит, что имеет место случай 2).

Пусть W—произвольная область пространства H; покажем, что существует натуральное число k, удовлетворяющее условию $ka \in W$. Так как множество A всюду плотно в H, то существует целое число m, удовлетворяющее условию $ma \in W$. Пусть U—такая симметричная окрестность нуля группы H, что $ma+U \subset W$, и $n>|m|$—такое натуральное число, что $na \in U$. Тогда $k=m+n>0$ и $ka=ma+na \in W$.

Фиксируем теперь какую-нибудь симметричную окрестность V нуля группы H с бикомпактным замыканием $\overline{V}$ и покажем, что конечная совокупность областей вида $ia+V$, где i—натуральное число, покрывает группу H; этим бикомпактность группы H будет доказана. Пусть x—произвольный элемент группы H; существует тогда (по доказанному) натуральное число k, удовлетворяющее условию $ka \in x+V$, или, что то же самое, условию $x \in ka+V$. Таким образом, области вида $ka+V$, где k—натуральное число, покрывают всю группу H. В частности, они покрывают и множество $\overline{V}$, а так как оно бикомпактно, то существует конечное покрытие множества $\overline{V}$ областями вида $ka+V$. Таким образом, область V покрыта областями $a+V$, $2a+V$, ..., $qa+V$. Покажем, что этими же областями покрыта и вся группа H. Пусть y—произвольный элемент группы H. Среди всех натуральных чисел k, удовлетворяющих условию $ka \in y+V$, выберем наименьшее и обозначим его через k_y. Покажем, что $k_y \leqslant q$. Мы имеем $k_y a-y \in V$, и так как область V покрыта областями $ia+V$, $i=1, \ldots, q$, то существует число i, удовлетворяющее условию $k_y a-y \in ia+V$, т. е. условию $(k_y-i)a \in y+V$. Так как k_y есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $ka \in y+V$, а $i>0$, то $k_y-i \leqslant 0$, т. е. $k_y \leqslant i \leqslant q$. Итак, области $ia+V$, $i=1, \ldots, q$, покрывают группу H, и группа эта бикомпактна.

Таким образом, лемма 1 доказана.

Нижеследующая лемма 2 устанавливает связь между группами бикомпактного происхождения и бикомпактными группами.

Л е м м а 2. *Во всякой коммутативной группе G бикомпактного происхождения* (см. § 20, F)) *существует дискретная подгруппа N с конечным числом линейно независимых образующих, фактор-группа G/N по которой бикомпактна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U—симметричная окрестность нуля с бикомпактным замыканием, порождающая $G: G=U \cup 2U \cup \ldots \ldots \cup nU \cup \ldots$ (см. § 20, F)). Совокупность всех областей вида $x+U$, где $x \in G$, покрывает группу G; в частности, она покрывает бикомпактное множество $2\overline{U}$. Таким образом, существует такая конечная система $a_1, \ldots, a_s$ элементов группы G, что области a_i+U, $i=1, \ldots, s$, покрывают область $2U$. Подгруппу алгебраической группы G, порожденную элементами $a_1, \ldots, a_s$, обозначим через A. Тогда $2U \subset A+U$; покажем, что $G=A+U$. Мы имеем $3U=2U+U \subset A+$ $+U+U \subset A+U$. Точно так же $4U \subset A+U$, и вообще $nU \subset A+U$, а это значит, что $G=A+U$.

Циклическую подгруппу алгебраической группы G, порожденную элементом a_i, обозначим через A_i. Если все множества $\overline{A}_i$ бикомпактны, то и сама группа G бикомпактна, именно, мы имеем $G=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\ldots+\overline{A}_s+\overline{U}$ (см. § 17, G)). В этом случае за группу N следует принять нулевую подгруппу группы G. Если же не все множества $\overline{A}_i$ бикомпактны, то в силу леммы 1 среди элементов $a_1, \ldots, a_s$ имеется хотя бы один, порождающий дискретную свободную циклическую подгруппу топологической группы G. Обозначим этот элемент через b_1. Допустим, что из системы $a_1, \ldots, a_s$ выбрана подсистема $b_1, \ldots, b_i$ линейно независимых элементов, порождающая дискретную подгруппу N_i топологической группы G, и покажем, что либо факторгруппа G/N_i бикомпактна, либо систему $b_1, \ldots, b_i$ можно пополнить еще одним элементом b_{i+1} системы $a_1, \ldots, a_s$.

Допустим, что группа G/N_i не бикомпактна, и обозначим через f естественное гомоморфное отображение группы G на группу G/N_i. Мы имеем $f(G)=f(A)+f(U)$, и из леммы 1 следует, что (так как группа $f(G)$ не бикомпактна) среди элементов $f(a_1), \ldots, f(a_s)$ имеется хотя бы один $f(a_j)$, порождающий дискретную свободную циклическую подгруппу топологической группы $f(G)$. Положим $b_{i+1}=a_j$. Из того, что $f(b_{i+1})$ порождает свободную циклическую подгруппу топологической группы $f(G)$, непосредственно следует, что элементы $b_1, \ldots, b_i, b_{i+1}$ линейно независимы и порождают дискретную подгруппу группы G. Так как система $a_1, \ldots, a_s$ конечна, то после конечного числа шагов мы придем к такой группе N_k, что группа G/N_k бикомпактна.

Итак, лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть G—локально бикомпактная группа и N—такая ее дискретная подгруппа с конечной системой образующих, что факторгруппа G/N есть бикомпактная элементарная группа. Тогда G есть элементарная группа* (см. § 36, G)).

Доказательство. Докажем лемму сначала в предположении, что группа G связна. В этом предположении группа G/N также связна и потому имеет вид K^r. Так как K, по определению, есть факторгруппа группы D действительных чисел по подгруппе целых чисел, то группу K^r можно представить как факторгруппу r-мерного векторного пространства $A=D^r$ по подгруппе B всех векторов с целыми координатами. Естественный гомоморфизм группы G на группу G/N обозначим через f, а естественный гомоморфизм группы A на группу $A/B=G/N$—через g. Так как ядра обоих гомоморфизмов дискретны, то f и g являются локальными изоморфизмами и, следовательно, существует настолько малая окрестность U нуля группы A, что $f^{-1}g$ осуществляет локальный изоморфизм группы A на группу G (см. § 23). Так как A есть векторная группа, то для всякого элемента $x \in A$ найдутся такой элемент $y \in U$ и такое натуральное число n, что $ny = x$. Положим $h(x) = nf^{-1}g(y)$. Легко видеть, что определенный таким образом элемент $h(x)$ не зависит от случайного выбора целого числа n и что отображение h является гомоморфизмом группы A на группу G (см. теорему 14). Далее, в окрестности U имеем $h = f^{-1}g$, т. е. $g = fh$, а так как окрестность U порождает группу A, то соотношение $g = fh$ имеет место и на всей группе A. Из этого соотношения следует, что ядро C гомоморфизма h содержится в B. Так как группа B имеет конечную систему линейно независимых образующих, то существует такой ее базис $e_1, \ldots, e_r$, что подгруппа C имеет базис $\tau_1 e_1, \ldots, \tau_r e_r$ (см. § 6, E)). Векторы $e_1, \ldots, e_r$ составляют базис векторного пространства A. Обозначим теперь через D_i координатную ось пространства A, направленную по вектору e_i, и через C_i—подгруппу группы D_i с образующей $\tau_i e_i$. Непосредственно видно, что группа D_i/C_i изоморфна группе K при $\tau_i \neq 0$ и группе D при $\tau_i = 0$. Таким образом, группа A/C, а следовательно, и группа G, имеет вид $K^p D^q$.

Пусть теперь G—произвольная группа, удовлетворяющая условиям леммы. Так как группа G/N бикомпактна и элементарна, то она имеет вид $K^r Z$. Конечное прямое слагаемое Z можно рассматривать как подгруппу группы G/N. Полный прообраз M этой подгруппы при естественном гомоморфизме f группы G на группу G/N есть дискретная подгруппа с конечным числом образующих, обладающая тем свойством, что G/M имеет вид K^r. Таким образом, нам достаточно доказать лемму в том частном случае, когда G/N имеет вид K^r. Будем исходить из этого предположения.

Так как подгруппа N дискретна, то естественное отображение f группы G на группу G/N является локальным изоморфизмом, и потому на достаточно малую окрестность U^* нуля группы G/N гомеоморфно при помощи f отображается некоторая окрестность U нуля группы G. Так как группа G/N имеет вид K^r, то окрестность U^* можно выбрать связной и симметричной; тогда и окрестность U будет связна и симметрична. Группа $G' = U \cup 2U \cup \ldots$ является открытой подгруппой группы G. Так как окрестность U связна, то и группа G' связна. Таким образом, G' есть компонента нуля группы G. Связная группа G/N порождается окрестностью U нуля, и из соотношения $f(U) = U^*$ следует, что $f(G') = G/N$. Положим $N' = G' \cap N$. Так как группы G' и G/N локально бикомпактны и связны, то к гомоморфизму f группы G' на группу G/N применима теорема 12 (см. § 20, F)), и потому группа G'/N' изоморфна группе G/N (см. теорему 11). Таким образом, факторгруппа связной группы G' по дискретной подгруппе N' с конечным числом образующих имеет вид K^r, и потому в силу первой части доказательства леммы группа G' имеет вид K^pD^q. Из соотношения $f(G')=f(G)$ следует, что $G'+N=G$. Далее, так как G' есть область в G, то группа G/G' дискретна и, следовательно, изоморфна группе N/N', а потому имеет конечную систему образующих. Пусть $x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*$—канонический базис группы G/G'; здесь x_i^*—свободная образующая, а y_j^* имеет порядок $\tau_j>0$ (см. теорему 2). В смежном классе x_i^* группы G по подгруппе G' произвольным образом выберем элемент x_i. Точно так же в смежном классе y_j^* выберем элемент y_j'. Мы имеем $\tau_j y_j' \in G'$. Из того, что группа G' имеет вид K^pD^q, следует, что в G' всякий элемент допускает деление на любое натуральное число, и потому существует элемент $z_j \in G'$, удовлетворяющий условию $\tau_j z_j=\tau_j y_j'$. Элемент $y_j=y_j'-z_j$ смежного класса y_j^* удовлетворяет условию $\tau_j y_j=0$. Подгруппу группы G с образующими $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ обозначим через H. Непосредственно видно, что группа G распадается в прямую сумму своих подгрупп G' и H (см. определение 28'). Так как группы G' и H элементарны, то и группа G элементарна.

Итак, лемма 3 полностью доказана.

Нижеследующая теорема показывает, что всякая коммутативная группа бикомпактного происхождения в известном смысле может быть аппроксимирована элементарными группами.

Т е о р е м а 50. *Во всякой окрестности V нуля коммутативной группы G бикомпактного происхождения содержится такая бикомпактная подгруппа H, что факторгруппа G/H элементарна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2 существует такая дискретная подгруппа N группы G, имеющая конечную систему образующих, что факторгруппа $G^*=G/N$ бикомпактна. Естественное отображение группы G на группу G^* обозначим через f. Пусть W—такая симметричная окрестность нуля группы G с бикомпактным замыканием $\overline{W}$, что $W \subset V$ и что $3W$ содержит лишь нуль группы N. В силу предложения I) § 36 существует такая подгруппа $H^* \subset f(W)$ группы G^*, что группа G^*/H^* элементарна. Положим $H'=f^{-1}(H^*)$ и $H=H' \cap W$. Заметим, что f есть гомеоморфное отображение множества $\overline{W}$ на множество $f(\overline{W})$, и потому f есть также гомеоморфное отображение множества H на множество H^*. Таким образом, множество H бикомпактно. Покажем, что $H-H \subset H$; этим будет доказано, что H есть подгруппа группы G. Пусть x и y—два элемента из H. Тогда $x-y \in H'$, и существует такой элемент $z \in H$, что $f(z)=f(x-y)$. Таким образом, $x-y-z \in N$. Но ввиду того, что $3W$ содержит лишь нуль группы G, имеем $x-y-z=0$, так что $x-y \in H$. Итак, H есть подгруппа группы G. Покажем, что $H'=$ $=H+N$. Пусть $z \in H'$. Тогда существует такой элемент $x \in H$, что $(x)=f(z)$, и потому $y=z-x \in N$. Итак, $H'=H+N$. Так как $H \subset W$, то пересечение групп H и N содержит лишь нуль. В факторгруппе $\hat{G}=G/H$ естественный образ группы N обозначим через $\hat{N}$. Из доказанного следует, что группа $\hat{N}$ изоморфна группе N и потому является дискретной группой с конечным числом образующих и что группа $\hat{G}/\hat{N}$ изоморфна группе G/H', а следовательно, и группе G^*/H^*. Так как последняя есть бикомпактная элементарная группа, то в силу леммы 3 группа $\hat{G}=G/H$ является элементарной.

Итак, теорема 50 доказана.

Перейдем теперь к основному результату настоящего параграфа.

Теорема 51. *Коммутативная группа бикомпактного происхождения распадается в прямую сумму бикомпактной подгруппы и элементарной подгруппы.*

Доказательство. Полную систему окрестностей нуля рассматриваемой группы G занумеруем в трансфинитную последовательность U_0, U_1, U_2, ... Трансфинитное число, следующее за всеми входящими в эту нумерацию трансфинитными числами, обозначим через ϑ. Пусть $\lambda\leqslant\vartheta$. Если число λ не имеет предшествующего, то положим $V_\lambda=G$; в противном случае положим $V_\lambda=U_{\lambda-1}$. Вновь полученная трансфинитная последовательность V_1, V_2, ..., V_ϑ окрестностей нуля также есть базис в нуле.

В силу теоремы 50 существует такая бикомпактная подгруппа $H_1\subset V_1$ группы G, что факторгруппа G/H_1 элементарна, т. е. имеет вид $K^aC^bD^nZ$. Прямые слагаемые D^n и K^aZ будем трактовать как подгруппы группы G/H_1. Полный прообраз подгруппы K^aZ в группе G обозначим через H. Так как группы H_1 и K^aZ бикомпактны, то группа H также бикомпактна (см. § 19, I)). Полный прообраз подгруппы D^n в группе G обозначим через G_1. Мы имеем $G_1\cap H=H_1\subset V_1$. Положим $G'=G_1+H$. Факторгруппа G'/H изоморфна факторгруппе G_1/H_1 (см. § 20, F) и G)) и потому имеет вид D^n. Факторгруппа G/G' изоморфна группе C^b и потому имеет конечную линейно независимую систему образующих x_1^*, ..., x_b^*. Из смежного класса x_i^* группы G по подгруппе G' выберем произвольный элемент x_i, $i=1, \ldots, b$. Порожденная элементами $x_1, \ldots, x_b$ подгруппа N группы G дискретна, и ее образующие x_1, ..., x_b независимы. Группа G распадается в прямую сумму своих подгрупп G' и N.

Построим теперь индуктивно невозрастающую трансфинитную последовательность G_1, G_2, ..., G_ϑ подгрупп группы G, обладающую тем свойством, что при произвольном $\lambda\leqslant\vartheta$ имеем $H_\lambda=G_\lambda\cap H\subset V_\lambda$ и $G_\lambda+H=G'$. Подгруппа G_1 уже построена. Допустим, что для $\mu<\lambda\leqslant\vartheta$ подгруппы G_μ, удовлетворяющие указанным условиям, уже построены, и построим подгруппу G_λ.

Пусть сначала существует число $\lambda-1$. По предположению индукции $H_{\lambda-1}=G_{\lambda-1}\cap H\subset V_{\lambda-1}$ и $G_{\lambda-1}+H=G'$. Так как G имеет бикомпактное происхождение, то G есть счетная сумма бикомпактных множеств (см. § 20, F)), и, в силу предложения G) § 20, факторгруппа $G_{\lambda-1}/H_{\lambda-1}$ изоморфна факторгруппе G'/H, последняя же имеет вид D^n. Таким образом, $G_{\lambda-1}/H_{\lambda-1}$ имеет вид D^n. Так как D^n, очевидно, имеет бикомпактное происхождение и подгруппа $H_{\lambda-1}$ бикомпактна, то $G_{\lambda-1}$ имеет бикомпактное происхождение (см. § 20, F)). Таким образом, в силу теоремы 50 существует такая бикомпактная подгруппа $H_\lambda \subset V_\lambda$ группы $G_{\lambda-1}$, что факторгруппа $G_{\lambda-1}/H_\lambda$ элементарна. Так как группа $G_{\lambda-1}/H_\lambda$ имеет бикомпактную подгруппу $H_{\lambda-1}/H_\lambda$, факторгруппа по которой изоморфна группе $G_{\lambda-1}/H_{\lambda-1}$, имеющей вид D^n, то сама группа $G_{\lambda-1}/H_\lambda$ имеет вид $K^{a'}Z'D^n$. Прямые слагаемые $K^{a'}Z'$ и D^n будем рассматривать как подгруппы группы $G_{\lambda-1}/H_\lambda$. Полный прообраз подгруппы $K^{a'}Z'$ в $G_{\lambda-1}$ совпадает с $H_{\lambda-1}$; полный прообраз подгруппы D^n в $G_{\lambda-1}$ примем за G_λ. Мы имеем $G_\lambda \cap H = G_\lambda \cap H_{\lambda-1} = H_\lambda \subset V_\lambda$ и $G_\lambda + H = G_\lambda + H_{\lambda-1} + H = G_{\lambda-1} + H = G'$. Таким образом, для построенной подгруппы G_λ предположения индукции выполнены.

Допустим теперь, что число λ не имеет предшествующего. Группу G_λ в этом случае определим как пересечение всех групп G_μ с индексами $\mu < \lambda$. Обозначим через H_λ пересечение всех групп H_μ с индексами $\mu < \lambda$. Так как $G_\mu \cap H = H_\mu$, то $G_\lambda \cap H = H_\lambda \subset G = V_\lambda$. Докажем, что $G_\lambda + H = G'$. Пусть $z \in G'$. Смежный класс группы G' по подгруппе H_μ, содержащий z, обозначим через z_μ^*. Так как $G' = G_\mu + H$, то существуют такой однозначно определенный смежный класс x_μ^* группы G_μ по подгруппе H_μ и такой однозначно определенный смежный класс y_μ^* группы H по подгруппе H_μ, что $x_\mu^* + y_\mu^* = z_\mu^*$. Если $\mu < \nu < \lambda$, то $z_\mu^* \supset z_\nu^*$, а из этого следует, что $x_\mu^* \supset x_\nu^*$ и $y_\mu^* \supset y_\nu^*$. Пересечение всех множеств x_μ^* с индексами $\mu < \lambda$ обозначим через x_λ^*, пересечение всех множеств y_μ^* с индексами $\mu < \lambda$ обозначим через y_λ^*, наконец, пересечение всех множеств z_μ^* с индексами $\mu < \lambda$ обозначим через z_λ^* (эти пересечения непусты; см. теорему 4). Тогда x_λ^* есть смежный класс группы G_λ по подгруппе H_λ, y_λ^* есть смежный класс группы H по подгруппе H_λ, наконец, z_λ^* есть смежный класс группы G' по подгруппе H_λ. Из включения $x_\lambda^* + y_\lambda^* \subset z_\mu^*$, $\mu < \lambda$, следует, что $x_\lambda^* + y_\lambda^* = z_\lambda^*$. Так как $z \in z_\lambda^*$, то из последнего вытекает, что $z = x + y$, где $x \in x_\lambda^* \subset G_\lambda$, $y \in y_\lambda^* \subset H$. Итак, доказано, что $G' = G_\lambda + H$. Таким образом, индуктивные предположения для группы G_λ выполнены.

Подгруппа H_ϑ по построению содержится во всех окрестностях нуля группы G и потому содержит лишь нуль. Таким образом, $G_\vartheta \cap H = \{0\}$, $G_\vartheta + H = G'$. Так как группа G' может быть представлена как счетная сумма своих бикомпактных подмножеств, то последние соотношения означают для нее распадение в прямую сумму подгрупп G_ϑ и H (см. теорему 13). Группа H бикомпактна, а группа G_ϑ изоморфна группе G'/H и потому имеет вид D^n. Таким образом, группа G распадается в прямую сумму элементарной группы $G_\vartheta + N$ и бикомпактной группы H.

Итак, теорема 51 полностью доказана.

Пример 69. Разложение группы G бикомпактного происхождения в прямую сумму, указанное в теореме 51, всегда можно выбрать так, чтобы элементарное слагаемое A имело вид C^pD^q. Этим условием бикомпактное слагаемое B определено однозначно: B есть максимальная бикомпактная подгруппа группы G, т. е. содержит всякую бикомпактную подгруппу группы G.

Согласно теореме 51 G распадается в прямую сумму элементарной подгруппы, т. е. подгруппы вида $K^aC^bD^cZ$, и бикомпактной подгруппы B'. Отщепляя от первого слагаемого бикомпактное слагаемое K^aZ и присоединяя его к B', мы и получаем нужное нам разложение. Максимальность подгруппы B следует из того, что факторгруппа G/B имеет вид C^pD^q и потому не содержит нетривиальных бикомпактных подгрупп.

Пример 70. Элемент коммутативной локально бикомпактной группы G будем называть *бикомпактным*, если все кратные его содержатся в бикомпактном подмножестве пространства G. Оказывается, что множество B всех бикомпактных элементов группы G есть подгруппа группы G и что факторгруппа G/B не имеет бикомпактных элементов. В случае, если G имеет бикомпактное происхождение, B совпадает с максимальной бикомпактной подгруппой группы G (см. пример 69).

Пусть сначала G—группа бикомпактного происхождения и B'—ее максимальная бикомпактная подгруппа. Естественное гомоморфное отображение группы G на группу G/B' обозначим через f. Группа G/B' имеет вид C^pD^q, и потому единственным ее бикомпактным элементом является нуль. Если b есть бикомпактный элемент группы G, то $f(b)$ есть бикомпактный элемент группы G/B', и потому $f(b)=0$, т. е. $b \in B'$. С другой стороны, ясно, что всякий элемент группы B' бикомпактен. Таким образом, $B'=B$.

Пусть теперь G—произвольная локально бикомпактная группа. Если x и y—два элемента из B, то все кратные элемента x содержатся в некотором бикомпактном множестве X, а все кратные элемента y—в некотором бикомпактном множестве Y. Тогда все кратные элемента $x-y$ содержатся в бикомпактном множестве $X-Y$, и, следовательно, $x-y \in B$. Таким образом, B есть подгруппа алгебраической группы G. Докажем, что множество B замкнуто. Пусть $x \in \overline{B}$ и H—открытая подгруппа бикомпактного происхождения, содержащая x (см. А)). Пересечение $B'=H \cap B$ есть совокупность всех бикомпактных элементов группы H и, по только что доказанному, есть бикомпактная подгруппа группы H. Так как $x \in \overline{B}'=B'$, то $x \in B$, и, следовательно, множество B замкнуто. Итак, B есть подгруппа группы G.

Покажем, наконец, что группа G/B не имеет бикомпактных элементов, отличных от нуля. Пусть f—естественное гомоморфное отображение группы G на группу G/B, x^*—бикомпактный элемент группы G/B и $x \in x^*$. В силу А) в G имеется открытая подгруппа H бикомпактного происхождения, содержащая x. Так как f — открытое отображение, то $f(H)$ есть открытая подгруппа группы G/B и f есть открытый гомоморфизм группы H на группу $f(H)$. Таким образом, группа $f(H)$ изоморфна факторгруппе H/B', где $B' = B \cap H$. В H/B' нет бикомпактных элементов, отличных от нуля, и так как $x^* \in f(H)$, то $x^* = 0$.

Пример 71. Дискретная группа G тогда и только тогда имеет бикомпактное происхождение, когда она обладает конечной системой образующих (предложение это верно не только для коммутативных, но и для произвольных групп). Действительно, если V есть порождающая группу G окрестность нуля с бикомпактным замыканием, то ввиду дискретности группы G множество V содержит лишь конечное число элементов, и эти элементы составляют систему образующих группы G. Если, наоборот, группа G имеет конечную систему M образующих, то, присоединяя к M нуль группы G, мы получим окрестность V нуля с бикомпактным замыканием, порождающую G.

§ 40. Теоремы двойственности для локально бикомпактных групп

В настоящем параграфе доказываются теоремы двойственности для локально бикомпактных групп, чем теория двойственности полностью завершается.

Основная теорема

Теорема 52. *Пусть G — локально бикомпактная группа, X — группа ее характеров, G' — группа характеров группы X и ω — естественный гомоморфизм группы G в группу G'* (см. определение 37). *Оказывается, что ω есть изоморфное отображение группы G на группу G', так что группы G и G' можно отождествить и считать, что G есть группа характеров группы X; при этом элемент x группы G как характер группы X определяется соотношением $x(\xi) = \xi(x)$, $\xi \in X$.*

Доказательство. Пусть H — открытая подгруппа группы G, имеющая бикомпактное происхождение (см. § 39, А)). Положим $\Phi = (X, H)$ и $H' = (G', \Phi)$. Так как Φ есть группа характеров дискретной группы G/H (см. теорему 37), то группа Φ бикомпактна. В силу предложения С) § 35 H' есть вторая группа характеров группы H и отображение ω, рассматриваемое на H, есть естественный гомоморфизм группы H в группу H'. В силу теоремы 51 группа H распадается в прямую сумму бикомпактной группы и элементарной группы, и потому естественное отображение ω группы H в группу H' есть изоморфизм на (см. теоремы 38 и 39 и

§ 36, Н)). Мы имеем $H'=W(\Phi, \Lambda_1)$; действительно, всякий элемент $x' \in G'$, удовлетворяющий условию $x'(\Phi) \subset \Lambda_1$, удовлетворяет и условию $x'(\Phi)=0$ (см. § 34, А)), т. е. принадлежит подгруппе H'. Таким образом, H' есть открытая подгруппа группы G, и потому ω есть открытый гомоморфизм группы G в группу G'.

Для доказательства того, что ω есть изоморфное отображение группы G на группу G', нам достаточно показать теперь, что, какова бы ни была пара элементов $a \in G$, $b' \in G'$, всегда найдется такая открытая подгруппа $H \subset G$ бикомпактного происхождения, что $a \in H$, $b' \in H'$.

Пусть W—такая окрестность нуля группы X, что $b'(W) \subset \Lambda_1$, и U_1—произвольная симметричная окрестность нуля группы G с бикомпактным замыканием $\overline{U}_1$. Подгруппу, порожденную окрестностью U_1, обозначим через H_1 и положим $\Phi_1=(X, H_1)$. В силу теоремы 37 Φ_1 есть группа характеров дискретной группы G/H_1, и потому в силу предложения I) § 36 существует в G/H_1 подгруппа H_2^* с конечным числом образующих $x_1^*, \ldots, x_n^*$, удовлетворяющая условию $\Phi_2=(\Phi_1, H_2^*) \subset W$. Пусть x_i—какой-нибудь элемент смежного класса x_i^*, $i=1, \ldots, n$. Полный прообраз группы H_2^* в группе G обозначим через H_2. Мы имеем $\Phi_2=(X, H_2)$. За H мы примем какую-нибудь подгруппу бикомпактного происхождения, содержащую множество $\overline{U}_1$ и элементы $a, x_1, \ldots, x_n$ (см. § 39, А)). Тогда $H_2 \subset H$, и потому $\Phi=(X, H) \subset \Phi_2 \subset W$. Мы имеем $b'(\Phi) \subset b'(W) \subset \Lambda_1$ и, следовательно, $b'(\Phi)=\{0\}$ (см. § 34, А)). Таким образом, $b' \in H'$ и, по построению, $a \in H$.

Итак, теорема 52 полностью доказана.

Теорема о взаимности аннуляторов

А) Для всякого отличного от нуля элемента a группы G найдется такой характер α этой группы, что $\alpha(a) \neq 0$.

Докажем это. Пусть X—группа характеров группы G. В силу теоремы 52 a есть ненулевой характер группы X. Поэтому существует такой элемент $\alpha \in X$, что $a(\alpha) \neq 0$. Тогда $\alpha(a)=a(\alpha) \neq 0$.

Теорема 53. *Пусть X—группа характеров группы G, H—подгруппа группы G,* $\Phi=(X, H)$ (см. § 35, А)) *и* $H'=(G, \Phi)$ (*аннулятор* (G, Φ) *определен, поскольку G есть группа характеров группы* X). *Оказывается, что* $H'=H$.

Доказательство. Непосредственно видно, что $H \subset H'$. Допустим, что $H \neq H'$; тогда существует элемент $a \in H'$, не входящий в H. В силу теоремы 37 Φ есть группа характеров группы G/H, и, так как элемент a^* группы G/H, содержащий как смежный класс элемент a, отличен от нуля, то существует такой характер $\alpha \in \Phi$ группы G/H, что $\alpha(a^*) \neq 0$. Но $\alpha(a^*)=\alpha(a)$ и, следовательно, $\alpha(a) \neq 0$, а это противоречит соотношению $a \in H'=(G, \Phi)$.

Таким образом, теорема 53 доказана.

Группа характеров подгруппы

Нижеследующая теорема 54 служит естественным дополнением к теореме 37 и является прямым следствием ее и основной теоремы двойственности.

Теорема 54. *Пусть* X*—группа характеров группы* G, H*— произвольная подгруппа группы* G *и* $\Phi=(X, H)$. *При* $\xi^* \in X/\Phi$, $x \in H$ *положим* $\xi^*(x)=\xi(x)$, *где* $\xi \in \xi^*$. *Непосредственно проверяется, что определенный таким образом элемент* $\xi^*(x)$ *группы* K *не зависит от случайного выбора элемента* ξ *в смежном классе* ξ^*. *Оказывается, что отображение* ξ^* *группы* H *в группу* K *есть характер группы* H *и что* X/Φ *есть в этом смысле группа характеров группы* H.

Доказательство. Будем рассматривать G как группу характеров группы X (см. теорему 52). Тогда $H=(G, \Phi)$ (см. теорему 53) и H есть группа характеров группы X/Φ (см. теорему 37), причем связь между элементом x как характером группы X/Φ и элементом x как характером группы X дается соотношением $x(\xi^*)=x(\xi)$, $\xi \in \xi^*$. Трактуя X/Φ как группу характеров группы H, получаем из последнего соотношения $\xi^*(x)=\xi(x)$.

Таким образом, теорема 54 доказана.

Теорема о продолжении характера

Теорема 55. *Пусть* H*—подгруппа группы* G, a*—некоторый элемент группы* G, *не входящий в* H, *и* β*—некоторый характер группы* H. *Существует тогда такой характер* α *группы* G, *совпадающий с* β *на* H, *что* $\alpha(a)\neq 0$.

Доказательство. Пусть X—группа характеров группы G и $\Phi=(X, H)$. Согласно теореме 54, X/Φ есть группа характеров группы H, и, следовательно, существует элемент γ^* группы X/Φ, совпадающий как характер группы H с β. Пусть $\gamma \in \gamma^*$. Тогда γ совпадает на H с β. Если $\gamma(a)\neq 0$, то полагаем $\alpha=\gamma$. Если $\gamma(a)=0$, то требуется дополнительное построение. Элемент a^* фактор-группы G/H, содержащий как смежный класс элемент a, отличен от нуля, и, следовательно, существует характер $\delta \in \Phi$ группы G/H, не обращающийся в нуль на a^* (см. A)). Мы имеем $\delta(a)=\delta(a^*)\neq 0$, и достаточно положить $\alpha=\gamma+\delta$.

Таким образом, теорема 55 доказана.

Связь между сопряженными гомоморфизмами

Теорема 56. *Пусть* X_1 *и* X_2*—группы характеров групп* G_1 *и* G_2, f*—гомоморфизм группы* G_1 *в группу* G_2 *и* φ*—сопряженный ему гомоморфизм группы* X_2 *в группу* X_1 (см. § 35, B)). *Тогда* f *является гомоморфизмом, сопряженным с* φ (см. теорему 52). *Далее, если* f *есть открытый гомоморфизм группы* G_1 *на подгруппу* *группы* G_2, *то* φ *есть открытый гомоморфизм группы* X_2 *на подгруппу группы* X_1. *Если при этом* H_1 *есть ядро гомоморфизма* f *и* $H_2=f(G_1)$, *то ядро* Φ_2 *гомоморфизма* φ *определяется соотношением* $\Phi_2=(X_2, H_2)$, *а образ* $\Phi_1=\varphi(X_2)$ *группы* X_2—*соотношением* $\Phi_1=(X_1, H_1)$.

Доказательство. Если рассматривать группы G_1 и G_2 как группы характеров групп X_1 и X_2, то соотношение $\varphi(\xi_2)x_1=\xi_2 f(x_1)$, $x_1 \in G_1$, $\xi_2 \in X_2$, определяющее φ как гомоморфизм, сопряженный с f, переходит в соотношение $f(x_1)\xi_2=x_1\varphi(\xi_2)$, определяющее f как гомоморфизм, сопряженный с φ. Таким образом, гомоморфизмы f и φ взаимно сопряжены.

Тот факт, что ядро Φ_2 гомоморфизма φ определяется соотношением $\Phi_2=(X_2, H_2)$, был уже установлен (см. § 35, B)). Покажем, что $\varphi(X_2)\subset(X_1, H_1)$. Пусть $\xi_2 \in X_2$, $x_1 \in H_1$. Тогда $\varphi(\xi_2)x_1=\xi_2 f(x_1)=\xi_2 0=0$ и, следовательно, $\varphi(\xi_2)\in(X_1, H_1)$, т. е. $\varphi(X_2)\subset(X_1, H_1)$.

Естественное изоморфное отображение группы G_1/H_1 на группу H_2, вытекающее из открытого гомоморфизма f, обозначим через f^*, а естественное изоморфное отображение алгебраической группы X_2/Φ_2 на группу $\varphi(X_2)\subset(X_1, H_1)$, вытекающее из гомоморфизма φ,—через φ^*. Из теорем 37 и 54 следует, что (X_1, H_1) есть группа характеров группы G_1/H_1, а X_2/Φ_2—группа характеров группы H_2 и что отображение φ^* группы X_2/Φ_2 в группу (X_1, H_1) сопряжено к гомоморфизму f^* группы G_1/H_1 в группу H_2. Так как f^* есть изоморфизм на, то φ^* есть изоморфизм топологической группы X_2/Φ_2 на топологическую группу (X_1, H_1) (см. § 35, B)). Из того, что φ^* есть открытое изображение на (X_1, H_1), непосредственно следует, что и φ есть открытое отображение на (X_1, H_1).

Итак, теорема 56 доказана.

Вес группы характеров

Теорема 57. *Пусть* X—*группа характеров группы* G. *Тогда вес топологического пространства* X *равен весу топологического пространства* G (см. определение 14).

Доказательство. Если пространство G имеет конечный вес, то группа G конечна и группа X изоморфна группе G (см. § 36, G)). Если вес пространства G бесконечен, то теорема 57 является непосредственным следствием предложения B) § 34 и теоремы 52.

Пример 72. Возникает естественный вопрос: чем объясняется исключительная роль группы K в изложенной теории и не является ли выбор ее случайным. Нижеследующее предложение дает ответ на этот вопрос.

Пусть Q—некоторая локально бикомпактная коммутативная группа. Обозначим через $\overline{K}$ естественно определенную группу всех гомоморфизмов группы K в группу Q. Через $\overline{\overline{K}}$ обозначим группу всех гомоморфизмов группы $\overline{K}$ в группу Q. Оказывается, что если группы K и $\overline{\overline{K}}$ изоморфны, то группа Q изоморфна группе K. Таким образом, группа K является единственной, которую можно положить в основу теории характеров так, чтобы при этом выполнялась основная теорема двойственности.

Переходим к доказательству. Если $\overline{K}$ содержит только нуль, то $\overline{\overline{K}}$ также содержит лишь нуль, что противоречит предположению об изоморфности групп K и $\overline{\overline{K}}$. Таким образом, существует ненулевой гомоморфизм α группы K в группу Q. При гомоморфизме α группа K отображается на некоторую подгруппу K$'$ группы Q. Так как гомоморфизм α—ненулевой, то группа K$'$ изоморфна K (хотя гомоморфизм α не обязательно должен быть изоморфизмом). Итак, Q содержит подгруппу K$'$, изоморфную группе K.

Обозначим через P максимальную бикомпактную подгруппу компоненты нуля группы Q (см. пример 69). Тогда $K' \subset P$. Докажем, что P разлагается в прямую сумму подгруппы K$'$ и некоторой подгруппы L'.

Обозначим через G группу характеров группы P и положим $H=(G,\ K')$. Тогда G/H есть группа характеров группы K$'$, так что G/H есть свободная циклическая группа. Обозначим через z один из прообразов образующей группы G/H в группе G, а через Z—свободную циклическую подгруппу группы G с образующей z. Легко видеть, что G распадается в прямую сумму подгрупп Z и H. Положим $L'=(P,\ Z)$. Тогда P распадается в прямую сумму подгрупп K$'$ и L'. Каждый гомоморфизм β группы K в группу Q переводит K в P, $\beta(K) \subset P$, а так как группа P распадается в прямую сумму подгрупп K$'$ и L', то группа $\overline{K}$ всех гомоморфизмов распадается в прямую сумму подгрупп A и B, где A состоит из всех гомоморфизмов группы K в K$'$, а B—из всех гомоморфизмов группы K в L'. Таким образом, A есть свободная циклическая группа; природа группы B нам не интересна.

Так как группа $\overline{K}$ распадается в прямую сумму своих подгрупп A и B, то группа $\overline{\overline{K}}$ всех гомоморфизмов группы $\overline{K}$ в группу Q распадается в прямую сумму подгрупп C и D, первая из которых изоморфна группе всех гомоморфизмов группы A в группу Q, а вторая—группе всех гомоморфизмов группы B в Q.

Так как A есть свободная циклическая группа, то группа всех гомоморфизмов группы A в группу Q, очевидно, изоморфна самой группе Q. Итак, группа C изоморфна группе Q.

Но группа $\overline{\overline{K}}$, по предположению, изоморфна группе K, поэтому группа Q изоморфна некоторой подгруппе группы K. Так как, сверх того, Q содержит подгруппу K$'$, изоморфную K, то отсюда непосредственно следует, что группа Q изоморфна группе K.

Доказанное предложение показывает, что группа K действительно является исключительной и единственно пригодной для исполнения принадлежащей ей роли. Эта роль группы K объясняется тем ее характеристическим свойством, что всякая ее факторгруппа либо содержит только нуль, либо изоморфна самой группе K. Тем же свойством обладают еще конечные группы простых порядков, но они, как конечные, не могут быть использованы для построения теории характеров топологических групп.

Пример 73. Пусть X—группа характеров группы G и B—подгруппа группы G, составленная из всех ее бикомпактных элементов (см. пример 70). Тогда (X, B) есть компонента нуля группы X (это предложение обобщает теорему 46).

Докажем это. Пусть a—отличный от нуля элемент группы G. Если a—бикомпактный элемент, то группа X несвязна. Действительно, бикомпактный элемент a группы G содержится в бикомпактной подгруппе H группы G. Положим $\Phi=(X, H)$. Тогда X/Φ есть группа характеров группы H, и так как группа H бикомпактна, то группа X/Φ дискретна, а ввиду того, что $a\neq 0$, группа X/Φ нетривиальна. Таким образом, группа X несвязна. Если элемент a—не бикомпактный, то группа X не может быть вполне несвязной. Действительно, допустим противоположное. Пусть W—такая окрестность нуля группы X, что $a(W)\subset\Lambda_1$, и Φ—открытая подгруппа группы X, содержащаяся в W (см. теорему 16). Тогда $a(\Phi)=0$ (см. § 34, А)), и потому $a\in H=(G, \Phi)$. Так как группа X/Φ дискретна, то H, будучи группой ее характеров, бикомпактна, и элемент a, вопреки предположению, оказался бикомпактным.

Пусть теперь X$'$—компонента нуля группы X. Так как группа X/X$'$ вполне несвязна, то группа (G, X$'$), будучи группой ее характеров, содержит лишь бикомпактные элементы, и потому (G, X$'$)$\subset B$. Далее, так как группа X$'$ связна, то группа G/(G, X$'$) не содержит отличных от нуля бикомпактных элементов, и потому (G, X$'$)$\supset B$. Таким образом. $B=(G$, X$')$, и X$'$=(X, B).

Пример 74. Пусть X—группа характеров группы G, X$'$ и G'—компоненты нуля групп X и G, и Δ и B—подгруппы групп X и G, составленные из всех их бикомпактных элементов (см. пример 70). Тогда множество $G'+B$ открыто и потому является подгруппой группы G. Следовательно, X$'\cap\Delta$=(X, $G'+B$) (см. пример 73 и § 37, В)); точно так же X$'+\Delta$=(X, $G'\cap B$). Подгруппа $G'\cap B$ группы G' есть ее максимальная бикомпактная подгруппа, и потому G' распадается в прямую сумму группы $G'\cap B$ и подгруппы A, имеющей вид D^r (см. пример 69). Точно так же подгруппа X$'$ распадается в прямую сумму своей подгруппы X$'\cap\Delta$ и подгруппы Г, имеющей вид D^s. Оказывается, что G распадается в прямую сумму своих подгрупп A и (G, Г); последняя имеет бикомпактную компоненту нуля $G'\cap B$. Точно так же группа X распадается в прямую сумму своих подгрупп Г и (X, A). Наконец, $s=r$.

Покажем прежде всего, что $G'+B$ есть открытая подгруппа группы G. Пусть H—открытая подгруппа группы G, имеющая бикомпактное происхождение (см. § 39, A)). Группа H распадается в прямую сумму своих подгрупп N, F и B', где N имеет вид C^p, F имеет вид D^q, а $B'=H\cap B$ есть максимальная бикомпактная подгруппа группы H (см. пример 69). Так как группа C^p дискретна, то группа $F+B'$ открыта в H, и ввиду открытости H она открыта и в G. Поэтому $F+B$ есть область в G, а так как $F\subset G'$, то и $G'+B$ — область в G. Подгруппа $G'+B$, стало быть, открыта в G.

Далее, $\mathrm{X}'\cap\Delta$ есть максимальная бикомпактная подгруппа группы X', и потому $\Gamma\cap\Delta$ содержит лишь нуль. Так как $(G, \Gamma)+G'$ содержит область $B+G'$, то $(G, \Gamma)+G'$ есть открытая подгруппа группы G, и из соотношения $\Gamma\cap\Delta=\{0\}$ следует, что $(G, \Gamma)+G'=G$. Так как $(G, \Gamma)\supset(G, \mathrm{X}')=B\supset G'\cap B$, то $G=G'+(G, \Gamma)=A+G'\cap B+$ $+(G, \Gamma)=A+(G, \Gamma)$. Точно так же $\mathrm{X}=\Gamma+(\mathrm{X}, A)$. Из последнего соотношения следует, что $(G, \Gamma)\cap A=\{0\}$. Соотношения $(G, \Gamma)+A=$ $=G$, $(G, \Gamma)\cap A=\{0\}$ показывают, что алгебраическая группа G распадается в прямую сумму своих подгрупп (G, Γ) и A. Топологические условия распадения в прямую сумму здесь также выполнены. Наконец, группа характеров группы A изоморфна группе $\mathrm{X}/(\mathrm{X}, A)$, т. е. группе Γ. Таким образом, $s=r$.

Пример 75. Пусть G—локально бикомпактная локально связная коммутативная группа и G'—компонента ее нуля. Тогда G' есть открытая подгруппа группы G. Действительно, естественное отображение группы G на факторгруппу G/G' открыто и непрерывно, и потому группа G/G' локально связна (см. § 15, H)), а так как она вполне несвязна (см. § 22, C)), то она является дискретной. Таким образом, подгруппа G' открыта в G. Группа G' распадается в прямую сумму своей максимальной бикомпактной подгруппы B и подгруппы A вида D^s (см. пример 69). Так как группа G' локально связна, то ее факторгруппа G'/A также локально связна (см. § 15, H)), а потому локально связна и группа B, изоморфная группе G'/A. Пусть группа G имеет счетный топологический базис; тогда группа B также его имеет и потому распадается в прямую сумму конечного или счетного числа подгрупп, изоморфных группе K (см. теорему 49). Таким образом, в случае счетного базиса группа G' имеет вид $\mathrm{K}^r D^s$, где r конечно или счетно бесконечно, а s конечно. Допустим теперь, что группа G имеет конечную размерность (см. определение 21). Тогда группа G' имеет вид $\mathrm{K}^r D^s$, где оба показателя r и s конечны. В этом случае группа G локально изоморфна группе D^{r+s}, и в достаточно малой окрестности U нуля группы G можно таким образом ввести координаты, что при сложении элементов координаты будут складываться. Таким образом, локально бикомпактная локально связная коммутативная группа со счетной топологической базой, имеющая конечную размерность, есть группа Ли (см. определение 39).

ПОНЯТИЕ ГРУППЫ ЛИ

До сих пор при рассмотрении топологических групп мы налагали на них только требования весьма общего характера, формулируемые в терминах абстрактной алгебры и абстрактной топологии. Понятие *группы Ли* уже в самом своем определении содержит условие аналитичности или, по крайней мере, дифференцируемости некоторых функций, а именно функций, дающих операцию умножения элементов группы (см. определение 39). Благодаря этому при изучении групп Ли можно широко использовать аппарат анализа, включая теорию дифференциальных уравнений. В силу таких возможностей группы Ли допускают очень глубокое исследование: аналитический аппарат позволяет свести все их изучение к вопросам элементарно алгебраическим, хотя и весьма тонким (см. главу 10). Эти элементарно алгебраические вопросы представляют собой по существу некоторые специальные вопросы теории матриц. Только после такого сведения начинается действительно тонкая и глубокая теория групп Ли (см. главу 11). Однако не этими вопросами мы будем заниматься в настоящей главе.

Обычно в теориях сравнительно давнего происхождения вопрос о дифференцируемости или аналитичности рассматриваемых функций не подвергается сколько-нибудь строгому обсуждению. Все возникающие в процессе рассмотрения функции просто предполагаются дифференцируемыми или аналитическими, смотря по надобности. В этом, однако, есть существенный дефэкт. Одно дело предположить, что н е к о т о р ы е функции, упомянутые в о п р е д е л е н и и объекта, суть функции дифференцируемые; совсем другое дело заранее считать дифференцируемыми в с е функции, могущие встретиться в процессе исследования этого объекта. Ведь природа этих функций еще совсем не известна, их даже нельзя перечислить заранее, и a priori может случиться, что вопрос совершенно естественный приведет к появлению недифференцируемых функций. Именно так, не совсем благополучно обстоит дело в классической теории групп Ли. Допустим, например, что мы рассматриваем некоторую группу Ли. Ниоткуда не следует a priori, что всякая ее подгруппа есть также группа Ли, а между тем потребность в рассмотрении произвольных подгрупп имеется. Совершенно аналогично обстоит дело и с факторгруппами. Может встретиться также надобность в рассмотрении автоморфизмов группы Ли. Могут ли они быть выражены при помощи дифференцируемых функций? Разрешению всех этих предварительных вопросов и посвящается настоящая глава. Исходя из предположения дифференцируемости или аналитичности некоторых функций, мы покажем, что ряд функций, естественным образом возникающих в процессе исследования, также обладает свойством дифференцируемости или соответственно аналитичности. В действительности, при изучении групп Ли можно было бы ограничиться только предположением дифференцируемости, так как, исходя из этого, удается свести все дело к функциям аналитическим, не сужая при этом класса объектов исследования. Здесь, однако, мы вынуждены вести двойное рассмотрение, предполагая отдельно или дифференцируемость, или аналитичность, так как сведение к аналитическим функциям выходит за рамки настоящей главы. Ограничиться же случаем дифференцируемых функций нельзя, так как тогда результаты следующей главы будут неполными.

Результаты настоящей главы в первую очередь рассчитаны на то, чтобы дать подготовительный материал для главы восьмой. В главе восьмой изучение бикомпактных топологических групп будет в значительной степени сведено к изучению групп Ли. Там же определение бикомпактной группы Ли будет сформулировано в общих терминах, без использования понятия дифференцируемости.

Если при ознакомлении с группами Ли читатель хочет ограничиться классической постановкой задачи и не желает вникать в те принципиальные вопросы, о которых шла речь выше, то ему нет надобности читать эту главу полностью. Достаточно прочесть §§ 41 и 42; при этом можно опустить теорему 60.

В классической теории под *группой Ли* понимают локальную группу, в которой введены определенные дифференцируемые координаты (см. определение 39). Под *свойствами* группы понимают такие свойства системы уравнений (3) § 41, которые не меняются при дифференцируемых преобразованиях координат (см. § 41, A)). Далее, *подгруппой* группы Ли называется подгруппа, выделяемая соотношениями (20) § 44, т. е. теорема 62 превращается в определение. Точно так же, *гомоморфизмом* группы Ли называется гомоморфизм, заданный соотношением (26) § 44, т. е. теорема 63 превращается в определение.

Ввиду наличия значительных вычислений, с которыми придется столкнуться как в настоящей, так и в главах 10, 11, я в этих главах буду пользоваться *тензорными обозначениями*, не предполагая, впрочем, знания тензорного исчисления. Речь идет здесь лишь о том, чтобы не пользоваться при суммировании знаком Σ. Общепринятое правило заключается в том, что индексы пишутся не только снизу, но и сверху, причем одночлен, в котором один и тот же индекс, например i, встречается дважды, один раз наверху, а другой раз внизу, обозначает сумму по индексу i, когда индекс i пробегает все возможные для него значения. Если в одночлене встречается не один парный индекс, а несколько, то под этим одночленом понимается соответствующая кратная сумма. Например, под одночленом $a_i b^i$ понимают сумму $\sum_{i=1}^{r} a_i b^i$; одночлен $c_{ij}^i a^j$ понимается как двойная сумма $\sum_i \sum_j c_{ij}^i a^j$. Перебрасывать индексы сверху вниз и обратно не разрешается. Распределение индексов, конечно, производится некоторым целесообразным способом. В частности, координаты точек и компоненты векторов обозначаются буквами с индексами наверху, причем буквы берутся те же самые, что и для обозначения самих точек или векторов. Например, координаты точки x обозначаются через $x^1, \ldots, x^r$. Индексы наверху мы не будем писать в скобках, как это иногда делают, чтобы отличить их от показателей степени; напротив, при возведении буквы в степень мы будем писать эту букву в скобках, например $(a)^n$ будет означать n-ю степень буквы a. Впрочем, степени почти не будут встречаться в наших рассмотрениях. Через δ_j^i мы будем обозначать число, равное единице при $i=j$ и равное нулю при $i \neq j$.

§ 41. Группа Ли

Классическая теория групп Ли в первую очередь занимается изучением локальных групп. Поэтому здесь в качестве основного будет дано определение именно *локальной группы Ли*, применимое, впрочем, и к полной группе.

A) Говорят, что в локальной группе G (см. § 23, D)) введены *координаты*, если задано топологическое отображение φ некоторой окрестности U единицы группы G на область V координатного евклидова пространства S, при котором единица переходит в начало координат. Таким образом, каждой точке $x \in U$ соответствует система действительных чисел

$$x^1, \ldots, x^r, \tag{1}$$

являющихся координатами точки $\varphi(x) \in S$. Числа эти мы будем называть теперь *координатами* точки $x \in U$. При этом единица получает координаты, равные нулю. Далее, каждой системе чисел (1), если числа эти по модулю достаточно малы, соответствует определенная точка $x \in U$, имеющая своими координатами эти числа. Число r является размерностью локальной группы G (см. § 23, N) и § 16). Пусть W—столь малая окрестность единицы группы G, что для всяких двух элементов x и y из W определено произведение xy, и $xy \in U$. Тогда мы имеем:

$$xy = z = f(x, y). \tag{2}$$

Так как точки x, y и z принадлежат к U, то они имеют координаты, и в координатной форме соотношение (2) переписывается так:

$$z^i = f^i(x, y) = f^i(x^1, \dots, x^r; y^1, \dots, y^r), \tag{3}$$

где функции f^i, стоящие в правых частях, суть непрерывные однозначные функции, определенные для всех достаточно малых значений аргументов. Так как, далее, $xe = x$, $ey = y$, то мы имеем:

$$f^i(x^1, \dots, x^r; 0, \dots, 0) = x^i, \quad f^i(0, \dots, 0; y^1, \dots, y^r) = y^i. \tag{4}$$

Координаты (1), введенные в локальной группе G, называются *дифференцируемыми*, если функции (3) трижды непрерывно дифференцируемы, и *аналитическими*, если функции (3) аналитичны. Из соотношений (4) непосредственно следует:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \frac{\partial f^i}{\partial y^j} = \delta^i_j \quad \text{при} \quad x = y = e. \tag{5}$$

Из (5) следует, что вблизи e уравнения (3) разрешимы относительно координат $x^1, \dots, x^r$ элемента $x = zy^{-1}$; эти координаты являются, таким образом, трижды непрерывно дифференцируемыми (аналитическими) функциями координат элементов y и z. То же имеет место для элемента $y = x^{-1}z$.

Определение 39. Локальная группа G называется *локальной группой Ли*, если в ней можно ввести дифференцируемые координаты (см. А)). Топологическая группа G со счетной топологической базой называется *группой Ли*, если в ней как локальной группе можно ввести дифференцируемые координаты.

Очевидно, что всякая локальная группа Ли локально бикомпактна (см. § 23, N)). В применении к группам Ли термин «бикомпактный» будет заменен термином «компактный».

В главе десятой будет показано, что во всякой локальной группе Ли можно ввести аналитические координаты. В настоящей главе мы будем различать *аналитические группы Ли* и *дифференцируемые группы Ли*. Важной проблемой общей теории топологических групп является так называемая пятая проблема Гильберта: следует ли из существования в группе G каких-нибудь координат (см. А)) существование в ней дифференцируемых координат? Решение этой проблемы в настоящей книге дано для бикомпактных и для коммутативных групп (см. теорему 70 и пример 75). Общее решение см. в [11, 29].

Все исследование группы Ли построено на использовании дифференцируемых координат, которые в ней можно ввести. Непосредственно изучаются не свойства самой группы, а свойства системы уравнений (3), выражающих закон умножения. Конечно, при этом следует изучать лишь такие свойства этой системы, которые не зависят от выбора координат и выражают, следовательно, свойства самой группы. Прежде всего ясно, что наряду с некоторой определенной системой D дифференцируемых координат в группе можно рассматривать совокупность $[D]$ всех координатных систем, получающихся из D путем дифференцируемых преобразований (см. В)). Ниже (см. § 43) будет показано, что совокупность $[D]$ содержит все дифференцируемые координатные системы, которые могут быть введены в группе. Таким образом, задача заключается в отыскании инвариантов системы уравнений (3) относительно дифференцируемых преобразований координат. Такая постановка вопроса является вполне классической. Классическая теория групп Ли предполагала заданной определенную дифференцируемую координатную систему D и допускала к рассмотрению только координатные системы совокупности $[D]$. Вопрос о существовании координатных систем, не входящих в $[D]$, вовсе не ставился.

В) Пусть G—локальная группа Ли и D—некоторая дифференцируемая система координат в G. Координаты произвольной точки x в системе D обозначим, как обычно, через x^i. Пусть

$$\varphi^i(x)=\varphi^i(x^1, \ldots, x^r), \quad i=1, \ldots, r, \tag{6}$$

—такая система трижды непрерывно дифференцируемых функций, что

$$\varphi^i(e)=\varphi^i(0, \ldots, 0)=0. \tag{7}$$

Положим

$$p^i_j=\frac{\partial\varphi^i(e)}{\partial x^j} \tag{8}$$

и допустим, что детерминант матрицы $\|p^i_j\|$ отличен от нуля. Тогда систему уравнений

$$x'^i=\varphi^i(x^1, \ldots, x^r), \; i=1, \ldots, r, \tag{9}$$

можно трактовать как вводящую в G новую систему координат D'; именно, за новые координаты точки x мы можем принять числа x'^i. Очевидно, что система D' дифференцируема и что она аналитична, если аналитичны система D и преобразование (9). Переход от системы D к системе D' называется *дифференцируемым*, соответственно *аналитическим преобразованием координат*. Обратный переход от D' к D также является дифференцируемым, соответственно аналитическим преобразованием координат.

С) Пусть G—локальная группа Ли и D—система дифференцируемых координат, заданная в G. Будем говорить, что в G задана *кривая* x, если определено непрерывное отображение x интервала $|t|\leqslant\alpha$ в G, удовлетворяющее условию $x(0)=e$. О кривой x будем говорить, что она *имеет касательную* в системе координат D, если существуют производные

$$\frac{dx^i(0)}{dt}=a^i. \tag{10}$$

Числа a^i будем считать компонентами вектора a, *касательного* к кривой x. Конечно, речь идет здесь о касательном векторе в точке $t=0$, но так как иные касательные векторы рассматриваться не будут, то слова «в точке $t=0$» мы всюду опускаем. Если от системы координат D перейти к новой системе координат D' при помощи соотношений (9), то в новых координатах вектор a получит новые компоненты a'^i, выражаемые через старые соотношениями

$$a'^i=p^i_j a^j \tag{11}$$

(см. (8)). В силу проведенного здесь построения с локальной группой Ли ассоциируется векторное пространство R, составленное из всех векторов, касательных к дифференцируемым кривым в G. Связь между G и R первоначально задается при помощи некоторой определенной системы координат D. Однако каждому преобразованию (9) координат в G соответствует определенное преобразование (11) координат в R, и связь между G и R делается инвариантной относительно дифференцируемых преобразований координат в G.

D) Если G и G' суть две дифференцируемые или аналитические локальные группы Ли, то и их прямое произведение H есть дифференцируемая или соответственно аналитическая локальная группа Ли.

Действительно, пусть D и D'—дифференцируемые или соответственно аналитические координаты в группах G и G'. Если $x^1, \ldots, x^r$—координаты точки $x \in G$, а $x'^1, \ldots, x'^s$—координаты точки $x' \in G'$, то за координаты пары $(x, x') \in H$ примем числа $x^1, \ldots, x^r$, $x'^1, \ldots, x'^s$. Если операция перемножения в группах G и G' в координатной форме записывается соотношениями

$$z^i=f^i(x^1, \ldots, x^r; y^1, \ldots, y^r), \tag{12}$$

$$z'^j=f'^j(x'^1, \ldots, x'^s; y'^1, \ldots, y'^s), \tag{13}$$

то в группе H закон перемножения записывается соотношениями (12) и (13), взятыми вместе. Таким образом, утверждение D) доказано.

E) По определению в каждой группе Ли G существуют такие координаты D, закон перемножения в которых записывается при помощи трижды непрерывно дифференцируемых функций (см. (3)). Эти координаты называются дифференцируемыми. Функции (6), дающие переход (9) от координат D к координатам D', мы предполагали трижды непрерывно дифференцируемыми, с тем чтобы координаты D' также были дифференцируемыми в указанном смысле слова.

Если функции (6) дважды непрерывно дифференцируемы, то получаемые при помощи преобразований (9) координаты D' не являются дифференцируемыми в указанном смысле слова, так как закон умножения в них записывается уже при помощи дважды непрерывно дифференцируемых функций. Однако такие дважды дифференцируемые координаты могут быть использованы для некоторых целей. В частности, определение C) касательной к кривой $x=x(t)$ имеет смысл и для того случая, когда эта кривая рассматривается в дважды дифференцируемых координатах.

Пример 76. Пусть G—топологическая группа всех квадратных матриц порядка n с детерминантами, отличными от нуля. Покажем, что G есть аналитическая группа Ли. Для этого следующим образом введем координаты в G. Произвольную матрицу $x \in G$ мы представим в форме

$$e+\|x_j^i\|, \tag{14}$$

где e есть единичная матрица, и элементы матрицы $\|x_j^i\|$ примем за координаты матрицы x. Полученное таким образом отображение φ всей группы G на область евклидова пространства S размерности n^2 переводит единицу в начало координат. Соотношение (3) приобретает для G следующий алгебраический вид:

$$z_j^i=x_j^i+y_j^i+x_k^i y_j^k. \tag{15}$$

Таким образом, G есть аналитическая группа Ли. Аналогично, комплексные квадратные матрицы порядка n с отличными от нуля детерминантами образуют аналитическую группу Ли размерности $2n^2$.

§ 42. Однопараметрические подгруппы

При изучении групп Ли важную роль играют однопараметрические подгруппы (см. § 23, M)). Эти подгруппы инвариантно связаны с группой Ли, т. е. не зависят от выбора координат в ней, и позволяют ввести в группе особенно естественные координаты.

A) Пусть G—локальная группа Ли и D—дважды дифференцируемая система координат в G (см. § 41, E)). Однопараметрическая подгруппа g группы G (см. § 23, M)) называется *дифференцируемой* в системе D, если кривая g имеет в этих координатах касательный вектор (см. § 41, C), E)). Этот вектор мы будем называть *направляющим вектором* подгруппы g.

Займемся вопросом о существовании и единственности однопараметрической подгруппы с данным направляющим вектором a. Для того чтобы полно формулировать соответствующую теорему, введем вспомогательные функции

$$u^i_j(x) = u^i_j(x^1, \ldots, x^r) = \frac{\partial}{\partial y^j} f^i(x^1, \ldots, x^r; 0, \ldots, 0) \tag{1}$$

(см. § 41, (3)).

Теорема 58. *Пусть G—локальная группа Ли и D—дважды дифференцируемая система координат, установленная в G. Тогда всякая однопараметрическая подгруппа g, обладающая направляющим вектором a, удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{dg^i(t)}{dt} = u^i_j(g(t))a^j \tag{2}$$

(см. (1)) *при начальных условиях*

$$g^i(0) = 0. \tag{3}$$

Обратно, решение системы (2) *при начальных условиях* (3) *определяет однопараметрическую подгруппу g, обладающую направляющим вектором a. Ввиду существования и единственности решения системы* (2) *при начальных условиях* (3), *в группе G существует одна и только одна однопараметрическая подгруппа $g = g(a, t)$ с направляющим вектором a. Из* (2) *следует, что в достаточно малой окрестности нуля функции $g^i(a, t) = g^i(a^1, \ldots, a^r; t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, если система D дифференцируема (т. е. трижды дифференцируема), и аналитичны, если система D аналитична.*

Доказательство. Пусть g—однопараметрическая подгруппа с направляющим вектором a. Покажем, что тогда координаты $g^i(t)$ элемента $g(t)$ удовлетворяют системе уравнений (2) при начальных условиях (3). Вычислим

$$\lim_{s\to 0} \frac{g^i(t+s) - g^i(t)}{s} = (g^i)'(t). \tag{4}$$

Из соотношения $g(t+s) = g(t)g(s)$ и соотношений (3), (4) § 41 мы получаем:

$$g^i(t+s) = f^i(g(t),\ g(s)) = g^i(t) + u^i_j(g(t))g^j(s) + \varepsilon^i s,$$

где $\varepsilon^i \to 0$ при $s \to 0$. Таким образом,

$$\frac{g^i(t+s) - g^i(t)}{s} = u^i_j(g(t))\frac{g^j(s)}{s} + \varepsilon^i.$$

Из этого следует, что производная $(g^i)'(t)$ существует, и функции g^i удовлетворяют системе (2). Так как $g(0) = e$, то $g^i(0) = 0$, и это дает нам начальные условия (3).

Предположим теперь, что функции g^i удовлетворяют системе (2) с начальными значениями (3), и покажем, что точка $g(t)$ с координатами $g^i(t)$ описывает однопараметрическую подгруппу с направляющим вектором a. Из соотношений (5) § 41 следует, что

$\frac{dg^i(0)}{dt}=a^i$, т. е. что кривая g имеет касательный вектор a. Таким образом, остается показать, что g есть однопараметрическая подгруппа.

Положим

$$g^*(t, u)=g(t)g(u) \tag{5}$$

и обозначим через $g^{*i}(t, u)$ координаты точки $g^*(t, u)$. Оценим разность

$$g^{*i}(t, u)-g^i(t+u)=\varepsilon_1^i u, \tag{6}$$

именно, покажем, что ε_1^i стремится к нулю вместе с u. Мы имеем:

$$g^{*i}(t, u)=f^i(g(t), g(u)).$$

Отсюда получаем:

$$g^{*i}(t, u)=g^i(t)+u_j^i(g(t)a^j u+\varepsilon_2^i u, \tag{7}$$

где $\varepsilon_2^i\to 0$ вместе с u. С другой стороны, из соотношения (2) имеем:

$$g^i(t+u)=g^i(t)+u_j^i(g(t))a^j u+\varepsilon_3^i u, \tag{8}$$

где $\varepsilon_3^i\to 0$ вместе с u. Из соотношений (7) и (8) следует, что $\varepsilon_1^i\to 0$ вместе с u.

Покажем теперь, что функции $g^{*i}(s, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial g^{*i}(s, t)}{\partial t}=u_j^i(g^*(s, t))a^j \tag{9}$$

при начальных значениях

$$g^{*i}(s, 0)=g^i(s). \tag{10}$$

Соотношения (10) непосредственно следуют из равенства (5). Вычислим $\frac{\partial g^{*i}(s, t)}{\partial t}$. Мы имеем:

$$g^{*i}(s, t+u)=f^i(g(s), g(t+u)).$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (6), получаем:

$$g^{*i}(s, t+u)=f^i(g(s), g^*(t, u))+\varepsilon_4^i u,$$

где $\varepsilon_4^i\to 0$ при $u\to 0$. Из этого на основании ассоциативности умножения находим:

$$g^{*i}(s, t+u)=f^i(g^*(s, t), g(u))+\varepsilon_4^i u.$$

Это соотношение в силу равенства (1) можно переписать в виде

$$g^{*i}(s, t+u)=g^{*i}(s, t)+u_j^i(g^*(s, t))a^j u+\varepsilon_5^i u, \tag{11}$$

где $\varepsilon_5^i\to 0$ при $u\to 0$. А из этого равенства непосредственно следует равенство (9).

С другой стороны, системе (9) при начальных условиях (10) удовлетворяют и функции $g^i(s+t)$. Именно, мы имеем:

$$\frac{\partial g^i(s+t)}{\partial t}=u^i_j(g(s+t))a^j, \tag{12}$$

$$g^i(s+0)=g^i(s), \tag{13}$$

ибо уравнения (12) совпадают с уравнениями (2).

Таким образом, $g^{*i}(s, t)$ и $g^i(s+t)$ как функции аргумента t удовлетворяют одной и той же системе уравнений (9), (12) с одними и теми же начальными значениями (10), (13). Отсюда в силу единственности решения этой системы мы заключаем, что $g^{*i}(s, t)=$ $=g^i(s+t)$, а это значит, что $g(s)g(t)=g(s+t)$ (см. (5)), т. е. что g есть однопараметрическая подгруппа. Утверждение о дифференцируемости (аналитичности) функций $g^i(a, t)$ вытекает из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, теорема 58 полностью доказана.

B) Пусть G—локальная группа Ли и D—дважды дифференцируемая система координат, установленная в окрестности U единицы группы G. Область $V\subset U$ (в частности, область U) будем называть *звездной*, если вместе с каждой точкой $(x^1, \ldots, x^r)$ в V имеются и все точки $(tx^1, \ldots, tx^r)$, где $|t|\leqslant 1$. Систему D, установленную в звездной области U, будем называть *канонической системой первого рода*, если всякая система уравнений $x^i=a^it$ задает однопараметрическую подгруппу, определенную этими уравнениями для всех значений t, при которых в U имеется точка $(a^1t, \ldots$ $\ldots, a^rt)$. Очевидно, что линейное преобразование канонических координат первого рода приводит вновь к каноническим координатам первого рода.

C) Пусть G—локальная группа Ли и D—каноническая система координат первого рода, заданная в окрестности U (см. B)). Всякая дифференцируемая в системе D однопараметрическая подгруппа $g=g(t)$, определенная при $|t|\leqslant\alpha$ и удовлетворяющая тому условию, что $g(t)\in U$ при $|t|\leqslant\alpha$, в координатной форме имеет вид

$$g^i(t)=a^it \quad \text{при} \quad |t|\leqslant\alpha, \tag{14}$$

где a^i—компоненты направляющего вектора a подгруппы g.

Докажем это. Положим $h^i(t)=a^it$. В силу B) эти соотношения определяют однопараметрическую подгруппу h для всех значений t, при которых они имеют смысл. Так как U есть симметричная область, то множество этих значений t есть открытый интервал $|t|<\beta$. Однопараметрические подгруппы g и h имеют один и тот же направляющий вектор и потому совпадают при достаточно малых значениях t (см. теорему 58). Следовательно, они совпадают и при всех значениях t, при которых обе они определены, и достаточно доказать, что $\alpha<\beta$. Допустим противоположное.

Мы имеем $a^i\beta = g^i(\beta)$, так что $(a^1\beta, \ldots, a^r\beta) \in U$. Таким образом, уравнения $h^i(t) = a^i t$ имеют смысл при $t = \beta$, что противоречит определению числа β.

Теорема 59. *Пусть D — дифференцируемая или аналитическая система координат в локальной группе Ли G. Тогда существует каноническая система координат D' первого рода, переход к которой от системы D дважды непрерывно дифференцируем или соответственно аналитичен, причем матрица $\|p^i_j\|$, соответствующая переходу от D к D'* (см. § 41, B)), *есть единичная матрица.*

Доказательство. Пусть g — однопараметрическая подгруппа, дифференцируемая в координатах D и имеющая направляющий вектор a (см. теорему 58). Выразим явно зависимость однопараметрической подгруппы g от вектора a, положив

$$g(t) = g(a, t). \tag{15}$$

Координаты точки $g(t)$ в системе D обозначим через $g^i(t)$, а координаты вектора a — через a^i. Мы можем написать

$$g^i(t) = g^i(a, t) = g^i(a^1, \ldots, a^r; t). \tag{16}$$

Рассмотрим функцию $g(\alpha t)$, где α — действительное число. Точка $g(\alpha t)$ как функция параметра t описывает однопараметрическую подгруппу, так как

$$g(\alpha s) g(\alpha t) = g(\alpha s + \alpha t) = g(\alpha(s+t)).$$

Направляющий вектор однопараметрической подгруппы $g(\alpha t)$ есть αa. Действительно,

$$\frac{dg^i(\alpha t)}{dt} = \frac{dg^i(\alpha t)}{d(\alpha t)} \cdot \alpha = \alpha a^i \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Так как, согласно теореме 58, в G существует лишь одна однопараметрическая подгруппа с направляющим вектором αa, то мы имеем:

$$g(a, \alpha t) = g(\alpha a, t). \tag{17}$$

Иначе это соотношение можно записать в виде

$$g^i(a, \alpha t) = g^i(\alpha a, t) \tag{18}$$

или

$$g^i(a^1, \ldots, a^r; \alpha t) = g^i(\alpha a^1, \ldots, \alpha a^r; t). \tag{19}$$

Заметим, что функции (16) как решения системы (2) дважды непрерывно дифференцируемы, соответственно аналитичны, по всем своим аргументам при $|t| \leqslant \varepsilon$, $|a^i| \leqslant \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число. Из соотношения (19) следует, что

$$g^i(a^1, \ldots, a^r; t) = g^i\left(\frac{a^1 t}{\varepsilon}, \ldots, \frac{a^r t}{\varepsilon}; \varepsilon\right),$$

так что функции (16) определены при всех значениях аргументов, удовлетворяющих условиям $|a^i t| \leqslant \varepsilon^2$, в частности, при $t=1$, $|a^i| \leqslant \varepsilon^2$. Положим:

$$h^i(a)=h^i(a^1, \ldots, a^r)=g^i(a^1, \ldots, a^r; 1). \tag{20}$$

Функции (20) удовлетворяют условию

$$h^i(0, \ldots, 0)=0. \tag{21}$$

Действительно,

$$h^i(0a^1, \ldots, 0a^r)=g^i(a^1, \ldots, a^r; 0)=0.$$

Займемся вычислением производных функций (20) в нулевой точке. При вычислении $\frac{\partial}{\partial a^j} h^i(0, \ldots, 0)$ все аргументы, кроме одного, a^j, следует заранее положить равными нулю. Придадим поэтому вектору a специальное значение a', считая, что у вектора a' все координаты равны нулю, за исключением j-й координаты, которая имеет значение 1. Вычислим теперь производную $\frac{d}{dt} h^i(a't)$. Согласно формулам (20) и (19) мы имеем $h^i(a't)=g^i(a', t)$. Таким образом, $\frac{d}{dt} h^i(a't) = \frac{d}{dt} g^i(a', t)$. Полагая в последнем равенстве $t=0$, мы найдем, что производная $\frac{d}{dt} g^i(a', 0)$ равна i-й координате направляющего вектора a' подгруппы $g(a', t)$; в силу формулы (10) § 41 и специального выбора вектора a' мы имеем, таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial a^j} h^i(0, \ldots, 0)=\delta^i_j. \tag{22}$$

Для введения в группе G координат D' рассмотрим систему уравнений

$$x^i=h^i(x'^1, \ldots, x'^r) \tag{23}$$

относительно неизвестных x'^k. При $x^i=0$ система (23) имеет решение $x'^k=0$ (см. равенства (21)). Далее, в нуле якобиан системы (23) равен единице (см. равенства (22)). Следовательно, система (23) разрешима однозначно и непрерывно вблизи нулевых значений аргументов и, значит, может служить для введения новых дважды дифференцируемых координат x'^k для точки x, имевшей в системе D координаты x^i (см. § 41, Е)). Получаемую таким способом новую систему координат обозначим через D'.

Рассмотрим в группе G кривую $g^*(t)$, задаваемую в координатах D' линейными уравнениями

$$g^{*i}(t)=a^i t. \tag{24}$$

Посмотрим, какой вид будет иметь эта кривая в координатах D. Для этого подставим в уравнения (23) вместо x'^k выражение $a^k t$.

Мы получим:

$$x^i = h^i(a^1 t, \ldots, a^r t) = g^i(a^1, \ldots, a^r; t)$$

(см. (20) и (19)). Это показывает, что рассматриваемая кривая $g^*(t)$ есть однопараметрическая подгруппа. Таким образом, всякая кривая, задаваемая в координатах D' равенствами (24), дает однопараметрическую подгруппу, и, следовательно, координаты D' суть канонические координаты первого рода (см. В)).

Так как функции (16) дважды непрерывно дифференцируемые или соответственно аналитические, то функции (20) обладают тем же свойством и, следовательно, переход от координат D' к координатам D дважды непрерывно дифференцируем или соответственно аналитичен. Итак, теорема 59 доказана.

В главе 10 будет показано (см. § 56, С)), что каждая каноническая система координат первого рода в группе Ли является аналитической. Таким образом, в силу теоремы 61 переход от системы координат D к канонической системе координат D' в действительности является дифференцируемым. Этим мы, однако, здесь пользоваться не можем.

Нижеследующая теорема 60 показывает, что каждая однопараметрическая подгруппа является дифференцируемой в любой дифференцируемой системе координат. Таким образом, теоремой 60 делается первый шаг в направлении доказательства дифференцируемости некоторых функций, заранее не предполагаемых дифференцируемыми.

Т е о р е м а 60. *Если D—некоторые дифференцируемые координаты в локальной группе Ли G, то всякая однопараметрическая подгруппа g группы G дифференцируема в координатах D* (см. А)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как согласно теореме 59 от координат D можно дважды дифференцируемым образом перейти к каноническим координатам D' первого рода, то мы будем вести доказательство в координатах D'.

Обозначим через U (звездную) окрестность единицы e группы G, в которой определены координаты D', и пусть V—такая звездная окрестность единицы e, что произведение любых двух ее элементов определено и входит в U (см. § 23, Е)). Пусть, далее, α—такое положительное число, что $g(t) \in V$ при $|t| \leqslant \alpha$. Обозначим через $g^1(t), \ldots, g^r(t)$ координаты точки $g(t)$ (при $|t| \leqslant \alpha$) в системе D', через a_n, где n—натуральное число,—вектор с компонентами $a_n^i = \frac{n}{\alpha} g^i\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ и через g_n—однопараметрическую подгруппу с направляющим вектором a_n (см. теорему 58). Так как D' есть каноническая система координат первого рода, то однопараметрическая подгруппа g_n в координатной форме имеет вид

$$g_n^i(t) = a_n^i t \tag{25}$$

для всех значений t, при которых в U имеется точка $(a_n^1 t, \ldots, a_n^r t)$ (см. B)). Мы покажем, что последнее условие заведомо выполнено, если $|t| \leqslant \alpha$.

Так как $g_n\left(\frac{\alpha}{n}\right) = g\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ и $g\left(\frac{\alpha}{n}\right) \in V$, то при $|t| \leqslant \frac{1}{n}\alpha$ в V имеется точка $(a_n^1 t, \ldots, a_n^r t)$, и потому при $|t| \leqslant \frac{1}{n}\alpha$ соотношения (25) определяют однопараметрическую подгруппу g_n, лежащую $\left(\text{при } |t| \leqslant \frac{1}{n}\alpha\right)$ в области V. Пусть m—неотрицательное целое число, меньшее n, и пусть уже доказано, что при $|t| \leqslant \frac{m}{n}\alpha$ соотношения (25) определяют однопараметрическую подгруппу g_n, лежащую $\left(\text{при } |t| \leqslant \frac{m}{n}\alpha\right)$ в V, и что $g_n\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = g\left(\frac{m}{n}\alpha\right)$. Если $\frac{m}{n}\alpha < t \leqslant \frac{m+1}{n}\alpha$, то $t = \frac{m}{n}\alpha + \vartheta$, $0 < \vartheta \leqslant \frac{1}{n}\alpha$. Элементы $g_n\left(\frac{m}{n}\alpha\right)$ и $g_n(\vartheta)$ лежат в V и потому их произведение определено и лежит в U. Положим $g_n(t) = g_n\left(\frac{m}{n}\alpha\right) g_n(\vartheta)$ и $g_n(-t) = \left[g_n\left(\frac{m}{n}\alpha\right) g_n(\vartheta)\right]^{-1}$. Теперь функция g_n определена при $|t| \leqslant \frac{m+1}{n}\alpha$ и представляет собой, как легко видеть, однопараметрическую подгруппу, лежащую в U. Следовательно (см. C)), и соотношения (25) справедливы при $|t| \leqslant \frac{m+1}{n}\alpha$. Так как $g_n\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = g\left(\frac{m}{n}\alpha\right)$ и $g_n\left(\frac{1}{n}\alpha\right) = g\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$, то $g_n\left(\frac{m+1}{n}\alpha\right) = g\left(\frac{m+1}{n}\alpha\right)$, а так как $g\left(\frac{m+1}{n}\alpha\right) \in V$, то $g_n\left(\frac{m+1}{n}\alpha\right) \in V$. Ввиду звездности области V (см. B)) отсюда следует, что $g_n(t) \in V$ при $|t| \leqslant \frac{m+1}{n}\alpha$. Проведенная индукция показывает, что при $|t| \leqslant \alpha$ соотношение (25) определяет однопараметрическую подгруппу g_n, лежащую в V и удовлетворяющую условию

$$g_n\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = g\left(\frac{m}{n}\alpha\right), \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Из соотношения (26) при $m = n$ и соотношения (25) следует, что $a_n^i \alpha = g^i(\alpha)$, так что вектор a_n в действительности не зависит от n. Вместе с ним не зависит от n и однопараметрическая подгруппа g_n: $g_n = g^*$, $n = 1, 2, \ldots$, и соотношение (26) дает:

$$g^*\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = g\left(\frac{m}{n}\alpha\right), \tag{27}$$

где m и n—любые натуральные числа, удовлетворяющие условию $m \leqslant n$. Так как g и g^* суть непрерывные функции, то из равенства (27) следует, что $g=g^*$. Таким образом, однопараметрическая подгруппа g дифференцируема. Итак, теорема 60 доказана.

Пример 77. Пусть R—топологическое кольцо всех действительных (комплексных) квадратных матриц порядка n, единичную матрицу которого будем обозначать через e. При $x\in R$ определим матрицу $\exp(x)$, положив:

$$\exp(x)=e+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\dots \tag{28}$$

Легко проверить, что ряд, стоящий в правой части равенства, всегда сходится. Если x и y—две перестановочные между собой матрицы, т. е. такие матрицы, что $xy=yx$, то, как нетрудно проверить, имеет место равенство

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y). \tag{29}$$

В частности, $\exp(x)\exp(-x)=e$, так что детерминант матрицы $\exp(x)$ всегда отличен от нуля.

Далее, из формулы (28) в силу теоремы о неявных функциях для функций многих переменных легко следует, что $\exp(x)$ дает гомеоморфное аналитическое отображение некоторой окрестности V_ε нуля кольца R на окрестность W_ε единицы e группы G. Таким образом, каждую матрицу $m\in W_\varepsilon$ можно единственным образом представить в виде $w=\exp(x)$, где $x\in V_\varepsilon$. Отображение, обратное к exp, обозначается символом log, так что $x=\log w$.

Благодаря этому за координаты матрицы $w=\exp(x)$ можно принять элементы x_{ij} матрицы x (в комплексном случае за координаты матрицы w принимают действительные и мнимые части элементов x_{ij} матрицы x). Оказывается, что координаты эти суть канонические координаты первого рода (см. В)). Действительно, пусть $a\in R$, а s и t—действительные числа. Матрица $\exp(ta)$ имеет отличный от нуля детерминант и потому принадлежит G. Так как матрицы sa и ta перестановочны, то

$$\exp((s+t)a)=\exp(sa)\exp(ta).$$

Таким образом, $\exp(ta)$ при фиксированной матрице a есть элемент однопараметрической подгруппы с параметром t. Во введенных нами координатах эта однопараметрическая подгруппа записывается в виде $x_{ij}=ta_{ij}$, а это и значит, что координаты x_{ij} суть канонические координаты первого рода.

§ 43. Теорема инвариантности

Здесь будет показано, что если в группе Ли G имеются две дифференцируемые системы координат, то они связаны между собой дифференцируемым преобразованием. Значение этого предложения уже было разъяснено в § 41. Оно подводит базу под координатное изучение групп Ли. В самом деле, изучая закон перемножения в группе координатным способом, мы в действительности изучаем свойства системы уравнений (3) § 41. Для того чтобы получить свойства самой группы, мы должны искать те свойства этой системы, которые остаются инвариантными при преобразовании координат. Доказываемая ниже теорема 61 показывает, что достаточно рассматривать дифференцируемые преобразования координат.

Для доказательства теоремы 61 мы введем *канонические координаты второго рода* (см. А)).

А) Пусть G—локальная группа Ли и D—дифференцируемые (аналитические) координаты, установленные в G. Будем говорить, что однопараметрические подгруппы $g_1, \ldots, g_s$ группы G *линейно независимы* в координатах D, если их направляющие векторы, взятые в системе D, линейно независимы. Пусть r—число координат системы D. Выберем в G систему r линейно независимых в координатах D однопараметрических подгрупп

$$g_1, \ldots, g_r \tag{1}$$

и положим:

$$g(t^1, \ldots, t^r)=g_1(t^1)g_2(t^2)\ldots g_r(t^r). \tag{2}$$

Оказывается, что существует столь малое положительное число γ, что при $|t^k|<\gamma$, $k=1, \ldots, r$, произведение (2) определено, точки вида (2) составляют некоторую окрестность W_γ единицы группы G, каждая точка из W_γ единственным образом представляется в виде (2) при $|t^k|<\gamma$, и переход от системы D к возникающей таким образом в области W_γ системе D^* координат $t^1, \ldots, t^r$ дифференцируем (аналитичен). Координатная система D^* называется *канонической системой второго рода*.

Для доказательства утверждения А) обозначим через $g_k^i(t)$ координаты точки $g_k(t)$ в системе D, через $g^i(t^1, \ldots, t^r)$—координаты точки $g(t^1, \ldots, t^r)$ в системе D и, наконец, через a_k^i—координаты направляющего вектора a_k группы g_k также в системе D. Переход от системы D^* к системе D дается соотношениями

$$x^i=g^i(t^1, \ldots, t^r), \tag{3}$$

где x^i суть координаты точки x в системе D, а t^k—координаты той же точки в системе D^*. Для доказательства предложения А) достаточно показать, что система (3) удовлетворяет условиям определения В) § 41.

Система (3) является дифференцируемой (аналитической). Это следует непосредственно из теоремы 58. Так как $g_k(0)=e$, то $g(0, \ldots, 0)=e$ и, следовательно, $g^i(0, \ldots, 0)=0$. Вычислим производную $\frac{\partial}{\partial t^k} g^i(t^1, \ldots, t^r)$ при нулевых значениях аргументов. При этом вычислении все аргументы, кроме одного, t^k, следует заранее положить равными нулю. Мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t^k} g^i(t^1, \ldots, t^r) = \frac{\partial}{\partial t} g^i_k(t) = a^i_k \quad \text{при} \quad t^k = t = 0$$

Таким образом, якобиан системы (3) равен детерминанту матрицы $\|a^i_k\|$, который не обращается в нуль в силу линейной независимости выбранной системы подгрупп (1). Итак, в малой окрестности единицы система (3) разрешима, и утверждение A) доказано.

Прежде чем перейти к теореме 61, сделаем предварительные замечания B) и C).

B) Пусть G—локальная группа Ли, D и D'—две дифференцируемые системы координат, заданные в ней, а R и R'—векторные пространства, ассоциированные с G при помощи координатных систем D и D' (см. § 41, C)). Пусть g—однопараметрическая подгруппа в G; обозначим через a и a' ее направляющие векторы в координатах D и D' (см. теорему 60), $a \in R$, $a' \in R'$. Получаемое таким образом взаимно однозначное соответствие $a \rightleftarrows a'$ между пространствами R и R' оказывается и взаимно непрерывным. В силу этого в множестве всех однопараметрических подгрупп группы G естественно вводится топология, не зависящая от выбора координат: близость подгрупп определяется как близость их направляющих векторов в какой-либо дифференцируемой системе координат.

В силу теоремы 59 мы без ограничения общности можем считать системы D и D' (дважды дифференцируемыми) каноническими системами первого рода. Для доказательства непрерывности отображения $a \to a'$ вблизи некоторого определенного вектора a выберем столь малое положительное число τ, что определены точка с координатами $a^i\tau$ в системе D и точка с координатами $a'^i\tau$ в системе D', причем обе эти точки совпадают с точкой $g(\tau)$ (см. § 42, B)). Малому изменению вектора a соответствует теперь, очевидно, малое изменение точки $g(\tau)$, малым же изменениям точки $g(\tau)$ соответствуют малые изменения ее координат $a'^i\tau$, т. е. малые изменения вектора a'. Итак, отображение $a \to a'$ непрерывно. Так же доказывается и непрерывность отображения $a' \to a$.

C) Пусть $f(z^1, \ldots, z^k)$—функция переменных $z^1, \ldots, z^k$, определенная в звездной области U (см. § 42, B)). Будем говорить, что функция $f(z^1, \ldots, z^k)$ *однородна*, если для всякой системы постоянных $c^1, \ldots, c^k$ функция $f(c^1t, \ldots, c^kt)$ параметра t, определенная для тех значений t, при которых в U имеется точка с координатами $c^1t, \ldots, c^kt$, есть линейная функция параметра t, т. е.

$$f(c^1t, \ldots, c^kt) = ct, \tag{4}$$

где c не зависит от t. Оказывается, что если однородная функция $f(z^1, \ldots, z^k)$ дифференцируема, то она линейна, т. е. что

$$f(z^1, \ldots, z^k)=p_1z^1+\ldots+p_kz^k,$$

где $p_1, \ldots, p_k$—постоянные.

Пусть $(c^1, \ldots, c^k)\in U$. Тогда соотношение (4) справедливо при $|t|\leqslant 1$ и дает при $t=1$:

$$f(c^1, \ldots, c^k)=c. \tag{5}$$

Дифференцируя соотношение (4) по t в точке $t=0$, получаем:

$$c=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial z^i}f(0, \ldots, 0)c^i. \tag{6}$$

Вместе соотношения (5) и (6) показывают, что $f(z^1, \ldots, z^k)$ есть линейная функция.

Теорема 61. *Пусть D и D'—две дифференцируемые (аналитические) системы координат в локальной группе Ли G. Координаты точки x в системе D пусть будут $x^1, \ldots, x^r$, в системе D'—$x'^1, \ldots, x'^s$. Тогда $s=r$, и мы имеем:*

$$x'^i=\varphi^i(x^1, \ldots, x^r), \quad i=1, \ldots, r, \tag{7}$$

где φ^i—трижды непрерывно дифференцируемые (аналитические) функции и при $x^1=\ldots=x^r=0$ функциональный определитель $\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right|$ отличен от нуля. Если D и D' суть канонические системы первого рода, то соотношения (7) имеют линейный вид

$$x'^j=\sum_{i=1}^{r}p_i^jx^i, \quad j=1, \ldots, r. \tag{7'}$$

Равенство $r=s$ следует из инвариантности размерности локальной группы (см. § 23, N) и § 16); здесь это равенство будет доказано непосредственно.

Доказательство. Предположим, что $r\leqslant s$. Выберем, так же как и в A), систему r линейно независимых в координатах D однопараметрических подгрупп

$$g_1, \ldots, g_r. \tag{8}$$

В координатах D' эти подгруппы имеют направляющие векторы (см. теорему 60), однако совсем не очевидно, что однопараметрические подгруппы (8) будут линейно независимыми и в координатах D'. Но небольшим изменением этих подгрупп (см. B)) можно сделать их линейно независимыми и в координатах D', ибо $s\geqslant r$; при достаточно малом изменении линейная независимость подгрупп (8) в координатах D не утеряется. Таким образом, мы можем принять, что подгруппы (8) линейно независимы одновременно в координатах D и D'. Если $s>r$, то дополним систему (8) такими однопараметрическими подгруппами $g_{r+1}, \ldots, g_s$, чтобы новая система

$$g_1, \ldots, g_r, g_{r+1}, \ldots, g_s \tag{9}$$

была линейно независима в координатах D'. Системы (8) и (9) однопараметрических подгрупп можно положить в основу построения канонических координатных систем D^* и D'^* второго рода.

Пусть U и U'—области определения систем D^* и D'^*, а t—столь малое положительное число, что $g_{r+1}(t) \in U \cap U'$. Координатами точки $g_{r+1}(t)$ в системе D'^* служат числа $t'^1=0, \ldots, t'^r=0$, $t'^{r+1}=t$, $t'^{r+2}=0, \ldots, t'^s=0$. Координаты точки $g_{r+1}(t)$ в системе D^* обозначим через $t^1, \ldots, t^r$. Мы имеем:

$$g_1(t^1)g_2(t^2)\ldots g_r(t^r)g_{r+1}(0)\ldots g_s(0)=g_1(0)g_2(0)\ldots g_{r+1}(t)\ldots g_s(0).$$

Если трактовать это равенство с точки зрения координатной системы D'^*, то из него следует, что $t=0$, а это противоречит предположению. Таким образом, $s=r$. В силу предложения А) переход от системы D к системе D^* является дифференцируемым (аналитическим). Точно так же переход от системы D' к системе D^* дифференцируем (аналитичен). Следовательно, и переход от системы D к системе D' дифференцируем (аналитичен).

Если D и D'—канонические координаты первого рода, то функции (7) однородны (см. С)); в этом мы убеждаемся, принимая за $x^1, \ldots, x^r$ координаты точки, описывающей однопараметрическую подгруппу. Таким образом, функции (7) линейны (см. С)).

Итак, теорема 61 доказана.

Важным следствием теоремы 61 является нижеследующее предложение.

D) Пусть φ—локальное изоморфное отображение локальной группы Ли G на локальную группу Ли G', а D и D'—дифференцируемые (аналитические) координатные системы в G и G'. Координаты точки $x \in G$ в системе D обозначим через $x^1, \ldots, x^r$, координаты точки $x'=\varphi(x)$ в системе D'—через $x'^1, \ldots, x'^s$. Мы имеем:

$$x'^j=\varphi^j(x^1, \ldots, x^r), \quad j=1, \ldots, s. \tag{10}$$

Оказывается, что $s=r$, функции φ^i трижды непрерывно дифференцируемы (аналитичны) и при $x^1=\ldots=x^r=0$ функциональный определитель $\left|\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\right|$ отличен от нуля. В частности, всякий локальный автоморфизм φ локальной группы G описывается в системе D уравнениями (10) с трижды непрерывно дифференцируемыми (аналитическими) функциями φ^j и с отличным от нуля функциональным определителем $\left|\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i}\right|_{x^1=\ldots=x^r\ 0}$. Примером может служить внутренний автоморфизм $\varphi_a(x)=a^{-1}xa$, где a—фиксированный элемент группы G. Если системы D и D' являются каноническими 1-го рода, то функции φ^j линейны.

Для доказательства достаточно ввести в G новую дифференцируемую (аналитическую) систему координат D'', приняв за координаты точки $x \in G$ в системе D'' координаты точки $\varphi(x) \in G'$ в системе D', и применить теорему 61 к системам D и D''.

Пример 78. Пусть G—коммутативная группа Ли. Введем в G канонические координаты второго рода. Элемент с координатами t^i обозначим через $g(t^1, \ldots, t^r)$. Нетрудно видеть, что произведение двух элементов выражается по формуле

$$g(s^1, \ldots, s^r)g(t^1, \ldots, t^r)=g(s^1+t^1, \ldots, s^r+t^r).$$

Это показывает, что коммутативная группа Ли локально изоморфна группе векторов.

§ 44. Подгруппа и факторгруппа

В этом параграфе будет показано, что всякая подгруппа H группы Ли G также есть группа Ли—дифференцируемая или аналитическая в зависимости от G. Далее, будет показано, что всякая факторгруппа G^* группы Ли G также есть группа Ли и что при этом естественное гомоморфное отображение группы G на группу G^* дается дифференцируемыми функциями. Таким образом, здесь будет установлено, что при рассмотрении подгрупп и факторгрупп можно ограничиться использованием дифференцируемых функций.

Лемма. *Пусть H—подгруппа локальной группы Ли G. Существует тогда такая каноническая система D^* координат $t^1, \ldots, t^r$ второго рода, определенная в некоторой окрестности W_γ* (см. § 43, А)), *что пересечение $M_\gamma=W_\gamma \cap H$ состоит из всех элементов $(t^1, \ldots, t^r) \in W_\gamma$, удовлетворяющих условиям*

$$t^1=\ldots=t^{r-s}=0, \tag{1}$$

где число s определяется подгруппой H; при этом для любых двух элементов v_1, v_2 из M_γ определены и принадлежат H произведения $v_1^{-1}v_2$, v_1v_2.

Доказательство. Пусть D'—канонические координаты первого рода, установленные в G (см. § 42, В)), и V—область их существования. Координаты точки $x \in V$ в системе D' обозначим через $x^1, \ldots, x^r$. Через U_α, $\alpha>0$, обозначим множество всех точек x, для которых выполнено неравенство

$$x^1x^1+\ldots+x^rx^r<\alpha^2. \tag{2}$$

Существует столь малое положительное число β, что, каковы бы ни были числа $y^1, \ldots, y^r$, удовлетворяющие неравенству $y^1y^1+\ldots+y^ry^r\leqslant\beta^2$, существует точка $y\in V$ с координатами y^i; произведение любых $r+1$ элементов из $\overline{U}_\beta$ определено, и если элементы эти принадлежат H, то произведение их также принадлежит H (см. § 23, E)); наконец, множество $\overline{U}_\beta\cap H$ замкнуто в $\overline{U}_\beta$. Мы будем считать, что $\beta=1$ (этого всегда можно добиться подобным преобразованием координат), и положим $U_\beta=U$.

Пусть $b\in U\cap H$ и b^i — координаты элемента b в системе D'. Положим $\sqrt{b^1b^1+\ldots+b^rb^r}=\rho$ и покажем, что если m есть натуральное число, удовлетворяющее неравенству $m\rho<1$, то элемент $(b)^m$ имеет координаты mb_i и принадлежит H:

$$(b)^m\in H \quad \text{при} \quad m\rho<1. \tag{3}$$

Рассмотрим для этого однопараметрическую подгруппу g, компоненты направляющего вектора которой суть числа b^i. Мы имеем $g^i(t)=b^it$, $|t|\leqslant\frac{1}{\rho}$ (см. § 42, B)). Таким образом, $b=g(1)$. Покажем, что степени $(b)^2, \ldots, (b)^m$ определены и принадлежат множеству $U\cap H$. Пусть $p<m$ и пусть уже доказано, что степень $(b)^p$ определена и принадлежит множеству $U\cap H$. Тогда произведение $(b)^pb=(b)^{p+1}$ определено и принадлежит H. Далее, так как $p+1<\frac{1}{\rho}$, то элемент $g(p+1)$ определен и принадлежит U, а в силу свойств однопараметрической подгруппы он равен $(b)^{p+1}$. Таким образом, $(b)^{p+1}\in U\cap H$, и соотношение (3) доказано.

Пусть теперь

$$g_1, \ldots, g_k, \qquad k\geqslant 0, \tag{4}$$

— система однопараметрических подгрупп, направляющие векторы $a_j=(a_j^1, \ldots, a_j^r)$ которых, $j=1, \ldots, k$, составляют ортогональную нормированную систему, т. е. удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{r} a_p^i a_q^i=\delta_{pq}. \tag{5}$$

Из того, что вектор a_j является единичным, следует, что при $|t|\leqslant 1$ подгруппа g_j определена и лежит в U. Предположим, что $g_j(t)\in H$ при $|t|\leqslant 1$, $j=1, \ldots, k$, и обозначим через H_k при $k>0$ совокупность всех элементов вида

$$g(t^1, \ldots, t^k)=g_1(t^1)g_2(t^2)\ldots g_k(t^k), \quad |t^j|\leqslant 1, \quad j=1, \ldots, k. \tag{6}$$

При $k=0$ положим $H_k=\{e\}$. Мы покажем, что возможны только два случая: a) множество H_k содержит некоторую окрестность единицы группы H; b) существует такая однопараметрическая подгруппа g_{k+1} с единичным направляющим вектором a_{k+1}, ортогональным к векторам $a_1, \ldots, a_k$, что $g_{k+1}(t)\in H$ при $|t|\leqslant 1$.

Обозначим через L_k множество всех элементов из U, координаты $x^1, \ldots, x^r$ которых удовлетворяют линейным соотношениям

$$\sum_{i=1}^{r} a_j^i x^i = 0, \quad j=1, \ldots, k. \tag{7}$$

При $k=0$ положим $L_k=U$. Обозначим, далее, через

$$g(t^1, \ldots, t^k; x) \tag{8}$$

элемент $g(t^1, \ldots, t^k)x^{-1}$, где $x \in U$. Множество всех элементов вида (8) при фиксированном x и $|t^j| \leqslant 1$, $j=1, \ldots, k$, есть $H_k x^{-1}$. Исследуем пересечение множеств L_k и $H_k x^{-1}$ при x, близком к e. Для этого обозначим через $g^i(t^1, \ldots, t^k; x)$ координаты элемента (8). Чтобы найти пересечение множеств L_k и $H_k x^{-1}$, достаточно разрешить относительно параметров $t^1, \ldots, t^k$ систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{r} a_j^i g^i(t^1, \ldots, t^k; x) = 0, \quad j=1, \ldots, k. \tag{9}$$

При $x=e$ система эта имеет очевидное решение $t^p=0$, $p=1, \ldots, k$. Вычислим якобиан этой системы при $t^p=0$, $p=1, \ldots, k$, $x=e$. При этих значениях мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t^j} g^i(t^1, \ldots, t^k; x) = \frac{d}{dt} g_j^i(t) = a_j^i \text{ при } t=0. \tag{10}$$

Таким образом, при $t^p=0$, $p=1, \ldots, k$, $x=e$

$$\frac{\partial}{\partial t^j} \sum_{i=1}^{r} a_h^i g^i(t^1, \ldots, t^k; x) = \sum_{i=1}^{r} a_h^i a_j^i = \delta_{hj}$$

(см. (10) и (5)). Итак, при x, близком к e, существует одно и только одно решение системы (9), близкое к начальному и непрерывно зависящее от x. Это значит, что при x, достаточно близком к e, существует одна и только одна точка пересечения множеств L_k и $H_k x^{-1}$, близкая к e, и эта точка $\varphi(x)$ непрерывно зависит от x, причем $\varphi(e)=e$. Допустим теперь, что предположение а) не выполнено. Тогда существует последовательность

$$b_1, \ldots, b_n, \ldots \tag{11}$$

элементов множества $H \setminus H_k$, сходящаяся к единице e. Положим $c_n=\varphi(b_n)$. Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна и $\varphi(e)=e$, то последовательность

$$c_1, \ldots, c_n, \ldots \tag{12}$$

сходится к e. Все точки этой последовательности принадлежат L_k, ибо $\varphi(x) \in L_k$. Далее, все они принадлежат H. Действительно, $c_n \in H_k b_n^{-1} \subset H$, ибо $b_n^{-1} \in U$. Отметим еще то важное обстоятельство, что ни один из элементов последовательности (12) не равен e: если мы допустим, что $c_n=e$, то получим $e\in H_k b_n^{-1}$ и $b_n\in H_k$, что противоречит предположению. Таким образом,

$$c_n\in L_k, \quad c_n\in H, \quad c_n\neq e, \quad \lim_{n\to\infty} c_n=e. \tag{13}$$

Координаты точки c_n последовательности (12) обозначим через

$$c_n^i. \tag{14}$$

Положим, далее,

$$\rho_n=\sqrt{c_n^1c_n^1+\ldots+c_n^rc_n^r}. \tag{15}$$

Точку с координатами

$$\frac{1}{\rho_n}c_n^i=a_n'^i \tag{16}$$

обозначим через a_n'. Точка a_n' лежит на пересечении множества $\overline{L}_k$ и границы окрестности U, следовательно, существует точка a, предельная для последовательности

$$a_1', \ \ldots, \ a_n', \ \ldots, \tag{17}$$

причем a также лежит на пересечении множества $\overline{L}_k$ и границы окрестности U. Обозначим через a_{k+1}^i координаты точки a в системе D'. Координаты эти удовлетворяют системе уравнений (7), ибо $a\in\overline{L}_k$. Сверх того,

$$a_{k+1}^1a_{k+1}^1+\ldots+a_{k+1}^ra_{k+1}^r=1,$$

так как a принадлежит границе окрестности U. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу g_{k+1} с направляющим вектором $a_{k+1}=(a_{k+1}^1, \ \ldots, \ a_{k+1}^r)$. Вектор этот нормирован и ортогонален к векторам $a_1, \ \ldots, \ a_k$. Покажем, что $g_{k+1}(t)\in H$ при $|t|\leqslant 1$. Точка $c_n\in H$ имеет координаты $\rho_n a_n'^i$ (см. (16)). Отсюда следует, что точка $(c_n)^m\in H$ и имеет координаты $m\rho_n a_n'^i$, если $m\rho_n<1$ (см. (3)). Пусть теперь t—действительное число, удовлетворяющее неравенствам $0<t\leqslant 1$. Так как последовательность (17) имеет a предельной точкой и $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$ (см. (13)), то можно подобрать такие целые положительные числа m и n, что $m\rho_n<1$ и $|ta_{k+1}^i-m\rho_n a_n'^i|<\varepsilon$, $i=1, \ \ldots, \ r$, где ε—наперед заданное положительное число. Таким образом, точка $g_{k+1}(t)$ является предельной для точек вида $(c_n)^m\in\overline{U}\cap H$, а так как $\overline{U}\cap H$ бикомпактно, то $g_{k+1}(t)\in H$.

Таким образом, мы показали, что имеет место либо случай a), либо случай b).

Изложенное индуктивное построение позволяет расширять систему (4), начиная с $k=0$, до некоторой системы

$$g_1, \ \ldots, \ g_s, \tag{18}$$

причем для окончательной системы (18) уже выполнено условие а). Направляющие векторы $a_1, \ldots, a_s$ системы (18) линейно независимы в силу условия ортогональности (5). Если $s<r$, то дополним систему (18) до полной линейно независимой системы

$$h_1, \ldots, h_{r-s}, g_1, \ldots, g_s. \tag{19}$$

Согласно замечанию А) § 43 систему (19) можно положить в основу введения в G канонических координат D^* второго рода, определенных в некоторой области W_γ (см. § 43, А)). Так как для системы (18) выполнено условие а), то существует такая окрестность Γ единицы в группе H, что $\Gamma\subset H_s$. При достаточно малом γ мы имеем $W_\gamma\cap H\subset\Gamma\subset H_s$, и для канонических координат D^* второго рода, определенных в W_γ, выполнены требования леммы.

Итак, лемма доказана.

Теорема 62. *Пусть G—локальная группа Ли и H—ее подгруппа. Тогда H также есть локальная группа Ли, аналитическая, если группа G аналитична. Пусть, далее, D и E—дифференцируемые (аналитические) системы координат в группах G и H, $x^1, \ldots, x^r$—координаты точки $x\in H$ в системе D, а $y^1, \ldots, y^s$—координаты той же точки в системе E и пусть*

$$x^i=\psi^i(y^1, \ldots, y^s), \quad i=1, \ldots, r. \tag{20}$$

Оказывается, что функции ψ^i трижды непрерывно дифференцируемы (аналитичны) и что функциональная матрица $\left\|\frac{\partial\psi^i}{\partial y^j}\right\|$ имеет ранг s. Из последнего, в частности, следует, что $s\leqslant r$. Если координатные системы D и E являются каноническими системами первого рода, то соотношения (20) приобретают линейный вид

$$x^i=\sum_{j=1}^{s}p_j^i y^j, \quad i=1, \ldots, r. \tag{20'}$$

Доказательство. Пусть D^*—каноническая система координат второго рода, определенная в области W_γ, построенная для группы G и подгруппы H в предыдущей лемме, так что пересечение $M_\gamma=W_\gamma\cap H$ задается в этой системе координат уравнениями

$$t^1=\ldots=t^{r-s}=0. \tag{21}$$

Система координат D^* аналитична, если группа G аналитична (см. § 43, А)). Закон умножения в этой системе координат запишем в виде

$$z^i=f^i(x^1, \ldots, x^r; y^1, \ldots, y^r), \quad i=1, \ldots, r \tag{22}$$

(см. § 41, (3)). Функции f^i определены и трижды непрерывно дифференцируемы (аналитичны) при достаточно малых значениях своих аргументов. Введем в H систему координат E^*, приняв за координаты элемента $x=(0, \ldots, 0, x^{r-s+1}, \ldots, x^r)\in M_\gamma$ числа $x^{r-s+1}, \ldots, x^r$. В системе E^* закон умножения элементов подгруппы H имеет вид

$$z^i=f^i(0, \ldots, 0, x^{r-s+1}, \ldots, x^r; 0, \ldots, 0, y^{r-s+1}, \ldots, y^r), \quad i=r-s+1, \ldots, r.$$

Таким образом, подгруппа H есть локальная группа Ли, аналитическая, если группа G аналитична. В системах координат D^* и E^* соотношения (20) имеют вид

$$x^1=\ldots=x^{r-s}=0, \quad x^i=y^i, \quad i=r-s+1, \ldots, r. \tag{23}$$

Из этого и из теоремы 61 следует, что и для произвольных дифференцируемых (аналитических) систем координат D и E функции ψ^i трижды непрерывно дифференцируемы (аналитичны), и ранг матрицы $\left\|\frac{\partial\psi^i}{\partial y^j}\right\|$ равен s.

Пусть теперь D и E—канонические координаты первого рода. Подставим в правые части соотношений (20) вместо $y^1, \ldots, y^s$ координаты $b^1t, \ldots, b^st$ точки $g(t)$, пробегающей однопараметрическую подгруппу. Переменные $x^1, \ldots, x^r$, являясь координатами в системе D точки $g(t)$, имеют вид $a^1t, \ldots, a^rt$. Таким образом, функции ψ^i однородны и потому линейны (см. § 43, С)).

Итак, теорема 62 доказана.

А) Пусть G—локальная группа Ли, H—ее подгруппа и D^*—каноническая система координат второго рода, построенная в лемме. Рассмотрим подмножество L_γ области W_γ, определяемое уравнениями $t^{n+1}=\ldots=t^r=0$, где $n=r-s$. Каждый элемент из L_γ имеет координаты

$$t^1, \ldots, t^n, 0, \ldots, 0; |t^i|<\gamma,$$

и числа $t^1, \ldots, t^n$ можно принять за его координаты в новой системе B^*, определенной в L_γ. Каждый элемент $w\in W_\gamma$ однозначно представляется в форме $w=uv$, где $u\in L_\gamma$, $v\in M_\gamma$. Пусть ε—настолько малое положительное число, что $W_\varepsilon W_\varepsilon^{-1} W_\varepsilon\subset W_\gamma$. Для каждого элемента $w\in W_\varepsilon$ имеем $W_\varepsilon\cap wH=uM_\varepsilon$, где элемент $u\in L_\varepsilon$ определен однозначно. Таким образом, каждый левый смежный класс $W_\varepsilon\cap wH$, $w\in W_\varepsilon$, группы G по подгруппе H пересекается с L_ε и притом только в одной точке u. Координаты этого элемента u в системе B^* можно принять за координаты смежного класса wH в некоторой системе C^*, определенной в области K_ε пространства G/H (см. § 23, J)), состоящей из всех смежных классов, пересекающихся с W_ε.

Пусть $g_1, \ldots, g_r$—однопараметрические подгруппы, положенные в основу построения канонической системы координат D^* второго рода (см. § 43, А)). Каждый элемент $w\in W_\gamma$ однозначно записывается в виде

$$w = g_1(t^1) g_2(t^2) \ldots g_r(t^r), \quad |t^i| < \gamma. \tag{24}$$

Положим $u = g_1(t^1) g_2(t^2) \ldots g_n(t^n)$, $v = g_{n+1}(t^{n+1}) g_{n+2}(t^{n+2}) \ldots g_r(t^r)$. Тогда мы имеем:

$$w = uv, \quad u \in L_\gamma, \quad v \in M_\gamma. \tag{25}$$

Из единственности разложения (24) следует единственность разложения (25). Пусть теперь $w \in W_\varepsilon$. В силу (25) имеем $w = uv$, где $u \in L_\varepsilon$, $v \in M_\varepsilon$. Рассмотрим пересечение $W_\varepsilon \cap wH$. Если элемент $h \in H$ удовлетворяет условию $wh \in W_\varepsilon$, то $h \in W_\varepsilon^{-1} W_\varepsilon$ и $vh \in W_\varepsilon W_\varepsilon^{-1} W_\varepsilon \subset W_\gamma$, так что $vh \in M_\gamma$, а так как $u(vh) \in W_\varepsilon$, то $vh \in M_\varepsilon$. Таким образом, $wh = u(vh) \in uM_\varepsilon$ и, следовательно, $W_\varepsilon \cap wH \subset uM_\varepsilon$. Докажем обратное включение. Пусть $v' \in M_\varepsilon$; решим относительно h уравнение $uv' = wh$. Сокращая на u, получаем $v' = vh$, откуда $h = v^{-1}v'$, и так как элементы v и v' входят в M_ε, то произведение $v^{-1}v'$ определено и входит в H (см. лемму). Таким образом, имеем $uM_\varepsilon \subset \subset W_\varepsilon \cap wH$, и равенство $uM_\varepsilon = W_\varepsilon \cap wH$ доказано. Единственность элемента u, определяемого последним соотношением, следует из единственности разложения (25).

Таким образом, предложение А) доказано.

Теорема 63. *Пусть G—локальная группа Ли, F—ее факторгруппа и χ—естественное отображение группы G на группу F. Тогда F есть локальная группа Ли, аналитическая, если группа G аналитична. Пусть, далее, D и C—дифференцируемые (аналитические) системы координат в группах G и F, $y^1, \ldots, y^r$—координаты точки $y \in G$ в системе D и $x^1, \ldots, x^n$—координаты точки $\chi(y)$ в системе C и пусть*

$$x^i = \chi^i(y^1, \ldots, y^r), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Тогда функции χ^i трижды непрерывно дифференцируемы (аналитичны), и функциональная матрица $\left\| \frac{\partial \chi^i}{\partial y^j} \right\|$ имеет ранг n. Из этого, в частности, следует, что $n \leqslant r$. Если системы координат D и C являются каноническими системами первого рода, то соотношения (26) получают линейный вид:

$$x^i = \sum_{j=1}^{r} q_j^i y^j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{26'}$$

Доказательство. Пусть H—ядро гомоморфизма χ и D^*—каноническая система координат второго рода, описанная в предложении А). Пусть в системе D^* закон умножения имеет вид

$$z^i = f^i(x^1, \ldots, x^r; y^1, \ldots, y^r), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{27}$$

Функции f^i трижды непрерывно дифференцируемы (аналитичны, см. § 43, А)). В факторгруппе F введем систему координат C^*, указанную в А), именно, примем за координаты смежного класса uH, $u \in L_\varepsilon$, координаты элемента u в системе B^*. Пусть x и y—два настолько близких к единице элемента из L_ε, что $z=xy \in W_\varepsilon$. Координаты элемента x в системе B^* пусть будут $x^1, \ldots, x^n$, координаты элемента y в той же системе пусть будут $y^1, \ldots, y^n$, а координаты элемента z в системе D^* пусть будут $z^1, \ldots, z^r$. Обозначим через x^*, y^*, z^* смежные классы, содержащие соответственно x, y, z. Тогда координатами элементов x^*, y^*, z^* в системе C^* будут соответственно $x^1, \ldots, x^n$; $y^1, \ldots, y^n$; $z^1, \ldots, z^n$. Мы имеем:

$$z^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0; y^1, \ldots, y^n, 0, \ldots, 0), \quad i=1, \ldots, n.$$

Таким образом, закон умножения элементов группы F в координатной системе C^* трижды непрерывно дифференцируем (аналитичен), и F есть локальная группа Ли, аналитическая, если G аналитична. Если $y^1, \ldots, y^r$—координаты элемента $y \in G$ в системе D^*, а $x^1, \ldots, x^n$—координаты элемента $\chi(y)$ в системе C^*, то мы имеем:

$$x^i = y^i, \quad i=1, \ldots, n. \tag{28}$$

Таким образом, в координатных системах D^*, C^* функции χ^i имеют особенно простой вид (28), и для них утверждение теоремы, очевидно, выполнено. Из этого и из теоремы 61 следует, что утверждения теоремы 63, относящиеся к функциям χ^i, выполнены и для произвольных дифференцируемых (аналитических) координатных систем D и C.

Пусть теперь D и C—канонические координаты первого рода. Подставляя вместо переменных $y^1, \ldots, y^r$ в соотношения (26) координаты $b^1t, \ldots, b^rt$ элемента $g(t)$, пробегающего однопараметрическую подгруппу, мы для переменных $x^1, \ldots, x^n$ получим выражения $a^1t, \ldots, a^nt$, так как элемент $\chi(g(t))$ также пробегает однопараметрическую подгруппу. Таким образом, в силу предложения С) § 43 функции χ^i линейны.

Итак, теорема 63 доказана.

Теоремы 61, 62 и 63 показывают, что отныне при изучении групп Ли мы можем ограничиться рассмотрением дифференцируемых функций.

Приведем здесь одно весьма важное следствие теоремы 62.

В) Пусть G—топологическая группа всех комплексных квадратных матриц порядка n с детерминантами, отличными от нуля (см. § 31, А)). Оказывается, что G есть аналитическая группа Ли. Таким образом, в силу теоремы 62 всякая подгруппа группы G также есть аналитическая группа Ли.

Для введения координат в группе G матрицу $x \in G$ представим в форме

$$x = e + \|x_k^j + i x_k'^j\|, \tag{29}$$

где e—единичная матрица, $i=\sqrt{-1}$, а x_k^j и $x_k'^j$—действительные числа. Числа эти примем за координаты матрицы x. Таким образом, G имеет размерность $2n^2$. Если x, y и z суть три матрицы и $z=xy$, то в координатной форме соотношение это имеет вид

$$z_k^j=x_k^j+y_k^j+x_\alpha^j y_k^\alpha-x_\alpha'^j y_k'^\alpha,\quad z_k'^j=x_k'^j+y_k'^j+x_\alpha^j y_k'^\alpha+x_\alpha'^j y_k^\alpha. \tag{30}$$

Так как эти соотношения имеют аналитический вид, то группа G есть аналитическая группа Ли.

Пример 79. Пусть G—группа всех действительных квадратных матриц порядка n с детерминантами, отличными от нуля, H—подгруппа группы G, составленная из всех ортогональных матриц, F—мультипликативная группа всех отличных от нуля действительных чисел и χ—гомоморфное отображение группы G на группу F, ставящее в соответствие каждой матрице $w\in G$ ее детерминант. Ядро N гомоморфизма χ состоит из всех матриц, детерминант которых равен единице. За канонические координаты первого рода матрицы w можно принять элементы x_{ij} матрицы $x=\log w$ (см. пример 77). За каноническую координату элемента $v\in F$ можно, как легко видеть, принять число $y=\log v$ (канонические координаты в группах G и F определены, естественно, лишь в достаточно малых окрестностях единиц). Покажем, что в выбранных канонических координатах подгруппа H выделяется линейными уравнениями

$$x_{ij}+x_{ji}=0,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n \tag{31}$$

(см. теорему 62, (20′)), а гомоморфизм χ задается соотношением

$$y=\mathrm{Sp}(x)=\sum_{i=1}^{n} x_{ii} \tag{32}$$

(см. теорему 63, (26′)), так что подгруппа N выделяется уравнением

$$\mathrm{Sp}\,(x)=0.$$

Рассмотрим подгруппу H. Матрицу, получаемую транспонированием из матрицы u, будем обозначать через u^*. Из соотношения (28) § 42 легко следует, что

$$(\exp\,(x))^*=\exp\,(x^*). \tag{33}$$

Пусть матрица x удовлетворяет соотношению (31), т. е. кососимметрична; тогда $x^*=-x$, и из соотношения (33) следует, что

$$(\exp\,(x))^*=\exp\,(x^*)=\exp\,(-x)=(\exp\,(x))^{-1}.$$

Таким образом, если матрица x кососимметрична, то матрица $\exp\,(x)$ ортогональна (см. пример 3). Обратно, если $w\in W_\varepsilon$ есть ортогональная матрица, то мы имеем:

$$x^*=(\log\,(w))^*=\log\,(w^*)=\log\,(w^{-1})=-\log\,(w)=-x,$$

т. е. матрица x кососимметрична. Таким образом, вблизи единицы подгруппа H выделяется соотношениями (31).

Рассмотрим теперь гомоморфизм χ. Матрица u называется *треугольной*, если ее элементы u_{ij} удовлетворяют условию $u_{ij}=0$ при $i<j$. Известно, что для каждой квадратной матрицы x можно подобрать такую (вообще говоря, комплексную) матрицу t с отличным от нуля детерминантом, что матрица txt^{-1} треугольна. Из соотношения (28) § 42 непосредственно следует, что

$$\exp(txt^{-1})=t(\exp(x))t^{-1}.$$

Очевидно, что детерминант матрицы twt^{-1} равен детерминанту матрицы w. Легко проверяется, что след матрицы txt^{-1} равен следу матрицы x. Докажем, что

$$\operatorname{Det}(\exp(x))=e^{\operatorname{Sp}(x)} \tag{34}$$

(здесь e—основание натуральных логарифмов, а не единица группы). Для треугольной матрицы x соотношение это непосредственно следует из (28) § 42, а так как каждую матрицу x трансформацией можно привести к треугольному виду, то из инвариантности детерминанта и следа при трансформации следует справедливость соотношения (34) в общем случае. Из соотношения (34) непосредственно вытекает соотношение (32).

§ 45. Группы Ли и аналитические многообразия

Координатный метод позволяет определить положение точки в пространстве заданием системы чисел—ее координат; он же позволяет истолковать систему чисел как точку пространства. Таким образом, координатный метод открывает возможность применения алгебры и анализа к геометрии и возможность геометрической интерпретации негеометрических объектов—в этом его огромное значение для математики. Без всяких осложнений координатный метод применим к евклидову пространству, где имеется взаимно однозначное соответствие между точками и системами чисел. В других пространствах дело обстоит не так. Например, географические координаты на земной поверхности не столь совершенны: долгота меняется только от 0° до 360° (причем 0° и 360° нужно считать совпадающими), широта меняется только от —90° до +90°, а на полюсах долгота не определена совсем. Таким образом, географические координаты не осуществляют взаимно однозначного соответствия между точками земной поверхности и парами чисел, и это происходит не потому, что географические координаты выбраны неудачно, а потому, что на сфере невозможно выбрать вполне совершенную систему координат. Вообще, если пространство не гомеоморфно евклидову, то в нем невозможно ввести единую систему координат столь же совершенным образом, как в евклидовом пространстве. Между тем, как сама геометрия, так и другие области математики и естествознания (алгебра, механика и др.) приводят нас к пространствам, не гомеоморфным евклидову. В этих более общих пространствах также желательно использовать координатный метод, а введение единой системы координат во всем пространстве невозможно. Вследствие этого приходится использовать *локальные координаты*, т. е. координатные системы, определенные в отдельных частях пространства. В тех частях пространства, где локальные системы перекрываются, они связываются между собой преобразованиями. К этим преобразованиям в зависимости от обстоятельств приходится предъявлять различные требования: иногда они должны быть достаточное число раз дифференцируемыми, иногда же аналитическими. В зависимости от того, какие требования предъявляются к связям между различными локальными системами координат, возникают различные понятия: *гладкие* или *аналитические многообразия*. В настоящем параграфе дается точное определение этих понятий и доказывается, что как группа Ли, так и пространство, в котором группа Ли действует как непрерывная транзитивная группа преобразований, естественным образом оказываются аналитическими многообразиями.

A) Топологическое пространство со счетной базой называется *r-мерным топологическим многообразием*, если у каждой его точки существует окрестность, гомеоморфная области r-мерного евклидова пространства. Очевидно, что топологическое многообразие локально бикомпактно и локально связно (см. определение 19 и § 15, H)). Бикомпактное топологическое многообразие называется *замкнутым*.

B) Пусть U—топологическое пространство, гомеоморфное области r-мерного евклидова пространства, и φ—некоторое топологическое отображение пространства U на область r-мерного евклидова пространства E^r, в котором введены определенные координаты. Принимая за координаты точки $x \in U$ координаты точки $\varphi(x) \in E^r$, мы тем самым вводим в пространстве U некоторую *систему координат* D. Если D и D'—две системы координат, введенные в пространстве U указанным способом, то координаты $x^1, \ldots, x^r$ точки $x \in U$ в системе D и координаты $x'^1, \ldots, x'^r$ той же точки x в системе D' связаны соотношениями:

$$x'^i = g'^i(x^1, \ldots, x^r), \qquad i=1, \ldots, r, \tag{1}$$

$$x^i = g^i(x'^1, \ldots, x'^r), \qquad i=1, \ldots, r, \tag{2}$$

где g'^i и g^i суть непрерывные функции. Если функции g'^i и g^i дифференцируемы, то функциональные определители $\left|\frac{\partial g'^i}{\partial x^j}\right|$ и $\left|\frac{\partial g^i}{\partial x'^j}\right|$ отличны от нуля, так как их произведение равно единице.

Пусть m—некоторое фиксированное натуральное число или ∞. Из теоремы существования неявных функций следует, что если функции g'^i являются m раз непрерывно дифференцируемыми (аналитическими) и функциональный определитель $\left|\frac{\partial g'^i}{\partial x^j}\right|$ отличен от нуля в каждой точке $x \in U$, то функции g^i также m раз непрерывно дифференцируемы (аналитичны). Системы D и D' считаются принадлежащими к *одному типу гладкости класса* m (*аналитичности*), если функции g'^i и g^i являются m раз непрерывно дифференцируемыми (аналитическими). Говорят, что U есть *гладкое класса* m (*аналитическое*) *координатное пространство*, если в нем выделен определенный тип гладкости класса m (аналитичности) координатных систем. Для задания в U типа гладкости (аналитичности) достаточно указать одну систему координат этого типа. Если U есть гладкое класса m (аналитическое) координатное пространство, то под *системой координат* в нем всегда подразумевается координатная система выделенного типа. Пусть U—гладкое класса m (аналитическое) координатное пространство и φ—отображение пространства U на область евклидова пространства, вводящее в U систему координат. Если W—область пространства U, то отображение φ определяет систему координат и в W. В силу этого W становится гладким класса m (аналитическим) координатным пространством. Его мы будем называть *частью* гладкого класса m (аналитического) координатного пространства U.

Определение 40. Покрытие Σ топологического многообразия M размерности r областями называется *гладким класса* m (*аналитическим*), если каждая область покрытия Σ есть гладкое класса m (аналитическое) координатное пространство и если пересечение $W = U \cap V$ любых двух областей покрытия Σ представляет собой, если оно непусто, одно и то же гладкое (аналитическое) координатное пространство, вне зависимости от того, рассматривается ли оно как часть пространства U или как часть пространства V. Последнее требование означает, что гладкость (аналитичность), индуцированная в W из U, совпадает с гладкостью (аналитичностью), индуцированной в W из V. Два гладких класса m (аналитических) покрытия Σ и Σ' многообразия M принадлежат к одному *типу гладкости* (*аналитичности*), если покрытие $\Sigma \cup \Sigma'$ является гладким класса m (аналитическим). Говорят, что в топологическое многообразие M внесена *гладкость класса* m (*аналитичность*), если в нем выделен определенный тип гладкости класса m (аналитичности) его покрытий. Топологическое многообразие называется *гладким класса* m (*аналитическим*), если в него внесена гладкость класса m (аналитичность).

Если M есть гладкое (аналитическое) многообразие, то в нем рассматриваются лишь те гладкие (аналитические) покрытия, которые принадлежат к выделенному типу. Пусть M—гладкое (аналитическое) многообразие, Σ—некоторое его гладкое (аналитическое) покрытие, U—некоторая область покрытия Σ и D—некоторая система координат, установленная в U. Система D называется *локальной системой координат* в M. Если D'—другая локальная система координат в M, установленная в области U', а $x^1, \ldots, x^r$ и $x'^1, \ldots, x'^r$—координаты в системах D и D' точки $x \in U \cap U'$, то

$$x'^i = h'^i(x^1, \ldots, x^r), \qquad i=1, \ldots, r, \tag{3}$$

$$x^i = h^i(x'^1, \ldots, x'^r), \qquad i=1, \ldots, r, \tag{4}$$

где функции h'^i и h^i являются m раз непрерывно дифференцируемыми (аналитическими).

Определение 41. Пусть P и Q—два гладких класса m (аналитических) многообразия размерностей r и s, φ—непрерывное отображение многообразия P в многообразие Q и $x_0 \in P$. Пусть, далее, D—некоторая локальная система координат, определенная в окрестности точки x_0, E—некоторая локальная система координат, определенная в окрестности точки $y=\varphi(x_0)$, и x—точка, настолько близкая к x_0, что определены координаты $x^1, \ldots, x^r$ точки x в системе D и координаты $y^1, \ldots, y^s$ точки $y=\varphi(x)$ в системе E, и пусть

$$y^j = \varphi^j(x^1, \ldots, x^r), \qquad j=1, \ldots, s. \tag{5}$$

Отображение φ называется *гладким* (*аналитическим*) в точке x_0, если функции φ^j являются m раз непрерывно дифференцируемыми (аналитическими) вблизи точки x_0. Отображение φ называется *гладким* (*аналитическим*), если оно гладко (аналитично) в каждой точке $x_0 \in P$. Отображение φ называется *гладким* (*аналитическим*) *гомеоморфизмом*, если оно является гомеоморфизмом (см. определение 15) и если отображения φ и φ^{-1} гладки (аналитичны).

C) Пусть M_1 и M_2—два гладких класса m (аналитических) многообразия размерностей r_1 и r_2, Σ_1 и Σ_2—покрытия, задающие гладкость (аналитичность) в многообразиях M_1 и M_2, и $P = M_1 \times M_2$—прямое произведение многообразий M_1 и M_2 (см. § 14, А)). Пусть, далее, D_1—система координат, определенная в области $U_1 \in \Sigma_1$, и D_2—система координат, определенная в области $U_2 \in \Sigma_2$. Координаты точки $x_1 \in U_1$ в системе D_1 обозначим через $x_1^1, \ldots, x_1^{r_1}$, а координаты точки $x_2 \in U_2$ в системе D_2 — через $x_2^1, \ldots, x_2^{r_2}$. В окрестности $U_1 \times U_2$ введем систему координат D, приняв за координаты точки $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ числа $x_1^1, \ldots, x_1^{r_1}$, $x_2^1, \ldots, x_2^{r_2}$. Легко проверяется, что покрытие Σ многообразия P, составленное из всех областей $U_1 \times U_2$, $U_1 \in \Sigma_1$, $U_2 \in \Sigma_2$, есть гладкое класса m (аналитическое) покрытие. Полученное таким образом гладкое (аналитическое) многообразие P называется *прямым произведением* гладких (аналитических) многообразий M_1 и M_2.

Пусть теперь Q—некоторое гладкое класса m (аналитическое) многообразие и φ—функция двух переменных $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ со значениями в Q. Функция φ называется *гладкой* (*аналитической*), если она дает гладкое (аналитическое) отображение многообразия P в многообразие Q.

Нижеследующие теоремы 64, 65, 66 доказываются только для аналитических групп Ли. Их можно было бы дословно так же доказать и для дифференцируемых групп Ли; при этом вместо аналитичности многообразий и функций получилась бы их гладкость класса 3. Рассматривая только аналитические группы Ли, мы в действительности не сужаем класс рассматриваемых объектов, так как согласно результатам главы 10 аналитические координаты можно ввести во всякой группе Ли.

Теорема 64. *Аналитическая группа Ли G есть топологическое многообразие, в которое можно единственным образом внести аналитичность так, что функция $\varphi(x, y)=xy^{-1}$ будет аналитической* (см. C)).

Доказательство. Пусть D — некоторая аналитическая система координат, определенная в окрестности U единицы e группы G, и V—настолько малая окрестность единицы, что для всяких трех ее элементов x_1, x_2, x_3 определено и принадлежит U произведение $x_1x_2^{-1}x_3$. В области aV, $a \in G$, введем систему координат aD, приняв за координаты точки $ax \in aV$ координаты точки x в системе D. Покажем, что покрытие Σ, составленное из всех областей aV, $a \in G$, есть аналитическое покрытие многообразия G. Пусть области aV и bV пересекаются. Ввиду равноправия этих областей, нам достаточно показать, что координаты в системе D элемента $y \in V$, определяемого из уравнения $ax=by$, $x \in V$, являются аналитическими функциями координат элемента x в системе D. Мы имеем $b^{-1}a=yx^{-1} \in VV^{-1}$. Таким образом, определены координаты элемента $b^{-1}a$ в системе D, и в силу соотношения $y=b^{-1}ax$ координаты элемента y выражаются через координаты элементов $b^{-1}a$ и x при помощи аналитических функций. Итак, в многообразие G внесена аналитичность.

Покажем теперь, что при введенной в G аналитичности функция φ является аналитической. Пусть $x_0 \in G$, $y_0 \in G$, $z_0=x_0y_0^{-1}$, а x и y—два элемента, близких к e. Нам достаточно показать, что координаты в системе D точки z, определяемой из уравнения $z_0z=$ $=x_0x(y_0y)^{-1}$, являются аналитическими функциями координат точек x и y в системе D. Мы имеем $z=y_0(xy^{-1})y_0^{-1}$. Координаты элемента $y_0(xy^{-1})y_0^{-1}$ являются аналитическими функциями координат элемента xy^{-1} (см. § 43, D)). Координаты же элемента xy^{-1} являются аналитическими функциями координат элементов x и y (см. § 41, A)). Итак, доказана аналитичность функции φ.

Заданную покрытием Σ аналитичность многообразия G назовем *первой*. Допустим, что существует *вторая* аналитичность, в которой функция φ является аналитической. Из аналитичности функции φ следует, что отображение $x \to x^{-1}$ есть аналитический гомеоморфизм; из этого и из свойств функции φ в свою очередь следует, что функция $f(x, y) = xy$ является аналитической; из этого, наконец, вытекает, что отображение $x \to ax$ есть аналитический гомеоморфизм. Пусть D' — какая-нибудь локальная система координат второй аналитичности с началом в e. Из того, что функция f является аналитической, следует в силу теоремы 61, что координатные системы D и D' вблизи e получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Пусть $a \in G$ и A — локальная система координат второй аналитичности, определенная в окрестности точки a. Из координатной системы D' построим систему aD' (в окрестности точки a) так же, как из системы D была построена система aD. Так как отображение $x \to ax$ есть аналитический гомеоморфизм, то системы A и aD' в окрестности точки a получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Из установленной уже связи между системами D и D' следует, что системы aD и aD' вблизи точки a также получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Таким образом, системы координат aD и A вблизи точки a получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Так как точка a произвольна, то этим доказано совпадение первой и второй аналитичности.

Итак, теорема 64 полностью доказана.

Теорема 65. *Пусть G — локальная аналитическая группа Ли, H — ее подгруппа, G/H — пространство левых смежных классов* (см. § 23, J)), *D — некоторая аналитическая система координат, определенная в G, и C — некоторая система координат, определенная в G/H с началом в точке H. Пусть, далее, $x \in G$ и $\Xi \in G/H$ — элементы, настолько близкие к e и H, что определены координаты $x^1, \ldots, x^r$ элемента x в системе D, координаты $\xi^1, \ldots, \xi^n$ элемента Ξ в системе C и координаты $\eta^1, \ldots, \eta^n$ элемента $\mathrm{H} = x\Xi$ в системе C, и пусть*

$$\eta^i = \varphi^i(\Xi; x) = \varphi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n; x) = \varphi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n; x^1, \ldots, x^r),$$
$$i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Оказывается, что в G/H существуют координатные системы C, для которых функции φ^i аналитичны; примером может служить система C^*, построенная в предложении А) § 44. *Оказывается, далее, что всякие две системы C, обладающие этим свойством, получаются друг из друга аналитическими преобразованиями.*

Заметим, что свойство функций φ^i быть аналитическими не нарушается при переходе от одной аналитической системы координат D к другой (см. теорему 61).

Доказательство. Пусть D^* и C^* — системы координат, построенные для G и G/H в предложении А) § 44. Закон умножения в координатной системе D^* пусть задается функциями $f^1, \ldots, f^r$

(см. § 41, (3)). Функции эти аналитичны (см. § 43, A)). Пусть $x^1, \ldots, x^r$ — координаты элемента x в системе D^*. Положим $\Xi = \xi H$, $\xi \in L_\varepsilon$, и пусть $\xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0$ — координаты элемента ξ в системе D^*; тогда $\xi^1, \ldots, \xi^n$ суть координаты элемента Ξ в системе C^*. Положим $\eta = x\xi$, и пусть $\eta^1, \ldots, \eta^r$ — координаты элемента η в системе D^*; тогда $\eta^1, \ldots, \eta^n$ суть координаты элемента $\mathrm{H} = x\Xi = x\xi H$ в системе C^*. Мы имеем:

$$\eta^i = f^i(x^1, \ldots, x^r; \xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0), \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{7}$$

Таким образом, при нашем специальном выборе систем D и C ($D = D^*$, $C = C^*$) имеем:

$$\varphi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n; x^1, \ldots, x^r) = f^i(x^1, \ldots, x^r; \xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0),$$
$$i = 1, \ldots, n,$$

и потому функции φ^i аналитичны.

Пусть теперь C' — произвольная система координат в G/H с началом в точке H, и пусть в системах D^*, C' соотношения (6) имеют вид:

$$\eta'^i = \varphi'^i(\Xi, x) = \varphi'^i(\xi'^1, \ldots, \xi'^n; x) = \varphi'^i(\xi'^1, \ldots, \xi'^n; x^1, \ldots, x^r),$$
$$i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Предположим, что функции φ'^i аналитичны, и покажем, что системы C^*, C' получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Заметим прежде всего, что

$$\xi'^i = \varphi'^i(\eta'^1, \ldots, \eta'^n; x^{-1}).$$

Таким образом,

$$\left| \frac{\partial \varphi'^i(\xi'^1, \ldots, \xi'^n; x)}{\partial \xi'^j} \right| \neq 0. \tag{9}$$

То же верно и для систем D^*, C^*, так что

$$\left| \frac{\partial \varphi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n; x)}{\partial \xi^j} \right| \neq 0. \tag{10}$$

Координаты элемента Ξ в системах C^* и C' обозначим соответственно через $\xi^1, \ldots, \xi^n$ и $\xi'^1, \ldots, \xi'^n$. Пусть

$$\xi'^i = \psi^i(\Xi) = \psi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Достаточно доказать, что функции ψ^i аналитичны и что функциональный определитель $\left| \frac{\partial \psi^i}{\partial \xi^j} \right|$ отличен от нуля для нулевых значений аргументов.

Покажем сначала, что функции ψ^i аналитичны. Пусть ξ — элемент группы G, координаты которого в системе D^* суть $\xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0$. Тогда $\Xi = \xi H$, и так как координаты элемента $H \in G/H$

в системе C' равны нулю, то из (8) получаем:

$$\xi'^i=\varphi'^i(0, \ldots, 0; \xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0).$$

Таким образом, $\psi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n)=\varphi'^i(0, \ldots, 0; \xi^1, \ldots, \xi^n, 0, \ldots, 0)$, и потому функции ψ^i аналитичны.

Допустим теперь, что

$$\left|\frac{\partial\psi^i(0, \ldots, 0)}{\partial\xi^j}\right|=0. \tag{12}$$

Покажем, что тогда существует настолько малое число $\delta>0$, что

$$\left|\frac{\partial\psi^i}{\partial\xi^j}\right|=0 \quad \text{при} \quad |\xi_i|<\delta, \quad i=1, \ldots, n.$$

Допустим противоположное, т. е. что в любой близости к элементу H существует элемент H_0, для которого

$$\left|\frac{\partial\psi^i(\mathrm{H}_0)}{\partial\xi^j}\right|\neq 0. \tag{13}$$

Пусть $\mathrm{H}_0=x_0H$, где $x_0\in L_\varepsilon$. Пусть, далее, Ξ — элемент, близкий к H, и $\mathrm{H}=x_0\Xi$. Координаты элемента Ξ в системах C^* и C' обозначим соответственно через $\xi^1, \ldots, \xi^n$ и $\xi'^1, \ldots, \xi'^n$, а координаты элемента H в системах C^* и C' обозначим соответственно через $\eta^1, \ldots, \eta^n$ и $\eta'^1, \ldots, \eta'^n$. Мы имеем:

$$\xi'^i=\varphi'^i(\eta'^1, \ldots, \eta'^n; x_0^{-1}); \quad \eta'^i=\psi^i(\eta^1, \ldots, \eta^n);$$
$$\eta^i=\varphi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n; x_0).$$

При $\xi^1=\ldots=\xi^n=0$ функциональные определители всех трех выписанных преобразований отличны от нуля (см. (9), (13), (10)). Так как в результате их последовательного применения мы получаем преобразование $\xi'^i=\psi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, то при $\xi^1=\ldots=\xi^n=0$ функциональный определитель $\left|\frac{\partial\psi^i}{\partial\xi^j}\right|$ отличен от нуля, и мы пришли к противоречию с предположением (12). Итак доказано, что если выполнено условие (12), то существует такое $\delta>0$, что

$$\left|\frac{\partial\psi^i(\xi^1, \ldots, \xi^n)}{\partial\xi^j}\right|=0 \quad \text{при} \quad |\xi^j|<\delta, \quad j=1, \ldots, n. \tag{14}$$

Будем считать теперь, что соотношение (14) выполнено, и приведем это предположение к противоречию. Этим будет доказано, что

$$\left|\frac{\partial\psi^i(0, \ldots, 0)}{\partial\xi^j}\right|\neq 0.$$

Классическая теорема анализа утверждает, что из условия (14) вытекает зависимость функций $\psi^1, \ldots, \psi^n$. Более точно: из условия (14) следует, что в любой близости к началу координат существует точка $\Xi_0=(\xi_0^1, \ldots, \xi_0^n)$, в некоторой окрестности U которой одна из функций ψ^i, например ψ^1, выражается через остальные функции, так что имеет место соотношение

$$\psi^1=\Psi(\psi^2, \ldots, \psi^n), \tag{15}$$

где Ψ—однозначная непрерывная функция своих аргументов. Сделаем выводы из этой теоремы. Пусть $\xi_0'^1, \ldots, \xi_0'^n$—координаты точки Ξ_0 в системе C' и пусть Ξ_1—точка области U, координаты $\xi_1'^1, \ldots, \xi_1'^n$ которой в системе C' удовлетворяют условиям:

$$\xi_1'^1\neq\xi_0'^1, \quad \xi_1'^2=\xi_0'^2, \ \ldots, \ \xi_1'^n=\xi_0'^n. \tag{16}$$

Пусть $\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n$—координаты точки Ξ_1 в системе C^*. Тогда

$$\xi_1'^i=\psi^i(\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{17}$$

Из соотношений (15), (16) и (17) следует, что $\xi_1'^1=\xi_0'^1$, а это противоречит первому из соотношений (16).

Итак, теорема 65 полностью доказана.

Теорема 66. *Пусть G—аналитическая группа Ли, служащая непрерывной транзитивной группой преобразований локально бикомпактного пространства* Γ *со счетной базой* (см. определение 31). *Тогда* Γ *есть топологическое многообразие, и в него можно единственным образом внести аналитичность, при которой функция* $\sigma(x, \xi)=x^*(\xi)$, $x\in G$, $\xi\in\Gamma$, *является аналитической* (см. C)).

Доказательство. В силу теоремы 20 пара G, Γ подобна паре G, G/H, где H—стабильная подгруппа, и потому теорему достаточно доказать для последней пары. В окрестности единицы e группы G и в окрестности элемента H пространства G/H введем системы координат D^* и C^*, рассмотренные в предложении A) § 44. Пусть $\Xi_0=aH$. В окрестности $a^*(K_\varepsilon)$ элемента Ξ_0 введем систему координат aC^*, приняв за координаты элемента $a\Xi$, $\Xi\in K_\varepsilon$, координаты элемента Ξ в системе C^*. Иначе говоря, элемент $a\Xi$ записывается в форме $a\xi H$, где $\xi\in L_\varepsilon$, и за координаты элемента $a\Xi$ в системе aC^* принимаются первые n координат элемента ξ в системе D^*. Покажем, что покрытие Σ, составленное из всех координатных областей $a^*(K_\varepsilon)$, $a\in G$, есть аналитическое покрытие.

Пусть сначала a и b—два таких элемента из G, что $aH=bH=\Xi_0$. Тогда в окрестности элемента Ξ_0 определены две системы координат: aC^* и bC^*. Покажем, что эти системы вблизи Ξ_0 получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Координатные системы aC^* и bC^* равноправны, и достаточно доказать, что если элемент $\xi\in L_\varepsilon$ близок к e, то координаты в системе B^* элемента $\eta\in L_\varepsilon$, определяемого из соотношения $b\eta H=a\xi H$, выражаются через координаты элемента ξ в системе B^* при помощи аналитических функций. Из соотношения $b\eta H=a\xi H$ следует, что

$b\eta h = a\xi$, где $h \in H$. При фиксированных a и b элементы η и h являются однозначными функциями элемента ξ. Пусть при $\xi = e$ элемент h имеет значение h_0; тогда при ξ, близком к e, элемент h имеет вид vh_0, где $v \in M_\varepsilon$. Таким образом, мы имеем $\eta v = b^{-1}a\xi h_0^{-1}$, и так как $h_0 = b^{-1}a$, то $\eta v = h_0\xi h_0^{-1}$. В силу предложения D) § 43 координаты в системе D^* элемента $h_0\xi h_0^{-1}$ являются аналитическими функциями элемента ξ, координаты же элемента η в системе B^* равны первым n координатам элемента $\eta v = h_0\xi h_0^{-1}$.

Пусть теперь c_1, c_2—любые два элемента из G, для которых пересечение областей $c_1^*(K_\varepsilon)$ и $c_2^*(K_\varepsilon)$ непусто, и пусть aH—элемент, входящий в это пересечение. Покажем, что вблизи элемента aH координатные системы c_1C^* и c_2C^* получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Пусть ξ_i—такой элемент из L_ε, что $c_i\xi_i H = aH$, $i = 1, 2$. Положим $b_i = c_i\xi_i$. Из теоремы 65 следует, что координатные системы c_iC^* и b_iC^* вблизи точки aH получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Согласно результату, установленному в начале доказательства, координатные системы b_iC^* и aC^* также получаются друг из друга вблизи точки aH аналитическими преобразованиями. Таким образом, доказано, что Σ есть аналитическое покрытие многообразия G/H.

Покажем теперь, что при введенной нами в многообразии G/H аналитичности функция σ является аналитической. Пусть $x_0 \in G$, $\Xi_0 = aH \in G/H$ и $\mathrm{H}_0 = x_0\Xi_0$. Пусть, далее, $x \in G$ и $\xi \in L_\varepsilon$ — два элемента, достаточно близких к единице. Координатами элемента x_0x в системе x_0D^* (см. доказательство теоремы 64) служат координаты элемента x в системе D^*; координатами элемента $a\xi H$ в системе aC^* служат координаты элемента ξ в системе B^*. Определим элемент $\eta \in L_\varepsilon$ из соотношения

$$x_0a\eta H = x_0xa\xi H. \tag{18}$$

Координаты элемента η в системе B^* служат координатами элемента $x_0a\eta H$ в системе $(x_0a)C^*$, и нам достаточно показать, что координаты элемента η в системе B^* являются аналитическими функциями координат элементов x и ξ. Из соотношения (18) получаем:

$$\eta H = a^{-1}xa\xi H. \qquad (19$$

В силу теоремы 65 координаты элемента η являются аналитическими функциями координат элементов $a^{-1}xa$ и ξ. В силу предложения D) § 43 координаты элемента $a^{-1}xa$ являются аналитическими функциями координат элемента x. Таким образом, аналитичность функции σ доказана.

Аналитичность, введенную в многообразии G/H при помощи покрытия Σ, будем называть *первой*. Допустим, что в G/H введена *вторая* аналитичность таким образом, что функция σ аналитична.

Пусть C' — локальная система координат с началом H, соответствующая второй аналитичности. Из теоремы 65 следует, что системы координат C^* и C' вблизи H получаются друг из друга при помощи аналитических преобразований. Заметим, далее, что из аналитичности функции σ следует, что отображение $\Xi \to a\Xi$ является аналитическим гомеоморфизмом многообразия G/H на себя. Пусть $\Xi_0 = aH$ — некоторый элемент из G/H и A — локальная система координат, соответствующая второй аналитичности и определенная в окрестности элемента Ξ_0. Исходя из координатной системы C', определим координатную систему aC' так же, как выше была определена координатная система aC^* по координатной системе C^*. В силу только что установленной связи между координатными системами C^* и C', координатные системы aC^* и aC' в окрестности точки Ξ_0 получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Из того, что отображение $\Xi \to a\Xi$ является аналитическим гомеоморфизмом во второй аналитичности, следует, что в окрестности точки Ξ_0 системы aC' и A получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Таким образом, системы aC^* и A вблизи точки Ξ_0 получаются друг из друга аналитическими преобразованиями. Так как Ξ_0 есть произвольная точка из G/H, то в силу доказанного вторая аналитичность многообразия G/H совпадает с первой.

Итак, теорема 66 полностью доказана.

Пример 80. Пусть R^{n+1} — евклидово пространство размерности $n+1$ с заданной в нем декартовой системой координат. Уравнение $(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+1})^2=1$ определяет в пространстве R^{n+1} сферу S^n размерности n. Пусть, далее, G — группа всех ортогональных матриц порядка $n+1$ с детерминантом $+1$. Каждому элементу $g \in G$ соответствует при заданной системе координат *вращение* g^* пространства R^{n+1} вокруг начала координат. В силу соответствия $g \to g^*$ группа G представляет собой непрерывную эффективную группу преобразований пространства R^{n+1}. Подмножество S^n пространства R^{n+1} переходит при преобразованиях группы G в себя, и группа G, как легко видеть, транзитивна на S^n.

Зададим теперь в многообразии S^n аналитичность, предусмотренную теоремой 66. Обозначим через U_i область в S^n, составленную из всех точек $(x^1, \ldots, x^{n+1})$, удовлетворяющих условию $x_i > 0$, а через U_i' — область из точек, удовлетворяющих условию $x_i < 0$. Совокупность Σ областей $U_1, U_1', \ldots, U_{n+1}, U_{n+1}'$ составляет покрытие многообразия S^n. Введем теперь в каждой из областей этого покрытия систему координат, отобразив ее на область евклидова пространства. Области U_i и U_i' ортогонально спроектируем на координатную плоскость $x_i=0$, иначе говоря, за координаты точки $(x^1, \ldots, x^{n+1})$, области U_i или U_i' примем числа $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}$. Непосредственно проверяется, что указанным проектированием области U_i и U_i' гомеоморфно отображаются на внутренность шара в координатной плоскости $x_i=0$. Легко проверяется, что построенное таким образом покрытие Σ является аналитическим и что преобразования группы G во введенной в S^n аналитичности аналитичны.

Покрытие Σ содержит $2(n+1)$ областей, и, выкинув хотя бы одну из областей системы Σ, мы уже не получим покрытия. Возможно, однако, построить аналитическое покрытие Σ^* многообразия S^n, определяющее в S^n ту же аналитичность, что и покрытие Σ, но состоящее из двух областей. Пусть $p=(1, 0, \ldots, 0)$ и $p'=$ $=(-1, 0, \ldots, 0)$. Проектируя область $U=S^n\setminus p$ из точки p на координатную плоскость $x_1=0$, мы получаем ее гомеоморфное отображение на пространство $x_1=0$. Точно так же, проектируя область $U'=S^n\setminus p'$ из точки p' на ту же плоскость, мы получаем гомеоморфное отображение этой области на пространство $x_1=0$. Состоящее из двух областей U и U' покрытие Σ^* есть аналитическое покрытие того же типа, что и покрытие Σ.

СТРУКТУРА БИКОМПАКТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

В настоящей главе исследуется структура конечномерных бикомпактных групп, а также структура транзитивных бикомпактных групп преобразований конечномерных пространств. Основой исследования служит связь между бикомпактными группами и группами Ли, заключающаяся в том, что в любой окрестности единицы бикомпактной группы содержится нормальный делитель, факторгруппа по которому есть группа Ли (см. теорему 67). Из этой теоремы, являющейся прямым следствием теории линейных представлений (гл. 5), вытекает [35], что каждая бикомпактная группа со счетным топологическим базисом может быть представлена как предел последовательности групп Ли, связанных между собой гомоморфизмами. В случае бикомпактных групп без счетного топологического базиса ограничиться обычными последовательностями не удается. Приходится использовать либо частично упорядоченные системы групп Ли, как это делает А. Вейль [46], либо трансфинитные последовательности бикомпактных групп, как это делается здесь.

Основным результатом настоящей главы, относящимся к бикомпактным группам, является принадлежащая мне (в случае групп со счетной базой, [35]) теорема о том, что каждая бикомпактная локально связная группа конечной размерности есть группа Ли (см. теорему 70). Теорема эта выделяет бикомпактные группы Ли из бикомпактных групп путем наложения на последние условий весьма общего характера. Она содержит, в частности, ранее полученное Нейманом [30] положительное решение пятой проблемы Гильберта (см. § 41) для бикомпактных групп.

Основным результатом настоящей главы, относящимся к группам преобразований, является теорема Монтгомери и Ципина [28] о том, что каждая эффективная транзитивная бикомпактная группа преобразований локально связного конечномерного пространства есть группа Ли (см. теорему 74). Из нее непосредственно следует, что каждая эффективная транзитивная бикомпактная группа преобразований многообразия есть группа Ли.

Все результаты настоящей главы без труда можно было бы распространить на локально бикомпактные группы, если бы для них существовала теория представлений, аналогичная развитой в четвертой главе для бикомпактных групп. Отсутствие такой теории делает локально бикомпактные группы недоступными для изучения существующими методами.

Под *группой Ли* в настоящей главе всегда подразумевается *аналитическая группа Ли*.

§ 46. Сходящиеся ряды бикомпактных групп

В первую очередь здесь доказывается теорема 67, показывающая, что в некотором смысле каждая бикомпактная группа с любой степенью точности может быть приближена группами Ли. Далее вводится понятие *ряда Ли* (см. определение 42), представляющего собой трансфинитную последовательность бикомпактных групп. Сами группы этого ряда не являются группами Ли, но зато на каждую группу ряда следующая за ней группа отображена гомоморфно, причем ядро гомоморфизма есть группа Ли. Оказывается, что этого обстоятельства уже достаточно для того, чтобы в должной мере использовать группы Ли для изучения бикомпактных групп. Так как каждую трансфинитную последовательность индексов можно продолжить, присоединив к ней еще один элемент, причем возникшая таким образом последовательность вновь оказывается трансфинитной, то отпадает необходимость в рассмотрении *предела* трансфинитной последовательности групп; вместо него можно говорить о *последнем члене* трансфинитного ряда. Именно в таких терминах формулируется теорема 68. Тем не менее, понятие предела трансфинитной последовательности вводится здесь, но используется оно только для построения примеров.

Замечание. При доказательстве нижеследующей теоремы 67 теория линейных представлений используется лишь в сравнительно незначительном объеме. Именно, используется только тот факт, что для каждого отличного от единицы элемента a бикомпактной группы G существует такое линейное представление f_a группы G, для которого матрица $f_a(a)$ не является единичной. Для доказательства этого факта необходимо знание §§ 28, 29, 30, определения линейного представления (см. § 32, определение 34), понятия равномерной полноты системы функций (см. § 33, A)), а также части доказательства теоремы 32 и видоизмененного доказательства теоремы 33. Из доказательства теоремы 32 следует взять лишь доказательство полноты системы Δ'', где вовсе не используется понятие неприводимого представления. Система Δ'' состоит из всех функций, входящих как элементы матриц во всевозможные линейные представления группы G. Видоизменение доказательства теоремы 33 заключается в том, что вместо системы неприводимых представлений следует рассматривать систему всех представлений и соответственно вместо системы Δ—систему Δ''.

А) Пусть G—бикомпактная группа и $N_1, \ldots, N_k$—такие ее нормальные делители, что факторгруппы G/N_i, $i=1, \ldots, k$, суть группы Ли. Положим $N=N_1\cap\ldots\cap N_k$. Оказывается, что факторгруппа G/N есть также группа Ли.

Предложение это докажем лишь для $k=2$; на случай произвольного конечного числа нормальных делителей оно распространяется очевидным образом. Пусть f_i—естественное гомоморфное отображение группы G на группу Ли $G/N_i=G_i$, $i=1, 2$. Через G^* обозначим прямое произведение групп G_1 и G_2. Каждому элементу $x\in G$ поставим в соответствие элемент $f(x)\in G^*$, положив $f(x)=(f_1(x), f_2(x))$. Непосредственно проверяется, что f есть гомоморфное отображение группы G в группу G^* с ядром гомоморфизма $N=N_1\cap N_2$. Так как G^* есть группа Ли и группа G бикомпактна, то f есть открытое гомоморфное отображение группы G на группу Ли $f(G)\subset G^*$ (см. теорему 62). Таким образом, G/N есть группа Ли.

Т е о р е м а 67. *Пусть G—бикомпактная группа. Оказывается, что в каждой окрестности U единицы этой группы имеется такой нормальный делитель N, что факторгруппа G/N есть* (*аналитическая*) *группа Ли.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 33 для каждого отличного от единицы элемента $a\in G$ существует такое линейное представление f_a группы G, что $f_a(a)$ не есть единичная матрица. Отображение f_a есть гомоморфное отображение группы G в бикомпактную группу матриц, и потому f_a есть открытый гомоморфизм группы G на (аналитическую) группу Ли $f_a(G)=G_a$ (см. теорему 62 и пример 76). Ядро гомоморфизма f_a обозначим через N_a. Таким образом, для каждого отличного от единицы элемента $a\in G$ построен такой нормальный делитель N_a группы G, не содержащий элемента a, что факторгруппа G/N_a есть группа Ли. Так как a не принадлежит замкнутому множеству N_a, то существует окрестность V_a элемента a, не пересекающаяся с N_a. Области V_a, $a\in G\setminus U$, образуют покрытие бикомпактного множества $G\setminus U$. Из этого покрытия выберем конечное покрытие $V_{a_1}, \ldots, V_{a_k}$. Пересечение $N=N_{a_1}\cap\ldots$ $\ldots\cap N_{a_k}$, очевидно, содержится в U, и в силу предложения А) факторгруппа G/N есть (аналитическая) группа Ли.

О п р е д е л е н и е 42. Пусть дана трансфинитная последовательность $G_1, G_2, \ldots$ бикомпактных групп, занумерованных всеми трансфинитными числами, меньшими некоторого трансфинитного числа ϑ, и пусть каждым двум трансфинитным числам α и β, $\alpha<\beta<\vartheta$, поставлен в соответствие гомоморфизм φ_α^β группы G_β на группу G_α с ядром K_β^α. Последовательность $G_1, G_2, \ldots$ с гомоморфизмами φ_α^β мы будем называть *сходящимся рядом длины* ϑ, если выполнены условия:

а) При $\alpha<\beta<\gamma<\vartheta$ имеем $\varphi_\alpha^\beta\varphi_\beta^\gamma=\varphi_\alpha^\gamma$.

b) Если $\delta<\vartheta$ есть трансфинитное число, не имеющее предыдущего, то пересечение всех нормальных делителей K^{α}_{δ}, $\alpha<\delta$, содержит только единицу группы G_δ. Сходящийся ряд будем называть *рядом Ли*, если выполнено условие

c) Группа G_1 и все нормальные делители $K^{\alpha}_{\alpha+1}$ при $a+1<\vartheta$ являются группами Ли.

Теорема 68. *Пусть G—бикомпактная группа и φ—ее гомоморфное отображение на группу Ли G_1. Существует тогда ряд Ли $G_1, G_2, \ldots, G_\vartheta=G$ длины $\vartheta+1$, начинающийся с группы G_1 и кончающийся группой G* (см. определение 42), *причем $\varphi=\varphi^{\vartheta}_{1}$. Если вес пространства G* (см. определение 14) *равен τ, то за ϑ можно принять первое трансфинитное число мощности τ. Таким образом, если группа G имеет счетный базис, то за ϑ можно принять ω (первое бесконечное трансфинитное число). В этом случае трансфинитная последовательность $G_1, G_2, \ldots$ групп, предшествующих G_ω, оказывается обычной бесконечной последовательностью и, кроме того, все группы этой последовательности оказываются группами Ли.*

Доказательство. Некоторую полную систему окрестностей единицы группы G занумеруем в трансфинитную последовательность $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ всеми трансфинитными числами, меньшими некоторого числа ϑ. При этом будем считать, что $\Gamma_0=G$. Ясно, что выбор полной системы окрестностей и ее нумерацию можно произвести так, чтобы ϑ было минимальным трансфинитным числом мощности τ. В силу теоремы 67 в каждой окрестности Γ_α имеется такой нормальный делитель N_α группы G, что фактор-группа G/N_α есть группа Ли. Будем считать, что N_0 есть ядро гомоморфизма φ. Пусть $1\leqslant\beta<\vartheta$. Обозначим через K^{β}_{ϑ} пересечение всех нормальных делителей N_α, $\alpha<\beta$, и положим $G_\beta=G/K^{\beta}_{\vartheta}$, $G_\vartheta=G$ (в случае $\vartheta=\omega$ все группы G_β, $\beta<\omega$, являются в силу A) группами Ли). Естественный гомоморфизм группы G_ϑ на группу G_β обозначим через $\varphi^{\vartheta}_{\beta}$. Так как при $\beta<\gamma<\vartheta$ имеем $K^{\gamma}_{\vartheta}\subset K^{\beta}_{\vartheta}$, то существует и притом единственное гомоморфное отображение φ^{γ}_{β} группы G_γ на группу G_β, удовлетворяющее условию

$$\varphi^{\gamma}_{\beta}\varphi^{\vartheta}_{\gamma}=\varphi^{\vartheta}_{\beta}. \tag{1}$$

Ядром гомоморфизма φ^{γ}_{β} служит $K^{\beta}_{\vartheta}/K^{\gamma}_{\vartheta}=K^{\beta}_{\gamma}$. Применяя к обеим частям соотношения (1) гомоморфизм φ^{β}_{α}, получаем $\varphi^{\beta}_{\alpha}\varphi^{\gamma}_{\beta}\varphi^{\vartheta}_{\gamma}=$ $=\varphi^{\beta}_{\alpha}\varphi^{\vartheta}_{\beta}=\varphi^{\vartheta}_{\alpha}$, а так как $\varphi^{\gamma}_{\alpha}\varphi^{\vartheta}_{\gamma}=\varphi^{\vartheta}_{\alpha}$, то $\varphi^{\beta}_{\alpha}\varphi^{\gamma}_{\beta}=\varphi^{\gamma}_{\alpha}$, $\alpha<\beta<\gamma<\vartheta$. Таким образом (см. (1)), для гомоморфизмов φ^{β}_{α}, $\alpha<\beta<\vartheta+1$, выполнено условие a) определения 42. Покажем, что выполнено и условие b) определения 42. Действительно, если трансфинитное число $\gamma<\vartheta$ не имеет предыдущего, то нормальный делитель K^{γ}_{ϑ}

есть пересечение всех нормальных делителей K_ϑ^β, $\beta<\gamma$. Из этого следует, что в группе G_γ пересечение всех нормальных делителей $K_\gamma^\beta=K_\vartheta^\beta/K_\vartheta^\gamma$, $\beta<\gamma$, содержит лишь единицу. Пересечение всех нормальных делителей K_ϑ^α, $\alpha<\vartheta$, также содержит лишь единицу, так как оно содержится в пересечении окрестностей Γ_0, Γ_1, Γ_2, ... Таким образом, последовательность G_1, G_2, ..., G_ϑ с гомоморфизмами φ_α^β есть сходящийся ряд.

Так как G_1 есть группа Ли, то для доказательства условия с) определения 42 остается показать, что каждое ядро $K_{\alpha+1}^\alpha$ есть группа Ли. Так как $K_\vartheta^{\alpha+1}=K_\vartheta^\alpha\cap N_\alpha$, то при естественном гомоморфизме группы G_ϑ на группу Ли G_ϑ/N_α подгруппа K_ϑ^α переходит в подгруппу, изоморфную группе $K_\vartheta^\alpha/K_\vartheta^{\alpha+1}$. Таким образом, группа $K_{\alpha+1}^\alpha$ изоморфна подгруппе группы Ли G_ϑ/N_α, и потому сама есть группа Ли.

Таким образом, G_1, G_2, ..., G_ϑ есть ряд Ли. Теорема доказана.

Нижеследующее определение 43 будет применяться лишь при построении примеров. Предложения В) и С) вовсе не будут использоваться и приведены здесь лишь для полноты картины.

Определение 43. Пусть последовательность G_1, G_2, ... с гомоморфизмами φ_α^β есть сходящийся ряд длины ϑ. Трансфинитную последовательность $x=(x_1, x_2, \ldots)$ элементов, занумерованных всеми трансфинитными числами, меньшими числа ϑ, будем называть *фундаментальной*, если $x_\alpha\in G_\alpha$, $\alpha<\vartheta$, и если $\varphi_\alpha^\beta x_\beta=x_\alpha$. Множество всех фундаментальных последовательностей обозначим через G. Произведение $z=xy$ двух элементов $x=(x_1, x_2, \ldots)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots)$ множества G определим, положив $z=(z_1, z_2, \ldots)$, где $z_\alpha=x_\alpha y_\alpha$, $\alpha<\vartheta$. Непосредственно видно, что $z\in G$. Оказывается, что в силу этого закона умножения множество G представляет собой группу. Внесем в множество G топологию. Пусть $\alpha<\vartheta$ и U_α — некоторая окрестность в группе G_α. Обозначим через $[U_\alpha]$ множество всех элементов $x=(x_1, x_2, \ldots)$ из G, удовлетворяющих условию $x_\alpha\in U_\alpha$. Совокупность всех множеств вида $[U_\alpha]$, $\alpha<\vartheta$, примем за систему окрестностей в пространстве G. Оказывается, что множество G с определенными в нем алгеброй и топологией является бикомпактной топологической группой. Группу G будем называть *пределом* сходящегося ряда G_1, G_2, ... с гомоморфизмами φ_α^β.

Покажем, что G есть группа. Ассоциативность определенного в G умножения следует из ассоциативности умножения в группах G_α, $\alpha<\vartheta$. Единицей умножения в G служит фундаментальная последовательность $(e_1, e_2, \ldots)$, где e_α есть единица группы G_α. Элементом, обратным к элементу $x=(x_1, x_2, \ldots)$, служит элемент $x^{-1}=(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots)$.

Покажем, что G есть топологическое пространство. Заметим прежде всего, что если U_α есть произвольная окрестность в пространстве G_α и U_β—ее полный прообраз при гомоморфизме φ_α^β, то

$$[U_\alpha]=[U_\beta]. \tag{2}$$

Пусть теперь $a=(a_1, a_2, \ldots)$ и $b=(b_1, b_2, \ldots)$—два различных элемента из G. Так как $a\neq b$, то существует такой номер $\alpha<\vartheta$, что $a_\alpha\neq b_\alpha$, и потому в пространстве G_α найдется окрестность U_α элемента a_α, не содержащая элемента b_α. Окрестность $[U_\alpha]$ в пространстве G содержит элемент a и не содержит элемента b. Пусть, далее, $[U_\alpha]$ и $[V_\beta]$, $\alpha\leqslant\beta$,—две окрестности элемента $a=(a_1, a_2, \ldots)$. Если $\alpha<\beta$, то существует такая окрестность U_β в G_β, что $[U_\alpha]=[U_\beta]$ (см. (2)). Окрестности U_β и V_β элемента a_β в G_β содержат такую окрестность W_β элемента a_β, что $W_\beta\subset U_\beta\cap V_\beta$. Мы имеем, очевидно, $[W_\beta]\subset[U_\alpha]\cap[V_\beta]$. Таким образом, G есть топологическое пространство (см. теорему 3).

Покажем теперь, что G есть топологическая группа. Пусть $a=(a_1, a_2, \ldots)$, $b=(b_1, b_2, \ldots)$—два элемента из G; тогда $ab^{-1}=c=(c_1, c_2, \ldots)$, причем $c_\alpha=a_\alpha b_\alpha^{-1}$. Пусть, далее, $[W_\gamma]$—произвольная окрестность элемента c. Так как W_γ есть окрестность элемента $c_\gamma=a_\gamma b_\gamma^{-1}$ в G_γ, то существуют такие окрестности U_γ и V_γ элементов a_γ и b_γ в G_γ, что $U_\gamma V_\gamma^{-1}\subset W_\gamma$. Мы имеем, очевидно, $[U_\gamma]\cdot[V_\gamma]^{-1}\subset[W_\gamma]$. Таким образом, непрерывность умножения в группе G доказана, и G есть топологическая группа.

Покажем, наконец, что G есть бикомпактное пространство. Для этого составим прямое произведение G^* всех бикомпактных топологических групп G_α, $\alpha<\vartheta$ (см. определение 29). Элемент $u^*\in G^*$ представляет собой трансфинитную последовательность $(u_1, u_2, \ldots)$ элементов, занумерованных всеми трансфинитными числами, меньшими числа ϑ, и удовлетворяющую условию $u_\alpha\in G_\alpha$, $\alpha<\vartheta$. Среди всех таких последовательностей фундаментальные последовательности выделяются дополнительными условиями $\varphi_\alpha^\beta u_\beta=u_\alpha$, $\alpha<\beta<\vartheta$. Так как каждое отдельное условие $\varphi_\alpha^\beta u_\beta=u_\alpha$ выделяет в G^* замкнутое множество, то совокупность G всех фундаментальных последовательностей есть бикомпактное подмножество пространства G^*, и для доказательства бикомпактности пространства G нам достаточно показать, что топология, заданная в G определением 43, совпадает с топологией, индуцированной в G из G^*. Пусть U_{α_i}—окрестность в G_{α_i}, $i=1, \ldots, k$. Окрестность U^* в G^* определим как состоящую из всех элементов $u^*=(u_1, u_2, \ldots)$, удовлетворяющих условиям $u_{\alpha_i}\in U_{\alpha_i}$, $i=1, \ldots, k$. Пусть $a=(a_1, a_2, \ldots)\in U^*\cap G$. Покажем, что существует такая окрестность $[V_\alpha]$ элемента a в G, что $[V_\alpha]\subset U^*$. Число α определим как наибольшее из трансфинитных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Пусть, далее, U_α^i—такая окрестность в G_α, что $[U_{\alpha_i}]=[U_\alpha^i]$ (см. (2)). Все окрестности U_α^i, $i=1, \ldots, k$, содержат элемент a_α, и потому существует в G_α окрестность V_α элемента a_α, содержащаяся в пересечении $U_\alpha^1 \cap \ldots \cap U_\alpha^k$. Легко видеть, что $a \in [V_\alpha] \subset U^*$. Пусть теперь $[W_\alpha]$—заданная окрестность элемента $a=(a_1, a_2, \ldots)$ в пространстве G. Окрестность W^* в G^* определим как содержащую все элементы $u^*=(u_1, u_2, \ldots)$, удовлетворяющие условию $u_\alpha \in W_\alpha$. Очевидно, что $[W_\alpha]=W^* \cap G$. Таким образом, обе упомянутые выше топологии, имеющиеся в G, совпадают, и бикомпактность пространства G доказана.

B) Пусть последовательность $G_1, G_2, \ldots$ с гомоморфизмами φ_α^β образует сходящийся ряд длины ϑ и G—предел этого ряда. Положим $G_\vartheta=G$ и поставим в соответствие каждому элементу $x_\vartheta= =(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots) \in G_\vartheta$ элемент $x_\alpha \in G_\alpha$, $\alpha<\vartheta$. Полученное таким образом отображение группы G_ϑ в группу G_α обозначим через φ_α^ϑ: $\varphi_\alpha^\vartheta(x_\vartheta)=x_\alpha$. Оказывается, что φ_α^ϑ есть гомоморфизм топологической группы G_ϑ *на* топологическую группу G_α и что последовательность $G_1, G_2, \ldots, G_\vartheta$ с гомоморфизмами φ_α^β является сходящимся рядом длины $\vartheta+1$.

То, что φ_α^ϑ является гомоморфизмом топологической группы G_ϑ в топологическую группу G_α и что выполнено соотношение $\varphi_\alpha^\beta\varphi_\beta^\gamma= =\varphi_\alpha^\gamma$ при $\alpha<\beta<\gamma<\vartheta+1$, проверяется непосредственно. Покажем, что пересечение всех нормальных делителей K_ϑ^α, $\alpha<\vartheta$, содержит лишь единицу e_ϑ группы G_ϑ. Если $x_\vartheta \in K_\vartheta^\alpha$ при произвольном $\alpha<\vartheta$, то $\varphi_\alpha^\vartheta(x_\vartheta)=e_\alpha$, т. е. $x_\vartheta=(e_1, e_2, \ldots)=e_\vartheta$. Остается показать, что φ_α^ϑ есть отображение группы G_ϑ на всю группу G_α. Пусть x_α— произвольный элемент группы G_α. При $\beta<\alpha$ положим $x_\beta=\varphi_\beta^\alpha(x_\alpha)$. Пусть уже определены элементы $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots$, занумерованные всеми трансфинитными числами, меньшими числа β, где $\alpha<\beta<\vartheta$. Если β имеет предшествующее трансфинитное число $\beta-1$, то за x_β примем произвольный элемент группы G_β, удовлетворяющий условию $\varphi_{\beta-1}^\beta(x_\beta)=x_{\beta-1}$; такой элемент существует, так как $\varphi_{\beta-1}^\beta(G_\beta)=G_{\beta-1}$. Если же число β не имеет предшествующего, то пусть X_β^γ—полный прообраз элемента x_γ, $\gamma<\beta$, при отображении φ_γ^β. Множества $X_\beta^1, X_\beta^2, \ldots$ бикомпактны и образуют невозрастающую последовательность, ввиду чего их пересечение непусто. За x_β примем элемент, принадлежащий этому пересечению. Построенная трансфинитная последовательность $x_\vartheta=(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_\alpha, \ldots)$ является фундаментальной и удовлетворяет условию $\varphi_\alpha^\vartheta(x_\vartheta)=x_\alpha$. Таким образом, φ_α^ϑ есть отображение на всю группу G_α.

Нижеследующее предложение C) вместе с теоремой 68 показывает, что каждая бикомпактная группа есть предел ряда Ли.

C) Пусть последовательность $G_1, G_2, \ldots, G_\vartheta$ с гомоморфизмами φ_α^β образует сходящийся ряд длины $\vartheta+1$, где трансфинитное число ϑ

не имеет предшествующего. Пусть, далее, G—предел сходящегося ряда G_1, G_2, ... с гомоморфизмами φ_α^β, имеющего длину ϑ и полученного из предыдущего ряда отбрасыванием последнего члена. При $x_\vartheta \in G_\vartheta$ положим $x_\alpha = \varphi_\alpha^\vartheta(x_\vartheta)$, $\alpha < \vartheta$. Тогда $x = (x_1, x_2, \ldots) \in G$. Полученное таким образом отображение $x_\vartheta \to x$ группы G_ϑ в группу G обозначим через φ^ϑ. Оказывается, что φ^ϑ есть изоморфное отображение топологической группы G_ϑ на топологическую группу G.

Непосредственно проверяется, что φ^ϑ есть гомоморфизм топологической группы G_ϑ в топологическую группу G. То, что ядро гомоморфизма φ^ϑ содержит лишь единицу группы G_ϑ, следует из условия b) определения 42. Наконец, если $x = (x_1, x_2, \ldots) \in G$, то обозначим через X_ϑ^α полный прообраз элемента x_α при отображении φ_α^ϑ. Множества X_ϑ^1, X_ϑ^2, ... бикомпактны и образуют невозрастающую трансфинитную последовательность. Элемент x_ϑ, принадлежащий пересечению всех множеств X_ϑ^α, $\alpha < \vartheta$, удовлетворяет условию $\varphi^\vartheta(x_\vartheta) = x$.

Пример 81. Пусть G_1, G_2, ...—обычная бесконечная последовательность бикомпактных групп и φ_i—гомоморфизм группы G_{i+1} на группу G_i. Если i и j—два натуральных числа, $i<j$, то положим $\varphi_i^j = \varphi_i \varphi_{i+1} \cdots \varphi_{j-1}$. Последовательность G_1, G_2, ... с гомоморфизмами φ_i^j образует, очевидно, сходящийся ряд длины ω, и потому определена предельная группа G этого ряда. Будем говорить, что последовательность G_1, G_2, ... с гомоморфизмами φ_1, φ_2, ... *сходится* к группе G. В силу предложения B) группа G может быть присоединена к последовательности G_1, G_2, ..., так что возникающий ряд G_1, G_2, ..., $G_\omega = G$ с гомоморфизмами φ_α^β, $\alpha < \beta \leqslant \omega$, есть сходящийся ряд длины $\omega+1$. Из определения 43 непосредственно следует, что если все группы G_1, G_2, ... имеют счетный топологический базис, то предельная группа G также его имеет. Из теоремы 68 и предложения C) следует, что всякая бикомпактная группа G со счетным базисом является пределом некоторой последовательности G_1, G_2, ... групп Ли с гомоморфизмами φ_1, φ_2, ...

Будем считать, что все группы G_1, G_2, ... конечны, и покажем, что предельная группа $G = G_\omega$ нульмерна. Так как гомоморфизм φ_α^ω группы G_ω есть гомоморфизм на конечную группу, то ядро K_ω^α этого гомоморфизма открыто в G_ω, а так как пересечение всех ядер K_ω^α, $\alpha < \omega$, содержит лишь единицу группы G_ω, то для любой окрестности U единицы группы G_ω найдется настолько большой номер α, что $K_\omega^\alpha \subset U$. Из этого непосредственно следует, что группа G_ω нульмерна (см. § 22, E) и § 16, F)). Легко показать, что пространство G_ω либо конечно, либо гомеоморфно канторову совершенному множеству. Из доказательства теоремы 68 непосредственно вытекает, что каждая нульмерная бикомпактная группа со счетной топологической базой является пределом некоторой последовательности конечных групп.

Пусть теперь D—аддитивная топологическая группа всех действительных чисел, N—ее подгруппа, составленная из всех целых чисел, и $\mathrm{K}=D/N$. Положим $G_i=\mathrm{K}$, $i=1, 2, \ldots$, и определим гомоморфизм φ_i группы G_{i+1} на группу G_i, положив $\varphi_i(x)=s_ix$, где s_i—некоторое натуральное число. Легко видеть, что ядро K_ω^1 гомоморфизма φ_1^ω предельной группы G_ω на группу G_1 является пределом последовательности групп K_2^1, K_3^1, ... с гомоморфизмами φ_2, φ_3, ..., а так как группа K_i^1 конечна (она имеет порядок $s_1s_2\ldots$ $\ldots s_{i-1}$), то группа K_ω^1 нульмерна. Пусть L—связная окрестность нуля группы G_1, не совпадающая со всей группой G_1. Очевидно, что L есть интервал. Полный прообраз V интервала L в группе G_ω при гомоморфизме φ_1^ω гомеоморфен прямому произведению интервала L на пространство K_ω^1. Как будет показано в теореме 69, это устройство группы G_ω типично для всех конечномерных бикомпактных групп.

§ 47. Конечномерные бикомпактные группы

В настоящем параграфе исследуется структура конечномерных бикомпактных групп, именно, показывается, что бикомпактная группа конечной размерности локально распадается в прямое произведение локальной группы Ли и нульмерной группы (см. теорему 69). Из этого непосредственно следует, что в случае локальной связности конечномерная бикомпактная группа есть группа Ли. Наиболее существенным средством для исследования конечномерных бикомпактных групп служит лемма 2, утверждающая, что если φ есть гомоморфизм бикомпактной группы G на группу Ли G^* и g^*—некоторая однопараметрическая подгруппа группы G^*, то в G имеется однопараметрическая подгруппа g, удовлетворяющая условию $\varphi(g(t))=g^*(t)$. Понятие ряда Ли и теорема 68 используются только для доказательства этой леммы и далее нигде не применяются.

В этом и следующем параграфах через $\dim R$ будет обозначаться размерность бикомпактного пространства R.

A) Пусть L и M—две локальные группы Ли, χ—локальный гомоморфизм группы M на группу L и g—однопараметрическая подгруппа группы L. Существует тогда такая однопараметрическая подгруппа h группы M и такое положительное число ε, что при $|t|<\varepsilon$ имеем $g(t)=\chi(h(t))$.

Для доказательства этого предложения введем в группах L и M канонические координаты первого рода. В силу теоремы 63 в этих координатах отображение χ запишется в виде

$$x^i = \sum_{j=1}^{r} q^i_j y^j, \quad i=1, \ldots, n, \tag{1}$$

где ранг матрицы $\|q^i_j\|$ равен n. Пусть $a^1, \ldots, a^n$—компоненты направляющего вектора однопараметрической подгруппы g в выбранной системе координат. Систему уравнений $a^i = \sum_{j=1}^{r} q^i_j b^j$, $i=1, \ldots, n$, можно разрешить относительно неизвестных $b^1, \ldots, b^r$. Из соотношения (1) следует, что однопараметрическая подгруппа h с направляющим вектором $b=(b^1, \ldots, b^r)$ удовлетворяет условию $g(t)=\chi(h(t))$.

Лемма 1. *Пусть G и H—бикомпактные группы, φ—гомоморфное отображение группы H на группу G с ядром гомоморфизма K, представляющим собою группу Ли, и g—однопараметрическая подгруппа группы G с областью определения $|t|<\delta$. Существует тогда в группе H однопараметрическая подгруппа h с областью определения $|t|<\delta$, удовлетворяющая условию $g(t)=\varphi(h(t))$ при $|t|<\delta$.*

Доказательство. Обозначим через L множество всех элементов $g(t)$, где $|t|<\delta$. Очевидно, что L есть локальная группа Ли в силу того закона умножения, который имеется в G. Из этого следует, что множество $M=\varphi^{-1}(L)$ есть локальная группа в силу закона умножения, имеющегося в H. Ниже будет доказано, что M есть локальная группа Ли, но прежде всего покажем, как из этого следует утверждение леммы. В силу предложения А) существуют такое положительное число ε и такая однопараметрическая подгруппа h группы Ли M, что $g(t)=\varphi(h(t))$ при $|t|<\varepsilon$. Так как h есть однопараметрическая подгруппа группы H, то ее можно однозначно продолжить на все значения параметра t. Для продолженной таким образом однопараметрической подгруппы h мы будем иметь $g(t)=\varphi(h(t))$ при $|t|<\delta$.

Докажем теперь, что M есть локальная группа Ли. Пусть P—произвольная локальная группа Ли и D—некоторая каноническая система координат первого рода, определенная в звездной окрестности W' единицы группы P. Выберем такую окрестность W единицы в P, обладающую бикомпактным замыканием, что произведение любых двух ее элементов определено и принадлежит W'. Непосредственно видно, что если x есть отличный от нуля элемент из W, то некоторая его степень определена и не входит в W. Окрестность W единицы локальной группы Ли P, обладающую указанным свойством, будем на протяжении этого абзаца называть *достаточно малой*. Пусть U—такая окрестность единицы группы G, что окрестность $U \cap L$ единицы локальной группы Ли L достаточно мала. Пусть, далее, V—такая окрестность единицы группы H, что $\varphi(V)\subset U$ и что окрестность $K\cap V$ единицы локальной группы Ли K достаточно мала. В силу теоремы 67 существует такой нормальный делитель N группы H, содержащийся в V, что H/N есть группа Ли. Покажем, что $N\cap M$ содержит лишь единицу группы H. Мы имеем $\varphi(N\cap M)\subset U\cap L$, и ввиду того, что $U\cap L$ есть достаточно малая окрестность, множество $\varphi(N\cap M)$ содержит лишь единицу. Таким образом, $N\cap M\subset K$, и потому $N\cap M\subset V\cap K$. Так как окрестность $V\cap K$ достаточно мала, то множество $N\cap M$ содержит лишь единицу. Таким образом, при естественном гомоморфизме группы H на группу Ли H/N локальная группа M изоморфно отображается на локальную подгруппу группы Ли H/N и потому является локальной группой Ли (см. теорему 62).

Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть G—бикомпактная группа, φ—ее гомоморфное отображение на группу Ли G^* и g^*—однопараметрическая подгруппа группы G^* с областью определения $|t|<\delta$. Существует тогда такая однопараметрическая подгруппа g группы G с областью определения $|t|<\delta$, что $\varphi(g(t))=g^*(t)$ при $|t|<\delta$.*

Доказательство. В силу теоремы 68 существует такой ряд Ли $G_1=G^*$, G_2, ..., $G_\vartheta=G$ с гомоморфизмами φ_α^β, что $\varphi_1^\vartheta=\varphi$. Положим $g_1=g^*$ и допустим, что для каждого трансфинитного числа α, меньшего числа $\gamma\leqslant\vartheta$, построена однопараметрическая подгруппа g_α группы G_α с областью определения $|t|<\delta$, так что при $\alpha<\beta<\gamma$ имеем: $\varphi_\alpha^\beta(g_\beta(t))=g_\alpha(t)$, $|t|<\delta$. Если число γ имеет предшествующее $\gamma-1$, то в силу леммы 1 существует в группе G_γ такая однопараметрическая подгруппа g_γ, что $\varphi_{\gamma-1}^\gamma(g_\gamma(t))=g_{\gamma-1}(t)$, $|t|<\delta$. Тогда при любых $\alpha<\beta\leqslant\gamma$ имеем $\varphi_\alpha^\beta(g_\beta(t))=g_\alpha(t)$, $|t|<\delta$. Если же число γ не имеет предшествующего, то обозначим через $X_\gamma^\alpha(t)$ полный прообраз элемента $g_\alpha(t)\in G_\alpha$ при гомоморфизме φ_α^γ. Множества $X_\gamma^1(t)$, $X_\gamma^2(t)$, ... бикомпактны и образуют невозрастающую трансфинитную последовательность. Пересечение всех этих множеств содержит лишь один элемент, так как пересечение нормальных делителей K_γ^α содержит лишь единицу. Этот элемент мы обозначим через $g_\gamma(t)$. При $\alpha<\beta\leqslant\gamma$ мы имеем, очевидно, $\varphi_\alpha^\beta(g_\beta(t))=g_\alpha(t)$, $|t|<\delta$. Покажем, что g_γ есть однопараметрическая подгруппа группы G_γ с областью определения $|t|<\delta$. Пусть t_1 и t_2—два таких действительных числа, что $|t_1|<\delta$, $|t_2|<\delta$, $|t_1+t_2|<\delta$. Мы имеем $\varphi_\alpha^\gamma(g_\gamma(t_1)g_\gamma(t_2))=g_\alpha(t_1)g_\alpha(t_2)=g_\alpha(t_1+t_2)$. Таким образом, $g_\gamma(t_1)g_\gamma(t_2)\in X_\gamma^\alpha(t_1+t_2)$ при произвольном $\alpha<\gamma$ и, следовательно, $g_\gamma(t_1)g_\gamma(t_2)=g_\gamma(t_1+t_2)$. Пусть теперь U_γ—заданная окрестность единицы группы G_γ, V_γ—такая окрестность единицы группы G_γ, что $V_\gamma^2\subset U_\gamma$, и, наконец, $V_\alpha=\varphi_\alpha^\gamma(V_\gamma)$. Так как пересечение всех нормальных делителей K_γ^α, $\alpha<\gamma$, содержит лишь единицу, то найдется такое $\beta<\gamma$, что $K^{\beta}_{\gamma}\subset V_{\gamma}$. Из этого и из того, что $\varphi^{\gamma}_{\beta}(V_{\gamma})=V_{\beta}$, следует, что полный прообраз W_{γ} области V_{β} при гомоморфизме φ^{γ}_{β} содержится в U_{γ}. Если $\varepsilon>0$ настолько мало, что при $|t|<\varepsilon$ имеем $g_{\beta}(t)\in V_{\beta}$, то при $|t|<\varepsilon$ имеем также $g_{\gamma}(t)\in W_{\gamma}\subset U_{\gamma}$. Таким образом, g_{γ} есть однопараметрическая подгруппа группы G_{γ}.

В результате проведенной трансфинитной индукции мы получаем однопараметрическую подгруппу $g=g_{\vartheta}$ группы G_{ϑ}, удовлетворяющую условию $\varphi^{\vartheta}_{1}(g_{\vartheta}(t))=g_{1}(t)$, $|t|<\delta$.

Итак, лемма 2 доказана.

Нижеследующее предложение B) будет использовано в этом параграфе лишь для случая, когда подгруппа H содержит только единицу. В общем случае оно будет использовано в следующем параграфе при изучении транзитивных групп преобразований.

B) Пусть G—бикомпактная группа, H—ее подгруппа, $\Gamma=G/H$—пространство левых смежных классов, $r=\dim\Gamma$—размерность этого пространства (случай $r=\infty$ не исключается) и s—целое неотрицательное число, удовлетворяющее условию $s\leqslant r$. Существует тогда такая окрестность U единицы группы G, что если N есть нормальный делитель группы G, содержащийся в U, то пространство $\Gamma^{*}=G/NH$ левых смежных классов имеет размерность, не меньшую чем s. В случае конечной размерности r можно принять $s=r$, и тогда $\dim\Gamma^{*}\geqslant\dim\Gamma$.

Докажем это. Пусть N—произвольный нормальный делитель группы G и $\Gamma^{*}=G/NH$—пространство левых смежных классов. Каждому элементу $X\in\Gamma$ поставим в соответствие элемент $X^{*}=NX\in\Gamma^{*}$ и обозначим полученное таким образом непрерывное отображение пространства Γ на пространство Γ^{*} через f, $X^{*}=f(X)$. В силу предложения E) § 16 существует такое конечное открытое покрытие $\Omega'=\{W'_1, \ldots, W'_k\}$ пространства Γ, что если отображение f вписано в это покрытие, то размерность пространства Γ^{*} не меньше s. Покажем теперь, как выбрать такую окрестность U единицы группы G, что при $N\subset U$ отображение f вписано в покрытие Ω'. Пусть g—естественное отображение пространства G на пространство G/H и $W_j=g^{-1}(W'_j)$. Области $W_1, \ldots, W_k$ составляют покрытие пространства G. Пусть $x\in G$, j—такой номер, что $x\in W_j$, и V_x—такая окрестность единицы группы G, что $xV_x^2\subset W_j$. Области xV_x, $x\in G$, составляют покрытие пространства G. Выберем из этого покрытия конечное покрытие $x_1V_{x_1}, \ldots, x_hV_{x_h}$ и обозначим через U пересечение $V_{x_1}\cap\cdots\cap V_{x_h}$. Допустим, что $N\subset U$, и покажем, что тогда отображение f вписано в покрытие Ω'. Пусть $A^{*}=aNH$, $a\in G$,—произвольный элемент пространства Γ^{*}. Множество $f^{-1}(A^{*})$ состоит из всех смежных классов вида anH, где $n\in N$. Существует такой номер i, что $a\in x_iV_{x_i}$. Далее, найдется такой номер j, что $x_i V^2_{x_i} \subset W_j$. Для этих номеров имеем $anH \subset x_i V_{x_i} NH \subset \subset x_i V^2_{x_i} H \subset W_j H \subset W_j$; следовательно, $anH \in W'_j$, т. е. $f^{-1}(A^*) \subset W'_j$. Таким образом, отображение f вписано в покрытие Ω', и предложение B) доказано.

Теорема 69. *Любая бикомпактная группа G конечной размерности r локально распадается в прямое произведение r-мерной локальной группы Ли L и своего нульмерного нормального делителя N. Более точно: в группе G существуют подмножество L, гомеоморфное открытому r-мерному кубу, и нульмерный нормальный делитель N, удовлетворяющие следующим условиям:* a) *каждый элемент $l \in L$ перестановочен с каждым элементом $n \in N$;* b) *множество $V = LN$ является окрестностью единицы группы G;* c) *каждый элемент $v \in V$ однозначно записывается в виде $v = ln$, где $l \in L$, $n \in N$, причем l и n являются непрерывными функциями элемента v;* d) *если l_1 и l_2—такие два элемента из L, что $l_1 l_2 \in V$, то $l_1 l_2 \in L$, так что L есть локальная группа в силу закона умножения, имеющегося в G;* e) *локальная группа L есть локальная группа Ли. Из сказанного непосредственно следует, что G/N есть группа Ли. Оказывается, что за N можно принять любой нульмерный нормальный делитель группы G, обладающий тем свойством, что G/N есть группа Ли.*

Доказательство. Пусть φ—гомоморфизм группы G на группу Ли G^* и s—размерность группы G^*. Выберем в G^* максимальную линейно независимую систему $g^*_1, \ldots, g^*_s$ однопараметрических подгрупп, и пусть δ—настолько малое положительное число, что при $|t^i| < \delta$, $i = 1, \ldots, s$, числа $t^1, t^2, \ldots, t^s$ являются координатами точки $g^*_1(t^1) g^*_2(t^2) \ldots g^*_s(t^s)$ (см. § 43, A)). Множество точек этого вида при $|t^i| < \delta$, $i = 1, \ldots, s$, обозначим через L^*_δ. Тогда множество L^*_δ гомеоморфно открытому s-мерному кубу. В силу леммы 2 существует в группе G однопараметрическая подгруппа g_i с областью определения $|t| < \delta$, удовлетворяющая условию $\varphi(g_i(t)) = g^*_i(t)$, $|t| < \delta$. Множество всех точек вида $g_1(t^1) g_2(t^2) \ldots g_s(t^s)$, где $|t^i| < \delta$, $i = 1, \ldots, s$, обозначим через L_δ. Каждой точке $x^* = g^*_1(t^1) g^*_2(t^2) \ldots g^*_s(t^s) \in L^*_\delta$ поставим в соответствие точку $f(x^*) = x = g_1(t^1) g_2(t^2) \ldots g_s(t^s) \in L_\delta$. Отображение f множества L^*_δ на множество L_δ, очевидно, непрерывно, а так как $\varphi(f(x^*)) = x^*$ и отображение φ также непрерывно, то оба отображения f и φ являются взаимно обратными гомеоморфизмами множеств L^*_δ и L_δ. Таким образом, в G содержится множество L_δ, гомеоморфное s-мерному кубу. Из этого следует, в частности, что $r \geqslant s$. Итак, доказано, что если φ есть гомоморфизм бикомпактной группы G на группу Ли, то

$$\dim(\varphi(G)) \leqslant \dim(G). \tag{2}$$

Ядро гомоморфизма φ обозначим через N. Пусть U—такая окрестность единицы группы G, что для всякого нормального делителя K группы G, содержащегося в U, имеем:

$$\dim(G/K) \geqslant \dim(G), \tag{3}$$

и одновременно для всякого нормального делителя N_1 группы N, содержащегося в $N \cap U$, имеем:

$$\dim(N/N_1) \geqslant \dim(N). \tag{4}$$

Такая окрестность U существует в силу предложения В). Пусть теперь $K \subset U$ — такой нормальный делитель группы G, что G/K есть группа Ли (см. теорему 67). Положим $N_1 = N \cap K$; тогда G/N_1 и N/N_1 суть группы Ли (см. § 46, А)). Естественный гомоморфизм группы G на группу G/N_1 обозначим через φ_1. Соотношения (3) и (4) дают тогда:

$$\dim(\varphi_1(G)) \geqslant \dim(G), \tag{5}$$

$$\dim(\varphi_1(N)) \geqslant \dim(N). \tag{6}$$

Так как $\varphi_1(G)$ и $\varphi_1(N)$ суть группы Ли, то в силу соотношений (2), (5), (6) имеем:

$$\dim(\varphi_1(G)) = \dim(G), \tag{7}$$

$$\dim(\varphi_1(N)) = \dim(N). \tag{8}$$

Так как $\varphi_1(G)$ есть группа Ли и $\varphi(G) = \varphi_1(G)/\varphi_1(N)$, то в силу теоремы 63 имеем:

$$\dim(\varphi_1(G)) = \dim(\varphi(G)) + \dim(\varphi_1(N)). \tag{9}$$

Соотношения (7), (8), (9) дают вместе:

$$\dim(G) = \dim(\varphi(G)) + \dim(N). \tag{10}$$

Здесь N — ядро гомоморфизма φ, и соотношение (10) имеет место для произвольного гомоморфизма φ конечномерной бикомпактной группы G на группу Ли. Применяя соотношение (10) к гомоморфизму φ_1, получаем:

$$\dim(G) = \dim(\varphi_1(G)) + \dim(N_1), \tag{11}$$

что вместе с соотношением (7) дает $\dim(N_1) = 0$. Таким образом, в группе G существует такой нульмерный нормальный делитель, факторгруппа по которому есть группа Ли.

Положим $V_\delta = \varphi^{-1}(L_\delta^*)$. Пусть $v \in V_\delta$ и пусть $l = f(\varphi(v))$; тогда $l \in L_\delta$. Так как $\varphi(l) = \varphi(v)$, то элементы l и v принадлежат к одному смежному классу группы G по подгруппе N, и потому $v = ln$, $n \in N$. Это разложение элемента v однозначно, так как из $v = ln$, $l \in L_\delta$, $n \in N$ следует $l = f(\varphi(v))$. Обозначим через L_γ^*, $0 < \gamma < \delta$, совокупность всех элементов $x^* \in L_\delta^*$, для которых $|t^i| < \gamma$, $i = 1, \ldots, s$.

Положим $L_\gamma = f(L^*_\gamma)$ и $V_\gamma = \varphi^{-1}(L^*_\gamma)$; тогда $\overline{V}_\gamma = \varphi^{-1}(\overline{L}^*_\gamma)$. Каждой точке (l, n) прямого произведения $\overline{L}_\gamma \times N$ поставим в соответствие точку $ln \in \overline{L}_\gamma N$. Так как это отображение непрерывно и взаимно однозначно, а пространство $\overline{L}_\gamma \times N$ бикомпактно, то отображение $(l, n) \to ln$ является гомеоморфизмом при любом $\gamma < \delta$. Из этого следует, что соотношение $v = ln$ определяет элементы $l \in L_\delta$, $n \in N$ как непрерывные функции элемента $v \in V_\delta$.

Допустим теперь, что $\dim(N) = 0$ (такие нульмерные нормальные делители группы G, факторгруппы по которым суть группы Ли, существуют в силу доказанного выше). Из равенства $\dim(N) = 0$ следует, что $s = r$ (см. (10)), так что множество L_γ гомеоморфно r-мерному открытому кубу. Покажем, что при $\dim(N) = 0$ элементы $l \in L_\delta$ и $n \in N$ перестановочны между собой. Пусть n — фиксированный элемент из N. Каждому элементу $l \in L_\delta$ поставим в соответствие элемент $\psi(l) = l^{-1}nl$. Так как отображение ψ множества L_δ в множество N непрерывно и множество N не содержит связных подмножеств, то $\psi(L_\delta) = n$. Таким образом, $ln = nl$. Пусть γ настолько мало, что $L^{*2}_\gamma \subset L^*_\delta$, а l_1 и l_2 — два элемента из L_γ. В силу ранее доказанного имеем $l_1 l_2 = ln$, причем l и n суть однозначные непрерывные функции элементов l_1 и l_2. Функция $n = n(l_1, l_2)$ дает непрерывное отображение пространства $L_\gamma \times L_\gamma$ в пространство N, а так как $L_\gamma \times L_\gamma$ связно, а N нульмерно, то функция $n(l_1, l_2)$ постоянна. Так как $n(e, e) = e$, то $n(l_1, l_2) = e$ при произвольных l_1 и l_2 из L_γ. Таким образом, $l_1 l_2 \in L_\delta$. При $l_1 l_2 \in V_\gamma$ имеем: $l_1 l_2 \in V_\gamma \cap L_\delta = L_\gamma$. Таким образом, L_γ есть локальная группа, и так как отображение φ этой группы на локальную группу Ли L^*_γ гомоморфно и гомеоморфно, то L_γ есть локальная группа Ли.

Положим $L = L_\gamma$. Тогда для множества L, гомеоморфного r-мерному открытому кубу, и нульмерного нормального делителя N выполнены условия а)—е) формулировки теоремы. При доказательстве было установлено, что за N может быть принят любой нульмерный нормальный делитель группы G, факторгруппа по которому есть группа Ли; существование таких нульмерных нормальных делителей также было установлено. Таким образом, теорема 69 доказана.

Т е о р е м а 70. *Локально связная бикомпактная группа конечной размерности есть группа Ли.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — локально связная бикомпактная группа конечной размерности. В силу теоремы 69 существует окрестность V единицы группы G, гомеоморфная прямому произведению открытого куба L и нульмерного нормального делителя N группы G. Из локальной связности группы G следует локальная связность пространства V. Так как N — нульмерное бикомпактное пространство, то пространство $L \times N$ может быть локально связным лишь при условии, что пространство N состоит из конечного числа точек. В этом случае множество L представляет собой окрестность единицы группы G, и так как L есть локальная группа Ли (см. теорему 69), то G есть группа Ли.

Теорема 71. *Если пространство бикомпактной группы есть многообразие* (см. § 45), *то группа эта есть группа Ли.*

Доказательство. Так как многообразие всегда конечномерно и локально связно, то теорема 71 является непосредственным следствием теоремы 70.

Пример 82. Пусть G—связная бикомпактная группа конечной размерности r и Z—ее нульмерный нормальный делитель. Покажем, что Z есть центральный нормальный делитель группы G. Одновременно покажем, что существует такое гомоморфное взаимно однозначное отображение ψ некоторой связной r-мерной группы Ли $\hat{L}$ в G, что $\psi(\hat{L})$ есть всюду плотное подмножество пространства G.

Пусть N_1—такой нульмерный нормальный делитель группы G, что G/N_1 есть группа Ли (см. теорему 69). Так как группа $Z/(Z\cap N_1)$ изоморфна подгруппе группы Ли G/N_1, то $Z/(Z\cap N_1)$ есть конечная группа (см. (10)). Так как группа ZN_1/N_1 изоморфна конечной группе $Z/(Z\cap N_1)$, то группа ZN_1/N_1 конечна, и потому группа $N=ZN_1$ нульмерна. Пусть $L\subset G$—такая локальная группа Ли размерности r, что окрестность $V=LN$ распадается в прямое произведение локальной группы Ли L и нормального делителя N (см. теорему 69). Пусть, далее, U_1—некоторая связная симметричная окрестность единицы в L и $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$—убывающая последовательность областей из L, составляющая базис пространства L в единице. Положим $\hat{L}=U_1\cup U_1^2\cup\ldots\cup U_1^m\cup\ldots$ Непосредственно проверяется, что $\hat{L}$ есть подгруппа абстрактной группы G. Зададим в $\hat{L}$ топологию, приняв за полную систему окрестностей единицы последовательность $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ (см. теорему 9). Полученная таким образом топологическая группа $\hat{L}$ связна и в качестве одной из окрестностей единицы имеет множество U_1 с топологией, индуцированной в U_1 из G. Так как U_1 есть локальная группа Ли, то $\hat{L}$ есть группа Ли. Ставя в соответствие элементу x группы Ли $\hat{L}$ элемент $\psi(x)=x$ группы G, мы, очевидно, получаем взаимно однозначное гомоморфное отображение ψ группы Ли $\hat{L}$ в группу G. Покажем теперь, что множество $\hat{L}$ всюду плотно в G. Для этого достаточно показать, что, какова бы ни была окрестность W единицы группы G, множество $\hat{L}W$ совпадает с G. Пусть K—такой содержащийся в W нормальный делитель группы G, что G/K есть группа Ли. Тогда и для нормального делителя $N_2=N\cap K$ группа G/N_2 есть группа Ли.

Пусть φ—естественный гомоморфизм группы G на группу G/N_2. Тогда $\varphi\psi$ есть гомоморфизм группы $\hat{L}$ в группу G/N_2. Так как группа G/N_2 связна и размерности групп $\hat{L}$ и G/N_2 равны между собой, то $\varphi\psi(\hat{L})=G/N_2$. Из этого следует, что $\hat{L}N_2=G$, а так как $N_2\subset W$, то $\hat{L}W=G$.

Каждый элемент множества U_1 перестановочен с каждым элементом множества N. Отсюда следует, что каждый элемент множества $\hat{L}$ перестановочен с каждым элементом множества N. Так как замыкание множества $\hat{L}$ совпадает с G, то и каждый элемент группы G перестановочен с каждым элементом из N. Итак, доказано, что N есть центральный нормальный делитель группы G, а ввиду того, что $Z\subset N$, нормальный делитель Z также является центральным.

§ 48. Транзитивные бикомпактные группы преобразований конечномерных пространств

Здесь в первую очередь доказывается, что эффективная транзитивная бикомпактная группа преобразований (см. § 24) конечномерного пространства сама имеет конечную размерность, а затем изучается локальная структура преобразуемого пространства. Оказывается, что у каждой точки преобразуемого пространства существует окрестность, гомеоморфная прямому произведению конечномерного открытого куба и нульмерного пространства. При этом устанавливается, что если это нульмерное пространство состоит из конечного числа точек, то группа преобразований есть группа Ли. Таким образом, получается, что если преобразуемое пространство локально связно, то группа преобразований есть группа Ли.

А) Пусть G—нульмерная бикомпактная группа и H—ее подгруппа. Тогда пространство $\Gamma=G/H$ левых смежных классов также нульмерно.

Докажем это.

В силу предложения В) § 47 существует такая окрестность U единицы группы G, то если нормальный делитель N группы G содержится в U, то пространство $\Gamma^*=G/NH$ левых смежных классов имеет размерность, не меньшую чем размерность пространства Γ. В силу теоремы 17 и предложения F) § 16 существует открытый нормальный делитель N группы G, содержащийся в U. Поскольку нормальный делитель N является открытым, подгруппа NH также открыта, и потому пространство G/NH состоит из конечного числа точек и, следовательно, имеет размерность нуль. Таким образом, размерность пространства Γ также равна нулю.

В) Пусть N—бикомпактная группа, φ—ее гомоморфное отображение и N'—компонента единицы. Тогда компонента единицы группы $\varphi(N)$ есть $\varphi(N')$.

Для доказательства обозначим через $\varphi(N)'$ компоненту единицы группы $\varphi(N)$. Так как $\varphi(N')$ есть связная группа, то $\varphi(N')\subset\varphi(N)'$. Допустим, что $\varphi(N')\neq\varphi(N)'$; тогда группа $\varphi(N)/\varphi(N')$ (см. § 22, A)) имеет своей компонентой единицы группу $\varphi(N)'/\varphi(N')$, отличную от единичной, и потому не нульмерна. С другой стороны, группа $\varphi(N)/\varphi(N')$ изоморфна некоторой факторгруппе группы N/N' и потому нульмерна (см. A)). Таким образом, $\varphi(N')=\varphi(N)'$.

Теорема 72. *Бикомпактная эффективная транзитивная группа G преобразований конечномерного пространства Γ имеет конечную размерность.*

Доказательство. Пусть H—стабильная подгруппа группы преобразований G. Тогда H не содержит нормальных делителей группы G, отличных от $\{e\}$, и пространство G/H левых смежных классов гомеоморфно пространству Γ, а потому имеет конечную размерность. В силу предложения В) § 47 существует такая окрестность U единицы группы G, что для всякого нормального делителя N группы G, входящего в U, имеем:

$$\dim(G/NH)\geqslant\dim(G/H). \tag{1}$$

Покажем, что если $N\subset U$ и G/N есть группа Ли, то

$$\dim(G/NH)=\dim(G/H). \tag{2}$$

Пусть φ—естественный гомоморфизм группы G на группу Ли $G^*=G/N$ и $H^*=\varphi(H)$. Очевидно, что пространства G/NH и G^*/H^* гомеоморфны между собой. Для группы Ли G^* и ее подгруппы H^* выберем такую систему однопараметрических подгрупп $g_1^*, \ldots$ $\ldots, g_n^*, \ldots, g_r^*$, чтобы для области определения W_ε, $|t^i|<\varepsilon$, $i=1, \ldots, r$, множество $M_\varepsilon=W_\varepsilon\cap H^*$ определялось соотношениями $t^1=\ldots=t^n=0$ (см. § 44, A)). Здесь n есть размерность пространства G^*/H^*. Множество всех элементов вида $g_1^*(t^1)\ldots g_n^*(t^n)$, $|t^i|<\varepsilon$, $i=1, \ldots, n$, обозначим через Λ_ε^*; тогда каждый смежный класс X^* группы G^* по подгруппе H^* пересекается с Λ_ε^* не более чем в одной точке. Пусть g_i—такая однопараметрическая подгруппа группы G с областью определения $|t|<\varepsilon$, что $\varphi(g_i(t))=g_i^*(t)$ при $|t|<\varepsilon$ (см. § 47, лемма 2). Точке $x^*=g_1^*(t^1)\ldots g_n^*(t^n)\in\Lambda_\varepsilon^*$ поставим в соответствие точку $x=f(x^*)=g_1(t^1)\ldots g_n(t^n)$ и положим $\Lambda_\varepsilon=f(\Lambda_\varepsilon^*)$. Очевидно, что $\varphi f(x^*)=x^*$, и потому f есть гомеоморфное отображение множества Λ_ε^* на множество Λ_ε, а φ—обратное ему гомеоморфное отображение множества Λ_ε на множество Λ_ε^*. Если теперь x—произвольная точка из Λ_ε, то смежный класс xH пересекается с множеством Λ_ε только в точке x. Действительно, если бы существовала отличная от x точка пересечения множеств xH и Λ_ε, то ввиду взаимной однозначности отображения φ множества Λ_ε на множество Λ_ε^* существовали бы по крайней мере две точки пересечения смежного класса $\varphi(x)H^*$ с множеством Λ_ε^*, что невозможно. Таким образом, множество всех смежных классов вида xH, где $x\in\Lambda_\varepsilon$, гомеоморфно открытому кубу Λ_ε^* размерности n, и потому $\dim(G^*/H^*)\leqslant\dim(G/H)$. Из последнего неравенства и соотношения (1) следует равенство (2), так как пространства G/NH и G^*/H^* гомеоморфны между собой.

Так как группы $G^*=\varphi(G)$ и $H^*=\varphi(H)$ суть группы Ли, то равенство (2) можно переписать в виде

$$\dim(\varphi(G))-\dim(\varphi(H))=\dim(\Gamma). \tag{3}$$

Соотношение это выполнено при условии, что ядро N гомоморфизма φ содержится в U и что $\varphi(G)$ есть группа Ли.

Зафиксируем какой-либо нормальный делитель $N\subset U$, фактор-группа G/N по которому есть группа Ли (см. теорему 67), и покажем, что размерность этого нормального делителя равна нулю. Положим $P=N\cap H$, и пусть V—произвольная окрестность единицы группы G. Пусть $K\subset V$—такой нормальный делитель группы G, что G/K есть группа Ли. Положим $N_1=N\cap K$; тогда G/N_1 также есть группа Ли (см. § 46, А)). Обозначим через φ_1 естественное гомоморфное отображение группы G на группу G/N_1. Так как $N_1\subset U$, то в силу (3) мы имеем:

$$\dim(\varphi_1(G))-\dim(\varphi_1(H))=\dim(\Gamma). \tag{4}$$

Вычитая равенство (3) из равенства (4), получаем:

$$\dim(\varphi_1(G))-\dim(\varphi(G))=\dim(\varphi_1(H))-\dim(\varphi(H)). \tag{5}$$

Так как $\varphi_1(G)$ есть группа Ли и $\varphi(G)=\varphi_1(G)/\varphi_1(N)$, то $\dim(\varphi_1(G))-$ $-\dim(\varphi(G))=\dim(\varphi_1(N))$. Точно так же $\dim(\varphi_1(H))-\dim(\varphi(H))=$ $=\dim(\varphi_1(P))$. Вместе с соотношением (5) это дает $\dim(\varphi_1(N))=$ $=\dim(\varphi_1(P))$. Из того, что группы Ли $\varphi_1(N)$ и $\varphi_1(P)$ имеют одинаковую размерность и $\varphi_1(P)\subset\varphi_1(N)$, следует, что компоненты $\varphi_1(N)'$ и $\varphi_1(P)'$ их единиц совпадают. Пусть N' и P'—компоненты единиц групп N и P. Так как $\varphi_1(N')=\varphi_1(N)'$ (см. В)), то полный прообраз группы $\varphi_1(N)'$ при гомоморфизме φ_1 есть $N'N_1$. Точно так же из равенства $\varphi_1(P')=\varphi_1(P)'$ (см. В)) следует, что полный прообраз группы $\varphi_1(P)'$ при гомоморфизме φ_1 равен $P'N_1$. Так как $\varphi_1(N)'=$ $=\varphi_1(P)'$, то $N'N_1=P'N_1$, откуда следует, что $N'\subset P'V$ и $P'\subset N'V$. Ввиду того, что эти включения имеют место при произвольном выборе окрестности V, из них следует равенство $N'=P'$. Так как N' есть компонента единицы нормального делителя N группы G, то N' также есть нормальный делитель группы G. Таким образом, $N'=P'$ есть содержащийся в H нормальный делитель группы G, и потому N' содержит лишь единицу, т. е. N имеет размерность нуль.

Покажем, наконец, что размерность группы G конечна. Допустим противоположное, и пусть s—натуральное число, большее чем $\dim(G/N)$. В силу предложения В) § 47 окрестность V можно выбрать так, что $\dim(G/N_1)\geqslant s$. Так как G/N_1 есть группа Ли, то $\dim(G/N_1)=\dim(G/N)+\dim(N/N_1)$, что невозможно, так как $\dim(N/N_1)=0$ (см. А)).

Итак, теорема 72 доказана.

Теорема 73. *Пусть G—бикомпактная эффективная транзитивная группа преобразований конечномерного пространства* Γ. *Тогда каждая точка α пространства* Γ *имеет окрестность* Π, *гомеоморфную прямому произведению $\Lambda\times\Theta$ открытого куба Λ и нульмерного бикомпактного пространства Θ, допускающего нульмерную бикомпактную транзитивную группу преобразований. В случае, если пространство Θ содержит лишь конечное число точек, группа G есть группа Ли.*

Доказательство. Пусть H—стабильная подгруппа группы преобразований G относительно точки α. Так как существует гомеоморфное отображение пространства G/H левых смежных классов на пространство Γ, при котором смежный класс H переходит в точку α, то при доказательстве теоремы мы будем рассматривать окрестность смежного класса H в пространстве G/H. В силу теоремы 72 группа G имеет некоторую конечную размерность r, и потому некоторая окрестность V единицы группы G распадается в прямое произведение локальной группы Ли L и нульмерного нормального делителя N группы G (см. теорему 69). Пусть $P=N\cap H$. Так как при естественном гомоморфизме группы G на группу G/N подгруппа H переходит в подгруппу группы Ли G/N, изоморфную факторгруппе H/P, то H/P есть группа Ли. Ввиду нульмерности нормального делителя N содержащийся в нем нормальный делитель P группы H нульмерен. Таким образом, в силу теоремы 69 существует окрестность W единицы группы H, распадающаяся в прямое произведение локальной группы Ли M и нормального делителя P. Без ограничения общности можно предположить, что $W\subset V$. Из этого в силу связности множества M и нульмерности множества N следует, что $M\subset L$, и потому M есть локальная подгруппа локальной группы Ли L. Пусть D^*—канонические координаты второго рода с областью определения L_ε, $|t^i|<\varepsilon$, $i=1, \ldots, r$, построенные для группы L и ее подгруппы M таким образом, что множество $M_\varepsilon=L_\varepsilon\cap M$ выделяется соотношениями $t^1=t^2=\ldots=t^n=0$ (см. § 44, А)). Пусть, далее, Λ_ε—множество, выделяемое в L_ε соотношениями $t^{n+1}=\ldots=t^r=0$. Каждый элемент окрестности $L_\varepsilon N$ единицы группы G однозначно записывается в виде λmn, где $\lambda\in\Lambda_\varepsilon$, $m\in M_\varepsilon$, $n\in N$. Точно так же каждый элемент окрестности $M_\varepsilon P$ единицы группы H однозначно записывается в виде mp, где $m \in M_\varepsilon$, $p \in P$. Если $\lambda_1 m_1 n_1$ и $\lambda_2 m_2 n_2$—два элемента из $L_\varepsilon N$, принадлежащие одному левому смежному классу по подгруппе H, то при достаточно малом ε мы имеем $\lambda_2 m_2 n_2 = \lambda_1 m_1 n_1 \cdot mp$, где $m \in M$, $p \in P$. Таким образом, элементы $\lambda_1 m_1 n_1$ и $\lambda_2 m_2 n_2$ тогда и только тогда принадлежат одному левому смежному классу по подгруппе H, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, а элементы n_1 и n_2 принадлежат одному смежному классу группы N по подгруппе P. Из этого непосредственно следует, что окрестность Π элемента H в пространстве G/H, составленная из всех левых смежных классов, пересекающихся с $L_\varepsilon N$, гомеоморфна прямому произведению открытого куба Λ_ε и пространства N/P.

В силу предложения А) пространство N/P имеет размерность нуль. Допустим, что пространство N/P содержит лишь конечное число точек, и покажем, что в этом случае G есть группа Ли. В силу дискретности пространства N/P подгруппа P открыта в пространстве N и потому существует в G такая окрестность U единицы, что $U \cap N = P \cap U$. Пусть $K \subset U$—такой нормальный делитель группы G, что G/K есть группа Ли (см. теорему 67). Из того, что G/K есть группа Ли, следует, что $N/(N \cap K)$ есть группа Ли, а так как группа эта нульмерна (см. А)), то $N \cap K$ есть область в N. Из включения $K \subset U$ и равенства $N \cap U = P \cap U$ следует, что $N \cap K = P \cap K$. Таким образом, в H содержится нормальный делитель $N \cap K$ группы G, и потому $N \cap K$ содержит лишь единицу. Таким образом, единица группы N есть открытое множество в N, и, следовательно, N содержит лишь конечное число элементов. Из этого следует, что L_ε есть окрестность единицы группы G и так как L_ε есть локальная группа Ли, то G есть группа Ли.

Таким образом, теорема 73 доказана.

Т е о р е м а 74. *Бикомпактная транзитивная эффективная группа G преобразований конечномерного локально связного пространства* Γ *всегда есть группа Ли.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 73 существует окрестность Π элемента $\alpha \in \Gamma$, гомеоморфная прямому произведению открытого куба Λ на нульмерное бикомпактное пространство Θ. Бикомпактное пространство Θ или состоит из конечного числа точек или же содержит предельную точку. Второй случай в силу нульмерности пространства Θ и локальной связности пространства Π невозможен. Итак, пространство Θ содержит лишь конечное число точек, и G есть группа Ли (см. теорему 73).

Таким образом, теорема 74 доказана.

Т е о р е м а 75. *Бикомпактная транзитивная эффективная группа G преобразований многообразия* Γ (см. § 45) *всегда есть группа Ли.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как многообразие всегда конечномерно и локально связно, то теорема 75 является непосредственным следствием теоремы 74.

Пример 83. Пусть G—эффективная транзитивная бикомпактная группа преобразований пространства Γ, гомеоморфного n-мерной сфере. Возникает вопрос, существует ли такое гомеоморфное отображение пространства Γ на единичную сферу S^n евклидова $(n+1)$-мерного пространства, при котором группа G переходит в некоторую группу движений сферы S^n? В силу теоремы 75 группа G есть группа Ли, и вопрос, таким образом, приводится к решению некоторой задачи теории групп Ли. Насколько мне известно, вопрос этот до сих пор не решен.

Пример 84. Пусть G—эффективная транзитивная связная бикомпактная группа преобразований конечномерного пространства Γ. Покажем, что стабильная подгруппа H группы преобразований G есть группа Ли. Так как группа G имеет конечную размерность (см. теорему 72), то в ней существует такой нульмерный нормальный делитель N, что G/N есть группа Ли (см. теорему 69). Из связности группы G следует (см. пример 82), что N есть центральный нормальный делитель, и потому пересечение его со стабильной подгруппой H содержит лишь единицу. Таким образом, при естественном гомоморфизме группы G на группу Ли G/N стабильная подгруппа H изоморфно отображается на некоторую подгруппу группы Ли, и потому сама является группой Ли.

ЛОКАЛЬНО ИЗОМОРФНЫЕ ГРУППЫ

Основной целью настоящей главы является детальное изучение связей в целом между группами, изоморфными локально. Важность этого вопроса можно продемонстрировать хотя бы на примере групп Ли. Теория групп Ли почти целиком направлена на изучение их локальных свойств. Эта теория сводит исследование локальных свойств групп Ли к исследованию *алгебр Ли* (см. главу 10), являющихся чисто алгебраическими объектами. Изучение групп Ли в целом требует топологических методов и, в частности, выяснения связей между локально изоморфными группами. Этот вопрос уже был затронут раньше (см. теорему 18). В настоящей главе для групп более узкого класса (содержащего, однако, все связные группы Ли) будут получены более глубокие результаты. Для каждой группы G будет построена такая группа $\widetilde{G}$, что всякая группа, локально изоморфная группе G, изоморфна (в целом) группе $\widetilde{G}/N$, где N есть дискретный (и, следовательно, центральный, см. теорему 15) нормальный делитель группы $\widetilde{G}$. Группа $\widetilde{G}$ называется *универсальной накрывающей* для группы G. Она также является универсальной накрывающей для всех групп, локально изоморфных группе G, и однозначно определена классом локально изоморфных между собой групп.

Результат этот в основном сводит изучение всего класса локально изоморфных между собой групп к изучению одной группы— универсальной накрывающей для групп этого класса. Он, однако, отнюдь не сводит изучения группы в целом к ее локальному изучению.

Построение универсальной накрывающей группы использует топологический аппарат: *фундаментальную группу* и *накрывающее пространство*. Так как эти понятия, введенные еще Пуанкаре, весьма важны и интересны сами по себе, то я останавливаюсь на них несколько больше, чем это было бы необходимо для теории топологических групп.

Результаты настоящей главы, относящиеся к теории топологических групп, формально принадлежат Шрейеру [40, 41], который впервые точно формулировал их, но они были известны и до работы Шрейера и использовались, например, в работах Г. Вейля [45].

§ 49. Фундаментальная группа

Фундаментальная группа топологического пространства является одним из важнейших его инвариантов. Она, вообще говоря, некоммутативна и отражает весьма важные топологические свойства пространства. В этом параграфе будет дано определение фундаментальной группы и выделен тот класс топологических пространств, для которых построение фундаментальной группы и накрывающих пространств наиболее естественно. Этот класс состоит из всех линейно связных, локально связных и локально односвязных пространств.

A) Говорят, что в топологическом пространстве R имеется *путь* f, если задана непрерывная функция f действительного параметра t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, ставящая в соответствие каждому числу t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определенную точку $f(t)$ пространства R. Точка $f(0)$ называется *началом* пути f, а точка $f(1)$—его *концом*. Путь f *соединяет* точку $f(0)$ с точкой $f(1)$ в пространстве R. Путь f называется *единичным*, если функция $f(t)$ имеет постоянное значение. Путь f^{-1}, *противоположный* или *обратный* к данному пути f, задается функцией $f(1-t)$ параметра t. Если заданы два пути f и g, причем конец первого пути совпадает с началом второго, $f(1) = g(0)$, то можно определить *произведение* $h = fg$ путей f и g, считая, что при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ имеем $h(t) = f(2t)$, при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ имеем $h(t) = g(2t-1)$.

Путь f называется *замкнутым*, если его начало и конец совпадают.

Не следует думать, что совокупность путей, заданных в пространстве R, образует группу. Прежде всего, умножение не всегда возможно. Далее, произведение не удовлетворяет условию ассоциативности, а произведение пути f на обратный путь f^{-1} не есть единичный путь. Кроме того, произведение пути f на единичный путь не есть путь f, а представляет собой уже нечто новое. В силу всех этих обстоятельств, да и по существу дела, пути сами по себе мало будут занимать нас. Важными для нас окажутся *классы эквивалентных* или *гомотопных* между собой путей. Некоторая совокупность этих классов уже составит группу, именно, *фундаментальную группу*.

B) Два пути f и g, имеющиеся в пространстве R, называются *гомотопными* или *эквивалентными*, в обозначениях: $f \sim g$, если существует непрерывная деформация пути f, не смещающая его концов и переводящая путь f в путь g. Более полно это определение выражается следующим образом: пути f и g называются эквивалентными, если существует такая функция $\varphi(s, t)$, непрерывно зависящая от пары действительных параметров s и t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, что $\varphi(0, t) = f(t)$, $\varphi(1, t) = g(t)$, $\varphi(s, 0) = f(0) = g(0)$, $\varphi(s, 1) =$

$=f(1)=g(1)$. Полагая $\varphi_s(t)=\varphi(s, t)$, мы получаем путь φ_s, непрерывно зависящий от параметра s. Мы будем говорить, что непрерывно меняющийся путь φ_s осуществляет *деформацию* пути f в путь g. Замкнутый путь f называют *гомотопным* или *эквивалентным нулю*, $f\sim 0$, если он гомотопен единичному пути.

Нетрудно видеть, что для введенного здесь понятия эквивалентности путей имеют место рефлексивность: $f\sim f$; симметрия: если $f\sim g$, то $g\sim f$; транзитивность: если $f\sim g$ и $g\sim h$, то $f\sim h$. Класс всех путей, эквивалентных пути f, будем обозначать через $\{f\}$. Нетрудно видеть, что если $f\sim f'$ и $g\sim g'$, причем произведение fg определено, то произведение $f'g'$ также определено и

$$fg\sim f'g';$$

кроме того,

$$f^{-1}\sim f'^{-1}.$$

C) Если f—произвольный путь, а e и e'—два таких единичных пути, что $e(1)=f(0)$, $f(1)=e'(0)$, то

$$ef\sim f, \tag{1}$$

$$fe'\sim f. \tag{2}$$

Если f, g и h—три таких пути, что $f(1)=g(0)$, $g(1)=h(0)$, то

$$(fg)h\sim f(gh). \tag{3}$$

Если f—произвольный путь, то

$$ff^{-1}\sim 0, \tag{4}$$

$$f^{-1}f\sim 0. \tag{5}$$

Для доказательства предложения C) сделаем одно общее замечание. Пусть k—произвольный путь, I—числовой отрезок, $0\leqslant t\leqslant 1$, и χ—непрерывное отображение отрезка I в себя, для которого $\chi(0)=0$. Тогда функция $k\chi$, определяемая соотношением $k\chi(t)=k(\chi(t))$, также есть путь, начинающийся в точке $k(0)$. Оказывается, что если $\chi(1)=1$, то

$$k\chi\sim k; \tag{6}$$

если же $\chi(1)=0$, то

$$k\chi\sim 0. \tag{7}$$

Функция $\varphi(s, t)=k(st+(1-s)\chi(t))$ дает при $\chi(1)=1$ деформацию пути $k\chi$ в путь k. Функция $\varphi(s, t)=k((1-s)\chi(t))$ дает при $\chi(1)=0$ деформацию пути $k\chi$ в единичный путь. Таким образом, соотношения (6) и (7) верны.

Для доказательства соотношения (1) отображение χ определим следующим образом: отрезок $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ переводится в 0, а отрезок

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ линейно отображается на отрезок $[0, 1]$. Тогда $f\chi = ef$, и соотношение (1) верно (см. (6)). Аналогично подбирается отображение χ для доказательства соотношения (2).

Для доказательства соотношения (3) положим $k = f(gh)$ и отображение χ определим следующим образом: отрезок $[0, {}^1/_4]$ линейно отображается на отрезок $[0, {}^1/_2]$, отрезок $[{}^1/_4, {}^1/_2]$ накладывается на отрезок $[{}^1/_2, {}^3/_4]$, а отрезок $[{}^1/_2, 1]$ линейно отображается на отрезок $[{}^3/_4, 1]$. Тогда $k\chi = (fg)h$, и соотношение (3) верно (см. (6)).

Для доказательства соотношения (4) отображение χ определим следующим образом: отрезок $[0, {}^1/_2]$ линейно отображается на отрезок $[0, 1]$, а отрезок $[{}^1/_2, 1]$ линейно отображается на отрезок $[1, 0]$. Тогда $f\chi = ff^{-1}$, и соотношение (4) верно (см. (7)). Так как соотношение (4) верно для произвольного пути f, то в нем путь f можно заменить на f^{-1}, и из соотношения (4) мы получаем соотношение (5).

Итак, предложение C) доказано.

Нижеследующее определение D) выделяет тот класс топологических пространств, для которых рассмотрение фундаментальной группы и накрывающих пространств наиболее естественно.

D) Пространство R называется *линейно связным*, если каждые две его точки можно соединить путем. Пространство R называется *локально связным*, если для каждой окрестности U произвольной точки $p \in R$ найдется такая окрестность $V \subset U$ той же точки, что точку p можно связать с любой точкой $x \in V$ путем, проходящим в U. Пространство R называется *локально односвязным*, если для произвольной окрестности U любой его точки p найдется такая окрестность $V \subset U$ той же точки p, что всякий замкнутый путь, начинающийся в p и проходящий в V, гомотопен нулю в U. Оказывается, что в локально связном пространстве R существует базис, составленный из линейно связных окрестностей.

Докажем последнее утверждение. Пусть a — произвольная точка и U — произвольная ее окрестность. Обозначим через W множество всех точек из U, которые можно связать с a путями, проходящими в U. Множество W, очевидно, линейно связно. Покажем, что оно открыто. Пусть $p \in W$ и V — такая окрестность точки p, содержащаяся в U, что каждую точку x из V можно связать с p путем, проходящим в U. Такая окрестность точки p существует в силу локальной связности пространства R. Так как точку a можно связать с точкой p путем, проходящим в U, а точку p можно связать с точкой x путем, проходящим в U, то произведение этих путей связывает точку a с точкой x, и потому $V \subset W$. Таким образом, W есть область.

Следует отметить, что данное здесь определение локальной связности отличается от приведенного в § 15, H). Всюду в дальнейшем будет использоваться данное здесь определение.

Определение 44. Пусть R—линейно связное топологическое пространство (см. D)) и p—некоторая его точка. Обозначим через P совокупность всех замкнутых путей пространства R, начинающихся в p. Множество P разобьем на классы, относя к каждому классу все эквивалентные между собой пути (см. B)). Множество получаемых таким образом классов путей обозначим через $\pi^1(R, p)=\pi^1(R)=\pi^1$ и определим в нем групповую операцию умножения следующим образом. Пусть $\{a\}$ и $\{b\}$—два элемента множества π^1. Пути a и b можно перемножить (см. A)), так как они начинаются и кончаются в точке p. Положим $c=ab$. Из B) следует, что класс $\{c\}$ определен классами $\{a\}$ и $\{b\}$ однозначно. Определим произведение $\{a\}\{b\}$, положив $\{a\}\{b\}=\{c\}$. Получаемая таким образом группа π^1 не зависит, с точностью до изоморфизма, от выбора точки p, является топологическим инвариантом пространства R и называется *фундаментальной группой* этого пространства. Если группа $\pi^1(R)$ тривиальна, то пространство R называется *односвязным*.

Нетрудно видеть, что определенная в π^1 операция умножения удовлетворяет требованиям определения 1. Ассоциативность имеет место в силу (3). Единицей группы π^1 является тот класс, который составлен из всех путей множества P, гомотопных нулю (см. (1)—(2)). Наконец, если $\{a\}$ есть некоторый элемент множества π^1, то $\{a\}^{-1}=\{a^{-1}\}$ (см. B) и (4)—(5)).

Покажем теперь, что фундаментальная группа π^1 пространства R не зависит от выбора точки p. Пусть p'—некоторая другая точка и $\pi'^1=\pi^1(R, p')$. Покажем, что π^1 и π'^1 изоморфны.

Пусть f—некоторый путь, ведущий из точки p' в точку p; такой путь существует, ибо R, по предположению, линейно связно (см. D)). Пусть $\{a\}$—произвольный элемент группы π^1. Положим $a'=faf^{-1}$. Из B) следует, что класс $\{a'\}$ однозначно определяется классом $\{a\}$, т. е. не зависит от случайности выбора пути a (конечно, при условии, что путь f считается фиксированным). Положим $\{a'\}=\varphi(\{a\})$ и покажем, что φ есть изоморфное отображение группы π^1 на группу π'^1. Прежде всего покажем, что отображение φ взаимно однозначно. Для этого рассмотрим путь $f^{-1}a'f$. Нетрудно видеть, что путь $f^{-1}a'f=f^{-1}faf^{-1}f$ гомотопен пути a (см. C), B)). Таким образом, класс $\{a\}$ в свою очередь однозначно определяется классом $\{a'\}$ и, следовательно, отображение φ взаимно однозначно. Ввиду полной симметрии ролей групп π^1 и π'^1 при этом рассмотрении отображение φ есть отображение на всю группу π'^1. Так же легко устанавливается и сохранение операции умножения при отображении φ. Действительно, пусть $\{a\}$ и $\{b\}$—два элемента множества π^1. Положим $a'=faf^{-1}$, $b'=fbf^{-1}$, $c=ab$. Из C) и B) следует, что пути $a'b'$ и fcf^{-1} эквивалентны, а это значит, что $\varphi(\{a\}\{b\})=\varphi(\{a\}(\varphi(\{b\})$. Таким образом, изоморфизм групп π^1 и π'^1 доказан.

Следует отметить, что построенное нами изоморфное отображение φ зависит от случайности выбора пути f. Таким образом, φ не является, естественно, единственным образом определенным отображением. В частности, если точки p и p' совпадают, то можно провести рассмотренное выше построение, взяв за f некоторый замкнутый путь, начинающийся в точке p. Тогда полученный изоморфизм φ будет автоморфизмом группы π^1, и, как нетрудно проверить, φ будет внутренним автоморфизмом (см. § 3, В)).

E) Пусть φ—непрерывное отображение линейно связного пространства S в линейно связное пространство R и пусть $p \in R$, $q \in S$, $\varphi(q)=p$. Отображение φ переводит каждый замкнутый путь g пространства S, начинающийся в точке q, в замкнутый путь $\varphi(g)=f$ пространства R, начинающийся в точке p и определяемый формулой

$$f(t)=\varphi(g(t)).$$

Очевидно, что при этом отображении произведение путей переходит в произведение их образов, а эквивалентные пути переходят в эквивалентные. Таким образом, отображение φ порождает гомоморфизм группы $\pi^1(S, q)$ в $\pi^1(R, p)$, который мы обозначим через $\hat{\varphi}$.

F) Пусть R и S—два линейно связных топологических пространства. Через T обозначим их прямое произведение (см. § 14, A)). Тогда пространство T линейно связно и его фундаментальная группа изоморфна прямому произведению фундаментальных групп пространств R и S (см. § 5, A)). Таким образом, в частности, прямое произведение двух односвязных топологических пространств односвязно.

Для доказательства выберем в пространствах R и S по одной фиксированной точке: $p \in R$, $q \in S$. Тогда $(p, q) \in T$ есть определенная точка из T. Пусть f—некоторый путь в пространстве R, начинающийся в p, а g—некоторый путь в пространстве S, начинающийся в q. Тогда функция $(f(t), g(t))$ определит в пространстве T некоторый путь, который мы обозначим через (f, g). Путь (f, g) начинается в точке (p, q) и кончается в точке $(f(1), g(1))$. Так как в силу линейной связности пространств R и S концы путей f и g могут быть выбраны произвольно, то конец пути (f, g) также может быть выбран произвольно, и мы видим, что точка (p, q) может быть связана путем с произвольной точкой пространства T. Таким образом, T линейно связно.

Очевидно, что всякий путь h пространства T, начинающийся в (p, q), может быть представлен в форме пары (f, g). Нетрудно, далее, проверить, что если $f' \sim f$, $g' \sim g$, то $(f', g') \sim (f, g)$. Обратно, если $(f', g') \sim (f, g)$, то $f' \sim f$, $g' \sim g$. Далее, если пути f и g замкнуты, то путь (f, g) также замкнут, и обратно. Наконец, если пути f, g, f', g' замкнуты, то произведение $(f, g) \cdot (f', g')$ равно (ff', gg').

В силу всего сказанного каждый элемент фундаментальной группы пространства T однозначно представляется в виде пары элементов фундаментальных групп пространств R и S, причем выполнены все требования определения A) § 5. Таким образом, предложение F) доказано.

G) Пусть G—топологическая группа. Если f—путь в пространстве G, а a—элемент группы G, то через af и fa будем обозначать пути, пробегаемые точками $af(t)$ и $f(t)a$ соответственно. Оказывается, что если f и g—два пути пространства G, начинающиеся в e, то имеет место следующая гомотопия:

$$f(f(1)g) \sim g(f \cdot g(1)). \tag{8}$$

Из этого, в частности, следует, что фундаментальная группа линейно связной группы G коммутативна. В самом деле, пусть f и g—замкнутые пути, выходящие из единицы e. Тогда соотношение (8) переходит в соотношение

$$fg \sim gf,$$

которое и указывает на коммутативность фундаментальной группы пространства G.

Для доказательства соотношения (8) рассмотрим функцию $\varphi(s, t) = f(s)g(t)$ двух переменных s, t; $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Функция φ дает непрерывное отображение квадрата $0 \leqslant s \leqslant 1$; $0 \leqslant t \leqslant 1$ в пространство G. Вершины квадрата обозначим через a, b, c, d, положив $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (1, 1)$, $d = (0, 1)$. Очевидно, что ломаные пути abc и adc гомотопны в квадрате и что путь abc при отображении φ переходит в путь $f(f(1)g)$, путь же adc при отображении φ переходит в $g(f \cdot g(1))$. Итак, эквивалентность (8) доказана.

П р и м е р 85. Покажем, что фундаментальные группы евклидова пространства произвольной размерности и сферы, размерность которой больше единицы, тривиальны.

Пусть E—евклидово векторное пространство. Каждому вектору $x \in E$ поставим в соответствие вектор $\varphi_s(x) = (1-s)x$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Определенное таким образом отображение φ_s пространства E в себя дает непрерывную его деформацию в нуль. Применяя деформацию φ_s к произвольному замкнутому пути f, начинающемуся в нуле, мы убеждаемся, что фундаментальная группа пространства E тривиальна.

Будем считать, что евклидово пространство E имеет размерность $n+1$, и выделим в нем n-мерную сферу S уравнением $(x, x) = 1$. Пусть $p \in S$, а ψ—проектирование пространства $S \setminus p$ на плоскость $E' \subset E$, определяемую уравнением $(p, x) = 0$ из точки p, т. е. отображение

$$\psi(x) = \frac{1}{1-(p, x)} \cdot x - \frac{(p, x)}{1-(p, x)} \cdot p.$$

Непосредственно проверяется, что ψ есть гомеоморфное отображение пространства $S \setminus p$ на пространство E'. Так как каждый замкнутый путь в пространстве E' гомотопен нулю, то и каждый замкнутый путь в пространстве $S \setminus p$ также гомотопен нулю. В случае $n \geqslant 2$ каждый замкнутый путь из S, начинающийся в точке, отличной от p, гомотопен, как легко видеть, пути, не проходящему через p. Таким образом, при $n \geqslant 2$ фундаментальная группа сферы $S = S^n$ тривиальна.

§ 50. Накрывающее пространство

Накрывающие пространства играют существенную роль в различных отделах математики. Так, риманова поверхность многозначной аналитической функции представляет собой накрывающую поверхность области аналитичности функции, пополненную, правда, точками ветвления конечного порядка и полюсами. На римановой поверхности многозначная функция становится однозначной. Ту же цель униформизации многозначных функций преследует построение накрывающих пространств и в некоторых других случаях. В теории топологических групп построение накрывающих пространств служит для построения универсальной накрывающей группы. В этом параграфе излагается топологическая теория накрывающих пространств.

Определение 45. Непрерывное отображение ω пространства R^* на пространство R называется *накрывающим отображением* или *накрытием*, а пространство R^*—*накрывающим* для пространства R, если у каждой точки $a \in R$ имеется такая окрестность U, что ее полный прообраз $\omega^{-1}(a)$ распадается в сумму конечного или бесконечного числа попарно не пересекающихся областей, каждая из которых гомеоморфно при помощи ω отображается на U. Окрестность U, обладающую этим свойством, будем в дальнейшем называть *правильно накрытой*, а каждую область $V \subset R^*$, гомеоморфно отображающуюся на U при помощи ω, будем называть *правильно накрывающей* окрестность U. Два накрывающих отображения ω_1 и ω_2 пространств R_1^* и R_2^* на пространство R считаются *эквивалентными*, если существует такое гомеоморфное отображение φ пространства R_1^* на пространство R_2^*, что $\omega_2\varphi = \omega_1$.

Ниже будет показано, каким образом можно построить все накрытия линейно связного, локально связного и локально односвязного пространства линейно связными пространствами.

А) Пусть ω—накрывающее отображение пространства R^* на пространство R, U—некоторая правильно накрытая окрестность из R и V—правильно накрывающая ее область из R^*. Пусть, далее, f—такое непрерывное отображение некоторого связного пространства S в пространство R^*, что $\omega f(S) \subset U$ и пересечение $f(S) \cap V$ не пусто; тогда $f(S) \subset V$.

Действительно, множество $f(S)$ содержится в области $\omega^{-1}(U)$, а так как оно связно, то не может пересекаться с обеими областями V и $\omega^{-1}(U)\setminus V$.

В) Пусть ω—накрывающее отображение пространства R^* на пространство R и f—путь в пространстве R. Говорят, что путь f^* в пространстве R^* *накрывает* путь f, если $\omega f^*(t)=f(t)$. Оказывается, что если f—заданный в R путь, а a^*—заданная в R^* точка, удовлетворяющая условию $\omega(a^*)=a=f(0)$, то в R^* существует, и притом единственный, путь f^*, накрывающий путь f и начинающийся в точке a^*. Оказывается, далее, что если путь f, начинающийся в фиксированной точке a, непрерывно деформируется, то накрывающий его путь f^*, начинающийся в фиксированной точке a^*, также непрерывно деформируется; если при этом деформирующийся путь f сохраняет постоянной концевую точку, то и накрывающий его путь f^* сохраняет неизменной свою концевую точку.

Докажем предложение В). Пусть f_s—непрерывно зависящий от параметра s путь, начинающийся в фиксированной точке $a\in R$, и $f(s, t)=f_s(t)$. Обозначим через I числовой отрезок $[0, 1]$. Функция $f(s, t)$ определена и непрерывна на квадрате $I\times I$. Из бикомпактности квадрата $I\times I$ вытекает существование такого положительного ε, что для любой точки $(s_0, t_0)\in I\times I$ найдется правильно накрытая окрестность $U(s_0, t_0)$ точки $f(s_0, t_0)$, содержащая все точки $f(s, t)$ при $|s-s_0|\leqslant\varepsilon$, $|t-t_0|\leqslant\varepsilon$. Будем считать, что $\varepsilon=\frac{1}{n}$, где n—натуральное число. Допустим, что при $t\leqslant p\varepsilon$ непрерывная функция $f^*(s, t)$, удовлетворяющая условиям

$$f^*(s, 0)=a^*, \qquad \omega f^*(s, t)=f(s, t), \tag{1}$$

уже определена и единственность ее для этих значений t доказана. Построим функцию $f^*(s, t)$ для $t\leqslant(p+1)\varepsilon$ и докажем ее единственность. (При $p=0$ индуктивное предположение справедливо.) Пусть $V(s_0, p\varepsilon)$—та правильно накрывающая окрестность $U(s_0, p\varepsilon)$ область из R^*, которая содержит точку $f^*(s_0, p\varepsilon)$, и пусть ω'—гомеоморфизм области $U(s_0, p\varepsilon)$ на область $V(s_0, p\varepsilon)$, обратный к ω. Если функция $f^*(s_0, t)$ непрерывна по параметру t и удовлетворяет условию (1), то в силу предложения А) она при $|t-p\varepsilon|\leqslant\varepsilon$ определяется равенством

$$f^*(s_0, t)=\omega' f(s_0, t). \tag{2}$$

С другой стороны, равенство (2) при $p\varepsilon\leqslant t\leqslant(p+1)\varepsilon$ определяет функцию $f^*(s_0, t)$, непрерывно зависящую от параметра t и удовлетворяющую условию (1). Так как по предположению индукции функция $f^*(s, p\varepsilon)$ является непрерывной функцией параметра s, $0\leqslant s\leqslant 1$, то в силу предложения А) имеем $f^*(s, p\varepsilon)\in V(s_0, p\varepsilon)$ при $|s-s_0|\leqslant\varepsilon$. Далее, в силу непрерывности функции $f(s, t)$ по параметру t и предложения А) мы имеем $f^*(s, t)\in V(s_0, p\varepsilon)$ при $|s-s_0|\leqslant\varepsilon$,

$|t-t_0|\leqslant\varepsilon$. Из этого следует, что функция $f^*(s, t)$ при $|s-s_0|\leqslant\varepsilon$, $|t-p\varepsilon|\leqslant\varepsilon$ определяется равенством $f^*(s, t)=\omega' f(s, t)$ и является при этих значениях непрерывной, поскольку функция $f(s, t)$ непрерывна и отображение ω' также непрерывно.

Если f—заданный в R путь, не зависящий от параметра s, то, полагая $f_s=f$, $0\leqslant s\leqslant 1$, мы заключаем из предыдущего существование и единственность пути f^*, накрывающего f.

Если теперь конец пути f_s есть фиксированная точка b, то из доказанной уже непрерывности функции $f^*(s, 1)$ параметра s и предложения А) следует, что $f^*(s, 1)\in V(0, 1)$, и потому функция $f^*(s, 1)$ есть константа.

Итак, предложение В) доказано.

Напомним, что две подгруппы H_1 и H_2 некоторой группы G называются *сопряженными*, если существует такой элемент $g\in G$, что $H_2=g^{-1}H_1g$. Соотношение сопряженности, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что множество всех подгрупп группы G распадается на не пересекающиеся классы попарно сопряженных подгрупп.

Т е о р е м а 76. *Пусть ω—накрывающее отображение линейно связного пространства R^* на линейно связное пространство R, p—некоторая фиксированная точка из R и p^*—такая точка из R^*, что $\omega(p^*)=p$. Тогда гомоморфизм $\hat{\omega}$* (см. § 49, Е)) *есть изоморфизм группы $\pi^1(R^*, p^*)$ на некоторую подгруппу $\rho(\omega, p^*)$ группы $\pi^1(R, p)$. Далее, когда точка p^* пробегает все множество $\omega^{-1}(p)$, подгруппа $\rho(\omega, p^*)$ пробегает все подгруппы некоторого класса сопряженных подгрупп группы $\pi^1(R, p)$, который мы обозначим через $\sigma(\omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f^*—произвольный замкнутый путь из R^*, начинающийся в p^*, и $f=\omega f^*$. Если путь f гомотопен нулю в R, то путь f^* гомотопен нулю в R^* (см. В)). Таким образом, гомоморфизм $\hat{\omega}$ является изоморфизмом на некоторую подгруппу $\rho(\omega, p^*)$.

Пусть p_1^* и p_2^*—две произвольные точки множества $\omega^{-1}(p)$, f_1^*—замкнутый путь, начинающийся в точке p_1^*, f_2^*—замкнутый путь, начинающийся в p_2^*, и g^*—путь, ведущий из точки p_1^* в точку p_2^*. Положим $\omega f_1^*=f_1$, $\omega f_2^*=f_2$, $\omega g^*=g$; все пути f_1, f_2, g замкнуты и начинаются в точке p. Пути f_1^* и $g^*f_2^*(g^*)^{-1}$ замкнуты и начинаются в p_1^*, так что их образы f_1 и gf_2g^{-1} определяют элементы $\{f_1\}$ и $\{g\}\{f_2\}\{g\}^{-1}$, принадлежащие подгруппе $\rho(\omega, p_1^*)$. Точно так же элементы $\{f_2\}$ и $\{g\}^{-1}\{f_1\}\{g\}$ принадлежат подгруппе $\rho(\omega, p_2^*)$. Так как элементы $\{f_1\}$ и $\{f_2\}$ являются произвольными элементами подгрупп $\rho(\omega, p_1^*)$ и соответственно $\rho\{\omega, p_2^*\}$, то мы видим, что $\{g\}\rho(\omega, p_2^*)\{g\}^{-1}\subset\rho(\omega, p_1^*)$, $\{g\}^{-1}\rho(\omega, p_1^*)\{g\}\subset$ $\subset\rho(\omega, p_2^*)$, а это значит, что

$$\rho(\omega, p_2^*)=\{g\}^{-1}\rho(\omega, p_1^*)\{g\}. \tag{3}$$

Таким образом, доказано, что подгруппы $\rho(\omega, p_1^*)$ и $\rho(\omega, p_2^*)$ сопряжены между собой. Будем теперь считать, что p_1^*—заданная точка множества $\omega^{-1}(p)$, $\{g\}$—заданный элемент группы $\pi^1(R, p)$, g^*—путь, накрывающий путь g и начинающийся в точке p_1^*. Конец пути g^* обозначим через p_2^*. Точка p_2^* принадлежит множеству $\omega^{-1}(p)$. Таким образом, имеет место соотношение (3), а это показывает, что любая подгруппа, сопряженная с подгруппой $\rho(\omega, p_1^*)$, имеет вид $\rho(\omega, p_2^*)$, $p_2^* \in \omega^{-1}(p)$. Итак, совокупность всех подгрупп вида $\rho(\omega, p^*)$, $p^* \in \omega^{-1}(p)$, целиком заполняет некоторый класс сопряженных подгрупп группы $\pi^1(R, p)$, и теорема 76 доказана.

C) Пусть ω—накрывающее отображение пространства R^* на пространство R, $p \in R$, $p^* \in \omega^{-1}(p)$, а f_1^* и f_2^*—два пути, начинающихся в p^*. Оказывается, что пути f_1^* и f_2^* тогда и только тогда кончаются в одной и той же точке, когда их образы $f_1 = \omega f_1^*$ и $f_2 = \omega f_2^*$ кончаются в одной точке и $\{f_1\}\{f_2\}^{-1} \in \rho(\omega, p^*)$. В частности, путь f_1^* тогда и только тогда замкнут, когда путь f_1 замкнут и $\{f_1\} \in \rho(\omega, p^*)$.

Разберем сначала частный случай, когда путь f_1 замкнут. Если путь f_1^* замкнут, то, по определению, имеем $\{f_1\} \in \rho(\omega, p^*)$. Если, наоборот, $\{f_1\} \in \rho(\omega, p^*)$, то в R^* имеется такой замкнутый путь h^*, начинающийся в p^*, что его образ $\omega h^* = h$ принадлежит $\{f_1\}$. Так как пути h и f_1 гомотопны, то путь h можно непрерывной деформацией без смещения концов перевести в путь f_1, а тогда и накрывающий путь h^* можно непрерывной деформацией без смещения концов перевести в путь f_1^* (см. B)). Таким образом, концы путей h^* и f_1^* совпадают, а так как путь h^* замкнут, то и путь f_1^* замкнут.

Докажем теперь предложение C) в общем виде. Если пути f и f_2^* имеют общий конец, то пути f_1 и f_2 также имеют общий конец, а путь $f_1^*(f_2^*)^{-1}$ замкнут, и потому $\{f_1\}\{f_2\}^{-1} \in \rho(\omega, p^*)$. Допустим, что, наоборот, пути f_1 и f_2 имеют общий конец и $\{f_1\}\{f_2\}^{-1} \in \rho(\omega, p^*)$. Накрывающим для пути $f_1 f_2^{-1}$ служит путь $f_1^*(g_2^*)^{-1}$, где путь $(g_2^*)^{-1}$ начинается в точке $f_1^*(1)$ и накрывает путь f_2^{-1}. Так как по ранее доказанному путь $f_1^*(g_2^*)^{-1}$ замкнут, то путь $(g_2^*)^{-1}$ кончается в точке p^*. Таким образом, оба пути g_2^* и f_2^* начинаются в точке p^* и накрывают путь f_2. Следовательно, эти пути совпадают. Так как путь g_2^* кончается в точке $f_1^*(1)$, то и совпадающий с ним путь f_2^* кончается в точке $f_1^*(1)$.

Итак, предложение C) доказано.

Из C) легко следует, что мощность множества $\omega^{-1}(x)$, $x \in R$, равна индексу подгруппы $\rho(\omega, p^*)$ в группе $\pi^1(R, p)$, $p^* \in \omega^{-1}(p)$, и потому не зависит от точки x. Мощность множества $\omega^{-1}(x)$ называется *числом слоев* накрытия ω.

Теорема 77. *Пусть ω_1 и ω_2—накрывающие отображения линейно связных пространств R_1^* и R_2^* на линейно связное, локально* *связное пространство* R, $p \in R$, $p_1^* \in \omega_1^{-1}(p)$, $p_2^* \in \omega_2^{-1}(p)$ *и* $\rho(\omega_1, p_1^*) \subset \subset \rho(\omega_2, p_2^*)$. *Тогда существует такое накрывающее отображение* ω *пространства* R_1^* *на* R_2^*, *что* $\omega_2\omega = \omega_1$. *Если* $\rho(\omega_1, p_1^*) = \rho(\omega_2, p_2^*)$, *то отображение* ω *является гомеоморфизмом. Из этого, в частности, следует, что накрытия* ω_1 *и* ω_2 *тогда и только тогда эквивалентны, когда* $\sigma(\omega_1) = \sigma(\omega_2)$.

Доказательство. Пусть x_1^*—произвольная точка из R_1^* и f_1^*—произвольный путь, ведущий из p_1^* в x_1^*. Пусть, далее, $f = \omega_1 f_1^*$, f_2^*—путь, накрывающий путь f и выходящий из p_2^*, а x_2^*—конец пути f_2^*.

Из соотношения $\rho(\omega_1, p_1^*) \subset \rho(\omega_2, p_2^*)$ следует в силу С), что точка x_2^* определяется точкой x_1^* однозначно, а именно не зависит от случайного выбора пути f_1^*, ведущего из p_1^* в x_1^*, так что можно положить $\omega(x_1^*) = x_2^*$. Тогда $\omega_2\omega = \omega_1$. Заметим для дальнейшего, что в случае $\rho(\omega_1, p_1^*) = \rho(\omega_2, p_2^*)$ отображение ω взаимно однозначно.

Перейдем к доказательству того, что ω есть накрывающее отображение. Пусть $x_1^* \in R_1^*$, $x_2^* = \omega(x_1^*)$, $x = \omega_2(x_2^*)$ и пусть U—связная окрестность точки x, правильно накрытая при обоих отображениях ω_1 и ω_2. Обозначим через $V_i(x_i^*)$ область пространства R_i^*, правильно накрывающую окрестность U и содержащую точку x_i^*, $i = 1, 2$. Покажем, что $\omega(V_1(x_1^*)) = V_2(x_2^*) = V_2(\omega(x_1^*))$ и что ω есть гомеоморфное отображение области $V_1(x_1^*)$ на область $V_2(x_2^*)$. Пути f_1^*, f, f_2^* будем считать выбранными как прежде. Пусть $y_1^* \in V_1(x_1^*)$ и g_1^*—путь из $V_1(x_1^*)$, ведущий от точки x_1^* к точке y_1^*. Положим $\omega_1(g_1^*) = g$, и пусть g_2^*—путь, накрывающий путь g и выходящий из точки x_2^*. Очевидно, что путь g_2^* проходит в области $V_2(x_2^*)$. Далее, путь $f_2^* g_2^*$ является накрывающим для пути fg и потому $\omega(y_1^*) \in V_2(x_2^*)$. Таким образом, $\omega(V_1(x_1^*)) \subset V_2(x_2^*)$, и отображение ω области $V_1(x_1^*)$ в $V_2(x_2^*)$ определяется формулой $\omega = \omega_2^{-1}\omega_1$, где ω_2^{-1} есть вполне определенное отображение области U на область $V_2(x_2^*)$. Из того, что $\omega = \omega_2^{-1}\omega_1$, следует, что отображение ω есть гомеоморфное отображение области $V_1(x_1^*)$ на всю область $V_2(x_2^*)$. Будем считать теперь, что точка x_2^* выбрана произвольно в R_2^*. Полный прообраз множества $\omega^{-1}(V_2(x_2^*))$ состоит, по доказанному, из всех множеств $V_1(x_1^*)$, где $x_1^* \in \omega^{-1}(x_2^*)$. Таким образом, установлено, что ω есть накрывающее отображение пространства R_1^* на пространство R_2^*.

В случае, когда $\rho(\omega_1, p_1^*) = \rho(\omega_2, p_2^*)$, отображение ω взаимно однозначно и, будучи накрытием, является гомеоморфизмом.

Итак, теорема 77 доказана.

Теорема 77 решает вопрос о единственности накрытия, нижеследующая теорема 78 решает вопрос о его существовании.

Теорема 78. *Пусть* R—*линейно связное, локально связное, локально односвязное пространство*, $p \in R$ *и* ρ—*заданная подгруппа группы* $\pi^1(R, p)$. *Существует тогда такое накрытие* ω

пространства R *линейно связным пространством* R^*, *что* $\rho(\omega, p^*)=\rho$, *где* $p^*\in\omega^{-1}(p)$.

Доказательство. Приступим к построению пространства R^*. Два пути f и g, выходящих из точки p, будем считать *эквивалентными по подгруппе* ρ, если они кончаются в одной точке и если $\{fg^{-1}\}\in\rho$. Непосредственно проверяется, что введенное соотношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что множество всех путей, выходящих из точки p, распадается на классы попарно эквивалентных. Эти классы мы будем называть *пучками*. Множество R^* мы определим как множество всех пучков. Ставя в соответствие каждому пучку x^* ту единственную точку $\omega(x^*)=x\in R$, в которой кончаются все пути пучка x^*, мы получаем отображение ω множества R^* в пространство R. Так как пространство R линейно связно, то $\omega(R^*)=R$.

Зададим теперь в множестве R^* топологию при помощи системы окрестностей. Определим совокупность Σ окрестностей пространства R, включив в нее каждую линейно связную окрестность U, всякий замкнутый путь из которой гомотопен нулю в пространстве R. Из того, что пространство R локально связно и локально односвязно, следует, что Σ есть полная система окрестностей пространства R (см. § 49, D)). Пусть U—произвольная окрестность системы Σ и x^*—такой пучок, что $\omega(x^*)\in U$. Определим подмножество $U^*=\{U, x^*\}$ множества R^* следующим образом. Пусть $f\in x^*$ и g—произвольный путь из U, начинающийся в x и кончающийся в точке $y\in U$. Пучок y^*, содержащий путь fg, будем считать принадлежащим множеству U^*. Покажем, что отображение ω множества U^* на U взаимно однозначно, т. е. что точка y^* однозначно определяется точкой $y\in U$ и пучком x^*, а не зависит от случайного выбора путей f и g. В самом деле, пусть $f'\in x^*$ и g'—путь в U, ведущий из x в y. Тогда $f'g'(fg)^{-1}=f'g'g^{-1}f^{-1}$. Так как $g'g^{-1}$ есть замкнутый путь в U, то он гомотопен нулю в R, и, следовательно, путь $f'g'(fg)^{-1}$ гомотопен пути $f'f^{-1}$, который, по предположению, удовлетворяет условию $\{f'f^{-1}\}\in\rho$. Непосредственно проверяется, что

$$\omega(U^*)=U; \tag{4}$$

$$\text{если} \quad y^*\in\{U, x^*\}, \quad \text{то} \quad \{U, y^*\}=\{U, x^*\}. \tag{5}$$

Совокупность всех множеств вида $\{U, x^*\}$ обозначим через Σ^* и покажем, что система Σ^* удовлетворяет условиям теоремы 3, т. е. может быть принята за полную систему окрестностей пространства R^*.

Пусть x^* и y^*—две различные точки множества R^*. Если $\omega(x^*)\neq\omega(y^*)$, то существуют непересекающиеся окрестности U и V точек $\omega(x^*)$ и $\omega(y^*)$, принадлежащие системе Σ. Положим $U^*=\{U, x^*\}$, $V^*=\{V, y^*\}$. Так как множества $\omega(U^*)=U$ и $\omega(V^*)=$ $=V$ не пересекаются между собой, то и множества U^* и V^* также не пересекаются между собой. Если $\omega(x^*)=\omega(y^*)=x$, то пусть U—произвольная окрестность точки x, принадлежащая системе Σ. Положим $U^*=\{U, x^*\}$, $V^*=\{U, y^*\}$. Допустим теперь, что множества U^* и V^* имеют общий элемент z^*. Тогда $U^*=\{U, z^*\}$, $V^*=\{U, z^*\}$. Так как отображение ω взаимно однозначно на множестве $U^*=V^*$, то из равенства $\omega(x^*)=\omega(y^*)$ и принадлежности точек x^* и y^* к множеству U^* следует совпадение и самих точек x^* и y^*, что невозможно. Таким образом, множества U^* и V^* не пересекаются. Пусть теперь x^*—произвольная точка из R^*. Так как каждое содержащее x^* множество из Σ^* имеет вид $\{U, x^*\}$, где $\omega(x^*)\in U$, $U\in\Sigma$, то произвольные две окрестности точки x^* можно записать в виде $\{U, x^*\}$ и $\{V, x^*\}$. Множества U и V являются окрестностями точки $\omega(x^*)$ в пространстве R, и потому существует окрестность $W\in\Sigma$, содержащаяся в их пересечении. Множество $\{W, x^*\}$ системы Σ^* содержит точку x^* и содержится в пересечении множеств $\{U, x^*\}$ и $\{V, x^*\}$. Таким образом, система Σ^* определяет в R^* топологию.

Теперь уже легко усмотреть, что ω есть накрывающее отображение пространства R^* на пространство R. Действительно, пусть $x\in R$ и U—произвольная окрестность точки x, принадлежащая Σ. Множество $\omega^{-1}(U)$ распадается в сумму попарно не пересекающихся областей $\{U, x^*\}$, $x^*\in\omega^{-1}(x)$, пространства R^*, каждая из которых отображается при помощи ω на U гомеоморфно.

За точку p^* примем пучок, содержащий единичный путь, и покажем, что пространство R^* линейно связно и что $\rho(\omega, p^*)=\rho$. Пусть f—произвольный путь, начинающийся в p. Положим $f_s(t)=f(st)$. Путь f_s непрерывно зависит от параметра s. Пучок, содержащий этот путь, обозначим через $f^*(s)$ и покажем, что f^* есть путь пространства R^*, начинающийся в p^* и накрывающий путь f. Очевидно, что $\omega f^*(t)=f(t)$ и что $f^*(0)=p^*$. Таким образом, остается доказать лишь, что функция $f^*(s)$ есть непрерывная функция параметра s в пространстве R^*. Пусть s_0—произвольное фиксированное значение параметра s, U—некоторая окрестность точки $f(s_0)$ и $U^*=\{U, f^*(s_0)\}$. Пусть, далее, ε—настолько малое положительное число, что при $|s-s_0|<\varepsilon$ имеем $f(s)\in U$. Непосредственно видно, что путь f_s, $|s-s_0|<\varepsilon$, эквивалентен пути, получающемуся из пути f_{s_0} при помощи умножения его справа на путь, описываемый точкой $f(t)$, когда t пробегает значения от s_0 до s. Таким образом, $f^*(s)\in U^*$ при $|s-s_0|<\varepsilon$, и непрерывность зависимости точки $f^*(s)$ от параметра s показана. Докажем линейную связность пространства R^*. Пусть x^*—произвольная точка из R^* и пусть f—произвольный путь пучка x^*. Путь f^*, построенный выше, ведет из точки p^* в точку x^*. Таким образом, пространство R^* линейно связно. Для того чтобы доказать соотношение $\rho(\omega, p^*)=\rho$, нам достаточно доказать, что путь f^*, накрывающий путь f, тогда и только тогда замкнут, когда путь f замкнут и $\{f\}\in\rho$ (см. С)). По построению путь f содержится в пучке $f^*(1)$, и потому этот последний пучок тогда и только тогда содержит единичный путь, когда путь f замкнут и удовлетворяет условию $\{f\}\in\rho$.

Таким образом, теорема 78 доказана.

D) Накрывающее отображение $\widetilde{\omega}$ линейно связного пространства $\widetilde{R}$ на линейно связное пространство R называется *универсальным накрытием*, а пространство $\widetilde{R}$ — *универсальным накрывающим* для пространства R, если пространство $\widetilde{R}$ односвязно. Из теоремы 77 следует, что если пространство R локально связно и ω^* есть накрывающее отображение линейно связного пространства R^* на пространство R, то существует такое накрывающее отображение ω пространства $\widetilde{R}$ на пространство R^*, что $\omega^*\omega=\widetilde{\omega}$. Этим и объясняется термин универсальное накрытие. Из теоремы 77 следует также единственность универсального накрытия. Из теоремы 78 следует существование универсального накрытия для любого линейно связного, локально связного, локально односвязного пространства R.

Нижеследующее предложение дает интересный теоретико-групповой пример накрытия.

E) Пусть G — линейно связная топологическая группа, D — ее дискретная подгруппа и $M=G/D$ — пространство (для определенности, правых) смежных классов. Легко проверяется, что естественное отображение ω пространства G на M является накрытием пространства M пространством G. Оказывается, что подгруппа $\rho(\omega, e)$ группы $\pi^1(M, \omega(e))$ является ее центральным нормальным делителем, причем факторгруппа группы $\pi^1(M, \omega(e))$ по этому нормальному делителю изоморфна группе D. Из этого следует, что если пространство G односвязно, то фундаментальная группа пространства M изоморфна группе D. Полное описание группы $\pi^1(M, \omega(e))$ в общем случае дается в нижеследующем доказательстве.

Докажем предложение E). Совокупность всех попарно гомотопных между собой путей, ведущих из e в некоторый элемент $d\in D$, назовем *пучком*. Определим произведение двух пучков $\{f\}$ и $\{g\}$, содержащих соответственно пути f и g, положив $\{f\}\{g\}=$ $=\{f(f(1)g)\}$; здесь $f(1)g$ есть путь, пробегаемый точкой $f(1)g(t)$ при t, меняющемся от нуля до единицы. Каждому пучку $\{f\}$ поставим в соответствие элемент $\hat{\omega}(\{f\})$ группы $\pi^1(M, \omega(e))$, положив $\hat{\omega}(\{f\})=\{\omega f\}$; здесь ωf есть замкнутый путь в M, и потому $\{\omega f\}$ есть элемент группы $\pi^1(M, \omega(e))$. Полученное таким образом отображение $\hat{\omega}$ множества P всех пучков в группу $\pi^1(M, \omega(e))$ есть взаимно однозначное отображение на всю группу. Действительно, пусть f' — произвольный замкнутый путь в M, начинающийся в $\omega(e)$, и f—путь, накрывающий его, начинающийся в e; тогда $f(1)\in D$ и $\{\omega(f)\}=\{f'\}$. Далее, если имеет место равенство $\{f'\}=\{g'\}$, то накрывающие пути f и g принадлежат одному пучку. Наконец, отображение $\hat{\omega}$ переводит произведение двух пучков в произведение соответствующих элементов группы $\pi^1(M, \omega(e))$. В самом деле,

$$\hat{\omega}(\{f\}\{g\})=\{\omega(f(f(1)g))\}=\{\omega f\}\{\omega g\}=\hat{\omega}(\{f\})\hat{\omega}(\{g\}).$$

Таким образом, совокупность P всех пучков есть группа в силу установленного в ней закона умножения, и группа эта изоморфно при помощи $\hat{\omega}$ отображена на $\pi^1(M, \omega(e))$.

Пучки, составленные из замкнутых путей, составляют подгруппу $N=\pi^1(G, e)$ группы P всех пучков. Покажем, что подгруппа N есть центральный нормальный делитель. Пусть f—некоторый замкнутый путь в G, начинающийся в e, и g—путь, ведущий из e в некоторый элемент группы D. Тогда $\{g\}\{f\}\{g\}^{-1}=\{g(g(1)f)g^{-1}\}$. В силу соотношения (8) § 49 мы имеем:

$$g(g(1)f)\sim fg.$$

Таким образом, $\{g\}\{f\}\{g\}^{-1}=\{f\}$. Следовательно, N принадлежит центру группы P всех пучков.

Итак, предложение E) доказано.

Пример 86. Построим универсальное накрытие и вычислим фундаментальную группу *n-мерного тора*. Пусть R—векторная группа размерности n и $e_1, \ldots, e_n$—базис векторного пространства R. Дискретную подгруппу группы R с целочисленным базисом $e_1, \ldots, e_n$ обозначим через D. Пусть ω—естественный гомоморфизм группы R на группу $R/D=T^n$. Пространство T^n гомеоморфно n-мерному тору при $n\geqslant 2$ и представляет собой окружность при $n=1$. Отображение ω является универсальным накрытием. Положим $f_i^*(t)=te_i$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Путь $\omega f_i^*=f_i$ в пространстве T^n замкнут. Из предложения E) следует, что элементы $\{f_1\}, \ldots, \{f_n\}$ фундаментальной группы $\pi^1(T^n, 0)$ пространства T^n составляют систему ее линейно независимых образующих, так что группа $\pi^1(T, 0)$ есть свободная коммутативная группа ранга n. Группу T^1 обозначим через K. Образующей группы $\pi^1(\mathrm{K}, 0)$ служит ее элемент $\{f\}$, где $f(t)$ равномерно пробегает окружность K в положительном направлении от точки 0 снова до точки 0 в то время, когда параметр t изменяется от нуля до единицы.

Пример 87. Построим универсальное накрытие и вычислим фундаментальную группу *лемнискаты*. Возьмем r экземпляров группы K (см. пример 86) и обозначим их через $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_r$; нуль группы K_i обозначим через 0_i, а элемент $^1/_2$—через q_i. В окружностях $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_r$ склеим точки 0_i в одну точку p, и полученный из совокупности окружностей $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_r$ в результате этого склеивания связный комплекс обозначим через L. Комплекс L является окружностью при $r=1$ и лемнискатой при $r=2$. Путь, дающий образующую фундаментальной группы окружности K_i, обозначим через f_i, а саму образующую—через a_i. Так как f_i есть замкнутый путь в L, начинающийся в p, то мы будем считать, что a_i есть элемент группы $\pi^1(L, p)$. Покажем, что группа $\pi^1(L, p)$ есть свободная (некоммутативная при $r>1$) группа с независимыми образующими $a_1, \ldots, a_r$. Точный смысл этого утверждения будет установлен ниже.

Пусть n—произвольное целое неотрицательное число, $\alpha(i)$—целочисленная функция целочисленного аргумента $i=1, 2, \ldots, n$, могущая принимать лишь значения $1, 2, \ldots, r$ и не принимающая равных значений для соседних значений аргумента, а $\beta(i)$—произвольная целочисленная функция того же целочисленного аргумента, не принимающая значения нуль. Положим:

$$c=(a_{\alpha(1)})^{\beta(1)}(a_{\alpha(2)})^{\beta(2)} \ldots (a_{\alpha(n)})^{\beta(n)}. \qquad (6)$$

Это выражение мы будем называть *словом* относительно букв $a_1, \ldots, a_r$. При $n=0$ слово c не содержит букв $a_1, \ldots, a_r$; мы будем называть его *единичным словом* и обозначать символом 1. Оказывается, что каждый элемент группы $\pi^1(L, p)$ может быть записан в виде (6) и притом единственным образом. Этот факт и имеют в виду, когда говорят, что группа $\pi^1(L, p)$ есть *свободная группа* с независимыми образующими $a_1, \ldots, a_r$.

Докажем, что каждый элемент группы $\pi^1(L, p)$ может быть записан в форме (6). Пусть I—действительный числовой отрезок, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда заданный замкнутый путь g в L, начинающийся в p, есть непрерывное отображение отрезка I в L, переводящее его концы в p. Множество $K_i \setminus p=U_i$ есть область в L, и потому $g^{-1}(U_i)=V_i$ есть область в I, не содержащая концов отрезка I. Область V_i распадается в счетную или конечную сумму попарно не пересекающихся интервалов $J_{i1}, J_{i2}, \ldots$ Нетрудно видеть, что существует лишь конечное число интервалов J_{ij}, пересекающихся с множеством $g^{-1}(q_i)$. Действительно, множество $g^{-1}(q_i)$ бикомпактно, и потому из счетного его покрытия интервалами J_{ij}, $j=1, 2, \ldots$, можно выбрать конечное. Объединение всех интервалов J_{ij}, не пересекающихся с множеством $g^{-1}(q_i)$, обозначим через J_i. Каждую точку $g(t)$, $t \in J_i$, заставим равномерно перемещаться по меньшей из двух дуг окружности K_i в точку p. В результате этой деформации отображение g заменится гомотопным ему отображением, вновь обозначаемым через g, для которого число интервалов J_{ij} конечно. Отображение g, рассматриваемое на отрезке $\bar{J}_{ij}$, определяет некоторый элемент группы $\pi^1(K_i, p)$, являющийся степенью элемента a_i. Таким образом, установлено, что произвольный элемент группы $\pi^1(L, p)$ записывается в виде (6).

Для доказательства того, что каждый элемент группы $\pi^1(L, p)$ единственным образом записывается в виде слова (6), построим универсальное накрытие $\widetilde{\omega}$ линейного комплекса L, которое само по себе представляет значительный интерес. Комплекс L разрежем во всех точках q_i, $i=1, \ldots, r$; каждая из точек q_i превратится при этом в пару точек $q_i(+1)$ и $q_i(-1)$. Через $q_i(+1)$ обозначим ту из двух точек, в которую мы приходим, двигаясь из p по окружности K_i в положительном направлении. Естественное отображение комплекса L', получающегося из L в результате описанного разрезания, на комплекс L обозначим через ω'. Отображение ω' является локальным гомеоморфизмом во всех точках, кроме точек $q_i(\varepsilon)$, $\varepsilon=\pm 1$, $i=1, 2, \ldots, r$. Обе точки $q_i(-1)$ и $q_i(+1)$ отображаются при помощи ω' в точку q_i. Каждому слову c (см. (6)) поставим теперь в соответствие один экземпляр комплекса L', который обозначим через L_c. Естественное отображение комплекса L_c на комплекс L, получаемое из ω', обозначим через ω_c. Точку $q_i(\varepsilon)$ в комплексе L_c обозначим через $q_{ic}(\varepsilon)$, а точку p—через p_c. Пусть c—слово, заданное формулой (6), a_i—произвольная из образующих $a_1, \ldots, a_r$ и $\varepsilon=\pm 1$. Если $i=\alpha(n)$, то будем считать, что ε имеет тот же знак, что и $\beta(n)$, и в этом случае положим:

$$d=d(c, \varepsilon)=(a_{\alpha(1)})^{\beta(1)} \ldots (a_{\alpha(n)})^{\beta(n)+\varepsilon}. \tag{7}$$

Если $i\neq\alpha(n)$, то будем считать, что $\varepsilon=\pm 1$ произвольно, и положим

$$d=d(c, \varepsilon)=(a_{\alpha(1)})^{\beta(1)} \ldots (a_{\alpha(n)})^{\beta(n)} a_i^{\varepsilon}. \tag{8}$$

Заданное формулами (7) или (8) слово d будем называть *продолжением* слова c. Очевидно, что любое слово можно получить в результате последовательных продолжений из единичного слова, причем последовательность эта однозначно определена тем словом, которое мы хотим получить. Пусть d есть продолжение слова c (см (7), (8)). Точку $q_{ic}(\varepsilon)$ комплекса L_c отождествим с точкой $q_{id}(-\varepsilon)$ комплекса L_d. В результате всех таких отождествлений из всех комплексо L_c получается один комплекс $\widetilde{L}$. Комплекс $\widetilde{L}$ связен, так как из единичного слова путем последовательных продолжений можно получить каждое слово, и, следовательно, из комплекса L_1, соответствующего единичному слову, можно непрерывно перейти в комплекс L_c, соответствующий любому слову c. Отображение $\widetilde{\omega}$ комплекса $\widetilde{L}$, получающееся из отображений ω_c, очевидно, является накрытием. Пусть c—слово, заданное формулой (6). Поставим ему в соответствие путь f_c в L, который, выходя из точки p, обходит $\beta(1)$ раз окружность $K_{\alpha(1)}$, обходит затем $\beta(2)$ раз окружность $K_{\alpha(2)}$, и так далее, наконец, окружность $K_{\alpha(}$ обходит $\beta(n)$ раз. Путь $\widetilde{f}_c$, начинающийся в p_1 и накрывающий путь f_c, очевидно, кончается в точке p_c. Из этого следует, что различные слова определяют различные элементы группы $\pi^1(L, p)$

и что группа $\pi^1(\widetilde{L}, p_1)$ содержит лишь единицу, так что $\widetilde{\omega}$ есть универсальное накрытие.

Пример 88. Построим универсальное накрытие и вычислим фундаментальную группу *обобщенной проективной плоскости*. Пусть E—плоский круг радиуса единица и K—окружность, являющаяся его краем. В E введем полярные координаты, приняв за начало их центр O круга E и за начало отсчета для углов точку p на окружности K. Каждая точка x из E может быть записана теперь в виде $x=(\rho, \vartheta)$, где ρ—радиус-вектор, а ϑ—аргумент точки x. Зададим теперь натуральное число $n \geqslant 2$ и построим пространство P_n, зависящее от этого числа. Для этого каждую граничную точку $(1, \vartheta)$ круга E отождествим с точкой $\left(1, \vartheta+\frac{2\pi}{n}\right)$ и полученное после такого отождествления пространство обозначим через P_n (пространство P_2 гомеоморфно *проективной плоскости*). Естественное отображение круга E на пространство P_n обозначим через φ. Кусок I окружности K, состоящий из точек $(1, \vartheta)$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{2\pi}{n}$, при отображении φ переходит в окружность K', лежащую в P_n. При этом отображение φ накладывает n слоями окружность K на окружность K', так что φ есть n-слойное накрытие окружности K' окружностью K. Легко проверяется, что образующая a группы $\pi^1(K', p')$, где $p'=\varphi(p)$, является образующей группы $\pi^1(P_n, p')$, причем $a^n=1$. Для того чтобы показать, что $\pi^1(P_n, p')$ есть циклическая группа порядка n, построим универсальное накрывающее пространство $\widetilde{P}_n$ пространства P_n. Рассмотрим n экземпляров $E_1, \ldots, E_n$ круга E. Круги $E_1, \ldots, E_n$ склеим по краям. Именно, точку $(1, \vartheta)$ круга E_i отождествим с точкой $(1, \vartheta)$ круга E_j; $i, j=1, \ldots, n$, и полученное таким образом пространство обозначим через $\widetilde{P}_n$. Легко проверяется, что пространство $\widetilde{P}_n$ односвязно. Произвольная точка $x \in \widetilde{P}_n$ задается указанием номера i круга E_i, которому она принадлежит, и координат ρ, ϑ точки x в круге E_i. Таким образом, $x=(\rho, \vartheta, i)$. Положим $\widetilde{\omega}(\rho, \vartheta, i)=\left(\rho, \vartheta+\frac{2\pi i}{n}\right)$, где правая часть рассматривается как точка пространства P_n. Легко проверяется, что отображение $\widetilde{\omega}$ определяется этой формулой корректно и что оно является накрытием. Так как универсальное накрытие $\widetilde{\omega}$ является n-слойным, то группа $\pi^1(P_n)$ имеет порядок n.

§ 51. Накрывающие группы

В этом параграфе показано прежде всего, что линейно связное пространство, накрывающее топологическую группу, само естественным образом оказывается топологической группой. В случае универсального накрытия мы получаем *универсальную накры-*

вающую группу. Из теоремы 80 следует единственность универсальной накрывающей группы. Та же теорема 80 говорит, что локальный гомоморфизм односвязной группы может быть продолжен в гомоморфизм всей группы. Этот результат носит характер теоремы униформизации, так как попытка продолжить локальный гомоморфизм неодносвязной группы в гомоморфизм всей группы приводит к неоднозначному отображению.

Теорема 79. *Пусть ω—накрывающее отображение линейно связного пространства G^* на линейно связную, локально связную топологическую группу G. Оказывается, что в пространстве G^* можно таким образом ввести закон умножения его точек, что G^* станет топологической группой, а ω—гомоморфизмом группы G^* на группу G. Очевидно, что гомоморфизм ω есть открытый гомоморфизм, а ядро его дискретно.*

Доказательство. Пусть e^*—произвольный элемент множества $\omega^{-1}(e)$; его мы примем за единицу группы G^*. Пусть, далее, a^* и b^*—два произвольных элемента пространства G^*, а f^* и g^*—пути, ведущие к ним из e^*. Положим $a=\omega(a^*)$, $b=\omega(b^*)$, $f=\omega f^*$, $g=\omega g^*$. Построим путь $h=f(ag)$, и пусть h^*—накрывающий его путь, начинающийся в e^*. Конец пути h^* обозначим через c^* и покажем, что точка c^* пространства G^* зависит лишь от точек a^* и b^*, а не от случайно выбранных путей f^* и g^*, ведущих в эти точки. Вместо путей f^* и g^* выберем другие пути f_1^* и g_1^*, ведущие соответственно в a^* и b^*, и пусть $f_1=\omega f_1^*$, $g_1=\omega g_1^*$. Путь, исходящий из e^* и накрывающий путь $h_1=f_1(ag_1)$, обозначим через h_1^*. В силу предложения C) § 50 для доказательства того, что пути h^* и h_1^* кончаются в одной точке, нам достаточно доказать, что $\{h_1h^{-1}\}\in\rho(\omega, e^*)$, исходя при этом из предположения, что $\{f_1f^{-1}\}\in\rho(\omega, e^*)$, $\{g_1g^{-1}\}\in\rho(\omega, e^*)$. Мы имеем:

$$h_1h^{-1}=f_1(ag_1)(ag^{-1})f^{-1}=f_1(a(g_1g^{-1}))f^{-1}\sim(g_1g^{-1})(f_1f^{-1})$$

(см. § 49, (8)). Таким образом,

$$\{h_1h^{-1}\}\in\rho(\omega, e^*).$$

Итак, элемент c^* однозначно определяется элементами a^* и b^*, и мы положим:

$$c^*=a^*b^*.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\omega(a^*b^*)=\omega(a^*)\,\omega(b^*). \tag{1}$$

Ассоциативность построенного закона умножения следует из ассоциативности закона умножения путей (см. § 49, (3)). Единицей этого умножения служит элемент e^*. Наконец, элемент, обратный к элементу a^*, определяется как конец пути, накрывающего путь $a^{-1}f^{-1}$. Из (1) следует, что отображение ω гомоморфно.

Докажем теперь, что установленный в пространстве G^* закон умножения непрерывен. Пусть f^* и g^*—два пути из G^*; покажем сначала, что точка $f^*(t)(g^*(t))^{-1}$ непрерывно зависит от параметра t, т. е. описывает в G^* путь. Доказательство будет проведено в предположении, что оба пути f^* и g^* начинаются в точке e^*. Это предположение не составляет существенного ограничения, так как каждый путь в G^* может рассматриваться как часть пути, начинающегося в e^*. Положим:

$$=\omega f^*, \quad g=\omega g^*, \quad f_s(t)=f(st), \quad g_s(t)=g(st).$$

По определению, точка $f^*(s)(g^*(s))^{-1}$ является концом пути h_s^*, накрывающего путь h_s, причем h_s задается формулой $h_s=$ $=f_s(f(s)(g(s))^{-1}g_s^{-1})$. Из этой формулы следует, что путь h_s непрерывно зависит от параметра s. Таким образом, путь h_s^*, накрывающий путь h_s, также непрерывно зависит от параметра s (см. § 50, B)), и потому его конец $f^*(s)(g^*(s))^{-1}$ непрерывно зависит от s. Пусть a^* и b^*—две произвольные точки из G^*, $c^*=a^*(b^*)^{-1}$, $a=\omega(a^*)$, $b=\omega(b^*)$, $c=\omega(c^*)$, W^*—окрестность точки c^* в G^*, правильно накрывающая некоторую окрестность W точки c, а U и V—такие линейно связные правильно накрытые окрестности точек a и b соответственно, что $UV^{-1}\subset W$. Пусть, далее, U^* и V^*—окрестности точек a^* и b^*, правильно накрывающие окрестности U и V. Покажем, что $U^*(V^*)^{-1}\subset W^*$. Пусть $x^*\in U^*$, $y^*\in V^*$, а f^* и g^*—пути, идущие в U^* и V^* из точек a^* и b^* в точки x^* и y^* соответственно. Так как

$$\omega(f^*(s)(g^*(s))^{-1})=\omega f^*(s)(\omega g^*(s))^{-1}\in UV^{-1}\subset W$$

и $f^*(0)(g^*(0))^{-1}\in W^*$, то в силу предложения A) § 50 мы имеем $f^*(s)(g^*(s))^{-1}\in W^*$. Таким образом, $x^*(y^*)^{-1}=f^*(1)(g^*(1))^{-1}\in W^*$, и закон умножения в группе G^* непрерывен.

Итак, теорема 79 доказана.

Следующая теорема играет весьма важную роль. Из нее, в частности, следует единственность универсальной накрывающей группы.

Теорема 80. *Пусть G' и G—две линейно связные топологические группы, причем G односвязна и локально связна. Пусть далее, f—некоторый локальный гомоморфизм группы G в группу G'* (см. § 23, K)). *Тогда можно продолжить локальный гомоморфизм f в гомоморфизм φ всей группы G в группу G' и притом единственным образом; продолжение гомоморфизма f понимается здесь в том смысле, что f и φ совпадают на некоторой окрестности W единицы группы G. Если f есть локальный гомоморфизм на, то φ есть гомоморфизм группы G на всю группу G'. Если f есть открытый гомоморфизм, то гомоморфизм φ также является открытым. Если группа G' односвязна и локально связна, а f есть локальный изоморфизм, то гомоморфизм φ является изоморфизмом.*

Доказательство. Если φ есть гомоморфное отображение алгебраической группы G в алгебраическую группу G', причем φ представляет собой продолжение локального гомоморфизма f, то φ есть гомоморфное отображение топологической группы G в топологическую группу G'. Действительно, в окрестности W функции f и φ совпадают, а так как функция f непрерывна, то функция φ непрерывна всюду (см. § 20, А)). Если f есть локальное гомоморфное отображение группы G на G', то продолжение φ есть гомоморфизм группы G на всю группу G'. Действительно, в этом случае $f(W)$ содержит некоторую окрестность единицы, а так как связная группа G' порождается всякой окрестностью ее единицы (см. теорему 14), то всякий элемент $x' \in G'$ представим в форме $x' = \varphi(x)$. Если f является открытым гомоморфизмом, то продолжение его φ есть открытый гомоморфизм. Действительно, в этом случае в окрестности единицы отображение φ открыто, а потому оно открыто и всюду (см. § 20, А)).

Покажем, что продолжение локального гомоморфизма f в гомоморфизм φ возможно лишь единственным образом. Допустим, что существуют два продолжения φ и φ'. Пусть x—произвольный элемент из G и W—та окрестность единицы группы G, на которой φ и φ' совпадают с f. Так как группа G связна, то в силу теоремы 14 всякий элемент x представим в форме $x = a_1 \ldots a_n$, где $a_i \in W$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, мы имеем:

$$\varphi(x) = f(a_1) \ldots f(a_n), \qquad \varphi\ (x) = f(a_1) \ldots f(a_n)$$

и

$$\varphi(x) = \varphi\ (x).$$

Приступим теперь к построению гомоморфизма φ

Пусть g—некоторый путь в G, начинающийся в единице e группы G. Для пути g построим соответствующий ему однозначно определенный путь g' в пространстве G', удовлетворяющий следующим условиям:

a) $g'(0) = e'$, где e'—единица группы G'.

b) Пусть U—та окрестность единицы группы G, в которой определен локальный гомоморфизм f. Существует тогда столь малое положительное число ε, что при $|t_1 - t_2| \leqslant \varepsilon$

$$(g(t_1))^{-1} g(t_2) \in U \quad \text{и} \quad (g'(t_1))^{-1} g'(t_2) = f((g(t_1))^{-1} g(t_2)).$$

Покажем прежде всего, что если путь g' существует, то условиями a) и b) он определен однозначно. Начало пути g' определено условием a). Далее, если путь g' определен однозначно для всех значений $t < \tau$, то он определен и для $t = \tau$ в силу непрерывности функций $g(t)$ и $g'(t)$. Наконец, если функция $g'(t)$ определена для $t = \tau$, то она определена и для всех t, удовлетворяющих неравенству $t - \tau < \varepsilon$. Действительно, в силу условия

b) $g'(t)=g'(\tau)f((g(\tau))^{-1}g(t))$. Тем самым путь g' определен однозначно для всех значений t.

Покажем теперь, что путь g' существует. Пусть V—такая окрестность единицы группы G, что $V^{-1}V\subset U$. Существует столь большое натуральное n, что при $|t_1-t_2|\leqslant\frac{1}{n}$ имеем $(g(t_1))^{-1}g(t_2)\in V$. Положим $\varepsilon=\frac{1}{n}$ и допустим, что функция $g'(t)$ уже определена для всех значений $t\leqslant m\varepsilon$, причем для всех этих значений выполнены условия a) и b). Покажем, что тогда ее можно продолжить дальше. Пусть h—положительное число, не превосходящее ε. Тогда определим $g'(m\varepsilon+h)$, положив:

$$g'(m\varepsilon+h)=g'(m\varepsilon)f((g(m\varepsilon))^{-1}g(m\varepsilon+h)). \tag{2}$$

Покажем, что условие b) продолжает выполняться для продолженной таким образом функции $g'(t)$. Пусть h'—число, не превосходящее по модулю ε. Мы имеем:

$$g'(m\varepsilon+h')=g'(m\varepsilon)f((g(m\varepsilon))^{-1}g(m\varepsilon+h')). \tag{3}$$

Если h' положительно, то соотношение это вытекает из (2), если же h' отрицательно, то оно верно в силу предположения индукции. Таким образом,

$$(g'(m\varepsilon+h))^{-1}g'(m\varepsilon+h')=f((g(m\varepsilon+h))^{-1}g(m\varepsilon+h')),$$

и условие b) выполнено. Для начала индукции при $m=0$ достаточно положить $g'(0)=e'$. Тогда условие a) будет выполнено. Следовательно, индукция проведена и путь g' построен.

Пусть t_1 и t_2—два таких числа, что $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$, $t_2-t_1\leqslant\varepsilon$. Если путь g подвергается какой-либо непрерывной деформации, изменяющей лишь его точки, находящиеся на интервале $t_1<t<t_2$, то очевидно, что соответствующий ему путь g' изменяется также лишь на том же интервале. Действительно, проведенное выше построение пути g' для значений $t\leqslant t_1$ опирается лишь на поведение пути g при $t\leqslant t_1$. Далее, для $t=t_2$ функция $g'(t)$ определится условием b) по значению функции $g'(t_1)$; дальнейшее же развертывание пути g проводится с учетом лишь значения $g'(t_2)$. Описанную деформацию пути g назовем *малой деформацией*. Мы показали сейчас, что при малой деформации пути g соответствующий ему путь g' не меняет своего конца. Нетрудно показать, что любая деформация пути g, не меняющая его концов, может быть получена путем ряда повторных малых деформаций. Таким образом, если мы подвергаем путь g произвольной непрерывной деформации, сохраняющей его концы, то соответствующий путь g' также претерпевает непрерывную деформацию, не меняющую его концов.

Пусть теперь x—произвольная точка из G и g—некоторый путь, соединяющий единицу e с точкой x. Пусть g'—путь, соответствующий пути g, и x'—его конец. Покажем, что точка x' определяется точкой x и не зависит от выбора пути g. Действительно, пусть h—другой путь, соединяющий e с x. Так как группа G односвязна, то пути h и g гомотопны и, следовательно, непрерывной деформацией можно перевести путь g в h. По ранее доказанному, в течение этого процесса соответствующий путь в G' не изменит своего конца; таким образом, точка x' определится как путем g, так и путем h. Итак, мы имеем право положить $x'=\varphi(x)$.

Покажем теперь, что существует окрестность $W\subset U$ единицы группы G, на которой $\varphi=f$. Пусть W—такая линейно связная окрестность единицы группы G, что $W^{-1}W\subset U$. Пусть g—путь в W, ведущий из e в x. Легко видеть, что путь $g'=fg$ удовлетворяет условию b) нашего построения. Действительно, так как $g(t)\in W$, то $(g(t))^{-1}\in W^{-1}\subset U$, и для любых t_1 и t_2 имеем $(g(t_1))^{-1}g(t_2)\in \in W^{-1}W\subset U$; следовательно, $f((g(t_1))^{-1}g(t_2))=f((g(t_1))^{-1})f(g(t_2))= =(f(g(t_1)))^{-1}f(g(t_2))=(g'(t_1))^{-1}g'(t_2)$. Таким образом, конец пути g' есть $f(x)$, т. е. $\varphi(x)=f(x)$ при $x\in W$.

Покажем, что отображение φ есть гомоморфное отображение алгебраической группы G в алгебраическую группу G'.

Пусть a и b—две произвольные точки из G. Через g и h обозначим пути, идущие от e соответственно к точкам a и b. Пути, соответствующие путям g и h, обозначим через g' и h', а их концы—через a' и b'. Очевидно, что путь $g(ah)=m$ идет от единицы e к точке ab. Аналогично, путь $g(a'h')=m'$ идет от e' к $a'b'$. Нетрудно проверить, что путь m' соответствует пути m. Таким образом, в силу построения отображения φ мы имеем $\varphi(ab)=a'b'=\varphi(a)\varphi(b)$, т. е. отображение φ гомоморфно.

Теперь нам осталось рассмотреть лишь случай, когда G' есть односвязная локально связная группа, а f—локальный изоморфизм. Если окрестность U выбрана достаточно малой, то отображение f^{-1} осуществляет локальный изоморфизм групп G' и G. Так как G' предполагается теперь односвязной и локально связной, то, по доказанному, локальный изоморфизм f^{-1} можно продолжить в открытый гомоморфизм ψ группы G' на группу G. Отображение $\psi(\varphi(x))=\chi(x)$ есть гомоморфное открытое отображение группы G на себя. В достаточно малой окрестности единицы группы G отображение $\chi(x)$ совпадает с отображением $f^{-1}(f(x))=x$. Таким образом, χ есть продолжение тождественного локального автоморфизма группы G. В силу доказанной единственности продолжения отображения χ есть тождественное отображение группы G на себя, а это значит, что отображения φ и ψ взаимно обратны. Таким образом, φ имеет однозначное обратное отображение и, следовательно, φ есть изоморфное отображение.

Итак, теорема 80 полностью доказана.

Теоремы 78, 79, 80 дают возможность ввести следующее определение.

Определение 46. Топологическую группу будем называть *допустимой*, если она линейно связна, локально связна и локально односвязна (см. § 49, D)). Пусть Г—класс всех допустимых групп, локально изоморфных некоторой группе. Из теорем 78, 79, 80 следует, что в классе Г имеется единственная, с точностью до изоморфизма, односвязная группа. Группа эта называется *универсальной накрывающей* для всех групп класса Г. Из теоремы 80 следует, что каждая группа класса Г получается из универсальной накрывающей этого класса путем факторизации по дискретному (и следовательно, центральному, см. теорему 15) нормальному делителю.

Нижеследующие примеры имеют важное теоретическое значение. В них вычисляются фундаментальные группы и центры *групп вращений* евклидовых пространств. В § 65 (см. пример 108) будут вычислены тем же методом фундаментальные группы и центры остальных двух серий *классических компактных групп Ли*.

Пример 89. Изучим при помощи кватернионов группы H_3 и H_4 вращений трехмерного и четырехмерного евклидовых пространств и покажем, в частности, что группы $\pi^1(H_3)$ и $\pi^1(H_4)$ имеют порядок 2.

Пусть K—тело кватернионов (см. § 26), D—содержащееся в нем поле действительных чисел, J—совокупность всех чисто мнимых кватернионов и G—группа кватернионов, по модулю равных единице. Многообразие G односвязно, так как оно гомеоморфно трехмерной сфере (см. пример 85). Каждой паре x, y кватернионов из G поставим в соответствие линейное преобразование $\varphi_{x,y}$ пространства K, положив

$$\varphi_{x,y}(u)=xuy^{-1}, \quad u\in K$$

Так как $|xuy^{-1}|=|u|$, то преобразование $\varphi_{x,y}$ является вращением четырехмерного евклидова пространства K. Оказывается, что, ставя в соответствие каждому элементу $(x, y)\in G\times G$ вращение $\lambda(x, y)=\varphi_{x,y}$, мы получаем гомоморфное отображение λ группы $G\times G$ на группу H_4 всех вращений четырехмерного пространства K. При этом ядро гомоморфизма λ состоит из двух элементов $(1, 1)$ и $(-1, -1)$. Так как группа $G\times G$ односвязна (см. § 49, F)), то из этого следует, что группа $\pi^1(H_4)$ имеет порядок 2. Далее, преобразование $\psi_x=\varphi_{x,x}$ оставляет неподвижной прямую D, а следовательно, отображает ортогональное к ней пространство J на себя и потому представляет собой вращение трехмерного пространства J. Оказывается, что, полагая $\mu(x)=\psi_x$, мы получаем гомоморфное отображение μ группы G на группу H_3 всех вращений трехмерного евклидова пространства J, причем ядро гомоморфизма μ является центром группы G и состоит из двух элементов 1 и -1. Таким образом, группа H_3 не имеет центра, а ее фундаментальная группа имеет порядок 2. Наконец, оказывается, что путь f

пространства G, ведущий из 1 в -1 и определяемый формулой

$$f(t) = \cos \pi t + k \sin \pi t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

переходит при отображении μ в замкнутый путь $g = \mu f$ в группе H_3, определяемый формулой

$$g(t) = \begin{Vmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Путь g порождает образующий элемент $\{g\}$ группы $\pi^1(H_3)$, имеющей порядок 2.

Прежде всего мы имеем:

$$\psi_{x,\,y}\psi_{x',\,y'} = \psi_{xx',\,yy'},$$

так что λ есть гомоморфное отображение группы $G \times G$ в группу H_4. Из этого следует, что μ есть гомоморфное отображение группы G в группу H_3. Покажем, что $\mu(G) = H_3$. Пусть $l = aj + bk$, где $a^2 + b^2 = 1$. Легко видеть, что

$$l^2 = -1, \quad li = -il. \tag{5}$$

Пусть теперь $x = \cos \beta + l \sin \beta$. Из (5) следует, что

$$\psi_x(i) = (\cos \beta + l \sin \beta) i (\cos \beta - l \sin \beta) = (\cos \beta + l \sin \beta)^2 i =$$
$$= (\cos 2\beta + l \sin 2\beta) i = i \cos 2\beta + (bj - ak) \sin 2\beta, \tag{6}$$

а из этого следует, что, подбирая надлежащим образом числа a, b, β, мы можем перевести кватернион i при помощи преобразования ψ_x в любой кватернион множества $S^2 = J \cap G$. Далее, полагая $a = 0$, $b = 1$, мы получаем из формулы (6)

$$\psi_x(i) = i \cos 2\beta + j \sin 2\beta, \tag{7}$$

и так как в этом случае элемент x перестановочен с k, то преобразованиями вида ψ_x можно осуществить любое вращение пространства J вокруг оси k. Так как G есть группа, то из сказанного следует, что преобразованиями вида ψ_x, $x \in G$, можно осуществить любое вращение пространства J. Далее, из закона умножения в K следует, что перестановочными с кватернионом i являются лишь такие кватернионы из G, которые имеют вид $a + bi$; точно так же перестановочными с j являются в G кватернионы вида $a + bj$. Таким образом, центр группы G состоит лишь из двух элементов 1 и -1, и ядро гомоморфизма μ также состоит из этих двух элементов. Из (7) следует формула (4).

Пусть, наконец, φ — произвольное вращение пространства K. Положим $\varphi(1) = z$. Тогда преобразование $\varphi_{1,z^{-1}}^{-1}\varphi$ оставляет неподвижной прямую D, т. е. может быть записано в виде $\varphi_{x,x}$. Таким образом,

$$\varphi = \varphi_{1,\ z^{-1}}\varphi_{x,\ x} = \varphi_{x,\ z^{-1}x},$$

и потому λ есть отображение на всю группу H_4. Если $\varphi_{x\ y}$ есть тождественное вращение, то оно оставляет неподвижной ось D и потому $x=y$. В силу ранее доказанного имеем также $x=\pm 1$. Таким образом, ядро гомоморфизма λ состоит из элементов $(1,\ 1)$ и $(-1,\ -1)$.

Пример 90. Пусть G—группа Ли, H—ее подгруппа и $M = G/H$—пространство (для определенности правых) смежных классов. Докажем, что если группы G и H связны, а многообразие M гомеоморфно r-мерной сфере, причем $r>2$, то группы $\pi^1(G)$ и $\pi^1(H)$ изоморфны между собой:

$$\pi^1(G) \approx \pi^1(H). \tag{8}$$

Этот сравнительно частный результат будет использован в дальнейшем при нахождении фундаментальных групп всех компактных классических групп Ли. Для его доказательства мы докажем предварительно нижеследующую лемму, которая может быть использована при установлении связей между фундаментальными группами многобразий G, H и M в общем случае.

Лемма. *Пусть φ—естественное отображение группы Ли G на многообразие $M=G/H$ ее (правых) смежных классов и g_t — непрерывная деформация отображений бикомпактного пространства R в многообразие M, а f_0—такое непрерывное отображение пространства R в многообразие G, что $\varphi f_0 = g_0$. Существует тогда непрерывная деформация f_t отображений пространства R в пространство G, называемая* накрывающей *для g_t, что $\varphi f_t = g_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Деформация f_t удовлетворяет еще тому дополнительному условию, что если $g_t(x_0) = g_0(x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x_0 \in R$, то $f_t(x_0) = f_0(x_0)$.*

Доказательство. Пусть L—такая площадка в G, пересекающая с H в e, что φ есть ее гомеоморфное отображение на некоторую окрестность точки $p=\varphi(e)$ в M (см. § 44, А)). Существует тогда настолько большое натуральное число n, что при $|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{n}$, $a \in \varphi^{-1}(g_{t_1}(x))$ площадка La пересекается со смежным классом $g_{t_2}(x)$ в единственной точке. Допустим, что деформация f_t уже определена для всех значений t, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant t \leqslant \frac{p}{n}$, и построим ее для значений t, удовлетворяющих неравенству $\frac{p}{n} \leqslant t \leqslant \frac{p+1}{n}$. Для этого точку $f_t\,(x)$ мы определим как точку пересечения площадки $Lf_{\frac{p}{n}}(x)$ со смежным классом $g_t\,(x)$. Непосредственно проверяется, что построенная деформация f_t является искомой.

Перейдем теперь к доказательству соотношения (8). Соображения, которые будут при этом применены, могут быть использованы и для получения более общих результатов.

Пусть g—произвольный замкнутый путь из M, начинающийся в точке $p=\varphi(e)$. Его мы можем рассматривать как непрерывную деформацию g_t отображений одноточечного пространства $R=\{c\}$, положив $g_t(c)=g(t)$. В силу леммы существует в G путь f, начинающийся в e и удовлетворяющий условию $\varphi f=g$. Конец пути f лежит в H, и если подгруппа H связна, то путь f можно продолжить до точки e. Таким образом, мы получаем замкнутый путь f в G, выходящий из точки e и удовлетворяющий условию $\varphi f\sim g$. Мы видим, следовательно, что в случае связных групп G и H гомоморфизм $\hat{\varphi}$ есть гомоморфизм на всю группу $\pi^1(M)$. Далее, из леммы следует, что если путь g гомотопен нулю в M, то накрывающий его путь f может быть непрерывной деформацией переведен в путь из H. Таким образом, ядро гомоморфизма $\hat{\varphi}$ состоит из всех тех пучков замкнутых путей, представители которых содержатся в H. Пусть, наконец, f—замкнутый путь в H, начинающийся в e и гомотопный нулю в G. Так как путь f замкнут, то можно считать, что f есть непрерывное отображение некоторой окружности S^1 в H. Так как отображение f гомотопно нулю в G, то отображение f можно распространить на круг E^2, ограниченный окружностью S^1. Отображение φf круга E^2 в многообразие M переводит его границу в точку p и, если многообразие M есть сфера, размерность которой больше чем два, то, как легко видеть, отображение φf круга E^2 можно непрерывно деформировать, не меняя его на краю S^1, в отображение, переводящее весь круг в точку p. Накрывающая деформация переведет круг E^2 в H, также не меняя отображения на краю круга. Таким образом, в этом случае путь f гомотопен нулю в H. Из сказанного следует справедливость соотношения (8).

Пример 91. Пусть H_n—группа всех вращений n-мерного евклидова пространства E^n, $n\geqslant 3$, или, что то же самое, группа всех ортогональных матриц порядка n с положительными детерминантами. Оказывается, что фундаментальная группа пространства H_n имеет порядок два, так что универсальное накрытие группы H_n группой $\widetilde{H}_n$ двуслойно. Далее, при нечетном n центр группы H_n содержит лишь единичную матрицу e, при четном же n центр группы H_n состоит из двух матриц e и $-e$. Таким образом, при нечетном n центр группы $\widetilde{H}_n$ есть циклическая группа второго порядка, при четном же n центр группы $\widetilde{H}_n$ есть группа четвертого порядка. Более полно, если n делится на четыре, то центр группы $\widetilde{H}_n$ есть прямое произведение двух циклических групп второго порядка, если же n четно, но не делится на четыре, то центр группы $\widetilde{H}_n$ есть циклическая группа четвертого порядка.

Для вычисления фундаментальной группы многообразия H_n будем рассматривать группу H_n как транзитивную группу преобразований $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} евклидова пространства E^n. Пусть $p \in S^{n-1}$. Стабильная подгруппа группы H_n, соответствующая точке p (см. § 3, K)), очевидно, изоморфна группе H_{n-1}, так что мы обозначим ее через H_{n-1}. Таким образом, $H_n/H_{n-1}=S^{n-1}$, и в силу результатов примера 90 фундаментальные группы многообразий H_n и H_{n-1} изоморфны между собой при $n \geqslant 4$. Так как фундаментальная группа многообразия H_3 имеет порядок 2 (см. пример 89), то фундаментальная группа многообразия H_n, $n \geqslant 3$, также имеет порядок 2.

Покажем, что всякая квадратная матрица z порядка n, перестановочная со всеми матрицами группы H_n, скалярна. Пусть $a(p, q)=a$—матрица из H_n, зависящая от двух целых чисел p и q, $p \neq q$, $1 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, в которой отличны от нуля лишь элементы

$$a_{ii}=1, \quad i \neq p, \ i \neq q; \quad a_{pq}=-a_{qp}=1.$$

Из соотношения $za=az$ мы получаем, в частности, для элементов матрицы z соотношения

$$z_{pp}=z_{qq}, \tag{9}$$

$$z_{\alpha p}=z_{\alpha q}=0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq p, \ \alpha \neq q \tag{10}$$

Если $z_{\alpha\beta}$ есть недиагональный элемент матрицы z и $n \geqslant 3$, то можно подобрать числа p и q так, чтобы было $q=\beta$, $p \neq \alpha$, и из (10) следует, что $z_{\alpha\beta}=0$. Таким образом, матрица z диагональна, а из (9) следует, что она скалярна. Таким образом, центр группы H_n состоит из скалярных матриц. В группе H_n при нечетном n имеется только одна скалярная матрица e, а при четном n—только две скалярные матрицы e и $-e$. Итак, центр группы H_n вычислен.

Пусть теперь n четно; вычислим центр группы $\widetilde{H}_n$. Построим путь f в группе H_n, ведущий из e в $-e$. Пусть $\sigma(t)$—матрица второго порядка, определяющая вращение плоскости на угол πt, так что

$$\sigma(t)=\begin{Vmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{Vmatrix}.$$

Составим матрицу $f(t)$ порядка n, определив ее как состоящую из $\frac{n}{2}$ ящиков $\sigma(t)$, стоящих вдоль диагонали. Путь $f(t)$ ведет из e в $-e$. Накрывающий путь $\widetilde{f}$ в группе $\widetilde{H}_n$ ведет из единицы в центральный элемент u, образ которого при естественном гомоморфизме есть $-e$. Из этого следует, что если центр группы $\widetilde{H}_n$ есть циклическая группа четвертого порядка, то u есть элемент четвертого порядка, если же центр группы $\widetilde{H}_n$ есть прямая сумма двух групп второго порядка, то элемент u имеет порядок 2. В силу определения закона умножения в накрывающей группе $\widetilde{H}_n$ (см. доказательство теоремы 79) элемент u^2 является концом пути, накрывающего путь $f((-e)f)$. Путь $f((-e)f)$ можно описать как путь $g(t)$, задаваемый формулой $g(t)=f(2t)$. Таким образом, если замкнутый путь g в многообразии H_n гомотопен нулю, то элемент u^2 имеет порядок один, а элемент u—порядок два, если же замкнутый путь g в пространстве H_n не гомотопен нулю, то элемент u^2 имеет порядок два, а элемент u—порядок четыре. Для исследования замкнутого пути g составим квадратную матрицу $h(t^1, \ldots, t^{\frac{n}{2}})$ порядка n, поставив вдоль ее диагонали ящички $\sigma(t^1), \ldots, \sigma(t^{\frac{n}{2}})$. Функция h дает отображение $\frac{n}{2}$-мерного куба в H_n. Диагональ этого куба, ведущая из его вершины $(0, 0, \ldots, 0)$ в вершину $(1, 1, \ldots, 1)$, переходит при отображении h в путь g, каждое же ребро переходит в путь, не гомотопный нулю (см. пример 89, (4)). Так как в кубе размерности $\frac{n}{2}$ диагональ куба гомотопна пути, составленному из $\frac{n}{2}$ его ребер, то мы видим, что путь g тогда и только тогда гомотопен нулю, когда число $\frac{n}{2}$ четно.

Итак, вопрос о структуре центра группы $\widetilde{H}_n$ решен полностью.

Пример 92. Пусть G—группа кватернионов, по модулю равных единице (см. § 26, А)), и H—совокупность всех кватернионных единиц, т. е. элементов ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Множество H есть, очевидно, некоммутативная подгруппа порядка восемь группы G. Таким образом, многообразие G/H смежных классов есть трехмерное многообразие с некоммутативной фундаментальной группой, изоморфной группе H (см. § 50, Е)).

ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

Понятие группы Ли было определено в седьмой главе. Там же были установлены простейшие свойства групп Ли. Здесь на основе результатов седьмой главы группы Ли будут изучены более детально. Каждой группе Ли будет поставлен в соответствие более элементарный алгебраический объект, именно, *алгебра Ли.* Далее будет показано, что локальное изучение группы Ли полностью сводится к изучению ее алгебры Ли. Это и составит основное содержание настоящей главы. Будут также рассмотрены некоторые примыкающие сюда понятия. Более глубокие результаты Киллинга [17], Картана [6] и Вейля [45] будут изложены (однако, только для компактных групп Ли) в главе одиннадцатой.

В седьмой главе было показано, что при изучении групп Ли рассматривают дифференцируемые функции нескольких переменных. Таким образом, здесь мы сможем полностью использовать аппарат дифференциального исчисления и теории дифференциальных уравнений. Это и составит основной метод исследования в настоящей главе. Ввиду значительных вычислений, с которыми нам придется столкнуться, я буду пользоваться здесь, так же, как и в седьмой главе, тензорными обозначениями.

§ 52. Структурные константы. Алгебра Ли

Здесь будут введены *структурные константы* группы Ли. Они образуют тензор, т. е. при преобразовании координат в группе Ли преобразуются как компоненты тензора. *Алгебра Ли* представляет собой инвариантный относительно выбора системы координат эквивалент совокупности структурных констант. Здесь будут установлены основные соотношения между структурными константами, составляющие содержание третьей теоремы Ли (см. теорему 81), и соответствующие им соотношения в алгебре Ли.

Основной метод настоящего параграфа заключается в разложении рассматриваемых функций в ряды Тейлора с точностью до членов второго, а иногда и третьего порядка. Изучение получающихся здесь коэффициентов и приведет нас к структурным константам, а также соотношениям между ними. Можно было бы, конечно, провести исследование в терминах производных, как это обычно делается, но пользование рядами Тейлора представляется мне более целесообразным.

А) Остаточные члены рядов не будут выписываться подробно. Мы просто будем обозначать их через ε с различными индексами, порядок же малости каждого ε будет специально оговариваться. В том случае, когда ε зависит от аргументов $x_1, \ldots, x_n$, мы будем говорить, что ε относительно этих аргументов *имеет порядок малости* $q+1$, если $\frac{\varepsilon}{\rho^q}$, где $\rho=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, стремится к нулю одновременно с ρ.

В) В дальнейшем мы будем обозначать координаты точки или вектора той же буквой, что и сами точку или вектор, но с индексами наверху. Это избавит нас от необходимости каждый раз заново вводить обозначения.

Определение 47. Пусть G—некоторая r-мерная локальная группа Ли и D—некоторая дифференцируемая система координат в ней (см. определение 39). Если x и y—два элемента группы G, достаточно близкие к единице e, то произведение $f=xy=f(x, y)$ также достаточно близко к e, и закон умножения можно записать в координатной форме, пользуясь системой D:

$$f^i=f^i(x, y)=f^i(x^1, \ldots, x^r; y^1, \ldots, y^r). \tag{1}$$

Так как координаты единицы все равны нулю, то мы получаем следующие соотношения:

$$f^i(x, e)=f^i(x^1, \ldots, x^r; 0, \ldots, 0)=x^i, \tag{2}$$

$$f^i(e, y)=f^i(0, \ldots, 0; y^1, \ldots, y^r)=y^i. \tag{3}$$

Так как функции f^i по условию трижды непрерывно дифференцируемы, то их можно разложить в ряды Тейлора до членов третьего порядка. Вследствие соотношений (2) и (3) эти разложения имеют несколько специальный вид, который нетрудно обнаружить; именно, мы имеем:

$$f^i=x^i+y^i+a^i_{jk}x^jy^k+g^i_{jkl}x^jx^ky^l+h^i_{jkl}x^jy^ky^l+\varepsilon^i_1, \tag{4}$$

где ε^i_1 есть величина четвертого порядка малости относительно координат точек x и y. Числа

$$c^i_{jk}=a^i_{jk}-a^i_{kj} \tag{5}$$

называются *структурными константами* группы G в координатах D. Структурные константы удовлетворяют очевидному соотношению

$$c^i_{jk}=-c^i_{kj}. \tag{6}$$

Очевидно, что для определения структурных констант можно использовать дважды дифференцируемые координаты.

Соотношение (4) показывает, что группа Ли в первом приближении коммутативна и изоморфна r-мерной векторной группе. Однако уже второе приближение дает уклонение от коммутативности. Нетрудно показать, впрочем, что даже коммутативная группа в некоторых координатах может иметь в разложении (4) отличные от нуля члены второго порядка. Но в случае коммутативной группы G мы, очевидно, имеем $a^i_{jk}=a^i_{kj}$, поэтому структурные константы коммутативной группы равны нулю. Это обстоятельство и является первым наводящим указанием на то, что структурные константы являются весьма существенными для группы Ли. Позднее будет доказано, что структурные константы целиком определяют локальную структуру группы Ли, чем и объясняется их название.

Дадим теперь другое определение структурных констант, дальше вскрывающее их смысл.

C) Пусть x и y—два элемента группы G. Рассмотрим коммутатор q (см. § 4, C)) элементов x и y:

$$q=xyx^{-1}y^{-1}=q(x,\ y). \tag{7}$$

Оказывается, что в координатах соотношение (7) имеет вид

$$q^i=c^i_{jk}x^jy^k+\varepsilon^i_2 \tag{8}$$

(см. (5)), где ε^i_2 есть величина третьего порядка малости относительно координат точек x и y. Соотношение (8) может служить новым определением структурных констант и из него следует, что структурные константы образуют тензор. Из соотношений (4), (5) и (8) вытекает непосредственно, что

$$q^i(x,\ y)=f^i(x,\ y)-f^i(y,\ x)+\varepsilon^i_3, \tag{9}$$

где ε^i_3 также имеет третий порядок малости.

Для доказательства соотношения (8) вычислим прежде всего в координатной форме элемент z', обратный к z, $zz'=e$. Пользуясь соотношением (4), получаем:

$$z'^i=-z^i+a^i_{jk}z^jz^k+\varepsilon^i_4. \tag{10}$$

Если теперь $z^*=xy$ и $z=yx$, то из (4), (7), (5) и (10) получаем $q=z^*z'$ и

$$q^i=(x^i+y^i+a^i_{jk}x^jy^k)+(-x^i-y^i-a^i_{kj}x^jy^k+$$
$$+a^i_{jk}(x^j+y^j)(x^k+y^k))-a^i_{jk}(x^j+y^j)(x^k+y^k)+\varepsilon^i_2=c^i_{jk}x^jy^k+\varepsilon^i_2.$$

Таким образом, соотношение (8) доказано.

Т е о р е м а 81. *Структурные константы группы Ли G* (см. определение 47) *удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$c^p_{ij}=-c^p_{ji}, \tag{11}$$

$$c^p_{is}c^s_{jk}+c^p_{js}c^s_{ki}+c^p_{ks}c^s_{ij}=0. \tag{12}$$

Соотношение (12) *находится в тесной связи с ассоциативностью умножения в группе и для его доказательства используются трижды дифференцируемые координаты.*

Доказательство. Соотношение (11) было уже указано (см. (6)). Для доказательства соотношения (12) достаточно выразить в координатной форме закон ассоциативности умножения в G. Положим

$$u = yz, \quad v = xy, \quad w = xu, \quad w' = vz$$

и запишем в координатной форме равенство $w = w'$. Пользуясь соотношением (4) и проводя все вычисления с точностью до членов третьего порядка, получаем:

$$\begin{aligned} w^p = x^p + (y^p + z^p + a^p_{jk} y^j z^k + g^p_{ijk} y^i y^j z^k + h^p_{ijk} y^i z^j z^k) + \\ + a^p_{is} x^i (y^s + z^s + a^s_{jk} y^j z^k) + g^p_{ijk} x^i x^j (y^k + z^k) + \\ + h^p_{ijk} x^i (y^j + z^j)(y^k + z^k) + \varepsilon^p_5, \\ w'^p = (x^p + y^p + a^p_{ij} x^i y^j + g^p_{ijk} x^i x^j y^k + h^p_{ijk} x^i y^j y^k) + \\ + z^p + a^p_{sk} (x^s + y^s + a^s_{ij} x^i y^j) z^k + g^p_{ijk} (x^i + y^i)(x^j + y^j) z^k + \\ + h^p_{ijk} (x^i + y^i) z^j z^k + \varepsilon^p_6, \end{aligned}$$

где ε^p_5 и ε^p_6 имеют четвертый порядок малости.

Сравнение членов первого порядка в полученных выражениях для w^p и w'^p дает:

$$x^p + (y^p + z^p) = (x^p + y^p) + z^p.$$

Сравнение членов второго порядка дает:

$$a^p_{jk} y^j z^k + a^p_{is} x^i y^s + a^p_{is} x^i z^s = a^p_{ij} x^i y^j + a^p_{sk} x^s z^k + a^p_{sk} y^s z^k.$$

Таким образом, равенство членов первого и второго порядков выполняется тождественно.

Перейдем теперь к сравнению членов третьего порядка. При этом мы ограничимся лишь сравнением тех членов, которые одновременно зависят от координат всех трех точек x, y и z; для них равенство должно выполняться отдельно. Впрочем, остальные члены третьего порядка оказываются равными тождественно, так что сравнение коэффициентов при этих членах не дало бы никаких соотношений. Итак, получаем:

$$a^p_{is} x^i a^s_{jk} y^j z^k + h^p_{ijk} x^i (y^j z^k + y^k z^j) = a^p_{sk} a^s_{ij} x^i y^j z^k + g^p_{ijk} (x^i y^j + x^j y^i) z^k.$$

Сравнивая коэффициенты в последнем соотношении, имеем:

$$a^p_{is} a^s_{jk} - a^p_{sk} a^s_{ij} = -h^p_{ijk} - h^p_{ikj} + g^p_{ijk} + g^p_{jik}. \tag{13}$$

Исключим теперь из последнего соотношения члены, стоящие в правой части. Для этого переставим в нем всеми возможными способами индексы i, j, k. Получаемые таким образом шесть соотношений распадаются на четные и нечетные в зависимости от четности или нечетности соответственной перестановки индексов. Сложим все шесть соотношений, взяв четные со знаком плюс, а нечетные—со знаком минус. Получаемое в результате сложения соотношение (a) имеет в правой части нуль, а в левой—двенадцать членов. Если теперь в соотношении (12) заменить структурные константы их выражениями из соотношения (5), то мы получим соотношение (b), которое также содержит в левой части двенадцать членов, а в правой—нуль. Нетрудно сообразить, исходя из общего характера членов, что соотношения (a) и (b) совпадают. Таким образом, соотношение (12) является следствием соотношений (13) и (5).

Итак, теорема 81 доказана.

Перейдем к построению *алгебры Ли*.

Определение 48. Пусть R—r-мерное векторное пространство над полем K (в дальнейшем K всегда будет полем действительных или комплексных чисел), в котором дополнительно установлена некоторая операция композиции векторов: каждой паре векторов a и b ставится в соответствие вектор $c=[a, b]$, называемый *коммутатором* векторов a и b. При этом операция коммутирования удовлетворяет следующим условиям:

$$[\alpha a+\alpha' a', b]=\alpha[a, b]+\alpha'[a', b] \tag{14}$$

(α и α'—элементы поля K); далее,

$$[a, b]+[b, a]=0 \tag{15}$$

и

$$[a, [b, c]]+[b, [c, a]]+[c, [a, b]]=0. \tag{16}$$

Векторное пространство R с таким образом установленной в нем операцией коммутирования будем называть *алгеброй Ли над полем* K (если K—поле действительных чисел, то R будем называть *действительной алгеброй Ли*, если K—поле комплексных чисел, то R будем называть *комплексной алгеброй Ли*. Алгебра Ли группы Ли (см. теорему 82) всегда действительна, и мы будем называть ее просто *алгеброй Ли*. Если $[a, b]=0$ для любых двух векторов a и b из R, то алгебра R называется *коммутативной*.

Ввиду линейности операции коммутирования (см. (14), (15)) в координатной форме она запишется в виде

$$c^i=[a, b]^i=\overset{*}{c}{}^i_{jk}a^j b^k. \tag{17}$$

Элементы $\overset{*}{c}{}^i_{jk}$ поля K называются *структурными константами* алгебры Ли R в данной системе координат. Из соотношений (15) и (16) вытекают следующие соотношения для структурных констант алгебры Ли R:

$$\overset{*}{c}{}^i_{jk} = -\overset{*}{c}{}^i_{kj}, \tag{18}$$

$$\overset{*}{c}{}^p_{is}\overset{*}{c}{}^s_{jk} + \overset{*}{c}{}^p_{js}\overset{*}{c}{}^s_{ki} + \overset{*}{c}{}^p_{ks}\overset{*}{c}{}^s_{ij} = 0. \tag{19}$$

Легко видеть, что если, обратно, элементы $\overset{*}{c}{}^i_{jk}$ удовлетворяют соотношениям (18) и (19), то, определив операцию коммутирования соотношениями (17), мы получим некоторую алгебру Ли. Таким образом, рассмотрение структурных констант $\overset{*}{c}{}^i_{jk}$, удовлетворяющих соотношениям (18) и (19), вполне эквивалентно рассмотрению алгебры Ли R.

Теорема 82. *Пусть G—r-мерная локальная группа Ли. В силу предложения* С) § 41 *каждой дифференцируемой кривой $x(t)$, заданной в G, соответствует касательный вектор a. Таким образом, с группой G ставится в связь r-мерное векторное пространство R. Установим в R операцию коммутирования* (см. определение 48), *исходя из свойств группы G. Пусть a и b—два вектора из R,* а *$x(t)$ и $y(t)$—две кривые, для которых векторы a и b являются касательными. Положим*

$$q(t) = x(t)y(t)(x(t))^{-1}(y(t))^{-1}. \tag{20}$$

Тогда $q(t)$ определяет кривую в G. Введем на этой кривой новый параметр s, положив $t = \sqrt{s}$. Получаемая таким образом кривая $q(\sqrt{s})$, определенная для неотрицательных значений параметра s, имеет касательный вектор c, который определяется векторами a и b. Мы определим коммутатор $[a, b]$, положив $[a, b] = c$. Установленная таким образом в пространстве R операция коммутирования удовлетворяет условиям (14), (15) *и* (16). *Полученная (действительная) алгебра Ли R называется* алгеброй Ли группы Ли *G: $G \to R$. Структурные константы группы G и алгебры R в соответственных координатах совпадают* (см. определения 47 и 48).

Доказательство. Для доказательства введем в G некоторые дифференцируемые координаты и вычислим вектор c в координатной форме. Легко видеть, что $c^i = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{q^i(t)}{t^2}$. В силу соотношения (8) мы имеем:

$$c^i = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}(c^i_{jk}x^j(t)y^k(t) + \varepsilon^i_7(t)) = c^i_{jk}a^jb^k$$

($\varepsilon^i_7(t)$ имеет третий порядок малости по отношению к t). Таким образом, получаем:

$$c^i = [a, b]^i = c^i_{jk}a^jb^k.$$

Следовательно, структурные константы алгебры Ли R совпадают со структурными константами группы Ли G. Так как структурные константы группы G удовлетворяют соотношениям (11) и (12), то коммутирование в R удовлетворяет условиям (14), (15) и (16), т. е. R действительно есть алгебра Ли.

D) Для того чтобы калькулятивно наиболее быстро получить операцию коммутирования в алгебре Ли R группы Ли G, можно поступить следующим образом. Пусть

$$\overset{*}{q}{}^i(x, y)=\overset{*}{q}{}^i(x^1, \ldots, x^r; y^1, \ldots, y^r)$$

есть сумма всех членов второго порядка в разложении для разности $f^i(x, y)-f^i(y, x)$ (см. (1)). Тогда вектор $c=[a, b]$ в координатной форме запишется следующим образом:

$$c^i=\overset{*}{q}{}^i(a^1, \ldots, a^r; b^1, \ldots, b^r). \tag{21}$$

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из соотношения (9).

Роль алгебр Ли объясняется тем, что каждой (действительной) алгебре Ли однозначно соответствует некоторая локальная группа Ли. Доказательству этого факта будут посвящены дальнейшие параграфы. Вопрос о том, соответствует ли каждой алгебре Ли R некоторая полная группа Ли, представляется более сложным, но также решается положительно. Конечно, здесь уже не может идти речь об однозначности. Одной и той же алгебре R может соответствовать несколько неизоморфных полных групп Ли, однако все эти группы Ли локально изоморфны между собой и вопрос о их взаимосвязи решается результатами девятой главы.

П р и м е р 93. Пусть R—трехмерное векторное пространство, в котором обычным способом определено векторное произведение: каждой паре векторов a и b соответствует их векторное произведение $[a, b]$. Если теперь принять за коммутатор двух векторов a и b их векторное произведение $[a, b]$, то в силу известных правил векторного исчисления здесь будут выполнены условия определения 48. Таким образом, мы получаем алгебру Ли R.

Покажем, что R есть алгебра Ли группы G кватернионов, по модулю равных единице. Так как группа G локально изоморфна группе H_3 вращений трехмерного евклидова пространства, то этим будет доказано, что R есть алгебра Ли группы H_3 (см. пример 89). Каждый кватернион $x \in G$, близкий к единице, запишем в виде

$$x=1+\frac{x'}{\sqrt{2}}+\varepsilon,$$

где x' есть чисто мнимый кватернион, компоненты которого принимаются за координаты элемента x в группе G, а ε—действительный кватернион второго порядка малости относительно вектора x'. В силу предложения D) для построения операции коммутирования следует для двух кватернионов x, y из G, близких к единице, вычислить выражение $xy-yx$ и выделить из него билинейную форму относительно координат элементов x и y, откинув малые третьего порядка. Мы имеем:

$$xy-yx=\left(1+\frac{x'}{\sqrt{2}}+\varepsilon_1\right)\left(1+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\varepsilon_2\right)-$$
$$-\left(1+\frac{y'}{\sqrt{2}}+\varepsilon_2\right)\left(1+\frac{x'}{\sqrt{2}}+\varepsilon_1\right)=\frac{x'y'-y'x'}{2}+\varepsilon_3=$$
$$=\frac{-(x',\ y')+[x',\ y']+(y',\ x')-[y',\ x']}{2}+\varepsilon_3=[x',\ y']+\varepsilon_3,$$

где $(x',\ y')$—скалярное, а $[x',\ y']$—векторное произведение в пространстве J всех чисто мнимых кватернионов (см. пример 47).

§ 53. Подалгебра. Факторалгебра. Гомоморфное отображение

В предыдущем параграфе каждой группе Ли G была поставлена в соответствие ее алгебра Ли R. Здесь мы сконструируем те алгебраические понятия, которые соответствуют подгруппе, нормальному делителю, факторгруппе и гомоморфному отображению группы G.

A) Пусть R—алгебра Ли над полем K (см. определение 48). Множество S векторов пространства R мы будем называть *подалгеброй* алгебры R, если выполнены следующие условия: a) множество S есть линейное подпространство пространства R, т. е. наряду с каждыми двумя векторами a и b из S в S входит также и вектор $\alpha a+\beta b$, где α и β—любые элементы поля K; b) если a и b—два вектора из S, то вектор $[a,\ b]$ также принадлежит S. Очевидно, что каждое одномерное векторное подпространство алгебры R является ее подалгеброй. Подалгебра S алгебры Ли R называется ее *идеалом*, если c) при $a\in R$, $b\in S$ имеем $[a,\ b]\in S$. Алгебра Ли R называется *простой*, если она не имеет идеалов, отличных от R и $\{0\}$. Идеал S называется *центральным*, если d) при $a\in R$, $b\in S$ имеем $[a,\ b]=0$. Множество всех таких элементов $b\in R$, что $[a,\ b]=0$ для всех $a\in R$, является максимальным центральным идеалом алгебры R и называется ее *центром*.

Следующая теорема оправдывает введенную в A) терминологию:

Теорема 83. *Пусть G—некоторая локальная группа Ли, R—ее алгебра Ли и H—некоторая подгруппа группы G. Множество всех векторов, которые являются касательными к кривым, проходящим в H* (см. § 41, C)), *обозначим через S. Тогда S есть подалгебра алгебры R, являющаяся алгеброй Ли группы Ли H. Мы будем говорить, что подгруппе H* соответствует *подалгебра S: $H\rightarrow S$. Если H есть нормальный делитель группы G, то S есть идеал алгебры R. Если H есть центральный нормальный делитель группы G, то S есть центральный идеал алгебры R.*

Доказательство. В силу теоремы 62 H есть дифференцируемое подмногообразие многообразия G; поэтому S есть линейное подпространство пространства R. Таким образом, условие а) определения А) выполнено. Докажем, что выполнено также условие b). Пусть a и b—два вектора из S, а $x(t)$ и $y(t)$—те кривые из H, для которых векторы a и b являются касательными. Для того, чтобы найти вектор $c=[a,b]$ рассмотрим кривую $q(t)=x(t)y(t)\,(x(t))^{-1}(y(t))^{-1}$ (см. теорему 82). Кривая эта также лежит в H, ибо H есть группа. Следовательно, и кривая $q(\sqrt{s})$ лежит в H. Таким образом, вектор c, касательный к кривой $q(\sqrt{s})$, принадлежит S, и мы имеем $[a, b]\in S$.

Докажем соотношение с) определения А) в случае, когда H есть нормальный делитель группы G. Пусть $a\in R$ и $b\in S$. Через $x(t)$ обозначим какую-нибудь кривую из G с касательным вектором a, а через $y(t)$—какую-нибудь кривую из H с касательным вектором b. Элемент $x(t)y(t)(x(t))^{-1}$ принадлежит H, ибо H есть нормальный делитель, поэтому элемент $q(t)=x(t)y(t)(x(t))^{-1}(y(t))^{-1}$ также принадлежит H. Следовательно, кривая $q(\sqrt{s})$ проходит в H, и касательный к ней вектор $c=[a, b]$ принадлежит S.

Для разбора случая, когда H есть центральный нормальный делитель, продолжим наши рассуждения, относящиеся к нормальному делителю. В этом случае кривая $q(t)$, как легко видеть, вырождается в точку e, и потому касательный вектор c есть нулевой вектор.

Таким образом, теорема 83 доказана.

В) Пусть R—некоторая алгебра Ли над полем K и S—ее идеал (см. А)). Разобьем векторную группу R на смежные классы по подгруппе S. Получаемое таким образом множество R^* смежных классов в свою очередь образует векторное пространство над полем K. В пространстве R^* естественным образом вводится операция коммутирования (см. определение 48). Пусть A и B—два смежных класса. Пусть, далее, $a\in A$ и $b\in B$. Положим $c=[a, b]$. Покажем, что смежный класс C, содержащий элемент c, не зависит от выбора элементов a и b, а определяется классами A и B. Для доказательства возьмем произвольный элемент $a'\in A$ и покажем, что $c'=[a', b]\in C$. Действительно, $c'-c=[a', b]-[a, b]=[a'-a, b]\in S$ (см. А), с)). Таким образом, $c'\in C$. Коммутатор $[A, B]$ элементов A и B определим, положив $[A, B]=C$. Так как операция коммутирования в R удовлетворяет условиям (14), (15), (16) § 52, то те же условия выполнены и в R^*. Таким образом, R^* есть алгебра Ли над полем K; R^* называется *факторалгеброй* алгебры Ли R по ее идеалу S, в обозначениях: $R^*=R/S$.

С) Пусть R и R'—две алгебры Ли над полем K и g—отображение алгебры R в R'. Отображение g называется *гомоморфным*, если выполнены следующие условия:

a) отображение g линейно, т. е. при произвольных элементах α и β из K имеем:

$$g(\alpha a+\beta b)=\alpha g(a)+\beta g(b), \quad \text{где} \quad a\in R,\ b\in R;$$

b) $$g([a,\ b])=[g(a),\ g(b)], \quad \text{где} \quad a\in R,\ b\in R.$$

Множество S всех элементов из R, переходящих в нуль алгебры R' при отображении g, называется *ядром* гомоморфизма g. Гомоморфное отображение называется *изоморфным*, если оно взаимно однозначно. Алгебры Ли R и R' называются *изоморфными*, если существует изоморфное отображение одной алгебры на другую. Изоморфное отображение алгебры Ли на себя называется ее *автоморфизмом*.

D) Пусть R и R' — две алгебры Ли над полем K, g — гомоморфное отображение алгебры R на R' и S — ядро гомоморфизма g. Тогда S есть идеал алгебры R и факторалгебра R/S изоморфна алгебре R' (см. A), B), C)).

Так как g есть линейное отображение пространства R на пространство R', то S есть линейное подпространство пространства R. Пусть $a\in R$, $b\in S$. Тогда

$$g([a,\ b])=[g(a),\ g(b)]=[g(a),\ 0]=0.$$

Таким образом, $[a,\ b]\in S$, т. е. S есть идеал алгебры Ли R.

Пусть теперь a' — некоторый элемент из R'. Обозначим через A множество всех элементов из R, переходящих в a' при отображении g. Так как g есть гомоморфное отображение векторной группы R на векторную группу R', то из общих теорем о гомоморфизме групп следует, что A есть смежный класс по S. Таким образом, имеется уже взаимно однозначное соответствие между элементами факторалгебры R/S и элементами алгебры R'. Доказательство того, что это соответствие дает изоморфизм алгебр Ли R/S и R', тривиально.

Следующая теорема оправдывает введенные нами понятия.

Теорема 84. *Пусть G и G' — две локальные группы Ли и f — локальное гомоморфное отображение группы G в группу G'. Обозначим через R и R' алгебры Ли групп G и G'. Пусть $a\in R$ и $x(t)$ — некоторая кривая из G, имеющая вектор a касательным. Тогда $f(x(t))$ дает кривую в G', касательный вектор к которой мы обозначим через a'. Вектор a' определяется вектором a, т. е. не зависит от выбора кривой $x(t)$ (лишь бы она имела касательный вектор a), так что мы можем положить $a'=g(a)$. При этом g есть гомоморфное отображение алгебры Ли R в алгебру Ли R'. Если f есть гомоморфное отображение на всю группу G', то g есть также гомоморфизм на всю алгебру R'. Таким образом, каждому гомоморфизму f группы G в G' естественно соответствует гомоморфизм g алгебры R в R': $f\to g$. Обозначим через N ядро* *гомоморфизма f и через S—ядро гомоморфизма g. Тогда подгруппе N группы G соответствует идеал S алгебры Ли R, $N \rightarrow S$* (см. теорему 83). *Таким образом, если f есть изоморфизм, то и g есть изоморфизм.*

Доказательство. Так как $f(G)$ есть подгруппа локальной группы G', то при доказательстве мы ограничимся рассмотрением случая, когда f есть гомоморфное отображение группы G на всю группу $G'=f(G)$. В силу теоремы 63 отображение f может быть выражено при помощи дифференцируемых функций. Отсюда легко следует, что данное в формулировке теоремы отображение g определено однозначно и является линейным отображением пространства R на пространство R'. Пусть теперь $x(t)$ и $y(t)$—две кривые в G. а a и b—касательные к ним векторы. Положим

$$q(t)=x(t)y(t)(x(t))^{-1}(y(t))^{-1}.$$

Тогда вектор $c=[a, b]$ является касательным к кривой $q(\sqrt{s})$ (см. теорему 82). Векторы $a'=g(a)$ и $b'=g(b)$ являются касательными к кривым $x'(t)=f(x(t))$ и $y'(t)=f(y(t))$. Для определения вектора $c'=[a', b']$ рассмотрим кривую

$$q'(t)=x'(t)y'(t)\ (x'(t))^{-1}(y'(t))^{-1}.$$

Так как отображение f гомоморфно, то $q'(\sqrt{s})=f(q\sqrt{s})$. Таким образом, $g(c)=c'$, и гомоморфность отображения g доказана.

Обозначим через S' тот идеал, который соответствует подгруппе N (см. теорему 83). Так как всякая проходящая в N кривая при гомоморфизме f переходит в точку e', то $S' \subset S$. Равенство $S'=S$ следует из подсчета размерностей.

Таким образом, теорема 84 доказана.

E) Пусть G, G', G''—три локальные группы Ли, а R, R', R''—их алгебры Ли. Допустим, что заданы локальные гомоморфизмы f' и f'' группы G в группу G' и группы G' в группу G''. Соответственные гомоморфизмы алгебр Ли обозначим через g' и g'', $f' \rightarrow g'$, $f'' \rightarrow g''$ (см. теорему 84). Положим $f=f''f'$, $g=g''g'$. Тогда гомоморфизму f соответствует гомоморфизм g, т. е. $f \rightarrow g$.

Доказательство утверждения E) непосредственно следует из самого определения соответствия, данного в теореме 84. Если $x(t)$—некоторая кривая из G с касательным вектором a, то кривая $f'(x(t))$ имеет касательным вектор $g'(a)$, поэтому кривая $f''(f'(x(t)))$ имеет касательным вектор $g''(g'(a))$. Таким образом, кривая $f(x(t))$ имеет касательным вектор $g(a)$ и, следовательно, $f \rightarrow g$.

F) Говорят, что алгебра R *распадается в прямую сумму* своих подалгебр S и T, если S и T суть идеалы алгебры R и если векторное пространство R распадается в прямую сумму своих подпространств S и T. Если алгебра R распадается в прямую сумму своих подалгебр S и T, то каждый элемент $x \in R$ однозначно записывается в виде $x=y+z$, $y \in S$, $z \in T$, и если $b \in S$, $c \in T$, то $[b, c]=0$. Отсюда виден способ восстановления алгебры R по алгебрам S и T. *Прямая сумма* R алгебр S и T определяется как совокупность всех пар (y, z), где $y \in S$, $z \in T$, причем линейные операции в векторном пространстве R определяются как в прямой сумме векторных пространств S и T, а операция коммутирования—по формуле $[(y_1, z_1), (y_2, z_2)] = ([y_1, y_2], [z_1, z_2])$. Если локальная группа Ли G распадается в прямое произведение своих нормальных делителей H и K, причем $G \to R$, $H \to S$, $K \to T$, то алгебра R распадается в прямую сумму своих подалгебр S и T. Эта связь между прямым произведением для локальных групп Ли и прямой суммой для алгебр Ли устанавливается автоматически. Формулированные определения и утверждения непосредственно переносятся на произвольное конечное число прямых слагаемых и соответственно прямых сомножителей.

Теоремы 83, 84 и предложение F) показывают, что каждому понятию или соотношению для групп Ли естественно и однозначно соответствует некоторое понятие или соотношение для алгебр Ли. Обратному переходу от алгебр Ли к группам Ли будут посвящены дальнейшие параграфы.

Пример 94. Продолжим разбор примера 93. Нетрудно показать, что в алгебре Ли R примера 93 не имеется никаких подалгебр, кроме одномерных, причем всякое одномерное линейное подпространство алгебры Ли есть ее подалгебра. Предположим, в самом деле, что R допускает двумерную подалгебру S. Тогда в S имеются два линейно независимых вектора a и b. Вектор $[a, b] = c$, являющийся векторным произведением векторов a и b, будет отличен от нуля и перпендикулярен к плоскости S. Таким образом, c не может содержаться в S. Точно так же легко убедиться в том, что алгебра R проста.

§ 54 Линейные группы. Автоморфизмы алгебр Ли

В предыдущем параграфе было показано, что каждому автоморфизму группы Ли соответствует автоморфизм алгебры Ли. Здесь автоморфизмы алгебр Ли будут изучены подробнее. Мы рассмотрим *группу всех автоморфизмов алгебры Ли*, представляющую собой группу Ли, и построим ее алгебру Ли. Далее, мы рассмотрим *присоединенную группу* алгебры Ли, порождаемую группой внутренних автоморфизмов локальной группы Ли, и построим алгебру Ли присоединенной группы. В обоих случаях рассмотрение будет начинаться с описания соответствующей алгебры Ли. Так как автоморфизмы алгебр Ли являются их линейными преобразованиями, то в первую очередь мы остановимся на *линейных группах Ли*. Содержание настоящего параграфа рассчитано, главным образом, на использование в главе одиннадцатой; в настоящей главе будут использованы лишь предложения B) и F).

Линейные группы Ли или, что то же самое, группы Ли линейных преобразований, играют важную роль в теории групп Ли. Алгебра Ли линейной группы Ли сама составлена из линейных отображений и называется *линейной алгеброй Ли*. Определим прежде всего линейную алгебру Ли, так как ее можно рассматривать над любым полем K.

A) Пусть A—векторное пространство над произвольным полем K и R—некоторое множество линейных отображений пространства A в себя, содержащее наряду с каждыми двумя отображениями a и b отображения $ab-ba$ и $\alpha a+\beta b$, где α и β суть произвольные элементы поля K. Так как в R определена операция сложения и операция умножения на элемент поля K, то R есть векторное пространство над полем K. Определим в R операцию коммутирования, положив

$$[a, b]=ab-ba. \tag{1}$$

Оказывается, что в силу этого определения пространство R есть алгебра Ли. Ее мы будем называть *линейной алгеброй Ли*.

Свойства (14) и (15) § 52 операции коммутирования в R очевидны, докажем свойство (16). Пусть a, b, c—три произвольных отображения из R. Мы имеем:

$$[a, [b, c]]=a[b, c]-[b, c]a=abc-acb-bca+cba.$$

Производя в последнем соотношении циклические перестановки отображений a, b, c и складывая три полученных соотношения, мы получаем свойство (16) операции коммутирования.

B) Пусть A—действительное или комплексное векторное пространство и G—некоторое множество его линейных преобразований, которое, взятое с естественной топологией и законом умножения, представляет собой локальную группу Ли. Локальную группу Ли G мы будем называть *линейной*. Пусть, далее, $x(t)$—кривая в G, проходящая при $t=0$ через e, $x(0)=e$. Так как в множестве линейных отображений пространства A в себя определено сложение и умножение на действительное число, то можно определить производную a линейного отображения $x(t)$ по t при $t=0$, положив:

$$a=\lim_{t\to 0}\frac{x(t)-x(0)}{t}. \tag{2}$$

Производная эта, если она существует, является сама линейным отображением пространства A в себя. Ее мы назовем *касательным* к кривой $x(t)$ отображением пространства A. Оказывается, что множество всех линейных отображений пространства A, касательных к кривым, проходящим в G, образует действительную линейную алгебру R (см. A)), естественным образом изоморфную алгебре Ли группы G. Именно, кривая $x(t)$ тогда и только тогда имеет касательное отображение a, когда она же имеет в локальной группе G касательный вектор a' (см. § 41, C)), и соответствие $a \rightleftarrows a'$ не зависит от случайного выбора кривой $x(t)$. Это соответствие и дает указанный естественный изоморфизм. Ввиду сказанного линейную алгебру Ли R следует считать алгеброй Ли линейной группы Ли G. Оказывается, далее, что если $x(t)$ есть однопараметрическая подгруппа группы G с касательным отображением a (см. (2)), то линейное преобразование $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t). \tag{3}$$

Из этого следует, в частности, что линейная локальная группа Ли G однозначно определяется своей линейной алгеброй Ли R. Более точно, если две локальные линейные группы Ли G_1 и G_2 преобразований векторного пространства A имеют одну и ту же линейную алгебру Ли R, то в некоторой окрестности единицы они совпадают.

Докажем предложение B). Пусть G^*—топологическая группа всех линейных преобразований пространства A. Введем в G^* координаты. Для этого выберем в A некоторый базис, и матрицу, соответствующую преобразованию $x \in G^*$, запишем в виде $\|\delta^i_j + x^i_j\|$. Если пространство A действительно, то за координаты элемента x примем числа x^i_j; если же пространство A комплексно, то за координаты элемента x примем действительные и мнимые части чисел x^i_j. Произведение $z = xy$ в координатной форме запишется в виде

$$z^i_j = (\delta^i_\alpha + x^i_\alpha)(\delta^\alpha_j + y^\alpha_j) - \delta^i_j = x^i_j + y^i_j + x^i_\alpha y^\alpha_j. \tag{4}$$

Таким образом, G^* есть аналитическая группа Ли. Если $x(t)$—кривая в G^* и $x^i_j = x^i_j(t)$—ее координатная запись, то координаты a^i_j вектора a, касательного к кривой $x(t)$, согласно определению (см. § 41, C)) задаются формулой

$$a^i_j = \frac{dx^i_j(0)}{dt}. \tag{5}$$

Непосредственно видно, что соотношение (5) является матричной записью соотношения (2). Таким образом, алгебра Ли R^* группы G^* состоит из всех линейных отображений пространства A в себя. Для вычисления операции коммутирования воспользуемся предложением D) § 52. Пусть $z^* = yx$. Тогда

$$z^{*i}_j = y^i_j + x^i_j + y^i_\alpha x^\alpha_j. \tag{6}$$

Вычитая соотношение (6) из соотношения (4), получаем:

$$q^i_j = z^i_j - z^{*i}_j = x^i_\alpha y^\alpha_j - y^i_\alpha x^\alpha_j.$$

Переходя от матричной записи к отображениям, получаем:

$$[a,\ b]=ab-ba. \tag{7}$$

Таким образом, алгебра Ли R^* группы Ли G^* есть линейная алгебра, составленная из всех линейных отображений пространства A в себя. Так как G есть локальная подгруппа группы G^*, то совокупность всех отображений, касательных к кривым из G, составляет алгебру Ли R группы Ли G, являющуюся подалгеброй алгебры R^* (см. теорему 83). Если теперь $x(t)$ есть однопараметрическая подгруппа группы G с направляющим вектором (отображением) a, то мы имеем:

$$x(s+t)=x(s)x(t);$$

дифференцируя это соотношение по s при $s=0$, получаем (3).

Итак, предложение В) доказано.

Рассмотрим теперь некоторые группы автоморфизмов алгебр Ли, являющиеся линейными группами Ли; при этом начнем с рассмотрения соответствующих линейных алгебр Ли.

С) Пусть R—алгебра Ли над произвольным полем K. Обозначим через R_A совокупность всех линейных отображений a векторного пространства R в себя, удовлетворяющих условию

$$a([u,\ v])=[a(u),\ v]+[u,\ a(v)];\quad u\in R,\ v\in R. \tag{8}$$

Очевидно, что если a и b—два линейных отображения из R_A, то $\alpha a+\beta b$, где α и β—элементы поля K, также есть отображение из R_A. Оказывается, что и отображение $[a,\ b]=ab-ba$ также принадлежит R_A. Таким образом, R_A есть линейная алгебра Ли над полем K (см. А)); она называется *алгеброй всех дифференцирований* алгебры R.

Покажем, что $c=ab-ba\in R_A$. Применяя к (8) отображение b, получаем:

$$ba([u,\ v])=[ba(u),\ v]+[a(u),\ b(v)]+[b(u),\ a(v)]+[u,\ ba(v)]. \tag{9}$$

Аналогично

$$ab([u, v])=[ab(u),\ v]+[b(u),\ a(v)]+[a(u),\ b(v)]+[u,\ ab(v)]. \tag{10}$$

Вычитая соотношение (9) из соотношения (10), получаем:

$$c([u,\ v])=[c(u),\ v]+[u,\ c(v)].$$

D) Пусть R—действительная алгебра Ли и G_A—группа всех ее автоморфизмов. Очевидно, что G_A есть подгруппа группы всех линейных преобразований векторного пространства R, так что G_A есть линейная группа Ли (см. В)). Оказывается, что линейная алгебра Ли линейной группы Ли G_A есть алгебра R_A всех дифференцирований алгебры R (см. С)).

Для доказательства предложения D) достаточно показать, что однопараметрическая подгруппа $x(t)=x_t$ линейных преобразований пространства R тогда и только тогда принадлежит группе G_A, когда направляющее отображение a этой подгруппы удовлетворяет условию (8). Докажем это. Допустим, что $x_t \in G_A$. Тогда

$$x_t([u, v])=[x_t(u), x_t(v)]. \tag{11}$$

Дифференцируя это соотношение по t при $t=0$, получаем (8). Допустим, наоборот, что a удовлетворяет условию (8), и положим $u(t)=x_t(u)$, $v(t)=x_t(v)$, $w(t)=[u(t), v(t)]-x_t([u, v])$. Вычислим производную вектора $w(t)$ по t. Мы имеем в силу (3):

$$\frac{dw(t)}{dt}=[a(u(t)), v(t)]+[u(t), a(v(t))]-ax_t([u, v])=$$
$$=[a(u(t)), v(t)]+[u(t), a(v(t))]-a([u(t), v(t)])+a([u(t), v(t)])-$$
$$-ax_t([u, v])=a[u(t), v(t)]-ax_t([u, v])=a(w(t))$$

(см. (8)). Таким образом, если a удовлетворяет условию (8), то

$$\frac{dw(t)}{dt}=a(w(t)). \tag{12}$$

Так как $w(0)=0$, то из (5) следует, что $w(t)=0$. Таким образом, $x_t \in G_A$.

E) Пусть R—алгебра Ли над произвольным полем K. Каждому элементу $a \in R$ поставим в соответствие линейное отображение p_a пространства R в себя, определяемое соотношением

$$p_a(u)=[a, u], \quad u \in R. \tag{13}$$

Оказывается, что множество P всех линейных отображений вида p_a, $a \in R$, образует линейную алгебру, являющуюся идеалом алгебры R_A всех дифференцирований алгебры Ли R (см. C)). Алгебра P называется *присоединенной алгеброй* алгебры R или *алгеброй ее внутренних дифференцирований*. Оказывается, далее, что отображение g, определяемое соотношением $g(a)=p_a$, есть гомоморфизм алгебры R на алгебру P. Ядро гомоморфизма g есть, очевидно, центр алгебры R. Если теперь $q \in R_A$, $a \in R$ и φ—произвольный автоморфизм алгебры R, то

$$p_{q(a)}=[q, p_a], \tag{14}$$
$$p_{\varphi(a)}=\varphi p_a \varphi^{-1}. \tag{15}$$

Докажем предложение E). В силу соотношения (16) § 52 мы имеем:

$$p_a([u, v])=[a, [u, v]]=[[a, u], v]+[u, [a, v]]=$$
$$=[p_a(u), v]+[u, p_a(v)].$$

Таким образом, $p_a \in R_A$. Пусть теперь a и b—два элемента из R; тогда в силу соотношения (16) § 52 мы имеем:

$$p_{[a,b]}(u) = [[a, b], u] = [a, [b, u]] - [b, [a, u]] = \\ = p_a p_b(u) - p_b p_a(u) = [p_a, p_b](u).$$

Таким образом, P есть линейная алгебра, и g есть гомоморфизм алгебры R на алгебру P.

Покажем, что P есть идеал алгебры R_A, для чего достаточно установить формулу (14). Положим $r = [q, p_a]$. Мы имеем $r = qp_a - p_a q$. Применяя преобразование r к произвольному вектору $u \in R$, получаем (см. (8)):

$$r(u) = q([a, u]) - [a, q(u)] = [q(a), u] + [a, q(u)] - [a, q(u)] = p_{q(a)}(u).$$

Таким образом, соотношение (14) справедливо.

Докажем, наконец, соотношение (15). Так как φ есть автоморфизм алгебры Ли R, то мы имеем:

$$[\varphi(a), \varphi(u)] = \varphi([a, u]),$$

или, иначе,

$$p_{\varphi(a)}(\varphi(u)) = \varphi p_a(u).$$

Таким образом, $p_{\varphi(a)}\varphi = \varphi p_a$ и, следовательно, $p_{\varphi(a)} = \varphi p_a \varphi^{-1}$.

Итак, предложение E) доказано.

F) Пусть G—локальная группа Ли и R—ее алгебра Ли. Каждому элементу $x \in G$ соответствует внутренний автоморфизм φ_x группы G, определяемый соотношением

$$\varphi_x(z) = xzx^{-1} \qquad z \in G. \tag{16}$$

Автоморфизму φ_x локальной группы Ли G соответствует в силу теоремы 84 автоморфизм l_x алгебры R. Отображение f, определяемое формулой $f(x) = l_x$, есть гомоморфное отображение локальной группы Ли G на некоторую локальную линейную группу L автоморфизмов алгебры R. Ядром гомоморфизма f служит, очевидно, центр группы G. Группа L называется *присоединенной группой* группы G или алгебры R. Оказывается, что алгеброй Ли группы Ли L является присоединенная алгебра P алгебры R (см. E)), а гомоморфизму f соответствует гомоморфизм $a \to p_a$ алгебры R на алгебру P.

Докажем предложение F). Для этого вычислим гомоморфизм g алгебры Ли R в алгебру всех линейных отображений векторного пространства R, соответствующий гомоморфизму f группы G на группу L. Положим $p = g(a)$, $a \in R$. Отображение p определяется формулой

$$p(u) = \frac{d}{ds} l_{x(0)}(u), \quad u \in R,$$

где $x(s)$ есть кривая в G с касательным вектором a (см. B)). Для вычисления $l_{x(s)}(u)$ заметим, что $l_{x(s)}(u)$ есть касательный вектор к кривой $x(s)z(t)(x(s))^{-1}$ с параметром t, где кривая $z(t)$ имеет касательный вектор u. Таким образом, в координатной форме мы имеем:

$$(p(u))^i = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{dt}(x(s)z(t)(x(s))^{-1})^i\right), \tag{17}$$

где производные берутся при нулевых значениях аргументов. Далее, мы имеем:

$$(x(s)z(t)(x(s))^{-1})^i = [(x(s)z(t)(x(s))^{-1}(z(t))^{-1})z(t)]^i = c^i_{jk}x^j(s)z^k(t) + z^i(t) + \varepsilon,$$

где ε есть величина третьего порядка малости относительно $\sqrt{s^2+t^2}$ (см. § 52, (4) и (8)). Указанное в (17) последовательное дифференцирование дает теперь:

$$(p(u))^i = c^i_{jk}a^j u^k = [a, u]^i,$$

т. е. $p(u) = [a, u] = p_a(u)$.

Итак, предложение F) доказано.

На основе уже имеющихся результатов можно высказать следующее предложение о единственности, которое ниже (см. теорему 89) будет доказано в общем виде.

G) Если две локальные группы Ли G_1 и G_2 имеют одну и ту же алгебру Ли R, не имеющую центра, то они локально изоморфны между собой, причем существует единственный изоморфизм групп G_1 и G_2, которому соответствует тождественный автоморфизм алгебры R.

Так как алгебра R не имеет центра, то группы G_1 и G_2 его также не имеют (см. теорему 83). Таким образом, гомоморфизм f_i группы G_i, $i=1, 2$, на ее присоединенную группу L_i (см. F)) есть изоморфизм. Так как, далее, группа Ли L_i однозначно определена своей алгеброй Ли (как линейная группа, см. B)), а алгебра Ли группы L_i есть присоединенная алгебра P алгебры R, то группы L_1 и L_2 совпадают между собой. Изоморфизму $f_1^{-1}f_2$ группы G_2 на группу G_1 соответствует тождественное отображение алгебры R на себя. Другого изоморфизма группы G_2 на G_1, обладающего этим свойством, не существует. Действительно, каждый нетождественный автоморфизм группы G_1 записывается в канонических координатах первого рода в виде нетождественного линейного преобразования, и, следовательно, ему соответствует нетождественный автоморфизм алгебры R.

Пример 95. Пусть G^* — линейная группа всех преобразований n-мерного действительного или комплексного векторного пространства A и R^* — ее линейная алгебра Ли (см. B)). Группу G^* можно трактовать как группу всех невырожденных действительных или комплексных квадратных матриц порядка n, которые мы будем записывать в виде $\|\delta^i_j + x^i_j\|$. Алгебру Ли R^* можно трактовать как алгебру всех действительных или комплексных квадратных матриц порядка n. Выделим в группе G^* некоторые интересные подгруппы и посмотрим, какие подалгебры в алгебре R^* им соответствуют.

Пусть G—подгруппа группы G^*, составленная из всех унимодулярных преобразований или, что то же самое, матриц с равными единице детерминантами. Детерминант матрицы $\|\delta^i_j + x^i_j\|$, как легко видеть, имеет вид $1 + x^i_i + \varepsilon$, где ε есть величина второго порядка малости относительно координат x^i_j. Таким образом, принадлежность элемента x подгруппе G записывается условием

$$x^i_i + \varepsilon = 0. \tag{18}$$

Беря в подгруппе G произвольную кривую $x(t)$, т. е. считая, что $x^i_j = x^i_j(t)$, и дифференцируя соотношение (18) по t, получаем:

$$a^i_i = 0. \tag{19}$$

Так как размерности группы G и алгебры, составленной из всех матриц, удовлетворяющих условию (18), равны между собой, то из сказанного следует, что подалгебра R, соответствующая подгруппе G, состоит из всех линейных отображений с нулевым следом. Так как G есть нормальный делитель группы G^*, то R есть идеал алгебры R^*.

Пусть теперь H—подгруппа группы G^*, составленная из всех ортогональных матриц $\|\delta_{ij} + x_{ij}\|$. Условие ортогональности имеет вид

$$x_{ij} + x_{ji} + \varepsilon' = 0, \tag{20}$$

где ε' есть величина второго порядка малости относительно координат x_{ij}. Беря в подгруппе H кривую $x(t)$, т. е. считая, что $x_{ij} = x_{ij}(t)$, и дифференцируя соотношение (20) по t, получаем:

$$a_{ij} + a_{ji} = 0. \tag{21}$$

Из этого следует, что подалгебра S, соответствующая подгруппе H, состоит из кососимметрических матриц. Из подсчета размерностей следует, что она состоит из всех кососимметрических матриц.

§ 55. Условия интегрируемости

При построении группы Ли по структурным константам используется один элементарный результат теории дифференциальных уравнений в частных производных. Мы приведем здесь этот результат без доказательства, а также сделаем те выводы из него, которые нужны для дальнейшего.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} &= \varphi^i_j(f^1, \ldots, f^n; x^1, \ldots, x^r) = \varphi^i_j(f, x), \\ i &= 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где f обозначает точку с координатами $f^1, \ldots, f^n$; x—точку с координатами $x^1, \ldots, x^r$; функции $\varphi^i_j(f, x)$ определены и имеют непрерывные первые частные производные по всем аргументам или даже аналитичны в области значений $f \in U$, $x \in V$, где U и V суть области в соответствующих координатных пространствах; наконец, переменные $x^1, \ldots, x^r$ суть независимые, а $f^1, \ldots, f^n$—их искомые функции. Требуется найти функцию $f(x)$ или, в координатной форме, систему функций

$$f^i(x) = f^i(x^1, \ldots, x^r), \quad i = 1, \ldots, n,$$

таким образом, чтобы уравнения (1) удовлетворялись тождественно относительно независимых переменных $x^1, \ldots, x^r$.

Естественной постановкой задачи при решении системы (1) является следующая. Заданы начальные значения $x_0 \in V$, $f_0 \in U$. Требуется найти такое решение $f(x)$, чтобы

$$f(x_0) = f_0, \quad (2)$$

причем функция $f(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируема и определена для значений аргумента x, близких к x_0. Оказывается, что имеет место следующий результат.

Теорема 85. *Для того чтобы система* (1) *имела решение при произвольных начальных значениях $x_0 \in V$, $f_0 \in U$, необходимо, чтобы тождественно выполнялось соотношение*

$$\frac{\partial \varphi^i_k(f, x)}{\partial f^\alpha} \varphi^\alpha_j(f, x) + \frac{\partial \varphi^i_k(f, x)}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi^i_j(f, x)}{\partial f^\alpha} \varphi^\alpha_k(f, x) - \frac{\partial \varphi^i_j(f, x)}{\partial x^k} = 0 \quad (3)$$

для всех значений $x \in V$, $f \in U$. С другой стороны, если соотношение (3) *имеет место для всех значений $x \in V$, $f \in U$, то при произвольных начальных значениях $x_0 \in V$, $f_0 \in U$ имеется решение $f(x)$, и притом только одно. Заметим, что независимо от выполнения условий интегрируемости система* (1) *ни при каких начальных условиях не может иметь более одного решения.*

Выразим явно зависимость решения $f(x)$ от его начальных значений: $f(x) = f(x, f_0, x_0)$. Пусть U' и V'—две такие области с бикомпактными замыканиями $\overline{U}'$ и $\overline{V}'$, что $\overline{U}' \subset U$ и $\overline{V}' \subset V$. Тогда можно найти столь малое положительное число ε, что при $f_0 \in U'$, $x_0 \in V'$ и $|x^i - x^i_0| < \varepsilon$; $i = 1, \ldots, r$, решение $f(x, f_0, x_0)$ существует, имеет непрерывные частные производные второго порядка по $x^1, \ldots, x^r$, непрерывные частные производные первого порядка *по* $x_0^1, \ldots, x_0^r$ *и по* $f_0^1, \ldots, f_0^n$ *и является аналитическим по всем своим аргументам, если правые части уравнений* (1) *аналитические.*

Соотношение (3) называется *условием интегрируемости* системы (1).

Здесь я приведу лишь доказательство необходимости условия (3). Доказательство достаточности см. в [42], т. 2, гл. VIII, §§ 5 и 6.

Предположим, что существует решение $f(x)$ системы (1) при произвольных начальных значениях $x_0 \in V$, $f_0 \in U$. Подставим решение $f(x)$ в систему (1) и продифференцируем полученное тождество; имеем:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \varphi_j^i(f, x)}{\partial f^\alpha} \cdot \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} + \frac{\partial \varphi_j^i(f, x)}{\partial x^k} = \frac{\partial \varphi_j^i(f, x)}{\partial f^\alpha} \varphi_k^\alpha(f, x) + \frac{\partial \varphi_j^i(f, x)}{\partial x^k}. \tag{4}$$

Так как $\dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} = \dfrac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^j}$, то соотношение (3) выполнено при $f = f(x)$.

При $x = x_0$ имеем $f(x_0) = f_0$, и потому соотношение (3) выполняется при $x = x_0$, $f = f_0$. Так как, по предположению, начальные значения можно задать произвольно, то равенство (3) справедливо при произвольных $x \in V$, $f \in U$. Таким образом, необходимость условия (3) доказана.

В дальнейшем нам придется иметь дело не непосредственно с системой вида (1), а с такой системой, где производные $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ не выражены явно. Поэтому мы выпишем условия интегрируемости нужной нам системы уравнений в наиболее желательной для нас форме.

А) Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$v_k^i(f) \frac{\partial f^k}{\partial x^j} = v_j^i(x), \quad i = 1, \ldots, r; \quad j = 1, \ldots, r, \tag{5}$$

где $v_j^i(z) = v_j^i(z^1, \ldots, z^r)$ суть функции, определенные и имеющие непрерывные первые частные производные по всем аргументам в области $z \in U$, причем детерминант матрицы $\|v_j^i(z)\|$ не обращается в нуль в этой области. Система (5) легко приводится к виду (1), и условия интегрируемости для нее имеют вид

$$\frac{\partial v_k^i(z)}{\partial z^j} - \frac{\partial v_j^i(z)}{\partial z^k} = \tilde{c}_{\alpha\beta}^i v_j^\alpha(z) v_k^\beta(z), \tag{6}$$

где $\tilde{c}_{jk}^i$ — некоторые константы (зависящие от системы (5)). Систему (5) можно переписать в следующем симметричном виде:

$$v_j^i(f) df^j = v_j^i(x) dx^j, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{7}$$

где df^j есть полный дифференциал функции $f^j(x)$, а dx^j — дифференциал независимого переменного x^j.

Для вывода соотношения (6) введем матрицу $\|u_j(z)\|$, обратную матрице $\|v_j^i(z)\|$; она существует, ибо детерминант матрицы $\|v_j^i(z)\|$, по предположению, не обращается в нуль в области U. Мы имеем:

$$u_\alpha^i(z)v_j^\alpha(z)=v_\alpha^i(z)u_j^\alpha(z)=\delta_j^i, \tag{8}$$

где $\|\delta_j^i\|$—единичная матрица. Дифференцируя соотношение (8), получаем:

$$v_\alpha^i(z)\frac{\partial u_j^\alpha(z)}{\partial z^k}+\frac{\partial v_\alpha^i(z)}{\partial z^k}u_j^\alpha(z)=0. \tag{9}$$

Умножая соотношение (5) на $u_i^p(f)$ и суммируя по i, получаем, меняя обозначения индексов,

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}=u_\beta^i(f)v_j^\beta(x). \tag{10}$$

Таким образом, система (5) приведена к виду (1), и к ней можно применить теорему 85. В силу этой теоремы условие интегрируемости для системы (10) имеет вид

$$\frac{\partial u_\beta^i(f)}{\partial f^\alpha}u_\gamma^\alpha(f)v_j^\gamma(x)v_k^\beta(x)+u_\beta^i(f)\frac{\partial v_k^\beta(x)}{\partial x^j}-$$
$$-\frac{\partial u_\beta^i(f)}{\partial f^\alpha}u_\gamma^\alpha(f)v_k^\gamma(x)v_j^\beta(x)-u_\beta^i(f)\frac{\partial v_j^\beta(x)}{\partial x^k}=0. \tag{11}$$

Умножая соотношение (11) на $v_i^p(f)$ и суммируя по i, получаем на основании соотношений (9) и (8):

$$-\frac{\partial v_i^p(f)}{\partial f^\alpha}u_\beta^i(f)u_\gamma^\alpha(f)v_j^\gamma(x)v_k^\beta(x)+\frac{\partial v_k^p(x)}{\partial x^j}+$$
$$+\frac{\partial v_i^p(f)}{\partial f^\alpha}u_\beta^i(f)u_\gamma^\alpha(f)v_k^\gamma(x)v_j^\beta(x)-\frac{\partial v_j^p(x)}{\partial x^k}=0.$$

Умножая последнее соотношение на $u_s^j(x)u_t^k(x)$ и суммируя по j и k, получаем:

$$\left(\frac{\partial v_\beta^p(x)}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial v_\alpha^p(x)}{\partial x^\beta}\right)u_s^\alpha(x)u_t^\beta(x)=\left(\frac{\partial v_\beta^p(f)}{\partial f^\alpha}-\frac{\partial v_\alpha^p(f)}{\partial f^\beta}\right)u_s^\alpha(f)u_t^\beta(f). \tag{12}$$

Последнее соотношение должно быть выполнено тождественно. Так как переменные x и f в нем разделены, то каждая его часть есть константа. Таким образом, имеем:

$$\left(\frac{\partial v_\beta^i(z)}{\partial z^\alpha}-\frac{\partial v_\alpha^i(z)}{\partial z^\beta}\right)u_s^\alpha(z)u_t^\beta(z)=\widetilde{c}_{st}^i.$$

Умножая последнее соотношение на $v_j^s(z)v_k^t(z)$ и суммируя по s и t, мы получаем соотношение (6). Идя обратным путем, мы получим из соотношения (6) соотношение (11).

§ 56. Построение группы Ли по структурным константам

Здесь будет дано построение локальной группы Ли по структурным константам, что дает обращение третьей теоремы Ли. Построение это будет вестись в координатах, именно, будут разыскиваться функции $f^i(x, y)$, выражающие координаты элемента $f=xy=f(x, y)$ через координаты элементов x и y (см. определение 47). Само собой разумеется, что структурные константы сами еще не могут определить функций $f^i(x, y)$, так как возможны преобразования координат, не меняющие структурных констант, но меняющие эти функции. Поэтому для построения необходимо выбрать какие-либо специальные координаты, например канонические первого или второго рода. Возможен и тот и другой путь. Здесь мы используем канонические координаты первого рода.

Построение локальной группы Ли проводится в два шага. Первый шаг заключается во введении некоторых вспомогательных функций, которые определяют однозначно функции $f^i(x, y)$ и сами определяются этими последними (первая теорема Ли — обратная и прямая). Вспомогательные функции удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям, содержащим структурные константы. Эти соотношения (см. (8)) составляют содержание второй теоремы Ли. Второй шаг заключается в интегрировании этих уравнений (обращение второй теоремы Ли), причем здесь уже необходимо воспользоваться каноническими координатами, так как лишь в них структурные константы однозначно определяют вспомогательные функции.

А) Пусть G — некоторая локальная группа Ли и D — некоторая дважды дифференцируемая система координат в G. Положим

$$f=xy=f(x, y). \tag{1}$$

В координатной системе D то же соотношение запишется в виде

$$f^i=f^i(x, y)=f^i(x^1, \ldots, x^r; y^1, \ldots, y^r). \tag{2}$$

Введем теперь вспомогательные функции. Через $x+\delta x$ символически обозначим элемент с координатами $x^i+\delta x^i$, $i=1, \ldots, r$, где x^i, $i=1, \ldots, r$, суть координаты некоторого элемента x, а

$$\delta x^i, \quad i=1, \ldots, r, \tag{3}$$

— приращения.

Положим $p=(x+\delta x)x^{-1}$ и разложим координаты элемента p в ряды Тейлора по приращениям (3). Мы имеем:

$$p^i=v^i_i(x)\delta x^j+\varepsilon^i_1, \tag{4}$$

где ε^i_1 имеет второй порядок малости относительно приращений (3), а $v^i_j(x)=v^i_j(x^1, \ldots, x^r)$ — некоторые функции элемента x. При этом

$$v^i_j(e)=\delta^i_j, \tag{5}$$

где $\|\delta^i_j\|$—единичная матрица, а e—единица группы G. Далее,

$$v^i_k(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^j}=v^i_j(x). \tag{6}$$

Таким образом, $f(x, y)$ как функция x (при постоянном y) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (6) с очевидным начальным условием

$$f(e, y)=y. \tag{7}$$

Наконец, функции $v^i_j(x)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial v^i_k(x)}{\partial x^j}-\frac{\partial v^i_j(x)}{\partial x^k}=c^i_{\alpha\beta}v^\alpha_j(x)v^\beta_k(x), \tag{8}$$

где c^i_{jk} суть структурные константы группы G. Стоит отметить, что соотношение (8) есть не что иное, как условие интегрируемости системы (6) (см. § 55, А)). Отметим еще, что, пользуясь вспомогательными функциями $v^i_j(x)$, можно в простой форме записать уравнение однопараметрической подгруппы, именно, если $x(t)$ есть некоторая однопараметрическая подгруппа группы G с направляющим вектором a, то имеет место следующее соотношение:

$$a^i=v^i_j(x(t))\frac{dx^j(t)}{dt}. \tag{9}$$

Докажем предложение А).

Соотношение (5) очевидно.

Для доказательства соотношения (6) дадим в соотношении (1) приращения координатам элемента x; тогда координаты элемента f также получат некоторые приращения, и мы имеем:

$$f+\delta f=(x+\delta x)y.$$

Из этого соотношения и соотношения (1) следует

$$(f+\delta f)f^{-1}=(x+\delta x)y(xy)^{-1}=(x+\delta x)x^{-1}.$$

Это последнее соотношение мы можем записать в координатной форме, пользуясь соотношением (4), следующим образом:

$$v^i_k(f)\delta f^k=v^i_j(x)\delta x^j+\varepsilon^i_2 \tag{10}$$

где ε^i_2 имеет второй порядок малости относительно приращений (3).

Разложим функции δf^k в ряды Тейлора по приращениям (3). Мы имеем:

$$\delta f^k=\frac{\partial f^k}{\partial x^j}\delta x^j+\varepsilon^k_3, \tag{11}$$

где ε_3^k имеет второй порядок малости. Из соотношений (10) и (11) следует

$$v_k^i(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^j}\delta x^j = v_j^i(x)\delta x^j + \varepsilon_4^i.$$

Сравнивая коэффициенты в последнем соотношении, получаем соотношение (6).

Для доказательства соотношения (8) заметим, что если x_0 и f_0 суть два элемента, близкие к единице, то существует такой элемент y_0, что $f_0 = x_0 y_0$. Таким образом, система (6) имеет решение при произвольных начальных значениях x_0 и f_0, достаточно близких к e. Следовательно, в силу теоремы 85 для системы (6) выполнено условие интегрируемости. В силу предложения А) § 55 это условие интегрируемости имеет вид

$$\frac{\partial v_k^i(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j^i(x)}{\partial x^k} = \tilde{c}_{\alpha\beta}^i v_j^\alpha(x) v_k^\beta(x), \tag{12}$$

где $\tilde{c}_{jk}^i$—некоторые константы. Нам остается показать, что эти константы суть структурные константы группы G. При $x = e$ соотношение (6) дает:

$$v_\alpha^i(y)\frac{\partial f^\alpha(e, y)}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

Дифференцируя последнее соотношение, получаем:

$$\frac{\partial v_\alpha^i(y)}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial f^\alpha(e, y)}{\partial x^j} + v_\alpha^i(y)\frac{\partial^2 f^\alpha(e, y)}{\partial x^j \partial y^k} = 0.$$

При $y = e$ это дает:

$$\frac{\partial v_j^i(e)}{\partial y^k} + \frac{\partial^2 f^i(e, e)}{\partial x^j \partial y^k} = 0. \tag{13}$$

Отсюда и из соотношения (4) § 52 следует, что $\dfrac{\partial v_j^i(e)}{\partial y^k} = -a_{jk}^i$. Таким образом, при $x = e$ соотношение (12) получает вид

$$a_{jk}^i - a_{kj}^i = \tilde{c}_{jk}^i,$$

т. е. $\tilde{c}_{jk}^i$ суть структурные константы группы G (см. § 52, (5)).

Для доказательства соотношения (9) дадим параметру t малое приращение δt. Тогда мы имеем:

$$x(t+\delta t)(x(t))^{-1} = x(\delta t);$$

таким образом,

$$x^i(\delta t) = v_j^i(x(t))(x^j(t+\delta t) - x^j(t)) + \varepsilon_5^j.$$

Деля обе части последнего равенства на δt и переходя к пределу при $\delta t \to 0$, получаем соотношение (9).

Итак, предложение А) полностью доказано.

Следующая теорема дает обращение предложения А).

Теорема 86. *Пусть U — некоторая область r-мерного евклидова пространства, содержащая начало координат e. Допустим, что в области U заданы такие аналитические функции*

$$\overset{*}{v}{}^i_j(x)=\overset{*}{v}{}^i_j(x^1, \ldots, x^r),$$

что детерминант матрицы $\|\overset{*}{v}{}^i_j(x)\|$ не обращается в нуль в области U и выполнены следующие условия:

$$\overset{*}{v}{}^i_j(e)=\delta^i_j, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \overset{*}{v}{}^i_k(x)}{\partial x^j}-\frac{\partial \overset{*}{v}{}^i_j(x)}{\partial x^k}=\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}\overset{*}{v}{}^\alpha_j(x)\overset{*}{v}{}^\beta_k(x), \tag{15}$$

где $\overset{*}{c}{}^i_{jk}$ — некоторые константы. Составим систему дифференциальных уравнений

$$\overset{*}{v}{}^i_k(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^j}=\overset{*}{v}{}^i_j(x). \tag{16}$$

Соотношение (15) *есть условие интегрируемости системы* (16) (см. § 55, А)), *и потому в силу теоремы* 85 *существует такая окрестность G начала координат e, что при всяких $x_0 \in G$, $f_0 \in G$ имеется аналитическое решение $f(x, f_0, x_0)$ с начальными значениями x_0 и f_0, причем решение это существует для всех $x \in G$. Положим $f(x, y)=f(x, y, e)$. Таким образом,*

$$f(e, y)=y. \tag{17}$$

Определим теперь закон умножения двух точек x и y, положив:

$$f=xy=f(x, y). \tag{18}$$

Тогда в силу этого закона умножения множество G есть локальная группа Ли с единицей e, причем вспомогательные функции $v^i_j(x)$ группы G (см. А)) *совпадают с заданными функциями $\overset{*}{v}{}^i_j(x)$, а структурные константы c^i_{jk} группы G совпадают с константами $\overset{*}{c}{}^i_{jk}$:*

$$v^i_j(x)=\overset{*}{v}{}^i_j(x), \tag{19}$$

$$c^i_{jk}=\overset{*}{c}{}^i_{jk}. \tag{20}$$

Доказательство. Докажем прежде всего ассоциативность определенного нами умножения. Из соотношения (17) следует, что $f(e, e)=e$. Ввиду непрерывности функции $f(x, y)$ мы можем таким образом выбрать столь малую окрестность V точки e, что при $x \in V$, $y \in V$ будем иметь $f(x, y) \in G$. Пусть $x \in V$, $y \in V$, $z \in V$. Положим

$u=f(x, y)$, $v=f(y, z)$, $w=f(u, z)$, $w^*=f(x, v)$ и покажем, что $w=w^*$. Этим ассоциативность будет доказана.

При доказательстве будем считать элементы y и z фиксированными, а x—переменным. В силу самого определения функции f функция $w^*(x)$ есть решение системы (16) при начальном условии $w^*(e)=v$. Покажем, что и $w(x)$ есть решение той же системы (16) при том же начальном условии $w(e)=v$. В силу единственности решения системы (16) (см. теорему 85) мы получим тогда равенство $w^*(x)=w(x)$.

При $x=e$ имеем $u=y$, т. е. $w=f(y, z)=v$. Таким образом, начальные условия для функций $w(x)$ и $w^*(x)$ совпадают.

Для доказательства того, что $w(x)$ есть решение системы (16), введем матрицу $\|\overset{*}{u}{}^i_j(x)\|$, обратную матрице $\|\overset{*}{v}{}^i_j(x)\|$. При этих обозначениях система (16) перепишется в форме:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}=\overset{*}{u}{}^i_k(f)\overset{*}{v}{}^k_j(x). \tag{21}$$

Далее, мы имеем:

$$\frac{\partial w^i}{\partial x^j}=\frac{\partial w^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}=\overset{*}{u}{}^i_k(w)\overset{*}{v}{}^k_\alpha(u)\overset{*}{u}{}^\alpha_l(u)\overset{*}{v}{}^l_j(x)=\overset{*}{u}{}^i_k(w)\overset{*}{v}{}^k_j(x).$$

Таким образом, $w(x)$ есть решение системы (21), и ассоциативность доказана.

Единицей в G является элемент e (см. (17)).

Для нахождения обратного элемента следует решить относительно x систему уравнений

$$f^i(x, y)=0. \tag{22}$$

При $y=e$ система эта имеет очевидное решение $x=e$. Далее, из (14) и (16) непосредственно следует, что якобиан системы (22) при $x=y=e$ равен единице. Таким образом, система (22) разрешима при y, близких к e, и существование обратного элемента доказано.

Так как по доказанному G есть локальная группа Ли, то в силу предложения А) функция $f(x, y)$ удовлетворяет системе (6). Но в то же время она удовлетворяет системе (16). Из этого непосредственно следует, что $v^i_j(z)=\overset{*}{v}{}^i_j(z)$, ибо, положив в системах (6) и (16) $x=e$, мы получаем способ вычисления функций $v^i_j(z)$ и $\overset{*}{v}{}^i_j(z)$ через $f(x, y)$ (см. (5) и (14)). В силу равенства (19) константы в уравнениях (8) и (15) должны совпадать, т. е. $c^i_{jk}=\overset{*}{c}{}^i_{jk}$.

Итак, теорема 86 доказана.

Первый шаг построения группы Ли закончен. Переходим ко второму. Здесь задача заключается в решении системы (8), т. е. в нахождении вспомогательных функций $v^i_j(x)$ по структурным константам. Сам вид системы (8) показывает, что решение при начальных условиях (5) не определено однозначно. Как это уже отмечалось, необходимо специализировать каким-либо способом выбор координат; тогда функции $v_j^i(x)$ будут связаны дополнительными соотношениями, что и позволит решить задачу однозначно. В качестве специальных координат для указанной цели мы выберем канонические координаты первого рода (см. § 42, В) и теорему 59).

Задачу решения системы (8) в канонических координатах удается свести к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Прием, применяемый здесь, довольно обычен. Функции $v_j^i(x)$ отыскиваются не сразу во всей окрестности единицы, а вдоль некоторой кривой, именно, вдоль однопараметрической подгруппы. Если $g(t)$ есть некоторая однопараметрическая подгруппа, то ввиду каноничности координат мы имеем $g^i(t)=a^i t$. Функции $v_j^i(g(t))$ при фиксированной подгруппе $g(t)$ зависят уже от одного параметра t. Оказывается, что функции $tv_j^i(g(t))$ как функции параметра t удовлетворяют некоторой системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; таким образом, их нахождение сводится к применению элементарной теоремы существования, и проблема оказывается полностью решенной.

Дадим одно характеристическое свойство канонической системы координат первого рода.

В) Пусть D—некоторая дважды дифференцируемая система координат в локальной группе Ли G. Для того чтобы система D была канонической первого рода, необходимо и достаточно, чтобы вспомогательные функции $v_j^i(x)$, взятые в системе D (см. А)), удовлетворяли следующему соотношению:

$$v_j^i(x)x^j=x^i. \tag{23}$$

Докажем это. Допустим, что координаты D—канонические первого рода. Пусть $g(t)$—однопараметрическая подгруппа группы D с направляющим вектором a (см. § 42, А)). Ввиду каноничности координат D мы имеем $g^i(t)=a^i t$. Используя соотношение (9), получаем:

$$v_j^i(at)a^j=a^i. \tag{24}$$

Это соотношение при $a=x$, $t=1$ переходит в соотношение (23).

Допустим теперь, что соотношение (23) выполнено. Пусть $g(t)$—некоторая однопараметрическая подгруппа с направляющим вектором a. Вследствие соотношения (9) имеем:

$$v_j^i(g(t))\frac{dg^j(t)}{dt}=a^i. \tag{25}$$

В силу соотношения (23) система (25) удовлетворяется при $g^i(t)=$ $=a^i t$. Таким образом, ввиду единственности решения системы (25) мы имеем $g^i(t)=a^i t$, т. е. система координат D—каноническая первого рода.

С) Пусть G—локальная группа Ли и D—некоторая заданная в ней дважды дифференцируемая каноническая система координат первого рода. Пусть, далее, $v^i_j(x)=v^i_j(x^1, \ldots, x^r)$—*вспомогательные функции* (см. А)), заданные в системе D. Положим:

$$w^i_j(t)=w^i_j(t, a)=tv^i_j(a^1t, \ldots, a^rt)=tv^i_j(at), \tag{26}$$

где a—фиксированный вектор, а at обозначает элемент с координатами a^it. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$v^i_j(x)=w^i_j(1, x), \tag{27}$$

$$w^i_j(0, a)=0, \tag{28}$$

$$\frac{dw^i_j(t)}{dt}=\delta^i_j+c^i_{\alpha\beta}a^\alpha w^\beta_j(t). \tag{29}$$

Таким образом, функции $w^i_j(t, a)$ как функции параметра t являются решениями системы (29) с начальными условиями (28) и потому являются аналитическими функциями совокупности своих аргументов. Найдя функции $w^i_j(t, a)$, мы затем из соотношения (27) сможем определить и нужные нам функции $v^i_j(x)$. Этим будет показано, что в канонических координатах первого рода вспомогательные функции $v^i_j(x)$ однозначно определяются структурными константами c^i_{jk} и являются аналитическими функциями. Таким образом, канонические координаты первого рода, о которых в силу теоремы 59 было известно только, что они дважды дифференцируемы, в действительности оказываются аналитическими (см. теорему 86).

Соотношения (27) и (28) очевидны.

Докажем соотношение (29). Дифференцируя соотношение (23), получаем:

$$x^k\frac{\partial v^i_k(x)}{\partial x^j}+v^i_j(x)=\delta^i_j. \tag{30}$$

Умножая соотношение (8) на x^k и суммируя по k, получаем:

$$\frac{\partial v^i_k(x)}{\partial x^j}x^k-\frac{\partial v^i_j(x)}{\partial x^k}x^k=c^i_{\alpha\beta}v^\alpha_j(x)v^\beta_k(x)x^k=-c^i_{\alpha\beta}x^\alpha v^\beta_j(x) \tag{31}$$

(см. (23) и § 52, (6)). Из соотношений (30) и (31) следует

$$\frac{\partial v^i_j(x)}{\partial x^k}x^k+v^i_j(x)=\delta^i_j+c^i_{\alpha\beta}x^\alpha v^\beta_j(x).$$

Заменяя в последнем соотношении x на at, получаем:

$$\frac{\partial v^i_j(at)}{\partial x^k}ta^k+v^i_j(at)=\delta^i_j+c^i_{\alpha\beta}a^\alpha tv^\beta_j(at). \tag{32}$$

Левая часть последнего соотношения, как легко проверить, есть производная от функции $w_j^i(t, a)$ по t. Таким образом, соотношение (32) переписывается в виде (29), чем соотношение (29) и доказано.

Следующая теорема дает обращение утверждения C).

Теорема 87. *Пусть* $\overset{*}{c}{}_{jk}^i$ — *система констант, удовлетворяющих следующим условиям*:

$$\overset{*}{c}{}_{jk}^i = -\overset{*}{c}{}_{kj}^i, \tag{33}$$

$$\overset{*}{c}{}_{is}^p \overset{*}{c}{}_{jk}^s + \overset{*}{c}{}_{js}^p \overset{*}{c}{}_{ki}^s + \overset{*}{c}{}_{ks}^p \overset{*}{c}{}_{ij}^s = 0. \tag{34}$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overset{*}{w}{}_j^i}{dt} = \delta_j^i + \overset{*}{c}{}_{\alpha\beta}^i a^\alpha \overset{*}{w}{}_j^\beta, \tag{35}$$

где a — *некоторый постоянный вектор, а* $\overset{*}{w}{}_j^i$ — *неизвестные функции параметра* t. *Система* (35) *линейная с постоянными коэффициентами, и потому решение ее существует и аналитично для всех значений* t *и* a. *Обозначим через* $\overset{*}{w}{}_j^i(t, a)$ *решение системы* (35) *с начальным условием*

$$\overset{*}{w}{}_j^i(0, a) = 0. \tag{36}$$

Положим, далее,

$$\overset{*}{v}{}_j^i(x) = \overset{*}{w}{}_j^i(1, x). \tag{37}$$

Тогда функции $\overset{*}{v}{}_j^i(x)$ *удовлетворяют соотношениям* (14) *и* (15), *где* e — *начало координат. Кроме того, выполнены соотношения*

$$\overset{*}{v}{}_j^i(x) x^j = x^i. \tag{38}$$

Доказательство. Для установления соотношения (14) следует решить систему (35) при $a=e$. Очевидно, что это решение есть $\overset{*}{w}{}_j^i(t) = \delta_j^i t$, т. е. $\overset{*}{v}{}_j^i(e) = \delta_j^i$ (см. (37)).

Соотношения (15) и (38) доказываются с помощью применения одного и того же приема. Для выяснения его мы сначала разберем более простой случай соотношения (38).

Положим:

$$h^i(t) = \overset{*}{w}{}_j^i(t, a) a^j - t a^i. \tag{39}$$

Мы докажем, что $h^i(t) = 0$. Тогда соотношение $h^i(1) = 0$ и даст нам соотношение (38). Прежде всего очевидно, что

$$h^i(0) = 0. \tag{40}$$

Вычислим теперь производную функции $h^i(t)$. Принимая во внимание соотношения (35) и (33), мы получаем:

$$\frac{dh^i(t)}{dt}=(\delta^i_j+\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha \overset{*}{w}{}^\beta_j(t,\,a))a^j-a^i=\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha \overset{*}{w}{}^\beta_j(t,\,a)a^j=$$
$$=\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha(\overset{*}{w}{}^\beta_j(t,\,a)a^j-ta^\beta).$$

Таким образом, функция $h^i(t)$ удовлетворяет системе линейных однородных уравнений

$$\frac{dh^i}{dt}=\overset{*}{c}{}^i_{\alpha j}a^\alpha h^j. \tag{41}$$

При начальном условии $h^i(0)=0$ система (41) имеет очевидное решение $h^i(t)=0$, следовательно, в силу единственности решения системы (41) мы получаем $h^i(t)=0$ (см. (40)).

Для доказательства соотношения (15) положим:

$$h^i_{jk}(t)=\frac{\partial\overset{*}{w}{}^i_k(t,\,a)}{\partial a^j}-\frac{\partial\overset{*}{w}{}^i_j(t,\,a)}{\partial a^k}-\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}\overset{*}{w}{}^\alpha_j(t,\,a)\overset{*}{w}{}^\beta_k(t,\,a), \tag{42}$$

и покажем, что $h^i_{jk}(t)=0$. Тогда $h^i_{jk}(1)=0$ и даст нам соотношение (15).

Так как $\overset{*}{w}{}^i_j(0,\,a)=0$, то $\dfrac{\partial\overset{*}{w}{}^i_j(0,\,a)}{\partial a^k}=0$ и, следовательно,

$$h^i_{jk}(0)=0. \tag{43}$$

Займемся теперь вычислением производной от функции $h^i_{jk}(t)$. Дифференцируя соотношение (35), получаем:

$$\frac{\partial^2\overset{*}{w}{}^i_k(t,\,a)}{\partial t\,\partial a^j}=\overset{*}{c}{}^i_{j\beta}\overset{*}{w}{}^\beta_k(t,\,a)+\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha\frac{\partial\overset{*}{w}{}^\beta_k(t,\,a)}{\partial a^j}. \tag{44}$$

Используя соотношения (35) и (44), получаем:

$$\frac{dh^i_{jk}}{dt}=\overset{*}{c}{}^i_{j\beta}\overset{*}{w}{}^\beta_k+\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha\frac{\partial\overset{*}{w}{}^\beta_k}{\partial a^j}-\overset{*}{c}{}^i_{k\beta}\overset{*}{w}{}^\beta_j-\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha\frac{\partial\overset{*}{w}{}^\beta_j}{\partial a^k}-$$
$$-\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}(\delta^\alpha_j+\overset{*}{c}{}^\alpha_{\gamma\delta}a^\gamma\overset{*}{w}{}^\delta_j)\overset{*}{w}{}^\beta_k-\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}\overset{*}{w}{}^\alpha_j(\delta^\beta_k+\overset{*}{c}{}^\beta_{\gamma\delta}a^\gamma\overset{*}{w}{}^\delta_k).$$

Приводя в последнем соотношении подобные члены и пользуясь соотношениями (33) и (34), получаем:

$$\frac{dh^i_{jk}}{dt}=\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha\left(\frac{\partial\overset{*}{w}{}^\beta_k}{\partial a^j}-\frac{\partial\overset{*}{w}{}^\beta_j}{\partial a^k}-\overset{*}{c}{}^\beta_{\gamma\delta}\overset{*}{w}{}^\gamma_j\overset{*}{w}{}^\delta_k\right)=\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha h^\beta_{jk}.$$

Таким образом, функция $h^i_{jk}(t)$ является решением системы уравнений

$$\frac{dh^i_{jk}}{dt}=\overset{*}{c}{}^i_{\alpha\beta}a^\alpha h^\beta_{jk} \tag{45}$$

с начальным условием (43). Но при этом начальном условии система (45) имеет очевидное решение $h^i_{jk}=0$, и ввиду единственности решения мы получаем $h^i_{jk}(t)=0$.

Итак, теорема 87 доказана.

Нами закончен второй шаг построения локальной группы Ли по структурным константам. Дадим теперь весь путь построения в окончательном виде.

Теорема 88. *Пусть c^i_{jk}—константы, удовлетворяющие соотношениям* (11) *и* (12) § 52. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\frac{dw^i_j}{dt}=\delta^i_j+c^i_{\alpha\beta}a^\alpha w^\beta_j, \tag{46}$$

где a—постоянный вектор, а w^i_j—неизвестные функции параметра t. Через $w^i_j(t,\ a)$ обозначим решение системы (46) *при начальном условии*

$$w^i_j(0,\ a)=0. \tag{47}$$

Положим

$$v^i_j(x)=w^i_j(1,\ x). \tag{48}$$

Так как система (46) *линейная с постоянными коэффициентами, то решение определено и аналитично для произвольного вектора a при произвольном значении параметра t; поэтому функции $v^i_j(x)$ определены и аналитичны для произвольных значений координат точки x, т. е. на всем евклидовом пространстве. Рассмотрим, далее, систему уравнений в частных производных*

$$v^i_k(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^j}=v^i_j(x). \tag{49}$$

Условия интегрируемости этой системы уравнений выполнены, и так как в начале координат e матрица $\|v^i_j(x)\|$ обращается в единичную, то имеется столь малая окрестность G начала координат e, что при $x\in G$, $y\in G$ существует решение $f(x,\ y)$ системы (49), *удовлетворяющее начальному условию*

$$f(e,\ y)=y. \tag{50}$$

Произведение двух точек x и y из G определим, положив

$$xy=f(x,\ y). \tag{51}$$

В силу такого закона умножения G есть локальная группа Ли, взятая в канонических координатах первого рода, причем структурные константы группы G в этих координатах совпадают с заданными числами c^i_{jk}. Если, далее, G^* есть произвольная локальная группа Ли, взятая в канонических координатах первого рода, *причем ее структурные константы суть те же самые числа* c_{jk}^{i}, *то функция* $f^*(x, y)$, *определяющая закон умножения в* G^*, *в ее координатной форме совпадает с полученной выше функцией* $f(x, y)$.

Таким образом, доказаны существование и единственность группы Ли. Следует отметить еще, что полученная описанным путем функция $f(x, y)$ *есть* а н а л и т и ч е с к а я *функция, ибо системы уравнений, которые приходится интегрировать, являются аналитическими. Итак, всякая группа Ли допускает аналитические координаты.*

Доказательство теоремы 88 непосредственно следует из предложений A), B), C) и теорем 86 и 87.

Формулируем теперь полученный результат в терминах алгебр Ли.

Т е о р е м а 89. *Пусть* R — *произвольная действительная алгебра Ли* (см. определение 48). *Тогда существует такая локальная группа Ли* G, *что алгебра Ли группы* G *изоморфна алгебре* R (см. теорему 82). *Пусть, далее,* G *и* G' — *две локальные группы Ли, а* R *и* R' — *их алгебры Ли. Допустим, что существует изоморфное отображение* g *алгебры* R *на алгебру* R'. *Тогда имеется одно и только одно, с точностью до эквивалентности, локальное изоморфное отображение* h *локальной группы* G *на локальную группу Ли* G' (см. § 23, H)), *для которого соответствующее отображение алгебры* R *на алгебру* R' (см. теорему 84) *совпадает с заданным отображением* g.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для построения группы G по ее алгебре Ли достаточно взять алгебру R в координатной форме. Так как структурные константы алгебры R удовлетворяют соотношениям (11) и (12) § 52, то по ним в силу теоремы 88 можно построить локальную группу Ли G. В алгебрах R и R' выберем координатные системы, соответствующие друг другу при отображении g. Тогда структурные константы алгебр R и R' будут совпадать. Взяв в группах G и G' соответственные канонические координаты первого рода, мы получим в них некоторые функции $f(x, y)$ и $f'(x, y)$, дающие закон умножения, причем функции эти ввиду совпадения структурных констант будут совпадать (см. теорему 88). Таким образом, поставив каждой точке $x \in G$ в соответствие ту точку $x' \in G'$, которая имеет координаты, равные координатам точки x, мы получим нужное изоморфное отображение h. Единственность отображения h следует из того, что всякий автоморфизм группы G' записывается в канонических координатах первого рода в виде линейного преобразования (см. § 43, D)). Таким образом, нетождественному автоморфизму группы G' соответствует нетождественный автоморфизм алгебры R'.

Итак, теорема 89 доказана.

Теорема 89 показывает, что изучение локальной группы Ли полностью сводится к изучению ее алгебры Ли.

Следует отметить, что указанный путь построения группы Ли по ее алгебре Ли имеет преимущественно принципиальное значение. Практически удобнее для данной алгебры Ли подобрать группу Ли, исходя из косвенных соображений, и воспользоваться теоремой 89 лишь как теоремой единственности. В частности, на этом пути мы получаем следующий результат.

D) Всякая r-мерная коммутативная группа Ли локально изоморфна r-мерной векторной группе, т. е. аддитивной группе векторов r-мерного векторного пространства.

Пример 96. Выясним структуру двумерной группы Ли. Пусть R—двумерная действительная алгебра Ли, а p и q—два линейно независимых вектора из R. Положим $[p, q]=r$. Нетрудно проверить, что для двух произвольных векторов a и b из R имеем $[a, b]=\alpha r$, где α—некоторое число. Далее будем различать два случая: $r=0$ и $r\neq 0$. Если $r=0$, то коммутатор двух любых векторов из R равен нулю, и алгебра R коммутативна. Если $r\neq 0$, то найдется такой вектор t, что $[r, t]=r$. За базис векторного пространства R примем векторы r и t. Тогда структурные константы получают значения $c_{12}^1=1$, $c_{12}^2=0$. Таким образом, существуют лишь две неизоморфные двумерные алгебры Ли.

Если алгебра R коммутативна, то соответствующая ей группа Ли G тоже коммутативна.

Если алгебра R некоммутативна, то соответствующую ей группу G зададим следующими соотношениями:

$$f^1=x^1+y^1e^{-x^2}, \quad f^2=x^2+y^2.$$

Множество всех элементов группы G, для которых вторая координата обращается в нуль, образует нормальный делитель группы G. Соответствующий этому нормальному делителю группы G идеал алгебры R составлен из всех векторов αr, где α—произвольное действительное число.

Пример 97. Выясним структуру связной коммутативной группы Ли.

Пусть G—связная коммутативная группа Ли. Тогда G распадается в прямое произведение нескольких подгрупп, изоморфных группе D, и нескольких подгрупп, изоморфных группе K, где D есть аддитивная топологическая группа действительных чисел, а K—ее факторгруппа по подгруппе целых чисел. Если G компактна, то прямые сомножители, изоморфные D, отсутствуют.

Действительно, пусть H—векторное пространство той же размерности, что и группа G. Так как группы G и H локально изоморфны (см. D)), то односвязная группа H является универсальной накрывающей для G (см. определение 46). Таким образом, группа G изоморфна факторгруппе H/N, где N—дискретная подгруппа группы H. Пусть $e_1, \ldots, e_s$—система образующих группы N, построенная в примере 33. Линейно независимую систему $e_1, \ldots, e_s$

векторов пространства H дополним векторами $e_{s+1}, \ldots, e_n$ до базиса пространства H. Из рассмотрения координат пространства H, соответствующих введенному базису, непосредственно следует, что H/N распадается в прямую сумму s экземпляров группы K и $n-s$ экземпляров группы D.

§ 57. Построение подгруппы и гомоморфизма

В предыдущем параграфе была установлена полная адекватность понятий локальной группы Ли G и ее алгебры Ли R. Здесь мы детализируем эту адекватность, установив взаимно однозначное соответствие между подгруппами, нормальными делителями и факторгруппами группы G и соответствующими объектами, связанными с алгеброй R. Переход от группы G к алгебре R уже был нами проделан (см. § 53). Здесь мы проделаем обратный переход. Следует отметить, что все рассмотрения настоящего параграфа будут носить локальный характер.

Теорема 90. *Пусть G—локальная группа Ли, R—ее алгебра Ли и S—подалгебра алгебры R. Тогда существует одна и только одна с точностью до эквивалентности подгруппа H группы G* (см. § 23, I)), *для которой соответствующая подалгебра в R* (см. теорему 83) *совпадает с S. Мы будем говорить, что подгруппа H и подалгебра S* соответствуют друг другу, *и писать $H \rightleftarrows S$.*

Доказательство. Пусть r и s—размерности пространств R и S. Выберем в R такие координаты, чтобы вектор a тогда и только тогда принадлежал подпространству S, когда его координаты удовлетворяют соотношениям

$$a^{s+1}=0, \ \ldots, \ a^r=0. \tag{1}$$

В G введем соответственные канонические координаты первого рода. Эти координаты в R и G мы закрепим на время всего доказательства. Если подгруппа H существует, то в выбранных координатах она определяется системой линейных уравнений (см. теорему 62). Так как подгруппе H должна соответствовать подалгебра S, то H должна определяться уравнениями

$$x^{s+1}=0, \ \ldots, \ x^r=0, \tag{2}$$

т. е. точка x будет принадлежать подгруппе H тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют соотношениям (2). Итак, единственность подгруппы H доказана. Перейдем к доказательству ее существования.

Обозначим через H множество всех точек из G, координаты которых удовлетворяют условиям (2), и покажем, что H есть подгруппа группы G. Для этого достаточно показать, что если $x \in H$, $y \in H$, то $xy \in H$ и $x^{-1} \in H$. Доказательство будет вестись путем непосредственного вычисления функции $f(x, y)$, определяющей закон умножения в выбранных координатах (см. § 52, (1)).

Пусть c^i_{jk}—структурные константы группы G, или, что то же самое, алгебры R. В силу того, что соотношениями (1) определяется подалгебра, структурные константы удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{если} \quad i > s, \quad j \leqslant s, \quad k \leqslant s, \quad \text{то} \quad c^i_{jk} = 0. \tag{3}$$

Для того чтобы при всех дальнейших вычислениях не указывать всякий раз, какие значения может принимать тот или другой индекс, условимся писать у индекса штрих ($'$), если индекс этот принимает лишь значения $1, \ldots, s$, и два штриха ($''$), если индекс принимает лишь значения $s+1, \ldots, r$. При этих обозначениях соотношение (3) принимает вид

$$c^{i''}_{j'k'} = 0. \tag{4}$$

Точно так же, если точка (соответственно вектор) принадлежит H (соответственно S), то будем писать обозначающую ее (его) букву со штрихом.

Займемся теперь решением системы уравнений (46) § 56 при $a = a' \in S$. Для этого разобьем ее на две следующие независимые системы:

$$\frac{dw^i_{j'}}{dt} = \delta^i_{j'} + c^i_{\alpha'\beta} a^{\alpha'} w^{\beta}_{j'}, \tag{5}$$

$$\frac{dw^i_{j''}}{dt} = \delta^i_{j''} + c^i_{\alpha'\beta} a^{\alpha'} w^{\beta}_{j''}. \tag{6}$$

Для решения системы (5) находим предварительно решение системы

$$\frac{d\overset{*}{w}{}^{i'}_{j'}}{dt} = \delta^{i'}_{j'} + c^{i'}_{\alpha'\beta'} a^{\alpha} \overset{*}{w}{}^{\beta'}_{j'}. \tag{7}$$

Легко видеть, что тогда благодаря условию (4) система (5) удовлетворяется, если положить

$$w^{i'}_{j'} = \overset{*}{w}{}^{i'}_{j'}, \tag{8}$$

$$w^{i''}_{j'} = 0. \tag{9}$$

В силу единственности решения системы (46) § 56 мы, таким образом, получаем результат

$$w^{i''}_{j'}(t, a') = 0. \tag{10}$$

Из этого непосредственно следует, что

$$v^{i''}_{j'}(x') = 0 \tag{11}$$

(см. § 56, (48)).

Заметим, что получаемые из (8) функции $v_{j'}^{i'}(x')$ являются вспомогательными функциями группы Ли, алгебра Ли которой есть алгебра S. Действительно, мы имеем $v_{j'}^{i'}(x') = \overset{*}{w}{}_{j'}^{i'}(1, x')$, где функции $\overset{*}{w}{}_{j'}^{i'}(t, a')$ получены путем интегрирования системы (7), константы же $c_{j'k'}^{i'}$, входящие в эту систему, суть структурные константы алгебры S.

Перейдем теперь к решению системы (49) § 56. Нас интересуют лишь функции $f(x', y')$, именно, желательно показать, что $f^{i''}(x', y') = 0$, ибо этим будет показано, что $f(x', y') \in H$. Так как при постоянном y' функция $f(x', y')$ зависит лишь от переменных $x^{i'}$, $i' = 1, \ldots, s$, то для нахождения ее достаточно решить систему

$$v_k^i(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^{j'}} = v_{j'}^i(x') \tag{12}$$

при начальных условиях $f(e, y') = y'$. Система (12) может быть приведена к виду (1) § 55, так что, не проверяя условий интегрируемости, мы можем утверждать, что она имеет не более одного решения при указанных начальных условиях. Для решения системы (12) решаем предварительно систему

$$v_{k'}^{i'}(f^*)\frac{\partial f^{*k'}}{\partial x^{j'}} = v_{j'}^{i'}(x') \tag{13}$$

при начальных условиях $f^{*i'}(e, y') = y^{i'}$. Система (13) разрешима, ибо входящие в нее функции $v_{j'}^{i'}(z')$ являются, как мы видели, вспомогательными функциями некоторой группы Ли. Легко видеть теперь, что система (12) благодаря условию (11) удовлетворяется при $f^{i'}(x', y') = f^{*i'}(x', y')$, $f^{i''}(x', y') = 0$. В силу единственности решения системы (12) мы получаем ожидаемый результат $f^{i''}(x', y') = 0$. Таким образом, $x'y' = f' \in H$.

Для доказательства того, что $(x')^{-1} \in H$, достаточно заметить, что в канонических координатах первого рода элемент x^{-1} имеет координаты $-x^i$, $i = 1, \ldots, r$. Это легко следует из рассмотрения однопараметрических подгрупп. Таким образом, $(x')^{-1} = z' \in H$.

Итак, теорема 90 доказана.

А) Пусть G—локальная группа Ли, в которой зафиксированы некоторые канонические координаты первого рода. Автоморфизм φ_x, $x \in G$, определяемый формулой $\varphi_x(z) = xzx^{-1}$, задается в этих координатах матрицей $\|l_j^i(x)\|$. Именно

$$(\varphi_x(z))^i = l_j^i(x)z^j. \tag{14}$$

Оказывается, что матрица $\|l_j^i(ta)\|$ вдоль однопараметрической подгруппы $x^i = a^i t$ с направляющим вектором a удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dl^i_j(ta)}{dt} = c^i_{\alpha\beta} a^\alpha l^\beta_j(ta) \tag{15}$$

с очевидным начальным условием

$$l^i_j(0a) = \delta^i_j. \tag{16}$$

Для доказательства заметим, что матрица $\|l^i_j(x)\|$ задает автоморфизм l_x алгебры R, соответствующий автоморфизму φ_x группы G. Направляющим вектором однопараметрической группы l_{ta} линейных преобразований служит преобразование p_a (см. § 54, F)). Таким образом, в силу предложения B) § 54 линейное преобразование l_{ta} удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} l_{ta} = p_a l_{ta}. \tag{17}$$

Переходя к координатной записи, мы получаем уравнение (15).

Теорема 91. *Пусть G—локальная группа Ли, H—ее подгруппа, R—алгебра Ли группы G и S—подалгебра алгебры R, соответствующая подгруппе H, $H \to S$* (см. теорему 83). *Если S есть идеал алгебры R, то H есть нормальный делитель группы G. Если S есть центральный идеал алгебры R, то H есть центральный нормальный делитель группы G. Наконец, если S есть центр алгебры R, то H есть центр группы G.*

Доказательство. Пусть r и s—размерности групп G и H. Введем в G такие канонические координаты первого рода, чтобы подгруппа H определялась соотношениями

$$x^{s+1} = 0, \ \ldots, \ x^r = 0. \tag{18}$$

Тогда в соответственных координатах в R подалгебра S будет определяться соотношениями

$$a^{s+1} = 0, \ \ldots, \ a^r = 0. \tag{19}$$

Так же, как при доказательстве теоремы 90, будем отмечать штрихом ($'$) индексы, принимающие значения $1, \ldots, s$, и двумя штрихами ($''$)—индексы, принимающие значения $s+1, \ldots, r$. Элементы, входящие в H, будем отмечать штрихом.

Для доказательства теоремы нам следует выяснить вопрос о том, как реагируют элементы подгруппы H на внутренние автоморфизмы группы G. Для этого достаточно вычислить матрицу $\|l^i_j(x')\|$, пользуясь методом, указанным в A).

В силу специального выбора координат в G и того, что S есть идеал алгебры R, структурные константы c^i_{jk} удовлетворяют соотношениям

$$c^{i''}_{jk'} = 0. \tag{20}$$

Интегрируя систему (15), разобьем ее на две независимые:

$$\frac{dl^i_{j'}(ta)}{dt}=c^i_{\alpha\beta}a^\alpha l^\beta_{j'}(ta), \tag{21}$$

$$\frac{dl^i_{j''}(ta)}{dt}=c^i_{\alpha\beta}a^\alpha l^\beta_{j''}(ta). \tag{22}$$

Для интегрирования системы (21) решаем предварительно систему

$$\frac{dl^{*i'}_{j'}(ta)}{dt}=c^{i'}_{\alpha\beta'}a^\alpha l^{*\beta'}_{j'}(ta). \tag{23}$$

Легко видеть, что благодаря условию (20) система (21) удовлетворяется тогда при $l^{i'}_{j'}(ta)=l^{*i'}_{j'}(ta)$, $l^{i''}_{j'}(ta)=0$. Таким образом, мы получаем результат

$$l^{i''}_{j'}(x)=0. \tag{24}$$

В случае, если S есть центральный идеал, мы вместо соотношения (20) имеем $c^i_{jk'}=0$. Тогда система (21) имеет решение $l^i_{j'}(ta)=$ $=\delta^i_{j'}$ (см. начальные условия (16)) и, следовательно,

$$l^i_{j'}(x)=\delta^i_{j'}. \tag{25}$$

Из соотношения (24) следует, что $\varphi_x(z')\in H$ (см. (14)), т. е. H есть нормальный делитель. Из соотношения (25) следует, что $\varphi_x(z')=z'$ (см. (14)), т. е. H есть центральный нормальный делитель. Пусть, наконец, S — центр алгебры R, H_0 — центр группы G, $H_0\rightarrow S_0$. Тогда $H\subset H_0$ и, следовательно, $S\subset S_0$. Так как S_0 есть центральный идеал (см. теорему 83), то $S_0\subset S$. Таким образом, $S_0=S$, и потому $H_0=H$.

Таким образом, теорема 91 доказана.

Перейдем к рассмотрению гомоморфизмов.

Т е о р е м а 92. *Пусть G и G' — две локальные группы Ли, а R и R' — их алгебры Ли. Пусть, далее, h — некоторое гомоморфное отображение алгебры R на R'. Тогда существует одно и только одно с точностью до эквивалентности локальное гомоморфное отображение f группы G на группу G'* (см. § 23, К)), *для которого соответствующее гомоморфное отображение алгебры R на R' есть заданное отображение h* (см. теорему 84). *Мы будем говорить, что отображения f и h* с о о т в е т с т в у ю т *друг другу и писать $f\rightleftarrows h$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S — ядро гомоморфизма h. В силу теорем 90 и 91 идеалу S алгебры R соответствует нормальный делитель N группы G, $N\rightleftarrows S$. Положим $G^*=G/N$ и обозначим через f^* естественное гомоморфное отображение группы G на G^*. Через R^* обозначим алгебру Ли группы G^*, а через h^* — тот гомоморфизм алгебры R на R^*, который соответствует гомоморфизму f^*

(см. теорему 84). Тогда ядром гомоморфизма h^* будет служить S, ибо ядро гомоморфизма f^* есть N и $N \rightleftarrows S$ (см. теорему 90).

При гомоморфизме h^* в каждый элемент $a^* \in R^*$ переходит некоторый смежный класс A алгебры R по идеалу S. При гомоморфизме h смежный класс A переходит в некоторый элемент $a' \in R'$. Положим $a' = h'(a^*)$. Нетрудно видеть, что h' есть изоморфное отображение алгебры R^* на алгебру R', причем выполнено условие

$$h(a) = h'(h^*(a)), \tag{26}$$

где a — произвольный элемент из R. В силу теоремы 89 существует такое однозначно определенное изоморфное отображение f' группы G^* на G', что соответствующее ему отображение алгебры R^* на R' есть h', $f' \to h'$. Положим

$$f(x) = f'(f^*(x)). \tag{27}$$

Так как $f^* \to h^*$, $f' \to h'$, то в силу соотношений (26) и (27) получаем:

$$f \to h \tag{28}$$

(см. § 53, Е)).

Если бы существовали два различных гомоморфизма f и f'', удовлетворяющих условию (28), то ввиду того, что ядра обоих гомоморфизмов f и f'' совпадают, мы получили бы некоторый нетождественный автоморфизм группы G', причем соответствующий ему автоморфизм алгебры R' был бы тождественным, но это невозможно в силу теоремы 89.

Таким образом, теорема 92 доказана.

Следующие примеры показывают, что рассмотрения настоящего параграфа носят действительно существенно локальный характер.

Пример 98. Пусть G^2 — двумерная *торовидная группа*. Каждый элемент x группы G^2 определяется парой действительных чисел x^1, x^2, причем числа эти определены с точностью до целочисленных слагаемых. Произведение двух элементов $xy = f$ определяется соотношениями $f^1 = x^1 + y^1$, $f^2 = x^2 + y^2$, причем равенства эти понимаются как сравнения по модулю 1. Группа G^2 есть группа Ли, заданная в целом; ее алгебру Ли обозначим через R^2. Рассмотрим в G^2 локальную однопараметрическую подгруппу $x(t)$, определяемую соотношениями $x^1(t) = a^1 t$, $x^2(t) = a^2 t$, где отношение $\frac{a^1}{a^2}$ иррационально. Локальной подгруппе $\{x(t)\} = H$ соответствует подалгебра S алгебры Ли R^2. Покажем, что подалгебре S не соответствует никакая полная подгруппа в G^2. Допустим, что такая подгруппа H^* нашлась. Так как в окрестности единицы подгруппа H^* однозначно определена подалгеброй S, то в ней подгруппы H^* и H должны совпадать. Но из полноты группы H^* мы легко заключаем, что группа H^* должна содержать все элементы $x(t)$,

$x^1(t)=a^1t$, $x^2(t)=a^2t$ при произвольном t. Из того, что отношение $\frac{a^1}{a^2}$ иррационально, мы легко заключаем, что группа H^* составляет множество, всюду плотное в G^2, а так как H^* должна в то же время быть одномерной и замкнутой в G^2, то мы приходим к противоречию.

Следует отметить, что группа G^2 неодносвязна, и если бы мы стали проводить все построение для универсальной накрывающей группы $\widetilde{G}_2$ (см. определение 46), то все прошло бы благополучно. В следующем примере мы покажем, что и в случае односвязной группы Ли не существует взаимно однозначного соответствия между полными подгруппами группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли.

Пример 99. Пусть G—мультипликативная группа кватернионов, по модулю равных единице, R—ее алгебра Ли и H—одномерная подгруппа группы G, составленная из всех кватернионов вида $\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$. В группе $G \times G$ имеется торовидная подгруппа $H \times H$, каждый элемент $(\cos 2\pi x^1 + i \sin 2\pi x^1, \cos 2\pi x^2 + i \sin 2\pi x^2)$ которой определяется двумя параметрами x^1, x^2, задающимися с точностью до целочисленных слагаемых. Пусть $x^l = a^l t$, $l=1, 2,$—уравнение однопараметрической подгруппы группы $H \times H$, записанное в этих параметрах. Будем считать, что отношение a^1/a^2 иррационально. Тогда, как отмечалось в предыдущем примере, построенная однопараметрическая подгруппа заполняет тор $H \times H$ всюду плотно. Если эту однопараметрическую подгруппу рассматривать лишь при ограниченных значениях параметра t, то мы получаем одномерную локальную подгруппу H' группы $H \times H \subset G \times G$. Соответствующую ей одномерную подалгебру алгебры $R+R$ обозначим через S'. Таким образом, подалгебре S' алгебры $R+R$ не соответствует в односвязной группе Ли $G \times G$ никакой полной подгруппы.

§ 58. Разрешимые и полупростые алгебры Ли

Результатами предыдущих параграфов изучение локальных групп Ли полностью сведено к изучению действительных алгебр Ли. Более глубокое исследование последних проводится путем рассмотрения *присоединенной алгебры* (см. § 54, Е)). Каждому элементу a алгебры Ли R ставится в соответствие линейное отображение p_a векторного пространства R в себя, определяемое соотношением $p_a(x)=[a, x]$. Рассмотрение собственных значений и собственных векторов отображения p_a в их зависимости от вектора a составляет основу метода изучения алгебр Ли. Так как собственные векторы, вообще говоря, комплексны, то приходится включать действительное векторное пространство R в комплексное векторное пространство $[R]$ той же размерности. Таким образом, с неизбежностью возникает теория *комплексных алгебр Ли*. Каждой действительной алгебре R однозначно соответствует комплексная алгебра $[R]$—ее *комплексное расширение*. Исходную алгебру R будем называть *действительной формой* комплексной алгебры $[R]$. При этом неизоморфные действительные алгебры Ли могут иметь изоморфные комплексные расширения. Таким образом, комплексная алгебра Ли может иметь несколько различных действительных форм. В то же время a priori не ясно, всякая ли комплексная алгебра Ли имеет действительную форму, т. е. изоморфна комплексному расширению некоторой действительной алгебры Ли.

Одним из первых естественных вопросов в теории алгебр Ли является вопрос о их, по возможности полной, классификации. Прежде всего выделяются два обширных класса алгебр Ли, в значительной степени противоположных друг другу по своим свойствам. Это, с одной стороны,—*разрешимые* алгебры Ли и, с другой стороны,—*полупростые* алгебры Ли. Первые получаются в результате последовательных усложнений коммутативных алгебр Ли, вторые же наименее сходны с коммутативными. Оказывается, что каждая алгебра Ли как бы составлена из разрешимой и полупростой, именно, в ней есть разрешимый идеал, алгебра вычетов по которому есть полупростая алгебра Ли. В этом весьма слабом смысле изучение каждой алгебры Ли сводится к изучению разрешимой и полупростой. На первый взгляд кажется, что разрешимые алгебры Ли более элементарны, чем полупростые, но это не так; во всяком случае пока нет никакой надежды на то, чтобы удалось произвести их полную классификацию. Полупростые алгебры Ли, напротив, удалось полностью проклассифицировать. Эта полная классификация, принадлежащая Киллингу, представляет собой, пожалуй, самый интересный и значительный результат теории. Понятия разрешимой и полупростой алгебр устанавливаются для алгебры над любым полем. Легко доказывается, что действительная алгебра R и ее комплексное расширение одновременно являются разрешимыми или неразрешимыми, полупростыми или неполупростыми. Результаты Киллинга относятся к комплексным полупростым алгебрам Ли. Оказывается, что каждая комплексная полупростая алгебра Ли распадается в прямую сумму некоммутативных простых алгебр Ли. Комплексные некоммутативные простые алгебры Ли подвергаются полной классификации. Именно, имеется четыре бесконечные их серии

$$A_n,\ n\geqslant 1;\quad B_n,\ n\geqslant 2;\quad C_n,\ n\geqslant 3;\quad D_n,\ n\geqslant 4,$$

и пять отдельных алгебр

$$G_2,\quad F_4,\quad E_6,\quad E_7,\quad E_8.$$

Этот результат сам по себе еще ничего не дает для классификации групп Ли, так как для их классификации нужна классификация действительных алгебр Ли. Переход от классификации комплексных полупростых алгебр к классификации действительных полупростых алгебр представляет трудности, не менее значительные, чем сама классификация комплексных полупростых алгебр. Устанавливается, что каждая комплексная полупростая алгебра имеет действительные формы, число этих действительных форм конечно, и все они найдены (Картан [7], см. также [10]). Среди этих действительных форм имеется одна и только одна форма, которая соответствует компактной группе Ли. Имеется, следовательно, взаимно однозначное соответствие между комплексными полупростыми алгебрами Ли и действительными полупростыми алгебрами Ли, соответствующими компактным группам Ли. Вопрос о классификации компактных полупростых групп Ли есть, таким образом, вопрос примерно той же степени трудности, что и проблема классификации комплексных полупростых алгебр Ли. Между тем вопрос о классификации всех действительных полупростых алгебр Ли весьма труден и не может быть рассмотрен в настоящей книге. Так как нас интересуют в первую очередь действительные алгебры Ли (как соответствующие группам Ли), а не комплексные алгебры Ли, являющиеся лишь средством изучения действительных, то мы ограничимся в настоящей книге классификацией лишь тех действительных полупростых алгебр Ли, которые соответствуют компактным группам Ли и которые мы будем называть *компактными алгебрами Ли*. Классификация эта будет произведена в следующей, последней главе книги. Здесь же будет дано определение разрешимых и полупростых алгебр Ли и будут установлены простейшие связи между действительными алгебрами Ли и их комплексными расширениями.

А) Пусть R—алгебра Ли над произвольным полем K, S—ее подалгебра и T—идеал; тогда алгебры $(S+T)/T$ и $S/(S\cap T)$ изоморфны между собой. Пусть φ—естественный гомоморфизм алгебры $S+T$ на алгебру $(S+T)/T$. Тогда $\varphi(S)=(S+T)/T$, и ядром гомоморфизма φ алгебры S является $S\cap T$. Таким образом, предложение А) доказано (см. § 53, D)).

Определение 49. Алгебра R над произвольным полем K называется *разрешимой*, если в ней существует такая невозрастающая последовательность подалгебр:

$$R_0=R,\ R_1,\ \ldots,\ R_{n-1},\ R_n=\{0\}, \tag{1}$$

что алгебра R_{i+1} есть идеал алгебры R_i и алгебра R_i/R_{i+1} коммутативна, $i=0,\ \ldots,\ n-1$. Алгебра называется *полупростой*, если она не имеет разрешимых идеалов, отличных от $\{0\}$.

Заметим, что одномерная алгебра, будучи простой, не является полупростой, так как она разрешима. Всякая простая алгебра размерности, большей единицы, некоммутативна и является полупростой.

B) Пусть R—алгебра над произвольным полем K. Если алгебра R разрешима, то всякая ее подалгебра и всякая ее факторалгебра разрешимы. Далее, если в алгебре R имеется такой разрешимый идеал S, что алгебра R/S разрешима, то алгебра R сама разрешима.

Докажем предложение B). Допустим сперва, что алгебра R разрешима, и пусть (1)—ряд ее подалгебр, указывающий на ее разрешимость. Пусть S—произвольная подалгебра алгебры R. Положим $S_i = S \cap R_i$ и покажем, что алгебра S_i/S_{i+1} коммутативна. Этим разрешимость алгебры S будет доказана. Мы имеем:

$$S_{i+1} = S_i \cap R_{i+1}, \quad S_i + R_{i+1} \subset R_i.$$

Так как, далее, в силу предложения A)

$$(S_i + R_{i+1})/R_{i+1} \approx S_i/(S_i \cap R_{i+1}) = S_i/S_{i+1},$$

то из коммутативности алгебры R_i/R_{i+1} следует коммутативность алгебры $S_i/S_{i+1} \approx (S_i + R_{i+1})/R_{i+1} \subset R_i/R_{i+1}$. Пусть теперь S—идеал; докажем разрешимость алгебры R/S. Пусть φ—естественный гомоморфизм алгебры R на алгебру $R^* = R/S$. Положим:

$$\varphi(R_i) = R_i^*.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_i^*/R_{i+1}^* = (R_i + S)/(R_{i+1} + S) = (R_i + R_{i+1} + S)/(R_{i+1} + S) \approx \\ \approx R_i/(R_i \cap (R_{i+1} + S)) = R_i/(R_{i+1} + R_i \cap S) \approx \\ \approx (R_i/R_{i+1})/((R_{i+1} + R_i \cap S)/R_{i+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, алгебра R_i^*/R_{i+1}^* изоморфна некоторой фактор-алгебре алгебры R_i/R_{i+1} и потому коммутативна. Отсюда следует, что алгебра R/S разрешима.

Допустим теперь, что S—идеал и что алгебры S и R/S разрешимы. Пусть $R_0^* = R/S$, R_1^*, ..., $R_m^* = \{0\}$—ряд подалгебр алгебры R/S, указывающий на ее разрешимость, и $S_0 = S$, S_1, ..., $S_n = \{0\}$—аналогичный ряд подалгебр идеала S. Естественное гомоморфное отображение алгебры R на алгебру R/S обозначим через φ и положим $R_i = \varphi^{-1}(R_i^*)$, $i = 1, \ldots, m$. Легко видеть, что ряд

$$R_0 = R, \; R_1, \; \ldots, \; R_m = S_0, \quad R_{m+1} = S_1, \; \ldots, \; R_{m+n} = \{0\}$$

указывает на разрешимость алгебры R.

Итак, предложение B) доказано.

Т е о р е м а 93. *Пусть R—алгебра над произвольным полем K. Тогда в R существует такой разрешимый идеал S, что всякий другой разрешимый идеал алгебры R содержится в S. Идеал S называется* м а к с и м а л ь н ы м р а з р е ш и м ы м и д е а л о м *алгебры R. Если S—максимальный разрешимый идеал алгебры R, то R/S есть полупростая алгебра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S—такой разрешимый идеал алгебры R, который не содержится ни в каком отличном от него разрешимом идеале. Покажем, что S есть максимальный разрешимый идеал алгебры R. Пусть T—произвольный разрешимый идеал алгебры R. Покажем, что $S+T$ есть также разрешимый идеал алгебры R и что, следовательно, $T\subset S$. В силу предложения A) алгебры $(S+T)/T$ и $S/(S\cap T)$ изоморфны между собой. В силу предложения B) алгебра $S/(S\cap T)$ разрешима. Таким образом, разрешима и изоморфная ей алгебра $(S+T)/T$. Так как алгебры $(S+T)/T$ и T разрешимы, то в силу предложения B) разрешима и алгебра $S+T$.

Покажем теперь, что алгебра R/S полупростая. Пусть φ—естественный гомоморфизм алгебры R на алгебру $R^*=R/S$. Допустим, что алгебра R^* имеет разрешимый идеал Q^*, отличный от $\{0\}$, и пусть $Q=\varphi^{-1}(Q^*)$. Очевидно, что Q есть отличный от S и содержащий S идеал, но так как алгебры Q/S и S разрешимы, то в силу предложения B) алгебра Q разрешима, а это противоречит предположению о максимальности разрешимого идеала S.

Итак, теорема 93 доказана.

Теорема 93 указывает на то, что в некотором весьма слабом смысле изучение произвольных алгебр сводится к изучению разрешимых и полупростых алгебр. Более сильную возможность редукции дает нижеследующая теорема 94 (см. [21, 47]), которая здесь приводится без доказательства.

Т е о р е м а 94. *Пусть R—алгебра Ли над полем K характеристики 0 и S—ее максимальный разрешимый идеал. Тогда в R имеется такая полупростая подалгебра T, что $S\cap T=0$, а $T+S=R$.*

Если бы подалгебра T была идеалом, то алгебра R распадалась бы в прямую сумму полупростой алгебры T и разрешимой алгебры S; но подалгебра T, вообще говоря, не является идеалом, и восстановление алгебры R по разрешимому идеалу S и полупростой подалгебре T неоднозначно и более сложно, чем в случае распадения в прямую сумму. Все же, теорема 94 дает некоторую возможность свести изучение алгебры R к изучению алгебр S и T, как мы увидим это при построении группы Ли в целом по ее алгебре Ли.

Установим теперь некоторые связи между действительными и комплексными алгебрами Ли.

C) Пусть R—действительное векторное пространство. Обозначим через $[R]$ совокупность всех выражений вида $z=x+iy$, где $x\in R$, $y\in R$, а $i=\sqrt{-1}$. Определим в $[R]$ операцию умножения элемента $z=x+iy$ на комплексное число $\gamma=\alpha+i\beta$, положив $\gamma z=(\alpha x-\beta y)+i(\alpha y+\beta x)$. Определим, далее, в $[R]$ операцию сложения элементов, положив $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$. Очевидно, что $[R]$ есть векторное пространство над полем комплексных чисел, или, что то же самое, комплексное векторное пространство. Мы будем называть его *комплексным расширением* действительного векторного пространства R. Вектор $\bar{z}$, *комплексно сопряженный* с вектором $z=x+iy$, определим, положив $\bar{z}=x-iy$. Если R есть алгебра Ли, то в комплексном векторном пространстве $[R]$ определим операцию коммутирования, положив $[z_1, z_2]=[x_1+iy_1, x_2+iy_2]=[x_1, x_2]-[y_1, y_2]+i[x_1, y_2]+i[y_1, x_2]$. Очевидно, что определенная таким образом операция коммутирования линейна (см. § 52, (14)) в комплексном векторном пространстве $[R]$; оказывается, что она удовлетворяет также условиям (15) и (16) § 52, так что $[R]$ есть комплексная алгебра Ли. Комплексную алгебру Ли $[R]$ будем называть *комплексным расширением* действительной алгебры R. Размерность алгебры $[R]$ равна размерности алгебры R. Легко видеть, что если S есть идеал алгебры R, то $[S]$ есть идеал алгебры $[R]$ и что

$$[R/S]\approx[R]/[S].$$

Из этого непосредственно следует, что если R есть разрешимая алгебра Ли, то и алгебра $[R]$ разрешима.

Докажем, что $[R]$ есть комплексная алгебра Ли. Пусть $e_1, \ldots, e_r$—базис алгебры R; положим:

$$[e_j, e_k]=c^l{}_{jk}e_l. \tag{2}$$

Тогда числа c^l_{jk} суть структурные константы алгебры R. Векторы $e_1, \ldots, e_r$ образуют базис алгебры $[R]$ и соотношение (2) определяет в алгебре $[R]$ операцию коммутирования. Так как числа c^l_{jk} суть структурные константы алгебры R, то они удовлетворяют условиям (18) и (19) § 52, а потому операция коммутирования в $[R]$, заданная соотношением (2), удовлетворяет условиям (15) и (16) § 52.

D) Пусть R—комплексная алгебра Ли. Так как определен закон умножения элементов из R на комплексные числа, то, в частности, определен и закон умножения элементов из R на действительные числа, и потому алгебру R можно рассматривать как действительную алгебру Ли. Эту действительную алгебру Ли мы будем обозначать через (R). Множества R и (R) совпадают, в обоих определены совпадающие между собой операции коммутирования, но элементы алгебры R можно умножать на комплексные числа, а элементы алгебры (R)—только на действительные числа. Таким образом, некоторое множество элементов из $R=(R)$ может быть подалгеброй действительной алгебры (R) и не быть подалгеброй комплексной алгебры R. Если $e_1, \ldots, e_r$—базис пространства R, то базис пространства (R) состоит из элементов $e_1, ie_1, \ldots, e_r, ie_r$. Легко видеть, что если S есть идеал алгебры R, то (S) есть идеал алгебры (R), и что

$$(R/S)=(R)/(S).$$

Из этого непосредственно следует, что если R есть разрешимая алгебра Ли, то и алгебра (R) разрешима.

E) Пусть R—действительная алгебра Ли, $[R]$—ее комплексное расширение (см. C)) и $([R])$—алгебра Ли $[R]$, рассматриваемая как действительная (см. D)). В множестве $[R]$ определена операция перехода к комплексно сопряженному вектору $z \to \bar{z}$; она же определена и в $([R])$. Полагая $\psi(z)=\bar{z}$, мы получаем автоморфизм действительной алгебры $([R])$, не являющийся автоморфизмом алгебры $[R]$. Автоморфизм ψ есть *инволютивный автоморфизм*, именно $\psi\psi$ есть тождественный автоморфизм. Заметим, что действительная алгебра $([R])$ содержит в качестве подалгебры действительную алгебру R, которую можно определить как совокупность всех элементов $z \in ([R])$, удовлетворяющих условию $\psi(z)=z$.

F) Пусть R—действительная алгебра Ли и S—ее максимальный разрешимый идеал. Тогда $[S]$ есть максимальный разрешимый идеал алгебры $[R]$. Таким образом, алгебры R и $[R]$ одновременно являются разрешимыми или неразрешимыми, полупростыми или неполупростыми.

Докажем это. Пусть T—максимальный разрешимый идеал алгебры $[R]$. Легко видеть, что $\bar{T}$ есть разрешимый идеал алгебры $[R]$, и ввиду максимальности идеала T имеем $T=\bar{T}$. Так как идеал T наряду с каждым вектором z содержит и вектор $\bar{z}$, а потому и оба действительных вектора $z+\bar{z}$ и $i(z-\bar{z})$, то $T=[S']$, где S'—идеал алгебры R. Так как алгебра T разрешима, то разрешима и алгебра (T), а потому и алгебра S' разрешима как подалгебра разрешимой алгебры (T) (см. B)). Таким образом, ввиду максимальности идеала S имеем $S' \subset S$, а ввиду разрешимости идеала $[S]$ имеем $[S] \subset [S'] = T$. Эти два включения дают $[S]=[S']$, т. е. $T=[S]$.

Итак, предложение F) доказано.

Как уже отмечалось, комплексные алгебры Ли следует рассматривать в первую очередь как средство для изучения действительных алгебр Ли. Для того чтобы придать комплексным алгебрам Ли более самостоятельное значение, можно ввести понятие *комплексной группы Ли* (см. ниже). Это понятие в дальнейшем, однако, использоваться не будет.

G) Будем говорить, что в локальной группе G' с единицей e введены *комплексные координаты*, если задано гомеоморфное отображение f пространства G' на окрестность нуля комплексного векторного пространства A, в котором фиксирован некоторый базис, причем $f(e)=0$. За комплексные координаты точки $x \in G'$ принимают комплексные координаты вектора $f(x)$. Локальная группа G' с определенным образом выбранными в ней комплексными координатами называется *локальной комплексной группой Ли*, если закон умножения записывается в этих координатах при помощи аналитических функций комплексных переменных. Локальное изоморфное отображение g одной локальной комплексной группы Ли G'_1 на другую локальную комплексную группу Ли G'_2

называется *изоморфным отображением* комплексной группы Ли G_1' на комплексную группу Ли G_2', если в координатной форме оно записывается при помощи аналитических функций комплексных переменных. Таким образом, в локальной комплексной группе Ли G' координаты следует считать не фиксированными, а определенными с точностью до аналитического преобразования. *Подгруппы* и *нормальные делители* локальной комплексной группы Ли G' определяются как такие подгруппы и нормальные делители локальной группы Ли G', которые выделяются при помощи аналитических соотношений между комплексными координатами. Аналогично обстоит дело и с *гомоморфизмами*. Пусть G'—локальная комплексная группа Ли и $x(t)$—кривая, которая в комплексных координатах задана соотношениями $x^i = x^i(t)$; здесь t—действительный параметр и $x(0)=e$. Компоненты вектора a, *касательного* к кривой $x(t)$, определим, положив $a^i = \frac{d}{dt} x^i(0)$. Таким образом, определяется комплексное векторное пространство R, *касательное* к G' в точке e. Так же как в § 52, в комплексном векторном пространстве R определяется закон коммутирования векторов, так что пространство R становится комплексной алгеброй Ли. Все построения § 56 можно провести для комплексной алгебры Ли R и по ней построить комплексную локальную группу Ли. Так же обстоит дело и с содержанием § 57. Заметим, что каждая комплексная локальная группа Ли G' может рассматриваться как действительная локальная группа Ли удвоенной размерности, которую мы будем обозначать через (G'). Алгеброй Ли группы (G') служит алгебра (R) (см. D)). Если в окрестности единицы некоторой полной (нелокальной) топологической группы G указаны комплексные координаты, так что окрестность эта есть локальная комплексная группа Ли, то G мы будем называть *полной комплексной группой Ли*.

Подобно тому, как для действительной алгебры Ли R мы определили ее комплексное расширение $[R]$, можно и для действительной группы Ли G' определить ее *комплексное расширение* $[G']$.

H) Пусть G'—действительная локальная группа Ли. В ней всегда можно и притом единственным, с точностью до аналитического преобразования, способом ввести аналитические координаты, т. е. такие координаты, в которых закон умножения $z^i = f^i(x, y) = f^i(x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r)$ записывается аналитическими функциями. Так как функции f^i являются аналитическими, то переменным в них можно придавать не только действительные, но и комплексные значения. В результате этого мы получаем закон умножения в комплексной локальной группе Ли $[G']$, которую естественно назвать *комплексным расширением* исходной локальной группы Ли G'. Если R есть алгебра Ли группы Ли G', то алгебра $[R]$ есть алгебра Ли группы Ли $[G']$. Допустим теперь, что локальная комплексная группа Ли $[G']$ есть окрестность единицы некоторой полной комплексной связной и односвязной группы Ли, которую мы обозначим через $[G]$. Инволютивному автоморфизму ψ алгебры $([R])$ (см. Е)) соответствует инволютивный автоморфизм φ' локальной группы Ли $([G'])$. Этот инволютивный автоморфизм в силу теоремы 80 единственным образом распространяется в инволютивный автоморфизм φ группы $[G]$. Пусть G—множество всех таких элементов x группы $[G]$, что $\varphi(x)=x$. Множество G, как легко видеть, есть группа Ли с алгеброй Ли R. Естественно считать теперь, что комплексная группа Ли $[G]$ есть комплексное расширение действительной полной группы Ли G. Существенный недостаток этой конструкции заключается в том, что группу G нельзя считать наперед заданной полной группой Ли, так как она определяется через группу $[G]$. Вопрос о том, при каких условиях действительная группа Ли G может быть включена в комплексную группу Ли, рассматривался А. И. Мальцевым [25], который показал, в частности, что простая действительная группа Ли с бесконечным центром такого включения не допускает.

П р и м е р 100. Пусть R—n-мерное действительное векторное пространство. Обозначим через G_k^n группу всех линейных преобразований пространства R, оставляющих инвариантной невырождающуюся квадратичную форму $\psi_k(x)$, имеющую в своем каноническом виде $n-k$ положительных квадратов и k отрицательных. Нетрудно видеть, что G_k^n есть действительная группа Ли. Совершенно очевидно, что комплексные расширения всех групп G_k^n, $k=0, 1, \ldots, n$, изоморфны между собой, ибо в комплексной области различие между квадратичными формами $\psi_k(x)$, $k=0, 1, \ldots, n$, стирается. В действительной же области группы G_k^n и G_l^n локально изоморфны лишь тогда, когда $k=l$ или $k+l=n$. В этом случае они, конечно, изоморфны и как полные группы. Вполне очевидно, что группа G_0^n локально не изоморфна ни одной из групп G_k^n, $0<k<n$, так как универсальная накрывающая группы G_0^n компактна (см. пример 91), а группа G_k^n, $0<k<n$, некомпактна.

Стоит отметить, что группа G_2^4 в ее действительной форме является простой, между тем как группа G_0^4, как мы видели (см. пример 89), локально распадается в прямое произведение. Таким образом, комплексное расширение простой действительной группы G_2^4 не является простой группой Ли.

Остановимся еще на группе G_1^3. Обозначим через G^* компоненту единицы группы G_1^3. Она состоит из преобразований, входящих в G_1^3 и имеющих положительный детерминант. Множество P всех прямых пространства R^3, проходящих через начало координат, образует *проективный пучок* или *проективную плоскость*. Уравнение $\psi_1(x)=0$ высекает на плоскости P некоторое действительное *коническое сечение* V. Таким образом, каждому преобразованию группы G^* соответствует некоторое проективное преобразование плоскости P, оставляющее неизменным коническое сечение V. Следовательно, группа G^* изоморфна группе преобразований проективной плоскости P при неизменной кривой V. Эта последняя группа, как известно, изоморфна *группе движений неевклидовой плоскости*, а также группе дробнолинейных преобразований прямой.

Отметим, что с точностью до локального изоморфизма имеются лишь две трехмерные простые группы Ли: G_0^3 и G_1^3, причем первая из них компактна, а вторая некомпактна. Комплексные расширения групп G_0^3 и G_1^3 локально изоморфны.

§ 59. Построение группы Ли в целом

Здесь будет дано построение полной группы Ли по ее структурным константам, или, что то же самое,—по ее алгебре Ли. Построение это, правда, опирается на недоказанную в настоящей книге теорему 94, но так как теорема 94 носит чисто локальный характер, то все же оно представляет интерес. Независимо от теоремы 94 построение будет проведено для разрешимых алгебр Ли и для алгебр Ли, лишенных центра.

Следует заранее указать, что некоторые детали нижеследующих доказательств будут проведены без полной тщательности и педантизма. Дело в том, что в локальной группе (см. § 23, D)) операция умножения определена не для каждой пары элементов, поэтому ряд проводимых ниже конструкций имеет смысл не для самих исходных локальных групп, но лишь для некоторых достаточно малых их частей (см. § 23, G)). Если бы при указанных обстоятельствах каждый раз тщательно производить выбор надлежащей части и вводить для нее новое обозначение, то это привело бы нас к значительному загромождению текста малосущественными подробностями; поэтому я позволил себе иногда говорить о самой локальной группе там, где следовало бы говорить лишь о некоторой ее части.

A) Если локальная группа Ли G' не имеет центра, то некоторая ее часть может быть включена в полную группу Ли G.

Для доказательства рассмотрим локальную присоединенную группу Ли L' группы G' (см. § 54, F)). Так как G' не имеет центра, то отображение f группы G' на группу L' является изоморфным на некоторой части группы G'. Обозначим через

$$U_1, \ldots, U_i, \ldots \tag{1}$$

полную систему окрестностей единицы группы L'. Обозначим, далее, через L множество всех конечных произведений матриц, входящих в L'. Множество L, как легко видеть, образует алгебраическую группу по умножению. В группу L внесем топологию, приняв за полную систему окрестностей единицы систему (1).

Нетрудно проверить, что система (1) в группе L удовлетворяет условиям теоремы 9 и потому L является теперь топологической группой, причем L' содержится в L как некоторая окрестность единицы. Таким образом, локальная группа L' включена в полную группу L, а так как G' и L' локально изоморфны, то утверждение А) доказано.

Лемма. *Пусть G' — локальная группа Ли. Допустим, что в G' имеются нормальный делитель N' и подгруппа H', обладающие тем свойством, что каждый элемент $g' \in G'$ однозначно представим в форме $g' = n'h'$, где $n' \in N'$, $h' \in H'$. Допустим, далее, что локальную группу N' можно включить в полную связную односвязную группу N, а локальную группу H' — в полную связную односвязную группу H. Составим прямое произведение G пространств N и H, т. е. множество всех пар (n, h), где $n \in N$, $h \in H$* (см. § 14, А)). *Тогда в пространстве G можно определить закон умножения точек таким образом, что G станет топологической группой, причем будет выполнено следующее условие: если каждому элементу $g' = n'h' \in G'$ поставить в соответствие пару $(n', h') \in G$, то мы получим гомеоморфное отображение χ локальной группы Ли G' на некоторую окрестность единицы группы G, являющееся изоморфным на некоторой части группы G'. Таким образом, G есть полная связная односвязная группа Ли, содержащая некоторую часть группы G' как свою локальную группу.*

Доказательство. Рассмотрим внутренний автоморфизм $\varphi'_{g'}$ группы G', определяемый соотношением $\varphi'_{g'}(x) = g'xg'^{-1}$. Так как N' есть нормальный делитель группы G', то автоморфизм $\varphi'_{g'}$ группы G' является одновременно автоморфизмом группы N'. В силу теоремы 80 автоморфизм $\varphi'_{g'}$ группы N' однозначно распространяется в автоморфизм $\varphi_{g'}$ полной группы N. Таким образом, каждому элементу $h' \in H'$ соответствует определенный автоморфизм $\varphi_{h'}$ группы N.

Обозначим через K' множество всех таких элементов группы H', которым соответствуют тождественные автоморфизмы группы N. Тогда множество L' автоморфизмов вида $\varphi_{h'}$ образует локальную группу Ли, изоморфную факторгруппе H'/K'. Обозначим через

$$W_1, \ldots, W_n, \ldots \tag{2}$$

полную систему окрестностей единицы группы L'. Далее, обозначим через L множество всех конечных произведений автоморфизмов, входящих в L'. Тогда L является алгебраической группой. Внесем в группу L топологию, приняв за полную систему окрестностей единицы систему (2). Нетрудно проверить, что система (2) удовлетворяет условиям теоремы 9 и потому L представляет собой группу Ли, содержащую L' в качестве своей локальной группы.

По ранее установленному, каждому элементу $h' \in H'$ соответствует автоморфизм $\varphi_{h'} \in L'$. Таким образом, имеется локальное открытое гомоморфное отображение ψ' локальной группы H' на локальную группу L'. В силу теоремы 80 гомоморфизм ψ' можно единственным образом распространить в гомоморфизм ψ полной группы H на полную группу L. Таким образом, каждому элементу $h \in H$ соответствует определенный автоморфизм $\varphi_h = \psi(h)$ группы N.

Определим теперь произведение двух пар (n_1, h_1) и (n_2, h_2) множества G, положив

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2). \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что в силу этого закона умножения пространство G становится топологической группой.

Установим прежде всего, что G есть алгебраическая группа. Мы имеем:

$$((n_1, h_1)(n_2, h_2))(n_3, h_3) = (n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2)(n_3, h_3) =$$
$$= (n_1 \varphi_{h_1}(n_2) \varphi_{h_1 h_2}(n_3), h_1 h_2 h_3),$$
$$(n_1, h_1)((n_2, h_2)(n_3, h_3)) = (n_1, h_1)(n_2 \varphi_{h_2}(n_3), h_2 h_3) =$$
$$= (n_1 \varphi_{h_1}(n_2) \varphi_{h_1 h_2}(n_3), h_1 h_2 h_3).$$

Таким образом, требование ассоциативности выполнено. Единицей группы G является пара (e_n, e_h), где e_n есть единица группы N, а e_h—единица группы H. Парой, обратной к (n, h), является $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$. Действительно (см. (3)),

$$(n, h)(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) = (n \varphi_{hh^{-1}}(n^{-1}), hh^{-1}) = (e_n, e_h).$$

Таким образом, в силу закона умножения (3) множество G является алгебраической группой.

Покажем, что закон умножения (3) непрерывен в топологическом пространстве G. Для этого покажем прежде всего, что элемент $\varphi_h(n) \in N$ является непрерывной функцией пары элементов $n \in N$ и $h \in H$. Обозначим через U и V такие окрестности единиц в группах N' и H', что $VUV^{-1} \subset N'$. Очевидно, что при $n \in U$, $h \in V$ функция $\varphi_h(n)$ непрерывна, ибо тогда $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$. Пусть теперь $h \in V$, а n—произвольный фиксированный элемент из N. Так как группа N связна, то $n = n_1 \ldots n_k$, где $n_i \in U$, $i = 1, \ldots, k$ (см. теорему 14). Тогда

$$\varphi_h(n) = \varphi_h(n_1) \ldots \varphi_h(n_k).$$

Так как, по доказанному, $\varphi_h(n_i)$ есть непрерывная функция элемента h, то и последнее произведение является непрерывной функцией элемента h, ибо закон умножения в группе N непрерывен. Пусть, далее, $h \in V$ и n—произвольный переменный элемент из N. Тогда мы можем считать, что $n = n^* n'$, где n^* фиксирован, а $n' \in U$. Мы имеем $\varphi_h(n)=\varphi_h(n^*)\varphi_h(n')$, и, следовательно, в силу уже доказанного функция $\varphi_h(n)$ непрерывна при $h \in V$, $n \in N$. Пусть теперь $h \in H$ и $n \in N$—произвольные переменные элементы; тогда мы можем считать, что $h=h^*h'$, где h^* фиксирован, а $h' \in V$. Мы имеем $\varphi_h(n)=\varphi_{h^*}(\varphi_{h'}(n))$. Здесь $\varphi_{h'}(n)$, по доказанному, есть непрерывная функция пары элементов h' и n. Далее, $\varphi_{h^*}(\bar{n})$ есть непрерывная функция элемента $\bar{n}$. Таким образом, $\varphi_h(n)$ есть непрерывная функция пары элементов h и n.

Из доказанного вытекает, что $n_1\varphi_{h_1}(n_2)$ есть непрерывная функция элементов n_1, h_1 и n_2. Точно так же h_1h_2 является непрерывной функцией элементов h_1 и h_2. Таким образом, закон умножения (3) удовлетворяет требованию непрерывности. Из тех же соображений вытекает, что элемент $(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}),\ h^{-1})$, обратный к $(n,\ h)$, является непрерывной функцией от $(n,\ h)$. Таким образом, G есть топологическая группа.

Установим теперь изоморфность отображения χ на некоторой части локальной группы G'. Пусть $g_1=n_1h_1$ и $g_2=n_2h_2$—два элемента из группы G'. Тогда имеем:

$$g_1g_2=n_1h_1n_2h_2=n_1h_1n_2h_1^{-1}h_1h_2=(n_1\varphi_{h_1}(n_2))(h_1h_2).$$

Если теперь перемножить соответственные пары $(n_1,\ h_1)$ и $(n_2,\ h_2)$ в группе G, то в силу закона умножения (3) мы получим $(n_1\varphi_{h_1}(n_2),\ h_1h_2)$. Гомеоморфность отображения χ очевидна.

Итак, лемма доказана.

Применим теперь лемму для построения в целом группы Ли по ее разрешимой алгебре Ли.

Теорема 95. *Пусть R—действительная разрешимая алгебра Ли* (см. определение 49). *Тогда существует полная связная односвязная группа Ли G, алгебра Ли которой изоморфна заданной алгебре R. Группа G гомеоморфна евклидову пространству, т. е. в ней можно ввести декартовы координаты $x^1, \ldots, x^r$. При этом среди всех возможных декартовых координат существуют координаты, обладающие следующими свойствами*: 1) *Закон умножения выражается в них аналитическими функциями, определенными во всей группе G.* 2) *Обозначим через $g_i(t)$ точку, все координаты которой равны нулю за исключением лишь i-й, которая равна t. Тогда $g_i(t)$ есть однопараметрическая подгруппа группы G, а координатами точки $g_1(t^1) \ldots g_r(t^r)$ служат числа $t^1, \ldots, t^r$. Обозначим, далее, через H_i совокупность всех точек вида $g_1(t^1) \ldots g_i(t^i)$. Тогда H_i является подгруппой группы G и нормальным делителем группы H_{i+1}.*

Доказательство. В разрешимой алгебре Ли R нетрудно построить возрастающую последовательность подалгебр

$$S_1,\ \ldots,\ S_r=R,$$

где S_i имеет размерность i и является идеалом алгебры S_{i+1}. Пусть G'—локальная группа Ли с алгеброй Ли R (см. теорему 89). Подалгебре S_i соответствует в G' подгруппа H'_i (см. теорему 90). Алгебра S_1 одномерна и для нее утверждение теоремы 95 очевидно. Допустим, что утверждение доказано для алгебры S_i. Выберем тогда в группе H'_{i+1} некоторую однопараметрическую подгруппу $\{g'_{i+1}(t)\}=K'_{i+1}$, не лежащую в H'_i. Тогда $H'_iK'_{i+1}=H'_{i+1}$, а пересечение $H'_i\cap K'_{i+1}$ содержит лишь единицу; в то же время H'_i есть нормальный делитель группы H'_{i+1} (см. теорему 91). Таким образом, мы находимся в условиях применимости леммы настоящего параграфа, ибо группа H_i уже построена в целом, а группа K'_{i+1}, будучи однопараметрической, также может быть включена в полную однопараметрическую группу $K_{i+1}=\{g_{i+1}(t)\}$. Итак, всякий элемент полной группы H_{i+1} представим теперь в форме пары $(h_i,\ g_{i+1}(t))$, где $h_i\in H_i$. Этим самым индукция проведена, и теорема 95 доказана. Что касается аналитичности закона умножения, то она непосредственно следует из того обстоятельства, что всякий автоморфизм группы H_i, порождаемый элементом $g_{i+1}(t)$, выражается в аналитической форме.

Теорема 96. *Пусть R—произвольная действительная алгебра Ли. Тогда существует полная группа Ли G, алгебра Ли которой изоморфна заданной алгебре R.* (Заметим, что доказательство этой теоремы опирается на недоказанную в настоящей книге теорему 94).

Доказательство. Пусть G'—локальная группа Ли с действительной алгеброй Ли R (см. теорему 89). В силу теоремы 94 алгебра R содержит такой разрешимый идеал S и такую полупростую подалгебру T, что пересечение $S\cap T$ содержит лишь нуль, а сумма $S+T$ совпадает со всей алгеброй R. Пусть N' и H'—те подгруппы группы G', которые соответствуют подалгебрам S и T (см. теорему 90). Тогда N' есть нормальный делитель группы G', причем пересечение $N'\cap H'$ содержит лишь единицу, а произведение $N'H'$ совпадает с G'. Группа N', как обладающая разрешимой алгеброй Ли S, может быть включена в полную связную односвязную группу N (см. теорему 95). Группа H' не содержит центра, так как ее алгебра Ли T его не имеет, и потому может быть включена в некоторую полную связную группу H^* (см. А)). Взяв универсальную накрывающую для этой полной группы (см. § 51), мы получим односвязную связную группу $\widetilde{H}^*=H$, содержащую группу H' как свою локальную. Таким образом, мы находимся в условиях применимости леммы настоящего параграфа, т. е. локальную группу Ли G' можно включить в полную группу G. Итак, группа Ли G, имеющая R своей алгеброй Ли, построена.

Теорема 97. *Пусть G—полная связная односвязная группа Ли и N'—ее локальный нормальный делитель. Тогда некоторую часть группы N' можно включить в полный нормальный делитель N группы G* (следует отметить, что для локальной подгруппы H'

группы G, не являющейся нормальным делителем, аналогичная теорема несправедлива, см. пример 99).

Доказательство. Пусть G'—некоторая малая окрестность единицы группы G. Тогда G' является локальной группой Ли и N' есть ее нормальный делитель. Факторгруппа $G'/N'=K'$ (см. § 23, J)) есть локальная группа Ли и потому может быть включена в полную связную односвязную группу Ли K (см. теорему 96). Естественное гомоморфное отображение f' группы G' на группу K' является локальным открытым гомоморфизмом группы G на группу K, и так как группа G односвязна, то гомоморфизм f' можно распространить в гомоморфизм f всей группы G на всю группу K (см. теорему 80). Ядро гомоморфизма f обозначим через N. Нетрудно видеть, что N является продолжением некоторой части локальной группы N'.

Очевидно, что теорема 97, вообще говоря, несправедлива, если группа G неодносвязна (см. пример 98). Полученный в теореме 97 нормальный делитель N является, как показал А. И. Мальцев [24], односвязным. Связность нормального делителя N легко следует из предположенной односвязности группы K.

Пример 101. Прием, использованный для доказательства леммы настоящего параграфа, может быть применен для построения примеров групп Ли.

Пусть N—r-мерное евклидово пространство, которое мы одновременно рассматриваем как группу по сложению векторов. Пусть, далее, H—группа всех вращений пространства N. Таким образом, каждому элементу $x \in H$ поставлено в соответствие вращение φ_x евклидова пространства N. Вращение φ_x является автоморфизмом группы N. Составим теперь группу G как множество всех пар вида (n, h), где $n \in N$, $h \in H$. Закон умножения определим, положив

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2)=(n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2).$$

Нетрудно показать, что G является группой Ли, причем N есть ее нормальный делитель, а H—подгруппа. Если R есть алгебра Ли группы G, а $N \to S$, $H \to T$, то при $r \geqslant 3$ S есть максимальный разрешимый идеал алгебры R, а T—ее полупростая подалгебра (см. теорему 94).

Используя тот же прием, можно включить каждую группу Ли N в некоторую группу G таким образом, чтобы всякий автоморфизм группы N осуществлялся при помощи некоторого внутреннего автоморфизма всей группы G.

§ 60. Локальные группы Ли преобразований

Как уже отмечалось, группы Ли возникли первоначально как группы непрерывных преобразований; поэтому первая и вторая теоремы Ли были формулированы и доказаны Софусом Ли применительно к группам преобразований. Формулировки первой и второй теорем Ли, данные в § 56, весьма далеки от первоначальных формулировок этих теорем. Здесь я для полноты изложения привожу первую и вторую теоремы Ли (см. (7) и (8)), а также их обращение (см. теорему 98) в форме, близкой к первоначальной.

При локальном рассмотрении, обычном для классического изложения, все рассматриваемые функции бывают по большей части определены не для всех рассматриваемых значений переменных, а каждый раз в той или другой области. Поэтому аккуратное изложение потребовало бы ряда оговорок, указывающих каждый раз область существования функций. Мы этих оговорок делать не будем, имея в виду, что всякий раз нетрудно сообразить, для какой именно достаточно малой области та или другая функция определена.

Определение 50. Пусть G—r-мерная локальная группа Ли и Γ—некоторая область n-мерного евклидова пространства A. Допустим, что каждому элементу $x \in G$ поставлено в соответствие непрерывно зависящее от x гомеоморфное отображение φ_x области Γ на некоторую область пространства A, относящее элементу $\xi \in \Gamma$ некоторый элемент $\eta \in A$:

$$\eta = \varphi_x(\xi) = \varphi(\xi,\ x). \tag{1}$$

Мы будем говорить, что G есть *локальная группа Ли преобразований* области Γ, если выполнены следующие условия:

a) Единице e группы G соответствует тождественное отображение

$$\varphi_e(\xi) = \xi \tag{2}$$

области Γ на себя и

$$\varphi_x(\varphi_y(\xi)) = \varphi_{xy}(\xi), \tag{3}$$

т. е. произведению элементов соответствует произведение преобразований.

b) Два преобразования φ_x и φ_y совпадают только тогда, когда $x = y$. Иначе это условие можно формулировать, потребовав, чтобы преобразование φ_x было тождественным лишь при условии, что x есть единица e группы G.

c) В координатной форме $\varphi(\xi,\ x)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция координат точки ξ и элемента x.

В координатной форме соотношение (1) получает вид

$$\eta^i = \varphi_x^i(\xi) = \varphi^i(\xi,\ x) = \varphi^i(\xi^1,\ \ldots,\ \xi^n,\ x^1,\ \ldots,\ x^r), \quad i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{4}$$

A) Пусть G—группа преобразований области Γ и $x(t)$—некоторая кривая в G с касательным вектором a (см. § 41, C)). Точка $\varphi(\xi,\ x(t))$ при фиксированном ξ описывает некоторую кривую в многообразии Γ. Касательный вектор к кривой $\varphi(\xi,\ x(t))$ в точке $t = 0$

не зависит от самой кривой $x(t)$, а определяется лишь вектором a; поэтому мы обозначим этот касательный вектор через $\psi(\xi, a)$. В координатной форме вектор $\psi(\xi, a)$ выражается формулой

$$\psi^i(\xi, a) = \lambda^i_\alpha(\xi) a^\alpha = \lambda^i_\alpha(\xi^1, \ldots, \xi^n) a^\alpha, \tag{5}$$

где

$$\lambda^i_j(\xi) = \frac{\partial \varphi^i(\xi, x)}{\partial x^j} \quad \text{при} \quad x = e \tag{6}$$

(см. (4)). Функция $\eta = \varphi(\xi, x)$ как функция элемента x при фиксированном ξ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений (см. (6)):

$$\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} = \lambda^i_\alpha(\eta) v^\alpha_j(x), \tag{7}$$

где $v^\alpha_j(x)$ суть вспомогательные функции группы G (см. § 56, А)). Условие интегрируемости системы (7) (см. теорему 85) может быть записано в виде

$$\frac{\partial \lambda^i_j(\eta)}{\partial \eta^\alpha} \lambda^\alpha_k(\eta) - \frac{\partial \lambda^i_k(\eta)}{\partial \eta^\alpha} \lambda^\alpha_j(\eta) = c^\beta_{jk} \lambda^i_\beta(\eta), \tag{8}$$

где c^β_{jk} суть структурные константы группы G.

Докажем соотношение (5). Дифференцируя по t соотношение (4), где положено $x = x(t)$, получаем:

$$\frac{d\varphi^i(\xi, x(t))}{dt} = \frac{\partial \varphi^i(\xi, x)}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt}.$$

При $t = 0$ последнее соотношение дает соотношение (5).

Для доказательства соотношения (7) введем, как в § 56 (см. § 56, А)), элемент $p = (x + \delta x) x^{-1}$. Мы имеем тогда:

$$\varphi(\xi, x + \delta x) = \varphi(\eta, p)$$

(см. (1) и (3)). Переходя от конечных приращений к производным, мы и получаем соотношение (7) (см. § 56, А)).

В силу теоремы 85 условие интегрируемости системы (7) имеет вид

$$\frac{\partial \lambda^i_\alpha(\eta)}{\partial \eta^\gamma} v^\alpha_j(x) \lambda^\gamma_\beta(\eta) v^\beta_k(x) - \frac{\partial \lambda^i_\beta(\eta)}{\partial \eta^\gamma} v^\beta_k(x) \lambda^\gamma_\alpha(\eta) v^\alpha_j(x) + \\ + \lambda^i_\delta(\eta) \left(\frac{\partial v^\delta_j(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial v^\delta_k(x)}{\partial x^j} \right) = 0.$$

В силу соотношения (8) § 56 это условие эквивалентно соотношению

$$\left(\frac{\partial \lambda^i_\alpha(\eta)}{\partial \eta^\gamma} \lambda^\gamma_\beta(\eta) - \frac{\partial \lambda^i_\beta(\eta)}{\partial \eta^\gamma} \lambda^\gamma_\alpha(\eta) - \lambda^i_\delta(\eta) c^\delta_{\alpha\beta} \right) v^\alpha_j(x) v^\beta_k(x) = 0. \tag{9}$$

Так как детерминант матрицы $\|v_j^\alpha(x)\|$ отличен от нуля, то соотношения (8) и (9) эквивалентны.

В) Пусть G—локальная группа Ли непрерывных преобразований области Г и R—алгебра Ли группы G. В А) мы поставили в соответствие каждому вектору $a \in R$ *векторное поле* $\psi(\xi, a)$, заданное на многообразии Г. Таким образом, имеется семейство P векторных полей вида $\psi(\xi, a)$, заданных на Г. Из соотношения (5) следует непосредственно, что если α и β суть действительные числа, то

$$\psi(\xi, \alpha a+\beta b)=\alpha\psi(\xi, a)+\beta\psi(\xi, b). \tag{10}$$

Таким образом, наряду с двумя векторными полями $\lambda \in P$, $\mu \in P$ в семейство P входит и векторное поле $\alpha\lambda+\beta\mu$. Это означает, что по сложению семейство P является векторным пространством. Определим в семействе P коммутатор двух его элементов $\lambda=\lambda(\xi)$ и $\mu=\mu(\xi)$, положив

$$[\lambda(\xi), \mu(\xi)]^i=\frac{\partial\lambda^i(\xi)}{\partial\xi^\nu}\mu^\nu(\xi)-\frac{\partial\mu^i(\xi)}{\partial\xi^\nu}\lambda^\nu(\xi). \tag{11}$$

Тогда оказывается, что имеет место соотношение

$$[\psi(\xi, a), \psi(\xi, b)]=\psi(\xi, [a, b]). \tag{12}$$

Соотношение (12) показывает, что если $\lambda \in P$, $\mu \in P$, то и $[\lambda, \mu] \in P$. Таким образом, в P определена операция коммутирования. Из соотношений (10) и (12) следует непосредственно, что при переходе от вектора $a \in R$ к векторному полю $\psi(\xi, a) \in P$ сохраняются операции сложения, умножения на действительное число и коммутирования. Это показывает, что операция коммутирования, установленная в P, удовлетворяет требованиям определения 48 и что отображение ψ, ставящее вектору $a \in R$ в соответствие поле $\psi(\xi, a) \in P$, есть гомоморфное отображение алгебры Ли R на алгебру Ли P. Оказывается, более того, что ψ есть не только гомоморфное, но даже изоморфное отображение. Алгебру Ли P будем называть *алгеброй Ли преобразований* области Г.

Соотношение (10), как уже было указано, непосредственно следует из соотношения (5). Для доказательства соотношения (12) умножим обе части соотношения (8) на $a^j b^k$ и просуммируем по j и k. Получаемое таким образом соотношение в силу (5) дает соотношение (12).

Для доказательства изоморфности отображения ψ достаточно показать, что размерность векторного пространства P равна размерности r пространства R. Обозначим через $\lambda_k(\xi)$ векторное поле с компонентами $\lambda_k^1(\xi), \ldots, \lambda_k^n(\xi)$. Векторные поля

$$\lambda_k(\xi), \quad k=1, \ldots, r, \tag{13}$$

образуют базис пространства P (см. (5)). Таким образом, нам достаточно показать, что векторные поля (13) линейно независимы, т. е. что их линейная комбинация с постоянными коэффициентами обращается в нуль лишь при условии, что сами коэффициенты равны нулю.

Рассмотрим в G некоторую однопараметрическую подгруппу $x(t)$ с направляющим вектором a. Подставим в соотношение (7) $x(t)$ вместо x, умножим полученное соотношение на $\frac{dx^j(t)}{dt}$ и просуммируем по j. Мы получим (см. § 56, (9)):

$$\frac{d\eta^i}{dt}=\lambda^i_\alpha(\eta)v^\alpha_j(x(t))\frac{\partial x^j(t)}{dt}=\lambda^i_\alpha(\eta)a^\alpha. \tag{14}$$

Если теперь предположить, что векторные поля системы (13) линейно зависимы, то существует такой вектор $a\neq 0$, что правая часть соотношения (14) обращается тождественно в нуль. Это показывает, что точка $\eta=\varphi(\xi, x(t))$ не зависит от t, т. е. $\eta=\xi$ для всех $\xi\in\Gamma$. Таким образом, элементу $x(t)$, отличному от единицы, соответствует тождественное преобразование, что невозможно (см. определение 50).

Итак, утверждение В) полностью доказано.

Обращением предложений А) и В) служит следующая теорема.

Теорема 98. *Пусть Γ — область n-мерного евклидова пространства. Допустим, что на Γ задано r-мерное линейное семейство P векторных полей. Линейность семейства P означает, что наряду с двумя векторными полями $\lambda(\xi)\in P$ и $\mu(\xi)\in P$ в P входит также и поле $\alpha\lambda(\xi)+\beta\mu(\xi)$, где α и β — действительные числа. Введем в P операцию коммутирования, положив*

$$[\lambda(\xi), \mu(\xi)]^i=\frac{\partial\lambda^i(\xi)}{\partial\xi^\nu}\mu^\nu(\xi)-\frac{\partial\mu^i(\xi)}{\partial\xi^\nu}\lambda^\nu(\xi). \tag{15}$$

Допустим, что наряду с каждыми двумя векторными полями λ и μ в P входит также векторное поле $[\lambda, \mu]$. *При этих условиях мы будем говорить, что на Γ задана* алгебра Ли P преобразований. *Оказывается, что существует одна и только одна локальная группа Ли G непрерывных преобразований многообразия* Γ (см. А)), *обладающая тем свойством, что соответствующая ей алгебра Ли преобразований* (см. В)) *совпадает с заданной алгеброй Ли P.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что если λ, μ, ν суть три векторных поля, то имеют место соотношения

$$[\lambda,\mu]+[\mu,\lambda]=0, \tag{16}$$

$$[\lambda,[\mu,\nu]]+[\mu,[\nu,\lambda]]+[\nu,[\lambda,\mu]]=0. \tag{17}$$

Соотношения эти доказываются непосредственными вычислениями на основе определяющего соотношения (15).

Выберем теперь в P линейно независимые векторные поля $\lambda_k(\xi)$, $k=1, \ldots, r$; такая система существует и образует базис семейства P, ибо размерность этого семейства, по предположению, равна r. Таким образом, мы имеем:

$$[\lambda_j(\xi),\ \lambda_k(\xi)]=c_{jk}^{\gamma}\lambda_\gamma(\xi), \tag{18}$$

где c_{jk}^i суть константы, причем для них в силу соотношений (16) и (17) выполнены обычные для структурных констант соотношения (см. § 52, (11), (12)). По структурным константам c_{jk}^i построим локальную группу Ли G (см. теорему 88) и обозначим ее вспомогательные функции через $v_j^i(x)$.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}=\lambda_\alpha^i(\eta)v_j^\alpha(x) \tag{19}$$

относительно неизвестной функции η элемента x. Систему такого вида мы уже рассматривали (см. (7)) и видели, что условие интегрируемости для нее имеет вид (8). Но соотношение (18) есть лишь другая форма записи соотношения (8). Таким образом, система (19) интегрируема. Обозначим через $\varphi(\xi, x)$ решение системы (19), удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(\xi,\ e)=\xi. \tag{20}$$

Таким образом, каждому элементу $x\in G$ мы поставили в соответствие преобразование φ_x многообразия Γ, переводящее точку $\xi\in\Gamma$ в точку $\eta=\varphi_x(\xi)=\varphi(\xi, x)\in\Gamma$. Покажем, что здесь выполнены условия a) и b) определения 50.

Пусть x и y—два элемента из G; y мы будем считать постоянным, а x—переменным. Положим

$$f=xy, \quad \eta=\varphi(\xi,\ y), \quad \zeta^*=\varphi(\eta,\ x), \quad \zeta=\varphi(\xi,\ f).$$

Для доказательства выполнения условия a) нам достаточно показать, что $\zeta^*=\zeta$. Для этого мы поступим нашим обычным способом, а именно покажем, что функции ζ^* и ζ элемента x удовлетворяют одной и той же системе дифференциальных уравнений с теми же самыми начальными условиями $\zeta^*=\zeta=\eta$ при $x=e$.

Мы имеем:

$$\frac{\partial\zeta^{*i}}{\partial x^j}=\lambda_\alpha^i(\zeta^*)v_j^\alpha(x) \tag{21}$$

(см. (19)). Обозначим через $\|u_j^i(x)\|$ матрицу, обратную к матрице $\|v_j^i(x)\|$. Тогда соотношение (6) § 56 преобразуется в

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j}=u_\beta^\alpha(f)v_j^\beta(x). \tag{22}$$

Из соотношений (22) получаем:

$$\frac{\partial \zeta^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial f^\alpha} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} = \lambda^i_\gamma(\zeta) v^\gamma_\alpha(f) u^\alpha_\beta(f) v^\beta_j(x) = \lambda^i_\alpha(\zeta) v^\alpha_j(x) \tag{23}$$

Но системы (21) и (23) совпадают. Таким образом, в силу единственности решения системы, удовлетворяющего заданным начальным условиям, получаем $\zeta^* = \zeta$, и тем самым выполнение условия a) доказано.

Для доказательства выполнения условия b) допустим, что оно не выполнено. Тогда существует нормальный делитель N группы G, всем элементам которого соответствуют тождественные преобразования многообразия Г. Из этого мы заключаем, что существует однопараметрическая подгруппа $x(t)$, элементам которой соответствуют тождественные преобразования многообразия Г, причем направляющий вектор a подгруппы $x(t)$ отличен от нуля. Подставляя в соотношение (19) $x(t)$ вместо x, умножая полученное соотношение на $\frac{dx^j(t)}{dt}$ и суммируя по j, получаем:

$$\frac{d\eta^i}{dt} = \lambda^i_\alpha(\eta) v^\alpha_\beta(x(t)) \frac{dx^\beta(t)}{dt} = \lambda^i_\alpha(\eta) a^\alpha \tag{24}$$

(см. § 56, (9)). Но ввиду того, что, по предположению, $\eta(t) = \varphi(\xi, x(t))$ есть постоянная точка ξ, левая часть соотношения (24) обращается в нуль, и потому получаем тождество

$$\lambda^i_\alpha(\xi) a^\alpha = 0.$$

Таким образом, векторные поля $\lambda_k(\xi)$, $k = 1, \ldots, r$, оказываются линейно зависимыми, что противоречит предположению.

Выполнение условия c) очевидно, ибо функция $\varphi(\xi, x)$ получается в результате интегрирования системы уравнений.

Очевидно, что построенная группа G преобразований имеет своей алгеброй Ли преобразований заданную алгебру P. Единственность такой группы следует из того, что преобразования φ_x однозначно определяются из системы уравнений (19) при начальных условиях (20), причем вспомогательные функции $v^i_j(x)$, входящие в (19), в канонических координатах первого рода определены структурными константами алгебры P.

Итак, теорема 98 доказана.

В заключение остановимся на *транзитивных локальных группах Ли преобразований*. Для них можно высказать результаты, аналогичные результатам § 24. Дадим здесь их краткую формулировку без доказательств с тем, чтобы обратить внимание на существенную разницу между локальным рассмотрением и рассмотрением в целом.

C) Пусть G—транзитивная группа Ли преобразований области Γ. Транзитивность для локальной группы означает следующее: для каждой точки $\xi\in\Gamma$ найдется такая ее окрестность $U\subset\Gamma$, что при $\eta\in U$ существует преобразование φ_x, $x\in G$, удовлетворяющее условию $\varphi_x(\xi)=\eta$. Пусть α—фиксированная точка из Γ и K_ξ—множество тех элементов $x\in G$, для которых $\varphi_x(\alpha)=\xi$. Оказывается, что $K_\alpha=H$ есть подгруппа локальной группы G, не содержащая нормальных делителей группы G, отличных от e, а K_ξ есть левый смежный класс группы G по подгруппе H. Наоборот, если K есть левый смежный класс группы G по подгруппе H, то все преобразования φ_x, $x\in K$, переводят точку α в одну и ту же точку из Γ. Таким образом, изучение локальной транзитивной группы Ли преобразований сводится к изучению пары G, H, где G есть локальная группа Ли, а H—ее подгруппа, не содержащая нормальных делителей группы G, отличных от e. Рассмотрение пары G, H в свою очередь эквивалентно рассмотрению пары R, S, где R есть действительная алгебра Ли, а S—ее подалгебра, не содержащая идеалов алгебры R, отличных от $\{0\}$. Если задана произвольным образом пара R, S, то можно построить по ней локальную пару G, H, а затем и область Γ, в которой действует группа G, определив ее как пространство G/H левых смежных классов.

Оказывается, однако, что невозможно, вообще говоря, включить локальную группу Ли G в полную группу Ли G^*, так чтобы при этом локальная подгруппа H стала частью полной подгруппы H^* (см. пример 103). Здесь, таким образом, имеется еще большее различие между локальным рассмотрением и рассмотрением в целом, чем это имеет место для самих групп Ли, где каждой алгебре Ли все же соответствует полная группа Ли.

П р и м е р 102. Пусть G—локальная группа Ли линейных преобразований векторного пространства Γ. Алгебра Ли R группы G состоит из всех линейных отображений пространства Γ в себя, являющихся касательными к кривым, проходящим в G (см. § 54, B)), т. е. определяемым формулой

$$a=\frac{d}{dt}\varphi_{x(0)}. \tag{25}$$

В координатной форме преобразование φ_x записывается в виде

$$\eta^j=\varphi^j_i(x)\xi^i. \tag{26}$$

Будем считать, что $x(t)$ есть кривая с направляющим вектором a. Заменяя в соотношении (26) x на $x(t)$ и дифференцируя полученное соотношение по t при $t=0$, получаем:

$$\psi^j(\xi, a)=a^j_i\xi^i \tag{27}$$

(см. A)). Таким образом, каждому элементу $a = \|a_i^j\| \in R$ соответствует в Г векторное поле $\psi(\xi, a)$, определяемое формулой

$$\psi(\xi, a) = a(\xi). \tag{28}$$

Пример 103. В примере 99 были построены полная односвязная группа Ли $G \times G$ и ее одномерная локальная подгруппа H', причем H' не содержалась ни в какой одномерной полной подгруппе группы $G \times G$. Из теоремы 97 следует, что подгруппа H' не есть нормальный делитель группы $G \times G$ и, будучи одномерной, не содержит такового. Пусть G' — некоторая окрестность единицы в $G \times G$. Тогда пара G', H' определяет некоторую локальную транзитивную группу преобразований (см. C)). Однако распространить эту группу преобразований в полную невозможно, так как H' нельзя включить в полную одномерную подгруппу группы $G \times G$.

СТРУКТУРА КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

В настоящей главе производится весьма глубокое исследование компактных групп Ли, приводящее, в частности, к их классификации.

Прежде всего устанавливается необходимое и достаточное условие для того, чтобы заданная действительная алгебра Ли была алгеброй Ли компактной группы Ли. Условие это заключается в том, что в векторном пространстве R можно ввести инвариантное относительно присоединенной группы (см. § 54, F)) *скалярное произведение* (u, v), превращающее R в евклидово пространство. Инвариантность относительно присоединенной группы означает, что

$$([x, u], v)+(u, [x, v])=0; \quad x\in R, \ u\in R, \ v\in R. \tag{1}$$

Алгебры Ли, обладающие этим свойством, всюду в этой главе называются *компактными*. Доказывается, что компактная алгебра Ли R распадается в прямую сумму своего центра R_0, являющегося максимальным разрешимым идеалом алгебры R, и компактной полупростой алгебры R'. Алгебра R' распадается, далее, в прямую сумму компактных простых некоммутативных алгебр $R_1, \ldots, R_k$. Идеалы $R_0, R_1, \ldots, R_k$ алгебры R однозначно определяются алгеброй R. Этот вполне элементарно доказываемый результат сводит проблему классификации компактных алгебр Ли к проблеме классификации компактных простых некоммутативных алгебр Ли.

Для более глубокого изучения простых компактных алгебр Ли, в частности для их классификации, в произвольной алгебре Ли R вводится *скалярное произведение* (u, v), однозначно определяемое алгеброй R. Делается это следующим образом. Определим линейное отображение p_u, $u\in R$, векторного пространства R в себя, положив $p_u(x)=[u, x]$ (см. § 54, E)). Скалярное произведение (u, v) двух векторов u и v из R определяется как след линейного отображения $-p_up_v$ векторного пространства R в себя:

$$(u, v)=-\mathrm{Sp}\, p_up_v. \tag{2}$$

Вполне элементарным образом доказывается, что действительная алгебра Ли R тогда и только тогда является компактной полупростой, когда скалярное произведение, определенное формулой (2), превращает векторное пространство R в евклидово. Так как скалярное произведение, определенное формулой (2), инвариантно относительно всех автоморфизмов алгебры Ли R, то группа G_A всех автоморфизмов компактной полупростой алгебры R есть компактная группа Ли. Весьма замечательным и вполне элементарно доказываемым фактом является то, что алгебра Ли группы G_A изоморфна исходной компактной полупростой алгебре R. Таким образом, в обход результатов § 54 доказывается существование в целом компактной группы Ли с заданной компактной полупростой алгеброй Ли R. Таково содержание § 61.

Возникает естественный и весьма важный вопрос: может ли компактная алгебра Ли R быть алгеброй Ли некомпактной связной группы Ли, или, что то же самое, могут ли быть локально изоморфны между собой две связные группы Ли, из которых одна компактна, а другая некомпактна. Непосредственно видно, что если компактная алгебра Ли R имеет нетривиальный центр, то она может быть алгеброй Ли связной некомпактной группы Ли. Важный и глубокий результат Г. Вейля заключается в том, что всякая связная, в частности односвязная, группа Ли $\widetilde{G}$ с компактной полупростой алгеброй Ли R компактна. Так как центр Z группы $\widetilde{G}$ конечен, то существует лишь конечное число связных групп, локально изоморфных группе $\widetilde{G}$. Эта теорема Вейля доказывается в § 64, уже после того как исследование компактных полупростых алгебр Ли проведено достаточно далеко в §§ 62 и 63.

В § 58 уже указывалось, что классификация действительных полупростых алгебр Ли обычно проводится на основе предварительно проведенной классификации комплексных полупростых алгебр Ли путем нахождения всех действительных форм последних. При этом оказывается, что каждая комплексная полупростая алгебра Ли допускает с точностью до изоморфизма лишь одну компактную действительную форму. Нахождение действительных форм комплексных полупростых алгебр представляет собой весьма сложную проблему, решенную Картаном (см. [7]) при помощи сложных геометрических построений, далеко выходящих за рамки даже весьма полного изложения теории групп Ли. Обычно, излагая теорию групп Ли, проводят классификацию только комплексных алгебр Ли и не производят выделения их действительных форм. Это не дает, однако, ничего для теории топологических групп, так как из классификации комплексных алгебр Ли не вытекает никакой классификационной теоремы для топологических групп. Здесь я излагаю метод Вейля корневых систем, развитый им для комплексных полупростых алгебр Ли (см. [45]), однако метод этот излагается не в общем виде, а лишь в применении к действительным компактным полупростым алгебрам Ли. В этих условиях метод Вейля несколько упрощается, так как благодаря наличию инвариантной положительно определенной квадратичной формы в компактной алгебре Ли достаточно использовать теорию элементарных делителей не в общем виде, а лишь применительно к кососимметрическим матрицам. В то же время главные черты метода сохраняются и благодаря упрощениям приобретают даже большую выпуклость. Таким образом, получается классификация полупростых компактных алгебр Ли, непосредственно ведущая к классификации компактных групп Ли.

Окончательный классификационный результат таков:

Каждая компактная простая некоммутативная алгебра Ли изоморфна одной из алгебр четырех бесконечных серий классических алгебр:

$$A_n,\ n\geqslant 1;\quad B_n,\ n\geqslant 2;\quad C_n,\ n\geqslant 3;\quad D_n,\ n\geqslant 4, \tag{3}$$

или одной из пяти особых алгебр

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8. \tag{4}$$

При этом все алгебры (3), (4) попарно неизоморфны между собой.

Результат этот принадлежит Киллингу (см. [17]). Картан пополнил (см. [6]) существенные пробелы в доказательстве, данном Киллингом. Как уже отмечалось раньше, Киллинг и Картан имели дело с комплексными алгебрами Ли.

Некоторым пробелом приводимого здесь изложения является то, что не дано полного описания пяти особых алгебр, так что отсутствует доказательство их существования. Построены лишь корневые системы этих алгебр, что решает вопрос об их единственности. Описание особых алгебр слишком громоздко, метод же их построения по корневым системам вполне ясен.

§ 61. Компактные алгебры Ли

Алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли компактной группы Ли, мы будем в дальнейшем называть *компактной*. Здесь устанавливается необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная алгебра Ли была компактной. Для формулировки этого условия вводится понятие *инвариантной квадратичной формы* в алгебре Ли. Пусть R—некоторая алгебра Ли и $\psi(u, u)$—квадратичная форма, заданная в векторном пространстве R, $u\in R$. Квадратичная форма ψ считается *инвариантной*, если она инвариантна относительно любого преобразования присоединенной группы L алгебры R (см. § 54, F)), именно, если при $l\in L$ мы имеем: $\psi(l(u), l(u))=\psi(u, u)$. Оказывается, что алгебра Ли компактна тогда и только тогда, когда в ней существует инвариантная положительно определенная квадратичная форма. Благодаря существованию в компактной алгебре Ли R инвариантной положительно определенной формы эту алгебру можно разложить в прямую сумму центра R_0

и компактной полупростой алгебры R'. Последняя в свою очередь распадается в прямую сумму компактных простых некоммутативных алгебр. Таким образом, проблема классификации компактных алгебр Ли сводится к классификации простых компактных алгебр Ли.

В настоящем параграфе доказывается, далее, что группа G_A всех автоморфизмов полупростой компактной алгебры R имеет своей алгеброй Ли саму алгебру R. Этим самым положительно решается вопрос о существовании полной группы Ли с заданной полупростой компактной алгеброй Ли. Так как полупростая алгебра Ли не имеет центра, то единственность ее локальной группы Ли вытекает из результатов § 54 (см. § 54, G)). Таким образом, существование (в целом) и единственность группы Ли с заданной компактной полупростой алгеброй Ли доказывается без использования результатов, данных в §§ 55, 56. Очевидно, что группа Ли с компактной алгеброй Ли может быть и некомпактна. Такова, например, векторная группа Ли, алгебра Ли которой коммутативна и потому компактна. Иначе обстоит дело с компактными полупростыми алгебрами Ли. Оказывается, что всякая связная группа Ли с компактной полупростой алгеброй Ли компактна. Этот важный результат Вейля будет доказан в § 64.

Операция коммутирования $[a, b]$ в алгебре Ли имеет некоторые черты сходства с операцией обычного векторного произведения. В алгебре Ли вводится также *скалярное произведение* (a, b), представляющее собой симметричную билинейную форму. Скалярное произведение инвариантно не только относительно преобразований присоединенной группы, но также и относительно всех автоморфизмов алгебры Ли. Оно играет важную роль при исследовании алгебр Ли. С помощью скалярного произведения формулируются известные критерии Картана полупростоты и разрешимости (см. определение 49) алгебр Ли. Алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда скалярный квадрат в ней представляет собой невырожденную квадратичную форму. Алгебра Ли R разрешима тогда и только тогда, когда $(a, a)=0$ для каждого $a \in [R, R]$. Здесь эти критерии будут приведены только для компактных алгебр Ли в виде одной теоремы 101, утверждающей, что подпространство вырождения скалярного произведения представляет собой центр компактной алгебры Ли. Сверх того, оказывается, что в компактной полупростой алгебре Ли скалярный квадрат является положительно определенной квадратичной формой. Это последнее обстоятельство несколько упрощает весь метод классификации комплексных простых алгебр Ли, если его применять к комплексным расширениям компактных алгебр Ли. Этим мы воспользуемся в § 62.

A) Заданная в действительной алгебре Ли R симметричная билинейная форма $\psi(u, v)$; $u \in R$, $v \in R$, называется *инвариантной* *относительно локальной присоединенной группы* L алгебры Ли R (см. § 54, F)) или просто *инвариантной*, если для всякого элемента $l \in L$ имеем:

$$\psi(l(u),\ l(v)) = \psi(u,\ v).$$

Точно так же соответствующая квадратичная форма $\psi(u,\ u)$ называется *инвариантной относительно присоединенной группы* или просто *инвариантной*, если при произвольном $l \in L$ имеем:

$$\psi(l(u),\ l(u)) = \psi(u,\ u).$$

Так как симметричная билинейная форма определяется соответствующей квадратичной и обратно, то инвариантность каждой из них влечет за собой инвариантность другой. Оказывается, что билинейная форма $\psi(u,\ v)$ тогда и только тогда инвариантна, когда для произвольного элемента $a \in R$ имеем:

$$\psi([a,\ u], v) + \psi(u, [a, v]) = 0. \tag{1}$$

Докажем последнее утверждение. Пусть G—локальная группа Ли алгебры R. Пусть $l(t) = l_t$—однопараметрическая подгруппа группы L с направляющим вектором p_a. Из инвариантности формы $\psi(u,\ v)$ следует:

$$\psi(l_t(u),\ l_t(v)) = \psi(u,\ v).$$

Дифференцируя это соотношение по t при $t=0$, получаем соотношение $\psi(p_a(u),\ v) + \psi(u,\ p_a(v)) = 0$, эквивалентное (1). Допустим, наоборот, что имеет место соотношение (1). Вычислим производную по t от выражения $\psi(l_t(u),\ l_t(v))$. В силу соотношения (3) § 54 и предложения F) § 54 мы имеем:

$$\frac{d}{dt} l_t(u) = [a,\ l_t(u)]; \quad \frac{d}{dt} l_t(v) = [a,\ l_t(v)].$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\psi(l_t(u), l_t(v)) = \psi([a,\ l_t(u)], l_t(v)) + \psi(l_t(u), [a,\ l_t(v)]) = 0$$

(см. (1)). Следовательно, выражение $\psi(l_t(u),\ l_t(v))$ не зависит от t и потому форма $\psi(u,\ v)$ инвариантна, ибо однопараметрическую подгруппу можно провести через любой элемент локальной группы Ли L.

Нижеследующая теорема устанавливает одно характерное свойство компактных алгебр Ли, чрезвычайно облегчающее изучение этих алгебр.

Теорема 99. *В произвольной компактной алгебре Ли R существует положительно определенная квадратичная форма, инвариантная относительно присоединенной группы* (см. A)).

Доказательство. Будем считать, что R есть алгебра Ли компактной группы G. Пусть $\varphi(u,\ u)$—произвольная положительно определенная квадратичная форма, заданная на R. Положим $\varphi_x(u, u)=\varphi(l_x(u), l_x(u))$, $x\in G$. При фиксированном $x\in G$ функция $\varphi_x(u, u)$ вектора $u\in R$ есть положительно определенная квадратичная форма, заданная на R. При фиксированном векторе $u\neq 0$ функция $\varphi_x(u, u)$ есть непрерывная действительная числовая функция элемента $x\in G$, принимающая только положительные значения. Таким образом, функция $\psi(u, u)$ вектора u, задаваемая соотношением

$$\psi(u, u)=\int \varphi_x(u, u)dx$$

(см. § 29), есть положительно определенная квадратичная форма. Покажем, что квадратичная форма $\psi(u, u)$ инвариантна относительно присоединенной группы L. При $y\in G$ мы имеем:

$$\psi(l_y(u), l_y(u))=\int\varphi(l_{xy}(u), l_{xy}(u))dx=\int\varphi(l_x(u), l_x(u))dx=\psi(u, u).$$

Таким образом, теорема 99 доказана.

В) Пусть R—действительная алгебра Ли, в которой существует инвариантная положительно определенная квадратичная форма. Тогда каждый идеал S алгебры Ли R является прямым слагаемым, т. е. существует в R такой идеал T, что $S\cap T=0$, а $S+T=R$.

Докажем это. Пусть $\psi(u, u)$—инвариантная положительно определенная квадратичная форма, по предположению существующая в R. Обозначим через T ортогональное дополнение к подпространству S в пространстве R в смысле метрики, порождаемой билинейной формой $\psi(u, v)$. Иначе говоря, T состоит из всех векторов $v\in R$, удовлетворяющих условию $\psi(u, v)=0$ для любого $u\in S$. Соотношения $S\cap T=0$ и $S+T=R$ очевидны. Докажем, что T есть идеал алгебры Ли R. Пусть $a\in R$, $v\in T$, u—произвольный элемент из S. В силу соотношения (1) имеем:

$$\psi(u,[a, v])=-\psi([a, u],v)=0,$$

так как $[a, u]\in S$. Таким образом, $[a, v]\in T$, и потому T есть идеал.

Теорема 100. *Пусть R—действительная алгебра Ли, в которой существует инвариантная положительно определенная квадратичная форма. Тогда R распадается в прямую сумму своего центра R_0 и простых некоммутативных алгебр $R_1, \ldots, R_k$. Это распадение единственно, т. е. идеалы $R_0, R_1, \ldots, R_k$ определены алгеброй R однозначно. Центр R_0 является максимальным разрешимым идеалом алгебры R.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что билинейная форма алгебры Ли R, инвариантная на ней, инвариантна также на всякой подалгебре R' алгебры R (см. (1)).

В силу предложения В) алгебра Ли R распадается в прямую сумму своего центра R_0 и идеала T, очевидно, не имеющего центра. Так как в алгебре Ли T существует инвариантная положительно определенная квадратичная форма, то к ней снова применимо предложение В). Следовательно, если алгебра Ли T не является простой, то ее можно разложить в прямую сумму двух идеалов. Продолжая этот процесс дальше, мы получим разложение алгебры Ли R в прямую сумму идеалов $R_0, R_1, \ldots, R_k$, где $R_1, \ldots, R_k$ являются простыми некоммутативными алгебрами Ли. Действительно, если бы алгебра R_i, $i>0$, была коммутативна, то идеал R_0+R_i алгебры R был бы центральным, что невозможно. Докажем единственность этого разложения. Пусть наряду с ним имеется аналогичное разложение алгебры Ли R в прямую сумму идеалов $R_0, R'_1, R'_2, \ldots, R'_l$. Пусть $a \in R'_i$, $i \geqslant 1$. Так как алгебра R'_i, $i \geqslant 1$, не имеет центра, то существует такой элемент $b \in R'_i$, что $[a, b] \neq 0$. Пусть

$$b=b_0+b_1+\ldots+b_k$$

—разложение элемента b по идеалам $R_0, R_1, \ldots, R_k$, т. е. $b_i \in R_i$, $i \geqslant 0$. Тогда $[a, b_0]=0$, и найдется такое $j \geqslant 1$, что $c=[a, b_j] \neq 0$. Элемент c содержится в идеалах R'_i и R_j, так что пересечение $R'_i \cap R_j$ непусто. Но это пересечение является идеалом, который в силу простоты идеалов R'_i и R_j совпадает с каждым из них: $R'_i=R_j$. Таким образом, каждому идеалу R'_i, $i \geqslant 1$, соответствует совпадающий с ним идеал R_j, $j \geqslant 1$, и точно так же каждому R_m, $m \geqslant 1$, соответствует совпадающий с ним идеал R'_n, $n \geqslant 1$. Очевидно, что таким образом получается взаимно однозначное соответствие между идеалами $R_1, \ldots, R_k$ и $R'_1, \ldots, R'_l$, т. е. оба разложения совпадают.

Пусть, наконец, S—максимальный разрешимый идеал алгебры R; покажем, что $S=R_0$. Так как R_0 есть разрешимый идеал алгебры R, то $R_0 \subset S$. Допустим, что $R_0 \neq S$; тогда существует элемент $s \in S$, не входящий в R_0. Элемент s, как не принадлежащий центру, не перестановочен с элементами хоть одной из алгебр $R_1, \ldots, R_k$; допустим, что он не перестановочен с элементом a алгебры R_i, $i \geqslant 1$. Тогда элемент $c=[s, a] \neq 0$ принадлежит одновременно идеалам R_i и S, так что пересечение $R_i \cap S$ есть отличный от нуля идеал. Так как алгебра R_i простая, то $R_i \subset S$; таким образом, R_i, как подалгебра разрешимой алгебры S, есть разрешимая алгебра. Итак, алгебра R_i одновременно проста и разрешима и потому, как легко видеть, одномерна и коммутативна. Это, однако, невозможно в силу некоммутативности алгебры R_i. Итак, R_0 есть максимальный разрешимый идеал алгебры R.

Таким образом, теорема 100 полностью доказана.

Займемся теперь построением в произвольной алгебре Ли R *скалярного произведения* (u, v), $u \in R$, $v \in R$, представляющего собой симметричную билинейную форму, инвариантную относительно всех автоморфизмов алгебры Ли R. Это скалярное произведение играет важную роль в изучении алгебр Ли.

Пусть R—векторное пространство. След $\mathrm{Sp}(p)$ линейного преобразования p пространства R, как известно, определяется соотношением $\mathrm{Sp}(p)=p_\alpha^\alpha$, где $\|p_j^i\|$—матрица, соответствующая преобразованию p в каких-либо координатах. Непосредственно проверяется, что след $\mathrm{Sp}(p)$ преобразования p, определенный таким образом, не зависит от выбора координат в R. Непосредственно проверяется также, что след $\mathrm{Sp}(p_1p_2)$ произведения двух линейных преобразований p_1 и p_2 пространства R не зависит от порядка сомножителей:

$$\mathrm{Sp}(p_1p_2)=\mathrm{Sp}(p_2p_1). \tag{2}$$

C) Пусть P—присоединенная алгебра Ли некоторой алгебры Ли R (см. § 54, E)). Определим *скалярное произведение* (a, b) двух элементов a и b из R, положив

$$(a, b)=-\mathrm{Sp}(p_ap_b). \tag{3}$$

Непосредственно проверяется, что определенное таким образом скалярное произведение есть симметричная билинейная форма, заданная на R (см. (2)). В координатной форме произведение (a, b) записывается в виде (см. § 52, (17))

$$(a, b)=-c_{\alpha j}^i c_{\beta i}^j a^\alpha b^\beta. \tag{4}$$

Из соотношения (15) § 54 следует, что если φ есть произвольный автоморфизм алгебры Ли R, то

$$(\varphi(a), \varphi(b))=(a, b). \tag{5}$$

Таким образом, скалярное произведение есть инвариантная билинейная форма, и потому для трех произвольных элементов a, u и v из R имеет место соотношение

$$([a, u], v)+(u, [a, v])=0 \tag{6}$$

(см. (1)).

D) Пусть $\psi(u, u)$—инвариантная положительно определенная квадратичная форма, заданная на действительной алгебре Ли R (см. A)). Выберем в R такую систему координат, в которой

$$\psi(u, u)=u^1u^1+\ldots+u^ru^r. \tag{7}$$

Пусть c_{jk}^i—структурные константы алгебры Ли R в выбранной системе координат. Положим:

$$c_{ijk}=c_{jk}^i. \tag{8}$$

Оказывается, что структурные константы c_{ijk} кососимметричны по каждым двум индексам, т. е.

$$c_{ijk}=c_{jki}=c_{kij}=-c_{jik}=-c_{kji}=-c_{ikj}. \tag{9}$$

Докажем это. Записывая условие (6) в координатной форме, получаем:

$$0 = c_{ijk}a^j u^k v^i + c_{ijk}u^i a^j v^k = a^j u^k v^i (c_{ijk} + c_{kji}).$$

Таким образом, $c_{ijk} = -c_{kji}$. Из этого и из соотношения (18) § 52 следуют соотношения (9).

Теорема 101. *Пусть R — действительная алгебра Ли, в которой существует инвариантная положительно определенная квадратичная форма, и R_0 — совокупность всех элементов пространства R, ортогональных к R в смысле скалярного произведения, установленного в* С). *Оказывается, что R_0 есть центр алгебры Ли R, и что если R_0 содержит лишь нуль, то скалярный квадрат (u, u) есть положительно определенная квадратичная форма.*

Доказательство. Выберем в R такую систему координат, в которой инвариантная положительно определенная квадратичная форма $\psi(u, u)$, по предположению существующая в R, записывается в виде (7). В выбранной системе координат скалярный квадрат (a, a) записывается в виде

$$(a, a) = -\sum_{i, j} c_{i\alpha j} c_{j\beta i} a^\alpha a^\beta = \sum_{i, j} (c_{i\alpha j} a^\alpha)(c_{i\beta j} a^\beta) = \sum_{i, j} (c_{i\alpha j} a^\alpha)^2 \qquad (10)$$

(см. (4) и (9)). Так как в правой части стоит сумма квадратов, то для произвольного вектора $a \in R_0$ имеем:

$$c_{i\alpha j} a^\alpha = 0.$$

Если $b \in R$, то $[a, b]^i = c^i_{\alpha j}\, a^\alpha b^j = (c_{i\alpha j} a^\alpha) b^j = 0$, и потому $[a, b] = 0$, а это значит, что вектор a принадлежит центру алгебры Ли R. Если, наоборот, элемент a принадлежит центру, то $p_a = 0$, и потому при произвольном $b \in R$ имеем $(a, b) = -\mathrm{Sp}(p_a p_b) = 0$. Таким образом, R_0 есть центр алгебры Ли R. Если R_0 содержит только нуль, то квадратичная форма (a, a) невырождена и равенство (10) показывает, что она является положительно определенной.

Таким образом, теорема 101 доказана.

Теорема 102. *Пусть R — действительная алгебра Ли, скалярный квадрат в которой есть положительно определенная форма. Тогда группа Ли G_A всех автоморфизмов алгебры R компактна, и ее алгебра Ли R_A совпадает с присоединенной алгеброй P алгебры R. Так как алгебра R не имеет центра* (см. теорему 101), *то алгебры R и P изоморфны. Далее, оказывается, что группа G_A и ее компонента единицы G не содержат центральных элементов, отличных от e.*

Заметим, что теорема эта доказывается без использования теоремы о существовании локальной группы Ли с заданной алгеброй (см. теорему 88). Таким образом, теорема 102 дает весьма непосредственное построение группы Ли в целом по алгебре Ли в случае, когда последняя имеет положительно определенный скалярный квадрат (см. С)).

Доказательство. Пусть G^*—группа всех линейных преобразований векторного пространства R, оставляющих инвариантным скалярное произведение (u, v), определенное в R (см. С)). Так как скалярный квадрат (u, u) есть положительно определенная форма, то группа G^* компактна, именно, она изоморфна группе всех ортогональных матриц, порядок которых равен размерности алгебры R. Так как группа G_A всех автоморфизмов алгебры R есть, очевидно, подгруппа группы G^*, то она также компактна. Для доказательства того, что алгебра Ли R_A группы G_A совпадает с P, заметим, что P есть идеал алгебры R_A (см. § 54, Е)). Так как алгебра R_A есть алгебра компактной группы Ли G_A, то идеал P является в R_A прямым слагаемым (см. теорему 99 и В)). Таким образом, алгебра R_A распадается в прямую сумму идеала P и некоторого идеала Q. Покажем, что идеал Q содержит лишь нуль, чем и будет доказано, что $P=R_A$. Пусть $q \in Q$; тогда $[q, p_a]=0$, и в силу соотношения (14) § 54 мы имеем $p_{q(a)}=0$, а это значит, что $q(a)$ принадлежит центру алгебры R. Но так как центр алгебры R содержит лишь нуль, то $q(a)=0$ при произвольном $a \in R$. Таким образом, $q=0$.

Покажем, наконец, что группы G_A и G не имеют центральных элементов, отличных от e. Пусть φ—произвольный центральный элемент группы G_A или G, a—произвольный элемент алгебры R и $x(t)$—кривая в G с касательным вектором p_a. Мы имеем $\varphi x(t)\varphi^{-1}=$ $=x(t)$. Дифференцируя это соотношение по t при $t=0$, получаем $\varphi p_a \varphi^{-1}=p_a$, что в силу формулы (15) § 54 дает $p_{\varphi(a)}=p_a$, т. е. $\varphi(a)=a$. Так как a есть произвольный элемент алгебры R, то последнее означает, что φ есть тождественный ее автоморфизм, т. е. единичный элемент группы G_A.

Итак, теорема 102 доказана.

Теорема 103. *Алгебра Ли тогда и только тогда компактна, когда в ней существует положительно определенная квадратичная форма, инвариантная относительно присоединенной группы.*

Доказательство. В силу теоремы 99 в компактной алгебре Ли всегда существует инвариантная положительно определенная квадратичная форма. Допустим теперь, что в алгебре Ли R имеется инвариантная положительно определенная квадратичная форма и покажем, что существует компактная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна R. В силу теоремы 100 алгебра Ли R распадается в прямую сумму своего центра R_0 и простых некоммутативных алгебр Ли $R_1, R_2, \ldots, R_k$. Покажем, что алгебры Ли R_0 и $R'=R_1+\ldots+R_k$ изоморфны алгебрам Ли некоторых компактных групп Ли G_0 и G'. Этим самым наша теорема будет доказана, так как алгебра Ли прямого произведения групп G_0 и G' будет изоморфна R.

Пусть D — аддитивная группа действительных чисел, N — ее подгруппа, составленная из всех целых чисел. Факторгруппа $K = D/N$ есть компактная одномерная коммутативная группа Ли. Пусть s есть размерность пространства R_0. Тогда прямое произведение s групп, изоморфных группе K, представляет собой коммутативную компактную группу Ли G_0 размерности s, алгебра Ли которой изоморфна R_0.

За группу G' примем группу всех автоморфизмов полупростой алгебры Ли R'. В силу теоремы 102 группа G' компактна, а ее алгебра Ли P' изоморфна R'.

Итак, теорема 103 доказана.

E) Действительная алгебра R тогда и только тогда является компактной полупростой алгеброй Ли, когда скалярный квадрат в R (см. C)) есть положительно определенная квадратичная форма.

Утверждение E) непосредственно вытекает из теорем 99, 100, 101, 103.

Дальнейшие параграфы будут посвящены изучению компактных полупростых алгебр Ли.

Из теоремы 102 вытекает существование группы Ли с заданной компактной полупростой алгеброй Ли. Для этого случая имеет место также и предложение единственности. Как теорема 102, так и нижеследующее предложение о единственности доказываются здесь без использования результатов § 56.

F) Пусть R — компактная полупростая алгебра Ли и G — компонента единицы группы G_A всех ее автоморфизмов. В силу теоремы 102 G есть компактная группа Ли без центра, алгебра Ли которой изоморфна алгебре R. Оказывается, что если G' — произвольная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна R, то группа G' локально изоморфна группе G; если же группа G' связна и не имеет центра, то она изоморфна группе G.

Предложение F) непосредственно вытекает из предложения G) § 54 и результатов девятой главы.

П р и м е р 104. Пусть R — трехмерное евклидово векторное пространство. Как уже отмечалось, принимая за коммутатор $[a, b]$ двух векторов из R их обычное векторное произведение, мы получаем алгебру Ли R. Простые вычисления показывают, что скалярное произведение (a, b), соответствующее алгебре R, определяется в координатной форме формулой $(a, b) = 2(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)$, т. е. вдвое больше обычного. Таким образом, скалярное произведение в алгебре R есть положительно определенная форма, и потому R есть полупростая компактная алгебра Ли. В силу теоремы 101 она распадается в прямую сумму простых некоммутативных алгебр, а так как одномерная алгебра всегда коммутативна, то алгебра R проста. Пусть теперь G_A — группа всех автоморфизмов алгебры R. Так как всякий автоморфизм сохраняет скалярное произведение, то группа G_A состоит лишь из ортогональных преобразований пространства R. Непосредственно видно, что все ортогональные преобразования с положительными детерминантами сохраняют векторное произведение, а все ортогональные преобразования с отрицательными детерминантами не сохраняют его. Таким образом, группа G_A есть группа всех вращений евклидова векторного пространства R. Из теоремы 102 следует, что алгебра Ли R_A группы G_A изоморфна алгебре R. Это обстоятельство уже отмечалось выше (см. пример 93).

§ 62. Корневая система полупростой компактной алгебры Ли

В настоящем параграфе строится *корневая система* Σ полупростой компактной алгебры Ли R, представляющая собой весьма обозримый геометрический инвариант алгебры R, однозначно определяющий эту алгебру.

Общий ход построения корневой системы следующий. Пусть $a \in R$ и p_a—соответствующий элемент присоединенной алгебры, т. е. линейное отображение векторного пространства R в себя, определяемое соотношением $p_a(x) = [a, x]$. Так как $[a, a] = 0$, то отображение p_a всегда имеет нулевое собственное значение. Кратность нулевого собственного значения отображения p_a зависит от элемента a; минимальное значение n этой кратности называется *рангом* алгебры R, а всякий элемент $c \in R$, для которого кратность нулевого собственного значения отображения p_c равна n, называется *регулярным элементом* алгебры R. Для построения корневой системы фиксируется некоторый регулярный элемент c из R. Оказывается, что множество S всех $x \in R$, удовлетворяющих условию $[c, x] = 0$, образует n-мерную коммутативную подалгебру алгебры R, так называемую *регулярную подалгебру* алгебры R. Далее, оказывается, что все линейные отображения p_s, $s \in S$, имеют общие собственные векторы, а собственные значения этих отображений являются чисто мнимыми линейными формами вектора s. Так как S есть евклидово векторное пространство в смысле имеющегося в R скалярного произведения (см. § 61, С)), то каждая действительная линейная форма вектора s может быть записана в виде скалярного произведения (α, s), где α—вектор из S, определяющий линейную форму. Таким образом, собственные значения отображений p_s имеют вид $i(\alpha, s)$, где α есть вектор, определяющий собственное значение и называемый *корневым вектором*. Совокупность всех корневых векторов $\alpha \in S$ образует *корневую систему* Σ алгебры R. По построению, корневая система зависит от случайного выбора регулярного элемента c из R. Оказывается, однако, что две различные корневые системы алгебры R всегда изометричны между собой. Этот факт будет доказан в § 64. Оказывается далее, что если две полупростые компактные алгебры имеют изометричные корневые системы, то алгебры эти изоморфны. Этот факт будет доказан в § 63.

В этом параграфе будет все время рассматриваться полупростая компактная алгебра Ли R, т. е. алгебра Ли, скалярный квадрат в которой есть положительно определенная квадратичная форма. Это обстоятельство в дальнейшем не всегда будет оговариваться.

Поскольку собственные значения отображений p_a являются чисто мнимыми, нам придется пользоваться здесь комплексным расширением $[R]$ действительного векторного пространства R (см. § 58, C)). Если φ есть линейная форма, заданная на R, то на $[R]$ мы определим ее, положив $\varphi(x+iy)=\varphi(x)+i\varphi(y)$. Если p есть линейное отображение пространства R в себя, то на $[R]$ мы определим его, положив $p(x+iy)=p(x)+ip(y)$. Если $\psi(x_1, x_2)$ есть билинейная форма на R, то на $[R]$ мы определим ее, положив $\psi(x_1+iy_1, x_2+iy_2)=\psi(x_1, x_2)-\psi(y_1, y_2)+i\psi(x_1, y_2)+i\psi(y_1, x_2)$. Заметим, что если квадратичная форма $\psi(x, x)$, заданная на R, положительно определенна, то эрмитова форма $\psi(z,\bar{z})$ также положительно определенна и обращается в нуль лишь при $z=0$.

Напомним в нескольких словах понятия *собственного значения* и *собственного вектора* линейного отображения p векторного пространства в себя. Пусть R—векторное пространство над произвольным полем K и p—его линейное отображение в себя. Элемент λ поля K называется *собственным значением* отображения p, если существует отличный от нуля вектор $x\in R$, называемый соответствующим *собственным вектором*, для которого

$$p(x)=\lambda x. \tag{1}$$

Если $\|p_j^i\|$ есть матрица, соответствующая отображению p при некотором выборе базиса в R, то в координатной форме соотношение (1) имеет вид

$$p_\alpha^i x^\alpha=\lambda x^i. \tag{2}$$

Таким образом, $\lambda\in K$ является собственным значением отображения p тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\chi(\lambda, p)=0, \tag{3}$$

где $\chi(\lambda, p)$ есть характеристический многочлен отображения p, определяемый формулой

$$\chi(\lambda, p)=|\lambda\delta_j^i-p_j^i|. \tag{4}$$

A) Пусть R—евклидово векторное пространство. Линейное отображение p пространства R в себя будем называть кососимметрическим, если

$$(p(u), v)+(u, p(v))=0; \quad u\in R, v\in R. \tag{5}$$

Оказывается, что все собственные значения кососимметрического линейного отображения p чисто мнимы.

Действительно, пусть λ—собственное значение кососимметрического отображения p; тогда существует такой ненулевой вектор $z\in[R]$, что

$$p(z)=\lambda z. \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует:

$$p(\bar{z})=\bar{\lambda}\bar{z}. \tag{7}$$

Умножая соотношение (6) скалярно на $\bar{z}$, а (7)—на z и складывая полученные равенства, получаем:

$$0=(\lambda+\bar{\lambda})(z, \bar{z}),$$

а так как $(z, \bar{z})\neq 0$, то $\lambda=-\bar{\lambda}$, т. е. λ есть чисто мнимое число.

В) Пусть Q—коммутативная линейная алгебра Ли (см. § 54, А)) кососимметрических преобразований (см. А)) евклидова векторного пространства A. Через A'_0 обозначим совокупность всех векторов $x\in A$, удовлетворяющих условию $q(x)=0$ при произвольном $q\in Q$. Если φ—произвольная линейная форма, заданная на векторном пространстве Q, то через A_φ обозначим совокупность всех векторов $x\in[A]$, удовлетворяющих условию $q(x)=\varphi(q)x$ при произвольном $q\in Q$. Очевидно, что A'_0 есть линейное подпространство пространства A, а A_φ—линейное подпространство пространства $[A]$. Легко видеть также, что для нулевой линейной формы 0 имеем: $A_0=[A'_0]$. Если векторное пространство A_φ не является нулевым, то линейная форма φ называется *собственной линейной формой* алгебры Q, а само пространство A_φ—*собственным подпространством* пространства $[A]$, *соответствующим* линейной форме φ. Оказывается, что все собственные линейные формы алгебры Q чисто мнимы, и наряду с каждой собственной формой φ собственной является также форма $-\varphi$, причем $A_{-\varphi}=\bar{A}_\varphi$. Далее, оказывается, что векторное пространство $[A]$ распадается в прямую сумму всех своих собственных подпространств, т. е. подпространств $A_{\varphi_0}, A_{\varphi_1}, \ldots, A_{\varphi_k}$, где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ есть совокупность всех собственных линейных форм алгебры Q.

Докажем предложение В). Непосредственно проверяется, что если B—линейное подпространство пространства A, инвариантное относительно алгебры Q (т. е. относительно всех отображений алгебры Q), то его ортогональное дополнение C в A также инвариантно относительно алгебры Q. Пусть Q'—некоторая подалгебра алгебры Q, φ'—некоторая собственная линейная форма алгебры Q' и $A_{\varphi'}$—собственное подпространство пространства $[A]$, соответствующее собственной линейной форме φ'. Покажем, что пространство $A_{\varphi'}$ инвариантно относительно алгебры Q. Пусть $x\in A_{\varphi'}$, $y=q(x)$, $q\in Q$, и пусть q'—произвольный элемент алгебры Q'. Мы имеем:

$$q'(y)=q'(q(x))=qq'(x)=q(\varphi'(q')x)=\varphi'(q')q(x)=\varphi'(q')y$$

Таким образом, $y \in A_{\varphi'}$, и инвариантность пространства $A_{\varphi'}$ относительно алгебры Q доказана.

Покажем теперь, что алгебра Q имеет хотя бы одну собственную линейную форму. Доказательство будем вести индуктивно по размерности алгебры Q. Для нульмерной алгебры утверждение это очевидно. Разложим алгебру Q в прямую сумму алгебры Q' и одномерной алгебры Q'' с базисным вектором q''. По предположению индукции существует собственная форма φ' алгебры Q'. Пусть $A_{\varphi'}$—собственное подпространство, соответствующее этой форме. Подпространство $A_{\varphi'}$ инвариантно относительно алгебры Q и потому, в частности, относительно отображения q''. Пусть x— собственный вектор отображения q'' в пространстве $A_{\varphi'}$ с собственным значением λ. Произвольный элемент $q \in Q$ имеет вид $q = q' + \nu q''$, где $q' \in Q'$, а ν—действительное число. Положим $\varphi(q) = \varphi(q') + \nu\lambda$. Тогда φ есть линейная форма, заданная на Q, и мы имеем $q(x) = q'(x) + \nu q''(x) = \varphi'(q')x + \nu\lambda x = \varphi(q)x$. Таким образом, φ есть собственная форма алгебры Q.

Покажем, далее, что каждая собственная форма φ алгебры Q является чисто мнимой. Действительно, при произвольном $q \in Q$ число $\varphi(q)$ является собственным значением кососимметрического отображения q и потому чисто мнимо в силу А). Если отличный от нуля вектор $x \in [A]$ удовлетворяет условию $q(x) = \varphi(q)x$, то вектор $\bar{x}$, очевидно, удовлетворяет условию $q(\bar{x}) = -\varphi(q)\bar{x}$. Таким образом, наряду с каждой собственной линейной формой φ форма $-\varphi$ также является собственной, и $A_{-\varphi} = \bar{A}_{\varphi}$.

Докажем, что пространство $[A]$ разлагается в прямую сумму пространств $A_{\varphi_0}, \ldots, A_{\varphi_k}$, где $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ суть собственные линейные формы алгебры Q. Доказательство будем вести индуктивно по размерности пространства A. Для одномерного пространства A утверждение верно. По доказанному, существует хоть одна собственная линейная форма φ_0 алгебры Q. Пусть A_{φ_0} —ее собственное подпространство. Пространства A_{φ_0} и $A_{-\varphi_0}$ инвариантны относительно алгебры Q, и потому их сумма $A_{\varphi_0} + A_{-\varphi_0}$ также инвариантна относительно алгебры Q. Так как $A_{-\varphi_0} = \bar{A}_{\varphi_0}$, то $A_{\varphi_0} + A_{-\varphi_0} = [B]$, причем подпространство B пространства A также инвариантно относительно алгебры Q. Ортогональное дополнение к пространству B в пространстве A обозначим через C. Оно также инвариантно относительно алгебры Q. Так как размерность пространства C меньше размерности пространства A, то, по предположению индукции, оно распадается в прямую сумму собственных подпространств $C_{\psi_1}, \ldots, C_{\psi_l}$, где $\psi_1, \ldots, \psi_l$ суть собственные линейные формы алгебры Q в пространстве $[C]$. Легко видеть, что они отличны от форм φ_0 и $-\varphi_0$. Из этого следует, что $C_{\psi_1}, \ldots, C_{\psi_l}$ суть собственные подпространства пространства $[A]$.

Покажем, наконец, что если пространство $[A]$ распадается в прямую сумму подпространств $A_{\varphi_0}, \ldots, A_{\varphi_k}$, где $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ суть собственные формы алгебры Q, то формы $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ составляют совокупность всех собственных форм алгебры Q. Допустим, что существует собственная форма φ_{k+1} алгебры Q, отличная от форм $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$. Тогда найдется такой элемент $q \in Q$, что все числа $\varphi_0(q)$, $\varphi_1(q), \ldots, \varphi_{k+1}(q)$ попарно различны. Пусть x_{k+1}—собственный вектор формы φ_{k+1}. Мы имеем $x_0+x_1+\ldots+x_{k+1}=0$, где $x_i \in A_{\varphi_i}$, $i=0, \ldots$ $\ldots, k$. Применяя к этому соотношению отображение q, получаем:

$$\sum_{i=0}^{k+1} \varphi_i(q) x_i = 0.$$

Вместе с соотношением $x_0+x_1+\ldots+x_{k+1}=0$ это дает нетривиальное соотношение между векторами $x_0, \ldots, x_k$, что невозможно.

Итак, предложение B) доказано.

C) Пусть q_0—кососимметрическое отображение евклидова векторного пространства A в себя. Для произвольного собственного значения λ_i отображения q_0 обозначим через A_{λ_i} совокупность всех векторов $x \in [A]$, для которых $q_0(x)=\lambda_i x$. Тогда размерность пространства A_{λ_i} равна кратности корня $\lambda=\lambda_i$ характеристического многочлена $\chi(\lambda, q_0)$.

Для доказательства обозначим через Q множество всех линейных отображений пространства A в себя, имеющих вид νq_0, где ν—действительное число. Положим $\varphi_i(q)=\varphi_i(\nu q_0)=\nu\lambda_i$. Тогда $A_{\varphi_i}=A_{\lambda_i}$. Таким образом, в силу предложения B) пространство $[A]$ распадается в прямую сумму подпространств $A_{\lambda_0}, \ldots, A_{\lambda_k}$, где $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$—все собственные значения преобразования q_0. Выбирая базис пространства $[R]$ таким образом, чтобы части его составляли базисы пространств $R_{\lambda_0}, \ldots, R_{\lambda_k}$, мы убеждаемся в том, что $\chi(\lambda, q_0)=(\lambda-\lambda_0)^{n_0}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$, где n_i—размерность пространства R_{λ_i}.

Т е о р е м а 104. *Пусть R—компактная полупростая алгебра Ли, $a \in R$ и S_a—совокупность всех элементов $x \in R$, удовлетворяющих условию $[a, x]=0$. Легко проверяется, что S_a есть ненулевая подалгебра алгебры R. Размерность подалгебры S_a зависит от элемента $a \in R$. Минимальное значение n этой размерности называется* р а н г о м *алгебры R, подалгебра S_c, имеющая размерность n, называется* р е г у л я р н о й п о д а л г е б р о й *алгебры R, а соответствующий элемент c называется* р е г у л я р н ы м э л е м е н т о м *алгебры R. Оказывается, что всякая регулярная подалгебра алгебры R коммутативна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем прежде всего, что S_a есть подалгебра алгебры R. Пусть $x \in S_a$, $y \in S_a$. Тогда в силу свойства

(16) § 52 операции коммутирования имеем:

$$[a, [x, y]]=[[a, x], y]+[x, [a, y]]=0.$$

Таким образом, $[x, y]\in S_a$.

Заметим для дальнейшего, что все отображения пространства R в себя, принадлежащие присоединенной алгебре алгебры R, кососимметричны (см. § 61, (6)).

Пусть r—размерность алгебры R, и $a^1, \ldots, a^r$—компоненты вектора a в некоторой системе координат, выбранной в R. Характеристический многочлен $\chi(\lambda, p_a)$ отображения p_a (см. (4)) является, как легко видеть, однородным многочленом степени r относительно переменных $\lambda, a^1, \ldots, a^r$. Многочлен этот имеет по крайней мере один нулевой корень, так как $p_a(a)=[a, a]=0$. Таким образом, характеристический многочлен $\chi(\lambda, p_a)$ записывается в форме

$$\chi(\lambda, p_a)=\lambda^r+\chi_1(a)\lambda^{r-1}+\ldots+\chi_{r-n}(a)\lambda^n, \quad n>0, \tag{8}$$

где $\chi_k(a)$ есть однородный многочлен степени k относительно переменных $a^1, \ldots, a^r$. При этом многочлен $\chi_{r-n}(a)$ не равен тождественно нулю. Пространство $[S_a]$ является собственным подпространством для преобразования p_a, соответствующим нулевому собственному значению, и потому его размерность равна кратности нулевого корня многочлена $\chi(\lambda, p_a)$ (см. С)). Она достигает своего минимума n для вектора $a=c$ тогда и только тогда, когда

$$\chi_{r-n}(c)\neq 0. \tag{9}$$

Пусть вектор c удовлетворяет этому условию; покажем, что подалгебра $S=S_c$ алгебры R коммутативна. Ортогональное дополнение линейного пространства S в пространстве R обозначим через T. Так как S есть подалгебра алгебры R, то при произвольном $s\in S$ имеем $p_s(S)\subset S$, а из этого и из кососимметричности преобразования p_s следует, что $p_s(T)\subset T$. Таким образом, векторное пространство R распадается в прямую сумму своих подпространств S и T, инвариантных относительно всех преобразований p_s, $s\in S$. Отображение p_s, рассматриваемое на S, обозначим через p'_s, а рассматриваемое на T—через p''_s. Выбирая для вычисления характеристического многочлена $\chi(\lambda, p_s)$ оси координат лежащими в пространствах S и T, мы непосредственно убеждаемся, что

$$\chi(\lambda, p_s)=\chi(\lambda, p'_s)\,\chi(\lambda, p''_s). \tag{10}$$

Покажем, что

$$\chi(\lambda, p'_s)=\lambda^n \tag{11}$$

при произвольном $s\in S$. Пусть $s^1, \ldots, s^n$—компоненты вектора s в некоторой системе координат, выбранной в S. Непосредственно видно, что $\chi(\lambda, p'_s)$ есть однородный многочлен степени n относительно переменных $\lambda, s^1, \ldots, s^n$, а $\chi(\lambda, p''_s)$ есть однородный многочлен степени $r-n$ относительно тех же переменных. Таким образом, коэффициенты характеристических многочленов $\chi(\lambda, p'_s)$ и $\chi(\lambda, p''_s)$ суть однородные многочлены относительно переменных $s^1, \ldots, s^n$. Линейное подпространство S пространства R состоит из всех векторов $x \in R$, для которых $p_c(x)=0$. Таким образом, $c \in S$, и

$$\chi(\lambda, p'_c)=\lambda^n. \tag{12}$$

Из соотношений (9), (10) и (12) следует, что многочлен $\chi(\lambda, p''_c)$ не имеет нулевых корней. Так как коэффициенты многочлена $\chi(\lambda, p''_s)$ суть непрерывные функции вектора $s \in S$, то для вектора $b \in S$, достаточно близкого к вектору c, многочлен $\chi(\lambda, p''_b)$ также не имеет нулевых корней. Если бы многочлен $\chi(\lambda, p'_s)$ имел отличный от нуля корень хотя бы для одного вектора $s \in S$, то он имел бы его и для вектора $b \in S$, произвольно близкого к c. Это следует из того, что коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\lambda, p'_s)$ являются многочленами относительно переменных $s^1, \ldots, s^n$. Таким образом, если бы равенство (11) было неверно, то можно было бы найти такой вектор $b \in S$, что многочлен $\chi(\lambda, p'_b)$ имеет отличный от нуля корень, а многочлен $\chi(\lambda, p''_b)$ нулевых корней не имеет. Из этого следовало бы, что многочлен $\chi(\lambda, p_b)$ имеет меньше чем n нулевых корней, но это невозможно (см. (8)). Таким образом, равенство (11) верно. Из него следует, что при произвольных s и s', входящих в S, имеем $[s, s']=p_s(s')=0$ (см. С)), и потому алгебра S коммутативна.

Итак, теорема 104 доказана.

Определение 51. Пусть R—компактная полупростая алгебра Ли, S—ее регулярная подалгебра (см. теорему 104) и Q—совокупность всех линейных отображений пространства R в себя вида p_s, $s \in S$. Совокупность Q есть коммутативная линейная алгебра кососимметрических отображений пространства R в себя (см. теорему 104). Среди собственных форм алгебры Q имеется нулевая; соответствующее ей собственное подпространство есть $[S]$. Пусть $\varphi_0=0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$—совокупность всех собственных линейных форм алгебры Q. Линейной форме φ_j поставим в соответствие вектор $\alpha_j \in S$, определяемый соотношением

$$\varphi_j(p_s)=i(\alpha_j, s). \tag{13}$$

Собственное подпространство R_{φ_j} собственной линейной формы φ_j обозначим через R_{α_j}. Совокупность векторов $\alpha_0=0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ обозначим через Δ, а совокупность векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$—через Σ. Векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ называются *корневыми векторами* алгебры R, их совокупность Σ—*корневой системой*, а пространства R_{α_i}, $i=1, \ldots, k$,—*корневыми подпространствами*. Из В) следует, что наряду с каждым корневым вектором $\alpha \in \Sigma$ имеется корневой вектор $-\alpha$, причем

$$R_{-\alpha}=\overline{R}_{\alpha}, \tag{14}$$

и что пространство $[R]$ распадается в прямую сумму своих подпространств $[S]$, R_{α_1}, ..., R_{α_k}. Из (13) следует, что

$$[s,\ x]=i(\alpha_j,\ s)x;\quad x\in R_{\alpha_j},\ s\in S. \tag{15}$$

Далее, оказывается, что если $x\in R_{\alpha_\mu}$, $y\in R_{\alpha_\nu}$; $\mu,\ \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ k$, то

$$[x,\ y]\in R_{\alpha_\mu+\alpha_\nu}; \tag{16}$$

здесь при $\alpha_\mu+\alpha\notin\Delta$ следует считать $R_{\alpha_\mu+\alpha_\nu}=\{0\}$.

Докажем соотношение (16). Мы имеем:

$$p_s([x,\ y])=[p_s(x),\ y]+[x,\ p_s(y)]=i(\alpha_\mu,\ s)[x,\ y]+\\ +i(\alpha_\nu,\ s)[x,\ y]=(\varphi_\mu(p_s)+\varphi_\nu(p_s))[x,\ y].$$

Таким образом, $[x,\ y]\in R_{\varphi_\mu+\varphi_\nu}$, и соотношение (16) доказано.

D) Пусть $x\in R_\alpha$, $y\in R_{-\alpha}$, $\alpha\in\Sigma$ (см. определение 51); тогда

$$[x,\ y]=i(x,\ y)\alpha. \tag{17}$$

Докажем соотношение (17). В силу соотношения (6) § 61 для произвольного $s\in S$ имеем $([x,\ y],\ s)+(y,\ [x,\ s])=0$, или иначе:

$$([x,\ y],\ s)=(y,\ [s,\ x])=i(\alpha,\ s)(x,\ y)=(i(x,\ y)\alpha,\ s)$$

(см. (15)). Так как это соотношение имеет место при произвольном $s\in S$, а $[x,\ y]$ в силу (16) принадлежит $[S]$, то соотношение (17) верно.

Т е о р е м а 105. *Пусть R—компактная полупростая алгебра Ли. Тогда имеем* (см. обозначения определения 51): a) *При $a\in\Sigma$ размерность комплексного векторного пространства R_α равна единице.* b) *При $\alpha\in\Sigma$ целочисленное кратное $j\alpha$ вектора α тогда и только тогда принадлежит Σ, когда $j=\pm1$.* c) *Пусть α и β—два вектора из Σ. Рассмотрим векторы вида $\beta+j\alpha$, где j—целое число. Определим l как максимальное целое число, для которого все векторы $\beta-j\alpha$ при $j=0,\ 1,\ \ldots,\ l$ принадлежат Δ. Аналогично, определим m как максимальное целое число, для которого все векторы $\beta+j\alpha$ при $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m$ принадлежат Δ. Тогда имеем:*

$$l-m=\frac{2(\alpha,\ \beta)}{(\alpha,\ \alpha)}. \tag{18}$$

Кроме того, если $(x,\ \overline{x})=1$, $x\in R_\alpha$, $y\in R_\beta$, то имеем:

$$[\overline{x},\ [x,\ y]]=-\frac{m(l+1)}{2}(\alpha,\ \alpha)y. \tag{19}$$

d) *Если α и β—два таких вектора из Σ, что $\alpha+\beta\in\Sigma$, а x и y—два ненулевых вектора из пространств R_α и R_β соответственно, то $[x,\ y]$ есть ненулевой вектор пространства $R_{\alpha+\beta}$.*

Доказательство. Прежде чем перейти к доказательству утверждений a), b), c), d), проделаем следующее предварительное построение. Пусть

$$\lambda\in\Sigma,\ \alpha\in\Sigma,\ u\in R_\lambda,\ x\in R_\alpha,\ u\neq 0,\ (x,\ \bar{x})=1,\ [\bar{x},\ u]=0. \tag{20}$$

Построим последовательность

$$u_0=u\in R_\lambda,\ u_1=[x,\ u_0]\in R_{\lambda+\alpha},\ \ldots,\ u_j=[x,\ u_{j-1}]\in R_{\lambda+j\alpha} \tag{21}$$

векторов и покажем, что

$$[\bar{x},\ u_j]=\left(j(\lambda,\ \alpha)+\frac{j(j-1)}{2}(\alpha,\ \alpha)\right)u_{j-1}. \tag{22}$$

Соотношение (22) будем доказывать индуктивно. Для $j=0$ оно верно в том смысле, что коэффициент в правой части при векторе u_{-1} обращается в нуль, а левая часть равна нулю по предположению (см. (20)). Допустим, что соотношение (22) верно для $j=t$, и докажем его для $j=t+1$. Мы имеем:

$$[\bar{x},\ u_{t+1}]=[\bar{x},\ [x,\ u_t\ ]]=-[[x,\ \bar{x}],\ u_t]+[x,\ [\bar{x},\ u_t]] \tag{23}$$

(см. § 52, (15) и (16)). Далее,

$$-[[x,\ \bar{x}],\ u_t]=-i[\alpha,\ u_t]=((\lambda,\ \alpha)+t(\alpha,\ \alpha))u_t \tag{24}$$

(см. (17), (15), (21)). Наконец, в силу (20) и по предположению индукции имеем:

$$[x,\ [\bar{x},\ u_t]]=\left(t(\lambda,\ \alpha)+\frac{t(t-1)}{2}(\alpha,\ \alpha)\right)[x,\ u_{t-1}]=$$

$$=\left(t\,(\lambda,\ \alpha)+\frac{t(t-1)}{2}(\alpha,\ \alpha)\right)u_t. \tag{25}$$

Из (23), (24), (25) следует справедливость соотношения (22) при $j=t+1$. Таким образом, соотношение (22) доказано. Так как вектор u_j принадлежит $R_{\lambda+j\alpha}$, а число линейных пространств R_γ, $\gamma\in\Delta$, конечно, то для некоторого номера $g\geqslant 0$ вектор $u_g\neq 0$, а вектор u_{g+1} равен нулю. Полагая в соотношении (22) $j=g+1$, получаем:

$$g=-\frac{2(\lambda,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}. \tag{26}$$

Так как $g\geqslant 0$, то

$$(\lambda,\ \alpha)\leqslant 0. \tag{27}$$

Докажем утверждение a) теоремы. Допустим, что размерность пространства R_α, $\alpha\in\Sigma$, больше единицы. Пусть u—произвольный отличный от нуля вектор пространства R_α. Так как $R_{-\alpha}=\overline{R_\alpha}$, то размерность пространства $R_{-\alpha}$ больше единицы, и потому в $R_{-\alpha}$ найдется вектор $\bar{x}\neq 0$, удовлетворяющий условию $(\bar{x},\ u)=0$. Из этого в силу (17) следует, что $[\bar{x},\ u]=0$. Отличный от нуля вектор x можно нормировать так, что $(x,\ \bar{x})=1$ При $\lambda=\alpha$ все условия (20) предварительного построения выполнены, и потому, полагая в неравенстве (27) $\lambda=\alpha$, мы приходим к невозможному неравенству $(\alpha, \alpha)\leqslant 0$. Таким образом, мы пришли к противоречию, показывающему, что размерность пространства R_α, $\alpha\in\Sigma$, не может быть больше единицы.

Докажем утверждение b) теоремы. Пусть t—наибольшее из всех целых чисел j, удовлетворяющих условию $-j\alpha\in\Sigma$. Так как $-\alpha\in\Sigma$, то $t\geqslant 1$. Покажем, что $t=1$. Положим $\lambda=-t\alpha$, и пусть u—отличный от нуля вектор из R_λ, а x—такой вектор из R_α, что $(x, \bar{x})=1$. Так как $[\bar{x}, u]\in R_{-(t+1)\alpha}$ (см. (16)), а вектор $-(t+1)\alpha$ не принадлежит Σ, а значит, и Δ, то $[\bar{x}, u]=0$. Таким образом, все условия (20) предварительного построения здесь выполнены. Подставляя в соотношение (26) $\lambda=-t\alpha$, получаем $g=2t$. Таким образом, все векторы $u_0, u_1, \ldots, u_{2t}$ отличны от нуля. Вектор u_{t+1} принадлежит R_α (см. (21)), но так как пространство R_α одномерно, то он пропорционален вектору x, и потому $u_{t+2}=[x, u_{t+1}]=0$. Мы видим, что $2t<t+2$, и следовательно, $t<2$, т. е. $t=1$.

Докажем утверждение c) теоремы. Положим $\lambda=\beta-l\alpha$, и пусть u—отличный от нуля вектор пространства R_λ, а x—такой вектор из R_α, что $(x, \bar{x})=1$, так что $[x, \bar{x}]=i\alpha$ (см. (17)). Так как $[\bar{x}, u]\in$ $\in R_{\beta-(l+1)\alpha}$, а вектор $\beta-(l+1)\alpha$ не содержится в Δ, то все условия (20) предварительного построения выполнены, и, следовательно, векторы $u_0, u_1, \ldots, u_g$ отличны от нуля, а $u_{g+1}=0$. Число g определяется здесь из соотношения (26). Рассмотрим линейную оболочку T пространств

$$R_\lambda=R_{\beta-l\alpha},\ R_{\lambda+\alpha},\ \ldots,\ R_{\lambda+(l+m)\alpha}=R_{\beta+m\alpha}.$$

Мы имеем $p_{\bar{x}}(R_{\lambda+j\alpha})\subset R_{\lambda+(j-1)\alpha}$, и так как $p_{\bar{x}}(R_{\beta-l\alpha})=0$, то пространство T инвариантно относительно преобразования $p_{\bar{x}}$. Точно так же мы имеем $p_x(R_{\lambda+j\alpha})\subset R_{\lambda+(j+1)\alpha}$, и так как $p_x(R_{\beta+m\alpha})=0$, то пространство T инвариантно относительно преобразования p_x. В силу предложения F) § 54 имеем:

$$p_{i\alpha}=p_{[x,\bar{x}]}=p_xp_{\bar{x}}-p_{\bar{x}}p_x. \tag{28}$$

Таким образом,

$$\mathrm{Sp}(p_{i\alpha})=\mathrm{Sp}(p_xp_{\bar{x}})-\mathrm{Sp}(p_{\bar{x}}p_x)=0 \tag{29}$$

(см. § 61, (2)), где все следы преобразований взяты в T. След преобразования $p_{i\alpha}$ легко вычислить непосредственно. Так как пространство $R_{\lambda+j\alpha}$ инвариантно относительно преобразования $p_{i\alpha}$, и для всякого вектора $z\in R_{\lambda+j\alpha}$ мы имеем $p_{i\alpha}(z)=-((\lambda, \alpha)+j(\alpha, \alpha))z$ (см. (15)), то

$$\mathrm{Sp}(p_{i\alpha})=-\sum_{j=0}^{l+m}((\lambda, \alpha)+j(\alpha, \alpha))=$$

$$=-(l+m+1)(\lambda, \alpha)-\frac{(l+m)(l+m+1)}{2}(\alpha, \alpha), \tag{30}$$

ибо размерность пространства $R_{\lambda+j\alpha}$ при $\lambda+j\alpha\neq 0$ равна единице, а при $\lambda+j\alpha=0$ имеем $(\lambda, \alpha)+j(\alpha, \alpha)=0$.

Из соотношений (29) и (30) получаем:

$$l+m=-\frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}. \tag{31}$$

Таким образом, $g=l+m$ (см. (26)), и все векторы $u_0, u_1, \ldots, u_{l+m}$ отличны от нуля. Подставляя в (31) вместо λ его значение $\beta-l\alpha$, получим (18).

Перейдем к доказательству соотношения (19). Ввиду одномерности пространства R_β за y можно принять вектор $u_l\in R_\beta$. Мы имеем тогда в силу (22):

$$[\bar{x}, [x, u_l]]=[\bar{x}, u_{l+1}]=\left((l+1)(\lambda, \alpha)+\frac{l(l+1)}{2}(\alpha, \alpha)\right)u_l.$$

Подставляя в это соотношение вместо λ его значение $\beta-l\alpha$, получаем:

$$[\bar{x}, [x, u_l]]=\left((l+1)(\alpha, \beta)-\frac{l(l+1)}{2}(\alpha, \alpha)\right)u_l.$$

Наконец, заменяя в этом соотношении число (α, β) его значением $\frac{1}{2}(l-m)(\alpha, \alpha)$ (см. (18)), имеем:

$$[\bar{x}, [x, u_l]]=-\frac{m(l+1)}{2}(\alpha, \alpha)u_l,$$

и соотношение (19) доказано.

Докажем, наконец, d). Из соотношения (19) следует, что при $\alpha+\beta\in\Sigma$ имеем $[x, y]\neq 0$, ибо $l\geqslant 0$ по определению, а $m\geqslant 1$ (так как $\alpha+\beta\in\Sigma$), и потому число $\frac{m(l+1)}{2}$ отлично от нуля.

Итак, теорема 105 доказана.

П р и м е р 105. Пусть R—трехмерное евклидово векторное пространство, в котором за коммутатор $[a, b]$ двух векторов a и b принято их векторное произведение. Тогда R есть простая некоммутативная алгебра Ли. Построим ее регулярную подалгебру и корневую систему. Для произвольного отличного от нуля вектора a из R множество S_a всех векторов, перестановочных с a, очевидно, состоит из всех коллинеарных с a векторов. Таким образом, все отличные от нуля векторы алгебры R являются регулярными, и ранг этой алгебры равен единице. Пусть e, f, g—ортонормальный базис векторного пространства R, в котором операция коммутирования задана соотношениями

$$[e, f]=g, \quad [f, g]=e, \quad [g, e]=f.$$

Положим $S=S_e$. Мы имеем:

$$[e, f+ig]=-i(f+ig), \tag{32}$$

$$[e, f-ig]=i(f-ig). \tag{33}$$

Принимая во внимание, что скалярный квадрат, порождаемый алгеброй R, записывается в базисе e, f, g в виде $(x, x)=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ (см. пример 104), мы из соотношений (32) и (33) заключаем, что корневыми векторами алгебры R являются векторы $\alpha=-\frac{1}{2}e$ и $-\alpha=+\frac{1}{2}e$, а собственные векторы r_α и $r_{-\alpha}$ определяются формулами

$$r_\alpha=f+ig, \quad r_{-\alpha}=f-ig.$$

§ 63. Построение полупростой компактной алгебры Ли по ее корневой системе

Пусть R и R'—два евклидовых векторных пространства, а A и A'—их подмножества. Отображение f множества A на множество A' будем называть *подобием*, если

$$(f(x),\ f(y))=k^2(x,\ y); \quad x\in A,\ y\in A,$$

где k—положительное число, не зависящее от векторов x и y и называемое *коэффициентом подобия*. Подобие f будем называть *изометрией*, если $k=1$. Множества A и A' будем считать *подобными* или соответственно *изометричными*, если существует подобное или соответственно изометрическое отображение одного из них на другое.

Принимая во внимание, что корневая система Σ полупростой компактной алгебры R является подмножеством евклидова векторного пространства S, результаты настоящего параграфа можно формулировать следующим образом.

Если корневые системы двух полупростых компактных алгебр изометричны, то алгебры эти изоморфны. Далее, всякое подобие двух корневых систем является их изометрией. Таким образом, для изоморфности двух полупростых компактных алгебр Ли достаточно, чтобы их корневые системы были подобны. В конце параграфа дается критерий простоты алгебры, использующий метрические свойства ее корневой системы.

В настоящем параграфе будут рассматриваться только полупростые компактные алгебры Ли, что в дальнейшем не всегда будет оговариваться.

А) Пусть $\Sigma\subset S$—корневая система алгебры R (см. определение 51). Оказывается, что скалярный квадрат (s, s) вектора $s\in S$ определяется формулой

$$(s,\ s)=\sum_j (\alpha_j,\ s)^2, \tag{1}$$

где стоящая справа сумма распространена на все векторы α_i системы Σ. Из соотношения (1) вытекает, что S есть линейная оболочка системы векторов Σ.

Для доказательства соотношения (1) заметим, что пространство $[R]$ распадается в прямую сумму пространств $R_0, R_{\alpha_1}, \ldots, R_{\alpha_k}$, инвариантных относительно преобразования p_s, $s \in S$, причем размерность каждого пространства R_{α_j}, $j=1, \ldots, k$, равна единице (см. теорему 105). Далее, при $x \in R_0$ имеем $p_s(p_s(x))=0$, а при $x \in R_{\alpha_j}$ имеем $p_s(p_s(x)) = -(\alpha_j, s)^2 x$. Из сказанного в силу соотношения (3) § 61 следует:

$$(s, s) = -\mathrm{Sp}(p_s p_s) = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j, s)^2.$$

Таким образом, соотношение (1) доказано.

Покажем теперь, что векторное пространство S есть линейная оболочка векторов системы Σ. В самом деле, пусть вектор $s \in S$ ортогонален ко всем векторам системы Σ. Тогда соотношение (1) дает:

$$(s, s) = \sum (\alpha_j, s)^2 = 0,$$

и потому $s=0$.

B) Пусть Σ' — некоторая система векторов евклидова пространства, подобная корневой системе, т. е. такая, что система $k\Sigma'$, состоящая из всех векторов вида $k\alpha'$, $\alpha' \in \Sigma'$, уже изометрична корневой. Тогда коэффициент подобия k однозначно определяется системой Σ'. Таким образом, всякое подобие двух корневых систем является их изометрией.

Для доказательства выберем в Σ' некоторый определенный вектор β' и применим формулу (1) к системе $k\Sigma'$ при $s=k\beta'$. Тогда мы получим:

$$(\beta', \beta') = k^2 \sum_{\alpha' \in \Sigma'} (\alpha', \beta')^2. \tag{2}$$

Из этой формулы положительное число k определяется однозначно.

Перейдем к доказательству того, что алгебра R определяется с точностью до изоморфизма метрическими свойствами своей корневой системы Σ.

C) Пусть Σ — корневая система алгебры R. Так как пространство R_α, $\alpha \in \Sigma$, одномерно (см. теорему 105), то любой отличный от нуля вектор r_α этого пространства составляет его базис. Так как $R_{-\alpha} = \overline{R}_\alpha$, то во всех пространствах R_α, $\alpha \in \Sigma$, можно выбрать базисные векторы r_α таким образом, чтобы выполнялись условия

$$r_{-\alpha} = \overline{r}_\alpha; \quad (r_\alpha, r_{-\alpha}) = 1. \tag{3}$$

Если α и β — два таких вектора из Σ, что $\alpha+\beta \in \Sigma$, то

$$[r_\alpha, r_\beta] = N_{\alpha\beta} r_{\alpha+\beta}, \tag{4}$$

где $N_{\alpha\beta}$ — отличное от нуля число (см. теорему 105, d)). Если же хотя бы один из трех векторов α, β, $\alpha+\beta$, не принадлежит Σ, то будем считать, что

$$N_{\alpha\beta}=0. \tag{5}$$

Очевидно, что во всех случаях

$$N_{\beta\alpha}=-N_{\alpha\beta} \tag{6}$$

и

$$N_{-\alpha,-\beta}=\overline{N}_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Пусть теперь α, β, γ — три вектора из Σ, образующие треугольник, т. е. такие, что

$$\alpha+\beta+\gamma=0;$$

тогда оказывается, что

$$N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}. \tag{8}$$

Пусть, далее, α, β, γ, δ — четыре вектора из Σ, образующие четырехугольник, т. е. такие, что выполнено условие

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,$$

причем никакие два вектора из этих четырех не являются взаимно противоположными; тогда оказывается, что

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}+N_{\alpha\gamma}N_{\delta\beta}+N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}=0. \tag{9}$$

Докажем соотношение (8). В силу соотношения (6) § 61 мы имеем:

$$([r_\alpha,\ r_\beta],\ r_\gamma)+(r_\beta,\ [r_\alpha,\ r_\gamma])=0.$$

Далее,

$$([r_\alpha,\ r_\beta],\ r_\gamma)=N_{\alpha\beta}(r_{\alpha+\beta},\ r_\gamma)=N_{\alpha\beta}(r_{-\gamma},\ r_\gamma)=N_{\alpha\beta}$$

(см. (4), (3)). Точно так же

$$(r_\beta,\ [r_\alpha,\ r_\gamma])=N_{\alpha\gamma}(r_\beta,\ r_{\alpha+\gamma})=N_{\alpha\gamma}(r_\beta,\ r_{-\beta})=N_{\alpha\gamma}=-N_{\gamma\alpha}$$

(см. (4), (3), (6)). Таким образом, $N_{\alpha\beta}-N_{\gamma\alpha}=0$. Так как векторы α, β, γ равноправны, то из последнего следует (8).

Докажем соотношение (9). В силу соотношения (16) § 52 имеем:

$$[r_\alpha,\ [r_\beta,\ r_\gamma]]+[r_\beta,\ [r_\gamma,\ r_\alpha]]+[r_\gamma,\ [r_\alpha,\ r_\beta]]=0. \tag{10}$$

Далее, если $\beta+\gamma\in\Sigma$, то векторы α, $\beta+\gamma$, δ принадлежат Σ и образуют треугольник, так что мы имеем:

$$[r_\alpha,\ [r_\beta,\ r_\gamma]]=N_{\beta\gamma}[r_\alpha,\ r_{\beta+\gamma}]=N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\beta+\gamma}r_{\alpha+\beta+\gamma}=N_{\beta\gamma}N_{\delta\alpha}r_{-\delta}$$

(см. (8)). Если вектор $\beta+\gamma$ не принадлежит Σ, то $[r_\alpha,\ [r_\beta,\ r_\gamma]]=0$ и $N_{\beta\gamma}=0$, так что в обоих случаях имеет место соотношение

$$[r_\alpha,\ [r_\beta,\ r_\gamma]]=-N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}r_{-\delta}. \tag{11}$$

Точно так же доказывается, что

$$[r_\beta, [r_\gamma, r_\alpha]] = -N_{\alpha\gamma} N_{\delta\beta} r_{-\delta}; \quad [r_\gamma, [r_\alpha, r_\beta]] = -N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} r_{-\delta}. \tag{12}$$

Из (10), (11), (12) следует (9).

D) Пусть Σ — корневая система алгебры R. Для двух векторов α и β из Σ определим числа l и m так, как это сделано в утверждении с) теоремы 105. Оказывается, что

$$|N_{\alpha\beta}|^2 = \frac{m(l+1)}{2}(\alpha, \alpha) \tag{13}$$

(см. С)).

Докажем соотношение (13). Если $\alpha+\beta$ не принадлежит Σ, то $N_{\alpha\beta}=0$ и $m=0$, а потому соотношение (13) верно. Допустим, что $\alpha+\beta \in \Sigma$. Для доказательства соотношения (13) в этом случае используем соотношение (19) § 62, положив в нем $\bar{x} = r_{-\alpha}$, $x = r_\alpha$, $y = r_\beta$. Мы имеем:

$$[r_{-\alpha}, [r_\alpha, r_\beta]] = -\frac{m(l+1)}{2}(\alpha, \alpha) r_\beta. \tag{14}$$

Далее, так как векторы $-\alpha$, $\alpha+\beta$, $-\beta$ образуют треугольник (см. С)), то мы имеем:

$$[r_{-\alpha}, [r_\alpha, r_\beta]] = N_{\alpha\beta}[r_{-\alpha}, r_{\alpha+\beta}] = N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} r_\beta = -N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, -\beta} r_\beta. \tag{15}$$

Из соотношений (15), (14) и (7) следует соотношение (13).

E) Пусть $\Sigma \subset S$ — корневая система алгебры R. Каждый элемент $x \in [R]$ может быть единственным способом записан в виде

$$x = s + \sum_\alpha \tau^\alpha r_\alpha, \tag{16}$$

где $s \in [S]$, а τ^α, $\alpha \in \Sigma$, — комплексные числа (см. С)). Для того чтобы элемент x был действительным, т. е. входил в R, необходимо и достаточно, чтобы было $\bar{x} = x$. Это условие равносильно условиям

$$s \in S; \ \tau^{-\alpha} = \overline{\tau^\alpha}, \ \alpha \in \Sigma. \tag{17}$$

Так как подалгебра S коммутативна, то операция коммутирования в алгебре $[R]$ однозначно определяется соотношениями:

$$[s, r_\alpha] = i(\alpha, s) r_\alpha, \tag{18}$$

$$[r_\alpha, r_{-\alpha}] = i\alpha, \tag{19}$$

$$[r_\alpha, r_\beta] = N_{\alpha\beta} r_{\alpha+\beta}, \ \alpha+\beta \neq 0 \tag{20}$$

(см. § 62, (15), (17); § 63, (4)).

При изучении алгебр Ли используется нижеследующий прием введения неравенств между векторами регулярной подалгебры S.

F) Пусть A — действительное векторное пространство. Введем в нем *неравенства* между векторами, зависящие от выбора базиса в A. Пусть $e_1, \ldots, e_m$—базис пространства A и $a=a^1e_1+\ldots+a^me_m$, $a\neq 0$. Вектор a считается *положительным*, если первое отличное от нуля число в ряду чисел $a^1, \ldots, a^m$ положительно; в этом случае пишут $a>0$. Если a и b—два различных вектора из A, то считают, что $a>b$ (или $b<a$), если $a-b>0$. Таким образом, для любых двух различных векторов a и b из A всегда выполнено одно из двух неравенств $a>b$ или $a<b$. Неравенства эти по обычным правилам можно складывать между собой и умножать на положительные числа. Если регулярная подалгебра S совпадает с пространством A или содержится в нем, то неравенства определены для всех векторов корневой системы $\Sigma\subset S$. Таким образом, возникает весьма важное понятие *простого корневого вектора*: корневой вектор α называется *простым*, если он положителен и не может быть представлен в виде суммы двух положительных корневых векторов. Не следует забывать, что один и тот же корневой вектор может быть простым при одном выборе базиса в A и не быть простым при другом выборе базиса.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству теоремы 106, лежащей в основе классификации алгебр Ли. Теорема эта утверждает, что алгебра Ли R однозначно определяется метрическими свойствами ее корневой системы Σ. Предложение E) показывает, что алгебра R однозначно определяется векторным пространством S с заданной в нем корневой системой Σ и числами $N_{\alpha\beta}$. Предложение D) показывает, что числа $N_{\alpha\beta}$ по модулю определяются метрическими свойствами корневой системы Σ. Доказательство теоремы 106 опирается на то, что, пользуясь произволом в выборе базисных векторов r_α, $\alpha\in\Sigma$, удается выбрать все числа $N_{\alpha\beta}$ действительными, а затем установить правило выбора знаков этих чисел, зависящее от метрических свойств системы Σ и еще от некоторого произвольного элемента построения (см. F)), который, однако, в двух изометричных системах Σ и Σ' может быть сделан одинаковым.

Т е о р е м а 106. *Если корневые системы Σ и Σ' алгебр R и R' изометричны, то алгебры R и R' изоморфны между собой. Более полно: если f есть изометрическое отображение системы Σ на систему Σ', то отображение f можно распространить в изоморфное отображение алгебры R на алгебру R'. В процессе доказательства теоремы будет установлено, что базисные векторы r_α, $\alpha\in\Sigma$, можно выбрать таким образом, чтобы все числа $N_{\alpha\beta}$ были действительными* (см. C)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в S неравенства между векторами, исходя из базиса $e_1, \ldots, e_n$ в S (см. F)). Пусть ρ—непростой положительный вектор из Σ. Из всех пар λ, μ положительных векторов системы Σ, удовлетворяющих условию $\lambda+\mu=\rho$, выберем такую пару $\alpha+\beta$, для которой вектор λ достигает своего минимального значения α в смысле неравенств, установленных в S, и положим $N_\rho = N_{\alpha\beta}$. Таким образом, каждому положительному непростому вектору $\rho \in \Sigma$ однозначно соответствует число N_ρ. Если λ, μ — отличная от α, β пара положительных векторов из Σ, удовлетворяющая условию $\lambda + \mu = \alpha + \beta = \rho$, $\lambda < \mu$ (см. теорему 105, b)), то мы имеем:

$$\alpha < \lambda < \mu < \beta, \tag{21}$$

и векторы α, β, $-\lambda$, $-\mu$ образуют четырехугольник (см. C)). Таким образом, в силу (9) мы имеем:

$$N_{\alpha\beta} N_{-\lambda, -\mu} + N_{\alpha, -\lambda} N_{-\mu, \beta} + N_{\alpha, -\mu} N_{\beta, -\lambda} = 0,$$

откуда по определению числа N_ρ и в силу (7) имеем:

$$N_{\lambda, \mu} = \frac{\overline{N}_{\alpha, -\lambda} \overline{N}_{\beta, -\mu} - \overline{N}_{\alpha, -\mu} \overline{N}_{\beta, -\lambda}}{\overline{N}_{\lambda+\mu}}.$$

Если $\lambda - \alpha \in \Sigma$, то векторы α, $-\lambda$, $\lambda - \alpha$ образуют треугольник, и в силу (8) получаем:

$$\overline{N}_{\alpha, -\lambda} = \overline{N}_{\lambda-\alpha, \alpha}. \tag{22}$$

Если же $\lambda - \alpha$ не входит в Σ, то обе части равенства (22) обращаются в нуль, так что оно верно и в этом случае. Точно так же, имеем:

$$\overline{N}_{\beta, -\mu} = N_{\mu, \beta-\mu}, \quad \overline{N}_{\alpha, -\mu} = \overline{N}_{\mu-\alpha, \alpha}, \quad \overline{N}_{\beta, -\lambda} = N_{\lambda, \beta-\lambda}.$$

Окончательно получаем:

$$N_{\lambda, \mu} = \frac{\overline{N}_{\lambda-\alpha, \alpha} N_{\mu, \beta-\mu} - \overline{N}_{\mu-\alpha, \alpha} N_{\lambda, \beta-\lambda}}{\overline{N}_{\lambda+\mu}}. \tag{23}$$

Таким образом, число $N_{\lambda,\mu}$ выражается через число $N_{\lambda+\mu}$ и различные числа $N_{\gamma,\delta}$ с положительными γ и δ, удовлетворяющими условию $\gamma + \delta < \lambda + \mu$. Соотношение (23) показывает, что если упомянутые числа $N_{\gamma,\delta}$ и число $N_{\lambda+\mu}$ все действительны, то и число $N_{\lambda,\mu}$ также действительно. Каждое число $N_{\gamma,\delta}$, входящее в соотношение (23), в свою очередь можно выразить через число $N_{\gamma+\delta}$ и числа $N_{\varepsilon,\zeta}$ с положительными ε и ζ, удовлетворяющими условию $\varepsilon + \zeta < \gamma + \delta$. Таким образом, каждое число $N_{\lambda,\mu}$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ может быть выражено через числа N_ρ, где $\rho \in \Sigma$, $0 < \rho \leqslant \lambda + \mu$, причем таким образом, что если все числа N_ρ действительны, то и число $N_{\lambda,\mu}$ также действительно.

Пусть теперь λ, μ, ν — три вектора из Σ, образующих треугольник; тогда векторы эти не могут быть одновременно положительными или одновременно отрицательными, и потому возможны лишь два случая: два из этих векторов положительны, а один отрицателен, или же два из них отрицательны, а один положителен. Из этого и из соотношений (7), (8), (23) следует, что все числа

$N_{\lambda,\mu}$ могут быть выражены через числа N_ρ, причем ясно, что если все числа N_ρ действительны, то и все числа $N_{\lambda,\mu}$ также действительны.

Покажем, что базисные векторы r_α, $\alpha \in \Sigma$, можно выбрать таким образом, чтобы все N_ρ были положительными действительными числами. В силу соотношения $r_{-\alpha} = \overline{r}_\alpha$ достаточно выбирать лишь базисные векторы r_α с положительными α. Пусть ρ — положительный вектор из Σ. Допустим, что для произвольного вектора $\alpha \in \Sigma$, удовлетворяющего условию $0 < \alpha < \rho$, базисный вектор r_α уже выбран, причем так, что при $0 < \alpha < \rho$ все числа N_α действительны и положительны. Если ρ — простой вектор, то за r_ρ примем произвольный вектор из R_ρ, удовлетворяющий условию $(r_\rho, \overline{r}_\rho) = 1$. Если же ρ — не простой вектор, то пусть $\rho = \alpha + \beta$ — разложение вектора ρ в сумму двух положительных векторов из Σ с минимальным первым слагаемым. Вектор r_ρ мы определим соотношением

$$[r_\alpha, r_\beta] = N_{\alpha\beta} r_\rho,$$

где $N_{\alpha\beta} = N_\rho$ — действительное положительное число, подобранное так, чтобы было $(r_\rho, \overline{r}_\rho) = 1$. В силу этого индуктивного построения базисные векторы r_α, $\alpha \in \Sigma$, выбраны таким образом, что все числа N_ρ действительны и положительны. Заметим в заключение, что в силу соотношения (13) положительное число $N_\rho = N_{\alpha+\beta}$ однозначно определяется метрическими свойствами системы Σ.

Пусть теперь $S' \supset \Sigma'$ — регулярная подалгебра алгебры R'. Изометрическое отображение f системы Σ на систему Σ' можно продолжить в изометрическое отображение евклидова векторного пространства S на евклидово векторное пространство S'. В пространстве S' примем за базис векторы $e'_j = f(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, и, пользуясь этим базисом, введем неравенства между векторами так же, как это было сделано для пространства S. Очевидно, что если для векторов a и b из S имеет место неравенство $a < b$, то для векторов $f(a)$ и $f(b)$ из S' имеет место неравенство $f(a) < f(b)$. Пользуясь полученной упорядоченностью векторов системы Σ', выберем базисные векторы $r'_{\alpha'}$, $\alpha' \in \Sigma'$, алгебры R' так же, как это было сделано на основе упорядоченности векторов системы Σ. Вектору r_α поставим в соответствие вектор $f(r_\alpha) = r'_{f(\alpha)}$. Очевидно, что при таком выборе базисных векторов мы будем иметь:

$$N'_{f(\alpha), f(\beta)} = N_{\alpha\beta}.$$

Так как отображение f уже определено на S и для каждого вектора r_α, $\alpha \in \Sigma$, то в силу (16) оно, по линейности, определяется и на всем пространстве $[R]$. Из соотношений (18), (19), (20) следует, что f есть изоморфное отображение комплексной алгебры Ли $[R]$ на комплексную алгебру Ли $[R']$. Из соотношений (17) следует, что $f(R) = R'$.

Таким образом, теорема 106 доказана.

G) Пусть алгебра R распадается в прямую сумму своих подалгебр R_1 и R_2. Из предложений C) и E) § 61 следует, что R_1 и R_2 являются компактными полупростыми алгебрами Ли. Пусть $c_i \in R_i$, $i=1, 2$, $c=c_1+c_2$. Тогда

$$S_c=S_{c_1}^{(1)}+S_{c_2}^{(2)}, \tag{24}$$

где $S_{c_i}^{(i)}$ —подалгебра алгебры R_i, порожденная элементом c_i, $i=1, 2$ (см. теорему 104). Оказывается, далее, что c является регулярным элементом алгебры R тогда и только тогда, когда c_i является регулярным элементом алгебры R_i, $i=1, 2$.

Для доказательства обозначим через n, n_1 и n_2 ранги алгебр R, R_1 и R_2. Так как

$$[x_1+x_2,\ y_1+y_2]=[x_1,\ y_1]+[x_2,\ y_2]; \quad x_i \in R_i, \quad y_i \in R_i, \quad i=1,\ 2,$$

то формула (24) справедлива. Предположив, что c есть регулярный элемент алгебры R, мы из (24) получаем, что $n \geqslant n_1+n_2$, причем неравенство $n>n_1+n_2$ возможно лишь в том случае, когда хотя бы один из элементов $c_i \in R_i$, $i=1, 2$, нерегулярен. Предположив, что регулярными являются элементы c_1 и c_2, мы из (24) получаем $n \leqslant n_1+n_2$, причем неравенство $n<n_1+n_2$ возможно лишь в случае, когда элемент c нерегулярен. Из сказанного вытекает справедливость предложения G).

В нижеследующем предложении H) дается (в терминах корневой системы) условие *распадения* алгебры R в прямую сумму.

H) Будем говорить, что система Γ векторов евклидова пространства *распадается* в две подсистемы Γ_1 и Γ_2, если множество Γ распадается в сумму двух своих непустых и непересекающихся подмножеств Γ_1 и Γ_2, причем каждый вектор системы Γ_1 ортогонален каждому вектору системы Γ_2. Оказывается, что если корневая система Σ алгебры Ли R распадается в подсистемы Σ_1 и Σ_2, то алгебра R распадается в прямую сумму своих подалгебр R_1 и R_2, имеющих Σ_1 и Σ_2 корневыми системами. Наоборот, если алгебра R распадается в прямую сумму своих подалгебр R_1 и R_2, то при надлежащем выборе регулярной подалгебры S алгебры R корневая система $\Sigma \subset S$ распадается в сумму корневых систем Σ_1 и Σ_2 алгебр R_1 и R_2.

Докажем предложение H). Пусть корневая система Σ алгебры R распадается в сумму подсистем Σ_1 и Σ_2. Линейную оболочку векторов системы Σ_i обозначим через S_i, $i=1, 2$. Тогда $S=S_1+S_2$ (см. A)). Для каждого корневого вектора $\lambda \in \Sigma$ выберем собственный вектор r_λ, причем так, чтобы было $r_{-\lambda}=\overline{r}_\lambda$. Каждый элемент $a \in R$ однозначным образом записывается теперь в виде

$$a=b_1+b_2+\sum_{\lambda \in \Sigma_1} \tau^\lambda r_\lambda+\sum_{\lambda \in \Sigma_2} \tau^\lambda r_\lambda; \quad \tau^{-\lambda}=\overline{\tau}^\lambda, \quad b_1 \in S_1, \quad b_2 \in S_2.$$

Положим:

$$a_1=b_1+\sum_{\lambda\in\Sigma_1}\tau^\lambda r_\lambda,\quad a_2=b_2+\sum_{\lambda\in\Sigma_2}\tau^\lambda r_\lambda.$$

Таким образом, $a=a_1+a_2$, и векторное пространство R распадается в прямую сумму своих подпространств R_1 и R_2, причем R_i есть совокупность всех векторов вида a_i, $i=1, 2$. Заметим, что если $\alpha_1\in\Sigma_1$, $\alpha_2\in\Sigma_2$, то вектор $\alpha_1+\alpha_2$ уже не принадлежит системе Σ. Действительно, вектор $\alpha_1+\alpha_2$ не ортогонален ни одному из векторов α_1 и α_2, и потому не может входить в Σ. Из этого следует, что $[a_1, a_2]=0$ (см. § 62, (15), (16)). Таким образом, алгебра R распадается в прямую сумму своих подалгебр R_1 и R_2. Из G) следует, что S_i есть регулярная подалгебра алгебры R_i, а из определения 51 следует, что Σ_i есть корневая система алгебры R_i, $i=1, 2$.

Допустим теперь, что алгебра R распадается в прямую сумму своих подалгебр R_1 и R_2. Пусть $\Sigma_1\subset S_1$ и $\Sigma_2\subset S_2$ — корневые системы алгебр R_1 и R_2. Тогда $S=S_1+S_2$ есть регулярная подалгебра алгебры R (см. G)), а $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ есть корневая система алгебры R (см. определение 51). Из того, что R есть прямая сумма алгебр R_1 и R_2, легко следует (см. § 61, C)), что при $x_1\in R_1$, $y_1\in R_1$, $x_2\in R_2$, $y_2\in R_2$ имеем $(x_1+x_2,\ y_1+y_2)=(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)$. Таким образом, каждый вектор корневой системы Σ_1 ортогонален каждому вектору корневой системы Σ_2.

Итак, предложение H) доказано.

§ 64. Инвариантность корневой системы

Корневая система Σ компактной полупростой алгебры Ли R была определена в зависимости от случайного выбора регулярной подалгебры S (см. определение 51). В предыдущем параграфе было показано, что метрические свойства корневой системы Σ однозначно определяют алгебру R. Остался открытым вопрос, не могут ли в алгебре R существовать две неизометричные корневые системы.

В настоящем параграфе показано, что это невозможно (см. теорему 109). Таким образом, классификация компактных полупростых алгебр Ли сводится к классификации их корневых систем. Изометричность любых двух корневых систем алгебры R выводится из того, что две произвольные регулярные подалгебры алгебры R переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом g алгебры R. Теорема эта не является локальной, так как автоморфизм g может вовсе не быть близок к тождественному. Для построения автоморфизма g в рассмотрение вводится компонента единицы G группы всех автоморфизмов алгебры Ли R. Так как алгебра R естественным образом изоморфна алгебре Ли P группы G (см. теорему 102), то регулярной подалгебре S соответствует подгруппа H группы G.

Оказывается, что каждый элемент из G может быть трансформацией переведен в H (см. теорему 107; из этого уже легко следует теорема 109). На том же пути получается важная теорема Г. Вейля [45] о том, что универсальная накрывающая группы G компактна. Таким образом, существует лишь конечное число связных попарно неизоморфных компактных групп Ли, алгебра Ли которых изоморфна R.

А) Пусть R—m-мерная компактная полупростая алгебра Ли ранга n, P—ее присоединенная алгебра и G—компонента единицы группы всех автоморфизмов алгебры R. Уже отмечалось, что P есть алгебра Ли группы Ли G и что соответствие $a \to p_a$ устанавливает естественный изоморфизм между алгебрами R и P (см. теорему 102). Пусть, далее, S—некоторая регулярная подалгебра алгебры R, Q—подалгебра алгебры P, соответствующая подалгебре S, т. е. составленная из всех преобразований вида p_s, $s \in S$. Оказывается, что подалгебре Q соответствует полная подгруппа H группы G. Более подробно группа H описывается следующим образом. Пусть $\varphi(t, a)$, $a \in R$,—однопараметрическая подгруппа группы G с направляющим вектором p_a. Положим:

$$\varphi(a) = \varphi(1, a).$$

Оказывается, что φ есть гомоморфное отображение векторной группы S на замкнутую подгруппу $H = \varphi(S)$ группы G, соответствующую подалгебре Q; при этом автоморфизм $h_s = \varphi(s)$, $s \in S$, алгебры R записывается в виде

$$h_s(b) = b, \ b \in S; \quad h_s(r_\alpha) = e^{i(\alpha, s)} r_\alpha, \ \alpha \in \Sigma. \tag{1}$$

Докажем это. Непосредственно проверяется, что преобразования h_s, определяемые формулой (1), отображают действительную алгебру R в себя. Мы имеем:

$$h_{ts}(b) = b, \quad h_{ts}(r_\alpha) = e^{it(\alpha, s)} r_\alpha. \tag{2}$$

Из этой формулы видно, что h_{ts} есть однопараметрическая подгруппа группы всех линейных преобразований векторного пространства R с параметром t. Дифференцируя соотношение (2) при $t=0$, получаем (см. определение 51):

$$\left. \frac{d}{dt} h_{ts} \right|_{t=0} = p_s. \tag{3}$$

Таким образом, направляющим вектором однопараметрической подгруппы h_{ts} служит отображение p_s, и потому, действительно, $h_s \in G$ (см. § 54, F)). Гомоморфность отображения φ на S следует из коммутативности алгебры S; она видна также и из формулы (1). Если бы множество $\varphi(S) = H$ не было замкнутым, то множество $\bar{H}$ было бы подгруппой группы G, имеющей размерность, бóльшую, чем n, что невозможно, так как S есть максимальная коммутативная подалгебра алгебры R.

Ниже будет показано (см. теорему 107), что каждый элемент $f \in G$ может быть записан в виде (см. А))

$$f = ghg^{-1}; \quad g \in G, \ h \in H. \tag{4}$$

Если принять во внимание, что автоморфизмы, принадлежащие группе H, имеют обозримый вид (1), то результат этот следует рассматривать как приведение к каноническому виду h произвольного автоморфизма $f \in G$ при помощи трансформации автоморфизмом $g \in G$. В базисе s_i, r_α; $i=1, \ldots, n$, $\alpha \in \Sigma$, матрица, соответствующая преобразованию h, имеет диагональный вид (см. (1)). Из формулы (1) видно, что n собственных значений преобразования h, а следовательно, и преобразования f, имеют значение 1, об остальных же можно утверждать, что они равны единице по модулю. Автоморфизм $f \in G$ называется *регулярным*, если ровно n его собственных значений равны 1. Весь настоящий параграф посвящается доказательству теоремы 107 и получению из нее выводов. Первым и главным шагом на этом пути является нижеследующая лемма.

В) Пусть $a \in R$, $g \in G$ и U—шаровая окрестность нуля радиуса $\rho > 0$ в векторном пространстве R (см. А)). Тогда

$$g\varphi(a)g^{-1} = \varphi(g(a)), \tag{5}$$

$$g(U) = U. \tag{6}$$

Далее, существует настолько малое ρ, что φ есть гомеоморфное отображение окрестности U на окрестность единицы группы G, и тогда из

$$a \in U, \quad b \in U, \quad g\varphi(a)g^{-1} = \varphi(b) \tag{7}$$

следует

$$b = g(a) \tag{8}$$

и обратно. Наконец, для заданной подгруппы K группы G найдется настолько малое ρ, что если T есть подалгебра алгебры R, соответствующая подгруппе K, то

$$\varphi(U) \cap K = \varphi(T \cap U). \tag{9}$$

Для доказательства соотношения (5) вычислим направляющий вектор однопараметрической подгруппы $g\varphi(ta)g^{-1}$. Дифференцируя при $t=0$, получаем:

$$\frac{d}{dt} g\varphi(ta)g^{-1}\Big|_{t=0} = gp_a g^{-1} = p_{g(a)}$$

(см. § 54, (15)). Таким образом, $g\varphi(ta)g^{-1} = \varphi(tg(a))$, а при $t=1$ это дает соотношение (5). Существование настолько малого положительного числа ρ, что φ есть гомеоморфное отображение окрестности U и что для заданной подгруппы K выполнено условие (9), следует из свойств канонических координат первого рода (см. § 42, В) и теорему 62). Допустим, что φ есть гомеоморфное отображение окрестности U, и покажем, что из (7) следует (8). Из (7) в силу (5) получаем $\varphi(g(a))=\varphi(b)$, а так как $g(a)\in U$ (см. (6)) и φ взаимно однозначно на U, то $g(a)=b$.

Лемма. *Определим отображение ψ группы $G\times H$ в группу G, положив*

$$\psi(g,\ h)=ghg^{-1};\quad g\in G,\ h\in H. \tag{10}$$

Отображение ψ есть аналитическое отображение многообразия $G\times H$ в многообразие G, и так как размерность многообразия G равна m, то ранг функциональной матрицы отображения ψ нигде не превосходит m. Оказывается, что в точке $(g,\ h)\in G\times H$ ранг этот тогда и только тогда равен m, когда элемент h или, что то же самое, элемент $f=ghg^{-1}=\psi(g,\ h)$ регулярен. Оказывается, далее, что множество $\mathfrak{S}$ всех нерегулярных элементов $f\in G$, могущих быть записанными в виде $f=\psi(g,\ h)$, является образом при некотором аналитическом отображении некоторого компактного аналитического многообразия размерности $m-3$.

Доказательство. Прежде всего, соотношение $f=ghg^{-1}$ перепишем в виде

$$fg=gh. \tag{11}$$

Пусть $(g_*,\ h_*)$—фиксированный элемент группы $G\times H$ и

$$f_*g_*=g_*h_*. \tag{12}$$

Для вычисления ранга функциональной матрицы отображения ψ в точке $(g_*,\ h_*)$ определим преобразование $(g,\ h)\to(y,\ z)$ группы $G\times H$, положив

$$(g,\ h)=(g_*y,\ h_*z), \tag{13}$$

и преобразование $f\to x$ группы G, положив

$$f=f_*x. \tag{14}$$

Так как оба преобразования являются гладкими и гладко обратимыми, то преобразования эти равносильны введению новых переменных x, y, z вместо переменных f, g, h. В новых переменных уравнение (11) получает вид

$$f_*xg_*y=g_*yh_*z$$

или, что то же самое (см. (12)):

$$(f_*g_*)^{-1}f_*xg_*y=(g_*h_*)^{-1}g_*yh_*z.$$

Таким образом, мы имеем:

$$g_*^{-1}xg_*y=h_*^{-1}yh_*z. \tag{15}$$

Последнее соотношение определяет отображение $\psi'((y,\ z)\to x)$ группы $G\times H$ в группу G, переводящее $(e,\ e)$ в e, так что ранг его функциональной матрицы в точке (e, e) равен рангу функциональной матрицы отображения ψ в точке (g_*, h_*).

Вычислим ранг отображения ψ' в точке (e, e). Линеаризируя отображение ψ' в точке (e, e), мы получим линейное отображение ψ^* векторного пространства $P+Q$, касательного к группе $G\times H$ в точке (e, e), в векторное пространство P, касательное в точке e к группе G. При этом ранг функциональной матрицы отображения ψ' в точке (e, e) равен размерности пространства $\psi^*(P+Q)$. Для вычисления линейного отображения ψ^* выберем в $G\times H$ произвольную кривую $(y(t),\ z(t))$, проходящую через (e, e) при $t=0$, с направляющим вектором (p_b, p_c), где $b\in R$, $c\in S$, и найдем направляющий вектор p_a соответствующей кривой $\psi'(y(t),\ z(t))=x(t)$. В силу (15) кривая $x(t)$ определяется уравнением

$$g_*^{-1}x(t)g_*y(t)=h_*^{-1}y(t)h_*z(t).$$

Дифференцируя это соотношение по t при $t=0$, получаем:

$$g_*^{-1}p_a g_*+p_b=h_*^{-1}p_b h_*+p_c.$$

Из этого в силу соотношения (15) § 54 получаем:

$$g_*^{-1}(a)+b=h_*^{-1}(b)+c,$$

или иначе:

$$a=g_*(h_*^{-1}(b)-b+c). \tag{16}$$

Так как g_* есть автоморфизм алгебры R, а отображение $u\to p_u$ есть изоморфизм алгебры R на P, при котором S переходит в Q, то вместо отображения ψ^* алгебры $P+Q$ в P можно рассматривать отображение ω алгебры $R+S$ в R, задаваемое соотношением

$$\omega(b,\ c)=h_*^{-1}(b)-b+c; \qquad b\in R, \quad c\in S. \tag{17}$$

Из соотношений (1) и (17) видно, что размерность пространства $\omega(R+S)$ тогда и только тогда меньше m, когда для элемента h_* выполнено хоть для одного вектора $\alpha\in\Sigma$ равенство

$$h_*(r_\alpha)=r_\alpha, \tag{18}$$

т. е. когда элемент h_* нерегулярен. Таким образом, первая часть леммы доказана.

Пусть $\alpha\in\Sigma$ — фиксированный корневой вектор. Множество H_α всех элементов группы H, удовлетворяющих условию

$$h(r_\alpha)=r_\alpha, \tag{19}$$

очевидно, представляет собой подгруппу группы H. Для того чтобы элемент $h=h_s$ при s, достаточно близком к нулю, принадлежал H_α, необходимо и достаточно, чтобы было $(\alpha,\ s)=0$ (см. (1)). Таким образом, размерность группы H_α равна $n-1$. Пусть теперь G_α — совокупность всех элементов группы G, перестановочных с каждым элементом группы H_α. Очевидно, что G_α есть подгруппа группы G. Подалгебру алгебры R, соответствующую подгруппе G_α группы G, обозначим через R_α.

Из B) непосредственно следует, что элемент $a \in R$ тогда и только тогда принадлежит алгебре R_α, когда при произвольном $h \in H_\alpha$ имеем $h(a)=a$. Очевидно, что последнее соотношение выполнено для всех элементов a вида

$$a=s+\tau r_\alpha+\bar{\tau} r_{-\alpha}, \qquad s \in S, \tag{20}$$

и только для этих элементов. Таким образом, размерность группы G_α равна $n+2$, а размерность пространства G/G_α левых смежных классов группы G по подгруппе G_α равна $m-(n+2)$. Если g_1 и g_2 суть два элемента из G, принадлежащие одному левому смежному классу $\hat{g} \in G/G_\alpha$, а $h \in H_\alpha$, то очевидно, что $g_1 h g_1^{-1}=g_2 h g_2^{-1}$. Таким образом, можно положить

$$\psi(\hat{g}, h)=\psi(g_1, h); \quad g_1 \in \hat{g}, \quad h \in N_\alpha.$$

Таким образом, отображение ψ оказывается определенным на прямом произведении $(G/G_\alpha)\times H_\alpha$, имеющем размерность $m-(n+2)+$ $+n-1=m-3$. Так как для всякого нерегулярного элемента $h \in H$ найдется корневой вектор α, для которого $h \in H_\alpha$, то множество $\mathfrak{S}$, определенное в формулировке леммы, есть аналитический образ многообразия, составленного из всех многообразий $(G/G_\alpha)\times H_\alpha$, $\alpha \in \Sigma$, размерность которого равна $m-3$.

Итак, лемма доказана.

Нижеследующие предложения C), D), E), используемые при доказательстве теоремы 107, являются элементарными фактами теории гладких многообразий (см. § 45).

C) Пусть ψ—гладкое отображение l-мерного многообразия L в m-мерное многообразие M, $l<m$, и F—бикомпактное подмножество многообразия L. Тогда $\psi(F)$ нигде не плотно в M.

Докажем предложение C). Пусть $a \in F$, $b=\psi(a)$, V_b—некоторая координатная окрестность точки b в M и U_a—такая координатная окрестность точки a в L, что $\psi(U_a)\subset V_b$. Выберем такие окрестности U_{a1} и U_{a2} точки a в L, что $\bar{U}_{a1}\subset U_a$, $\bar{U}_{a2}\subset U_{a1}$ и что множество $\bar{U}_{a1}$ бикомпактно. Области U_{a2}, $a \in F$, покрывают множество F. Из этого покрытия можно выбрать конечное, и потому нам достаточно доказать, что при произвольном выборе точки a из F множество $\psi(\bar{U}_{a2})$ нигде не плотно в V_b. Так как область U_a есть гомеоморфный образ области l-мерного евклидова пространства E^l, то мы просто будем считать, что U_a есть область пространства E^l. При такой трактовке ψ есть гладкое отображение области U_a в евклидово пространство E^m, и нам достаточно показать, что множество $\psi(\bar{U}_{a2})$ нигде не плотно в E^m. Докажем это.

Из гладкости отображения ψ и компактности множества $\bar{U}_{a1}$ непосредственно вытекает существование такой положительной константы c, что для двух произвольных точек x и x' из $\overline{U}_{a1}$ выполнено неравенство

$$\rho(\psi(x),\ \psi(x')) \leqslant c\rho(x,\ x'). \tag{21}$$

Выберем некоторый ε-кубильяж евклидова пространства E^l, т. е. разобьем E^l правильным образом на кубы со стороной длины ε. Совокупность всех замкнутых кубов выбранного кубильяжа, пересекающихся с $\overline{U}_{a2}$, обозначим через Ω. Так как множество $\overline{U}_{a2}$ бикомпактно и потому может быть включено в куб достаточно большого размера, то число кубов совокупности Ω не превосходит (при достаточно малом ε) числа $\frac{c_1}{\varepsilon^l}$, где c_1—некоторая положительная константа, не зависящая от ε. Пусть δ—расстояние между множествами $E^l \setminus U_{a1}$ и $\overline{U}_{a2}$. Предположим, что $\varepsilon < \frac{\delta}{\sqrt{l}}$; тогда каждый куб L_i совокупности Ω лежит в области U_{a1} и в силу неравенства (21) множество $\psi(L_i)$ содержится в некотором кубе M_i пространства E^m со стороной $c\varepsilon\sqrt{l}$, объем которого равен $c^m l^{m/2}\varepsilon^m$. Таким образом, все множество $\psi(\overline{U}_{a2})$ содержится в сумме кубов M_i, число которых не превосходит $\frac{c_1}{\varepsilon^l}$, а потому объем всего множества $\psi(\overline{U}_{a2})$ не превосходит числа $c_1 c^m l^{m/2}\varepsilon^{m-l}$. Так как ε произвольно мало, то из сказанного следует, что множество $\psi(\overline{U}_{a2})$ не содержит области, а будучи компактным, оно должно быть поэтому нигде не плотным в E^m.

Итак, предложение С) доказано.

D) Пусть ψ—гладкое отображение l-мерного бикомпактного многообразия L в m-мерное многообразие M, $l \leqslant m-2$, и $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,—кривая в многообразии M, концы которой не принадлежат множеству $\psi(L)$. Существует тогда кривая $x'(t)$, сколь угодно близкая в M к кривой $x(t)$, не пересекающаяся с множеством $\psi(L)$ и имеющая с кривой $x(t)$ общие концы.

Докажем предложение D). Будем называть *шаровой областью* многообразия M гладко гомеоморфный образ замкнутого m-мерного шара евклидова пространства в многообразии M. Покажем прежде всего, что любые две точки a и b, лежащие внутри произвольной шаровой области $U \subset M$ и не принадлежащие множеству $\psi(L)$, можно внутри U соединить кривой, не пересекающейся с множеством $\psi(L)$. Пусть c—некоторая внутренняя точка шаровой области U, не принадлежащая $\psi(L)$, а U'—концентрическая с U шаровая область, меньшего чем U «радиуса», содержащая внутри себя точки a, b, c. Положим $F = \psi^{-1}(U')$ и пусть L'—такая окрестность множества F в L, что $\psi(L') \subset U$. Так как «центральная проекция» из точки c множества $\psi(L')$ на поверхность шаровой области U' является гладким отображением многообразия L', то (см. С)) почти все «лучи», идущие из c, не пересекаются с множеством $\psi(F)$ внутри шаровой области U'. Пусть V и W—связные окрестности точек a и b, не пересекающиеся с множеством $\psi(F)$ и лежащие в шаровой области U'. Существует тогда непересекающийся с $\psi(F)$ отрезок ca', кончающийся в точке $a' \in V$, и непересекающийся с $\psi(F)$ отрезок cb', кончающийся в точке $b' \in W$. Соединяя точки a' и b' с точка́ми a и b соответственно в окрестностях V и W, а точку c с точками a' и b'—отрезками, получаем искомую кривую.

Ввиду компактности кривой $x(t)$ существует настолько малое положительное число $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ (здесь n—натуральное число), что для всякой точки t_0, $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$, найдется шаровая окрестность U_{t_0} точки $x(t_0)$, содержащая все точки $x(t)$ при $|t-t_0| \leqslant \varepsilon$. Пусть $0 \leqslant j < n$. Точка $x(2j\varepsilon)$ лежит одновременно в шарах $U_{(2j-1)\varepsilon}$ и $U_{(2j+1)\varepsilon}$. Выберем точку $x'(2j\varepsilon)$ так, чтобы она лежала внутри обоих шаров $U_{(2j-1)\varepsilon}$ и $U_{(2j+1)\varepsilon}$ и не принадлежала $\psi(L)$. Кроме того, положим $x'(0)=x(0)$, $x'(1)=x(1)$. Соединяя в шаре $U_{(2j+1)\varepsilon}$ точки $x'(2j\varepsilon)$ и $x'((2j+2)\varepsilon)$ кривой $x'(t)$, $2j\varepsilon \leqslant t \leqslant (2j+2)\varepsilon$, не пересекающейся с множеством $\psi(L)$ и проходящей в шаре $U_{(2j+1)\varepsilon}$, мы получим кривую $x'(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющую точки $x'(0)=x(0)$ и $x'(1)=x(1)$. Кривая $x'(t)$ близка к $x(t)$, если шары U_{t_0} выбраны достаточно малыми.

E) Пусть ψ—гладкое отображение замкнутого многообразия N в m-мерное многообразие M и $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,—кривая в многообразии M. Допустим, что в каждой точке $y \in N$, удовлетворяющей условию $\psi(y)=x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, ранг функциональной матрицы отображения ψ равен m, и пусть $y_0 \in N$—заданная точка, удовлетворяющая условию $\psi(y_0)=x(0)$. Существует тогда кривая $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в многообразии N, начинающаяся в y_0 и накрывающая кривую $x(t)$, т. е. удовлетворяющая условиям $y(0)=y_0$; $\psi(y(t)) = x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Докажем это. Пусть $a=x(t_0)$, $\psi(b)=a$, $x^1, \ldots, x^m$—локальные координаты многообразия M с началом в a, определенные в окрестности точки a; $y^1, \ldots, y^n$—локальные координаты с началом в b, определенные в окрестности точки $b \in N$, и

$$x^i = \psi^i(y^1, \ldots, y^n), \quad i=1, \ldots, m,$$

—координатная запись отображения ψ в окрестности точки b. Так как ранг матрицы $\left\|\frac{\partial \psi^i}{\partial y^j}\right\|$, $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$, при $y^j=0$ равен m, то среди столбцов этой матрицы имеется m линейно независимых. Будем для определенности считать, что первые m столбцов этой матрицы линейно независимы, и введем в окрестности точки b многообразия N новые координаты $z^1, \ldots, z^n$, положив:

$$z^i = \psi^i(y^1, \ldots, y^n), \quad i=1, \ldots, m; \quad z^j = y^j, \quad j=m+1, \ldots, n.$$

В новых координатах отображение ψ в некоторой достаточно малой окрестности точки b запишется в виде

$$x^i = z^i, \quad i=1, \ldots, m,$$

причем соотношения эти задают отображение ψ при всех значениях координат $z^1, \ldots, z^n$, удовлетворяющих условию $|z^j|<\delta$, $j=1, \ldots, n$, где δ—достаточно малое положительное число. Пусть $\varepsilon(b, t_0)$—настолько малое положительное число, что при $|t-t_0|\leqslant\varepsilon(b, t_0)$ имеем $|x^i(t)|<\delta$, где $x^i(t)$ суть координаты точки $x(t)$. Положим $z^i(t)=x^i(t)$, $i=1, \ldots, m$; $z^j=0$, $j=m+1, \ldots, n$, при $|t-t_0|\leqslant\varepsilon(b, t_0)$, и будем считать, что $z^j(t)$, $j=1, \ldots, n$, суть координаты точки $z(t)$ при $|t-t_0|\leqslant\varepsilon(b, t_0)$. Таким образом, построена кривая $z(t)$, $|t-t_0|\leqslant\varepsilon(b, t_0)$, накрывающая кривую $x(t)$, $|t-t_0|\leqslant\varepsilon(b, t_0)$, и удовлетворяющая условию $y(t_0)=b$. Так как множество пар (b, t_0), удовлетворяющих условию $\psi(b)=x(t_0)$, бикомпактно, то существует настолько малое положительное число ε, уже не зависящее от b, t_0, что для любой пары (b, t_0), удовлетворяющей условию $\psi(b)=x(t_0)$, найдется кривая $z(t)$, $|t-t_0|<\varepsilon$, накрывающая кривую $x(t)$, $|t-t_0|<\varepsilon$, и удовлетворяющая условию $z(t_0)=b$. Разбив отрезок $[0, 1]$ на куски длины $\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon$ и строя кривую $z(t)$ по кускам, начиная от точки y_0, мы получаем искомую накрывающую кривую $y(t)$.

Теорема 107. *Каждый элемент f группы G может быть представлен в форме* (см. А))

$$f=ghg^{-1}; \quad g\in G, \quad h\in H.$$

Доказательство. Утверждение теоремы заключается в том, что отображение ψ отображает группу $G\times H$ на всю группу G, т. е. что $\psi(G\times H)=G$ (см. лемму). Так как множество $\psi(G\times H)$ замкнуто в G (ибо G компактна, см. теорему 102), то достаточно доказать, что оно всюду плотно в G, а для этого достаточно доказать, что

$$G\diagdown\mathfrak{S}\subset\psi(G\times H), \tag{22}$$

так как в силу леммы и предложения С) множество $\mathfrak{S}$ нигде не плотно в G. Докажем включение (22). Пусть h_*—некоторый регулярный элемент из H и f—произвольный элемент из $G\diagdown\mathfrak{S}$. Так как элементы h_* и f не принадлежат множеству $\mathfrak{S}$, то в силу предложения D) и леммы существует путь $f(t)$ в $G\diagdown\mathfrak{S}$, ведущий из h_* в f. В силу предложения Е) существует путь $(g(t), h(t))$ в группе $G\times H$, начинающийся в точке (e, h_*) и накрывающий путь $f(t)$, т. е. удовлетворяющий условию

$$\psi(g(t), h(t))=f(t).$$

При $t=1$ получаем:

$$\psi(g, h)=f.$$

Таким образом, теорема 107 доказана.

Теорема 108. *Каждый элемент $a \in R$ может быть записан в виде* (см. A))

$$a = g(b), \quad g \in G, \quad b \in S. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть U—настолько малая шаровая окрестность нуля в R, что для нее выполнены условия предложения B) в применении к подгруппе $K = H$. Для заданного вектора a найдется настолько малое положительное число ε, что $\varepsilon a \in U$. В силу теоремы 107 элемент $\varphi(\varepsilon a)$ (см. A)) может быть записан в виде

$$\varphi(\varepsilon a) = ghg^{-1}; \quad g \in G, \quad h \in H.$$

Так как $h = g^{-1}\varphi(\varepsilon a)g \in \varphi(U)$, то мы имеем $h = \varphi(\varepsilon b)$, $b \in S$. Таким образом,

$$\varphi(\varepsilon a) = g\varphi(\varepsilon b)g^{-1},$$

и в силу B) получаем $\varepsilon a = g(\varepsilon b)$, откуда, сокращая на ε, получаем (23).

Таким образом, теорема 108 доказана.

Теорема 109. *Для двух произвольных регулярных подалгебр S и S' алгебры R найдется такой автоморфизм $g \in G$ алгебры R* (см. A)), *что*

$$S' = g(S). \tag{24}$$

Из этого следует, что соответствующие регулярным подалгебрам S и S' корневые системы Σ и Σ' также связаны соотношением

$$\Sigma' = g(\Sigma). \tag{25}$$

Таким образом, все метрические свойства корневой системы алгебры R являются инвариантами этой алгебры.

Доказательство. Пусть c и c'—регулярные элементы алгебры R, порождающие регулярные подалгебры S и S'. В силу теоремы 108 мы имеем $c' = g(c'')$, $g \in G$, $c'' \in S$. Так как g есть автоморфизм, то элемент c'' регулярен. Пусть S''—регулярная подалгебра, соответствующая элементу c''. По определению алгебра S'' состоит из всех элементов, перестановочных с c'', и потому содержит алгебру S, а так как алгебры S и S'' имеют одинаковую размерность, то они совпадают. С другой стороны, из соотношения $c' = g(c'')$ следует $S' = g(S'')$. Таким образом, равенство (24) доказано.

Докажем соотношение (25). Пусть $\alpha \in \Sigma$. Тогда для любого $s \in S$ имеем:

$$[s, r_\alpha] = i(\alpha, s) r_\alpha.$$

Применяя автоморфизм g, получаем:

$$[s', g(r_\alpha)] = i(g(\alpha), s') g(r_\alpha)$$

для любого $s' \in S'$. Таким образом, $g(\alpha) \in \Sigma'$ (см. определение 51), т. е. $g(\Sigma) \subset \Sigma'$. Точно так же доказывается, что $g^{-1}(\Sigma') \subset \Sigma$.

Итак, теорема 109 доказана.

Теорема 110. *Универсальная накрывающая* (см. определение 46) $\widetilde{G}$ *группы* G *компактна* (см. A)).

Доказательство. Для доказательства теоремы 110 достаточно показать, что фундаментальная группа многообразия G конечна (см. § 50, E)).

Пусть U—настолько малая шаровая окрестность нуля в R, что для нее выполнены условия предложения B) для $K=H$. Пусть $f=f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,—замкнутый путь в G, начинающийся в $\varphi(U)$ и не пересекающийся с множеством $\mathfrak{S}$ нерегулярных элементов, и пусть $(g, h)=(g(t), h(t))$—путь, накрывающий путь f при отображении ψ (см. лемму). Покажем, что если путь h замкнут, то путь f гомотопен нулю в G. Так как $f(0) \in \varphi(U)$, то $h(0)=\varphi(s_*)$, $s_* \in S \cap U$. Так как φ есть накрытие группы H векторной группой S, то в S существует путь $s=s(t)$, накрывающий путь h при отображении φ и начинающийся в s_* (см. § 50, B), E)). Покажем, что из замкнутости пути h следует замкнутость пути s. Допустим, что $s(1)-s(0) \neq 0$; тогда существует такой корневой вектор $\alpha \in \Sigma$, что $(\alpha, s(1)-s(0)) \neq 0$. Так как $\varphi(s(1))=\varphi(s(0))$, то $(\alpha, s(1)-s(0))=2k\pi$, причем $k \neq 0$. Таким образом, при непрерывном изменении параметра t число $(\alpha, s(t))$ должно принимать значение, кратное 2π, и потому путь $h(t)$ должен проходить через нерегулярный элемент, что противоречит предположению. Замкнутый путь s гомотопен нулю в S. Пусть $s_\tau=s_\tau(t)$—путь, осуществляющий эту гомотопию. Тогда путь $f_\tau(t)=g(t)\varphi(s_\tau(t))(g(t))^{-1}$ осуществляет гомотопию пути $f_0=f$ в путь $f_1(t)=g(t)\varphi(s_*)(g(t))^{-1}$. Путь $f(t)$ замкнут; поэтому $g(0)\varphi(s_*)(g(0))^{-1}=g(1)\varphi(s_*)(g(1))^{-1}$. Из этого соотношения следует, что элемент $\varphi(s_*)$ перестановочен с элементом $(g(0))^{-1}g(1)$, а в силу B) из этой перестановочности следует, что элемент $(g(0))^{-1}g(1)$ перестановочен и с каждым элементом однопараметрической подгруппы $\varphi(ts_*)$. Таким образом, мы имеем:

$$g(0)\varphi((1-\tau)s_*)(g(0))^{-1}=g(1)\varphi((1-\tau)s_*)(g(1))^{-1}=\chi(\tau). \tag{26}$$

Положим:

$$f'_\tau(t)=g(t)\varphi((1-\tau)s_*)(g(t))^{-1}(\chi(\tau))^{-1}\chi(0). \tag{27}$$

При изменении параметра τ от нуля до единицы путь f'_τ осуществляет гомотопию нулю пути $f'_0=f_1$. Таким образом, установлено, что из замкнутости пути h следует гомотопность нулю пути f.

При вычислении фундаментальной группы примем за начало путей регулярную точку $h_* \in H \cap \varphi(U)$. В силу предложения D) и локальной односвязности группы G мы можем рассматривать лишь пути, не пересекающиеся с $\mathfrak{S}$. Пусть $f_j=f_j(t)$, $j=1, 2,$—два замкнутых пути из G, начинающиеся в точке h_* и не пересекающиеся с $\mathfrak{S}$. В силу Е) существует путь $(g_j, h_j)=(g_j(t), h_j(t))$, начинающийся в точке (e, h_*) и накрывающий путь f_j при отображении ψ. Покажем, что если пути h_1 и h_2 имеют общий конец $h_1(1)=$ $=h_2(1)$, то пути f_1 и f_2 гомотопны между собой в G. Для пути $f_1^{-1}f_2$, начинающегося в $\varphi(U)$, накрывающим служит путь $(g_1^{-1}g_2, h_1^{-1}h_2)$. Так как путь $h_1^{-1}h_2$, по предположению, замкнут, ибо $h_1(1)=h_2(1)$, то в силу ранее доказанного путь $f_1^{-1}f_2$ гомотопен нулю, а это означает, что пути f_1 и f_2 гомотопны между собой.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что в группе H существует лишь конечное число элементов h, удовлетворяющих (хотя бы при одном $g \in G$) условию

$$\psi(g, h)=h_*.$$

Докажем это. Для всякого элемента h группы H выполнены условия $h(r_\alpha)=\varepsilon_\alpha r_\alpha$, $\alpha \in \Sigma$, и элемент h однозначно определяется соответствием $\alpha \to \varepsilon_\alpha$. Так как числа ε_α являются собственными значениями преобразования h, а при условии $\psi(g, h)=h_*$ также собственными значениями и преобразования h_*, то самый набор чисел ε_α однозначно определен элементом h_*; различных же соответствий $\alpha \to \varepsilon_\alpha$ при данном наборе чисел ε_α может быть лишь конечное число.

Итак, теорема 110 доказана.

Из теоремы 110 непосредственно следует, что существует лишь конечное число связных групп Ли с алгеброй R. Действительно, каждая группа Ли с алгеброй R записывается в виде $\widetilde{G}/N$, где N есть дискретный центральный нормальный делитель группы $\widetilde{G}$. Так как группа $\widetilde{G}$ компактна и не имеет непрерывного центра, то центр ее Z конечен. Так как группа G не имеет центра, то она изоморфна группе $\widetilde{G}/Z$, так что центр Z изоморфен фундаментальной группе многообразия G. В нижеследующем примере решается вопрос о структуре всех связных групп Ли с заданной компактной алгеброй, имеющей центр.

Пример 106. Пусть R^*—компактная алгебра Ли. В силу теоремы 100 она распадается в прямую сумму своего центра C и полупростой компактной подалгебры R. Размерность векторного пространства C обозначим через p. Пусть G—компонента единицы группы всех автоморфизмов алгебры R, $\widetilde{G}$—ее универсальная накрывающая и Z—центр этой накрывающей. В силу теоремы 110 группа Z конечна, ее порядок обозначим через r. Дадим теперь описание всех связных групп Ли с алгеброй Ли R^*. Пусть K—аддитивная группа действительных чисел, редуцированных по модулю 1, и X—ее циклическая подгруппа порядка r. Группа X имеет своей образующей число $\frac{1}{r}$. Возьмем $q \leqslant p$ экземпляров группы K и обозначим их через $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_q$, а подгруппы, соответствующие подгруппе X, обозначим через $X_1, \ldots, X_q$. Составим теперь прямое произведение F групп $\widetilde{G}$, $K_1, \ldots, K_q$ и аддитивной векторной группы B размерности $p-q$. В группе F имеется конечный центральный нормальный делитель $Y = X_1X_2 \ldots X_qZ$. Оказывается, что каждая связная группа Ли с алгеброй R изоморфна группе F/U, где U есть произвольная подгруппа группы Y. Таким образом, с точностью до изоморфизма, имеется лишь конечное число связных групп Ли с алгеброй R^*.

Докажем высказанное утверждение. Будем рассматривать аддитивную векторную группу C как группу Ли. Тогда $C \times \widetilde{G}$ есть связная односвязная группа Ли с алгеброй R^*. Центром группы $C \times \widetilde{G}$ служит $C \times Z$. Таким образом, произвольная группа Ли с алгеброй R^* имеет вид $(C \times \widetilde{G})/N$, где N—дискретная подгруппа группы $C \times Z$. Пересечение подгруппы $C \times e$, $e \in \widetilde{G}$, с подгруппами N и NZ соответственно обозначим через $N' \times e$ и $N'' \times e$. Мы имеем $N' \subset N''$, и порядок группы N''/N' есть делитель числа r. Таким образом, существует такой базис $e_1, \ldots, e_q$ группы N'', что базис группы N' состоит из элементов $\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_q e_q$, где λ_i—делители числа r (см. пример 33 и § 6, Е)). Группу $(C \times \widetilde{G})/(N' \times e)$ естественным образом можно отождествить с группой F. При этом подгруппа $N/(N' \times e)$ отображается на некоторую подгруппу U группы Y. Таким образом,

$$(C \times \widetilde{G})/N \approx F/U,$$

и утверждение доказано.

Пример 107. Теорема 110 позволяет глубже изучить структуру бикомпактных топологических групп конечной размерности. В качестве примера ее применения приведем следующий результат.

Для получения произвольной бикомпактной связной конечномерной топологической группы G следует взять некоторую односвязную компактную полупростую группу Ли L' и некоторую связную конечномерную бикомпактную коммутативную топологическую группу H, составить их прямое произведение $L' \times H$ и затем профакторизовать его по конечному центральному нормальному делителю, у которого лишь единица принадлежит подгруппе H.

Предложение это показывает, что вся теоретико-множественная сложность группы G «сосредоточена» в коммутативной группе, именно в центре группы G.

Докажем это. Пусть G—произвольная связная бикомпактная топологическая группа конечной размерности, а L и N—локальная группа Ли и нульмерный нормальный делитель группы G, в прямое произведение которых разлагается некоторая окрестность единицы группы G (см. теорему 69). Составляя все конечные произведения элементов, входящих в L, мы получим гомоморфное отображение ψ некоторой группы Ли $\hat{L}$ в группу G (см. пример 82), причем локальная группа L есть окрестность единицы в $\hat{L}$, а множество $\psi(\hat{L})$ всюду плотно в G. Группу $\hat{L}$ будем считать односвязной (достаточно перейти к универсальной накрывающей). Так как группа G/N бикомпактна, то группа $\hat{L}$ локально изоморфна компактной группе Ли. Таким образом, $\hat{L}$ распадается в прямое произведение своих подгрупп L_0 и L', где L_0—векторная группа, а L'—односвязная компактная полупростая группа Ли. Положим $H=\overline{\psi(L_0)}$; тогда H есть связный центральный нормальный делитель группы G. Каждому элементу (x, y) прямого произведения $L'\times H$ поставим в соответствие элемент $\varphi(x, y)=\psi(x)y$ группы G. Из того, что множество $\psi(\hat{L})$ всюду плотно в G, следует, что $\varphi(L'\times H)=G$. Таким образом, φ есть гомоморфное отображение группы $L'\times H$ на группу G. Так как на сомножителе H отображение φ является тождественным, а центр группы L' конечен, то ядро гомоморфизма φ конечно и пересекается с подгруппой H только в единице.

§ 65. Классические алгебры Ли и их корневые системы

В настоящем параграфе дается описание алгебр Ли *компактных классических групп Ли* параллельно с описанием самих классических групп. Далее производится вычисление корневых систем этих алгебр Ли.

Классическими принято называть четыре бесконечные серии $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $n\geqslant 1$; $\mathfrak{D}_n$, $n\geqslant 2$, линейных групп или, что то же самое, групп матриц. Через $\mathfrak{A}_n$ обозначается группа всех унитарных унимодулярных матриц порядка $n+1$. Через $\mathfrak{B}_n$ обозначается группа всех ортогональных матриц порядка $2n+1$. Через $\mathfrak{C}_n$ обозначается группа всех симплектических матриц или, что то же самое, всех унитарных матриц порядка $2n$, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную кососимметрическую билинейную форму. Через $\mathfrak{D}_n$ обозначается группа всех ортогональных матриц порядка $2n$. Все эти группы, кроме $\mathfrak{D}_2$, просты, имеют ранг n и за конечным числом исключений попарно локально неизоморфны.

A) Пусть E^r—евклидово векторное пространство размерности r, т. е. такое действительное векторное пространство размерности r, в котором определено обычное скалярное произведение (u, v). Обозначим через $\mathfrak{H}_r$ совокупность всех линейных преобразований пространства E^r, сохраняющих скалярное произведение, т. е. совокупность всех линейных преобразований x пространства E^r, удовлетворяющих условию

$$(x(u), x(v))=(u, v). \tag{1}$$

Очевидно, что $\mathfrak{H}_r$ есть компактная группа Ли. Оказывается, что алгебра Ли H_r группы $\mathfrak{H}_r$ состоит из всех линейных отображений a пространства E^r в себя, удовлетворяющих условию

$$(a(u),\ v)+(u,\ a(v))=0. \tag{2}$$

Если ввести в пространстве E^r ортонормальный базис, то каждому элементу $x\in\mathfrak{H}_r$ будет соответствовать ортогональная матрица $\|x_{jk}\|$ порядка r, а каждой ортогональной матрице $\|x_{jk}\|$ порядка r будет соответствовать элемент x группы $\mathfrak{H}_r$. В этом смысле мы будем считать, что группа $\mathfrak{H}_r$ состоит из всех ортогональных матриц порядка r: $x=\|x_{jk}\|$. Точно так же будем считать, что алгебра H_r составлена из всех кососимметрических матриц $a=\|a_{jk}\|$ порядка r, т. е. матриц, удовлетворяющих условию

$$a^*+a=0 \tag{3}$$

или, что то же самое, условию

$$a_{jk}+a_{kj}=0; \quad j,\ k=1,\ \ldots,\ r. \tag{4}$$

Комплексное расширение $[H_r]$ (см. § 58, С)) алгебры H_r состоит из всех кососимметрических комплексных матриц порядка r, т. е. из всех комплексных матриц $a=\|a_{jk}\|$, удовлетворяющих условию (3) или условию (4). Из дальнейшего будет видно, что серия алгебр H_r естественно распадается на две серии: $r=3$, 5, 7, ... и $r=4$, 6, 8, ... Ввиду этого вводятся обозначения

$$\mathfrak{B}_n=\mathfrak{H}_{2n+1},\quad B_n=H_{2n+1},\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$
$$\mathfrak{D}_n=\mathfrak{H}_{2n}\ ,\quad D_n=H_{2n},\quad n=2,\ 3,\ \ldots.$$

Из всех утверждений предложения А) доказательства требует лишь тот факт, что алгебра H_r состоит из всех преобразований, удовлетворяющих условию (2). Докажем это. Пусть x_t—произвольная однопараметрическая подгруппа группы всех линейных преобразований пространства E^r и a—ее направляющее отображение (см. § 54, В)). Если однопараметрическая подгруппа x_t проходит в $\mathfrak{H}_r$, то мы имеем:

$$(x_t(u),\ x_t(v))=(u,\ v).$$

Дифференцируя это соотношение по t при $t=0$, получаем (2). Допустим, напротив, что a удовлетворяет условию (2); тогда (в силу предложения В) § 54) мы имеем:

$$\frac{d}{dt}(x_t(u),\ x_t(v))=(ax_t(u),\ x_t(v))+(x_t(u),\ ax_t(v))=0,$$

и потому $(x_t(u),\ x_t(v))=(u,\ v)$. Таким образом, доказано, что алгебра H_r состоит из всех преобразований, удовлетворяющих условию (2).

В) Пусть U^{n+1} — *унитарное векторное пространство* размерности $n+1$, т. е. комплексное векторное пространство размерности $n+1$, в котором определено *унитарное скалярное произведение* (u, v), отличающееся от обычного тем, что $(v, u)=\overline{(u, v)}$. Обозначим через $\mathfrak{A}_n$ группу всех линейных преобразований пространства U^{n+1}, сохраняющих унитарное скалярное произведение и имеющих детерминант, равный $+1$, т. е. совокупность всех линейных преобразований x пространства U^{n+1}, удовлетворяющих двум условиям:

$$(x(u),\ x(v))=(u,\ v), \tag{5}$$

$$\det x=1. \tag{6}$$

Очевидно, что $\mathfrak{A}_n$ есть компактная группа Ли. Оказывается, что алгебра Ли A_n группы $\mathfrak{A}_n$ состоит из всех линейных отображений a пространства U^{n+1}, удовлетворяющих двум условиям:

$$(a(u),\ v)+(u,\ a(v))=0, \tag{7}$$

$$\operatorname{Sp} a=0, \tag{8}$$

где $\operatorname{Sp} a$ есть след преобразования a (см. § 61). Если в пространстве U^{n+1} выбрать ортонормальный базис, то каждому элементу x группы $\mathfrak{A}_n$ будет соответствовать *унитарная унимодулярная матрица* $\|x_{jk}\|$ порядка $n+1$, и наоборот, каждой унитарной унимодулярной матрице $\|x_{jk}\|$ порядка $n+1$ будет соответствовать элемент $x \in \mathfrak{A}_n$. В этом смысле мы будем считать, что группа $\mathfrak{A}_n$ состоит из всех унитарных унимодулярных матриц порядка $n+1$. В этом же смысле мы будем считать, что алгебра A_n составлена из всех комплексных матриц $a=\|a_{jk}\|$ порядка $n+1$, удовлетворяющих двум условиям:

$$\bar{a}^*+a=0, \tag{9}$$

$$\operatorname{Sp} a=0, \tag{10}$$

или, что то же самое, двум условиям:

$$\bar{a}_{kj}+a_{jk}=0, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{jj}=0. \tag{12}$$

Элементы алгебры A_n записаны в виде комплексных матриц; тем не менее, алгебру A_n следует рассматривать как действительную алгебру Ли, ибо она есть алгебра Ли обычной компактной группы Ли, в которой можно ввести действительные параметры. Умножение элементов алгебры A_n на действительные числа есть обычное умножение комплексных матриц на действительные числа, сложение элементов алгебры A_n есть обычное сложение комплексных матриц, коммутирование же определяется формулой (1)

§ 54. Оказывается, что комплексное расширение $[A_n]$ (см. § 58, C)) алгебры A_n можно считать состоящим из всех комплексных матриц c порядка $n+1$, удовлетворяющих лишь одному условию

$$\operatorname{Sp}(c)=0, \tag{13}$$

причем комплексная сопряженность в $[A_n]$, как в комплексном расширении алгебры A_n, определяется соответствием

$$c \to -\bar{c}^*. \tag{14}$$

Докажем прежде всего, что алгебра A_n состоит из всех преобразований a, удовлетворяющих условиям (7) и (8). Пусть $\mathfrak{L}_{n+1}$ — группа всех линейных преобразований комплексного векторного пространства U^{n+1}, рассматриваемая как действительная группа Ли. Пусть, далее, $x(t)$ — однопараметрическая подгруппа группы $\mathfrak{L}_{n+1}$ и a — ее направляющее отображение. Алгебра Ли L_{n+1} группы $\mathfrak{L}_{n+1}$, очевидно, состоит из всех линейных отображений пространства U^{n+1} в себя. Тот факт, что однопараметрическая подгруппа x_t тогда и только тогда состоит из преобразований x, удовлетворяющих условию (5), когда a удовлетворяет условию (7), доказывается точно так же, как аналогичное утверждение в предложении A). Пусть $x_t = \|x_{jk}(t)\|$ — однопараметрическая подгруппа группы $\mathfrak{L}^1_{n+1}$, составленной из всех преобразований $x \in \mathfrak{L}_{n+1}$, удовлетворяющих условию (6), а L^1_{n+1} — подалгебра алгебры L_{n+1}, составленная из всех отображений a, удовлетворяющих условию (8). Покажем, что подалгебра L^1_{n+1} соответствует подгруппе $\mathfrak{L}^1_{n+1}$; этим доказательство того, что алгебра A_n состоит из всех преобразований a, удовлетворяющих двум условиям (7) и (8), будет завершено. Положим $a = \|a_{jk}\|$. Непосредственно проверяется, что

$$\frac{d}{dt} \det \|x_{jk}(t)\| \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{jj}.$$

Таким образом, если x_t проходит в $\mathfrak{L}^1_{n+1}$, то $\operatorname{Sp}(a)=0$, но так как размерность алгебры L^1_{n+1} на две единицы меньше размерности алгебры L_{n+1}, точно так же как и размерность группы $\mathfrak{L}^1_{n+1}$ на две единицы меньше размерности группы $\mathfrak{L}_{n+1}$, то из сказанного вытекает, что подгруппе $\mathfrak{L}^1_{n+1}$ соответствует подалгебра L^1_{n+1}.

Покажем теперь, что комплексное расширение $[A_n]$ алгебры A_n можно считать совпадающим с комплексной алгеброй L^1_{n+1}, причем переход к комплексно сопряженному элементу в алгебре $[A_n]$ определяется соответствием (14), а не соответствием $c \to \bar{c}$, как это имеет место в комплексной алгебре L^1_{n+1}. В силу предложения C) § 58 каждый элемент $c \in [A_n]$ записывается в виде формальной суммы

$$c = a + bi, \quad a \in A_n, \quad b \in A_n, \tag{15}$$

причем элемент d, комплексно сопряженный с c, определяется как формальная сумма

$$d=a-bi. \tag{16}$$

Если указанные в формуле (15) операции умножения на i и сложения считать обычными операциями над комплексными матрицами a и b, то полученная матрица c принадлежит алгебре L^1_{n+1}. Покажем, что полученное таким образом отображение алгебры $[A_n]$ в алгебру L^1_{n+1} взаимно однозначно и происходит на всю алгебру L^1_{n+1}. Пусть $c \in L^1_{n+1}$; положим

$$a=\frac{c-\bar{c}^*}{2}; \quad b=\frac{c+\bar{c}^*}{2i}; \tag{17}$$

тогда очевидно, что выполнено соотношение (15), причем обе матрицы a, b удовлетворяют условиям (9), (10). С другой стороны, если выполнено соотношение (15), то матрицы a и b алгебры A_n определяются формулами (17). Далее, подставляя в (16) выражения для a и из (17), мы получим:

$$d=-\bar{c}^*$$

Таким образом, предложение В) полностью доказано.

Для удобства проведения некоторых вычислений матрицу четного порядка $2n$ разобьем на матрицы второго порядка и будем мыслить ее себе как матрицу порядка n, элементами которой являются матрицы второго порядка. Именно пусть $x=\|y_{jk}\|$; $j, k=1, \ldots, 2n$,—квадратная матрица четного порядка $2n$. Положим:

$$x_{pq}=\left\|\begin{matrix} y_{2p-1,\,2q-1} & y_{2p-1,\,2q} \\ y_{2p,\,2q-1} & y_{2p,\,2q}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} x^{11}_{pq} & x^{12}_{pq} \\ x^{21}_{pq} & x^{22}_{pq}\end{matrix}\right\|.$$

Тогда мы будем иметь:

$$x=\|x_{pq}\|; \quad p, q=1, \ldots, n. \tag{18}$$

В соответствии с этими обозначениями компоненты вектора u векторного пространства размерности $2n$ можно записать в виде

$$u=\{u^1, \ldots, u^n\}, \quad \text{где} \quad u^p=\{u^p_1, u^p_2\}. \tag{19}$$

В этих обозначениях линейное преобразование, соответствующее матрице x, записывается в координатной форме в виде

$$v^p_j=\sum_{q,\,k} x^{jk}_{pq} u^q_k, \tag{20}$$

а билинейная форма $x(u, v)$, соответствующая матрице x,—в виде

$$x(u, v)=\sum_{j,\,k,\,p,\,q} x^{jk}_{pq} u^p_j v^q_k \tag{21}$$

Наконец, произведение двух матриц $x=\|x_{pq}\|$ и $x'=\|x'_{pq}\|$ поряд ка $2n$, записанных по способу (18), имеет вид

$$xx'=\|z_{pq}\|, \quad \text{где} \quad z_{pq}=\sum_{\alpha=1}^{n} x_{p\alpha}x'_{\alpha q},$$

причем произведение $x_{p\alpha}x'_{\alpha q}$ есть обычное матричное произведение двух матриц второго порядка.

С) Пусть U^{2n}—унитарное векторное пространство размерности $2n$, в котором зафиксирован некоторый ортонормированный базис. Зададим в этом базисе билинейную форму $f(u, v)$ по способу (21) при помощи матрицы

$$\|f_{pq}\|, \ p, \ q=1, \ldots, n; \ f_{pq}=\delta_{pq}\sigma, \ \text{где} \ \sigma=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{22}$$

а δ_{pq} есть число, равное 1 при $p=q$ и нулю в противном случае Обозначим через $\mathfrak{K}_n$ совокупность всех линейных преобразований x пространства U^{2n}, сохраняющих билинейную форму $f(u, v)$, т. е. удовлетворяющих условию

$$f(x(u), x(v))=f(u, v). \tag{23}$$

Положим $\mathfrak{C}_n=\mathfrak{K}_n \cap \mathfrak{A}_{2n-1}$ (см. B)). Очевидно, что $\mathfrak{C}_n$ есть компактная группа Ли. Оказывается, что алгебра Ли K_n группы Ли $\mathfrak{K}_n$ состоит из всех линейных отображений a пространства U^{2n} в себя, удовлетворяющих условию

$$f(a(u), v)+f(u, a(v))=0. \tag{24}$$

Если матрицу a записать по способу (18): $a=\|a_{pq}\|$; $p, q=1, \ldots, n$, то условие (24) приобретает вид

$$a^*_{qp}=\sigma a_{pq}\sigma \quad \text{или} \quad a_{qp}=\sigma a^*_{pq}\sigma. \tag{25}$$

Для матрицы a_{pp} второго порядка условие (25) равносильно условию

$$\mathrm{Sp}\,(a_{pp})=0, \tag{26}$$

между тем как матрица a_{qp} при $q<p$ определяется матрицей a_{pq}, а матрицы a_{pq}, $p<q$, произвольны. Из (26) следует, что $\mathrm{Sp}\,(a)=0$. Таким образом, алгебра Ли C_n группы $\mathfrak{C}_n$ состоит из всех отображений a пространства U^{2n} в себя, удовлетворяющих условиям (25) и

$$\bar{a}^*+a=0 \tag{27}$$

(см. (9); заметим, что условие (10) следует из (25)). Оказывается, что комплексное расширение $[C_n]$ алгебры C_n можно считать совпадающим с алгеброй K_n, причем переход к комплексно сопряженному элементу в алгебре $[C_n]$ дается соответствием

$$c \to -\bar{c}^*. \tag{28}$$

Докажем предложение C). Тот факт, что алгебра K_n состоит из всех преобразований a, удовлетворяющих условию (24), доказывается точно так же, как соответствующий пункт предложения A). В матричной форме соотношение (24) получает вид

$$fa + a^*f = 0 \tag{29}$$

или в силу (22)

$$\sigma a_{pq} + a^*_{qp}\sigma = 0. \tag{30}$$

Так как $\sigma^{-1} = -\sigma$, то из (30) следует (25). Для $p=q$ соотношение (25) дает $a^{11}_{pp} = -a^{22}_{pp}$, т. е. (26), в то время как a^{12}_{pp} и a^{21}_{pp} остаются произвольными.

Каждый элемент $c \in [C_n]$ записывается в виде формальной суммы

$$c = a + bi; \quad a \in C_n, \quad b \in C_n. \tag{31}$$

Если, так же как при доказательстве предложения B), считать, что формальные операции формулы (31) имеют обычный смысл, то из $a \in K_n$, $b \in K_n$ следует $c \in K_n$. Если, наоборот, $c \in K_n$, то, полагая, как при доказательстве предложения B),

$$a = \frac{c - \bar{c}^*}{2}, \quad b = \frac{c + \bar{c}^*}{2i},$$

получим (31). Таким образом, $[C_n] = K_n$. Формула (28) доказывается так же, как в B).

Т е о р е м а 111. *Все алгебры A_n, B_n, C_n, D_n, кроме D_1, являются компактными полупростыми алгебрами Ли ранга n, так что в каждой из них можно выбрать n-мерную регулярную подалгебру S^n. Для описания корневой системы $\Sigma(A_n)$ алгебры A_n будем считать, что n-мерное евклидово векторное пространство S^n содержится в $(n+1)$-мерном евклидовом векторном пространстве E^{n+1}. В пространстве E^{n+1} можно выбрать такой ортогональный базис $e_1, \ldots, e_{n+1}$, состоящий из векторов одной и той же длины, что корневая система $\Sigma(A_n)$ описывается формулой*

$$\Sigma(A_n) = \{e_j - e_k, \ j \neq k; \ j, k = 1, \ldots, n+1\}. \tag{32}$$

Для алгебр B_n, C_n, D_n в каждом из пространств S^n можно выбрать такой ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$, состоящий из векторов одной и той же длины, что соответствующие корневые системы описываются формулами:

$$\Sigma(B_n) = \{\pm e_j, \ j = 1, \ldots, n; \ \pm e_j \pm e_k, \ j < k; \ j, k = 1, \ldots, n\}, \tag{33}$$

$$\Sigma(C_n) = \{\pm 2e_j, \ j = 1, \ldots, n; \ \pm e_j \pm e_k, \ j < k; \ j, k = 1, \ldots, n\}, \tag{34}$$

$$\Sigma(D_n) = \{\pm e_j \pm e_k, \ j < k; \ j, k = 1, \ldots, n\}. \tag{35}$$

Заметим, что для алгебры A_n пространство S^n в пространстве E^{n+1} при выбранном базисе выделяется уравнением

$$s^1+s^2+\ldots+s^{n+1}=0. \tag{36}$$

Для доказательства теоремы 111 докажем предварительно общее предложение D).

D) Пусть R—компактная алгебра Ли, S—некоторая коммутативная подалгебра алгебры R и $\Sigma'=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$—конечная система чисто мнимых ненулевых попарно различных линейных форм, заданных на векторном пространстве S. Пусть, далее, выполнены условия: a) Для всякого вектора $s\neq 0$ из S найдется такая линейная форма φ_j, что $\varphi_j(s)\neq 0$. b) Каждой линейной форме φ_j поставлен в соответствие такой ненулевой вектор r_j комплексного расширения $[R]$ алгебры R, называемый *собственным вектором* формы φ_j, что для любого $s\in S$ имеем $[s, r_j]=\varphi_j(s)r_j$. c) Комплексная линейная оболочка векторного пространства S и всех векторов r_j, $j=1, \ldots, k$, совпадает с $[R]$. Оказывается, что при этих условиях алгебра R полупроста, S есть ее регулярная подалгебра, и, ставя в соответствие каждой линейной форме φ_j вектор α_j, определяемый условием $i(\alpha_j, s)=\varphi_j(s)$, $s\in S$, мы получим корневую систему $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ алгебры R.

Докажем предложение D). Выберем прежде всего в алгебре S такой элемент c, чтобы все числа $\varphi_j(c)$, $j=1, \ldots, k$, были попарно различны и отличны от нуля. Покажем, что

$$\text{из } [c, a]=0, \quad a\in R, \quad \text{следует} \quad a\in S. \tag{37}$$

В силу условия c) мы имеем:

$$a=b+\sum_{j=1}^{k}\tau_j r_j, \quad b\in[S]. \tag{38}$$

Возведем линейное преобразование p_c в степень m, $m=1, 2, \ldots, k$, и применим его к вектору a. Мы получим в силу b):

$$0=(p_c)^m(a)=\sum_{j=1}^{k}(\varphi_j(c))^m\tau_j r_j, \quad m=1, \ldots, k. \tag{39}$$

Так как все числа $\varphi_j(c)$, $j=1, \ldots, k$, различны между собой и отличны от нуля, то из соотношений (39) следует, что $\tau_j r_j=0$, $j=1, \ldots, k$, и потому $a=b\in[S]\cap R=S$.

Покажем теперь, что центр алгебры R содержит лишь нуль; этим самым будет показано, что алгебра R полупроста (см. теоремы 100, 101). Допустим, что $a\neq 0$ есть центральный элемент алгебры R. Из доказанного (см. (37)) следует, что $a\in S$. В силу a) существует линейная форма φ_j, для которой $\varphi_j(a)\neq 0$, и мы имеем $[a, r_j]=\varphi_j(a)r_j\neq 0$, что противоречит предположению о центральности элемента a.

Докажем теперь, что S есть регулярная подалгебра алгебры R. Пусть S'—какая-либо регулярная подалгебра алгебры R. В силу теоремы 108 элемент c может быть записан в виде $c=g(c')$, где $c'\in S'$, а g есть автоморфизм алгебры R. Таким образом, найдена регулярная подалгебра $S''=q(S')$ алгебры R, содержащая элемент c. Так как алгебра S'' коммутативна, то каждый элемент ее перестановочен с c, а в силу установленного выше свойства элемента c (см. (37)) мы имеем $S''\subset S$. Так как регулярная подалгебра S'' есть максимальная коммутативная подалгебра, то из последнего следует равенство $S''=S$.

Из определения 51 непосредственно следует, что совокупность всех векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ составляет корневую систему алгебры R.

Итак, предложение D) доказано.

Доказательство теоремы 111 будет заключаться теперь в непосредственном указании для каждой из алгебр A_n, B_n, C_n, D_n коммутативной подалгебры S^n и системы линейных форм, удовлетворяющих условиям предложения D).

Доказательство теоремы 111. A_n) Пусть $s^1, \ldots$ $\ldots, s^{n+1}$—произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию

$$s^1+\ldots+s^{n+1}=0. \tag{40}$$

Системе чисел $s^1, \ldots, s^{n+1}$ поставим в соответствие матрицу $s=\|s_{jk}\|$, $j, k=1, \ldots, n+1$, положив

$$s_{jk}=is^j\delta_{jk} \tag{41}$$

(суммирование по j не производится). Матрица s есть чисто мнимая диагональная матрица порядка $n+1$; она удовлетворяет условиям $\bar{s}^*+s=0$ и $\mathrm{Sp}\,(s)=0$ (см. (40)) и потому принадлежит алгебре A_n (см. (9), (10)). Совокупность всех матриц s образует коммутативную подалгебру S^n алгебры A_n. Займемся построением системы Σ' линейных форм и собственных матриц алгебры A_n (см. D)). Рассмотрим матрицу $r=r(p, q)=\|r_{jk}\|$, определяемую целыми числами $p\neq q$; $p, q=1, \ldots, n+1$, элементы которой задаются формулой

$$r_{jk}=\delta_{jp}\delta_{kq}, \quad j, k=1, \ldots, n+1; \tag{42}$$

единственным ненулевым элементом матрицы $r(p, q)$ является $r_{pq}=1$. Матрица r принадлежит алгебре $[A_n]$, так как она удовлетворяет условию $\mathrm{Sp}\,(r)=0$. Вычислим коммутатор $t=\|t_{jk}\|=$ $=[s, r]=sr-rs$. Мы имеем

$$t_{jk}=\sum_\alpha is^j\delta_{j\alpha}\delta_{\alpha p}\delta_{kq}-\sum_\alpha i\delta_{jp}\delta_{\alpha q}s^\alpha\delta_{\alpha k}=is^j\delta_{jp}\delta_{kq}-is^q\delta_{jp}\delta_{qk}=i(s^p-s^q)r_{jk}.$$

Таким образом, получаем:

$$[s, r(p, q)]=i(s^p-s^q)r(p, q). \tag{43}$$

Совокупность всех линейных форм $i(s^p-s^q)$, $p\neq q$, определенных на S^n, обозначим через Σ'. Непосредственно проверяется, что для подалгебры $S=S^n$ и системы Σ' выполнены все условия предложения D).

Вычислим теперь скалярный квадрат (s, s) вектора $s\in S^n$. В силу предложения C) § 61 мы имеем: $(s, s)=-\mathrm{Sp}\,(p_sp_s)$. Так как число $i(s^p-s^q)$ есть собственное значение линейного преобразования p_s, и числами $i(s^p-s^q)$ исчерпываются все отличные от нуля собственные значения линейного преобразования p_s, то мы имеем:

$$(s, s)=-\mathrm{Sp}(p_sp_s)=-\sum_{p,\,q=1}^{n+1} i^2(s^p-s^q)^2=(2n+2)\sum_{p=1}^{n+1}(s^p)^2-$$
$$-4\sum_{p<q} s^ps^q=(2n+4)\sum_{p=1}^{n+1}(s^p)^2-2\Big(\sum_{p=1}^{n+1}s^p\Big)^2=(2n+4)\sum_{p=1}^{n+1}(s^p)^2$$

(см. (40)). Будем теперь считать, что числа $s^1, \ldots, s^{n+1}$ суть координаты вектора s в базисе $f_1, \ldots, f_{n+1}$ евклидова пространства E^{n+1}, в котором скалярный квадрат задается формулой

$$(s, s)=(2n+4)\sum_{p=1}^{n+1}(s^p)^2.$$

Тогда евклидово пространство S^n выделяется в евклидовом пространстве E^{n+1} условием (40). Базис $f_1, \ldots, f_{n+1}$ ортогонален и его векторы имеют одну и ту же длину $\sqrt{2n+4}$. Вектор

$$\alpha(p, q)=\frac{1}{2n+4}f^p-\frac{1}{2n+4}f^q,$$

очевидно, удовлетворяет условию $(\alpha(p, q), s)=s^p-s^q$. Полагая $e_p=\frac{1}{2n+4}f_p$, мы получаем базис $e_1, \ldots, e_{n+1}$ пространства E^{n+1}, указанный в формулировке теоремы (см. D)).

C_n) Матрицы алгебры $[C_n]$ будем записывать по способу (18) через квадратные матрицы второго порядка. Положим:

$$\tau=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}. \tag{44}$$

Каждой последовательности $s^1, \ldots, s^n$ действительных чисел поставим в соответствие матрицу $s=\|s_{jk}\|$, $j, k=1, \ldots, n$, порядка $2n$ (см. (18)), положив

$$s_{jk}=is^j\delta_{jk}\tau \tag{45}$$

(суммирование по j не производится). Совокупность всех таких матриц s составляет коммутативную подалгебру S^n алгебры C_n. Займемся построением системы Σ' линейных форм и собственных матриц алгебры C_n (см. D)). Для этого прежде всего вычислим оба собственных вектора матрицы τ, записав их в виде одностолбцовых матриц высоты два. Положим:

$$\rho(\varepsilon)=\left\| \begin{matrix} 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{matrix} \right\|, \quad \varepsilon=\pm 1.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\tau\rho(\varepsilon)=\varepsilon\rho(\varepsilon). \tag{46}$$

Таким образом, $\rho(1)$ и $\rho(-1)$ суть собственные векторы матрицы τ. Из этого соотношения путем транспонирования получаем:

$$\rho^*(\varepsilon)\tau=\varepsilon\rho^*(\varepsilon). \tag{47}$$

Матричное произведение $\rho(\delta)\rho^*(\varepsilon)$; $\varepsilon=\pm 1$, $\delta=\pm 1$, есть матрица второго порядка, зависящая от двух чисел δ, ε. Из (46) и (47) следует, что

$$s^p\tau\rho(\delta)\rho^*(\varepsilon)-s^q\rho(\delta)\rho^*(\varepsilon)\tau=(\delta s^p-\varepsilon s^q)\rho(\delta)\rho^*(\varepsilon). \tag{48}$$

Матрица $\rho(\delta)\rho^*(-\delta)$, как это непосредственно видно, удовлетворяет условию

$$\mathrm{Sp}\,(\rho(\delta)\rho^*(-\delta))=0. \tag{49}$$

Определим теперь матрицу $r=r(p, q, \delta, \varepsilon)=\|r_{jk}\|$, зависящую от чисел $p, q, \delta, \varepsilon$; $p\leqslant q$, $p, q=1, \ldots, n$; $\varepsilon=\pm 1$, $\delta=\pm 1$, причем $\delta=-\varepsilon$ при $p=q$. Положим (см. (18)):

$$r_{jk}=\delta_{jp}\delta_{kq}\rho(\delta)\rho^*(\varepsilon)+\delta_{jq}\delta_{kp}\sigma\rho(\varepsilon)\rho^*(\delta)\sigma, \quad p<q, \tag{50}$$

$$r_{jk}=\delta_{jp}\delta_{kp}\rho(\delta)\rho^*(-\delta), \qquad p=q \tag{51}$$

(см. (22)). Матрица $r(p, q, \varepsilon, \delta)$ при $p<q$ содержит лишь два отличных от нуля элемента $r_{pq}=\rho(\delta)\rho^*(\varepsilon)$, $r_{qp}=\sigma\rho(\varepsilon)\rho^*(\delta)\sigma$ и принадлежит алгебре $[C_n]$. Матрица $r(p, p, \delta, -\delta)$ содержит лишь один отличный от нуля элемент $r_{pp}=\rho(\delta)\rho^*(-\delta)$ и также принадлежит алгебре $[C_n]$ (см. (49)). Из формул (48), (50), (51), (45) непосредственно следует:

$$[s, r(p, q, \delta, \varepsilon)]=i(\delta s^p-\varepsilon s^q)r(p, q, \delta, \varepsilon), \quad p<q, \tag{52}$$

$$[s, r(p, p, \delta, -\delta)]=2i\delta s^p r(p, p, \delta, -\delta). \tag{53}$$

Непосредственно проверяется, что система Σ' линейных форм $i(\delta s^p-\varepsilon s^q)$, $p<q$; $2i\delta s^p$ и их собственных матриц $r(p, q, \delta, \varepsilon)$, $p<q$; $r(p, p, \delta, -\delta)$ удовлетворяет условиям предложения D). Так же как для алгебры A_n, легко подсчитывается, что

$$(s, s)=\nu\sum_{p=1}^{n}(s^p)^2, \tag{54}$$

где ν есть число, зависящее от n. Из этого в силу D) следует, что формула (34) верна.

D_n) Произвольную матрицу $a\in[D_n]$ запишем по способу (18), положив $a=\|a_{jk}\|$; $j, k=1, \ldots, n$, где a_{jk} есть матрица порядка два. Условие (3) принадлежности матрицы a к алгебре $[D_n]$ выражается в виде

$$a_{kj}^*+a_{jk}=0. \tag{55}$$

Оно показывает, что матрицы a_{jk}, $j<k$, могут быть выбраны произвольно, а матрицы a_{jk}, $j>k$, через них определяются; матрицы же a_{jj} должны быть кососимметрическими. Исходя из действительных чисел $s^1, \ldots, s^n$, зададим матрицу $s=\|s_{jk}\|$, $j, k=1, \ldots, n$, порядка $2n$ по способу (18), положив

$$s_{jk}=s^j\delta_{jk}\sigma \tag{56}$$

(см. (22), суммирование по j не производится). Совокупность всех таких матриц s составляет n-мерную коммутативную подалгебру S^n алгебры D_n. Перейдем к построению системы Σ' линейных форм и соответствующих им собственных матриц алгебры D_n (см. D)). Найдем оба собственных вектора матрицы σ в виде одностолбцовых матриц высоты два. Положим:

$$\pi(\varepsilon)=\left\|\begin{matrix}1\\ i\varepsilon\end{matrix}\right\|, \quad \varepsilon=\pm 1. \tag{57}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\sigma\pi(\varepsilon)=i\varepsilon\pi(\varepsilon). \tag{58}$$

Таким образом, $\pi(1)$ и $\pi(-1)$ суть собственные векторы матрицы σ. Из соотношения (58) путем транспонирования получаем:

$$\pi^*(\varepsilon)\sigma=-i\varepsilon\pi^*(\varepsilon). \tag{59}$$

Матричное произведение $\pi(\delta)\pi^*(\varepsilon)$, $\delta=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$, есть матрица второго порядка, зависящая от двух чисел δ, ε. Из соотношений (57) и (58) следует

$$s^p\sigma\pi(\delta)\pi^*(\varepsilon)-s^q\pi(\delta)\pi^*(\varepsilon)\sigma=i(\delta s^p+\varepsilon s^q)\pi(\delta)\pi^*(\varepsilon). \tag{60}$$

Определим теперь матрицу $r=r(p, q, \delta, \varepsilon)=\|r_{jk}\|$, зависящую от чисел $p, q, \delta, \varepsilon$; $p<q$; $p, q=1, \ldots, n$; $\delta=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$, по способу (18), положив

$$r_{jk}=\delta_{jp}\delta_{kq}\pi(\delta)\pi^*(\varepsilon)-\delta_{jq}\delta_{kp}\pi(\varepsilon)\pi^*(\delta), \quad p<q. \tag{61}$$

В матрице r отличны от нуля лишь два элемента $r_{pq}=\pi(\delta)\pi^*(\varepsilon)$ и $r_{pq}=-\pi(\varepsilon)\pi^*(\delta)$, так что матрица r удовлетворяет условию (55) и потому принадлежит алгебре $[D_n]$. Непосредственно проверяется (см. (56), (60), (61)), что

$$[s, r(p, q, \delta, \varepsilon)]=i(\delta s^p+\varepsilon s^q)r(p, q, \delta, \varepsilon), \quad p<q. \tag{62}$$

Таким образом, система Σ' линейных форм $i(\delta s^p+\varepsilon s^q)$, $p<q$; $p, q=1, \ldots, n$; $\delta=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$, и их собственных матриц $r(p, q, \delta, \varepsilon)$, $p<q$, удовлетворяет условиям предложения D). Так же как для алгебры A_n, легко подсчитывается, что

$$(s, s)=\mu\sum_{p=1}^{n}(s^p)^2,$$

где μ есть число, зависящее от n. Из этого в силу D) следует, что формула (35) верна.

B_n) Каждую кососимметрическую матрицу b порядка $2n+1$ можно получить из кососимметрической матрицы a порядка $2n$ путем окаймления последней одним столбцом справа и одной строкой снизу. В силу кососимметричности окаймляющий столбец имеет на нижнем месте нуль и потому может быть задан столбцом u высоты $2n$; окаймляющая же строка равна $-u^*$. Мы будем писать $b=\{a, u\}$. При окаймлении нулевым столбцом и нулевой строкой за матрицей будем сохранять ее прежнее обозначение, т. е. будем обозначать матрицу $\{a, 0\}$ через a. В силу этого соглашения можно считать, что алгебра D_n есть подалгебра алгебры B_n. Таким образом, подалгебра S^n, построенная выше (см. D_n)), становится коммутативной подалгеброй алгебры B_n, а собственные векторы $r(p, q, \delta, \varepsilon)$, $p<q$, алгебры $[D_n]$—собственными векторами алгебры $[B_n]$. Так как линейная оболочка алгебры S^n и всех собственных векторов $r(p, q, \delta, \varepsilon)$ совпадает с алгеброй $[D_n]$, а не с алгеброй $[B_n]$, то построенная для алгебры D_n система линейных форм Σ' требует при переходе к алгебре B_n пополнения. Вектор $u=u(p, \delta)$, определяющий пополнение, зададим по способу (19) в зависимости от целого числа $p=1, \ldots, n$, положив

$$u^j=\delta_{jp}\pi(\delta) \tag{63}$$

(см. (57)). Окаймляя вектором $u(p, \delta)$ нулевую матрицу, мы получим матрицу $r(p, \delta)=\{0, u(p, \delta)\}$ из алгебры $[B_n]$. Непосредственно проверяется (см. (56), (63), (58)), что

$$[s, r(p, \delta)]=i\delta s^p r(p, \delta). \tag{64}$$

Таким образом, система Σ' линейных форм для алгебры B_n состоит из всех линейных форм $i(\varepsilon s^p+\delta s^q)$, $p<q$, и всех линейных форм $i\delta s^p$; $p, q=1, \ldots, n$; $\delta=\pm 1$, $\varepsilon=\pm 1$. Из этого в силу D) следует правильность формулы (33).

Итак, теорема 111 доказана.

E) Размерности алгебр A_n, B_n, C_n, D_n равны соответственно числам n^2+2n, $2n^2+n$, $2n^2+n$, $2n^2-n$.

Так как размерность каждой из указанных алгебр на n больше, чем число векторов ее корневой системы (см. § 63, E)), то предложение E) непосредственно вытекает из теоремы 111.

Теорема 112. *Все алгебры A_n, B_n, C_n, $n\geqslant1$, и D_n, $n\geqslant3$, просты. Алгебры A_1, B_1 и C_1 изоморфны между собой, алгебры B_2 и C_2 изоморфны между собой, алгебры A_3 и D_3 также изоморфны между собой. В остальном все указанные алгебры попарно неизоморфны. Таким образом, полное перечисление всех попарно неизоморфных классических алгебр Ли дается следующими сериями:*

$$A_n,\ n\geqslant1;\ B_n,\ n\geqslant2;\ C_n,\ n\geqslant3;\ D_n,\ n\geqslant4.$$

Отметим, что D_2 распадается в прямую сумму двух алгебр, изоморфных A_1.

Доказательство. Так как ранг алгебры есть ее инвариант, то алгебры A_n, B_n, C_n, D_n с различными индексами не могут быть изоморфными. Для дальнейшего различения алгебр используем их размерности. Изоморфизм алгебр A_n и B_n или алгебр A_n и C_n возможен лишь при условии $n^2+2n=2n^2+n$, т. е. только при $n=1$ (см. Е)). Изоморфизм алгебр A_n и D_n возможен лишь при условии $n^2+2n=2n^2-n$, т. е. только при $n=3$. Изоморфизм между B_n и D_n или между C_n и D_n невозможен, так как из условия $2n^2+n=2n^2-n$ следует $n=0$.

Алгебры B_n и C_n при $n>2$ неизоморфны. В самом деле, в корневой системе каждой из этих алгебр имеются векторы только двух различных длин, причем более коротких векторов в корневой системе $\Sigma(B_n)$ имеется $2n$ штук, а в корневой системе $\Sigma(C_n)$ их имеется $2n^2-2n$, т. е. больше чем $2n$, если $n>2$. Таким образом, корневые системы алгебр B_n и C_n при $n>2$ неизометричны между собой, и потому эти алгебры неизоморфны (см. теорему 109).

Корневые системы $\Sigma(A_1)$, $\Sigma(B_1)$, $\Sigma(C_1)$ состоят каждая из двух взаимно противоположных векторов, и потому подобны. Таким образом, алгебры A_1, B_1 и C_1 изоморфны между собой (см. § 63, В)) и теорему 106). Все эти алгебры изоморфны алгебре примера 105.

Корневые системы $\Sigma(B_2)$ и $\Sigma(C_2)$ имеют вид

$$\Sigma(B_2)=\{\pm e_1;\ \pm e_2;\ \pm e_1\pm e_2\},$$
$$\Sigma(C_2)=\{\pm 2e'_1;\ \pm 2e'_2;\ \pm e'_1\pm e'_2\}.$$

Линейное преобразование плоскости векторов e_1, e_2 в плоскость векторов e'_1, e'_2, определяемое соответствиями

$$e_1\to e'_1+e'_2,$$
$$e_2\to e'_1-e'_2,$$

является преобразованием подобия и переводит $\Sigma(B_2)$ в $\Sigma(C_2)$. Таким образом, алгебры B_2 и C_2 изоморфны между собой.

Корневые системы $\Sigma(A_3)$ и $\Sigma(D_3)$ имеют вид

$$\Sigma(A_3)=\{e'_j-e'_k,\ j\neq k;\ j,\ k=1,\ \ldots,\ 4\},$$
$$\Sigma(D_3)=\{\pm e_j\pm e_k,\ j<k=2,\ 3\}.$$

Линейное преобразование пространства векторов e_j в пространство векторов e'_j, определяемое соответствиями

$$e_1 \to \frac{e'_1+e'_2-e'_3-e'_4}{2},$$

$$e_2 \to \frac{e'_1-e'_2+e'_3-e'_4}{2},$$

$$e_3 \to \frac{e'_1-e'_2-e'_3+e'_4}{2},$$

является изометрическим и переводит $\Sigma(D_3)$ в $\Sigma(A_3)$. Таким образом, алгебры A_3 и D_3 изоморфны между собой.

Итак, вопрос об изоморфизмах между рассматриваемыми алгебрами полностью решен. Перейдем к доказательству простоты этих алгебр на основе предложения H) § 63.

Предположим, что система $\Sigma(A_n)$ распадается на две подсистемы Σ_1 и Σ_2. Пусть для определенности $e_1-e_2 \in \Sigma_1$, а e_j-e_k — вектор из Σ_2. Из ортогональности векторов e_1-e_2 и e_j-e_k следует, что числа j и k оба отличны от 1 и 2. Но тогда вектор $e_1-e_j \in \Sigma(A_n)$ не может принадлежать ни одной из систем Σ_1, Σ_2, так как он не ортогонален ни одному из векторов e_1-e_2, e_j-e_k. Таким образом, система $\Sigma(A_n)$ не распадается. Каждая из систем $\Sigma(B_{n+1})$, $\Sigma(C_{n+1})$, $\Sigma(D_{n+1})$ содержит в качестве подсистемы систему $\Sigma(A_n)$ (см. формулы (32)—(35)). Поэтому, если одна из этих систем распадается на подсистемы Σ_1 и Σ_2, то $\Sigma(A_n)$ должна содержаться целиком в одной из этих подсистем, скажем, в Σ_1. В этом случае система Σ_2 должна состоять из векторов, ортогональных к $\Sigma(A_n) \subset \Sigma_1$, т. е. из векторов вида $\lambda(e_1+\ldots+e_{n+1})$. Этому условию удовлетворяет лишь система $\Sigma(D_2)$. Таким образом, алгебры A_n, B_n, C_n; $n \geqslant 1$, и D_n, $n \geqslant 3$, просты. Распадение системы $\Sigma(D_2)$ на две подсистемы, подобные системе $\Sigma(A_1)$, очевидно.

Итак, теорема 112 доказана.

В примерах 91 и 108 вычислены фундаментальные группы и центры классических компактных групп Ли. Сводя в одно предложение все имеющиеся в них результаты, мы получаем:

F) Связную односвязную группу Ли с полупростой компактной алгеброй Ли R обозначим через $G(R)$. Тогда для классических алгебр Ли мы имеем:

a) центр группы $G(A_n)$ есть циклическая группа порядка $n+1$;

b) центр группы $G(B_n)$ есть циклическая группа второго порядка;

c) центр группы $G(C_n)$ есть циклическая группа второго порядка;

d) центр группы $G(D_n)$, $n \geqslant 2$, есть группа четвертого порядка, причем при четном n она есть прямая сумма двух циклических групп второго порядка, а при нечетном n она есть циклическая группа.

Доказательство этого предложения содержится в примерах 91 и 108.

Стоит отметить, что из предложения F) невозможно извлечь доказательство неизоморфности алгебр B_n и C_n, так как центры групп $G(B_n)$ и $G(C_n)$ изоморфны. Таким образом, для доказательства неизоморфности алгебр B_n и C_n использование теоремы 109 необходимо; доказательство же этой теоремы существенно использует содержание § 64. Эта существенная часть классификационной теоремы часто опускается.

Пример 108. Докажем, что группы $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{C}_n$ связны, односвязны, центр группы $\mathfrak{A}_n$ есть циклическая группа порядка $n+1$ с образующей $\left(\cos\frac{2\pi}{n+1}+i\sin\frac{2\pi}{n+1}\right)e$, где e—единичная матрица, а центр группы $\mathfrak{C}_n$ состоит из двух элементов e и $-e$.

Покажем прежде всего, что группы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ совпадают между собой и изоморфны группе кватернионов, по модулю равных единице (см. § 26, A)). При $n=1$ условие (23) превращается в условие (6), и, следовательно, $\mathfrak{C}_1=\mathfrak{A}_1$. Пусть

$$z=\begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22}\end{Vmatrix}$$

—комплексная матрица второго порядка; условие принадлежности ее к группе $\mathfrak{A}_1$ имеет вид

$$\left.\begin{array}{ll} z_{11}\bar{z}_{11}+z_{12}\bar{z}_{12}=1, & z_{21}\bar{z}_{21}+z_{22}\bar{z}_{22}=1, \\ z_{11}\bar{z}_{21}+z_{12}\bar{z}_{22}=0, & z_{11}z_{22}-z_{21}z_{12}=1.\end{array}\right\} \qquad (65)$$

Полагая $x=z_{11}$, $y=z_{12}$, мы из условия (65) получаем $z_{21}=-\bar{y}$, $z_{22}=\bar{x}$. Таким образом, матрица z, принадлежащая г уппе $\mathfrak{A}_1$, имеет вид

$$z=\begin{Vmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x}\end{Vmatrix}, \quad x\bar{x}+y\bar{y}=1.$$

Матрице z поставим в соответствие кватернион $\varphi(z)=x+yj$. Отображение φ есть гомеоморфное отображение группы $\mathfrak{A}_1$ на группу кватернионов, по модулю равных единице. Непосредственно проверяется, что φ есть изоморфизм.

Группу $\mathfrak{A}_n$ будем трактовать как группу линейных преобразований унитарного пространства U^{n+1}. Так как эрмитова форма (x, x) остается инвариантной при преобразованиях группы $\mathfrak{A}_n$, то множество S^{2n+1} всех точек, удовлетворяющих условию $(x, x)=1$, остается инвариантным при преобразованиях группы $\mathfrak{A}_n$. Если рассматривать комплексное векторное пространство U^{n+1} как действительное пространство удвоенной размерности, то S^{2n+1} в нем представляет собой единичную сферу размерности

$2n+1$. Точно так же, если трактовать группу $\mathfrak{C}_n$ как группу линейных преобразований унитарного пространства U^{2n}, то она оставляет инвариантной сферу S^{4n-1} размерности $4n-1$. Покажем, что $\mathfrak{C}_n$ есть транзитивная группа преобразований сферы S^{4n-1} со стабильной подгруппой $\mathfrak{C}'_{n-1}$, изоморфной группе $\mathfrak{C}_{n-1}$. Пусть p—первый базисный вектор пространства U^{2n} того базиса пространства U^{2n}, в котором форма f имеет вид (22). Непосредственно проверяется, что преобразование u, оставляющее неподвижным вектор p, оставляет неподвижным и второй вектор базиса. Таким образом, стабильная подгруппа, оставляющая на месте элемент p, изоморфна группе $\mathfrak{C}_{n-1}$. Пусть M—множество тех точек из S^{4n-1}, в которые точка p переводится преобразованиями группы $\mathfrak{C}_n$. Группа $\mathfrak{C}_n$ есть транзитивная группа преобразований многообразия M, размерность которого равна разности размерностей групп $\mathfrak{C}_n$ и $\mathfrak{C}_{n-1}$, т. е. равна $4n-1$. Так как M есть подмногообразие сферы S^{4n-1} размерности $4n-1$, то $M=S^{4n-1}$. Таким образом, $\mathfrak{C}_n$ есть транзитивная группа преобразований сферы S^{4n-1}, и потому многообразие $\mathfrak{C}_n/\mathfrak{C}'_{n-1}$ гомеоморфно сфере S^{4n-1}. Точно так же доказывается, что многообразие $\mathfrak{A}_n/\mathfrak{A}'_{n-1}$ гомеоморфно сфере S^{2n+1}. Из доказанного непосредственно следует, что если группы $\mathfrak{A}_{n-1}$ и $\mathfrak{C}_{n-1}$ связны, то связны также группы $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{C}_n$. Так как $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ связны, то по индукции мы заключаем, что все группы $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{C}_n$ связны. Далее, из результатов примера 90 следует, что фундаментальные группы многообразий $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{C}_n$ изоморфны фундаментальной группе трехмерной сферы, т. е. тривиальны.

Так как линейные группы $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{C}_n$ транзитивны на сферах, то они неприводимы, и потому центр каждой из них может состоять только из скалярных матриц (см. § 31, E)), принадлежащих каждой из групп. Из этого непосредственно следует, что центры групп $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{C}_n$ имеют описанный выше вид.

§ 66. Классификация простых компактных алгебр Ли

В этом параграфе показано, что каждая простая компактная алгебра Ли изоморфна либо одной из алгебр

$$A_n,\ n\geqslant 1;\ B_n,\ n\geqslant 2;\ C_n,\ n\geqslant 3;\ D_n,\ n\geqslant 4$$

четырех бесконечных серий, построенных в предыдущем параграфе, либо одной из пяти *особых алгебр*

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8,$$

существование которых в этой книге, однако, не доказано. Результатами предыдущих параграфов классификация простых алгебр Ли сводится к классификации их корневых систем. В настоящем параграфе проводится классификация корневых систем. Корневая система векторов по самому своему определению является корневой системой некоторой алгебры Ли. Здесь прежде всего устанавливаются некоторые характерные свойства корневых систем, и системы векторов, обладающие этими свойствами, называются *σ-системами*. В действительности каждая нераспадающаяся σ-система подобна корневой системе некоторой простой компактной алгебры Ли, но это не доказано здесь в отношении пяти особых σ-систем, соответствующих пяти особым алгебрам, так как алгебры эти не сконструированы. Классификация σ-систем проводится обычным методом (см., например, книгу Н. Джекобсона [9]).

A) Пусть Γ—система отличных от нуля векторов евклидова пространства, обладающая тем свойством, что каковы бы ни были два вектора λ и μ системы Γ, число $\frac{2(\lambda,\mu)}{(\lambda,\lambda)}$ является целым. Обозначим через φ угол между двумя неколлинеарными векторами α и β системы Γ и будем для определенности считать, что $(\alpha, \alpha) \leqslant (\beta, \beta)$. Оказывается, что тогда

$$\cos\varphi = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{r}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad r = 0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$\text{при} \quad r \neq 0 \quad \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = r, \tag{2}$$

$$\text{при} \quad r \neq 0 \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \varepsilon r; \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \varepsilon, \tag{3}$$

$$\text{при} \quad r = 0 \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0, \tag{4}$$

а длины векторов α и β при $r=0$ не связаны между собой.

Докажем предложение A). Положим:

$$p = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}; \quad q = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}. \tag{5}$$

Тогда мы имеем:

$$\cos^2\varphi = \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = \frac{pq}{4}. \tag{6}$$

Так как в силу предположения $(\alpha, \alpha) \leqslant (\beta, \beta)$ имеем $|p| \geqslant |q|$, то для чисел p и q возможны лишь следующие пары значений:

$$\left.\begin{array}{llll} p=0, & q=0; & p=\pm 1, & q=\pm 1; \\ p=\pm 2, & q=\pm 1; & p=\pm 3, & q=\pm 1. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Случай $pq=4$ исключается ввиду неколлинеарности векторов α и β. Далее, предполагая, что $(\alpha, \beta) \neq 0$ и деля друг на друга соотношения (5), получаем:

$$\frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{p}{q}. \tag{8}$$

Правильность предложения A) следует из формул (5)—(8).

B) Система Γ отличных от нуля векторов евклидова пространства называется *σ-системой*, если для нее выполнены нижеследующие условия: а) при $\lambda \in \Gamma$ вектор $r\lambda$ с целым r тогда и только тогда принадлежит системе Γ, когда $r = \pm 1$; b) пусть λ и μ — два неколлинеарных вектора системы Γ, а $l \geqslant 0$ и $m \geqslant 0$ — два максимальных целых числа, обладающих тем свойством, что все векторы $\mu - j\lambda$ при $j = l, l-1, \ldots, 1, 0, -1, \ldots, -m$ принадлежат Γ; тогда мы имеем:

$$l - m = \frac{2(\lambda, \mu)}{(\lambda, \lambda)}. \tag{9}$$

Из теоремы 105 непосредственно следует, что корневая система всякой полупростой компактной алгебры Ли есть σ-система.

Теорема 113. *В каждой σ-системе* Γ (см. B)) *можно выбрать такую линейно независимую подсистему* $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, *для которой выполняются следующие условия*:

1) *Если α и β — два различных вектора из* B, *то*

$$(\alpha, \beta) \leqslant 0. \tag{10}$$

2) *Каждый вектор $\lambda \in \Gamma$ может быть записан в виде*:

$$\lambda = \varepsilon(a^1\beta_1 + \ldots + a^n\beta_n), \tag{11}$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a_1, \ldots, a_n$ суть целые неотрицательные числа. Оказывается, что линейно независимая подсистема B *заданной σ-системы* Γ, *удовлетворяющая условиям* 1) *и* 2), *однозначно определяет саму систему* Γ, *именно, зная метрические свойства системы* B, *можно найти все линейные формы вида* (11), *принадлежащие системе* Γ.

Доказательство. Будем считать, что система Γ задана в евклидовом векторном пространстве S. Введем упорядоченность векторов, исходя из произвольного базиса $e_1, \ldots, e_n$ этого пространства (см. § 63, F)).

Оказывается, что система $x_1, \ldots, x_m$ положительных векторов пространства S, для которой выполнено условие

$$(x_j, x_k) \leqslant 0, \quad j \neq k, \tag{12}$$

обязательно линейно независима.

Докажем это от противного. Допустим, что система $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависима, и пусть $y_1, \ldots, y_n$ — ее минимальная линейно зависимая подсистема; тогда мы имеем:

$$b^1y_1 + \ldots + b^ny_n = 0, \tag{13}$$

причем все коэффициенты $b^1, \ldots, b^n$ отличны от нуля. Среди этих коэффициентов должны быть как положительные, так и отрицательные, ибо в противном случае левая часть равенства (13) была бы либо отрицательным, либо положительным вектором и не могла бы равняться нулю. Сумму всех членов с положительными коэффициентами обозначим через u, а сумму всех членов с отрицательными коэффициентами—через $-v$; тогда равенство (13) переходит в равенство $u=v$, причем векторы u и v положительны. Умножая последнее равенство скалярно на u, получаем $(u, u)=$ $=(u, v)$, но левая часть этого равенства есть положительное число, правая же в силу (12) не положительна. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Положительный вектор системы Г будем называть *простым*, если он не может быть разложен в сумму двух положительных векторов системы Г. Совокупность всех простых векторов системы Г обозначим через $\mathrm{B}=\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Оказывается, что она удовлетворяет условиям 1) и 2). Из условия 1) в силу вышеприведенного критерия следует также ее линейная независимость.

Докажем, что для системы В выполнено условие 1). Пусть $(\beta_i, \beta_j)>0$; тогда в силу В) $\beta_i-\beta_j\in\Gamma$; из двух векторов $\beta_i-\beta_j$ и $\beta_j-\beta_i$, входящих в Г, один положителен, а другой отрицателен. Пусть для определенности $\beta_i-\beta_j=\gamma>0$; тогда $\beta_i=\beta_j+\gamma$, что невозможно, так как простой вектор β_i не может быть разложен в сумму двух положительных векторов β_j и γ системы Г.

Докажем, что для системы В выполнено условие 2). Пусть $\lambda\in\Gamma$—положительный вектор. Если λ является простым, то $\lambda=\beta_i$. Если же λ не является простым, то $\lambda=\alpha+\beta$, где α и β—положительные векторы из Г. Продолжая этот процесс разложения дальше, мы убедимся, что вектор λ может быть записан в виде (11), причем $\varepsilon=+1$. Если λ—отрицательный вектор, то, применяя к $-\lambda$ проведенное построение, убеждаемся, что и для него формула (11) верна, причем $\varepsilon=-1$.

Итак, из σ-системы Г выделена линейно независимая подсистема В, удовлетворяющая условиям 1) и 2).

Пусть теперь $\mathrm{B}=\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$—произвольная линейно независимая подсистема σ-системы Г, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Покажем, как по метрическим свойствам системы В можно восстановить систему Г. Множество всех принадлежащих Г линейных форм вида $a^1\beta_1+\ldots+a^n\beta_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами, для которых $0<a^1+\ldots+a^n\leqslant a$, обозначим через Γ_a. Покажем, что каждый элемент $\gamma\in\Gamma_{a+1}\setminus\Gamma_a$, $a\geqslant1$, может быть записан в виде $\gamma=\beta+\alpha$, где $\beta\in\Gamma_a$, $\alpha\in\Gamma_1=\mathrm{B}$. Для этого в действительной линейной оболочке S системы векторов В введем упорядоченность, исходя из базиса $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Система $\{\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma\}$ составлена из положительных векторов и линейно зависима (см. условие 2)), следовательно, в силу вышеприведенного критерия (см. (12)) существует такой вектор β_i, что $(\gamma, \beta_i)>0$. Из этого в силу В) заключаем, что $\beta=\gamma-\beta_i\in\Gamma$. Так как вектор β может быть записан в виде (11), и сумма коэффициентов его равна $a\geqslant1$, то $\beta\in\Gamma_a$. Таким образом, $\gamma=\beta+\alpha$, $\beta\in\Gamma_a$, $\alpha\in\mathrm{B}$. Допустим теперь, что система Γ_a уже построена. Мы уже знаем, что каждый вектор $\gamma \in \Gamma_{a+1}$ может быть записан в виде $\gamma = \beta + \alpha$, $\beta \in \Gamma_a$, $\alpha \in B$. Дадим теперь критерий для решения вопроса о том, принадлежит элемент $\beta + \alpha$; $\beta \in \Gamma_a$, $\alpha \in B$, системе Γ или нет. Так как система Γ_a уже известна, то вопрос о принадлежности элементов $\beta - j\alpha$, $j = 1, 2, \ldots$, к системе Γ является решенным. Таким образом, можно найти число l (см. В)); зная его и число $p = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$, мы можем найти и число $m = l - p$. Если $m > 0$, то $\beta + \alpha \in \Gamma_{a+1}$; если $m = 0$, то $\beta + \alpha \notin \Gamma_{a+1}$. Положим $\Gamma_+ = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots$ Так как $\Gamma = \Gamma_+ \cup (-\Gamma_+)$, и так как на основании вышеприведенной конструкции система Γ_+ однозначно определяется метрическими свойствами системы B, то это же верно и для системы Γ.

Итак, теорема 113 доказана.

C) Пусть Γ — некоторая σ-система и B — ее линейно независимая подсистема, удовлетворяющая условиям 1) и 2) теоремы 113. Оказывается, что система Γ распадается (см. § 63, H)) тогда и только тогда, когда распадается система B.

Докажем предложение C). Если система Γ распадается на подсистемы Γ' и Γ'', то система B распадается на подсистемы $B \cap \Gamma'$ и $B \cap \Gamma''$. Допустим, наоборот, что система B распадается на подсистемы B' и B''. Воспользуемся обозначениями доказательства теоремы 113 и обозначим через Γ'_a совокупность векторов системы Γ_a, линейно зависящих от векторов системы B', а через Γ''_a — совокупность векторов из Γ_a, линейно зависящих от векторов системы B''. Предположим, что система Γ_a распадается на подсистемы Γ'_a и Γ''_a (для $a = 1$ это верно), и докажем, что система Γ_{a+1} распадается на подсистемы Γ'_{a+1} и Γ''_{a+1}. Пусть $\gamma \in \Gamma_{a+1}$. Тогда $\gamma = \beta + \alpha$, где $\beta \in \Gamma_a$, $\alpha \in B$. По предположению индукции β принадлежит одной из систем Γ'_a, Γ''_a. Пусть для определенности $\beta \in \Gamma'_a$. Предположим, что при этом $\alpha \in B''$. Тогда $\beta - \alpha \notin \Gamma$, так как в его разложении по системе B встречаются как положительные, так и отрицательные коэффициенты. Так как, далее, $p = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 0$, то и $\gamma = \beta + \alpha \notin \Gamma$, что противоречит предположению. Таким образом, $\alpha \in B'$ и, следовательно, $\gamma \in \Gamma'_{a+1}$. Полагая $\Gamma'_+ = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2 \cup \ldots$, $\Gamma''_+ = \Gamma''_1 \cup \Gamma''_2 \cup \ldots$, мы видим, что Γ_+ распадается на подсистемы Γ'_+ и Γ''_+. Отсюда следует распадение самой системы Γ.

Итак, предложение C) доказано.

Теорема 113 и предложение C) делают естественным нижеследующее определение.

D) Линейно независимая система $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ векторов евклидова пространства называется *π-системой*, если она не распадается и если для любых двух различных ее векторов α и β число $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ является целым неположительным. Число векторов

π-системы будем называть ее *рангом*. Любую π-систему $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ будем изображать графически в виде *связного линейного комплекса* L. Вершины $(\beta_1), \ldots, (\beta_n)$ комплекса L находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами системы B, а две различные вершины (β_i) и (β_j) комплекса L соединены r ребрами в L (или, мы будем говорить, *r-кратным ребром*), если косинус угла между векторами β_i, β_j равен $-\frac{1}{2}\sqrt{r}$, $r=0, 1, 2, 3$ (см. (1)). Связность комплекса L следует из того, что система B не распадается. Изображение π-системы в виде одномерного комплекса учитывает лишь углы между векторами, а не их длины и потому дает лишь неполное описание π-системы.

E) Так как корневая система алгебры Ли есть σ-система, то системы

$$\Sigma(A_n),\ n\geqslant 1;\quad \Sigma(B_n),\ n\geqslant 2; \tag{14}$$

$$\Sigma(C_n),\ n\geqslant 3;\quad \Sigma(D_n),\ n\geqslant 4 \tag{15}$$

(см. теорему 111) являются нераспадающимися σ-системами. Удовлетворяющие условиям 1) и 2) теоремы 113 π-подсистемы этих систем могут быть заданы формулами:

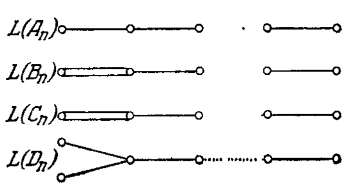
$$\pi(A_n) = \{e_2 - e_1,\ e_3 - e_2,\ \ldots,\ e_{n+1} - e_n\}, \tag{16}$$

$$\pi(B_n) = \{e_1,\ e_2 - e_1,\ e_3 - e_2,\ \ldots,\ e_n - e_{n-1}\}, \tag{17}$$

$$\pi(C_n) = \{2e_1,\ e_2 - e_1,\ e_3 - e_2,\ \ldots,\ e_n - e_{n-1}\}, \tag{18}$$

$$\pi(D_n) = \{e_1 + e_2,\ e_2 - e_1,\ e_3 - e_2,\ \ldots,\ e_n - e_{n-1}\}. \tag{19}$$

Соответствующие этим системам линейные комплексы изображены на рис. 4.



(20)
(21)
(22)
(23)

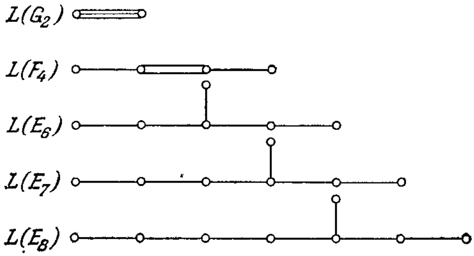
Рис. 4.

Правильность утверждения E) проверяется непосредственно.

F) Кроме четырех бесконечных серий классических алгебр Ли, существуют еще пять *особых алгебр* Ли: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, описания которых в книге дано не будет. Корневые системы и π-системы

$$\pi(G_2),\quad \pi(F_4),\quad \pi(E_6),\quad \pi(E_7),\quad \pi(E_8) \tag{24}$$

этих алгебр Ли будут описаны ниже (см. G)). Линейные комплексы, соответствующие π-системам этих алгебр, указаны на рис. 5.



(25)
(26)
(27)
(28)
(29)

Рис. 5.

Теорема 114. *Каждая простая компактная алгебра Ли изоморфна одной из алгебр*

$$A_n,\ n\geqslant 1;\quad B_n,\ n\geqslant 2;\quad C_n,\ n\geqslant 3;\quad D_n,\ n\geqslant 4; \tag{30}$$

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8. \tag{31}$$

Доказательство. Так как каждая алгебра Ли однозначно определяется своей корневой системой (см. теорему 106), а корневая система однозначно определяется ее π-подсистемой, удовлетворяющей условию теоремы 113, то для доказательства теоремы 114 достаточно показать, что любая π-система подобна одной из систем (16)—(19), (24). Для доказательства этого мы покажем прежде всего, что линейный комплекс L, соответствующий произвольной π-системе B, имеет вид одного из комплексов (20)—(23), (25)—(29).

Комплекс L однозначно определяет углы между векторами системы B. Таким образом, он с точностью до изометрии определяет конфигурацию из n линейно независимых направлений в n-мерном евклидовом пространстве S. Оказывается, что предписываемая комплексом L конфигурация направлений в действительности существует только тогда, когда комплекс L имеет вид одного из комплексов (20)—(23), (25)—(29). Доказательство того, что предписываемые комплексами другого вида конфигурации направлений неосуществимы, опирается на следующие соображения.

Пусть L—линейный комплекс, соответствующий π-системе $B=\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Обозначим через γ_i единичный вектор, направленный по вектору β_i, и через r_{ij}—число ребер комплекса L, связывающих вершины (β_i) и (β_j). Тогда косинус угла между векторами γ_i и γ_j равен $-\frac{1}{2}\sqrt{r_{ij}}$. Пусть, далее, $c^1, \ldots, c^n$—система неотрицательных действительных чисел, не обращающихся в нуль одновременно, и

$$\gamma = c^1\gamma_1 + c^2\gamma_2 + \ldots + c^n\gamma_n.$$

Мы имеем:

$$0 < (\gamma, \gamma) = (c^1)^2 + \ldots + (c^n)^2 - \sum_{i<j} c^i c^j \sqrt{r_{ij}}. \tag{32}$$

Комплекс L однозначно определяет числа r_{ij}. Если окажется, что при заданной системе чисел r_{ij} можно подобрать такую систему чисел $c^1, \ldots, c^n$, для которой

$$(c^1)^2 + \ldots + (c^n)^2 - \sum_{i<j} c^i c^j \sqrt{r_{ij}} \leqslant 0, \tag{33}$$

то это значит, что комплексу L в действительности не соответствует никакой конфигурации линейно независимых направлений.

Пусть L'—произвольный подкомплекс комплекса L. Будем для определенности считать, что в комплекс L' вошли вершины $(\beta_1), \ldots, (\beta_m)$ комплекса L и не вошли остальные его вершины. Так как каждые две вершины комплекса L' соединены в нем не более чем тремя ребрами, то комплекс L' предписывает, так же как и L, определенную конфигурацию направлений. Пусть r'_{ij}, $i \neq j$,—число ребер комплекса L', соединяющих вершины (β_i) и (β_j); тогда

$$r'_{ij} \leqslant r_{ij}.$$

Из этого непосредственно следует, что при $c^{m+1} = \ldots = c^n = 0$ имеем:

$$(c^1)^2 + \ldots + (c^m)^2 - \sum_{i<j} \sqrt{r_{ij}}\, c^i c^j \leqslant (c^1)^2 + \ldots + (c^m)^2 - \sum_{i<j} \sqrt{r'_{ij}}\, c^i c^j.$$

Таким образом, если для подкомплекса L' можно подобрать такую систему неотрицательных чисел $c^1, \ldots, c^m$, не обращающихся одновременно в нуль, что

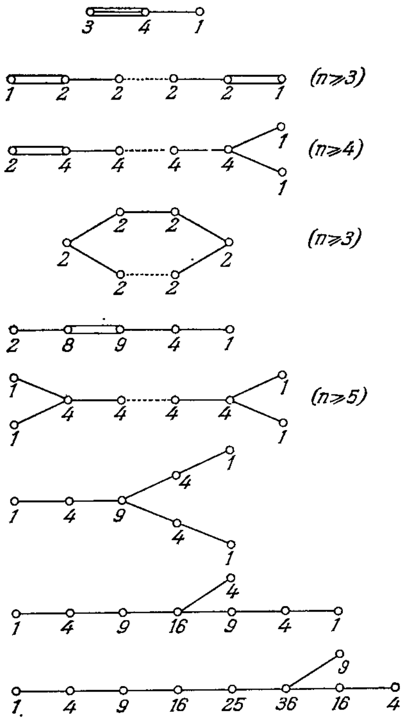
$$(c^1)^2 + \ldots + (c^m)^2 - \sum_{i<j} c^i c^j \sqrt{r'_{ij}} \leqslant 0, \tag{34}$$

то это возможно сделать и для комплекса L.

Для нижеследующих девяти комплексов (рис. 6) непосредственно под вершинами указаны квадраты соответствующих чисел c^i, осуществляющих неравенство (34). Таким образом, ни один из комплексов (35)—(43) не может быть подкомплексом комплекса L. Число n вершин комплексов (36)—(38), (40) может принимать указанные рядом с рисунками значения. Тот факт, что число n вершин может принимать различные значения, отмечен на этих рисунках многоточиями.

Если комплекс L содержит тройное ребро, то он не может содержать других ребер (см. (35)) и потому имеет вид $L(G_2)$.

Если комплекс L содержит двойное ребро, то он не содержит второго двойного ребра (см. (36)), не имеет точек ветвления (см. (37)) и не содержит цикла (см. (38)). Таким образом, если к обоим концам двойного ребра комплекса L примыкают другие ребра, то L имеет вид $L(F_4)$ (см. 39)). Если же одинарные ребра



(35)

(36)

(37)

(38)

(39)

(40)

(41)

(42)

(43)

Рис. 6.

комплекса L примыкают не более чем к одному концу двойного ребра, то L имеет вид $L(B_n)$.

Если, наконец, комплекс L содержит только одинарные ребра, то он не может содержать ни двух точек ветвления (см. (40), $n>5$), ни точки, в которой сходятся более трех ребер (см. (40), $n=5$), ни цикла (см. (38)). В случае отсутствия точек ветвления комплекс L имеет вид $L(A_n)$. Если имеется точка ветвления, то хотя бы одно исходящее из нее ребро не имеет продолжения (см. (41)). Если два ребра, исходящих из точки ветвления, не имеют продолжения, то L имеет вид $L(D_n)$. Если же два ребра, примыкающих к точке ветвления, имеют продолжение, то комплекс L совпадает с одним из комплексов $L(E_6)$, $L(E_7)$, $L(E_8)$ (см. (42), (43)).

Теперь следует решить вопрос о единственности π-системы B, когда соответствующий ей комплекс L имеет вид (20)—(23), (25)—

(29). Вопрос о существовании уже решен положительно для комплексов (20)—(23) (см. E)); для комплексов (25)—(29) он будет решен положительно в нижеследующем предложении G). Для решения вопроса о единственности заметим, что если вершины (β_i) и (β_j) в комплексе L связаны r ребрами, $r>0$, то длины вектóров β_i и β_j связаны соотношением

$$\frac{(\beta_i, \beta_i)}{(\beta_j, \beta_j)}=r^{\pm 1}$$

(см. A)). В случае $r=1$ два возможных равенства превращаются в одно $(\beta_i, \beta_i)=(\beta_j, \beta_j)$. Таким образом, в случае, когда комплекс L содержит лишь однократные ребра, все векторы $\beta_1, \ldots, \beta_n$ имеют одинаковую длину ввиду связности комплекса L, и потому в этом случае система B определена комплексом L, с точностью до подобия, однозначно. В комплексе $L(G_2)$ имеются лишь две вершины, которые равноправны между собой, и потому не имеет значения, какой из двух векторов системы $\pi(G_2)$ считать бóльшим, чем другой. В комплексе $L(B_n)=L(C_n)$ имеется двойной отрезок; пусть его вершинами будут (β_1), (β_2). Если $n=2$, то вершины эти равноправны, и потому безразлично, какой из векторов считать бóльшим. Если $n>2$, то, считая, что вектор β_1 короче вектора β_2, мы получаем π-систему $\pi(B_n)$, а считая, что вектор β_1 длиннее β_2, мы получим π-систему $\pi(C_n)$. В комплексе $L(F_4)$ имеется двойное ребро. Так как концы этого ребра равноправны, то комплексу $L(F_4)$ соответствует единственная π-система $\pi(F_4)$.

Итак, теорема 114 полностью доказана.

G) Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормальный базис евклидова пространства. Положим $e^{(r)}=e_1+e_2+\ldots+e_r$. Тогда корневые системы пяти *особых алгебр* задаются с точностью до подобия формулами:

$$\Sigma(G_2)=\{e_i-e_j;\ \pm(e^{(3)}-3e_i);\ i,\ j=1,\ 2,\ 3\}, \tag{44}$$

$$\Sigma(F_4)=\left\{\pm e_i;\ \pm e_i\pm e_j;\ \frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4);\ i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4\right\}, \tag{45}$$

$$\Sigma(E_6)=\left\{e_i-e_j;\ \pm e_7\sqrt{2};\ \pm\left(e_7\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}e^{(6)}-e_i-e_j-e_k\right);\right.$$
$$\left. i,\ j,\ k=1,\ \ldots,\ 6\right\}, \tag{46}$$

$$\Sigma(E_7)=\left\{e_i-e_j;\ \left(\frac{1}{2}e^{(8)}-e_i-e_j-e_k-e_m\right);\ i,\ j,\ k,\ m=1,\ \ldots,\ 8\right\}, \tag{47}$$

$$\Sigma(E_8)=\left\{\pm e_i\pm e_j;\ \pm\left(\frac{1}{2}e^{(8)}-e_i\right);\ \pm\left(\frac{1}{2}e^{(8)}-e_i-e_j-e_k\right);\right.$$
$$\left. i,\ j,\ k=1,\ \ldots,\ 8\right\}. \tag{48}$$

В каждой из этих формул все встречающиеся буквенные индексы попарно различны. Соответствующие π-системы даются формулами:

$$\pi(G_2)=\{e_2-e_1;\ e^{(3)}-3e_2\}, \tag{49}$$

$$\pi(F_4)=\left\{e_3-e_2;\ e_2-e_1;\ e_1;\ \frac{e_4-e_1-e_1-e_2}{2}\right\}, \tag{50}$$

$$\pi(E_6)=\left\{e_2-e_1;\ e_3-e_2;\ e_4-e_3;\ e_5-e_4;\ e_6-e_5;\ \left(e_7\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}e^{(6)}-e_4-e_5-e_6\right)\right\}, \tag{51}$$

$$\pi(E_7)=\left\{e_2-e_1;\ e_3-e_2;\ e_4-e_3;\ e_5-e_4;\ e_6-e_5;\ e_7-e_6;\ \frac{1}{2}e^{(8)}-e_4-e_5-e_6-e_7\right\}, \tag{52}$$

$$\pi(E_8)=\left\{e_1+e_2;\ e_2-e_1;\ e_3-e_2;\ e_4-e_3;\ e_5-e_4;\ e_6-e_5;\ e_7-e_6;\ e_8-\frac{1}{2}e^{(8)}\right\}. \tag{53}$$

Размерности этих алгебр Ли соответственно равны 14, 52, 78, 133 248. Алгебры G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 попарно неизоморфны между собой и неизоморфны классическим алгебрам.

Тот факт, что системы (44)—(48) являются σ-системами, а системы (49)—(53)—их π-подсистемами, проверяется непосредственными вычислениями. Размерность каждой из особых алгебр равна числу векторов ее σ-системы плюс ее ранг; это дает указанные выше числа. Неизоморфность особых алгебр между собой следует из различия их рангов. Наибольшую размерность из классических алгебр ранга n имеют B_n и C_n, размерность которых равна $2n^2+n$. При $n=2$, 4, 6, 7, 8 (ранги особых алгебр) их размерности равны соответственно 10, 36, 78, 105, 136. Сравнивая эти числа с размерностями особых алгебр, мы видим, что неисключенным оказывается лишь изоморфизм алгебры E_6 с одной из алгебр B_6, C_6. Эти изоморфизмы, однако, невозможны, так как в $\Sigma(E_6)$ все векторы имеют одинаковую длину, а каждая из систем $\Sigma(B_6)$ и $\Sigma(C_6)$ содержит векторы двух различных длин.

Таким образом, предложение G) доказано. Не доказан лишь факт существования алгебр, имеющих системы (44)—(48) своими корневыми системами.

Пример 109. Укажем прием, позволяющий проверить существование пяти *особых алгебр*. Проверка эта, однако, связана с выполнением громоздких вычислений.

Пусть Σ'—нераспадающаяся σ-система (см. B)). При помощи подобного преобразования системы Σ' можно добиться того, что для одного из векторов β' полученной в результате подобного преобразования системы Σ будет выполнено соотношение (2) § 63 при $k=1$. Проверка покажет, что и для любого вектора β' системы Σ равенство (2) § 63 будет выполнено при $k=1$. Проводя теперь для системы построения, указанные в доказательстве теоремы 106, мы однозначно определим все действительные числа $N_{\alpha\beta}$. Проверка покажет, что для найденных чисел $N_{\alpha\beta}$ справедливы соотношения (8), (9) § 63. После этого уже легко установить, что операция коммутирования, описываемая соотношениями (18)—(20) § 63, определяет алгебру Ли с корневой системой Σ.

Применяя этот прием к σ-системам (44)—(48), мы можем убедиться в существовании пяти особых алгебр Ли.

Пример 110. Определение σ-системы (см. В)) включает в себя сравнительно трудно проверяемое условие b). Сформулируем здесь более слабые условия a′) и b′), совокупность которых эквивалентна условиям a) и b) предложения В).

Для того чтобы придать геометрический смысл формулируемому ниже условию b′), отметим следующий факт.

Пусть α—отличный от нуля вектор евклидова векторного пространства S. Определим при помощи этого вектора α отображение пространства S на себя, положив

$$x \to x - \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)}\alpha. \tag{54}$$

Непосредственно проверяется, что отображение (54) есть симметрия пространства S относительно плоскости $(\alpha, x)=0$.

Покажем, что система Γ отличных от нуля векторов евклидова пространства тогда и только тогда удовлетворяет условиям a) и b) предложения В), когда для нее выполнены нижеследующие условия: a′) при $\lambda\in\Gamma$ вектор 2λ не принадлежит системе Γ. b′) При $\lambda\in\Gamma$, $\mu\in\Gamma$ число $\frac{2(\lambda, \mu)}{(\lambda, \lambda)}$ является целым и

$$\mu - \frac{2(\lambda, \mu)}{(\lambda, \lambda)}\lambda\in\Gamma, \tag{55}$$

так что система Γ инвариантна при симметрии относительно любой плоскости $(\lambda, x)=0$, $\lambda\in\Gamma$ (см. (54)).

При $\lambda=\mu=\alpha$ из условия b′) вытекает:

$$\text{если } \alpha\in\Gamma, \text{ то } -\alpha\in\Gamma. \tag{56}$$

Таким образом, для доказательства свойства a) достаточно показать, что если $\alpha\in\Gamma$, $r\alpha\in\Gamma$, то $|r|=1$. Будем для определенности считать, что $|r|\geqslant 1$. Так как в силу условия b′) число $\frac{2(\alpha, r\alpha)}{(r\alpha, r\alpha)}=\frac{2}{r}$ является целым, то $|r|=1, 2$. В силу (56) вектор $|r|\alpha$ принадлежит системе Γ, и потому в силу условия a′) случай $|r|=2$ исключается. Таким образом, $r=\pm 1$.

Пусть α и β—два неколлинеарных вектора системы Γ. Положим:

$$p=\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}; \quad q=\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \tag{57}$$

и покажем, что

$$\text{при } p>0 \text{ имеем } \beta - j\alpha\in\Gamma, \; j=1, \; .. \; p \tag{58}$$

В случае $p<0$ заменой вектора α вектором $-\alpha$ из соотношения (58) получаем:

$$\text{при } p<0 \text{ имеем } \beta+j\alpha\in\Gamma,\ j=1,\ \ldots,\ |p|. \tag{59}$$

Итак, докажем соотношение (58). Из условия b′) следует, что

$$\beta-p\alpha\in\Gamma. \tag{60}$$

В случае $p=1$ соотношение (60) совпадает с (58). При $p>1$ возможны лишь два следующих случая:

$$p=2,\ q=1;\ p=3,\ q=1 \tag{61}$$

(см. А)). В случае $p\geqslant 2$ из соотношения (55) при $\lambda=\beta$, $\mu=\alpha$ мы получаем:

$$\alpha-\beta\in\Gamma \quad \text{при} \quad p\geqslant 2, \tag{62}$$

а в силу (56) это дает:

$$\beta-\alpha\in\Gamma \quad \text{при} \quad p\geqslant 2. \tag{63}$$

Далее, в случае $p=3$ из соотношения (55), полагая $\mu=\beta-\alpha$, $\lambda=\alpha$, мы получаем:

$$\beta-2\alpha\in\Gamma \quad \text{при} \quad p=3. \tag{64}$$

Из соотношений (60), (63), (64) следует (58).

Докажем теперь свойство b). Мы имеем:

$$\frac{2(\beta-j\alpha,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}=p-2j. \tag{65}$$

Так как $\beta-l\alpha\in\Gamma$, $\beta-(l+1)\alpha\notin\Gamma$, то из (58) получаем:

$$p-2l\leqslant 0, \tag{66}$$

и потому в силу (59) имеем $\beta-l\alpha+j\alpha\in\Gamma$, $j=1,\ \ldots,\ 2l-p$. Таким образом,

$$m\geqslant l-p. \tag{67}$$

Далее, аналогично, так как $\beta+m\alpha\in\Gamma$, $\beta+(m+1)\alpha\notin\Gamma$, то в силу (59) имеем $p+2m\geqslant 0$, и потому в силу (58) получаем:

$$\beta+m\alpha-j\alpha\in\Gamma,\quad j=1,\ \ldots,\ p+2m.$$

Таким образом,

$$l\geqslant m+p. \tag{68}$$

Из неравенств (67) и (68) следует $l=m+p$, и потому $p=l-m$, т. е. свойство b) доказано.

Из условий a) и b) условия a′) и b′) вытекают очевидным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. А д о И., О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок, Известия Ф. М. О., Казань **7** (1934/35), 3—43.
2. А л е к с а н д р о в П. С., О понятии пространства в топологии, УМН **2**, № 1 (17) (1947), 5—57.
3. A l e x a n d r o f f P. und H o p f H., Topologie, Bd. I, Berlin, I. Springer, 1936.
4. B i r k h o f f G., Lie Groups simply isomorphic with no linear group, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 883—888.
5. B o c h n e r S. and N e u m a n n J., Almost periodic functions in groups, II, Trans. Amer. Math. Soc. **37**, № 1 (1935), 21—50.
6. C a r t a n E., Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Paris, 1894.
7. C a r t a n E., Groupes simples clos et ouverts et géometrie riemannienne, J. Math. pur. appl. 8 (1929), 1—33.
8. C a r t a n E., La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs, Mém. Sci. Math., fasc. XLII, 1930.
9. Д ж е к о б с о н Н., Алгебры Ли, «Мир», 1964.
10. G a n t m a c h e r F., On the classification of real simple Lie groups, Матем. сб. **5** (47), № 2 (1939), 217—250.
11. G l e a s o n A. M., Groups without small subgroups, Ann. Math. **56**, № 2 (1952), 193—212.
12. H a a r A. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuieerlichen Gruppen, Ann. Math. **34** (1933), 147—169.
13. Х а у с д о р ф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937.
14. K a m p e n E., van, Locally compact Abelian groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **20**, № 7 (1934), 434—436.
15. K a m p e n E., van, Locally bicompact Abelian groups and their character groups, Ann. Math. **36**, № 2 (1935), 448—436.
16. K a m p e n E., van, Note on a theorem of Pontrjagin, Amer. J. Math. 58, № 1 (1936), 177—180.
17. K i l l i n g W., Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, Math. Ann. I **31** (1888), 252—290; II, **33** (1889), 1—48; III, **34** (1889), 57—122; IV **36** (1890), 161—189.
18. K o l m o g o r o f f A., Zur Begründung der projektiven Geometrie, Ann. Math. **33**, № 1 (1932), 175—176.
19. K o w a l s k y H. J., Zur topologischen Kennzeichnung von Körpern, Math. Nachr. **9**, № 5 (1953), 261—320.
20. К у р о ш А. Г., Теория групп, «Наука», 1967.
21. L e v i E., Sulla struttura dei gruppi finiti e continui, Atti Accad. Torino **40** (1905), 3—17.
22. L i e S. und E n g e l F., Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, Teubner **1**, **2**, **3**.
23. М а л ь ц е в А. И., О локальных и полных топологических группах, ДАН СССР **32**, № 9 (1941), 606—608.
24. М а л ь ц е в А. И., Об односвязности нормальных делителей группы Ли, ДАН СССР **34**, № 1 (1942), 12—15.
25. М а л ь ц е в А. И., О линейных связных, локально замкнутых группах, ДАН СССР **40**, № 3 (1943), 108—110.
26. M a r k o f f A., Uber endlich-dimensionale Vektorräume, Ann. Math. **36**, № 2 (1935), 464—506.

27. Марков А. А., О свободных топологических группах, ИАН СССР, сер. матем. **9**, № 1 (1945), 3—64.
28. Montgomery D., Zippin L., Topological transformation groups, I, Ann. Math. (2), **41** (1940), 778—791.
29. Montgomery D., Zippin L., Small subgroups of finite-dimensional groups, Ann. Math. 56, № 2 (1952), 213—241.
30. Neumann J., Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. Math. **34** (1933), 170—190.
31. Neumann J., Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, Comp. Math. **1**, № 1 (1934), 106—114. Русск. пер.: УМН, вып. 2 (1936), 168—176.
32. Neumann J., Almost periodic functions in a group, I, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 445—492.
33. Peter F. und Weyl H., Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. **97** (1927), 737—755. Русск. пер.: УМН, вып. 2 (1936), 144—160.
34. Pontrjagin L., Über stetige algebraische Körper, Ann. Math. **33** (1932), 163—174.
35. Pontrjagin L., Sur les groupes topologisches compacts et le cinquième problème de M. Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), 238—240.
36. Pontrjagin L., Sur les groupes abélliens continus, C.R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), 328—330.
37. Pontrjagin L., The theory of topological commutative groups, Ann. Math. **35** (1934), 361—388. Русск. пер.: УМН, вып. 2 (1936), 177—195.
38. Pontrjagin L., Linear representations of compact topological groups, Матем. сб. (нов. сер.) **1** (43), № 3 (1936), 267—271.
39. Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, Гостехиздат, 1947.
40. Schreier O., Abstracte kontinuierliche Gruppen, Hamb. Abh. Math. Sem. **4** (1925), 15—32.
41. Schreier O., Die Verwandschaft stetigen Gruppen im grossen, Hamb. Abh. Math. Sem. **5** (1926), 233—244.
42. Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933.
43. Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. I—II, Гостехиздат, 1947.
44. Waerden B., van-der, Die Klassification der einfachen Lieschen Gruppen, Math. Z. **37** (1933), 446—462. Русск. пер.: УМН, вып. 4 (1937), 258—274.
45. Weyl H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, Math. Z. **23** (1924), 271—304; II, III, **24** (1925), 328—395. Русск. пер.: УМН, вып. 4 (1937), 201—246.
46. Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, 1950.
47. Whitehead T. H. C., On the decomposition of an infinitesimal group, Proc. Cambr. Phil. Soc. **32** (1936), 229—237.

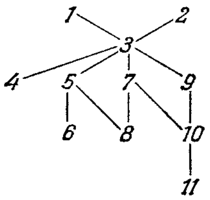
Распределение литературы по главам

Введение 13.
Глава первая 20, 43.
Глава вторая 2, 3, 39.
Глава третья 23, 26, 27.
Глава четвертая 18, 19, 34.
Глава пятая 4, 5, 12, 31, 32, 33, 38, 46.
Глава шестая 14, 15, 20, 26, 36, 37, 46.
Глава седьмая 11, 29, 30, 35, 36.
Глава восьмая 16, 28, 35.
Глава девятая 40, 41, 45.
Глава десятая 1, 8, 21, 22, 24, 25, 42, 47.
Глава одиннадцатая 6, 7, 9, 10, 17, 44, 45.

УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Схема зависимости глав



Лев Семенович Понтрягин

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ