ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

А. И. ПОПОВ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1959

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

Работа проф. А. И. Попова является первой советской книгой, в которой дается общий очерк математической логики. В книге дан краткий исторический обзор возникновения математической логики, популярно излагаются основные направления современной математической логики, особое внимание уделяется вопросу о соотношении математической и классической (формальной) логики, рассматривается место математической логики в системе научного познания. В работе указываются практические приложения математической логики как основы для конструирования и работы разнообразных «умных» и «думающих» машин.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов и учителей средней школы, а также на широкие круги читателей, интересующихся философией, логикой и математикой.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта небольшая книжка предназначена для лиц, желающих ознакомиться с элементарными основами математической логики без углубления в различные подробности, доступные и интересные лишь для специалистов. Главным образом мы имели в виду философов и преподавателей логики, для которых имеет значение общее знакомство с основными понятиями и направлениями математической логики, а также с главнейшими линиями ее исторического развития.

Этим назначением книжки определен и ее характер, так что в нашем изложении наиболее подробно представлены те вопросы, которые не только имеют узко специальное значение (математическое или техническое), но в какой-то мере представляют более общий интерес, — например, вопрос о границах применимости закона исключенного третьего в трансфинитных суждениях. Особенное внимание уделено алгебре Буля, причем достаточно подробно освещен тот большой вклад в этот отдел науки, который был внесен нашими отечественными исследователями (П. С. Порецкий, И. И. Жегалкин).

Другие ответвления математической логики охарактеризованы по преимуществу описательно, так как совершенно невозможно представить современные сложные построения в этой области в форме более или менее общедоступной. Наше изложение предполагает у читателя знакомство с Аристотелевой логикой и достаточный навык в пользовании элементарной алгеброй. Имея в виду именно такую основу, автор излагал в 1957/58 учебном году элементы математической логики для студентов старших курсов философского факультета ЛГУ, причем усвоение оказалось вполне удовлетворительным. Это обстоятельство позволяет надеяться, что подобная же система может быть применена при изложении для широкого круга лиц, в какой-то мере интересующихся вопросами символиче-

ской логики. Естественно, что первый опыт популяризации довольно значительного круга вопросов этого рода не может обойтись без недочетов. За все указания на недочеты и недостатки изложения автор будет весьма признателен.

* *
*

Следует сделать одно предварительное замечание: в книге в довольно значительной степени осуществлена историческая последовательность изложения развития алгебры Буля и отчасти математической логики вообще. Поэтому автор счел наиболее разумным оставить при описании различных этапов этого развития те символические обозначения, которые применялись различными авторами в их работах, не вводя, таким образом, никакой единообразной символики.

Ленинград, январь 1959 г.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый вниманию читателя курс посвящен отдельным вопросам исторического развития и современного состояния математической логики. До известной степени нас будут интересовать и вопросы внутренней взаимосвязи между различными направлениями науки, определившимися к настоящему времени.

Прежде чем приступать к изложению простейших символико-логических построений, напомним вкратце основные пути развития логики до XIX в., т. е. до того времени, когда появились новые разновидности этой науки в виде логики математической, или символической, со всеми ее разветвлениями. Такое краткое напоминание необходимо в целях сравнительного порядка, т. е. для выяснения исторического отношения и связи между начальными этапами развития логики и современным ее состоянием.

* *
*

Начнем ab ovo — с Аристотеля (384—322 до н. э.), который особенно ярко выразил свои идеи в сочинении, называемом «Аналитики», состоящем из двух частей, из которых первая содержит собственно основы формальной логики, а вторая посвящена применению этих основ к теории научного доказательства и научного исследования вообще, разумеется,в тех масштабах и в том смысле, который был свойствен тому времени.

Хорошо известно, что найденные Аристотелем элементарные законы, или правила, мышления явились общепризнанным фундаментом дальнейших построений в области логики на столетия и даже на тысячелетия.

Не говоря уже о средневековых схоластах, следует обратить внимание на то, что и позже, в основном, логика долгое время не выходила за пределы области, указанной Аристотелем. Он с полным основанием назвал упомянутый свой труд «Аналити-

ки» и под анализом подразумевал сведение сложных логических построений к элементарным, основным, к немногочисленным важнейшим принципам, выяснение и применение которых он и считал своей задачей.

Аристотель не мог, конечно, в то время ставить задачи обратного, в известном смысле, порядка: создавать крупные синтетические конструкции логического характера, подобные некоторым нынешним построениям математической логики, исходя из немногочисленных основных предпосылок. Правда, примерно около того же времени возникла и весьма выдержанная система начал геометрии Евклида (на рубеже IV—III вв. до н. э.), построенная чисто синтетически и, несомненно, основанная на ряде существовавших ранее попыток в этом роде. Однако здесь следует с самого начала отметить, что математика стояла в этом отношении особняком, хотя сам Аристотель и многие другие мыслители древности отлично понимали, что логические приемы этой науки по существу ничем не отличаются от аналогичных приемов других наук. Мало того, Аристотель как раз и имел в виду прежде всего логику точных суждений, подобных математическим, однако он не ставил своей целью исследование математических систем в целом.

Итак, мы прежде всего должны подчеркнуть два обстоятельства:

1) с самого начала своего существования в явном виде логика как таковая занималась, в основном, разложением суждений и доказательств на простейшие, исследуя и классифицируя в дальнейшем эти простейшие формальные элементы мышления и не ставя себе целью создание из элементарных положений каких-либо бо́льших конструкций синтетического характера или исследование свойств уже существующих синтетических построений в целом (например, математических); поэтому математика древних осталась без логического анализа, хотя именно математические истины способствовали возникновению логики как науки;

2) параллельно с этим математика создала еще в древности свои логические системы построений синтетического характера, не занимаясь, однако, подробным анализом основ этих систем, причем основные положения считались просто самоочевидными, благодаря интуитивно ясному характеру главнейших элементарно-геометрических понятий.*

---

*Вся математика древних греков, даже тогдашние начатки алгебры, излагалась в чисто геометрическом духе — без применения буквенной символики. Только в XVI в. замечательный французский математик (и юрист) Фр. Виет (Fr. Viète, 1540—1603; в латинизированной форме — Виета) ввел впервые в алгебру буквенную символику, явившуюся основой современного употребления букв в математике.

В дальнейшем эти два обстоятельства на долгое время предопределили в значительной мере отсутствие прямой и явно определенной связи между математическими и логическими построениями, которые развивались много столетий сами по себе.

Точнее говоря, в средние века и в эпоху Возрождения развивалась, хотя и медленно, математика, захватывая все новые и новые области; логика же, в основном, оставалась почти на уровне, определенном трудами Аристотеля, авторитет которого подавлял средневековых ученых. Только в XVII—XVIII вв. появляются признаки некоторых новых течений в этой области, которые связывают с именами Фрэнсиса Бэкона (1561—1626) и особенно Лейбница (1646—1716).

Фр. Бэкон противопоставлял свои воззрения на логику Аристотелевым, выдвигая на первый план метод индукции. Лейбницу же принадлежат первые мысли о возможности создания символической логики, о потребности и допустимости введения в логику математической символики. Что эта мысль возникла именно у Лейбница — неудивительно, так как он был необычайно многосторонним мыслителем, прекрасно знакомым с творениями древних философов, и одним из крупнейших математиков всех времен и народов, разделяющим с Ньютоном славу открытия анализа бесконечно малых. Следует добавить к этому, что и в последней области (т. е. в анализе) **символика** Лейбница оказалась чрезвычайно удачной и сохранилась полностью в практике наших дней.

Естественно было попытаться перенести в какой-то форме символику и на логические построения общего порядка, и возможность этого была если не обоснована, то, по крайней мере, указана Лейбницем.*

---

* Лейбниц даже прямо указал некоторые элементы позднейшего развития математической логики, подчеркнув аналогию между употреблением в логике «и», «или» и в математике знаков умножения (·) и сложения (+), которые он предложил символически ввести и в логику. Впрочем, только почти сто лет спустя другой знаменитый математик и философ швейцарец И. Г. Ламберт (1728—1777) указал на то обстоятельство, что введенные Лейбницем символические операции логического сложения и умножения обладают свойствами обычных алгебраических действий, например, дистрибутивностью: $a(b+c)=ab+ac$ (*Acta eruditorum*, 1765, стр. 441). Вообще Ламберту принадлежит много ценных и интересных мыслей в направлении символизации логики, которые остались без дальнейшего развития ввиду ранней смерти автора, не успевшего закончить свои исследования (его наследие частично было издано позже — в 1782 г. одним из Бернулли). Работы Ламберта (Новый органон, 1764, и др.) заслуживают большого внимания, так как они явились основой многих позднейших течений в науке, в том числе и в математической логике.

Обычно отсюда и начинают историю символической, или математической, логики. Однако собственно развитие науки в этом направлении началось позднее — в XIX столетии, причем в наше время это развитие является уже в значительной мере разветвленным. Что касается XIX в., то здесь в истории логики надо отметить главным образом следующие важные моменты: возникновение диалектической логики у Гегеля (1770—1831), труд которого «Wissenschaft der Logik» появился в 1812—1816 гг.,* и особенно первое систематическое введение математических символов в логику, которым мы обязаны англичанину Дж. Булю (G. Boole, 1815—1864).

О диалектической логике мы будем еще говорить далее; здесь скажем несколько слов о работах Буля, которые подробнее будут рассмотрены ниже. Главными его трудами в интересующей нас области были «Исследование законов мысли» (1854) и более ранняя работа «Математический анализ логики» (1847), в которой впервые рассматривается логический символизм, алгебра логики. Как уже упоминалось, гораздо ранее, задолго до Буля, идею о возможности алгебраизации логики высказал Лейбниц, говоривший об «универсальной характеристике» и понимавший под этим возможность объединения единым символом одинаковой логической сущности самых различных по внешности математических и иных построений.

Нетрудно заметить, что истоки этой мысли об универсальности и допустимости алгебраизации логики лежат у Буля, как и у Лейбница, в одних и тех же математических фактах.

Именно Лейбниц ввел свою символику для производных и дифференциалов n-го порядка с явными указаниями на аналогию со степенями алгебраических количеств, и, например, формула Лейбница для n-ой производной от произведения двух функций представляет очевидную аналогию бинома Ньютона; то же можно сказать об n-ом дифференциале функции нескольких независимых переменных. Подобные аналогии несомненно и навели Лейбница на мысль об «универсальной характеристике», на идею о том, что существует нечто «общелогическое» в математических фактах различного характера.**

То же самое можно сказать и о Буле, который с успехом ввел символические методы решения дифференциальных урав-

---

* Мы упоминаем о Гегеле потому, что имеем в виду высказать в дальнейшем несколько соображений о соотношении логики математической и диалектической (см. «Дополнения»).

** Любопытно, что Лейбниц занимался и конструированием счетной машины, что невольно наводит на сравнение с современными нам приложениями математической логики.

нений в математический анализ, что по существу продолжает идеи Лейбница и несомненно могло натолкнуть Буля на обобщение и сближение законов логики с областью чисто математической символики. Примерно это же можно сказать и об английском математике первой—начала второй половины XIX в. Августе де Моргане (1806—1871), также работавшим над символическими исчислениями и одновременно уделявшим большое внимание выяснению соотношения основ математики и логики и логическому обоснованию различных отделов математики.*

У всех упомянутых математиков (т. е. Лейбница, де Моргана и Буля) интенсивная работа в области символических методов математики сочеталась с попытками введения математической символики и в логику, — одно влекло за собою другое.

Работы Буля и де Моргана нашли в скором времени своих продолжателей (Джевонса, Пирса,** Шрёдера,*** П. С. Порецкого**** и др.); в конце концов, появились обширные формалистические исследования уже иного рода в трудах Фреге, Пеано, Уайтхэда и Рассела, Кутюра, Гёделя, Гильберта, И. И. Жегалкина и многих других, посвященные преимущественно уже иной задаче — обоснованию и исследованию начал математики.

Речь об этом дальнейшем развитии математической логики в виде формалистического направления в исследовании, по преимуществу оснований математики, будет идти далее.

Здесь мы только отметим, что Бертран Рассел, принадлежащий уже XX веку («Principia mathematica» — его основная работа, выполненная совместно с Уайтхэдом, вышла в 1910—1913 гг.), чрезвычайно высоко оценивал упомянутые работы Буля.

---

* Работы А. де Моргана оказали значительное влияние, например, на Ч. Пирса.

** Американский философ и математик Чарлз Пирс ввел много нового в логистику («логика относительных понятий»). Мы не можем подробно здесь на этом останавливаться.

*** E. Schröder (1841—1902) написал ряд капитальных работ по алгебре логики (1877, 1890—1891, 1895). Первой из этих работ воспользовался П. С. Порецкий, основательно улучшивший результаты Шрёдера, достигнутые в 1877 г. Несколько позже Шрёдера со своими работами выступил Г. Фреге (1848—1925), создавший впервые «исчисление высказываний» (1879) — логическую систему более простую, чем алгебра Буля, и интересную тем, что она возникла на основе исследования основ арифметики, т. е. примыкает уже к аксиоматическому направлению, первоначально совсем не интересовавшему математиков, занимавшихся математической логикой.

**** О работах казанского астронома и математика П. С. Порецкого, много внимания уделившего математической логике и достигшего важных результатов еще в начале 80-х годов прошлого столетия, речь будет идти особо.

Так, он прямо говорит, что «чистая математика была открыта Булем в сочинении, которое называется „Законы мысли" (1854)...» В другом месте он пишет: «Его (Буля, — *А. П.*) книга занимается формальною логикою, т. е. математикою». Для нас интересно это мнение Рассела в том смысле, что он прямо считает формальную логику тождественной с «чистой математикой», которой в его понимании является в сущности математическая логика, приспособленная к обоснованию начал математики. Далее, Рассел утверждает, что «вся чистая математика, включая геометрию, совпадает с формальною логикою».*

Полезно напомнить и то место, где он говорит, что «в чистой математике... идеи и предложения совпадают с идеями и предложениями чистой логики. Логика, в широком смысле этого слова, отличается тем.., что ее предложения могут быть представлены в форме, которая делает их применимыми к чему угодно. Вся чистая математика — арифметика, анализ и геометрия — построена из сопряжения примитивных идей логики, и ее предложения выводятся из общих аксиом логики, т. е. из силлогизма и других правил вывода».

«Предмет формальной логики, которая, таким образом, оказывается тождественною с математикою,** как известно,

---

* В этом вопросе, т. е. в вопросе об отношении между математикой и формальной логикой, между логикой Аристотеля и современными видами символической логики, было высказано много противоречивых мнений, с частью которых мы познакомимся в дальнейшем. Иные (в частности В. Ф. Асмус) считают, что, например, система математической логики Рассела—Уайтхэда является обобщением логики перипатетиков (Аристотеля) и логики стоиков (Хризиппа); другие признают существенное различие принципиального характера между логическими построениями древних и современными, — различие, вызываемое иными целями символической логики (по сравнению с древностью и средневековьем); третьи считают это различие преимущественно количественным, возникшим благодаря сложности вопросов, с которыми имеет дело современная математическая логика и т. д. Положение осложняется тем обстоятельством, что математическая логика в ее историческом развитии представляет в действительности не единую линию, — можно сказать даже, что здесь существуют по крайней мере три близкие, но все же различные ветви науки.

** Совершенно другая точка зрения высказана Гильбертом, который говорил, что логический «формализм Аристотеля оказывается недостаточным уже для самых простых логических связей. В частности, он принципиально недостаточен при рассмотрении логических основ математики. Именно, он отказывается служить повсюду, где необходимо символически отобразить соотношение между несколькими предметами» (Д. Гильберт и В. Аккерман. Основы теоретической логики. М., 1947, стр. 81). Впрочем, в других случаях Гильберт высказывался с гораздо бо́льшим почтением о формальной логике Аристотеля. Вообще же в вопросе о соотношении между обычной формальной и математической логикой единого мнения до сих пор не имеется.

изобретен Аристотелем», — говорит далее Рассел, подчеркивая, что разница, в сущности, является только количественной, так как Аристотель и следовавшие за ним схоласты не шли далее изолированных силлогизмов, тогда как во второй половине XIX и начале XX в. были построены целые логические конструкции, снабженные большим символическим аппаратом, подобным алгебраическому, и содержащие сложные комбинации и цепи умозаключений, а не отдельные элементы логического рассуждения. Мы преднамеренно остановились на этих высказываниях Рассела, относящихся еще к самому началу века (1901), чтобы показать, как высоко он оценивал работу Буля и его продолжателей и как он в то же время находил возможность сравнивать эти достижения формально-логического исследования XIX в. (разумеется, только в принципе) с достижениями формальной логики Аристотеля,* несмотря на огромное количество различий используемых там и тут логических конструкций. Именно этот пункт нам следует особенно иметь в виду.

* *
*

Переходя к дальнейшему развитию математической (или символической, как ее часто называют) логики,** необходимо прежде всего сказать, что это развитие долгое время шло главным образом по линии исследования и обоснования начал математики, т. е. по так называемому аксиоматическому направлению. Несмотря на то, что значительная часть работ по основаниям математики (например, по основаниям геометрии) излагалась только частью в полностью символизированной форме, их приходится причислить сюда же.

Постепенно создалось целое направление в изучении математических оснований, которое в общем получило наименование формалистического,*** с чем были согласны и его пред-

Большинство представителей математической логики основательно считает, что в ней содержится существенно новый комбинаторный момент, который не свойствен старой формальной логике и является всюду, где надо символически выразить связи и отношения между несколькими или многими вещами (ср. вышеприведенное замечание Гильберта).

* В свою очередь о самом Расселе М. Корнфорт говорит, что его «система формальной логики... представляла значительный шаг вперед по сравнению с традиционной Аристотелевой логикой. Для Аристотеля все предложения были субъективно-предикативными, и всякий вывод был силлогизм. Анализ Рассела дал более подробную теорию форм предложений и дедуктивных выводов». Однако это мнение Корнфорта не учитывает специфических целей Рассела в смысле направленности его исследования на изучение основ математики.

** Нередко ее называли логистикой, а также метаматематикой.

*** Мы не входим в подробности характеристик разных школ и направлений, названием «формалистический» подчеркивая лишь общее стремление к формализации науки.

ставители, так как они учили, что вся математика представляет формально-логическое построение, основные положения которого (аксиомы) лишены всякого внутреннего содержания. Это направление некоторое время господствовало в области изучения основ математики полностью, пока реакция на подобное преувеличение значения формы не вызвала ответное течение, известное под именем интуиционизма, представители которого, в противоположность формалистам, считали аксиомы имеющими свое собственное внутреннее содержание, помимо тех формальных элементов, которые с ними связаны.* Некоторые подробности относительно всего этого мы увидим далее. Здесь нам следует подчеркнуть следующее важное обстоятельство: интуиционизм в математической области далеко не то, что интуиционизм философский,** так как первый ограничивается, по существу, только принципиальным утверждением о невозможности обойтись в математике одними чисто логическими построениями в формальном духе. Одним словом, математический интуиционизм имеет значение только для математики и математической логики, нисколько не распространяясь на другие области.***

Это следует всегда помнить. Другое обстоятельство, которое мы хотели бы еще раз подчеркнуть здесь, состоит в том, что математическая логика как таковая (т. е. начиная с работ Буля) возникла в связи с математикой, на основе символики, близкой и родственной символике математической, но при этом первоначально вовсе не имелось в виду изучение и обоснование принципов математики.

Только впоследствии, в руках представителей формалистического направления (Гильберт и др.), математическая логика стала широко использоваться для исследования оснований математического анализа, геометрии и т. п., это привело к совершенно новым целям и задачам науки, которая получила содержание в значительной степени иное, чем то, которое ей

---

* Главные представители — основоположники интуиционизма: Брауэр (L. E. J. Brower) и Вейль (H. Weyl). Роль главного вдохновителя этого научного течения одно время играл знаменитый французский математик А. Пуанкарэ.

** Как говорит акад. А. Н. Колмогоров, «следует подчеркнуть, что употребление многими авторами, далекими от философии интуиционизма, терминов „интуиционистская логика", „интуиционистская арифметика" в качестве „технических терминов" вносит большую путаницу и должно быть признано неправильным» (предисловие к кн.: Р. Петер. Рекурсивные функции. М., 1954, стр. 9). Не желая применять термин «интуиционистский», часто говорят о «конструктивном анализе», «конструктивной математике», «конструктивной логике».

*** Поэтому многие предлагают называть построение математики, основанное на интуиционистских началах, просто «конструктивной математикой» (ныне термин этот весьма распространен).

придавали Буль, Джевонс, Шрёдер и Порецкий, несмотря на то, что приемы, символика и терминология были изменены не очень значительно.

Так или иначе, эта наука чаще всего продолжала называться по-прежнему математической логикой, хотя ее по существу следовало называть символико-логическим исследованием основ математики, и вообще это было уже не непосредственное продолжение алгебры логики Буля, Порецкого и др.* — это был новый отдел науки, который лучше всего назвать, как это иногда и делают, метаматематикой. В самом исследовании основ математики наметилось несколько направлений: крайне формалистическое (Гильберт и его школа), так называемое логистическое, или логицистическое (Рассел и др.), считающее математику ответвлением логики, и интуиционистское, или конструктивное. Все это усложняет характеристику математической логики и заставляет видеть в ней не одну науку, а несколько родственных наук.**

Выше мы видели, что некоторые (например, Рассел) даже считают математическую логику единственной настоящей чистой математикой, относя остальные отделы математики к разряду прикладных. Поэтому мы здесь должны будем отчасти коснуться некоторых вопросов, связанных с основаниями математики в учении формалистического и интуиционистского направлений. Без подобных уклонений в область оснований математики многое окажется неясным и непонятным, — в том числе и критика интуиционистами беспредельного и безоговорочного применения закона исключенного третьего.***

Наряду с приложениями логического формализма к изучению принципов математики мы несколько познакомимся и с дальнейшим развитием математической логики. Здесь к нашему времени оформились три основных направления в математической логике:

1) «исследование законов мысли» — по Булю, т. е. применение математической символики к общелогическим абстракциям;

---

* Булева алгебра продолжала развиваться по особому пути.

** Мы не отмечаем здесь других ответвлений и приложений символической логики. Уже Буль приложил свою алгебру логики к теории вероятностей (за ним Порецкий и др.). Такое приложение напрашивается само собой, так как двузначное исчисление (0,1) обеспечивает удобное выражение полной достоверности (1) и полной невероятности (0) события. Разумеется, количественное понятие о вероятности события не может быть введено сюда без дополнительных соображений. Однако это можно провести без особых затруднений, и в дальнейшем это может служить для аксиоматического построения теории вероятностей.

*** Вопрос об этом в классической алгебре логики Буля—Порецкого по существу дела не мог и подниматься, а в современной математической логике (метаматематике) он играет чрезвычайно важную роль.

2) применение и исследование оснований математики, причем логисты считали чистую математику вообще частью логики;

3) изучение проблемных и алгоритмических возможностей математики в дальнейшем развитии в связи с теоретическими задачами расширения различных комбинаторных областей математики.

Последнее направление приобрело за последние годы особенно широкое значение в системе математических наук; оно не имеет, в сущности, никакого прямого отношения к основаниям математики (в смысле аксиоматического исследования). Правда, с задачами алгебры логики здесь имеется сходство, но по характеру проблем и методам решения в этом направлении осталось так же мало общего с первоначальной алгеброй логики Буля, как мало осталось общего в современной алгебре с алгеброй первой половины XIX в.

Сейчас в математической логике вполне оформилось несколько важных практически отраслей исследования, связанных с построением счетных машин и тому подобных конструкций. Сюда относятся различные теории алгоритмов, теория рекурсивных функций и др. Здесь следует упомянуть работы А. Н. Колмогорова, П. С. Новикова, так называемую ленинградскую школу чл.-корр. АН СССР А. А. Маркова (у нас в Ленинградском университете эту школу с успехом представляет Н. А. Шанин), школу американского математика Поста и др.* В Соединенных Штатах Америки это направление развито весьма широко.

Имеются и иные направления, среди которых упомянем ответвление, специально занимающееся вопросами логики в связи с вопросами теории вероятностей; заметим, что основы этого рода работ заложены также Булем,** которого и следует считать подлинным начинателем математической, или символической, логики как науки, которую можно считать в этом смысле ответвлением и от логики и от математики, подобно тому как физическая химия и химическая физика ответвились от физики и химии; при этом и математическую логику ныне следует считать уже не единой наукой.

* * *

Итак, мы начнем наше изложение с Дж. Буля, в дальнейшем придерживаясь в общих чертах исторической последовательности в развитии науки.

---

* Например, варшавская школа логиков (Лесневский, А. Тарский и др.), дальнейшее развитие которой происходило в значительной степени в США (тот же Тарский, Руд. Карнап и др.), связывалась с направлением так называемых семантиков и прагматистов.

** Занимался этим и П. С. Порецкий.

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Дж. Буль

Джордж Буль (1815—1864) может считаться действительным основоположником математической логики вообще. Следует, однако, сказать, что алгебра логики Буля представляет не совсем то направление, которое впоследствии развилось особенно широко и было приспособлено специально к формальному обоснованию начал математики. Это, конечно, вполне естественно, так как во времена Буля (середина XIX в.) стремление к изучению оснований математики еще не достигло своих крайних размеров. Буль, будучи математиком, заметил и осознал, подобно Лейбницу, то обстоятельство, что в формальной основе многих суждений — собственно математических или иных — лежит одна и та же сущность, позволяющая применить алгебраическую или подобную ей символику к выводу этих суждений. Мы говорим здесь о единой сущности логических и математических суждений только в формальном отношении, понимая это в том смысле, что над качественными понятиями и суждениями производятся операции, весьма похожие на операции над количествами.

Вопрос только в том, насколько далеко простирается здесь аналогия и можно ли ею воспользоваться для целей символизации логических понятий и отношений. Можно с уверенностью утверждать, что Буля привело к открытию этой аналогии им же подмеченное сходство между свойствами простейших алгебраических действий и свойствами линейных дифференциальных операторов, что и было выражено самим Булем в форме символического метода интегрирования линейных дифференциальных уравнений.

Действительно, если линейный дифференциальный оператор можно символически изобразить в виде алгебраического полинома и если допустимо оперировать сначала с задачей алгебры, а потом истолковать полученный результат в другом

смысле — как интеграл заданного дифференциального уравнения, то отсюда естественно возникает мысль о какой-то общелогической сущности, лежащей в основе обоих процессов — алгебраического и дифференциального, сущности, которая должна определять формальное внешнее единство целого ряда подобных математических и логических операций, составляя то, что Лейбниц назвал «универсальной характеристикой».

Нелишним будет вновь сказать, что Лейбница к этой мысли привели, несомненно, те же самые математические аналогии, что и Буля; различие только в том, что у первого это замечание осталось в общем виде, тогда как второй решился практически проверить свою мысль и построил, таким образом, первую систему символической логики.*

В чем же состоит эта система? Буль вводит следующие знаки:

1** — обозначение класса всех предметов, вещей, которые вообще подлежат рассмотрению в данном суждении;

0 — выражение отсутствия предметов, подлежащих рассмотрению;

x, y, и т. д. — обозначают вещи, обладающие соответственно качествами X, Y, .. и т. д.,*** т. е., иначе говоря, x есть класс вещей, обладающих свойством X и т. д.

Кроме того, Буль ввел знаки символических действий $+$, $-$, $\cdot$, обозначающих те мысленные операции, которыми сочетаются классы вещей в логических суждениях (логическое сложение, вычитание, умножение).

Наконец, для выражения логического равенста Буль применил обычный знак $=$.

Операция символического умножения классов x и y представляет действие, выделяющее из всех рассматриваемых предметов класс таких вещей, которые обладают одновременно свойствами X и Y.

Совершенно ясно, что полученное символическое произведение xy (знак умножения обычно опускают, как и в обычной алгебре) представляет класс вещей более узкий, чем классы, определяемые символическими множителями x и y. [Операция символического умножения называется еще конъюнкцией (латинск. conjunctio 'сочетание', 'связь', 'союз')].

---

* Предшественником Буля явился еще Ламберт, установивший дистрибутивность логических операций.

** Но не ∞.

*** Так, например, свойство X может обозначить «белое», свойство Y — «большое» и т. п. Заметим попутно, что отсюда сразу очевидна возможность связать вопросы логического исчисления с вопросами теории вероятностей в случае независимых событий. Это и было сделано Булем, Порецким и др.

Из самого определения логического «умножения» (конъюнкции) ясно, что при $x = y$ получаем символически $x \cdot x = x^2 = x$, так как выбрать из всех предметов только обладающие свойством X, а из них отобрать предметы, обладающие тем же свойством — значит оставить опять-таки тот же самый класс x.

Итак, мы видим, что в символической алгебре логики Буля имеет место равенство (разумеется, символическое):

$$x = x^2$$

(и вообще: $x = x^n$, где n — любое целое число).

Отсюда ясно, что если возможна «алгебра логики» в смысле Буля, то ее операции должны совпадать формально с операциями обычной элементарной алгебры, примененными только к корням квадратного уравнения $x^2 - x = 0$, т. е. к числам 0 и 1.*

Оказывается, что построение такого «двузначного исчисления» вполне возможно.

Для обнаружения этого надо только показать полную формальную аналогию свойств операций над алгебраическими количествами и свойств введенных логических операций.

Рассмотрим введенную операцию «умножения» (конъюнкция). Легко видеть, что логическое умножение обладает свойством:

$$xy = yx,$$

т. е. оно коммутативно, как и обыкновенное умножение алгебраических и арифметических величин.

Далее:

$$x(yz) = (xy)z$$

и т. п.,

так что логическое умножение ассоциативно — подобно обычному.

Введем теперь понятие об операции логического «сложения» или дизъюнкции (латинск. disjunctio 'разобщение'). Под «сложением» классов x и y будем разуметь класс вещей, обладающих или свойством X или свойством Y, но не в смысле исключения одним другого, а в смысле признания равнозначности, равноценности того и другого свойства как признака для определения класса $x + y$.

Класс $x + y$ является, таким образом, собранием всех индивидуумов, содержащихся в классах x и y, т. е. является в ка-

---

* Можно также рассматривать введенные операции как сравнения, как операции над классами вычетов по модулю 2, так как таких вычетов (остатков от деления на 2) будет только два (0 и 1). Об этом будет говориться далее.

кой-то мере аналогом обыкновенной арифметической суммы.*

Заметим, что $x + x = x$ и вообще $x + x + x + \ldots + x = x$; в связи с этим следует заметить, что никаких численных величин здесь не подразумевается, так что $x + x$ по существу нельзя заменять через $2x$, так как число и символ 2 вовсе не входят в систему Буля. Если мы иногда пишем сокращенно $xx = x^2$ и т. п., то это только обозначение того, что логическая операция отбора вещей со свойством X повторяется дважды (тавтология).

Обратимся теперь к исследованию свойств логического сложения в символической алгебре Буля.

Совершенно очевидно, что

$$x + y = y + x,$$

т. е. соблюден закон коммутативности.

Таким же образом легко видеть, что соблюдается и свойство ассоциативности, т. е.

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

и т. п.

Наконец, действует и закон дистрибутивности «сложения» по отношению к «умножению», так как ясно, что

$$z(x + y) = zx + zy.**$$

Поэтому совершенно очевидно, что составленный Булем логический символизм окажется в области определенных действий совершенно тождественным с алгеброй соответствующих действий (умножение и сложение) для количеств, принимающих только два значения: 0 и 1. Заметим, что имеется и второй закон дистрибутивности: $a + bc = (a + b)\ (a + c)$.***

Не совсем удачно введение Булем знака —, применение которого может вызвать недоразумения, если забыть о его точном новом смысле.

---

* Следует, впрочем, сказать, что нередко называли конъюнкцию сложением, а дизъюнкцию умножением. Это оказывается возможным потому, что свойства обеих операций в логике совершенно сходны. Кроме того, дизъюнкцию понимают во многих случаях несколько иначе, чем у Буля.

** Это выяснил еще швейцарский математик и философ И. Г. Ламберт в XVIII в.

*** Буль называл его упрощенным правилом умножения. Кроме того, очевидно: $a(bc) = (ab) \cdot (ac)$, т. е. имеется третий закон дистрибутивности. Наконец, имеется четвертый закон этого рода:

$$a + (b + c) = (a + b) + (a + c).$$

Этим логические операции сильно отличаются от математических (алгебраических).

В этом Буля не без оснований упрекали впоследствии Джевонс, Порецкий и др.

Заметим, впрочем, что сам Буль обычно правильно истолковывал свои результаты даже и при применении знака —. Так, например, он определяет $1 - x$ как класс «не-x». В связи с этим Буль использует логическое равенство $x = x^2$ следующим образом:

$$x - x^2 = 0.$$

Следовательно,

$$x \cdot (1 - x) = 0,$$

откуда он выводит, что не существует таких вещей, которые принадлежат одновременно к классу x и к классу «не-x».

Вывод, таким образом, правилен, несмотря на отсутствие строгого обоснования производимых здесь операций, которые выполняются просто по аналогии с обычной алгеброй.

* *
*

Буль, вводя алгебраический символизм в логику, преследовал цель такого преобразования этой науки, при котором все логические умозаключения выполнялись бы, так сказать, механически. Исходные положения обращаются в формулы, над формулами производятся действия по определенным законам упрощенной («двузначной») алгебры, и затем полученные результаты опять истолковываются в обычных, несимволических формулировках. Заметим при этом, что алгебра логики Буля не имела никакого отношения к исследованию оснований математики, тогда как впоследствии стало преобладать направление именно этого характера, — по крайней мере, до 40-х годов нашего столетия.

Следует сделать еще одно замечание. У Буля, в сущности, совершенно отсутствуют бесконечные процессы; его символ 1 следует понимать как мир всех вещей, но слово «все» не обозначает здесь чего-то, похожего на характеристику множества с бесконечным числом элементов. «Все вещи» для Буля — это обозначение совокупности вещей, входящих в данное рассуждение; можно и даже должно всегда мыслить это собрание вещей конечным, причем суждения от числа предметов не зависят. Впоследствии это обстоятельство подало повод к недостаточно обоснованному обобщению логической символики на бесконечные совокупности вещей и трансфинитные суждения, что вызвало, в свою очередь, ряд антиномий.

* *
*

Таковы основные обозначения Буля. Далее можно разделить все логические предложения на 2 разряда: 1-го и 2-го порядка; первые описывают отношения между вещами, вторые — отношения между предложениями (впоследствии это обобщение было продолжено).

Таким образом, можно выражать логические связи при помощи символики Буля. Иначе говоря, всякая система предложений может быть выражена уравнениями, в которые входят символы $x, y, z, \ldots$; с этими символами можно в пределах вышеуказанных операций обращаться так, как в алгебре с соответствующими буквами, допускающими только два численных значения: 0 и 1.

Можно ввести далее символы $f(x)$, $f(x, y)$, $f(x, y, z)$ и т. п., где $f(x)$ и прочие формально суть некоторые алгебраические выражения, понимаемые, однако, в новом смысле — в согласии со сказанным выше, т. е. как функции от логических символов x, y, z.

Легко видеть, что любая такая функция может быть приведена к виду:

$$f(x) = ax + b(1 - x),$$

так как любая символическая степень x заменяется через x, так что в конце концов остается только линейное выражение от x. Полагая здесь $x = 0$, найдем $b = f(0)$; при $x = 1$ находим $a = f(1)$; отсюда

$$f(x) = f(1) \cdot x + f(0) \cdot (1 - x).$$

Это есть основное Булево представление любой символической функции $f(x)$.

Точно так же

$$f(x, y) = f(1,1)\,xy + f(1,0)\,x(1 - y) + f(0,1)(1 - x)\,y + \\ + f(0,0)(1 - x)(1 - y)$$

и т. д.*

---

* Если имеем 3 класса a, b, c, то

$$f(a, b, c) = f(1, 1, 1)\,abc + f(1, 1, 0)\,abc_1 + \\ + f(1, 0, 1)\,ab_1c + f(1, 0, 0)\,ab_1c_1 + f(0, 1, 1)\,a_1bc_1 + \\ + (0, 1, 0)\,a_1bc_1 + f(0, 0, 1)\,a_1b_1c + f(0, 0, 0)\,a_1b_1c_1;$$

здесь булевские $1-a$, $1-b$, $1-c$ заменены по примеру последующих исследователей (Шрёдер, Порецкий) через a_1, b_1, c_1, т. е. через отрицание классов a, b, c. Совершенно аналогичным образом составляются разложения при любом числе аргументов, т. е. форма разложения сохраняется такая же.

Толкование полученных выражений не вызывает затруднений. Например, последнее равенство состоит из четырех слагаемых, в которые входят соответственно произведения:

xy — класс предметов, обладающих одновременно свойствами X и Y;

$x(1-y)$ — класс со свойством X, но без свойства Y;

$(1-x)y$ — класс со свойством Y, но без свойства X;

$(1-x)(1-y)$ — все предметы, лишенные свойств X и Y.

* *
*

Буль очень смело обращался со своими символами и применял к ним часто такие действия, которые выходили за пределы им же установленных правил, хотя обычно и получал при этом верные результаты.* Уже его ученик Стэнли Джевонс отметил этот общий недостаток алгебры логики Буля в изложении последнего. На это указывал и другой продолжатель Буля—Шрёдер.** Однако наиболее ясно выразил это обстоятельство и внес при этом в символическую логику много существенно нового казанский астроном и математик — приват-доцент Казанского университета П. С. Порецкий.

---

* Для Буля эта проверка его символической логики и являлась доказательством законности действий. Вообще необходимо отметить, что главной заслугой Буля явилось именно открытие глубокой аналогии между определенными областями логических и математических операций и отчетливый показ открывающихся здесь возможностей. Ни о каком строгом предварительном обосновании своей системы Буль и не думал, у него нет никаких следов аксиоматического (в современном смысле) построения теории, к чему были так склонны позднейшие авторы. Точно так же он имел в виду не строго логическое исследование оснований математики, а только приложение простейшей математической символики к основным задачам логики. Кроме того, Буль явился основоположником применения символики логических отношений к теории вероятностей.

** Буль ставил, например, следующую задачу: решить логическое равенство $f(a, b, c, \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots)$ относительно класса a (через остальные классы $b, c, \ldots$). Буль прямо решает его алгебраически, получая $a = \pi(b, c, \ldots)$, где π, вообще говоря, дробная функция, причем всюду возможно наличие отрицательных слагаемых. Эту функцию Буль разлагает по всем классам, а затем дает правила рационального истолкования, чтобы преобразовать результат опять в логические функции. По этим правилам только коэффициенты 0 и 1 могут быть сохранены без изменения, коэффициенты вида $\frac{0}{0}$ заменяются неопределенными классами $u, v, \ldots$, целые коэффициенты заменяются единицами; что касается бесконечных, отрицательных и дробных коэффициентов, то соответствующие члены выбрасываются. Но так как коэффициенты не нули, то нулями должны быть множители при них (конституенты), что дает дополнительные условия (выражения несовместности соответствующих конституентов с исходным равенством):

О Джевонсе мы скажем только следующее: он правильно указал на то обстоятельство, что применение Булем операции символического вычитания неудобно и может повести к недоразумениям.

Кроме того, Джевонсом была сконструирована первая простейшая логическая машина.

Шрёдер дал первое систематическое изложение математической логики (1877), впоследствии весьма им расширенное. Однако значительно интереснее для нас работы Порецкого, вполне закончившего алгебру Буля.

В заключение приводим решение логической задачи по методу Буля: «Ответственные существа суть такие разумные существа, которые или обладают свободой, или добровольно от нее отказались». Определить класс разумных существ. Пусть x — ответственные, y — разумные, z — обладающие свободой, w — добровольно от нее отказавшиеся существа. Требуется найти y через x, z, w. Согласно условиям задачи исходное равенство будет:

$$x = y(z + w) = yz + zw.$$

Отсюда

$$y = \frac{x}{z + w} = \pi(x, z, w) = xzw\pi(1, 1, 1) + xzw_1\pi(1, 1, 0) +$$
$$+ xz_1w\pi(1, 0, 1) + xz_1w_1\pi(1, 0, 0) + x_1zw\pi(0, 1, 1) +$$
$$+ x_1zw_1\pi(0, 1, 0) + x_1z_1w\pi(0, 0, 1) + x_1z_1w_1\pi(0, 0, 0);$$

причем:

$$\pi(1, 1, 1) = \frac{1}{2};\ \pi(1, 1, 0) = 1;\ \pi(1, 0, 1) = 1;$$
$$\pi(1, 0, 0) = \infty;\ \pi(0, 1, 1) = 0;\ \pi(0, 1, 0) = 0;$$
$$\pi(0, 0, 1) = 0;\ \pi(0, 0, 0) = \frac{0}{0} = v.$$

Окончательно: $y = xzw_1 + xz_1w + vx_1z_1w_1$;
кроме того, $xzw = 0$, $xz_1w_1 = 0$.

Следовательно, разумные существа суть: 1) все ответственные существа, обладающие свободой и не отказавшиеся от нее; 2) все ответственные существа, не обладающие свободой и отказавшиеся от нее; 3) некоторая часть таких существ неответственных, которые, не обладая свободой, не отказывались от нее. Кроме того, не существует таких ответственных существ, которые, 1) отказавшись от свободы, обладали бы ею, 2) не обладая свободой, не отказывались бы от нее.

Этот пример решения задачи по способу Буля показателен в том отношении, что на нем ясно можно видеть приемы самого основателя математической логики. Он хорошо знал правила

сокращенных действий в математической логике, но предпочитал, как мы уже видели, действовать иначе, т. е., в сущности, не прямым, а обходным путем. Благодаря тому, что Буль формулировал задачу логики алгебраически, а потом и решал ее в основном с помощью обычных алгебраических приемов, — он был вынужден давать рецепты для механического перетолкования получаемых алгебраических результатов в логические. Это обстоятельство налагало на алгебру Буля в его изложении столь своеобразную печать, что П. С. Порецкий впоследствии говорил даже, что способ Буля требует выполнения «таинственных операций», которые, впрочем, приводят к совершенно верным заключениям. На самом деле основная мысль Буля заключается просто в том, что достаточно найти точные правила автоматического перехода от алгебраических результатов к логическим; путем применения этих правил можно любую задачу логики формулировать и решать алгебраически, истолковывая в конце концов все полученное в терминах логики.

Однако этого рода конструктивный прием Буля не вошел в общее употребление, и вообще в дальнейшем развитии алгебра логики значительно отклонилась от обозначений и способов своего основателя, хотя существо дела осталось то же.

В силу сказанного мы не будем задерживаться далее на работах Буля и перейдем к тем исследованиям его продолжателей, которые по форме своих приемов и результатов стоят ближе к современному состоянию математической логики. Из этих продолжателей мы будем иметь в виду особенно П. С. Порецкого, представившего еще в 80-е годы прошлого века алгебру логики в наиболее законченной и совершенной форме.

Э. Шрёдер

Прежде чем говорить о Порецком, следовало бы сказать несколько слов о Шрёдере, который несколько раньше русского ученого попытался представить систематическое изложение символической логики Буля в несколько измененных обозначениях и трактовке.

Однако работы Порецкого стоят гораздо выше, и первая попытка Шрёдера сохранила поэтому лишь историческое значение. К тому же наиболее существенное из этой попытки имеется на русском языке в очень отчетливом изложении московского математика В. В. Бобынина (см. В. В. Бобынин. Опыты математической логики, вып. 1. М., 1886; вып. 2. М., 1894).

Очень интересно, что появившиеся уже в это время работы Порецкого (1884) остались вне поля зрения Бобынина. Что касается более позднего обширного трактата Шрёдера, то он не

содержит по существу ничего нового по сравнению с работами Порецкого, отличаясь только крайне подробным и доходящим до мелочей изложением, содержащим много ненужного для понимания сути дела.

П. С. Порецкий

Платон Сергеевич Порецкий (1846—1907) был астрономом-наблюдателем и приват-доцентом Казанского университета. Он занимался, кроме того, математической логикой, в которой оставил значительный след. Первый толчок в этом направлении дал ему известный казанский математик проф. А. В. Васильев, доставивший Порецкому основную работу Буля. Заинтересовавшись этим кругом идей, Порецкий ознакомился с исследованиями Буля, Джевонса и Шрёдера; после нескольких лет работы он в 1884 г. выпустил в свет результаты своих изысканий в виде книги под общим заголовком «О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики». Эта весьма обстоятельная и интересная работа была впоследствии высоко оценена известным французским логистом Л. Кутюра, считавшим ее наивысшим достижением символической логики XIX в.

К краткому изложению основных результатов Порецкого мы теперь и переходим, всюду придерживаясь его обозначений и терминологии. Заметим, что П. С. Порецкому, кроме указанной, принадлежат и другие работы по математической логике. Интересовали его и приложения алгебры Буля к теории вероятностей.

Порецкий продолжает основную линию своих предшественников — Буля, Джевонса и Шрёдера — в том смысле, что его интересует в основном логика, а не математика; он ясно понимает и явно выражает свое отношение к предмету в следующих словах: «Математическая логика по предмету своему есть логика, а по методу математика; ...главнейшая, а может быть даже и единственная, ее задача заключается в построении теории умозаключений... А ее метод... аналогичен математическому методу алгебры...» Отсюда ясно, что работы Порецкого всецело примыкают по характеру к работам Буля и ни в какой мере не относятся к тому направлению исследования оснований математики, которое развилось впоследствии и связано с именами Фреге, Пеано, Гильберта, Рассела и др.

Кроме того, необходимо с особенным ударением подчеркнуть, что «мир речи», «мир вещей», т. е. совокупность всех подвергаемых обсуждению предметов и их свойств, у Порецкого всегда конечен по числу предметов, в него входящих. Иначе

говоря, Порецкий (как и Буль) имеет дело всегда с конечными совокупностями предметов и их свойств,* хотя ничто не мешает свободному переходу отсюда к потенциальной бесконечности. Однако актуальной бесконечности в рассуждениях Порецкого места нет. Это сообщает необходимую строгость всем его суждениям.

Как и Буль и Шрёдер, Порецкий вводит буквенные символы $a, b, c, \ldots$ для обозначения классов предметов, обладающих соответственными отличительными качествами,** представляющими понятия, совершенно независимые между собою, не находящиеся сами по себе ни в каком отношении одно к другому. Поэтому каждое рассматриваемое качество и каждый класс предметов, ему соответствующий, требует для себя особого символа, который не связан с другими до тех пор, пока эта связь не определена каким-либо особым высказыванием, устанавливающим отношения между классами для данного суждения.

Для обозначения классов («качественных форм») Порецкий, как сказано выше, вводил символы $a, b, c, \ldots$ и т. д. Для отрицания «не-a», «не-b» и т. п. Порецкий, следуя Шрёдеру, продолжал применять буквы со значками $a_1, b_1, c_1, \ldots$ и т. д., что очень удобно.

Таким образом, a_1 означает класс предметов, не обладающих тем свойством, которым обладает класс a. Этим, заметим попутно, устраняется применение знака — (минус) и таким образом улучшается символика Буля (об этом, впрочем, говорили и Джевонс и Шрёдер).

Далее Порецкий вводит формы (классы) совместного обладания несколькими независимыми признаками, следуя здесь Булю, т. е. изображая класс предметов, обладающих признаками a и b совместно, символическим произведением ab.

Из самого определения уже очевидно свойство коммутативности:

$$ab = ba.$$

---

* Явно он этого, как правило, не высказывает. Иногда даже можно понять Порецкого так, будто бы он считал возможным рассматривать и неограниченное число однородных предметов в данном классе (разумеется, не в смысле актуальной бесконечности). Однако это не получает никакого отражения в его суждениях, так как число предметов, содержащихся в данном «мире речи», в эти суждения никогда не входит и не имеет к ним отношения.

** Порецкий иначе называет классы «качественными формами» — в отличие от «количественных форм» алгебры. Фактически он все время оперирует с «объемами» понятий; легко можно было бы привести в связь его представления и с теорией множеств, но от этого изложение Порецкого ничего не выиграло бы.

Точно так же, если взять три независимых признака или больше, то очевидно свойство ассоциативности:

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{и. т п.}$$

Совершенно ясно также свойство

$$aa = a,$$

или сокращенно: $a^2 = a$,
и, вообще, $a^n = a$, так что все логические соотношения в конце концов должны приводиться к линейному виду (относительно каждой отдельной формы). Каждая сложная форма, полученная произведением простых, представляет, очевидно, более узкий класс вещей, чем те формы, из которых она получена («сомножителей»); так, например:

$$m = abc_1d_1e$$

представляет собрание предметов, обладающих свойствами a, b, e и не обладающих свойствами c и d.

Поэтому m является подклассом по отношению ко всем сомножителям, их общей частью.

Порецкий называет операцию логического умножения (конъюнкцию) реализированием качественных форм. Далее он вводит операцию, в известном смысле обратную по отношению к реализированию, т. е. операцию перехода от подклассов к классам. Взяв две формы a и b, можно образовать новую качественную форму, происходящую от такого слияния форм a и b, при котором одна часть новой полученной формы содержит весь класс a, а вся остальная обнимает все, что относится к классу b. Эту операцию (дизъюнкция) Порецкий называет операцией абстрагирования форм a и b и сначала обозначает знаком ?, так что получает из a и b результат:

$$a ? b.$$

Более общим образом, например, $a ? b_1 ? c ? d_1$ есть качественная форма, состоящая из четырех отдельных частей:

1) все, что есть a; 2) все, что не есть b;
3) все, что есть c; 4) все, что не есть d.

Операция абстрагирования обладает, как легко видеть, свойствами коммутативности и ассоциативности; кроме того, нетрудно показать, что абстрагирование дистрибутивно в отношении реализирования, т. е. $(a ? b)c = ac ? bc$.

Порецкий подчеркивает аналогию введенных логических операций и алгебраических операций умножения и сложения. Для проведения дальнейшей аналогии со свойствами алгебраического сложения:

$$a + 0 = a$$

и умножения:

$$a \times 1 = a,$$

Порецкий вводит понятие о модуле реализирования и абстрагирования качественных форм. Качественную форму, не имеющую никакого содержания (немыслимую, невозможную) он называет логическим нулем (0), а форму, содержащую в себе всевозможные подклассы, входящие в рассуждение, — миром качественных форм (символ 1, но не ∞ на что Порецкий тут же указывает). Очевидны свойства введенных операций по отношению к 0 и 1:

$$a ? 0 = a; \; a \cdot 1 = a.$$

Сравнивая все полученные свойства введенных операций со свойствами сложения и умножения в алгебре, Порецкий убеждается в их аналогии и поэтому заменяет символ ? знаком $+$, а операции абстрагирования и реализирования форм называет далее просто сложением и умножением классов. Далее им указываются основные очевидные правила булевской логики:

$$a + a = a$$
$$a \cdot a = a$$

и более общие:

1) $a + ab = a$ (только белое и только белое-крупное дает только белое);

2) $a(a + b) = a$ (общее между белым, с одной стороны, и белым или крупным, с другой, есть белое).

Все это было, разумеется, известно и до Порецкого. Он подчеркивает не только сходства алгебры математической и логической, но и их различия. Прежде всего, он отмечает, что «если в алгебре сложение и умножение представляет пару прямых операций, которой соответствует пара операций обратных (вычитание и деление), то в логике сложение и умножение суть взаимно-обратные операции, а поэтому нет оснований для ...употребления в логике операций вычитания и деления».* Эта мысль отличает построения Порецкого от построений его предшественников и оказывается весьма полезной в применениях. Имея классы a и b, строим из них путем умножения класс ab (логическое произведение); как получить из ab логический множитель a (или, соответственно, b), т. е.

---

* Подчеркивая в известном смысле обратный характер операций логического сложения и умножения, мы должны признать их взаимозаменяемость, т. е. безразличие в том отношении, что можно «сложение» принять за «умножение», и наоборот. При этом, разумеется, существует и второй закон дистрибутивности («умножения» по отношению к «сложению», как и «сложения» по отношению к «умножению»). В обычной алгебре этого закона нет. В алгебре логики второй закон дистрибутивности совпадает с так называемым правилом сокращенного умножения в исчислении Буля:

$$a + bc = (a + b)(a + c).$$

произвести операцию, обратную умножению? Для этого достаточно воспользоваться сложением, ибо

$$ab + a = a$$
$$ab + b = b.$$

И наоборот, если имеем логическую сумму $a + b$, то можно извлечь из нее слагаемое a (или, соответственно, b) умножением на a (или, соответственно, b), так как

$$(a + b)a = a,$$
$$(a + b)b = b.$$

Таким образом, можно считать логические операции сложения и умножения взаимообратными, так что они вместе представляют замкнутую систему операций. Отличие от алгебраических операций здесь заключается только в том, что в обыкновенной алгебре, чтобы получить из произведения ab множитель a, делят ab на другой множитель b; здесь же, чтобы получить a, прибавляют к произведению ab само a.

Аналогичные отличия наблюдаются и в других случаях соответственных операций. Вслед за операциями логического сложения и вычитания Порецкий вводит операцию отрицания классов, которая не имеет точного аналога в практике обычной алгебры. Делает он это для того, чтобы избежать мало удобного в логике употребления знака вычитания. Так как класс, обратный классу a, т. е. класс предметов, не обладающих рассматриваемым свойством, обозначен был через a_1 и так как классы a и a_1 уже не являются независимыми друг от друга, то Порецкий вводит следующее формальное определение — класс x, который удовлетворяет условиям

$$a + x = 1; \quad ax = 0,$$

называется отрицанием класса a и обозначается через a_1.

Два указанных условия выражают, что:

1) отрицание дополняет данный класс до 1 (т. е. «класса мира» рассматриваемых вещей);

2) отрицание класса не представляет ничего общего с этим классом.

Пользуясь этими условиями легко определить отрицание суммы, именно

$$(m + n)_1 = m_1 n_1,$$

или

$$m_1 n_1 = (m + n)_1.*$$

---

* Эти правила были установлены еще де Морганом.

Действительно, если сумма $m+n=a$, то $(m+n)_1=a_1$; допустим, что $a_1=m_1n_1$.

Отсюда Порецкий получает тождество и заключает, что предположение верно (другого результата быть не может вследствие однозначности логических действий).

Доказательство:

$$1=a+a_1=m+n+m_1n_1=m\cdot 1+n\cdot 1+m_1n_1=$$
$$=m(n+n_1)+n(m+m_1)+m_1n_1=mn+mn_1+$$
$$+mn+m_1n+m_1n_1=mn+mn_1+m_1n+m_1n_1=$$
$$=m(n+n_1)+m_1(n+n_1)=m\cdot 1+m_1\cdot 1=m+m_1=1$$

есть тождество.

Далее,

$$0=aa_1=(m+n)m_1n_1=mm_1n_1+m_1nn_1=0+0=0$$

тождество

Таким образом, допущения $a=m+n$ и $a_1=m_1n_1$ удовлетворяют нашим условиям определения a_1 по отношению к a:

$$a+a_1=1;\ aa_1=0.$$

Поэтому очевидно, что $(m+n)_1=m_1n_1$ и $(m_1n_1)_1=m+n$ или $(mn)_1=m_1+n_1$.*

В логической системе Порецкого применяются только три указанные операции: сложение, умножение и отрицание. Затем вводится обычный знак равенства (=) для обозначения логической эквивалентности (или логического равенства) классов. Для равенств устанавливаются правила операций, которые сводятся к следующему.

Равенство $A=B$ не нарушается: 1) от прибавления к обеим частям одного и того же класса C, 2) от умножения на один и тот же класс D, 3) от замены A и B их отрицаниями A_1 и B_1. Иначе говоря, из $A=B$ следует, что $A+C=B+C$, $AD=BD$ и $A_1=B_1$. Так же, как и в обычной алгебре, можно различать тождественные равенства и уравнения. Например, $a=ab+ab_1$ есть тождество, а $a=b+c$ есть уравнение, решенное относительно a. Отрицание равенства $A=B$ представляет равенство $A_1=B_1$, которое тождественно с исходным. Действительно, имеем:

$$A+A_1=1,\ AA_1=0,$$
$$B+B_1=1,\ BB_1=0$$

(по определению отрицания).

---

* Это правило точно так же найдено де Морганом. Таким образом, отрицание суммы равно произведению отрицаний слагаемых, а отрицание произведения равно сумме отрицаний сомножителей. Оба эти правила играют большую роль в алгебре Буля.

Так как $A = B$, то получим: $B + A_1 = 1$, $BA_1 = 0$, откуда ясно, что $A_1 = B_1$. Последнее равенство приводит, наоборот, к равенству $A = B$, так что они полностью эквивалентны.

Решение логического уравнения будет полное или частное, смотря по тому, можно ли из решения получить заданное равенство или нет. Например, из равенства $1 = am + a_1n$ можно получить частные решения $a = am$; $a_1 = a_1n$, ни одно из которых не является общим решением исходного равенства.

* *
*

Введя эти основные понятия и рассматривая, таким образом, символическую систему трех операций, Порецкий прекрасно сознавал, как он сам говорит, что эта система вполне достаточна для построения полной теории качественных заключений, но в то же время «мышление над качественными формами, основанное на этих трех операциях, не обнимает собою даже алгебраического мышления, не говоря уже о математическом мышлении вообще... А потому, если действительно все процессы логического мышления основаны на началах теории качественных умозаключений, то необходимо будет признать логическое мышление не только не общим, но, наоборот, крайне специальным и притом вполне элементарным, так как оно может быть поставлено в параллель только с теми начатками количественного мышления, которые соответствуют элементарной стороне алгебры».

Порецкий указывал также, что цели традиционной и математической логики далеко не одинаковы, именно: первая занимается изучением процессов мысли, тогда как вторая интересуется лишь построением «необходимых формул, т. е. отношений между классами, причем самые приемы построения формул (т. е. мыслительные процессы) отодвигаются на задний план».

Вообще же Порецкий считал, что усовершенствованная и значительно пополненная и расширенная им по сравнению с его предшественниками математическая логика полностью исчерпывает теорию качественных умозаключений, причем разрешается и обратная задача нахождения исходных посылок по выводам.

* *
*

То, что было изложено выше о системе Порецкого, содержится во «Введении» к его работе 1884 г. Пока все это, в сущности, в значительной мере совпадает с идеями и обозначениями его предшественников. Подлинной заслугой русского уче-

ного явилось создание полной законченной теории «качественных форм» и решение обратной задачи.

Порецкий вводит понятие о функциях первоначальных классов $a, b, c, \ldots$, подразумевая под функцией результат некоторой совокупности трех элементарных логических операций над классами $a, b, c \ldots$ И здесь он, конечно, следует Булю, используя его упоминавшийся выше результат:

$$f(a) = af(1) + a_1 f(0)^*$$

(у Буля было бы $1-a$ вместо a_1).

На этом основании можно разложить любую функцию классов, например, $\varphi(a, b, c, \ldots) = ab\ \varphi(1, 1, c) + ab_1\ \varphi(1, 0, c, \ldots) + a_1 b_1 \varphi\ (0, 1, c \ldots) + a_1 b_1\ \varphi\ (0, 0, c, \ldots)$ и т. д.

При разложении функции по k-классам $a, b, c, \ldots$ получится всего 2^k слагаемых, каждое из которых содержит произведение k данных классов или их отрицаний («конституенты» k-го порядка») на результат подстановки в данную функцию единиц вместо тех же классов и нулей вместо их отрицаний.

Если $\varphi\ (a, b, c, \ldots)$ разложена по всем классам $a, b, c, \ldots$, то каждый символ $\varphi\ (1, 1, 1, \ldots)$, $\varphi\ (0, 1, 1, \ldots)$ и т. д. равен 0 или 1.

Порецкий использует также правило Шрёдера, по которому, если функция разложена по конституентам, то ее отрицание получается через замещение в разложении коэффициентов при конституентах их отрицаниями (правило действительно только для полных разложений).

Например, $ma + na_1$ имеет отрицанием $m_1 a + n_1 a_1$; разложение $mab + nab_1 = mab + nab_1 + 0 \cdot a_1 b + 0 \cdot a_1 b_1$ (дополненное) имеет своим отрицанием $m_1 ab + n_1 ab_1 + a_1 b + a_1 b_1$.

* *
*

Опираясь на эти соображения своих предшественников, Порецкий строит далее теорию логических равенств (он избегает термина «уравнение»). Здесь он кладет в основу другое правило Шрёдера, согласно которому всякое логическое равенство $A = B$ тождественно с равенством $0 = AB_1 + A_1 B$ и с отрицанием последнего, т. е. с равенством $1 = AB + A_1 B_1$. При этом Порецкий пользуется преимущественно вторым типом равенств.

Сам он внес большой вклад в исследование решения логических равенств данного типа, полностью решив относящиеся сюда задачи — и прямую и обратную.

---

* Это равенство является основным во всей алгебре логики.

* *
*

Терминология Порецкого следующая: он называет функцию $AB_1 + BA_1$ полным логическим нулем посылки $A = B$, причем каждый член этой функции, взятый отдельно, будет одним из частных логических нулей той же посылки.

Функцию $AB + A_1B_1$ Порецкий назвал полной логической единицей посылки $A = B$. Если произвести разложение функции $AB + A_1B_1$ на простейшие множители, то каждый из таких множителей должен быть равен 1 (частные логические единицы). Если даны посылки $A = B$, $A' = B'$, $A'' = B''$, ..., то полный логический нуль задачи будет $(AB_1 + A_1B) + (A'B'_1 + A'_1B') + \ldots = N(a, b, c, d, \ldots)$, где $a, b, c, d, \ldots$, суть те классы, которые входят в данные посылки.

Полная логическая единица той же задачи, т. е. функция $(AB + A_1B_1)$ $(A'B' + A'_1B'_1)$ ..., обозначается соответственно символом:

$$M(a, b, c, d\ldots),$$

[N — nihil, 0; M — mundus, 1].

N и M взаимно служат отрицаниями друг друга. Правила для вычисления N и M очевидны; при этом, в том случае, если посылка имеет вид $C = CD$, то соответствующий логический нуль будет $0 = CD_1$, а логическая единица: $1 = C_1 + D$.* Каждая задача, состоящая из посылок $A = B_1$, $A' = B'$ ..., может быть выражена и в форме $0 = N$, и в форме $1 = M$.

Кроме логических нулей и единиц, соответствующих условиям данной задачи, могут встретиться еще тождественные единицы и нули, т. е. такие, которые не зависят от каких бы то ни было посылок. Самые общие единицы и нули, содержащие все n рассматриваемых классов, Порецкий называет универсальными; это будут:

$$1 = 1 = (a + a_1)(b + b_1)(c + c_1)\ldots,$$
$$0 = aa_1 + bb_1 + cc_1 + \ldots$$

Общие правила определения классов
(по Порецкому)

Порецкий определяет класс a из логической единицы задачи следующим образом:

$$M(a,b,c) = a\varphi(b,c,\ldots) + a_1\theta(b,c,\ldots) + \psi(b,c,\ldots),$$

* В суждениях Порецкого эта форма посылок играет особую роль, что значительно упрощает дело.

где может наблюдаться, таким образом, „неоднородность“ (в силу тех или других условий задачи). Эта неоднородность устраняется введением к $\psi(b,c,\ldots)$ множителя $a+a_1=1$, так что получаем:

$$M(a,b,c\ldots)=af(b,c\ldots)+a_1F(b,c\ldots), \qquad \text{(I)}$$

где $f=\varphi+\psi$, $F=\theta+\psi$.

Это разложение должно совпадать с разложением Буля:

$$M(a,b,\ldots)=aM(1,b,\ldots)+a_1M(O,b,\ldots).$$

Следовательно, в силу единственности разложения Буля, обязательно будем иметь:

$$f=M(1,b,\ldots);\ F=M(O,b,\ldots).$$

Умножая (I) на a, получим:

$aM(a,b,c,\ldots)=a$ (в силу того, что $M=1$), или

$$a=af(b,c,\ldots)=aM(1,b,c,\ldots).$$

Итак,

$$a=aM(1,b,c,\ldots), \qquad (*)$$

$$a_1=a_1M(O,b,c,\ldots) \qquad (**)$$

и т. д. — для всех остальных букв.

Однако эти формулы не представляют полного решения задачи. Действительно, можно подумать, что одной формулой (*) $a=aM(1\ldots)$ класс a вполне определен; это не так, потому что класс a_1 не является независимым от a. Поэтому надо взять еще отрицание формулы (**), т. е. $a=a+M_1(a,b,c\ldots)$.

Итак, по Порецкому, класс a определяется из заданных посылок двумя равенствами:

$$a=aM(1,b\ldots), \qquad \text{(I)}$$

$$a=a+M_1(O,b,\ldots). \qquad \text{(II)}$$

Точно так же

$$b=bM(a,1,\ldots),$$

$$b=b+M_1(a,O,\ldots)$$

и т. д. — для c,d и прочих классов, входящих в задачу. Однако, как указывает Порецкий, выгоднее вместо формулы типа (II) пользоваться ее отрицанием, т. е.

$$a_1=a_1M_1(O,b,\ldots).$$

Таким образом, получается новая пара формул (сокращенно):

$$a = aM(1), \tag{1}$$

$$a_1 = a_1M(0), \tag{2}$$

которая может служить для определения как a, так и a_1.

[В единичной форме имеем другую пару формул:

$$1 = a_1 + aM(1),$$

$$1 = a + a_1M(0)].$$

Порецкий заметил, что формулы (I) и (II) содержат в себе еще дополнительное связывающее условие (как он выражается, „частное противоречие").

Действительно, из (1) $a = aM(0)$ следует, что a содержится в $M(1)$, а из (2) $a = a + M_1(0)$ видно, что $M_1(0)$ является лишь частью a; следовательно, $M_1(0)$ содержится в $M(1)$, т. е.

$$M_1(0) = M(1)\ M_1(0).$$

Если, однако, написать, что

$$M(1) = M(1)\,[M(0) + M_1(0)] = M(1)\ M(0) + M(1)\ M_1(0),$$

$$M_1(0) = M_1(0)\,[M(1) + M_1(1)] = M_1(0)\ M(1) + M_1(0)\ M_1(1),$$

то ясно, что подчеркнутый член $M_1(0)\ M_1(1) = 0$, т. е. должен быть одним из частных логических нулей задачи, не содержащих a и a_1. Поэтому (окончательное) решение будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = aM(1) \\ a = a + M_1(0)\ M(1) \\ 0 = M_1(0)\ M_1(1). \end{cases} \tag{A}$$

Эта система равенств полностью исчерпывает решение задачи определения класса a через остальные, причем третье равенство представляет совокупность сведений, не касающихся класса a, т. е. относящихся к классам $b_1c_1\ldots$ и т. д. Первые два равенства (А) доставляют все сведения относительно класса a; Порецкий предложил сумму этих сведений называть **точным** решением задачи, тогда как результат, определенный формулами I—II, он назвал **полным** решением. Наконец, Порецкий показывает, что формулы **полного** определения класса a эквивалентны одной:

$$a = aM(1) + a_1M_1(0),$$

а пара формул точного определения — также одной:

$$a = M(1)\,[a + M_1(0)]$$

(последняя формула была указана уже у Шрёдера).

В качестве одного из приложений метода Порецкого решим задачу Венна.

Известный английский логик прошлого века Венн предложил однажды аудитории в 150 слушателей следующую задачу: все члены совета акционерного общества были или владельцы облигаций, или владельцы акций, но не то и другое вместе; случилось, что владельцы облигаций все были в совете. Какое можно вывести отсюда заключение?

Вопрос оказался для большинства слушателей непосильным: из 150 человек только 5 решились дать тот или другой ответ,— остальные 145 воздержались.

Решим задачу символическим путем.

Пусть a — члены совета, b — владельцы облигаций, c — владельцы акций; тогда, в согласии с приемами Порецкого, выражение посылок будет таково:

$$a = a\,(bc_1 + b_1c);$$

$$b = ab.$$

(В действительности, надо выразить еще, что однажды все держатели облигаций были в совете, чем было обусловлено отсутствие у них акций, так как $b = ac_1$; Порецкий выводит это и показывает, что данное заключение эквивалентно всем посылкам задачи.)

[В данном случае обе посылки имеют форму $C = CD$; поэтому пользуемся сокращенными правилами для вычисления полного логического нуля и полной логической единицы задачи: $0 = CD_1$ и $1 = C_1 + D$].

Из первой посылки получаем:

$$0 = a\,(bc_1 + b_1c)_1 = a\,(b_1 + c)\,(b + c_1) = a\,(bc + b_1c_1);$$

из второй посылки: $0 = ba_1$.

Следовательно,

$$abc = 0;\ ab_1c_1 = 0;\ ba_1 = 0.$$

(Из последнего, между прочим, вытекает, что

$$a_1bc = 0;\ a_1bc_1 = 0).$$

Складывая равенства, получаем; $bc = 0$, т. е. заключение, что вообще не было в обществе лиц, обладавших одновременно и акциями и облигациями. Этот ответ и ожидался Венном.

Составим логические единицы посылок задачи; они будут:

$$1 = a_1 + bc_1 + b_1c; \; 1 = b_1 + a.$$

Их произведение представляет полную логическую единицу задачи:

$$1 = (a_1 + bc_1 + b_1c)(a + b_1) = abc_1 + ab_1c + a_1b_1 + b_1c =$$
$$= abc_1 + ab_1c + a_1b_1(c + c_1) + b_1c(a + a_1) = abc_1 + ab_1c +$$
$$+ a_1b_1c + a_1b_1c_1 + ab_1c + a_1b_1c = abc_1 + ab_1c + a_1b_1c + a_1b_1c_1.$$

Универсальная единица будет:

$$1 = (a + a_1)(b + b_1)(c + c_1);$$

развертывая ее и сравнивая с полной логической единицей задачи, видим, что

$$abc = 0; \; ab_1c_1 = 0; \; a_1bc = 0; \; a_1bc_1 = 0,$$

т. е. то, что было получено выше.

Таким образом, из рассмотрения полной логической единицы задачи мы получаем те же результаты. Порецкий показал,— и мы предлагаем читателям воспроизвести это доказательство, — что равенство $b = ac_1$ выражает все условия задачи Венна.

Задача Порецкого о птицах

Между птицами некоторого зоологического сада существует 5 отношений: 1) птицы певчие суть или крупные, или обладающие качеством Y; 2) птицы, не имеющие качества Y, или не крупные, или не имеют качества X; 3) птицы певчие в соединении с крупными представляют всех птиц с качеством X; 4) каждая некрупная птица есть или певчая, или обладающая качеством X; 5) между птицами с качеством X совсем нет таких птиц с качеством Y, которые, не будучи певчими, были бы крупными. Не зная качеств X и Y, определить, были ли птицы качества X певчие или нет, крупные или нет. То же узнать в отношении птиц качества Y. Найти, были ли между птицами качества X птицы качества Y, и наоборот.

* *
*

Пусть x — птицы качества X, y — птицы качества Y, S — птицы певчие, g — птицы крупные. Посылки по Порецкому будут:

$$1)\; S = S(g + y); \; 2)\; y_1 = y_1(g_1 + x_1); \; 3)\; x = x(S + g);$$
$$4)\; g_1 = g_1(S + x); \; 5)\; xyS_1g = 0.$$

Благодаря тому, что четыре первых посылки имеют вид $C = CD$ (в этом существенная черта метода Порецкого), можно действовать упрощенным путем (единичная форма: $1 = C_1 + D$). Переводим посылки в единичную форму:

$$1)\ 1 = S_1 + g + y;\ 2)\ 1 = y + g_1 + x_1;$$
$$3)\ 1 = x_1 + S + g;\ 4)\ 1 = g + S + x;$$
$$5)\ 1 = x_1 + y_1 + S + g_1.$$

Перемножая, находим полную логическую единицу задачи:

$$1 = M(g,S,x,y) = gx_1 + Sy. \qquad (A)$$

Отсюда ясно, что все птицы сада состояли: 1) из таких крупных, которые не имели качества X, и 2) из таких певчих, которые обладали качеством Y. Более никаких птиц в саду не было.

Из (А): $x = xSy$; $x_1 = x_1(g + Sy)$.

Это достигается последовательным умножением на x и на x_1.

Рассмотрим равенство $x = xSy$; помножив его на y, найдем $xy = xSy$; сравнивая с предыдущим, найдем; $x = xy$, откуда прибавлением y к обеим частям находим: $y = x + y$, т. е. все птицы качества X были в числе птиц качества Y. Далее можно обнаружить, что птицы качества Y состояли (не обращая внимания на качество X): 1) из всех тех певчих, которые не были крупны, и 2) из некоторых крупных птиц.

Предоставляем доказать это читателям.

* *
*

Вычисление полной логической единицы задачи на первый взгляд представляет большие затруднения, если число посылок велико. Однако это в действительности не так уже трудно, благодаря простоте логических действий сравнительно с обычными алгебраическими.

Рассмотрим пример Порецкого, содержащий произведение 14 четырехчленных многочленов, чему в алгебре соответствует 4^{14} отдельных действий умножения (т. е. > 268 000 000).

Пример содержит задачу о соотношении между четырьмя классами a, b, c, d, содержащую 14 посылок, логические единицы которых суть:

1) $1 = a + b + c + d$;
2) $1 = a + b + c + d_1$;
3) $1 = a + b + c_1 + d$;
4) $1 = a + b + c_1 + d_1$;
5) $1 = a + b_1 + c + d$;
6) $0 = a_1bcd_1$, или $1 = a + b_1 + c_1 + d$;

7) $0 = a_1bcd$, или $1 = a + b_1 + c_1 + d_1$;
8) $a = a(b + c + d)$, или $1 = a_1 + b + c + d$;
9) $ad = ad(b + c)$, или $1 = a_1 + b + c + d_1$;
10) $b_1 = b_1(a_1 + c_1 + d_1)$, или $1 = a_1 + b + c_1 + d_1$;
11) $abc_1 = abc_1d$, или $1 = a_1 + b_1 + c + d$;
12) $c_1 = c_1(a_1 + b_1 + d_1)$, или $1 = a_1 + b_1 + c + d_1$;
13) $abcd_1 = 0$, или $1 = a_1 + b_1 + c_1 + d$;
14) $1 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$.

Произведения посылок:
1 и $2 : 1 = a + b + c$;
3 и $4 : 1 = a + b + c_1$;
1, 2, 3, $4 : 1 = a + b$;
11, 12, 13, $14 : 1 = a_1 + b_1$;
1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, $14 : 1 = ab_1 + a_1b$;
6 и $7 : 1 = a + b_1 = c_1$;
8 и $9 : 1 = a_1 + b + c$;
5, 6, $7 : 1 = a + b_1 + c_1d$;
8, 9, $10 : 1 = a_1 + b + cd_1$.

Логическая единица всей задачи:

$$1 = (ab_1 + a_1b)(a + b_1 + c_1d)(a + p + cd) = (ab_1 + a_1bc_1d)(a_1 + b + cd_1) = ab_1cd + a_1bc_1d.$$

Итак,

$$1 = M(a,b,c,d) = ab_1cd_1 + a_1bc_1d.$$

Эта система соответствует задаче Порецкого о девицах.

Задача Порецкого о девицах

Относительно девиц, бывших на одном балу, имеются следующие 14 посылок: 1) каждая из девиц была или благовоспитана (a), или весела (b), или молода (c), или красива (d); 2) когда начались танцы, то оказалось, что все нетанцующие девицы были некрасивы и что каждая из танцующих была или молода, или весела, или благовоспитана; 3) в другой момент, когда все пожилые девицы образовали отдельный кружок, о каждой из прочих девиц можно было сказать, что она или красива, или весела, или благовоспитана; 4) если выделить всех девиц немолодых и некрасивых, то останутся только благовоспитанные и веселые девицы; 5) если выделить всех девиц невеселых, то останутся благовоспитанные, молодые и красивые; 6) на балу вовсе не было таких девиц, которые, обладая молодостью и веселостью, не обладали бы в то же время ни красотой, ни благовоспитанностью; 7) между молодыми девицами не было таких, которые, обладая красотой и веселостью, были бы не благовоспитаны; 8) каж-

дая благовоспитанная девица была или молода, или весела, или красива; 9) все девицы, соединявшие красоту с благовоспитанностью, были одни веселы, другие молоды; 10) каждой невеселой девице не доставало или молодости, или красоты, или благовоспитанности; 11) все те веселые девицы, которые, не отличаясь молодостью, обладали благовоспитанностью, были красивы; 12) немолодые девицы были одни не благовоспитанны, другие не веселы, третьи не красивы; 13) между некрасивыми девицами не было таких, которые с благовоспитанностью соединяли бы молодость и веселость; 14) когда уехали все неблаговоспитанные, все немолодые, все невеселые, все некрасивые девицы, никаких девиц на балу более не осталось.

Узнать, возможна ли подобная задача, нет ли между ее посылками противоречий? Если задача возможна, описать точно весь состав («мир») девиц бала и определить соотношение между различными их категориями.

Как мы видели, полная логическая единица задачи будет:

$$1 = M(a, b, c, d) = ab_1cd_1 + a_1bc_1d.$$

Задача, следовательно, возможна; все девицы бала разбиваются на 2 группы: 1) благовоспитанных и молодых, которые в то же время не были ни веселы, ни красивы; 2) которые были веселы и красивы, но не были ни благовоспитанны, ни молоды.

Далее: $a = aM(0) = ab_1cd_1$; $a_1 = a_1M(1) = a_1bc_1d$; $a = a + b_1 + c + d_1$.

Но равенство $a = ab_1cd_1$ тождественно с системой трех равенств: $a = ab_1$; $a = ac$; $a = ad_1$; равенство $a = a + b_1 + c + d_1$ тождественно с тремя равенствами: $a = a + b_1$; $a = a + c$; $a = a + d_1$.

Итак, полное определение a сводится на следующие шесть частных определений:

$$a = ab_1, \quad a = a + b_1,$$

откуда ясно, что a тождественно с b_1;

$$a = ac, \quad a = a + c,$$

откуда видно, что a тождественно с c;

$a = ad_1$, $a = a + d_1$ показывают, что a тождественно с d_1.

Итак, $a = b_1 = c = d_1$; $a_1 = b = c_1 = d$.

Следовательно, благовоспитанные девицы, молодые, невеселые и некрасивые были одни и те же; другая часть состояла из девиц одновременно неблаговоспитанных, немолодых, веселых и красивых. Задача решена полностью. Заметим, что Порецкий составил эту задачу своим обратным методом.

* *
*

Обратный метод в исчислении Порецкого состоит в решении задачи нахождения всевозможных систем посылок, из которых можно вывести данное (и только данное) логическое заключение. Пусть последний имеет вид:

$$A = B, \tag{I}$$

где обе части суть логические функции классов $a, b, c, \ldots$; следует найти такую систему более простых связей: $A' = B'$, $A'' = B''$ и т. д., из которой (I) вытекало бы однозначным образом. Задача является, разумеется, неопределенной, так как (I) может быть получено из различных систем посылок; однако число таких систем конечно,* и полное решение задачи сводится к нахождению такой из них, которая содержит наибольшее число посылок, являющихся при этом простейшими (неразложимыми). Эту систему Порецкий назвал максимальной, или системой элементарных посылок.

Для определения подобной системы следует поступать таким образом:

1) составляется полная логическая единица M данной задачи;

2) для выражения M находится его отрицание M_1;

3) M_1 разбивается на суммы всевозможными способами;

4) берется отрицание M_1, в результате чего слева получается опять M, а справа сумма слагаемых, составлявших M_1, обратится в произведение их отрицаний.

Таким образом, M окажется разложенным на множители (продуценты) всевозможными способами; при этом, так как $M = 1$, то и каждый сомножитель или любая комбинация сомножителей может быть приравнена единице (нулей среди них, очевидно, быть не может). Это и доставит нам всевозможные системы посылок, эквивалентные данному предложению.

Максимальной системой будет та, в которой все сомножители M будут продуцентами n-го порядка, т. е. в каждый такой сомножитель (продуцент) входит обязательно каждая из букв $a, b, c, \ldots$ или их отрицаний. Такова в общем виде схема решения П. С. Порецкого обратной задачи алгебры Буля.

С помощью именно этой схемы Порецкий и составлял свои сложные задачи о птицах, девицах и т. п., частью разобранные выше.

Если не знать этого обратного способа, составление подобных задач представилось бы достаточно трудным делом.

---

* Оно менее 2^n, где n — число классов.

* *
*

Этими краткими сведениями о работах П. С. Порецкого мы вынуждены здесь ограничиться. Особенностью его работ является строгая систематичность и полнота результатов.

Как говорит французский логист Кутюра, Порецкий дал наиболее общий, исчерпывающий метод находить все эквивалентные формы посылок, все следствия из них и все «корни» системы посылок (т. е. простейшие, неразложимые посылки, на которые может быть разложена данная система посылок). Этим полным решением задачи такого рода мы обязаны именно Порецкому. Заметим, что Порецкий был далек от того, чтобы отождествлять свои результаты непосредственно с Аристотелевой логикой,— в том смысле, что он никогда не считал, что символическая логика должна заменить или упростить традиционные рассуждения. Напротив, Порецкий указывал на то, что алгебра логики имеет совершенно иные цели — упростить обращение со сложными системами посылок, сделав это обращение, так сказать, механическим, причем выводы получаются уже без анализа отдельных посылок. Последним как раз и занимается в значительной мере традиционная логика, изучающая детали самого процесса мышления, входящая в подробности и характеристику элементарных умозаключений.

В символической алгебре логики эти подробности промежуточных мыслительных процессов совершенно опускаются; все дело сводится к технике получения всех возможных результатов из заданной системы посылок (или наоборот) на основе исчисления, похожего на математическое.

Это прекрасно понимал и Кутюра, который говорит, что логическое исчисление Порецкого представляет чисто алгебраический и как бы механический метод.

Осуществление способа Порецкого является, по выражению Кутюра, длительным и несколько скучным делом потому, что дает мало места духу, изобретательности и личным способностям вычисляющего; зато метод Порецкого является в данной области полностью исчерпывающим.

Еще раз следует подчеркнуть, что алгебра логики Буля — Порецкого не заменяет, а дополняет и развивает совершенно в ином направлении традиционную логику Аристотеля и схоластов. Если есть возможность и основание рекомендовать так называемую символическую логику для преподавания философам, то это относится в первую очередь к алгебре Порецкого,* а не к другим направлениям в символической логике —

* Как и к «арифметизированному» логическому исчислению И. И. Жегалкина, о котором речь будет идти далее.

ни к логическому исследованию основных математических принципов, которое может и должно быть показано здесь лишь в отдельных частях, ни к современным теориям алгоритмов и комбинаторным исчислениям математики, которые представляют основной интерес для развития проблем самой математики и «математической техники», а не для решения вопросов философии, к которым эти математические проблемы имеют лишь косвенное и самое общее отношение.

Отметим здесь мимоходом тесную связь, существующую между символической логикой и основами теории вероятностей. Именно легко видеть, что по самому своему смыслу логическое умножение вполне аналогично закону умножения вероятностей, а логическое сложение в этом смысле совпадает со сложением вероятностей в случае полной независимости отдельных событий. На это указал и этим занимался Буль, а затем Порецкий и мн. др.

Мы вынуждены ограничиться здесь этими краткими намеками.

* *
*

Как мы видели, Буль, Джевонс, Венн, Порецкий и другие предлагали и решали иногда довольно сложные задачи комбинаторной логики; однако эти задачи о птицах, девицах и т.п. не имели никакого практического значения, представляя только «гимнастику ума» и, в известном смысле, показатель силы символических методов в логике. Настоящие практические приложения алгебры Буля начались тогда, когда выяснилось, что эта отрасль науки представляет неоценимое средство для расчета тех релейно-контактных схем, которые являются основой устройства большинства современных счетных машин. Здесь нет возможности входить в подробности по этому поводу. Однако следует сказать, что в упомянутых технических расчетах часто с успехом применяются даже сравнительно весьма несложные средства алгебры Буля. Начало такому применению положили работы американца К. Э. Шеннона (1938), а у нас В. И. Шестакова (неопубликованная работа 1935 г. «Алгебра релейных схем»).

Примеры приложения Булевой алгебры к определению достаточно удобных схем этого рода можно найти в книге Р. К. Ричардса «Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах» (русск. перевод, М., 1957).

* *
*

Этот раздел мы посвятим краткому рассмотрению части работ московского математика И. И. Жегалкина, начавшего

печатать свои исследования по математической логике в 1927 г. в «Математическом сборнике».

Автор сам рассматривал (сначала по крайней мере) свои статьи как известного рода дополнение к обширному труду Уайтхэда и Рассела «Principia Mathematica», представляющему попытку систематического изложения ряда отделов математики с помощью символов и приемов математической логики.

И. И. Жегалкин поставил своей целью упрощение этих приемов с помощью своеобразной «арифметизации» логики.

В сущности, он пришел снова к той же Булевой алгебре, но в другой форме, как это увидим далее. Впоследствии он расширил поле своих действий.

Весьма любопытно, что он не упоминает ни Буля, ни Порецкого. Еще интереснее то обстоятельство, что в 1946 г. французский математик Lalan повторил (с небольшими изменениями) результаты Жегалкина, не упоминая о нем вовсе.

* *
*

Прежде чем приступать к изложению содержания работ Жегалкина, введем несколько новых определений, относящихся к различным логическим связям.

Отношение следования, или импликацию «из x следует y» («если x, то y»), будем обозначать так:

$$x \longrightarrow y,$$

причем под x и y разумеются два высказывания (предложения), рассматриваемые только с точки зрения интереса к их истинности или ложности. Импликация определяется следующей таблицей:

	x	1	0
y	1	1	1
	0	0	1

Здесь 1 соответствует истинности, а 0 — ложности.

Таким образом, импликация считается истинной в трех случаях, а ложной только в одном,— когда из истинного x выведено ложное y.

Для нас несущественны сейчас причины выбора именно этого определения импликации — это будет выяснено в следующей главе.

Далее, определим эквивалентность двух предложений x и y как одновременное существование двух импликаций:

$$x \longrightarrow y$$
$$y \longrightarrow x.$$

Эквивалентность, определенная таким образом, может быть выражена следующей таблицей:

	x	1	0
y	1	1	0
	0	0	1

Эквивалентность часто обозначают так: $x \equiv y$.

Известное уже нам логическое произведение (конъюнкция) дается, очевидно, таблицей:

	x	1	0
y	1	1	0
	0	0	0

Логическая сумма Буля—Порецкого (дизъюнкция) выражается таблицей:

	x	1	0
y	1	1	1
	0	1	0

Кроме того, укажем здесь таблицу, определяющую так называемый «штрих Шеффера» (альтернативное отрицание), обозначаемый как x/y и выражающий несовместность предложений x и y. Эта таблица выглядит так:

	x	1	0
y	1	0	1
	0	1	1

Заметим, что символ x/x по своему логическому смыслу совпадает с отрицанием предложения x.

Все указанные определения вводятся здесь формально; подробнее их значение будет рассмотрено в главе о втором направлении в математической логике, связанном с исследованием оснований математики.

Заметим, наконец, что дизъюнкция часто обозначается так: $x \vee y$, и мы будем иногда в дальнейшем применять это обозначение.

После этих предварительных замечаний можно обратиться к работам Жегалкина.

И. И. Жегалкин

Основная идея Жегалкина весьма проста. В алгебре логики Буля—Порецкого имеется два числовых значения: 0 и 1, которые можно сопоставить с ложным (0) и истинным (1) утверждением (можно и наоборот).* Но эти два числа (0 и 1) представляют остатки от деления на 2 любых целых положительных чисел. Так, остаток от деления 5 на 2 будет 1, а остаток от деления 8 на 2 представляет 0 и т. д.

И. И. Жегалкин поставил задачу: оставаясь в области двузначного исчисления (с числами 0 и 1), определить понятие суммы и произведения таким образом, чтобы действия сложения и умножения подчинялись законам обычной арифметики: переместительному, сочетательному и распределительному. В сущности, эта задача ничем не отличается от той, которую ставили себе Буль, Шрёдер, Порецкий и другие, создавая алгебру логики. Однако определение логической суммы у Жегалкина оказалось несколько иным, нежели у других авторов. Именно он определил сумму $p+q$ и произведение pq следующим образом: для суммы $0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=0$ (вместо 2, так как остаток от деления 2 на 2 есть 0); для произведения $0 \cdot 0=0, 0 \cdot 1=1 \cdot 0=0$, $1 \cdot 1=1$, т. е. здесь мы имеем обычное произведение. Все эти действия, как нетрудно видеть, подчиняются обычным законам арифметики (переместительному, сочетательному и распределительному).

Однако мы имеем здесь: $0+0=0$ и $1+1=0$, т. е., вообще говоря, $p+p=0$**.

Точно так же, для умножения: $p \cdot p=p$, так как $0 \cdot 0=0$ и $1 \cdot 1=1$.

Таким образом, логическая арифметика Жегалкина внешне несколько отличается от алгебры Буля—Порецкого (там было бы $p+p=p$).

---

* Тогда система операций изменится — за «сложение» придется принять эквивалентность, за «умножение» — дизъюнкцию (в обычном смысле, т. е. неразделительное «или»).

** А не $p+p=p$, как это выходит в алгебре Буля—Порецкого.

Легко также видеть, что здесь $1 + p$ тождественно с отрицанием p, так как $1 + p = 0$, если $p = 1$ и $q = 1$, если $p = 0$.*

Действие вычитания из единицы, имевшее место у Буля, или операция отрицания, употреблявшаяся Шрёдером и Порецким заменяется здесь просто прибавлением p к единице. Решение равенств относительно данной буквы производится с необычайной легкостью. Пусть, например, дано равенство

$$x + p + q = r;$$

надо найти x. Для этого достаточно прибавить к обеим частям равенства $p + q$; непосредственно получается:

$$x = p + q + r$$

(так как $p + p$ и $q + q$ слева дают нули).

Заметим одно весьма существенное обстоятельство: сумма Жегалкина представляет не то, что понимается под логической суммой (или дизъюнкцией) у Буля, Шрёдера, Порецкого, Рассела, Гильберта** и других представителей математической логики. У тех выражение $p + q$ (или $p \vee q$) считается ложным только тогда, когда ложны p и q одновременно; в остальных трех случаях оно истинно. У Жегалкина сумма $p + q$ считается истинной только в двух случаях, когда p и q имеют различное значение, т. е. когда p истинно, а q ложно, и наоборот; в тех же двух случаях, когда p и q одновременно истинны или одновременно ложны, сумма Жегалкина считается ложной.*** Это необходимо иметь в виду, так как мы сохраняем здесь то же обозначение (+) для знака суммы, что и в изложении алгебры Буля, хотя свойства обеих операций раличны.

---

* У Буля стояло $1 - p$ вместо $1 + p$, получающегося у Жегалкина. Совершенно ясно, что это и есть выражение того действия, которое Шрёдер и Порецкий называли отрицанием p и обозначали p_1, а другие авторы обозначали через $\bar{p}$ и иными способами.

** Отвлекаясь от того обстоятельства, что некоторые из этих авторов иногда переставляли названия логической суммы и произведения, что, как мы видели, всегда возможно. Иными словами, нередко называли конъюнкцию суммой, а дизъюнкцию произведением, хотя чаще наблюдалось обратное.

*** Таким образом, у Жегалкина логическая сумма является строго разделительной. Это дает большое преимущество перед другими системами в том смысле, что особого выражения для операции отрицания не нужно. Следовательно, принцип исключенного третьего в явной форме здесь просто отсутствует; для него не нужно особого выражения потому, что логическое сложение Жегалкина уже содержит в себе необходимые средства для определения $\bar{p}$, так как $\bar{p}$ есть просто $p + 1$. В тесной связи с этим стоит и строгое разделительное «или—или» в сумме Жегалкина: «или p, но не q, или q, но не p».

Что касается логического произведения Жегалкина, то оно, как видим, не отличается от общепринятого в других случаях.

Таким образом, арифметическая интерпретация алгебры логики, данная Жегалкиным, предусматривает только два основных действия: логическое умножение и логическое сложение; при этом сложение $p+q$ является отличным от неисключающего «или—или» других авторов, т. е. от дизъюнкции в обычном смысле.

Очень легко выразить через символы Жегалкина все элементарные логические операции, которые употреблялись другими авторами. Так, например, отрицание p, т. е. то, что Буль обозначил через $1-p$, Шрёдер и Порецкий через p_1, Гильберт через $\bar{p}$ и т. д., у Жегалкина выглядит как $1+p$, так что мы можем прямо написать:

$$\bar{p}=1+p,$$

помня, конечно, все время о правилах арифметики Жегалкина.

Таким же образом получаются следующие соотношения между логическими символами разных авторов и арифметизованными обозначениями в рассматриваемом смысле:*

$$\text{двойное отрицание} — \bar{\bar{p}}=p,$$

$$\text{дизъюнкция (в обычном смысле)} — pVq=p+q+pq,$$

$$\text{импликация} — p\to q=1+p+pq,$$

$$\text{эквивалентность} — p\equiv q=1+p+q$$

и т. д.

В таком арифметизованном виде может быть изложена вся элементарная алгебра логики.

Может быть введено далее понятие «формулы», которое определяется так: «Формулой, аргументами которой служат данные переменные предложения, называется всякое высказывание, которое становится реальным предложением всякий раз, когда каждый из ее аргументов принимает значение, равное какому бы то ни было реальному предложению».

При этом под реальным предложением понимается любое высказывание, обладающее свойством быть истинным или ложным.

---

* Мы не боимся применять здесь обычный знак равенства; следует только помнить все время его истинный смысл в данном случае: левая часть в обозначениях того или другого автора логически равноценна правой (арифметической) части в понимании Жегалкина.

Формула от аргументов $p, q \ldots, r$ обозначается так:

$$\Phi(p, q, \ldots, r).$$

Частными примерами формул являются, например, уже неоднократно нам встречавшиеся логические связи:

$$p \rightarrow q,\ p \vee q,\ \bar{p} \qquad \text{и т. п.}$$

С точки зрения логической арифметики каждая такая формула представляет число (0 или 1), соответствующее ложности или истинности формулы.

И. И. Жегалкин вводит понятие арифметической формулы, называя так всякое выражение, составленное из любых данных предложений с помощью только действий логического сложения и умножения, повторенных конечное число раз.*

Всякая такая формула может быть приведена к виду целого многочлена, линейного (т. е. первой степени) относительно каждого своего аргумента (в силу того, что $p \cdot p = p$, $q \cdot q = q$ и т. д.).

Затем легко доказать, что для любой логической формулы имеем:

$$\Phi(p) = p \cdot \Phi(1) + (p + 1) \cdot \Phi(0). \qquad (1)$$

В этом равенстве легко узнать основную формулу Буля; только у него стояло $1 - p$ вместо $1 + p$ у Жегалкина. [В обозначениях Шрёдера и Порецкого эта формула выглядела бы так: $\Phi(p) = p\Phi(1) + p_1\Phi(0)$].

Формула (I) показывает, что всякая функция одного аргумента приводится к линейному выражению $a + lp$.

Точно так же можно рассматривать логические и соответствующие числовые (арифметические) функции многих аргументов. Следует заметить, что при построении арифметики и алгебры предложений (суждений, высказываний) Жегалкин применяет термин «формула» и только дальше вводит понятие о «пропозициональной», или, как он называет, «словесной функции». Последняя определяется так: это есть словесное выражение, в структуру которого входят одно или несколько переменных (аргументов) и которое становится предложением, если каждый аргумент заменить одним из возможных его значений (т. е. реальных предложений).

В свою очередь, из заданных функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ можно составлять логические выражения с помощью конечного числа действий сложения и умножения, определенных выше.

---

* Таким образом, все построения И. И. Жегалкина конструктивны в современном смысле.

В результате получается некоторый целый многочлен относительно функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, но так как для любой функции логическое умножение дает

$$\varphi \cdot \varphi = \varphi,$$

то все высшие степени превращаются в первую, и многочлен приводится к виду, линейному относительно каждой из букв, в него входящих, т. е. принимает следующую форму:

$$\Phi = a_0 + \sum a_i \varphi_i + \sum\sum b_{ik} \varphi_i \varphi_k +$$
$$+ \sum\sum\sum C_{ikh} \varphi_i \varphi_k \varphi_h + \ldots + l \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n,$$

где каждый из коэффициентов может равняться нулю или единице.

Таким образом может быть получено из заданных n-функций φ_i всего 2^{2^n} различных выражений Φ_m, которые образуют замкнутую в себе систему относительно действий логического сложения и умножения, так как любая сумма $\Phi_k + \Phi_i$ и произведение $\Phi_k \Phi_i$* дают выражение того же вида.

Далее, Жегалкин расширяет область действий и вводит применение квантора всеобщности, который мы в дальнейшем обозначили через Ax. Он обозначает этот квантор, как это многими часто и делается, через (x), и применение его к произвольной логической функции $\varphi(x)$ называет «операцией свертывания», а соответствующий результат, т. е. $(x)\varphi(x)$, именует «свертком» функции $\varphi(x)$.** Свертывание является, разумеется, уже не алгебраическим действием.

Затем Жегалкин вводит квантор существования Ex, обозначая его $(x!)$ [предложение $(x!)\varphi(x)$ означает, что $\varphi(x)$ истинно хотя бы при одном x].

Легко видеть, что

$$(x!)\varphi(x) = 1 + (x)\ (1 + \varphi(x)), \qquad ***$$

т. е. предложение существования прямо выражается через операцию свертывания с помощью алгебраических (арифметических) действий.

---

* Других операций в алгебраической части системы Жегалкина, как мы видели, вообще нет.

** Основное свойство этой операции заключается в том, что сверток произведения равен произведению сверток.

*** Нетрудно усмотреть в этой формуле смысл, совпадающий примерно с формулировкой Брауэром закона исключенного третьего (с явным введением кванторов всеобщности и существования).

Действие свертывания, вводимое в логическое исчисление сверх действий сложения и умножения, позволяет построить иерархическую систему комбинаций данных функций Φ, $\Phi_2, \ldots, \Phi_n$, которые могут быть распределены по ступеням; при этом каждая ступень образуется из комбинаций выражений предыдущей ступени и их свертков. Несмотря на огромность числа комбинаций при больших и высоких ступенях, в любой ступени имеется конечное их количество, хотя потенциально возможно неограниченное расширение области. Поэтому можно показать, что в принципе всегда можно вычислением решить вопрос об истинности или ложности любого логического выражения рассматриваемого вида, как бы сложно оно ни зависело от соответствующих переменных. Жегалкин очень хорошо понимал, что все его суждения справедливы только для тех объектов, которые относятся к строго определенной области, поэтому он говорит, что выражение

$$(x)\Phi(x)$$

должно читаться следующим образом: «$\Phi(x)$ верно для всякого объекта из заданного основного класса, но отнюдь не для всех объектов из безграничного океана мыслимых объектов».

Таким образом, система Жегалкина имеет дело с конечным числом объектов.

Здесь не возникает никаких сомнений в законности применения принципа исключенного третьего,* если только основной класс объектов не содержит в себе таких предложений, которые сами по себе (внутренне) являются инфинитивными (трансфинитивными) суждениями. Заметим, что на важность последнего обстоятельства для любых логических систем обратил внимание впервые А. Н. Колмогоров в работе 1925 г., посвященной специально закону исключенного третьего.

* * *

Дальнейшие суждения и приемы И. И. Жегалкина, направленные на облегчение и сокращение действий логической арифметики, очень интересны, но принципиально представляют мало нового. Здесь мы находим то же неизбежное разложение логических функций по конституентам и другие приемы, которые встречаются в разном виде у Буля, Порецкого и других авторов. Следует, впрочем, заметить, что форма

* Который, впрочем, как указывалось, не имеет здесь самостоятельного выражения, ибо особой операции отрицания данного класса в системе Жегалкина нет.

всех этих приемов у Жегалкина отличается особенной простотой и изяществом.

Кроме того, применение «трансцендентной» операции свертывания (т. е. введения квантора общности) выводит логическую систему Жегалкина далеко за пределы обычной алгебры Буля — Порецкого, которую первая значительно превосходит простотой действий в элементарной области. Однако, как говорит сам Жегалкин, «к сожалению, как общее правило, при всей своей теоретической простоте эти вычисления не отличаются краткостью; но во всяком случае они могут быть совершены в конечное время».

В заключение он добавляет: «Чтобы вычислить истинность или ложность по изложенной схеме, необходимо строить системы конституентов. Но в самых простых случаях число их настолько велико, что фактически довести вычисления до конца нет никакой возможности. Мечта великого философа (Лейбница), что настанет эпоха, когда ученые, для решения своих разногласий, прибегнут к вычислениям, остается пока только мечтой».

Эти слова были написаны в 1929 г., т. е. еще до того момента, когда математическая логика получила широкое практическое приложение при построении вычислительных и иных машин. Однако и в настоящее время слова Жегалкина сохраняют полную силу.

* *
*

Здесь мы вкратце представим такую форму алгебры Буля — Порецкого, которая дает возможность оперировать только с двумя числами 0 и 1 по правилам обычной алгебры, совершенно не применяя в процессе вычисления операций символической логики какого бы то ни было типа. В самом деле, осуществить подобную замену этих операций обыкновенными алгебраическими действиями не составляет труда (в этом, в конце концов, и заключалась основная мысль Буля).

Так как каждая логическая формула, зависящая от каких-либо букв x, y, z, ..., линейно выражается через каждую из этих букв, то легко видеть, что, например, для двух букв x и y любое логическое отношение между высказываниями x и y может быть численно выражено в виде $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy$, где и само это выражение, и оба аргумента могут принимать только два значения: 0 (ложно) и 1 (истинно).

Таким образом, каждому логическому отношению, каждой логической связи между двумя предложениями x и y

соответствует простой численный эквивалент, являющийся частным видом указанного выражения

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy,$$

причем и понимаются уже как обыкновенные числа (0 и 1).

Отсюда легко находим, что основным понятиям и связям математической логики соответствуют следующие численные эквиваленты:

1) отрицание x можно сопоставить с выражением $1 - x$ (как и было у Буля);

2) конъюнкция (логическое произведение) имеет численным эквивалентом обыкновенное алгебраическое произведение xy;

3) дизъюнкция (логическая сумма) имеет в качестве численного эквивалента выражение $x + y - xy$;*

4) импликация («из x следует y») сопоставляется с численным выражением $1 - x + xy$;

5) эквивалентность высказываний x и y имеет численным эквивалентом алгебраическое выражение $1 - x - y + 2xy$;

6) штрих Шеффера (альтернативное отрицание), обозначаемый x/y, имеет в качестве численного эквивалента выражение $1 - xy$ (т. е. отрицание произведения xy);

7) строго разделительное «или — или» («логическая сумма Жегалкина») соответствует численному эквиваленту $x + y - 2xy$, отрицанием которого является эквивалентность x и y и т. п.

Применяя численные эквиваленты, можно любое логическое рассуждение проводить прямо с помощью обычной алгебры, совершенно забыв о его логической сущности и об особых приемах математической логики.

Возьмем, например, импликацию $x \to y$; ей соответствует численный эквивалент $1 - x + xy$; точно так же импликации $y \to x$ соответствует численный эквивалент $1 - y + xy$.

Логическое произведение (конъюнкция) этих импликаций численным эквивалентом имеет обычное алгебраическое произведение численных эквивалентов сомножителей, т. е. величину $(1 - x + xy)(1 - y + xy)$.

Раскрывая это выражение по обычным правилам элементарной алгебры и принимая во внимание, что всегда $x^2 = x$ и $y^2 = y$,** без труда найдем в результате:

$$1 - x - y + 2xy,$$

* Таким образом, очевидно, «логическая сумма Буля» (дизъюнкция) выражается через обыкновенную алгебраическую сумму двух величин, уменьшенную на произведение тех же величин, что имеет, между прочим, очень простое логическое истолкование.

** Так как x и y могут принимать только значения 0 и 1, для которых указанные равенства всегда справедливы.

что и является численным эквивалентом логического произведения $[x \to y] \cdot [y \to x]$, т. е., иначе говоря, логической эквивалентности предложений x и y (см. п. 5).

Таким же образом легко находим, что логическое выражение

$$[x \vee y] \cdot [x \equiv y]$$

имеет численным эквивалентом величину xy, т. е. с точки зрения логики оно эквивалентно конъюнкции предложений x и y.

Аналогичным путем легко проверяются все эквивалентности, указанные далее при разборе основных положений исчисления высказываний по Фреге и Гильберту — Аккерману (стр. 64—73).

Вообще любое положение алгебры логики может быть доказано через операции над численными эквивалентами логических выражений. Например, теорема де Моргана: «Отрицание логической суммы равно произведению отрицаний слагаемых» имеет численный эквивалент в виде очевидного тождества

$$1 - (x + y - xy) = (1 - x)\ (1 - y).$$

Вторая теорема де Моргана: «Отрицание логического произведения равно сумме отрицаний сомножителей» имеет численное соответствие в виде столь же очевидного алгебраического тождества:

$$1 - xy = (1 - x) + (1 - y) - (1 - x)\ (1 - y).$$

Заметим при этом, что оба последних тождества справедливы для любых значений x и y, а не только для x и y, равных 0 или 1. Легко также видеть, что эти теоремы обобщаются на любое конечное число букв [большую роль здесь играют так называемые элементарные симметрические функции букв $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, где n есть число (конечное) всех букв, вводимых в рассуждение].

Пользуясь численными эквивалентами логических операций, легко наглядно показать, каким образом выполняется, например, символическое логическое равенство алгебры Буля — Порецкого $x + x = x$.

Так как символическая логическая сумма Буля (дизъюнкция) $x + y$ (т. е. $x \vee y$) имеет численным эквивалентом обыкновенное алгебраическое выражение $x + y - xy$, то при $x = y$ мы будем иметь

$$x + x - x^2,$$

или, так как всегда $x^2 = x$, последнее приводится к

$$x + x - x, \quad \text{т. е. к } x.$$

Вообще все изложение основ символической алгебры Буля выглядит гораздо проще и понятнее, если пользоваться численными эквивалентами логических формул взамен непосредственного употребления даже такой обстоятельно выработанной системы, какой является эта алгебра в изложении Порецкого.

Весьма любопытно то обстоятельство, что все возможные в данном случае обычные алгебраические выражения типа $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy$, принимающие только значения 0 и 1, при x и y, равных 0 или 1, определяют все те простейшие логические связи между двумя высказываниями, какие действительно употреблялись и употребляются в математической логике (конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность и т. д.).

Это может быть расширено на многообъектные системы; так, например, для трех букв x, y, z можно рассматривать обычное алгебраическое выражение

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 xy + \alpha_5 xz + \alpha_6 yz + \alpha_7 xyz$$

во всех тех случаях, когда имеется логическая связь между тремя объектами сразу.

Подобные линейные (относительно каждой буквы) выражения удобны для логик с наличием закона исключенного третьего.

Если имеем трехзначную логику, можно использовать, например, дробно-линейные выражения аналогичного типа, принимающие три значения, например, 1, 0, $^1/_2$, или 1, 0, —1 и т. п.

* *
*

В заключение заметим, что элементы математической логики, изложенной с помощью численных эквивалентов, оказываются значительно доступнее и проще даже способов изложения П. С. Порецкого и И. И. Жегалкина. Поэтому можно рекомендовать этот метод для преподавания начал математической логики не только в высшей, но и в средней школе.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Предварительные сведения

Обратимся теперь к нашим необходимым вспомогательным средствам — теории множеств и вообще основаниям математики, что, как уже говорилось, совершенно необходимо для понимания дальнейшего изложения. Начнем с теории множеств, на которой исследователи формалистического направления думали построить безукоризненную теорию математического доказательства и всю совокупность оснований математики, пока не подверглись резкой критике интуиционистов.

В основе лежит понятие о множестве, которое с этой точки зрения не подлежит дальнейшему определению и может быть лишь пояснено наглядными примерами. Таким образом, самое понятие множества считается первичным. Можно выразить это понятие так: множество есть собрание каких-либо предметов [вещей, чисел, фигур, функций, операций (действия) и т. п.].

Эти предметы (вещи, числа, функции и т. п.) называются элементами данного множества.

Таким образом, понятие «множество» является названием какого-то объединения каких-то предметов, носящих наименование элементов этого множества.

Можно, например, говорить о множестве всех яблок в данном саду, о множестве всех углов заданного многоугольника, о множестве абсолютно простых целых чисел, не превосходящих данного предела, о множестве несократимых дробей со знаменателем, не бо́льшим заданного числа и т. д. Во всех указанных выше примерах число всех элементов множества представляет конечное определенное число. Так, например, множество всех первоначальных чисел, не превосходящих 25, состоит из 9 элементов, так как эти элементы суть 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Множество

всех натуральных квадратов, не превосходящих 120, состоит из 10 элементов, которые суть 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Таких примеров можно набрать сколько угодно, потому что всякое собрание, всякое объединение любых предметов, функций, чисел, множеств и пр. можно считать множеством.

При этом вводят понятие и о множестве, состоящем всего из одного элемента,* и о множестве «пустом», т. е. не содержащем вовсе ни одного элемента.

До сих пор мы говорили только о так называемых конечных множествах, т. е. о таких, число элементов которых конечно, т. е. может быть пересчитано, перечислено, исчерпано непосредственным подсчетом, хотя бы теоретически, в тех случаях, когда число элементов множества очень велико. Так, например, число элементов конечного множества может быть равно 5, 10, 10^{10}, $2 \cdot 10^{10} + 1$ и т. п.; нам важно только то, что оно не больше некоторого конечного числа, хотя бы и очень большого. Однако теория множеств не ограничивается рассмотрением множеств конечных и вводит понятие о бесконечных множествах, т. е. таких, число элементов которых бесконечно, следовательно, не может быть выражено никаким конечным числом.**

Например, можно рассматривать таким образом множество всех положительных целых чисел (натуральный ряд в целом), множество всех рациональных дробей, множество всех точек на прямой, множество всех прямых, плоскостей и шаров в пространстве трех измерений, множество всех непрерывных функций и т. д. Можно ввести даже такое понятие, как «множество всех множеств».

Понятие о бесконечном множестве, как мы увидим далее, содержит в себе источник целого ряда парадоксов*** и ока-

---

* С этой точки зрения множество, состоящее из одного элемента, не есть то же самое, что этот единственный элемент. Иначе говоря, этот единственный элемент может рассматриваться и сам по себе и как множество; последнее по смыслу не тождественно с первым.

** Таким образом, множество вообще может быть охарактеризовано как определенный класс предметов, обладающих каким-либо свойством, как система вещей, для которых выполняется определенный предикат, если выражаться уже сейчас языком логики, несколько забегая вперед. Впрочем, могут быть, конечно, и множества, совершенно лишенные признаков упорядоченности какого бы то ни было характера (например, «множество всех множеств»).

*** Поэтому великий немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855) гораздо ранее возникновения теории множеств писал (в 1831 г.) с полным основанием: «Я возражаю... против употребления бесконечной величины как чего-либо завершенного, что никогда не позволительно в математике» (C. Gauss. Werke, B. VIII, стр. 216). Уже в начале XX в. А. Пуанкарэ в полемике с Л. Кутюра выразился столь же определенно: «Не существует актуальной бесконечности» (т. е. не существует в смысле математического понятия). Это положение Гаусса и Пуанкарэ можно

зывается весьма уязвимым; именно здесь лежит корень интуиционистской критики, именно в операциях с бесконечными множествами и бесконечными процессами приходится сомневаться в возможности безоговорочного применения принципа tertium non datur и т. п.

Иными словами говоря, понятие о бесконечном множестве требует введения в математику и логику понятия об актуальной бесконечности, так как множество есть собрание всех своих элементов в целом, а поэтому бесконечное множество есть понятие столь же замкнутое в себе, законченное, как и любое конечное множество.

Следовательно, должно существовать актуально-бесконечнобольшое число всех элементов бесконечного множества.

Например, множество всех натуральных чисел должно с этой точки зрения представлять замкнутое в себе бесконечное множество элементов 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, $n+1$, $n+2$, ..., и т. д. — до бесконечности, причем понимание множества здесь в корне отличается от «становящейся» последовательности 1, 2, 3, 4, ..., n, $n+1$, ..., и т. д. — тоже до бесконечности, но рассматриваемой только потенциально, т. е. в виде возможности неограниченного увеличения числа n, стремления его неопределенно увеличиваться с помощью переходов от n к $n+1$.*

«Становящаяся», никогда не заканчивающаяся последовательность безгранично возрастающих целых чисел отражает то, что мы называем потенциальной бесконечностью; здесь нельзя говорить о числе всех натуральных чисел, нельзя говорить о наибольшем натуральном числе, так как за любым сколь угодно большим целым числом следует еще большее число $n+1$, за ним $n+2$ и т. д., но процесс никогда не кончается, никакой законченной, актуальной бесконечности здесь нет. Иными словами, потенциальная

и должно считать бесспорным. Тем не менее соблазн построения оснований математики на фундаменте теории множеств оказался чересчур сильным, а возникшие отсюда школы и направления закрепили в науке созданные теории, несмотря на содержащиеся в них логические трещины. Только критика интуиционистов пробила брешь, а отсюда вырос конструктивизм.

* Иными словами, здесь разумеется возможность неограниченного продолжения одной и той же операции, с которой и с результатами действия которой (натуральные числа) мы только и имеем дело. Таким образом, говоря здесь о натуральном ряде, мы подразумеваем только постепенное становление этого ряда в виде последовательности все увеличивающихся целых чисел, но не задание сразу всего бесконечного ряда в целом, т. е. не актуальную, а потенциальную бесконечность. Этого рода бесконечность Гегель и Энгельс называли «дурной бесконечностью».

бесконечность есть лишь признак неограниченного возрастания; как таковой, этот признак не может содержать в себе никаких источников внутреннего противоречия. Теория множеств, напротив, предполагает использование понятия об актуальной бесконечности, а значит — и включение этого понятия в формальную логическую систему оснований математики, подчинение этого понятия законам формальной логики, в том числе и принципу исключенного третьего. Уже при самом введении основных понятий теории множеств (а отчасти даже до того) Б. Больцано, Г. Кантор, Ришар и мн. др. столкнулись с целым рядом парадоксов актуально-бесконечного; некоторые из таких парадоксов восходят, впрочем, к более раннему времени — к эпохе Возрождения, к средневековью и даже к древности. Здесь мы отметим только один факт, на который указал Г. Галилей. Именно, в 1638 г. Галилей заметил, что можно, например, установить взаимно однозначное соответствие между целыми положительными числами и их квадратами, написав 2 ряда:

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...
2) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

Следовательно, если признать актуально существующими 2 бесконечные числа: 1) число всех натуральных чисел и 2) число всех квадратов натуральных чисел, — то как бы выходит, с одной стороны, что эти два бесконечные числа равны между собой, ибо каждому целому положительному числу соответствует один и только один его квадрат, и наоборот (так называемое одно-однозначное соответствие); с другой стороны, члены ряда (2), очевидно, все находятся среди членов ряда (1), да еще остается в составе ряда (1) гораздо большее число неквадратных чисел. Таким образом, числа ряда (2) представляют только часть чисел ряда (1). Поэтому получается так, что целое [число чисел ряда (1)] и его «часть» [число чисел ряда (2)] равны, а в то же время «целое» больше своей «части».*

Чтобы избежать подобных парадоксов, показывающих, что здесь нельзя прямо применять аксиомы, связанные с понятиями равенства и неравенства, как это имеет место для конечных множеств, ввели особое понятие о равномощности (вместо равенства).

Именно, два множества называются равномощными, если все элементы их можно привести во взаимно однозначное

---

* Это есть уже в некотором роде намек на возможности в отношении формального нарушения закона исключенного третьего при дальнейшем развитии подобных соображений.

(одно-однозначное) соответствие каким бы то ни было способом (т. е. по какому-нибудь правилу).*

Для множеств конечных понятие равномощности двух (или нескольких) множеств совпадает с понятием об одинаковости числа элементов этих множеств.

Таким образом, все конечные множества, содержащие m и только m элементов, объединены тем обстоятельством, что число элементов в них одинаково и равно m.

Подобным же образом все равномощные бесконечные множества выделяются в один класс, характеризуемый некоторым символом μ, называемым мощностью (или «кардинальным числом») и представляющим, в некотором смысле, соответствие числу элементов конечного множества.

Легко установить, что ряд натуральных чисел можно привести во взаимно однозначное соответствие с рядом их квадратов, что заметил, как упоминалось выше, уже Галилей.

Таким образом, согласно с определением понятия равномощности, множество всех натуральных чисел равномощно со множеством квадратов натуральных чисел.

Очевидно, вместо квадратов можно взять кубы и вообще любые степени натуральных чисел; множество k-ых (k — целое) степеней чисел натурального ряда окажется всегда равномощным множеству всех натуральных чисел, несмотря на то, что числа 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, 5^k, ... представляют последовательность чисел, лишь весьма редко встречающихся в натуральном ряду, особенно если k велико.** Можно доказать также, что множество всех натуральных чисел равномощно множеству всех рациональных чисел, т. е., иначе говоря, все рациональные дроби можно перенумеровать.

Множества, равномощные со множеством натуральных чисел, называются исчислимыми или счётными.***

В качестве примера неисчислимого множества обычно указывают континуум, представляемый, например, отрезком (0,1), если его рассматривать как множество всех лежащих на нем точек. Множества всех точек неограниченной прямой, всех точек плоскости, всех точек пространства (хотя бы k измере-

---

* Само это определение содержит в себе источник недоразумений и противоречий.

** Например, если $k = 10$, то за единицей в ряде (I) 1^{10}, 2^{10}, 3^{10}, ... будет следовать $2^{10}=1024$, а дальше числа будут следовать еще реже и реже. Несмотря на это, «кардинальное число» (т. е. мощность) множества (I) то же самое, что и мощность натурального ряда. Таким образом, бесконечные множества могут быть эквивалентны (равномощны) своей части.

*** С точки зрения теории миожеств множество чисел 1, 2^2, 3^{3^3}, $4^{4^{4^4}}$, ... равномощно множеству натуральных чисел 1, 2, 3, 4, ...

ний) имеют ту же мощность континуума. Ту же мощность имеет множество всех вещественных чисел.

Множество, содержащее все элементы двух данных множеств A и B, называется их суммой и символически обозначается $A+B$.

Множество, образованное из элементов общих множеств A и B, называется их пересечением и обозначается символически через AB.

Свойства символических „суммы" и „произведения" (пересечения) множеств аналогичны свойствам обыкновенной алгебраической суммы и произведения; именно, справедливы свойства:

$$A+B=B+A; \quad (A+B)+C=A+(B+C);$$
$$AB=BA; \quad (AB)C=A(BC); \quad A(B+C)=AB+AC.$$

Есть и отличия от алгебраических операций. Именно, если A есть часть B (пишут $A \subset B$), то $A+B=B$; очевидно, что $A+A=A$.

Очевидно также, что $A \cdot A = A$, и вообще:

$$A+A+\ldots+A=A,$$
$$A \cdot A \cdot A \ldots A = A.$$

Отметим здесь, что указанные операции над множествами очень похожи на операции над классами в алгебре логики. Это обстоятельство и кажущаяся простота и ясность самого понятия множества привели к тому, что в конце прошлого — начале этого столетия стали полагать теорию множеств в основу изучения математических начал, к логическому обоснованию различных отделов математики.

При этом пользовались бесконечными множествами, так, как если бы все законы формальной логики можно было считать безоговорочно применимыми к этим множествам и операциям над ними. Это допущение привело к противоречиям, от которых математики формально-аксиоматического направления постарались отделаться с помощью введения новых трансфинитных образов, внешне устраняющих эти противоречия, а в действительности переводящих их в другие формы. Отсюда возникло, например, понятие о трансфинитных числах.

Были образованы и другие теоретико-множественные понятия, внедрившиеся с течением времени во многие отделы математики. Одним из таких понятий явилось понятие меры множества, обобщающее в известной степени понятие длины, если говорить о линейных образах. Широкое поль-

зование этим понятием меры* привело к особого рода терминологии в некоторых отделах математики (теория множеств, теория функций действительного переменного), когда стали говорить о справедливости той или иной теоремы не для всех точек интервала изменения переменного, а «почти повсюду» в этом интервале.

Это означало, что свойство какого-либо объекта, определяемое данной теоремой, может и не выполняться в бесчисленном множестве точек интервала, лишь бы мера этого множества равнялась нулю. Между тем, например, если мы возьмем интервал (0,1), то окажется, что множество всех рациональных точек на этом отрезке имеет меру нуль, хотя это множество является в то же время всюду плотным, т. е. в непосредственной близости любой точки A данного отрезка, в любой, сколь угодно малой области около точки A заключается всегда бесконечно много рациональных точек.

Итак, получается, что доказанная теорема может выглядеть так: «Некоторая функция $f(x)$ вещественного переменного x обладает свойством p во всех точках интервала (0,1), кроме, быть может, всех рациональных точек».

Очевидно, что доказательство подобной теоремы равноценно полному отсутствию какого бы то ни было эффективного доказательства, так как приближения к иррациональным числам осуществляются с помощью рациональных, а для последних свойство p не может быть доказано или даже вовсе несправедливо.

Точно так же теорема: «Ряд такой-то сходится в таком-то интервале почти повсюду (т. е., быть может, за исключением точек, составляющих множество меры нуль)» не имеет благодаря своей неэффективной формулировке никакого практического значения.

В разных отделах математики благодаря применению теоретико-множественных приемов понятий и терминов образовался целый пласт неэффективных доказательств, неэффективно определенных постоянных и т. п.

Так, например, некоторое неопределенное уравнение может иметь, как говорит соответствующая теорема, не более n-целочисленных решений, причем метод теоремы принципиально не дает никаких указаний на верхнюю границу для числа n. Это число n в силу суждений теоремы можно считать конечным. В действительности же мы не можем использовать данный результат каким бы то ни было образом, — он неэффективен.

---

* Само по себе и в некоторых приложениях это понятие вовсе не лишено смысла и является полезным в ряде случаев. Мы говорим только о несомненно неправомерном употреблении понятия меры.

Действительно, мы можем пробами найти 100 решений, потом 101-е, затем 102-е и т. д. — сколь угодно далеко; можно долгое время не находить ни одного решения, и все-таки никогда не будет уверенности в том, что все решения исчерпаны.

Очевидно, что с формально-логической точки зрения мы не сможем отличить такую неэффективную «конечную» постоянную n от потенциальной «бесконечности», которая не является чем-то законченным, а выражает только возможность двигаться дальше и дальше.

Заметим, что отсюда уже один только шаг до сомнений в возможности неограниченного применения закона исключенного третьего в подобных случаях, так как n по теореме конечно, а по формальным логическим признакам не может быть явно и доказательно отличено от потенциальной бесконечности [т. е. стирается точное различие между A (конечным) и не-A (бесконечным)].

Подобное положение, казалось бы, должно было вызвать отказ от теоретико-множественных построений. Этого, однако, не случилось, так как соответствующие приемы и термины успели слишком широко войти в массовую практику.*

Только такой крупный математик, как А. Пуанкарэ, осмелился высказать в печати, что актуальной бесконечности не существует в математике и что последователи теории множеств впали в противоречия.

Однако примерно с 1908 г. возникает (под сильным влиянием того же Пуанкарэ) так называемая «интуиционистская» школа (Брауэр и др.), подвергшая резкой критике попытки теоретико-множественного обоснования математики и выдвинувшая основные принципы конструктивного построения науки.

С философским интуиционизмом (например, А. Бергсона и других философов) математики-интуиционисты имели мало общего; их главными требованиями было признание внутренней содержательности всех математических положений, в том числе аксиом, и отказ от неэффективных выводов и понятий,** в том числе от актуальной бесконечности; потенциальную («свободно становящуюся») бесконечность интуиционисты признавали. Продолжающие в настоящее время

* Впрочем, далеко не во все отделы математики и далеко не у всех математиков.

** Интуиционисты не признают никакого содержания в выводах неэффективного характера. Таким образом, так называемые чистые «теоремы существования», метод доказательства которых не дает никаких путей для конструктивного построения решения, интуиционистами отвергается. Эта характерная черта перешла и во все конструктивное направление в математике.

те же идеи конструктивисты отказались и от термина «свободно становящаяся бесконечность», хотя процессы, ими изучаемые и применяемые, могут быть продолжаемы так же неограниченно долго, так что фактически «потенциальная бесконечность» и тут налицо. Конструктивное направление требует, чтобы всякое утверждение, всякое построение могло быть осуществлено с помощью заданных средств совершенно определенным образом и в конечный срок, хотя бы это и был очень длительный процесс; все же (по крайней мере, мысленно) построение должно выполняться реально после конечного числа действий, предусмотренных соответствующим алгоритмом, однозначно определяющим правила применения этих действий и их характер.

Таким образом, мы можем сказать, что в настоящее время попытки обоснования математики на почве теоретико-множественных понятий следует отнести в область истории математической науки; дальнейшее развитие исследования математических оснований и чисто логических сторон математического исследования пошло, несомненно, по новому пути, на котором нет места многим недостаточно определенным и противоречивым понятиям, связанным с теорией множеств. В частности, на этом новом пути отпадают парадоксы бесконечного, а также сомнения в приложимости закона исключенного третьего, которые были неизбежны при формальном применении принципов логики к трансфинитным процессам завершенного типа.

Несмотря на указанные соображения, мы считаем необходимым изложить здесь хотя бы элементы формалистического построения оснований математической логики, как оно представлено в работах Д. Гильберта и его учеников, а также предшественников (Г. Фреге). Этому и посвящена следующая глава.

Математическая логика в работах, связанных с формализацией оснований математики

В конце XIX столетия особенно усиленно начинает развиваться стремление к исследованию и уточнению главнейших принципов и основных начал математики.

В связи с этим возникает так называемое аксиоматическое направление, ставящее своей целью построение различных отделов математики на основе систем простейших аксиом — чисто формальным образом, по возможности без привлечения интуиции. Естественно, что аксиоматики обратили внимание на математическую логику как на средство исследования в своей области. Таким образом, возникла новая ветвь

математической логики; в отличие от алгебры Буля—Порецкого это была не математизированная логика, а математика, выражаемая с помощью логических понятий и символов.

Естественно, что таких понятий и символов пришлось вводить еще несколько, — в дополнение к уже употреблявшимся в математической логике к тому времени. Этого требовала специфика математики как науки, имеющей свои особенности. Главной из этих особенностей являлось привычное и заурядное для математиков обращение с бесконечными процессами, которые в традиционной логике отсутствуют. Были и другие специфические свойства математических суждений, благодаря которым пришлось в значительной мере переделать старое и дополнить новую ветвь математической логики вновь вводимыми символами и понятиями, приспособленными специально к математическим целям. Возникло, начиная с конца прошлого века, несколько систем аксиоматического изложения различных отделов математики в формально-логическом аспекте.

Первая такая система была предложена еще в прошлом веке Г. Фреге (1879) в применении к логическому обоснованию основ арифметики. Обычно называют систему Фреге «исчислением высказываний (суждений)». Хотя оно гораздо проще алгебры Буля, в нем имеются отличия в основных понятиях. Именно, Фреге вводит новое понятие «следования» («импликация»): из X следует Y» или «если X, то Y», что обозначаются символически так:

$$X \longrightarrow Y.$$

Это есть естественное приспособление к обычному ходу математических рассуждений, но оно не являлось серьезным нововведением.*

Когда в дальнейшем стали подвергать символико-логическому изучению другие отделы математики, пришлось вводить ряд новых понятий и обозначений уже существенного нового характера.

Главными здесь явились два так называемых «квантора»: «квантор всеобщности» (мы будем обозначать его Ax**) и «квантор существования» (у нас обозначается как Ex); других обозначений и понятий мы здесь касаться не будем.

Введение символов Ax и Ex в метаматематику*** было обусловлено тем обстоятельством, что современные математики привыкли пользоваться суждениями типа: «для всех

* Дальше мы увидим, что импликация легко выражается в символах алгебры Буля.

** Часто обозначается (x) или перевернутым A.

*** Т. е. в исследование логической стороны математики.

$x \ldots$» (квантор всеобщности) и «существует $x \ldots$» (квантор существования).

К этим приемам изложения и были приспособлены соответствующие понятия и обозначения.

Таким образом, данное (аксиоматическое) направление в математике ввело ряд новых обозначений и понятий и разделилось на несколько отдельных течений, подробное изучение которых выходит далеко за пределы содержания этой книжки (логицистическая школа — Рассел, Уайтхэд и другие, формально-аксиоматическая — Гильберт и его ученики и т. д.). В качестве простейшего примера приводим частичное изложение основ исчисления высказываний по Гильберту.

Исчисление высказываний
(первая часть математической логики)*

Под высказыванием (суждением) понимают любое предложение, о котором можно утверждать, что его содержание истинно или ложно — и только.

При этом не входят в рассмотрение структуры самого предложения, которая выражается в связи между субъектом и предикатом; высказывания в этом исчислении рассматриваются как целое, в их логической связи с другими высказываниями.

Основные логические связи вводятся следующим образом, путем применения соответствующих значков:

1. Отрицание: $\overline{X}$ («не X») обозначает контрадикторную (противоречащую) противоположность X; X есть высказывание — истинное, если X ложно, и ложное, если X истинно.**

2. Конъюнкция: $X\&Y$ («X и Y») обозначает высказывание, которое истинно только тогда, когда и X и Y оба истинны (в остальных трех случаях $X\&Y$ ложно).***

3. Дизъюнкция: $X \vee Y$ («X или Y») — высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда по крайней мере одно из двух высказываний X, Y является истинным (разумеется, оно будет истинным, если X и Y оба истинны;

---

* Исчисление высказываний впервые подробно развито Г. Фреге в связи с задачей логического обоснования основ арифметики (1879) (G. Frege. Begriffsschrift). Оно гораздо проще алгебры Буля и может быть рассматриваемо так же, как двузначное исчисление, как применение понятия о функции истинности, могущей принимать только 2 значения: R (соответствует 1) и F (соответствует 0), т. е. «истинно» («верно») и «ложно» («неверно»).

** Вполне соответствует отрицанию алгебры Джевонса—Шрёдера — Порецкого.

*** Соответствует логическому умножению алгебры Буля.

ложным оно будет лишь в том случае, когда X и Y оба ложны; таким образом, $X \vee Y$ не значит: «либо X, либо Y» — в том смысле, что X исключает Y, и наоборот; напротив, это высказывание допускает совместное существование X и Y).*

4. Импликация: $X \rightarrow Y$ («из X следует Y», «если X, то Y») — высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно и Y ложно; остальные случаи: X — истинно, Y — истинно; X — ложно, Y — ложно; X — ложно, Y — истинно; они все дают высказывание $X \rightarrow Y$, которое нельзя считать ложным.**

5. Равнозначность. $X \sim Y$ (или $X \rightleftarrows Y$) [„X эквивалентно, равнозначно (равноценно) Y“] — высказывание, которое тогда и только тогда истинно, когда X и Y одновременно ложны или одновременно истинны. Таким образом, $X \sim Y$ означает, что X и Y имеют одно и то же значение истинности или одно и то же значение ложности (но не значит, что X и Y имеют одинаковый смысл).

Таким образом, соотношение $X \sim Y$ имеет место между двумя любыми истинными или двумя любыми ложными высказываниями. Например, высказывания

---

* В алгебре Буля дизъюнкции соответствует логическая сумма.

** Принято иллюстрировать сущность импликации таким образом, что, например, истинными будут высказывания: если «$2 \times 2 = 4$», то «снег бел» (истинно—истинно); если «$2 \times 2 = 5$», то «снег бел» (ложно—истинно); если «$2 \times 2 = 5$», то «снег черен» «ложно—ложно). Ложным является только высказывание: если «$2 \times 2 = 4$», то «снег черен». Обычно говорят, что соотношение $X \rightarrow Y$ имеет только то общее с соотношением основания и следствия, что при истинности высказывания $X \rightarrow Y$ из истинности X можно заключить об истинности Y. Все это можно пояснить еще таким образом. Совершенно ясно, что из ложного можно получить все что угодно — и ложное и истинное; из истинного можно получить только истинное, но не ложное. Поэтому можно считать ложным только вывод ложного из истинного, остальные три комбинации следует считать истинными. Однако следует заметить, что вопрос о точной формулировке импликации многие считали спорным. Необходимо сказать, что подлинное содержание импликации в действительности заранее приспособлено именно к математическим суждениям. В самом деле, если я имею, например, верное равенство, то, поступая с ним надлежащим образом, я никогда не приду к ложным выводам, т. е. из истинного должно следовать всегда истинное, если суждение истинно. Если же я имею ложное суждение (например, $1 = 2$), то отсюда, поступая по правилам арифметики, можно получить и новое неверное ($2 = 3$, если прибавить по 1 к обеим частям) и верное ($0 = 0$, если помножить обе части равенства на 0). Таким образом, общий смысл импликации в том и состоит, что всякое суждение следования необходимо признать верным, кроме того единственного случая, когда из верного выводится неверное, т. е. когда самое суждение (импликация) ложно. Заметим, между прочим, что это элементарное рассмотрение наглядно показывает тот характер подготовленности внутреннего содержания понятий и аксиом этих логических систем, который совершенно неосновательно отрицают крайние формалисты.

$$2 \times 2 = 4 \sim 1 = 1$$
$$2 > 3 \sim 1 = 10$$

оба истинны.

Общее замечание: согласно с нашими определениями основных логических связей истинность или ложность сложного высказывания зависит только от истинности и ложности составляющих высказываний, а не от содержания этих составляющих, не от их реального смысла.*

Если сокращенно обозначить истинное высказывание через R, а ложное через F,** то получим:

1) $\bar{R}$ — ложно, $\bar{F}$ — истинно;
2) $R \& R$ — истинно; $R \& F$, $F \& F$ — ложно;
3) $R \vee R$, $R \vee F$, $F \vee R$ — истинны, $R \longrightarrow F$ — ложно;
4) $R \longrightarrow R$, $F \longrightarrow R$, $F \longrightarrow F$ — истинны, $R \longrightarrow F$ — ложно;
5) $R \sim R$, $F \sim F$ — истинны, $R \sim F$, $F \sim R$ — ложны.

Таким образом, мы можем рассматривать введенные основные связи 1—5, как функции истинности, т. е. как определенные функции, для которых и в качестве аргументов и в качестве значений самих функций рассматриваются только R и F (т. е. R и $\bar{R}$), т. е. два качественных значения как в алгебре Буля—Порецкого, так и в арифметике И. И. Жегалкина, о которой речь идет выше. Из повторного применения и комбинирования основных связей можно получить более сложные высказывания, чем заданные. В результате получается опять какая-то определенная функция истинности. Например, из трех основных высказываний X, Y, Z можно получить сложное высказывание.

$$((X \longrightarrow Y) \& (Y \longrightarrow Z)) \& (X \vee Z).$$

Это высказывание содержит для X, Y, Z 8 возможных троек значений: R, R, R; R, R, F; и т. д. — до F, F, R включительно ($8 = 2^3$).

Каждой такой тройной формуле дается значение R или F.

Например, из F, R, F получаем окончательное значение F, так как выходит, что

$$((F \longrightarrow R) \& (R \longrightarrow F) \& (F \vee F),$$

или

$$(R \& F) \& F, \text{ т. е. } F \& F, \text{ т. е. } F.$$

Некоторые из этих связей равнозначны, т. е. выражают ту же самую функцию истинности.

---

* Однако, как мы видели, предварительно эти логические связи (например, импликация) уже заранее подготовлены так, чтобы наилучшим образом отражать внутреннюю сущность математических отношений и суждений.

** В алгебре Буля F будет соответствовать нулю, а R — единице.

Так, $\overline{\overline{X}}$ равнозначно с X (отрицание отрицания,* двойное отрицание). Равнозначные связи называются эквивалентными:

$\overline{\overline{X}}$ экв. X (сокращение «экв.» не принадлежит к числу логических символов теории высказываний).**

Легко показать — и это выполнил Фреге, — что все обстоит так же, как и в случае логических операций над классами, т. е. имеют место все соответствующие правила:

$X \& Y$ экв. $Y \& X$ (коммутативность) и т. д. (ассоциативность и дистрибутивность также выполняются). При этом можно называть $X \& Y$ логическим произведением, а $X \vee Y$ — логической суммой (так делают чаще всего); можно делать и наоборот, так как в отличие от алгебры здесь имеют место два (точнее, даже четыре) дистрибутивных закона:

$$X \& (\overline{Y} \vee Z) \text{ экв. } (X \& Y) \vee (X \& Z)$$

наравне с законом:

$$X \vee (Y \& Z) \text{ экв. } (X \vee Y) \& (X \vee Z).$$

Поэтому безразлично, какое действие здесь принять за символическое сложение, какое за умножение.

Следует отметить очевидные эквивалентности:

$$X \& X \text{ экв. } X,$$
$$X \vee X \text{ экв. } X.$$

Для избежания недоразумений можно просто называть
$X \& Y$ конъюнкцией X и Y,
$X \vee Y$ дизъюнкцией X и Y;
$X \longrightarrow Y$ обычно называют, как уже упоминалось, импликацией.

* * *

Можно ввести ряд упрощающих дело соображений. Именно, очевидны следующие эквивалентности:

$X \cdot X$ экв. X ($\cdot$ вместо &)***
$X \vee X$ экв. X
$X \cdot R$ экв. X
$X \cdot F$ экв. F

---

* Нельзя ни в коем случае смешивать двойное формально-логическое отрицание с отрицанием отрицания в системе диалектического материализма.

** Можно заменить его каким-либо знаком, не придавая ему значения эквивалентности в смысле связи: $x \rightarrow y$ и $y \rightarrow x$.

*** В дальнейшем всюду пишем точку $\cdot$ вместо знака конъюнкции &.

$$X \vee R \text{ экв. } R$$
$$X \vee F \text{ экв. } X$$
$$R \longrightarrow X \text{ экв. } X$$
$$F \longrightarrow X \text{ экв. } R$$
$$X \sim R \text{ экв. } X$$
$$X \sim F \text{ экв. } X$$
$$\overline{X \cdot Y} \text{ экв. } \overline{X} \vee \overline{Y}$$
$$\overline{X \vee Y} \text{ экв. } \overline{X} \cdot \overline{Y}$$
$$X \longrightarrow Y \text{ экв. } \overline{X \cdot \overline{Y}}.$$

Вообще одно и то же высказывание может быть записано в различных формах; так, например, последнее (логическая эквивалентность) может быть передано следующим образом:

$$X \longrightarrow Y \text{ экв. } \overline{X \cdot \overline{Y}}, \text{ экв. } \overline{X} \vee \overline{\overline{Y}}, \text{ экв. } \overline{X} \vee Y.$$

Можно еще отметить следующие эквивалентности:

$$X \vee Y \text{ экв. } \overline{X} \longrightarrow Y$$
$$X \longrightarrow Y \text{ экв. } \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$$
$$X \sim Y \text{ экв. } (X \longrightarrow Y) \cdot (Y \longrightarrow X)$$
$$\left.\begin{array}{l} X \vee Y \text{ экв. } \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}} \\ X \cdot Y \text{ экв. } \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} \end{array}\right\}$$

Последние две эквивалентности — это хорошо нам знакомые свойства логической суммы и произведения, в свое время найденные де Морганом и Булем.*

Таким образом, оказывается, что одно и то же сложное высказывание может быть представлено в различных формах с помощью основных знаков.

Оказывается поэтому, что можно уменьшить число основных знаков. Действительно, так как

$$X \sim Y \text{ экв. } (X \longrightarrow Y) \cdot (Y \longrightarrow X),$$

то можно обойтись без знака $\sim$ ** (равнозначность); таким же образом можно показать, что достаточно знаков $\cdot$ (конъюнкция) и — (отрицание), а знаками $\longrightarrow$ (импликация) и $\vee$

---

* $X \vee Y$ экв. $\overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}}$ есть не что другое, как равенство алгебры Буля—Порецкого: $(x + y)_1 = x_1 y_1$, а $X \cdot Y$ экв. $\overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}$ соответствует равенство $(xy)_1 = x_1 + y_1$.

** Следует заметить, что во многих работах по математической логике этот знак имеет совсем другое значение (знак отрицания). Вообще по части обозначений в этой науке положение оставляет желать лучшего.

(дизъюнкция) можно и не пользоваться и т. п. Фреге брал за основные знаки $\longrightarrow$ и $\overline{}$, Рассел $\vee$ и $\overline{}$, Брентано $\cdot$ и $\overline{}$; Гильберт вводил в целях удобства три знака: $\cdot$, $\vee$, $\overline{}$, т. е. следовал, в конце концов, Шрёдеру и Порецкому.

Следует заметить, что не всякие два знака достаточны для выражения всех связей (например, $\sim$ и $\overline{}$ недостаточны); кроме того, при представлении сложных связей отрицание $\overline{}$ абсолютно необходимо.*

Приведение логических выражений к нормальной форме

В общем, совершенно так же, как и в алгебре Буля, могут быть установлены следующие правила:

1) со знаками $\cdot$ и $\vee$ можно действовать, как в алгебре,

2) $\overline{\overline{X}}$ можно заменить на X,

3) $\overline{X \cdot Y}$ можно заменить через $\overline{X} \vee \overline{Y}$, а $\overline{X \vee Y}$ через $\overline{X} \cdot \overline{Y}$,

4) $X \longrightarrow Y$ можно заменить на $\overline{X} \vee Y$, а $X \sim Y$ на $(\overline{X} \vee Y) \cdot (\overline{Y} \vee X)$.

С помощью этих правил можно всегда привести любое сложное высказывание к нормальной форме, т. е. к такой, которая содержит только последовательность основных высказываний, связанных лишь знаками конъюнкции и дизъюнкции.

Именно, сначала пользуемся правилом (4), уничтожая таким образом знаки $\sim$ и $\longrightarrow$; затем правило (3) позволяет, после соответствующего числа применений, добиться того, что знак $\overline{}$ сохранится только над основными высказываниями; тогда, применяя закон дистрибутивности и заменяя $\overline{\overline{X}}$ на X и т. п., получим так называемую нормальную форму. Все это представляет примерно ту же совокупность действий, как и в преобразовании логических выражений у Буля, Порецкого и др.

Таким образом, в основном, строится исчисление высказываний, предложенное впервые Фреге и представляющее гораздо более простую конструкцию, чем исчисление классов, но исторически возникшую позже. Исчисление высказываний достаточно для выражения тех случаев логических связей, когда сами высказывания выступают в качестве нераздельных целых элементов, формально связанных один с другим

* Замечательно, что все связи можно выразить даже с помощью всего только одного знака /, так называемого «штриха Шеффера», выражающего несовместность предложений. Однако общий вид связей от этого, разумеется, весьма усложняется.

соответствующими отношениями. Самая же внутренняя структура высказываний с формальной точки зрения нас не интересует и не касается, так что мы не имеем здесь в виду выражения каких-либо отношений между субъектом и предикатом, заключенных внутри высказывания, т. е. в соответствующем ему предложении.

В силу этого исчисление высказываний отнюдь не покрывает всех видов силлогизмов логики Аристотеля, являясь гораздо более узкой конструкцией. К тому же следует помнить, что Аристотелева логика имеет в качестве неизбежного и важнейшего компонента принцип исключенного третьего, который для общей логики суждений (высказываний) является также очевидным с любой точки зрения, но только до тех пор, пока мы остаемся в области финитных суждений. Как только мы переходим в область суждений трансфинитных, так тотчас мы теряем уверенность в возможности безоговорочного применения принципа tertium non datur.

Между тем, логика Фреге—Гильберта построена, по существу дела, специально для целей аксиоматического обоснования математики,* в которой трансфинитных суждений сколько угодно.

Отсюда ясно, что уже в исчислении высказываний могут возникать сомнения в неограниченной применимости принципа исключенного третьего. Связанным с этими сомнениями вопросом мы посвятим особое место в данной работе.

Здесь же укажем лишь на то обстоятельство, что рассматриваемое аксиоматическое направление имеет большую литературу, начиная с обширных работ Дж. Пеано, Кутюра, Расселя и Уайтхэда, Гильберта и ряда других лиц.** В самом начале развития этого направления работы данного типа подверглись резкой критике со стороны крупнейшего математика того времени — француза А. Пуанкарэ, предшественника и первоначального вдохновителя так называемого «интуиционистского» течения в изучении оснований математики.

В очень острой форме Пуанкарэ указал представителям «логистики» (математической логики) на неизбежность внутренних противоречий в их построениях благодаря неправомерному использованию ими таких понятий, как актуальная бесконечность. Критика Пуанкарэ вызвала ответы со сторо-

---

* Даже последователи крайнего формализма типа Гильберта не считали принцип tertium non datur интуитивно очевидным для трансфинитных суждений.

** Впрочем, следует заметить, что различные авторы по-разному смотрели на свои цели и приемы; однако это не затрагивало существа дела, и мы не видим особой надобности входить здесь в подробности.

ны крупного представителя логистики Л. Кутюра; ответы эти, впрочем, в своих очень существенных частях не могут быть признаны достаточно убедительными. Противоречия в формально-логических системах этого рода при признании актуальной бесконечности и при пользовании теоретико-множественной терминологией оказались совершенно неизбежными и неустранимыми. Поэтому скоро (около 1908 г.) возникла новая школа (Брауэр, Вейль и другие), присвоившая себе наименование «интуиционистской» и отказавшаяся от ряда положений формально-аксиоматического направления, — в том числе и от признания актуальной бесконечности. У интуиционистов сохранилось лишь понятие о свободно становящейся (т. е. потенциальной) бесконечности. Главным пунктом интуиционистской критики формально-логических конструкций в математике был вопрос о пользовании принципом исключенного третьего в бесконечных (инфинитных, трансфинитных) суждениях.

Брауэру удалось показать, что именно безоговорочное пользование этим принципом при изучении бесконечных математических процессов нередко приводит к неустранимым противоречиям.

Данному вопросу и посвящена следующая глава.

Здесь мы скажем лишь несколько слов о дальнейшем развитии в построении различных отделов математической логики для целей аксиоматического исследования — так, как это выглядит в изложении представителей формалистического направления (Гильберт, Бернайс, Аккерман и др.). Исчисления высказываний недостаточно даже для выражения ряда логических связей, известных Аристотелевой логике. Более широким является одноместное исчисление предикатов, которое в соединении с исчислением высказываний оказывается равноценным с известным уже нам исчислением классов. Эта форма логического исчисления покрывает 15 из 19 Аристотелевых модусов. Остальные 4 формы (darapti, bamalip, felapton, fesapo) остаются вне данной системы. Такое уклонение вызывается опять-таки математической спецификой, не позволяющей точно согласовать понятия и обозначения математической логики с традиционными определениями и формулировками. Но математические потребности вызвали дальнейшее развитие в этом направлении математической логики. Именно, в математике нередко то обстоятельство, что необходимо каким-то образом выразить символически логические связи сразу между несколькими предметами, причем эти связи сами по себе могут быть не простыми, а содержать внутренне несколько важных черт, которые надо учесть одновременно.

Таковы, например, отношения «предшествования» и «следования за» между точками на линии — при построении элементарно-геометрической аксиоматики. Одним словом, это тоже явления чисто математического порядка, требующие особого подхода.

Эти обстоятельства вызвали видоизменение и расширение логических исчислений. Возникло расширенное исчисление предикатов, по формулировкам и обозначениям специально приспособленное для целей математического исследования, главным образом для доказательства непротиворечивости тех или других математических построений и систем, так как очень многими математиками полностью отождествлялась «внутренняя непротиворечивость» и «математическое существование».

Желающим ознакомиться с этим направлением в развитии математической логики можно порекомендовать известную книгу Д. Гильберта и В. Аккермана «Основы теоретической логики» (М., 1947).* Многие ветви дальнейшего развития и новых направлений рассмотрены в обзоре польского логиста А. Мостовского в «Успехах математических наук» [1954, т. IX, вып. 3 (61)].

Нужно заметить, что весь этот материал представляет интерес главным образом для математиков, не имея того философского значения в общем смысле, которое иногда пытаются ему приписать. Дело в том, что все эти формальные системы создаются для обоснования чисто математических конструкций; какие бы философские начала ни выставляли основатели этих систем, последние всегда будут лишь формально-логическими построениями, приспособленными для узко математических целей. Едва ли не единственным вопросом, требующим здесь особого разъяснения, является вопрос о законе исключенного третьего.

* *
*

В последнее время в нашей отечественной научной литературе появилось так называемое «конструктивное» направление, стремящееся перестроить все отделы математики, и в первую очередь математическую логику, на новых началах, без всякого использования понятия о бесконечности и такими способами, которые всегда допускают строгие и точные формулировки.

Конструктивное направление выросло из интуиционистского и отличается от последнего по существу только тем,

---

* К сожалению, в этом издании очень много опечаток.

что конструктивисты не признают нужным вводить понятие даже интуиционистской «свободно становящейся бесконечности» (т. е. потенциальной), которое действительно нет никакой надобности явно вводить в суждения, ибо такая бесконечность есть только символ возможности неограниченного продолжения работы алгоритма до любых нужных пределов.

Само по себе понятие бесконечности оказывается, при разумном ограничении понятия «алгоритм», совсем ни при чем.

Поэтому и вопрос о границах применимости закона исключенного третьего здесь полностью отпадает: конструктивистские суждения всегда подчиняются этому закону. Суть дела заключается в том, что конструктивисты требуют (как и интуиционисты, от которых они в этом отношении не отличаются) отказа от всех трансфинитных построений.

Все средства (алгоритмы) и объекты исследования признаются действенными и существующими только в том случае, если построения могут быть проведены в самом деле. Никакие чистые «доказательства существования», неэффективные доказательства без возможности фактического построения, не допускаются.

Как говорит А. А. Марков,* один из виднейших представителей конструктивизма, «в настоящее время имеется реальная возможность осуществлять пересмотр основ анализа», что можно сделать на базе теории рекурсивных функций и родственных отделов науки.

Таким образом, теоретико-множественные обоснование и построение логики (и математики вообще), понимаемое в том смысле, какой придавали ему «формалисты», может считаться с этой точки зрения совершенно непригодным.

В конструктивной логике и математике трансфинитным процессам в прежнем смысле попросту нет места.

---

* А. А. Марков. О конструктивных функциях. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LII. М., 1958, стр. 315—316.

ЗАКОН ИСКЛЮЧЕННОГО ТРЕТЬЕГО

Вопрос о границах приложимости принципа tertium non datur * был поставлен интуиционистами в связи именно с логико-математическими построениями и только в применении к инфинитным процессам. Как в алгебре Буля, так и в любом финитном суждении математического характера закон исключенного третьего справедлив безраздельно. Вопрос о границах приложимости этого закона к инфинитным суждениям имеет большую литературу, открывшуюся работами голландского ученого Брауэра. Мы не имеем в виду рассматривать всю эту литературу, а ограничимся лишь основными вехами, пользуясь, по преимуществу, высказываниями самого Брауэра и акад. А. Н. Колмогорова, работы которого по данному вопросу представляют большой интерес.

Брауэр (с 1907 по 1908) дал математическую формулировку принципа tertium non datur в такой форме: «Либо все числа обладают свойством A, либо существует некоторое число со свойством $\bar{A}$».

По Брауэру, вера в этот принцип исторически была обусловлена тем, что первоначально классическую логику абстрагировали из математики конечных совокупностей, затем приписали этой логике абсолютное, независимое от математики существование argiori, и, наконец, на основании этой мнимой априорности применили ее неправомерным образом к математике бесконечных совокупностей. Вместе с тем, по мнению Брауэра, Аристотелев закон противоречия может применяться без ограничения.

А. Н. Колмогоров в своей работе 1925 г., помещенной в московском «Математическом сборнике» говорит: «Мы...

* У Аристотеля никакого сомнения в приложимости принципа возникнуть не могло, так как он имеет дело всегда с финитными суждениями (см. Аналитики, кн. 2, гл. 19—22).

признаем..., что своеобразие математики как науки создает для логики особые проблемы, которые исследуются специальной „логикой математики". Только в ней возникает сомнение в применимости принципа tertium non datur».

Таким образом, отрицание неограниченной применимости закона исключенного третьего относится только к некоторым бесконечным математическим процессам, не распространяясь на какие-либо иные области. Формулировки этого принципа могут быть очень различны. Лейбниц предлагал следующую его форму: «Всякое суждение или истинно, или ложно».

Внешне весьма отличается от этого формулировка Гильберта, применявшаяся им в логике суждений: «Если B следует из A и из его отрицания, то B истинно»; для бесконечных совокупностей объектов эта формулировка еще усложняется, причем вводятся кванторы общности и существования.

А. Н. Колмогоров (1925) предложил такое выражение закона исключенного третьего: «Если из A следует и истинность и ложность некоторого суждения B, то само суждение A ложно».*

С помощью этой формулировки А. Н. Колмогорову удалось построить логическую систему, которую он назвал «математикой псевдоистинности» и в которой суждение A называется «псевдоистинным», если истинно его двойное отрицание (в финитной области двойное отрицание A всегда совпадает с A).

Сказанного достаточно для некоторого внешнего пояснения тех особенностей, с которыми встречаются при попытках приложения закона исключенного третьего в математике бесконечного. В чем же внутренняя причина этих особенностей и затруднений? Казалось бы, любой объект должен или обладать некоторым данным свойством, или не обладать им — третье невозможно. Это несомненно так во всех финитных суждениях. Однако в инфинитных математических суждениях дело обстоит несколько сложнее. Затруднение в применении закона исключенного третьего состоит здесь, конечно, не в том, что возможно и существует нечто новое третье,

---

* Это выражение закона соответствует «интуиционистскому» пониманию дела. Обычный («классический») принцип в интерпретации А. Н. Колмогорова равносилен утверждению: «Для каждой математической задачи можно либо дать ее решение, либо свести это решение к противоречию». Равным образом можно выразить закон исключенного третьего в форме утверждения: «Из двойного отрицания A (не-не-A) следует A» и другими способами. Что касается таких логических систем, как алгебра Буля—Порецкого, то там закон исключенного третьего действует неограниченно; он выражается в этом случае в форме $a + \bar{a} = 1$, причем закон противоречия $a\bar{a} = 0$ является его отрицанием, и наоборот.

противоречащее и A и его полному отрицанию и полностью независимое от них. Дело в том, что во многих бесконечных математических процессах не всегда (например, не для всех значений переменного) можно отличить A от $\bar{A}$.

Таким образом, наряду с A и $\bar{A}$ появляется («существует» в математическом смысле) неисключенное третье: «неизвестно, A или $\bar{A}$», «неопределимо, A или $\bar{A}$». При этом может оказаться даже так, что эта неизвестность, неопределимость иногда является лишь следствием недостаточности применяемого алгоритма (способа определения данного свойства — в этом случае).

Иногда же данное свойство может быть и вообще неопределимо в известных случаях, оно может не иметь определенного смысла.

Так или иначе, это обстоятельство заставляет, во всяком случае, ограничить область безоговорочного применения логического закона исключенного третьего в математике финитными суждениями. Иногда и при этих последних трудности такого определения интересующего нас свойства или его отсутствия могут заставить прибегнуть к трехзначной логике. В качестве грубого, но достаточно показательного примера рассмотрим следующий.

Представим себе какой-либо возрастающий ряд положительных целых чисел; пока этот ряд конечен, мы можем безоговорочно утверждать, что все члены ряда — или четные числа (A), или нечётные ($\bar{A}$) — третье исключено. Однако, если ряд чисел продолжается неограниченно, мы не можем утверждать, что исключено третье: «невозможность определения чётности или нечётности очень далеких * чисел», т. е. невозможность выбора «A или $\bar{A}$».

---

* Под «очень далекими» мы разумеем здесь бесконечно далекие, т. е. говорим, в сущности, о законченной (актуальной) бесконечности. Если признаётся только потенциальная бесконечность, то и тогда, однако, остается не совсем ясным, как реально отличить чётные числа от нечётных, если закон возрастания этих целых чисел очень сложен, а сами числа очень велики. Только признавая все построение полностью конечным, можно поручиться, что рано или поздно удастся перебрать все числа и точно установить их характер. Однако и это может оказаться очень трудным. Еще лучше был бы пример такого рода: дан неограниченно возрастающий ряд целых положительных чисел, в котором необходимо различить абсолютно простые числа (A) от сложных (не-A); для этого мы не в состоянии указать какой-либо алгоритм, позволяющий реально разрешить задачу не только для всех, но даже и для многих сравнительно несложных подобных последовательностей; не говорим уже о полной невозможности применения здесь терминов «для всех», «все» и т. п.

Таким образом, в некоторых инфинитных суждениях появляется три возможности такого типа, как «истинно», «ложно», «неизвестно» (неопределимо — истинно или ложно, или просто лишено смысла). Только в этом смысле и можно говорить об ограниченности применения принципа tertium non datur в некоторых математических суждениях.*

В тех случаях, когда наряду с A и $\bar{A}$ появляется третья возможность — «неизвестно, A или не-A», говорят о трехзначной математической логике.

В этом случае, кроме истинности t и логичности f, необходимо входит в суждения неизвестность (неопределенность), которую будем обозначать буквой u.

Для примера приводим несколько таблиц, показывающих выражение отдельных основных связей через t, f, u и в трехзначной логике С. Клини.**

Конъюнкция: $Q \& R$ (Клини, стр. 298).

R	t	f	u
Q t	t	f	u
f	f	f	f
u	u	f	u

Импликация: $Q \rightarrow R$.

R	t	t	u
Q t	t	f	u
f	t	t	t
u	t	u	u

Заметим, что другой исследователь, Я. Лукасевич, в последней клетке ставил t, т. е. принимал, что $(u \rightarrow u) = t$.

---

* А. Н. Колмогоров в 1925 г. указал на то обстоятельство, что в логике предложений закон исключенного третьего может оказаться не имеющим действия в силу того, что сами отдельные предложения имеют трансфинитное внутреннее содержание.

** С. К. Клини. Введение в метаматематику. М., 1957, стр. 298.— Заметим, что имеются и другие схемы этого рода. Вообще определение характера основных логических связей до известной степени зависит от нашего выбора.

Эквивалентность: $Q \equiv R$ (Клини, стр. 298).

R	t	f	u
Q t	t	f	u
f	f	t	u
u	u	u	u

Отрицание: $\overline{Q}$.

Q t	f
f	t
u	u

Дизъюнкция: $Q \vee R$.

R	t	f	u
Q t	t	t	t
f	t	f	u
u	t	u	u

Будучи «интуиционистом», Клини отлично понимает смысл третьей возможности трехзначной логики, говоря, что символы t, f, u допускают толкования: «истинно», «ложно», «не определено», или «истинно», «ложно», «неизвестно» (или «значение несущественно»).* «При этом, — добавляет он, — к категории „неизвестных“ мы относим все предложения, значений которых мы либо не знаем, либо не желаем в данный момент принимать во внимание, и тогда это не исключает двух других возможностей „истинно“ и „ложно“» (Клини, стр. 299). Совершенно очевидно, что такая точка зрения вовсе не противоречит каким-либо положениям традиционной логики. В трехзначной логике действует принцип исключенного четвертого, так как все возможности исчерпываются тремя предположениями — истинно, ложно, неизвестно (t, f, u). Что касается так называемых «многозначных логик», то это только не совсем удачное наименование таких логических конструкций, в которых имеется ряд значений: 0, 1, 2, 3, . . . , $k-1$, принимаемых аргументами x, x_2, . . . , x_n и функциями $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, входящими в систему. Подобная система функций может быть сокращенно обозначена одной буквой P_k.

Если $k=2$, т. е. и аргументы и функции могут принимать только значения 0 и 1, то имеем, очевидно, систему P_2, представляющую Булеву алгебру. Американский математик

* Быть может, даже просто «бессмысленно».

Пост доказал, что любая система P_k может получить интерпретацию в P_2 так, как в алгебре Буля.

Таким образом, эти «многозначные логики» не являются какими-то особыми системами, заставляющими пересмотреть закон исключенного третьего или даже закон исключенного четвертого. Причина этого лежит в том, что в такой «k-значной логике» одному (любому) из k допущений полностью противостоят все остальные $k-1$, а не каждое из них по отдельности. Заметим, что математическая теория многозначных логик отличается большой сложностью и пока еще мало разработана.

Многозначная логика является важным и удобным вспомогательным аппаратом при описании и конструировании электронных схем, так как с ее помощью удается выразить и учесть ряд таких характеристик входящих в эти схемы элементов, которые не могут быть учтены двузначной (булевской) логикой (типы усилителей, режимы работ и т. п.).

Никакого общелогического или общефилософского значения «многозначные логики» не имеют, представляя в сущности математико-технический аппарат для исследования сложных электронных схем, употребляемых в вычислительных и иных машинах.*

В заключение необходимо подчеркнуть, что все формулировки принципа «третье не дано», применяемые в математических построениях с трансфинитными процессами, значительно отличаются от обычной формулировки Аристотелевой логики, так как они приспособлены к специфическим целям математических конструкций и методам математического исследования, на что и указывал, как говорилось выше, акад. А. Н. Колмогоров.

Это отличие Аристотелева принципа исключенного третьего от его специальных математизированных видоизменений следует всегда иметь в виду и не приписывать математической логике намерений изменить или отменить вообще логический закон tertium non datur, который на своем месте остается в полной силе и притом в прежней формулировке.

---

* Для ознакомления с основными понятиями и построениями многозначной логики можно порекомендовать статьи С. В. Яблонского и других в Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LI. М., 1958.

ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ И КОНСТРУКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Общие сведения

Третье направление (оно выросло в значительной мере из двух первых) — комбинаторная математическая логика, которую можно назвать также конструктивной, или алгоритмической, развилось особенно за последние 20 лет и получило значительные приложения в теории и практике математических машин разного рода.* Совершенно невозможно и притом бесполезно было бы излагать здесь подробности этого направления в математической логике, которое служит не логике и не аксиоматическому разъяснению и исследованию основной математики, а занимается преимущественно определением возможности или невозможности «алгоритмического» решения тех или иных нерешенных комбинаторных проблем математики — часто весьма тонкого характера.** Что такое алгоритмическое решение?

Алгоритмом, или алгорифмом, называется определенный рецепт решения той или другой математической задачи, состоящей в точном указании правил отыскания этого решения, которое, так сказать, механически получается, если следовать указаниям алгоритма шаг за шагом. Простейшими примерами математических алгоритмов являются такие, как алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух целых чисел или связанные с аналогичными процессами

---

* Разумеется, это третье направление выросло на основе предшествовавших ему течений и результатов математической логики. Однако по своим обозначениям, терминологии, приемам и целям исследования конструктивная логика значительно отличается от прежде существовавших отделов науки. Что касается практических приложений, то следует сказать, что и простая алгебра Буля применяется при конструировании вычислительных машин весьма широко.

** В основном, это вопросы, связанные с изучением возможности или невозможности разрешения той или иной комбинаторной математической проблемы с помощью алгоритмических приемов.

более общий алгоритм непрерывных дробей и алгоритм нахождения общей меры двух отрезков.

Можно указать также алгоритм разложения числа в десятичную дробь и т. п.*

Понятие алгоритма вообще само по себе не является строго определенным математически; поэтому приходится его ограничивать; в данном случае вводят, например, понятие о так называемых «нормальных алгорифмах» (А. А. Марков), которые соответствуют, в общем, процессам вычисления, носящим в настоящее время название рекурсивных, и речь о которых будет идти далее. Здесь мы укажем только общий характер «нормальных алгорифмов» Маркова.

Нормальный алгорифм должен расчленяться на элементарные шаги, каждый из которых совершается по однозначному правилу, не допускающему двойственных толкований. Шаги могут быть «интегрального» характера, влияющие на объект («слово») в значительной степени или даже в целом, или локального типа, вызывающие только заранее ограниченные местные изменения. Нормальный алгорифм Маркова должен допускать возможность сведения интегральных шагов к конечному числу элементарных локальных операций. Подобные операции заключаются в применении по строго определенным правилам различного рода подстановок к комбинациям букв («словам»), взятым из данного конечного набора символов («алфавит»). Взяв такой строго определенный конечный набор каких-либо знаков (символов, «букв») A, мы можем образовать из них различные комбинации — так называемые «слова» в алфавите A.**

Затем составляется список так называемых «простых» и «заключительных» подстановок в алфавите A («схема» алгорифма), причем эти подстановки расположены в определенном порядке. Алгорифм предписывает последовательно преобразовывать слово по следующим правилам.

Пусть на некоторой ступени работы алгорифма получено слово P. Если среди левых частей формул подстановок нет слов, входящих в P,*** то процесс обрывается на этом слове. Если же среди них есть слова, входящие в P, то берется первая по порядку из соответствующих формул подстано-

---

* Отдельных конкретных алгоритмов известно очень много.

** Разумеется, они обычно не имеют ничего общего со словами в обычном смысле, т. е. со словами какого-либо языка, хотя иногда случайно и могут совпадать с ними. «Словом» в заданном алфавите называется любая последовательность букв (с повторениями или без них), принадлежащих данному алфавиту.

*** Если слово Q является частью слова P, то говорят о «вхождении» слова Q в слово P.

вок, и вместо первого «вхождения»* ее левой части в P подставляется правая часть формулы подстановки. На полученном таким способом новом слове процесс обрывается, если использованная формула была заключительной. Если же она была простой, то процесс продолжают, взяв следующую подстановку и т. д. Исходя из произвольного слова в алфавите A, продолжают этот алгорифм до окончательного обрыва. Если процесс заканчивается, то полученное при его обрыве слово есть результат преобразования исходного слова. В этом и состоит основа понятия о нормальном алгорифме, по Маркову.

То, что мы здесь говорили, есть только описательная сторона указанного понятия, не касающаяся ни в малейшей мере технической стороны дела, в общем виде представляющей внушительный математический аппарат, изучать который мы здесь не можем. Для нас важно лишь то обстоятельство, что нормальные и им подобные алгорифмы (как и рекурсивные процессы) обнаруживают, так сказать, конструктивный характер, а потому могут быть в некотором смысле «вложены» в машину. Такого типа процессы приобретают поэтому большое значение в теории информации и автоматического управления (кибернетика), в вычислительных машинах, при изучении машиноподобных функций человеческого мышления и т. п. Только этим и объясняется некоторый общий интерес этого направления с точки зрения философа. В технические же подробности здесь входить вряд ли уместно, так как придется переходить в область математики и даже техники. Тем не менее, приходится считать небесполезным рассмотрение (без подробностей) таких понятий, как, например, рекурсивные функции, тесно связанные с нормальными алгорифмами (алгоритмами). К этому и перейдем.

Еще раз подчеркиваем аналогию между действием машины и действием алгоритма.

Рекурсивные функции

В той части современной математической логики, которая выражена направлением, охарактеризованным нами как комбинаторно-алгоритмическое (третье направление), большую роль играют так называемые рекурсивные функции, имеющие непосредственное родство с алгоритмическими процессами, например с нормальными алгорифмами А. А. Маркова. Термин «рекурсивный» происходит от ла-

* См. предыдущее примечание.

тинского recurso 'бегу назад', 'возвращаюсь вспять' и хорошо характеризует самое существо дела. Здесь нет надобности говорить об общем формальном определении рекурсивности. Достаточно пояснить термин на элементарных примерах, одним из которых является часто привлекаемый для иллюстрации образчик — так называемый ряд Фибоначчи (Леонардо Фибоначчи — крупный итальянский математик XIII в.). Этот ряд составляется следующим образом: $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, а в дальнейшем три последовательные члена ряда U_n, U_{n+1}, U_{n+2} связываются так называемым рекурсивным, или рекуррентным (возвратным), соотношением:

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n.$$

Такое задание дает возможность определить любое число Фибоначчи по значениям предыдущих чисел этого ряда, т. е. по числам с меньшим значком.

Определим, например, $U_8 = U_7 + U_6$, $U_7 = U_6 + U_5$ и т. д., вплоть до $U_2 = U_1 + U_0 = 1 + 0 = 1$, откуда $U_3 = 2$, $U_4 = 3$, $U_5 = 5$, $U_6 = 8$, $U_7 = 13$ и, наконец, $U_8 = 21$, т. е., возвращаясь назад (откуда и термины „рекурсия", „рекурсивный", „рекуррентный"), мы определяем последовательно и однозначно каждое число U_n, как бы велико n ни было.

Можно сказать, что $U_n = F(n)$, т. е. мы имеем дело с целочисленной функцией такого аргумента n, который также принимает только целые значения. Поэтому наши данные, определяющие ряд Фибоначчи, можно переписать в такой форме:

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1,$$
$$F(n+2) = F(n+1) + F(n).$$

Это и есть простейший пример рекурсивной функции, т. е. такой, значения которой определяются с помощью точного однозначного процесса (алгоритма), сопряженного с «возвратом» от неизвестного к известному.

«Возврат» может проходить как вниз, так и вверх, т. е. и к меньшим и к бо́льшим значениям аргумента.

То, что мы видели для чисел Фибоначчи, может быть обобщено, т. е. можно ввести понятие рекурсивности уже для более или менее широких классов функций от целочисленного значка n.

Для рекурсивных определений существенными обстоятельствами являются такие:

1) возможность после конечного числа шагов (вверх или вниз) вернуться от искомого неизвестного значения функции к заранее известным значениям той же функции

или других предварительно определенных функций, значения которых, таким образом, тоже заранее известны;

2) невозможность прийти к противоречию при проведении вычислений двумя разными путями, т. е. полная однозначность процесса в целом.

Общая схема индуктивного определения функции $\varphi(n, m_1, m_2, \ldots, m_r)$ переходом от n к $n+1$ (метод совершенной индукции) заключается в формулах:

$$\text{I. (начальное условие) } \varphi(0, m_1, m_2, \ldots, m_r) = f(m_1, m_2, \ldots, m_r),$$

$$\varphi(n+1, m_1, m_2, \ldots, m_r) = g(n, \varphi(n, m_1, m_2, \ldots, m_r), m_1, m_2, \ldots, m_r),$$

где f и g — ранее (заранее) определенные функции; это лишь частный случай рекурсивных функций, которые могут быть определены и более общими выражениями. Тем не менее схема (I) играет первостепенную роль в построении так называемых примитивно-рекурсивных функций.

Может быть введено понятие о двойной, тройной и т. д. рекурсии (по двум, трем и т. д. целочисленным значкам).

Обобщением примитивно-рекурсивных функций является более широкий класс общерекурсивных функций. Если оставить в силе только условие (*2*), т. е. требование однозначности, то приходим к еще более широкому классу так называемых частично-рекурсивных функций.*

В дальнейшие подробности общего порядка входить здесь мы не можем и покажем еще лишь 1—2 частных примера рекурсивных функций.

Рекурсивным процессом является сложение** натурального числа с другим натуральным числом.

Если $a+n$ обозначим через $\varphi(n, a)$, то имеем:

$$\varphi(0, a) = a$$
$$\varphi(n+1, a) = \varphi(n, a) + 1.$$

Поэтому функция $\varphi(n, a) = a + n$ следующим образом определяется с помощью простейшей функции $\beta(a) = a + 1$:

$$\varphi(0, a) = a,$$
$$\varphi(n+1, a) = \beta(\varphi(n, a)).$$

---

* Частично-рекурсивные функции могут быть определены не для всех значений своих аргументов [так как требование полной определимости (I) снимается].

** Мы берем в качестве примеров такие процессы, как сложение и умножение натуральных чисел потому, что они играют огромную роль в работе вычислительных машин. Легко заметить, что эти процессы, как и многие другие, имеют «алгоритмический» (и в то же время «рекурсивный») характер.

Операция („функция") β есть операция „следования за". Определение обычного сложения можно дать в форме

$$\varphi(0, a) = a,$$
$$\varphi(\beta(n), a) = \beta(\varphi(n, a)).$$

Умножение $\varphi(n, a) = na$ можно выразить так:

$$\varphi(0, a) = 0;$$
$$\varphi(n+1, a) = \varphi(n, a) + a.$$

Степень $\varphi(n, a) = a^n$ выражается в наших обозначениях следующим образом:

$$\varphi(0, a) = 1,$$
$$\varphi(n+1, a) = \varphi(n, a) \cdot a.$$

Эти обозначения легко перенести на „функции" многих переменных (целочисленные).

Возвращаясь к ряду Фибоначчи, получим:

$$F(0) = 0; \; F(1) = 1;$$
$$F(n+1) = F(n) + F(n-1) \text{ при } n > 0.$$

Иначе говоря, рекурсивными называются такие функции, которые определяются посредством рекурсии, т. е. с помощью определений, которые предполагают задание значения определяемой функции в некоторой заданной точке (или точках), причем точно указывается, как значения функции в остальных точках вычислить однозначно по значениям в ранее уже вычисленных определенных точках (алгоритм). Этот алгоритм можно «вложить» в машину.

Естественно, конечно, что рекурсивность — это такое свойство рассматриваемых объектов, которое совпадает с представлением об однозначном алгоритме, — в том смысле, как это понимается в математике. Таким образом, понятия «арифметического алгорифма», «нормального алгорифма» (А. А. Марков) и т. п. могут считаться полностью входящими в рамки представлений о рекурсивности.

В. К. Детловс прямо доказал, что рекурсивные (частично-рекурсивные) функции являются, по существу, тем же математическим аппаратом, который заложен в понятии арифметического алгорифма. Этот результат основан на особом способе арифметизации слов, предложенном К. Гёделем; формальное доказательство является достаточно сложным, хотя интуитивно оно почти совершенно прозрачно.*

* Так как действия сводятся к однозначным конечным шагам, которые все могут быть занумерованы; в результате каждый такой алгоритм, как и каждый рекурсивный процесс, может быть охарактеризован определенным целым числом.

Здесь мы только подчеркиваем, что главное здесь в одинаковой конструктивности (возможности конкретного построения, машиноподобности действий) и действия алгоритмов, и рекурсивных функций. Все это позволяет «вкладывать» подобные действия в машины.

Машины Тьюринга

Для того чтобы эффективно вычислить значение какой-либо функции данных (нескольких) аргументов по заданным правилам (алгоритм, эффективно действующий), надо поступить следующим образом. Во-первых, следует помнить, что в процессе вычисления человек или заменяющая его машина может использовать только конечное число различных знаков, применяя их в каждой операции вычисления также только в конечном числе. Алгоритм, т. е. совокупность указаний или предписаний, по которым производятся вычисления, должен быть также конечным — в смысле конечности числа этих предписаний.

В результате подобной конечной последовательности действий можно будет определить значение функции нескольких данных переменных для заданных числовых значений этих переменных, т. е. получить некоторое число, которое будет выражено какой-то комбинацией заданных (исходных) символов.

Основной задачей — при переложении этого процесса вычисления, так сказать, на язык машины — является выяснение возможности разложения каждого подобного процесса на такие элементарные действия, что любая часть процесса вычисления будет эквивалентна некоторой определенной последовательности (цепочке) элементарных действий.* За такие элементарные действия можно принять, например, сочетания (комбинации) следующих операций: распознавание единичного рассмотренного вхождения одного из данных символов, стирание (удаление) этого вхождения, выписывание единичного вхождения символа, перемещение точки наблюдения данного ряда символов в соседнюю точку (клетку), изменение имеющейся (накопленной) в памяти (человека или машины) информации.

Совершенно ясно, что, выделяя подобного рода действия в качестве простейших, мы действуем по аналогии с простейшими мыслительными операциями человеческого мозга при вычислениях. Действительно, при вычислениях можно обозре-

---

* Легко обнаружить здесь полную аналогию с действием арифметических алгоритмов и рекурсивными процессами.

вать и держать в памяти только конечное число символов (чисел, понятий, букв, функций, операций и т. п.), а каждая такая конечная комбинация этих символов может быть разложена на простейшие, которые и были примерно охарактеризованы вышеуказанным путем. Тогда весь соответствующий процесс вычисления в той или иной форме может быть перенесен в машину, надлежащим образом устроенную.

Те же общие соображения, о которых мы говорили выше, послужили основанием для А. М. Тьюринга (1936), Поста (1936) и других к определению особого рода вычислительных машин, осуществление которых стало возможным ввиду применения к соответствующим схемам современной электронной и иной техники, чрезвычайно ускорившей выполнение вычислительных операций.

Идея схемы действия машины Тьюринга состоит в следующем: машина снабжена линейной лентой, которая может развертываться (потенциально) неограниченно* влево и вправо; лента разделена на клетки (секции). Каждая клетка может быть или пустой (белой), или заполненной, т. е. на ней уже окажется напечатан какой-нибудь один из свойственных машине символов: $S_1, S_2, \ldots, S_j (j \geqslant 1)$. Общее число различных символов, которое может печатать машина, является конечным, что очевидно. Словом, в этом отношении мы имеем полную аналогию с обыкновенной пишущей машинкой, на которой имеется конечный набор свойственных ей знаков: букв, цифр, знаков препинания и т. п. Вместо пустой клетки можно писать S_0; тогда каждая клетка сможет удовлетворять любому из $j+1$ условий $S_0, S_1, \ldots, S_j$ (каждая клетка может воспринимать только один знак). Само собой считается, что в любой ситуации число непустых клеток является конечным.

Число элементарных действий („шагов"), необходимых для вычисления значения функции в каждой точке, также должно быть конечным. Мы говорим, что число символов S_j, которыми снабжена машина, обязательно конечно; без всякого ограничения общности можно предположить даже, что число этих символов только два (не считая S_0), причем эти символы S_1 и S_2 пусть будут 0 и 1.

Действительно, все положительные числа можно записать посредством одного знака 1; машина будет вместо 2 писать 11, вместо 3 111, вместо 4 1111, т. е. ставить столько единиц подряд одну за другой, сколько их содержится в том числе, которое нужно обозначить. Разумеется, можно применить вместо 0 и 1 любые символы.

* Это, конечно, только идеальная машина. В действительной машине бесконечной ленты, разумеется, быть не может.

Составные части машины могут находиться в разных состояниях (конфигурациях). Нам интересны конфигурации, которые вызывают такие действия машины, как: 1) вписывание в данную (пустую, конечно) секцию (клетку) какого-либо знака; 2) вычеркивание из данной клетки уже имеющегося там знака; 3) замена одного написанного знака другим; 4) передвижение ленты на одну клетку вправо или влево. Это, в общем, и соответствует тем элементарным операциям, о которых мы говорили вначале и из сочетаний (комбинаций) которых состоит вся работа машины.

Человек при вычислениях проделывает подобные же элементарные действия: записывает некоторый знак, другой какой-либо знак стирает, рассматривает или представляет себе написанное и, в зависимости от всей совокупности полученных сведений, считает дальше (вправо) либо что-либо меняет в проделанных вычислениях. Вполне понятно, что можно научить любого человека производить подобную совокупность действий в определенном порядке, если даны все указания, как поступать на отдельных ступенях вычислений.

Поэтому же подобная совокупность простейших действий может быть, так сказать, автоматизирована, вложена в автомат, в вычислительную машину. Эта машина может, как сказано, находиться лишь в конечном числе конфигураций; при этом на каждой данной ступени вычислений только что написанный знак и существующая в данный момент конфигурация определяют однозначно, какое следующее действие произведет машина и в какую конфигурацию она перейдет после выполнения этого действия.

Человек может рассматривать одновременно не один, а несколько знаков; то же можно сообщить и машине — с помощью соответствующих приспособлений.

Однако нам важна только сущность общей схемы машины, а потому мы представим простейший случай, когда в поле зрения оказывается всегда только один знак, т. е., упрощая суть дела, когда наша машина всегда передвигает ленту только на одну клетку (вправо или влево) и каждый раз устанавливает «в поле зрения» только один из написанных ранее на ленте знаков (следующей операцией может быть установление «в поле зрения» соседнего знака); при этом машина каждый раз пишет или вычеркивает только один знак. Условимся для удобства и определенности, чтобы количество знаков 1 перед первым знаком 0 на ленте равнялось $\varphi(0)$ [$\varphi(n)$ всегда число целое], чтобы число знаков 1 между первым и вторым нулем равнялось $\varphi(1)$ и т. д.; иначе говоря, делаем так, чтобы значение функции $\varphi(n)$ выразилось числом знаков 1, которые нам попадутся на пути назад

от $(n+1)$-го знака 0 до n-го знака 0 или (если нуля вообще нет) до начала написанной последовательности знаков.*

При записи на ленте однажды написанные 0 и 1 не должны никогда вычеркиваться; в побочных (дополнительных) вычислениях знаки 0 и 1 не должны употребляться, так что в побочных расчетах необходимо для чисел использовать другие знаки.

Кроме того, условимся, чтобы левее некоторого написанного знака 0 или 1 больше эти знаки не появлялись. Может оказаться, что в ходе работы значение $\varphi(n_2)$ будет вычислено раньше $\varphi(n_1)$, где $n_1 < n_2$; все же $\varphi(n_1)$ должно быть в качестве результата записано левее $\varphi(n_2)$.

Это достигается, например, так: для процесса вычисления в собственном смысле используется лишь каждая вторая клетка ленты, а пропускаемые клетки сохраняются для результатов вычисления; как только в ходе вычисления получается значение $\varphi(0)$ (обозначенное знаками, отличными от 0 и 1), машина пишет в оставленных клетках столько 1, сколько их содержится в $\varphi(0)$, а затем один 0; далее, как только получается значение $\varphi(1)$, машина, начиная с первого (справа) пропущенного пустого промежутка (клетки), пишет столько знаков 1, сколько их в $\varphi(1)$, а затем один 0 и т. д.

Мы говорим здесь об одноместной функции; если вычисляется функция многоместная, то дело усложняется с принципиальной точки зрения несущественно.

Вместо того, чтобы говорить, что машина «вычеркивает» какой-либо знак, мы можем сказать, что она заменяет этот знак пустым знаком S_0.

Функция $\varphi(n)$ (n всегда целое) называется механически-вычислимой, или (обще) рекурсивной, если можно (в принципе) сконструировать машину примерно такой структуры, как вышеописанная, и обладающую такими свойствами:

1) машина располагает конечным числом знаков S_0, S_1, S_2, $S_3, \ldots$, где S_0 играет роль «пустого» знака, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, остальные знаки предназначены для обозначения вспомогательных вычислений и других нужд (например, штрих);

2) машина может находиться в конечном числе конфигураций (состояний) q_1, q_2, $q_3, \ldots$, причем q_1 является начальной конфигурацией;

3) работа машины состоит из единичных актов (шагов) следующего характера: если в установленной „в поле зрения" клетке (промежутке, секции) ленты стоит знак S_i и машина в данный момент находится в конфигурации q_j, то

* Процесс образования подобных функций, очевидно, совпадает со способами вычисления рекурсивных функций.

машина пишет вместо S_i некоторый определенный знак $S_{i'}$, после чего она устанавливает ту же самую или соседнюю секцию и переходит в определенную конфигурацию $q_{j'}$. Так как число знаков S_i и конфигураций q_j конечно, то возможно также лишь конечное число единичных актов этого рода (число их комбинаций, разумеется, не ограничено).

Единичные акты будем обозначать следующим образом: если машина устанавливает „в поле зрения" прежнюю секцию, то обозначение действия будет:

$$q_j S_i / S_{i'} N q_{j'};$$

если машина устанавливает „в поле зрения" ближайшую секцию слева, то обозначение будет:

$$q_j S_i / S_{i'} L q_{j'}.$$

Наконец, если устанавливается секция справа, то обозначение есть

$$q_j S_i / S_{i'} R q_{j'}.$$

Равенство $S_i = S_{i'}$ означает, что машина в данный момент оставляет наблюдаемый знак без перемен. После того как „в поле зрения" установлена какая-либо секция чистой ленты и машина приведена в конфигурацию q_1, единичные акты машины осуществляются автоматически один за другим; в силу этого на ленте возникает последовательность знаков, где 0 может повторяться неограниченное число раз; перед первым нулем наносятся знаки 1 в числе, равном $\varphi(0)$; между n-ым и $(n+1)$-ым знаком 0 количество знаков 1 равно $\varphi(n)$.*

Такова в общем схема работы машины Тьюринга в простейшей форме, которая дает некоторое представление о действии этой машины.

Следует еще раз подчеркнуть полное сходство этой схемы со схемой вычисления значений рекурсивных функций и действиями в области «нормальных алгорифмов».

Конструктивная сущность здесь одна и та же, что и позволяет применять результаты, получаемые в математической логике, к построению вычислительных и тому подобных машин.**

---

* Ср. понятие рекурсивности.

** В заключение следует заметить, что описание действия машин этого типа сделано нами в соответствии с общепринятыми приемами подобных описаний и заимствовано из различных источников; для того чтобы лучше представить действительную работу машины, интересующийся должен обратиться к технической литературе.

ДОПОЛНЕНИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ

Значение математической логики как средства познания

Два с половиной столетия тому назад разносторонний ум Лейбница впервые в истории науки выразил в явном виде мысль о возможности создать некое символическое исчисление, обладающее всеми удобствами математических приемов и в то же время пригодное для выражения любых логических суждений и их сочетаний.

Лейбницу казалось, что его идея «универсальной характеристики» приведет в конце концов к такому положению, когда любой научный спор будет разрешаться легко и быстро простым символическим вычислением, не оставляющим никакого сомнения в ложности или истинности каждого из выдвигаемых спорящими утверждений.

Прошло полтораста лет, и в середине прошлого века появились замечательные работы крупного английского математика Дж. Буля, которому действительно удалось создать логическое исчисление в математизированной форме, так называемую математическую, или символическую, логику (Булева алгебра), т. е. осуществить, в известной мере, замысел Лейбница.

Булева алгебра логики сначала имела не совсем удачные обозначения и не сразу приняла законченную форму, а тем более не сразу получила широкое распространение. Особенно много сделал для ее завершения наш соотечественник — казанский приват-доцент П. С. Порецкий (умер в 1907 г.), на работы которого в дальнейшем опирались Кутюра, Шрёдер и другие. Алгебра Буля — Порецкого представляла, как говорил Порецкий, по содержанию логику, а по форме отдел математики, являющийся буквенным исчислением с двумя численными значениями: 0 и 1, соответствующими ложности (0) и истинности (1).

В конце XIX столетия и особенно на рубеже XIX и XX вв. распространилось, кроме того, широкое применение символических методов в изучении логических оснований матема-

тики, что было подготовлено общим направлением математических наук в это время (изучение и аксиоматизация фундамента математики).

Таким образом, можно сказать, что возникло стремление к логизации математики, сверх той математизации логики, которая отразилась в создании Булевой алгебры. Можно подумать, на первый взгляд, что математика не нуждалась вовсе в такой логизации, представляя сама по себе систему строго логических положений. Однако уже исследование оснований элементарной геометрии, особенно в XIX в., показало, что в традиционной математике имеется немало утверждений с наличием значительных элементов интуиции, в той или другой степени скрытых, что в достаточной мере нарушало представление, например, об Евклидовой геометрии как безупречной строго логической системе. Отсюда ведет начало возникновение аксиоматического направления в исследовании математических оснований — направления, стремящегося использовать приемы математизированной логики в целях изучения фундамента математических наук, чисто логической стороны их строения.

Естественно, что это направление было вынуждено часто создавать некоторые специальные приемы, в которых алгебра Буля не нуждалась и которые были порождены спецификой именно математических наук, где применяются трансфинитные процессы, отсутствующие в обычной формальной логике. Это вызвало отличия от последней; особенно это касается принципа исключенного третьего, который к трансфинитным операциям не всегда применим, тогда как в традиционной логике он действует без ограничений благодаря финитности всех суждений.

Упомянутая специфика математических наук определила и то обстоятельство, что обозначения и исходные понятия рассматриваемого направления математической логики довольно значительно отличаются от булевских, будучи значительно шире и разнообразнее.

Алгебра Буля представляет то, что можно назвать простым исчислением классов, и в соответствии с этим все понятия и приемы этой алгебры совершенно элементарны, хотя с ее помощью можно строить сколь угодно сложные (комбинаторно-)логические конструкции. В алгебре Буля основные простейшие понятия, на которых строится все остальное, просты и понятны по своей сущности; это — отрицание, логическая (дизъюнкция) сумма и логическое (конъюнкция) произведение, которые могут рассматриваться как элементарные «алгебраические» операции над классами вещей или понятий, суждений и т. п.

В той ветви математической логики, которая развивалась специально для нужд математической аксиоматики, были в наличии отчасти те же элементарные понятия или такие (например, импликация и другие), которые только по внешней форме отличались от булевских основных определений, а в действительности легко выражались через последние. Тем не менее такие логические связи, как импликация и т. п., были удобны именно для математических целей.

Однако, кроме этих элементарных понятий и действий, математики вводили еще другие, которые нельзя было выразить прямо через булевские символы. Таковы, например, так называемые кванторы всеобщности существования, которые представляют специфические понятия, приспособленные для нужд математической аксиоматики и вообще математических суждений и в этом смысле являются, так сказать «трансцендентными», так как применяются к бесконечным (инфинитным или трансфинитным) суждениям и процессам.

Вот это обстоятельство и вызывает серьезные отличия данного направления математической логики от алгебры Буля. Главное из этих отличий представляет ограничение пользования принципом исключенного третьего, что вызвано, подчеркиваем еще раз, специфическими свойствами трасфинитных математических суждений, в которых, помимо *A* или не-*A*, может быть иногда третье, а именно: нельзя принципиально установить с помощью заданных средств — "*A* или не-*A*" (например, бесконечная цепь суждений может оставить решение неопределенным). Кроме этой особенности, существуют и другие черты, отличающие символическую логику, исследующую логическое строение математики, от Булевой алгебры, т. е. математизированной логики.

Уже совсем недавно, в пределах последних 25—30 лет, символические методы логического исчисления получили новое развитие. Это явилось, так сказать, третьей ветвью, третьей дорогой математической логики. Сначала речь шла о довольно отвлеченных вещах — о разрешимости или неразрешимости тех или других качественных математических задач общего характера, что выяснилось с помощью комбинаторных приемов исследования, выражаемых наилучшим образом символикой математической логики, но уже в новых понятиях и обозначениях, с новыми исходными определениями и операциями, которые часто весьма различны у разных авторов. Здесь создался ряд школ и отдельных частных течений, отдельных направлений математической логики, сильно отличающихся по своему характеру от тех двух, которые были указаны выше (Булево и аксиоматическое). Сюда относятся у нас: исчисление проблем (А. Н. Колмогоров,

П. С. Новиков), теория алгорифмов (нормальные алгорифмы и конструктивная логика — А. А. Марков, Н. А. Шанин и др.), рекурсивные функции различных типов, так называемые многозначные логики и т. д. Очень широко представлены эти течения и за рубежом, особенно в США. Они все могут быть объединены в одно общее направление, которое следует охарактеризовать как стремление к качественному изучению разрешимости математической проблематики весьма общего типа алгоритмическими процессами достаточно определенного характера.

Терминология и обозначения работ этого направления математической логики часто значительно отличаются от терминологии и обозначений первых двух направлений. Мы не можем входить здесь в эти подробности и пояснять, что такое «алфавит», «алгоритм» и т. п.*

В конце концов относительно недавно символическая логика нашла много приложений практического характера — для построения вычислительных машин, различных автоматически действующих конструкций и т. п.

Одним словом, математическая логика оказалась вообще весьма полезной в технике; заметим, что особенно широкое приложение в технических вопросах получила и алгебра Буля, применяемая при расчетах электромеханических схем со многими переключающими устройствами. Символическая логика получила, наконец, особенное значение в прикладных вопросах после развития электронной техники и радиотехники, что создало особенно широкие возможности для автоматики, телемеханики и вообще устройства всякого рода быстродействующих механизмов, способных выполнять определенного характера операции, заменяющие даже во многих отношениях результаты работы некоторых отделов человеческого мозга. Отсюда выросло новое научное или, скорее, научно-техническое направление — кибернетика, или учение о самоуправляющихся (в известном смысле) устройствах, имеющих назначение имитировать отдельные отправления человеческого организма, в том числе и некоторые машиноподобные функции высшей нервной деятельности.

Эти большие технические успехи повлекли за собою известное преувеличение значения математической логики. Такое преувеличение вообще характерно для многих случаев неожиданного расцвета той или другой отрасли науки, становящейся, так сказать, новой «научной модой».

За рубежом подобная «научная мода» часто принимает особенно широкие размеры.

---

* См. выше, стр. 81—82.

Дальнейшему расширению и распространению превратных представлений о новой отрасли науки, ее значении и смысле способствуют всякого рода популярные сочинения, часто принадлежащие авторам, которые сами знакомы с существом дела только из третьих рук и крайне поверхностно. Имеют место чрезмерные увлечения и среди знатоков дела, что также вполне естественно. Так обстоит дело и в данном случае.

К сожалению, отчасти подобные увлечения наблюдаются и у нас, хотя, разумеется, в гораздо более скромных размерах.

В рассматриваемом примере дело сводится, в сущности, к нередко высказываемому мнению, что традиционная логика отжила свой век, что теперь наступила эпоха логики символической, которая не только заменяет, но и широко обобщает и углубляет положения первой, благодаря чему прежняя формальная логика низводится до степени совершенно элементарного построения, признаваемого некоторыми даже ненужным и нежелательным в системе преподавания высшей школы.

Подобное мнение следует признать в корне ошибочным. Формальная логика Аристотелева типа представляет важное и необходимое познавательное средство, нужное всякому, кто имеет дело с анализом суждений какого бы то ни было характера. В противоположность этому ни одно из указанных выше трех основных направлений символической логики не занимается анализом отдельных суждений и их общих типов, а дает по большей части сложные конструкции синтетического характера, или, если и занимается анализом, то именно анализом различных комбинаторных отношений с точки зрения их возможности или невозможности, выполнимости или невыполнимости в пределах того или другого алгоритма, такой или иной системы операций определенного характера. Поэтому совершенно ясно, что традиционная логика и логика математическая представляют хотя и близко родственные, но особые, самостоятельные науки; каждая из них имеет свое место и свое значение в общей системе гуманитарных и естественных наук и не может вытеснить другую отрасль.

Необходимо сказать здесь еще несколько слов об одном частном направлении, которое в значительной мере сочетает обычные приемы традиционной логики с введением в них математической символики в сравнительно умеренных размерах. Этого рода направление наблюдается, например, среди польских логиков (А. Тарский и его школа). Надо прямо сказать, что здесь мы имеем дело, по существу,

с той же традиционной логикой, частично снабженной символическими обозначениями и слегка видоизмененными основными понятиями. Нельзя отрицать пользы последнего обстоятельства, но нельзя забывать и того, что в плане преподавания понимание и истолкование всех символических результатов предполагает хорошее знание и понимание приемов традиционной логики, — без этого усвоение символических действий будет мало полезным.

Таким образом, если говорить с точки зрения системы преподавания общеобразовательных наук, логика традиционная должна всегда входить в эту систему в качестве самостоятельного отдела, в который в той или другой мере всегда можно вводить применение символических обозначений.

* *
*

Перейдем теперь к вопросу о том, в чем состоит значение символической логики как средства познания внешнего мира, в чем заключается ее сила как метода исследования различных вопросов математики и естествознания. Ответ отчасти содержится в том обстоятельстве, что символические исчисления вообще представляют большое удобство для проведения ускоренных операций над заданными сложными системами объектов, действий, посылок, аксиом и т. п.

Не надо забывать, что и многие отделы математики получили всестороннее развитие только с того момента, когда в них была введена удобная символика, облегчившая это развитие во многих отношениях. Хотя К. Ф. Гаусс и говорил, что математика черпает свою силу не в обозначениях, а в понятиях, и это совершенно верно, однако именно подходящая символика часто делает некоторые отделы науки, так сказать, технически наиболее доступными. Так было и с обыкновенной алгеброй, которая получила быстрое развитие именно после введения Франциском Виетой буквенных обозначений. В отношении математической логики это тем более понятно, что ее задачи являются, как правило, сложными комбинаторными задачами, т. е. такими, в которых интересен не анализ отдельных силлогизмов в духе Аристотеля, а изучение общего характера и свойств целых сложных логических конструкций, связанных в нечто единообразное с помощью определенной системы операций над объектами, вступающими друг с другом в те или другие отношения по определенным правилам (алгоритм).

Техническим выражением этих теоретических комбинаторных схем являются разного рода вычислительные и иные машины, о которых уже говорилось выше.

В сущности, дело обстоит в отдельных элементах не так уж сложно; сложность заключена именно в комбинаторной стороне дела, в огромном числе представляющихся здесь возможностей, каждую из которых надо учесть и которые переплетаются в общую картину, часто совершенно необозримую по своей обширности, если не пользоваться приемами математической символики, которая, в соединении с колоссальной быстротой действия современных электронных и иных приспособлений, позволяет вычислять и находить то, о чем недавно было абсурдно и говорить. Таким образом, мы видим частичное осуществление мечты Лейбница. Само собой разумеется, что здесь только и можно действовать такими символическими методами, — о применении формальной традиционной логики в подобных случаях никто и не говорит: это явный абсурд, ее область действия совершенно иная.

* *
*

Следует подчеркнуть, что работа машин, конструктируемых с помощью символической логики, существенно отличается от работы человеческого мозга, несмотря на большое внешнее сходство.

Остановимся на машинах, производящих интегрирование, т. е. умеющих находить определенный интеграл от заданной функции (мы говорим здесь не о механических интеграторах типа планиметров). Казалось бы, работа подобной машины является точным подобием работы человеческого ума. Такое заключение было бы совершенно неверным, явилось бы просто игрой неоднозначным смыслом слова «интергрирование».

Дело в том, что процесс интегрирования (нахождение определенного интеграла) может протекать разными путями.

Можно взять формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

и понимать ее как указание на процесс нахождения вида первообразной функции $F(x)$ с последующей подстановкой пределов интегрирования и составлением разности $F(b) - F(a)$. Так обычно и действует любой математик, каждый раз в пределах соответствующих надобностей и возможностей, т. е. возможностей законченного или приближенного выражения интеграла через известные функции и необходимости иметь требуемую степень точности. Однако, с другой стороны, определенный интеграл всегда есть просто число $F(b)$ —

— $F(a)$, которое можно выразить с любой степенью точности, не находя вовсе явного вида первообразной функции, прибегнув, например, к известным формулам приближенных квадратур, которые не содержат в себе ничего, кроме простейших арифметических действий над подынтегральной функцией, даже над ее отдельными численными значениями. Затруднение только в том, что для достижения большой степени точности число этих элементарных арифметических действий должно быть весьма велико. Вот с этим большим количеством простейших действий сложения, вычитания, умножения и деления машина прекрасно справится и доставит нам то число, которое является, с большой степенью точности, значением определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Иными словами, машина решает задачу интегрирования, задачу трансцендентную, вообще говоря, с помощью огромного числа простейших арифметических операций, превращая, таким образом, количество в качество (или, если угодно, наоборот).

Человек, математик, тоже способен сделать это и часто это и делает, применяя такие формулы квадратур, как правило трапеций, формулы Симпсона, Гаусса, Бесселя и ряд других.

Человек эти формулы и придумал. Однако человеческий ум не может производить так быстро, с такой продуктивностью и без усталости, хотя бы и элементарные действия, которые в состоянии отрабатывать машина без всякого утомления и в тысячи, в десятки тысяч раз быстрее человеческого мозга. Только поэтому работа вычислительных машин имеет, особенно в смысле скорости получения результатов, большое преимущество перед мозговой деятельностью.

Однако повторим, нужно всегда помнить, что вычислительная машина не выполняет интегрирования как общей операции нахождения первообразной функции — этого она сделать не в состоянии, а прибегает к замене трансцендентного действия интегрирования совокупностью большого числа арифметических действий.

* * *

То, что сказано выше, можно с небольшими изменениями отнести к любому виду так называемых «думающих», или «умных», машин, хотя бы они принадлежали к числу тех, которые автоматически вносят поправки в свои действия или даже целесообразно изменяют характер своих операций, как бы обладая даром предвидения в известных размерах или способностью оглядки на достигнутые результаты.

Дело в том, что все эти операции, включая так называемые «запоминающие устройства» и т. п., можно осуществить с помощью соответствующих релейно-контактных схем, которые требуют для своего проектирования всего только знания алгебры логики Буля, т. е. исчисления с двумя значениями 0 и 1, о котором говорилось выше (0 — выключено, 1 — включено).

В силу всего сказанного нельзя и думать об уподоблении работы человеческого мозга — в ее полном объеме — какой-либо сложной «думающей» машине.

Отвлеченная буквенная схема подобной машины может быть описана с помощью символической логики, которая находит здесь свое применение.

В этом одно из важнейших практических приложений математической логики, и его было бы трудно осуществить без нее, с помощью несимволизированных рассуждений, так сказать, невооруженного человеческого разума. Однако человеческий мозг содержит в себе возможности гораздо более широкие, чем любая машина и любая формально-логическая схема, понимая под последней всякую логическую конструкцию, сколь угодно сложную и полностью математизированную. Главное в том, что человеческое мышление способно подвергать обсуждению и сопоставлению с другими конструкциями любую подобную схему в разных аспектах, всесторонне, с различных точек зрения; иначе говоря, человеческий ум способен к тому, что можно назвать диалектической логикой, не замыкающейся в рамки определенной, застывшей символизированной схемы. Однако и схемы последнего типа, т. е. собственно область символической логики, имеют, как видим, большое значение в познании нами окружающего мира. Тем не менее роль математической логики в этом отношении является скорее технической (в широком смысле слова) и не имеет того общего философского значения, которое ей иногда приписывают.

Математическая логика не может претендовать на универсальное значение и применение в качестве всеобъемлющего средства познания, несмотря на то, что область ее действий и применений очень широка и важна.

Будучи весьма полезным и даже незаменимым средством исследования в своей области, которую мы выше старались до известной степени охарактеризовать, математическая логика и связанные с нею отделы знания представляют по преимуществу только комбинаторную сторону мыслительных операций и процессов — сторону, очень важную, но вовсе не охватывающую все разнообразие познавательных возможностей человеческого мозга.

Математическая логика способна соорудить машины, производящие достаточно сложные комбинации элементарных вычислений, довольно удачные автоматические переводы с одного языка на другой (по крайней мере, простейшие) и тому подобные отдельные «человекоподобные» действия по заданной программе, но не может создать даже и тени замены духовной деятельности человека во всем ее объеме. Математическая логика представляет только остроумное произведение человеческого гения, ограниченное в своих применениях, но удачно приспособленное к познанию отдельных сторон существующего вне нас реального материального мира.

Дополнение к вопросу о законе исключенного третьего

Мы указывали, что в случае инфинитных процессов закон исключенного третьего в математике может потерять полноту действия, так что оказывается допустимым некоторое третье, связанное с неясностью решения вопроса выбора «A» или «не-A». Приведем конкретный пример, имеющий прямое отношение к указанному нами случаю невозможности различения четных и нечетных чисел при их неограниченном росте до бесконечности.

Пусть дан ряд

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots \text{ (до бесконечности).}$$

Образуем его частные суммы, т. е. будем брать:

$$S_0=1,\ S_1=1-1=0,\ S_2=1-1+1=1,\ S_3=1-1+1-1=0,$$
$$=1-1+1-1+1=1 \text{ и т. д.}$$

Совершенно ясно, что каждое значение $S_n=1$, если n четное, и $S_n=0$, если n нечетное. Других значений S_n при любом конечном значении n быть не может — вся область значений S_n исчерпывается двумя числами: 1 и 0.

Таким образом, если положить $A=1$, а его отрицание счесть равным 0, то всегда можно быть уверенным в логической справедливости закона исключенного третьего для любого конечного n.

Однако для того случая, когда n стремится к бесконечности, положение изменяется, так как при этом теряется возможность различения четных и нечетных чисел.

По чисто математическим основаниям, которые нет надобности здесь излагать, в этом случае (т. е. при стремлении n к ∞) имеется возможность рассматривать ряд (I) $1-1+1-1+1-\ldots$ как предел ряда

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$$

при $x \to 1$, сумма которого для $[x] < 1$ равна величине

$$\frac{1}{1+x}.$$

Последнее выражение при x, стремящемся к 1, дает, однако, не 0 и не 1, а $\frac{1}{2}$.

Оказывается поэтому, что наряду со значениями 1 и 0 для суммы ряда (I) при бесконечном числе слагаемых допустимо принять значение $\frac{1}{2}$, что является логически вполне приемлемым и в области математики не ведет ни к каким противоречиям, представляясь неисключенной третьей возможностью.

Заметим, что суждения аналогичного характера лежат в основе многих способов суммирования расходящихся рядов, в настоящее время широко применяемых в математике (начало им положил еще Л. Эйлер в XVIII в.). Рассмотренный выше ряд (I) принадлежит к числу рядов именно такого типа.

Об отношении математической логики к логике диалектической

В самом начале нашего изложения мы упоминали о диалектической логике, в связи с «Wissenschaft der Logik» Гегеля (1812—1816). Скажем здесь несколько слов об отношении математической логики к диалектической.

Как говорит в отношении последней В. И. Ленин,* «всесторонняя, универсальная гибкость понятий, гибкость, доходящая до тождества противоположностей, — вот в чем суть. Эта гибкость, примененная субъективно, = эклектике и софистике. Гибкость, примененная *объективно,* т. е. отражающая всесторонность материального процесса и единство его, есть диалектика, есть правильное отражение вечного развития мира».

Никакая формально-логическая (в том числе и математическая) система не может полностью удовлетворять этому требованию. Раз система формализована, она перестает быть настолько гибкой, чтобы оказаться в состоянии соответствовать всем условиям диалектики, так как диалектическая логика требует всестороннего рассмотрения любого построения, в том числе с таких сторон, с таких точек зрения, которые предполагают возвышение над данным построением, выход

* В. И. Ленин. Философские тетради. М., 1936, стр. 110.

за его ограниченные рамки. А это не может быть целиком выполнено, если система представляет законченное в себе целое.

В лучшем случае мы можем говорить, что та или другая система математической логики представляет известное приближение к чертам диалектической логики в том смысле, что эта система далее может рассматриваться и освещаться с более высоких точек зрения, существо которых лежит за пределами данной формализованной системы. Этими краткими замечаниями по данному вопросу мы здесь и ограничимся.

ПОЯСНЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ УПОТРЕБЛЯЕМЫМ В КНИГЕ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ТЕРМИНАМ

I. Мы неоднократно применяли такой термин как «функция», обозначая функцию одной буквы x через $f(x)$, двух букв x и y — через $f(x, y)$ и т. д. Очевидно, под функцией разумеется здесь не то понятие, которое известно из анализа.

В нашем случае «функция» $f(x, y, z, \ldots,)$ есть только обозначение какого-либо алгебраического выражения, составленного из букв $x, y, z, \ldots$ При этом, если речь идет о логике, то под $x, y, z, \ldots$ подразумеваются высказывания, рассматриваемые с точки зрения их истинности или ложности; если же переходим к прямым вычислениям, то буквы $x, y, z, \ldots$ обозначают (каждая по отдельности) либо 0, либо 1.

Таким образом, здесь нет надобности обращаться к понятию функции в широком смысле этого слова; можно ограничиться указанным формальным определением, вполне достаточным для наших целей.

II. В разных местах нашего изложения мы говорим о том, что логическая сумма (дизъюнкция) и логическое произведение (конъюнкция) обладают рядом свойств, аналогичных свойствам обычных арифметических и алгебраических действий сложения и умножения. Так, например, имеют место свойства:

ассоциативности (сочетательности) суммы $(a+b)+c = a+(b+c)$;

ассоциативности произведения $(ab)c = a(bc)$;

коммутативности (перестановочности) суммы $a+b = b+a$;

коммутативности произведения $ab = ba$;

дистрибутивности (распределительности) суммы относительно умножения $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Доказательство всех этих свойств обычных арифметических и алгебраических действий можно найти в любом учебнике теоретической арифметики и элементарной алгебры.

Что касается переноса подобных свойств на логические операции, то здесь удобнее всего опираться на представление логических понятий численными эквивалентами. Численный эквивалент логического произведения (конъюнкции) есть xy, где xy есть обычное алгебраическое произведение, откуда и вытекают свойства конъюнкции, аналогичные упомянутым свойствам обычного произведения.

Численным эквивалентом логической суммы (дизъюнкции) является алгебраическое выражение $x + y - xy$, причем надо помнить, что как x и y, так и все другие величины, входящие в наши рассуждения, могут принимать только значения 0 и 1, т. е. значения, удовлетворяющие равенству $z^2 = z$.

Поэтому $z(x + y - xy) = zx + zy + zx \cdot zy$, откуда и следует дистрибутивность логической суммы по отношению к умножению.

Аналогичным образом доказываются и другие свойства.

Заметим еще раз, что конъюнкция может выступать и в роли логической суммы, тогда как дизъюнкция будет в этом случае играть роль произведения. Поэтому в алгебре Буля имеется четыре формы закона дистрибутивности.

ЛИТЕРАТУРА

В. В. Бобынин. Опыты математической логики, вып. I. М., 1886; вып. II, М., 1894.

Дж. Буль (George Bool). The mathematical analysis of logic. Cambridge, 1847.

Его же. An investigation of the laws of thought... London, 1854.

Г. Вейль (H. Weyl). О философии математики. М.—Л., 1934.

А. Гейтинг (A. Heyting). Обзор исследований по основаниям математики. М.—Л., 1936.

Д. Гильберт и В. Аккерман (D. Hilbert und W. Ackermann). Основы теоретической логики. М., 1947.

И. И. Жегалкин. О технике вычислений предложений в символической логике. Матем. сб., т. 34, № 1—4, 1927.

Его же. Арифметизация символической логики. Матем. сб., т. 35, № 1, 1928.

С. Клини (St.-C. Kleene). Введение в метаматематику. М., 1957.

Л. Кутюра (L. Couturat). Die Prinzipien der Logik. Encyclopädie der philosophischen Wissenschaften, B. I. Tübingen, 1912.

А. Н. Колмогоров. О принципе «tertium non datur». Матем. сб., т. 32, № 4, 1925.

Его же. Zur Deutung der intuitionistischen Logik-Math. ZS, t. 35.

Его же. О понятии алгоритма. Усп. матем. наук, т. 8, № 4, 1951.

А. А. Марков. Теория алгорифмов. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42, 1954.

Ив. Менделеев. Метод математики. Логика и гносеология математических знаний. СПб., 1913.

А. Мостовский (A. Mostowski). Современное состояние исследований по основаниям математики. Усп. матем. наук, т. 9, № 3, 1954.

Новые идеи в математике. Сборник № 10. Математика и философия, II. Петроград, 1915 (статьи Пуанкарэ и Кутюра).

П. С. Порецкий. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. Казань, 1884.

Его же. Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики. Казань, 1887.

Р. Петер (R. Péter). Рекурсивные функции. М., 1954.

А. Пуанкарэ (H. Poincaré). Наука и гипотеза. М., 1904.

Его же. Наука и метод. Одесса, 1910.

Р. К. Ричардс. Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах. М., 1957.

А. Тарский (A. Tarski). Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М., 1948.

А. Уайтхэд и Б. Рассел (A. Whitehead and B. Russel). Principia mathematica. Cambridge, 1910—1913.

С. А. Яновская. Основания математики и математическая логика. Сб. «Математика в СССР за тридцать лет». М.—Л., 1948.

СОДЕРЖАНИЕ

Попов Александр Иванович

Введение в математическую логику

Редактор *А. А. Зырин*

Техн. редактор *Е. Г. Жукова* Корректор *Р. И. Гольдина*

Сдано в набор 14 V 1959 г. М-26402. Подписано к печати 8 VII 1959 г.
Уч.-изд. л. 6,51. Печ. л. 6,75. Бум. л. 3,38. Формат бум. 60×92 1/16.
Тираж 5250 экз. Заказ 579.

Типография ЛОЛГУ. Ленинград, Университетская наб., 7/9.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
16	27 сверху	равенста	равенства
45	15 снизу	$0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=1\cdot 0,\ 1\cdot 1=1$	$0\cdot 0=0;\ 0\cdot 1=1\cdot 0=0;$ $1\cdot 1=1$
50	3—4 сверху	$\Phi,\ \Phi_2, \ldots,\ \Phi_n$	$\Phi_1,\ \Phi_2, \ldots,\ \Phi_n$
75	10 снизу	apriori	a priori
94	12 сверху	всеобщности существо-вания	всеобщности и суще-ствования

Зак. 579.