

В. Н. ПОПОВ

**КОНТИНУАЛЬНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ
В КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ
И СТАТИСТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКЕ**



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1976

Попов В. Н. **Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.**
М., Атомиздат, 1976, 256 с.

В книге излагаются основы метода континуального интегрирования с приложением к широкому кругу задач современной теоретической физики. Построен формализм континуальных интегралов в квантовой механике, квантовой теории поля и статистической физики.

Рассмотрены также попытки построения единой калибровочной инвариантной теории слабых и электромагнитных взаимодействий. Развита единый подход к вычислению низкоэнергетической и высокоэнергетической асимптотик в квантовой теории поля.

Рассмотрены методы описания коллективных вихреподобных возбуждений в релятивистской квантовой теории поля.

Книга предназначена для научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся по теоретической и математической физике.

Список литературы — 160 наименований.

П-20402—009
034(01)—76 9—76

© Атомиздат, 1976

Виктор Николаевич Попов

**КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ
И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

Редактор *Т. Е. Бузаева*

Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*

Переплет художника *Н. А. Смирнова*

Технический редактор *С. В. Долгополова*

Корректор *И. И. Карпикова*

Сдано в набор 16/X 1975 г. Подписано к печати 16/IV 1976 г. Т-08209,
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 16,0. Уч.-изд. л. 15,82.
Тираж 4000 экз. Зак. изд. 73164 Зак. тпн. 496. Цена 1 р. 82 к.
Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Москва, И-41, Б. Переяславская, 46

ПРЕДИСЛОВИЕ

Континуальное интегрирование — один из наиболее мощных методов современной теоретической физики, позволяющий упростить, ускорить и сделать более наглядным процесс аналитической работы теоретика. Непрерывно возрастает интерес к этому методу и стремление творчески им овладеть. Однако в настоящее время почти полностью отсутствует монографическая литература на русском языке по рассматриваемому вопросу. Переведенную в 1968 г. издательством «Мир» книгу Фейнмана и Хиббса «Квантовая механика и интегралы по траекториям» можно рассматривать лишь как введение в предмет.

Данная книга должна в какой-то степени заполнить этот пробел. В книге рассмотрены приложения методов континуального интегрирования к широкому кругу задач современной теоретической физики.

Понятие континуального интеграла вводится как метод квантования конечномерных механических систем, альтернативный методам обычной квантовой механики. Вопросы квантования систем со связями и квантования на многообразиях рассматриваются впервые в монографической литературе.

Применение методов континуального интегрирования к системам с бесконечным числом степеней свободы позволяет единым образом вывести и сформулировать диаграммную теорию возмущений в квантовой теории поля и статистической физике, что существенно проще общепринятого вывода в операторном подходе.

Большая часть книги посвящена развитию нестандартных методов теории возмущений на конкретных примерах, первый из которых — теория калибровочных полей. Необходимая здесь модификация континуального интеграла использована для квантования электромагнитного поля, полей Янга — Миллса и поля тяготения. Рассмотрены также попытки построения единой калибровочно-инвариантной теории электромагнитных и слабых взаимодействий. Следующее приложение континуального интеграла — вывод инфракрасной асимптотики функций Грина квантовой электродинамики. Рассмотрено применение континуального интегрирования к задачам рассеяния частиц высоких энергий. Получены формулы дважды логарифмической асимптотики и эйконального приближения.

Приложения континуальных интегралов к задачам статистической физики начинаются примерами сверхтекучести, сверхпроводимости и теории плазмы. Модифицированная теория возмущений для сверхтекучих бозе- и ферми-систем использована для построения в микроскопическом подходе гидродинамического гамильтониана системы и уравнений сверхтекучей гидродинамики. Впервые в монографической литературе освещается вопрос о сверхтекучести двумерных и одномерных бозе-систем. Развита метод описания квантовых вихрей в бозе- и ферми-системах, применяемый, в частности, к теории сверхпроводимости второго рода. Метод гидродинамического гамильтониана для систем с кулоновским взаимодействием иллюстрируется в применении к теории плазменных колебаний. Примером задачи, допускающей такое решение в формализме континуального интеграла, служит модель Изинга. В последней из глав, относящихся к статистической физике, рассмотрен метод Вильсона, использующий континуальный интеграл в теории фазовых переходов.

Заключительная глава книги распространяет концепцию возмущений типа квантовых вихрей, обычную в статистической физике, на квантовую теорию поля. Это направление, призванное уменьшить число фундаментальных полей, стало разрабатываться в последнее время.

Книгу не обязательно читать всю подряд. После ознакомления с определением континуального интеграла и методами построения диаграммной теории возмущений (см. гл. 1, 2) читатель может сосредоточиться лишь на тех приложениях континуальных интегралов к физическим системам, которые представляют для него наибольший интерес. Выбор конкретных примеров обусловлен в значительной степени научными интересами автора.

Мне хотелось бы поблагодарить В. Алонсо за помощь при подготовке рукописи к печати.

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Континуальные интегралы были введены в математику в 20-х годах в работах Винера как метод решения задач теории диффузии и броуновского движения [1]. В физике континуальные интегралы были переоткрыты в 40-х годах Фейнманом и использованы им для переформулировки квантовой механики. В конце 40-х годов Фейнман строит на основе континуальных интегралов новую формулировку квантовой электродинамики и развивает знаменитую теперь диаграммную технику теории возмущений [2—4]. Новая теория возмущений существенно упростила вычисления и помогла построить теорию перенормировок. Последняя явилась важным шагом в решении проблемы бесконечностей, возникшей в квантовой электродинамике с момента ее формулировки в работе Гейзенберга и Паули в 1929 г. [5]. В настоящее время теория электромагнитных взаимодействий согласуется с экспериментом с точностью до седьмого десятичного знака — это заслуга новой теории возмущений.

Начиная с 50-х годов интенсивно изучаются континуальные интегралы, возникшие при решении функциональных уравнений в квантовой теории поля (уравнения Швингера [6]). Функциональная формулировка квантовой теории поля рассматривалась в работах Н. Н. Боголюбова [7], И. М. Гельфанда и Р. А. Минлоса [8], Мэтьюса и А. Салама [9], И. М. Халатникова [10], Е. С. Фрадкина [11].

В 60-е годы появилась новая область применения континуальных интегралов — квантование калибровочных полей. Примерами калибровочных полей являются электромагнитное поле, поле тяготения Эйнштейна, поля Янга — Миллса и киральные. Функционалы действия этих полей инвариантны относительно калибровочных преобразований, зависящих от одной или нескольких произвольных функций. С точки зрения математики калибровочные поля — это поля геометрического происхождения, которые являются связностями в некотором расслоении над четырехмерным пространством — временем. Специфику геометрических полей необходимо учитывать при их квантовании; в противном случае можно получить неправильные результаты.

Впервые это заметил Фейнман [12] на примерах поля Янга — Миллса и поля тяготения. Он показал, что квантование по методу, аналогичному методу Ферми в квантовой электродинамике, нарушает

условие унитарности. Фейнман же наметил путь устранения указанной им трудности.

Впоследствии в результате работ нескольких авторов была решена задача квантования калибровочных полей; наиболее удобным методом оказалось континуальное интегрирование [13—18].

Особое место среди калибровочных полей занимает поле тяготения. Вопрос о его квантовании связан с надеждами на то, что гравитационное поле является естественным физическим регуляризатором, образующим взаимодействие на малых расстояниях. Первые результаты, поддерживающие эту точку зрения, были получены де-Виттом [19] и И. Б. Хриповичем [20].

В настоящее время метод континуального интегрирования стал наиболее часто применяться к проблемам, так или иначе связанным с калибровочными полями. Особо следует отметить его использование в попытках построения объединенной теории электромагнитных и слабых взаимодействий [21—23].

Существует много других приложений континуальных интегралов в квантовой теории поля. Например, с его помощью просто выводятся различные асимптотические формулы для инфракрасной и ультрафиолетовой асимптотик функций Грина и амплитуд рассеяния [60, 67—71]. Интересным является использование континуальных интегралов в дуальных моделях.

В конце 60-х — начале 70-х годов стала развиваться теория автомодельного (скэйлингового) поведения амплитуд квантовой теории поля при больших энергиях, имеющая много общего с теорией фазовых переходов второго рода в статистической физике. Здесь метод континуального интегрирования помогает качественно описать картины рассеяния частиц высоких энергий и критических явлений, приближенно вычислить показатели степеней (критические индексы).

В последнее время появилась новая область применения континуальных интегралов, связанная с поиском возбуждений в квантовой теории поля, аналогичных квантовым вихрям в статистической физике. Идея о том, что некоторые элементарные частицы можно рассматривать как коллективные возбуждения системы взаимодействующих основных полей, позволяет сократить число основных (фундаментальных) полей. Метод континуального интегрирования, возможно, единственный приемлемый подход к решению возникающих здесь проблем. Некоторые из полученных в этом направлении результатов изложены в гл. 2 настоящей книги.

Применение континуальных интегралов в статистической физике позволяет вывести много интересных результатов, получаемых с трудом другими методами. Фейнман применил открытый им метод к теории полярона и жидкому гелию [24, 25], ему удалось вычислить с большой точностью собственную энергию полярона и рассмотреть качественные особенности λ -перехода в жидком гелии.

Теория фазовых переходов второго рода, сверхтекучесть, сверхпроводимость, лазеры, плазма, эффект Кондо, модель Изинга —

вот неполный перечень проблем, применение к которым метода континуальных интегралов оказывается весьма полезным. В одних случаях это позволяет обосновать результаты, получаемые другими методами, выяснить пределы их применимости и наметить способ вычисления поправок. Если возможно точное решение, метод континуального интегрирования дает простой способ его получения. В проблемах, далеких от строгого решения (общая теория фазовых переходов), использование континуальных интегралов помогает представить качественную картину явления и развить приближенные методы вычислений.

Континуальные интегралы особенно удобны для описания коллективных возбуждений, таких, как плазменные колебания в теории систем частиц с кулоновским взаимодействием, квантовые вихри и длинноволновые фононы в теории сверхтекучести и сверхпроводимости. Это тот случай, когда стандартная теория возмущений должна быть модифицирована. Континуальные интегралы представляют собой достаточно гибкий математический аппарат, приспособленный для такой перестройки и подсказывающий способ ее конкретной реализации.

Континуальное интегрирование — это «интегральное исчисление», приспособленное к требованиям современной физики. Однако в настоящее время отсутствуют строгая математическая теория и корректное определение континуальных интегралов, используемых в квантовой теории поля и статистической физике.

Строгое определение и корректная математическая теория построены для континуальных интегралов, дающих решения дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе уравнений квантовой механики и теории диффузии. Математические вопросы теории континуальных интегралов изложены в обзорах И. М. Гельфанда и А. М. Яглома [26], И. М. Ковальчика [27], в книгах М. Каца [28] и Ф. А. Березина [29]. Отметим также работы Ф. А. Березина [30], Ю. Л. Далецкого [31], М. А. Евграфова [32], В. С. Буслаева и А. Л. Алимова [33], посвященные строгому определению некоторых континуальных интегралов.

В работах, выполненных на физическом уровне строгости, континуальный интеграл используется как эвристическое средство для построения теории возмущений и перехода от одной теории возмущений к другой. Именно с такой точки зрения рассматриваются континуальные интегралы в этой книге.

§ 2. КONTИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Дадим определение континуального интеграла в квантовой механике. Фейнман в статье [2] 1948 г. ввел и исследовал континуальный интеграл по траекториям в конфигурационном пространстве. Однако для многих приложений более удобным оказывается введенное Фейнманом в 1951 г. [4] выражение для континуального инте-

грала, в котором интегрирование ведется по траекториям в фазовом пространстве.

Рассмотрим одномерную механическую систему, определяемую своей функцией Гамильтона $H(q, p)$, где q — координата; p — канонически сопряженный импульс. Каноническое квантование такой системы заключается в замене координаты q и импульса p операторами \hat{q} и \hat{p} по правилу

$$q \rightarrow \hat{q} \equiv q, \quad p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad (2.1)$$

где \hbar — постоянная Планка. В дальнейшем будет использована система единиц с $\hbar = 1$. Операторы действуют в гильбертовом пространстве комплексных функций $\Psi(q)$. Согласно (2.1), действие оператора координаты на функцию $\Psi(q)$ сводится к умножению этой функции на переменную q , а оператор импульса пропорционален оператору дифференцирования $\partial/\partial q$.

Эволюция состояния во времени определяется уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (2.2)$$

в котором \hat{H} — оператор энергии, получающийся из классической функции Гамильтона $H(q, p)$ заменой q и p операторами \hat{q} и \hat{p} по правилу (2.1) при некотором способе упорядочения операторов. Формальное решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$\Psi(t) = \hat{U}(t, t_0) \Psi(t_0), \quad (2.3)$$

где оператор эволюции

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp(i(t_0 - t)\hat{H}) \quad (2.4)$$

есть показательная функция от оператора энергии \hat{H} .

Метод континуального интегрирования позволяет представить матричный элемент оператора эволюции в виде среднего по траекториям в фазовом пространстве от выражения

$$\exp(iS[t_0, t]), \quad (2.5)$$

где

$$S[t_0, t] = \int_{t_0}^t (p(\tau) \dot{q}(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))) d\tau \quad (2.6)$$

классическое действие для траектории $(q(\tau), p(\tau))$, $(t_0 \leq \tau \leq t)$ в фазовом пространстве $\dot{q}(\tau) \equiv dq(\tau)/d\tau$.

Среднее по траекториям и есть континуальный интеграл Фейнмана. Обычно континуальный интеграл определяют как предел конечномерного интеграла. Приведем одно из возможных определений.

Разделим интервал $[t_0, t]$ на N равных частей точками $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$. Рассмотрим на интервале $[t_0, t]$ функции $p(\tau)$, постоянные на интервалах

$$[t_0, \tau), (\tau_1, \tau_2), \dots, (\tau_{N-1}, t], \quad (2.7)$$

и непрерывные функции $q(\tau)$, линейные на интервалах (2.7). Зафиксируем значения функции $q(\tau)$ на концах интервала $[t_0, t]$, положив

$$q(t_0) = q_0; \quad q(t) = q. \quad (2.8)$$

Траектория $(q(\tau), p(\tau))$ определяется значениями кусочно-линейной функции $q(\tau)$ в точках $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ (обозначим их q_1, \dots, q_{N-1}) и значениями кусочно-постоянной функции $p(\tau)$ на интервалах (τ_k, τ_{k+1}) . Обозначим эти значения p_1, \dots, p_N .

Рассмотрим конечномерный интеграл

$$(2\pi)^{-N} \int dp_1 dq_1 \dots dq_{N-1} dp_N \exp(iS[t_0, t]) \equiv J_N(q_0, q; t_0, t), \quad (2.9)$$

где $S[t_0, t]$ — действие (2.6) для только что описанной траектории $(q(\tau), p(\tau))$, определяемой параметрами $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$. Основное утверждение заключается в том, что предел интеграла (2.9) при $N \rightarrow \infty$ совпадает с матричным элементом оператора эволюции:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(q_0, q; t_0, t) = \langle q | \exp(i(t_0 - t)\hat{H}) | q_0 \rangle. \quad (2.10)$$

Нетрудно проверить это утверждение в случаях, когда гамильтониан \hat{H} зависит только от координаты или только от импульса.

Если $H = H(q)$ (H зависит только от координаты), классическое действие для описанной выше траектории $(q(\tau), p(\tau))$ имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (p\dot{q} - H(q)) d\tau &= p_1(q_1 - q_0) + p_2(q_2 - q_1) + \dots \\ &\dots + p_N(q - q_{N-1}) - \int_{t_0}^t H(q(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Интегрируя в (2.9) по импульсам, получим произведение δ -функций:

$$\delta(q_1 - q_0) \delta(q_2 - q_1) \dots \delta(q - q_{N-1}). \quad (2.12)$$

Это произведение позволяет считать выражение $\exp(-i \int_{t_0}^t H(q(\tau)) d\tau)$ равным $\exp(i(t_0 - t)H(q_0))$ и вынести его за знак интеграла. Дальнейшее интегрирование по координатам q_1, \dots, q_{N-1} снимает все δ -функции, кроме одной, приводя к результату

$$\delta(q_0 - q) \exp(i(t_0 - t)H(q_0)), \quad (2.13)$$

совпадающему с матричным элементом оператора эволюции.

Если $\dot{H} = \dot{H}(p)$ (\dot{H} зависит только от импульса), действие принимает вид

$$\int_{t_0}^t (p(\tau) \dot{q}(\tau) - H(p(\tau))) d\tau = p_1(q_1 - q_0) + p_2(q_2 - q_1) + \dots \\ \dots + p_N(q - q_{N-1}) - \int_{t_0}^t H(p(\tau)) d\tau. \quad (2.14)$$

Интегрируя в (2.9) сначала по координатам q_1, \dots, q_{N-1} , а затем по всем импульсам p_1, \dots, p_N , получим выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int dp \exp \{ip(q - q_0) + i(t_0 - t)H(p)\}, \quad (2.15)$$

равное матричному элементу оператора эволюции для гамильтониана $\hat{H} = H(\hat{p})$.

Доказательство формулы (2.10) усложняется, если гамильтониан нетривиально зависит от координаты и импульса. В этом случае допредельное выражение (2.9) не совпадает со своим пределом — матричным элементом оператора эволюции. Формула, аналогичная (2.10) для оператора эволюции уравнения параболического типа доказана, например, в работе М. А. Евграфова [32]. Для уравнения Шредингера доказательство известно лишь в случае, когда оператор \hat{H} есть сумма функции от координат и функции от импульсов:

$$H = H_1(q) + H_2(p). \quad (2.16)$$

В нерелятивистской квантовой механике применяются именно гамильтонианы типа (2.16).

Континуальный интеграл, определенный как предел выражения (2.9) при $N \rightarrow \infty$, обозначим символом

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} \exp(iS[t_0, t]) \prod_{\tau} \frac{dp(\tau) dq(\tau)}{2\pi}. \quad (2.17)$$

Такое обозначение удобно, оно не отражает того факта, что в допредельном выражении (2.9) число интегрирований по импульсам на единицу больше, чем по координатам.

Заметим, что континуальный интеграл, определяемый формулой (2.10) как предел конечномерного, зависит от способа аппроксимации траектории $(q(\tau), p(\tau))$. Это связано с тем, что при замене аргументов функции $H(q, p)$ некоммутирующими между собой операторами \hat{q} и \hat{p} мы не имеем естественного рецепта упорядочения. Однако операторы, имеющие физический смысл, как правило, соответствуют функциям, в которых замена аргументов некоммутирующими операторами ведет к однозначному ответу. Таким является оператор энергии нерелятивистской квантовой механики, равный сумме квадратичной функции импульсов и функции координат. В таких слу-

чаях и континуальный интеграл также приводит к однозначному ответу.

Обобщим формализм континуального интеграла на системы с любым конечным числом степеней свободы.

Действие механической системы с n степенями свободы имеет вид

$$S [t_0, t] = \int \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q, p) \right) d\tau. \quad (2.18)$$

Здесь q^i — i -я каноническая координата; p_i — сопряженный с ней канонический импульс;

$H(q, p) \equiv H(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$ — гамильтониан.

Континуальный интеграл для матричного элемента оператора эволюции, по определению, — это предел конечномерного интеграла, получающегося из (2.9) заменой

$$(2\pi)^{-N} \rightarrow (2\pi)^{-Nn}; \quad dq_k \rightarrow \prod_{i=1}^n dq_k^i; \quad dp_k \rightarrow \prod_{i=1}^n dp_{i,k}, \quad (2.19)$$

где q_k^i — значение i -й координаты в точке τ_k ($k = 1, \dots, N - 1$); p_{ik} — значение i -го импульса на интервале (τ_{k-1}, τ_k) . При этом необходимо считать фиксированными значения всех координат q^1, \dots, q^n на обоих концах временного интервала $[t_0, t]$.

Определенный таким образом континуальный интеграл будем обозначать символом

$$\int_{q(t')=q'}^{q(t'')=q''} \exp(iS) \prod_t \prod_{i=1}^n \frac{dq^i(t) dp_i(t)}{2\pi}. \quad (2.20)$$

§ 3. КВАНТОВАНИЕ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

В предыдущем параграфе рассмотрено квантование конечномерных механических систем с действием гамильтонова вида (2.18) с помощью континуального интеграла. Теорию поля можно рассматривать как бесконечномерный аналог механической системы с действием (2.18). При таком подходе теории калибровочных полей являются аналогом механических систем со связями. Квантование конечномерной системы со связями требует модификации континуального интеграла.

Классическое действие конечномерной механической системы со связями

$$S = \int \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q, p) - \sum_{a=1}^m \lambda_a \varphi^a(q, p) \right) \quad (3.1)$$

содержит кроме координат q и импульсов p еще и переменные λ_a , входящие линейно и играющие роль множителей Лагранжа. Коэффициенты при них $\varphi^a(q, p)$ имеют смысл связей. Переменные q, p

образуют фазовое пространство размерности $2n$. Число связей обозначим m . Предположим, что $m < n$ и что связи φ^a и гамильтониан H находятся в инволюции, т. е. удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \{H, \varphi^a\} &= \sum_b c_b^a \varphi^b; \\ \{\varphi^a, \varphi^b\} &= \sum_d c_d^{ab} \varphi^d. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

В этих формулах c_b^a, c_d^{ab} — некоторые функции q и p ; $\{f, g\}$ — скобки Пуассона:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (3.3)$$

Система уравнений движения для действия (3.1) кроме канонических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{a=1}^m \lambda_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial p_i}; \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_{a=1}^m \lambda_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^i} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

содержит уравнения связи

$$\varphi^a(q, p) = 0, \quad a = 1, \dots, m. \quad (3.5)$$

Из уравнений связи (3.5) видно, что некоторые из переменных q, p — лишние и их надо исключить. На практике исключение лишних переменных, т. е. решение уравнений связи, часто оказывается затруднительным. Поэтому желательно иметь формализм, не требующий явного решения уравнений связи.

Уравнения связи (3.5) определяют в фазовом пространстве Γ поверхность M размерности $2n - m$. Условия инволюции (3.2) гарантируют выполнение уравнений связи (3.5) при произвольных функциях $\lambda_a(t)$, если эти уравнения выполнены для начальных условий. Другими словами, траектория, начавшаяся на поверхности M , не покидает ее.

Наблюдаемыми величинами на многообразии M будем считать такие, на изменении которых со временем не сказывается произвол в выборе $\lambda_a(t)$. Этому требованию удовлетворяют функции $f(q, p)$, подчиняющиеся условиям

$$\{f, \varphi^a\} = \sum_b d_b^a \varphi^b. \quad (3.6)$$

Действительно, в уравнениях движения для таких функций

$$\dot{f} = \{H, f\} + \sum_a \lambda_a \{\varphi^a, f\} \quad (3.7)$$

члены, зависящие от λ_a , исчезают на M .

Заданная на M и удовлетворяющая условиям (3.6) функция $f(q, p)$ существенно зависит не от всех переменных. Условия (3.6) можно рассматривать как систему m дифференциальных уравнений первого порядка на M , для которых уравнения (3.2) — условия интегрируемости. Поэтому функция f однозначно определяется своими значениями на подмногообразии начальных условий для этой системы, имеющем размерность $(2n - m) - m = 2(n - m)$. В качестве такого подмногообразия удобно взять поверхность Γ^* , определяемую уравнениями связи (3.5) и m дополнительными условиями:

$$\chi_a(q, p) = 0, \quad a = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Функции χ_a должны удовлетворять условию

$$\det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| \neq 0, \quad (3.9)$$

так как только в этом случае Γ^* может служить начальной поверхностью для уравнений (3.6). Удобно считать, что χ_a коммутируют друг с другом*:

$$\{\chi_a, \chi_b\} = 0. \quad (3.10)$$

В этом случае на многообразии Γ^* можно ввести канонические переменные. Действительно, если выполнено условие (3.9), то при помощи канонического преобразования в Γ -можно перейти к новым переменным, в которых χ_a примут простой вид:

$$\chi_a(q, p) = p_a, \quad a = 1, \dots, m, \quad (3.11)$$

где p_a ($a = 1, \dots, m$) — часть канонических импульсов новой системы переменных. Пусть q^a — сопряженные с ними координаты и пусть q^*, p^* — остальные канонические переменные. В новых переменных условие (3.9) запишется в виде

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^b} \right\| \neq 0, \quad (3.12)$$

так что уравнения связи (3.6) можно разрешить относительно q^a . В результате поверхность Γ^* задается в Γ уравнениями

$$p_a = 0, \quad q^a = q^a(q^*, p^*), \quad (3.13)$$

так что q^* и p^* — независимые переменные на Γ^* и являются каноническими по построению.

Рассмотрим, как выглядит континуальный интеграл для конечномерной механической системы со связями. Подберем дополнительные условия $\chi_a(q, p)$ так, чтобы были выполнены соотношения (3.9)

* Здесь и далее коммутатором двух функций f и g на фазовом пространстве называются скобки Пуассона $\{f, g\}$ (3.3). Функции коммутируют, если их скобки Пуассона равны нулю.

и (3.10). Основное утверждение состоит в том, что матричный элемент оператора эволюции дается континуальным интегралом

$$\int \exp \left\{ i \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q, p) \right) d\tau \right\} \prod_{\tau} d\mu(q(\tau), p(\tau)), \quad (3.14)$$

в котором мера интегрирования определена формулой

$$d\mu(\tau) = (2\pi)^{m-n} \det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| \prod_a \delta(\chi_a) \delta(\varphi^a) \prod_{i=1}^n dq^i(\tau) dp_i(\tau). \quad (3.15)$$

Для доказательства преобразуем интеграл (3.14) с мерой (3.15) к интегралу (2.20), в котором интегрирование ведется по траекториям в физическом фазовом пространстве Γ^* . Перейдем к описанным выше координатам q^a, q^*, p_a, p^* . При этом интеграл (3.14) превращается в интеграл с мерой

$$d\tilde{\mu} = (2\pi)^{m-n} \det \left\| \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^b} \right\| \prod_a \delta(p_a) \delta(\varphi^a) \prod_{i=1}^n dq^i dp_i, \quad (3.16)$$

которую можно переписать еще так:

$$\prod_a \delta(p_a) \delta(q^a - q^a(q^*, p^*)) dq^a dp_a \prod_{j=1}^{n-m} \frac{dq^{*j} dp_j^*}{2\pi}. \quad (3.17)$$

Интегрирование по q^a и p_a снимается δ -функциями. В результате интеграл принимает вид

$$\int \exp \left\{ i \int_{t_0}^t \left(\sum_j p_j^* \dot{q}^{*j} - H^*(q^*, p^*) \right) d\tau \right\} \prod_{\tau} \prod_{j=1}^{n-m} \frac{dq^{*j} dp_j^*}{2\pi}, \quad (3.18)$$

совпадающий с (2.20). Поэтому можно считать формулы (3.14), (3.15) доказанными.

Заметим, что интеграл (3.14) можно переписать в виде

$$\int \exp \left\{ i \int_{t_0}^t \left(\sum_i p_i \dot{q}^i - H - \sum_a \lambda_a \dot{\varphi}^a \right) d\tau \right\} \prod_{\tau} \det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| (2\pi)^{m-n} \times \\ \times \prod_a \delta(\chi_a) \prod_{i=1}^n dq^i dp_i \prod_b \frac{\Delta\tau d\lambda_b}{2\pi}. \quad (3.19)$$

Символ $\prod_b \Delta\tau \frac{d\lambda_b}{2\pi}$ показывает, что в допредельном выражении фигурируют интегралы по переменным $\lambda_b(\tau_i)$ (τ_i — точки деления интервала $[t_0, t]$) вида

$$\int \exp \left\{ -i \sum_{i,a} \lambda_a(\tau_i) \varphi^a(q(\tau_i), p(\tau_i)) \Delta(\tau) \right\} \prod_{i,b} d\tau \frac{d\lambda_b}{2\pi}. \quad (3.20)$$

Выражение (3.20) равно произведению δ -функций

$$\prod_{i,a} \delta [\varphi^a (q (\tau_i), p (\tau_i))]. \quad (3.21)$$

Это означает, что в интеграле (3.19) можно провести интегрирование по λ_b и вернуться к интегралу (3.14).

Покажем, что континуальный интеграл (3.14) не зависит от выбора дополнительных условий. Пусть $\delta\chi_a$ — бесконечно малое изменение этих условий. С точностью до линейной комбинации связей можно представить $\delta\chi_a$ как результат инфинитезимального канонического преобразования в Γ , генератор которого есть линейная комбинация связей. Действительно, $\delta\chi_a$ можно представить в виде

$$\delta\chi_a = \{\Phi, \chi_a\} + \sum_b c_{ab} \varphi^b, \quad (3.22)$$

где

$$\Phi = \sum_a h_a \varphi^a, \quad (3.23)$$

а в качестве h_a можно взять решение системы уравнений

$$\sum_b \{\chi_a, \varphi^b\} h_b = -\delta\chi_a. \quad (3.24)$$

В силу условия (3.9) эта система имеет однозначное решение. При описанном каноническом преобразовании связи заменяются своими линейными комбинациями

$$\delta\varphi^a = \sum_b A_b^a \varphi^b, \quad (3.25)$$

где

$$A_b^a = \{h_b, \varphi^a\} - \sum_c h_c c_b^{ac}. \quad (3.26)$$

Величины, участвующие в интеграле (3.14) и мере (3.15), изменяются следующим образом:

$$\chi_a \rightarrow \chi_a + \delta\chi_a, \quad \varphi^a = \varphi^a + \sum_b A_b^a \varphi^b, \quad H \rightarrow H;$$

$$\prod_a \delta(\varphi^a) \rightarrow \prod_a \delta(\varphi^a + \delta\varphi^a) = (1 + \sum_a A_a^a) \prod_a \delta(\varphi^a);$$

$$\det \| \{\chi_a, \varphi^b\} \| \rightarrow \det \| \{\chi_a + \delta\chi_a, \varphi^b + \delta\varphi^b\} \| =$$

$$= \det \| \{\chi_a + \delta\chi_a, \varphi^b\} \| \det \left\| \frac{\partial(\varphi^a + \delta\varphi^a)}{\partial\varphi^b} \right\| =$$

$$= \det \| \{\chi_a + \delta\chi_a, \varphi^b\} \| (1 + \sum_a A_a^a).$$

В результате канонического преобразования мера интегрирования отличается от меры (3.15) лишь заменой $\chi_a \rightarrow \chi_a + \delta\chi_a$. Это и доказывает независимость интеграла (3.14) от выбора дополнительных условий.

Полученные в этом и предыдущем параграфах континуальные интегралы для конечномерных механических систем обобщаются в следующей главе на теорию поля, описывающую системы с бесконечным числом степеней свободы.

§ 4. КONTИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КВАНТОВАНИЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ

В этом параграфе рассмотрены два примера вычисления континуальных интегралов, с помощью которых осуществляется квантование механических систем на многообразиях. Методом континуального интегрирования можно вычислить спектр наблюдаемых динамической системы, а если многообразие является группой, то этот метод бывает полезен для нахождения неприводимых представлений группы. Приведенные ниже примеры различаются структурой фазового пространства Γ .

1. $\Gamma = u(1) \times R$ (цилиндр). Рассмотрим континуальный интеграл вида

$$\langle \varphi' | \exp(-i\hat{H}t) | \varphi \rangle = \int \exp \left\{ i \int (\pi d\varphi - H dt) \right\} \prod \frac{d\varphi d\pi}{2\pi} \quad (4.1)$$

по фазовому пространству механической системы, у которой координатное пространство есть единичная окружность (отрезок $(0, 2\pi)$ с отождествленными концами).

Континуальный интеграл (4.1) с гамильтонианом, зависящим от импульсов, относится к классу точно вычисляемых (§ 1). Однако компактность координатного пространства ведет к его существенному изменению по сравнению со случаем, рассмотренным в § 1, где координатным пространством была прямая.

Для вычисления интеграла (4.1) заменим показатель экспоненты допредельным выражением

$$i \sum \pi_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i) - i \sum H(\pi_i) \Delta t, \quad (4.2)$$

где π_i — значения π на интервалах $(t_{i+1} - t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Проинтегрируем сначала по переменным φ_i — значениям переменной $\varphi(t)$ на концах интервала $t_{i+1} - t_i$, отличным от $t_0 = t$, $t_N = t'$. Легко увидеть, что для этого надо проинтегрировать по переменным φ_i ($i = 1, \dots, N-1$) по всей вещественной оси, а затем просуммировать по всем функциям $\varphi(t)$ с условиями

$$\varphi(t) = \varphi, \quad \varphi(t') = \varphi' + 2\pi m, \quad m — \text{целое число}. \quad (4.3)$$

По импульсным переменным нужно интегрировать по всей вещественной оси. Таким образом, необходимо вычислить выражение

$$(2\pi)^{-N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \prod_{i=1}^N d\pi_i \prod_{i=1}^{N-1} d\varphi_i \exp \left\{ i \sum_i \pi_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + i \pi_N 2\pi m - i \sum_i H(\pi_i) \Delta t \right\}. \quad (4.4)$$

Интегрирование по φ_i дает

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-N} \int \exp \left\{ i \sum_{i=1}^N \pi_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \right\} \prod_{i=1}^{N-1} d\varphi_i = \\ = (2\pi)^{-1} \prod_{i=1}^{N-1} \delta(\pi_{i+1} - \pi_i) \exp i(\pi_N \varphi' - \pi_1 \varphi). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Произведение $N - 1$ δ -функций позволяет проинтегрировать по всем импульсным переменным, кроме одной. Выражение (3.4) принимает вид

$$(2\pi)^{-1} \int d\pi' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \{ i\pi' (\varphi' - \varphi) + 2\pi m - i(t' - t) H(\pi') \}. \quad (4.6)$$

Просуммировав по m

$$\sum_m \exp(i\pi' 2\pi m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\pi' - m) \quad (4.7)$$

и взяв интеграл по π' , получим

$$(2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp [im(\varphi' - \varphi)] \exp [i(t' - t) H(m)]. \quad (4.8)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Выражение $\exp(im\varphi)$ есть одномерное неприводимое представление группы $U(1)$, тогда (4.8) дает сумму по всем таким представлениям.

Из формулы (4.8) видно, что при квантовании системы на одномерной группе вращения спектр оператора импульса дискретный (целочисленный). Аналогичную формулу можно получить и для других групп, в частности для группы трехмерных вращений $O(3)$.

В следующем примере рассмотрено квантование динамической системы на торо-компактном фазовом пространстве конечного объема. Объем фазового пространства должен быть кратен 2π .

2. $\Gamma = I(1) \times I(1)$ (тор; $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$). Представим в виде континуального интеграла матричный элемент

$$\langle x' | \exp(-i\hat{H}t) | x \rangle. \quad (4.9)$$

Определим континуальный интеграл как предел конечномерного интеграла по значениям y_1, \dots, y_N кусочно-постоянной функции $y(t)$ и по значениям x_1, \dots, x_{N-1} кусочно-линейной функции $x(t)$ в точках деления $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$. Вследствие непрерывности функции $x(t)$ надо интегрировать по переменным x_1, \dots, x_{N-1} по всей вещественной оси, а затем просуммировать по траекториям, приходящим в точки $x + ma$ (m — целое число), как и при квантовании на цилиндре. Что касается интегралов по y -переменным, то легко видеть, что по одной из них (например y_1) следует интегрировать по

отрезку $[0, b]$, а по остальным (y_2, \dots, y_N) — по всей вещественной оси.

Допрдельное выражение

$$(2\pi)^{-N} \sum_m \int dy_1 dx_1 \dots dx_{N-1} dy_N \exp \{ i y_1 (x_1 - x) + i y_2 (x_2 - x_1) + \dots + i y_N (x' + 2\pi m - x_{N-1}) - i \int H dt \} \quad (4.10)$$

можно вычислить точно, если H зависит только от y . Без ограничения общности можно считать H периодической функцией с периодом b . Интеграл по x -переменным имеет вид

$$(2\pi)^{-N} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \exp \{ i y_1 (x_1 - x) + i y_2 (x_2 - x_1) + \dots + i y_N (x' + 2\pi m - x_N) \} = (2\pi)^{-1} \delta(y_1 - y_2) \delta(y_2 - y_3) \dots \dots \delta(y_{N-1} - y_N) \exp \{ i y_N (x' + 2\pi m) - i y_1 x \}. \quad (4.11)$$

Интегрирование по y_1, \dots, y_N снимает все δ -функции, и получается выражение

$$(2\pi)^{-1} \sum_m \int_0^b dy \exp \{ i y (x' - x + ma) - i H(y) (t' - t) \}. \quad (4.12)$$

Воспользовавшись формулой

$$\sum_m \exp(i may) = \sum_n \delta\left(\frac{ay}{2\pi} - n\right) = \frac{2\pi}{a} \sum_n \delta\left(y - \frac{2\pi n}{a}\right), \quad (4.13)$$

получим вместо (4.12) выражение

$$a^{-1} \int_0^b dy \exp \{ i y (x' - x) - i H(y) (t' - t) \} \sum_n \delta\left(y - \frac{2\pi n}{a}\right). \quad (4.14)$$

Функция (4.13) обладает естественным свойством b -периодичности, если $ab/2\pi$ есть целое число k . Получаем условие «квантования объема»:

$$ab = 2\pi k, \quad k - \text{целое число}. \quad (4.15)$$

Если условие квантования объема выполнено, выражение (4.14) принимает вид

$$a^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \exp \left\{ i \frac{2\pi s}{a} (x' - x) \right\} \exp \left\{ -i (t' - t) H \left(\frac{s}{k} b \right) \right\}. \quad (4.16)$$

Отсюда следует, что при фиксированном k возможные значения для

$$y_s = \frac{s}{k} b \quad s = 0, 1, \dots, k-1. \quad (4.17)$$

Аналогично возможные значения

$$x_s = \frac{s}{k} a \quad s=0, 1, \dots, k-1. \quad (4.18)$$

Условие квантования объема (4.15) эквивалентно полученному в работе Ф. А. Березина [148] условию квантования постоянной Планка \hbar ($\hbar = 2\pi/k$). Чтобы убедиться в этом, введем вместо x , y «циклические переменные» x_1 , x_2 по формулам

$$x = \frac{a}{2\pi} x_1, \quad y = \frac{b}{2\pi} y_1 \quad (4.19)$$

и обозначим возникающий перед действием S множитель $ab/4\pi^2$ как \hbar^{-1} .

КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

§ 5. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Теорию поля можно рассматривать как теорию механической системы с бесконечным числом степеней свободы. Континуальный интеграл в теории поля можно строить различными способами. Во-первых, можно исходить из действия поля, записанного в гамильтоновой форме, и строить континуальный интеграл по фазовому пространству системы с бесконечным числом степеней свободы. Во-вторых, можно исходить из действия, не записанного в явно гамильтоновой форме, и рассматривать континуальный интеграл по всем полям, что позволяет построить явно релятивистскую теорию. При гамильтоновом подходе релятивистская инвариантность часто не является очевидной и требует специального доказательства.

Объяснение и обоснование метода интегрирования по всем полям можно дать в том случае, когда удастся преобразовать получающиеся здесь континуальные интегралы к интегралам гамильтонова вида.

Рассмотрим определение и правила работы с континуальными интегралами на примере теории скалярного поля с действием:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} g_0^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 \right). \quad (5.1)$$

Здесь $\varphi(x)$ — зависящие от точки $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ псевдо-евклидова пространства V_4 полевые функции; $g_0^{\mu\nu}$ — диагональный тензор Минковского [1, -1, -1, -1]. Действие — сумма квадратичного по полю φ функционала S_0 , дающего действие свободного поля и интеграла от $-\frac{g}{3!} \varphi^3$, описывающего самодействие с константой связи g . Множитель $\frac{1}{3!}$ перед $g\varphi^3$ выбран для удобства.

При определении континуального интеграла по всем полям часто используется конечномерная аппроксимация.

Возьмем в пространстве V_4 большой кубический объем V , разделенный на N^4 равных маленьких кубиков v_i ($i = 1, \dots, N^4$). Аппроксимируем функцию $\varphi(x)$ в объеме V функцией, постоянной в объемах v_i , а первые производные $\frac{d\varphi}{dx_\mu}$ — конечными разностями:

$$\frac{1}{\Delta l} [\varphi(x_\nu + \delta_{\mu\nu} \Delta l) - \varphi(x_\nu)], \quad (5.2)$$

где Δl — длина ребра кубика v_i . Аппроксимирующая кусочно-постоянная функция $\varphi(x)$ определяется своими значениями в объемах v_i .

Рассмотрим конечномерный интеграл

$$\int \exp(iS) \prod_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^4} n(x) d\varphi(x) \quad (5.3)$$

по значениям функции $\varphi(x)$ в объемах v_i . Здесь S — интеграл действия для аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ с аппроксимацией (5.2) для ее первых производных; $n(x)$ — не зависящий от $\varphi(x)$ множитель, выбранный так, чтобы при $V \rightarrow \infty$, $v_i \rightarrow 0$ интеграл (5.3) имел бы асимптотический вид $\exp(cV)$ с не зависящей от V константой c . Обычно $n(x)$ имеет вид

$$n(x) = a (\Delta l)^\alpha \quad (5.4)$$

с постоянными (не зависящими от x) константами a и α .

Конечномерные интегралы типа (5.3) фигурируют в определенных выражениях при определении встречающихся в теории поля континуальных интегралов. Запишем функции Грина в виде континуального интеграла.

Функции Грина — среднее от произведения двух и более полевых функций с весом $\exp(iS)$. Например, двухточечная функция определяется формулой

$$\begin{aligned} G(x, y) &\equiv -i \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = \\ &= -i \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ v_i \rightarrow 0}} \frac{\int \exp(iS) \varphi(x) \varphi(y) \prod_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^4} n(x) d\varphi(x)}{\int \exp(iS) \prod_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^4} n(x) d\varphi(x)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Стоящий в правой части этой формулы предел обозначим символом

$$\frac{\int \exp(iS) \varphi(x) \varphi(y) \prod_x n(x) d\varphi(x)}{\int \exp(iS) \prod_x n(x) d\varphi(x)}. \quad (5.6)$$

Функции Грина считают известными, если известен *производящий функционал*

$$Z[\eta] = \frac{\int \exp(i(S + \int \eta(x) \varphi(x) d^4 x)) \prod_x n(x) d\varphi(x)}{\int \exp(iS) \prod_x n(x) d\varphi(x)}. \quad (5.7)$$

В частности, двухточечная функция Грина дается формулой

$$G(x, y) = i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} Z[\eta] |_{\eta=0}. \quad (5.8)$$

В теории свободного поля функционал $Z[\eta]$ нетрудно вычислить. Для этого при интегрировании по φ в числителе формулы (5.7) сделаем сдвиг

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \varphi_0(x), \quad (5.9)$$

подобрав $\varphi_0(x)$ из условия сокращения в показателе экспоненты членов, линейных по φ . Это приводит к уравнению

$$-(\square + m^2) \varphi_0(x) = -\eta(x) \quad (5.10)$$

для $\varphi_0(x)$. Решение уравнения (5.10) выражается через функцию Грина $D(x, y)$ оператора $(-\square - m^2)$ формулой

$$\varphi_0(x) = -\int D(x, y) \eta(y) d^4y. \quad (5.11)$$

Функция Грина — это решение уравнения

$$(-\square_x - m^2) D(x, y) = \delta(x - y) \quad (5.12)$$

с δ -функцией в правой части.

После сдвига (5.9) интеграл в числителе правой части (5.7) сводится к произведению интеграла в знаменателе на множитель

$$\exp\left\{-\frac{i}{2} \int \eta(x) D(x, y) \eta(y) d^4x d^4y\right\}, \quad (5.13)$$

который и дает значение производящего функционала в случае свободного поля. Двухточечная функция в теории свободного поля [обозначим ее $G_0(x, y)$], вычисленная согласно формуле (5.8), есть функция Грина оператора $(-\square - m^2)$:

$$G_0(x, y) = D(x, y). \quad (5.14)$$

Эта функция определена уравнением (5.12) не однозначно, а лишь с точностью до аддитивной добавки — решения однородного уравнения

$$(-\square - m^2) f = 0. \quad (5.15)$$

Существует наиболее естественный выбор для функции $D(x, y)$. Его можно обосновать многими аргументами. Приведем один из них.

Выражение $\exp(iS)$ есть осциллирующий функционал от $\varphi(x)$. Рассмотрим вместо него функционал $\exp(iS_\varepsilon)$, где S_ε — зависящее от неотрицательного параметра ε комплексное действие

$$S_\varepsilon = \frac{1}{2} \int \varphi(-\square - m^2 + i\varepsilon) \varphi d^4x, \quad (5.16)$$

подобранное так, чтобы функционал $\exp(iS_\varepsilon)$ был по абсолютной величине меньше единицы и исчезал при $\int \varphi^2 d^4x \rightarrow \infty$.

Результаты получаются однозначными, если использовать при определении функций Грина «исправленное» действие S_B , а в ответах перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$. В частности, $D(x, y)$ становится пределом функции Грина оператора $(-\square - m^2 + i\varepsilon)$. Последняя определена однозначно. Она зависит от разности и дается формулой

$$D(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (5.17)$$

Предел этой функции при $\varepsilon \rightarrow +0$ называется *причинной* или *фейнмановской функцией Грина* и обозначается $D_F(x-y)$.

Для среднего от произведения двух полей $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ в теории свободного поля имеем

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = iD_F(x-y). \quad (5.18)$$

Среднее от произведения любого конечного числа функций $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ в теории свободного поля получим, взяв n -кратную функциональную производную от выражения (5.13) и положив $\eta = 0$.

Среднее от нечетного числа функций φ равно, очевидно, нулю. Для среднего от четного числа функций нетрудно вывести утверждение, известное под названием *теоремы Вика*.

Среднее от произведения четного числа функций $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{2n})$ равно сумме произведений всевозможных попарных средних. Например,

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) \rangle &= \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle \langle \varphi(x_3) \varphi(x_4) \rangle + \\ &+ \langle \varphi(x_1) \varphi(x_3) \rangle \langle \varphi(x_2) \varphi(x_4) \rangle + \langle \varphi(x_1) \varphi(x_4) \rangle \langle \varphi(x_2) \varphi(x_3) \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Доказательство для среднего от $2n$ функций получим, продифференцировав $2n$ раз функционал (5.13) и положив $\eta = 0$.

Теорема Вика используется при построении формальной теории возмущений и связанной с ней диаграммной техники. Построим теорию возмущений для скалярного поля с лагранжианом (5.1). Представим функционал $\exp(iS)$ в виде

$$\exp(iS) = \exp(iS_0) \exp(iS_1), \quad (5.20)$$

где S_0 — действие свободного поля и член

$$S_1 = -\frac{g}{3!} \int \varphi^3(x) d^4 x \quad (5.21)$$

описывает самодействие. Теория возмущений основана на разложении $\exp(iS_1)$ под знаком континуального интеграла в ряд по g

$$\exp(iS_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n! (3!)^n} \int \varphi^3(x_1), \dots, \varphi^3(x_n) d^4 x_1, \dots, d^4 x_n \quad (5.22)$$

и последующем почленном интегрировании получающихся рядов.

Например, для двухточечной функции получается представление в виде частного двух рядов

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= \\
 &= -i \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n! (3i)^n} \int \exp(iS_0) \varphi(x) \varphi(y) \int \varphi^3(x_1), \dots}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n! (3i)^n} \int \exp(iS_0) \varphi^3(x_1), \dots} \\
 &\quad \frac{\dots \varphi^3(x_n) d^4 x_1, \dots, d^4 x_n \prod_x n(x) d\varphi(x)}{\dots, \varphi^3(x_n) d^4 x_1, \dots, d^4 x_n \prod_x n(x) d\varphi(x)}. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Если разделить числитель и знаменатель правой части выражения (5.23) на интеграл

$$\int \exp(iS_0) \prod_x n(x) d\varphi(x), \quad (5.24)$$

то задача сводится к вычислению средних типа

$$\langle \varphi^3(x_1), \dots, \varphi^3(x_n) \rangle_0 \equiv \frac{\int \exp(iS_0) \varphi^3(x_1), \dots, \varphi^3(x_n) \prod_x n(x) d\varphi(x)}{\int \exp(iS_0) \prod_x n(x) d\varphi(x)} \quad (5.25)$$

в знаменателе правой части (5.23) и к вычислению средних

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \varphi^3(x_1), \dots, \varphi^3(x_n) \rangle_0 \quad (5.26)$$

в числителе. Здесь применяется теорема Вика, которая представляет средние $\langle \dots \rangle_0$ в виде суммы всевозможных попарных средних, позволяя вычислить любой член рядов в (5.23). Фейнман указал на то, что каждому члену рассматриваемых рядов можно сопоставить рисунок-диаграмму. Теория возмущений, каждому члену которой сопоставляется диаграмма, получила название *диаграммной техники*. В рассматриваемой теории скалярного поля с самодействием можно прийти к диаграммам следующим образом.

Сопоставим среднему (5.25) диаграмму в виде n точек (каждая с тремя отростками), отображающих точки x_1, \dots, x_n в псевдоевклидовом пространстве. Такая диаграмма для случая $n = 4$ имеет вид

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array}^{x_1} & \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array}^{x_2} & \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array}^{x_3} & \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array}^{x_4} \\
 & & & (5.27)
 \end{array}$$

Среднему (5.26) сопоставим диаграмму, получающуюся из соответствующей диаграммы для среднего (5.25) добавлением двух точек (каждая с одним отростком), соединяющим точки x и y в V_4 .

Например, для $n = 4$ получим

$$\begin{array}{cccccc}
 \bullet & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} & \bullet \\
 x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y
 \end{array} \quad (5.28)$$

Введенные таким образом диаграммы назовем *преддиаграммами*, в отличие от тех, которые появятся далее. Преддиаграммы обладают симметрией относительно перестановки точек x_1, \dots, x_n , а также относительно перестановки отростков в каждой точке. Поэтому можно говорить о группе симметрии G_n n -точечной преддиаграммы порядка

$$R_n = n! (3!)^n. \quad (5.29)$$

Симметрия преддиаграмм отражает симметрию соответствующих им средних (5.25), (5.26), не меняющихся при перестановке аргументов x_1, \dots, x_n и при перестановке под знаком среднего в каждой тройке полевых функций $\varphi(x_i) \varphi(x_i) \varphi(x_i) = \varphi^3(x_i)$.

Заметим, что выражение R_n^{-1} [вместе с $(-ig)^n$] фигурирует в рядах (5.23) как множитель перед средними $\langle \dots \rangle_0$.

Согласно теореме Вика, средние (5.25), (5.26) — суммы произведений всевозможных попарных средних. Каждому способу образования попарных средних сопоставим диаграмму, соединив линией каждую пару точек x_i, x_j преддиаграммы, если среди попарных средних есть среднее $\langle \varphi(x_i) \varphi(x_j) \rangle_0$. Число линий равно числу пар, т. е. уменьшенному вдвое числу усредняемых полевых функций.

Все диаграммы, возникающие из преддиаграммы (5.27), представлены в (5.30), а все возникающие из преддиаграммы (5.28) — в (5.31):

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} b \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} c \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \\
 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} & \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} & \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}
 \end{array} \quad (5.30)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} d \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} & \begin{array}{c} e \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} & \\
 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} & \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} & \\
 \begin{array}{c} f \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} & &
 \end{array} \quad (5.31)$$

где r_i — порядок группы симметрии связной компоненты i -го сорта. Множители $((n_i)!)^{-1}$ отражают симметрию диаграммы относительно перестановок одинаковых компонент и приводят к показательной функции (5.33). Остается заметить, что сумма вкладов диаграмм в числитель (5.23) сводится к произведению суммы вкладов связных компонент на множитель (5.33).

В учебниках квантовой теории (см., например, [35—37]) диаграммная техника строится обычно в рамках операторного метода. Приведенный здесь на примере скалярного поля ее вывод с помощью континуальных интегралов — более естественный. Фейнман пришел к своим диаграммам именно через континуальный интеграл.

Для конкретных расчетов более удобна диаграммная техника в импульсном пространстве. Она возникает, если перейти к преобразованию Фурье $\tilde{\varphi}(k)$ функций поля $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(ikx) \tilde{\varphi}(k) d^4 k \quad (5.35)$$

и рассматривать в качестве функций Грина средние вида

$$\langle \tilde{\varphi}(k_1), \dots, \tilde{\varphi}(k_n) \rangle. \quad (5.36)$$

Выражения, соответствующие элементам диаграмм — вершинам и линиям, принимают вид

$$\begin{array}{c} k_1 \text{ ————— } k_2 \\ \delta(k_1 + k_2)(k_1^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} \end{array} \quad (5.37)$$

$$\begin{array}{c} k_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ k_2 \quad k_3 \end{array} \quad g\delta(k_1 + k_2 + k_3)$$

Вклад конкретной диаграммы в импульсной диаграммной технике получится, если произведение выражений, соответствующих, согласно (5.37), ее элементам, проинтегрировать по всем внутренним импульсам и умножить результат на $r_{n,d}^{-1} (i/(2\pi))^{l-n-1}$, где n — число вершин; l — число линий; $r_{n,d}$ — порядок группы симметрии диаграммы.

Отметим, что функции Грина в импульсном пространстве содержат множителем $\delta(\sum_i k_i)$, обеспечивающую сохранение 4-импульса:

$$G(k_i) = M(k_i) \delta(\sum_i k_i). \quad (5.38)$$

Зная функции Грина, можно вычислить элементы S -матрицы по формуле

$$S(k_1, \dots, k_n) = \lim_{k_i^2 \rightarrow m_i^2} M(k_i) \left\{ \prod_{i=1}^n (k_i^2 - m_i^2) \theta(\pm k_i^0) |2k_i^0|^{-1/2} (2\pi)^{-3/2} \right\}. \quad (5.39)$$

Доказательство формулы (5.39) здесь не приводится, его можно найти во многих учебниках квантовой теории поля.

Объяснение и обоснование континуальным интегралам по всем полям в квантовой теории поля можно дать в том случае, когда удастся преобразовать полученные здесь континуальные интегралы к интегралам в гамильтоновой форме, являющимся обобщением на теорию поля интегралов, полученных выше при квантовании конечномерных механических систем.

Продолжая рассматривать пример скалярного поля, запишем в гамильтоновой форме континуальный интеграл

$$\int \exp(iS) \prod_x \Pi_n(x) d\varphi(x). \quad (5.40)$$

Для этого рассмотрим интеграл

$$\int \exp(iS[\varphi, \pi]) \prod_x \Pi_n(x) d\varphi(x) d\pi(x), \quad (5.41)$$

где выражение

$$S[\varphi, \pi] = \int \left(\pi \partial_0 \varphi - \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 \right) d^4 x \quad (5.42)$$

совпадает с действием (5.1) при замене $\pi(x)$ на $\partial_0 \varphi(x)$. Действие (5.42) имеет гамильтонов вид. Соответствующая функция Гамильтона есть

$$H = \int d^3 x \left(-\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{g}{3!} \varphi^3 \right), \quad (5.43)$$

где функции $\varphi(x)$, $\pi(x)$ имеют смысл плотности координаты и сопряженного ей импульса. Покажем, что интеграл (5.41) по переменным $\varphi(x)$ и $\pi(x)$ сводится к интегралу (5.40) по всем полям. Для этого заметим, что интеграл по π в формуле (5.41) можно взять в явном виде, если сделать сдвиг

$$\pi(x) \rightarrow \pi(x) + \partial_0 \varphi(x), \quad (5.44)$$

после которого интеграл превращается в произведение интеграла (5.40) по φ и интеграла по π

$$\int \exp\left(-\frac{i}{2} \int \pi^2(x) d^4 x\right) \prod_x d\pi(x), \quad (5.45)$$

сводящегося к произведению нормировочных множителей. В формулах для функций Грина — средних от произведения нескольких

полей Φ — интегралы типа (5.45) входят в числитель и знаменатель и поэтому сокращаются.

Таким образом, удалось привести континуальный интеграл в теории скалярного поля к гамильтонову виду, искусственно введя интеграл по новой переменной — каноническому импульсу. Такой прием будет использован далее при доказательстве гамильтоновости конкретных систем квантовой теории поля и статистической физики.

Схема континуального интегрирования по всем полям дает метод квантования бозе-полей. В операторном формализме такое квантование сводится к замене полевых функций операторами с бозевскими перестановочными соотношениями.

Квантование ферми-полей можно реализовать с помощью континуального интеграла по антикоммутирующим переменным (подробнее в книге Ф. А. Березина [29]). Для этого необходимы следующие основные факты.

Интеграл по ферми-полям (по бесконечной грассмановой алгебре с инволюцией) определяется как предел интеграла по алгебре с единицей и конечным четным числом образующих x_i, x_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) с перестановочными соотношениями

$$x_i x_j + x_j x_i = 0; x_i^* x_j^* + x_j^* x_i^* = 0; x_i x_j^* + x_j^* x_i = 0. \quad (5.46)$$

Любой элемент алгебры $f(x, x^*)$ есть полином вида

$$f(x, x^*) = \sum_{a_i, b_i=0, 1} \bar{c}_{a_1, \dots, a_n} b_1, \dots, b_n x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n} (x_1^*)^{b_1}, \dots, (x_n^*)^{b_n} \quad (5.47)$$

с коэффициентами $c_{a_1, \dots, a_n} b_1, \dots, b_n$ из поля комплексных чисел. В силу перестановочных соотношений (5.42) при $i = j$ имеем $x_i^2 = (x_i^*)^2 = 0$, так что степени образующих выше первой исчезают. Можно ограничиться порядком расположения множителей, принятым в (5.47), так как любой другой порядок можно привести к данному с помощью перестановочных соотношений (5.46) при $i \neq j$.

Определим операцию инволюции, действующую на элемент (5.47) по правилу

$$f \rightarrow f^* = \sum_{a_i, b_i=0, 1} \bar{c}_{a_1, \dots, a_n} b_1, \dots, b_n (x_n)^{b_n}, \dots, (x_1)^{b_1} (x_n^*)^{a_n}, \dots, (x_1^*)^{a_1}. \quad (5.48)$$

На описанной алгебре можно ввести интеграл

$$\int f(x, x^*) dx^* dx \equiv \int f(x_1, \dots, x_n, x_1^*, \dots, x_n^*) dx_1^* dx_1, \dots, dx_n^* dx_n, \quad (5.49)$$

определив его соотношениями

$$\int dx_i = 0; \int dx_i^* = 0; \int x_i dx_i = 1; \int x_i^* dx_i^* = 1 \quad (5.50)$$

и требованием, чтобы символы dx_i , dx_i^* антикоммутировали друг с другом и с образующими, если наложить естественное условие линейности

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) dx^* dx = c_1 \int f_1 dx^* dx + c_2 \int f_2 dx^* dx. \quad (5.51)$$

При интегрировании суммы (5.47) отличен от нуля только вклад от слагаемого, у которого $a_i = b_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

В дальнейшем будут полезными следующие две формулы:

$$\int \exp(-x^* Ax) dx^* dx = \det A; \quad (5.52)$$

$$\frac{\int \exp(-x^* Ax + \eta^* x + x^* \eta) dx^* dx}{\int \exp(-x^* Ax) dx^* dx} = \exp(\eta^* A^{-1} \eta), \quad (5.53)$$

где

$$x^* Ax = \sum_{i, k} a_{ik} x_i^* x_k \quad (5.54)$$

есть квадратичная форма образующих x_i , x_i^* , соответствующая матрице A .

Выражения

$$\eta^* x = \sum_i \eta_i^* x_i; \quad x^* \eta = \sum_i x_i^* \eta_i \quad (5.55)$$

являются линейными формами образующих x_i , x_i^* , коэффициенты которых η_i , η_i^* антикоммутируют друг с другом и с образующими. Элементы η_i , η_i^* вместе с образующими x_i , x_i^* можно считать образующими более широкой алгебры. Выражение $\eta^* A^{-1} \eta$ в формуле (5.51) есть квадратичная форма матрицы A^{-1} , обратной матрице A .

Показательная функция в подынтегральных выражениях формул (5.52) и (5.53) определяется разложением в ряд, где в силу перестановочных соотношений (5.46) лишь несколько первых членов разложения отличны от нуля.

Формулу (5.52) нетрудно доказать, заметив, что вклад в интеграл дает лишь n -й член разложения показательной функции. Формула (5.53) доказывается сдвигом $x \rightarrow x + \eta$, $x^* \rightarrow x^* + \eta^*$, уничтожающим линейную форму по x , x^* в подынтегральной экспоненте.

Подробное доказательство и некоторые обобщения формул (5.52), (5.53) можно найти в упомянутой монографии Ф. А. Березина.

§ 6. КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕМПЕРАТУРНАЯ ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

В этой главе методом континуального интегрирования выведена температурная диаграммная техника теории возмущений в квантовой статистической физике.

Существует несколько модификаций функций Грина для квантовомеханических систем при температурах, отличных от нуля, — тем-

пературные, температурно-временные и т. п. Однако диаграммная техника теории возмущений непосредственно может быть получена только для температурных функций Грина. Они удобны для вычисления термодинамических свойств системы, а также содержат информацию о спектре квазичастиц и о слабонеравновесных кинетических явлениях.

Рассмотрим формализм континуального интеграла для системы бозе-частиц, помещенной в кубический объем $V = L^3$ с периодическими граничными условиями. Континуальный интеграл в этом случае — это интеграл по пространству комплексных функций («полей») $\psi(x, \tau)$, $\bar{\psi}(x, \tau)$, где $x \in V$, периодичных по параметру τ («времени») с периодом $\beta = (kT)^{-1}$, где k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура*.

Определим функции Грина как средние по указанному пространству от произведений нескольких полей ψ , $\bar{\psi}$ от различных аргументов с весом $\exp S$, где S — функционал от ψ , $\bar{\psi}$, имеющий смысл действия

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi}(x, \tau) \partial_\tau \psi(x, \tau) - \int_0^\beta H'(\tau) d\tau; \quad (6.1)$$

$H'(\tau)$ — гамильтониан вида

$$H'(\tau) = \int d^3x \left[\left(\frac{1}{2m} \bar{\nabla} \bar{\psi}(x, \tau), \nabla \psi(x, \tau) \right) - \lambda \bar{\psi}(x, \tau) \psi(x, \tau) \right] + \\ + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y u(x-y) \bar{\psi}(x, \tau) \bar{\psi}(y, \tau) \psi(y, \tau) \psi(x, \tau). \quad (6.2)$$

Здесь λ — химический потенциал системы; $u(x-y)$ — парный потенциал взаимодействия между двумя бозе-частицами.

Вследствие периодичности функции ψ , $\bar{\psi}$ разлагаются в ряды Фурье:

$$\psi(x, \tau) = (\beta V)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \omega} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)} a(\mathbf{k}, \omega); \\ \bar{\psi}(x, \tau) = (\beta V)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)} a^\dagger(\mathbf{k}, \omega), \quad (6.3)$$

где

$$\omega \equiv \omega_n = 2\pi n/\beta; \quad k_i = 2\pi n_i/L; \quad (6.4)$$

n, n_i — целые числа.

* В дальнейшем будем использовать систему единиц с $\hbar = k = 1$, где \hbar — постоянная Планка; k — постоянная Больцмана.

Разложения типа (6.3) справедливы для функций Грина. Например, представим одночастичную функцию Грина

$$G(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}_1, \tau_1) = -\langle \zeta \psi(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}(\mathbf{x}_1, \tau_1) \rangle \equiv \\ \equiv - \frac{\int e^S \psi(\mathbf{x}, \tau) \psi(\mathbf{x}_1, \tau_1) d\bar{\psi} d\psi}{\int e^S d\bar{\psi} d\psi} \quad (6.5)$$

в виде частного двух континуальных интегралов, меру обозначим символом $d\bar{\psi}d\psi$.

Функция (6.5) зависит, очевидно, от разностей $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$, $\tau - \tau_1$. Подставляя вместо ψ , $\bar{\psi}$ разложения Фурье (6.3), получим, что функция (6.5) выражается через средние

$$G(\mathbf{k}, \omega) = -\langle a(\mathbf{k}, \omega) a^+(\mathbf{k}, \omega) \rangle. \quad (6.6)$$

Рассмотрим диаграммную технику теории возмущений, возникающую при вычислении интегралов типа (6.5). Будем считать невозмущенным действием S_0 квадратичную форму по ψ , $\bar{\psi}$ в действии (6.1), а форму четвертой степени, которую обозначим S_1 , будем рассматривать как возмущение.

Перейдем в действии от функций ψ , $\bar{\psi}$ к их коэффициентам Фурье a , a^+ . Получим выражение

$$S = \sum_{\mathbf{k}, \omega} \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda \right) a^+(\mathbf{k}, \omega) a(\mathbf{k}, \omega) - \\ - \frac{1}{2\beta V} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4}} v(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) a^+(\mathbf{k}_1, \omega_1) a^+(\mathbf{k}_2, \omega_2) a(\mathbf{k}_3, \omega_3) a(\mathbf{k}_4, \omega_4). \quad (6.7)$$

Здесь $v(\mathbf{k})$ — фурье-образ потенциала $u(\mathbf{x})$, определяемый формулой

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) v(\mathbf{k}). \quad (6.8)$$

Использование коэффициентов Фурье $a(\mathbf{k}, \omega)$, $a^+(\mathbf{k}, \omega)$ придает особенно простой вид континуальному интегралу, а также диаграммной теории возмущений. Мера в континуальном интеграле (6.5), символически обозначаемая $d\bar{\psi}d\psi$, может быть записана в виде

$$d\bar{\psi}d\psi = \prod_{\mathbf{k}, \omega} da^+(\mathbf{k}, \omega) da(\mathbf{k}, \omega). \quad (6.9)$$

Континуальный интеграл можно считать пределом конечномерного интеграла по переменным $a^+(\mathbf{k}, \omega)$, $a(\mathbf{k}, \omega)$ с $|\mathbf{k}| < k_0$, $|\omega| < \Omega_0$ при $k_0, \Omega_0 \rightarrow \infty$.

Построим диаграммную технику теории возмущений, используя схему, рассмотренную в § 5 на примере скалярного поля. Невозможную функцию Грина легко найти, зная производящий функционал.

$$Z_0[\eta, \eta^+] = \frac{\int \exp \left[S_0 + \sum_{\mathbf{k}, \omega} (\eta^+(\mathbf{k}, \omega) a(\mathbf{k}, \omega) + \eta(\mathbf{k}, \omega) a^+(\mathbf{k}, \omega)) \right] \times \rightarrow}{\int \exp(S_0) \prod_{\mathbf{k}, \omega} da^+(\mathbf{k}, \omega) da(\mathbf{k}, \omega)} . \quad (6.10)$$

Вычислим этот функционал, сделав сдвиг, уничтожающий линейные формы по η, η^+ в экспоненте подынтегрального выражения. В результате получим

$$Z_0[\eta, \eta^+] = \exp \left\{ - \sum_{\mathbf{k}, \omega} \eta^+(\mathbf{k}, \omega) \eta(\mathbf{k}, \omega) \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda \right)^{-1} \right\}. \quad (6.11)$$

Дифференцируя это выражение сначала по $\eta(\mathbf{k}, \omega)$, затем по $\eta^+(\mathbf{k}, \omega)$ и положив $\eta = \eta^+ = 0$, получим выражение для невозможной функции Грина:

$$G_0(\mathbf{k}, \omega) = - \frac{\int a(\mathbf{k}, \omega) a^+(\mathbf{k}, \omega) e^{S_0} \prod_{\mathbf{k}, \omega} da^+ da}{\int e^{S_0} \prod_{\mathbf{k}, \omega} da^+ da} = \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda \right)^{-1}. \quad (6.12)$$

Из формулы (6.10) следует теорема Вика для средних вида

$$\left\langle \prod_{i=1}^n a(\mathbf{k}_i, \omega_i) \prod_{j=1}^n a^+(\mathbf{k}_j, \omega_j) \right\rangle_0, \quad (6.13)$$

где

$$\langle f(a^+, a) \rangle_0 \equiv \frac{\int f(a^+, a) e^{S_0} \prod_{\mathbf{k}, \omega} da^+ da}{\int e^{S_0} \prod_{\mathbf{k}, \omega} da^+ da}. \quad (6.14)$$

Согласно теореме Вика, среднее (6.13) равно сумме произведений всевозможных попарных средних вида

$$\langle a(\mathbf{k}_i, \omega_i) a^+(\mathbf{k}_j, \omega_j) \rangle = -\delta_{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j} \delta_{\omega_i \omega_j} G_0(\mathbf{k}_i, \omega_i), \quad (6.15)$$

Построим теорию возмущений, разлагая функционал $\exp S = \exp S_0 \exp S_1$ под знаком континуального интеграла в ряд по

степеням S_1 . Функцию Грина (6.5) представим в виде частного двух рядов

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle a(\mathbf{k}, \omega) a^+(\mathbf{k}, \omega) S_1^n \rangle_0}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle S_1^n \rangle_0}. \quad (6.16)$$

Каждое S_1 , стоящее под знаком $\langle \dots \rangle_0$, есть форма четвертой степени по переменным интегрирования a, a^+ . Таким образом, в знаменателе (6.16) мы имеем дело со средними

$$\left\langle \prod_{j=1}^n a^+(\mathbf{k}_{1j}, \omega_{1j}) a^+(\mathbf{k}_{2j}, \omega_{2j}) a(\mathbf{k}_{3j}, \omega_{3j}) a(\mathbf{k}_{4j}, \omega_{4j}) \right\rangle_0. \quad (6.17)$$

В числителе фигурируют средние

$$\left\langle a(\mathbf{k}, \omega) a^+(\mathbf{k}, \omega) \prod_{j=1}^n a^+(\mathbf{k}_{1j}, \omega_{1j}) a^+(\mathbf{k}_{2j}, \omega_{2j}) a(\mathbf{k}_{3j}, \omega_{3j}) a(\mathbf{k}_{4j}, \omega_{4j}) \right\rangle_0. \quad (6.18)$$

Сопоставим среднему (6.17) преддиаграмму в виде n вершин четвертого порядка. Для $n = 2$ преддиаграмма имеет вид

$$\begin{array}{cc} \times & \times \\ \text{---} & \text{---} \end{array} \quad (6.19)$$

Входящие в вершину стрелки сопоставим переменным a , выходящие — переменным a^+ . Среднему (6.18) сопоставим преддиаграмму вида

$$\begin{array}{cccc} \rightarrow & \times & \times & \leftarrow \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \quad (6.20)$$

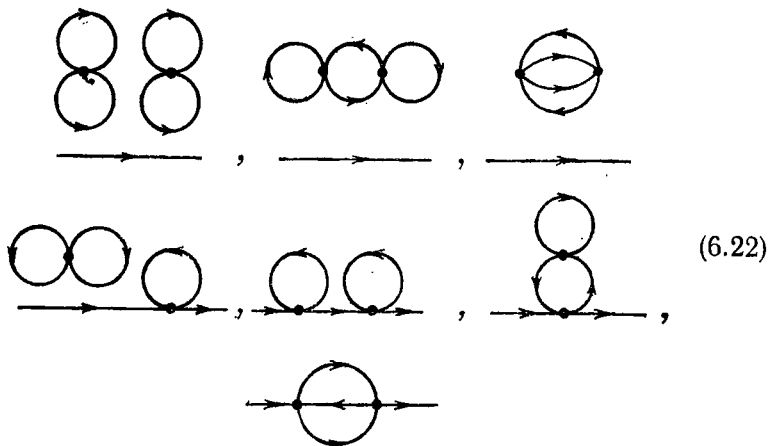
Согласно теореме Вика, средние (6.17), (6.18) являются суммами всевозможных попарных средних. Сопоставим каждому фиксированному способу образования попарных средних диаграмму, соединив линией каждую пару вершин с номерами i, j , если среди попарных средних есть среднее

$$\langle a(\mathbf{k}_i, \omega_i) a^+(\mathbf{k}_j, \omega_j) \rangle_0.$$

Перечислим для $n = 2$ все диаграммы, возникающие из преддиаграмм (6.19):

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} & \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \circ \quad \circ \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \quad (6.21) \end{array}$$

а также все диаграммы, возникающие из преддиаграммы (6.20)



Выражение, соответствующее данной диаграмме, получится, если произведение попарных средних умножить на выражение

$$\frac{(-1)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{v(k_{1i} - k_{3i})}{2\beta V}, \quad (6.23)$$

стоящее перед средними, а также на число способов, которыми данная диаграмма получается из преддиаграммы, а затем просуммировать по импульсам и частотам внутренних линий диаграммы.

Полученные правила соответствия удобно несколько переформулировать. Запишем возмущение S_1 в виде

$$-\frac{1}{4\beta V} \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k_3 + k_4 \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4}} (v(k_1 - k_3) + v(k_2 - k_4)) a^+(k_1, \omega_1) a^+(k_2, \omega_2) \times \\ \times a(k_3, \omega_3) a(k_4, \omega_4), \quad (6.24)$$

где коэффициент при $a^+(k_1, \omega_1) a^+(k_2, \omega_2) a(k_3, \omega_3) a(k_4, \omega_4)$ симметричен относительно замен

$$(k_1, \omega_1) \leftrightarrow (k_2, \omega_2), (k_3, \omega_3) \leftrightarrow (k_4, \omega_4).$$

Указанная симметрия позволяет говорить о группе симметрии преддиаграммы порядка

$$R_n = 4^n n! \quad (6.25)$$

Множитель 4^n соответствует группам симметрии в каждой вершине четвертого порядка; $n!$ — группе перестановок вершин. Умножая выражение R_n^{-1} на число способов, которыми данная диаграмма получается из преддиаграммы, получим $r_{n,d}^{-1}$, где $r_{n,d}$ — порядок группы симметрии диаграммы. Появление множителя симметрии $r_{n,d}^{-1}$ — общий факт в диаграммной теории возмущений — отмечал-

ся в § 5, где речь шла о теории возмущений для релятивистской теории скалярного поля с самодействием.

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать правила соответствия следующим образом. Будем сопоставлять линии диаграммы функцию Грина $G_0(k, \omega)$, вершине — симметризованный потенциал

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{k, \omega} \\ \\ \begin{array}{ccc} k_1 \omega_1 & & k_3 \omega_3 \\ & \times & \\ k_2 \omega_2 & & k_4 \omega_4 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{V}_0(k, \omega) = (i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda)^{-1}; \\ \\ \mathcal{V}(k_1 - k_3) - \mathcal{V}(k_2 - k_4). \end{array} \quad (6.26)$$

Выражение, соответствующее диаграмме для знаменателя в (6.16), получим, просуммировав по независимым импульсам и частотам произведения выражений, соответствующих линиям и вершинам диаграммы, и умножив затем получившийся результат на

$$\frac{1}{r_{n,d}} \left(\frac{-1}{\beta V} \right)^{l-n}, \quad (6.27)$$

где l — число линий; n — число вершин; $r_{n,d}$ — порядок группы симметрии диаграммы. Для диаграммы числитель перед диаграммой равен

$$\frac{1}{r_{n,d}} \left(\frac{-1}{\beta V} \right)^{l-n-1}, \quad (6.28)$$

где $l - n - 1 = c$ есть число независимых контуров диаграммы.

Вклад в функцию Грина дает лишь связанные диаграммы числителя в (6.16). Знаменатель в (6.16) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle S_1^n \rangle_0 = \exp \left(\sum_i D_i^c \right), \quad (6.29)$$

где $\sum_i D_i^c$ — сумма всех связанных вакуумных диаграмм. Числитель в (6.16) есть произведение множителя (6.29) на сумму всех связанных диаграмм. Переход к связным диаграммам — такой же общий факт, как и отмеченное выше появление множителя $r_{n,d}^{-1}$.

Построенная для бозе-системы теория возмущений совпадает с температурной диаграммной техникой, изложенной, например, в книге [38]. Вывод ее в формализме континуального интеграла более прост, чем в операторном формализме. Кроме того, метод континуального интегрирования удобен для перестройки теории возмущений, которая применяется в случаях, когда построенная здесь стандартная теория возмущений оказывается неприменимой. С точки зрения континуального интегрирования такая перестройка — это

другой способ асимптотического вычисления континуального интеграла.

Остановимся теперь на континуальном интеграле и диаграммной технике для ферми-систем. Квантование ферми-систем осуществляется в результате интегрирования по пространству антикоммутирующих функций (элементов бесконечномерной грассмановой алгебры). Для получения правильной статистики необходимо наложить на $\psi, \bar{\psi}$ условия антипериодичности по τ :

$$\psi(x, \tau + \beta) = -\psi(x, \tau), \quad \bar{\psi}(x, \tau + \beta) = -\bar{\psi}(x, \tau). \quad (6.30)$$

В результате функции $\psi, \bar{\psi}$ разлагаются в ряды Фурье вида

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= (\beta V)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \exp[-i(\mathbf{k}x - \omega\tau)] a(\mathbf{k}, \omega); \\ \bar{\psi}(x, \tau) &= (\beta V)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \exp[i(\mathbf{k}x - \omega\tau)] a^+(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (6.31)$$

где

$$\omega = 2\pi(n + 1/2)/\beta; \quad k_i = 2\pi n_i/L; \quad (6.32)$$

n, n_i — целые числа. В отличие от бозе-случая фермиевские частоты ω пропорциональны полуцелым числам $n + 1/2$.

Действие S для ферми-систем имеет формально тот же вид (6.1), что и для бозе-систем. При переходе к коэффициентам Фурье удобно записать S в виде

$$\begin{aligned} S = \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4}} (v(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) - v(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4)) a^+(\mathbf{k}_1, \omega_1) a^+(\mathbf{k}_2, \omega_2) \times \\ \times a(\mathbf{k}_3, \omega_3) a(\mathbf{k}_4, \omega_4), \end{aligned} \quad (6.33)$$

антисимметризовав потенциал. Вывод диаграммной техники совершенно аналогичен проведенному выше для бозе-системы. Элементы диаграммной техники

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \mathbf{k}, \omega \\ \longrightarrow \\ \begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ \mathbf{k}_1, \omega_1 & & \mathbf{k}_3, \omega_3 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ \mathbf{k}_2, \omega_2 & & \mathbf{k}_4, \omega_4 \end{array} \end{array} \quad G_0(\mathbf{k}, \omega) = (i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda)^{-1}; \\ v(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) - v(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \end{aligned} \quad (6.34)$$

отличаются от соответствующих элементов для бозе-системы «полуцелостью» частот $\omega = 2\pi(n + 1/2)/\beta$ и антисимметризацией потенциала.

Выражение, соответствующее диаграмме, получим, просуммировав по независимым импульсам и частотам произведение выраже-

ний, соответствующих элементам диаграммы и умножив результат на множитель

$$(-1)^F \frac{1}{r_{n,d}} \left(-\frac{1}{\beta V} \right)^{l-n} \quad (6.35)$$

для вакуумных диаграмм и на множитель

$$(-1)^F \frac{1}{r_{n,d}} \left(-\frac{1}{\beta V} \right)^{l-n-1} \quad (6.36)$$

для диаграмм, соответствующих одночастичной функции Грина.

Выражения (6.35) и (6.36) отличаются от аналогичных выражений (6.27), (6.28) для бозе-систем множителем $(-1)^F$, где F — число независимых замкнутых ферми-циклов диаграммы. Множитель $(-1)^F$ обязан своим происхождением антикоммутируемости ферми-полей ψ , $\bar{\psi}$.

Построенная здесь теория возмущений для функций Грина допускает модификации, связанные с частичным суммированием диаграмм. Выше было показано, что вакуумные диаграммы не дают вклада в функции Грина. Функция Грина представляется в виде суммы вкладов связанных диаграмм, в которых можно пройти от входа к выходу, двигаясь по линиям диаграммы.

Известно, что полную функцию Грина $G(k, \omega)$ можно выразить через неприводимую собственно энергетическую часть $\Sigma(k, \omega)$, которая есть сумма вкладов всех диаграмм с двумя отростками, таких, что вход диаграммы нельзя отделить от выхода разрывом одной линии диаграммы. Частичное суммирование диаграмм, позволяющее выразить функцию $G(k, \omega)$ через $G_0(k, \omega)$ и $\Sigma(k, \omega)$, видно из графического равенства

$$\begin{aligned} \longrightarrow &= \longrightarrow + \longrightarrow \textcircled{\Sigma} \longrightarrow + \\ &+ \longrightarrow \textcircled{\Sigma} \longrightarrow \textcircled{\Sigma} \longrightarrow + \dots = \\ &= \longrightarrow + \longrightarrow \textcircled{\Sigma} \longrightarrow \end{aligned} \quad (6.37)$$

Аналитическая форма этого равенства есть

$$\begin{aligned} G(k, \omega) &= G_0(k, \omega) + G_0(k, \omega) \Sigma(k, \omega) G_0(k, \omega) + \\ &+ G_0(k, \omega) \Sigma(k, \omega) G_0(k, \omega) \Sigma(k, \omega) G_0(k, \omega) + \dots = \\ &= G_0(k, \omega) + G_0(k, \omega) \Sigma(k, \omega) G(k, \omega). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Решение уравнения (6.38) имеет вид

$$G(k, \omega) = (G_0(k, \omega)^{-1} - \Sigma(k, \omega))^{-1}. \quad (6.39)$$

Таким образом, при вычислении функции Грина $G(k, \omega)$ достаточно найти ее собственно энергетическую часть.

Рассмотрим теперь модификацию теории возмущений, которую называют *скелетной диаграммной техникой*. К ней мы приходим, выполнив частичное суммирование диаграмм, ведущее к замене светлых внутренних линий диаграмм, соответствующих невозмущенным функциям Грина, жирными линиями, которым сопоставляются полные функции Грина. Элементы скелетной диаграммной техники — невозмущенные вершины и полные функции Грина. Однако, в отличие от обычной диаграммной техники, здесь не надо учитывать диаграммы с вставками собственно энергетических частей во внутренние линии. Выражения для полных функций заранее неизвестны, так что для их определения получают систему уравнений. Первое из них — это уравнение (6.39), второе — это уравнение для собственно энергетической части $\Sigma(k, \omega)$:

$$\Sigma(k, \omega) = \text{---} \circlearrowleft \Sigma \text{---} = \text{---} \circlearrowleft \text{---} + \dots, \quad (6.40)$$

представляющее ее как сумму бесконечного числа диаграмм скелетной диаграммной техники, элементами которых являются полные функции Грина.

Скелетная диаграммная техника оказывается удобной, в частности, в теориях с аномальными функциями Грина, тождественно равными нулю при их вычислении по стандартной теории возмущений. Такая ситуация встретится в теории сверхпроводимости (см. гл. 7). Система уравнений, обобщающая систему (6.39), (6.40) на случай, когда существуют аномальные функции Грина, имеет наряду с тривиальными решениями для аномальных функций Грина также и нетривиальные решения, появляющиеся ниже точки фазового перехода.

Возможность частичного суммирования есть общий факт диаграммной теории возмущений, верный для статистической физики и релятивистской квантовой теории поля.

В заключение этого параграфа приведем выражения для некоторых физических величин, таких, как среднее число частиц, импульс, кинетическая энергия и давление.

Рассмотрим сначала бозе-систему. Получим среднее число частиц системы N , усредняя функционал

$$\int \bar{\psi}(x, \tau) \psi(x, \tau) d^3x. \quad (6.41)$$

Это дает формулу

$$N = \frac{\int \exp(S) \left[\int \bar{\psi}(x, \tau) \psi(x, \tau) d^3x \right] d\bar{\psi} d\psi}{\int \exp(S) d\bar{\psi} d\psi} = \int d^3x \langle \bar{\psi}(x, \tau) \psi(x, \tau) \rangle. \quad (6.42)$$

В трансляционно-инвариантной системе с действием (6.1) функция Грина (6.5) зависит от разности $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$, $\tau - \tau_1$. Поэтому (6.42) можно записать в виде

$$N = V \lim_{\substack{\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x} \\ \tau_1 \rightarrow \tau}} \langle \psi(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}(\mathbf{x}_1, \tau_1) \rangle. \quad (6.43)$$

Это выражение зависит от способа перехода к пределу. Например, если положить $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, то получаются разные пределы при $\tau_1 \rightarrow \tau - 0$ и $\tau_1 \rightarrow \tau + 0$. Покажем это на примере идеальной бозе-системы с функцией Грина (6.26), в этом случае

$$\langle \psi(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}(\mathbf{x}_1, \tau_1) \rangle = \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \frac{\exp [i(\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - \omega(\tau - \tau_1))]}{i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda}. \quad (6.44)$$

Положим здесь $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, $\tau_1 = \tau + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Вычисление суммы по частотам дает

$$T \sum_{\omega} \exp(i\omega\varepsilon) \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda \right)^{-1} = \frac{\exp[\varepsilon\varepsilon(\mathbf{k})]}{\exp[\beta\varepsilon(\mathbf{k})] - 1}, \quad (6.45)$$

где $\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{k^2}{2m} - \lambda$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ получается функция бозе-распределения

$$(\exp[\beta\varepsilon(\mathbf{k})] - 1)^{-1}. \quad (6.46)$$

Если же в (6.44) $\varepsilon < 0$, то в пределе $\varepsilon \rightarrow -0$ получим вместо (6.46) выражение

$$(\exp[\beta\varepsilon(\mathbf{k})] - 1)^{-1} + 1. \quad (6.47)$$

Правильный ответ получается при $\tau_1 - \tau \rightarrow +0$. В этом случае для плотности $\rho = N/V$ находим неизвестную формулу бозе-распределения

$$\rho = N/V = V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \left[\exp \beta \left(\frac{k^2}{2m} - \lambda \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (6.48)$$

Способ стремления $\tau_1 \rightarrow \tau + 0$ дает правильный ответ и для неидеальной системы. В результате получается формула

$$N/V = \rho = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{T}{V} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \exp(i\omega\varepsilon) G(\mathbf{k}, \omega), \quad (6.49)$$

выражающая плотность через функцию Грина $G(\mathbf{k}, \omega)$ в (\mathbf{k}, ω) -представлении.

Среднее значение импульса и кинетической энергии получим, усредняя функционалы

$$\frac{i}{2} \int (\nabla \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \nabla \psi) d^3x; \quad (6.50)$$

$$\frac{1}{2m} \int \nabla \bar{\psi} \nabla \psi d^3x. \quad (6.51)$$

Это приводит к формулам, в которых $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$K/V = -(T/V) \sum_{\mathbf{k}, \omega} \exp(i\omega\varepsilon) \mathbf{k}G(\mathbf{k}, \omega); \quad (6.52)$$

$$H_{\text{кин}}/V = -(T/V) \sum_{\mathbf{k}, \omega} \exp(i\omega\varepsilon) \frac{\hbar^2}{2m} G(\mathbf{k}, \omega). \quad (6.53)$$

Приведем еще выражение для давления, исходя из формулы для отношения статистических сумм неидеальной и идеальной систем через сумму вакуумных диаграмм:

$$\begin{aligned} Z/Z_0 &= \exp(-\beta\Omega)/\exp(-\beta\Omega_0) = \\ &= \int \exp(S) d\bar{\psi} d\psi / \int \exp(S_0) d\bar{\psi} d\psi = \exp \sum_i D_i^{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Здесь Ω_0 , Ω — Ω -потенциалы идеальной и неидеальной систем. Имеем

$$\Omega_0 = -p_0V, \quad \Omega = -pV, \quad (6.55)$$

где p_0 , p — давление идеальной и неидеальной систем. Из (6.54), (6.55) следует формула

$$p = p_0 + \frac{1}{\beta V} \sum_i D_i^{\varepsilon}, \quad (6.56)$$

выражающая давление p через давление p_0 и сумму вкладов вакуумных диаграмм.

Формула (6.56) верна и для ферми-систем. Формулы для среднего числа частиц, импульса и кинетической энергии на единицу объема для ферми-системы отличаются от соответствующих формул для бозе-системы (6.49), (6.52), (6.53) знаком и заменой бозевских частот $\omega = 2\pi nT$ на фермиевские $\pi T(2n+1)$.

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

§ 7. КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Калибровочные поля имеют геометрическое происхождение. Их можно рассматривать как связности расслоенного пространства, базой которого служит пространство—время V_4 , а слоем является конечномерное пространство представлений некоторой группы.

Геометрическая природа калибровочных полей проявляется и при построении их квантовой теории. Попытки квантовать геометрические поля стандартными методами приводят к трудностям и противоречиям, которые встречаются уже в задаче ковариантного квантования электромагнитного поля, простейшего по своей геометрической структуре. Здесь трудности можно избежать, квантуя электромагнитное поле по методу Ферми с использованием индефинитной метрики (см., например, [35—37]). Оказалось, однако, что некритическое перенесение метода Ферми, обоснованного в квантовой электродинамике, на более сложные системы может привести к нарушению унитарности теории. Впервые это было обнаружено Фейнманом [12] в 1963 г. на примерах теории поля Янга — Миллса и поля тяготения. Фейнман наметил путь устранения указанной им трудности. Он показал, что унитарность диаграммы, имеющей вид замкнутого кольца, можно восстановить, если вычесть из нее другую диаграмму, тоже имеющую вид кольца и описывающую распространение фиктивной частицы.

Метод Фейнмана не давал возможности прямого обобщения на более сложные диаграммы. Решение проблемы для любых диаграмм было дано в 1967 г. Де-Виттом [13], а также Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым [14, 15], с помощью существенно различных подходов. Объединяет оба подхода применение метода континуального интегрирования, дающего схему ковариантной теории возмущений для калибровочных полей.

Метод, развитый в [14, 15], основан на следующей идее. Поля, получающиеся друг из друга калибровочными преобразованиями (например, A_μ и $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ в электродинамике), описывают одну и ту же физическую (геометрическую) ситуацию и поэтому физически (геометрически) неразличимы. Это наводит на мысль, что основными объектами теории должны стать классы полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями. Так, в элек-

тродинамике в один класс с полем A_μ объединяются все поля вида $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$.

Действие в теории калибровочных полей одинаково для всех полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями. Другими словами, действие есть функционал на классах.

В формализме континуального интеграла можно получить теорию, в которой основными объектами являются классы, если окажется возможным записать континуальный интеграл как интеграл по всем классам. Это можно сделать, если, например, вести интегрирование по однократно пересекающейся с каждым классом поверхности в многообразии всех полей. Тогда каждый класс будет иметь на указанной поверхности точно одного своего представителя. Возникающая на таких поверхностях мера интегрирования меняется при изменении формы поверхности, однако все физические результаты не должны зависеть от выбора поверхности.

Сформулируем общее правило квантования калибровочных полей в формализме континуального интеграла по всем полям.

Обозначим калибровочное поле A , его компоненты — A_μ^a , где $\mu = 0, 1, 2, 3$ — пространственно-временной, а a — изотопический индексы.

Калибровочная группа G — прямое произведение групп G_0 , действующих в каждой точке x пространства-времени:

$$G = \prod_x G_0(x). \quad (7.1)$$

Пусть Ω — элемент калибровочной группы, являющийся функцией на V_4 со значениями в G_0 . Обозначим A^Ω результат действия элемента Ω на поле A . Совокупность полей A^Ω , где A фиксировано, Ω пробегает калибровочную группу G , называется орбитой калибровочной группы.

В § 5 говорилось, что квантование поля с действием S сводится к усреднению функционала $\exp iS$ по всем полям. В теории калибровочных полей действие $S[A]$ калибровочно инвариантно, т. е. одинаково для всех полей, получающихся друг от друга калибровочными преобразованиями

$$S[A^\Omega] = S[A]. \quad (7.2)$$

Для построения континуального интеграла необходимо выбрать меру на многообразии всех полей A . Простейшей является мера

$$d\mu[A] = \prod_x \prod_{\mu, a} dA_\mu^a(x), \quad (7.3)$$

где символ \prod_x был определен в § 5. Назовем эту меру локальной.

В конкретных примерах из теории калибровочных полей мера (7.3) обладает свойством калибровочной инвариантности

$$d\mu[A^\Omega] = d\mu[A]. \quad (7.4)$$

Инвариантность действия $S[A]$ и меры $d\mu[A]$ относительно калибровочных преобразований $A \rightarrow A^{\Omega}$ приводит к тому, что соответствующий континуальный интеграл

$$\int \exp(iS[A]) d\mu[A] \quad (7.5)$$

становится пропорциональным «объему орбиты», т. е. континуальному интегралу

$$\int_x Pd\Omega(x) \quad (7.6)$$

по калибровочной группе G . Здесь $Pd\Omega(x)$ — инвариантная мера на группе G , равная произведению мер на группах G_0 , действующих в каждой точке пространства—времени V_4 .

Излагаемый здесь подход к интегрированию по классам состоит в явном выделении этого множителя из континуального интеграла. Такое выделение можно реализовать несколькими способами. Идея одного из них состоит в переходе от интеграла (7.5) по всем полям к интегралу по поверхности в многообразии всех полей, однократно пересекающейся с орбитами калибровочной группы. Пусть уравнение поверхности есть

$$f(A) = 0. \quad (7.7)$$

Уравнение $f(A^{\Omega}) = 0$ должно иметь при любом $A(x)$ единственное решение относительно $\Omega(x)$.

Введем функционал $\Delta_f[A]$, определив его условием

$$\Delta_f[A] \int_x P\delta(f(A^{\Omega}(x))) d\Omega(x) = 1 \quad (7.8)$$

Здесь проводится интегрирование по калибровочной группе G бесконечномерной δ -функции $P\delta(f(A^{\Omega}(x)))$. Такая δ -функция есть функционал, определяемый заданием правила его интегрирования с другими функционалами. В дальнейшем будет приведено несколько конкретных примеров вычисления интегралов типа (7.8). Заметим, что функционал $\Delta_f[A]$ калибровочно инвариантен, т. е.

$$\Delta_f[A^{\Omega}] = \Delta_f[A]. \quad (7.9)$$

Чтобы выделить из континуального интеграла (7.4) множитель (7.6), вставим под знак интеграла левую часть формулы (7.8) (равную единице) и сделаем замену переменной $A^{\Omega} \rightarrow A$. Мера $d\mu[A]$ и функционалы $S[A]$, $\Delta_f[A]$ инвариантны при такой замене. Интеграл (7.4) сводится к произведению объема группы $\int_x Pd\Omega(x)$ на интеграл

$$\int \exp(iS[A]) \Delta_f[A] \int_x P\delta(f(A)) d\mu[A]. \quad (7.10)$$

Именно этот интеграл будет исходным в квантовой теории калибровочных полей.

Покажем, что интеграл (7.10), формально зависящий от выбора поверхности $f[A] = 0$, на самом деле инвариантен по отношению

к выбору поверхности. Для доказательства вставим под знак интеграла (7.10) «другую единицу»:

$$1 = \Delta_g [A] \int_0^1 \int_x \text{Pd} [g (A^{\Omega} (x))] d\Omega (x), \quad (7.11)$$

где $g (A) = 0$ — уравнение другой поверхности, которая, как и поверхность $f (A) = 0$, однократно пересекается с орбитами группы G . Изменив порядок интегрирования по A и Ω , сделав затем сдвиг $A^{\Omega} \rightarrow A$ и, наконец, снова поменяв местами порядок интегрирования по A и Ω , приведем интеграл (7.10) к виду

$$\int \exp (iS [A]) \Delta_g [A] \int_x \text{Pd} (g (A)) d\mu [A]. \quad (7.12)$$

Описанный прием позволяет переходить в континуальном интеграле от одной поверхности к другой, или, можно сказать, от одной калибровки к другой. В частности, такой способ удобен при переходе от гамильтоновой формы континуального интеграла к интегралу в релятивистской калибровке. Ниже проследим такой переход на конкретных примерах.

Можно указать метод выделения из континуального интеграла объема калибровочной группы более общий, чем только что описанный. Рассмотрим калибровочно-неинвариантный функционал $F [A]$. Определим функционал $\Phi [A]$ уравнением

$$\Phi [A] \int_x F [A^{\Omega}] \text{Pd}\Omega (x) = 1. \quad (7.13)$$

Этот функционал калибровочно-инвариантен. Конечно, необходимо потребовать, чтобы континуальный интеграл в левой части выражения (7.13) действительно существовал. Вставив левую часть (7.13) в интеграл (7.5) и сделав затем сдвиг $A^{\Omega} \rightarrow A$, получим произведение объема группы (7.6) на интеграл

$$\exp (iS [A]) \Phi [A] F [A] d\mu [A]. \quad (7.14)$$

Введенный выше интеграл (7.10) — частный случай (7.14). Независимость интеграла (7.14) от выбора функционала доказывается так же, как и независимость интеграла (7.10) от выбора поверхности $f (A) = 0$.

Функции Грина в теории калибровочных полей определим как средние от произведения функций поля в различных точках пространства — времени V_4 . Производящий функционал для функций Грина имеет вид

$$\bar{Z} [\eta] = \frac{\int \exp \{i S [A] + i \int \eta A d^4x\} F [A] \Phi [A] d\mu [A]}{\int \exp (i S [A]) F [A] \Phi [A] d\mu [A]}, \quad (7.15)$$

где $S [A]$ — действие поля A ; $d\mu [A]$ — локальная калибровочно-инвариантная мера; функционалы F и Φ определены выше. Через $\int \eta A d^4x$ обозначен линейный функционал

$$\int \left(\sum_{\mu, a} \eta_a^{\mu} (x) A_{\mu}^a (x) \right) d^4x, \quad (7.16)$$

где $\eta_a^\mu(x)$ — произвольные пробные функции. Функции Грина — вариационные производные функционала (7.15) — зависят от выбора калибровки, т. е. от выбора функционала $F[A]$. Физические результаты, получаемые усреднением калибровочно-инвариантных функционалов, от выбора калибровки не зависят.

Отметим характерное отличие теории возмущений в теории калибровочных полей от развитой в § 5 для теории скалярного поля.

Пусть действие S содержит малый параметр ε . Действие S_0 , соответствующее нулевому значению параметра ε , будем считать квадратичной формой полевых функций. Именно так обстоит дело в большинстве примеров из теории поля.

При построении теории возмущений в формализме континуального интеграла в § 5 функционал $\exp iS$ разлагают в ряд вида

$$\exp(iS) = \exp(iS_0) \exp(iS_1) = \exp(iS_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} a_n \quad (7.17)$$

по степеням ε . Получившийся функциональный ряд почленно интегрируется, причем отдельные члены ряда теории возмущений вычисляются с помощью теоремы Вика, которая следует из того, что S_0 — невырожденная квадратичная форма.

В теории калибровочных полей под знак континуального интеграла кроме функционала $\exp(iS)$ входит еще произведение функционалов $F\Phi$. Это произведение в теории возмущений также разлагается в ряд по ε . Если F — δ -функционал, его разложение в ряд по ε затруднительно. Поэтому следует так выбирать уравнение поверхности $f(A) = 0$, чтобы оно не содержало параметра ε . Таковы, например, уравнения, выделяющие лоренцеву и кулонову калибровки в электродинамике, а также в теории Янга — Миллса. В теории тяготения уравнениями с аналогичными свойствами являются, например, условия гармоничности.

Отметим, что функция $\Delta_f[A]$ зависит от параметра ε даже в том случае, когда уравнение $f(A) = 0$ этого параметра не содержит. При этом необходимо разлагать функционал $\Delta_f[A] \exp(iS[A])$ в ряд вида

$$\exp(iS_0[A]) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} b_n[A]. \quad (7.18)$$

В общем случае произведение

$$F_0\Phi_0 \exp(iS_0) \equiv M_0, \quad (7.19)$$

где F_0, Φ_0 — главные члены функционалов F и Φ , должно быть таким, чтобы при интегрировании с M_0 произведения полей выполнялась теорема Вика. Это свойство выполняется, если M_0 есть экспонента от невырожденной квадратичной формы или произведение экспоненты с вырожденной квадратичной формой на δ -функционал, соответствующий плоской поверхности, ортогональной нулевым направлениям этой квадратичной формы.

Рассмотрим на конкретных примерах построение теории возмущений, возникающей из разложения (7.18). Только что сформулированное правило, обеспечивающее справедливость теоремы Вика, там будет выполняться.

§ 8. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Покажем на конкретных примерах, как работает общая схема квантования калибровочных полей. Рассмотрим электромагнитное поле, наиболее простое по геометрической структуре *

Действие свободного электромагнитного поля

$$S = -\frac{1}{4} \int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 d^4x \quad (8.1)$$

инвариантно относительно абелевой группы калибровочных преобразований

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x). \quad (8.2)$$

Из предыдущего параграфа следует, что квантование калибровочных полей осуществляется с помощью континуального интеграла от функционала

$$\Phi F \exp(iS), \quad (8.3)$$

где S — действие системы; F — произвольный калибровочно-инвариантный функционал, а функционал Φ^{-1} — среднее от F по калибровочной группе.

Локальная мера интегрирования, имеющая в данном случае вид

$$d\mu[A] = \prod_{x} \prod_{\mu=0}^3 dA_\mu(x), \quad (8.4)$$

является, очевидно, калибровочно-инвариантной. Остается выбрать функционал $F[A]$. Наиболее удобными для дальнейшего построения теории возмущений оказываются функционалы вида:

$$\left. \begin{aligned} F_1[A] &= \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu(x)); \\ F_2[A] &= \prod_x \delta(\operatorname{div} A(x)); \\ F_3[A] &= \exp \left\{ -\frac{i}{2d_1} \int (\partial_\mu A_\mu(x))^2 d^4x \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

* В этом и следующих параграфах будем писать векторные индексы вверху, не делая различия между k_0 и контравариантными составляющими. По повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование с учетом псевдоевклидовой метрики, по повторяющимся латинским — суммирование по значениям 1, 2, 3. Например, $k^2 \equiv k_\mu k_\mu = k_0^2 - k^2$, $\partial_\mu A_\mu = \partial_0 A_0 - \partial_1 A_1 - \partial_2 A_2 - \partial_3 A_3$, $k_1 k_1 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Обозначим $\delta_{\mu\nu}$ тензор Минковского (с отличными от нуля составляющими $\delta_{00} = -\delta_{11} = -\delta_{22} = -\delta_{33} = 1$).

Функционалы F_1 и F_2 приводят к явно релятивистскому квантованию, а использование F_3 удобно при переходе к гамильтоновой теории. Соответствующие калибровочно-инвариантные функционалы даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{-1}[A] &= \int \prod_x \delta(\partial_\mu(A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x))) d\lambda(x); \\ \Phi_2^{-1}[A] &= \int \prod_x \delta(\operatorname{div} A(x) + \nabla \lambda(x)) d\lambda(x); \\ \Phi_3^{-1}[A] &= \int \exp\left\{-\frac{i}{2d_l} \int (\partial_\mu(A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)))^2 d^4x\right\} \prod_x d\lambda(x). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Все эти функционалы не зависят на самом деле от поля $A_\mu(x)$, в чем можно убедиться, сделав в первом и третьем из них сдвиг $\lambda \rightarrow \lambda - \square^{-1} \partial_\mu A_\mu$, а во втором $\lambda \rightarrow \lambda - \square^{-1} \operatorname{div} A$. Поэтому с точностью до (бесконечного) постоянного множителя можно считать, что

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 1. \quad (8.7)$$

Теперь вид континуального интеграла определен во всех трех случаях.

Использование функционала F_2 означает интегрировать по полям, удовлетворяющим уравнению

$$\operatorname{div} A = 0. \quad (8.8)$$

Это хорошо известное условие кулоновой калибровки. Покажем, как интеграл с функционалом F_2 можно преобразовать к интегралу явно гамильтонова вида. Такое преобразование возможно, как показано в § 5 на примере скалярного поля, если ввести интеграл по вспомогательным полям. В нашем случае к цели приводит континуальный интеграл вида

$$\int \exp(i S[A_\mu, F_{\mu\nu}]) \prod_x \delta(\operatorname{div} A(x)) \prod_\mu dA_\mu(x) \prod_{\mu < \nu} dF_{\mu\nu}(x) \quad (8.9)$$

с действием

$$S[A_\mu, F_{\mu\nu}] = \int \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right) d^4x, \quad (8.10)$$

зависящим не только от вектора $A_\mu(x)$, но и от антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}(x)$. В классической теории $F_{\mu\nu}$ — напряженность электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (8.11)$$

При переходе к квантовой теории необходимо считать функции A_μ , $F_{\mu\nu}$ независимыми и интегрировать по ним как по независимым пе-

ремением. Интеграл по $F_{\mu\nu}$ в (8.9) можно взять точно. Для этого достаточно сделать сдвиг

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (8.12)$$

превращающий интеграл (8.9) в произведение интеграла по A_μ и интеграла по $F_{\mu\nu}$ вида

$$\int \exp \left(\frac{i}{4} \int F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x \right) \prod_{x \mu < \nu} dF_{\mu\nu}(x). \quad (8.13)$$

Этот интеграл есть просто нормировочная постоянная.

Перепишем действие (8.10) в трехмерных обозначениях:

$$\int (\mathbf{E} \partial_0 \mathbf{A} - \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} H^2 - (\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{A}) + A_0 \text{div } \mathbf{E}) d^4x, \quad (8.14)$$

где

$$E_i = F_{0i}; H_1 = F_{23}; H_2 = F_{31}; H_3 = F_{12}. \quad (8.15)$$

Возьмем в (8.9) интеграл по \mathbf{H} , что сводится к замене $\mathbf{H} \rightarrow \text{rot } \mathbf{A}$ в действии (8.14). Затем проинтегрируем по A_0 , что дает функционал

$$\prod_x \delta(\text{div } \mathbf{E}(x)). \quad (8.16)$$

Получаем

$$\int \exp(i S[\mathbf{A}, \mathbf{E}]) \prod_x \delta(\text{div } \mathbf{A}(x)) \delta(\text{div } \mathbf{E}(x)) \prod_{i=1}^3 dA_i(x) dE_i(x) \quad (8.17)$$

с действием гамильтонова вида

$$\int \left(\mathbf{E} \partial_0 \mathbf{A} = \frac{1}{2} E^2 - \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right) d^4x. \quad (8.18)$$

Интеграл (8.17) является аналогом интегралов, рассмотренных в § 3 при квантовании конечномерных механических систем со связями. Здесь роль связи играет $\text{div } \mathbf{E}$, роль дополнительного условия—уравнение кулоновой калибровки (8.8). Независимыми переменными можно считать поперечные в трехмерном смысле составляющие векторов \mathbf{A} и \mathbf{E} — векторного потенциала и напряженности электрического поля.

Разобранная система квантования электромагнитного поля позволяет построить формализм квантовой электродинамики без введения индефинитной метрики.

Необходимость модификации континуального интеграла в квантовой электродинамике отмечалась Бялыницким-Бирулей [39], который, по-видимому, впервые рассмотрел континуальный интеграл с δ -функционалом $\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu)$ (однако без указания на возможность появления дополнительного множителя типа Δ , при переходе к теории поля с неабелевой калибровочной группой.)

Лагранжиан спинорной квантовой электродинамики

$$L(x) = \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu(x)) - m) \psi(x) - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2, \quad (8.19)$$

где γ_μ — матрица Дирака, содержит кроме электромагнитного поля $A_\mu(x)$ четырехкомпонентные спиноры $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, описывающие фермиевское электронно-позитронное поле. Коэффициент при трехлинейном члене $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$ описывает взаимодействие электромагнитного поля с электронно-позитронным. Лагранжиан (8.19) инвариантен относительно абелевой группы калибровочных преобразований:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x);$$

$$\psi(x) \rightarrow \exp(ie\lambda(x)) \psi(x); \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \exp(-ie\lambda(x)). \quad (8.20)$$

В схеме континуального интегрирования будем считать компоненты спиноров $\psi_\alpha(x)$, $\bar{\psi}_\alpha(x)$ антикоммутирующими между собой элементами грассмановой алгебры и интегрировать функционал $\exp iS$ по мере

$$\prod_x \left(\prod_\mu dA_\mu(x) \prod_\alpha d\bar{\psi}_\alpha(x) d\psi_\alpha(x) \right) \equiv \prod_x dA d\bar{\psi} d\psi. \quad (8.21)$$

Наметим построение теории возмущений по параметру e . Так как функционалы F_1, F_2, F_3 не зависят от e , то все сводится к почленному интегрированию ряда

$$\exp(i e \Delta S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i e)^n}{n!} (\Delta S)^n. \quad (8.22)$$

Вид функций Грина зависит от выбора функционала $F[A]$. Найдем производящие функционалы для невозмущенных функций, соответствующих нулевому значению параметра e . При выборе $F = F_1$ вычислим интеграл

$$Z_0[\eta] = \frac{\int \exp \left\{ i \left(S_0 + \int (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \eta_\mu A_\mu) d^4x \right) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dA d\bar{\psi} d\psi \right\}}{\int \exp(i S_0) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dA d\bar{\psi} d\psi}, \quad (8.23)$$

где $\bar{\eta}, \eta, \eta_\mu$ — «источники» полей $\psi, \bar{\psi}, A_\mu$. Интегрирование в (8.23) ведется по полям $A_\mu(x)$, удовлетворяющим условию Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0. \quad (8.24)$$

Поэтому интегралы с функционалом $F_1[A]$ называем *интегралами в лоренцевой калибровке*. Вычисляется функционал (8.23) стандартным приемом — сдвигом

$$\psi \rightarrow \psi + \psi_0; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \bar{\psi}_0; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + A_\mu^{(0)}, \quad (8.25)$$

уничтожающим линейные по $\bar{\psi}$, $\bar{\psi}$, A_μ члены в показателе подынтегральной экспоненты в числителе (8.23). Чтобы при сдвиге (8.25) не изменился δ -функционал $F_1[A]$, достаточно выбрать поле $A_\mu^{(0)}(x)$ поперечным, т. е. удовлетворяющим условию (8.24).

Выражение для функционала $Z_0[\eta]$ оказывается равным

$$\exp \left(-i \int \bar{\eta}(x) G(x-y) \eta(y) d^4x d^4y - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \int \eta_\mu(x) D_{\mu\nu}^{tr}(x-y) \eta_\nu(y) d^4x d^4y \right), \quad (8.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G(x-y) &= (2\pi)^{-4} \int d^4p \exp[i(p, x-y)] \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i0}; \\ D_{\mu\nu}^{tr}(x-y) &= (2\pi)^{-4} \int d^4k \exp[i(k, x-y)] \frac{-k^2 \delta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu}{(k^2 + i0)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Здесь $(p, x-y) = p_\mu(x-y)_\mu$, $\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$.

Необходимость замены $k^2 \rightarrow k^2 + i0$ в подынтегральных выражениях для функций Грина была объяснена в § 5. Из формулы (8.27) следует справедливость теоремы Вика, что приводит к диаграммной технике, в которой каждой электронной, соответственно фотонной, линии сопоставляется функция G , соответственно $D_{\mu\nu}^{tr}$, каждой вершине — константа связи e .

Аналогичные схемы теории возмущений, отличающиеся только видом фотонной функции Грина, возникают при использовании функционалов F_2 и F_3 . Интегралы с функционалом F_2 назовем *интегралами в кулоновой калибровке*. Невозмущенная функция Грина в кулоновой калибровке дается формулами

$$\left. \begin{aligned} D_{\mu\nu}^q(x-y) &= (2\pi)^{-4} \int d^4k \exp[i(k, x-y)] \bar{D}_{\mu\nu}^q(k); \\ \bar{D}_{00}^q(k) &= \frac{1}{k^2}; \quad \bar{D}_{0i}^q = 0, \quad \bar{D}_{ij}^q(k) = (k^2 + i0)^{-1} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

Невозмущенная функция $D_{\mu\nu}$ для функционала F_3 имеет вид

$$(k^2 + i0)^{-2} (-k^2 \delta_{\mu\nu} + (1 - d_i) k_\mu k_\nu), \quad (8.29)$$

Формула (8.29) принимает простой вид при $d_i = 1$. Соответствующую функцию Грина $\delta_{\mu\nu} (-k^2 - i0)^{-1}$ называют обычно *функцией в фейнмановской калибровке*.

Таким образом, получены три схемы теории возмущений, отличающиеся видом фотонных функций Грина. Эти схемы хорошо известны и ведут к одним и тем же результатам для физических величин.

Метод континуального интегрирования удобен и при выводе точных соотношений, являющихся следствием калибровочной инва-

риантности. Для иллюстрации выведем тождество Уорда, а также связь функций Грина в разных калибровках. Рассмотрим электронную функцию Грина в лоренцевой калибровке:

$$G_L(x-y) = -i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_L \equiv \frac{\int \exp(iS) \psi(x) \bar{\psi}(y) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dAd\bar{\psi} d\psi}{\int \exp(iS) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dAd\bar{\psi} d\psi}. \quad (8.30)$$

Поворот спинорных полей $\psi(x) \rightarrow \exp(i\epsilon c(x)) \psi(x)$, $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \exp(-i\epsilon c(x))$ в интеграле числителя (8.30) ведет к появлению в подинтегральном выражении множителя

$$\exp i\epsilon (c(x) - c(y) + \int c(z) \partial_\mu j_\mu(z) d^4z), \quad (8.31)$$

где $j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$. Дифференцируя по $c(z)$ и положив затем $c \equiv 0$, получим формулу

$$G_L(x-y) [\delta(x-z) - \delta(y-z)] = i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) d_\mu j_\mu(z) \rangle_L, \quad (8.32)$$

из которой после перехода к импульсному представлению получается тождество Уорда [40]:

$$G^{-1}(\hat{p}) - G^{-1}(\hat{q}) = (p-q)_\mu \Gamma_\mu(p, q), \quad (8.33)$$

связывающее электронную функцию Грина $G(\hat{p})$ и неприводимую вершинную часть $\Gamma_\mu(p, q)$. Видно, что это тождество справедливо при любой калибровке фотонной функции, так как при его выводе замена переменных в континуальном интеграле затрагивала только спинорные поля.

Проследим теперь переход от кулоновой калибровки к лоренцевой на примере одноэлектронной функции:

$$G_R(x-y) = -i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_R \equiv \frac{\int \exp(iS) \psi(x) \bar{\psi}(y) \prod_x \delta(\text{div } \mathbf{A}) dAd\bar{\psi} d\psi}{\int \exp(iS) \prod_x \delta(\text{div } \mathbf{A}) dA d\bar{\psi} d\psi}. \quad (8.34)$$

Подставим в числитель и знаменатель правой части этой формулы интеграл $\int \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu - \square \lambda) d\lambda(x)$, который не зависит от $A_\mu(x)$, и сделаем не меняющее действия преобразование (8.20). При этом δ -функция $\delta(\partial_\mu A_\mu - \square \lambda)$ превращается в $\delta(\partial_\mu A_\mu)$, $\delta(\text{div } \mathbf{A})$ — в $\delta(\text{div } \mathbf{A} + \Delta \lambda)$. В числителе появляется множитель $\exp i\epsilon (\lambda(x) - \lambda(y))$, в котором можно заменить $\lambda(x)$ решением $c(x)$ уравнения

$$\Delta c(x) + \text{div } \mathbf{A}(x) = 0, \quad (8.35)$$

г е. функцией

$$\frac{1}{4\pi} \int |x-z|^{-1} \delta(x_0-z_0) \operatorname{div} \mathbf{A}(z) d^4z \equiv \int l_i(x-z) A_i(z) d^4z, \quad (8.36)$$

где

$$l_i(x-z) = \delta(x, -z) \frac{\partial}{\partial x_i} (4\pi |x-z|)^{-1}. \quad (8.37)$$

После этого интегралы по $\lambda(x)$ в числителе и знаменателе сокращаются. Получившаяся формула

$$G_R(x-y) = -i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \exp i e \int (l_i(x-z) - l_i(y-z)) A_i(z) d^4z \rangle_L \quad (8.38)$$

выражает функцию Грина в кулоновой калибровке после разложения по степеням e в виде ряда по функциям Грина:

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \prod_{k=1}^n A_{i_k}(z_k) \rangle_L$$

в лоренцевой калибровке.

§ 9. ПОЛЯ ЯНГА — МИЛЛСА

Теория поля Янга — Миллса [41] — простейший пример теории с неабелевой калибровочной группой.

Векторное поле Янга — Миллса, связанное с простой компактной группой Ли G , удобно описывать матрицами $B_\mu(x)$ со значениями в алгебре Ли этой группы:

$$B_\mu(x) = \sum_{a=1}^n b_\mu^a(x) \tau_a. \quad (9.1)$$

Здесь τ_a — линейно-независимые матрицы в присоединенном представлении алгебры Ли, нормированные условиями

$$\operatorname{tr} \tau_a \tau_b = -2\delta_{ab}, \quad (9.2)$$

n — число параметров группы; $b_\mu^a(x)$ — числовая функция с векторным индексом μ и «изотопическим» a . Как известно, в присоединенном представлении последний индекс можно использовать и для нумерации матричных элементов, так что

$$(B_\mu)_{ab} = (\tau_c)_{ab} b_\mu^c = t_{abc} b_\mu^c, \quad (9.3)$$

где t_{abc} — структурные константы группы, антисимметричные по всем трем индексам.

$$Z(x) = \frac{1}{8} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (9.4)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + \varepsilon [B_\mu, B_\nu] \quad (9.5)$$

инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$B_\mu \rightarrow \Omega B_\mu \Omega^{-1} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_\mu \Omega \Omega^{-1} \quad (9.6)$$

с матрицей Ω , действующей в присоединенном представлении группы.

При квантовании в формализме континуального интеграла оказываются удобными аналоги функционалов $F[A]$, используемых в § 8 для квантовой электродинамики. Здесь они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1[B] &= \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu(x)) \equiv \prod_x \prod_a \delta(\partial_\mu b_\mu^a(x)); \\ F_2[B] &= \prod_x \delta(\text{div} B(x)) \equiv \prod_x \prod_a \delta(\text{div} b^a(x)); \\ F_3[B] &= \exp\left(-\frac{i}{4d_l} \int \text{tr}(\partial_\mu B_\mu(x))^2 d^4 x\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2d_l} \int \sum_a (\partial_\mu b_\mu^a(x))^2 d^4 x\right), \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

функционалы F_1 и F_2 выделяют среди всех полей поля, удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{aligned} f_L[B] &= \partial_\mu B_\mu = 0 \quad \text{для } F_1; \\ f_R[B] &= \text{div} B = 0 \quad \text{для } F_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Каждое из этих уравнений матричное и представляет собой на самом деле n дополнительных условий (по числу параметров группы G).

Множитель Φ_1 , соответствующий функционалу F_1 , обозначим Δ_L . В континуальном интеграле этот множитель стоит перед δ -функционалом от $\partial_\mu B_\mu$, и поэтому достаточно знать его значение только для поперечных полей ($\partial_\mu B_\mu = 0$). В этом случае весь вклад в интеграл

$$\Delta_L^{-1}[B] = \int \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu^0(x)) d\Omega(x) \quad (9.9)$$

вносит окрестность единичного элемента, в которой можно сделать замену

$$\Omega(x) = 1 + \varepsilon u(x), \quad (9.10)$$

где $u(x)$ — элемент алгебры Ли, и оставить в $\partial_\mu B_\mu^0$ только линейные по u члены

$$\begin{aligned} \partial_\mu B_\mu^0 &= \partial_\mu (B_\mu + \varepsilon [u, B_\mu] + \partial_\mu u) = \\ &= \square u - \varepsilon [B_\mu, \partial_\mu u] \equiv \hat{A}u, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где $\square = \hat{A}_0$ — оператор Даламбера. Вместо матриц $u(x)$ введем столбец

$$u(x) = \sum_{a=1}^n \tau_a u_a(x), \quad (9.12)$$

на который оператор \hat{A} действует по правилу

$$\begin{aligned} (\hat{A}u)_a &= (\square u - \varepsilon [B_\mu, \partial_\mu u])_a \equiv (\square \delta_{ac} - \varepsilon (B_\mu)_{ac} \partial_\mu) u_c = \\ &= \square u_a - \varepsilon t_{abc} b_\mu^b \partial_\mu u_c. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Интеграл (9.9) можно записать в виде

$$\Delta_L^{-1} [B] = \int \prod_x \prod_a \delta((\hat{A}u)_a) du_a. \quad (9.14)$$

Формально $\Delta_L [B]$ есть определитель оператора \hat{A} . Выделив тривиальный (бесконечный) множитель $\det \square$, можно затем разложить логарифм $\Delta_L [B]$ в ряд по ε :

$$\begin{aligned} \ln \Delta_L [B] &= \ln (\det \hat{A} / \det \hat{A}_0) = \text{Sp} \ln (1 - \varepsilon \square^{-1} B_\mu \partial_\mu) = \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n} \int d^4 x_1, \dots, d^4 x_n \text{tr} (B_{\mu_1}(x_1), \dots, B_{\mu_n}(x_n)) \times \\ &\quad \times \partial_{\mu_1} D(x_1 - x_2), \dots, \partial_{\mu_n} D(x_n - x_1). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Здесь $D(x)$ — функция Грина оператора Даламбера (5.17). Символ Sp в (9.15) и далее означает след в операторном смысле в отличие от tr — следа матрицы.

Соответствующий множитель в кулоновой калибровке обозначим Δ_R . Аналогичные вычисления приводят к формуле

$$\begin{aligned} \ln \Delta_R [B] &= \text{Sp} \ln (1 - \varepsilon \Delta^{-1} B_i \partial_i) = \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n} \int d^4 x_1, \dots, d^4 x_n \text{tr} (B_{i_1}(x_1), \dots, B_{i_n}(x_n)) \times \\ &\quad \times \partial_{i_1} \tilde{D}(x_1 - x_2), \dots, \partial_{i_n} \tilde{D}(x_n - x_1), \end{aligned} \quad (9.16)$$

где

$$\tilde{D}(x) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} \exp i(k, x) = -\delta(x_0) (4\pi |x|)^{-1}. \quad (9.17)$$

Индексы i_1, \dots, i_n в (9.16) пробегает значения 1, 2, 3.

Множитель $\Phi_3 [B]$ дается формулой

$$\Phi_3^{-1} [B] = \int \exp \left(-\frac{i}{4d_L} \int \text{tr} (\partial_\mu B_\mu^\Omega(x))^2 d^4 x \right) \prod_x d\Omega(x). \quad (9.18)$$

Для правой части (9.18) не удастся получить замкнутое выражение, аналогичное формулам (9.15), (9.16), представляющим множители Δ_L , Δ_R в виде определителей, но это обстоятельство, как показано ниже, не мешает и в этом случае развить простую схему теории возмущений.

Построим сначала теорию возмущений в лоренцевой калибровке. Она возникает при разложении в ряд по ε функционала

$$\Delta_L [B] \exp (iS[B]) = \exp (iS + \ln \Delta_L [B]). \quad (9.19)$$

Выражение $\ln \Delta_L$ удобно интерпретировать как добавку к действию S . Член n -го порядка разложения $\ln \Delta_L$ в ряд по ε приведет к появлению в диаграммах вершины с n выходящими линиями. Явное выражение для этого члена, следующее из (9.15), подсказывает интерпретацию вершины как кольца с n выходящими линиями, по которому распространяется *фиктивная скалярная частица*, взаимодействующая с векторным полем по закону $\sim \varepsilon \text{tr} (\varphi B_\mu \partial_\mu \varphi)$. Этому утверждению можно придать точный смысл, если записать определитель в виде интеграла по антикоммутирующим переменным η^a , $\bar{\eta}^a$:

$$\begin{aligned} & \det (\square - \varepsilon B_\mu \partial_\mu) = \\ & = \int \exp \left(i \int L (B_\mu, \bar{\eta}, \eta) d^4 x \right) \prod_x \prod_a d\bar{\eta}^a(x) d\eta^a(x), \end{aligned} \quad (9.20)$$

где

$$\begin{aligned} L (B_\mu, \bar{\eta}, \eta) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \bar{\eta} (\square - \varepsilon B_\mu \partial_\mu) \eta = \\ &= \bar{\eta}^a \square \eta^a - \varepsilon t_{abc} b_\mu^c \bar{\eta}^a \partial_\mu \eta^b. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Формула (9.20) является бесконечномерным аналогом (5.52). Она показывает, что нашу систему можно рассматривать как систему бозе-полей $b_\mu^a(x)$, взаимодействующих друг с другом и со скалярными ферми-полями $\eta^a(x)$, $\bar{\eta}^a(x)$.

Построение теории возмущений и диаграммной техники во многом аналогично наменченному в § 8 для квантовой электродинамики. Элементы диаграммной техники в теории Янга—Миллса — линии двух сортов, соответствующие поперечным векторным и фиктивным скалярным частицам, а также вершины, описывающие взаимодействие векторных частиц со скалярными и друг с другом.

Будем изображать векторные частицы сплошными, а фиктивные скалярные частицы — пунктирными линиями. Элементы диаграмм — вершины и линии вида

$$\left. \begin{array}{c}
 \frac{\mu a \quad \rho \quad \nu b}{G_{\mu\nu}^{ab}(\rho)} \qquad \frac{a \quad \rho \quad b}{G^{ab}(\rho)} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \rho_1 \mu a \\ \rho_2 \nu b \\ \rho_3 \rho c \end{array} & \begin{array}{c} \rho_1 \mu a \\ \rho_2 \nu b \\ \rho_3 \rho c \\ \rho_4 \rho c \end{array} & \begin{array}{c} \rho_1 \mu a \\ \rho_2 b \\ \rho_3 c \end{array} \\
 \sqrt{\mu, \nu \rho}^{abc} & \sqrt{\mu, \nu \rho c}^{abcd} & \sqrt{\mu}^{abc}
 \end{array}
 \end{array} \right\} (9.22)$$

Выпишем выражения для изображенных в (9.22) элементов диаграмм в импульсном представлении:

$$\left. \begin{array}{l}
 G_{\mu\nu}^{ab}(\rho) = -\delta_{ab} (p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) (p^2 + i0)^{-2}; \\
 G^{ab}(\rho) = -\delta_{ab} (p^2 + i0)^{-1}; \\
 V_{\mu, \nu\rho}^{abc} = i\varepsilon t_{abc} (p_{i\nu} \delta_{\mu\rho} - p_{i\rho} \delta_{\mu\nu}); \\
 V_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} = \varepsilon^2 t_{abc} t_{cde} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}); \\
 V_{\mu}^{abc} = \frac{i\varepsilon}{2} t_{abc} (p_3 - p_2)_\mu.
 \end{array} \right\} (9.23)$$

Чтобы найти вклад данной диаграммы, необходимо произведение выражений, соответствующих всем ее элементам, проинтегрировать по независимым 4-импульсам, просуммировать по независимым дискретным индексам и умножить результат на

$$r^{-1} \left(\frac{i}{(2\pi)^4} \right)^{l-v-1} (-2)^s, \quad (9.24)$$

где v — число вершин диаграммы; l — число ее внутренних линий; s — число замкнутых циклов фиктивных скалярных частиц; r — порядок группы симметрии диаграммы. Заметим, что $l - v - 1 = c$ — число независимых контуров диаграммы.

Покажем, что в развитой теории возмущений поперечную функцию Грина $G_{\mu\nu}^{ab}$ можно без изменения физических результатов заменить функцией с произвольной продольной частью d_i :

$$G_{\mu\nu}^{ab}(d_i, \rho) = -\delta_{ab} (p^2 + i0)^{-2} (p^2 \delta_{\mu\nu} + (d_i - 1) p_\mu p_\nu). \quad (9.25)$$

Первоначальное доказательство этого факта, данное де-Виттом [13], было довольно громоздким. Приведем здесь доказательство, предложенное Хоофтом [18]. Рассмотрим семейство калибровочных условий вида

$$\partial_\mu B_\mu(x) - c(x) = 0. \quad (9.26)$$

Среднее от калибровочно-инвариантного функционала X по полям с калибровочным условием (9.26) записывается в виде

$$\langle X \rangle = \frac{\int X[B] \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c) dB}{\int \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c) dB}, \quad (9.27)$$

где $\Delta_c[B]$ — множитель, соответствующий условию (9.26). Числитель и знаменатель в правой части (9.27) не зависят от c . Используя это обстоятельство, перепишем выражение (9.27) в виде

$$\langle X \rangle =$$

$$= \frac{\int \exp\left(\frac{i}{4d_l} \int \text{tr } c^2 d^4 x\right) dc \int X[B] \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c) dB}{\int \exp\left(\frac{i}{4d_l} \int \text{tr } c^2 d^4 x\right) dc \int \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c) dB}, \quad (9.28)$$

т. е. как частное континуальных интегралов по переменной $c(x) = \sum_a \tau_a c^a(x)$. Проинтегрировав по c , получим для среднего $\langle X \rangle$ выражение

$$\langle X \rangle =$$

$$= \frac{\int X[B] \tilde{\Delta}[B] \exp\left(i\left(S[B] + \frac{1}{4d_l} \int \text{tr}(\partial_\mu B_\mu)^2 d^4 x\right)\right) \prod_x dB}{\int \tilde{\Delta}[B] \exp\left(i\left(S[B] + \frac{1}{4d_l} \int \text{tr}(\partial_\mu B_\mu)^2 d^4 x\right)\right) \prod_x dB}. \quad (9.29)$$

Множитель

$$\tilde{\Delta}[B] = \Delta_c[B] |_{c=\partial_\mu B_\mu} \quad (9.30)$$

определяется равенством

$$\Delta_c^{-1}[B] = \int \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu^0 - c) d\Omega(x). \quad (9.31)$$

Вычисление множителя $\Delta_c[B]$ аналогично вычислению Δ_L (9.9). Весь вклад в интеграл (9.31) вносит окрестность единичного элемента, в которой можно сделать замену (9.10) и оставить в $(\partial_\mu B_\mu - c)$ только линейные по u члены:

$$\partial_\mu B_\mu^0 - c = \partial_\mu (\varepsilon[u, B_\mu] + \partial_\mu u) = \tilde{A}u. \quad (9.32)$$

Оператор \tilde{A} действует на столбец $u(x)$, определенный выше формулой (9.12), по правилу

$$(\tilde{A}u)_a = \square u_a - e t_{abc} \partial_\mu (b_\mu^b u_c). \quad (9.33)$$

Оператор \hat{A} является сопряженным по отношению к \tilde{A} , поэтому определители операторов \hat{A} и \tilde{A} совпадают:

$$\tilde{\Delta}[B] = \det \tilde{A} = \det \hat{A} = \Delta_L[B]. \quad (9.34)$$

Вычисление $\langle X \rangle$ как частного континуальных интегралов (9.29) по теории возмущений приводит к диаграммной технике с функцией Грина векторной частицы Янга—Миллса (9.25). Вклад множителя $\Delta_L[B] = \tilde{\Delta}[B]$ по-прежнему интерпретируется как вклад дополнительных диаграмм, описывающих взаимодействие векторных частиц с фиктивными скалярными частицами.

Развитая теория возмущений — не единственно возможная. Другая форма теории возмущений и диаграммной техники возникает в так называемом *формализме первого порядка*. Этот формализм получается, если записать лагранжиан (9.4) в виде

$$L(x) = -\frac{1}{8} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} (\partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + \varepsilon[B_\mu, B_\nu]) \quad (9.35)$$

и интегрировать по $B_\mu, F_{\mu\nu}$ как по независимым переменным. Термин «формализм первого порядка» означает, что знак производной входит в лагранжиан (9.35) в степени не выше первой.

Используя лоренцеву калибровку, получим континуальный интеграл вида

$$\int \exp(iS[B, F]) \Delta_L[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu) dB dF, \quad (9.36)$$

где выражение

$$dB(x) dF(x) = \prod_a \left(\prod_\mu db_\mu^a(x) \right) \prod_{\mu < \nu} df_{\mu\nu}^a(x), \quad (9.37)$$

так же как и $dB(x)$, калибровочно-инвариантно.

Если под знаком интеграла (9.36) провести разложение функционала $\Delta_L[B] \exp(iS[B, F])$ в ряд по ε , то получим новый вариант диаграммной теории возмущений с тремя линиями, соответствующими функциям $\langle BB \rangle$, $\langle BF \rangle$, $\langle FF \rangle$, и одной вершиной, описываю-

щей трехлинейное взаимодействие $\epsilon F \bar{V} V$. Элементы диаграммной техники имеют вид

$$\left. \begin{array}{ccc}
 \overline{\mu a \quad \rho \quad \nu b} & \overline{\mu \nu a \quad \rho b} & \overline{\mu \nu a \quad \rho \quad \rho b b} \\
 G_{\mu \nu}^{ab}(\rho) & G_{\mu \nu, \rho}^{ab}(\rho) & G_{\mu \nu, \rho b}^{ab}(\rho) \\
 \rho_1 \mu \nu a = \begin{array}{l} \rho_2 \mu b \\ \rho_3 \nu c \end{array} & \sqrt{\mu \nu}^{abc} & \\
 \end{array} \right\} (9.38)$$

где поле V изображено одинарной линией, поле F — двойной. Выражения, соответствующие элементам (9.38), даются формулами:

$$\left. \begin{array}{l}
 G_{\mu \nu}^{ab} = \delta_{ab} (-p^2 \delta_{\mu \nu} + p_\mu p_\nu) (p^2 + i0)^{-2}; \\
 G_{\mu \nu, \rho}^{ab} = i \delta_{ab} (p_\nu \delta_{\mu \rho} - p_\mu \delta_{\nu \rho}) (p^2 + i0)^{-1}; \\
 G_{\mu \nu \rho \sigma}^{abcd} = \delta_{ab} (\delta_{\mu \rho} \delta_{\nu \sigma} - \sigma_{\mu \sigma} \delta_{\nu \rho}) - (p^2 + i0)^{-1} \times \\
 \quad \times (\delta_{\mu \rho} p_\nu p_\sigma + \delta_{\nu \sigma} p_\mu p_\rho - \delta_{\mu \sigma} p_\nu p_\rho - \delta_{\nu \rho} p_\mu p_\sigma); \\
 V_{\mu \nu}^{abc} = \epsilon t_{abc}.
 \end{array} \right\} (9.39)$$

Линии и вершины, описывающие распространение фиктивных скалярных частиц и их взаимодействие с векторными, остаются такими же, как и в формализме второго порядка, так как множитель Δ_L , зависящий только от V , но не от F , остается тем же самым.

Формализм первого порядка удобен для перехода к каноническому квантованию. Рассмотрим такой переход, исходя из интеграла по V_μ в кулоновой калибровке с источниками, являющимися производящим функционалом для функций Грина:

$$\begin{aligned}
 Z[\eta] = & \frac{\int \exp \left\{ iS[B, F] + i \int \left(\eta_{\mu a} b_{\mu a} + \frac{1}{2} \eta_{\mu \nu a} f_{\mu \nu a} \right) d^4 x \right\} \Delta_R[B]}{\int \exp(iS[B, F]) \Delta_R[B]} \dots \\
 & \dots \frac{\prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{B}) d\mathbf{B} dF}{\prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{B}) d\mathbf{B} dF} \dots
 \end{aligned} \quad (9.40)$$

Как и в электродинамике, возьмем в качестве динамических переменных поперечные в трехмерном смысле составляющие полей V_i, F_{0i} ($i = 1, 2, 3$). Будем считать, что источники стоят только при выбранных динамических переменных, т. е. удовлетворяются условия

$$\eta_{0a} = \eta_{i h a} = \partial_i \eta_{0i a} = \partial_i \eta_{i a} = 0. \quad (9.41)$$

В трехмерных обозначениях лагранжиан (9.35) принимает вид

$$L(x) = \text{tr} \left\{ -\frac{1}{8} F_{ik} F_{ik} + \frac{1}{4} F_{0i} F_{0i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} F_{ik} (\partial_k B_i - \partial_i B_k + \varepsilon [B_i, B_k]) - \frac{1}{2} F_{0i} \partial_0 B_i - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} B_0 (\partial_i F_{0i} - \varepsilon [B_i, F_{0i}]) \right\}. \quad (9.42)$$

Так как при B_0 , F_{ik} нет источников, в (9.40) можно проинтегрировать по этим переменным, что сводится к появлению δ -функционала

$$\prod_x \delta(\partial_i F_{0i} - \varepsilon [B_i, F_{0i}]) \quad (9.43)$$

и к замене F_{ik} на

$$H_{ik} \equiv \partial_k B_i - \partial_i B_k + \varepsilon [B_i, B_k] \quad (9.44)$$

в интеграле по оставшимся переменным B_i , F_{0i} . Подставим в интеграл (9.40) множитель

$$\int_x \text{П}\delta (\Delta c + \partial_i F_{0i}) dc(x), \quad (9.45)$$

не зависящий на самом деле от F_{0i} , и сделаем затем сдвиг $F_{0i} \rightarrow F_{0i} - \partial_i c$. При этом функционал $\text{П}\delta (\Delta c + \partial_i F_{0i})$ превращается в $\text{П}\delta (\partial_i F_{0i} x)$, а $\text{П}\delta (\partial_i F_{0i} - \varepsilon [B_i, F_{0i}])$ — в выражение $\text{П}\delta (\Delta c - \partial_i F_{0i} - \varepsilon [B_i, \partial_i c] + \varepsilon [B_i, F_{0i}])$, равное $\text{П}\delta (\Delta c - \varepsilon [B_i, \partial_i c] + \varepsilon [B_i, F_{0i}])$, так как $\partial_i F_{0i} = 0$.

Пусть $c_0(x)$ — решение уравнения

$$\Delta c - \varepsilon [B_i, \partial_i c] = -\varepsilon [B_i, F_{0i}], \quad (9.46)$$

выражающееся через зависящую от B функцию Грина

$$c_0(x) = -\varepsilon \int D(x, y; B) [B_i(y), F_{0i}(y)] d^3 y. \quad (9.47)$$

После сдвига $c \rightarrow c + c_0$ возникает функционал $\text{П}\delta (\Delta c - \varepsilon [B_i, \partial_i c])$, и функцию $c(x)$ можно положить равной нулю везде, кроме аргумента этого δ -функционала. Интеграл

$$\int_x \text{П}\delta (\Delta c - \varepsilon [B_i, \partial_i c]) dc(x) \quad (9.48)$$

сокращается с множителем $\Delta_R[B]$. В итоге функционал (9.40) приводит к виду

$$Z[\eta] = \frac{\int \exp \{ iS[B_i, F_{0i}] + i \int (\eta_i^a b_i^a + \eta_{0i}^a f_{0i}^a) d^4 x \prod_x \delta(\partial_i B_i) \delta(\partial_i F_{0i}) dB dF \}}{\int_x \exp \{ iS[B_i, F_{0i}] \} \prod_x \delta(\partial_i B_i) \delta(\partial_i F_{0i}) dB dF}, \quad (9.49)$$

где

$$S [B_i, F_{0i}] = \int dx_0 \left(\int f_{0i}^a \partial_0 b_i^a d^3 x - H \right); \quad (9.50)$$

$$H = \int d^3 x \left(\frac{1}{4} h_{ik}^a h_{ik}^a + \frac{1}{2} f_{0i}^a f_{0i}^a + \frac{1}{2} \partial_i c_0^a \partial_i c_0^a \right). \quad (9.51)$$

В этих формулах $S [B_i, F_{0i}]$ — действие, соответствующее гамильтониану H , где поперечные поля b_i, f_{0i} имеют смысл канонически сопряженных координат и импульсов.

Как показано в § 5 на примере скалярного поля, формализм континуального интеграла по каноническим сопряженным координатам и импульсам эквивалентен каноническому квантованию. В применении к системе с гамильтонианом (9.51) каноническое квантование сводится к замене функций b_i^a, f_{0i}^b , через которые выражаются h_{ik}^a, c_0^a , операторами $\hat{b}_i^a(x), \hat{f}_{0i}^b(y)$ с перестановочными соотношениями

$$\begin{aligned} [\hat{b}_i^a(x), \hat{f}_{0j}^b(y)] &= i\delta_{ab} \delta_{ij}^{\text{tr}}(x-y) \equiv \\ &\equiv \frac{i\delta_{ab}}{(2\pi)^3} \int d^3 k \exp i(\mathbf{k}, \mathbf{x}-\mathbf{y}) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right). \end{aligned} \quad (9.52)$$

Гамильтониан (9.51) становится самосопряженным и положительно определенным оператором энергии. Такое квантование поля Янга — Миллса было предложено Швингером [42]. Было показано, как формализм континуального интеграла приводит к каноническому квантованию Швингера. Подчеркнем, что наличие множителя $\Delta_R [B]$ в исходном интеграле (9.40) было существенно для приведения его к явно гамильтонову виду.

Рассмотрим построение S -матрицы для поля Янга—Миллса. Естественно исходить из континуального интеграла в кулоновой калибровке. Именно в этой калибровке интеграл приводится к интегралу по каноническим переменным. Унитарность S -матрицы здесь очевидна, во всяком случае при вычислении ее элементов по теории возмущений.

Элемент S -матрицы, описывающий превращение m входящих частиц в $(n - m)$ выходящих, выражается через преобразование Фурье $G^{a_1, \dots, a_n}(p_1, \dots, p_n)$ функции Грина в кулоновой калибровке

$$\begin{aligned} &\langle b_{i_1}^{a_1}(x_1), \dots, b_{i_n}^{a_n}(x_n) \rangle_R \equiv \\ &\equiv \frac{\int \exp(iS) \Delta_R [B] b_{i_1}^{a_1}(x_1), \dots, b_{i_n}^{a_n}(x_n) \prod_x \delta(\text{div } \mathbf{B}(x)) d\mathbf{B}(x)}{\int \exp(iS) \Delta_R [B] \prod_x \delta(\text{div } \mathbf{B}(x)) d\mathbf{B}(x)} \end{aligned} \quad (9.53)$$

формулой

$$S_{i_1, \dots, i_n}^{a_1, \dots, a_n}(p_1, \dots, p_n) = \\ = \lim_{p_k^2 \rightarrow 0} \left(\prod_{k=1}^n Z_R^{-1/2} u_k(\hat{e}_k)_{i_k j_k} \right) G_{i_1, \dots, i_n}^{a_1, \dots, a_n}(p_1, \dots, p_n), \quad (9.54)$$

где

$$(\hat{e}_k)_{ij} = \delta_{ij} - \frac{(p_k)_i (p_k)_j}{p_k^2} \quad (9.55)$$

есть оператор (поперечный) поляризации, а множители u_k равны $p_k^2 \theta(p_k^0) |2p_k^0|^{-1/2} (2\pi)^{-3/2}$ для входящих частиц и $p_k^2 \theta(-p_k^0) |2p_k^0|^{-1/2} (2\pi)^{-3/2}$ для выходящих. Наконец, Z_R есть вычет при $p^2 \rightarrow 0$ полной одночастичной функции Грина в кулоновой калибровке. Предположим, что при $p^2 \rightarrow 0$ одночастичная функция Грина имеет вид

$$G_{ij}^{ab} = \frac{Z_R \delta_{ab}}{p^2 + i0} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2} \right). \quad (9.56)$$

Выражения для элементов S -матрицы в кулоновой калибровке не являются явно релятивистски-инвариантными. Преобразуем их, перейдя к релятивистской лоренцевой калибровке.

Вставим в континуальные интегралы в числителе и знаменателе множитель

$$\Delta_L [B] \int_x \prod \delta(\partial_\mu B_\mu^\Omega) d\Omega(x), \quad (9.57)$$

равный единице. Сделаем затем сдвиг $B^\Omega \rightarrow B$; $B \rightarrow B^{\Omega^{-1}}$. Получится интеграл по калибровочной группе

$$\int (B^{\Omega^{-1}}(x_1))_{i_1}^{a_1}, \dots, (B^{\Omega^{-1}}(x_n))_{i_n}^{a_n} \prod_x \delta(\text{div } B^{\Omega^{-1}}) d\Omega(x), \quad (9.58)$$

из которого можно вынести произведение $B^{\Omega^{-1}}(x_1)_{i_1}^{a_1}, \dots, B^{\Omega^{-1}}(x_n)_{i_n}^{a_n}$.

Оставшийся интеграл по Ω сокращается с $\Delta_R[B]$.

Выражение (9.53) для функции Грина принимает вид

$$\frac{\int \exp(iS) \Delta_L [B] (B^{\Omega^{-1}}(x_1))_{i_1}^{a_1}, \dots, (B^{\Omega^{-1}}(x_n))_{i_n}^{a_n} \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu) dB}{\int \exp(iS) \Delta_L [B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu) dB}. \quad (9.59)$$

В (9.59) матрица Ω^{-1} выбирается из условия трехмерной поперечности поля $B^{\Omega^{-1}} (\text{div } B^{\Omega^{-1}} = 0)$. При разложении $B^{\Omega^{-1}}$ по степеням ϵ возникает ряд

$$B^{\Omega^{-1}}(x) = B^{\text{tr}} - \frac{\epsilon}{2} [\Delta^{-1} \text{div } B, B + B^{\text{tr}}]^{\text{tr}} + \dots \quad (9.60)$$

Здесь приведены два первых члена разложения, а индекс tr означает трехмерно-поперечную часть соответствующего вектора. Интеграл (9.59) можно вычислить по теории возмущений, если предварительно разложить функции $B^{\Omega^{-1}}$ в ряды (9.60), сопоставив каждому члену разложения, зависящему от произведения m полей B , вершину с m выходящими из нее линиями.

Переход к лоренцевой калибровке для функций Грина оказывается достаточно простым. Однако при построении S -матрицы достаточно знать функции Грина только на массовой оболочке (все $p_k^2 \rightarrow 0$). При этом множители u_k исчезают, а переход к лоренцевой калибровке сводится к вставкам во внешние концы:

$$\begin{array}{c}
 \overline{G_R} = \text{---} \sigma \text{---} \sigma \\
 \\
 \begin{array}{c} G_R \\ \diagup \\ \text{---} R \text{---} \\ \diagdown \\ G_R \end{array} = \begin{array}{c} \sigma \text{---} G_L \text{---} \sigma \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} L \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \sigma \text{---} G_L \text{---} \sigma \end{array}
 \end{array} \quad (9.61)$$

Вклад в эту вставку (обозначим его σ) дают все поддиаграммы, начинающиеся с вершины, порожденной разложением (9.60), и заканчивающиеся вершиной, соединенной с остальной частью диаграммы только одной линией. Именно в диаграммах указанной структуры обращение в нуль множителей u_k компенсируется полюсами одночастичных функций G_L в лоренцевой калибровке (с вычетами Z_L). Вклад всех остальных диаграмм исчезает при выходе на массовую оболочку, а функция Грина (9.59) в кулоновой калибровке отличается от соответствующей функции в лоренцевой калибровке множителем σ^n . Из сравнения одночастичных функций [первое из диаграммных равенств (9.61)] следует, что $\sigma = (Z_R/Z_L)^{1/2}$, т. е. выражается через отношение вычетов. В результате оказывается, что на массовой оболочке можно перейти к функциям Грина в лоренцевой калибровке и Z_R заменить на Z_L , тем самым записав S -матричный элемент в явно лоренц-инвариантном виде.

В заключение этого параграфа рассмотрим поправки второго порядка теории возмущений и функции Грина. Они представляют интерес потому, что указывают на ситуацию, противоположную известной ситуации *нуль-заряда* в квантовой электродинамике [37].

Функция Грина фотона в поперечной калибровке при $k^2 \gg m^2$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu}^{tr} &= (k^2 + i0)^{-1} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) [k^2 + i0 - P]^{-1} \approx \\
 &\approx (k^2 + i0)^{-2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \left(-\frac{k^2}{m^2} \right) \right)^{-1}, \quad (9.62)
 \end{aligned}$$

если в качестве собственно энергетической части ограничиться однопетлевой диаграммой второго порядка, взяв ее асимптотику при $k^2 \gg m^2$. Приближение (9.62) содержит нефизический («призрачный») полюс при $(e^2/12\pi^2) \ln(-k^2/m^2) \approx 1$, возможное существование которого приводит к серьезным противоречиям с рядом общих положений теории [35, 37].

Для поля Янга—Миллса формула для функции Грина при $k^2 \gg m^2$

$$G_{\mu\nu} = (k^2 + i0)^{-2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \left(1 + \frac{13e^2}{16\pi^2} \ln\left(-\frac{k^2}{M^2}\right) \right)^{-1}, \quad (9.63)$$

где M^2 — перенормировочная постоянная, имеет перед логарифмическим членом в знаменателе знак +, и трудности с нефизическим полюсом и нуль-зарядом не возникают. Этот факт рассматривался в работах [43, 44]. Позднее было показано, что ситуация не меняется и при учете высших диаграмм теории возмущений.

Формулу (9.63) просто доказать в «формализме первого порядка», где необходимо вычислить следующие диаграммы:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{\mu\nu}^{ab} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} ; \\ \Sigma_{\mu\nu,\rho}^{ab} &= \text{---} \text{---} \text{---} ; \\ \Sigma_{\mu\nu,\rho\sigma}^{ab} &= \text{---} \text{---} \text{---} \end{aligned} \right\} \quad (9.64)$$

В этих диаграммах фигурируют внутренние линии трех типов для поля Янга—Миллса и пунктирные линии, соответствующие фиктивным скалярным частицам.

Выражения для собственно энергетических частей (9.63) вычисляются по сформулированным выше правилам и оказываются равными следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{\mu\nu}^{ab}(k) &= \frac{\delta_{ab} \varepsilon^2}{12\pi^2} \left[(\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \ln\left(-\frac{k^2}{k_0^2}\right) - (ak^2 + b) \delta_{\mu\nu} + ck_\mu k_\nu \right]; \\ \Sigma_{\mu\nu,\sigma}^{ab}(k) &= \frac{\delta_{ab} \varepsilon^2 3i}{16\pi^2} (k_\mu \delta_{\nu\sigma} - k_\nu \delta_{\mu\sigma}) \left(\ln\left(-\frac{k^2}{k_0^2}\right) + d \right); \\ \Sigma_{\mu\nu,\sigma}^{ab}(k) &= \frac{\delta_{ab} \varepsilon^2}{16\pi^2} \left\{ (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \left(\ln\left(-\frac{k^2}{k_0^2}\right) + e \right) + \frac{1}{2(k^2 + i0)} (k_\mu k_\rho \delta_{\nu\sigma} + k_\nu k_\sigma \delta_{\mu\rho} - k_\mu k_\sigma \delta_{\nu\rho} - k_\nu k_\rho \delta_{\mu\sigma}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9.65)$$

Здесь k_0 — некоторый фиксированный 4-импульс с $k_0^2 > 0$;

a, b, c, d, e — ренормировочные постоянные. На самом деле однозначно определены первые производные от $\Sigma_{\mu\nu, \rho\sigma}^{ab}(k)$, вторые от $\Sigma_{\mu\nu, \sigma}^{ab}(k)$ и третьи от $\Sigma_{\mu\nu}^{ab}(k)$. Для поперечности $\Sigma_{\mu\nu}^{ab}(k)$ необходимо $b = 0$, $a = -c$. Зная собственно энергетические части (9.65), вычислим функцию Грина во втором порядке теории возмущений по формуле

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{ab} &= G_{\mu\sigma}^{ac} \Sigma_{\sigma\rho}^{cd} G_{\rho\nu}^{db} + G_{\mu\sigma}^{ac} \Sigma_{\sigma, \rho\lambda}^{cd} G_{\rho\lambda, \nu}^{db} + \\ &+ G_{\mu, \rho\lambda}^{ac} \Sigma_{\rho\nu, \sigma}^{cd} G_{\sigma\nu}^{db} + G_{\mu, \rho\lambda}^{ac} \Sigma_{\rho\lambda, \sigma\tau}^{cd} G_{\sigma\tau, \nu}^{db} = \\ &= (k^2 + i0)^{-2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \left[1 - \frac{13e^2}{16\pi^2} \left(\ln \left(-\frac{k^2}{k_0^2} \right) + f \right) \right] \approx \\ &\approx (k^2 + i0)^{-2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \left[1 + \frac{13e^2}{16\pi^2} \left(\ln \left(-\frac{k^2}{k_0^2} \right) + f \right) \right]^{-1} \quad (9.66) \end{aligned}$$

где ренормировочная константа f есть линейная комбинация a, d, e ($f = a - d - e$). Функция Грина $G_{\mu\nu, \sigma}^{ab}(k)$ и собственно энергетическая часть $\Sigma_{\mu\nu, \sigma}^{ab}(k)$ отличаются знаком от соответственно $G_{\sigma, \mu\nu}^{ab}(k)$, $\Sigma_{\sigma, \mu\nu}^{ab}(k)$. Формула (9.63) доказана.

§ 10. КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Как уже упоминалось во введении, при построении квантовой теории тяготения учитывается, что гравитационное поле может стать естественным «физическим регулятором», устраняющим бесконечности из квантовой теории поля. Гравитационное поле можно рассматривать как частный случай калибровочного поля, а его квантование осуществлять по общей схеме квантования калибровочных полей. Калибровочные преобразования — это координатные преобразования, не затрагивающие пространственной бесконечности, а группа симметрии — группа Пуанкаре.

Особенности квантования гравитационного поля связаны в первую очередь с его самодействием. Поэтому будем рассматривать главным образом «свободное» самодействующее гравитационное поле.

Среди различных способов параметризации гравитационного поля наиболее распространенными являются следующие два: метрический тензор и подвижный репер (тетрады). Приведем их формулировку.

В формализме метрического тензора гравитационное поле описывается потенциалами $g_{\mu\nu}(x)$ и символами Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$. Последние можно считать как независимыми динамическими величинами (формализм Палатини), так и функциями $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (10.1)$$

Контравариантная $g^{\mu\nu}$ -матрица обратна $g_{\mu\nu}$, g — определитель матрицы $g_{\mu\nu}$.

Рассмотрим только асимптотически плоские поля. В этом случае многообразие пространства — времени, топологически эквивалентное четырехмерному евклидову пространству, может быть параметризовано глобальными координатами x_μ ($-\infty < x_\mu < +\infty$, $\mu = 0, 1, 2, 3$). Эти координаты будем считать согласованными с условиями на пространственной бесконечности, так что

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right); \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (10.2)$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$; $\eta_{\mu\nu}$ — тензор Минковского. Здесь используется сигнатура $(+ - - -)$.

Функционал действия, имеющий вид

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \left[-\Gamma_{\mu\rho}^\rho \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma) \right] d^4 x, \quad (10.3)$$

где κ — константа Ньютона, инвариантен по отношению к группе координатных преобразований, действующей на величины $g^{\mu\nu}$, $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ по правилам

$$\left. \begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= -\eta^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \partial_\lambda \eta^\lambda + g^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu; \\ g \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= -\eta^\lambda \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \partial_\nu \eta^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \partial_\mu \eta^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \eta^\rho. \end{aligned} \right\} (10.4)$$

Здесь выписаны формулы инфинитезимальных преобразований; η^μ — бесконечно малые компоненты векторного поля, порождающего координатные преобразования

$$\delta x^\mu = \eta^\mu(x). \quad (10.5)$$

Варьирование действия (10.3) по $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ приводит к уравнениям, решения которых — функции (10.1). В этом смысле $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ можно считать независимыми переменными.

При подстановке в (10.3) явного выражения (10.1) символов Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ через метрический тензор действие приобретает вид

$$S = \frac{1}{4\kappa^2} \int \left(h^{\rho\sigma} \partial_\rho h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} \partial_\rho h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + \frac{1}{4} h^{\rho\sigma} \partial_\rho \ln h \partial_\sigma \ln h \right) d^4 x, \quad (10.6)$$

где для удобства используется контравариантная плоскость

$$h^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad h = \det h^{\mu\nu}. \quad (10.7)$$

В формализме подвижного репера гравитационное поле описывается компонентами репера $e^{\mu a}(x)$ и коэффициентами кручения $\omega_{\mu, ab}(x) = -\omega_{\mu, ba}(x)$. Набор $e^{\mu a}(x)$ образует матрицу с положительным определителем $e(x)$. Функционал действия

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int [\omega_{\mu ab} \partial_{\mu} (e^{-1} e^{\mu a} e^{\nu b}) - \omega_{\mu ab} \partial_{\nu} (e^{-1} e^{\mu a} e^{\nu b}) + e^{-1} e^{\mu a} e^{\nu b} (\omega_{\mu ac} \omega_{\nu b}^c - \omega_{\nu ac} \omega_{\mu b}^c)] \quad (10.8)$$

инвариантен по отношению к координатным преобразованиям

$$\left. \begin{aligned} \delta e^{\mu a} &= -\eta^{\lambda} \partial_{\lambda} e^{\mu a} + e^{\lambda a} \partial_{\lambda} \eta^{\mu}; \\ \delta \omega_{\mu ab} &= -\eta^{\lambda} \partial_{\lambda} \omega_{\mu ab} - \omega_{\lambda ab} \partial_{\mu} \eta^{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

и по отношению к локальным лоренцевым вращениям

$$\left. \begin{aligned} \delta e^{\mu a} &= \eta_b^a e^{\mu b}, \\ \delta \omega_{\mu ab} &= -\eta_a^c \omega_{\mu cb} + \eta_b^c \omega_{\mu ac} + \partial_{\mu} \eta_{ab}. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

Варьирование S по ω приводит к уравнениям, которые позволяют явно выразить ω через e . Решение удобно записать в виде

$$\omega_{\mu ab} = e_{\mu}^c \omega_{cab} \equiv \frac{1}{2} e_{\mu}^c (\Omega_{abc} + \Omega_{bca} - \Omega_{cab}), \quad (10.11)$$

где

$$\Omega_{abc} = e_{\mu a} \Omega_{bc}^{\mu} \equiv e_{\mu a} (e_b^{\nu} \partial_{\nu} e_c^{\mu} - e_c^{\nu} \partial_{\nu} e_b^{\mu}).$$

Можно считать, что это уже сделано, так что S — функционал только переменных $e^{\mu a}$.

О формализме первого порядка говорят, если переменные $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ (или $e^{\mu a}$ и $\omega_{\mu, ab}$) считаются независимыми. Если же Γ выражены через g , а e — через ω , то говорят о формализме второго порядка.

Описание свободного гравитационного поля в терминах $g^{\mu\nu}$ и $e^{\mu a}$ эквивалентно. Различное число компонент — 10 в первом случае и 16 во втором — компенсируется различием в калибровочной группе, параметризуемой четырьмя функциями в первом случае и десятью во втором. Формализм подвижного репера удобен для описания взаимодействия со спинорным полем.

Эквивалентность формализмов первого и второго порядков может исчезать при включении взаимодействий с другими полями. Геометрически формула (10.11) определяет связность без кручения. Минимальное взаимодействие гравитационного поля со спинорным в формализме первого порядка приводит к появлению кручения [45].

Дальнейшее изложение в этой главе будет проведено в основном на примере тензорного формализма второго порядка.

Координатные преобразования метрического тензора образуют неабелеву калибровочную группу, зависящую от четырех произ-

вольных функций (формула (10.4) дает инфинитезимальные преобразования]. Поэтому, согласно общей схеме квантования калибровочных полей, при квантовании системы с действием S надо интегрировать функционал $\exp iS$ по поверхности в многообразии всех полей, заданной четырьмя уравнениями. В качестве таких уравнений удобно взять условия гармоничности Де-Дондера—Фока

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = l^\mu(x), \quad (10.12)$$

где $l^\mu(x)$ — заданное векторное поле. Произвол в выборе $l^\mu(x)$ будет удобен для формальных преобразований. Условия гармоничности (10.12) являются аналогом лоренцевой калибровки в электродинамике и теории Янга-Миллса.

Условия (10.12) не общековариантны и именно поэтому могут служить для параметризации классов. Аналог уравнения $f(A^a) = 0$ представляет собой сложное нелинейное уравнение для параметров координатного преобразования, переводящего данную метрику в гармоническую. В рамках теории возмущений это уравнение имеет единственное решение.

Локальная калибровочно-инвариантная мера имеет вид

$$\prod_x g^{5/2}(x) \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu}(x) = \prod_x h^{-5/2}(x) \prod_{\mu \leq \nu} dh^{\mu\nu}(x). \quad (10.13)$$

Для доказательства калибровочной инвариантности меры (10.13) рассмотрим произведение \prod_x как произведение по «физическим» точкам. Преобразование метрического тензора в одной и той же «физической» точке дается формулами (10.4) без последнего члена, так что

$$\left. \begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \partial_\lambda \eta^\lambda + g^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu; \\ \delta g &= -2g \partial_\mu \eta^\mu. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \prod_{\mu \leq \nu} d(g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}) &= (1 + 5\partial_\mu \eta^\mu) \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu}; \\ g + \delta g &= (1 - 2\partial_\mu \eta^\mu) g. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Отсюда следует для фиксированной «физической» точки инвариантность выражения $g^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu}$, которая обеспечивает калибровочную инвариантность меры (10.13).

Имея параметризацию классов (10.12) и меру (10.13), получим следующее выражение для континуального интеграла:

$$\int \exp(iS) \Delta_h[g] \prod_x \left(\prod_{\mu} \delta(\partial_\nu g^{\mu\nu} - l^\mu) (g^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu}) \right), \quad (10.16)$$

где в соответствии с (7.8) функционал $\Delta_h [g]$ определяется уравнением

$$\Delta_h [g] \int \prod_x \left(\prod_\mu \delta(\partial_\nu (h^{\mu\nu})^a(x) - l^\mu(x)) \right) da(x) = 1 \quad (10.17)$$

и выражается через интеграл по калибровочной группе от δ -функционала.

Вычислим этот интеграл. Выражение $\Delta_h [g]$ входит в интеграл (10.16) только на поверхности, определяемой уравнениями (10.12). Для таких $g^{\mu\nu}$ полный вклад в интеграл в (10.17) дает бесконечно малая окрестность единичного элемента группы. В этой окрестности действие преобразований группы на $h^{\mu\nu}$ и меру на калибровочной группе da можно параметризовать введенными выше (10.5) инфинитезимальными функциями $\eta^\mu(x)$. В такой параметризации

$$\partial_\nu (h^{\mu\nu})^a - l^\mu = \partial_\nu (h^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu) - \partial_\lambda (\partial_\nu h^{\mu\nu} \eta^\lambda). \quad (10.18)$$

Мера da в единичном элементе имеет простой вид:

$$da = \prod_x \prod_\mu d\eta^\mu(x). \quad (10.19)$$

В результате данный интеграл записывается следующим образом:

$$\int \prod_{x, \mu} \delta(\partial_\nu (h^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu) - \partial_\lambda (\partial_\nu h^{\mu\nu} \eta^\lambda)) d\eta^\mu(x). \quad (10.20)$$

Формально этот интеграл равен $(\det \hat{A})^{-1}$, где \hat{A} — оператор, действующий на четверку функций η^μ по правилу

$$(\hat{A} \eta)^\mu = \partial_\nu (h^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu) - \partial_\lambda (\partial_\nu h^{\mu\nu} \eta^\lambda). \quad (10.21)$$

Таким образом, найдено, что

$$\Delta_h [g] = \det \hat{A}. \quad (10.22)$$

Для формулировки теории возмущений удобно представить $\det \hat{A}$ как гауссов интеграл по вспомогательным полям. Эти поля должны быть антикоммутирующими, так как интеграл должен давать первую степень определителя. Этим требованиям удовлетворяет выражение

$$\det \hat{A} = \int \exp \left(i \int \bar{\theta}^\mu(x) A_{\mu\nu} \theta^\nu(x) d^4x \right) \prod_{x, \mu} d\theta^\mu(x) d\bar{\theta}^\mu(x), \quad (10.23)$$

где $\theta^\mu(x)$, $\bar{\theta}^\mu(x)$ — антикоммутирующие классические поля, удовлетворяющие соотношению

$$\theta^\mu(x) \theta^\nu(y) + \theta^\nu(y) \theta^\mu(x) = 0 \quad (10.24)$$

и аналогичным соотношениям для $(\theta, \bar{\theta})$, $(\bar{\theta}, \bar{\theta})$.

Теперь интеграл (10.16) можно записать в виде

$$\int \exp \left\{ iS[g] + i \int \theta^\mu A_{\mu\nu}[g] \theta^\nu d^4 x \right\} \prod_x \left(\prod_\mu \delta(\partial_\nu h^{\mu\nu} - l^\mu) \times \right. \\ \left. \times \left(g^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \right) \prod_\mu d\theta^\mu d\bar{\theta}^\mu \right) \quad (10.25)$$

и непосредственно применить для формулировки теории возмущений. Однако преобразуем его еще, воспользовавшись произволом в выборе l^μ . Метод преобразования, предложенный Хоофтом [18], был объяснен выше, в § 9 на примере поля Янга—Миллса. Интеграл (10.25) не зависит от l^μ по самому построению. Поэтому можно усреднить его по l^μ с произвольным весом. Возьмем в качестве веса экспоненту от квадратичной формы полей

$$\exp \left(\frac{i\alpha}{4} \int l^\mu(x) \theta_{\mu\nu} l^\nu(x) d^4 x \right), \quad (10.26)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — тензор Минковского. Усреднение проводится явно и дает выражение

$$\int \exp \left\{ iS[g] + \frac{i\alpha}{4} \int \partial_\rho h^{\mu\rho} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma h^{\nu\sigma} d^4 x + \right. \\ \left. + i \int \bar{\theta}^\mu A_{\mu\nu} \theta^\nu d^4 x \right\} \prod_x g^{5/2} \left(\prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \right) \left(\prod_\mu d\theta^\mu d\bar{\theta}^\mu \right), \quad (10.27)$$

содержащее квадратичную форму продольных частей поля $h^{\mu\nu}$ с произвольным коэффициентом α . Из данного рассуждения следует, что интеграл от α не зависит.

Получим из выражения (10.27) диаграммную технику теории возмущений. Будем считать независимыми переменными в континуальном интеграле (10.27) $h^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$, а также θ^μ , $\bar{\theta}^\mu$. Положим

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \kappa u^{\mu\nu} \quad (10.28)$$

и будем считать $u^{\mu\nu}$ тензорным полем, описывающим гравитационное поле. Функционал действия принимает вид

$$S = S_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n S_{n+2}, \quad (10.29)$$

где S_2 — квадратичная форма; S_n — форма степени n и переменных $u^{\mu\nu}$ и их первых производных.

Линеаризация (10.12) во многих отношениях может быть неестественной. Она может нарушать сигнатуру метрического тензора, если $u^{\mu\nu}$ недостаточно мало. Существуют параметризации, свободные от этого недостатка, например экспоненциальная параметризация

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} [\exp(\kappa\Phi)]^{\lambda\nu}. \quad (10.30)$$

В принципе можно вычислить разложение (10.29) и в этой параметризации. Отметим, что квадратичная форма S_2 от выбора параметризации не зависит.

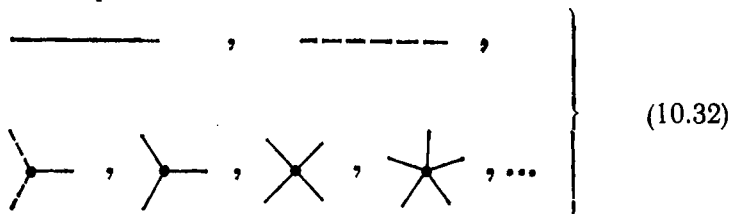
Вследствие инвариантности действия по отношению к преобразованиям (10.4) квадратичная форма

$$S_2 = \frac{1}{4} \int \left(-\eta_{\nu\sigma} \delta_\rho^\alpha \delta_\mu^\beta + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \eta^{\alpha\beta} \right) \partial_\alpha u^{\mu\nu} \partial_\beta u^{\rho\sigma} d^4 x \quad (10.31)$$

вырождена. Она не содержит продольных компонент. Введением вспомогательных фиктивных полей θ^μ , $\bar{\theta}^\mu$ мы добились того, что квадратичная форма в экспоненте подынтегрального выражения в (10.27) стала невырожденной. Тем самым однозначно определяются операторы, обратные к операторам квадратичных форм по $h^{\mu\nu}$, θ^μ , $\bar{\theta}^\mu$, т. е. пропагаторы частиц, соответствующие линиям диаграмм.

Будем изображать сплошной линией пропагатор гравитона $\langle h^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} \rangle$, а пунктирной — пропагатор фиктивной векторной частицы $\langle \theta^\mu \bar{\theta}^\nu \rangle$. Вершины диаграмм порождены формами S_{n+2} из разложения (10.29), а также формой $\int \bar{\theta}^\mu A_{\mu\nu} \theta^\nu d^4 x$, включающей трехлинейное взаимодействие $\sim \bar{\theta}^\mu \theta^\nu$ гравитона с фиктивной векторной частицей.

Элементы диаграммной техники имеют вид



Выражение, соответствующее пропагатору гравитона, дается формулой

$$G^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \frac{2}{k^2} (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} + (\alpha^{-1} - 2) \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) + \\ + \frac{2(1 - \alpha^{-1})}{k^4} (2k^\mu k^\nu \eta^{\rho\sigma} + 2k^\rho k^\sigma \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\rho \eta^{\nu\sigma} - \\ - k^\nu k^\rho \eta^{\mu\sigma} - k^\mu k^\sigma \eta^{\nu\rho} - k^\nu k^\sigma \eta^{\mu\rho}). \quad (10.33)$$

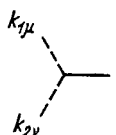
Формула содержит параметр α . Величина α^{-1} аналогична параметру d_L в квантовой электродинамике и теории Янга—Миллса и имеет смысл коэффициента при продольной части пропагатора.

Физические результаты не зависят от произвола в выборе константы α .

Пропагатор фиктивной векторной частицы имеет вид

$$G^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}/k^2, \quad (10.34)$$

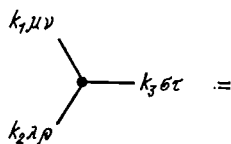
а вершина взаимодействия ее с гравитонами дается выражением



$$k_{3\rho\sigma} = \frac{\kappa}{2} [k_{1\nu} (\delta_\sigma^\mu k_{3\rho} + \delta_\rho^\mu k_{3\sigma}) - \delta_\nu^\mu (k_{1\rho} k_{2\sigma} + k_{1\sigma} k_{2\rho})], \quad (10.35)$$

причем $k_1 + k_2 + k_3 = 0$.

Приведем также явное выражение для вершины третьего порядка, соответствующее линейризации (10.28):



$$k_{1\mu\nu} k_{2\lambda\rho} k_3\sigma\tau =$$

$$= \frac{\kappa}{32} \left\{ \frac{k_1^2}{2} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\tau\nu} + \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\tau} + \right. \\ \left. + \eta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\mu\tau} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} \eta_{\lambda\tau} + \eta_{\nu\tau} \eta_{\mu\rho} \eta_{\lambda\sigma} + \eta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho} \eta_{\lambda\tau}) + \right. \\ \left. + k_1^2 \eta_{\mu\nu} (\eta_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\tau} + \eta_{\rho\tau} \eta_{\lambda\sigma}) + (k_{2\mu} k_{3\nu} + k_{2\nu} k_{3\mu}) \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\tau} + \right. \\ \left. + (k_{2\mu} k_{3\nu} + k_{2\nu} k_{3\mu}) (\eta_{\lambda\sigma} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\tau}) - k_\nu k_{1\tau} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\lambda\sigma}) - \right. \\ \left. - k_{1\nu} k_{1\sigma} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau}) - k_{1\mu} k_{1\tau} (\eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}) - \right. \\ \left. - k_{1\mu} k_{1\sigma} (\eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\nu\rho} \eta_{\lambda\tau}) - k_{2\nu} k_{3\rho} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\tau} - k_{2\nu} k_{3\lambda} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\tau} - \right. \\ \left. - k_{2\mu} k_{3\rho} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\nu\tau} - k_{2\mu} k_{3\lambda} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\nu\tau} - k_{2\nu} k_{3\rho} \eta_{\lambda\tau} \eta_{\mu\sigma} - \right. \\ \left. - k_{2\nu} k_{3\lambda} \eta_{\rho\tau} \eta_{\mu\sigma} - k_{2\mu} k_{3\rho} \eta_{\lambda\tau} \eta_{\nu\sigma} - k_{2\mu} k_{3\lambda} \eta_{\rho\tau} \eta_{\nu\sigma} + \right. \quad (10.36)$$

+ сумма по перестановкам пар (μ, ν) , (δ, τ) , (λ, ρ) .

Вклад от данной диаграммы получается, если произведение выражений вида (10.33)—(10.36), сопоставленных ее элементам, проинтегрировать по внутренним импульсам, а результат умножить на

$$r^{-1} (-1)^s \left(\frac{i}{(2\pi)^4} \right)^{l-v-1}, \quad (10.37)$$

где r — порядок группы симметрии диаграммы, l — число внутренних линий; v — число вершин; s — число петель фиктивных векторных частиц.

Соответствующие этим полям фиктивные векторные частицы являются фермионами, т. е. для них нарушается связь спина и статистики. Это показывает, что их роль сводится к вычитанию вкладов нефизических степеней свободы.

Помимо описанных диаграмм теория возмущений содержит вклады перенормировочного типа, пропорциональные степеням $\delta^{(4)}(0)$.

Эти вклады порождаются локальным множителем $\prod_x h^{-5/2}(x)$, участвующим в мере. При линеаризации (10.28) имеем

$$\prod_{x, \mu, \nu} dh^\mu = \prod_{x, \mu, \nu} du^{\mu\nu}. \quad (10.38)$$

Этот множитель следует учитывать при построении теории возмущений. Формально его роль сводится к появлению добавки к действию вида

$$\Delta S = \frac{5}{2} i \delta^{(4)}(0) \int \ln h(x) d^4 x, \quad (10.39)$$

которая порождает вершины, пропорциональные $\delta^{(4)}(0)$. Появление таких перенормировочных членов отмечается во многих работах, рассматривающих нелинейные теории (см. [46, 47]). Заметим, что этих членов не будет в экспоненциальной параметризации (10.30). В ней мера (10.13) с точностью до постоянного множителя имеет простой вид

$$\prod_x \prod_{\mu \leq \nu} d\Phi^{\mu\nu} \quad (10.40)$$

без всяких локальных добавок.

Таким образом, получена диаграммная теория возмущений в формализме континуального интеграла по полям $g^{\mu\nu}$ (или $h^{\mu\nu}$). В ряде случаев, в частности при переходе к гамильтоновой формулировке, более удобным оказывается формализм первого порядка. О формализме первого порядка говорят, если переменные $g^{\mu\nu}$ и $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ считаются независимыми. Мера в этом случае (с точностью до степеней объема) имеет вид

$$g^{15/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \prod_{\substack{\mu \leq \nu \\ \rho}} d\Gamma_{\mu\nu}^\rho = h^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dh^{\mu\nu} \prod_{\substack{\mu \leq \nu \\ \rho}} d\Gamma_{\mu\nu}^\rho. \quad (10.41)$$

Степень определителя g в мере такая, что после взятия гауссова интеграла по переменным Γ мера совпадает с (10.13).

Опишем возникающую в формализме первого порядка диаграммную технику. Элементы диаграмм, связанные с фиктивными векторными частицами, не изменяются. Помимо тензорного пропагатора $\langle uu \rangle$ (10.33) в схему теории возмущений входят пропагаторы $\langle u\gamma \rangle$ и $\langle \gamma\gamma \rangle$. Трем разным пропагаторам соответствуют линии

$$\left. \begin{aligned} \langle uu \rangle &= \text{---} ; \\ \langle u\gamma \rangle &= \text{---} \text{---} ; \\ \langle \gamma\gamma \rangle &= \text{---} \text{---} . \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

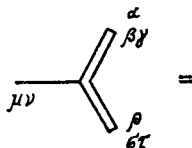
В импульсном представлении они имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 G_{\sigma\tau}^{\mu\nu\rho}(k) &= \frac{i}{2} (\eta_{\sigma\alpha} \delta_{\beta}^{\rho} k_{\tau} + \eta_{\tau\alpha} \delta_{\beta}^{\rho} k_{\sigma} - \eta_{\sigma\alpha} \eta_{\tau\beta} k^{\rho}) G^{\mu\nu, \alpha\beta}(k) \equiv \\
 &\equiv \Omega_{\sigma\tau, \alpha\beta}^{\rho}(k) G^{\alpha\beta, \mu\nu}(k); \\
 G_{\sigma\tau, \mu\nu}^{\rho\lambda}(k) &= 1/4 (\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\sigma}^{\lambda} \eta_{\nu\tau} + \delta_{\nu}^{\rho} \delta_{\sigma}^{\lambda} \eta_{\mu\tau} + \delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\tau}^{\lambda} \eta_{\nu\sigma} + \\
 &+ \delta_{\nu}^{\rho} \delta_{\tau}^{\lambda} \delta_{\mu\sigma}) - 1/6 (\delta_{\nu}^{\lambda} \delta_{\tau}^{\rho} \eta_{\mu\sigma} + \delta_{\mu}^{\lambda} \delta_{\tau}^{\rho} \eta_{\nu\sigma} + \delta_{\nu}^{\lambda} \delta_{\sigma}^{\rho} \eta_{\mu\tau} + \\
 &+ \delta_{\mu}^{\lambda} \delta_{\sigma}^{\rho} \eta_{\nu\tau}) + \Omega_{\mu\nu, \alpha\rho}^{\lambda}(k) \Omega_{\rho\tau, \gamma\delta}^{\sigma}(-k) G^{\alpha\beta, \gamma\delta}(k).
 \end{aligned} \right\} (10.43)$$

Единственная гравитонная вершина порождается трехлинейной формой

$$\frac{\kappa}{2} \int \mu^{\mu\nu} (\gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \delta_{\rho\nu}^{\sigma} - \gamma_{\mu\nu}^{\rho} \gamma_{\rho\sigma}^{\sigma}) d^4 x \quad (10.44)$$

и имеет выражение



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\kappa}{8} \{ 2 (\delta_{\mu}^{\sigma} \delta_{\nu}^{\tau} + \delta_{\nu}^{\sigma} \delta_{\mu}^{\tau}) (\delta_{\rho}^{\beta} \delta_{\alpha}^{\gamma} + \delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\rho}^{\gamma}) - \delta_{\mu}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\tau} \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\rho}^{\beta} - \\
 &- \delta_{\mu}^{\sigma} \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\rho}^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\tau} - \delta_{\nu}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\tau} \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\rho}^{\gamma} - \delta_{\nu}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\tau} \delta_{\mu}^{\gamma} \delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\mu}^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\tau} \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\rho}^{\gamma} - \\
 &- \delta_{\mu}^{\tau} \delta_{\alpha}^{\sigma} \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\tau} \delta_{\alpha}^{\sigma} \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\rho}^{\gamma} - \delta_{\nu}^{\tau} \delta_{\alpha}^{\sigma} \delta_{\mu}^{\gamma} \delta_{\rho}^{\beta} \}.
 \end{aligned} \quad (10.45)$$

Перенормировочные элементы, пропорциональные $\delta^{(4)}(0)$, порождаются локальным множителем $\prod_x h^{5/2}(x)$ в мере (10.41), вклад которого можно интерпретировать как добавку к действию вида

$$\Delta S = -\frac{5}{2} i \delta^{(4)}(0) \int \ln h(x) d^4 x \quad (10.46)$$

Подробно был рассмотрен случай гравитационного поля в пустоте. Введение взаимодействия с другими полями не изменит существенно схемы построения теории возмущений. Для полей материи с невырожденными лагранжианами, взаимодействующих с гравитационным полем, новые фиктивные частицы не возникают. Такие частицы и соответствующие им диаграммы появляются только при включении поля с калибровочной группой более широкой, чем в теории тяготения, например электромагнитного поля или поля Янга — Миллса. Не рассматривая этот случай подробно, приведем выраже-

ние для континуального интеграла, соответствующего взаимодействию электромагнитному и гравитационному полям:

$$\int \exp \{iS [g^{\mu\nu}, A_\mu]\} \Delta [g] \prod_x \delta(\partial_\mu (h^{\mu\nu} A_\nu)) \prod_\mu \delta(\partial_\nu h^{\mu\nu}) \times \\ \times g^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \prod_\mu dA_\mu; \quad (10.47)$$

$$S [g^{\mu\nu}, A_{\mu\nu}] = S_g - \frac{1}{4} \int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \times \\ \times (\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda) g^{\mu\nu} g^{\nu\rho} \sqrt{-g} d^4 x, \quad (10.48)$$

где S_g — действие свободного гравитационного поля; $\Delta [g]$ равно произведению определителей

$$\det \hat{A} \det (\partial_\mu (h^{\mu\nu} \partial_\nu)), \quad (10.49)$$

в котором \hat{A} — оператор (10.21). Наличие в этом произведении нетривиального второго множителя показывает, что несущественная фиктивная скалярная частица, которую можно было бы ввести при описании электромагнитного поля, также взаимодействует с гравитационным полем. Таким образом, в ковариантной теории возмущений для электромагнитного и гравитационного полей кроме уже описанных элементов участвует фиктивная нейтральная скалярная частица.

Рассмотрим переход к гамильтоновой теории в формализме континуального интеграла. Гамильтонова формулировка в классической теории тяготения была впервые разработана Дираком [48]. Несколько вариантов такой формулировки было получено многими авторами [49—53]. При построении явно гамильтоновой формы уравнений Эйнштейна встречается трудная задача — решение уравнений связи. Здесь будет рассматриваться обобщенная гамильтонова формулировка теории тяготения, при которой не надо решать уравнения связи, а можно ограничиться лишь проверкой их коммутационных соотношений. Такая обобщенная формулировка является теоретико-полевым аналогом развитой в § 3 формулировки для конечномерных механических систем. Покажем, что действие гравитационного поля можно привести к виду, аналогичному (3.1) для конечномерных систем, причем соответствующие связи и гамильтониан удовлетворяют условиям (3.2). Мы будем следовать методу, предложенному Л. Д. Фаддеевым в форме, специально приспособленной для гравитационного поля [53].

Для этих целей удобно использовать формализм первого порядка. Рассмотрим выражение для действия гравитационного поля в виде (10.3) и соберем члены в плотности функции Лагранжа, содержащие производные по времени:

$$\frac{1}{2\kappa^2} (\Gamma_{\mu\nu}^0 \partial_0 h^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^0 \partial_0 h^{\mu 0}) = \frac{1}{2\kappa^2} (\Gamma_{ik}^0 \partial_0 h^{ik} + \\ + (\Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{ik}^k) \partial_0 h^{i0} - \Gamma_{0i}^i \partial_0 h^{00}). \quad (10.50)$$

Это выражение не содержит переменных Γ_{00}^{μ} , которые входят в $L(h, \Gamma)$ линейно и имеют смысл множителей Лагранжа. Стоящие при Γ_{00}^{μ} множители (обозначим их A_{μ}^{00}) являются связями. Уравнения связей

$$\left. \begin{aligned} A_0^{00} &= h^{ik} \Gamma_{ik}^0 + h^{00} \Gamma_{00}^i + \partial_i h^{i0} = 0; \\ A_i^{00} &= 2h^{k0} \Gamma_{ik}^0 + h^{00} (\Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{ik}^k) + \partial_i h^{00} \end{aligned} \right\} \quad (10.51)$$

дают возможность выразить переменные $\Gamma_{0i}^i, \Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{ik}^k$ через Γ_{ik}^0 и $h^{\mu\nu}$. При этом члены, содержащие производные по времени, принимают вид

$$\frac{1}{2\kappa^2} \frac{\Gamma_{ik}^0}{h^{00}} \partial_0 (h^{00} h^{ik} - h^{i0} h^{k0}), \quad (10.52)$$

если опустить слагаемые

$$\frac{1}{2\kappa^2 h^{00}} (\partial_0 h^{00} \partial_i h^{i0} - \partial_i h^{00} \partial_0 h^{i0}) = \frac{1}{2\kappa^2} (\partial_0 \ln h^{00} \partial_i h^{i0} - \partial_i \ln h^{00} \partial_0 h^{i0}), \quad (10.53)$$

исчезающие при интегрировании по частям.

Формула (10.52) подсказывает, что естественными динамическими переменными являются

$$q^{ik} = h^{i0} h^{k0} - h^{00} h^{ik}; \quad \pi_{ik} = -\frac{1}{h^{00}} \Gamma_{ik}^0. \quad (10.54)$$

Переменные $\Gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}$, отличные от Γ_{ik}^0 , нединамические. Они могут быть исключены с помощью уравнений связи

$$\frac{\partial L(h, \Gamma)}{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}} = 0; \quad (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \neq \Gamma_{ik}^0). \quad (10.55)$$

В систему (10.55) входят уравнения (10.52) вместе с уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \partial_k h^{i0} + h^{is} \Gamma_{sk}^0 + h^{00} \Gamma_{k0}^i + h^{0s} \Gamma_{sk}^i - h^{i0} \Gamma_{ks}^s &= 0; \\ \partial_k h^{ij} + h^{i\sigma} \Gamma_{\rho k}^j + h^{j\sigma} \Gamma_{\sigma k}^i - h^{ij} \Gamma_{k\sigma}^{\sigma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.56)$$

Решение системы (10.51), (10.56), выражающее «нединамические» $\Gamma_{i0}^0, \Gamma_{i0}^k, \Gamma_{ij}^k$ через $h^{\mu\nu}, \Gamma_{ik}^0$, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{i0}^0 &= \Gamma_{is}^s - \frac{\partial_i h^{00}}{h^{00}} - \frac{h^{0s}}{h^{00}} \Gamma_{is}^0; \\ \Gamma_{i0}^k &= -\frac{1}{h^{00}} (\partial_i h^{k0} + h^{0s} \Gamma_{is}^k - h^{k0} \Gamma_{is}^s + h^{ks} \Gamma_{is}^0); \\ \Gamma_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^{*k} + \frac{h^{k0}}{h^{00}} \Gamma_{ij}^0. \end{aligned} \right\} \quad (10.57)$$

Здесь $\dot{\Gamma}_{ij}^k$ — трехмерные коэффициенты связности, порожденные трехмерной метрикой g_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$).

Подставим найденные выражения (10.57) для Γ_{i0}^0 , Γ_{i0}^k , Γ_{ij}^k в плотность функции Лагранжа $L(h, \Gamma)$. Пренебрегая слагаемыми типа дивергенции, исчезающими при интегрировании по трехмерному пространству с учетом асимптотических условий (10.51), приведем результат подстановки к виду

$$\frac{1}{2\kappa^2} (\pi_{ik}(x) \partial_0 q^{ik}(x) - H(x) - \left(\frac{1}{h^{00}(x)} - 1 \right) T_0(x) - \frac{h^{i0}(x)}{h^{00}(x)} T_i(x)); \quad (10.58)$$

$$\left. \begin{aligned} T_0(x) &= q^{ij} q^{kl} (\pi_{ik} \pi_{jl} - \pi_{ij} \pi_{kl}) + g_3 R_3; \\ T_i(x) &= 2 (\nabla_i (q^{kl} \pi_{kl}) - \nabla_k (q^{kl} \pi_{il})); \\ H(x) &= T_0(x) - \partial_i \partial_k q^{ik}(x). \end{aligned} \right\} \quad (10.59)$$

Здесь $g_3 = \det g_{ik}$; R_3 — трехмерный скаляр кривизны, порожденный трехмерной метрикой g_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Символ Δ_k в выражениях для связей T_i означает ковариантную производную по отношению к метрике g_{ik} .

Арновитт, Дезер и Мизнер [49] отметили, что канонические переменные в выражении для связей имеют наглядный геометрический смысл. Функции q^{ik} , π_{ik} служат коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности $x^0 = \text{const}$, погруженной в четырехмерное пространство — время с метрикой $g_{\mu\nu}$ и связностью $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. Точнее, q^{ik} — контравариантная плотность метрики веса +2; π_{ik} — ковариантная плотность метрики веса -1. Связи — это известные в теории поверхностей соотношения Кодацци и Гаусса [см., например, [54]].

Формула (10.58) представляет собой решение задачи приведения действия гравитационного поля к обобщенному гамильтонову виду, аналогичному (3.1); для конечномерной системы со связями используется формула (10.58). Связи T_μ , как можно проверить, находятся в инволюции. Для записи явных соотношений удобно ввести величины

$$T(\eta) = \int T_k(x) \eta^k(x) d^3x; \quad T_0(\varphi) = \int T_0(x) \varphi(x) d^3x. \quad (10.60)$$

Здесь η — векторное поле; φ — скалярное поле, точнее скалярная плотность веса -1. Имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \{T(\eta_1), T(\eta_2)\} &= T([\eta_1, \eta_2]); \\ \{T(\eta), T_0(\varphi)\} &= T_0(\eta\varphi); \\ \{T_0(\varphi), T_0(\psi)\} &= T(\varphi\eta_\psi - \psi\eta_\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (10.61)$$

$[\eta_1, \eta_2]$ — скобка векторных полей, т. е. векторное поле с компонентами $\eta_1^i \partial_i \eta_2^k - \eta_2^i \partial_i \eta_1^k$; $\eta\varphi = \eta^i \partial_i \varphi - \partial_i \eta^i \varphi$, η_φ — векторное поле с компонентами $q^{ik} \partial_k \varphi$. Соотношения (10.61) — теоретико-полевой аналог равенств (3.2). Первая строка в (10.61) показывает, что связи $T_k(x)$ ($k = 1, 2, 3$) имеют смысл генераторов координатных преобразований. Остальные соотношения не имеют простого группового смысла.

Отметим дивергенцию $(-\partial_i \partial_k q^{ik})$ в плотности гамильтониана $H(x)$. Если выполнены уравнения связей $T_\mu = 0$, гамильтониан H сводится к трехмерному интегралу от дивергенции, т. е. к интегралу по бесконечно удаленной поверхности. Последний интеграл определяется асимптотикой функций q^{ik} при $r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Для асимптотически плоского гравитационного поля имеем

$$q^{ik} = \delta^{ik} \left(1 + \frac{\kappa^2 M}{2\pi r} \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (10.62)$$

где M — полная масса, которую можно получить, интегрируя $H(x)$:

$$\begin{aligned} H &= \int H(x) d^3x = -\frac{1}{2\kappa^2} \int \partial_i \partial_k q^{ik} d^3x = \\ &= -\frac{1}{2\kappa^2} \lim_{S \rightarrow \infty} \oint \partial_k q^{ik} dS_i = M. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Таким образом, можно считать, что $H = \int H(x) d^3x$ имеет значение энергии. Подынтегральное выражение

$$H(x) = T_0(x) - \partial_i \partial_k q^{ik}(x), \quad (10.64)$$

имеющее смысл плотности энергии, равно сумме двух квадратичных форм — квадратичной формы первых производных от q^{ik} и квадратичной формы «импульсов» π_{ik} — как и полагается плотности энергии волнового поля. В данном случае это энергия гравитационного поля, которое имеет две поляризации в соответствии с обычным подсчетом:

$$2 = 6 \text{ (координат)} - 4 \text{ (связи)}, \quad (10.65)$$

В приближении слабого поля гамильтониан представляется квадратичной формой от полностью поперечных компонент линеаризованного поля.

Именно это обстоятельство, а также показанное выше равенство (10.63) энергии гравитационного поля массе служат оправданием выбора действия этого поля в виде (10.3), где производные действуют не на символы Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, а на метрический тензор $g^{\mu\nu}$.

После того как действие гравитационного поля приведено к обобщенному гамильтонову виду, можно построить гамильтонову форму континуального интеграла. Принято использовать условия, впервые предложенные Дираком [48]:

$$\partial_k (q^{-1/3} q^{ik}) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \pi = q^{ik} \pi_{ik} = 0, \quad (10.66)$$

где $q = \det q^{ik}$. Эти условия имеют простой геометрический смысл: поверхность $x^0 = \text{const}$ минимальна, а координаты x^1, x^2, x^3 на ней «гармоничны» (уравнения $\partial_k (q^{-1/3} q^{ik}) = 0$ — это условия «трехмерной гармоничности»).

Для доказательства эквивалентности канонической и релятивистской форм континуального интеграла окажутся удобнее другие дополнительные условия, а именно

$$\ln q = \Phi(x); \quad q^{ik} = 0; \quad i \neq k, \quad (10.67)$$

где Φ — функция с асимптотикой c/r на бесконечности. Условия коммутации (3.2) для этих условий выполняются. Матрица скобок Пуассона условий (11.18) со связями определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{C}\eta)^0 &= \{T\eta, \ln q - \Phi(x)\} = -\eta^s \partial_s \ln q - 4\partial_s \eta^s + 4\pi\eta^0; \\ (\hat{C}\eta)^1 &= \{T\eta, q^{23}\} = -\eta^s \partial_s q^{23} + q^{2s} \partial_s \eta^3 + q^{3s} \partial_s \eta^2 - \\ &\quad - 2q^{23} \partial_s \eta^s - 2(\pi^{23} - q^{23}\pi)\eta^0; \\ (\hat{C}\eta)^2 &= \{T\eta, q^{31}\} = -\eta^s \partial_s q^{31} + q^{3s} \partial_s \eta^1 + q^{1s} \partial_s \eta^3 - \\ &\quad - 2q^{31} \partial_s \eta^s - 2(\pi^{31} - q^{31}\pi)\eta^0; \\ (\hat{C}\eta)^3 &= \{T\eta, q^{12}\} = -\eta^s \partial_s q^{12} + q^{1s} \partial_s \eta^2 + q^{2s} \partial_s \eta^1 - \\ &\quad - 2q^{12} \partial_s \eta^s - 2(\pi^{12} - q^{12}\pi)\eta^0, \end{aligned} \right\} \quad (10.68)$$

где

$$T_\eta = \int (T_0 \eta^0 + T_i \eta^i) d^3 x. \quad (10.69)$$

Матрица C не вырождена, если кривизна метрики g_{ik} отлична от нуля.

Введем обозначения:

$$\ln q - \Phi = \chi_0; \quad q^{23} = \chi_1; \quad q^{31} = \chi_2; \quad q^{12} = \chi_3. \quad (10.70)$$

Континуальный интеграл в гамильтоновой форме для гравитационного поля выглядит следующим образом:

$$\int \exp \left\{ i \int \left(\pi_{ik} \partial_0 q^{ik} - \frac{\hbar^{0i}}{\hbar^{00}} T_i - \left(\frac{1}{\hbar^{00}} - 1 \right) T_0 - H(x) \right) d^4 x \right\} \times \\ \times \det \{T_\mu, \chi_a\} \prod_x \left(\prod_{a=0}^3 \delta(\chi_a) \prod_{i \leq k} d\pi_{ik} dq^{ik} d \frac{1}{\hbar^{00}} \prod_{i=1}^3 d \left(\frac{\hbar^{0i}}{\hbar^{00}} \right) \right). \quad (10.71)$$

Приведем это выражение к виду, где интегрирование ведется только по полю $g^{\mu\nu}$. Это даст возможность идентифицировать искомую инвариантную меру. С этой целью надо проинтегрировать по полям π_{ik} . От π_{ik} зависит не только функционал $\exp(iS)$, но и определитель $\det \{T_\mu, \chi_a\}$. Запишем этот определитель в виде континуального интеграла по антикоммутирующим переменным $\eta^\mu, \bar{\eta}^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$\det \{T^\mu, \chi_a\} = \int \exp\left(i \int \bar{\eta}^\mu C_{\mu\nu}(\pi, q) \eta^\nu d^4x\right) \prod_x d\bar{\eta}^\mu(x) d\eta^\mu(x). \quad (10.72)$$

Функции π_{ik} входят только в коэффициенты $C_{\mu\nu}$ оператора \hat{C} , не содержащие производных, причем линейным образом. Сделаем в интеграле по π_{ik} сдвиг:

$$\pi_{ik} \rightarrow \pi_{ik} + \pi_{ik}(g), \quad (10.73)$$

где $\pi_{ik}(g)$ — выражение $\pi_{ik} = -(1/h^{00})\Gamma_{ik}^0$ через метрический тензор согласно (10.1). При таком сдвиге функционал действия $S[g^{\mu\nu}, \pi_{ik}]$ — интеграл от выражения (10.58) — переходит в

$$S[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int \frac{1}{h^{00}} q^{ij} q^{kl} (\pi_{ik} \pi_{jl} - \pi_{ij} \pi_{kl}) d^4x. \quad (10.74)$$

Здесь $S[g^{\mu\nu}]$ — действие (10.3), в котором символы Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ выражены через метрический тензор. Квадратичная форма $\bar{\eta}^\mu C_{\mu\nu}(\pi_{ik}, q^{ik}) \eta^\nu$ превращается в

$$\bar{\eta}^\mu C_{\mu\nu}(\pi_{ik}(g), q^{ik}) \eta^\nu + \bar{\eta}^\mu l_\mu(\pi_{ik}) \eta^0, \quad (10.75)$$

где $l_\mu(\pi_{ik})$ — линейные формы по π_{ik} , явный вид которых не понадобится. Сделаем теперь в интеграле по π_{ik} еще один сдвиг, уничтожающий линейную по π_{ik} форму $\bar{\eta}^\mu l_\mu(\pi_{ik}) \eta^0$. Вместо этой формы возникает форма, квадратичная по $\bar{\eta}^\mu \eta^0$ и не содержащая производных, а поэтому равная нулю тождественно, так как $(\eta^0)^2 \equiv 0$. После этого возьмем гауссов интеграл по π_{ik} . Интеграл же по η^μ , $\bar{\eta}^\mu$ снова можно записать как определитель оператора \hat{C}_1 , отличающегося от оператора \hat{C} тем, что в нем символы π_{ik} заменены их выражениями через метрический тензор. Действие оператора \hat{C}_1 определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{C}_1 \eta)^0 &= -\eta^\lambda \partial_\lambda \ln q - 4\partial_s \eta^s - \left(\frac{h^{0s}}{h^{00}} \partial_s \ln q + 4\partial_s \left(\frac{h^{0s}}{h^{00}} \right) \right) \eta^0; \\ (\hat{C}_1 \eta)^1 &= -\eta^\lambda \partial_\lambda q^{23} + q^{2s} \partial_s \eta^3 + q^{3s} \partial_s \eta^2 - 2q^{23} \partial_s \eta^s + \\ &+ \left(-\frac{h^{0s}}{h^{00}} \partial_s q^{23} + q^{2s} \partial_s \left(\frac{h^{03}}{h^{00}} \right) + q^{2s} \partial_s \left(\frac{h^{02}}{h^{00}} \right) - 2q^{2s} \partial_s \left(\frac{h^{0s}}{h^{00}} \right) \right) \eta^0; \\ (\hat{C}_1 \eta)^2 &= -\eta^\lambda \partial_\lambda q^{31} + q^{3s} \partial_s \eta^1 + q^{1s} \partial_s \eta^3 - 2q^{31} \partial_s \eta^s + \\ &+ \left(-\frac{h^{0s}}{h^{00}} \partial_s q^{31} + q^{3s} \partial_s \left(\frac{h^{01}}{h^{00}} \right) + q^{1s} \partial_s \left(\frac{h^{03}}{h^{00}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2q^{21} \partial_s \left(\frac{h^{0s}}{h^{00}} \right) \right) \eta^0; \\ (\hat{C}_1 \eta)^3 &= -\eta^\lambda \partial_\lambda q^{12} + q^{1s} \partial_s \eta^2 + q^{2s} \partial_s \eta^1 - 2q^{12} \partial_s \eta^s + \\ &+ \left(-\frac{h^{0s}}{h^{00}} \partial_s q^{12} + q^{1s} \partial_s \left(\frac{h^{02}}{h^{00}} \right) + q^{2s} \partial_s \left(\frac{h^{01}}{h^{00}} \right) - 2q^{12} \partial_s \left(\frac{h^{0s}}{h^{00}} \right) \right) \eta^0. \end{aligned} \right\} \quad (10.76)$$

Локальные множители в произведениях дифференциалов вместе с локальным множителем, возникшим от интегрирования по π_{ik} , и самими дифференциалами собираются в выражение

$$\prod_x (h^{00})^{-4} q^{-2} \prod_{\mu \leq \nu} dh^{\mu\nu} \quad (10.77)$$

Здесь множители перед дифференциалами можно привести к виду

$$(h^{00})^{-1} h^{-5/2} q^{1/2}, \quad (10.78)$$

причем последний множитель можно опустить вследствие условия связи $q = \exp \Phi$. В результате наш континуальный интеграл принимает вид

$$\int \exp(iS[h]) \det \hat{B}_1 \prod_x \left(\left(\prod_a \delta(X_a) \right) h^{-5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dh^{\mu\nu} \right), \quad (10.79)$$

где оператор \hat{B}_1 отличается от \hat{C}_1 локальным множителем $(h^{00})^{-1}$.

Покажем теперь, что выписанный интеграл является интегралом по классам гравитационных полей в смысле § 7, причем классы параметризуются условиями (10.67), а инвариантная мера имеет вид (10.13). Для этого достаточно проверить, что $\det \hat{B}_1$ совпадает с множителем $\Delta_x [h]$, определяемым следующим образом:

$$\Delta_x [h] \int \prod_x \left(\prod_a \delta(X_a) \right) da(x) = 1. \quad (10.80)$$

Интеграл в этом выражении можно вычислить тем же способом, что и интеграл в формуле (10.17). При этом получится

$$\Delta_x [g] = \det \hat{B}, \quad (10.81)$$

где оператор \hat{B} определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{B}\zeta)^0 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda \ln q - 4\partial_s \zeta^s + 4 \frac{h^{0s}}{h^{00}} \partial_s \zeta^0; \\ (\hat{B}\zeta)^1 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{23} + q^{2s} \partial_s \zeta^3 + q^{3s} \partial_s \zeta^2 - 2q^{23} \partial_s \zeta^s - \\ &\quad - \left(\frac{h^{02}}{h^{00}} q^{3s} + \frac{h^{03}}{h^{00}} q^{2s} - \frac{2h^{0s}}{h^{00}} q^{23} \right) \partial_s \zeta^0; \\ (\hat{B}\zeta)^2 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{31} + q^{3s} \partial_s \zeta^1 + q^{1s} \partial_s \zeta^3 - 2q^{31} \partial_s \zeta^s - \\ &\quad - \left(\frac{h^{03}}{h^{00}} q^{1s} + \frac{h^{01}}{h^{00}} q^{3s} - \frac{2h^{0s}}{h^{00}} q^{31} \right) \partial_s \zeta^0; \\ (\hat{B}\zeta)^3 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{12} + q^{1s} \partial_s \zeta^2 + q^{2s} \partial_s \zeta^1 - 2q^{12} \partial_s \zeta^s - \\ &\quad - \left(\frac{h^{01}}{h^{00}} q^{2s} + \frac{h^{02}}{h^{00}} q^{1s} - 2 \frac{h^{0s}}{h^{00}} q^{12} \right) \partial_s \zeta^0. \end{aligned} \right\} \quad (10.82)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\det \hat{B} = \det \hat{B}_1. \quad (10.83)$$

Действительно, можно перейти от одного оператора к другому треугольной заменой:

$$\zeta^0 = \eta^0; \quad \zeta^i = \zeta^i + \frac{\hbar^{0i}}{\hbar^{00}} \eta^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.84)$$

Итак, явно унитарная гамильтонова форма континуального интеграла после формальных замен переменных интегрирования была представлена в виде интеграла по классам эквивалентных полей при некоторой конкретной параметризации классов. Соответствующая инвариантная мера имеет вид (10.13). Этим оправдано лоренц-инвариантное выражение для континуального интеграла (10.16), которое представляет собой запись того же интеграла в другой параметризации классов.

Теперь появляется более трудная задача, которая состоит в последовательном проведении перенормировочной процедуры, основанной на инвариантной регуляризации. Трудности обусловлены громоздкостью теории, а также тем, что с формальной точки зрения она не является перенормируемой.

§ 11. ПОПЫТКИ ПОСТРОЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И СЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Рассмотренные выше примеры калибровочно-инвариантных теорий строятся как часть более широкой теоретической схемы, включающей в себя все существующие взаимодействия. Рассмотрение такой общей модели — пока еще довольно сложная задача. Более частная — это идея объединения электромагнитного и слабого взаимодействий ($EM + W$) при помощи мультиплетов калибровочных полей, давно привлекающая к себе внимание теоретиков. Реализация этой идеи вызвала к жизни некоторые модели, из которых наибольшую известность получила модель Вейнберга [21]. В этом параграфе будет кратко рассмотрена модель Вейнберга, а также калибровочно-инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействий лептонов, предложенная Л. Д. Фаддеевым [23]. Как и любые теории калибровочных полей, эти модели наиболее естественно формулируются на языке континуальных интегралов.

В основу модели Вейнберга положена идея спонтанного нарушения первоначально существующей инвариантности относительно калибровочных преобразований векторных безмассовых полей типа Янга—Миллса. Калибровочной группой модели служит группа $U(2)$, изоморфная группе унитарных матриц второго порядка, сводящаяся к произведению группы $U(1)$ фазовых преобразований на группу унитарных матриц второго порядка с единичным определителем.

Порождаемая группой $U(2)$ связность образована векторными полями двух типов — мультиплетом A_μ^a ($a = 1, 2, 3$) янг-миллсовского типа и полем B_μ . Кроме этих полей в модели имеются поля лептонов и поля вспомогательных скалярных полей, приводящие к спонтанному нарушению калибровочной $U(2)$ -инвариантности. Из полей лептонного поля в модель Вейнберга входят поля электронного типа:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \nu_e \psi_e, \\ R &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi_e, \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

где ψ_e — поле электронов; ν_e — поле электронного нейтрино. Скалярные поля образуют дублет

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_- \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

Лагранжиан модели имеет вид

$$\begin{aligned} L &= -1/4 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu])^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \\ &- \bar{R} \gamma^\mu (\partial_\mu - i g' B_\mu) R - \bar{L} \gamma^\mu (\partial_\mu + i g t A_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu) L - \\ &- \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \Phi - i g t A_\mu + \frac{i}{2} g' B_\mu \Phi \right)^2 - \\ &- G_e (\bar{L} \Phi R + \bar{R} \bar{\Phi} L) - M_1^2 \Phi^+ \Phi - h (\Phi^+ \Phi)^2, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где g, g' — константы связи соответственно мультиплета A_μ и синглета B_μ .

Механизм спонтанного нарушения симметрии и образования массы, предложенный впервые Хиггсом [56], сводится к появлению аномального среднего

$$\lambda = \langle \varphi^0 \rangle \quad (11.4)$$

для нулевой компоненты φ -поля. Такой механизм встречается в теории сверхтекучести (см. гл. 6). Перейдем от первоначальных полей к новым «физическим» полям, вычтя из φ -полей их аномальные средние. В качестве таких полей можно взять φ^- -поле и поля

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= (\varphi^0 + \bar{\varphi}^0 - 2\lambda) / \sqrt{2}; \\ \varphi_2 &= (\varphi^0 - \bar{\varphi}^0) / i \sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

В первом порядке теории возмущений величина λ определяется из условия максимума выражения $-M_1^2 \Phi^+ \Phi + h (\Phi^+ \Phi)^2$ при подстановке в него $\varphi^0 = \lambda, \varphi^- = 0$. Это приводит к формуле

$$\lambda^2 = M_1^2 / 2h. \quad (11.6)$$

В результате оказывается, что поле φ_1 имеет массу M_1 , а поля φ_2 и φ^- остаются безмассовыми. Появление безмассовых возбуждений в моделях со спонтанным нарушением симметрии впервые было четко отмечено Голдстоуном [127]. Однако здесь эти возбуждения не имеют непосредственного физического смысла и могут быть устранены калибровочными $U(2)$ -преобразованиями.

Масса φ_1 -мезона оказывается очень большой (по сравнению с массой электрона m_e), и по этой причине свяэью φ с остальными полями можно пренебречь.

В результате оказывается, что эффект появления аномального среднего (11.4) можно в первом приближении учесть простой заменой поля φ его вакуумным ожиданием

$$\langle \varphi \rangle = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11.7)$$

При такой замене исходный лагранжиан (11.3) превращается в выражение

$$\begin{aligned} & -1/4 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g [A_\mu, A_\nu])^2 - 1/4 (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \\ & - \bar{R} \gamma^\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) R - \bar{L} \gamma^\mu (\partial_\mu + ig t A_\mu - (1/2) g' B_\mu) L - \\ & - (1/8) \lambda^2 g^2 (A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 - (1/8) (g A_\mu^3 + g' B_\mu)^2 - \lambda G_e \bar{\psi}_e \psi_e. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Электрон получает массу

$$m_e = \lambda G_e. \quad (11.9)$$

Заряженное векторное поле

$$W_\mu = 2^{-1/2} (A_\mu^1 + i A_\mu^2) \quad (11.10)$$

описывает промежуточный бозон с массой

$$M_W = \frac{1}{2} \lambda g. \quad (11.11)$$

Из нейтральных полей A_μ^3 , B_μ можно образовать комбинации:

$$\begin{aligned} Z_\mu &= (g^2 + g'^2)^{-1/2} (g A_\mu^3 + g' B_\mu); \\ A_\mu &= (g^2 + g'^2)^{-1/2} (-g' A_\mu^3 + g B_\mu) \end{aligned} \quad (11.12)$$

с массами

$$\begin{aligned} M_Z &= \frac{1}{2} \lambda (g^2 + g'^2)^{1/2}; \\ M_A &= 0. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Таким образом, одна из компонент мультиплетта векторных полей A_μ имеет нулевую массу, и эту компоненту следует считать фотонным полем.

Член взаимодействия лептонов с векторными полями можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{ig}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_e (1 + \gamma_5) \nu W_\mu + \frac{igg'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e A_\mu + \\ & + \frac{i(g^2 + g'^2)^{1/2}}{4} \left[\frac{3(g'^2 - g^2)}{g'^2 + g^2} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e - \bar{\psi}_e \gamma_\mu \gamma_5 \psi_e + \bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \right] Z_\mu. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Второе слагаемое в (11.14) показывает, что электронный заряд e есть

$$e = gg' (g^2 + g'^2)^{-1/2} \quad (11.15)$$

и, таким образом, меньше, чем каждый из затравочных зарядов g , g' . Предполагая, что W_μ связан, как обычно, с адронами и мюоном, получаем соотношение

$$G_W / \sqrt{2} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2\lambda^2}. \quad (11.16)$$

Из (11.12), (11.16) следует, что массы промежуточных бозонов очень велики:

$$M_Z > 80 \text{ Гэв}, \quad M_W > 40 \text{ Гэв} \quad (11.17)$$

по сравнению не только с массой электрона, но и с массой адронов.

Модель Вейнберга приводит к взаимодействию нейтральных токов. Чтобы убедиться в этом, исключим поле промежуточных бозонов, сделав преобразование $W_\mu \rightarrow W_\mu + W_\mu^0$, исключая линейные по W_μ члены взаимодействия с лептонами. Это приводит к прямому взаимодействию лептонных токов вида

$$\sum_{a,b} \int d^4x d^4y j^a(x) j^b(y) D(x-y), \quad (11.18)$$

где

$$D(x-y) = (2\pi)^{-4} \int (k^2 - M_W^2 - i0)^{-2} \exp[ik(x-y)] d^4k \quad (11.19)$$

есть пропагатор W -поля массы M_W . При больших M_W можно пренебречь в знаменателе подынтегрального выражения k^2 по сравнению с M_W^2 и заменить выражение (11.19) на

$$-M_W^{-2} \delta(x-y). \quad (11.20)$$

После такой замены члены лептонного взаимодействия принимают вид

$$\sum_{a,b} \int d^4x j^a(x) j^b(x). \quad (11.20a)$$

Слагаемые

$$\int d^4x j^a(x) j^b(x) \quad (11.21)$$

соответствуют взаимодействию нейтральных токов. Такое взаимодействие характерно для модели Вейнберга и отсутствует в $(V - A)$ -варианте модели слабого взаимодействия.

Наличие взаимодействия нейтральных токов было недавно подтверждено экспериментально [133]. Это серьезный аргумент в пользу модели Вейнберга.

Методы теории калибровочных полей [12—18] позволяют оправдать предположение Вейнберга о перенормируемости его модели [21]. Для более простых примеров это было сделано Хоофтом [57]. Здесь не будет доказываться перенормируемость модели Вейнберга. Заметим только, что построение корректной теории возмущений следует проводить согласно общей схеме квантования калибровочных полей, изложенной в этой главе.

Несмотря на полученное к настоящему времени качественное согласие выводов из модели Вейнберга с экспериментом [133, 134], эту модель нельзя еще с полной уверенностью считать единственным приемлемым вариантом единой калибровочной теории слабых и электромагнитных взаимодействий. Эта модель обладает рядом эстетических недостатков, из которых отметим два: 1) использование непростой группы $n(x)$ в качестве калибровочной группы нарушает идею универсальности взаимодействия; 2) введение линейного мультиплетта скалярных полей с последующим спонтанным нарушением симметрии (механизм Хиггса) не имеет естественного толкования в рамках идеи калибровочной инвариантности.

Калибровочно-инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействий лептонов, свободная от этих недостатков, предложена Л. Д. Фаддеевым [23]. В оставшейся части этого параграфа рассмотрим модель Фаддеева, следуя в основном его работе [23].

Модель основана на простейшей нетривиальной калибровочной группе $O(3)$ (трехмерной группе вращения) и содержит только триплет векторных полей. Вместо скалярного поля Хиггса здесь вводится поле направлений $n(x)$ в зарядовом пространстве, определяющее в нем нейтральное подпространство. Набор физических частиц в модели включает в себя известные лептоны, фотоны и заряженные промежуточные бозоны.

Остановимся на геометрических идеях, лежащих в основе модели. Классические поля делятся на два класса.

1. Сечения некоторого расслоения над многообразием пространства—времени, инвариантные по отношению к локальному действию калибровочной группы.

2. Связности в этом расслоении, задающие параллельный перенос полей первого класса.

Слой является обычно произведением линейного пространства, в котором реализуется представление группы Лоренца в соответствии со спинами рассматриваемых полей первого класса и внутреннего (зарядового) пространства, в котором действует группа внутренней симметрии. При пренебрежении эффектами тяготения нетривиальная связность порождается только последней группой

и задается набором векторных полей Янга—Миллса [41], число которых совпадает с размерностью калибровочной группы. В рассматриваемой модели набор полей первого класса содержит спинорные поля лептонов, а калибровочная группа — это группа $O(3)$. В качестве внутреннего пространства взято произведение линейного пространства ее представления и нелинейного многообразия, в котором она действует. Линейной компоненте слоя сопоставлен мультиплет спинорных полей лептонов. Простейшей возможностью для нее является пространство векторного представления R^3 . Известные лептоны $\bar{\mu}, e, \nu = \nu_e + \nu_\mu$ (антимюон, электрон и нейтрино) объединяются в трехмерный вектор, так что пространство R^3 хорошее с физической точки зрения.

Можно отличить нейтральный лептон от заряженного, если указать, какой из генераторов группы $O(3)$ является зарядом. Таким образом, задание заряда равносильно введению направления в R^3 , которое можно назвать нейтральным. В результате возникает многообразие направлений S^2 , которое считается прямым множителем во внутреннем пространстве.

Итак, в модели присутствуют три фермиона ψ_1, ψ_2, ψ_3 , объединенных в изовектор $\psi \in R^3$, набор скалярных полей n_1, n_2, n_3 , удовлетворяющих условию

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (11.22)$$

и образующих единичный вектор $n \in S^2$, и три векторных поля $Z_\mu^1, Z_\mu^2, Z_\mu^3$, образующих изовектор $Z_\mu \in R^3$.

Удобно ввести три вещественные антисимметричные матрицы:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.23)$$

задающие представление алгебры Ли группы $O(3)$, и рассматривать набор V_1, V_2, V_3 как трехмерный вектор V .

Действие калибровочной группы запишем в инфинитезимальной форме:

$$\delta\psi = \psi \wedge \varepsilon; \quad \delta n = n \wedge \varepsilon; \quad \delta Z_\mu = \partial_\mu \varepsilon + Z_\mu \wedge \varepsilon, \quad (11.24)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x)$ — вектор бесконечно малого локального поворота. Здесь используются обозначения $(,)$, \wedge для скалярного и векторного произведений в R^3 , например $\psi \wedge \varepsilon = (V, \varepsilon)\psi$.

Через поля Z_μ и n можно построить еще два триплета векторных полей:

$$Y_\mu = \partial_\mu n + Z_\mu \wedge n; \quad X_\mu = n \wedge Y_\mu, \quad (11.25)$$

которые векторно преобразуются при калибровочных преобразованиях

$$\delta Y_\mu = Y_\mu \wedge \varepsilon; \quad \delta X_\mu = X_\mu \wedge \varepsilon. \quad (11.26)$$

Эти поля можно использовать в дополнение к полю Z_μ при определении ковариантной производной поля ψ , получая матрицы путем тензорного умножения X_μ, Y_μ на n .

Рассмотрим конкретную комбинацию:

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + (Z_\mu, V)\psi + (X_\mu \otimes n + n \otimes X_\mu) \gamma_5 \psi, \quad (11.27)$$

построенную с помощью матрицы γ_5 ($\gamma_5^\dagger = -\gamma_5$, $\gamma_5^2 = -1$). Она выделена дополнительным условием коммутации ∇_μ с преобразованием:

$$\left. \begin{aligned} \delta \psi &= \alpha n (n, \gamma_5 \psi); \quad \delta n = 0; \\ \delta Z_\mu &= \alpha Y_\mu; \quad \delta X_\mu = \alpha Y_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (11.28)$$

где α — бесконечно малая константа. Выражение (11.27) определяет инфинитезимальную связность, ассоциированную с группой $SU(3)$.

Лептонное число L , порожденное обычным фазовым преобразованием:

$$\delta \psi = i\beta \psi; \quad \delta n = 0; \quad \delta Z_\mu = 0, \quad (11.29)$$

где β — константа (не зависит от x), и заряд Q , порожденный генератором (V, n) , определяют полный набор квантовых чисел для классификации лептонов.

Преобразование (11.28) при этом производит дополнительную классификацию нейтральных лептонов, абсолютизируя различие их противоположных спиральностей.

Лагранжиан, инвариантный по отношению к описанным преобразованиям, имеет вид

$$L = \frac{1}{2i} (\bar{\psi} \gamma_\mu \nabla_\mu \psi - (\gamma_\mu \nabla_\mu \bar{\psi}) \psi) - \frac{1}{e^2} L_{YM} + \frac{m^2}{2e^2} (Y_\mu, Y_\mu), \quad (11.30)$$

где L_{YM} — лагранжиан Янга—Миллса для поля Z_μ :

$$L_{YM} = -1/4 (Z_{\mu\nu}, Z_{\mu\nu}); \quad Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu + Z_\mu \wedge Z_\nu. \quad (11.31)$$

Константа e безразмерна, m имеет размерность массы.

Выпишем отдельно члены лагранжиана (11.31), описывающие взаимодействие фермионов с векторным полем:

$$L_1 = i (Z_m, v_\mu) + i (X_\mu a_\mu), \quad (11.32)$$

где

$$v_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi; \quad a_\mu = (\bar{\psi} n) \gamma_\mu \gamma_5 \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 (n \psi). \quad (11.33)$$

Выражение (11.33) аналогично стандартной $(V - A)$ -структуре в обычной теории слабых взаимодействий. Эта аналогия подтверждается поведением L_1 по отношению к операторам пространственного отражения P и отражения заряда R_Q . Швингер [58] определил геометрически отражение R_Q как переход к античастицам с последую-

щим изменением знака нейтрального напряжения в зарядовом пространстве R^3 . В явном виде R_Q определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \psi'' &\rightarrow \psi^{*''}; \psi^\perp \rightarrow \psi^{*\perp}; n \rightarrow -n; \\ Z_\mu'' &\rightarrow -Z_\mu''; Z_\mu^\perp \rightarrow Z_\mu^\perp; Y_\mu \rightarrow Y_\mu; X_\mu \rightarrow X_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

где
$$Z_\mu'' \rightarrow (Z_\mu, n); Z_\mu^\perp = Z_\mu - (Z_\mu, n) n. \quad (11.35)$$

Заметим, что $X_\mu'' = Y_\mu'' = 0$. Билинейные формы v_μ, a_μ преобразуются следующим образом:

$$v_\mu'' \rightarrow -v_\mu''; v_\mu^\perp \rightarrow v_\mu^\perp; a_\mu'' \rightarrow a_\mu''; a_\mu^\perp \rightarrow -a_\mu^\perp, \quad (11.36)$$

так что при отражении заряда второе слагаемое в (11.32) меняет знак. Оно же меняет знак при пространственном отражении, так что взаимодействие L_1 инвариантно относительно преобразования комбинированной четности $R_Q P$.

Рассмотрим теперь возможную структуру массовых членов для фермионов, имея в виду, что их можно добавлять к затравочному лагранжиану (11.30) или вычислять динамически. Возьмем три подходящие матрицы $I, i(Vn), n \otimes n$, линейной комбинацией которых может быть матрица массового члена M . Условие инвариантности по отношению к преобразованию (11.29) дает матрицу M вида

$$M = a(I - n \otimes n) + ib(Vn), \quad (11.37)$$

причем коэффициенты a и b имеют размерность массы.

Для физической интерпретации модели рассмотрим ее в частной калибровке $n = n_0$, где n_0 — постоянный вектор $(0, 0, 1)$. Это условие означает, что заряд связан с матрицей $-iV_3$ и поле ψ_3 нейтрально. Поля $\psi_1 + i\psi_2, \psi_1 - i\psi_2$ имеют массы $a + b, a - b$ и заряды $1, -1$ соответственно. Нейтральное поле ψ_3 имеет массу 0 . Поля X_μ, Y_μ имеют компоненты

$$X_\mu^1 = Z_\mu^1; X_\mu^2 = Z_\mu^2; X_\mu^3 = 0; Y_\mu^1 = Z_\mu^2; Y_\mu^2 = -Z_\mu^1; Y_\mu^3 = 0, \quad (11.38)$$

так что взаимодействие L_1 принимает вид

$$L_1 = Z_\mu^1 (v_\mu^1 + a_\mu^1) + Z_\mu^2 (v_\mu^2 + a_\mu^2) + Z_\mu^3 v_\mu^3. \quad (11.39)$$

Последнее слагаемое в лагранжиане (11.30) дает массовый член для векторных мезонов Z_μ^1, Z_μ^2 . В результате лагранжиан L_1 описывает слабое $(V - A)$ взаимодействие электронов, μ -мезонов и нейтрино, переносимое промежуточными массивными векторными бозонами W_μ^\pm , и взаимодействие заряженных лептонов с электромагнитным полем в стандартной форме

$$e \{ A_\lambda (\bar{\psi}_e \gamma_\lambda \psi_e + \bar{\psi}_{(\mu)} \gamma_\lambda \psi_{(\mu)}) + W_\lambda^- [\bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1 + i\gamma_5) \bar{\psi}_e + \psi_{(\mu)} \gamma_\lambda \times \\ \times (1 + i\gamma_5) \psi_{(\mu)}] + c. c. \}, \quad (11.40)$$

если произвести отождествление:

$$\left. \begin{aligned} Z_{\mu}^3 &= eA_{\mu}; \quad Z_{\mu}^1 \pm Z_{\mu}^2 = eW_{\mu}^{\pm}; \\ \psi_1 + i\psi_2 &= \psi_{(\mu)}^*; \quad \psi_1 - i\psi_2 = \psi_e; \quad \psi_3 = \psi_{\nu_e} + \psi_{\nu_{\mu}}^*. \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

Постоянная e при этом имеет смысл электрического заряда, e/m дает константу слабого взаимодействия, m — массу промежуточных бозонов.

При квантовании описанной модели удобно использовать в качестве калибровочного условия поперечности векторных полей

$$\partial_{\mu}Z_{\mu} = 0. \quad (11.42)$$

При этом, в соответствии с общими методами квантования калибровочных полей, к лагранжиану (11.30) следует добавить компенсирующий член, содержащий взаимодействие векторных частиц с фиктивными скалярными фермионами. В поперечной калибровке поле $n(x)$ не только не исчезает из лагранжиана, но входит в него существенно нелинейно. Вопрос о правильном квантовании поля $n(x)$ имеет важнейшее значение. Можно надеяться, что применение методов континуального интегрирования поможет получить правильный ответ.

ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ГРИНА

§ 12. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ
СНАЧАЛА ПО «БЫСТРЫМ», А ЗАТЕМ ПО «МЕДЛЕННЫМ»
ПОЛЯМ

В этом параграфе рассматриваются возможности применения метода континуального интегрирования к вычислению асимптотики некоторых функций Грина при малых энергиях и импульсах (*инфракрасная асимптотика*).

Стандартная теория возмущений приводит к трудностям, если в системе присутствуют кванты сколь угодно малой энергии. Такое положение встречается в квантовой электродинамике и в некоторых примерах из статистической физики — в теории сверхтекучести, теории плазмы и общей теории фазовых переходов. Упомянутые трудности состоят в том, что каждая диаграмма обычной теории возмущений имеет так называемую *инфракрасную особенность*. Это означает, что соответствующее диаграмме выражение, представляющее собой интеграл по импульсным переменным, сингулярно при стремлении внешнего импульса диаграммы к нулю. В этом случае желательна перестройка теории возмущений. Один из возможных вариантов такой перестройки можно назвать методом последовательного интегрирования сначала по «быстрым», а затем по «медленным» полям.

Представим каждое поле ψ , по которому интегрируем, в виде суммы двух слагаемых, одно из которых назовем *медленно меняющимся полем* ψ_0 , а второе — *быстропеременным полем* ψ_1 :

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (12.1)$$

Для определенности рассмотрим случай, когда ψ — комплексное скалярное поле. В релятивистской теории поля функции ψ , ψ_0 , ψ_1 зависят от точки пространства — времени (x_0, x_1, x_2, x_3) . В задачах статистической физики ψ , $\bar{\psi}$ — это функции от (x, τ) , где $x \in V$, $\tau \in [0, \beta]$ (см. § 6). Определим сначала, что называть быстропеременной, а что медленно меняющейся частью поля в статистической физике. Как уже говорилось в § 6, функция $\psi(x, \tau)$, предполагаемая периодической функцией своих аргументов, разлагается в ряд Фурье:

$$\psi(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{k, \mu} \exp[i(\omega\tau - k \cdot x)] a(k, \omega). \quad (12.2)$$

Назовем медленно меняющейся частью $\psi_0(x, \tau)$ поля $\psi(x, \tau)$ сумму слагаемых в разложении (12.2) с

$$|k| < k_0; |\omega| < \omega_0. \quad (12.3)$$

Быстропеременной частью $\psi_1(x, \tau)$ назовем разность $\psi(x, \tau) - \psi_0(x, \tau)$. Эта разность, очевидно, есть сумма тех слагаемых в (12.2), для которых или $|k| > k_0$, или $|\omega| > \omega_0$.

В релятивистской теории поля аналог разложения (12.2) имеет вид

$$\psi(x) = \int \exp(ikx) \tilde{\psi}(k) d^4k, \quad (12.4)$$

где k — 4-вектор (k_0, k_1, k_2, k_3) ; $kx = k_0x_0 - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$. Один из возможных способов разбить функцию ψ на быстропеременную и медленно меняющуюся части — назвать медленно меняющейся частью интеграл по области $|k^2| \equiv |k_0^2 - \mathbf{k}^2| \leq m_0^2$, быстропеременной частью — интеграл по области $|k^2| > m_0^2$.

Другой способ состоит в переходе к евклидовой теории поля, в которой координаты и время совершенно равноправны. Скалярное произведение имеет вид $kx = \sum_{i=1}^4 k_i x_i$. При этом медленно меняющуюся часть функции $\psi(x)$ определим как интеграл (12.4) по области

$$k^2 = \sum_{i=1}^4 k_i^2 \leq m_0^2, \quad (12.5)$$

быстропеременную часть — как интеграл по

$$k^2 = \sum_{i=1}^4 k_i^2 > m_0^2. \quad (12.6)$$

Переход к физическому случаю псевдоевклидовой метрики осуществляется в ответах, полученных методом континуального интеграла для евклидовой теории поля, путем аналитического продолжения.

Следует отметить, что граница между «медленными» и «быстрыми» полями в конкретных задачах квантовой теории поля и статистической физики в значительной мере условна. Это проявляется в том, что k_0 , ω_0 , m_0 , отделяющие «медленные» переменные от «быстрых», определяются не точно, а по порядку величины.

В статистической физике, как было показано в § 6, континуальный интеграл — это интеграл по мере

$$\prod_{k, \omega} da^+(k, \omega) da(k, \omega). \quad (12.7)$$

В евклидовой теории поля мера может быть представлена в виде

$$\prod_k d\tilde{\psi}(k) d\tilde{\psi}(k), \quad (12.8)$$

т. е. как предел на решетке, в которой расстояние между ближайшими точками решетки стремится к нулю, а объем части k -пространства, занятого решеткой, стремится к бесконечности.

Основная идея перестройки теории возмущений состоит в последовательном интегрировании сначала по быстропеременным, а затем по медленно меняющимся полям с использованием на этих двух этапах различных схем теории возмущений. На первом этапе интегрируем по коэффициентам Фурье $a(k, \omega)$, $a^+(k, \omega)$ соответственно $\tilde{\psi}(k)$, $\tilde{\psi}^+(k)$, у которых индексы (k, ω) , соответственно k лежат в области, определяющей быстрые переменные, а на втором этапе — по коэффициентам Фурье с индексами, характеризующими медленные поля.

При интегрировании по быстрым полям можно пользоваться теорией возмущений и следующей из нее диаграммной техникой, отличающейся от стандартной теории возмущений, изложенной в § 5, 6 в двух пунктах.

1. Интегралы (суммы) по 4-импульсам обрезаны на нижнем пределе.

2. Появляются дополнительные вершины, описывающие взаимодействие поля ψ_1 с медленно меняющимся полем ψ_0 .

Первое ясно из того, что индексы (k, ω) (или k) быстропеременного поля должны принадлежать области, определяющей «быстрые» переменные.

Причина появления дополнительных вершин в том, что в исходное действие поля S входит $\psi = \psi_0 + \psi_1$, так что в члены третьей и более высоких степеней дают вклад перекрестные члены, которые могут исчезать в квадратичной форме.

Обрезание интегралов на нижнем пределе предохраняет от инфракрасных расходимостей на первом этапе интегрирования. На втором этапе (интегрирование по медленно меняющимся полям) можно добиться исчезновения инфракрасных расходимостей, если перейти к нетривиальной схеме теории возмущений, используя специфику системы. Например, в теории сверхтекучести при интегрировании по медленно меняющимся бозе-полям $\psi_0(x, \tau)$, $\bar{\psi}_0(x, \tau)$ оказывается удобным перейти к полярным координатам

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(x, \tau) &= \sqrt{\rho(x, \tau)} \exp[i\varphi(x, \tau)]; \\ \bar{\psi}_0(x, \tau) &= \sqrt{\rho(x, \tau)} \exp[-i\varphi(x, \tau)] \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

и интегрировать по полям $\rho(x, \tau)$, $\varphi(x, \tau)$. Теорию возмущений в интеграле по медленно меняющимся полям будем строить в терминах функций Грина полей $\rho(x, \tau)$, $\varphi(x, \tau)$. Такая теория возмущений, как показано в следующей главе, свободна от инфракрасных расходимостей.

Вычисление инфракрасных особенностей функций Грина в квантовой электродинамике проведено в следующем параграфе.

В теории фазовых переходов используется метод многократного последовательного интегрирования. Такой подход, далекий от воз-

возможности его строгого обоснования, тем не менее полезен, так как приводит к определенной качественной картине критических явлений и дает приближенный метод вычисления критических индексов.

§ 13. ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ГРИНА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Физическая причина инфракрасных особенностей квантовой электродинамики — существование фотонов сколь угодно малой энергии. Проявляются эти особенности в электронной функции Грина, которые вместо полюса $p^2 = m^2$ имеют степенную особенность. Это связано с тем, что реальный электрон окружен облаком виртуальных фотонов, среди которых могут быть фотоны сколь угодно малой энергии (сколь угодно большой длины волны).

Впервые степенная особенность функции Грина электрона при $p^2 \approx m^2$ была получена в работе Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова и И. М. Халатникова [59], просуммировавших последовательность главной диаграммы стандартной теории возмущений. Функциональные методы к этой проблеме применялись Е. С. Фрадковым [11] и некоторыми другими авторами [67].

Характерные инфракрасные особенности появляются не только у функций Грина, но и у элементов S -матрицы, если эти элементы определять по стандартным методам квантовой теории поля. В связи с этим возникает проблема переопределения S -матрицы и сечений рассеяния, с тем чтобы переопределенные выражения уже не содержали инфракрасных особенностей. Эта проблема не рассматривается в настоящей книге, с ней можно ознакомиться по работам [61—65].

Вычислим инфракрасные особенности функций Грина квантовой электродинамики. Мы найдем функции Грина евклидовой квантовой электродинамики, а для псевдоевклидовой метрики получим их путем аналитического продолжения. Одинаковая трактовка координат и времени в евклидовой теории упрощает выкладки. Фигурирующий в псевдоевклидовой теории функционал $\exp(iS)$ при переходе в евклидовой метрике превращается в функционал, убывающий при больших значениях полей.

Одночастичная электронная функция Грина евклидовой квантовой электродинамики определяется по формуле

$$G(x, y) = -\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle \equiv \frac{-\int \psi(x) \bar{\psi}(y) (\exp(S)) \left(\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) \right) d\bar{\psi} d\psi dA}{\int (\exp(S)) \left(\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) \right) d\bar{\psi} d\psi dA}, \quad (13.1)$$

где функционал

$$S = -\frac{1}{4} \int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 d^4x - \int \bar{\psi} (\gamma_\mu (\partial_\mu + i e A_\mu) - m) \psi d^4x \quad (13.2)$$

имеет смысл действия. Матрицы Дирака γ_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (13.3)$$

Континуальные интегралы в (13.1) — это интегралы в лоренцевой калибровке, написанные с учетом требований квантовой теории калибровочных полей (см. гл. 3).

Будем вычислять функцию Грина (13.1) в такой последовательности.

1. Вычислим интеграл по ферми-полям в числителе и знаменателе формулы (13.1).

2. Вычислим интеграл по быстропеременному электромагнитному полю.

3. Вычислим интеграл по медленно меняющемуся электромагнитному полю.

В соответствии со сказанным в § 12 определим медленно меняющуюся $A_\mu^{(0)}(x)$ и быстропеременную $A_\mu^{(1)}(x)$ части поля $A_\mu(x)$ как интегралы по области $k \leq k_0$, соответственно $k > k_0$ в разложении

$$A_\mu(x) = \int (\exp(i kx)) \tilde{A}_\mu(k) d^4k. \quad (13.4)$$

Интеграл по ферми-полям можно взять в замкнутом виде, используя формулы

$$\left. \begin{aligned} \int (\exp S) d\bar{\psi} d\psi &= \exp S_0[A] \det(\gamma_\mu(\partial_\mu + i e A_\mu) - m); \\ \int (\exp S) \psi(x) \bar{\psi}(y) d\bar{\psi} d\psi &= \\ &= \exp S_0[A] G(x, y; A) \det(\gamma_\mu(\partial_\mu + i e A_\mu) - m). \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Здесь $S_0[A]$ — действие свободного электромагнитного поля (функционал $\exp S_0[A]$ выносится за знак интеграла по $\psi, \bar{\psi}$); $G(x, y; A)$ — функция Грина электрона в электромагнитном поле A_μ ; $\det(\gamma_\mu(\partial_\mu + i e A_\mu) - m)$ — определитель оператора Дирака во внешнем поле. Этот определитель можно регулировать делением на определитель свободного оператора Дирака:

$$\begin{aligned} & \det[\gamma_\mu(\partial_\mu + i e A_\mu) - m] / \det(\gamma_\mu \partial_\mu - m) = \\ & = \det \left[1 + \frac{1}{\partial - m} i e \hat{A} \right] = \exp \left\{ \text{Sp} \ln \left(1 + \frac{1}{\partial - m} i e \hat{A} \right) \right\} = \\ & = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n}}{2n} \int \text{tr} (\hat{G}(x_1 - x_2) \hat{A}(x_2), \dots, \hat{G}(x_n - \right. \\ & \quad \left. - x_1) \hat{A}(x_1)) d^4x_1, \dots, d^4x_n \right\}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Здесь $\hat{G}(x)$ — функция Грина оператора $(m - \hat{\partial})$:

$$\hat{G}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp(ipx)}{i \hat{p} + m} d^4p. \quad (13.7)$$

Символ tr означает след в матричном смысле. Ограничение в сумме по n четными степенями e^{2n} возможно в силу четности по $A(x)$ функционала (13.6); утверждение о четности по $A(x)$ определителя оператора Дирака во внешнем поле называется обычно *теоремой Фарри* [130].

Для ее доказательства конкретизируем представление четырехмерных матриц Дирака, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (13.3):

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13.8)$$

Здесь σ_i — двумерные матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (13.9)$$

I — двумерная единичная матрица. Легко видеть, что операция транспонирования T действует на γ_i следующим образом:

$$\gamma_i^T = \gamma_i, \quad i = 1, 3, 4; \quad \gamma_2^T = -\gamma_2. \quad (13.10)$$

Четность функционала (13.6) следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \det \left(1 + \frac{1}{\hat{\delta} - m} i e \hat{A} \right) &= \det \left(1 + i e \hat{A} \frac{1}{\hat{\delta} - m} \right) = \\ &= \det \left(1 + \left(i e \hat{A} \frac{1}{\hat{\delta} - m} \right)^T \right) = \det \left(1 + \frac{1}{\hat{\delta}^T - m} i e \hat{A}^T \right) = \\ &= \det \left(1 + \left(\gamma_2 \frac{1}{\hat{\delta}^T - m} \gamma_2^{-1} \right) (\gamma_2 i e \hat{A}^T \gamma_2^{-1}) \right) = \\ &= \det \left(1 + \frac{1}{\gamma_2 \hat{\delta}^T \gamma_2^{-1} - m} i e \gamma_2 \hat{A}^T \gamma_2^{-1} \right) = \\ &= \det \left(1 - \frac{1}{\hat{\delta} - m} i e \hat{A} \right). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Последнее из равенств этой цепочки — следствие формул

$$\gamma_2 \hat{\delta}^T \gamma_2^{-1} = \hat{\delta}; \quad \gamma_2 \hat{A}^T \gamma_2^{-1} = -\hat{A}, \quad (13.12)$$

верных в силу (13.10) и очевидного соотношения

$$\hat{\delta}_i^T = -\hat{\delta}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (13.13)$$

Интегрирование по электромагнитному полю A не приводит к замкнутым выражениям типа (13.5), поэтому применяют приближенные методы. Первое нетривиальное приближение можно получить следующим образом.

1. Положим в первом приближении функционал (13.6) равным единице, что означает пренебрежение эффектами поляризации вакуума.

2. Используем для функции Грина электрона в электромагнитном поле приближенную формулу

$$G(x, y; A^{(0)} + A^{(1)}) \approx G(x, y; A^{(1)}) \exp\left(i e \int_x^y A_\mu^{(0)}(z) dz_\mu\right), \quad (13.14)$$

согласно которой влияние медленно меняющегося поля $A_\mu^{(0)}(x)$ сводится к умножению функции Грина на фазовый множитель. Интеграл в этой формуле берется по прямой, соединяющей точки x и y .

Формула (13.14) — точная, если $A_\mu^{(0)}(z)$ есть градиент $\partial_\mu c$ скаляра c . Можно показать, что при фиксированных x, y формула (13.14) асимптотически точна в пределе $k_0 \rightarrow 0$.

Приняв сделанные приближения, представим функцию Грина (13.1) в виде произведения двух множителей:

$$G(x, y) = - \frac{\int \exp(S_0[A^{(1)}]) G(x, y; A^{(1)}) \left(\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu^{(1)})\right) dA^{(1)}}{\int \exp(S_0[A^{(1)}]) \left(\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu^{(1)})\right) dA^{(1)}} \times$$

$$\times \frac{\int \exp\left(S_0[A^{(0)}] + i e \int_x^y A_\mu(z) dz^\mu\right) \left(\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu^{(0)})\right) dA^{(0)}}{\int \exp(S_0[A^{(0)}]) \left[\left(\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu^{(0)})\right) dA^{(0)}\right]}. \quad (13.15)$$

Первый множитель есть квантовая функция Грина, полученная при учете только быстропеременного поля. Она дается формулой

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(ipx) (G(\hat{p}) d^4 p), \quad (13.16)$$

где

$$G(\hat{p}) = (i\hat{p} + m - \Sigma(\hat{p}))^{-1} \quad (13.17)$$

выражено через собственно энергетическую часть $\Sigma(\hat{p})$, которая в первом приближении дается диаграммой



$$(13.18)$$

Импульс внутренней фотонной линии в этой диаграмме обрезан на нижнем пределе k_0 . Из этого следует, что первый множитель в (13.15) зависит от k_0 . Эта зависимость сокращается с вкладом от второго множителя в (13.15).

Второй множитель можно назвать собственно «инфракрасным», его рассмотрим в первую очередь. Это интеграл гауссова типа; вычисляемый стандартным приемом — сдвигом, уничтожающим ли-

нейную форму по $A_\mu^{(0)}$ в показателе экспоненты. Представив эту линейную форму в виде

$$ie \int_x^y A_\mu^{(0)}(z) dz_\mu = ie \int l_\mu(z) A_\mu^{(0)}(z) d^4 z, \quad (13.19)$$

легко написать ответ

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\frac{l^2}{2} \int l_\mu(z_1) D_{\mu\nu}^{(0)}(z_1 - z_2) l_\nu(z_2) d^4 z_1 d^4 z_2 \right\} = \\ = \exp \left\{ -\frac{e^2}{2} \int_x^y \int_x^y dz_{1\mu} dz_{2\nu} D_{\mu\nu}^{(0)}(z_1 - z_2) \right\}. \end{aligned} \quad (13.20)$$

В него входит $D_{\mu\nu}^{(0)}(z_1 - z_2)$ — поперечная фотонная функция Грина медленно меняющегося поля:

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{k < k_0} \exp(ikz) \left(\frac{k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu}{k^4} \right) d^4 k. \quad (13.21)$$

Подставив (13.21) в (13.20), получим в показателе экспоненты выражение

$$-\frac{e^2}{2(2\pi)^4} \int_{k < k_0} \frac{d^4 k}{k^4} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \int_x^y \exp(ikz_1) dz_{1\mu} \int_x^y \exp(-ikz_2) dz_{2\nu}. \quad (13.22)$$

Линейные интегралы вычисляются по формуле

$$\int_x^y \exp(ikz) dz_\mu = \frac{\exp(iky) - \exp(ikx)}{i(k, x-y)} (y-x)_\mu, \quad (13.23)$$

если ввести переменную t :

$$z_\mu = x_\mu + (y-x)_\mu t, \quad (13.24)$$

изменяющуюся от 0 до 1. Выражение (13.22) с учетом (13.23) принимает вид

$$-\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{k < k_0} \left(\frac{k^2 (x-y)^2 - (k, x-y)^2}{(k, x-y)^2} \right) (1 - \cos(k, x-y)) \frac{d^4 k}{k^4}. \quad (13.25)$$

Обозначим $|x-y| = r$ и перейдем к полярным координатам. Тогда $(x-y, k) = rk \cos \theta$, и для (13.25) получим выражение

$$-\frac{e^2}{4\pi^3} \int_0^\pi \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \int_0^{k_0 r |\cos \theta|} \frac{1 - \cos x}{x} dx, \quad (13.26)$$

которое зависит от параметра $k_0 r$. Рассмотрим его асимптотический вид при $k_0 r \gg 1$. Используем формулу

$$\frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{3}{2}$$

и найдем сначала вклад последнего (постоянного) слагаемого в интервал (13.26).

Так как при $k_0 r \gg 1$

$$\int_0^{k_0 r |\cos \theta|} \frac{1 - \cos x}{x} dx \approx \ln k_0 r |\cos \theta| + C,$$

где C — постоянная Эйлера, то

$$-\frac{3}{2} \int_0^\pi (\ln k_0 r |\cos \theta| + C) d\theta = -\frac{3}{2} \pi \left(\ln \frac{k_0 r}{2} + C \right).$$

Чтобы вычислить вклад от остальных слагаемых, проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \int_0^{k_0 r |\cos \theta|} \frac{1 - \cos x}{x} dx = \\ & = \int_0^\pi \left(\operatorname{tg} \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) (1 - \cos k_0 r |\cos \theta|) \operatorname{tg} \theta d\theta = \\ & = \int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} - 1 \right) (1 - \cos k_0 r \cos \theta) d\theta + \\ & + \int_0^\pi \frac{1}{\cos^2 \theta} (1 - \cos k_0 r \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Первый из интервалов при $k_0 r \gg 1$ стремится к постоянной $-3\pi/4$, а второй равен интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos k_0 r x}{x^2} dx = \pi k_0 r \quad (13.27)$$

с точностью до величин, стремящихся к нулю при $k_0 r \rightarrow \infty$.

Таким образом, при $k_0 r \rightarrow \infty$ инфракрасный множитель оказывается равным

$$\exp \left(-\frac{e^2}{4\pi^2} k_0 r + \frac{3e^2}{8\pi^2} \ln k_0 r + \frac{3e^2}{16\pi^2} (1 + 2C - 2 \ln 2) \right). \quad (13.28)$$

Первый множитель в произведении (13.15) определяется собственной энергетической частью Σ , при вычислении которой ограничимся

простейшей диаграммой теории возмущений (13.18). Соответствующее диаграмме выражение имеет вид

$$-\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{k > k_0} d^4 k \frac{k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu}{k^4} \gamma_\mu \frac{1}{i(\hat{p} - \hat{k}) + m} \gamma_\nu. \quad (13.29)$$

Интеграл (13.29) расходится и должен быть обрезан на верхнем пределе при $|k| = \Lambda \gg m$. Асимптотика функции Грина с собственно энергетической частью (13.29) в x -пространстве определяется поведением этой функции в p -пространстве в окрестности $p^2 \approx -m^2$ (при аналитическом продолжении). Вычисляя интеграл (13.29), получаем следующую формулу (при $p^2 \approx -m^2$):

$$G_{k_0} \approx a_{k_0} \frac{\hat{m}_{k_0} - \hat{i}p}{m_{k_0}^2 + p^2}, \quad (13.30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{k_0} &= 1 - \frac{7e^2}{16\pi^2} - \frac{3e^2}{8\pi^2} \ln \frac{k_0}{m}, \\ m_{k_0} &= m_0 \left(1 + \frac{3e^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \right) - \frac{e^2}{4\pi^2} k_0. \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

Здесь a_{k_0} — ренормировочный множитель; m_{k_0} — масса электрона, вычисленная во втором порядке теории возмущений, с учетом взаимодействия только с быстропеременным полем.

Функция Грина $G(x)$ есть

$$G_{k_0}(x) = a_{k_0} (m_{k_0} - \hat{\partial}) \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp(ipx)}{p^2 + m_{k_0}^2} d^4 p. \quad (13.32)$$

Обозначив $|x| = r$, получим при $rm \gg 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp(ipx)}{p^2 + m^2} d^4 x &= \frac{1}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \exp(-r(p^2 + m^2)^{1/2}) dp \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi^2 r} \exp(-mr) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{rp^2}{2m}\right) dp = \frac{m^{1/2}}{2(2\pi r)^{3/2}} \exp(-mr). \end{aligned} \quad (13.33)$$

Подставив в (13.32), получим

$$\hat{G}_{k_0}(x) \approx \frac{a_{k_0}}{2} \left(\frac{m_{k_0}}{2\pi r} \right)^{3/2} (1 + \hat{n}) \exp(-m_{k_0} r), \quad (13.34)$$

где $\hat{n} \equiv n_\mu \gamma_\mu = \frac{x_\mu}{r} \gamma_\mu$. Умножив эту функцию на инфракрасный множитель (13.28), получим выражение, не содержащее произвольного параметра k_0 :

$$G(x) = \frac{a}{2} \frac{m^3}{(2\pi)^{3/2}} (mr)^{-\frac{3}{2} + \frac{3e^2}{8\pi^2}} (1 + \hat{n}) \exp(-mr). \quad (13.35)$$

Здесь a — нормировочный множитель; m — физическая масса электрона;

$$a = 1 + \frac{3e^2}{8\pi^2} (C - 2 - \ln 2); \quad (13.36)$$

$$m = m_0 \left(1 - \frac{3e^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \right). \quad (13.37)$$

Переходя от функции $G(x)$ (13.35) к ее преобразованию Фурье, получим в окрестности особенности $p^2 \approx -m^2$

$$G(\hat{p}) \approx \frac{\hat{m} - i\hat{p}}{m^2 \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right)^{1 + 3e^2/8\pi^2}} \left(1 - \frac{3e^2}{4\pi^2} \right). \quad (13.38)$$

Входящие в эту формулу параметры — коэффициент перед функцией Грина $1 - \frac{3e^2}{4\pi^2}$, физическая масса электрона m , и показатель степени $1 + \frac{3e^2}{8\pi^2}$ — вычислены во втором порядке теории возмущений.

Покажем, что асимптотическая формула

$$G(\hat{p}) = a \frac{m - i\hat{p}}{(m^2 + p^2)^{1 + 3e^2/8\pi^2}} \quad (13.39)$$

остаётся справедливой, если не делать указанные выше приближения 1, 2. В этом случае показатель степени e имеет смысл физического (ренормированного) заряда. Выберем параметр k_0 сколь угодно малым и используем приближённую формулу (13.14), точность которой увеличивается при уменьшении k_0 . Взяв интеграл по ферми-полям, необходимо затем проинтегрировать по быстропеременному полю произведение (13.14). Заметим, что параметр e в этой формуле — это затравочный (неренормированный) заряд. Экспоненциальный множитель в (13.14) выносится за знак интеграла по $A^{(1)}$. Интеграл от функции Грина $G(x, y; A^{(1)})$ вычисляется по формуле

$$\int G(x, y; A^{(1)}) \exp(S_0[A]) \det[\hat{\partial} - m - ie_0(A^{(0)} + A^{(1)})] \times \\ \times \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dA = G_{k_0}(x, y) \exp(S[A^{(0)}]), \quad (13.40)$$

где

$$G_{k_0}(x, y) =$$

$$= \frac{\int G(x, y; A^{(1)}) \exp(S_0[A^{(1)}]) \det[\hat{\partial} - m - ie_0 A^{(1)}] \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dA}{\int \exp(S_0[A]) \det[\hat{\partial} - m - ie_0 \hat{A}] \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dA} \quad (13.41)$$

есть квантовая функция Грина в быстропеременном поле, а функционал

$$\begin{aligned} & \exp(S[A^{(0)}]) = \\ & = \int \exp(S_0[A]) \det[\tilde{\partial} - m - ie_0(A^{(0)} + A^{(1)})] \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dA \end{aligned} \quad (13.42)$$

получен в результате интегрирования функционала $\exp S$ по ферми-полям и быстропеременному полю $A_\mu^{(1)}$. Выражение $S[A^{(0)}]$, имеющее смысл действия медленно меняющегося поля, представлено как

$$-\frac{1}{4Z} \int (\partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)})^2 d^4x + \dots, \quad (13.43)$$

где точками обозначены члены с высшими производными и функционалы выше второй степени. Константа $Z = Z_3$ имеет смысл отношения квадратов затравочного и физического зарядов:

$$Z = Z_3 = e^2/e_0^2 \quad (13.44)$$

Это ясно из того, что если вычислять фотонную функцию Грина при малых k , то в первом приближении по k она и есть в точности функция Грина оператора в квадратичной форме (13.43) и имеет вид

$$ZD_{\mu\nu}(k) = \frac{Z}{k^4} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu). \quad (13.45)$$

Таким образом, Z есть константа перенормировки Z_3 фотонной функции Грина, равная, как известно, e^2/e_0^2 .

Возвращаясь к электронной функции Грина, видим, что осталось найти инфракрасный множитель по формулам, приведенным выше (13.20), причем параметр Z в (13.43) превращает e_0 в e .

Функция $G_{k_0}(x, y)$ (13.41), учитывающая только быстропеременное поле, имеет в p -представлении полюс $\sim(p^2 + m_k^2)^{-1}$, а в x -представлении — асимптотику типа (13.34). В результате для функции $G(x)$ получим асимптотику типа (13.35), а для $G(p)$ — (13.39), в которых e^2 — квадрат перенормированного заряда.

Рассмотренный здесь метод получения инфракрасной асимптотики применим к любой теории электромагнитного взаимодействия, в которой электромагнитное поле вводится заменой обычных производных ∂_μ ковариантными $\nabla_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Например, в скалярной электродинамике с действием (в евклидовой метрике)

$$-\int (|(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi|^2 + m^2|\psi|^2) d^4x \quad (13.46)$$

функция Грина скалярного поля имеет в p -представлении при $p^2 \approx -m^2$ вид

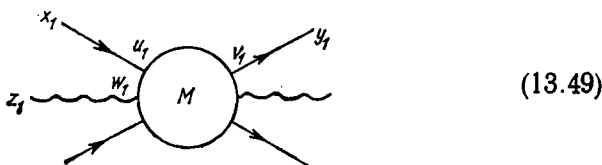
$$-\frac{Z_2}{m} \left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right)^{-1 - 3e^2/8\pi^2}, \quad (13.47)$$

где Z_2 — ренормировочная постоянная. Дело в том, что формула (13.14) для функции Грина частицы заряда e в медленно меняющемся поле является универсальной. Это приводит к универсальности инфракрасного множителя (13.47), который и определяет показатель степени в асимптотике при $p^2 \approx -m^2$.

Рассмотрим общий случай функции Грина вида

$$\langle \psi(x_1), \dots, \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1), \dots, \bar{\psi}(y_n) A_{\mu_1}(z_1), \dots, A_{\mu_k}(z_k) \rangle. \quad (13.48)$$

Найдем асимптотику этой функции, когда ее аргументы $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k$ удалены друг от друга. Именно эта асимптотика определяет асимптотику в импульсном пространстве вблизи поверхности масс. Запишем функцию (13.48) в виде континуального интеграла и проинтегрируем сначала по спинорному полю $\psi, \bar{\psi}$, а затем по быстропеременному полю $A_{\mu}^{(1)}$. На этом этапе можно использовать обычную диаграммную технику с указанными выше, в § 12 (см. с. 94), модификациями. Нетривиальная часть функции (13.48) дается суммой всех связанных диаграмм вида



где M — неприводимая связанная часть.

Соответствующее диаграмме (13.48) выражение имеет вид

$$\prod_{i=1}^n G_{k_0}(x_i, u_i; A^{(0)}) G_{k_0}(v_i, y_i; A^{(0)}) \times \\ \times \prod_{j=1}^k D_{\mu_j \nu_j}(z_j, w_j; A^{(0)}) M_{k_0, \nu_1, \dots, \nu_k}(u_i, v_i, w_j). \quad (13.50)$$

Здесь $G_{k_0}(x, u; A^{(0)})$ — квантовая функция Грина электрона в медленно меняющемся поле $A^{(0)}$. Она дается приближенной формулой

$$G_{k_0}(x, u; A^{(0)}) \approx G_{k_0}(x-u) \exp\left(i e \int_u^x A_{\mu}^{(0)}(z) dz_{\mu}\right), \quad (13.51)$$

где первый множитель есть квантовая функция Грина электрона, полученная усреднением по быстропеременному полю $A_{\mu}^{(1)}$. В качестве функций D и M можно использовать квантовые функции, вычисленные при учете взаимодействия электронов только с быстропеременным полем.

Интеграл по медленно меняющемуся полю — это гауссов интеграл от выражения

$$\exp K \equiv \exp \left\{ -\frac{1}{4Z_3} \int (\partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)})^2 d^4x + \right. \\ \left. + i \sum_{i=1}^{2n} e_i \int_{u_i}^{x_i} A_\mu(z) dz_\mu \right\}, \quad (13.52)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x_i = x_i; \quad u_i = u_i; \quad e_i = e; \quad 1 \leq i \leq n; \\ x_i = y_i; \quad u_i = v_i; \quad e_i = -e; \quad n+1 \leq i \leq 2n. \end{aligned} \right\} \quad (13.53)$$

Гауссов интеграл по $\exp K$ назовем инфракрасным множителем, соответствующим функции Грина (13.48). Он имеет вид

$$\langle \exp K \rangle_{A^{(0)}} = \exp(-X), \quad (13.54)$$

где

$$X = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int_{k < k_0} \frac{d^4k}{k^4} \sum_{i,j=1}^{2n} e_i e_j \left(\frac{k^2 (x_i - u_i, x_j - u_j)}{(k, x_i - u_i)(k, x_j - u_j)} - 1 \right) \times \\ \times (\exp(ix_i k) - \exp(iu_i k)) (\exp(-ix_j k) - \exp(-iu_j k)). \quad (13.55)$$

Таким образом, для выражения, соответствующего диаграмме (13.49), получается формула

$$\exp(-X) \prod_{i=1}^n G_{k_0}(x_i - u_i) G_{k_0}(v_i - y_i) \times \\ \times \prod_{j=1}^u D_{\mu_j \nu_j}(z_j - w_j) M_{k_0, \nu_1, \dots, \nu_n}(u_i, v_i, w_j). \quad (13.56)$$

Зависимость от k_0 в функциях G , D , M должна сократиться при умножении на инфракрасный множитель $\exp(-X)$.

Найдем импульсное представление от выражения (13.56). Заметим, что в выражении

$$(\exp(ikx_i) - \exp(iku_i)) (\exp(-ikx_j) - \exp(-iku_j)) = \\ = \exp[ik(u_i - u_j)] \times \\ \times (\exp[ik(x_i - u_i)] - 1) (\exp[-ik(x_j - u_j)] - 1),$$

которое фигурирует в $\exp(-X)$, множитель $\exp[ik(u_i - u_j)]$ можно считать равным единице, так как главный вклад в интеграл по u_i, v_j , дает область, где u_i и v_j достаточно близки ($k_0 |u_i - u_j| \ll \ll 1$). Можно считать, таким образом, что выражение

$$\exp(-X) \prod_{i=1}^n G_{k_0}(x_i - u_i) G_{k_0}(v_i - y_i) \quad (13.57)$$

зависит от разностей $x_i - u_i$, $y_i - v_i$ (так как M зависит от u_i , v_i , w_i ; $D_{\mu\nu}$ — от $z_i - w_i$). Взяв преобразование Фурье по аргументам $x_i - u_i$, $y_i - v_i$, $z_i - w_i$, u_i , v_i , w_i , получим

$$\prod_{i=1}^n (-i\hat{p}_i + m) \prod_{j=1}^n (-i\hat{p}_j - m) \prod_{s=1}^k D_{\nu_s \nu_s}(k_s) \times \\ \times M_{\nu_1, \dots, \nu_s}(p_1, \dots, p_{2n}, q_1, \dots, q_k) \delta\left(\sum_{i=1}^{2n} p_i + \sum_{s=1}^k q_s\right) \times \\ \times \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_i d\sigma_i \exp(i \sum_i (p_i^2 + m_i^2) \sigma_i - Y), \quad (13.58)$$

где

$$Y = \frac{im^2 e^2}{2\pi^2} \sum_i \sigma_i + \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{e_i e_j}{2(2\pi)^4} \int_{k < k_0} \frac{d^4 k}{k^4} (\exp[2i\sigma_i(p_i k)] - 1) \times \\ \times (\exp[-2i\sigma_j(p_j k)] - 1) \left(\frac{k^2(p_i p_j)}{(kp_i)(kp_j)} - 1 \right). \quad (13.59)$$

Входящий в выражение (13.58) интеграл имеет степенные особенности $\sim (1 + p_i^2/m^2)^{-1-(3e^2/8\pi^2)}$ по каждой из импульсных переменных p_i вблизи массовой оболочки $p_i^2 \approx -m^2$.

РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

§ 14. ДВАЖДЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Применим метод континуального интегрирования к некоторым задачам рассеяния частиц высоких энергий. В этом параграфе получим дважды логарифмическую асимптотику вершинной функции Грина в квантовой электродинамике. В следующем параграфе выведено эйкональное приближение для амплитуды рассеяния двух частиц в модели скалярного поля ϕ массы M , взаимодействующего с другим скалярным полем u массы $m \ll M$ по закону $g\phi u^2$.

Понятие *дважды логарифмическая асимптотика* появилось в квантовой электродинамике при исследовании амплитуды рассеяния электрона внешним полем с большой передачей импульса:

$$(p_1 - p_2)^2 \equiv p_{12}^2 \gg m^2, \quad (14.1)$$

где p_1 и p_2 — импульсы начального и конечного состояний. В работах [137—138] было показано, что для получения правильного ответа необходимо просуммировать бесконечное число «главных» диаграмм теории возмущений. Затем эти результаты были получены более естественным методом континуального интегрирования [60].

Выведем только главный член асимптотики вершинной части. Метод аналогичен использованному выше, в § 13, для получения инфракрасной асимптотики. Покажем, что интересующий нас результат содержится по существу в формулах (13.58), (13.59) для амплитуд квантовой электродинамики и может быть извлечен из них после соответствующей модификации. Эти формулы не обязательно использовать на поверхности масс в пределе $k_i^2 \rightarrow 0$, $p_i^2 \rightarrow m^2$. Вне поверхности масс эти формулы описывают виртуальные процессы с точным учетом взаимодействия с длинноволновыми фотонами. Именно это взаимодействие и приводит к дважды логарифмической асимптотике вершинной части в области

$$(p_1 - p_2)^2 \gg p_1^2, \quad p_2^2 \gg m^2. \quad (14.2)$$

В дальнейшем в первом приближении будем пренебрегать членами порядка $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ по сравнению с единицей. Предположим, что неравенство

$$\alpha \ln \frac{p^2}{m^2} \ll 1 \quad (14.3)$$

выполняется для всех фигурирующих далее импульсов $p = p_1, p_2, p_{1,2}$ и будем пренебрегать членами порядка $\alpha \ln p^2/m^2$ по сравнению с единицей. Область, где величина $\alpha \ln p^2/m^2$ порядка единицы, — это область очень высоких энергий, в настоящее время экспериментально недостижимая. В то же время будем считать, что

$$\alpha \ln^2 \frac{p_{1,2}^2}{p_1^2} \gtrsim 1. \quad (14.4)$$

Другими словами, логарифмы отношений импульсов, малые по сравнению с величиной α^{-1} , считаем сравнимыми по порядку с $\alpha^{-1/2}$.

Вершинную часть получим, полагая в (13.58) $n = 1, k = 1$. Для импульсов $p_1, p_2, p_{1,2}$ в области (14.2) главный вклад в интегралы по σ_i дают $\sigma_i \sim p_i^{-2}$. Верхний предел k_0 в интегралах по k в (13.59) подчиним условию

$$k_0^2 \lesssim p_{1,2}^2, \quad (14.5)$$

означающему, что мы считаем длинноволновыми фотоны с импульсами, меньшими переданного импульса $p_{1,2}$. Компоненты импульсов электрона p_1, p_2 должны быть порядка $p_{1,2}$ в силу закона сохранения 4-импульса $p_1 - p_2 = p_{1,2}$. Поэтому однократный акт взаимодействия с фотоном с импульсом $k < k_0$ не влияет существенно на движение электрона.

Рассмотрим выражение Y (13.59). Первым слагаемым $\frac{ime^2}{2\pi^2} \sum_i \sigma_i$ в области $\sigma_i \sim p_i^{-2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Остается сумма четырех интегралов

$$Y_{11} + Y_{22} + Y_{12} + Y_{21}. \quad (14.6)$$

Вычислим сначала

$$\begin{aligned} Y_{12} = & -\frac{e^2}{2(2\pi)^4} \int_{k < k_0} \frac{d^4 k}{k^4} (\exp[2i\sigma_1(p_1 k)] - 1) (\exp[-2i\sigma_2(p_2 k)] - 1) \times \\ & \times \left(\frac{k^2(p_1 p_2)}{(kp_1)(kp_2)} - 1 \right) = -\frac{e^2(p_1 p_2)}{2(2\pi)^4} \int_{k < k_0} d^4 k (\exp[2i\sigma_1(p_1 k)] - 1) \times \\ & \times (\exp[-2i\sigma_2(p_2 k)] - 1) [k^2(kp_1)(kp_2)]^{-1} + \\ & + \frac{e^2}{2(2\pi)^4} \int_{k < k_0} \frac{d^4 k}{k^4} (\exp[2i\sigma_1(p_1 k)] - 1) (\exp[-2i\sigma_2(p_2 k)] - 1). \quad (14.7) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (14.7) есть величина порядка

$$\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{(\sigma_1 p_1 - \sigma_2 p_2)^2}{\sigma_1^2 p_1^2 \sigma_2^2 p_2^2 k_0^2}, \quad (14.8)$$

которой можно пренебречь по сравнению с единицей.

Вычислим первое слагаемое в правой части (14.7) в области импульсов (14.2). Перейдя к псевдоевклидовой метрике для импульсов

p_1, p_2 и импульса интегрирования k , получим для Y_{12} выражение вида

$$Y_{12} \approx -\frac{ie^2 (p_1 p_2)}{2(2\pi)^4} \int d^4 k (\exp [2i\sigma_1 (p_1 k)] - 1) (\exp [-2i\sigma_2 (p_2 k)] - 1) \times \\ \times [(p_1 k) (p_2 k) (k^2 - i0)]^{-1}, \quad (14.9)$$

в котором скалярное произведение и квадраты векторов понимаются в псевдоевклидовой метрике $(ab) = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$.

Для вычисления интеграла (14.9) удобно перейти к новым переменным интегрирования. С этой целью представим вектор k в виде

$$k = k_{\perp} + u (kp_1) + v (kp_2), \quad (14.10)$$

где u, v — два 4-вектора в подпространстве, порожденном векторами p_1, p_2 , удовлетворяющими условиям

$$u^2 = v^2 = 0; \quad (14.11)$$

$$(uk_{\perp}) = (vk_{\perp}) = 0. \quad (14.12)$$

Решение u, v уравнений (14.11), (14.12) имеет вид

$$u = \alpha (p_2 + \beta p_1); \quad v = \beta (p_1 + \alpha p_2) \quad (14.13)$$

с $|\alpha|, |\beta| \ll 1$. Условия (14.11) приводят в области (14.2) к формулам

$$\alpha \approx -\frac{p_2^2}{2p_1 p_2} \approx \frac{p_2^2}{p_{1,2}^2}; \quad \beta \approx -\frac{p_1^2}{2(p_1 p_2)} \approx \frac{p_1^2}{p_{1,2}^2}. \quad (14.14)$$

Условия (14.12) сводятся к

$$(k_{\perp} p_1) = (k_{\perp} p_2) = 0, \quad (14.15)$$

и получается

$$a \approx b \approx \frac{1}{(p_1 p_2)} \approx -\frac{2}{p_{1,2}^2}. \quad (14.16)$$

Разложение (14.10) приводит к формуле

$$k^2 = 2(uv)(kp_1)(kp_2) + k_{\perp}^2. \quad (14.17)$$

Вектор k_{\perp} , ортогональный в силу (14.15) времениподобным векторам p_1 и p_2 , сам является пространственно-подобным, а его квадрат

$$k_{\perp}^2 = -r^2 \quad (14.18)$$

есть с обратным знаком квадрат евклидова двумерного вектора g . Компоненты этого вектора вместе с $(kp_1), (kp_2)$ возьмем за новые переменные интегрирования. Имеем

$$d^4 k = |J| d(kp_1) d(kp_2) d^2 r, \quad (14.19)$$

где J — якобиан перехода к переменным $(kp_1), (kp_2)$ в плоскости, порожденной p_1, p_2 , определяемый формулой

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix} \right|^{1/2} = |(uv)| = |(p_1 p_2)|^{-1}. \quad (14.20)$$

В новых переменных выражение (14.9) принимает вид

$$Y_{12} \approx -\frac{ie^2}{2(2\pi)^4} \int d(kp_1) d(kp_2) d^2 r (\exp[2i\sigma_1(kp_1)] - 1) \times \\ \times (\exp[-2i\sigma_2(kp_2)] - 1) (kp_1)^{-1} (kp_2)^{-1} \left[r^2 + \frac{4}{p_{1,2}^2} (kp_1)(kp_2) + i0 \right]^{-1}. \quad (14.21)$$

Интегралы в (14.21) предполагаются обрезанными на пределах $r \sim \sim k_0$, (kp_1) , $(kp_2) \sim k_0 |p_{1,2}|$. Точные значения этих пределов при вычислениях с логарифмической точностью не существенны.

Интеграл по r в (14.21) есть

$$\int \frac{d^2 r}{r^2 + \frac{4}{p_{1,2}^2} (kp_1)(kp_2) + i0} = \pi \int_0^{k_0^2} \frac{d^2 r}{r^2 + \frac{4}{p_{1,2}^2} (kp_1)(kp_2) + i0} = \\ = \pi \ln \left| \frac{k_0^2 p_{1,2}^2}{4 (kp_1)(kp_2)} \right| - i\pi^2 \theta(-(kp_1)(kp_2)). \quad (14.22)$$

При интегрировании первого слагаемого по (kp_1) , (kp_2) получается выражение

$$\frac{ie^2 \pi}{2(2\pi)^4} \left[\ln(k_0^2 p_{1,2}^2 \sigma_1 \sigma_2) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \right)^2 + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} \ln \frac{1}{|z|} dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \right] \approx \frac{i\alpha}{8\pi} \ln(k_0^2 p_{1,2}^2 \sigma_1 \sigma_2), \quad (14.23)$$

малое по сравнению с единицей при $k_0^2 \lesssim p_{1,2}^2$, $\sigma_1 \sim p_1^{-2}$, $\sigma_2 \sim p_2^{-2}$.

Главный вклад в интеграл по (kp_1) , (kp_2) дает второе слагаемое в (14.22). Интегрирование с логарифмической точностью дает выражение

$$Y_{12} \approx -\frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^{k_0 |p_{1,2}|} \frac{d(kp_1)}{(kp_1)} (\exp[2i\sigma_1(kp_1)] - 1) \times \\ \times \int_{-k_0 |p_{1,2}|}^0 \frac{d(kp_2)}{(kp_2)} (\exp[-2i\sigma_2(kp_2)] - 1) = \\ = \frac{e^2}{16\pi^2} \ln(k_0 |p_{1,2}| \sigma_1) \ln(k_0 |p_{1,2}| \sigma_2). \quad (14.24)$$

Очевидно, $Y_{21} = Y_{12}$. Аналогичное рассмотрение интегралов Y_{12} , Y_{22} приводит к выводу, что они малы по сравнению с единицей (порядка $\frac{\alpha}{2\pi} \ln \sigma_i |p_i| k_0$), и ими можно пренебречь.

Заменяя с логарифмической точностью $\sigma_1 \sim p_1^{-2}$, $\sigma_2 \sim p_2^{-2}$, $k_0^2 \sim p_{1,2}^2$ в (14.24), получаем для Y приближенную формулу

$$Y \approx Y_{12} + Y_{21} = \frac{e^2}{8\pi} \ln \frac{p_{1,2}^2}{p_1^2} \ln \frac{p_{1,2}^2}{p_2^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{p_{1,2}^2}{p_1^2} \ln \frac{p_{1,2}^2}{p_2^2}, \quad (14.25)$$

не содержащую σ_i . Это позволяет вынести $\exp(-Y)$ за знак интеграла по σ_i . Выполнив интегрирование по σ_i , получим выражение

$$\delta(p_1 - p_2 + k) \frac{(-i\hat{p}_1 + m)}{p_1^2 + m^2} \frac{(-i\hat{p}_2 - m)}{p_2^2 + m^2} D_{\mu\nu}(k) M_\nu \exp(-Y). \quad (14.26)$$

Взяв первое приближение $M_\nu = e\gamma_\nu$, получим для неприводимой вершинной части Γ_μ формулу

$$\Gamma_\mu \approx e\gamma_\mu \exp\left(-\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{p_{1,2}^2}{p_1^2} \ln \frac{p_{1,2}^2}{p_2^2}\right), \quad (14.27)$$

дающую дважды логарифмическую асимптотику.

При выводе формул такого типа методами теории возмущений необходимо выполнить суммирование рядов, первые члены которых больше по порядку, чем результат суммирования. Это значит, что члены ряда сокращают друг друга. По этой причине вывод дважды логарифмической асимптотики методом континуального интегрирования представляется более предпочтительным.

Напомним, что исходным пунктом была приближенная формула (13.11) для функции Грина электрона в медленно меняющемся поле.

§ 15. ЭЙКОНАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Применим метод континуального интегрирования к выводу формулы так называемого *эйконального приближения* для амплитуды рассеяния частиц высоких энергий. Для иллюстрации метода выбрана модель релятивистской теории поля, действие которой в евклидовых переменных имеет вид

$$S = -\frac{1}{2} \int [(\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2 + (\nabla u)^2 + \mu^2 u^2 + g\varphi^2 u] d^4x. \quad (15.1)$$

Действие (15.1) описывает систему двух вещественных скалярных полей φ и u , взаимодействующих по закону $\sim \varphi^2 u$. В дальнейшем будем считать, что

$$m \gg \mu. \quad (15.2)$$

Рассмотрим рассеяние двух тяжелых частиц (массы m) высокой энергии, так что

$$s \gg m, \quad (15.3)$$

где s — энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс.

Амплитуду рассеяния этого процесса можно получить из функции Грина евклидовой теории

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle \quad (15.4)$$

после перехода к преобразованию Фурье с последующим аналитическим продолжением на массовую поверхность. Знак $\langle \dots \rangle$ в (15.4) означает, как обычно, усреднение по всем полям с весом $\exp S$:

$$\langle X \rangle = \frac{\int X \exp S \prod_x d\varphi(x) du(x)}{\int \exp S \prod_x d\varphi(x) du(x)}. \quad (15.5)$$

Интегрирование по полю тяжелых частиц $\varphi(x)$ можно провести явно с помощью формул

$$\frac{\int (\exp S) [\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)] \prod_x d\varphi(x)}{\int \exp S \prod_x d\varphi(x)} = G(x_1, x_2 | u) G(x_3, x_4 | u) + G(x_1, x_3 | u) G(x_2, x_4 | u) + G(x_1, x_4 | u) G(x_2, x_3 | u); \quad (15.6)$$

$$\frac{\int \exp S \prod_x d\varphi(x)}{\int \exp S [g=0] \prod_x d\varphi(x)} = \det(\hat{M}/\hat{M}_0), \quad (15.7)$$

где \hat{M} — оператор:

$$\hat{M} = -\nabla^2 + m^2 + gu(x); \quad (15.8)$$

\hat{M}_0 — оператор \hat{M} при $g = 0$; $G(x, y | u)$ — функция Грина оператора \hat{M} .

Считая в первом приближении множитель $\det(\hat{M}/\hat{M}_0)$ равным единице, что означает пренебрежение эффектами поляризации вакуума, сведем вычисление функции Грина (15.4) к усреднению выражения (15.6) по полю легких частиц $u(x)$ с весом

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int ((\nabla u)^2 + \mu^2 u^2) d^4 x \right\}. \quad (15.9)$$

Для приближенного усреднения используем асимптотический вид функции Грина $G(x, y | u)$ при $|x - y| \rightarrow \infty$. Его можно получить из следующих соображений. При $g = 0$ функция Грина оператора \hat{M} имеет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp [i(k, x-y)]}{k^2 + m^2} d^4 k. \quad (15.10)$$

В пределе $x - y \rightarrow \infty$ это выражение имеет асимптотический вид

$$m^{1/2} (2\pi |x-y|)^{-3/2} \exp(-m|x-y|). \quad (15.11)$$

Если $g \neq 0$, то при вычислении функции Грина оператора \hat{M} (15.8) выражение $gu(x)$ можно считать поправкой к квадрату массы m^2 и говорить о функции Грина частицы с «переменной массой»:

$$m(x) = (m^2 + gu(x))^{1/2} \approx m + \frac{gu(x)}{2m}. \quad (15.12)$$

Считая поправку $\frac{gu(x)}{2m}$ к массе m малой по сравнению с самой массой, можно получить асимптотику функции Грина частицы с «переменной массой» заменой в показателе экспоненты

$$m|x-y| = m \int ds \rightarrow \int m(x) ds \approx m \int ds + \frac{g}{2m} \int u(x) ds. \quad (15.13)$$

Таким образом, получаем приближенную формулу

$$G(x, y|u) \approx G_0(x-y) \exp\left(-\frac{g}{2m} \int_x^y u(z) ds(z)\right). \quad (15.14)$$

Здесь интеграл \int_x^y считается взятым по прямой, соединяющей точки x и y .

Подставим выражение (15.14) в правую часть (15.6). Второе слагаемое примет вид

$$G_0(x_1-x_3) G_0(x_2-x_4) \exp\left\{-\frac{g}{2m} \left(\int_{x_1}^{x_3} u(z) ds(z) + \int_{x_2}^{x_4} u(z) ds(z)\right)\right\}. \quad (15.15)$$

Первое и третье слагаемые получаются из него перестановками аргументов. Усреднение выражения (15.15) по полю $u(x)$ с весом (15.9) сводится к вычислению гауссова континуального интеграла и дает результат

$$G_0(x_1-x_3) G_0(x_2-x_4) \exp \frac{g^2}{8m^2 (2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + \mu^2} \times \\ \times \left| \int_{x_1}^{x_3} \exp(ikz) ds(z) + \int_{x_2}^{x_4} \exp(ikz) ds(z) \right|^2. \quad (15.16)$$

Следующая задача состоит в переходе к преобразованию Фурье с выходом на массовую поверхность. Рассмотрим амплитуду, соответствующую переданному импульсу, малому по сравнению с самим импульсом в системе центра масс. Другими словами, будем рассматривать рассеяние частиц на малые углы. В этом случае из трех слагаемых типа (15.16), соответствующих трем слагаемым в правой части формулы (15.6), главный вклад дает одно из них, описывающее прямое рассеяние без обмена. Пусть таким главным слагаемым будет (15.16).

Показатель экспоненты в (15.16) можно разбить на четыре слагаемых. Одно из них описывает виртуальное взаимодействие тяжелой частицы, распространяющейся по пути $x_1 \rightarrow x_3$ с легкими ча-

стицами. Второе слагаемое соответствует аналогичному взаимодействию для второй тяжелой частицы, распространяющейся по пути $x_2 \rightarrow x_4$. Указанные слагаемые дают вклад в перенормировку массы и перенормировку вычета в полюсе функции Грина тяжелой частицы.

В первом приближении не будем учитывать указанные слагаемые перенормировочного типа.

Эффект рассеяния зависит от перекрестных членов, описывающих обмен легкими квантами между двумя тяжелыми частицами. Их сумму можно записать в виде

$$\frac{g^2}{8m^2 (2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + \mu^2} \left(\int_{x_1}^{x_2} \exp(i k z_1) ds(z_1) \int_{x_2}^{x_4} \exp(-i k z_2) ds(z_2) + \int_{x_1}^{x_3} \exp(-i k z_1) ds(z_1) \int_{x_3}^{x_4} \exp(i k z_2) ds(z_2) \right). \quad (15.17)$$

В этом месте удобно перейти к псевдоевклидовой метрике, заменив

$$\left. \begin{aligned} d^4 k &\rightarrow id^4 k, \quad k^2 \rightarrow -k^2 - i0, \\ ds(z) &\rightarrow ids(z). \end{aligned} \right\} \quad (15.18)$$

Выражение (15.17) переходит в

$$\frac{ig^2}{8m^2 (2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \mu^2 + i0} \left[\int_{x_1}^{x_2} \exp(ikz_1) ds(z_1) \int_{x_2}^{x_4} \exp(-ikz_2) ds(z_2) + \int_{x_1}^{x_3} \exp(-ikz_1) ds(z_1) \int_{x_3}^{x_4} \exp(ikz_2) ds(z_2) \right]. \quad (15.19)$$

Вычислим интегралы по $ds(z)$, считая, что тяжелые частицы движутся по прямолинейным траекториям со скоростями v_1, v_2 . Тогда:

$$ds_i(z) = \sqrt{1 - v_i^2} dt_i; \quad z_i = z_i + v_i t_i; \quad (15.20)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \exp(ikz_1) ds(z_1) &= \exp(ikz_1) \sqrt{1 - v_1^2} \int \exp[i(kv_1)t] dt = \\ &= 2\pi \exp(ikz_1) \sqrt{1 - v_1^2} \delta(kv_1), \end{aligned} \quad (15.21)$$

а выражение (15.19) оказывается равным

$$\begin{aligned} &\frac{ig^2 \sqrt{1 - v_1^2} \sqrt{1 - v_2^2}}{4m^2 (2\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \mu^2 + i0} \delta(kv_1) \delta(kv_2) \cos(k, z_1 - z_2) = \\ &= \frac{ig^2}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \mu^2 + i0} \delta(kp_1) \delta(kp_2) \cos(k, z_1 - z_2). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Это выражение легко вычислить в системе центра масс, где

$$p = (p_0, p_1, 0, 0); \quad \bar{p}_2 = (p_0, -p_1, 0, 0). \quad (15.23)$$

Интеграл по составляющим k_0, k_1 импульса k дает множитель

$$(p_0^2 + p_1^2)^{-1} = ((s/2) - m^2)^{-1}, \quad (15.24)$$

где s — энергия в системе центра масс. Остается интеграл по поперечным переменным

$$\begin{aligned} & \frac{ig^2}{(2s-4m^2)(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k_{\perp}}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \cos(k_{\perp}, z_1 - z_2) = \\ & = \frac{ig^2}{2s-4m^2} N_0(\mu |z_1 - z_2|) = i\chi, \end{aligned} \quad (15.25)$$

выражающийся через $N_0(\mu |z_1 - z_2|)$ — функцию Неймана, имеющую асимптотику при малых аргументах:

$$N_0(x) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln x. \quad (15.26)$$

Таким образом, усреднение по $u(x)$ экспоненты

$$\exp - \frac{g}{2m} \left(\int_{x_1}^{x_3} u(z) ds(z) + \int_{x_2}^{x_4} u(z) ds(z) \right) \quad (15.27)$$

дает при переходе к псевдоевклидовой метрике так называемый *эйконоальный фазовый множитель*

$$\exp i\chi, \quad (15.28)$$

где χ определено формулой (15.25). Для функции Грина (15.4) получается приближенная формула

$$G_0(x_1 - x_3)G_0(x_2 - x_4)\exp(i\chi). \quad (15.29)$$

Вычтя отсюда выражение $G_0(x_1 - x_3)G_0(x_2 - x_4)$, описывающее прохождение частиц без рассеяния, получим

$$G_0(x_1 - x_3)G_0(x_2 - x_4)(\exp(i\chi) - 1). \quad (15.30)$$

Чтобы получить из этого выражения амплитуду рассеяния, необходимо перейти к преобразованию Фурье и вычислить коэффициент при $\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$. Ясно, что амплитуда f пропорциональна преобразованию Фурье от выражения $\exp(i\chi) - 1$, которое зависит от поперечной переменной:

$$f = a \int \exp[ip_{\perp}(z_1 - z_2)_{\perp}] (\exp(i\chi) - 1) d^2(z_1 - z_2)_{\perp}, \quad (15.31)$$

причем параметр p_{\perp} имеет смысл переданного импульса. Коэффициент пропорциональности a в первом приближении не зависит от константы связи g и может быть найден переходом к пределу $g \rightarrow 0$ в левой и правой частях в (15.31). Предел левой части легко

найти, учтя, что в пределе $g \rightarrow 0$ амплитуда дается простейшей диаграммой



$$(15.32)$$

выражение для которой есть

$$\frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - \mu^2} = - \frac{g^2}{p_{\perp}^2 + \mu^2}, \quad (15.33)$$

где p_{\perp}^2 — квадрат переданного импульса в системе центра масс. Правая часть (15.31) в пределе $g \rightarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} i a \int \exp[ip_{\perp}(z_1 - z_2)_{\perp}] \chi d^2(z_1 - z_2)_{\perp} &= - \frac{i a g^2}{(2s - 4m^2)(2\pi)^2} \times \\ \times \int \exp[ip_{\perp}(z_1 - z_2)_{\perp}] \frac{\cos k_{\perp}(z_1 - z_2)_{\perp}}{k_{\perp}^2 + \mu^2} d^2(z_1 - z_2)_{\perp} d^2 k_{\perp} &= \\ = \frac{i a g^2}{(2s - 4m^2)(p_{\perp}^2 + \mu^2)}. \end{aligned} \quad (15.34)$$

Сравнив с (15.33), получим

$$a = i(2s - 4m^2). \quad (15.35)$$

Окончательная формула эйконального приближения для амплитуды рассеяния имеет вид

$$f = i(2s - 4m^2) \int d^2 z_{\perp} (\exp[i\chi(z_{\perp})] - 1) \exp(ip_{\perp} z_{\perp}). \quad (15.36)$$

Формула учитывает многократный обмен квантами легких частиц между тяжелыми частицами, движущимися в первом приближении по прямолинейным траекториям. Приведенный здесь ее вывод близок по идее к выводу инфракрасной асимптотики функций Грина квантовой электродинамики в гл. 4 и дважды логарифмической асимптотики в предыдущем параграфе.

Другие способы вывода эйконального приближения в формализме континуального интеграла можно найти в работах многих авторов [67—71]. Нетрудно получить и высшие приближения к основному приближению прямолинейных путей. Например в работах [70, 71] рассматривается учет поправок поляризации вакуума и развит метод вычисления вклада в амплитуду за счет обмена сложными комплексами между двумя основными частицами.

Здесь не будем рассматривать эти вопросы и выходить за рамки приближения, соответствующего обмену легкими частицами, которое приводит к эйкональной формуле (15.36).

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ

§ 16. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СВЕРХТЕКУЧИХ БОЗЕ-СИСТЕМ

Использование континуального интегрирования для вывода теории возмущений статистической физики рассмотрено в § 6. Такая теория возмущений применима, вообще говоря, только при достаточно высоких температурах — выше температуры фазового перехода. В системе взаимодействующих бозе-частиц (*бозе-системе*) возможен переход в сверхтекучее состояние, связанный с появлением *конденсата* — макроскопически заполненного нижнего квантового уровня.

Впервые задача о бозе-газе со слабым взаимодействием была решена Н. Н. Боголюбовым в 1947 г. [73]. Высшие приближения рассматривались в работе Н. Н. Боголюбова и Д. Н. Зубарева [74] с помощью метода коллективных переменных, а также Ю. А. Церковниковым [75] и В. В. Толмачевым [76], которые использовали метод температурных функций Грина.

Методы квантовой теории поля к бозе-газу малой плотности при $T = 0$ впервые применялись С. Т. Беляевым [77], а также Пайнсом и Гугенгольцем [78].

Задача о бозе-газе при $T \neq 0$ с помощью метода псевдопотенциала рассмотрена в работах Ли и Янга [80]. Отметим еще работы [81—88], посвященные различным вопросам теории сверхтекучих бозе-систем.

Как было выяснено в работах [90—93], характерным признаком сверхтекучести следует считать не сам по себе конденсат, а наличие дальнедействующих корреляций. Это означает, что средние

$$\langle \psi(x, \tau) \bar{\psi}(y, \tau_1) \rangle \quad (16.1)$$

убывают при $r = |x - y| \rightarrow \infty$ не экспоненциально, как при температуре выше перехода, а степенным образом. Именно такое поведение средних (16.1) имеет место в двумерной модели бозе-газа при низких температурах и в одномерной при $T = 0$. В трехмерной же сверхтекучей системе среднее (16.1) при $r \rightarrow 0$ стремится к постоянной ρ_0 , которое и есть плотность конденсата.

В этой главе метод континуальных интегралов применяется к различным вопросам теории бозе-систем. Начнем с рассмотрения трехмерной бозе-системы, в которой возможно образование конденсата.

Простейший вариант теории возмущений, учитывающей конденсат получается в формализме континуального интеграла, если сделать сдвиг в функционале действия (6.1)

$$\psi(x, \tau) \rightarrow \psi(x, \tau) + \alpha; \quad \bar{\psi}(x, \tau) \rightarrow \bar{\psi}(x, \tau) + \bar{\alpha}, \quad (16.2)$$

где $|\alpha|^2 = \rho_0$ — плотность конденсата, и строить теорию возмущений, считая невозмущенным действием квадратичную форму по новым переменным $\psi, \bar{\psi}$, а формы остальных степеней рассматривать как возмущение. В операторном формализме этот вариант диаграммной техники рассматривался в работах Л. Д. Фаддеева и В. Н. Попова [94].

Такая схема теории возмущений, позволяющая получить термодинамические функции системы и функции Грина, плохо сходится при малых импульсах и частотах, а отдельные члены ряда теории возмущений сингулярны при $k, \omega \rightarrow 0$. Между тем именно функции Грина $G(k, \omega)$ при малых k, ω (точнее, их аналитические продолжения $i\omega \rightarrow E$ при малых k, E) содержат существенную информацию о свойствах системы, определяя, в частности, её низкочастотный энергетический спектр. Поэтому, изложив в этом параграфе простейшую схему теории возмущений с применением в § 17 к бозе-газу малой плотности, рассмотрим затем (в § 18) её модификацию, приспособленную для вычисления низкочастотной асимптотики функции Грина. В § 19 разбит метод построения гидродинамического гамильтониана в формализме континуального интеграла, используемый в § 20 в теории двумерной и одномерной сверхтекучести и в § 21 для описания квантовых вихрей в бозе-системах.

Теорию возмущений удобнее всего строить в k, ω -представлении, перейдя по формулам (6.3) от функций $\psi(x, \tau)$ к их коэффициентам Фурье $a(k, \omega)$. Обозначим совокупность переменных k, ω буквой p . Запишем сдвиг (16.2) для a, a^+ в виде

$$\left. \begin{aligned} a(p) &\rightarrow b(p) + \alpha(\beta V)^{1/2} \delta_{p0}; \\ a^+(p) &\rightarrow b^+(p) + \bar{\alpha}(\beta V)^{1/2} \delta_{p0}, \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

перейдя к новым коэффициентам Фурье $b(p), b^+(p)$. Здесь $\delta_{p0} = 1$ для $p = 0$ и 0 для $p \neq 0$; α — пока произвольное постоянное комплексное число. После сдвига (16.3) действие S в терминах b, b^+ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} S = & \beta V C_0 - V \bar{\beta V} (\bar{\gamma} b(0) + \gamma b^+(0)) + \sum_p \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda \right) b^+(p) b(p) - \\ & - \sum_p |\alpha|^2 (u(0) + u(k)) b^+(p) b(p) - \frac{1}{2} \sum_p u(k) \alpha^2 b^+(p) b^+(-p) + \\ & + \bar{\alpha}^2 b(p) b(-p) - \frac{1}{2(\beta V)^{1/2}} \sum_{p_1 + p_2 = p_3} (u(k_1) + u(k_2)) \times \end{aligned}$$

$$\times (\alpha b^+(p_1) b^+(p_2) b(p_3) + \bar{\alpha} b^+(p_3) b(p_2) b(p_3)) -$$

$$-\frac{1}{4\beta V} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} (u(k_1-k_3) + u(k_1-k_4)) b^+(p_1) b^+(p_2) b(p_3) b(p_4). \quad (16.4)$$

Здесь

$$C_0 = \lambda |\alpha|^2 - (1/2) u(0) |\alpha|^2; \quad \gamma = \alpha(-\lambda) + u(0) |\alpha|^2. \quad (16.5)$$

В качестве невозмущенного действия возьмем квадратичную форму, соответствующую идеальному бозе-газу:

$$\sum_p \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda \right) b^+(p) b(p). \quad (16.6)$$

Остальные формы первой, второй, третьей и четвертой степеней будем считать возмущением. Теория возмущений описывается в терминах графиков, составленных из нижеперечисленных элементов, рядом с которыми стоят соответствующие им выражения:

	$(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda)^{-1};$	}	(16.7)
$p=0$ 	$\gamma;$		
$p=0$ 	$\bar{\gamma};$		
p p 	$ \alpha ^2 (u(0) + u(k));$		
p $-p$ 	$\alpha^2 u(k);$		
p $-p$ 	$\bar{\alpha}^2 u(k);$		
	$\alpha (u(k_1) + u(k_2));$		
	$\bar{\alpha} (u(k_1) + u(k_2));$		
	$u(k_1 - k_3) + u(k_1 - k_4)$		

Здесь один тип линии и восемь типов вершин в соответствии со структурой возмущения.

В одночастичную функцию Грина

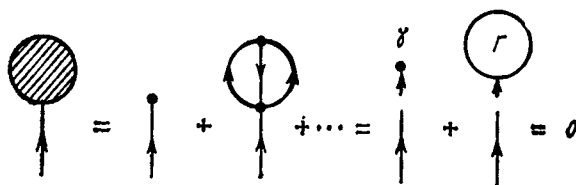
$$G(p) = - \langle b(p) b^+(p) \rangle \quad (16.8)$$

вносят вклад все диаграммы с одной входящей и одной выходящей линией, не имеющие частей, не соединенных хотя бы с одной из внешних линий. Выражение для каждой такой диаграммы получается, если составить произведение выражений для каждого входящего в нее элемента, учесть закон сохранения «4-импульса» $p = k$, ω в каждой вершине, просуммировать по всем независимым импульсам и частотам и умножить результат на

$$r^{-1} (-1/\beta V)^{v+1-l}, \quad (16.9)$$

где v — число вершин; l — число линий; r — порядок группы симметрии диаграммы. Заметим, что $v + 1 - l = c$ есть число независимых контуров диаграммы.

Среди диаграмм, составленных из перечисленных элементов, встречаются графики, содержащие части без внешних линий, соединенные с остальной частью диаграммы одной линией. Эта последняя линия имеет $p = 0$. Назовем описанные части вставками нулевого импульса. Выберем постоянную α , потребовав, чтобы исчезла сумма всех вставок нулевого импульса, графическое выражение которой имеет вид



$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram} + \dots + \text{Diagram} + \text{Diagram} = 0 \quad (16.10)$$

Это условие эквивалентно соотношениям

$$\langle b(0) \rangle = \langle b^+(0) \rangle = 0, \quad (16.11)$$

так что при его выполнении имеем

$$\langle a(0) \rangle = \alpha (\beta V)^{1/2}; \quad \langle a^+(0) \rangle = \bar{\alpha} (\beta V)^{1/2}, \quad (16.12)$$

а связь средних $\langle aa^+ \rangle$ и $\langle bb^+ \rangle$ особенно проста:

$$\begin{aligned} \langle a(p)a^+(p) \rangle &= \\ &= \langle b(p)b^+(p) \rangle + \beta V |\alpha|^2 \delta_{p0}. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Из выражения (16.13) следует, что $|\alpha|^2$ имеет смысл плотности конденсата. Если выполнено условие (16.10), то при вычислении любых функций Грина достаточно рассматривать графики без вставок нулевого импульса.

Как показано в § 6, функцию Грина можно выразить через неприводимую собственно энергетическую часть. Для сверхтекучей системы наряду с «нормальной» функцией Грина (16.8) мы будем иметь две аномальные функции

$$G_1(p) = -\langle a(p)a(-p) \rangle, \quad \bar{G}_1(p) = -\langle a^+(p)a^+(-p) \rangle, \quad (16.14)$$

и две аномальные собственно энергетические части $B(p)$, $\bar{B}(p)$. Функции Грина G , G_1 можно выразить через собственно энергетические части A , B , решив систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} &= \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} + \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \circlearrowleft A \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} + \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \circlearrowleft B \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} &= \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \circlearrowleft B \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} + \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \circlearrowleft A \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array}
 \end{aligned} \tag{16.15}$$

или в аналитическом виде

$$\left. \begin{aligned} G(p) &= G_0(p) + G_0(p)A(p)G(p) + G_0(p)B(p)G_1(-p); \\ G_1(p) &= G_0(-p)\bar{B}(p)G(p) + G_0(-p)A(-p)G_1(p). \end{aligned} \right\} \tag{16.16}$$

Решение системы (16.16) имеет вид ($\bar{B}(p) = B(-p)$)

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i\omega + \frac{k^2}{2m} - \lambda + A(-p)}{\left(i\omega + \frac{k^2}{2m} - \lambda + A(-p)\right)\left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda - A(p)\right) + |B(p)|^2}; \\ G_1(p) &= -\frac{\bar{B}(p)}{\left(i\omega + \frac{k^2}{2m} - \lambda + A(-p)\right)\left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda - A(p)\right) + |B(p)|^2}. \end{aligned} \tag{16.17}$$

Обсудим подробнее условия выбора параметра α (16.10). Обозначим Γ сумму вкладов диаграмм с одной входящей или выходящей стрелкой. Условие (16.10) можно записать в виде алгебраического соотношения

$$G_0(0)(\gamma + \Gamma) = 0. \tag{16.18}$$

Первый сомножитель отличен от нуля, а для второго докажем формулу

$$\gamma + \Gamma = \alpha (A(0) - B(0) - \lambda), \tag{16.19}$$

верную, если постоянную α выбрать вещественной, так что приходим к уравнению

$$\alpha (A(0) - B(0) - \lambda) = 0. \tag{16.20}$$

Это уравнение имеет тривиальное решение $\alpha = 0$ и может иметь нетривиальное, если второй сомножитель обращается в нуль. В дальнейшем покажем по теории возмущений, что при достаточно низких температурах нетривиальное решение существует. При этом следует пользоваться именно им, так как тривиальное решение приводит к противоречиям. При повышении температуры нетривиальное решение пропадает, и следует использовать выражение для функции Грина, вычисляемое по обычной теории возмущений.

Заметим, что если существует нетривиальное решение уравнения (16.20), то функции Грина (16.17) сингулярны при $p = 0$, так как при этом их знаменатели исчезают. Это связано с тем, что одночастичный спектр возбуждений имеет фононный характер.

Докажем формулу (16.19). Заметим, что дифференцирование по α ($\bar{\alpha}$) любого элемента диаграммы, кроме вершин первого порядка, приводит к присоединению к этому элементу входящей (выходящей) стрелки. Например:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} &= \begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} ; & \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \rightarrow \end{array} &= 0 ; \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \bullet \\ \rightarrow \end{array} &= \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \rightarrow \end{array} ; & \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \bullet \\ \leftarrow \end{array} &= \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \rightarrow \end{array} ; \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \bullet \\ \leftarrow \end{array} &= 0
 \end{aligned} \tag{16.21}$$

Поэтому дифференцирование произвольной диаграммы по α ($\bar{\alpha}$) приводит к присоединению к ней всеми возможными способами входящей (выходящей) стрелки.

Рассмотрим диаграммы для давления $p = -\Omega/V$. Вклад в p дают константа C_0 , давление p_0 идеального бозе-газа и сумма всех связанных вакуумных диаграмм. Непосредственным сравнением диаграмм можно убедиться в правильности следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma + \Gamma &= -\frac{\partial p}{\partial \alpha} ; & A(0) - \lambda &= -\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} ; \\
 B(0) &= -\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} .
 \end{aligned} \right\} \tag{16.22}$$

Ясно, что p зависит от α и $\bar{\alpha}$ посредством произведения $\bar{\alpha}\alpha = z$. Поэтому выписанные соотношения можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma + \Gamma &= -\bar{\alpha} \frac{\partial p}{\partial z} ; & A(0) - \lambda &= -\frac{\partial p}{\partial z} - z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} ; \\
 B(0) &= -\bar{\alpha}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} .
 \end{aligned} \right\} \tag{16.23}$$

Отсюда и следует (16.19) при $\alpha = \bar{\alpha} = \sqrt{\rho_0}$. Заметим в заключение, что принятое условие выбора ρ_0 означает экстремальность основной термодинамической функции — давления p как функции параметра ρ_0 :

$$\frac{\partial p}{\partial \rho_0} = 0. \tag{16.24}$$

§ 17. БОЗЕ-ГАЗ МАЛОЙ ПЛОТНОСТИ

Найдем функции Грина и термодинамические функции бозе-газа с помощью только что изложенной теории возмущений. Условие малой плотности означает, что радиус действия a потенциала между бозе-частицами мал по сравнению со средним расстоянием между частицами, т. е. мал газовый параметр θ :

$$\theta \equiv \rho^{1/3} a \ll 1, \quad (17.1)$$

где $\rho = N/V$ — плотность.

Кроме плотности ρ состояние системы характеризуется температурой T , и в зависимости от соотношения между плотностью и температурой можно выделить несколько областей, в которых асимптотические по плотности формулы имеют различные выражения. Рассмотрим область температуры *

$$T \sim \rho^{2/3}. \quad (17.2)$$

Как показано ниже, именно в этой области происходит фазовый переход. При значениях температуры, больших по порядку, чем $\rho^{2/3}$, система находится в нормальном состоянии. Низкотемпературная область рассмотрена в § 19. Промежуточные области здесь рассматривать не будем.

Начнем с рассмотрения диаграмм, дающих вклад в давление p :

$$p = C_0 + p_0 + D, \quad (17.3)$$

где C_0 — константа, определяемая формулой (16.5); p_0 — давление идеального бозе-газа; D — сумма всех связанных вакуумных диаграмм.

Вклад отдельного графика уменьшают следующие факторы.

1. Наличие в диаграмме вершин второго и третьего порядка, содержащих множители ρ_0 , $\sqrt{\rho_0}$, уменьшает вклад от графика, так как ρ_0 — малый параметр, не превосходящий полной плотности ρ .

2. Наличие замкнутых петель из линий, которые можно обойти, двигаясь по стрелкам диаграммы, уменьшает вклад от графика, так как при суммировании по частотам возникают множители $(\exp[\beta \varepsilon(\mathbf{k})] - 1)^{-1}$, где $\varepsilon(\mathbf{k}) = k^2 - \lambda$, которые обрезают область суммирования по импульсам на пределе $k \sim \sqrt{T}$, меньшем, чем предел $k \sim a^{-1}$, на котором суммы по импульсам эффективно обрезаются из-за наличия потенциала.

* Далее в этом параграфе используется система единиц с $2m = 1$, где m — масса бозе-частицы.

Поэтому главный вклад в сумму вакуумных диаграмм дают графики с минимально возможным числом указанных факторов:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots + \\
 & + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots + \quad (17.4) \\
 & + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \dots
 \end{aligned}$$

Эти диаграммы содержат или две вершины второго порядка, или по два независимых цикла из линий диаграммы, или один независимый цикл в сочетании с одной вершиной второго порядка либо с двумя вершинами третьего порядка. Диаграммы объединяются в три последовательности a, b, c . Их суммирование сводится к суммированию следующей последовательности для четырехполюсника:

$$\text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} + \dots = \text{Diagram 12} \quad (17.5)$$

внутри диаграмм. Такое суммирование равносильно решению уравнения

$$\text{Diagram 12} = \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} \quad (17.6)$$

Главный вклад в сумму по внутренним импульсам в (17.6) вносят $k \sim a^{-1} \gg \sqrt{T} \gg \sqrt{\lambda}$. Поэтому можно пренебречь λ в функции Грина, а сумму по частотам в этом уравнении заменить интегралом. В результате уравнение (17.6) сводится к уравнению для t -матрицы (амплитуды рассеяния)

$$t(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z) = u(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) - (2\pi)^{-3} \int d^3 k_3 u(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) (2k_3^2 - z)^{-1} t(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, z), \quad (17.7)$$

а четырехполюсник (17.6) представляется в виде

$$\begin{aligned}
 & t\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2}, \frac{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4}{2}; i\omega_1 + i\omega_2 - \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2}{2}\right) + \\
 & + t\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2}, \frac{\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3}{2}; i\omega_1 + i\omega_2 - \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2}{2}\right). \quad (17.8)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим значения четырехполюсника при импульсных и частотных аргументах, меньших по порядку, чем $k \sim a^{-1}$, $\omega \sim a^{-2}$. При таких k , ω t -матрицу можно считать постоянной

$$t(0, 0, 0) \equiv t_0. \quad (17.9)$$

В результате получаем, что сумма слагаемого $(1/2)\rho_0^2 u(0)$ и последовательности a (17.4) равна $(1/2)\rho_0^2 t_0$, последовательность b равна $t_0 \rho_1^2$, для c получается выражение $2t_0 \rho_0 \rho_1$, где ρ_1 — вклад графика



$$(17.10)$$

изображающего плотность «надконденсатных» частиц ρ_1 (с импульсами $\neq 0$). В первом приближении имеем ($\varepsilon \rightarrow +0$)

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{T}{V} \sum_p \exp(i\omega\varepsilon) (i\omega - k^2)^{-1} = \frac{1}{V} \sum_k (\exp(\beta k^2) - 1)^{-1} = \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 k}{\exp(\beta k^2) - 1} = (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2}, \end{aligned} \quad (17.11)$$

где $\zeta(s)$ — ζ -функция.

Наконец, давление p_0 идеального газа дается формулой

$$\begin{aligned} -\frac{T}{V} \sum_k \ln[1 - \exp(-\beta(k^2 - \lambda))] &= \zeta(5/2) (4\pi)^{-3/2} T^{5/2} + \lambda \zeta(3/2) \times \\ &\times (4\pi)^{-3/2} T^{3/2}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Подставим полученные выражения в (17.3):

$$\begin{aligned} p &= (4\pi)^{-3/2} \zeta(5/2) T^{5/2} + \lambda (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} + \lambda \rho_0 - \frac{t_0}{2} \rho_0^2 - \\ &- t_0 \rho_1^2 - 2t_0 \rho_0 \rho_1, \end{aligned} \quad (17.13)$$

где выражение ρ_1 зависит только от температуры T . Определим

теперь ρ_0 из условия (16.24) $\frac{\partial p}{\partial \rho_0} = 0$

$$\rho_0 = \frac{\lambda}{t_0} - 2\rho_1 = \frac{\lambda}{t_0} - 2(4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} \equiv \frac{\Lambda}{t_0}. \quad (17.14)$$

Из этой формулы следует, что положительное решение для плотности конденсата ρ_0 существует только при $\Lambda > 0$. Уравнение

$$\Lambda = 0 \quad (17.15)$$

дает в первом приближении уравнение линии фазового перехода в $\lambda - T$ -плоскости. Из (17.11), (17.14) следует формула для полной плотности

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 = \frac{\lambda}{t_0} - (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2}. \quad (17.16)$$

Выражение для давления p в терминах λ и T имеет вид

$$p = (4\pi)^{-3/2} \zeta(5/2) T^{5/2} + \frac{\lambda^2}{2t_0} - \lambda (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} + (4\pi)^{-3} \zeta^2 \times \\ \times (3/2) t_0 T^3. \quad (17.17)$$

Здесь первый член является главным, все остальные — одного порядка, а их отношение к главному имеет порядок

$$t_0 T^{1/2} \sim t_0 \rho^{1/3} = \theta \ll 1.$$

Выражение (17.16) для ρ получается дифференцированием по λ выражения (17.17) для p , как и должно быть согласно известной термодинамической формуле $\rho = \frac{\partial p}{\partial \lambda}$. Формулы для давления и плотности в нормальном состоянии имеют вид

$$p = (4\pi)^{-3/2} \zeta(5/2) T^{5/2} + (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) \lambda T^{3/2} - (4\pi)^{-3} \zeta^2 (3/2) t_0 T^3; \\ \rho = \rho_1 = (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} \quad (17.18)$$

Соображения, отбирающие главные последовательности диаграмм для p , применимы и к собственно энергетическим частям функций Грина A , B . Здесь главные последовательности имеют вид

$$\begin{aligned} & \rightarrow \text{A} \rightarrow = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots^a \\ & + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots^b \quad (17.19) \\ & \leftarrow \text{B} \rightarrow = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots^c \end{aligned}$$

Они содержат вершину второго порядка и все диаграммы с двумя вершинами третьего порядка без петель (последовательность a), все диаграммы с одной петлей без вершин второго и третьего порядка (b) и, наконец, вершину второго порядка и все диаграммы с этой вершиной без петель (c).

Легко видеть, что суммирование этих последовательностей сводится к замене потенциала t -матрицей, которую в существенной области импульсов $k \lesssim T^{1/2}$ можно считать постоянной t_0 . В результате получим выражения

$$A \approx 2t_0(\rho_0 + \rho_1); \quad B \approx t_0\rho_0 = \Lambda. \quad (17.20)$$

Подстановка их в (16.17) дает нормальную и аномальную функции Грина при $\Lambda > 0$:

$$G(p) = -\frac{i\omega + k^2 + \Lambda}{\omega^2 + k^4 + 2\Lambda k^2}; \quad G_1(p) = \frac{\Lambda}{\omega^2 + k^4 + 2\Lambda k^2}. \quad (17.21)$$

При $\Lambda < 0$ (выше перехода) существуют только нормальная функция Грина и соответствующая собственно энергетическая часть, имеющие вид

$$A = 2t_0\rho_1; \quad G = (i\omega - k^2 + \Lambda)^{-1}. \quad (17.22)$$

Положив в формулах (17.21), (17.22), $i\omega = E$, можно найти энергетический спектр, определяемый полюсами функций Грина:

$$E = (k^4 + 2\Lambda k^2)^{1/2}, \quad \Lambda > 0; \\ E = k^2 - \Lambda = k^2 + |\Lambda|, \quad \Lambda < 0. \quad (17.23)$$

Первая из этих формул есть спектр Боголюбова, который переходит в спектр свободных частиц при $k \gg \sqrt{\Lambda} = k_c$ и линеен по k при $k \ll k_c$. Импульс $k = k_c$ естественно назвать корреляционным, так как именно при $k \sim k_c$ происходит переход от спектра свободных частиц к линейному фононному спектру.

Заметим, что при $\Lambda = 0$ полученные выражения для функций Грина и энергетического спектра для нормального и сверхтекучего состояний переходят друг в друга.

Знание функций Грина (17.21), (17.22) позволяет определить с большей точностью плотность надконденсатных частиц ρ_1 , совпадающую при $\Lambda < 0$ с полной плотностью. Имеем при $\Lambda < 0$ ($\varepsilon \rightarrow +0$):

$$\rho = \rho_1 = -\frac{T}{V} \sum_p \exp(i\omega\varepsilon) (i\omega - k^2 - |\Lambda|)^{-1} = \\ = \frac{1}{V} \sum_k (\exp \beta(k^2 + |\Lambda|) - 1)^{-1} = (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} - \\ - (4\pi)^{-1} T |\Lambda|^{1/2}; \quad (17.24)$$

при $\Lambda > 0$

$$\rho_1 = \frac{T}{V} \sum_p \exp(i\omega\varepsilon) (i\omega + k^2 + \Lambda) (\omega^2 + k^4 + 2\Lambda k^2)^{-1} = \\ = \frac{1}{2V} \sum_k \left(\frac{k^2 + \Lambda}{\varepsilon(k)} \operatorname{cth} \frac{\beta\varepsilon(k)}{2} - 1 \right) = \\ = (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} - (8\pi)^{-1} T (2\Lambda)^{1/2}, \quad (17.25)$$

где $\varepsilon(k)$ — энергетический спектр Боголюбова (17.23). Сложнее вычислить во втором приближении плотность конденсата ρ_0 . Это можно сделать, найдя второе приближение для собственно энергетических частей $A(p)$, $B(p)$. С этой целью учтем наибольшие из диаграмм, не учтенных в первом приближении, а учтенные в пер-

вом приближении вычислим с большей точностью. Встречающиеся в диаграммах функции Грина целесообразно заменить функциями Грина первого приближения (17.21). Тогда можно не учитывать диаграммы, содержащие поддиаграммы типа собственно энергетических частей. Таким образом, для собственно энергетических частей $A(p)$, $B(p)$ во втором приближении имеем

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \\
 & + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \\
 & \text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \\
 & + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---}
 \end{aligned} \tag{17.26}$$

Можно показать, что вклады в A , B от диаграмм с более чем двумя вершинами третьего порядка, или более чем с одной замкнутой петлей из нормальных линий, или более чем с двумя аномальными линиями дают вклад меньшего порядка (во всяком случае при $k \gtrsim k_c$), и их учитывать не надо. В диаграммных равенствах (17.26) светлым линиям соответствуют функции Грина первого приближения (17.20), кружок с четырьмя стрелками соответствует последовательность (17.5), а та же последовательность, умноженная на α ($\bar{\alpha}$), с одним из внешних импульсов, равных нулю, изображается кружком с тремя стрелками. Жирной линии диаграммы b_1 соответствует полная аномальная функция Грина, так что это соотношение представляет собой уравнение.

Диаграммы a_i , b_i ($i = 0, 1, \dots, 6$) по существу совпадают с теми, которые учитывались С. Т. Беляевым в случае $T = 0$. В данной температурной области соответствующие этим диаграммам выражения совсем другие.

В диаграммах a_i ($i \geq 3$), b_i ($i \geq 2$) в области $k \sim k_c$ можно заменить выражения, соответствующие кружкам с тремя стрелками, постоянными множителями $2\sqrt{\rho_0 t_0}$, после чего получим:

$$\left. \begin{aligned}
 a_3(p) = a_4(p) = b_3(p) = b_4(-p) &= -4\rho_0 t_0^2 TV^{-1} \sum_{p_1} G_1(p_1) G_3(p-p_1); \\
 a_5(p) = b_5(p) &= -4\rho_0 t_0^2 TV^{-1} \sum_{p_1} G(p_1) G(p_1-p); \\
 a_6(p) = b_6(p) = 2b_2(p) &= -4\rho_0 t_0^2 TV^{-1} \sum_{p_1} G_1(p_1) G_1(p_1-p).
 \end{aligned} \right\} \tag{17.27}$$

Выражение $a_0(p) + a_2(p)$ представляет собой умноженную на ρ_0 последовательность (17.5), когда один входящий и один выходящий импульсы равны нулю; и при $k \ll a^{-1}$ равно

$$a_0(p) + a_2(p) \approx \approx 2\rho_0 t_0 - 2\rho_0 t_0^3 V^{-1} \sum_{k_1} \left[T \sum_{\omega_1} G(p_1) G(p - p_1) - 2|k_1 - k_2|^{-1} \right], \quad (17.28)$$

где $k_2 = k - k_1$.

Для вычисления a_1 достаточно замкнуть вход и выход четырехполюсника нормальной линией и просуммировать по 4-импульсу этой линии p_1 . Главный вклад при таком суммировании вносит область $k_1 \sim \sqrt{T}$, в которой зависимостью четырехполюсника от p можно пренебречь. Используя выражение для плотности ρ_1 надконденсатных частиц (17.25), получим при $k \ll a^{-1}$, $\omega \ll a^{-2}$

$$a_1(p) \approx 2t_0 \rho_1 = 2t_0 ((4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} - (8\pi)^{-1} T (2\Lambda)^{1/2}). \quad (17.29)$$

Найдем $b_0 + b_1$. Имеем

$$B(p) = b_0 + b_1 + F = \psi(k) + F, \quad (17.30)$$

где F — добавки, из которых самые существенные изображаются диаграммами (17.26);

$$\begin{aligned} \psi(k) &= b_0 + b_1 = \rho_0 u(k) - \frac{T}{V} \sum_{p_1} u(k - k_1) G_1(p_1) = \\ &= \rho_0 u(k) - \frac{T}{V} \sum_{p_1} u(k - k_1) \frac{\psi(k_1) + F}{M}, \end{aligned} \quad (17.31)$$

где M — знаменатель функции Грина G_1 в (17.20). Вклады F в сумму по k_1 существенны при $k_1 \sim k_c$. Малость объема этой области в k -пространстве приводит к тому, что вклад F в \sum есть величина высшего порядка. Положим $M = \omega^2 + k^4 + 2\Lambda k^2$, просуммируем по частотам, прибавив к обеим частям (17.31) одно и то же выражение, получим уравнение

$$\begin{aligned} \psi(k) + \frac{1}{2V} \sum_{k_1} u(k - k_1) k_1^{-2} \psi(k_1) &= \rho_0 u(k) + \\ + \frac{1}{2V} \sum_{k_1} u(k - k_1) \psi(k_1) &\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{\varepsilon(k_1)} \operatorname{cth} \frac{\beta \varepsilon(k_1)}{2} \right), \end{aligned} \quad (17.32)$$

где $\varepsilon(k)$ — энергетический спектр Боголюбова (17.23). Оператор, действующий в левой части этого уравнения на $\psi(k)$, можно обратить.

Действительно, левая часть уравнения (17.32) получается из левой части уравнения для t -матрицы (17.32), если перенести в нем интегральный член в левую часть и затем положить $z = 0$. В правой части (17.32) есть выражение $u(\mathbf{k})$, а также $u(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ под знаком суммы по \mathbf{k}_1 . Поэтому решение (17.32) получим, заменив $u(\mathbf{k})$ на $t(\mathbf{k}, 0, 0)$, $u(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ на $t(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, 0)$:

$$\psi(\mathbf{k}) = \rho_0 t(\mathbf{k}, 0, 0) + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1} t(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, 0) \psi(\mathbf{k}_1) \times \\ \times \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}_1)} \operatorname{cth} \frac{\beta \varepsilon(\mathbf{k}_1)}{2} \right).$$

В сумму по \mathbf{k}_1 главный вклад дает область импульсов $k_1 \lesssim k_c$, в которой $t(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, 0) \approx t(\mathbf{k}, 0, 0)$. В результате получим при $k \sim k_c$

$$\psi \approx t_0 \left[\rho_0 + \frac{\rho_0 t_0}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1} \left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}_1)} \operatorname{cth} \frac{\beta \varepsilon(\mathbf{k}_1)}{2} \right) \right] = \\ = t_0 (\rho_0 - (8\pi)^{-1} T (2\Lambda)^{1/2}). \quad (17.33)$$

Описанный прием оказывается полезным и будет еще использован в дальнейшем. Теперь, зная вклад каждой из диаграмм a_i , b_i ($i = 0, 1, \dots, 6$), можно определить ρ_0 из уравнения

$$\lambda = A(0) - B(0), \quad (17.34)$$

следующего из (16.20) при $\alpha \neq 0$.

Получим

$$\rho_0 = \frac{\Lambda}{t_0} + \frac{3}{8\pi} T (2\Lambda)^{1/2}. \quad (17.35)$$

Сложив ρ_0 с найденной выше (17.24) плотностью надконденсатных частиц ρ_1 , получим

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 = \frac{\lambda}{t_0} - (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} + (4\pi)^{-1} T (2\Lambda)^{1/2}. \quad (17.36)$$

Используя формулу $\rho = \frac{\partial p}{\partial \lambda}$, можно найти поправку к выражению для p (17.17), соответствующую поправке $(4\pi)^{-1} T (2\Lambda)^{1/2}$ к плотности:

$$\Delta p = (12\pi)^{-1} T (2\Lambda)^{3/2}. \quad (17.37)$$

Для нормального состояния соответствующая поправка к (17.18) имеет вид

$$(6\pi)^{-1} T (\Lambda)^{3/2}, \quad (17.38)$$

Рассмотрим явление сверхтекучести. Возьмем бозе-систему в системе координат, движущейся со скоростью v . В этом случае система описывается функционалом действия

$$S + \int_0^{\beta} d\tau \int dx v \frac{i}{2m} (\nabla \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \nabla \psi), \quad (17.39)$$

где S — функционал (6.1).

В нормальном состоянии средние значения числа частиц и импульса связаны соотношением

$$K = mvN = mvV\rho, \quad (17.40)$$

означающим, что система движется как целое со скоростью v .

При наличии конденсата систему можно считать состоящей из двух компонент: нормальной ρ_n , движущейся со скоростью v , и сверхтекучей $\rho_s = \rho - \rho_n$, движущейся со скоростью конденсата v_0 , которая может отличаться от v . Например, для покоящегося конденсата вместо (17.40) получим меньшее значение

$$K = mvV\rho_n. \quad (17.41)$$

В первом приближении функция Грина в движущейся системе координат получается из (17.21) заменой $i\omega \rightarrow i\omega + (\mathbf{v}\mathbf{k})$ и имеет вид

$$G(p) = \frac{i\omega + k^2 + \mathbf{v}\mathbf{k} + \Lambda}{(i\omega + (\mathbf{v}\mathbf{k}) + k^2 + \Lambda)(i\omega + \mathbf{v}\mathbf{k} - k^2 - \Lambda) + \Lambda^2}, \quad (17.42)$$

энергетический спектр

$$E(\mathbf{k}) = -(\mathbf{v}\mathbf{k}) + (k^4 + 2\Lambda k^2)^{1/2} \quad (17.43)$$

устойчив ($E > 0$) при $v < (2\Lambda)^{1/2}$. Зная функцию Грина (17.42), можно найти среднее значение импульса

$$\begin{aligned} K &= -T \sum_p \exp(i\omega\varepsilon) \mathbf{k} G(p) = \\ &= mvV[(4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} - (6\pi)^{-1} T (2\Lambda)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (17.44)$$

Сравнив с (17.41), находим

$$\begin{aligned} \rho_n &= (4\pi)^{-3/2} \zeta(3/2) T^{3/2} - (6\pi)^{-1} T (2\Lambda)^{1/2}; \\ \rho_s &= \rho - \rho_n = \frac{\Lambda}{t_0} + \frac{5}{12\pi} T (2\Lambda)^{1/2}. \end{aligned} \quad (17.45)$$

Эти формулы можно получить и другим способом, а именно исходя из асимптотической формулы

$$G(\mathbf{k}, 0) \approx -\frac{\rho_0 m}{\rho_s k^2}. \quad (17.46)$$

Эта формула впервые получена Н. Н. Боголюбовым [81]. В следующем параграфе приведено ее доказательство в формализме континуального интеграла.

Из (17.46) следует

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho_s} &= -\lim_{k \rightarrow 0} 2k^2 G(k, 0) = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2(A(k, 0) + k^2 - \lambda)}{A(k, 0) + k^2 - \lambda + B(k, 0)} \frac{k^2}{k^2 + A(k, 0) - B(k, 0) - \lambda}. \end{aligned} \quad (17.47)$$

Первый множитель в правой части этой формулы стремится к 1. Положим

$$A(k, 0) - \lambda = \Lambda + A_1(k, 0);$$

$$B(k, 0) = \Lambda + B_1(k, 0),$$

где $A_1(k, 0)$, $B_1(k, 0)$ — поправки второго приближения, определяемые диаграммами (17.26). Выражения для этих поправок имеют вид

$$A_1(k, 0) = \frac{t_0 T (2\Lambda)^{1/2}}{16\pi} \left[8 - 9x^{-1} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 2x^{-1} \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2x} \right]; \quad (17.48)$$

$$B_1(k, 0) = \frac{t_0 T (2\Lambda)^{1/2}}{16\pi} \left[4 - 9x^{-1} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 2x^{-1} \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2x} \right],$$

где $x = \frac{k}{\sqrt{2\Lambda}}$. Подставив в (17.47), получим

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \lim_{k \rightarrow 0} k^{-2} (k^2 + A(k, 0) - B(k, 0) - \lambda) = 1 + \frac{t_0 T}{12\pi} (2\Lambda)^{1/2}. \quad (17.49)$$

Эта формула показывает отличие ρ_0 от ρ_s и ведет для ρ_n , ρ_s опять к выражениям (17.45).

В заключение этого параграфа рассмотрим пределы применимости изложенной теории возмущений. Собственно энергетические части первого приближения имеют порядок Λ , а поправки второго приближения $t_0 T \Lambda^{1/2}$. Вблизи фазового перехода ($\Lambda \rightarrow 0$) отношение второго приближения к первому (порядка $t_0 T \Lambda^{-1/2}$) перестает быть малым, а ряд теории возмущений становится плохо сходящимся.

Кроме того, даже вдали от фазового перехода ряд теории возмущений плохо сходится при малых импульсах k . Это видно, например, из формул (17.48) для поправок второго приближения. При $k \rightarrow 0$ они неограниченно возрастают по абсолютной величине, а при $k \sim t_0 T$ сравнимы с собственно энергетическими частями первого приближения. Ясно, что при вычислении физических величин расходимости должны сокращаться. Например, это имеет место при вычислении предела (17.49). Однако наличие сингулярностей в отдельных диаграммах теории возмущений неудобно. Желательно перестроить теорию возмущений для исключения сингулярностей. Такая перестройка в формализме континуального интеграла рассматривается в следующем параграфе.

§ 18. ПРИМЕНЕНИЕ КONTИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ
К ВЫВОДУ НИЗКОЧАСТОТНОЙ АСИМПТОТИКИ
ФУНКЦИИ ГРИНА

Изложенная в § 16 теория возмущений основана на преобразовании (16.2), выделяющем конденсат. Было показано, что она плохо сходится при малых импульсах и частотах. В этом параграфе изложим модифицированную теорию возмущений для вычисления низкочастотной асимптотики функций Грина [97], 149. Основная идея указана в § 12 и состоит в последовательном интегрировании сначала по быстропеременным, а затем по медленно меняющимся полям с использованием на этих этапах различных схем теории возмущений. Медленно меняющейся частью $\psi_0(x, \tau)$ функции $\psi(x, \tau)$ назовем сумму слагаемых в разложении

$$\psi(x, \tau) = (\beta V)^{-1/2} \sum_{k, \omega} \exp[-i(kx - \omega\tau)] a(k, \omega) \quad (18.1)$$

с импульсами k , меньшими некоторого k_0 . Быстропеременной частью $\psi_1(x, \tau)$ назовем разность $\psi(x, \tau) - \psi_0(x, \tau)$. Разделения частот ω на быстрые и медленные проводить не будем. Таким образом, имеем

$$\psi(x, \tau) = \psi_0(x, \tau) + \psi_1(x, \tau). \quad (18.2)$$

Величина k_0 , отделяющая «малые» импульсы от «больших», зависит от конкретной бозе-системы и определяется по порядку величины. Для бозе-газа порядок k_0 указан в конце этого параграфа.

Если рассмотреть низкочастотную асимптотику одночастичной функции Грина — среднего от произведения $\psi(x, \tau)\psi(y, \tau_1)$, то в нее дает вклад только среднее от произведения медленно меняющихся полей $\psi_0(x, \tau)\bar{\psi}_0(y, \tau_1)$, т. е. интеграл от этого произведения с весом $\exp S$ по всем полям. На первом этапе необходимо взять интеграл

$$\int \exp S d\bar{\psi}_1 d\psi_1 = \exp \tilde{S}[\bar{\psi}_0, \psi_0], \quad (18.3)$$

который имеет смысл статистической суммы для системы «быстрых» частиц, описываемых полем ψ_1 , в медленно меняющемся поле ψ_0 .

Для вычисления интеграла (18.3) можно развить теорию возмущений, которая не имеет расходимостей при малых импульсах, так как суммы по импульсам обрезаны на нижнем пределе k_0 .

На втором этапе интегрирования — по «медленным» полям $\psi_0(x, \tau)$, $\bar{\psi}_0(x, \tau)$ — удобно перейти к новым переменным — плотности $\rho(x, \tau)$ и фазе $\varphi(x, \tau)$ по формулам

$$\begin{aligned} \psi_0(x, \tau) &= \sqrt{\rho(x, \tau)} \exp[i\varphi(x, \tau)]; \quad \bar{\psi}_0(x, \tau) = \\ &= \sqrt{\rho(x, \tau)} \exp[-i\varphi(x, \tau)], \end{aligned} \quad (18.4)$$

причем

$$d\bar{\psi}_0(x, \tau)d\psi_0(x, \tau) = d\rho(x, \tau)d\varphi(x, \tau). \quad (18.5)$$

Наличие конденсата при низких температурах проявляется в том, что главный вклад в интеграл по плотности $\rho(\mathbf{x}, \tau)$ вносит окрестность некоторого положительного ρ_0 , имеющего смысл плотности конденсата. Величину ρ_0 можно определить из условия экстремальности функционала $S[\bar{\psi}_0, \psi_0]$, который при $\psi_0 = \bar{\psi}_0 = \sqrt{\rho_0} = \text{const}$ становится функцией от ρ_0 . Таким образом, должно быть

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \rho_0} = 0. \quad (18.6)$$

Именно такое уравнение было получено в § 16 [уравнение (16.24)]. При вычислении $\tilde{S}[\rho_0]$ можно пользоваться теорией возмущений, отличающейся от развитой в § 16 тем, что суммирование по внутренним импульсам обрезано на нижнем пределе k_0 . Поэтому здесь \tilde{S} , а следовательно, и ρ_0 зависят от k_0 . Величину $\rho_0(k_0)$ назовем *затравочным конденсатом*. В трехмерной бозе-системе $\rho_0(k_0)$ мало отличается от истинного ρ_0 , определяемого как предел среднего $\langle \psi(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}(\mathbf{y}, \tau_1) \rangle$ при $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$. В двумерной системе при $T > 0$, как будет показано в § 19, могут существовать затравочный конденсат $\rho_0(k_0) > 0$ и сверхтекучесть, в то время как истинное $\rho_0 = 0$. В предположении, что конденсат (затравочный) существует, естественно ввести переменную $\pi(\mathbf{x}, \tau)$ формулой

$$\pi(\mathbf{x}, \tau) = \rho(\mathbf{x}, \tau) - \rho_0(k_0) \quad (18.7)$$

и рассматривать функционал \tilde{S} в переменных $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$, $\pi(\mathbf{x}, \tau)$.

Рассмотрим подробнее вычисление функционала \tilde{S} . Исходный функционал S после подстановки (18.2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{\beta} d\tau \int dx \left(\bar{\psi}_0 \partial_\tau \psi_0 - \frac{\nabla \bar{\psi}_0 \nabla \psi_0}{2m} + \lambda \bar{\psi}_0 \psi_0 \right) + \\ & + \int_0^{\beta} d\tau \int dx \left(\bar{\psi}_1 \partial_\tau \psi_1 - \frac{\nabla \bar{\psi}_1 \nabla \psi_1}{2m} + \lambda \bar{\psi}_1 \psi_1 \right) + \\ & + \int_0^{\beta} d\tau \int dx dy u(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \bar{\psi}_0(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_0(\mathbf{y}, \tau) \psi_0(\mathbf{y}, \tau) \psi_0(\mathbf{x}, \tau) + \\ & + 2\bar{\psi}_1(\mathbf{x}, \tau) \psi_1(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_0(\mathbf{y}, \tau) \psi_0(\mathbf{y}, \tau) + \\ & + 2\bar{\psi}_1(\mathbf{x}, \tau) \psi_1(\mathbf{y}, \tau) \bar{\psi}_0(\mathbf{y}, \tau) \psi_0(\mathbf{x}, \tau) + \\ & + \bar{\psi}_1(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_1(\mathbf{y}, \tau) \psi_0(\mathbf{x}, \tau) \psi_0(\mathbf{y}, \tau) + \\ & + \bar{\psi}_0(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_0(\mathbf{y}, \tau) \psi_1(\mathbf{x}, \tau) \psi_1(\mathbf{y}, \tau) + \\ & + 2\bar{\psi}_0(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_1(\mathbf{y}, \tau) \psi_1(\mathbf{y}, \tau) \psi_1(\mathbf{x}, \tau) + \\ & + 2\bar{\psi}_1(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_1(\mathbf{y}, \tau) \psi_1(\mathbf{y}, \tau) \psi_0(\mathbf{x}, \tau) + \\ & + \bar{\psi}_1(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_1(\mathbf{y}, \tau) \psi_1(\mathbf{y}, \tau) \psi_1(\mathbf{x}, \tau). \end{aligned} \quad (18.8)$$

Здесь учтено, что перекрестные члены в квадратичной форме $\sim \bar{\psi}_0 \psi_1, \bar{\psi}_1 \psi_0$ исчезают при интегрировании по объему V . Для выявления зависимости функционала \bar{S} от фазы $\varphi(x, \tau)$ сделаем в интеграле по $\psi_1, \bar{\psi}_1$ замену переменной

$$\psi_1(x, \tau) \rightarrow \psi_1(x, \tau) \exp[i\varphi(x, \tau)]; \quad \bar{\psi}_1(x, \tau) \rightarrow \bar{\psi}_1(x, \tau) \exp[-i\varphi(x, \tau)], \quad (18.9)$$

где $\varphi(x, \tau)$ — фаза медленно меняющегося поля. После подстановки (18.9) в (18.8) часть действия, содержащая потенциал, зависит только от квадрата модуля $\rho(x, \tau) = \rho_0(k_0) + \pi(x, \tau)$ функции $\psi_0(x, \tau)$. Квадратичная форма по переменным $\psi_1, \bar{\psi}_1$ в (18.8) принимает вид

$$\int_0^{\beta} d\tau \int dx \left(\bar{\psi}_1 \partial_\tau \psi_1 - \frac{1}{2m} \nabla \bar{\psi}_1 \nabla \psi_1 + \frac{i}{2m} (\bar{\psi}_1 \nabla \psi_1 - \nabla \bar{\psi}_1 \psi_1) \nabla \varphi + \right. \\ \left. + \bar{\psi}_1 \psi_1 \left(\lambda - \frac{(\nabla \varphi)^2}{2m} + i \partial_\tau \varphi \right) \right). \quad (18.10)$$

Теорию возмущений можно построить, взяв за невозмущенное действие квадратичную форму

$$\int_0^{\beta} d\tau \int dx \left(\bar{\psi}_1 \partial_\tau \psi_1 - \frac{1}{2m} \nabla \bar{\psi}_1 \nabla \psi_1 + \lambda \bar{\psi}_1 \psi_1 \right), \quad (18.11)$$

которая описывает идеальный газ бозе-частиц с импульсами $k > k_0$. Остальные слагаемые в действии S , содержащие $\psi_1, \bar{\psi}_1$, будем рассматривать как возмущение. Таким образом, получим теорию возмущений, отличающуюся от изложенной в § 16 в следующих пунктах:

1. Фигурирующие в (16.7) вершины второго и третьего порядка, описывающие взаимодействие с медленно меняющимся полем, зависят от переменной функции $\rho(x, \tau)$.

2. Появляются вершины второго порядка, описывающие взаимодействие с φ -полем. Они определяются членами квадратичной формы в (18.10), зависящими от φ .

3. Все суммы (интегралы) по внутренним импульсам диаграмм обрываются на нижнем пределе k_0 .

Разложим выражение \bar{S} в функциональный ряд по переменным $\varphi(x, \tau), \pi(x, \tau)$:

$$\bar{S}[\varphi, \pi] = \bar{S}[0, 0] + \frac{1}{2} \int dx dy d\tau d\tau' [a_{11}(x, \tau | y, \tau_1) \varphi(x, \tau) \varphi(y, \tau_1) + \\ + 2a_{12}(x, \tau | y, \tau_1) \varphi(x, \tau) \pi(y, \tau_1) + a_{22}(x, \tau | y, \tau_1) \pi(x, \tau) \pi(y, \tau_1)] + \dots \quad (18.12)$$

В этом разложении отсутствуют линейные члены. Действительно, \tilde{S} , как мы видели, зависит от градиентов фазы. Коэффициентные функции при $\nabla\varphi$, $\partial_{\pi}\varphi$ трансляционно-инвариантны и поэтому исчезают после интегрирования с $\nabla\varphi$, $\partial_{\tau}\varphi$. Коэффициентная функция при $\pi(x, \tau)$ пропорциональна $\partial\tilde{S}/\partial\rho_0$ и в силу выбора ρ_0 (18.6) равна нулю.

Если выбрать импульс k_0 сколь угодно малым, в разложении (18.12) можно ограничиться членами второго порядка по φ , π . Низкочастотная асимптотика функции Грина определяется в этом случае коэффициентными функциями a_{11} , a_{12} , a_{22} . При наличии конденсата целесообразно из функции Грина вычесть ее асимптотику при $|x - y| \rightarrow \infty$ и рассматривать выражение

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x, \tau | y, \tau_1) &= -\langle \psi(x, \tau) \bar{\psi}(y, \tau_1) \rangle + \langle \psi(x, \tau) \rangle \langle \bar{\psi}(y, \tau_1) \rangle = \\ &= \rho_0 \left[1 - \frac{\langle \sqrt{\rho(x, \tau)} \sqrt{\rho(y, \tau_1)} \exp[i(\varphi(x, \tau) - \varphi(y, \tau_1))] \rangle}{\langle \sqrt{\rho(x, \tau)} \exp[i\varphi(x, \tau)] \rangle \langle \sqrt{\rho(y, \tau_1)} \exp[-i\varphi(y, \tau_1)] \rangle} \right]. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Ограничимся в пределе $k_0 \rightarrow 0$ членами не выше второго порядка в разложении (18.12). При больших $|x - y|$ можно пренебречь отличием переменных $\rho(x, \tau)$, $\rho(y, \tau_1)$ от плотности затравочного конденсата $\rho_0(k_0)$, так как при вычислении по теории возмущений средние $\langle \varphi \rangle$, $\langle \pi \rangle$ с разными аргументами (x, τ) , (y, τ_1) убывают при $|x - y| \rightarrow \infty$ быстрее, чем $\langle \varphi \varphi \rangle$ [это следует из формул (19.16)], а средние $\langle \varphi \pi \rangle$, $\langle \pi \pi \rangle$ с одинаковыми аргументами [или (x, τ) , или (y, τ_1)] одни и те же в числителе и знаменателе и потому сокращаются. В результате получаем формулу

$$\tilde{G}(x, \tau | y, \tau_1) \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\langle \exp[i(\varphi(x, \tau) - \varphi(y, \tau_1))] \rangle}{\langle \exp[i\varphi(x, \tau)] \rangle \langle \exp[-i\varphi(y, \tau_1)] \rangle} \right) \quad (18.14)$$

с континуальными интегралами гауссова типа. Значения этих интегралов определяются коэффициентными функциями a_{11} , a_{12} , a_{22} в (18.22), которые можно считать матричными элементами оператора \hat{A} , и выражаются через матричные элементы обратного оператора \hat{A}^{-1} :

$$\begin{aligned} \langle \exp[i(\varphi(x, \tau) - \varphi(y, \tau_1))] \rangle &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\hat{A}^{-1})_{11}(x, \tau | x, \tau) - \right. \\ &\left. -\frac{1}{2} (\hat{A}^{-1})_{11}(y, \tau_1 | y, \tau_1) + \frac{1}{2} \hat{A}^{-1}_{11}(x, \tau | y, \tau_1) + \frac{1}{2} \hat{A}^{-1}_{11}(y, \tau_1 | x, \tau) \right\}; \end{aligned} \quad (18.15)$$

$$\langle \exp[i\varphi(x, \tau)] \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\hat{A}^{-1})_{11}(x, \tau | x, \tau) \right\};$$

$$\langle \exp[-i\varphi(y, \tau_1)] \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\hat{A}^{-1})_{11}(y, \tau_1 | y, \tau_1) \right\}.$$

Поэтому функция Грина \tilde{G} в пределе $|x - y| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \left\{ 1 - \exp \left(\frac{1}{2} (\hat{A}^{-1})_{11}(x, \tau | y, \tau_1) + \frac{1}{2} (\hat{A}^{-1})_{11}(y, \tau_1 | x, \tau) \right) \right\} \approx \\ \approx -\frac{\rho_0}{2} \left\{ (\hat{A}^{-1})_{11}(x, \tau | y, \tau_1) + (\hat{A}^{-1})_{11}(y, \tau_1 | x, \tau) \right\} \quad (18.16) \end{aligned}$$

(здесь используется неравенство $|(\hat{A}^{-1})_{11}(x, \tau | y, \tau_1)| \ll 1$ при больших $|x - y|$).

Для коэффициента Фурье функции \tilde{G} формула (18.16) запишется таким образом:

$$\tilde{G}(k, \omega) \approx -\frac{\rho_0 a_{22}(k, \omega)}{a_{11}(k, \omega) a_{22}(k, \omega) - a_{12}(k, \omega) a_{12}(-k, -\omega)}. \quad (18.17)$$

Входящие в эту формулу коэффициенты Фурье функций a_{11} , a_{12} , a_{22} получаются двукратным дифференцированием функционала $\tilde{S}[\varphi, \pi]$ по переменным φ , π .

Следующие точные диаграммные равенства представляют каждый из коэффициентов Фурье a_{11} , a_{12} , a_{22} в виде суммы бесконечного числа диаграмм температурной диаграммной техники, отличающейся от рассмотренной в § 16—17 тем, что интегралы по внутренним импульсам обрезаны на нижнем пределе k_0 .

$$\begin{aligned} a_{11}(k, \omega) &= \frac{k^2}{m} (\rho_0 + \text{diagram}) + \text{diagram} = \\ &= \frac{k^2}{m} \rho + \text{diagram} \\ i a_{12}(k, \omega) &= -i a_{12}(-k, -\omega) = \\ &= i\omega + \text{diagram} = i\omega + \text{diagram} \\ a_{22}(k, \omega) &= \text{diagram} + \text{diagram} \end{aligned} \quad (18.18)$$

Внутренним линиям диаграмм (18.18) соответствуют полные нормальные и аномальные функции Грина. Их можно различить, расставив на концах стрелки, направленные в одну сторону для нормальных функций Грина и в разные стороны для аномальных. В диаграммах (18.18) подразумевается суммирование по всевозможным расстановкам стрелок на концах внутренних линий.

После расстановки стрелок в диаграммах (18.18) возникают различные вершинные части следующего вида:

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} p_1 + p \\ \curvearrowright \\ D_{1\varphi} \\ \curvearrowleft \\ -p_1 \end{array} & , & \begin{array}{c} p_1 + p \\ \curvearrowright \\ D_{2\varphi} \\ \curvearrowleft \\ p_1 \end{array} & , & \begin{array}{c} -p_1 - p \\ \curvearrowright \\ D_{3\varphi} \\ \curvearrowleft \\ p_1 \end{array} & , & \dots & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ D_{1\pi} \\ \curvearrowleft \end{array} & , & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ D_{2\pi} \\ \curvearrowleft \end{array} & , & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ D_{3\pi} \\ \curvearrowleft \end{array} & (18.19)
 \end{array}$$

Они получаются дифференцированием по аргументам φ , π нормальных и аномальных собственно энергетических частей, сосчитанных во внешнем поле ψ_0 . Результаты дифференцирования по переменным φ обозначены $D_{j\varphi}$ ($j = 1, 2, 3$), по переменной π — $D_{j\pi}$. Символами $d_{i\varphi}$, $d_{j\pi}$ обозначены вклады в $D_{j\varphi}$ соответственно $D_{j\pi}$ диаграмм, неприводимых в смысле невозможности оторвать вершину взаимодействия с внешним полем разрывом не более двух внутренних линий. Вклад неприводимых в том же смысле диаграмм в выражение a_{22} , получаемый двукратным дифференцированием $\tilde{S}[\varphi, \pi]$ по π , обозначен t . Отметим, что выражения для неприводимых диаграмм $d_{j\varphi}$ известны точно и даются формулами

$$d_{1\varphi} = d_{3\varphi} = 0; \quad d_{2\varphi} = i\omega - k k_1 / m, \quad (18.20)$$

где (\mathbf{k}, ω) , (\mathbf{k}_1, ω_1) — 4-импульсы внешнего поля φ и внутренней линии диаграммы, подходящей к вершине $d_{2\varphi}$. Выражение (18.20) определяется квадратичной по ψ_1 , $\bar{\psi}_1$ формой (18.10). Диаграмма



в (18.18), равная плотности надконденсатных частиц ρ_1 , опре-

деляется интегралом от выражения $\bar{\psi}_1 \psi_1 (\nabla\varphi)^2$. К ρ_1 добавляется плотность конденсата ρ_0 , происходящая от выражения $-(2m)^{-1} \nabla\bar{\psi}_0 \nabla\psi_0$ после выделения слагаемого, пропорционального $(\nabla\varphi)^2$. Сумма $\rho_0 + \rho_1$ есть полная плотность ρ . Член $i\omega$ в формуле (18.18) для $i a_{12}$ соответствует выражению $\bar{\psi}_0 \partial_{\mathbf{r}} \psi_0$ в интеграле действия.

Подчеркнем, что диаграммные равенства (18.18) не используют предположение о малой плотности и в этом смысле являются точными. Используется лишь малость импульса k по сравнению с импульсом k_0 .

Из приведенных формул легко получить асимптотику функции Грина при $\omega = 0$. Действительно, выражение $a_{12}(\rho)$ при $\omega = 0$ и малых k пропорционально k^2 , a_{22} стремится к постоянной $a_{22}(0)$. Так как $a_{11}(k, 0) \sim k^2$, то при малых k $G(k, 0) \approx -\rho_0 / a_{11}(k)$. Второе слагаемое в формуле (18.18) для a_{11} при $\omega = 0$ равно $-(mV)^{-1} (kK)$, где K — среднее значение импульса в системе координат, движущейся со скоростью v . По определению нормальной компоненты (17.41) имеем $K = V\rho_n k$. В результате формула для

a_{11} принимает вид

$$a_{11} \approx \frac{k^2}{m} (\rho - \rho_n) = \frac{\rho_s k^2}{m}, \quad (18.21)$$

где $\rho_s = \rho - \rho_n$ — плотность сверхтекучей компоненты. Это дает для функции \tilde{G} известную асимптотическую формулу Боголюбова [81]

$$\tilde{G}(k, 0) \approx -\frac{\rho_0 m}{\rho_s k^2}. \quad (18.22)$$

Из этой формулы и формулы (6.49) для среднего числа частиц с импульсом k следует, что при $k \rightarrow 0$

$$N_k := \frac{T \rho_0 m}{\rho_s k^2} + O(1), \quad (18.23)$$

так как слагаемые с $\omega \neq 0$ в (6.49) дают конечный вклад при $k \rightarrow 0$. Из (18.23) следует невозможность образования конденсата в двумерных и одномерных системах при $T \neq 0$, так как функция k^{-2} не интегрируема при малых импульсах в одномерном и двумерном k -пространстве.

Более сложным является рассмотрение функции $G(k, \omega)$ при $\omega \neq 0$ и, в частности, ее аналитическое продолжение $i\omega \rightarrow E$ в область $E\tau$, $kl \lesssim 1$, где τ — время релаксации; l — длина свободного пробега. В этом случае суммирование диаграмм (18.18) сводится к решению уравнений типа кинетических [97]. В гидродинамической области $E\tau$, $kl \ll 1$ для функции Грина $G(k, E)$ получается выражение с полюсами, соответствующими первому и второму звукам. В следующем параграфе выведем кинетические уравнения для бозе-газа малой плотности в пределе низких значений температуры $T \rightarrow 0$.

А сейчас оценим порядок величины импульса k_0 , отделяющего «большие» импульсы от «малых». В общей теории k_0 можно считать сколь угодно малым. Однако при конкретных вычислениях теории возмущений целесообразно выбирать k_0 так, чтобы при $k \sim k_0$ хорошо сходилась теория возмущений, изложенная в § 16. Это дает для k_0 оценку снизу. Например, для области $T \sim \rho^{1/2}$, рассмотренной в предыдущем параграфе, поправки второго порядка теории возмущений (17.48) ведут себя как $\Lambda t_0 T k^{-1}$ при $k \ll \Lambda^{1/2}$. Потребовав, чтобы при $k \sim k_0$ они оставались меньше по порядку, чем собственно энергетические части первого приближения, имеющие порядок Λ , получим условие $k_0 \gg t_0 T$. Оценим k_0 сверху, потребовав, чтобы при $k \sim k_c = \Lambda^{1/2}$ теория возмущений § 16 была справедлива. В результате приходим к условию

$$t_0 T \ll k_0 \ll \Lambda^{1/2} \quad (18.24)$$

для температурной области $T \sim \rho^{1/2}$. Это условие записано в принятых в § 17 единицах ($2m = 1$). Следующее из (18.24) неравенство $t_0 T \ll \Lambda^{1/2}$ справедливо везде, кроме узкой области вблизи фазового перехода.

§ 19. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ГАМИЛЬТониАН НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

Микроскопическая теория сверхтекучести впервые была развита Н. Н. Боголюбовым [73]. Более ранняя полуфеноменологическая теория Л. Д. Ландау [72] опиралась на постулируемый в ней гамильтониан, описывающий гидродинамику квантовой жидкости.

Обоснование метода *гидродинамического гамильтониана* может быть получено в микроскопической теории. Построим гидродинамический гамильтониан для идеального бозе-газа, используя формализм интегрирования сначала по быстропеременным, а затем по медленно меняющимся полям. Сначала получим не сам гидродинамический гамильтониан, а функционал *гидродинамического действия*. Это функционал от полей $\psi_0(x, \tau)$, $\bar{\psi}_0(x, \tau)$, который удобно записать в новых переменных плотность — фаза, перейдя по формулам (18.4) к полярным координатам $\rho(x, \tau)$, $\varphi(x, \tau)$. Переход к полярным координатам фактически используется и в методике коллективных переменных (см. работу Н. Н. Боголюбова и Д. Н. Зубарева [74]). Теория возмущений, построенная в терминах функций Грина переменных ρ , φ , не содержит расходимостей при малых энергиях и импульсах, она удобна для вычисления низкочастотного энергетического спектра и вывода кинетических уравнений. В следующем параграфе метод построения гидродинамического гамильтониана распространяется на двумерные и одномерные бозе-системы.

Рассмотрим бозе-систему при низких температурах в пределе $T \rightarrow 0$.

Гидродинамический гамильтониан получается в результате интегрирования функционала $\exp S$ по быстропеременным полям $\psi_1(x, \tau)$. Такой интеграл (18.3) имеет смысл статистической суммы для системы частиц в медленно меняющемся поле ψ_0 . Результат интегрирования обозначим $\exp \tilde{S}$. Разложим \tilde{S} в функциональный ряд по переменным $\varphi(x, \tau)$, $\pi(x, \tau) = \rho(x, \tau) - \rho_0(k_0)$. При низких температурах коэффициентные функции этого разложения можно считать равными соответствующим функциям при нулевой температуре. Главные слагаемые, зависящие от переменных φ , π , в \tilde{S} даются квадратичной формой переменных φ , π . Коэффициентные функции квадратичной формы выражаются через термодинамические функции, причем не только для бозе-газа, но и для произвольной бозе-системы. Чтобы убедиться в этом, сделаем замену (18.9) в интеграле по быстрым переменным, после чего квадратичная форма по ψ_1 , $\bar{\psi}_1$ принимает вид (18.10). Дело обстоит так, как если бы описываемая полем ψ_1 , $\bar{\psi}_1$ система частиц, взаимодействующая с неоднородным конденсатом $\rho(x, \tau)$, находилась в поле неоднородного химического потенциала

$$\lambda(x, \tau) = \lambda + i\partial_\tau \varphi(x, \tau) - \frac{(\nabla\varphi(x, \tau))^2}{2m} \quad (19.1)$$

и в поле скоростей

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{m} \nabla \varphi(\mathbf{x}, \tau). \quad (19.2)$$

Неоднородности, вызываемые медленно меняющимися функциями $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$, $\rho(\mathbf{x}, \tau)$, учитываются в первом (квазиоднородном) приближении формулой

$$\tilde{S} = \int d\tau dx p(\lambda(\mathbf{x}, \tau), \rho(\mathbf{x}, \tau), \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)), \quad (19.3)$$

где $p(\lambda, \rho_0, \mathbf{v})$ — давление однородной системы с химическим потенциалом λ , плотностью покоящегося конденсата $\rho_0(k_0)$ в движущейся системе координат со скоростью \mathbf{v} .

Разложим p по степеням неоднородности. Коэффициент при \mathbf{v}^2 пропорционален плотности нормальной компоненты ρ_n и исчезает в пределе $T \rightarrow 0$, а коэффициент при \mathbf{v} равен нулю в силу трансляционной инвариантности. Поэтому, ограничиваясь членами не выше второго порядка по \mathbf{v} , получим, что \tilde{S} от \mathbf{v} не зависит. Используя, что $\rho_{\rho_0} = 0$, можно записать разложение \tilde{S} в виде

$$\begin{aligned} \tilde{S} = & p(\lambda, \rho_0(k_0), 0) \beta V + \int d\tau dx \left\{ p_\lambda \left(i\partial_\tau \varphi - \frac{(\nabla\varphi)^2}{2m} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{p_{\lambda\lambda}}{2} \left(i\partial_\tau \varphi - \frac{(\nabla\varphi)^2}{2m} \right)^2 + p_{\lambda\rho_0} \left(i\partial_\tau \varphi - \frac{(\nabla\varphi)^2}{2m} \right) \pi + \frac{p_{\rho_0\rho_0}}{2} \pi^2 \right\} + \dots \quad (19.4) \end{aligned}$$

Выделив из (19.4) квадратичную форму по φ , π , получим

$$\int d\tau dx \left\{ -\frac{p_\lambda}{2m} (\nabla\varphi)^2 - \frac{p_{\lambda\lambda}}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + i p_{\lambda\rho_0} \pi \partial_\tau \varphi + \frac{p_{\rho_0\rho_0}}{2} \pi^2 \right\}. \quad (19.5)$$

Коэффициенты квадратичной формы в (19.5) выражаются через производные от $p(\lambda, \rho_0)$, т. е. через термодинамические функции.

Приведем теперь некоторые из членов разложения \tilde{S} , не учитываемых формулой (19.5). Для бозе-газа главные из этих членов происходят от выражения

$$- \int d\tau d^3x \frac{1}{2m} \nabla \bar{\psi}_0 \nabla \psi_0 \quad (19.6)$$

в функционале \tilde{S} . Это выражение описывает кинетическую энергию медленно меняющегося поля. Записав (19.6) в переменных φ , π :

$$- \int d\tau d^3x \left(\frac{1}{2m} \rho_0 (\nabla\varphi)^2 + \frac{\pi (\nabla\varphi)^2}{2m} + \frac{(\nabla\pi)^2}{8m(\rho_0 + \pi)} \right), \quad (19.7)$$

заметим, что первое слагаемое в (19.7) дает вклад в квадратичную форму (19.5). В третьем слагаемом можно в выражении $\rho_0 + \pi$ пренебречь π , так что сам по себе третий член уже служит поправкой к квадратичной форме, которая приводит к отклонению энергетического спектра от линейного. Добавляя вклад от второго и третьего слагаемых в (19.7) к функционалу (19.5), получаем

$$\int d\tau d^3x \left\{ i p_{\lambda\rho_0} \pi \partial_\tau \varphi - \frac{p_{\lambda\lambda}}{2m} (\nabla\varphi)^2 - \frac{p_{\lambda\lambda}}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + \right. \\ \left. + \frac{p_{\rho_0 \rho_0}}{2} \pi^2 - \frac{(\nabla\pi)^2}{8m\rho_0} - \frac{\pi (\nabla\varphi)^2}{2m} \right\}. \quad (19.8)$$

Выражение $p(\lambda, \rho_0)$ при $T = 0$ в первом приближении легко сосчитать по схеме, использованной в § 17 в температурной области $T \sim \rho^{2/3}$. При $T = 0$ плотность надконденсатных частиц ρ по порядку меньше, чем плотность конденсата ρ_0 . Диаграммы (17.4) содержат один или два цикла из нормальных линий, которые можно обойти, двигаясь по стрелкам диаграммы (последовательности b, c в (17.4) дают меньший по порядку вклад, чем последовательность a). По этой же причине можно пренебречь вкладом давления идеального бозе-газа p_0 . В результате первое приближение для давления p при $T = 0$ получается из формулы (17.13), если положить в ней $T = 0$ и пренебречь ρ_1 :

$$p = \lambda\rho_0 - (t_0/2)\rho_0^2. \quad (19.9)$$

Отсюда

$$p_{\lambda\rho_0} = 1; \quad p_\lambda = \rho = \rho_0; \quad p_{\lambda\lambda} = 0; \quad p_{\rho_0 \rho_0} = -t_0. \quad (19.10)$$

функционал (19.9) принимает вид

$$\int d\tau d^3x \left(i\pi \partial_\tau \varphi - \frac{(\rho_0 + \pi)}{2m} (\nabla\varphi)^2 - \frac{t_0}{2} \pi^2 - \frac{(\nabla\varphi)^2}{8m\rho_0} \right) \quad (19.11)$$

и может быть интерпретирован как действие, соответствующее гамильтониану

$$\int d^3x \left(\frac{m}{2} \rho v^2 + \frac{t_0}{2} (\rho - \rho_0)^2 + \frac{(\nabla\rho)^2}{8m\rho_0} \right), \quad (19.12)$$

где $\mathbf{v} = \frac{1}{m} \nabla\varphi$. Этот гамильтониан является вариантом гидродинамического гамильтониана Ландау. Нетрудно построить гидродинамический гамильтониан бозе-газа и в следующих приближениях по плотности.

Гидродинамическое действие (19.8) позволяет построить теорию возмущений без расходимостей при малых энергиях и импульсах. За невозмущенное действие возьмем квадратичную форму по φ, π ,

считая возмущением трехлинейное взаимодействие, пропорциональное $\pi(\nabla\varphi)^2$. Заметим, что возмущение здесь происходит от слагаемого $(\nabla\psi_0, \nabla\psi_0)$, которое в теории возмущений, изложенной в § 16, целиком включается в невозмущенное действие.

Перейдя от функций φ, π к их коэффициентам Фурье по формулам типа (6.3), запишем действие в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_p \left\{ - \left(\frac{p_\lambda}{m} k^2 + p_{\lambda\lambda} \omega^2 \right) \varphi(p) \varphi(-p) - \right. \\ & - 2p_{\lambda\rho} \omega \varphi(p) \pi(-p) + \left(p_{\rho\rho} - \frac{k^2}{4m\rho_0} \right) \pi(p) \pi(-p) + \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{p_1+p_2-p_3=0} \frac{(k_1 k_2)}{2m} \varphi(p_1) \varphi(p_2) \pi(p_3), \right. \quad (19.13) \end{aligned}$$

где p — 4-вектор (\mathbf{k}, ω) . Отметим аналогию этой формулы с формулой (2.6) работы [74].

В p -представлении элементы диаграммной техники имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \overline{\underline{p}} \quad \overline{\underline{-p}} &= \langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle_0; \\ \underline{\underline{p}} \quad \underline{\underline{-p}} &= \langle \pi(p) \pi(-p) \rangle_0; \\ \overline{\underline{p}} \quad \underline{\underline{-p}} &= \langle \varphi(p) \pi(-p) \rangle_0; \\ \underline{\underline{p}} \quad \overline{\underline{-p}} &= \langle \pi(p) \varphi(-p) \rangle_0; \\ \begin{array}{c} p_1 \\ \diagup \\ p_3 \\ \diagdown \\ p_2 \end{array} &= \frac{k_1 k_2}{m} \end{aligned} \right\} \quad (19.14)$$

На диаграммах поле φ обозначается одинарной линией, π — двойной.

Невозмущенные функции $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle_0, \langle \varphi(p) \pi(-p) \rangle_0, \langle \pi(p) \varphi(-p) \rangle_0, \langle \pi(p) \pi(-p) \rangle_0$ образуют матрицу $G_0(p)$, обратную матрице

$$G_0^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \frac{p_\lambda}{m} k^2 + p_{\lambda\lambda} \omega^2, & -p_{\lambda\rho} \omega \\ p_{\lambda\rho} \omega, & -p_{\rho\rho} + \frac{k^2}{4m\rho_0} \end{pmatrix}. \quad (19.15)$$

Выпишем невозмущенные функции в приближении, где производные p_λ , $p_{\lambda\lambda}$, $p_{\lambda\rho_0}$, $p_{\rho_0\rho_0}$ заменены их первыми приближениями согласно (19.10):

$$\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle_0 = \frac{t_0 + \frac{k^2}{4m\rho_0}}{\omega^2 + \varepsilon^2(\mathbf{k})}; \quad \langle \pi(p) \pi(-p) \rangle_0 = \frac{\frac{\rho_0}{m} k^2}{\omega^2 + \varepsilon^2(\mathbf{k})}; \quad (19.16)$$

$$\langle \varphi(p) \pi(-p) \rangle_0 = -\langle \pi(p) \varphi(-p) \rangle_0 = \frac{\omega}{\omega^2 + \varepsilon^2(\mathbf{k})}, \quad (19.17)$$

где $\varepsilon^2(\mathbf{k}) = \left(\frac{k^2}{2m}\right)^2 + \frac{t_0 \rho_0}{m} k^2$ есть квадрат спектра Боголюбова.

Построенная теория возмущений не имеет расходимостей при малых импульсах. Действительно, сингулярность, пропорциональная k^{-2} в функции $\langle \varphi(p) \varphi(-p) \rangle_0$ при $\omega = 0$, компенсируется импульсами, стоящими в каждой из двух вершин третьего порядка, из которых исходит φ -линия.

Низкочастотный энергетический спектр определяется после аналитического продолжения $i\omega \rightarrow E$ уравнением

$$\det G^{-1}(p) = \det (G_0^{-1}(p) - \Sigma(p)) = 0, \quad (19.18)$$

где $\Sigma(p)$ — матрица собственно энергетических частей. В пренебрежении матрицей Σ и членом $\frac{k^2}{4m\rho_0}$ в G_0^{-1} уравнение (19.18) принимает вид

$$\left(\frac{p_\lambda}{m} k^2 - p_{\lambda\lambda} E^2\right) (-p_{\rho_0\rho_0}) - p_{\lambda\rho_0}^2 E^2 = 0. \quad (19.19)$$

Его решение

$$E^2 = k^2 \frac{p_\lambda}{m} \left(p_{\lambda\lambda} - \frac{p_{\lambda\rho_0}^2}{p_{\rho_0\rho_0}}\right)^{-1} \equiv \frac{k^2}{m} \frac{dp}{dp} \quad (19.20)$$

описывает звуковое возбуждение, скорость звука дается формулой $c^2 = \frac{1}{m} \frac{dp}{dp}$ [при условии $p_{\rho_0} = 0$ выражение

$$p_{\lambda\lambda} - \frac{p_{\lambda\rho_0}^2}{p_{\rho_0\rho_0}}$$

равно полной производной $\frac{d^2 p}{d\lambda^2}$ функции $p(\lambda, \rho_0(\lambda))$ по переменной λ].

Член $\frac{k^2}{4m\rho_0}$ в матрице G_0^{-1} (19.15) дает отклонение спектра от линейного. При учете трехлинейного взаимодействия в спектре появляется мнимая часть, а при температуре, отличной от нуля, — и вторая звуковая ветвь.

Рассмотрим диаграммы второго порядка для матрицы

$$(19.21)$$

Вклад в мнимую часть спектра дают все диаграммы (19.21), кроме *a*. В результате получается

$$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{9(1 - \exp(-\beta\varepsilon_1))}{128\pi^2 \rho m c^2} \int \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 n_2 n_3 [2 \exp(\beta\varepsilon_3) \delta(1+2-3) + \exp(\beta\varepsilon_1) \delta(1-2-3)] d^3 k_2 d^3 k_3, \quad (19.22)$$

где

$$\delta(1 \pm 2 - 3) \equiv \delta(\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 - \varepsilon_3);$$

$$m_i = \exp(\beta\varepsilon_i - 1)^{-1}; \quad \varepsilon_i^2 = \varepsilon^2(\mathbf{k}_i) = \left(\frac{k_i^2}{2m}\right)^2 + \frac{t_0 \rho_0}{m} k_i^2; \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}, \quad (19.23)$$

c — скорость звука (19.20).

Если $T = 0$, то (19.22) дает при малых импульсах

$$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{9}{128\pi^2 \rho m c^2} \int \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta(1-2-3) d^3 k_2 d^3 k_3 = \frac{3k^5}{640\pi m \rho}. \quad (19.24)$$

т. е. воспроизводит известный результат С. Т. Беляева [77]. Однако в теории возмущений, излагаемой здесь, число диаграмм второго порядка меньше, чем в формализме Беляева, а сами диаграммы не расходятся при малых импульсах.

При $T \neq 0$ и малых \mathbf{k} выражение (19.22)

$$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{3\pi^3 T^4 k}{40 \rho m c^4} \quad (19.25)$$

линейно по k . Линейная зависимость (19.25) перестает быть верной в кинетической области $kl \lesssim 1$, $E\tau \lesssim 1$, где l — длина свободного пробега; τ — время релаксации. Правильный ответ получается, если выполнить суммирование диаграмм, сводящееся к решению уравнений типа кинетических.

Рассмотрим сумму диаграмм, определяемую диаграммными равенствами

$$(19.26)$$

Первое из них выражает собственно энергетическую часть Σ через Σ_0 — вклад диаграмм, в которых нельзя отделить вход от выхода разрывом двух внутренних линий диаграммы, и полную вершинную часть D . Второе равенство (19.26) есть приближение для неприводимого четырехполюсника K . Внутренним линиям диаграмм (19.26) соответствуют полные функции Грина $\langle \phi\phi \rangle$, $\langle \pi\pi \rangle$, $\langle \pi\phi \rangle$. Для конкретизации схем (19.26) необходимо их просуммировать по всевозможным внутренним линиям диаграмм. Вершинные части будут различаться по виду линий, присоединяемых к их входам. Всего имеем шесть различных вершинных частей:

$$D_{\phi\phi, \phi}; D_{\phi\pi, \phi}; D_{\pi\pi, \phi}; D_{\phi\phi, \pi}; D_{\phi\pi, \pi}; D_{\pi\pi, \pi}. \quad (19.27)$$

Здесь первые два индекса показывают, какие линии присоединяются к внутренним входам диаграмм, а последний — вид линии, присоединяемой к внешнему входу.

Как уже говорилось, уравнения (19.26) преобразуются в кинетические. Укажем основные моменты вывода кинетических уравнений.

Вершинные части (19.27), зависящие от двух частот ω , ω_1 при аналитическом продолжении $i\omega_1 \rightarrow z$, заданы на комплексной плоскости z с двумя разрезами $\text{Im}z = 0$, ω . Уравнения (19.26) можно преобразовать к уравнениям для граничных значений аналитических функций $D(\omega, z)$ на берегах разрезов. Обозначим D^e граничные значения D на внешних берегах разрезов $\text{Im}z = -0$, $\omega + 0$, D^i — на внутренних $\text{Im}z = +0$, $\omega - 0$. Функции D^e в первом приближении оказываются равными соответствующим неприводимым частям:

$$D^e \approx d. \quad (19.28)$$

После аналитического продолжения $i\omega \rightarrow E$ в область $E \lesssim \tau^{-1}$ нетривиальной оказывается система уравнений для D^i граничных значений функций D на внутренних берегах разрезов. В действующих на функции D^i интегральных операторах главный вклад при $E \lesssim \tau^{-1}$ дают окрестности близко расположенных особенностей функций Грина. Эти особенности имеют полюсный характер, так что в окрестности особенностей функции Грина пропорциональны функции

$$(x - \varepsilon(k_1) \mp i\Delta(k_1))^{-1}, \quad (19.29)$$

где x — энергетическая переменная; $\varepsilon(k_1)$ — энергетический спектр с мнимой частью $\Delta(k_1)$. В интегралах по энергетической переменной x можно вынести за знак интеграла в точке $x = \varepsilon(k_1)$ все функции, кроме сингулярностей (19.29), произведение которых интегрируется по формуле вида

$$\int (x - \varepsilon(k_1) + i\Delta(k_1))^{-1} (x + E - \varepsilon(k_1 + k) - i\Delta(k_1 + k))^{-1} dx \approx 2\pi i Z^{-1}. \quad (19.30)$$

Здесь

$$Z = E - \varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) + \varepsilon(\mathbf{k}_1) + 2i(\Delta(\mathbf{k}_1) + \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k})) \approx \\ \approx E - 2\varepsilon'_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) + 2i\Delta(\mathbf{k}_1), \quad (19.31)$$

где $\varepsilon'_1 = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k}_1)}{\partial k_1^2}$.

Можно показать, что после указанного интегрирования по x вершинные функции D^i входят в уравнения в следующих комбинациях:

$$h(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, E) = \frac{1}{2Z} \left\{ D_{\phi\pi, \phi}^i - D_{\pi\phi, \phi}^i + i \left(t_0 + \frac{k_1^2}{2m\rho_0} \right) \varepsilon_1^{-1} D_{\phi\phi, \phi}^i + \right. \\ \left. + i \frac{\rho_0}{m} k_1^2 \varepsilon_1^{-1} D_{\pi\pi, \phi}^i \right\} \Bigg|_{\substack{i\omega_1 \rightarrow \varepsilon_1 - i0 \\ i\omega \rightarrow E + i0}} \\ g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, E) = -\frac{\rho_0}{2z} \left\{ i (D_{\pi\phi, \pi}^i - D_{\phi\pi, \pi}^i) + \left(t_0 + \frac{k_1^2}{2m\rho_0} \right) \varepsilon_1^{-1} D_{\phi\phi, \pi}^i + \right. \\ \left. + \frac{\rho_0 k_1^2}{m} \varepsilon_1^{-1} D_{\pi\pi, \pi}^i \right\} \Bigg|_{\substack{i\omega_1 \rightarrow \varepsilon_1 - i0 \\ i\omega \rightarrow E + i0}} \quad (19.32)$$

где Z определено выше (19.31). Именно эти комбинации h и g удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} (E - 2\varepsilon'_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)) h + iI(h) &= \frac{1}{m} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1); \\ (E - 2\varepsilon'_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)) g + iI(g) &= \varepsilon(\mathbf{k}_1). \end{aligned} \right\} \quad (19.33)$$

В (19.33) выражение

$$I(h) = \frac{9(1 - \exp(-\beta\varepsilon_1))}{64\pi^2 \rho m c^2} \int \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 n_2 n_3 [2 \exp(\beta\varepsilon_3) \delta(1 + 2 - 3) \times \\ \times (h_1 + h_2 - h_3) + \exp(\beta\varepsilon_1) \delta(1 - 2 - 3) (h_1 - h_2 - h_3)] d^3 k_2 d^3 k_3 \quad (19.34)$$

обозначено $I(h)$. Здесь $h_i \equiv h(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}, E)$. Остальные сокращения объяснены выше.

По форме уравнения (19.33) являются линеаризованными кинетическими уравнениями, в которых выражения $I(h)$, $I(g)$ имеют смысл интегралов столкновений. Отметим, что неоднородные члены $\frac{1}{m} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)$, $\varepsilon(\mathbf{k}_1)$ уравнений (19.33) являются интегралами движения, обращающими в нуль интегралы столкновений.

В гидродинамической области ($E\tau, kl \ll 1$) к уравнениям (19.33) можно применить метод Чепмена — Энскога — Гильберта [99]. Смысл его в том, что ищем решение кинетических уравнений (19.33) в виде

$$\left. \begin{aligned} h &= a\varepsilon(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_1) + \delta h; \\ g &= a_1\varepsilon(\mathbf{k}_1) + (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{k}_1) + \delta g, \end{aligned} \right\} \quad (19.35)$$

т. е. как суммы линейной комбинации интегралов движения $\varepsilon(\mathbf{k}_1)$, \mathbf{k}_1 и малых по сравнению с ними добавок δh , δg . В интегралах столкновений исчезает вклад от главных членов, а во внеинтегральных можно пренебречь добавками δh , δg .

Используем теперь условие ортогональности интеграла столкновений I и интегралов движения $\varepsilon(\mathbf{k}_1)$, \mathbf{k}_1 с весом

$$\frac{\exp[\beta\varepsilon(\mathbf{k}_1)]}{(\exp[\beta\varepsilon(\mathbf{k}_1)] - 1)^2}. \quad (19.36)$$

Это условие приводит к системе линейных уравнений для коэффициентов a , a_1 , \mathbf{b} , \mathbf{b}_1 при интегралах движения в (19.35). Решив эту систему, получим следующие формулы для первого приближения метода Чепмена — Энскога — Гильберта (это приближение обычно называют акустическим):

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{\frac{2}{3} \frac{\langle\langle \varepsilon \varepsilon' k^2 \rangle\rangle}{\langle\langle \varepsilon^2 \rangle\rangle} k^2 \varepsilon(\mathbf{k}_1) + E(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)}{m(E^2 - u^2 k^2)}; \\ g &= \frac{E \varepsilon(\mathbf{k}_1) - 2 \frac{\langle\langle \varepsilon \varepsilon' k^2 \rangle\rangle}{\langle\langle k^2 \rangle\rangle} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)}{E^2 - u^2 k^2}, \end{aligned} \right\} (19.37)$$

где $\langle\langle f \rangle\rangle = (2\pi)^{-3} \int f(\mathbf{k}_1) \exp[\beta\varepsilon(\mathbf{k}_1)] (\exp[\beta\varepsilon(\mathbf{k}_1)] - 1)^2 d\mathbf{k}_1$;

$$u^2 = \frac{4}{3} \frac{\langle\langle \varepsilon \varepsilon' k^2 \rangle\rangle^2}{\langle\langle k^2 \rangle\rangle \langle\langle \varepsilon^2 \rangle\rangle}. \quad (19.38)$$

Выражения для собственно энергетических частей $\Sigma_{\varphi\varphi}$, $\Sigma_{\pi\varphi}$, $\Sigma_{\pi\pi}$ через функции h , g имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{11\beta^2 \langle\langle k^2 \rangle\rangle k^2}{24m^2} - \beta E \langle\langle \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)}{m} h \rangle\rangle; \\ \Sigma_{\pi\varphi} &= -\Sigma_{\varphi\pi} = \frac{i\beta E}{2\rho_0} \langle\langle \varepsilon_1 h \rangle\rangle = \frac{i\beta E}{2\rho_0} \langle\langle \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)}{m} g \rangle\rangle; \\ \Sigma_{\pi\pi} &= \frac{1}{4\rho_0^2} \left(\frac{5}{4} \beta \langle\langle \varepsilon^2 \rangle\rangle - \beta E \langle\langle \varepsilon_1 g \rangle\rangle \right). \end{aligned} \right\} (19.39)$$

Подставим сюда вместо h , g их значения (19.37) и используем полученные выражения для вычисления спектра по формуле (19.18). Уравнение (19.18) приобретает вид

$$\left(E^2 - c_0^2 k^2 + \frac{37}{16} \frac{\rho_n}{\rho} c_0^2 k^2 \right) (E^2 - u^2 k^2) - \frac{11}{4} \frac{\rho_n}{\rho} E^2 c_0^2 k^2 = 0, \quad (19.40)$$

где

$$c_0^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{T=0}; \quad \rho_n = \frac{\beta \langle\langle k^2 \rangle\rangle}{3m} = \frac{2\pi^2 T^4}{45mc^3}. \quad (19.41)$$

Уравнение (19.40) совпадает с известным уравнением Ландау для скоростей звуков (уравнение (20.13) в [100]) применительно к модели бозе-газа, а его решения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E_1^2(\mathbf{k}) &= c_1^2 k^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{29}{16} \frac{\rho n}{\rho} \right) k^2; \\ E_2^2(\mathbf{k}) &= c_2^2 k^2 = u^2 k^2 = \frac{4}{3} \frac{\langle \langle \varepsilon \varepsilon' k^2 \rangle \rangle^2}{\langle \langle k^2 \rangle \rangle \langle \langle \varepsilon^2 \rangle \rangle} k^2. \end{aligned} \right\} \quad (19.42)$$

Формулы (19.42) верны при низких температурах (в фононной области температур). Они содержат температурные поправки к скоростям звуков, в которые дают вклад все диаграммы второго порядка (19.21).

Во втором (вязком) приближении метода Чепмена — Энскога — Гильберта добавки δh , δg в формуле (19.35) формально получаются обращением оператора — интеграла столкновений. Коэффициенты a , a_1 , b , b_1 , как и в первом приближении, но с большей точностью, находятся из условий ортогональности. В результате линейные по k ветви спектра (19.42) приобретают мнимые добавки, пропорциональные k^2 . Коэффициенты при k^2 выражаются через кинетические коэффициенты первой вязкости, второй вязкости и теплопроводности. Основным среди них при низких температурах является коэффициент первой вязкости η .

Формулы вязкого приближения для звуковых ветвей имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E_1(\mathbf{k}) &= c_1 k - i \frac{27}{8} \frac{\eta}{m\rho} k^2; \\ E_2(\mathbf{k}) &= c_2 k - i \frac{2}{3} \frac{\eta}{m\rho n} k^2. \end{aligned} \right\} \quad (19.43)$$

Здесь учтен только вклад коэффициента первой вязкости, определяемого равенством

$$\eta = \frac{2\beta}{15} \langle \langle \varepsilon' k^4 f \rangle \rangle, \quad (19.44)$$

где $f(k^2)$ — решение уравнения

$$I \left(k_i k_j - \frac{k^2}{3} \delta_{ij} \right) f = 2\varepsilon'_1 \left(k_{1i} k_{1j} - \frac{k_1^2}{3} \delta_{ij} \right). \quad (19.45)$$

В пределе $T \rightarrow 0$ коэффициент первой вязкости η для бозе-газа вычисляется в явном виде в квадратурах:

$$\eta = \frac{(4\pi)^7 \rho}{3^9 5^3 J} \left(\frac{T}{mc^2} \right)^{-5}, \quad (19.46)$$

где J — интеграл

$$J = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy xy (x+y)^4 [(\exp(x)-1)(\exp(y)-1) \times \\ \times (1-\exp(-x-y))]^{-1}. \quad (19.47)$$

Температурная зависимость коэффициента первой вязкости, пропорционального T^{-5} , оказывается такой же, как и в теории Ландау — Халатникова [100], в которой главный вклад в вязкость дают четырехфононные процессы.

Вклад кинетических коэффициентов второй вязкости и теплопроводности в затухание спектра оказывается по сравнению с вкладом первой вязкости величиной, пропорциональной T^8 . Именно поэтому его можно не учитывать в пределе $T \rightarrow 0$.

§ 20. СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ДВУМЕРНЫХ И ОДНОМЕРНЫХ БОЗЕ-СИСТЕМ

Сверхтекучесть трехмерной бозе-системы связана с макроскопическим заполнением нижнего квантового уровня — конденсата. В двумерных и одномерных системах при $T \neq 0$ конденсат отсутствует. Это утверждение следует из теоремы Боголюбова о k^{-2} [81] и было доказано в § 18.

Отсутствие конденсата не исключает возможности сверхтекучести. Соображения в пользу такой возможности, высказанные в некоторых работах, основаны или на вариационном расчете волновой функции основного состояния (метод коллективных переменных) [89, 90], или на методе когерентных состояний [91]. В. Л. Березинский [92] развил метод, который использует переход от непрерывной системы к дискретной системе плоских ротаторов.

Применим к двумерным и одномерным системам метод континуального интегрирования сначала по быстропеременным, а затем по медленно меняющимся полям. Результаты подтверждают наличие сверхтекучести в двумерных бозе-системах и указывают на возможность сверхтекучести в одномерных системах.

Основная физическая идея состоит в том, что частицы с малыми импульсами ведут себя как «затравочный конденсат», который порождает сверхтекучую плотность ρ_s порядка полной плотности системы ρ . Метод континуального интегрирования позволяет реализовать эту идею и построить гидродинамическое действие, характерное для сверхтекучих систем.

Рассмотрим двумерную бозе-систему. В ней возможно существование конденсата при нулевой температуре. Плотность конденсата ρ_0 определяется из уравнения $\partial \tilde{S} / \partial \rho_0 = 0$, где \tilde{S} — гидродинамическое действие системы, получаемое интегрированием по быстропеременным полям.

Рассмотрим разложение функционала \tilde{S} в функциональный ряд по переменным $\varphi(x, \tau)$, $\pi(x, \tau) = \rho(x, \tau) - \rho_0(k_0)$. В пределе

$T \rightarrow 0$ и фиксированном k_0 можно считать коэффициентные функции равными их значениям при $T = 0$.

Проведенный в предыдущем параграфе вывод гидродинамического действия распространяется и на двумерную систему. Главный, зависящий от φ , π вклад в S дает квадратичная форма

$$\int d\tau d^2x \left(-\frac{\rho_\lambda}{2m} (\nabla\varphi)^2 - \frac{\rho_{\lambda\lambda}}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + i\rho_{\lambda\rho_0} \pi \partial_\tau \varphi + \frac{1}{2} \rho_{\rho_0\rho_0} \pi^2 \right), \quad (20.1)$$

где ρ_λ , $\rho_{\lambda\lambda}$, $\rho_{\lambda\rho_0}$, $\rho_{\rho_0\rho_0}$ — частные производные функции $\rho(\lambda, \rho_0)$, причем $\rho_{\rho_0} = 0$. Выражение (20.1) описывает не взаимодействующие звуковые возбуждения, энергия которых линейно зависит от импульса. Следующие члены разложения приводят к отклонению спектра от линейного и к взаимодействию возбуждений.

Для бозе-газа малой плотности главные члены разложения S , не учитываемые квадратичной формой, содержатся в функционале, соответствующем кинетической энергии медленно меняющегося поля:

$$-\int d\tau d^2x \frac{|\nabla\psi_0|^2}{2m} = -\int \frac{d\tau d^3x}{2m} \left(\rho_0 (\nabla\varphi)^2 + \pi (\nabla\varphi)^2 + \frac{(\nabla\pi)^2}{4(\rho_0 + \pi)} \right). \quad (20.2)$$

Первое слагаемое под интегралом в правой части (20.2) дает вклад в квадратичную форму (20.1). Второе и третье слагаемые дают добавку к квадратичной форме, причем в третьем слагаемом можно пренебречь π по сравнению с ρ_0 .

Квадратичная форма (20.1) вместе с указанными добавками образует функционал

$$\int d\tau d^2x \left(-\frac{\rho_\lambda}{2m} (\nabla\varphi)^2 - \frac{\rho_{\lambda\lambda}}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + i\rho_{\lambda\rho_0} \pi \partial_\tau \varphi + \frac{1}{2} \rho_{\rho_0\rho_0} \pi^2 - \frac{\pi (\nabla\varphi)^2}{2m} - \frac{(\nabla\pi)^2}{8m\rho_0} \right), \quad (20.3)$$

имеющий смысл гидродинамического действия.

Считая интеграл от выражения $-\frac{\pi(\nabla\varphi)^2}{2m}$ возмущением по отношению к квадратичной форме по φ , π , можно построить теорию возмущений, которая, как и построенная в § 19 для трехмерной системы, не имеет расходимостей при малых импульсах. Применение теории возмущений к вычислению низкочастотного спектра дает при $T \neq 0$ спектр с двумя звуковыми ветвями, характерный для сверхтекучей бозе-системы.

Найдем асимптотику одночастичной функции Грина

$$\begin{aligned} & -\langle \psi_0(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_0(\mathbf{y}, \tau_1) \rangle = \\ & = -\langle (\rho(\mathbf{x}, \tau) \rho(\mathbf{y}, \tau_1))^{1/2} \exp i(\varphi(\mathbf{x}, \tau) - \varphi(\mathbf{y}, \tau_1)) \rangle, \end{aligned} \quad (20.4)$$

где $\langle \dots \rangle$ — усреднение по медленно меняющимся полям с весом $\exp S$ при $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$.

Возьмем импульс k_0 , отделяющий «большие» импульсы от «малых», достаточно малым, чтобы при вычислении среднего (20.4) можно было в первом приближении пренебречь отличием переменных $\rho(x, \tau)$, $\rho(y, \tau_1)$ от плотности конденсата ρ_0 при нулевой температуре, а в качестве \tilde{S} использовать квадратичную форму (20.1). Тогда интеграл сведется к гауссову, а для функции Грина (20.4) получим выражение

$$-\rho_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle (\varphi(x, \tau) - \varphi(y, \tau_1))^2 \rangle \right\}, \quad (20.5)$$

где

$$\frac{1}{2} \langle (\varphi(x, \tau) - \varphi(y, \tau_1))^2 \rangle = \frac{1}{2\beta V} \sum_{\omega, k < k_0} \frac{m}{\rho(k^2 + \omega^2/c^2)} \times \\ \times \left| \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega\tau)] - \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{y} - \omega\tau_1)] \right|^2. \quad (20.6)$$

Была использована формула

$$\langle \varphi(\mathbf{k}, \omega) \varphi(-\mathbf{k}, -\omega) \rangle = \frac{m}{\rho \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right)} \quad (20.7)$$

для среднего $\langle \varphi\varphi \rangle$ в (\mathbf{k}, ω) -представлении (см. предыдущий параграф). Здесь c^2 есть квадрат скорости звука:

$$c^2 = \frac{p_\lambda}{m} \left(p_{\lambda\lambda} - \frac{p_{\lambda\rho}^2}{\rho_0 \rho_0} \right)^{-1} = \frac{1}{m} \frac{dp}{d\rho}. \quad (20.8)$$

Асимптотика выражения (20.6) на больших расстояниях $r \rightarrow \infty$ есть

$$\frac{mc^2}{2\rho(2\pi)^2} \int_{k < k_0} d^2 k \frac{1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - y)}{ck} \operatorname{cth} \frac{\beta ck}{2} = \\ = \frac{m}{2\pi\beta\rho} \ln \frac{r}{\beta c} + \text{const.} \quad (20.9)$$

Отсюда следует, что при $r \rightarrow \infty$ функция Грина убывает как степень $r^{-\alpha}$ с показателем

$$\alpha = \frac{m}{2\pi\beta\rho}. \quad (20.10)$$

Покажем, что степенная асимптотика функции Грина сохраняется и при повышении температуры. Показатель степени имеет вид

$$\alpha = \frac{m}{2\pi\beta\rho_s}, \quad (20.11)$$

отличаясь от (20.10) заменой полной плотности плотностью сверхтекучей компоненты. В пределе $T \rightarrow 0$ $\rho = \rho_s$, и (20.11) переходит в (20.10).

При $T \neq 0$ решение уравнения $\partial \tilde{S} / \partial \rho_0 = 0$ имеет смысл плотности затравочного конденсата $\rho_0(k_0)$. Как будет видно, $\rho_0(k_0) \sim k_0^\alpha$. Рассмотрим разложение \tilde{S} в функциональный ряд по переменным $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$, $\pi(\mathbf{x}, \tau) = \rho(\mathbf{x}, \tau) - \rho_0(k_0)$. Коэффициент при $\frac{(\nabla\varphi)^2}{2m}$ в квадратичной форме (20.1) при $T \neq 0$ оказывается равным

$$-(\rho_0(k_0) + \rho_1(k_0) - \rho_n(k_0)), \quad (20.12)$$

где $\rho_0(k_0)$, $\rho_1(k_0)$ — плотности чисел частиц с $k < k_0$ и $k > k_0$; ρ_n — плотность числа частиц нормальной компоненты с $k > k_0$. Вывод выражения (20.12) аналогичен проведенному в § 18 для трехмерной системы. В пределе $k_0 \rightarrow 0$ выражение (20.12) можно считать равным $\rho_n - \rho = -\rho_s$, где ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты.

Вернемся к функции Грина. Соображения, использованные выше при переходе от (20.4) к (20.5), можно применить и здесь с заменой в (20.5) ρ_0 на $\rho_0(k_0)$, а в (20.6), (20.7) — ρ на ρ_s . В сумме по частотам (20.6) главный вклад дает слагаемое с $\omega = 0$. Формула (20.9) заменяется формулой

$$\frac{m}{\beta \rho_s (2\pi)^2} \int_{k < k_0} d^2 k \frac{1 - \cos(\mathbf{k}, \mathbf{x} - \mathbf{y})}{kr} = \frac{m}{2\pi \beta \rho_s} \ln k_0 r + c_1, \quad (20.13)$$

где c_1 — константа, не зависящая от k_0 . Для функции Грина получим асимптотику

$$G \approx -\rho_0(k_0)(k_0 r)^{-\alpha} \exp(-c_1). \quad (20.14)$$

Функция Грина не зависит от импульса k_0 в (20.14), если предположить, что $\rho_0(k_0) \sim k_0^\alpha$. Такое предположение является самосогласованным. Оно приводит к формуле

$$G \approx -a_1 r^{-\alpha} \quad (20.15)$$

с a_1 , не зависящим от k_0 . Из (20.15) следует асимптотическая формула для числа частиц $N(\mathbf{k})$ при малых k вида

$$N(\mathbf{k}) \approx a_2 k^{\alpha-2}. \quad (20.16)$$

Она приводит к выражению

$$\rho_0(k_0) = (2\pi)^{-2} \int_{k < k_0} N(\mathbf{k}) d^2 k = a_3 k_0^\alpha \quad (20.17)$$

для плотности $\rho_0(k_0)$, которое и предполагалось.

Проведенное рассмотрение показывает, что одночастичная функция Грина (20.4) для двумерных бозе-систем при достаточно низких температурах убывает как $r^{-\alpha}$ при $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$.

В трехмерном случае функция Грина стремится к плотности конденсата ρ_0 . О дальнедействующих корреляциях в двумерных бозе-системах можно говорить именно в том смысле, что одночастичные функции Грина убывают степенным образом, а не экспоненциально, как при достаточно высокой температуре. Темпера-

тура перехода от экспоненциального убывания функции Грина к степенному является, очевидно, температурой фазового перехода в сверхтекучее состояние.

До сих пор не учитывались возбуждения системы типа квантовых вихрей. Описание вихрей в формализме континуального интеграла можно найти в следующем параграфе. Там, в частности, показано, что роль вихрей несущественна, пока мал показатель α (20.11). Если $\alpha \ll 1$, то степенное убывание функции Грина будет и при учете вихрей.

Возможна ли сверхтекучесть в одномерных бозе-системах? Рассмотрим одномерный газ бозе-частиц, взаимодействующих через δ -образный отталкивающий потенциал:

$$u(x-y) = g\delta(x-y). \quad (20.18)$$

Для такой системы известно точное выражение энергии основного состояния (Либ и Линигер [101, 102]). Термодинамические функции системы, найденные авторами работы [103], не имеют особенностей, так что фазовый переход при конечных температурах в системе отсутствует. Возможность сверхтекучести в этой модельной системе при $T = 0$ рассматривалась Э. Б. Сониным [89].

Покажем, что в этой системе возможны дальнедействующие корреляции, убывающие степенным образом, при $T = 0$. Частицы с малыми значениями импульса образуют затравочный конденсат, порождающий сверхтекучую плотность порядка полной плотности ρ . В этом можно убедиться, применив в одномерном случае вывод гидродинамического действия. В одномерном случае уравнение $\partial \bar{S} / \partial \rho_0 = 0$, определяющее плотность затравочного конденсата $\rho_0(k_0)$, имеет степенную асимптотику

$$\rho_0(k_0) \sim k_0^\gamma; \quad \gamma = \frac{mc}{2\pi\rho}. \quad (20.19)$$

Показатель степени выражается через плотность и скорость звука. Асимптотика функции Грина при $r \rightarrow \infty$ и низких температурах (в частности, при $T = 0$) дается формулой

$$G \approx -\rho_0(k_0) \exp \left\{ -\frac{m}{2\rho\beta V} \sum_{\omega, \mathbf{k} < \mathbf{k}_0} \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{-1} \left| \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)] - \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{y} - \omega\tau_1)] \right|^2 \right\}, \quad (20.20)$$

аналогичной (20.5), (20.6). При $T = 0$ формула (20.20) принимает вид

$$G \approx -\rho_0(k_0) \exp \left\{ -\frac{mc}{4\pi\rho} \ln k_0^2 (k^2 + c^2 \delta^2) + \text{const} \right\}, \quad (20.21)$$

где $\delta = \tau - \tau_1$, или

$$G \approx -a (r^2 + c^2 \delta^2)^{-\gamma/2}. \quad (20.22)$$

Самосогласованность предположения $\rho_0(k_0) \sim k_0^\gamma$ очевидна. Действительно, при $\rho_0(k_0) \sim k_0^\gamma$ коэффициент в (20.22) не зависит от k_0 , а из (20.22) получим, что $N(k) \sim k^{\gamma-1}$, $\rho_0(k_0) \sim k_0^\gamma$. Если $T \neq 0$, то выражение (20.20) дает экспоненциально убывающую при $r \rightarrow \infty$ функцию Грина

$$G \sim \exp\left(-\frac{m}{2\beta\rho} r\right). \quad (20.23)$$

Видно, что в одномерной бозе-системе дальнедействующие корреляции, убывающие как степень, а не как экспонента, существуют только при $T = 0$. Естественно считать поэтому, что свойством сверхтекучести одномерная система обладает только при нулевой температуре. Этот вывод согласуется с результатом точного термодинамического расчета в работе [103], не обнаруживающим нарушения аналитичности термодинамических функций при конечных значениях температуры.

Найдем функции Грина, термодинамические функции и уравнение кривой фазового перехода для двумерного неидеального бозе-газа малой плотности.

В трехмерном случае ответы выражаются через t_0 — t -матрицу при нулевых значениях энергии и импульса, описывающую рассеяние двух бозе-частиц в пучоте.

В двумерном случае t -матрица, определяемая уравнением

$$t(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z) + (2\pi)^{-2} \int d^2 k_3 u(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \left(\frac{k_3^2}{m} - z\right)^{-1} t(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, z) = u(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (20.24)$$

при малых $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z$ имеет асимптотический вид

$$t \approx \frac{4\pi}{m \ln \frac{\varepsilon_0}{-z}} \quad (20.25)$$

и исчезает в пределе $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z \rightarrow 0$. Асимптотика (20.25) верна при $|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2| \ll r_0^{-1}, |z| \ll m^{-1}r_0^{-2}$, где r_0 — радиус действия потенциала. Величина ε_0 в (20.25) имеет порядок $m^{-1}r_0^{-2}$, так что $|\ln |(\varepsilon_0/-z)|| \gg 1$.

Для вывода (20.25) перенесем второе слагаемое в левой части (20.24) вправо, а затем прибавим к обеим частям одно и то же выражение:

$$t(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z) + (2\pi)^{-2} \int d^2 k_3 u(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \left(\frac{k_3^2}{m} - z_0\right)^{-1} t(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, z) = u(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + (2\pi)^{-2} \int d^2 k_3 u(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \times \left[\left(\frac{k_3^2}{m} - z_0\right)^{-1} - \left(\frac{k_3^2}{m} - z\right)^{-1} \right] t(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, z). \quad (20.26)$$

Здесь z_0 — произвольный параметр. Оператор, действующий в левой части (20.26) на t -матрицу, можно обратить. Это равносильно замене потенциала в правой части t -матрицей

$$t(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z) = t(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z_0) + (2\pi)^{-2} \int d^2 k_3 t(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, z_0) \times \\ \times \left[\left(\frac{k_3^2}{m} - z \right)^{-1} - \left(\frac{k_3^2}{m} - z_0 \right)^{-1} \right] t(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, z). \quad (20.27)$$

Переход от (20.24) к (20.27) есть преобразование уравнения для t -матрицы

$$t_z + u R_z t_z = u \quad (20.28)$$

к тождеству Гильберта

$$t_z - t_{z_0} = t_{z_0} (R_{z_0} - R_z) t_z, \quad (20.29)$$

где $R_z = (H_0 - z)^{-1}$ — резольвента невозмущенного оператора Шредингера (без потенциала) t_z ; u — операторы t -матрицы и потенциальной энергии.

В асимптотической области $|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2| \ll r_0^{-1}, |z|, |z_0| \ll m^{-1} r_0^{-2}$ можно считать, что t не зависит от импульсов. Это приводит формулу (20.27) к виду

$$t(z) - t(z_0) \approx (2\pi)^{-2} t(z_0) t(z) \int d^2 k_3 \left[\left(\frac{k_3^2}{m} - z_0 \right)^{-1} - \left(\frac{k_3^2}{m} - z \right)^{-1} \right] = \\ = \frac{m}{4\pi} t(z_0) t(z) \ln \frac{z}{z_0}, \quad (20.30)$$

откуда и следует (20.25).

Для исключения потенциала и перехода к t -матрице используем следующий прием. Проинтегрируем сначала функционал $\text{exp } S$ по переменным $a^+(\mathbf{k}, \omega)$, $a(\mathbf{k}, \omega)$ с импульсами $k > k'_0$, где k'_0 удовлетворяет неравенствам

$$\max(|\lambda|, T) \ll \frac{(k'_0)^2}{2m} \ll \varepsilon_0. \quad (20.31)$$

Результат интегрирования есть функционал от переменных $a^+(\mathbf{k}, \omega)$, $a(\mathbf{k}, \omega)$ с $k < k'_0$, обозначаемый далее $\text{exp } S'$. Для системы малой плотности формула первого приближения для S' имеет вид

$$S' = \sum_{\omega, \mathbf{k} < \mathbf{k}'_0} \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda \right) a^+(p) a(p) - \\ - \frac{1}{2\beta V} \sum_{\substack{p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \\ \mathbf{k}_i < \mathbf{k}'_0}} t' a^+(p_1) a^+(p_2) a(p_3) a(p_4) \quad (20.32)$$

и отличается от формулы (6.7) для S тем, что суммы по импульсам обрезаны на верхнем пределе k'_0 , а потенциал заменен t -матри-

цей, в определении которой (20.24) интеграл по k_3 обрезан на нижнем пределе k'_0 . Такая t -матрица (обозначенная t') имеет вид

$$t' = t'(\omega_1 + \omega_2) = \frac{4\pi}{m \ln \left(\frac{\varepsilon_0}{\frac{k_0'^2}{m} - i\omega_1 - i\omega_2} \right)}. \quad (20.33)$$

Проинтегрируем функционал $\exp S'$ по переменным $a^+(p)$, $a(p)$ с импульсами k , удовлетворяющими условию $k_0 < k < k'_0$. При этом переменные $a^+(p)$, $a(p)$ с $k < k_0$ по отношению к переменным интегрирования a^+ , a с $k \in [k_0, k'_0]$ имеют смысл «неоднородного конденсата». Порядок величины k_0 определяется в конце этого параграфа. Во всяком случае, при всех значениях температуры ниже температуры фазового перехода имеем $k_0 \ll (m\lambda)^{1/2}$.

При вычислении термодинамических функций будем считать конденсат в первом приближении однородным и учтем его, заменив в S' переменные $a^+(p)$, $a(p)$, для которых $k < k_0$:

$$a^+(p), a(p) \rightarrow (\rho_0(k_0)\beta V)^{1/2} \delta_{p,0}. \quad (20.34)$$

Величина $\rho_0(k_0)$ в (20.34) имеет смысл плотности частиц с $k < k_0$. Эта плотность, как и плотность $\rho_1(k_0)$ частиц с $k > k_0$, зависит от выбора k_0 -импульса, разделяющего «медленные» и «быстрые» частицы. Полная плотность $\rho = \rho_0(k_0) + \rho_1(k_0)$ не должна зависеть от выбора k_0 .

Первое приближение для $\rho_0(k_0)$ определяется из условия максимума вклада в S' от слагаемых, не содержащих a^+ , а после замены (20.34), т. е. максимума выражения

$$\beta V \left(\lambda \rho_0(k_0) - \frac{t'(0)}{2} \rho_0^2(k_0) \right), \quad (20.35)$$

отсюда получаем

$$\rho_0(k_0) = \frac{\lambda}{t'(0)} = \frac{m\lambda}{4\pi} \ln \frac{m\varepsilon_0}{k_0^2}. \quad (20.36)$$

После замены (20.34) можно использовать формализм теории возмущений с нормальными и аномальными функциями Грина, аналогичный рассмотренному в § 16 для трехмерного случая. Главный вклад в собственно энергетические части A , B дают вершины второго порядка, тогда получим

$$A \approx 2t'(0)\rho_0(k_0) = 2\lambda; \quad B \approx t'(0)\rho_0(k_0) = \lambda. \quad (20.37)$$

Нормальная и аномальная функции Грина первого приближения даются формулами

$$G = -\frac{i\omega + k^2/2m + \lambda}{\omega^2 + \varepsilon^2(\mathbf{k})}; \quad G_1 = \frac{\lambda}{\omega^2 + \varepsilon^2(\mathbf{k})}, \quad (20.38)$$

где

$$\varepsilon^2(\mathbf{k}) = \left(\frac{k^2}{2m} \right)^2 + \frac{\lambda}{m} k^2. \quad (20.39)$$

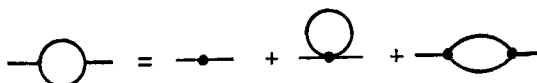
Значение плотности $\rho_1(k_0)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \rho_1(k_0) &= -\frac{1}{\beta V} \sum_{\substack{\omega, \mathbf{k} > k_0 \\ \varepsilon \rightarrow +0}} e^{i\omega\varepsilon} G(\mathbf{k}, \omega) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{k > k_0} d^3 k \left(\frac{k^2}{2m} + \lambda \operatorname{cth} \frac{\beta\varepsilon(\mathbf{k})}{2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (20.40)$$

Получается интеграл, логарифмически расходящийся при $k_0 \rightarrow 0$. Эта расходимость должна сокращаться при сложении с величиной $\rho_0(k_0)$, вычисленной с учетом второго порядка теории возмущений. Определим $\rho_0(k_0)$ из равенства

$$\lambda = A(0) - B(0) \quad (20.41)$$

равносильного уравнения $\partial \tilde{S} / \partial \rho_0 = 0$. Это равенство служило для определения ρ_0 во втором порядке теории возмущений и для трехмерного бозе-газа в § 17. Учет диаграммы для собственно энергетических частей вида



$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (20.42)$$

Для конкретизации диаграмм (20.42) необходимо расставить стрелки на входах диаграмм и просуммировать по всевозможным расстановкам стрелок на концах внутренних линий, причем линиям с одинаковым направлением стрелок на концах соответствуют нормальные, с противоположным — аномальные функции Грина.

Уравнение (20.41) конкретизируется в виде

$$\begin{aligned} \lambda &= t'(0) (\rho_0(k_0) + \rho_1(k_0)) + \frac{t'(0)}{\beta V} \sum_{\substack{\omega \\ k_0 < \mathbf{k} < k'_0}} G_1(\mathbf{k}, \omega) - \\ &- \frac{2\rho_0(k_0) (t'(0))^2}{\beta V} \sum_{\substack{\omega \\ k_0 < \mathbf{k} < k'_0}} (G(\mathbf{k}, \omega) G(-\mathbf{k}, -\omega) - G_1(\mathbf{k}, \omega) G_1(-\mathbf{k}, -\omega)) \end{aligned} \quad (20.43)$$

и приводит для $\rho_0(k_0)$ к выражению

$$\rho_0(k_0) = \frac{m\lambda}{4\pi} \left(\ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda} - 2 \right) - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k > k_0} d^2 k \frac{k^2/2m + \lambda}{\varepsilon(\mathbf{k})} \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon(\mathbf{k})) - 1}. \quad (20.44)$$

В отличие от первого приближения (20.36) выражение (20.44) не зависит от импульса k'_0 . Сложив (20.40) и (20.44), получим полную плотность

$$\rho = \frac{m\lambda}{4\pi} \left(\ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda} - 1 \right) - \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k \frac{k^2}{2m\varepsilon(\mathbf{k})} \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon(\mathbf{k})) - 1}. \quad (20.45)$$

Интеграл в (20.45) не расходится, даже если устремить в нем импульс обрезания k_0 к нулю. Таким образом, получили выражение для плотности, не зависящее от величин k_0 , k'_0 , которые являются вспомогательными и определенными только по порядку величины.

Приведем соответствующее (20.45) выражение для давления:

$$p = \frac{m\lambda^2}{8\pi} \left(\ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\beta(2\pi)^2} \int d^2 k \ln(1 - \exp(-\beta\varepsilon(k))), \quad (20.46)$$

а также формулы для плотностей нормальной и сверхтекучей компонент:

$$\left. \begin{aligned} \rho_n &= \frac{\beta}{2m(2\pi)^2} \int d^2 k k^2 \frac{\exp(\beta\varepsilon(k))}{(\exp(\beta\varepsilon(k)) - 1)^2}; \\ \rho_s &= \frac{m\lambda}{4\pi} \left(\ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda} - 1 \right) - \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{2m} \times \\ &\times \left(\frac{k^2}{\varepsilon(k)} \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon(k)) - 1} - \frac{\beta k^2 \exp(\beta\varepsilon(k))}{(\exp(\beta\varepsilon(k)) - 1)^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20.47)$$

Плотность ρ_n легко вычислить, сосчитав среднее значение импульса в системе координат, движущейся со скоростью v . Такое вычисление дословно повторяет проделанное в § 17 для трехмерного случая с помощью функции Грина, получающейся из (20.38) заменой

$$i\omega \rightarrow i\omega + v \cdot k.$$

Формулы (20.45) — (20.47) определяют термодинамику ниже фазового перехода. Уравнение линии фазового перехода найдем из условия

$$\rho = \rho_n, \quad (20.48)$$

означающего, что исчезает сверхтекучая плотность ρ_s . Решение уравнения (20.48) может существовать только при $T \gg \lambda$, так как если $T \lesssim \lambda$, то $\rho_n \lesssim m\lambda$, $p \sim m\lambda \ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda}$, $\rho \gg \rho_n$. При $T \gg \lambda$ уравнение (20.48) можно переписать в виде

$$\frac{m\lambda}{4\pi} \ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda} = \frac{mT}{\pi} \ln \frac{T}{\lambda}. \quad (20.49)$$

Отсюда для температуры перехода T_c получим выражение

$$T_c \approx \frac{\lambda}{4} \frac{\ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda}}{\ln \ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda}}. \quad (20.50)$$

При $T > T_c$ система находится в нормальном состоянии, а при вычислении функций Грина и термодинамических функций можно

пользоваться обычной теорией возмущений. Одночастичная функция Грина дается формулой

$$G = \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \Lambda \right)^{-1}, \quad (20.51)$$

где

$$\Lambda = \lambda - \frac{2}{\pi m \ln \frac{\varepsilon_0}{|\Lambda|}} \int \frac{d^2 k}{\exp [\beta (k^2/2m + |\Lambda|)] - 1}, \quad (20.52)$$

причем добавка к λ в (20.52) дается диаграммой B (20.42).

Оценим теперь порядок величины импульса k_0 для двумерного бозе-газа. Как и в § 18, где k_0 было определено по порядку для трехмерной модели, потребуем, чтобы при $k > k_0$ собственно энергетическая часть второго порядка теории возмущений



$$(20.53)$$

не превосходит главного числа, имеющего порядок λ .

Положив для простоты внешнюю частоту ω этой диаграммы равной нулю, ограничимся при оценке порядка величины одним слагаемым $\omega_1 = 0$ в сумме по внутренней частоте. Тогда соответствующее диаграмме (20.53) выражение оценивается через

$$\rho_0(k_0) (t'(0))^2 T \int G(k_1, 0) G(k - k_1, 0) d^2 k_1. \quad (20.54)$$

В силу (20.38) $G(k, 0) \sim mk^{-2}$. Учтя, что интеграл в (20.54) берется по области $k_1 > k_0$, $|k - k_1| > k_0$, получим для него оценку порядка $m^2 k_0^{-2}$. Так как $\rho_0(k_0) \lesssim m\lambda \ln(\varepsilon_0/\lambda)$, $t'(0) \sim (m \ln(\varepsilon_0/\lambda))^{-1}$, получаем, что диаграмма (20.53) не превосходит по порядку величины

$$\frac{mT\lambda}{k_0^2 \ln \frac{\varepsilon_0}{\lambda}}. \quad (20.55)$$

Отношение диаграммы (20.53) к функции первого приближения не превосходит по порядку величину $mT(k_0^2 \ln \varepsilon_0/\lambda)^{-1}$, откуда следует оценка снизу для k_0 :

$$\frac{k_0^2}{m} \gg \frac{T}{\ln(\varepsilon_0/\lambda)}. \quad (20.56)$$

Можно оценить k_0 сверху, потребовав, чтобы при $k^2/m \sim \lambda$ была еще применима «обычная» теория возмущений с нормальными и аномальными функциями Грина. В итоге получаем условия, налагаемые на импульс k_0 :

$$\frac{T}{\ln(\varepsilon_0/\lambda)} \ll \frac{k_0^2}{m} \ll \lambda. \quad (20.57)$$

Следующее из этих условий неравенство $T \ll \lambda \ln(\epsilon_0/\lambda)$ выполняется при всех значениях температуры ниже температуры фазового перехода, так как согласно (20.50) $T_c \ll \lambda \ln(\epsilon_0/\lambda)$.

Развитый здесь подход к расчету функций Грина и термодинамических функций двумерного бозе-газа применим, пока не очень мала величина $|1 - T/T_c|$. При $T < T_c$ для применимости теории возмущений необходимо условие $\alpha \ll 1$, означающее, что мала вероятность образования квантовых вихрей.

§ 21. КВАНТОВЫЕ ВИХРИ В БОЗЕ-СИСТЕМАХ

В сверхтекучей бозе-системе кроме описанных выше звуковых возбуждений могут существовать специфические возбуждения, называемые *квантовыми вихрями*.

Попытки учесть вихревые возбуждения имелись уже в первоначальном варианте теории Ландау [72]. Существование периодической решетки квантовых вихрей в сверхпроводнике, помещенном в магнитном поле, было предсказано А. А. Абрикосовым в 1952 г. [104]. Представление о квантовых вихрях, образующихся во вращающемся гелии ниже λ -точки, было высказано независимо друг от друга Онзагером и Фейнманом [139, 140].

В этом параграфе будет изложен способ описания квантовых вихрей в формализме континуального интеграла. Будем рассматривать в основном двумерную бозе-систему и покажем, что существующая в ней при низких температурах система фононов и вихрей эквивалентна двумерной релятивистской электродинамике, причем фононы имеют значение фотонов, вихри — заряженных частиц. При низкой температуре вихри могут присутствовать только в виде связанных пар противоположного знака. Будет показано, что учет таких пар не меняет степенного характера асимптотики одночастичной функции Грина на больших расстояниях.

Далее обсудим значение квантовых вихрей в фазовом переходе из сверхтекучего состояния в нормальное. В двумерной системе такой переход связан с диссоциацией связанных пар вихрей противоположного знака. Аналогичный подход к трехмерной системе приводит к выводу, что здесь фазовый переход в нормальное состояние сопровождается появлением длинных вихревых нитей.

Используем подход, основанный на идее последовательного интегрирования сначала по быстропеременным, а затем по медленно меняющимся полям с различными схемами теории возмущений на этих двух этапах.

Получаемый при интегрировании по быстропеременным полям функционал

$$\int \exp S d\bar{\psi}_1 d\psi_1 = \exp \tilde{S}[\bar{\psi}_0, \psi_0] \quad (21.1)$$

можно интерпретировать как статистическую сумму для системы «быстрых» частиц в медленно меняющемся поле ψ_0 . Функционал

\tilde{S} имеет смысл «гидродинамического действия». В интеграле по $\psi_0, \bar{\psi}_0$ удобно перейти к переменным ρ, φ ($\psi_0 = \sqrt{\rho} \exp(i\varphi), \bar{\psi}_0 = \sqrt{\rho} \exp(-i\varphi)$).

Для модели двумерного бозе-газа выражение \tilde{S} дается формулой (20.3) (в пределе $T \rightarrow 0$). Заметим, что коэффициент при $-\frac{(\nabla\varphi)^2}{2m}$ в гидродинамическом действии имеет смысл плотности сверхтекучей компоненты ρ_s , которая в пределе $T \rightarrow 0$ совпадает с полной плотностью $\rho = \rho_\lambda$. Имея в виду это замечание, в дальнейшем будем заменять ρ_λ на ρ_s .

При выводе выражения (20.3) для гидродинамического действия двумерного бозе-газа по существу учитывались только функции $\psi_0, \bar{\psi}_0$, не обращающиеся в нуль. Учтем теперь вклад в континуальный интеграл от функций $\psi_0, \bar{\psi}_0$, обращающихся в нуль на дискретном множестве точек плоскости x (при каждом фиксированном τ). При обходе вокруг каждой такой точки фаза приобретает дополнительное слагаемое $2\pi n$ (n — целое). Ограничимся рассмотрением точек с $n = \pm 1$ и будем говорить о них как о центрах квантовых вихрей, вращающихся в положительном или отрицательном направлении. Точки с $|n| > 1$ можно рассматривать как точки слияния $|n|$ вихрей, вращающихся в одном направлении. Такие образования неустойчивы и распадаются на отдельные вихри с $|n| = 1$.

Из сказанного ясно, что учет вихрей сводится к интегрированию по функциям $\varphi(x, \tau)$, приобретающим приращение $\pm 2\pi$ при обходе вокруг «особых точек» — нулей функции $\psi_0, \bar{\psi}_0$. Необходимо интегрировать по переменным — плотности $\rho(x, \tau)$ и фазе $\varphi(x, \tau)$ указанными условиями многозначности, а также по траекториям центров вихрей в (x, τ) -пространстве.

Опустим в подынтегральном выражении в (20.3) два последних слагаемых [пропорциональных $(\nabla\pi)^2$ и $\pi(\nabla\varphi)^2$], которые приводят к отклонению фононного спектра от линейного и к фонон-фононному взаимодействию. Если теперь взять интеграл от $\exp \tilde{S}$ по переменной π , то приведем действие к виду

$$-\int d\tau d^2x \frac{\rho_s}{2m} \left((\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{c^2} (\partial_\tau \varphi)^2 \right), \quad (21.2)$$

где c^2 — квадрат скорости звука. Замена $\rho_\lambda = \rho \rightarrow \rho_s$ объяснена выше. Она обеспечивает справедливость формул и в случае, когда ρ_s существенно отлично от ρ .

Выражение (21.2) представляет собой записанное в евклидовых переменных действие релятивистской системы, где значение скорости света принимает скорость звука c . Придерживаясь релятивистской аналогии, покажем, что при учете вихрей действие (21.2) есть по существу действие двумерной $[(2+1)$ -мерной] релятивистской электродинамики, в которой значение фотонов принимают **фононы**, значение заряженных частиц — квантовые вихри.

В переменных $x_1, x_2, x_3 = \text{ст}$ выражение (21.2) имеет вид

$$-\frac{\rho_s}{2mc} \int (\nabla\varphi)^2 d^3x, \quad (21.3)$$

где $\nabla\varphi$ — трехмерный градиент фазы φ . Интеграл по φ можно взять с помощью сдвига фазы

$$\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \varphi_0(\mathbf{x}) \quad (21.4)$$

на функцию $\varphi_0(\mathbf{x})$ — решение трехмерного уравнения Лапласа, «вбирающее» в себя неоднозначность фазы. Для нахождения функции $\varphi_0(\mathbf{x})$ заметим, что ее трехмерный градиент $\nabla\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ есть решение задачи магнитостатики в трехмерном пространстве, заданной уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{h} = 2\pi\mathbf{j}; \quad \text{div } \mathbf{h} = 0. \quad (21.5)$$

Здесь \mathbf{j} — сумма единичных линейных токов, текущих по траекториям центров вихрей. Функция $\varphi_0(\mathbf{x})$ есть неоднозначный скалярный потенциал магнитного поля \mathbf{h} , порождаемого системой линейных токов. Квадрат градиента $(\nabla\varphi)^2$ под интегралом (20.3) после сдвига (21.4) превращается в сумму $(\nabla\varphi)^2 + (\nabla\varphi_0)^2$. Интеграл от первого слагаемого описывает не взаимодействующее поле и не представляет интереса. Интеграл же от $(\nabla\varphi_0)^2 = h^2$ пропорционален энергии магнитного поля системы линейных токов.

Обычно решают задачу магнитостатики (21.5) с помощью векторного потенциала $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{a}$, $\text{div } \mathbf{a} = 0$). Для системы линейных токов векторный потенциал \mathbf{a} есть сумма вкладов от линейных токов

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_i \int \frac{d\mathbf{l}_i(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \quad (21.6)$$

Действие, получающееся из (21.3) заменой $\varphi \rightarrow \varphi_0$, можно представить в виде двойной суммы вкладов от различных токов:

$$-\frac{\pi\rho_s}{2mc} \sum_{i,k} \iint \frac{d\mathbf{l}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{l}_k(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \quad (21.7)$$

Слагаемые с $i = k$ в (21.7) расходятся при \mathbf{x} , близких к \mathbf{y} . Эта расходимость — результат приближения, в котором вихри считаются точечными, а соответствующие им токи — линейными. Для устранения расходимостей необходимо учесть конечные размеры вихрей. С этой целью выделим центры вихрей кружками радиуса r_0 , большего, чем радиус ствола вихря, но меньшего, чем среднее расстояние между вихрями. Учет конечных размеров вихрей сводится к замене

$$\frac{\pi\rho_s}{2mc} \sum_i \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < r_0} \frac{d\mathbf{l}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{l}_i(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \rightarrow \frac{E_B(r_0)}{c} \sum_i \int ds_i. \quad (21.8)$$

Здесь $ds = |dl| = \sqrt{ds^2}$; $E_B(r_0)$ — часть энергии вихря в кружке радиуса r_0 . Выражение $E_B(r_0)$ логарифмически зависит от r_0 :

$$E_B(r_0) = \frac{\pi \rho_s}{m} \ln \frac{r_0}{a}. \quad (21.9)$$

Величину a в (21.9) естественно назвать радиусом ствола вихря. По порядку величины $a \sim (\lambda m)^{-1/2}$, где λ — химический потенциал; m — масса бозе-частицы. Для определения a можно использовать, например, решение Л. П. Питаевского [106] уравнений Гинзбурга — Ландау, описывающее структуру вихря.

Преобразуем теперь интегралы по $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > r_0$ в (21.7). Введем новый векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, разложение которого

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{k < \tilde{k}_0} \exp(i \mathbf{kx}) \mathbf{a}(k) d^3k \quad (21.10)$$

ограничивается импульсами, меньшими $\tilde{k}_0 \sim r_0^{-1}$. Действие (20.7) можно привести к виду

$$S' = -m_B(r_0) c \sum_i \int ds_i - i q \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) d^3x - \frac{1}{2c} \int (\text{rot } \mathbf{A})^2 d^3x, \quad (21.11)$$

где

$$m_B(r_0) \equiv E_B(r_0) c^2 \quad (21.12)$$

есть «масса» вихря, а коэффициент

$$q = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_s}{mc^2}} \quad (21.13)$$

имеет значение константы связи.

Записанное в евклидовых переменных действие (21.11) описывает систему заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ (импульсы которого обрезаны на верхнем пределе $k_0 \sim r_0^{-1}$). Функционал $\exp S'$ необходимо интегрировать по полю $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и по траекториям заряженных частиц. Именно так надо поступать при квантовании системы с действием (21.11). Интеграл по полю $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ от $\exp S'$ может быть взят точно с помощью сдвига $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{A}_0$, уничтожающего линейную форму по \mathbf{A} в (21.11). При этом возвращаемся к действию (21.7), что и доказывает правильность выражения (21.11).

Для описания движения вихрей со скоростями, много меньшими c , удобно перейти в действии (21.11) к нерелятивистскому приближению. В этом приближении имеем

$$\begin{aligned} \frac{E_B(r_0)}{c} \int ds &\approx E_B(r_0) \left(\int_0^\beta \left(1 + \frac{1}{2c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right)^2 \right) d\tau \right) = \\ &= \beta E_B(r_0) + \int_0^\beta \frac{m_B(r_0)}{2} \mathbf{v}^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (21.14)$$

Вклад скалярного потенциала A_0 в действие (21.11) можно преобразовать к члену прямого взаимодействия заряженных частиц через логарифмический потенциал. В результате действие (21.11) в нерелятивистском приближении имеет вид

$$\begin{aligned}
 & - \sum_i (\beta E_{\text{в}}(r_{0i})) + \int_0^{\beta} d\tau \left(\frac{m_{\text{в}}(r_0)}{2} v_i^2 + \frac{i g t}{c} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i) \right) - \\
 & - \frac{1}{2} \int d\tau d^2x \left((\partial_1 A_2 - \partial_0 A_1)^2 + \frac{1}{c^2} (\partial_\tau \mathbf{A})^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int d\tau d^2x d^2y j_0(\mathbf{x}, \tau) j_0(\mathbf{y}, \tau) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (21.15)
 \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{A}_i — векторный потенциал в центре i -го вихря, движущегося со скоростью \mathbf{v}_i и обладающего зарядом g , причем

$$\frac{g^2}{4\pi} = \frac{\pi \rho_s}{m}, \quad (21.16)$$

функция

$$j_0(\mathbf{x}, \tau) = \sum_i g_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau)) \quad (21.17)$$

в (21.15) есть плотность заряда.

Рассмотрим некоторые следствия эквивалентности системы фононы + вихри двумерной электродинамике.

При низких значениях температуры вихри в системе могут существовать только в виде пар противоположного знака, связанных далекодействующим логарифмическим потенциалом.

Покажем, что учет связанных пар вихрей не меняет степенного характера асимптотики одночастичной функции Грина на больших расстояниях. Возьмем в качестве \tilde{S} -гидродинамического действия квадратичную форму (21.1) с заменой $\rho_\lambda \rightarrow \rho_s$. Ограничимся интегрированием по функциям ρ , φ , не зависящим от τ . Можно показать, что учет функций, зависящих от τ , сводится в первом приближении к поправке к коэффициенту перед степенью $r^{-\alpha}$. Этот коэффициент здесь вычислять не будем. Ограничимся вычислением показателя α при учете связанных пар вихрей. Задача сводится к вычислению континуального интеграла от выражения

$$\exp \left\{ - \frac{\rho_s \beta}{m} \int d^2z (\nabla \varphi(\mathbf{z}))^2 + i \varphi(\mathbf{x}) - i \varphi(\mathbf{y}) \right\}. \quad (21.18)$$

При наличии вихрей функции $\varphi(\mathbf{z})$ приобретают слагаемые $\pm 2\pi$ при обходе вокруг вихря и потому неоднозначны. Восстановим однозначность, проведя разрезы, соединяющие вихри каждой пары. Удобно, кроме того, считать, что вихри, а также «источники» \mathbf{x} и \mathbf{y} окружены кружками радиуса a (a — радиус ствола вихря), и интегрировать по области вне этих кружков.

Сделаем в интеграле сдвиг:

$$\varphi(\mathbf{z}) \rightarrow \varphi(\mathbf{z}) + \varphi_0(\mathbf{z}),$$

где

$$\varphi_0(\mathbf{z}) = \frac{i m}{2\pi\beta\rho_s} \ln \frac{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|} \equiv i \alpha \chi_0(\mathbf{z}). \quad (21.19)$$

При наличии вихрей возникающее при преобразовании интеграла в (21.18) выражение

$$-\frac{i}{2\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \nabla \chi_0) d^2z \quad (21.20)$$

сводится не только к интегралам по окружностям вокруг «источников» \mathbf{x} и \mathbf{y} , но и к сумме интегралов по разрезам. Это приводит к дополнительному множителю

$$\exp\left\{i \sum_i r_i |\nabla \chi_{0i}| \sin \theta_i\right\}, \quad (21.21)$$

при r_i — расстояние между вихрями i -й пары; $|\nabla \chi_{0i}|$ — длина вектора $\nabla \chi_0$ в месте расположения пары; θ_i — угол между векторами \mathbf{r}_i и $\nabla \chi_{0i}$. Усредняя множитель (21.21) по направлениям векторов \mathbf{r}_i , получаем

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_i r_i^2 (\nabla \chi_{0i})^2\right\}. \quad (21.22)$$

При большом $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ имеем

$$\frac{1}{2} \sum_i r_i^2 (\nabla \chi_{0i})^2 = \frac{S_B}{S} \int \frac{(\nabla \chi_0)^2}{4\pi} d^2z = \frac{S_B}{S} \ln \frac{r}{a}. \quad (21.23)$$

Здесь S_B/S есть средняя относительная площадь, занятая парами вихрей, если площадью, занятой i -й парой с расстоянием между вихрями, считать величину $2\pi r_i^2$.

Формула (21.23) показывает, что степенной характер асимптотики имеет место и при учете вихрей, а показатель степени приобретает добавку

$$\Delta \alpha = S_B/S, \quad (21.24)$$

малую по сравнению с α при малых α ($\Delta \alpha/\alpha \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$) и имеющую смысл относительной площади, занятой парами вихрей.

Рассмотрим роль квантовых вихрей в фазовом переходе из сверхтекучего состояния в нормальное. При повышении температуры число связанных пар вихрей увеличивается, а среднее расстояние между ними уменьшается. Наконец, при некоторой температуре T_c происходит диссоциация связанных пар. Выше тем-

пературы диссоциации в системе кроме связанных пар появляются также и отдельные вихри и образуется состояние, похожее на плазму. Естественно предположить, что именно к диссоциации связанных пар и сводится фазовый переход из сверхтекучего состояния в нормальное.

Дальнействующие корреляции при $T > T_c$ в состоянии типа плазмы исчезают в результате характерного дебаевского экранирования. В частности, коррелятор $\langle \psi(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}(\mathbf{y}, \tau_1) \rangle$ убывает при $T > T_c$ экспоненциально. Отметим еще, что исчезновение второго звука при $T > T_c$ можно интерпретировать как превращение второй звуковой ветви в ветвь плазменных колебаний.

В то же время величина ρ_s , определенная как коэффициент при $-\frac{(\nabla\varphi)^2}{2m}$ в гидродинамическом действии, не исчезает и при $T > T_c$. Этот коэффициент аналогичен величине ρ_s , введенной В. Л. Березинским [92] для модели плоских ротаторов. Практически этот коэффициент совпадает при $T < T_c$ с макроскопически определенной сверхтекучей плотностью везде, кроме узкой области фазового перехода, в которой начинается интенсивное образование квантовых вихрей. Таким образом, приходим к выводу, что описание двумерной бозе-системы в терминах нормальной и сверхтекучих компонент, пронизанных квантовыми вихрями, возможно как ниже, так и выше фазового перехода и теряет смысл только тогда, когда радиус ствола вихря становится порядка среднего расстояния между вихрями.

Развитый выше метод описания квантовых вихрей распространяется и на трехмерные бозе-системы. Как и в двумерном случае, квантовым вихрям соответствуют нули функций $\psi(\mathbf{x}, \tau)$. Комплексная функция ψ в трехмерном пространстве при фиксированном τ обращается в нуль на линиях (множествах размерности 1), а в четырехмерном (\mathbf{x}, τ) пространстве — на двумерных поверхностях. Необходимо интегрировать по функциям $\psi, \bar{\psi}$, обращающихся в нуль на двумерных поверхностях в (\mathbf{x}, τ) -пространстве, а затем по конфигурациям поверхностей.

Не останавливаясь подробно на особенности формализма в применении к трехмерным системам, ограничимся качественным рассмотрением квантовых вихрей в фазовом переходе. Получаемые при этом выводы аналогичны сделанным в работах [107, 108], где использована аналогия с моделью Изинга.

При низких значениях температуры в невращающейся бозе-системе могут существовать возбуждения в виде вихревых колец. В формализме континуального интеграла им соответствуют замкнутые линии, на которых обращаются в нуль функции $\psi, \bar{\psi}$. С повышением температуры число вихревых колец в единице объема увеличивается, а среднее расстояние между ними уменьшается. Когда среднее расстояние между кольцами становится порядка средней длины кольца, начинает проявляться тенденция к обра-

зованию длинных вихревых колец. Естественно предположить, что фазовый переход из сверхтекучего состояния в нормальное связан с появлением в системе вихревых нитей бесконечной длины (в реальной системе нитей, начинающихся и заканчивающихся на стенках сосуда). Длинная вихревая нить образуется не сразу, а путем последовательного объединения и удлинения вихревых колец конечной длины. Поэтому в ситуации, когда число вихревых колец на единицу объема достаточно велико, вероятность существования бесконечно длинных вихревых нитей может стать отнюдь не бесконечно малой.

Заметим, что величина ρ_s , определенная как коэффициент при $-\frac{(\nabla\varphi)^2}{2m}$ в гидродинамическом действии, продолжает оставаться отличной от нуля и выше перехода, как и в двумерной системе. Другими словами, описание системы в терминах нормальной и сверхтекучих компонент, пронизанных квантовыми вихрями, возможно и выше перехода. В связи с этим возникает идея, что отличие нормальной жидкости от сверхтекучей определяется характером существующих в системе вихревых возбуждений — в нормальной жидкости кроме вихревых колец должны присутствовать и длинные вихревые нити.

Таким образом, качественное рассмотрение показывает, что в трехмерной системе, как и в двумерной, фазовый переход связан с квантовыми вихрями. Замкнутые вихревые кольца в трехмерной системе можно считать аналогом связанных пар в двумерной, а длинные вихревые нити — аналогом единичных вихрей.

Квантовые вихри выше λ -точки во вращающемся жидком гелии наблюдались в опытах Е. Л. Андроникашвили и сотр. [109] в течение 18—20 мин после нагревания системы на $0,1-0,2^\circ\text{K}$ выше λ -точки. Изложенный выше материал объясняет существование квантовых вихрей выше λ -точки. Срыв же упорядоченной вихревой структуры после нагревания выше λ -точки осуществляется образующимися хаотически расположенными длинными вихревыми нитями.

В заключение приведем сводку основных результатов, изложенных в этой главе.

1. Методом континуального интегрирования легко получить теорию возмущений для сверхтекучих бозе-систем (см. § 16, 17).

2. Модификация метода с последовательным интегрированием по быстропеременным и медленно меняющимся полям удобна для построения низкочастотной асимптотики функций Грина и вывода кинетических уравнений (см. § 18).

3. Интегрирование по быстрым переменным позволяет вычислить функционал гидродинамического действия и соответствующий ему гидродинамический гамильтониан, постулируемый в полуфеноменологической теории сверхтекучести (см. § 19).

4. Метод гидродинамического действия переносится на двумерные и одномерные бозе-системы, в которых возможна сверхтеку-

честь без конденсата. Фазовый переход здесь означает появление дальнедействующих корреляций, убывающих не экспоненциально, а степенным образом.

5. Квантовые вихри в формализме континуального интеграла соответствуют нулям функций $\psi(x, \tau)$, $\bar{\psi}(x, \tau)$, по которым происходит интегрирование. В сверхтекучем состоянии главный вклад в интеграл дают функции ψ , $\bar{\psi}$, не обращающиеся в нуль и описывающие состояния без квантовых вихрей, а в нормальном — функции типа суперпозиции плоских волн. В окрестности фазового перехода главный вклад в интеграл дают функции, почти постоянные по модулю, везде, кроме стволы вихрей (см. § 21).

6. Квантовые вихри могут существовать и в нормальной бозе-системе. Фазовый переход из сверхтекучего состояния в нормальное сводится в двумерной системе к диссоциации связанных пар вихрей, а в трехмерной — к появлению длинных вихревых нитей.

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

§ 22. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ФЕРМИ-СИСТЕМ

Явление сверхпроводимости в ферми-системах родственно сверхтекучести бозе-систем. За основу при построении теории сверхпроводимости можно взять наличие дальнедействующих корреляций, которые появляются при температуре фазового перехода. В формализме континуального интеграла аналогом бозе-поля ψ_B служит произведение ферми-полей $\psi_F \psi_F$. Аналогом одночастичного коррелятора

$$\langle \psi(x, \tau) \bar{\psi}(y, \tau_1) \rangle \quad (22.1)$$

для бозе-систем в ферми-системах является двухчастичный коррелятор

$$\langle \psi(x_1, \tau_1) \psi(x_2, \tau_2) \bar{\psi}(x_3, \tau_3) \bar{\psi}(x_4, \tau_4) \rangle \quad (22.2)$$

(среднее четырех ферми-полей).

Будем говорить, что в системе существуют дальнедействующие корреляции, если при фиксированных разностях $x_1 - x_2$, $x_3 - x_4$ (и фиксированных τ_i) в пределе $|x_1 - x_3| \rightarrow \infty$ коррелятор (22.2) убывает медленнее, чем экспоненциально, или имеет конечный предел. В последнем случае можно считать, что существуют аномальные функции Грина

$$\langle \psi(x_1, \tau_1) \psi(x_2, \tau_2) \rangle; \quad \langle \bar{\psi}(x_3, \tau_3) \bar{\psi}(x_4, \tau_4) \rangle. \quad (22.3)$$

Рассмотрим теорию возмущений для сверхпроводящих ферми-систем, предполагая существование аномальных средних (22.3). Такие средние тождественно равны нулю при вычислении по обычной теории возмущений.

Один из способов получить аномальные средние — добавить к действию ферми-системы «функционал источников»

$$\sum_p (\bar{\eta}(p) a(p) a(-p) + \eta(p) a^+(p) a^+(-p)) \quad (22.4)$$

с исчезающе малыми комплексными функциями $\eta(p)$, $\bar{\eta}(p)$, $p = (k, \omega)$. Выражение (22.4) не удовлетворяет закону сохранения числа частиц, и при η , $\bar{\eta}$, отличных от нуля, будут отличны от нуля

и аномальные средние (22.3). Вопрос теперь в том, что будет в пределе η , $\overline{\eta} \rightarrow 0$? Если при этом аномальные средние исчезают, то система находится в нормальном состоянии. Если же в пределе η , $\overline{\eta} \rightarrow 0$ аномальные средние имеют предел, отличный от нуля, то имеем сверхпроводящее состояние.

Метод «источников» был использован в формализме «квазисредних» Н. Н. Боголюбова [81] и с тех пор широко применяется в многочисленных работах.

К такому же результату можно прийти, используя вариант скелетной диаграммной техники, отличающийся от рассмотренного в § 6 тем, что в нем наряду с нормальными существуют и аномальные функции Грина. Напомним, что в этой диаграммной технике линиям диаграмм соответствуют полные функции Грина, но зато рассматриваются только диаграммы, не имеющие поддиаграмм типа собственно энергетических частей. Вершины диаграмм совпадают с вершинами обычной диаграммной техники.




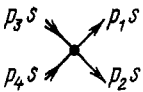
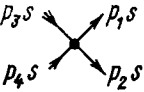
Для конкретизации диаграммной техники необходимо учесть спин ферми-частицы и описывать частицы с различной проекцией спина s на выделенное направление различными функциями $\psi_s(\mathbf{x}, \tau)$.

Рассмотрим случай, когда отличны от нуля аномальные средние

$$\langle \psi_s(\mathbf{x}, \tau) \psi_{-s}(\mathbf{y}, \tau_1) \rangle; \quad \langle \psi_s^+(\mathbf{x}, \tau) \psi_{-s}^+(\mathbf{y}, \tau_1) \rangle \quad (22.5)$$

пар полей с противоположным спином, а средние $\langle \psi_s \psi_s \rangle$; $\langle \psi_s^+ \psi_s^+ \rangle$ тождественно равны нулю.

Диаграммная техника в этом случае содержит следующие элементы и соответствующие им выражения:

	$G(p, s);$	}	(22.6)
	$G_1(p, s);$		
	$\tilde{G}_1(p, s);$		
	$u(k_1 - k_3) - u(k_1 - k_4);$		
	$u(k_1 - k_3).$		

Здесь G — полная нормальная; G_1, \tilde{G}_1 — полные аномальные функции Грина. Они заранее неизвестны и должны определяться из системы уравнений. Во-первых, это уравнения Дайсона — Горькова, выражающие функции Грина через нормальную $A(p)$ и аномаль-

ную $B(p)$ собственно энергетические части. Графически они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \longrightarrow &= \longrightarrow + \longrightarrow \textcircled{A} + \longrightarrow \textcircled{B} \\ \longleftarrow &= \longleftarrow \textcircled{B} + \longleftarrow \textcircled{A} \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

тождественным уравнениям Дайсона — Беляева [77] для сверхтекучих бозе-систем. В аналитической форме эти уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} G(p) &= G_0(p) + G_0(p)A(p)G(p) + G_0(p)B(p)G_1(p); \\ G_1(p) &= -G_0(-p)\widetilde{B}(p)G(p) + G_0(-p)A(-p)G_1(p). \end{aligned} \quad (22.8)$$

Учтя, что $G_0(p)$ дается формулой (6.34), можно написать решение этой системы в виде

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{i\omega + \frac{k^2}{2m} - \lambda + A(-p)}{\left(i\omega + \frac{k^2}{2m} - \lambda + A(-p)\right)\left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda - A(p)\right) - |B(p)|^2}; \\ G_1(p) &= \frac{\widetilde{B}(p)}{\left(i\omega + \frac{k^2}{2m} - \lambda + A(-p)\right)\left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda - A(p)\right) - |B(p)|^2}. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Каждая из собственно энергетических частей $A(p)$, $B(p)$ дается суммой диаграмм скелетной теории возмущений

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{A} &= \text{loop} + \text{bubble top} + \text{bubble side} + \dots \\ \textcircled{B} &= \text{loop} + \text{bubble top} + \text{bubble side} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22.10)$$

Уравнения (22.7), (22.10) и образуют систему для определения нормальных и аномальных функций Грина. Для решения этой системы необходимо в уравнениях (22.10) ограничиться несколькими первыми членами ряда теории возмущений или выделить главную последовательность диаграмм. Подставив вместо функций Грина их выражения через собственно энергетические части (22.9), сведём задачу к системе интегральных уравнений для собственно энергетических частей.

Решим систему уравнений (22.7), (22.10) модели ферми-газа. Предполагая малым газовый параметр $\rho^{1/3}a$:

$$\rho^{1/3} a \ll 1, \quad (22.11)$$

нетрудно выделить в (22.10) главные последовательности диаграмм для A и B . Здесь действуют те же факторы, уменьшающие порядок диаграммы, что и в теории бозе-газа (§ 17), а именно наличие в диаграмме аномальных и замкнутых циклов из нормальных линий, которые можно обойти, двигаясь по стрелкам диаграммы. Поэтому главный вклад в собственно энергетические части $A(p)$ и $B(p)$ дают диаграммы, в которых эти факторы встречаются в наименьшем количестве. Это будут все диаграммы без аномальных линий с одним замкнутым циклом из нормальных линий для $A(p)$ и диаграмма без замкнутых циклов с одной аномальной линией для $B(p)$ [существует только одна такая диаграмма для $B(p)$, а именно первая из указанных в диаграммном равенстве (22.10)]. Остальные диаграммы дают вклад, содержащий по сравнению с учтенными высшие степени газового параметра. Таким образом, приходим к приближенным равенствам

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \end{array} \approx \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \end{array} \approx \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (22.12)$$

Фигурирующий в диаграмме для $A(p)$ четырехполюсник изображает последовательность диаграмм

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (22.13)$$

Как и в теории бозе-газа, суммирование этой последовательности сводится к замене потенциала t -матрицей, которую в области импульсов $k \leq k_F = \sqrt{2m\lambda}$ можно заменить константой $t_0 = t(k_1 = 0, k_2 = 0, z = 0)$. Вершина, которая в (22.6) описывает рассеяние частиц с одинаковым спином, содержит антисимметризованный потенциал $u(k_1 - k_3) - u(k_1 - k_4)$. При суммировании (22.13) это выражение превращается в антисимметризованную t -матрицу, обращающуюся в нуль при замене $t \rightarrow t_0$. Поэтому в первом приближении остается только t -матрица, описывающая рассеяние частиц с противоположными спинами. Для собственно энергетической части $A(p)$ получим

$$A_+ = t_0 \rho_-; \quad A_- = t_0 \rho_+. \quad (22.14)$$

Здесь A_{\pm} — собственно энергетические части для частицы со спином \pm ; ρ_{\pm} — соответствующие плотности. В отсутствие магнитного поля и других причин, по-разному влияющих на частицы с противоположным спином, $A_+ = A_-$, $\rho_+ = \rho_-$. Плотности ρ_{\pm}

вычислим в первом приближении по невозмущенной функции Грина $G_0(p)$ ($\epsilon \rightarrow +0$):

$$\begin{aligned} \rho_+ = \rho_- &= \frac{T}{V} \sum_p \exp(i \omega \epsilon) G_0(p) = \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3 k}{\exp \left[\beta \left(\frac{k^2}{2m} - \lambda \right) \right] + 1}. \end{aligned} \quad (22.15)$$

В дальнейшем будем считать ферми-газ вырожденным, т. е. $\beta \lambda \gg 1$. Потом будет показано, что это на самом деле так при всех значениях температуры ниже температуры перехода T_c в сверхпроводящее состояние. В вырожденном ферми-газе плотность дается формулой

$$\rho_{\pm} = (2\pi)^{-3} \int_{k < k_F} d^3 k = \frac{(2m\lambda)^{3/2}}{6\pi^2}. \quad (22.16)$$

Собственно энергетическая часть $A(p)$ в приближении (22.14) получается постоянной

$$A_{\pm} = \frac{t_0 (2m\lambda)^{3/2}}{6\pi^2} \quad (22.17)$$

и может рассматриваться как малая поправка Δt к химическому потенциалу λ . Действительно,

$$\frac{|\Delta \lambda|}{\lambda} \sim |t_0| m^{3/2} \lambda^{1/2} \sim a \rho^{1/3} \ll 1. \quad (22.18)$$

Второе из диаграммных равенств (22.12) есть уравнение для аномальной собственно энергетической части B , которая в этом приближении не зависит от ω . Аномальная функция Грина в этом приближении дается формулой

$$G_1(p) = \frac{B(k)}{\omega^2 + \left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right)^2 + B^2(k)}, \quad (22.19)$$

где параметр

$$\mu = \lambda - A_{\pm} = \lambda - \frac{t_0 (2m\lambda)^{3/2}}{6\pi^2} \quad (22.20)$$

имеет смысл ренормированного химического потенциала.

Уравнение для функции B конкретизируется в виде

$$\begin{aligned} B(k) &= -\frac{T}{V} \sum_{p_1} u(k - k_1) G_1(p_1) = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k_1 u(k - k_1) B(k_1) \frac{\text{th} \frac{\beta \epsilon(k_1)}{2}}{2\epsilon(k_1)}, \end{aligned} \quad (22.21)$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \left(\left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right)^2 + B^2(\mathbf{k}) \right)^{1/2}. \quad (22.22)$$

Для решения уравнения (22.21) применим прием, уже использованный в § 17 для модели бозе-газа. Прибавив к обеим частям (22.21) одно и то же выражение, запишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} B(\mathbf{k}) + (2\pi)^{-3} \int u(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) B(\mathbf{k}_1) \frac{m}{k_1^2} d^3 k_1 = \\ = (2\pi)^{-3} \int u(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) B(\mathbf{k}_1) \left(\frac{m}{k_1^2} - \frac{\text{th} \frac{\beta \varepsilon(\mathbf{k}_1)}{2}}{2\varepsilon(\mathbf{k}_1)} \right) d^3 k_1. \end{aligned} \quad (22.23)$$

Оператор, действующий в левой части этого уравнения на $B(\mathbf{k})$, можно обратить. Это равносильно замене в правой части потенциала t -матрицей, которую в области импульсов $k \lesssim k_F$, дающей главный вклад в интеграл, можно заменить постоянной t_0 . Получаем следующее уравнение для $B(\mathbf{k})$:

$$B(\mathbf{k}) = \frac{t_0}{(2\pi)^3} \int B(\mathbf{k}_1) \left(\frac{m}{k_1^2} - \frac{\text{th} \frac{\beta \varepsilon(\mathbf{k}_1)}{2}}{2\varepsilon(\mathbf{k}_1)} \right) d^3 k_1. \quad (22.24)$$

Уравнение имеет тривиальное решение $B(\mathbf{k}) = 0$ и может иметь нетривиальное, которое и реализуется для сверхпроводящего состояния. В силу (22.24) функция $B(\mathbf{k})$ в области $k \lesssim k_F$ есть постоянная

$$B(\mathbf{k}) = \Delta.$$

Эта постоянная имеет смысл щели в энергетическом спектре, получаемом из условия обращения в нуль знаменателя функций Грина (22.9) в приближении $\lambda - A \rightarrow \mu$, $B(\mathbf{k}) \rightarrow \Delta$ при аналитическом продолжении $i\omega \rightarrow E$. Функции Грина имеют полюса $E = \pm \varepsilon(\mathbf{k})$, где $\varepsilon(\mathbf{k})$ дается формулой (22.22), в которой можно заменить $B(\mathbf{k}) \rightarrow \Delta$. Величина Δ есть минимальное значение $\varepsilon(\mathbf{k})$, достигаемое на поверхности Ферми при $\frac{k^2}{2m} = \mu$. Считая $\Delta \neq 0$, получим для Δ уравнение

$$1 = \frac{mt_0}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \left(1 - \frac{k^2}{2m \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \text{th} \frac{\beta}{2} \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \right), \quad (22.25)$$

в котором

$$\xi(\mathbf{k}) = k^2/2m - \mu. \quad (22.26)$$

Так как в дальнейшем Δ оказывается малым ($\Delta \ll \lambda$), то можно пренебречь Δ и заменить $\text{th} (\beta/2) \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$ единицей везде, кроме

узкого интервала $[k_F - k_0, k_F + k_0]$ вблизи поверхности Ферми, если выбрать k_0 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta \ll \frac{k_0^2}{2m} \ll \lambda; \quad \frac{k_0 k_F}{2m} \gg T. \quad (22.27)$$

В результате получим для интегралов по $|k - k_F| > k_0$ и $|k - k_F| < k_0$ выражения

$$\begin{aligned} & \int_{|k - k_F| > k_0} \left(1 - \frac{k^2}{2m \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \right) dk \approx \\ & \approx \int_{|k - k_F| > k_0} \left(1 - \frac{k^2}{|k^2 - k_F^2|} \right) dk = k_F \left(2 - \ln \frac{2k_F}{k_0} \right) - 2k_0; \\ & \int_{|k - k_F| < k_0} \left(1 - \frac{k^2}{2m \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} \sqrt{\xi^2 + \Delta^2} \right) dk \approx \\ & \approx 2k_0 - k_F \int_0^{\frac{k_F k_0}{m}} \frac{\operatorname{th} \beta/2 \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} d\xi. \end{aligned}$$

Уравнение (22.25) можно переписать в виде

$$1 - \frac{m t_0 k_F}{2\pi^2} \left(-2 + \ln \frac{2k_F}{k_0} + \int_0^{(k_F k_0)/m} \frac{\operatorname{th} \beta/2 \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} d\xi \right). \quad (22.28)$$

Для решения этого уравнения необходимо, чтобы t_0 было отрицательно. Это значит, что потенциал взаимодействия ферми-частиц должен быть притягивающим. Обозначим

$$\zeta = \frac{m |t_0| k_F}{2\pi^2}. \quad (22.29)$$

Параметр ζ мал ($\zeta \ll 1$) в силу условия малой плотности (22.11).

Уравнение (22.28) имеет решение только при достаточно низких температурах $T = \beta^{-1}$. Температура перехода T_c определяется как температура, при которой решение исчезает ($\Delta = 0$). При $\Delta = 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{(k_0 k_F)/m} \frac{\operatorname{th} (\beta/2) \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} d\xi = \\ & = \int_0^{(k_0 k_F)/m} \frac{\operatorname{th} x}{x} dx \approx \ln \frac{k_0 k_F}{m} - \int_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \ln \frac{2k_0 k_F \gamma}{\pi m T}, \quad (22.30) \end{aligned}$$

где $\ln \gamma = C = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера. Подстановка (22.30) в (22.28) дает

$$T_c = \frac{4\gamma k_F^2}{\pi m} \exp(-1/\zeta - 2). \quad (22.31)$$

Найдем теперь значение $\Delta(0)$ щели Δ при $T = 0$. Подставив в (22.28)

$$\int_0^{(k_0 k_F)/m} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} = \ln \frac{2k_0 k_F}{m\Delta}, \quad (22.32)$$

получим

$$\Delta(0) = \frac{4k_F^2}{m} \exp(-1/\zeta - 2). \quad (22.33)$$

Вспомогательный параметр k_0 в окончательные ответы (22.31), (22.33) не входит, как и должно быть. Разделив (22.31) на (22.33), получим соотношение

$$T_c = (\gamma/\pi)\Delta(0), \quad (22.34)$$

общее в теории сверхпроводимости. Оно верно также в модели БКШ [141] и в модели электрон-фононного взаимодействия [38].

Заметим в заключение, что, как и предполагалось, ферми-газ остается вырожденным вплоть до $T = T_c$, так как

$$T_c \sim \frac{k_F^2}{2m} \exp(-1/\zeta) = \lambda \exp(-1/\zeta) \ll \lambda \quad (22.35)$$

и условие вырождения $\beta\lambda \gg 1$ выполнено при $T \leq T_c$.

§ 23. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ ВТОРОГО РОДА

Взаимодействие электронов сверхпроводимости с электромагнитным полем приводит к некоторым интересным эффектам. Одним из самых известных является эффект Мейснера, заключающийся в том, что достаточно слабое магнитное поле выталкивается из сверхпроводника. При увеличении магнитного поля возможны два случая.

1. Поле проникает в сверхпроводник, переводя его в нормальное состояние. Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками первого рода.

2. Образуется так называемое смешанное состояние. При этом поле частично проникает в сверхпроводник, в котором образуется периодическая решетка квантовых вихрей. Это явление называется сверхпроводимостью второго рода, а сверхпроводники, где оно возможно, — сверхпроводниками второго рода.

Образование решетки квантовых вихрей было предсказано А. А. Абрикосовым еще в 1952 г. [104] на основе феноменологической

теории сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау [144]. Появление микроскопической теории сверхпроводимости позволило вывести уравнения Гинзбурга — Ландау из микроскопической теории и выяснить смысл параметров, входящих в уравнения. Оказалось, в частности, что входящий в теорию эффективный заряд равен удвоенному заряду электрона, т. е. заряду куперовской пары.

В этом параграфе рассмотрим применение метода континуального интегрирования к некоторым вопросам сверхпроводимости второго рода. Прежде всего докажем, что в постоянном однородном магнитном поле невозможно однородное сверхпроводящее состояние. Отсюда следуют три возможности:

а) магнитное поле выталкивается из сверхпроводника (эффект Мейснера);

б) магнитное поле разрушает сверхпроводимость;

в) образуется неоднородное состояние сверхпроводимости.

Именно последняя возможность реализуется в сверхпроводниках второго рода, где образуется решетка Абрикосова. Покажем, что площадь параллелограмма решетки определяется чисто кинематически из соображений градиентной инвариантности.

Далее на примере ферми-газа выведем уравнения Гинзбурга — Ландау методом континуального интегрирования по быстрым и медленным полям. Эти уравнения дают условия экстремума функционала, имеющего смысл гидродинамического действия сверхпроводника. Известно, что уравнения Гинзбурга — Ландау справедливы вблизи фазового перехода, когда энергетическая щель Δ в спектре одночастичных возбуждений мала по сравнению с ее значением при $T = 0$. При низких значениях температуры в слабом электромагнитном поле можно получить уравнение для функции, имеющей смысл отклонения параметра порядка от равновесного значения.

Функционал действия S ферми-системы в электромагнитном поле отличается от функционала (6.1) заменой

$$\partial_\tau \rightarrow \partial_\tau + ie\varphi, \quad \nabla \rightarrow \nabla + ie\mathbf{A}, \quad (23.1)$$

а также добавкой, описывающей взаимодействие спина с магнитным полем. В постоянном магнитном поле \mathbf{H} имеем:

$$\varphi = 0; \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}, \mathbf{x}]; \quad (23.2)$$

$$S = \int d\tau dx \sum_s \left(\bar{\psi}_s \partial_\tau \psi_s - \frac{1}{2m} |(\nabla + ie\mathbf{A}) \psi_s|^2 + \lambda \bar{\psi}_s \psi_s + \right. \\ \left. + \frac{eH}{2m} s \bar{\psi}_s \psi_s \right) - \frac{1}{2} \int d\tau dx dy u(x-y) \sum_{ss'} \rho_s(x, \tau) \rho_{s'}(y, \tau), \quad (23.3)$$

где

$$\rho_s(x, \tau) = \bar{\psi}_s(x, \tau) \psi_s(x, \tau) \quad (23.4)$$

есть плотность электронов с проекцией спина s .

Рассмотрим, как изменяются нормальные и аномальные средние

$$\left. \begin{aligned} G(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{y}, \tau_1) &= \langle \psi_s(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}_s(\mathbf{y}, \tau_1) \rangle; \\ G_1(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{y}, \tau_1) &= \langle \psi_s(\mathbf{x}, \tau) \psi_{-s}(\mathbf{y}, \tau_1) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

при трансляциях $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$, $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y} + \mathbf{a}$. Средние (23.5) можно записать через континуальные интегралы от произведений усредняемых антикоммутирующих полей с весом $\exp S$. Заменяем в действии S $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$, $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y} + \mathbf{a}$. При этом

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}\mathbf{x}] \rightarrow \mathbf{A}' = \frac{1}{2} [\mathbf{H}\mathbf{x}] + \frac{1}{2} [\mathbf{H}\mathbf{a}]. \quad (23.6)$$

Будем считать функции $\psi_s(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tau)$, $\bar{\psi}_s(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tau)$ новыми переменными континуального интегрирования. Это приводит к выводу, что средние (23.5) от полей со сдвинутыми аргументами равны средним от полей с первоначальными аргументами, но вычисленным при векторном потенциале \mathbf{A}' (23.6) вместо \mathbf{A} (23.2). Можно возвратиться к первоначальному вектор-потенциалу \mathbf{A} , совершив фазовые преобразования ферми-полей:

$$\left. \begin{aligned} \psi_s(\mathbf{x}, \tau) &\rightarrow \exp\left(\frac{ie}{2} [\mathbf{H}\mathbf{a}] \mathbf{x}\right) \psi_s(\mathbf{x}, \tau); \\ \bar{\psi}_s(\mathbf{x}, \tau) &\rightarrow \exp\left(-\frac{ie}{2} [\mathbf{H}\mathbf{a}] \mathbf{x}\right) \bar{\psi}_s(\mathbf{x}, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (23.7)$$

При этом восстанавливается форма действия (23.3), а из-под знака континуального интеграла выносится множитель $\exp\left(\frac{i}{2} [\mathbf{H}\mathbf{a}] (\mathbf{x} \pm \mathbf{y})\right)$.

Получаем формулы

$$\left. \begin{aligned} G(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tau; \mathbf{y} + \mathbf{a}, \tau_1) &= \exp\left(\frac{ie}{2} [\mathbf{H}\mathbf{a}] (\mathbf{x} - \mathbf{y})\right) G(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{y}, \tau_1); \\ G_1(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tau; \mathbf{y} + \mathbf{a}, \tau_1) &= \exp\left(\frac{ie}{2} [\mathbf{H}\mathbf{a}] (\mathbf{x} + \mathbf{y})\right) G_1(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{y}, \tau_1). \end{aligned} \right\} \quad (23.8)$$

Вторая из них приводит к невозможности однородного сверхпроводящего состояния в однородном магнитном поле. Действительно, для однородного состояния формулы (23.8) были бы верны для любого \mathbf{a} . Если теперь в (23.8) сделать еще один сдвиг $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y} + \mathbf{b}$ на произвольный вектор \mathbf{b} , то получим, что функция G_1 при сдвиге ее аргументов \mathbf{x} , \mathbf{y} на $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ приобретает множитель

$$\exp(ie [\mathbf{H}\mathbf{a}] \mathbf{b}) \exp\left(\frac{i}{2} e [\mathbf{H}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] (\mathbf{x} + \mathbf{y})\right). \quad (23.9)$$

С другой стороны, если просто заменить в (23.8) $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b}$, получим вместо (23.9) множитель

$$\exp\left(\frac{i}{2} e [\mathbf{H}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] (\mathbf{x} + \mathbf{y})\right). \quad (23.10)$$

Совпадение (23.9) и (23.10) возможно только при условии

$$\exp i (eH [a, b]) = 1, \quad (23.11)$$

которое не может быть выполнено при любых a, b . Таким образом, однородное сверхпроводящее состояние в магнитном поле невозможно.

Можно удовлетворить равенству (23.11), считая, что векторы a, b образуют в плоскости, перпендикулярной к H , периодическую решетку с площадью минимального параллелограмма

$$\frac{2\pi n}{eH}, \quad (23.12)$$

где n — целое положительное число. Положив $n = 1$ и считая решетку треугольной, имеем длину стороны a :

$$a = \left(\frac{4\pi}{\sqrt{3} eH} \right)^{1/2}. \quad (23.13)$$

Таким образом, получена возможность периодической структуры в сверхпроводнике.

Выведем теперь функционал гидродинамического действия для модели ферми-газа с исходным действием (23.3). Условия его экстремума дают уравнения, детально описывающие периодическую структуру. Распространим идею последовательного интегрирования по быстрым и медленным переменным на ферми-системы. Медленно меняющейся частью $\psi_0(x, \tau)$ ферми-поля $\psi(x, \tau)$ назовем часть слагаемых в разложении

$$\psi(x, \tau) = (\beta V)^{-1/2} \sum_{k, \omega} \exp [i(\omega\tau - kx)] a(p) \quad (23.14)$$

с импульсами k в узком слое $|k - k_F| < k_0$ вблизи поверхности Ферми. Разность $\psi - \psi_0$ назовем быстропеременной частью ψ_1 поля ψ .

Взяв континуальный интеграл по быстрым переменным

$$\int \exp S d\bar{\psi}_1 d\psi_1 = \exp S' [\bar{\psi}_0, \psi_0], \quad (23.15)$$

получим функционал от медленных переменных $\psi_0, \bar{\psi}_0$. Нетрудно вычислить функционал S' для системы малой плотности. В первом приближении можно ограничиться членами не выше четвертого порядка по полям $\psi_0, \bar{\psi}_0$. В этом приближении S' имеет вид

$$S' = p_0 \beta V + \int d\tau dx \sum_s \left(\bar{\psi}_{0s} \partial_\tau \psi_{0s} - \frac{1}{2m} |(\nabla + ie\mathbf{A}) \psi_{0s}|^2 + \right. \\ \left. + \left(\mu + ie\varphi + \frac{eH_s}{2m} \right) \bar{\psi}_{0s} \psi_{0s} \right) - \frac{1}{2} \int t' \bar{\psi}_{0+} \psi_{0+} \bar{\psi}_{0-} \psi_{0-} dx d\tau. \quad (23.16)$$

В отличие от исходного действия (23.3) здесь свободный член $p_0 \beta V$, а химический потенциал λ и потенциал взаимодействия $u(x-y)$ заменены ренормированными величинами μ и $t' \delta(x-y)$. Величина

ρ_0 , имеющая смысл давления неидеального ферми-газа без частиц с импульсами $|k - k_F| < k_0$, дается формулой

$$\rho_0 = \frac{T}{(2\pi)^3} \int_{|k - k_F| > k_0} \ln(1 + \exp[-\beta \varepsilon_0(k)]) d^3 k \times \\ \times (-t') \left((2\pi)^{-3} \int_{|k - k_F| > k_0} \frac{d^3 k}{\exp[\beta \varepsilon_0(k)] + 1} \right)^2. \quad (23.17)$$

Здесь $\varepsilon_0(k) = \frac{k^2}{2m} - \lambda$ — невозмущенный энергетический спектр; t' — определенная ниже (23.21) t -матрица. Ренормировка $\lambda \rightarrow \mu$ дается формулой

$$\mu = \lambda - \frac{t'}{(2\pi)^3} \int_{|k - k_F| > k_0} \frac{d^3 k}{\exp[\beta \varepsilon_0(k)] + 1}. \quad (23.18)$$

Наконец, t -матрица t' получается в результате суммирования последовательности диаграмм (22.13), описывающих рассеяние частиц с противоположным спином, причем импульсы внутренних линий в этих диаграммах расположены вне слоя $|k - k_F| < k_0$. Такая t -матрица определяется уравнением

$$t'(k_1, k_2; 0) + (2\pi)^{-3} \times \\ \times \int_{|k_3 - k_F| > k_0} u(k_1 - k_3) \frac{\text{th} \frac{\beta \varepsilon_0(k_3)}{2}}{2\varepsilon_0(k_3)} t'(k_3, k_2; 0) d^3 k_3 = \\ = u(k_1 - k_2). \quad (23.19)$$

Перепишем его в виде

$$t'(k_1, k_2; 0) + (2\pi)^{-3} \int u(k_1 - k_3) t'(k_3, k_2; 0) \frac{m}{k_3^2} d^3 k_3 = \\ = u(k_1 - k_2) + (2\pi)^{-3} \int u(k_1 - k_3) t'(k_3, k_2; 0) \left(\frac{m}{k_3^2} - \frac{\text{th} \frac{\beta \varepsilon_0(k_3)}{2}}{2\varepsilon_0(k_3)} \right) d^3 k_3 \quad (23.20)$$

и обратим оператор, действующий на t' слева. Такой прием, уже многократно использованный выше, дает функцию $t'(k_1, k_2; 0)$, которую в области $k \sim k_F$ можно заменить постоянной

$$t' = t_0 + \frac{m t_0^2}{(2\pi)^3} \int_{|k - k_F| > k_0} d^3 k \left(\frac{m}{k^2} - \frac{\text{th} \frac{\beta \varepsilon_0(k)}{2}}{2\varepsilon_0(k)} \right) \approx \\ \approx t_0 + \frac{m t_0^2 k_F}{2\pi^2} \left(2 - \ln \frac{2k_F}{k_0} \right), \quad (23.21)$$

зависящей от вспомогательного параметра k_0 . Далее будет видно, что окончательные ответы не зависят от k_0 . Сделаем еще два замечания к формуле (23.16).

1. Учет рассеяния частиц с одинаковым спином ведет к замене антисимметризованного потенциала антисимметризованной t' -матрицей t' , исчезающей, если заменить t' константой. Поэтому в первом приближении взаимодействие частиц с одинаковым спином не дает вклада в S' .

2. Мы пренебрегли зависимостью ρ_0 от \mathbf{A} , φ . О законности такого пренебрежения будет сказано ниже.

Явление сверхпроводимости должно получаться при интегрировании функционала $\text{exp } S'$ по медленным переменным $\psi_0, \bar{\psi}_0$. Перейдем от интеграла по ферми-полям $\psi_0, \bar{\psi}_0$ к интегралу по вспомогательным бозе-полям. Это делает еще более полной аналогию сверхпроводимости со сверхтекучестью бозе-систем. Для реализации этой идеи введем под знак интеграла по ферми-полям $\psi_0, \bar{\psi}_0$ гауссов интеграл

$$\int \exp \left\{ \int d\tau d^3x (t')^{-1} \bar{c}(x, \tau) c(x, \tau) \right\} d\bar{c} dc \quad (23.22)$$

по вспомогательному комплексному бозе-полю $c(x, \tau)$. Квадратичная форма в экспоненте подынтегрального выражения (23.22) отрицательно определена, если считать потенциал взаимодействия $u(x-y)$ притягивающим, а величину t' — отрицательной. Сделав в интеграле по c, \bar{c} сдвиг

$$\left. \begin{aligned} c(x, \tau) &\rightarrow c(x, \tau) + t' \psi_{0+}(x, \tau) \psi_{0-}(x, \tau); \\ \bar{c}(x, \tau) &\rightarrow \bar{c}(x, \tau) + t' \bar{\psi}_{0-}(x, \tau) \bar{\psi}_{0+}(x, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (23.23)$$

преобразуем подынтегральное выражение в интеграле по $\psi_0, \bar{\psi}_0, c, \bar{c}$ в $\text{exp } S''$, где функционал S''

$$S'' = \int d\tau d^3x \left\{ \sum_s \left(\bar{\psi}_{0s} \partial_\tau \psi_{0s} - \frac{1}{2m} |(\nabla + ie\mathbf{A}) \psi_{0s}|^2 + \left(\mu + ie\varphi + \frac{eHs}{2m} \right) \bar{\psi}_{0s} \psi_{0s} \right) + \psi_{0+} \psi_{0-} c + \bar{\psi}_{0-} \bar{\psi}_{0+} c + \frac{1}{t'} |c|^2 \right\} \quad (23.24)$$

квадратичен по $\psi_{0s}, \bar{\psi}_{0s}$. Теперь можно вычислить гауссов интеграл по $\psi_{0s}, \bar{\psi}_{0s}$. Формально он равен определителю оператора

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \partial_\tau + \frac{eH}{2m} - \frac{1}{2m} (\nabla + ie\mathbf{A})^2 + \mu + ie\varphi, & -\bar{c} \\ -c, & \partial_\tau + \frac{eH}{2m} + \frac{1}{2m} (\nabla - ie\mathbf{A})^2 - \mu - ie\varphi \end{pmatrix} \quad (23.25)$$

действующего на пару ферми-полей $\psi_{0+}, \bar{\psi}_{0-}$. Оператор зависит от функций $\varphi, \mathbf{A}, c, \bar{c}$. Его определитель можно регуляризовать,

разделив на определитель оператора \hat{M}_0 с нулевыми значениями $\varphi, \mathbf{A}, c, \bar{c}$. Таким образом, можно написать

$$\int \exp S'' d\bar{\psi}_0 d\psi_0 d\bar{c} dc = \int \exp \left\{ \int (t')^{-1} |c|^2 d\tau dx + \ln \det \hat{M}/\hat{M}_0 \right\} dc d\bar{c}. \quad (23.26)$$

Вычислим $\ln \det \hat{M}/\hat{M}_0$ по формуле

$$\ln \det \hat{M}/\hat{M}_0 = \ln \det \hat{M}/\hat{M}_1 + \ln \det \hat{M}_1/\hat{M}_0, \quad (23.27)$$

где \hat{M}_1 — оператор \hat{M} (23.25) при $c = \bar{c} = 0$. Второе слагаемое в (23.27) не зависит от бозе-поля $c(x, \tau)$, оно будет рассмотрено позже.

Первое слагаемое разложим в функциональный ряд по c, \bar{c} :

$$\begin{aligned} \ln \det \hat{M}/\hat{M}_1 &= \text{Sp} \ln \hat{M}/\hat{M}_1 = \text{Sp} \ln (I - \hat{G}\hat{u}) = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int \prod_{i=1}^n d^3 x_i d\tau_i \text{tr} \hat{G}(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2 | \varphi, \mathbf{A}) \hat{u}(x_2, \tau_2) \times \\ &\quad \times G(x_2, \tau_2; x_3, \tau_3 | \varphi, \mathbf{A}) \hat{u}(x_3, \tau_3), \dots, \hat{u}(x_1, \tau_1). \end{aligned} \quad (23.28)$$

Здесь знак tr означает след матрицы второго порядка, $\hat{u}(x, \tau)$ — матрица

$$\hat{u}(x, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & c(x, \tau) \\ \bar{c}(x, \tau) & 0 \end{pmatrix}; \quad (23.29)$$

\hat{G} — матрица Грина

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_+ & 0 \\ 0 & G_- \end{pmatrix}, \quad (23.30)$$

в которой G_{\pm} — функции Грина, определяемые уравнениями

$$\left[\partial_{\tau} + \frac{eH}{2m} \mp \left(\frac{1}{2m} (\nabla \pm ie\mathbf{A})^2 - \mu - ie\varphi \right) \right] G_{\pm}(x, \tau; y, \tau_1 | \varphi, \mathbf{A}) = \delta(x-y) \delta(\tau-\tau_1). \quad (23.31)$$

В разложение (23.28) дают вклад только четные n , так как \hat{G} — диагональная матрица, а диагональные элементы \hat{u} равны нулю.

Ограничимся в разложении (23.28) членами второго и четвертого порядка по $c(x, \tau)$. Это возможно вблизи фазового перехода, где, как будет видно далее, главный вклад в интеграл по $|c(x, \tau)|^2$ дает окрестность положительного ρ_0 , которое имеет смысл плотности конденсата и исчезает в пределе $T \rightarrow T_c$.

В члене четвертого порядка пренебрежем зависимостью функций Грина G_{\pm} от полей φ, \mathbf{A} и будем в первом приближении считать аргу-

менты всех функций \hat{u} совпадающими. Это приводит к следующему выражению для члена четвертого порядка:

$$-\frac{1}{2} \int \prod_{i=1}^4 d\tau_i dx_i |c(x, \tau)|^4 G_+(1,2) G_-(2,3) G_+(3,4) G_-(4,1), \quad (23.32)$$

где $G_{\pm}(1, 2) = G_{\pm}(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2)$.

Перейдя к импульсному представлению для функций Грина G_{\pm} , можно взять интеграл по (x_2, τ_2) , (x_3, τ_3) , (x_4, τ_4) . Это приводит для (23.32) к формуле

$$-\frac{b}{2} \int |c(x, \tau)|^4 d\tau d^3 x. \quad (23.33)$$

Коэффициент b

$$b = \frac{T}{V} \sum_p (\omega^2 + \xi^2(\mathbf{k}))^{-2} \quad (23.34)$$

легко вычислить, перейдя к интегралу по $\xi(\mathbf{k}) = \frac{k^2}{2m} - \mu$ (в слое $(k - k_F) < k_0$):

$$\begin{aligned} b &= mk_F \frac{T}{2\pi^2} \sum_{\omega} \int \frac{d\xi}{(\xi^2 + \omega^2)^2} = \\ &= mk_F \frac{T}{2\pi^2} \frac{\pi}{4} \sum_{\omega} \frac{1}{|\omega|^3} = \frac{7\zeta(3) mk_F}{32\pi^4 T^2}, \end{aligned} \quad (23.35)$$

где $\zeta(3)$ — ζ -функция Римана при $s = 3$; T в формуле (23.35) следует считать равной температуре фазового перехода T_c (22.31).

Член второго порядка разложения (23.28) имеет вид

$$\begin{aligned} - \int dx dy d\tau_1 G_+(x, \tau; y, \tau_1; \varphi, A) G_-(y, \tau_1; x, \tau; \varphi, A) \times \\ \times \bar{c}(x, \tau) c(y, \tau_1). \end{aligned} \quad (23.36)$$

Используем далее приближение

$$G_{\pm}(x, \tau; y, \tau_1; \varphi, A) \exp \left\{ \pm i e \int_x^y (A dx + \varphi d\tau) \right\} G_{0\pm}(x-y, \tau-\tau_1), \quad (23.37)$$

учитывающее зависимость G_{\pm} от полей φ, A . Эта формула получается в нерелятивистском приближении из формулы (13.14) для функции Грина электрона в медленно меняющемся поле, причем интеграл взят по прямой линии, соединяющей (x, τ) и (y, τ_1) .

Использував далее формулу

$$c(y, \tau_1) = \exp \left\{ i \int_x^y (\nabla dx + \partial_{\tau} d\tau) \right\} c(x, \tau), \quad (23.38)$$

можно переписать (23.36) в виде

$$-\int dx dy d\tau d\tau' G_{0+}(x-y, \tau-\tau') G_{0-}(y-x, \tau'-\tau) \bar{c}(x, \tau) \times \\ \times \exp \left\{ i \int_x^y ((\nabla + 2ie\mathbf{A}) dx + (\partial_\tau + 2ie\varphi) d\tau) \right\} c(x, \tau). \quad (23.39)$$

Из этой формулы видно, что для вычисления этого функционала надо сначала вычислить его для нулевых значений внешнего поля, заменив затем в окончательных ответах действующие на $c(x, \tau)$ производные «ковариантными» по правилу

$$\nabla \rightarrow \nabla + 2ie\mathbf{A}; \partial_\tau \rightarrow \partial_\tau + 2ie\varphi. \quad (23.40)$$

Функционал (23.36) при $\varphi = 0, \mathbf{A} = 0$ легче всего вычислить в p -представлении, где он равен

$$-\sum_p A(p) c^+(p) c(p). \quad (23.41)$$

Здесь

$$A(p) = -\frac{T}{V} \sum_{p_1} [(i\omega_1 - \varepsilon(k_1))(i\omega - i\omega_1 - \varepsilon(k - k_1))]^{-1} = \\ = -(2\pi)^{-3} \int_{|k_1 - k_F| < k_0} \frac{\text{th} \frac{\beta\varepsilon(k_1)}{2} + \text{th} \frac{\beta\varepsilon(k - k_1)}{2}}{2(\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k - k_1) - i\omega)} d^3 k_1, \quad (23.42)$$

где $\varepsilon(k) = \frac{k^2}{2m} - \mu$.

Выделим из $A(p)$ постоянную $A(0)$, вклад от которой объединим $c(t')^{-1} \int |e|^2 d\tau dx$. Получим при $\varphi = 0, \mathbf{A} = 0$ выражение

$$\sum_p (A(0) - A(p)) c^+(p) c(p) + ((t')^{-1} - A(0)) \int |c(x, \tau)|^2 d\tau d^3 x - \\ - \frac{b}{2} \int |c(x, \tau)|^4 d\tau d^3 x. \quad (23.43)$$

Этот функционал напоминает функционал действия неидеального бозе-газа. Здесь первое слагаемое — кинетический член, а третье описывает самодействие бозе-поля $c(x, \tau)$. Используя (23.21), коэффициент перед вторым слагаемым можно записать в виде

$$t_0^{-1} - \frac{mk_F}{2\pi^2} \left(2 - \ln \frac{2k_F}{k_0} \right) + (2\pi)^{-3} \int \frac{\text{th} \frac{\beta\varepsilon(k)}{2}}{2\varepsilon(k)} d^3 k = \\ = t_0^{-1} + \frac{mk_F}{2\pi^2} \left(-2 + \ln \frac{2k_F}{k_0} + \int_0^{\frac{k_F k_0}{m}} \frac{\text{th} \frac{\beta\xi}{2}}{\xi} d\xi \right). \quad (23.44)$$

Это выражение исчезает при $T = T_c$ в силу (22.28). Поэтому можно переписать его в виде

$$\frac{mk_F}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\text{th} \frac{\beta\xi}{2} - \text{th} \frac{\beta_c \xi}{2}}{\xi} d\xi = \frac{mk_F}{2\pi^2} \ln \frac{T_c}{T} \approx \frac{mk_F}{2\pi^2} \frac{\Delta T}{T_c}, \quad (23.45)$$

где $\Delta T = T_c - T$. При $T < T_c$ коэффициент (23.44) положителен, а функционал (23.43) имеет максимум при $|c(x, \tau)|^2 = \rho_0 = \text{const}$. Это постоянное значение

$$\rho_0 = \frac{mk_F}{2\pi^2} \frac{\Delta T}{T_c b} = \frac{16 T_c \Delta T}{7\pi \zeta(3)} \quad (23.46)$$

имеет смысл плотности конденсата.

Таким образом, в развитом формализме фазовый переход ферми-системы описывается так же, как в теории бозе-газа. Главный вклад в интеграл по вспомогательному бозе-полю $c(x, \tau)$ дают функции, у которых квадрат модуля $|c|^2$ близок к плотности конденсата ρ_0 .

В дальнейшем применим функционал (23.43) только к описанию стационарных явлений в сверхпроводниках. С этой целью проинтегрируем по коэффициентам Фурье $c(p)$, $c^+(p)$ с $\omega \neq 0$. Это дает постоянную добавку к действию (23.43) и приводит к ренормировке коэффициентов в формах второй и четвертой степеней в (23.49). Можно показать, что эти поправки малы и ими можно в первом приближении пренебрегать. Таким образом, с точностью до несущественного постоянного слагаемого результат интегрирования по $c(p)$, $c^+(p)$, $\omega \neq 0$ сводится к тому, что можно оставить в (23.43) функции $c(x, \tau)$, $c^+(x, \tau)$, не зависящие от τ , коэффициенты Фурье которых $c(p)$, $c^+(p)$ имеют частоту $\omega = 0$.

В результате вместо (23.43) получим функционал

$$\beta \sum_{\mathbf{k}} (A(0) - A(\mathbf{k})) c^+(\mathbf{k}, 0) c(\mathbf{k}, 0) + \frac{\beta mk_F \Delta T}{2\pi^2 T_c} \int d^3x |c(\mathbf{x})|^2 - \frac{b\beta}{2} \int |c(x, \tau)|^4 d^3x. \quad (23.47)$$

При малых \mathbf{k} имеем

$$A(0) - A(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \times$$

$$\times \int \left[\frac{\text{th} \frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \text{th} \frac{\beta}{2} \varepsilon \left(\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2} \right)}{2 \left(\varepsilon \left(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \varepsilon \left(\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) \right)} - \frac{\text{th} \beta \varepsilon(k_1)}{2} \frac{1}{2\varepsilon(k_1)} \right] d^3k_1 \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\left(\text{th} \frac{\beta}{2} \xi\right)^n}{4\xi} \left(\frac{\beta(\mathbf{k}_1 \mathbf{k})}{4m}\right)^2 d^3 k_1 = \\ &= -\frac{k^2 k_F^2}{384 \pi^2 m T_c^2} \int (\text{th } x)^n \frac{dx}{x}, \end{aligned} \quad (23.48)$$

причем

$$\int (\text{th } x)^n \frac{dx}{x} = -\frac{32}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = -\frac{28}{\pi^2} \zeta(3). \quad (23.49)$$

В результате кинетический член в (23.47) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\beta \sum_{\mathbf{k}} (A(0) - A(\mathbf{k}, 0)) |c(\mathbf{k}, 0)|^2 = \\ &= -\frac{\beta k_F \varepsilon_F \zeta(3)}{48\pi^4 T_c^2} \int |\nabla c(x, \tau)|^2 d^3 x, \end{aligned} \quad (23.50)$$

где $\varepsilon_F = \mu$ — энергия Ферми.

Введем вместо $c(x)$ новую функцию

$$\psi(x) = \left(\frac{7mk_F \varepsilon_F \zeta(3)}{12\pi^4 T_c^2}\right)^{1/2} c(x) \quad (23.51)$$

и запишем функционал (23.47), заменив производную ∇ в кинетическом члене ковариантной $\nabla + 2ie\mathbf{A}$ согласно (23.40):

$$\begin{aligned} &\beta \int \left(-\frac{1}{4m} \left| (\nabla + 2ie\mathbf{A}) \psi(x) \right|^2 + \Lambda |\psi(x)|^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{2} |\psi(x)|^4 \right) d^3 x. \end{aligned} \quad (23.52)$$

Здесь

$$\Lambda = \frac{6\pi^2 T_c \Delta T}{7\zeta(3) \varepsilon_F}; \quad g = \frac{9\pi^4 T_c^2}{14\zeta(3) mk_F \varepsilon_F^2}. \quad (23.53)$$

К функционалу (23.52) следует добавить выражение

$$-\frac{\beta}{2} \int (\text{rot } \mathbf{A})^2 d^3 x, \quad (23.54)$$

описывающее стационарное магнитное поле, а также вклад $\ln \det \hat{M}_1 / \hat{M}_0$ в (23.57). Этот функционал описывает магнитную поляризацию среды. Для слабых полей $\mathbf{A}(x)$ он отличается от (23.54) коэффициентом поляризации κ . Коэффициент κ имеет порядок κ_{WF}/c , где $\alpha = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры; v_F/c — отношение

скорости на поверхности Ферми к скорости света. Так как $\kappa \ll 1$, можно в первом приближении пренебречь вкладом $\ln \det \hat{M}_1/\hat{M}_0$ и иметь дело с функционалом

$$S''' = -\beta \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{A})^2 + \frac{1}{4m} |(\nabla + 2ie\mathbf{A}) \psi(\mathbf{x})|^2 - \Lambda |\psi(\mathbf{x})|^2 + \frac{g}{2} |\psi(\mathbf{x})|^4 \right). \quad (23.55)$$

Функционал $\exp S'''$ надо интегрировать по комплексным функциям $\psi(\mathbf{x}), \bar{\psi}(\mathbf{x})$, а также по векторному потенциалу $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Главный вклад в такой интеграл дают окрестности классических решений. Эти решения удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m} (\nabla + 2ie\mathbf{A})^2 \psi(\mathbf{x}) - \Lambda \psi(\mathbf{x}) + g |\psi(\mathbf{x})|^2 \psi(\mathbf{x}) &= 0; \\ \text{rot rot } \mathbf{A} = \mathbf{j} &\equiv -\frac{ie}{2m} (\nabla \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \nabla \psi) - \frac{e^2}{m} \bar{\psi} \psi \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (23.56)$$

которые и представляют собой уравнения Гинзбурга — Ландау.

Метод континуального интегрирования, использованный для вывода этих уравнений, позволяет в принципе учесть и флуктуации полей $\psi, \bar{\psi}, \mathbf{A}$ вокруг классических решений. Для их учета необходимо произвести в континуальном интеграле сдвиг на решения классических уравнений

$$\psi \rightarrow \psi + \psi_0; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \bar{\psi}_0; \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{A}_0 \quad (23.57)$$

и построить теорию возмущений, взяв за невозмущенное действие квадратичную форму по полям $\psi, \bar{\psi}, \mathbf{A}$, а формы высших степеней рассматривая как возмущения. Здесь этим заниматься не будем.

В качестве примера применения уравнений Гинзбурга — Ландау определим структуру вихревой решетки вблизи фазового перехода и величину критического магнитного поля H (для него общепринято обозначение H_{c_2}). Величина H_{c_2} — это поле, которое надо приложить к сверхпроводнику, чтобы перевести его в нормальное состояние. Вблизи фазового перехода можно пренебречь правой частью во втором члене $g |\psi|^2 \psi$ в первом уравнении. Второе уравнение имеет решение $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}\mathbf{x}]$.

Первое уравнение

$$-\frac{1}{4m} (\nabla + ie[\mathbf{H}\mathbf{x}])^2 \psi(\mathbf{x}) = \Lambda \psi(\mathbf{x}) \quad (23.58)$$

есть уравнение Шредингера для частицы заряда $2e$ и массы $2m$ в постоянном магнитном поле \mathbf{H} . Если решение ψ не зависит от сос-

тавляющей x вдоль \mathbf{H} , спектр возможных значений Λ (уровни Ландау) имеет вид

$$\Lambda = \frac{eH}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (23.59)$$

Наименьшее возможное значение ($n = 0$) соответствует наибольшей величине критического поля

$$H = H_{c_2} = \frac{2m\Lambda}{e} = \frac{12\pi^2 m T_c \Delta T}{7\zeta(3) e \epsilon_F} \quad (23.60)$$

Построим решение (23.58), описывающее периодическую структуру. Возьмем частное решение $\varphi(\mathbf{x})$, соответствующее низшему уровню Ландау. Функция $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ удовлетворяет уравнению (23.58) с заменой $[\mathbf{H}\mathbf{x}] \rightarrow [\mathbf{H}\mathbf{x}] + [\mathbf{H}\mathbf{a}]$, что соответствует изменению калибровки векторного потенциала. Можно возвратиться к прежней калибровке, заменив $\varphi \rightarrow \varphi \exp(-ie[\mathbf{H}\mathbf{a}]\mathbf{x})$:

Таким образом, функция $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \exp(-ie[\mathbf{H}\mathbf{a}]\mathbf{x})$ также удовлетворяет уравнению (23.58). Полагая \mathbf{a} равным вектору решетки и суммируя по всем таким векторам, получим функцию

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a}} \exp(-ie[\mathbf{H}\mathbf{a}]\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \quad (23.61)$$

описывающую периодическую структуру. Напомним, что любые два вектора решетки должны удовлетворять условию (23.11). Используя это равенство, получим закон преобразования $\psi(\mathbf{x})$ при сдвиге на вектор решетки \mathbf{b} :

$$\psi(\mathbf{x} + \mathbf{b}) = \exp(ie[\mathbf{H}\mathbf{b}]\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}). \quad (23.62)$$

Удобно взять в качестве частного решения $\varphi(\mathbf{x})$, соответствующего низшему уровню Ландау, функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = (x - iy) \exp\left(-\frac{eH}{2}(x^2 + y^2)\right), \quad (23.63)$$

где x, y — координаты на плоскости, перпендикулярной к \mathbf{H} . Соответствующая ему функция $\psi(\mathbf{x})$ (23.61) обращается в нуль в точках решетки, а ее фаза получает при обходе вокруг этих точек приращение — 2π . Поэтому можно сказать, что функция (23.61) описывает решетку квантовых вихрей, образующуюся в сверхпроводнике в магнитном поле, меньшем критического H_{c_2} (23.60). Можно показать [при учете нелинейных членов в уравнениях (23.56)], что наименьшая энергия достигается для треугольной решетки.

Периодическая решетка квантовых вихрей образуется также во вращающейся сверхтекучей бозе-системе, где вместо магнитного поля \mathbf{H} существует вектор угловой скорости ω . Развитый в этом параграфе метод описания вихревой решетки применим и к бозе-системам.

ТЕОРИЯ ПЛАЗМЫ

§ 24. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ В ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

В этой главе рассматривается применение метода континуального интегрирования к плазме, т. е. системе ферми-частиц с кулоновским взаимодействием. Для такой системы стандартная теория возмущений приводит к расходимостям, родственными инфракрасным расходимостям квантовой электродинамики. Чтобы устранить их, используют метод интегрирования по быстрым и медленным переменным (см. § 12) и с его помощью получают функционал гидродинамического действия для плазмы. Из многочисленных приложений, возможных для этого функционала, выбрана задача о плазменном спектре и его затухании.

Для простоты рассмотрим модельную систему электронов на фоне однородного компенсирующего заряда противоположного знака.

Исходный функционал действия имеет вид

$$\begin{aligned}
 S = & \int_0^{\beta} d\tau \int dx (\bar{\psi}(x, \tau) \partial_{\tau} \psi(x, \tau) - \frac{1}{2m} \nabla \bar{\psi}(x, \tau) \nabla \psi(x, \tau) + \\
 & + \lambda \bar{\psi}(x, \tau) \psi(x, \tau)) - \frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau \int dx dy \bar{\psi}(x, \tau) \bar{\psi}(y, \tau) \times \\
 & \times \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \psi(y, \tau) \psi(x, \tau). \quad (24.1)
 \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое описывает систему невзаимодействующих электронов, а второе — кулоновское взаимодействие.

Учет фона сводится к тому, что в фурье-разложении потенциала

$$\frac{4\pi e^2}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})] k^{-2} \quad (24.2)$$

отсутствует слагаемое с $k = 0$.

Как обычно, функции Грина определим как средние с весом $\exp S$ от произведения нескольких ферми-полей ψ , $\bar{\psi}$ с различными пространственно-временными аргументами. Стандартная теория воз-

мущений может привести к расходимостям, так как выражение, соответствующее вершине кулоновского взаимодействия ферми-частиц

$$4\pi e^2 (|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3|^{-2} - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4|^{-2}), \quad (24.3)$$

бесконечно в пределе $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_3$ или $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_4$. При интегрировании произведений типа (24.3) и возникают сингулярности.

Для перестройки теории возмущений введем под знак континуального интеграла по ферми-полям $\psi, \bar{\psi}$ континуальный интеграл по вспомогательному бозе-полю $\varphi(x, \tau)$:

$$\int d\varphi \exp\left(-\int d\tau dx \frac{(\nabla\varphi(\mathbf{x}, \tau))^2}{8\pi e^2}\right), \quad (24.4)$$

где $d\varphi$ — мера интегрирования.

Сделаем в интеграле по $\varphi(x, \tau)$ сдвиг

$$\varphi(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}, \tau) + ie^2 \int \frac{d^3 y}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \bar{\psi}(\mathbf{y}, \tau) \psi(\mathbf{y}, \tau), \quad (24.5)$$

сокращающий член кулоновского взаимодействия в исходном действии (24.1). В результате получаем действие вида

$$\int d\tau dx \left(\bar{\psi} \partial_\tau \psi - \frac{\nabla \bar{\psi} \nabla \psi}{2m} + \lambda \bar{\psi} \psi - i\varphi(\mathbf{x}, \tau) \bar{\psi}(\mathbf{x}, \tau) \psi(\mathbf{x}, \tau) - (8\pi e^2)^{-1} (\nabla\varphi(\mathbf{x}, \tau))^2 \right). \quad (24.6)$$

Это выражение описывает систему ферми-частиц, взаимодействующих с полем скалярного потенциала $\varphi(x, \tau)$. Переходом от (24.1) к (24.6) по существу была реализована идея Фарадея о близкодействии. Для системы с действием (24.6) нетрудно сформулировать теорию возмущений. Обозначая поле ψ сплошной направленной линией, а поле φ — волнистой линией, будем иметь следующую диаграммную технику:

$$\left. \begin{array}{l} \longrightarrow \quad \left(i\omega - \frac{k^2}{2m} + \lambda\right)^{-1} \\ \text{~~~~~} \quad 4\pi e^2 k^{-2} \\ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \quad i \end{array} \right\} \quad (24.7)$$

Такая теория возмущений по существу совпадает со стандартной теорией возмущений с вершиной (24.3) и еще не ведет к устранению расходимостей при малых импульсах. Желаемого результата можно добиться, используя идею последовательного интегрирования по быстрым и медленным переменным (§ 12).

Определим медленно меняющуюся часть $\varphi_0(\mathbf{x}, \tau)$ поля $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$ как сумму составляющих в разложении

$$\varphi(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta\bar{v}}} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \exp[i(\omega\tau - \mathbf{k}\mathbf{x})] \varphi(\rho) \quad (24.8)$$

с импульсами \mathbf{k} , меньшими некоторого k_0 . Быстропеременной частью $\varphi_1(\mathbf{x}, \tau)$ назовем разность $\varphi(\mathbf{x}, \tau) - \varphi_0(\mathbf{x}, \tau)$.

Физическая основа разбиения поля φ на быструю и медленную компоненты в том, что для описания рассеяния в среде двух электронов с малой передачей импульса необходим учет коллективных эффектов, в то время как столкновение двух электронов с большой передачей импульса можно рассматривать независимо от других частиц среды.

Разбиение электронного поля на быструю и медленную компоненты полезно в тех случаях, когда электроны с большими импульсами существенно определяют свойства плазмы. Например, во внешнем электрическом поле быстрые электроны могут привести к неустойчивости системы.

Под гидродинамическим действием плазмы понимают действие быстрых электронов $\psi_1, \bar{\psi}_1$ в медленно меняющемся поле φ_0 . Оно определяется формулой

$$\exp \bar{S}[\bar{\psi}_1, \psi, \varphi_0] = \int \exp S[\bar{\psi}_0 + \bar{\psi}_1, \psi_0 + \psi_1, \varphi_0 + \varphi_1] d\bar{\psi}_0 d\psi_0 d\varphi_1. \quad (24.9)$$

Если отсутствует внешнее поле, то нет необходимости в рассмотрении быстрых электронов, поэтому можно положить $\psi_1 = \bar{\psi}_1 = 0$, $\psi_0 = \psi$, $\bar{\psi}_0 = \bar{\psi}$. В этом случае гидродинамическое действие $S[\varphi_0]$ описывает плазмоны и их взаимодействие. Для его получения проинтегрируем функционал $\exp S$ по ферми-полям $\psi, \bar{\psi}$ и по быстрой компоненте φ_1 бозе-поля φ .

Интеграл по ферми-полям $\psi, \bar{\psi}$ гауссов и формально равен определителю оператора

$$\hat{M} = \partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \lambda + i\varphi(\mathbf{x}, \tau).$$

Для регуляризации разделим $\det \hat{M}$ на определитель $\det \hat{M}_0$ оператора, получающегося из \hat{M} при $\varphi = 0$. Таким образом, можно написать

$$\int \exp S d\bar{\psi} d\psi = \exp \left\{ \ln \det \hat{M} / \hat{M}_0 - \frac{1}{8\pi e^2} \int (\nabla\varphi)^2 d\tau d\mathbf{x} \right\}. \quad (24.10)$$

Прежде чем разложить $\ln \det \hat{M} / \hat{M}_0$ в функциональный ряд по $\varphi(\mathbf{x}, \tau)$, удобно преобразовать зависимость этого выражения от медленно меняющегося поля $\varphi_0(\mathbf{x}, \tau)$. Представим $\varphi_0(\mathbf{x}, \tau)$ в виде суммы

$$\varphi_0(\mathbf{x}, \tau) = \varphi_0(\mathbf{x}, \tau) + \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}, \tau) \quad (24.11)$$

постоянной по «времени» τ , составляющей $\varphi_0(x)$ и слагаемых с частотами $\omega \neq 0$:

$$\tilde{\varphi}_0(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{\substack{k < k_0 \\ \omega \neq 0}} \exp[i(kx - \omega\tau)] \varphi(p).$$

Сделаем в интеграле по ψ , $\bar{\psi}$ замену переменных

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &\rightarrow \psi(x, \tau) \exp i \int^{\tau} \tilde{\varphi}_0(x, \tau) d\tau; \\ \bar{\psi}(x, \tau) &\rightarrow \bar{\psi}(x, \tau) \exp -i \int^{\tau} \tilde{\varphi}_0(x, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (24.12)$$

где

$$\int^{\tau} \varphi_0(x, \tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{\beta V}} \sum_{\substack{k < k_0 \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{i\omega} \exp[i(\omega\tau - kx)] \varphi(p). \quad (24.13)$$

Это преобразование, не меняющее определителя, превращает оператор \hat{M} в оператор

$$\hat{M}_1 = \partial_{\tau} + \frac{1}{2m} \left(\nabla + i \int^{\tau} \nabla \bar{\varphi}_0(x, \tau) d\tau \right)^2 + \lambda - i(\varphi_0(x) + \varphi_1(x, \tau)). \quad (24.14)$$

Разложим функционал $\ln \det \hat{M}_1 / \hat{M}_0$ в ряд по переменным φ_0, φ_1 . Изображая это разложение графически, сохраним волнистую линию за полем φ_1 , а медленно меняющемуся полю φ_0 будем сопоставлять двойную линию. Согласно структуре выражения (24.14), будем иметь два типа вершин, описывающих взаимодействие электронов с медленно меняющимся полем:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 + \frac{\rho}{2} \rightarrow \begin{array}{c} \parallel \\ \text{---} \end{array} \rightarrow \rho_1 - \frac{\rho}{2} \quad \left. \begin{array}{l} i \quad \omega = 0; \\ \frac{(k, k_1)}{i m \omega} \quad \omega \neq 0; \end{array} \right\} \\ \rho_3 \rightarrow \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \rightarrow \rho_4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ -\frac{(k_3, k_4)}{m \omega_3 \omega_4} \end{array} \right\} \end{array} \quad (24.15)$$

В этих обозначениях разложение

$$\left. \begin{array}{l} \ln \det \hat{M}_1 / \hat{M}_0 = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \\ + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \end{array} \quad (24.16)$$

представляется суммой колец из электронных линий, к которым всевозможными способами присоединим вершины взаимодействия с быстрыми и медленными компонентами потенциала φ . Заметим, что вклад кольца с одним отростком исчезает в силу учета фона.

Интегрирование по φ_1 можно выполнить с помощью обычной диаграммной техники (с обрезанием интегралов по импульсам на нижнем пределе k_0). Это соответствует всевозможным сцеплениям диаграмм (24.16) линиями, соответствующими полю φ_1 .

Таким образом, приходим к функционалу гидродинамического действия:

$$S[\varphi_0] = C_0 - \frac{1}{8\pi e^2} \int (\nabla \varphi_0(x, \varphi_1))^2 d\tau dx + \left. \begin{aligned} &+ \text{diagram } a + \text{diagram } b + \text{diagram } c + \text{diagram } d + \\ &+ \text{diagram } e + \text{diagram } f + \text{diagram } g + \text{diagram } h + \dots \end{aligned} \right\} (24.17)$$

Здесь C_0 — сумма всех вакуумных диаграмм, не зависящих от поля φ_0 . В квадратичную по φ_0 часть гидродинамического действия дают вклад интеграл от $(\nabla \varphi_0)^2$ и все диаграммы с двумя отростками, изображающими поле φ_0 [например, диаграммы a, b, c, d, e, f в (24.17)]. Диаграммы g, h дают примеры членов третьего и четвертого порядков в $\tilde{S}[\varphi_0]$.

На последнем этапе континуального интегрирования по полю φ_0 теория возмущений определяется структурой гидродинамического действия (24.17). Линиям диаграмм соответствует выражение

$$G_0(p) = \left(\left(\frac{4\pi e^2}{k^2} \right)^{-1} - P \right)^{-1}, \quad (24.18)$$

обратное коэффициенту при $-\frac{1}{2} \varphi_0(p) \varphi_0(-p)$ в квадратичной форме в $S[\varphi_0]$. Здесь $P = a + b + c + c + d + \dots$ — сумма вкладов всех диаграмм с двумя отростками. Вершины третьего и высших порядков определяются формами степени выше второй в $S_0[\varphi]$.

Новая теория возмущений, в отличие от диаграммной техники (24.6), не имеет расходимостей при малых импульсах. Действительно, сингулярная при $k \rightarrow 0$ функция $4\pi e^2 k^{-2}$ заменяется выражением (24.18). Если $\omega = 0$, то P конечно и отлично от нуля в пределе $k \rightarrow 0$. Формула первого приближения для P выписана ниже (24.23). В результате функция $G_0(\omega = 0, k)$ оказывается конечной при $k \rightarrow 0$ и не ведет к расходимостям при интегрировании по k . Если же $\omega \neq 0$, то $G_0(p)$ остается сингулярной (пропорциональной) k^{-2} , так как $P \sim k^2$ в силу формул (24.15) для вершины взаимодействия φ_0 -поля с электроном при $\omega \neq 0$. Однако в диаграммах линия

с $\omega \neq 0$ упирается в две вершины, каждая из которых содержит в силу (24.15) линейный по \mathbf{k} множитель. Таким образом, сингулярности сокращаются. Этот механизм сокращения сингулярностей встречался выше, в теории бозе-систем (см. § 19).

Поясним физический смысл отдельных слагаемых в гидродинамическом действии $S_0[\varphi_0]$. Интеграл от $(\nabla\varphi_0)^2$ вместе с однопетлевыми диаграммами a, b описывает плазменные колебания и бесстолкновительное затухание Ландау. Учет диаграмм c, d, e, f необходим при вычислении затухания плазменных колебаний, вызываемого столкновениями заряженных частиц и плазмон-плазмонным взаимодействием. Наконец, диаграммы g, h описывают взаимодействие длинноволновых плазмонов (с малыми \mathbf{k}).

Задача о плазменном спектре, определяемом действием (24.17), рассмотрена в следующем параграфе. Она сводится к вычислению полюсов коррелятора

$$\langle \varphi_0(p) \varphi_0(-p) \rangle \quad (24.19)$$

при аналитическом продолжении $i\omega \rightarrow E$.

Рассмотрим коррелятор (24.19) в статическом случае $\omega = 0$, когда он имеет смысл потенциала взаимодействия двух электронов в среде. В первом приближении коррелятор совпадает с невозмущенным (24.18), в котором учитывается только вклад простейшей однопетлевой диаграммы b (диаграмма a равна нулю при $\omega = 0$). Соответствующее диаграмме b выражение есть

$$\begin{aligned} \frac{T}{V} \sum_{\mathbf{k}_1, \omega_1} (i\omega_1 - \varepsilon(\mathbf{k}_1))^{-1} (i\omega + i\omega_1 - \varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}))^{-1} = \\ = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{n(\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k})) - n(\varepsilon(\mathbf{k}_1))}{i\omega + \varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}_1)}, \end{aligned} \quad (24.20)$$

где $n = (\exp(\beta\varepsilon) + 1)^{-1}$ — функция ферми-распределения. Для больцмановской плазмы

$$n(\varepsilon) \approx \exp(-\beta\varepsilon); \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \lambda. \quad (24.21)$$

Положив в (24.20) $\omega = 0$ и считая внешний импульс \mathbf{k} меньше по порядку, чем среднетепловой $\sqrt{2mT}$, можем заменить

$$\frac{n(\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k})) - n(\varepsilon(\mathbf{k}_1))}{i\omega + \varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}_1)} \approx \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \approx -\beta n, \quad (24.22)$$

что выражает

$$P(\omega = 0, \mathbf{k}) \approx -\frac{1}{TV} \sum_{\mathbf{k}} n(\varepsilon(\mathbf{k})) = -\frac{\rho}{T} \quad (24.23)$$

через ρ — плотность плазмы и температуру T . Подставив (24.23) в (24.18), получим

$$G_0(\mathbf{k}, \omega = 0) = \frac{4\pi e^2}{k^2 + a^2}, \quad (24.24)$$

где

$$a = \left(\frac{4\pi e^2 \rho}{T} \right)^{1/2}. \quad (24.25)$$

Фурье-образ (24.24)

$$(e^2/r) \exp(-ar) \quad (24.26)$$

называется *потенциалом Дебая*, а величина $r_D = a^{-1}$ — *радиусом Дебая*. Потенциал Дебая — это экранирующий потенциал взаимодействия двух электронов в плазме, а радиус Дебая — это радиус экранировки.

В сфере радиуса r_D должно содержаться много частиц, т. е. должно быть

$$\frac{4\pi}{3} r_D^3 \gg \rho^{-1}. \quad (24.27)$$

Следующее отсюда в силу определения r_D неравенство

$$e^2 \rho^{1/3} \ll T \quad (24.28)$$

означает, что потенциальная энергия взаимодействия двух электронов, находящихся на расстоянии $r \sim \rho^{-1/3}$, значительно меньше средней кинетической энергии порядка T . Другое условие на параметры системы можно получить из требования, чтобы вклад от диаграммы d был меньше по порядку, чем от диаграммы b . Вклад d при $\omega = 0$

$$\begin{aligned} d &= \frac{T^2}{V^2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \\ \omega_1, \omega_2}} (i\omega_1 - \varepsilon(\mathbf{k}_1))^{-2} (i\omega_2 - \varepsilon(\mathbf{k}_2))^{-2} 4\pi e^2 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|^{-2} = \\ &= \frac{1}{T^2} \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} n(\varepsilon(\mathbf{k}_1)) \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} n(\varepsilon(\mathbf{k}_2)) \end{aligned} \quad (24.29)$$

равен произведению T^{-2} на выражение, имеющее смысл средней потенциальной энергии кулоновского взаимодействия на единицу объема. Условие $|d| \ll |b| \sim \rho T^{-1}$ означает малость средней потенциальной энергии в системе по сравнению со средней кинетической. Так как в силу (24.29) $|d| \sim e^2 \rho^2 m^{-1} T^{-3}$, условие $|d| \ll |b|$ можно записать в виде

$$\frac{e^2 \rho}{m} \ll T^2 \text{ или } a \ll \sqrt{mT}, \quad (24.30)$$

означающем, что характерный импульс a мал по сравнению со среднетепловым.

Нетрудно показать, что при условиях (24.28), (24.30) вклад всех остальных диаграмм теории возмущений в $G(\omega = 0, \mathbf{k})$ мал по сравнению с вкладом основной диаграммы b .

§ 25. ЗАТУХАНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Применим гидродинамическое действие (24.17) к вычислению плазменного спектра, определяемого полюсами коррелятора (24.19) при аналитическом продолжении $i\omega \rightarrow E$ [150].

Учтя только простейшие однопетлевые диаграммы a , b (24.17), получим коррелятор с полюсами $E = \pm E(k)$, где при $k \ll a \sim r_D^{-1}$

$$E(k) = \omega_0 + \frac{3Tk^2}{2m\omega_0} - i\omega_0 \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \left(\frac{a}{k}\right)^3 \exp(-a^2/2k^2). \quad (25.1)$$

Здесь первое, постоянное слагаемое ω_0 есть плазменная частота

$$\omega_0 = \left(\frac{4\pi e^2 \rho}{m}\right)^{1/2}. \quad (25.2)$$

Второе слагаемое в (25.1) определяет дисперсию плазменного спектра, а третье дает известное *затухание Ландау* [110].

Если ограничиться диаграммой a , равной

$$-\frac{k^2}{m\omega^2} \frac{T}{V} \sum_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \exp(i\omega_1 \varepsilon) (i\omega_1 - \varepsilon(\mathbf{k}_1))^{-1} = -\frac{k^2 \rho}{m\omega^2}, \quad (25.3)$$

то получим коррелятор

$$\frac{4\pi e^2}{k^2 \left(1 + \frac{4\pi e^2 \rho}{m\omega^2}\right)}.$$

Заменяв $i\omega \rightarrow E$, получим плазмонный спектр $E = \pm \omega_0$, не зависящий от k . Чтобы получить дисперсию и затухание, учтем диаграмму b , равную

$$\begin{aligned} & -\frac{T}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{im\omega}\right)^2 \left(i\omega_1 - \varepsilon\left(\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2}\right)\right)^{-1} \times \\ & \times \left(i\omega + i\omega_1 - \varepsilon\left(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{m\omega}\right)^2 \times \\ & \times \frac{\left[n\left(\varepsilon\left(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2}\right)\right) - n\left(\varepsilon\left(\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2}\right)\right)\right] \left[\varepsilon\left(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) - \varepsilon\left(\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2}\right)\right]}{\omega^2 + \left(\varepsilon\left(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) - \varepsilon\left(\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2}\right)\right)^2}. \end{aligned} \quad (25.4)$$

При замене $i\omega \rightarrow E$ это выражение в пределе $k \rightarrow 0$ имеет вид

$$-(mE)^{-4} V^{-1} \sum_{\mathbf{k}_1} (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^4 \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = \frac{3\rho T k^4}{m^2 E^4}. \quad (25.5)$$

Мнимая часть (25.4) есть

$$\frac{i\pi}{E^2 V} \sum_{\mathbf{k}_1} \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{m} \right)^4 \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \delta \left(E^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{m} \right)^2 \right) =$$

$$= -i \frac{(2\pi m)^{1/2} \rho \omega_0}{3kT^{3/2}} \exp(-a^2/2k^2). \quad (25.6)$$

Добавка (25.5) и (25.6) к (25.3) приводит к спектру (25.1).

Затухание Ландау убывает при $\mathbf{k} \rightarrow 0$ быстрее любой степени k . Это объясняется его бесстолкновительным механизмом, связанным с передачей энергии плазмона $E(\mathbf{k})$ электронам со скоростями, большими фазовой скорости плазмона $\frac{E(\mathbf{k})}{k} \approx \frac{\omega_0}{k}$ (обратный эффект Вавилова — Черенкова). Число таких электронов очень быстро убывает при $\mathbf{k} \rightarrow 0$, что и приводит к столь быстрому падению затухания Ландау.

Кроме бесстолкновительного существуют другие механизмы затухания:

а) *столкновительное затухание* вызывается столкновениями заряженных частиц. Этот механизм дает в рассматриваемой модели затухание, пропорциональное k^2 при $\mathbf{k} \rightarrow 0$ [111];

б) *затухание, обусловленное взаимодействием плазмонов*, в пределе $\mathbf{k} \rightarrow 0$ конечно и отлично от нуля.

К конечному пределу стремится и столкновительное затухание в модели двухкомпонентной плазмы частиц разной массы [111].

Как столкновительное затухание, так и плазмон-плазмонное в пределе $\mathbf{k} \rightarrow 0$ превосходят затухание Ландау и поэтому являются определяющими.

Наметим метод вычисления этих величин с помощью функционала гидродинамического действия (24.17). Подчиним импульс k_0 , отделяющий быстрые поля от медленных, неравенствам

$$4\pi e^2/T = r_D^{-2} \ll k_0^2 \ll k_T^2 = mT, \quad (25.7)$$

которые выполняются при условии

$$T^2 \gg 4\pi e^2/m = \omega_0^2, \quad (25.8)$$

верном для невырожденной плазмы. Малость фазового объема области малых импульсов дает возможность ограничиться в функционале (24.17) квадратичной формой полей φ .

Проведем частичное суммирование в диаграммах c, d, e, f , включив в волнистую линию все простейшие собственно энергетические вставки. Обозначив результат такого суммирования двойной волнистой линией, можно написать

$$\begin{aligned} \text{~~~~~} &= \text{~~~~~} + \text{~~~~~} \bigcirc \text{~~~~~} + \\ &+ \text{~~~~~} \bigcirc \text{~~~~~} \bigcirc \text{~~~~~} + \dots \end{aligned} \quad (25.9)$$

Результат такого суммирования (впервые проведенного Гелл-Манном и Бракнером [145]) дается формулой (24.18), где $P(i\omega, k)$ имеет вид

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{n \left(\varepsilon \left(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) \right)' - n \left(\varepsilon \left(\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) \right)}{i\omega + \varepsilon \left(\mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) - \varepsilon \left(\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2} \right)}. \quad (25.10)$$

Подчеркнем, что здесь было проведено суммирование (25.9) во внутренних линиях диаграмм. Приближение (24.19) с P вида (25.10) для всего коррелятора равносильно учету только двух диаграмм a, b в (24.18) и было рассмотрено выше.

Основной результат состоит в том, что столкновительное затухание определяется мнимыми частями диаграмм

$$\begin{array}{ccc} c' & d' & e' \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} + \text{---} + \text{---} \quad (25.11)$$

получающихся из диаграмм c, d, e (24.17) заменой одинарных волнистых линий двойными согласно (25.9).

Плазмон-плазмонное затухание определяется диаграммой

$$\text{---} \quad (25.12)$$

Ниже приведем аргументы, доказывающие, что именно выделенные диаграммы (25.11) и (25.12) дают главный вклад в эффекты затухания плазменных колебаний.

Мнимые части этих диаграмм можно вычислить по общим правилам [146]. Мнимая часть диаграммы равна сумме вкладов от всех сечений диаграммы, разделяющих ее на две части и отделяющих ее вход от выхода. Вклад от каждого сечения выражается формулой

$$\int AB^* \frac{(2\pi)^4}{2} \text{sh} \frac{\beta\varepsilon}{2} \delta \left(\sum_{i=1}^n z_i + \varepsilon \right) \delta \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i + \mathbf{k} \right) \times \\ \times \prod_{i=1}^n \frac{\text{Im} G_i(z_i, \mathbf{k}_i) d\mathbf{k}_i dz_i}{c_i(z_i) (2\pi)^4}. \quad (25.13)$$

Здесь n — число рассекаемых линий, $\text{Im} G_i$ — мнимая часть i -й рассекаемой линии, множители c_i даются формулами

$$c_i(z_i) = \begin{cases} c_+(z_i) = \text{ch} \frac{\beta z_i}{2} & \text{для ферми-линии,} \\ c_-(z_i) = \text{sh} \frac{\beta z_i}{2} & \text{для бозе-линии.} \end{cases} \quad (25.14)$$

Под знаком δ -функций в (25.13) ε , k — соответственно внешняя энергия и внешний импульс. Наконец, A в (25.13) — выражение для части диаграммы слева, B^* — справа от сечения.

Сечение принято изображать перечеркиванием линий диаграммы. Из определения (25.9) следует символическая формула для сечения двойной волнистой линии

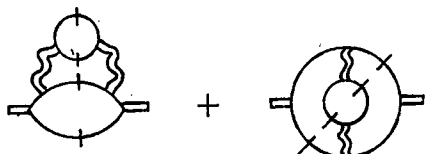


$$(25.15)$$

Сечения, рассекающие только две электронные линии, приводят к выражениям типа затухания Ландау. Они содержат множитель $\exp(-kr_D)^{-2}$ и при $k \rightarrow 0$ убывают быстрее любой степени k . Поэтому мы их не учитываем.

Обратимся к сечениям, рассекающим четыре электронные линии. Простейшие из них определяются диаграммами c' , d' , e' (25.11). Более сложные диаграммы, т. е. содержащие большее число линий взаимодействия, дают меньший вклад. То же самое можно сказать и о сечениях, рассекающих большее число электронных линий — шесть и т. д.

Главный вклад в мнимые части диаграмм c' , d' (25.11) дают сечения, рассекающие двойные волнистые линии. Используя (25.15), эти сечения можно записать в виде



$$(25.16)$$

Главный вклад в мнимую часть диаграммы e' (25.11) определяется сечением



$$(25.17)$$

не проходящим через волнистые линии.

Сумму вкладов сечений (25.16), (25.17) можно записать в виде

$$\Delta P(E, k) = \int AA^* \frac{(2\pi)^4}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta E}{2} \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + E) \times$$

$$\times \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4 + k) e^{\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} n_1 n_2 n_3 n_4 \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \times$$

$$\times \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_4}{(2\pi)^3}. \quad (25.18)$$

Здесь

$$AA^* = 2 |G_0^-(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)(h_1 + h_2 - h_3 - h_4) + (G_0^+(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}) - G_0^-(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3))(h_1 - h_3)|^2, \quad (25.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= k_i^2/2m - \lambda, \quad G_0 - \text{функция Грина (24.19),} \\ h_i &= (E + \varepsilon(\mathbf{k}_i) - \varepsilon(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}) + i0)^{-1}, \quad i = 1, 2 \\ &(E + \varepsilon(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}_i) + i0)^{-1}, \quad i = 3, 4, \end{aligned} \right\} \quad (25.20)$$

$n_i = (\exp(\beta\varepsilon_i) + 1)^{-1}$ — фермиевская функция распределения. В формуле (25.18) интегрируем по области $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3| < k_0$.

Часть затухания, определяемая выражением (25.18), дается формулой

$$\Delta\gamma = \frac{2\pi e^2 \omega_0}{k^2} \Delta P(\omega_0, \mathbf{k}). \quad (25.21)$$

Интеграл (25.18) описывает неупругое рассеяние на малые углы частиц с функцией распределения $n(\varepsilon)$. Поэтому затухание (25.21) называется столкновительным.

Вычислим интеграл (25.18) для горячей бальцмановской плазмы с функцией распределения $n_i = \exp(-\beta\varepsilon_i)$. Введем новые переменные

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad \mathbf{p} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4. \quad (25.22)$$

В этих переменных выражение для $\Delta P(\omega_0, \mathbf{k})$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta P(\omega_0, \mathbf{k}) &= \frac{\beta\omega_0 \exp(2\beta\lambda)}{8(2\pi)^8} \int_{\mathbf{p} < k_0} AA^* \delta\left(\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}}{m} + \omega_0\right) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\beta P^2}{m} - \frac{\beta(p^2 + q^2)}{4m}\right) d\mathbf{p}d\mathbf{p}d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (25.23)$$

Выражение для столкновительного затухания, полученное в работе [11], соответствует отбрасыванию второго слагаемого под знаком модуля в (25.19) и замене $h_i \rightarrow \left(E - \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}}{m}\right)^{-1}$ в (25.20). Использование более точного выражения для AA^* приводит к появлению постоянной составляющей затухания порядка $\omega_0 N_D^{-1}$ и к изменению логарифмического члена в выражении для затухания порядка $(kr_D)^2 \omega_0 N_D^{-1} \ln \Lambda$.

Покажем, что член, пропорциональный k^2 , имеет вид

$$\psi = k^2 \frac{8e^2}{15(\pi m T)^{1/2}} \ln \Lambda, \quad (25.24)$$

где

$$\ln \Lambda = \ln \frac{T}{\omega_0} + a \quad (25.25)$$

есть так называемый «кулоновский логарифм», в котором a — «за-логарифмический член» — безразмерная постоянная, для которой можно получить выражение в виде конечнократного интеграла.

Ограничимся вычислением постоянной составляющей затухания порядка $\omega_0 N_D^{-1}$. Она определяется членом, пропорциональным k^2 в AA^* :

$$2 \left(\frac{kP}{m\omega_0^2} \right)^2 \left| G_0^+ \left(\frac{pP}{m} + \frac{\omega_0}{2}, p \right) - G_0^- \left(\frac{pP}{m} - \frac{\omega_0}{2}, p \right) \right|^2. \quad (25.26)$$

Часть затухания, определяемая им, имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \omega_0 \frac{4\pi e^2}{(m\omega_0^2)^2} \frac{\beta\omega_0 \exp(2\beta\lambda)}{8(2\pi)^8} \int (np)^2 |G_0^+ - G_0^-|^2 \delta \left(\frac{pq}{m} + \omega_0 \right) \times \\ \times \exp \left(-\beta \left(\frac{p^2}{m} + \frac{p^2 + q^2}{4m} \right) \right) d^3 P d^3 p d^3 q, \end{aligned} \quad (25.27)$$

где $n = k/k$ — единичный вектор.

Интеграл по угловой части P легко считается

$$\begin{aligned} \int d^3 P \exp \left(-\frac{\beta P^2}{m} \right) \left| G_0^+ \left(\frac{pP}{m} + \frac{\omega_0}{2} \right) - G_0^- \left(\frac{pP}{m} - \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2 = \\ = \frac{\pi m}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dP \exp \left(-\frac{\beta P^2}{m} \right) \left| G_0^+ \left(\frac{pP}{m} + \frac{\omega_0}{2} \right) - \right. \\ \left. - G_0^- \left(\frac{pP}{m} - \frac{\omega_0}{2} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (25.28)$$

Интеграл по q легко вычисляется

$$\int d^3 q \delta \left(\frac{pq}{m} + \omega_0 \right) \exp \left(-\frac{\beta q^2}{4m} \right) = \frac{4\pi m^2}{\beta p} \exp \left(-\frac{1}{4(pr_D)^2} \right), \quad (25.29)$$

так же как и интеграл по угловой части p

$$\int d\Omega_p (np)^2 = \frac{4\pi p^2}{3}. \quad (25.30)$$

Используя формулу

$$\rho = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \exp(-\beta \epsilon) = \exp(\beta\lambda) \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2}, \quad (25.31)$$

получим

$$\gamma_1 = \omega_0 \frac{1}{6\pi^{1/2}} \frac{e^2}{Tr_D} J_1, \quad (25.32)$$

$$\text{где } J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) \int_0^{\infty} ds s^2 \exp(-1/4s^2) \left| u^+ \left(\frac{x}{2^{1/2}} + \frac{1}{2^{3/2}s}, s^2 \right) - u^- \left(\frac{x}{2^{1/2}} - \frac{1}{2^{3/2}s}, s^2 \right) \right|^2. \quad (25.33)$$

В этом интеграле мы перешли к безразмерным переменным $x = p/k_T$, $s = pr_D$, причем интегрирование по p с относительной точностью порядка $(k_0 r_D)^{-2}$ можно распространить до бесконечности:

$$\left. \begin{aligned} u^{\pm}(z, s^2) &= (s^2 + \varphi(z) \pm i\chi(z))^{-1}; \\ \varphi(z) &= 1 - 2z \exp(-z^2) \int_0^z \exp(t^2) dt; \quad \chi(z) = \pi^{1/2} z \exp(-z^2). \end{aligned} \right\} \quad (25.34)$$

Кроме вычисленной столкновительной части затухания (25.32) часть затухания, определяемая сечением



в котором рассекаются две плазменные линии, также постоянна в пределе $k \rightarrow 0$.

При вычислении получаем следующее выражение для затухания

$$\gamma_2 = \frac{\omega_0}{6(2\pi)^2} \frac{e^2}{Tr_D} J_2, \quad (25.36)$$

$$\text{где } J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z(z+1)} \int_0^{\infty} ds s^4 \Delta u \left(\frac{z}{s\sqrt{2}}, s^2 \right) \Delta u \left(\frac{z+1}{s\sqrt{2}}, s^2 \right) \times \left| c \left(\frac{z}{s\sqrt{2}} \right) - c \left(\frac{z+1}{s\sqrt{2}} \right) \right|^2, \quad (25.37)$$

$$\Delta u = u^+ - u^-, \quad c(x) = 2(\varphi(x) + i\chi(x)). \quad (25.38)$$

Здесь $z = z_1/\omega_0$, $s = k_1 r_D$ — безразмерные переменные. Интегрирование по s с относительной точностью порядка $(k_0 r_D)^{-2}$ распространено до бесконечности.

Итак, затухание плазменных колебаний в модели однокомпонентной плазмы имеет постоянный длинноволновый предел

$$\lim_{k \rightarrow 0} \gamma(\mathbf{k}) = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (25.39)$$

где γ_1 , γ_2 определяются формулами (25.32), (25.36) соответственно.

Изложенный в этой главе метод построения функционала гидродинамического действия и теория затухания длинноволновых плазменных колебаний обобщаются и на более реалистическую модель двухкомпонентной электрон-ионной плазмы.

МОДЕЛЬ ИЗИНГА

§ 26. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА МОДЕЛИ ИЗИНГА
КАК КONTИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Двумерная модель Изинга — одна из немногих нетривиальных моделей статистической физики, испытывающих фазовый переход второго рода и в то же время допускающих точное решение.

Первое решение двумерной модели Изинга получил Онзагер [113], вычислив свободную энергию системы в пределе бесконечного объема. Впоследствии результат Онзагера был получен различными методами некоторыми авторами [114—120]. Все используемые методы достаточно громоздки и многие не могут считаться вполне строгими.

В этой главе будут выведены формулы для статистической суммы и корреляционной функции конечной двумерной модели Изинга с использованием формализма континуального интегрирования по антикоммутирующим ферми-полям. При этом использованы некоторые результаты работы А. А. Молоканова [121].

Для расчета статистической суммы в пределе бесконечного объема континуальный интеграл применялся в работах Ф. А. Березина [122] и Е. С. Фрадкина [123].

Напомним определение модели Изинга. Рассмотрим плоскую квадратную решетку размером $L \times L$, узлы которой занумерованы индексом (k, l) , где k — номер строки; l — номер столбца, $1 \leq k, l \leq L$, $L^2 = N$ есть число узлов решетки.

Сопоставим узлам решетки спиновые переменные s_{kl} , принимающие два значения ± 1 . Наложим периодические граничные условия

$$s_{kl} = s_{k+L, l} = s_{k, l+L}, \quad (26.1)$$

которые придают решетке топологию тора. Состояние $\{s\}$ спиновой системы определяется набором значений N спиновых переменных. Будем рассматривать систему с гамильтонианом

$$H_N(s) = -g \sum_{k,l} (s_{kl} s_{k, l+1} + s_{kl} s_{k+1, l}). \quad (26.2)$$

Это выражение удобно интерпретировать как энергию взаимодействия спинов, причем взаимодействуют только ближайшие соседи с постоянной взаимодействия g .

Статистическая сумма модели Изинга с гамильтонианом (26.2) определяется формулой

$$Z_N = \sum_s \exp[-\beta H_N(s)] = \sum \exp \left\{ x \sum_{kl} (s_{kl} s_{k, l+1} + s_{kl} s_{k+1, l}) \right\}, \quad (26.3)$$

в которой β — обратная температура; $x = \beta g$; \sum_s означает сумму по 2^N спиновым состояниям.

Перепишем выражение (26.3) в виде

$$\sum_s \prod \exp(x s_{kl} s_{k' l'}) \quad (26.4)$$

как сумму произведений, каждый сомножитель которых соответствует определенной паре ближайших соседей или, как будем говорить, одной связи. Всего в решетке $2N$ связей — N вертикальных (им соответствуют пары $k, l; k, l+1$) и N горизонтальных (им соответствуют пары $k, l; k+1, l$).

Представим множитель, соответствующий одной связи, в виде

$$\begin{aligned} \exp(x s_{kl} s_{k' l'}) &= \text{ch}(x s_{kl} s_{k' l'}) + \text{sh}(x s_{kl} s_{k' l'}) = \\ &= \text{ch } x + s_{kl} s_{k' l'} \text{sh } x = \text{ch } x (1 + s_{kl} s_{k' l'} \text{th } x). \end{aligned} \quad (26.5)$$

Вынеся $(\text{ch } x)^{2N}$ за знак суммы, получим

$$Z_N = (\text{ch } x)^{2N} \sum_s \prod (1 + s_{kl} s_{k' l'} \text{th } x). \quad (26.6)$$

Перемножив произведение по связям, представим статистическую сумму в виде

$$(\text{ch } x)^{2N} \sum_s \sum_{n_1, \dots, n_{2N}=0}^1 \prod_{j=1}^{2N} (s_{kl} s_{k' l'})^{n_j} (\text{th } x)^{n_j}. \quad (26.7)$$

Здесь каждый индекс n_j ($j = 1, \dots, 2N$) пробегает два значения: 0 или 1.

Сопоставим каждому члену $\prod_{j=1}^{2N} (s_{kl} s_{k' l'})^{n_j} (\text{th } x)^{n_j}$ диаграмму на решетке, проводя линию вдоль связи, если $n_j = 1$, и не проводя, если $n_j = 0$.

При суммировании по спиновым переменным $s_{kl} = \pm 1$ члены суммы в (26.7), содержащие хотя бы одну переменную s_{kl} в нечетной степени, исчезают, а члены, содержащие все спиновые переменные в четной степени, умножаются на число состояний 2^N .

Таким образом,

$$Z_N = 2^N (\text{ch } x)^{2N} S_N, \quad (26.8)$$

где S_N можно рассматривать как сумму по всем диаграммам, в каждом узле которых сходится четное число отрезков (0, 2 или 4). Вклад

каждой такой диаграммы в S_N есть $(thx)^l$, где l — число связей диаграммы.

Вычисление суммы вкладов указанных диаграмм — наиболее трудоемкая часть вычисления статистической суммы модели Изинга.

Начнем с замены каждого узла решетки, в котором сходятся четыре линии, тремя узлами

$$\begin{array}{c} | \\ \bullet \\ | \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array} + \begin{array}{c} b \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array} + \begin{array}{c} c \\ \text{---} \\ | \end{array} \quad (26.9)$$

В узлах a, b устранены пересечения линий, а в узле c есть пересечение вертикальной и горизонтальной линий. Можно перейти к суммированию по диаграммам с узлами a, b, c , если узлы a, b учитывать с положительным знаком, а узлы типа c — с отрицательным.

Каждая из новых диаграмм состоит из нескольких замкнутых петель, проходящих по связям решетки. Вклад каждой диаграммы есть

$$(-1)^n (thx)^l, \quad (26.10)$$

где n — число пересечений линий диаграммы. Ясно, что

$$n = \Gamma + \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}, \quad (26.11)$$

где γ_{α} — число самопересечений петель, входящих в диаграмму; Γ — число пересечений между различными петлями. Для петель на плоскости Γ всегда четно, и $(-1)^{\Gamma} = 1$. Для петель на торе это уже не так.

В результате получаем выражение для S_N

$$S_N = \sum (-1)^{\Gamma} \prod_{\alpha} (-1)^{\gamma_{\alpha}} (thx)^{l_{\alpha}}, \quad (26.12)$$

где \sum есть сумма по диаграммам; \prod_{α} — произведение по циклам, образующим диаграмму; l_{α} — число связей, образующих петлю α . Так как каждая линия диаграммы однократна, то каждая петля не имеет общих связей ни с другими петлями, ни с самой собой. Это значит, что не надо учитывать диаграммы

$$\begin{array}{cc} \square \square & \square \square \end{array} \quad (26.13)$$

Преобразуем выражения для чисел γ_{α}, Γ в (26.12). Было уже сказано, что граничные условия (26.1) позволяют рассматривать решетку как решетку на торе. Все замкнутые петли на торе разделяются на гомотопические классы, которые будем обозначать символом $[m, n]$. Петля класса $[m, n]$ совершает m полных оборотов в горизон-

тальном направлении и n — в вертикальном. Для неориентированных петель символы $[m, n]$ и $[-m, -n]$ означают один и тот же класс. Класс $[0, 0]$ образован петлями, которые непрерывной деформацией можно стянуть в точку.

Число попарных пересечений нескольких петель есть

$$\sum_{i \neq j} m_i n_j \pmod{2}, \quad (26.14)$$

где m_i — индекс i -й петли; n_j — индекс j -й петли. Поэтому

$$(-1)^{\Gamma} = (-1)^{\sum_{i \neq j} m_i n_j}. \quad (26.15)$$

Известно, что полный угол поворота касательного вектора при обходе замкнутой петли α на плоскости (или петли класса $[0, 0]$ на торе) равен $2\pi(l+1)$, где целое число l совпадает по четности с числом самопересечений ν_α петли α . Сопоставим каждому узлу петли α , в котором петля поворачивает на угол φ ($\varphi = 0, \pm \frac{\pi}{2}$), множитель $\exp(i\varphi/2)$ (множитель Каца — Уорда). Произведение этих множителей после обхода петли дает

$$\prod_{\alpha} \exp(i\varphi/2) = (-1)^{l+1} = (-1)^{\nu_\alpha+1}. \quad (26.16)$$

так что

$$(-1)^{\nu_\alpha} = - \prod_{\alpha} \exp(i\varphi/2). \quad (26.17)$$

Обобщение этой формулы для петли класса $[m, n]$ имеет вид

$$(-1)^{\nu_\alpha} = (-1)^{mn+m+n+1} \prod_{\alpha} \exp(i\varphi/2). \quad (26.18)$$

С учетом (26.15) и (26.18) выражение (26.12) для S_N можно представить в виде

$$S_N = \sum_{\alpha} (-1)^{\binom{\sum m_\alpha}{\alpha} \binom{\sum n_\alpha}{\alpha}} \prod_{\alpha} (-1)^{m_\alpha+n_\alpha+1} \left(\prod \exp(i\varphi/2) \right) (\text{th } x)^{\nu_\alpha}. \quad (26.19)$$

Воспользуемся тождеством

$$(-1)^{mn} = \frac{1}{2} (1 + (-1)^m + (-1)^n - (-1)^{m+n}), \quad (26.20)$$

в которое подставим $m = \sum_{\alpha} m_\alpha$, $n = \sum_{\alpha} n_\alpha$. Это дает возможность записать S_N в виде

$$S_N = \frac{1}{2} (S_N^{(1)} + S_N^{(2)} + S_N^{(3)} - S_N^{(4)}), \quad (26.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_N^{(1)} &= \sum_{\alpha} \prod (-1)^{m_{\alpha} + n_{\alpha} + 1} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \prod \exp(i\varphi/2); \\ S_N^{(2)} &= \sum_{\alpha} \prod (-1)^{n_{\alpha} + 1} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \prod \exp(i\varphi/2); \\ S_N^{(3)} &= \sum_{\alpha} \prod (-1)^{m_{\alpha} + 1} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \prod \exp(i\varphi/2); \\ S_N^{(4)} &= \sum_{\alpha} \prod (-1) (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \prod \exp(i\varphi/2). \end{aligned} \right\} (26.22)$$

Здесь оказывается удобным представить квадрат каждой из величин $(S_N^{(i)})^2$ как гауссов континуальный интеграл по антикоммутирующим переменным.

Возведение $S_N^{(i)}$ в квадрат можно интерпретировать как переход от неориентированных петель к ориентированным. Например,

$$(S_N^{(1)})^2 = \sum_{\alpha} \prod \left\{ (-1)^{m_{\alpha} + n_{\alpha} + 1} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \prod \exp(i\varphi/2) \right\}, \quad (26.23)$$

где \prod_{α} — произведение по всем *ориентированным* петлям, не имеющим общих одинаково ориентированных связей. Индексы m_{α} , n_{α} пробегает все целые положительные и отрицательные числа.

Представим знаковый множитель $(-1)^{m_{\alpha} + n_{\alpha}}$ в виде

$$(-1)^{m_{\alpha} + n_{\alpha}} = \prod \exp[(i\pi/L)(\Delta x + \Delta y)], \quad (26.24)$$

где \prod — произведение по последовательным узлам решетки при обходе ориентированной петли α , в котором Δx , Δy — выраженное в единицах длины решетки приращение координат x и y при переходе от середины связи, предшествующей данному узлу, к середине связи, следующей за данным узлом. Например,

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \bullet \longrightarrow \quad \Delta x = 1, \Delta y = 0; \quad \longrightarrow \uparrow \quad \Delta x = \frac{1}{2}, \Delta y = \frac{1}{2} \end{array} \quad (26.25)$$

Аналогичные представления

$$(-1)^{n_{\alpha}} = \prod \exp[(i\pi/L)\Delta y]; \quad (-1)^{m_{\alpha}} = \prod \exp[(i\pi/L)\Delta x] \quad (26.26)$$

существуют для знаковых множителей в $S_N^{(2)}$, $S_N^{(3)}$.

Объединив произведение (26.24) с $\prod \exp(i\varphi/2)$, запишем (26.23) в виде

$$(S_N^{(1)})^2 = \sum_{\alpha} \prod \left\{ (-1) (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \prod \exp \left(\frac{i\pi}{L} (\Delta x + \Delta y) + \frac{i\varphi}{2} \right) \right\}. \quad (26.27)$$

Именно это выражение оказывается возможным записать в виде континуального интеграла. Сопоставим каждой ориентированной связи пару взаимно сопряженных ферми-полей c, c^* :

$$\left. \begin{array}{ll}
 \begin{array}{c} mn \\ \bullet \text{---} \end{array} & c_1(m, n), \quad c_1^*(m, n); \\
 \begin{array}{c} \text{---} \bullet \\ mn \end{array} & c_2(m, n), \quad c_2^*(m, n); \\
 \begin{array}{c} | \\ \bullet mn \end{array} & c_3(m, n), \quad c_3^*(m, n); \\
 \begin{array}{c} \bullet mn \\ | \end{array} & c_4(m, n), \quad c_4^*(m, n);
 \end{array} \right\} (26.28)$$

Покажем, что выражения (26.27) можно представить в виде гауссова континуального интеграла по $8N$ переменным (26.27):

$$\int \exp(-c^* \hat{C} c) dc^* dc. \quad (26.29)$$

Здесь

$$dc^* dc = \prod_{m, n, i} dc_i^*(m, n) dc_i(m, n) \quad (26.30)$$

есть мера континуального интегрирования; $c^* \hat{C} c$ — квадратичная форма вида

$$c^* \hat{C} c = \sum_{m, n} c_i^*(m, n) \hat{C}_{ij} c_l(m, n), \quad (26.31)$$

где \hat{C} — матричный оператор:

$$\hat{C} = I - \text{th } x \hat{A}, \quad (26.32)$$

причем I — четырехмерная единичная матрица; \hat{A} — оператор вида

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{L} + \frac{d}{dm}} & 0 & e^{\frac{i\pi}{L} + \frac{i\pi}{4} + \frac{d}{dm}} & e^{-\frac{i\pi}{4} + \frac{d}{dm}} \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{L} - \frac{d}{dm}} & e^{-\frac{i\pi}{4} - \frac{d}{dm}} & e^{-\frac{i\pi}{L} + \frac{i\pi}{4} - \frac{d}{dm}} \\ e^{\frac{i\pi}{L} - \frac{i\pi}{4} + \frac{d}{dn}} & e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{d}{dn}} & e^{\frac{i\pi}{L} + \frac{d}{dn}} & 0 \\ e^{\frac{i\pi}{4} - \frac{d}{dn}} & e^{-\frac{i\pi}{L} - \frac{i\pi}{4} - \frac{d}{dn}} & 0 & e^{-\frac{i\pi}{L} - \frac{d}{dn}} \end{pmatrix} \quad (26.33)$$

Здесь $\exp\left(\pm \frac{d}{dm}\right)$, $\exp\left(\pm \frac{d}{dn}\right)$ — операторы сдвига, действующие по правилу

$$\left. \begin{aligned} \exp\left(\pm \frac{d}{dm}\right) c_i(m, n) &= c_i(m \pm 1, n); \\ \exp\left(\pm \frac{d}{dn}\right) c_i(m, n) &= c_i(m, n \pm 1). \end{aligned} \right\} \quad (26.34)$$

Для доказательства того, что $(S_N^{(j)})^2$ представляется континуальным интегралом (25.30), заметим сначала, что квадратичную форму

$$\text{th } xc^* \hat{A} c = \text{th } x \sum_{m, n, i, j} c_i^*(m, n) \hat{A}_{ij}(m, n) \quad (26.35)$$

можно интерпретировать графически как сумму вкладов по всевозможным способам перехода от одной направленной связи к соседней направленной связи:

(26.36)

При этом стрелке, выходящей из узла (m, n) , соответствует ферми-поле $c_i^*(m, n)$, где индекс $i = 1, 2, 3, 4$ определяется направлением выходящей стрелки — налево, направо, вверх или вниз. Стрелке, входящей в узел (m, n) , соответствует поле $c_j(m', n')$, где индекс j определяется направлением входящей стрелки, а (m', n') — координаты узла, соседнего с (m, n) , из которого можно прийти в (m, n) , двигаясь по стрелке. Коэффициент при $c_i^*(m, n) c_j(m', n')$

$$\text{th } x \exp\left(\frac{i\varphi}{2} + \frac{i\pi}{L}(\Delta x + \Delta y)\right) \equiv z_{mni j} \quad (26.37)$$

есть произведение $\text{th } x$ на множитель, фигурирующий во внутреннем произведении формулы (26.27).

Интеграл (26.29) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \int dc^* dc \exp(-c^* c) \prod_{mni j} \exp(z_{mni j} c_i^*(m, n) c_j(m', n')) = \\ & = \int dc^* dc \exp(-c^* c) \prod_{mni j} (1 + z_{mni j} c_i^*(m, n) c_j(m', n')), \end{aligned} \quad (26.38)$$

где

$$c^* c \equiv \sum_{m, n, i} c_i^*(m, n) c_i(m, n). \quad (26.39)$$

Раскрыв произведение $\Pi (1 + zc^*c)$, сведем задачу к вычислению интегралов типа

$$\int \exp(-c^*c) (c^*c) (c^*c), \dots, (c^*c) dc^* dc \quad (26.40)$$

от произведений пар ферми-полей c^*c с весом $\exp(-c^*c)$. Если среди полей c или c^* имеются хотя бы два одинаковых, интеграл равен нулю. Интеграл (26.40) отличен от нуля, если графические элементы, сопоставленные согласно (26.36) парам c^*c , образуют один или несколько замкнутых петель из ориентированных связей, причем петли не имеют общих одинаково ориентированных связей. Другими словами, получаются те же петли, которые учтены в формуле (26.27). Так как при каждой паре c^*c стоит множитель z_{mni} (26.37), а интеграл (26.40) равен $(-1)^f$, где f — число независимых петель, то для интеграла (26.29) получаем выражение

$$\sum_{\alpha} \prod \{(-1) \prod z_{mni}\}, \quad (26.41)$$

совпадающее, очевидно, с (26.27). Тем самым представление $(S_N^f)^{\alpha}$ континуальным интегралом (26.29) доказано.

Для вычисления интеграла (26.29) перейдем от переменных c^* , c к их фурье-представлениям по формулам

$$\left. \begin{aligned} c_i(m, n) &= \frac{1}{L} \sum_{1 \leq p, q \leq L} a_i(p, q) \exp \frac{2\pi i}{L} (mp + nq); \\ c_i^*(m, n) &= \frac{1}{L} \sum_{1 \leq p, q \leq L} a_i^*(p, q) \exp \left(-\frac{2\pi i}{L} (mp + nq) \right), \end{aligned} \right\} \quad (26.42)$$

осуществляющим унитарное преобразование. При этом

$$\sum_{m, n, i} c_i^*(m, n) c_i(m, n) = \sum_{p, q, i} a_i^*(p, q) a_i(p, q); \quad (26.43)$$

$$\sum_{m, n, i, j} c_i^*(m, n) \hat{A}_{ij} c_j(m, n) = \sum_{p, q, i, j} a_i^*(p, q) A_{ij}(p, q) a_j(p, q), \quad (26.44)$$

где $A_{ij}(p, q)$ образует матрицу, получаемую из оператора \hat{A} заменой

$$\left. \begin{aligned} \exp \left(\pm \frac{d}{dm} \right) &\rightarrow \exp \left(\pm 2\pi i \frac{p}{L} \right); \\ \exp \left(\pm \frac{d}{dn} \right) &\rightarrow \exp \left(\pm 2\pi i \frac{q}{L} \right). \end{aligned} \right\} \quad (26.45)$$

В переменных a, a^* квадратичная форма $c^* \hat{C} c$ представляется в виде суммы квадратичных форм от $a_i^*(p, q), a_j(p, q)$:

$$\sum_{p, p} \sum_{ij} (\delta_{ij} - \text{th } x A_{ij}(p, q)) a_i^*(p, q) a_j(p, q). \quad (26.46)$$

Интеграл (26.29) сводится к произведению интегралов

$$\begin{aligned} & \prod_{p, q} \int \prod_i da_i^*(p, q) da_i(p, q) \times \\ & \times \exp \left\{ - \sum_{ij} (\delta_{ij} - \text{th } x A_{ij}(p, q)) a_i^*(p, q) a_j(p, q) \right\} = \\ & = \prod_{p, q} \det (I - \text{th } x \hat{A}(p, q)), \end{aligned} \quad (26.47)$$

где $\det (I - \text{th } x \hat{A}(p, q))$ есть определитель четырехмерной матрицы, равный

$$\begin{aligned} & (1 + \text{th}^2 x)^2 - 2 \text{th } x (1 - \text{th}^2 x) \times \\ & \times \left(\cos \frac{\pi}{L} (2p - q) + \cos \frac{\pi}{L} (2q - 1) \right). \end{aligned} \quad (26.48)$$

Величину

$$\begin{aligned} S_N^{(1)} = \prod_{p, q} & \left[(1 + \text{th}^2 x)^2 - 2 \text{th } x (1 - \text{th}^2 x) \left(\cos \frac{\pi}{L} (2p - 1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos \frac{\pi}{L} (2q - 1) \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (26.49)$$

получим, извлекая из (26.47) корень таким образом, чтобы получалось выражение, стремящееся к 1 в пределе $x \rightarrow 0$. Аналогично получают формулы

$$\begin{aligned} S_N^{(2)} = S_N^{(3)} = \prod_{p, q} & \left[(1 + \text{th}^2 x)^2 - \right. \\ & \left. - 2 \text{th } x (1 - \text{th}^2 x) \left(\cos \frac{\pi}{L} (2p - 1) + \cos \frac{2\pi q}{L} \right) \right]^{1/2}; \\ S_N^{(4)} = \prod_{p, q} & \left[(1 + \text{th}^2 x)^2 - 2 \text{th } x (1 - \text{th}^2 x) \times \right. \\ & \left. \times \left(\cos \frac{2\pi}{L} p + \cos \frac{2\pi}{L} a \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (26.50)$$

Окончательный ответ для статистической суммы конечной двумерной модели Изинга имеет вид

$$Z_N = 2^{N-1} (\text{ch } x)^{2N} (S_N^{(1)} + S_N^{(2)} + S_N^{(3)} - S_N^{(4)}). \quad (26.51)$$

Рассмотрим выражение (26.51) в пределе $N \rightarrow \infty$. С этой целью запишем величины $(S_N^{(j)})^2$ в виде

$$\left. \begin{aligned} (S_N^{(1)})^2 &= \exp \left\{ -\frac{N}{2\pi^2} \oint \frac{dz_1}{z_1} \frac{1}{1+z_1^L} \oint \frac{dz_2}{z_2} \frac{\ln f(z_1, z_2)}{1+z_2^L} \right\}; \\ (S_N^{(2)})^2 &= (S_N^{(3)})^2 = \exp \left\{ -\frac{N}{4\pi^2} \oint \frac{dz_1}{z_1} \frac{1}{1+z_1^L} \oint \frac{dz_2}{z_2} \frac{\ln f(z_1, z_2)}{1+z_2^L} \right\}; \\ (S_N^{(4)})^2 &= \exp \left\{ -\frac{N}{4\pi^2} \oint \frac{dz_1}{z_1} \frac{1}{1-z_1^L} \oint \frac{dz_2}{z_2} \frac{\ln f(z_1, z_2)}{1-z_2^L} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (26.52)$$

где

$$f(z_1, z_2) = (1 + \operatorname{th}^2 x)^2 - 2 \operatorname{th} x (1 - \operatorname{th}^2 x) (z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1}), \quad (26.53)$$

а контур Γ состоит из двух окружностей $|z_i| = 1 \pm \delta$ ($i = 1, 2$) с достаточно малым $\delta > 0$, причем внешняя из них обходится в положительном направлении, а внутренняя — в отрицательном. Интегралы по Γ сводятся к суммам вычетов в корнях полиномов $1 \pm z_1^L$, $1 \pm z_2^L$. Это возвращает нас к (26.49), (26.50) и тем самым доказывает формулы (26.52).

Из разложений

$$\left. \begin{aligned} (1 \pm z^L)^{-1} &= 1 \mp z^L + z^{2L} \mp z^{3L} + \dots \quad |z| < 1; \\ (1 \pm z^L)^{-1} &= \pm z^{-L} - z^{-2L} \pm z^{-3L} + \dots \quad |z| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (26.54)$$

ясно, что при $L \gg 1$ главный вклад в интегралы по Γ дает 1 в первом из разложений (26.55), а остаток есть величина порядка $L^2 \exp(-\alpha L)$. В этом можно убедиться, расширяя большую и сжимая меньшую окружности до их пересечения с особенностями функции $\ln f(z_1, z_2)$. Величина α определяется расстоянием от единичной окружности до особенностей функции $\ln f(z_1, z_2)$. Функция $f(z_1, z_2)$ строго положительна при всех $|z_1| = |z_2| = 1$ для всех x , кроме $|x| = x_c$, где

$$\operatorname{th} x_c = \sqrt{2} - 1. \quad (26.55)$$

При $x = x_c$ $f(z_1, z_2)$ обращается в нуль при $z_1 = z_2 = 1$, а при $x = -x_c$ — при $z_1 = z_2 = -1$.

Из сказанного следует асимптотическая формула

$$\left. \begin{aligned} (S_N^{(j)})^2 &= \exp \left\{ \frac{N}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dx_1 \int_0^{2\pi} dx_2 \ln f(\exp(i x_1), \exp(i x_2)) + \right. \\ &\quad \left. + O(L^2 \exp(-\alpha L)) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (26.56)$$

верная при всех x , кроме $|x| = x_c$, причем O -оценка равномерна при $||x| - x_c| > \varepsilon$.

Если постоянная g в гамильтониане (26.2) положительна (случай притяжения), физической областью изменения параметра $x = \beta g$ служит положительная полуось $x > 0$. При $x = x_c$ выражение $S_N^{(j)}$ меняет знак, так как сомножитель в Π с $p = q = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} & [(1 + \operatorname{th}^2 x)^2 - 4 \operatorname{th} x (1 - \operatorname{th}^2 x)]^{1/2} = \\ & = (\sqrt{2} + 1 + \operatorname{th} x)(\sqrt{2} - 1 - \operatorname{th} x). \end{aligned} \quad (26.57)$$

Остальные величины $S_N^{(i)}$ $i = 1, 2, 3$ остаются положительными при всех $x > 0$. Поэтому получаются следующие асимптотические формулы:

$$\left. \begin{aligned} Z_N(x < x_c) &= Z_{0 \text{ нз}} (1 + O(1)); \\ Z_N(x > x_c) &= 2 Z_{0 \text{ нз}} (1 + O(1)), \end{aligned} \right\} \quad (26.58)$$

где выражение

$$\begin{aligned} & Z_{0 \text{ нз}} = 2^N (\operatorname{ch} x)^{2N} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{N}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dx_1 dx_2 \ln f(\exp(i x_1), \exp(i x_2)) \right\} \end{aligned} \quad (26.59)$$

называют обычно статистической суммой Онзагера. Следующее из (26.58), (26.59) выражение для предельной свободной энергии на один спин

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N}{N} = -\frac{1}{\beta} \left\{ \ln 2 + 2 \ln \operatorname{ch} x + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dx_1 dx_2 \ln [(1 + \operatorname{th}^2 x)^2 - \right. \\ & \left. - 2 \operatorname{th} x (1 - \operatorname{th}^2 x) (\cos x_1 + \cos x_2)] \right\} \end{aligned} \quad (26.60)$$

было впервые получено Онзагером [113].

При $x = x_c$ выражение (26.60) имеет неаналитическую особенность, возникающую из-за обращения в нуль выражения под логарифмом при $x_1 = x_2 = 0$. Соответствующая температура

$$T_c = \frac{1}{\beta_c} = \frac{g}{x_c}$$

интерпретируется как температура фазового перехода.

Отметим, что при $T < T_c$ в асимптотических формулах (26.58) перед $Z_{0 \text{ нз}}$ появляется множитель 2. Это соответствует тому, что система стремится находиться в одном из двух возможных состояний с наименьшей энергией — с параллельными спинами для ферро-

магнитной системы ($g > 0$) и с антипараллельными в антиферромагнитных системах ($g < 0$). Множитель 2 не влияет на термодинамический предел (26.60) для свободной энергии F .

Заметим в заключение, что изложенный в этом параграфе метод можно применять для произвольных плоских решеток без пересекающихся связей.

§ 27. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА

Метод, развитый выше для вычисления статистической суммы двумерной модели Изинга, можно использовать и для нахождения корреляционных функций. Для простоты рассмотрим парную корреляционную функцию двух спинов, находящихся на одной строке решетки:

$$G_N(r) = Z_N^{-1} \sum_s s_{kl} s_{k, l+r} \exp \left\{ x \sum_{kl} (s_{kl} s_{k+1, l} + s_{kl} s_{k, l+1}) \right\}. \quad (27.1)$$

Здесь Z_N — вычисленная выше статистическая сумма.

Используя формулу (26.5) и вынеся $(\text{ch } x)^{2N}$ за знак суммы, сведем задачу к вычислению выражения

$$\sum_s s_{kl} s_{k, l+2} \Pi (1 + \text{th } x s_{kl} s_{k, l'}), \quad (27.2)$$

в котором произведение взято по всем связям решетки. Раскрыв произведение и просуммировав по спиновым переменным s_{kl} , представим (27.2) как произведение числа состояний 2^N на сумму вкладов диаграмм, отличающихся от диаграмм для статистической суммы тем, что в узлах (k, l) , $(k, l+r)$ сходится нечетное число линий (1 или 3). Это приводит к формуле

$$G_N(r) = S_N^{-1} g_N(r), \quad (27.3)$$

где S_N определено выше (26.8), а $g_N(r)$ есть сумма вкладов указанных диаграмм, каждый из которых есть $(\text{th } x)^l$, где l — число связей, образующих диаграмму.

Следующий шаг — переход к связным диаграммам. С этой целью заменим каждый узел, в котором сходятся 4 линии, тремя узлами по схеме (26.9). Узел, в котором сходятся 3 линии, заменим тремя узлами по схеме

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} b \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} c \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (27.4)$$

Узлам a, b сопоставим фактор 1, узлу c — фактор -1 . В результате величина $g_N(r)$ представляется суммой вкладов диаграмм, каждая из которых состоит из нескольких замкнутых петель и одной незамкнутой линии, соединяющей узлы (k, l) и $(k, l+r)$.

Вклад каждой диаграммы есть

$$(-1)^n (\text{th } x)^l, \quad (27.5)$$

где n — число пересечений линий диаграммы. Имеем

$$n = \Gamma + \gamma + \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}, \quad (27.6)$$

где γ_{α} — число самопересечений петли α , входящей в диаграмму; γ — число самопересечений незамкнутой линии; Γ — число взаимопересечений между различными связными компонентами.

Соединив выделенные узлы (k, l) , $(k, l + r)$ линией

$$\mu \quad (27.7)$$

выразим знаковые множители

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{\gamma_{\alpha}} &= (-1)^{m_{\alpha} n_{\alpha} + m_{\alpha} + n_{\alpha}} \text{П exp}(i\varphi/2); \\ (-1)^{\gamma} &= (-1)^{mn + m + n} \text{П exp}(i\varphi/2); \\ (-1)^{\Gamma} &= (-1)^{\sum_{i \neq j} m_i n_j + \sum_{\alpha} \nu_{\alpha}} \text{П exp}(i\varphi/2) \end{aligned} \right\} \quad (27.8)$$

через ν — число пересечений незамкнутой линии λ с линией μ ; ν_{α} — число пересечений петли α с линией μ и индексы m_{α} , n_{α} , m , n , дающие число полных обходов замкнутых петель и незамкнутой линии вокруг тора в горизонтальном и вертикальном направлениях. Учитывая (27.8), получаем

$$g_N(r) = \sum (-1)^{\sum_{\alpha} m_{\alpha} + m} \sum_{\alpha} (-1)^{\sum_{\alpha} n_{\alpha} + n} [(-1)^{m+n+1+\nu} (\text{th } x)^{l\lambda} \text{П exp}(i\varphi/2)] \times \prod_{\alpha} (-1)^{m_{\alpha} + n_{\alpha} + 1 + \nu_{\alpha}} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \text{П exp}(i\varphi/2). \quad (27.9)$$

Здесь Σ есть сумма по всем диаграммам указанной структуры; $\text{П exp}(i\varphi/2)$ — произведение множителей Каца — Уорда для замкнутых петель α или незамкнутой линии λ . Используя тождество (26.20), в котором заменим $m \rightarrow m + \sum_{\alpha} m_{\alpha}$, $n \rightarrow n + \sum_{\alpha} n_{\alpha}$, представим

$g_N(r)$ в виде

$$g_N(r) = \frac{1}{2} (g_N^{(1)}(r) + g_N^{(2)}(r) + g_N^{(3)}(r) - g_N^{(4)}(r)), \quad (27.10)$$

где

$$g_N^{(1)}(r) = \sum (-1)^{m+n+1+\nu} (\text{th } x)^{l\lambda} \text{П exp}(i\varphi/2) \times \prod_{\alpha} (-1)^{m_{\alpha} + n_{\alpha} + 1 + \nu_{\alpha}} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \text{П exp}(i\varphi/2);$$

$$\begin{aligned}
 g_N^{(2)}(r) &= \sum [(-1)^{n+v+1} (\text{th } x)^{l\lambda} \text{П exp } (i \varphi/2)] \times \\
 &\quad \times \prod_{\alpha} (-1)^{n_{\alpha}+1+v_{\alpha}} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \text{П exp } (i \varphi/2); \\
 g_N^{(3)}(r) &= \sum [(-1)^{m+1+v} (\text{th } x)^{l\lambda} \text{П exp } (i \varphi/2)] \times \\
 &\quad \times \prod_{\alpha} (-1)^{m_{\alpha}+1+v_{\alpha}} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \text{П exp } (i \varphi/2); \\
 g_N^{(4)}(r) &= \sum [(-1)^{v+1} (\text{th } x)^{l\lambda} \text{П exp } (i \varphi/2)] \times \\
 &\quad \times \prod_{\alpha} (-1)^{1+v_{\alpha}} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \text{П exp } (i \varphi/2).
 \end{aligned}
 \tag{27.11}$$

Следующий этап — написать выражения для квадратов $(g_N^{(i)}(r))^2$ и интерпретировать их в терминах ориентированных диаграмм. При этом произведение вкладов от незамкнутых линий можно сопоставить замкнутой петле, проходящей через две выделенные точки решетки (k, l) и $(k, l+r)$.

Приведем выражение для $(g_N^{(1)}(r))^2$:

$$\begin{aligned}
 (g_N^{(1)}(r))^2 &= \sum [(-1)^{m+n+1+v} (\text{th } x)^l \text{П exp } (i \varphi/2)] \times \\
 &\quad \times \prod_{\alpha} (-1)^{m_{\alpha}+n_{\alpha}+1+v_{\alpha}} (\text{th } x)^{l_{\alpha}} \text{П exp } (i \varphi/2).
 \end{aligned}
 \tag{27.12}$$

Здесь Σ — знак суммы по всем ориентированным петлям, одна из которых проходит через две выделенных точки решетки. Формулы для $(g_N^{(i)})^2$ $i = 2, 3, 4$ можно получить из (27.12) заменой знаковых множителей $(-1)^{m+n}$ на $(-1)^n$, $(-1)^m$ или 1, $(-1)^{m_{\alpha}+n_{\alpha}}$ на $(-1)^{n_{\alpha}}$, $(-1)^{m_{\alpha}}$ или 1.

Выражение (27.12) можно представить в виде континуального интеграла по введенным выше (26.28) ферми-полям $c_i(m, n)$, $c_i^*(m, n)$, отличающимся от гауссова интеграла (26.29) в двух пунктах:

1. Кроме экспоненты от квадратичной формы под знаком интеграла будет стоять произведение двух квадратичных форм ферми-полей, соответствующих двум выделенным узлам решетки.

2. Сама квадратичная форма отличается от определяемой формулами (26.31) — (26.33). Отличие объясняется существованием дополнительных знаковых множителей $(-1)^v$, $(-1)^{v_{\alpha}}$, учитывающих пересечение линий диаграммы с проведенной выше линией μ (27.7). Учет таких множителей достигается заменой

$$\hat{A} \rightarrow \hat{B} \equiv \hat{A} - 2\hat{A}\hat{P},
 \tag{27.13}$$

где \hat{A} — определенный выше матричный оператор (26.33), диагональный по индексам (m, n) ; \hat{P} — оператор проектирования на $r+1$ -связей, пересекаемых линией μ .

Представление $(g_N^{(1)}(r))^2$ континуальным интегралом имеет вид

$$(g_N^{(1)}(r))^2 = \int \exp(-c^* \hat{C}c) dc^* dc \times \\ \times \{ \langle D(k, l) D(k, l+r) \rangle - \langle D(k, l) \rangle \langle D(k, l+r) \rangle \}. \quad (27.14)$$

Здесь dc^*dc — мера интегрирования (26.30)

$$\hat{C} = I - \text{th } x \hat{B} \quad (27.15)$$

есть оператор квадратичной формы, знак $\langle \dots \rangle$ означает континуальное усреднение:

$$\langle X \rangle = \frac{\int X \exp(-c^* \hat{C}c) dc^* dc}{\int \exp(-c^* \hat{C}c) dc^* dc} \quad (27.16)$$

с весом $\exp(-c^* \hat{C}c)$; $D(k, l)$ — квадратичная форма:

$$D(k, l) = \sum_{ij} c_i^*(k, l) \hat{D}_{ij} c_j(k, l) \quad (27.17)$$

с матричным оператором

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \exp \frac{d}{dm} & 0 & \exp \left(\frac{i\pi}{4} + \frac{d}{dm} \right) & \exp \left(-\frac{i\pi}{4} + \frac{d}{dm} \right) \\ 0 & \exp \frac{d}{dm} & \exp \left(-\frac{i\pi}{4} - \frac{d}{dm} \right) & \exp \left(\frac{i\pi}{4} - \frac{d}{dm} \right) \\ \exp \left(-\frac{i\pi}{4} + \frac{d}{dm} \right) & \exp \left(\frac{i\pi}{4} + \frac{d}{dm} \right) & \exp \left(\frac{d}{dm} \right) & 0 \\ \exp \left(\frac{i\pi}{4} - \frac{d}{dm} \right) & \exp \left(-\frac{i\pi}{4} - \frac{d}{dm} \right) & 0 & \exp \left(-\frac{d}{dm} \right) \end{pmatrix} \quad (27.18)$$

в котором $\exp(\pm d/dm)$, $\exp(\pm d/dn)$ — операторы сдвига (26.34).

Для доказательства представления (27.14) рассмотрим выражение

$$\int \exp(-c^* \hat{C}c) dc^* dc \langle D(k, l) D(k, l+r) \rangle = \\ = \int D(k, l) D(k, l+r) \exp(-c^* \hat{C}c) dc^* dc. \quad (27.19)$$

Стоящий в правой части континуальный интеграл можно вычислять по теории возмущений, считая оператор $-\text{th } x \hat{B}$ в (27.15) поправкой к единичному оператору I . Возникающее при этом очевидное графическое представление дает диаграммы двух типов. Диаграмма первого типа состоит из нескольких замкнутых петель и одной петли,

проходящей через выделенные точки (k, l) , $(k, l + r)$. Именно эти диаграммы и дают вклад в выражение $(g_N^{(j)}(r))^2$. Диаграмма второго типа состоит из нескольких замкнутых петель, одной петли, проходящей через точку (kl) , и одной петли, проходящей через точку $(k, l + r)$. Нетрудно видеть, что вклад диаграмм второго типа дается выражением

$$\langle D(k, l) \rangle \langle D(k, l + r) \rangle \int \exp(-c^* \hat{C} c) dc^* dc, \quad (27.20)$$

входящим в (27.14) с отрицательным знаком. Это означает, что диаграммы второго типа не дают вклада в формулу (27.14). Тем самым представление (27.14) можно считать доказанным.

Выражения, входящие в (27.14), можно вычислить по формулам

$$\int \exp(-c^* \hat{C} c) dc^* dc = \det \hat{C}; \quad (27.21)$$

$$\begin{aligned} \langle D(k, l) D(k, l + r) \rangle - \langle D(k, l) \rangle \langle D(k, l + r) \rangle = \\ = \text{tr} \hat{D} \hat{C}^{-1}(k, l; k, l + r) \hat{D} \hat{C}^{-1}(k, l + r; k, l). \end{aligned} \quad (27.22)$$

В первой из них $\det \hat{C}$ есть определитель оператора, действующего в 4 N -мерном пространстве. Во второй знак tr означает след по матричным индексам i, j , пробегающим 4 значения $i, j = 1, 2, 3, 4$; $C^{-1}(i, k, l; j, k, l + r)$ — матричный элемент оператора \hat{C}^{-1} , обратного \hat{C} .

Найдем сначала определитель (27.21). Имеем

$$\begin{aligned} \det \hat{C} &= \det \hat{C} \det (\hat{C}^{-1} \hat{C}) = \\ &= \det (I - \text{th } x \hat{A}) \det \left(I - \frac{2 \text{th } x \hat{A}}{I - \text{th } x \hat{A}} \hat{P} \right). \end{aligned} \quad (27.23)$$

Здесь первый множитель есть не что иное, как вычисленная в предыдущем параграфе величина $(S_N^{(j)})^2$ [см. формулу (26.47)]:

$$\det (I - \text{th } x \hat{A}) = (S_N^{(j)})^2. \quad (27.24)$$

Второй множитель можно представить как определитель оператора

$$\hat{K} = \hat{P} \frac{I + \text{th } x \hat{A}}{I - \text{th } x \hat{A}} \hat{P}, \quad (27.25)$$

действующего в $2(r + 1)$ -мерном собственном подпространстве проектора \hat{P} . Оператор \hat{K} может быть записан в виде

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} D, & -F \\ F, & D \end{pmatrix}, \quad (27.26)$$

где D, F — подматрицы $(r + 1)$ -го порядка с элементами:

$$D_{mn} = L^{-2} \sum_{k_1, k_2=1}^L \exp \left[-\frac{i\pi}{L} (2k_1 + 1)(m - n) \right] \times \\ \times \frac{\left(1 - y^4 - 2y(1 + y^2) \cos \frac{\pi}{L} (2k_1 + 1) + 2iy(1 - y) \sin \frac{\pi}{L} (2k_2 + 1) \right)}{(1 + y^2)^2 - 2y(1 - y^2) \left(\cos \frac{\pi}{L} (2k_1 + 1) + \cos \frac{\pi}{L} (2k_2 + 1) \right)}, \\ F_{mn} = L^{-2} \sum_{k_1, k_2=1}^L \exp \left[-\frac{i\pi}{L} (2k_1 + 1)(m - n) \right] \times \\ \times \frac{4y^2 \sin \frac{\pi}{L} (2k_1 + 1)}{(1 + y^2)^2 - 2y(1 - y^2) \left(\cos \frac{\pi}{L} (2k_1 + 1) + \cos \frac{\pi}{L} (2k_2 + 1) \right)}, \quad (27.27)$$

где $y \equiv \text{th } x$.

Определитель $\det \hat{K}$ вычисляется по формуле

$$\det \hat{K} = \det (D + iF) \det (D - iF). \quad (27.28)$$

Перейдем к выражению (27.22). Наличие операторов \hat{D} под знаком следа tr позволяет заменить оператор \hat{C}^{-1} на $\hat{P}\hat{C}^{-1}\hat{P}$ и затем свести выражение (27.22) к

$$(\Phi_N^{(1)}(r))^2, \quad (27.29)$$

где

$$\Phi_N^{(1)}(r) = (\det \hat{K})^{-1} \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0, ik \\ \hline \bar{D} & & & & & & -\bar{E} \\ \hline F & & & & & & D \end{array} \right), \quad (27.30)$$

а

$$k = \frac{1 + y^2}{2y}, \quad (27.31)$$

черта над матрицами D, F означает, что у соответствующей матрицы отсутствует верхняя строка. Черта справа от матрицы означает, что у матрицы отсутствует крайняя строка справа.

Раскрывая определитель в (27.30) и учитывая, что матрицы $D + iF$ и $D - iF$ взаимно транспонированы и потому имеют совпадающие определители, выражение $(g_N^{(1)}(r))^2$ приведем к виду

$$(S_N^{(1)})^2 \{ \text{ch}^2 x^* \Delta_r^{(1)} - \text{sh}^2 x^* \Delta_{-r}^{(1)} \}^2, \quad (27.32)$$

где

$$\text{ch } x^* = \frac{k+1}{2} = \frac{(1+y)^2}{4y}, \quad \text{sh}^2 x^* = \frac{k-1}{2} = \frac{(1-y)^2}{4y}; \quad (27.33)$$

$\Delta_r^{(1)}, \Delta_{-r}^{(1)}$ — теплицевы определители порядка r , выписанные ниже. Аналогично получается для любого $i = 1, 2, 3, 4$

$$(g_N^{(i)}(r))^2 = (S_N^{(i)})^2 \{ \operatorname{ch}^2 x^* \Delta_r^{(i)} - \operatorname{sh}^2 x^* \Delta_{-r}^{(i)} \}^2. \quad (27.34)$$

Чтобы получить выражения для $\Delta_{\pm r}^{(i)}$, преобразуем сначала формулы (27.27) для матричных элементов D_{mn}, F_{mn} , просуммировав по k_2 :

$$\sum_{k_2=1}^L \frac{\sin \frac{\pi}{L} (2k_2 + 1)}{(1+y^2)^2 - 2y(1-y^2) \left(\cos \frac{\pi}{L} (2k_1 + 1) + \cos \frac{\pi}{L} (2k_2 + 1) \right)} = 0; \quad (27.35)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k_2=1}^L \left[(1+y^2)^2 - 2y(1-y^2) \left(\cos \frac{\pi}{L} (2k_1 + 1) + \cos \frac{\pi}{L} (2k_2 + 1) \right) \right]^{-1} = \\ = \frac{1}{b} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^L)(z-\xi)(z-\xi^{-1})}, \end{aligned} \quad (27.36)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b &= y(1-y^2); \quad \xi_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2b} \geq 1; \\ a &= (1+y^2)^2 - 2y(1-y^2) \cos \frac{\pi}{L} (2k_1 + 1). \end{aligned} \right\} \quad (27.37)$$

Контур Γ в (27.36) состоит из двух окружностей $|z| = 1 \pm \delta$, причем большая обходится в положительном направлении, а меньшая — в отрицательном.

Вычислив интеграл по вычетам, выпишем элементы матриц в виде однократных сумм:

$$\begin{aligned} (D + iF)_{mn} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \exp \left[-\frac{i\pi}{L} (2k+1)(m-n) \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{\left(1 - yy^* \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \right) \left(y^* \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] - y \right)}{\left(\exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] - yy^* \right) \left(y^* - y \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \right)} \right\}^{1/2} \frac{\xi_1^L(k) - 1}{\xi_1^L(k) + 1}; \\ (D - iF)_{mn} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \exp \left[-\frac{i\pi}{L} (2k+1)(m-n) \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{\left(\exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] - yy^* \right) \left(y^* - y \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \right)}{\left(1 - yy^* \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \right) \left(y^* \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] - y \right)} \right\}^{1/2} \times \\ &\times \frac{\xi_1^L(k) - 1}{\xi_1^L(k) + 1}, \end{aligned} \quad (27.38)$$

где

$$y^* = \frac{1-y}{1+y} = \text{th } x^*; \quad 0 \leq m; \quad n \leq r. \quad (27.39)$$

Теплицевы определители

$$\Delta_r^{(i)} = \begin{vmatrix} \Sigma_1^{(i)} & \Sigma_0^{(i)} & \dots & \Sigma_{2-r}^{(i)} \\ \Sigma_2^{(i)} & \Sigma_1^{(i)} & \dots & \Sigma_{3-r}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_r^{(i)} & \Sigma_{r-1}^{(i)} & \dots & \Sigma_1^{(i)} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{-r}^{(i)} = \begin{vmatrix} \Sigma_{-1}^{(i)} & \Sigma_{-2}^{(i)} & \dots & \Sigma_{-r}^{(i)} \\ \Sigma_0^{(i)} & \Sigma_{-1}^{(i)} & \dots & \Sigma_{1-r}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_{r-2}^{(i)} & \Sigma_{r-3}^{(i)} & \dots & \Sigma_{-1}^{(i)} \end{vmatrix} \quad (27.40)$$

имеют элементами выражения:

$$\begin{aligned} \Sigma_n^{(1)} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \exp \left[-\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \times \\ &\times \left[\frac{\left(1 - yy^* \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \right) \left(y^* \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] - y \right)}{\left(\exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] - yy^* \right) \left(y^* - y \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \right)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \frac{\xi_1^L(k) - 1}{\xi_1^L(k) + 1}; \\ \Sigma_n^{(2)} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \exp \left[-\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \times \\ &\times \left[\frac{\left(1 - yy^* \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \right) \left(y^* \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] - y \right)}{\left(\exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] - yy^* \right) \left(y^* - y \exp \left[\frac{i\pi}{L} (2k+1) \right] \right)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \frac{\xi_2^L(k) - 1}{\xi_2^L(k) + 1}; \\ \Sigma_n^{(3)} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \exp \left(-i2\pi k/L \right) \times \\ &\times \left[\frac{\left(1 - yy^* \exp \left(i2\pi k/L \right) \right) \left(y^* \exp \left(i2\pi k/L \right) - y \right)}{\left(\exp \left(i2\pi k/L \right) - yy^* \right) \left(y^* - y \exp \left(i2\pi k/L \right) \right)} \right]^{1/2} \frac{\xi_1^L(k) - 1}{\xi_1^L(k) + 1}; \\ \Sigma_n^{(4)} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \exp \left(-i2\pi k/L \right) \times \\ &\times \left[\frac{\left(1 - yy^* \exp \left(i2\pi k/L \right) \right) \left(y^* \exp \left(i2\pi k/L \right) - y \right)}{\left(\exp \left(i2\pi k/L \right) - yy^* \right) \left(y^* - y \exp \left(i2\pi k/L \right) \right)} \right]^{1/2} \frac{\xi_2^L(k) - 1}{\xi_2^L(k) + 1}, \quad (27.41) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi_2(k) &= \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4b^2}}{2b}; \\ a_2 &= (1 + y^2)^2 - 2y(1 - y^2) \cos \frac{2\pi k}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (27.42)$$

Заметим, что равенство $\xi_2(k) = 1$ возможно только при $y = y_c$, т. е. в точке фазового перехода и при $k = 0$.

Извлечение корня из выражений (27.34) дает формулы

$$g_N^{(i)}(r) = (-1)^r S_N^{(i)} \{ \text{ch}^2 x^* \Delta_r^{(i)} - \text{sh}^2 x^* \Delta_{-r}^{(i)} \}. \quad (27.43)$$

Наличие знакового множителя $(-1)^r$ легко проверяется при переходе к пределу $y = \text{th} x \rightarrow 0$.

Формулы (27.3), (27.10), (27.34), (27.43) приводят к окончательному ответу для корреляции двух спинов одной строки:

$$G_N(r) = (-1)^r \left\{ \text{ch}^2 x^* \frac{\Delta_r^{(1)} S_N^{(1)} + \Delta_r^{(2)} S_N^{(2)} + \Delta_r^{(3)} S_N^{(3)} - \Delta_r^{(4)} S_N^{(4)}}{S_N^{(1)} + S_N^{(2)} + S_N^{(3)} - S_N^{(4)}} - \text{sh}^2 x^* \frac{\Delta_{-r}^{(1)} S_N^{(1)} + \Delta_{-r}^{(2)} S_N^{(2)} + \Delta_{-r}^{(3)} S_N^{(3)} - \Delta_{-r}^{(4)} S_N^{(4)}}{S_N^{(1)} + S_N^{(2)} + S_N^{(3)} - S_N^{(4)}} \right\}. \quad (27.44)$$

Это выражение совпадает по форме с формулой Кауфман — Онзагера для бесконечной решетки [117] и переходит в нее в пределе $L \rightarrow \infty$.

Переход к пределу осуществляется таким же образом, как и в случае статистической суммы, и ведет к следующей асимптотической формуле:

$$G_N(r) = (-1)^r \{ \text{ch}^2 x^* \Delta_r - \text{sh}^2 x^* \Delta_{-r} \} + O(\exp(-\alpha L)). \quad (27.45)$$

где Δ_r, Δ_{-r} — теплицевы определители (27.40) с элементами

$$\Sigma_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \exp(-in\omega) \left\{ \frac{(1 - yy^* \exp(i\omega)) (y^* \exp(i\omega) - y)}{(\exp(i\omega) - yy^*) (y^* - \exp(i\omega) y)} \right\}^{1/2}, \quad (27.46)$$

а O -оценка в (27.45) равномерна при $\|x\| - x_c > \varepsilon$.

Переходя к пределу $L \rightarrow \infty$, получаем формулу Кауфмана — Онзагера:

$$G(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(r) = (-1)^r \{ \text{ch}^2 x^* \Delta_r - \text{sh}^2 x^* \Delta_{-r} \}. \quad (27.47)$$

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

§ 28. ВЫДЕЛЕННАЯ РОЛЬ РАЗМЕРНОСТИ $d=4$

В этой главе метод континуального интегрирования применяется к теории фазовых переходов второго рода. Характерный признак фазового перехода — появление *дальнодействующих корреляций*. Это значит, что корреляционная функция, которая при значениях температуры выше температуры перехода убывает экспоненциально, а в точке фазового перехода убывает более медленно.

Наиболее естественным представляется предположение о степенном убывании соответствующего коррелятора. Степенная функция $g(r) = cr^{-a}$ при замене $r \rightarrow \lambda r$ (преобразование подобия) умножается на постоянный множитель

$$g(r) \rightarrow g(\lambda r) = \lambda^{-a} g(r), \quad (28.1)$$

т. е. также испытывает преобразование подобия. Поэтому предположение о степенном убывании корреляторов в точке фазового перехода называется обычно *гипотезой подобия* или *скейлинга*. Показатель степени убывания коррелятора называется *критическим индексом*. Другие критические индексы определяются как показатели степеней, дающие поведение термодинамических функций вблизи фазового перехода как функций от разности $T - T_c$ вида

$$|T - T_c|^b. \quad (28.2)$$

Приведем определение наиболее употребительных критических индексов. Пусть в точке фазового перехода «дальнодействующим» становится коррелятор

$$G(x - y, \tau - \tau_1) = \langle \varphi(x, \tau) \varphi(y, \tau_1) \rangle. \quad (28.3)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает, как обычно, усреднение в смысле континуального интеграла с весом $\exp S$. Предполагая степенное убывание коррелятора (28.3), запишем его асимптотику при $r = |x - y| \rightarrow \infty$ в виде

$$G \approx ar^{2-d-\eta}, \quad (28.4)$$

где d — размерность пространства; η — критический индекс, определяющий закон убывания коррелятора в точке фазового перехода.

Пусть при $T > T_c$ коррелятор (28.3) убывает экспоненциально:

$$G \sim \exp\left(-\frac{r}{\xi(T)}\right). \quad (28.5)$$

Здесь выписана наиболее быстро убывающая при $r \rightarrow \infty$ часть асимптотики, а «предэкспонента» опущена. Величина $\xi(T)$, определяющая убывание коррелятора выше температуры фазового перехода, называется *корреляционной длиной*. Появление дальнедействующих корреляций при $T \rightarrow T_c + 0$ означает, что в этом пределе $\xi(T)$ неограниченно возрастает. Предполагая, что это возрастание происходит по формуле

$$\xi(T) \sim |T - T_c|^{-\nu}, \quad (28.6)$$

получаем второй критический индекс ν .

Критический индекс α определяет сингулярность теплоемкости (при постоянном объеме) в пределе $T \rightarrow T_c$:

$$C_v \sim |T - T_c|^{-\alpha}. \quad (28.7)$$

Критический индекс β дает поведение аномального среднего

$$\langle \varphi(x, \tau) \rangle \sim (T_c - T)^\beta, \quad (28.8)$$

существующего при $T < T_c$, в пределе $T \rightarrow T_c - 0$.

Следующий критический индекс γ связан с поведением восприимчивости χ в пределе $T \rightarrow T_c + 0$:

$$\chi \sim (T - T_c)^{-\gamma}. \quad (28.9)$$

Восприимчивость χ — это коэффициент при ξ в среднем $\langle \varphi(x, \tau) \rangle$, вычисленном при наличии добавки

$$\xi \int dy d\tau' \varphi(y, \tau') \quad (28.10)$$

к действию S (в пределе $\xi \rightarrow 0$); из приведенного определения следует формула

$$\chi = \int G(x - y, \tau - \tau') d(x - y) d(\tau - \tau'), \quad (28.11)$$

выражающая χ как интеграл от коррелятора (28.3) по пространству и времени $\tau - \tau'$.

Наконец, критический индекс δ описывает зависимость $\rho - \rho_c$ от $\rho - \rho_c$ при $T = T_c$:

$$\rho - \rho_c \sim (\rho - \rho_c)^\delta. \quad (28.12)$$

В этой главе изложен подход к вычислению критических индексов, развитый главным образом Вильсоном [124]. Наметим его основную идею.

Как было показано выше на примерах из квантовой теории поля и статистической физики, для вычисления инфракрасной асимптотики корреляционных функций в формализме континуального интеграла удобно проинтегрировать сначала по быстрым, а затем по медленным переменным, используя на этих двух этапах различные схемы теории возмущений. Напомним, что быстрые переменные — это компоненты поля с большими волновыми векторами k ($k > k_0$), а медленные — с малыми k ($k < k_0$).

В проблеме фазовых переходов такой подход недостаточен. Получающийся после интегрирования по быстрым переменным функционал («гидродинамическое действие») не позволяет непосредственно найти интересующие нас корреляционные функции в длинноволновом пределе или построить для их вычисления теорию возмущений по малому параметру.

Метод, предложенный Вильсоном, сводится к приближенному многократному последовательному интегрированию по полям с уменьшающимся нижним пределом k_0 . Такой подход приводит к определенной качественной картине поведения систем вблизи фазового перехода и дает приближенный метод вычисления критических индексов. Кроме того, становится ясной выделенная роль размерности пространства $d = 4$. При $d > 4$ оказывается возможным использовать обычную теорию возмущений. Случай $d = 4$ подробно исследован в известной работе А. И. Ларкина и Д. Е. Хмельницкого [125]. Они выделили главную последовательность диаграмм теории возмущений, которую удалось просуммировать методом «паркета». Это позволило найти асимптотику корреляционных функций в окрестности фазового перехода и определить характер неаналитичности термодинамических функций в окрестности $T \sim T_c$ для $d = 4$. Это обстоятельство помогло Вильсону и Фишеру [126] выдвинуть идею ϵ -разложения по параметру $\epsilon = 4 - d$ отклонения размерности пространства d от критической размерности $d_c = 4$. Эта идея привела к методу вычисления критических индексов в виде степенных рядов по параметру ϵ . В применении к реальным системам необходимо положить $\epsilon = 1$ ($d = 3$) или $\epsilon = 2$ ($d = 2$). Вычисления показывают, что коэффициенты ϵ -рядов сначала убывают, а затем начинают быстро возрастать. Это можно считать указанием на то, что ϵ -ряд является асимптотическим. Тем не менее, ограничиваясь двумя-тремя членами, можно получить разумные значения для критических индексов, согласующиеся с вычислениями по теории возмущений для решетчатых систем.

Проблема обоснования подхода Вильсона далека от сколь угодно удовлетворительного решения. К тому же метод вычисления критических индексов в применении к реальным системам с размерностью $d = 2$ или $d = 3$ является приближенным по самой своей сути, а учет поправок к нему не представляется реально возможным в настоящее время. Даже сама по себе гипотеза подобия не доказана. В этой ситуации существует возможность того, что корреляционная функция в точке фазового перехода имеет асимптотику

$$\exp \left\{ - (r/r_0)^\gamma \right\} \quad (28.13)$$

с $0 < \gamma < 1$. Функция (28.13) убывает медленнее экспоненты $\exp - (r/r_0)$ с любым $r_0 > 0$, но быстрее любой отрицательной степени r^{-a} .

В этом параграфе излагается метод приближенного последовательного интегрирования на примере модели вещественного скалярного поля ϕ с самодействием, пропорциональным ϕ^4 . В следующем

параграфе будет показано, как сделать метод асимптотически точным в пределе $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$ и получить ε -разложение Вильсона для критических индексов.

Рассмотрим систему статистической механики с функционалом действия:

$$S = - \int d\tau dx \left(\frac{1}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 \right), \quad (28.14)$$

где $x \in V$, $0 \leq \tau \leq \beta$. Этот функционал описывает релятивистское вещественное скалярное поле φ при конечной температуре T . Температурная диаграммная техника имеет элементами вершины и линии

$$\left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \times \\ \text{---} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\omega^2 + k^2 - \lambda)^{-1} \\ g \end{array} \quad (28.15)$$

Если коэффициент λ в (28.14) отрицателен, функционал отрицательно определен и фазовый переход в системе отсутствует. Если же $\lambda > 0$, система может претерпевать фазовый переход, ниже которого появляются аномальные средние

$$\langle \varphi(\mathbf{x}, \tau) \rangle \neq 0. \quad (28.16)$$

Для описания системы в окрестности фазового перехода проинтегрируем функционал $\exp S$ по быстрым переменным, которыми будем считать коэффициенты Фурье $\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \omega)$ с $\omega \neq 0$ и $\omega = 0$, $k > k_0$, в разложении:

$$\varphi(\mathbf{x}, \tau) = (\beta V)^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, \omega} \exp[i(\omega\tau - \mathbf{k}\mathbf{x})] \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \omega). \quad (28.17)$$

Определяемый формулой

$$\int \exp S \prod_{\substack{\omega \neq 0 \\ \mathbf{k} > \mathbf{k}_0}} \prod_{\substack{\omega = 0 \\ \mathbf{k} > \mathbf{k}_0}} d\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \omega) = \exp S_0 \quad (28.18)$$

функционал S_0 зависит от компонент $\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, 0)$, которые далее обозначаем $\varphi(\mathbf{k})$. Общий вид функционала S_0

$$S_0 = C_0 - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k} < \mathbf{k}_0} u_2(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k}) \varphi(-\mathbf{k}) d\mathbf{k} - \\ - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \int_{\mathbf{k}_i < \mathbf{k}_0} u_{2n}(\mathbf{k}_i) \delta\left(\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{k}_i\right) \prod_{i=1}^{2n} \varphi(\mathbf{k}_i) d\mathbf{k}_i \quad (28.19)$$

есть сумма функционалов четной степени $2n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), в которых интегралы по импульсам \mathbf{k}_i обрезаны на верхнем пределе k_0 , а δ -функция $\delta(\sum \mathbf{k}_i)$ обеспечивает трансляционную инвариантность.

Константа C_0 не влияет на дальнейшие интегрирования и потому несущественна.

Рассмотрим коэффициентную функцию $u_2(k)$. Пусть в окрестности $k = 0$ $u_2(k)$ имеет разложение

$$u_2(k) = u_{20} + u_{22}k^2 + \dots \quad (28.20)$$

по четным степеням k . Сделаем преобразование подобия

$$\varphi(k) \rightarrow \zeta\varphi(k), \quad (28.21)$$

выбрав его коэффициент ζ из условия

$$\zeta^2 u_{22} = 1. \quad (28.22)$$

В результате приходим к функционалу S_0 вида (28.19), в котором

$$u^2(k) = r + k^2 + \dots \quad (28.23)$$

Принтегрируем теперь функционал $\exp S_0$ по компонентам $\varphi(k)$ с $k_0/2 < k < k_0$.

Определяемый формулой

$$\int \exp S_0 \prod_{k_0/2 < k < k_0} d\varphi(k) = \exp S_1 \quad (28.24)$$

функционал S_1 отличается от S_0 значением константы C_0 и видом коэффициентных функций $u_{2n}(k_i)$. Интегралы по k_i в S_1 обрезаны на верхнем пределе $\frac{k_0}{2}$ (вместо k_0 в S_0). Сделаем теперь преобразование

$$k \rightarrow 2k, \quad \varphi(k) \rightarrow \varphi(2k), \quad (28.25)$$

превращающее область импульсов $k < \frac{k_0}{2}$ в область $k < k_0$, с которой встречались в функционале S_0 . Сделаем затем преобразование (28.21) так, чтобы новая коэффициентная функция квадратичной формы в S_1 (обозначим ее $u_2^{(1)}(k)$) имела разложение

$$u_2^{(1)}(k) = r_1 + k^2 + \dots, \quad (28.26)$$

аналогичное (28.23), т. е. с коэффициентом при k^2 , равным единице.

Таким образом, континуальное интегрирование (28.24) с последующей заменой переменных (28.21), (28.25) переводит функционал $S_0 - C_0$ в функционал $S_1 - C_1$ такого же вида, но с другими коэффициентными функциями $u_{2n}^{(1)}(k_i)$. Можно говорить о нелинейном преобразовании

$$\hat{M}u = u^{(1)} \quad (28.27)$$

последовательности коэффициентных функций

$$u = \{u_2(k), u_4(k_i), u_6(k_i), \dots\} \quad (28.28)$$

в последовательность

$$u^{(1)} = \{u_2^{(1)}(k), u_4^{(1)}(k_i), u_6^{(1)}(k_i), \dots\}. \quad (28.29)$$

Применяя к $u^{(1)}$ тот же метод, который был применен к u , получим

$$u^{(2)} = \hat{M}(u^{(1)}) = \hat{M}^2 u. \quad (28.30)$$

Продолжая, можно смотреть на последовательное континуальное интегрирование полей со все меньшими импульсами как на последовательное применение \hat{M} -преобразования к исходной последовательности u .

Гипотеза подобия для фазовых переходов делает естественным следующее предположение.

На линии фазового перехода последовательное применение \hat{M} -преобразования к последовательности имеет пределом «стационарную» последовательность

$$u_0 = \hat{M}u_0. \quad (28.31)$$

Действительно, если при достаточно больших n имеем

$$u^{(n+1)} \equiv \hat{M}u^{(n)} \approx u^{(n)},$$

то изменение в два раза масштаба импульсов в k -пространстве сводится к преобразованию подобия $k \rightarrow 2k$, $\varphi \rightarrow \xi\varphi$.

Покажем, что коррелятор (28.3) в пределе $g \rightarrow \infty$ имеет степенную асимптотику (28.4), причем показатель степени просто выражается через параметр ξ преобразования (28.1). Рассмотрим коррелятор (28.3) в k -пространстве:

$$\langle \varphi(k) \varphi(k') \rangle = D(k) \delta(k \pm k'). \quad (28.32)$$

Пусть условие стационарности (28.32) выполнено при $n \geq n_0$, т. е. в области импульсов

$$k < 2^{-n_0} k_0. \quad (28.33)$$

Выберем теперь сколь угодно малое k и целое n так, чтобы импульс $k_1 = 2^n k$ лежал в области

$$2^{-n_0-1} k_0 < k_1 < 2^{-n_0} k_0. \quad (28.34)$$

Тогда вследствие условия стационарности (28.32) будем иметь

$$\langle \varphi(k) \varphi(k') \rangle = \xi^{2n} \langle \varphi(k_1) \varphi(k'_1) \rangle \quad (28.35)$$

или

$$D(k) = \xi^{2n} 2^{-nd} D(k_1). \quad (28.36)$$

Переписав это равенство в виде

$$D(k) k^{\frac{21n\xi}{\ln 2} - d} = D(k_1) k_1^{\frac{21n\xi}{\ln 2} - d}, \quad (28.37)$$

получим асимптотику

$$D(k) = ck^{\frac{d - 21n\xi}{\ln 2}}, \quad (28.38)$$

верную в пределе $k \rightarrow 0$. Перейдя к фурье-представлению, получим, что коррелятор (28.3) при больших $r = |x - y|$ ведет себя как степень

$$r^{\frac{2 \ln \xi}{\ln 2} - 2d} \quad (28.39)$$

Сравнив с (28.4), получим формулу для критического индекса

$$\eta = 2 + d - \frac{2 \ln \xi}{\ln 2}. \quad (28.40)$$

Выведем формулу для корреляционной длины $\xi(T)$ в окрестности фазового перехода. Отклонение от линии фазового перехода ведет к тому, что последовательное применение \hat{M} -преобразования уже не имеет пределом стационарную последовательность и в конце концов выводит u_n из окрестности u_0 . Чем ближе к фазовому переходу, тем больше шагов \tilde{n} необходимо сделать, чтобы вывести u_n из фиксированной окрестности u_0 . Для оценки числа \tilde{n} линеаризуем \hat{M} -преобразование в окрестности

$$u_{n+1} - u_0 = \hat{A}(u_n - u_0), \quad (28.41)$$

где \hat{A} — линейный оператор. Предполагая систему близкой к фазовому переходу, можно считать, что при достаточно большом n_0 разность $u_{n_0} - u_0$ пропорциональна разности $T - T_c$. Тогда величина $u_{n+n_0} - u_0$ в силу (28.41) будет иметь порядок

$$\lambda_1^n (T - T_c), \quad (28.42)$$

где λ_1 — наибольшее собственное значение линейного оператора A . Оценим величину \tilde{n} , потребовав, чтобы выражение (28.42) при $n \sim \tilde{n}$ имело порядок T_c . Это приводит к соотношению

$$\tilde{n} \sim \frac{\ln \left(\frac{T_c}{T - T_c} \right)}{\ln \lambda_1}. \quad (28.43)$$

Можно считать, что, применив к системе с функционалом S_0 n -кратное \hat{M} -преобразование, выведена система из окрестности фазового перехода. Корреляционная функция новой системы убывает экспоненциально и имеет в пределе $r \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\exp \left(-\frac{r}{r_0} \right) \quad (28.44)$$

(с точностью до предэкспоненты), причем r_0 можно считать по порядку равным k_0^{-1} . Но новая система — не что иное как исходная при увеличении масштаба в $2^{\tilde{n}}$ раз. Поэтому коррелятор исходной системы имеет при $r \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\exp \left(-\frac{r}{2^{\tilde{n}} r_0} \right). \quad (28.45)$$

Отсюда и из (28.43) следует искомая формула для корреляционной длины:

$$\xi(T) \sim 2^{\tilde{n}} \sim (T - T_c)^{-\frac{\ln 2}{\ln \lambda_1}}. \quad (28.46)$$

Вспомнив определение (28.6) критического индекса ν , получим для него выражение

$$\nu = \frac{\ln 2}{\ln \lambda_1}. \quad (28.47)$$

Рассмотрим еще восприимчивость χ в пределе $T \rightarrow T_c$. Определения (28.11), (28.32) приводят к формуле

$$\chi \sim D(k=0). \quad (28.48)$$

Рассуждения, аналогичные использованным выше при выводе формул для индексов η , ν , приводят к соотношению

$$D(k=0) \sim \xi^{2\tilde{n}} 2^{-\tilde{n}d}, \quad (28.49)$$

где \tilde{n} — число шагов \hat{M} -преобразования, необходимое для того, чтобы система покинула фиксированную окрестность фазового перехода. Из (28.43) при $T \rightarrow T_c + 0$ (28.48), (28.49) следует асимптотика

$$\chi \sim (T - T_c)^{\frac{\ln 2d}{\ln \lambda_1} - \frac{2 \ln \xi}{\ln \lambda_1}} \quad (28.50)$$

и выражение для соответствующего критического индекса γ

$$\gamma = \frac{2 \ln \xi}{\ln \lambda_1} - d \frac{\ln 2}{\ln \lambda_1}. \quad (28.51)$$

Полученные здесь критические индексы η , ν , γ связаны соотношением

$$\gamma = (2 - \eta) \nu. \quad (28.52)$$

Заметим, что замена в (28.52) знака $=$ на знак \leq превращает это равенство в одно из неравенств Гриффитса [147].

Таким образом, метод континуального интегрирования в сочетании с гипотезой Вильсона о связи фазового перехода с неподвижными точками \hat{M} -преобразования позволил выразить критические индексы через параметры этого преобразования и установить точное соотношение (28.52). Естественно поэтому назвать гипотезу Вильсона обобщенной гипотезой подобия.

Для вычисления критических индексов, остающихся независимыми, необходимы приближенные методы. Один из них, предложенный Вильсоном, заключается в следующем. Пренебрегая всеми высшими коэффициентными функциями, начиная с u_6 используем для $u_3^{(n)}$ и $u_4^{(n)}$ приближения

$$u_3^{(n)} = k^2 + r_n; \quad u_4^{(n)} = u_n. \quad (28.53)$$

Формулы перехода от $(u_2^{(n)}, u_4^{(n)})$ к $(u_2^{(n+1)}, u_4^{(n+1)})$ можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} u_2^{(n+1)}(k) &= \zeta^2 2^{-d} (u_2^{(n)}(\frac{k}{2})) + \left(\text{diagram } a + \dots \right); \\ u_4^{(n+1)}(k_i) &\approx u_4^{(n+1)}(0) = \zeta^4 2^{-3d} (u_4^{(n)}) + \left(\text{diagram } b + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (28.54)$$

Используя преобразования подобия (28.21), (28.25), ограничимся диаграммами a, b , приведенными в (28.54). Диаграмма a в приближении, где $u_4^{(n)}$ есть константа, не зависит от внешнего импульса. Требуя, чтобы коэффициент при k^2 в $u_2^{(n+1)}(k)$ был равен 1, найдем ζ :

$$\zeta = 2^{1+d/2}. \quad (28.55)$$

После этого формулы (28.54) конкретизируются в виде

$$\begin{aligned} u_2^{(n+1)}(k) &= k^2 + r_{n+1} = \\ &= k^2 + 4 \left(r_n + \frac{u_n^2}{2(2\pi)^d} \int_{(k_0/2) < k < k_0} \frac{dk}{k^2 + r_n} \right); \\ u_4^{(n+1)}(k_i) &\approx u_{n+1} = 2^{4-d} \left(u_n - \frac{3}{2} \frac{u_n^2}{(2\pi)^d} \int_{(k_0/2) < k < k_0} \frac{dk}{(k^2 + r_n)^2} \right). \end{aligned} \quad (28.56)$$

Множитель 3 перед интегралом во второй из этих формул получается при учете трех диаграмм:

$$\begin{aligned} & \left(\text{diagram 1} \right) + \left(\text{diagram 2} \right) + \left(\text{diagram 3} \right) \quad (28.57) \end{aligned}$$

а множитель $1/2$ есть множитель симметрии диаграммы.

Таким образом, при сделанных упрощениях \hat{M} -преобразование сводится к нелинейному преобразованию пары (r_n, u_n) в (r_{n+1}, u_{n+1}) по формулам (28.56). Вторая из них указывает на выделенную роль размерности $d = 4$.

При $d > 4$ из формулы (28.56) следует неравенство

$$0 < u_{n+1} < u_n 2^{4-d}, \quad (28.58)$$

если только исходное u_0 достаточно мало и положительно. Поэтому $u_n \rightarrow 0$ и в предельной паре (u, r) должно быть $u = 0$, а тогда и

$r = 0$. В результате действие S_n в пределе $n \rightarrow \infty$ есть действие свободного поля

$$-\frac{1}{2} \int k^2 \varphi(\mathbf{k}) \varphi(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (28.59)$$

Это приводит к тому, что корреляционная функция и термодинамические функции ведут себя в окрестности фазового перехода так же, как соответствующие величины в теории свободного поля. Критические индексы совпадают с критическими индексами теории свободного поля. В частности,

$$\eta = 0, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1. \quad (28.60)$$

При $d = 4$ \hat{M} -преобразование (28.56) также ведет к пределу $r = 0$, $u = 0$, а критические индексы совпадают с их значениями в теории свободного поля. Более подробную информацию о поведении системы для предельной размерности $d = 4$ читатель найдет в упомянутой работе А. И. Ларкина и Д. Е. Хмельницкого [125].

В случае $d < 4$ положение существенно иное. Исходя из пары (r_0, u_0) с достаточно малыми r_0, u_0 (причем $u_0 > 0$), приходим обязательно к нетривиальному решению (r, u) уравнений стационарности с $u \neq 0$, а именно

$$u = (1 - 2^{d-4}) \left[\frac{3}{2(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(k^2+r)^2} \right]^{-1}, \quad (28.61)$$

где r определяется из уравнения

$$r = \frac{4}{9} (2^{d-4} - 1) \left[\int \frac{dk}{k^2+r} / \int \frac{dk}{(k^2+r)^2} \right], \quad (28.62)$$

причем интегралы в (28.61), (28.62) взяты по области $(k_0/2) < k < k_0$.

Линеаризация преобразований (28.56) в окрестности точки стационарности имеет вид

$$\begin{aligned} (r_{n+1} - r) &= (r_n - r) \left[4 - \frac{2u}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(k^2+r)} \right] + \\ &+ (u_n - u) \frac{2}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{k^2+r}; \\ (u_{n+1} - u) &= (r_n - r) \frac{2^{4-d} 3u^2}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(k^2+r)^2} + \\ &+ (u_n - u) 2^{4-d} \left(1 - \frac{3u}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(k^2+r)^2} \right). \end{aligned} \quad (28.63)$$

Оператор \hat{A} есть в этом случае матрица второго порядка

$$\left(\begin{array}{cc} 4 - \frac{2u}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(k^2+r)^2}, & \frac{2}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{k^2+r} \\ \frac{2^{4-d} 3u^2}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(k^2+r)^3}, & 2^{4-d} \left(1 - \frac{3u}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(k^2+r)^2} \right) \end{array} \right). \quad (28.64)$$

Определенная выше величина λ_1 есть наибольшее собственное значение этой матрицы. При $d \geq 4$ имеем $u = r = 0$ и получаем $\lambda_1 = 4$ — результат теории свободного поля. При $d < 4$ λ_1 отличается от 4 и дает, согласно (28.47), критический индекс ν , отличающийся от значения $1/2$ в теории свободного поля.

Заметим, что приближение (28.55) для ζ совпадает с результатом теории свободного поля и дает нулевой критический индекс η .

Таким образом, получен приближенный метод вычисления критических индексов. Сделанный в рамках этого подхода вывод о выделенной роли размерности $d = 4$ сохраняет силу и при более подробном рассмотрении систем «с размерностью, близкой к 4», в следующем параграфе.

§ 29. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ И РАЗЛОЖЕНИЕ ВИЛЬСОНА

Выделенная роль размерности $d = 4$ привела Вильсона и Фишера [126] к идее разложения по параметру $\varepsilon = 4 - d$. Такое разложение предполагает рассмотрение наряду с обычными системами статистической механики в пространствах целой размерности также и систем с «нецелой размерностью». Это означает распространение диаграммной техники теории возмущений, в которой выражения для диаграмм даются кратными интегралами по пространству размерности на случай, когда d перестает быть целым числом. Поясним это на примере диаграммной техники с элементами

$$G(\mathbf{k}) = -(k^2 + r)^{-1}, \quad V_4 = g, \quad (29.1)$$

где $G(\mathbf{k})$ — выражение, соответствующее линии; V_4 соответствует вершине четвертого порядка.

Задача здесь заключается в распространении на случай нецелой размерности d интеграла от произведения функций

$$\prod_{i=1}^l (k_i^2 + r)^{-1}, \quad (29.2)$$

соответствующих линиям диаграммы. Используя представление Фейнмана

$$\prod_{i=1}^l (k_i^2 + r)^{-1} = (l-1)! \int \prod_{i=1}^l d\alpha_i \delta \left(\sum_{i=1}^l \alpha_i - 1 \right) \left(\sum_{i=1}^l (k_i^2 + r) \alpha_i \right)^{-l}, \quad (29.3)$$

сведем задачу к продолжению на произвольные значения d интеграла:

$$\int \prod_{\alpha=1}^c dk_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^l (k_i^2 + r) \alpha_i \right)^{-l} \quad (29.4)$$

по независимым импульсам диаграммы k_{α} , число которых равно числу независимых контуров.

С помощью линейного преобразования

$$k_{\alpha} \rightarrow \sum_{\beta=1}^c a_{\alpha\beta} k_{\beta} + k_{0\alpha} \quad (29.5)$$

выражение

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i (k_i^2 + r) \quad (29.6)$$

можно привести к виду

$$\sum_{\alpha=1}^c k_{\alpha}^2 + D, \quad (29.7)$$

где D — функция внешних импульсов диаграммы и параметров α_i представления Фейнмана. Элементы $a_{\alpha\beta}$ матрицы преобразования (29.5) не зависят от размерности d k -пространства, а получающийся при преобразовании элемент объема

$$\prod_{\alpha=1}^c dk_{\alpha} \rightarrow (\det a_{\alpha\beta})^d \prod_{\alpha=1}^c dk_{\alpha} \quad (29.8)$$

множитель $(\det a_{\alpha\beta})^d$ выносится за знак интеграла по k_{α} . Получаем интеграл

$$\int \prod_{\alpha=1}^c dk_{\alpha} (\sum k_{\alpha}^2 + D)^{-l}, \quad (29.9)$$

равный интегралу

$$\int \frac{dk}{(k^2 + D)^l} \quad (29.10)$$

по k -пространству размерности cd . Этот интеграл есть произведение одномерного интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{k^{cd-1} dk}{(k^2 + D)^l} \quad (29.11)$$

на элемент площади единичной сферы в cd -мерном пространстве

$$\Omega(cd) = \frac{2\pi^{cd}}{\Gamma\left(\frac{cd}{2}\right)}. \quad (29.12)$$

Выражения (29.11), (29.12) определены не только для целых d . Таким образом, распространение диаграммной техники с элементами (29.1) на нецелые d не встречает затруднений.

Рассмотрим метод последовательного континуального интегрирования для систем размерности $d = 4 - \varepsilon$ с малым ε . Для такой системы можно определить \hat{M} -преобразование, как и для системы с целым d . Естественно считать, что, как и для целого d , фазовый переход связан с тем, что \hat{M} -преобразование при его повторном многократном применении к исходному действию S_0 дает действие S , инвариантное относительно \hat{M} -преобразования. Формулы \hat{M} -преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_2^{(n+1)}(k) &= \zeta^2 2^{-d} u_2^{(n)}\left(\frac{k}{2}\right) + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \dots \\
 u_4^{(n+1)}(k_i) &= \zeta^4 2^{-3d} u_4^{(n)}\left(\frac{k_i}{2}\right) + \text{diagram 3} + \dots \\
 u_6^{(n+1)}(k_i) &= \zeta^6 2^{-5d} u_6^{(n)}\left(\frac{k_i}{2}\right) + \text{diagram 4} + \dots \\
 u_8^{(n+1)}(k_i) &= \zeta^8 2^{-7d} u_8^{(n)}\left(\frac{k_i}{2}\right) + \text{diagram 5} + \dots \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{29.13}$$

Покажем, что условия стационарности $\hat{M}u = u$ в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают решения в виде рядов по степеням ε . Получающееся таким образом ε -разложение функций u_{2n} ведет к ε -разложениям для критических индексов.

Решение уравнений стационарности \hat{M} -преобразования (29.13) имеет вид

$$u_2(k) = k^2 + O(k_0^2 \varepsilon); \quad u_4(k_i) = c\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{29.14}$$

где c — константа, не зависящая от ε . Малость вершины взаимодействия позволяет ограничиться несколькими первыми диаграммами теории возмущений. Если функции $u_2(k)$, $u_4(k_i)$ имеют вид (29.14), первая из приведенных в (29.13) диаграмм для $u_2(k)$ есть сумма слагаемого, не зависящего от k (порядка εk_0^2) и величины, по порядку не превосходящей $k_0^2 \varepsilon^2$. Остальные диаграммы также дают вклад, не превосходящий по порядку $k_0^2 \varepsilon^2$. Если потребовать, чтобы коэффициент при k^2 в $u_2(k)$ был равен 1, получим равенство

$$1 = \zeta^2 2^{-2-d} (1 + O(\varepsilon^2)), \tag{29.15}$$

откуда

$$\zeta = 2^{1+d/2} (1 + O(\varepsilon^2)). \tag{29.16}$$

Это показывает, что формула (28.55) для ζ верна с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Подставим формулу для ζ (29.16) во второе из уравнений (29.13), в котором затем положим $k_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Обозначив

$$u_4(k_i = 0) = u, \quad (29.17)$$

получим уравнение

$$u = (1 + O(\varepsilon^2)) 2^{4-d} \left(u - \frac{3}{2(2\pi)^d} \int \frac{(u + O(\varepsilon^2))^2 dk}{(k^2 + O(\varepsilon^2 k_0^2))^2} + O(\varepsilon^2) \right), \quad (29.18)$$

в котором интеграл взят по области $k_0/2 < k < k_0$. Учтя, что d -мерный интеграл с относительной погрешностью порядка ε равен четырехмерному, перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} u &= 2^\varepsilon \left(u - \frac{3u^2}{2(2\pi)^4} \int_{k_0/2}^{k_0} \frac{d^4 k}{k^4} + O(\varepsilon^2) \right) = \\ &= 2^\varepsilon \left(u - \frac{3u^2}{16\pi^2} \ln 2 + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned} \quad (29.19)$$

Решение этого уравнения есть

$$u = \frac{16\pi^2}{3} (1 - 2^{-\varepsilon}) + O(\varepsilon^2) = \frac{16\pi^2 \varepsilon}{3} + O(\varepsilon^2). \quad (29.20)$$

Тем самым определили константу c в (29.14):

$$c = \frac{16\pi^2}{3}. \quad (29.21)$$

Зная в первом приближении $u_4(k_i) \approx u$, найдем добавку к k^2 в $u_2(k)$. В первом приближении эта поправка не зависит от k . Обозначим ее r . Уравнение для r

$$r = 4 \left(r + \frac{u}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2} + O(\varepsilon^2) \right) \quad (29.22)$$

имеет решение

$$r = -\frac{4}{3} \frac{k_0^2 u}{32\pi^2} = -\frac{2}{9} k_0^2 \varepsilon. \quad (29.23)$$

Итак,

$$u_2(k) = k^2 - \frac{2}{9} k_0^2 \varepsilon + O(k_0^2 \varepsilon^2); \quad u_4 = \frac{16\pi^2}{3} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (29.24)$$

Отметим теперь, что коэффициенты $\zeta^{2n} 2^{d(1-2n)}$ перед $u_{2n}(\frac{k_i}{2})$ в уравнениях стационарности для высших коэффициентных функций $u_{2n}(k_i)$, начиная с u_0 , в приближении (28.55) для ζ меньше еди-

ницы и стремятся к нулю (как 2^{-dn}) при $n \rightarrow \infty$. Входящие в эти уравнения диаграммы имеют высшие порядки по ε (ε^2 в u_6 , ε^3 в u_8 и т. д.). Это приводит к тому, что высшие коэффициентные функции в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ оказываются несущественными и их необходимо учитывать только в высших порядках по ε .

В низших порядках по ε \hat{M} -преобразование сводится к преобразованию над u_2 и u_4 по формулам (28.56). Другими словами, изложенный в предыдущем параграфе приближенный метод становится асимптотически точным в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

Это соображение позволяет найти наибольшее собственное значение λ_1 линейризованного оператора \hat{A} \hat{M} -преобразования как наибольшее собственное значение матрицы (28.64). С точностью $O(\varepsilon^2)$ λ_1 равно элементу A_{11} этой матрицы:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 - \frac{2u}{(2\pi)^d} \int \frac{dk}{(k^2+r)^2} + O(\varepsilon^2) = 4 - \frac{u \ln 2}{4\pi^2} + O(\varepsilon^2) = \\ &= 4 - \frac{4}{3} \varepsilon \ln 2 + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (29.25)$$

Подстановка λ_1 в (28.47) дает критический индекс

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + O(\varepsilon^2). \quad (29.26)$$

Для нахождения критического индекса с большей точностью необходимо знание с большей точностью коэффициента ζ , который в силу (28.40) определяет критический индекс η . Это можно сделать, учтя вторую из диаграмм, изображенных в уравнении (29.13) для $u_2(\mathbf{k})$. Получим выражение для η другим способом, связанным с меньшими вычислительными трудностями. Критический индекс $\eta = O(\varepsilon^2)$ связан с асимптотикой функции определенной соотношением (28.32):

$$D(\mathbf{k}) \sim k^{\eta-2}. \quad (29.27)$$

Функция $D(\mathbf{k})$ с точностью до знака есть функция Грина ϕ -поля в k -пространстве. Она выражается через собственно энергетическую часть $\Sigma(\mathbf{k})$ формулой

$$D(\mathbf{k}) = (u_2(\mathbf{k}) + \Sigma(\mathbf{k}))^{-1}, \quad (29.28)$$

где

$$\Sigma(\mathbf{k}) = \text{---} \text{---} \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \text{---} + \text{---} \text{---} \overset{b}{\circlearrowright} \text{---} + \dots \quad (29.29)$$

есть сумма диаграмм теории возмущений, в которых линиям соответствуют функции $u_2^{-1}(\mathbf{k})$, вершинам — $u_{2n}(\mathbf{k}_i)$ с $n \geq 2$.

В этих диаграммах интегралы по импульсам внутренних линий берутся по всей области $k < k_0$, в отличие от области $k_0/2 < k < k_0$, с которой встречаемся в диаграммах, описывающих \hat{M} -преобразование.

Вычислим критический индекс η , сравнив формулу

$$D(k) \sim k^{(-2+\eta)} \approx (k^2 - k^2 \eta \ln(k/k_0))^{-1}, \quad (29.30)$$

следующую из (29.27) в области $k \ll k_0$, $|\eta \ln(k_0/k)| \ll 1$, с формулой (29.28) в этой же области. Мы должны получить асимптотическую формулу

$$k^2 - k^2 \eta \ln(k/k_0) \approx u_2(k) + \Sigma(k). \quad (29.31)$$

Вычтем из правой части значение этой формулы при $k = 0$ $u_2(0) + \Sigma(0)$, равное, очевидно, нулю в силу (29.27). Так как

$$u_2(k) - u_2(0) = k^2 + O(k^4), \quad (29.32)$$

то в указанной выше области должно получиться соотношение

$$\Sigma(k) - \Sigma(0) \approx -\eta k^2 \ln(k/k_0). \quad (29.33)$$

Главный вклад в разность $\Sigma(k) - \Sigma(0)$ вносит диаграмма b . (29.29), так как диаграмма a дает постоянный вклад. В выражении

$$\begin{aligned} \Sigma(k) - \Sigma(0) &= \frac{1}{3! (2\pi)^d} \int u^2 dk_1 dk_2 \times \\ &\times \{u_2^{-1}(k_1) u_2^{-1}(k_2) [u_2^{-1}(k_1 + k_2) - u_2^{-1}(k_1 + k_2 + k)]\} \end{aligned} \quad (29.34)$$

можно в первом приближении положить $u_2(k) = k^2$, $u_4 = u$, $d = 4$:

$$\begin{aligned} \Sigma(k) - \Sigma(0) &= \frac{u^2}{3! (2\pi)^8} \int \{dk_1 dk_2 k_1^{-2} k_2^{-2} \times \\ &\times [(k_1 + k_2)^{-2} - (k_1 + k_2 + k)^{-2}]\}. \end{aligned} \quad (29.35)$$

Применим к этому выражению квадрат четырехмерного оператора Лапласа Δ_4^2 , который пронесем под знак интеграла, воспользовавшись формулой

$$\Delta_4 k^{-2} = -4\pi^2 \delta(k). \quad (29.36)$$

Это дает

$$\begin{aligned} \Delta_4^2 (\Sigma(k) - \Sigma(0)) &= \Delta_4 \frac{u^2}{3! (2\pi)^8} \int dk_1 dk_2 k_1^{-2} k_2^{-2} 4\pi^2 \delta(k_1 + k_2 + k) = \\ &= \frac{u^2 4\pi^2}{3! (2\pi)^8} \int dk_1 k_1^{-2} \Delta_4 (k_1 + k)^{-2} = -\frac{u^2}{3! (2\pi)^4} k^{-2} = -\frac{8e^2}{27k^2}. \end{aligned} \quad (29.37)$$

Отсюда нетрудно восстановить $\Sigma(k) - \Sigma(0)$:

$$\Sigma(k) - \Sigma(0) = -\frac{e^2 k^2}{54} (\ln(k/k_0) + \text{const}). \quad (29.38)$$

Сравнив эту формулу с (29.33), получим

$$\eta = \varepsilon^2/54. \quad (29.39)$$

Исследуя уравнение стационарности \hat{M} -преобразования с большей точностью, нетрудно получить следующие члены разложения критических индексов ν и η .

В заключение приведем результаты вычислений [124] критических индексов ν , η , α , β , γ , δ для системы с исходным функционалом действия:

$$S = - \int \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((\partial_\tau \varphi_i)^2 + (\nabla \varphi_i)^2 - \lambda \varphi_i^2) - \frac{g}{4!} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right)^2 \right\} d\tau dx, \quad (29.40)$$

обобщающим выражение (28.14) на случай многокомпонентного поля $\varphi_i(x, \tau)$ ($i = 1, \dots, n$). В этой главе была рассмотрена система с $n = 1$. Случай $n = 2$ соответствует комплексному скалярному полю.

В приводимых ниже формулах для критических индексов n есть число компонент поля

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2} + \frac{(n+2)}{4(n+8)} \varepsilon + \frac{n+2}{8} \frac{n^2+23n+60}{(n+8)^2} \varepsilon^2 + \dots; \\ \eta &= \frac{n+2}{2(n+8)^2} \varepsilon^2 + \frac{n+2}{2(n+8)^2} \left[\frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} - \frac{1}{4} \right] \varepsilon^3 + \dots; \\ \alpha &= \frac{(4-n)\varepsilon}{2(n+8)} - \frac{(n+2)^2(2n+1)}{2(n+8)^3} \varepsilon^2 + \dots; \\ \beta &= \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{2(n+8)} + \frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+8)^2} \varepsilon^2 + \dots; \\ \gamma &= 1 + \frac{(n+2)}{2(n+8)} \varepsilon + \frac{(n+2)(n^2+22n+52)}{4(n+8)^2} \varepsilon^2 + \dots; \\ \delta &= 3 + \varepsilon + \left(\frac{1}{2} - \frac{(n+2)}{(n+8)^2} \right) \varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (29.41)$$

ВИХРЕПОДОБНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 30. ВИХРИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МОДЕЛИ ГОЛДСТОУНА

В последнее время концепция возбуждений типа квантовых вихрей, возникшая в теории сверхпроводимости и сверхтекучести, переносится на релятивистскую квантовую теорию поля. Основанием для этого служит гипотеза, что сильно взаимодействующие частицы (если не все, то по крайней мере некоторые из них) являются вихреподобными возбуждениями. Такая гипотеза позволяет снизить число фундаментальных полей. Необходимость в этом ощущается особенно сильно в последнее время, когда число открытых сильно взаимодействующих частиц вместе с резонансами стало порядка 100—200. В этой ситуации стандартная схема теории поля, сопоставляющая каждой частице фундаментальное поле, становится громоздкой, неэффективной для практического использования и непривлекательной с точки зрения красоты теории.

Вихреподобные возбуждения существуют как в точно решаемых моделях, где они получили название «солитоны», так и в других теориях. Рассмотрим одну из простейших моделей релятивистской теории поля, в которой возможны вихреподобные возбуждения, — модель Голдстоуна [127] с одним временным и двумя пространственными измерениями. В следующем параграфе рассмотрена возможность существования вихреподобных возбуждений в некоторых моделях теории поля в четырехмерном пространстве — времени.

Метод континуального интегрирования представляется наиболее подходящим в этой области, где возбуждения существенно коллективные и образованы многими исходными частицами.

Перейдем к рассмотрению релятивистской модели Голдстоуна. Функционал действия этой модели удобно записать в евклидовых переменных

$$S = - \int \left(|\nabla\psi|^2 - \lambda |\psi|^2 + \frac{g}{4} |\psi|^4 \right) dx. \quad (30.1)$$

Функционал (30.1) описывает комплексное скалярное поле, самодействующее с константой связи $g > 0$. Коэффициент λ положителен. Это соответствует тому, что при выключенном взаимодействии ($g = 0$) имеются частицы с отрицательным значением квадрата массы (тахiony).

Голдстоун обратил внимание на то, что при включении взаимодействия в системе происходит бозе-конденсация [127]. В результате появляются частицы нулевой и конечной массы (с положительным квадратом). Частицы конечной массы, как будет видно, неустойчивы и имеют конечное время жизни.

Вид функционала действия (30.1) напоминает соответствующий функционал для неидеального бозе-газа. Естественно предположить, что в модели Голдстоуна могут существовать возбуждения типа квантовых вихрей, характерные для сверхтекучих бозе-систем.

Прежде чем рассмотреть непосредственно квантовые вихри, построим для модели Голдстоуна теорию возмущений, аналогичную развитой в § 16 для бозе-газа. Такая теория возмущений не содержит инфракрасных расходимостей и оказывается удобной, в частности, для вычисления времени жизни нестабильной частицы. Не будем пока конкретизировать размерность модели n .

Плотность конденсата определяется в первом приближении из условия максимума выражения

$$\lambda |\psi|^2 - \frac{g}{4} |\psi|^4 \quad (30.2)$$

и равна

$$\rho_0 = |\psi_0|^2 = \frac{2\lambda}{g}. \quad (30.3)$$

Перейдем в действии (30.1) к полярным координатам $\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\varphi)$, $\bar{\psi} = \sqrt{\rho} \exp(-i\varphi)$, а затем вместо ρ введем переменную $\pi = \rho - \rho_0$. В переменных φ , π действие имеет вид

$$S = - \int \left((\rho_0 + \pi) (\nabla\varphi)^2 + \frac{(\nabla\pi)^2}{4(\rho_0 + \pi)} + \frac{g}{4} \pi^2 \right) dx + \frac{\lambda^2}{g} \int dx. \quad (30.4)$$

Здесь выражение $\frac{\lambda^2}{g} \int dx$ — вклад бозе-конденсата.

Сделаем в континуальном интеграле по переменным $\varphi(x)$ $\pi(x)$ -преобразование

$$\varphi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \varphi, \quad \pi \rightarrow \sqrt{2\rho_0} \pi, \quad (30.5)$$

превращающее выражение (30.4) в

$$S = - \int \left(\frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \pi (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{(\nabla\pi)^2}{1 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \pi} + 2\lambda\pi^2 \right) \right) dx + \frac{\lambda^2}{g} \int dx. \quad (30.6)$$

Константа $\sqrt{2/\rho_0}$ определяет силу взаимодействия φ - и π -полей, а также самодействия π -поля.

Заметим, что из формулы (30.6) следует неустойчивость системы взаимодействующих тахионов относительно сколь угодно слабого стабилизирующего возмущения. Действительно, если при фиксированном λ рассмотреть в (30.6) предел $g \rightarrow +0$, то получим, что второе слагаемое в (30.6) стремится к бесконечности, а первое превращается в квадратичную форму, описывающую невзаимодействующие безмассовые частицы и частицы с положительным значением квадрата массы $m^2 = 2\lambda$. Учет взаимодействия делает массивную частицу неустойчивой.

Построим теорию возмущений в терминах переменных φ , π . Элементами диаграмм теории возмущений будут две линии, соответствующие полям φ и π , одна вершина, соответствующая $\varphi - \pi$ -взаимодействию, и бесконечное число вершин, соответствующих $\pi - \pi$ -взаимодействию. Приведем выражения для линий, вершины $\varphi - \pi$ -взаимодействия и первой из вершин $\pi - \pi$ -взаимодействия:

$$\begin{array}{l}
 \text{---} \quad -k^{-2} ; \quad \text{====} \quad -(k^2 + 2\lambda)^{-1}; \\
 \begin{array}{c} k_1 \\ \diagup \\ k_3 = \\ \diagdown \\ k_2 \end{array} \quad \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}(k_1, k_2); \quad \begin{array}{c} k_1 \\ \diagup \\ k_3 \\ \diagdown \\ k_2 \end{array} \quad -\sqrt{\frac{2}{\rho_0}}(k_1, k_2)
 \end{array} \quad (30.7)$$

Обозначим φ -поле одинарной линией, π -поле — двойной. В $\pi - \pi$ -вершине черточками отмечены выходы вершины, несущие импульсы k_1 и k_2 . Скалярное произведение именно этих импульсов фигурирует в выражении, соответствующем этой вершине.

Выражение, соответствующее диаграмме теории возмущений, можно получить, проинтегрировав произведение выражений, соответствующих элементам диаграммы, по независимым импульсам и умножив результат на множитель

$$\frac{1}{r} \left(\frac{-1}{(2\pi)^n} \right)^c, \quad (30.8)$$

где r — порядок группы симметрии; c — число независимых контуров диаграммы. Так как построение теории происходит в евклидовых переменных, то для получения физических результатов необходимо соответствующие диаграммам выражения продолжать в область физических энергий и импульсов.

Полученная теория возмущений напоминает построенную в § 20 для теории бозе-газа. Она не содержит инфракрасных расходимостей, но расходится при больших импульсах и формально является неперенормируемой. Поэтому более последовательно было бы

сначала проинтегрировать по быстропеременным составляющим полей $\psi, \bar{\psi}$, а уже в интеграле по медленно меняющимся полям перейти к полярным координатам. Проинтегрировав функционал $\text{exp } S$ по быстропеременным составляющим полей $\psi, \bar{\psi}$, получим функционал $\text{exp } \tilde{S}$, содержащий только медленно меняющиеся составляющие полей $\psi, \bar{\psi}$. Выражение для \tilde{S} в первом приближении совпадает с выражением для S и отличается от него поправками, которые сокращают расходимости при интегрировании по медленно меняющимся полям. Эти поправки здесь рассматриваться не будут. Импульс k_0 , разделяющий большие и малые импульсы, можно оценить по порядку величины, аналогично тому как это было сделано в теории бозегаза. Результат такой оценки формулируется в виде неравенств

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\lambda} \ll k_0 \ll \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \quad \text{для } n=4; \\ \sqrt{\lambda} \ll k_0 \ll \frac{\lambda}{g} \quad \text{для } n=3, \end{aligned} \right\} \quad (30.9)$$

которым можно удовлетворить, если мала константа связи g .

В качестве примера приложения теории возмущений с элементами (30.7) вычислим время жизни массивной частицы, определяемое диаграммой второго порядка:

$$\Sigma_2 = \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (30.10)$$

Диаграммы, возникающие за счет $\pi - \pi$ -взаимодействия, не дают вклада в мнимую часть. Физически это соответствует тому, что распад массивной частицы на две другие такой же массы невозможен. Соответствующее диаграмме (30.10) выражение имеет вид

$$-\frac{1}{2} \frac{2}{\rho_0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k_1 \frac{(k_1 k_2)^2}{k_1^2 k_2^2} = -\frac{g}{2\lambda (2\pi)^n} \int d^n k_1 \frac{(k_1 k_2)^2}{k_1^2 k_2^2}. \quad (30.11)$$

Рассмотрим мнимую часть этого выражения при $k^2 = -2\lambda$. Вследствие равенства $k = k_1 + k_2$ имеем

$$k_1 k_2 = \frac{1}{2} ((k_1 + k_2)^2 - k_1^2 - k_2^2) = -\lambda - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2},$$

$$(k_1 k_2)^2 = \lambda^2 + \lambda (k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{4} (k_1^2 + k_2^2)^2,$$

Вклад в мнимую часть дает только первое слагаемое λ^2 в правой части последней формулы. Остальные слагаемые приводят к вещественным, хотя и формально расходящимся интегралам типа

$$\int \frac{d^n k_1}{k_1^3}; \quad \int d^n k_1; \quad \int \frac{k_2^2}{k_1^2} d^n k_1.$$

Таким образом, имеем

$$\text{Im } \Sigma = -\text{Im} \frac{\lambda g}{2(2\pi)^n} \int \frac{d^n k_1}{k_1^2 k_2^2}. \quad (30.12)$$

Интеграл в этой формуле сходится для случая $n = 3$ и расходится логарифмически для $n = 4$. Мнимая часть интеграла конечна как при $n = 3$, так и при $n = 4$. Совершив аналитическое продолжение $k^2 \rightarrow -2\lambda + i0$, получим

$$\text{Im } \Sigma = \frac{g\sqrt{2\lambda}}{2^5} \text{ для } n = 3; \quad \text{Im } \Sigma = \frac{2\lambda}{2^5 \pi} \text{ для } n = 4. \quad (30.13)$$

Соответствующие формулы для времени жизни π -частицы имеют вид

$$\tau = 2^6 g^{-1} \text{ для } n = 3; \quad \tau = 2^7 \pi g^{-1} (2\lambda)^{-1/2} \text{ для } n = 4. \quad (30.14)$$

Модификация континуального интеграла, необходимая для учета квантовых вихрей, аналогична сделанной в § 21 для бозе-систем. Здесь будет рассмотрен случай $n = 3$ (одномерное время и двумерное пространство). Квантовым вихрям соответствуют линии в трехмерном пространстве (x_0, x_1, x_2) , на которых обращаются в нуль функции $\psi, \bar{\psi}$ и по которым происходит интегрирование. Фаза ϕ функции ψ получает приращение $2\pi n$ (n — целое) при обходе вокруг линии. Будут рассмотрены только вихри с приращением фазы $\pm \pi$ ($|n| = 1$). Состояния с $|n| > 1$ неустойчивы и распадаются на вихри с $|n| > 1$.

Отдельному вихрю соответствует решение уравнения

$$-\Delta\psi - \lambda\psi + \frac{g}{2} \bar{\psi} \psi \psi = 0, \quad (30.15)$$

полученного вариацией действия S (30.1) по $\bar{\psi}$, зависящее от переменных в плоскости, ортогональной мировой линии, и имеющее вид $f(r) \exp(i\theta)$, где θ — полярный угол; $f(r)$ — вещественная функция расстояния r от оси вихря. Уравнение (30.15) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $f(r)$:

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{f}{r^2} + \lambda f - \frac{g}{2} f^3 = 0, \quad (30.16)$$

совпадающему с соответствующим уравнением в теории бозе-газа, рассмотренным Л. П. Питаевским [106]. Решение этого уравнения обращается в нуль при $r = 0$ и стремится к $\sqrt{\rho_0}$ при $r \rightarrow \infty$. Характерную длину $\lambda^{-1/2}$ естественно назвать радиусом ствола вихря.

Чтобы описать ситуацию с несколькими вихрями, заключим каждую мировую линию в трубку радиуса r_0 , значительно большего, чем радиус ствола вихря $\lambda^{-1/2}$. Сумму интегралов по вихревым трубкам в функционале действия S можно в первом приближении представить в виде

$$-\sum_i m_B(r_0) \int ds_i. \quad (30.17)$$

Здесь ds_i — элемент длины i -й вихревой линии; $m_B(r_0)$ — масса (энергия) вихря, заключенная в трубке. Вторая величина логарифмически зависит от r_0 и дается формулой

$$m_B(r_0) = 2\pi\rho_0 \ln(r_0/a), \quad (30.18)$$

где a — параметр порядка радиуса ствола вихря. Формулы (30.17), (30.18) получаются аналогично соответствующим формулам (21.8), (21.9) в теории бозе-систем.

Выделим вклад в действие (30.4) от вихревых трубок и сделаем затем замену переменных (30.5). Получим выражение

$$\begin{aligned} & -\int \left(\frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \pi (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{(\nabla\pi)^2}{1 + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \pi} + 2\lambda\pi^2 \right) \right) dx - \\ & - \sum_i m_B(r_0) \int ds_i + \frac{\lambda^2}{g} \int dx. \end{aligned} \quad (30.19)$$

Функционал $\exp S$ необходимо интегрировать по полям φ , π , а также по траекториям центров вихрей. Функция $\varphi(x)$ в действии (30.19) неоднозначна и получает приращение

$$\pm 2\pi \sqrt{2\rho_0} \equiv \pm g. \quad (30.20)$$

Величина g имеет смысл электрического заряда. Чтобы доказать это, можно перейти к континуальному интегралу по новой переменной, имеющей смысл векторного потенциала электромагнитного поля. Переход к новой переменной аналогичен проведенному в § 21 для бозе-газа, и здесь его повторять не будем. Отметим, что заряд g обратно пропорционален константе связи φ — π - и π — π -взаимодействий.

Квантовые вихри существуют как самостоятельные частицы. Очевидный закон сохранения разности числа вихрей, вращающихся

В положительном и отрицательном направлениях, служит аналогом закона сохранения разности числа частиц и античастиц.

Масса одиночного вихря, строго говоря, бесконечна за счет энергии φ -поля, окружающего вихрь. Можно говорить о конечной массе (энергии) внутри конечного объема. Например, масса (энергия) $m_B(r)$ внутри круга радиуса r с центром, совпадающим с центром вихря, дается формулой (30.18) с заменой $r_0 \rightarrow r$.

Модель Голдстоуна с квантовыми вихрями можно назвать простейшей моделью сильных + электромагнитных взаимодействий в $(2 + 1)$ -мерном пространстве—времени. Квантовые вихри здесь имеют смысл протонов, π -частицы — смысл π -мезонов, φ -частицы — смысл фотонов. Поводом для такой аналогии служат свойства частиц и соответствующих им полей. Действительно, взаимодействие между квантовыми вихрями на больших расстояниях переносится φ -полем, а на малых — также и π -полем аналогично тому, что взаимодействие между протонами на больших расстояниях переносится фотонами, а на малых — также и π -мезонами. Кроме того, распад массивной π -частицы на две безмассовые можно считать аналогом распада π -мезона на 2 γ -кванта. Наконец, для квантовых вихрей сохраняется разность числа «частиц» и «античастиц». Эта разность имеет смысл электрического заряда, совпадающего в этой модели с барионным.

§ 31. О ВИХРЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЯХ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Рассмотрим возможность существования *вихреподобных возбуждений* в некоторых моделях теории поля в четырехмерном пространстве — времени. Обобщением на этот случай модели Голдстоуна, рассмотренной в предыдущем параграфе, служит модель с тремя вещественными скалярными полями и функционалом действия вида

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \left(\sum_a (\nabla\varphi_a)^2 - \lambda \sum_a \varphi_a^2 + \frac{g}{2} \left(\sum_a \varphi_a^2 \right)^2 \right), \quad (31.1)$$

который записан здесь в евклидовых переменных. Условие $\delta S = 0$ есть уравнение

$$-\Delta_4 \varphi_a - \lambda \varphi_a + g \left(\sum_a \varphi_a^2 \right) \varphi_a = 0. \quad (31.2)$$

Это уравнение имеет постоянное решение $\varphi_a = \text{const}$ с условием

$$\sum_a \varphi_a^2 = \frac{\lambda}{g}, \quad (31.3)$$

а также решение, описывающее вихреподобное возбуждение, не зависящее от «временной» координаты x_4 вида

$$\varphi_a = \frac{x_a}{r} f(r), \quad (31.4)$$

где $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ — расстояние от выделенного начала координат в трехмерном пространстве. Уравнение (31.3) сводится к уравнению второго порядка для функции f вида

$$f'' + \frac{2}{r} f' - \frac{2f}{r^2} + \lambda f - g f^3 = 0. \quad (31.5)$$

Рассмотрим решение этого уравнения, ведущее себя $\sim r$ при $r \rightarrow 0$ и стремящееся к константе $(\lambda/g)^{1/2}$ при $r \rightarrow \infty$. Можно показать, что решение этого уравнения действительно существует. Однако функционал

$$\frac{1}{2} \int_{r < r_0} \left[\sum_a (\nabla \varphi_a)^2 - \lambda \sum_a \varphi_a^2 + \frac{g}{2} \left(\sum_a \varphi_a^2 \right)^2 \right] d^3 x, \quad (31.6)$$

дающий энергию возбуждения в объеме $r < r_0$, пропорционален r_0 в пределе $r_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, вихреподобное возбуждение имеет бесконечную энергию и не может быть интерпретировано как новая частица.

Более сложные вихреподобные решения существуют в моделях с полями типа Янга — Миллса. Например, для системы с действием

$$-\frac{1}{2} \int \left[\sum_{a, \mu} (\partial_\mu \varphi_a + \varepsilon \varepsilon_{abc} b_\mu^b \varphi_c)^2 - \lambda \sum_a \varphi_a^2 + \frac{g}{2} \left(\sum_a \varphi_a^2 \right)^2 \right] d^4 x - \\ - \frac{1}{2} \int \sum_{a, \mu} (\partial_\mu b_\nu^a - \partial_\nu b_\mu^a + \varepsilon \varepsilon_{abc} b_\mu^b b_\nu^c)^2 d^4 x \quad (31.7)$$

можно искать решение вида

$$\varphi_a(x) = x_a u(r) r^{-1}; \quad b_\mu^a(x) = \varepsilon_{\mu ab} x_b (a(r) - (er^2)^{-1}). \quad (31.8)$$

Такое решение предложено и исследовано Хоффтом [129] и независимо А. М. Поляковым [128]. Было показано, что оно имеет конечный функционал энергии и, таким образом, может быть сопоставлено новой частице.

Поиски других, более реалистических моделей теории поля с вихреподобными решениями являются в настоящее время весьма актуальной задачей. Не исключено, что именно на этом пути лежит ключ к построению последовательной теории сильных взаимодействий [151—158].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wiener N. Differential space. — «J. Math. Phys.», 1923, v. 2, N 3, p. 131—174; The average value of a functional. — «Proc. Lond. Math. Soc.», 1924, v. 22, N 6, p. 454—467.
2. Feynman R. P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. — «Rev. Mod. Phys.», 1948, v. 20, N 2, p. 367—387.
3. Feynman R. P. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. — «Phys. Rev.», 1950, v. 80, N 3, p. 440—457.
4. Feynman R. P. An operator calculus having applications in quantum electrodynamics. — «Phys. Rev.», 1951, v. 84, N 2, p. 108—128.
5. Heisenberg W., Pauli W. Quantum dynamics of wave fields. — «Z. Phys.», 1929, Bd 56, N 1—2, S. 1—61.
6. Schwinger J. Quantum electrodynamics I. A Covariant formulation. — «Phys. Rev.», 1948, v. 74, N 10, p. 1439—1461. II. Vacuum polarization and self-energy. — «Phys. Rev.», 1949, v. 75, N 4, p. 651—679.
7. Боголюбов Н. Н. О представлении функций Грина — Швингера при помощи функциональных интегралов. — «Докл. АН СССР», 1954, т. 99, № 1, с. 225—226.
8. Гельфанд И. М., Милюс Р. А. Решение уравнений квантовых полей. — «Докл. АН СССР», 1954, т. 97, № 2, с. 209—212.
9. Matthews P. T., Salam A. The Green's functions of quantized fields. — «Nuovo cimento», 1954, v. 12, N 4, p. 563—565.
10. Халатников И. М. Об одном методе вычисления статистической суммы. — «Докл. АН СССР», 1952, т. 87, № 4, с. 539—542. Представление функций Грина в квантовой электродинамике в форме континуальных интегралов. — «Журн. эксперим. и теор. физики», 1955, т. 28, № 5, с. 633—636.
11. Фрадкин Е. С. Метод функций Грина в теории квантовых полей и в квантовой статистике. — «Тр. Физ. ин-та АН СССР», 1965, т. 29, с. 7—138.
12. Feynman R. P. Quantum theory of gravitation. — «Acta Phys. polon.», 1963, v. 24, N 6, p. 697—722.
13. De-Witt B. S. Quantum theory of gravity. — «Phys. Rev.», 1967, v. 160, N 5, p. 1113; v. 162, N 5, p. 1195, 1239.
14. Faddeev L. D., Popov V. N. Feynman diagrams for Yang-Mills field. — «Phys. Lett.», 1967, v. 25B, p. 30—31.
15. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей. Препринт Ин-та теор. физ. АН УССР, Киев, 1967.
16. Mandelstam S. Feynman rules for electromagnetic and Yang-Mills fields from the gauge-independent field-theoretic formalism. — «Phys. Rev.», 1968, v. 175, N 5, p. 1580; Feynman rules for the gravitational fields from coordinate-independent field-theoretic formalism. — «Phys. Rev.», 1968, v. 175, N 5, p. 1604.
17. Fradkin E. S., Tyutin I. V. S-matrix for Yang-Mills and gravitational fields. — «Phys. Lett. B», 1969, v. 30, N 8, p. 562—563; «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, N 12, p. 2841—2856.
18. Hooft G. Renormalization of massless Yang-Mills fields. — «Nucl. Phys. B», 1971, v. 33, N 1, p. 173—199.
19. De-Witt B. Gravity: a universal regulator. — «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, N 3, p. 114—118.
20. Хриплович И. Б. Гравитация и конечные перенормировки в квантовой электродинамике. — «Ядерная физика», 1966, т. 3, № 3, с. 575—581.
21. Weinberg S. A model of leptons. — «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, N 21, p. 1264—1266.

22. Lee B. W. Renormalizable massive vector-meson theory-Perturbation theory of the Higgs phenomenon. — «Phys. Rev.», 1972, v. 5, N 4, p. 823—835.
23. Фаддеев Л. Д. Калибровочно-инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействия лептонов. — Препринт Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1972.
24. Feynman R. P. Atomic theory of the transition in Helium. — «Phys. Rev.», 1953, v. 91, N 5, p. 1291; Atomic theory of liquid Helium near absolute zero. — «Phys. Rev.», 1953, v. 91, N 5, p. 1301.
25. Feynman R. P. Slow electrons in polar crystals. — «Phys. Rev.», 1954, v. 97, N 3, p. 660—665.
26. Гельфанд И. М., Яглом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике. — «Успехи мат. наук», 1956, т. 11, вып. 1, с. 77—114.
27. Ковальчик И. М. Интеграл Винера. — «Успехи мат. наук», 1963, т. 18, вып. 1, с. 97—134.
28. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
29. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М., «Наука», 1965.
30. Березин Ф. А. Невинеровские континуальные интегралы. — «Теор. и мат. физика», 1971, т. 6, № 2, с. 194—212.
31. Далецкий Ю. Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. — «Успехи мат. наук», 1962, т. 17, вып. 5, с. 3—115.
32. Евграфов М. А. Об одной формуле для представления фундаментального решения дифференциального уравнения континуальным интегралом. — «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 5, с. 979.
33. Алимов А. Л., Буслаев В. С. О континуальном интеграле для параболического уравнения второго порядка. — «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат.», 1972, № 1, с. 5—14; Алимов А. Л. О связи между континуальными интегралами и дифференциальными уравнениями. — «Теор. и мат. физика», 1972, т. 11, № 2, с. 182—189.
34. Фаддеев Л. Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. — «Теор. и мат. физика», 1969, т. 1, № 1, с. 3—17.
35. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., ГИТТЛ, 1957.
36. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
37. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
38. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.
39. Bialynicki-Birula I. T. Of the gauge covariance of quantum electrodynamics. — «J. Math. Phys.», 1962, v. 3, N 6, p. 1094—1098.
40. Ward T. C. The scattering of light by light. — «Phys. Rev. Lett.», 1949, v. 77, N 2, p. 293; An identity in quantum electrodynamics. — «Phys. Rev. Lett.», 1950, v. 78, N 2, p. 182.
41. Yang C. N., Mills R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. — «Phys. Rev.», 1954, v. 96, N 1, p. 191—198.
42. Schwinger. Non-abelian gauge fields. — «Phys. Rev.», 1962, v. 125, N 3, p. 1043; v. 127, N 1, p. 324.
43. Gross D. T., Wilczek F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. — «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 30, N 26, p. 1343—1346.
44. Politzer H. D. Reliable perturbation results for strong interactions. — «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 30, N 26, p. 1346—1349.
45. Weyl H. A remark on the coupling of gravitation and electron. — «Phys. Rev.», 1950, v. 77, N 5, p. 699—705.
46. Umezawa H., Takahashi Y. The general theory of the interaction representation. — «Progr. Theor. Phys.», 1953, v. 9, p. 14—32, 501—523.

47. Lee T. D., Yang C. N. Theory of charged vector mesons interacting with electromagnetic field. — «Phys. Rev.», 1962, v. 128, N 2, p. 885.
48. Dirac P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics. — «Proc. Roy. Soc.», 1958, v. A246, p. 326—332; The theory of gravitation in Hamilton form. — «Proc. Roy. Soc. A», 1958, v. 246, p. 333—343.
49. Arnowitz R., Deser S., Misner C. W. Canonical variables for general relativity. — «Phys. Rev.», 1960, v. 117, N 6, p. 1595—1602.
50. Schwinger J. Quantized gravitational field. — «Phys. Rev.», 1963, v. 130, N 3, p. 1253; v. 132, N 3, p. 1317.
51. Bergman P. Observables in general relativity. — «Rev. Mod. Phys.», 1961, v. 33, N 4, p. 510—514.
52. Andersen T.L. Coordinate conditions and canonical formalism in gravitational theory. — «Rev. Mod. Phys.», 1964, v. 36, N 4, p. 929—938.
53. Фаддеев Л. Д. Гамильтонова форма теории тяготения. Тезисы 5-й Международной конференции по гравитации и относительности. Тбилиси, 1968.
54. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
55. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1961.
56. Higgs P. W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. — «Phys. Rev.», 1966, v. 145, N 4, p. 1156—1163.
57. Hooft G. Renormalizable lagrangians for massive Yang-Mills fields. — «Nucl. Phys. B», 1971, v. 35, N 1, p. 167—188.
58. Schwinger J. On the euclidean structure of relativistic field theory. — «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1958, v. 44, N 9, p. 956—965.
59. Абрикосов А. А., Ландау Л. Д., Халатников И. М. Об устранении бесконечностей в квантовой электродинамике. — «Докл. АН СССР», 1954, т. 95, № 3, с. 497; Асимптотическое выражение для гриновской функции электрона в квантовой электродинамике. — «Докл. АН СССР», 1954, т. 95, № 4, с. 773; Асимптотическое выражение для гриновской функции фотона в квантовой электродинамике. — «Докл. АН СССР», 1954, т. 95, № 6, с. 1177.
60. Милехин Г. А., Фрадкин Е. С. Дважды логарифмическое приближение в квантовой электродинамике. — «Журн. эксперим. и теор. физики», 1963, т. 45, в. 6, с. 1926—1939.
61. Yennie D. R., Frautschi S. C., Suura H. The infrared divergence phenomena and high energy processes. — «Ann. Phys.», 1961, v. 13, N 2, p. 379.
62. Chung V. Infrared divergence in quantum electrodynamics. — «Phys. Rev. B», 1965, v. 140, N 4, p. 1110—1122.
63. Кулиш П. П., Фаддеев Л. Д. Асимптотические условия и инфракрасные расходимости в квантовой электродинамике. — «Теор. и мат. физика», 1970, т. 4, № 2, с. 153—170.
64. Герджиков В. С., Кулиш П. П. О низкоэнергетических теоремах для фотонов и инфракрасных расходимостях. — «Теор. и мат. физика», 1974, т. 18, № 1, с. 51—55.
65. Соловьев Л. Д. Низкоэнергетические теоремы и дисперсионные соотношения в квантовой электродинамике. — «Теор. и мат. физика», 1973, т. 15, № 1, с. 59—69.
66. Nordstrom D. L. Some applications of coherent states in quantum electrodynamics. — Iowa State Univ. Ames USA thesis, 1970.
67. Барбашов Б. М. Функциональные интегралы в квантовой электродинамике и инфракрасная асимптотика функций Грина. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, вып. 2, с. 607.
68. Первушин В. Н. Метод функционального интегрирования и эйкональное приближение амплитуд потенциального рассеяния. — «Теор. и мат. физика», 1970, т. 4, № 1, с. 22—31.
69. Abarbanel H.D.I., Itzykson C. Relativistic eikonal expansion. — «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, N 1, p. 53—56.
70. Straight-line paths approximation for studying high energy elastic and inelastic hadron collisions in quantum fieldtheory. — «Phys. Lett. B»,

- 1970, v. 33, N 7, p. 484—488. Auth.: V. M. Barbashov, S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, V. N. Pervushin, A. N. Sissakian, A. N. Tavheliidze.
71. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.** Об одной аппроксимации пропагаторов виртуальных частиц и высокоэнергетическом поведении диаграмм Фейнмана. — «Теор. и мат. физика», 1970, т. 4, № 3, с. 293; Функциональное интегрирование и редже-эйконоальное представление амплитуды рассеяния. — «Теор. и мат. физика», 1972, т. 10, № 2, с. 196.
 72. **Ландау Л. Д.** Теория сверхтекучести гелия. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1941, т. 1, с. 592.
 73. **Боголюбов Н. Н.** К теории сверхтекучести. — «Изв. АН СССР». Сер. физ., 1947, т. 11, № 1, с. 77.
 74. **Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н.** Волновая функция нижнего состояния системы взаимодействующих бозе-частиц. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1955, т. 28, вып. 2, с. 129—139.
 75. **Церковников Ю. А.** К теории идеального бозе-газа при температуре, отличной от нуля. — «Докл. АН СССР», 1962, т. 143, № 4, с. 832; Приближение хаотических фаз в теории неидеального бозе-газа. — «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, № 3, с. 1023; Второй звук в слабонеидеальном бозе-газе. — «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, № 6, с. 1264.
 76. **Толмачев В. В.** Связь статистического варнационного принципа с методом частичного суммирования диаграмм термодинамической теории возмущений в модифицированной формулировке проблемы бозе-эйнштейновской системы. — «Докл. АН СССР», 1960, т. 134, № 6, с. 1324; Построение асимптотических при слабом взаимодействии разложений из формальной термодинамической теории возмущений в модифицированной формулировке проблемы неидеальной бозе-эйнштейновской системы. — «Докл. АН СССР», 1960, т. 135, № 1, с. 41; Температурные элементарные возбуждения в неидеальной бозе-эйнштейновской системе. — «Докл. АН СССР», 1960, т. 135, № 4, с. 825—828.
 77. **Беляев С. Т.** Применение методов квантовой теории поля к системе бозе-частиц. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 34, вып. 2, с. 417; Энергетический спектр неидеального бозе-газа. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 34, вып. 2, с. 433—446.
 78. **Hugengoltz N. M., Pines D.** Ground state energy and excitation spectrum of a system of interacting bosons. — «Phys. Rev.», 1959, v. 116, N 3, p. 489—506.
 79. **Lee T. D., Yang C. N.** Many-body problem in quantum mechanics and quantum statistical mechanics. — «Phys. Rev.», 1957, v. 105, N 3, p. 1119.
 80. **Lee T. D., Yang C. N.** Low temperature behavior of a dilute Bose system of hard spheres. — «Phys. Rev.», 1958, v. 112, № 5, p. 1419; 1959, v. 113, N 6, p. 1406; Many-body problem in quantum statistical mechanics. (I—V). — «Phys. Rev.», 1959, v. 113, N 65, p. 1165; 1959, v. 116, N 1, p. 25; 1960, v. 117, N 1, p. 12, N 4, p. 897.
 81. **Боголюбов Н. Н.** Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ Д-781, 1961.
 82. **Боголюбов Н. Н.** К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Препринт ОИЯИ Р-1395, 1963.
 83. **Галасевич З.** Асимптотическое вычисление функции Грина в приближении вязкой жидкости для сверхтекучих бозе-систем. Препринт ОИЯИ Р-1517, 1964.
 84. **Girardeau, Arnowitt R.** Theory of many-boson systems. Pair theory. — «Phys. Rev.», 1959, v. 113, N 3, p. 755.
 85. **Luban M.** Statistical mechanics of a nonideal boson gas: Pair Hamiltonian model. — «Phys. Rev.», 1962, v. 128, N 2, p. 965—987.
 86. **Huang K., Yang C. N.** Quantum mechanical many-body problem with hard-sphere interactions. — «Phys. Rev.», 1957, v. 105, N 3, p. 767.
 87. **Weller W.** Zur Superfluidität eines Bose-systems. — «Z. Naturforsch.», 1963, Bd 18a, N 1, S. 279; Zur Begründung des Zweiflüssigkeitenmodells zur Helium II aus der mikroskopischen Theorie. — «Z. Naturforsch.», 1964, Bd 19a, N 2, S. 410.

88. Gavoret T., Nozieres P. Structure of the perturbation expansion for the Bose liquid of zero temperature. — «Ann. Phys.», 1964, v. 28, N 2, p. 349.
89. Сонин Э. Б. Флуктуация, дальний порядок и сверхтекучесть. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, вып. 4, с. 1416—1428.
90. Reatto L., Chester Q. V. Phonons and the properties of a Bose system. — «Phys. Rev.», 1967, v. 155, N 1, p. 88—100.
91. Lasher G. Coherent phonon states and long-range order in two dimensional Bose-systems. — «Phys. Rev.», 1968, v. 172, N 1, p. 224—229.
92. Березинский В. Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, вып. 3(9), с. 907; 1971, т. 61, вып. 3(9), с. 1144.
93. Попов В. Н. К теории сверхтекучести двумерных и одномерных бозе-систем. — «Теор. и мат. физика», 1972, т. 11, № 3, с. 354—365.
94. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. Об одном подходе к теории бозе-газа при низких температурах. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47 вып. 4, с. 1315—1321.
95. Попов В. Н. Функции Грина и термодинамические функции неидеального бозе-газа. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, вып. 5, с. 1759—1764.
96. Попов В. Н. Функции Грина и термодинамические функции неидеального бозе-газа (второе приближение). — «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. физики и химии», 1965, № 22, вып. 4, с. 58—64.
97. Попов В. Н. Применение континуального интегрирования к выводу низкочастотной асимптотики функций Грина и кинетических уравнений для неидеального бозе-газа. — «Теор. и мат. физика», 1971, т. 6, N 1, с. 90—108.
98. Попов В. Н. Гидродинамический гамильтониан для неидеального бозе-газа. — «Теор. и мат. физика», 1972, т. 11, № 2, с. 236—247.
99. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
100. Халатников И. М. Теория сверхтекучести. М., «Наука», 1971.
101. Lieb E. H., Liniger W. Exact analysis of an interacting Bose gas I. The general solution and the ground state. — «Phys. Rev.», 1963, v. 130, N 5, p. 1605—1616.
102. Lieb E. H. Exact analysis of an interacting Bose gas II. The excitation spectrum. — «Phys. Rev.», 1963, v. 130, N 5, p. 1616—1624.
103. Yang C. N., Yang C. P. Thermodynamics of a one dimensional system of bosons with repulsive delta function interaction. — «J. Math. Phys.», 1969, v. 10, N 7, p. 1115—1122.
104. Абрикосов А. А. Влияние размеров на критическое поле сверхпроводников второй группы. — «Докл. АН СССР», 1952, т. 86, № 3, с. 489; О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 32, вып. 6, с. 1442.
105. Попов В. Н. Квантовые вихри и фазовый переход в бозе-системах. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, вып. 2, с. 674—680.
106. Пятаевский Л. П. Вихревые нити в неидеальном бозе-газе. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 40, вып. 2, с. 646—651.
107. Bycling E. Vortex lines and the λ -transition. — «Ann. Phys.», 1965, v. 32, N 2, p. 367—376.
108. Wiegel F. W. Vortex-ring model of Bose condensation. — «Physica», 1973, v. 65, p. 321—336.
109. Andronikashvili E. L., Mamaladze Yn. G. Quantization of macroscopic motions and hydrodynamics of rotating Helium II. — «Rev. Mod. Phys.», 1966, v. 38, N 4, p. 567—625.
110. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. — Журн. эксперим. и теор. физ.», 1946, т. 16, с. 574.
111. Капитонов В. С. Попов В. Н. Затухание длинноволновых плазменных колебаний. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 63, вып. 1, с. 143—149.

112. **Перель В. И., Элиашберг Г. М.** Поглощение электромагнитных волн в плазме. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1961, т. 41, с. 886.
113. **Onsager L.** Crystal statistics I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. — «Phys. Rev.», 1944, v. 65, p.117—149.
114. **Yang C. N.** The spontaneous magnetization of a twodimensional Ising model. — «Phys. Rev.», 1952, v. 85, p. 808.
115. **Кас М., Ward Т. С.** A combinatorial solution of the twodimensional Ising model. — «Phys. Rev.», 1951, v. 88, p. 1332—1337.
116. **Potts R. V., Ward Т. С.** The combinatorial method and the two-dimensional Ising model. — «Prog. Theor. Phys.», 1955, v. 13, p. 38—46.
117. **Kaufman В.** Crystal statistics II. Partition function evaluated by spinor analysis. — «Phys. Rev.», 1949, v. 76, p. 1232—1252.
118. **Румер Ю. Б.** Термодинамические средние для бесконечной плоской решетки Изинга. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, вып. 1, с. 278—293.
119. **Вдовиченко Н. В.** Вычисление статистической суммы плоской дипольной решетки. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, вып. 2, с. 715; Спонтанная намагниченность плоской дипольной решетки. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, вып. 2, с. 526.
120. **Рязанов Г. В.** Корреляционные функции конечной модели Изинга. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 54, вып. 3, с. 1010—1015.
121. **Молоканов А. А.** Дипломная работа. ЛГУ, 1971.
122. **Березин Ф. А.** Плоская модель Изинга. — «Успехи мат. наук», 1969, т. 24, вып. 3, с. 3—22.
123. **Фрадкин Е. С., Калашников О. К.** К теории модели Изинга. — Препринт ФИАН СССР № 93, 1968.
124. **Wilson K., Kogut G.** The renormalization group and the ϵ -Expansion. — «Phys. Reports C», 1974, v. 12, N 2, p. 75—200.
125. **Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.** Фазовый переход в одноосных сегнетоэлектриках. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 56, вып. 6, с. 2087—2098.
126. **Wilson K., Fisher M. E.** Critical exponents in 3,99 dimensions. — «Phys. Rev. Lett.», 1972, v. 28, N 4, p. 240—243.
127. **Goldstone J.** Field theories with «superconductor» solutions. — «Nuovo cimento», 1961, v.19, N 1, p. 154—164.
128. **Поляков А. М.** Спектр частиц в квантовой теории поля. — «Письма в ЖЭТФ», 1974, т. 20, вып. 6, с. 430—433.
129. **Hooft G.** Magnetic monopoles in unified gauge theories. — «Nucl. Phys. B», 1974, v. 79, N 1, p. 276—284.
130. **Furry W.** A symmetry theorem in the positron theory. — «Phys. Rev.», 1937, v. 51, N 2, p.125—129.
131. **Фаддеев Л. Д., Попов В. Н.** Ковариантное квантование гравитационного поля. — «Успехи физ. наук», 1973, т. 111, с. 428—450.
132. **Коноплева Н. П., Попов В. Н.** Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.
133. Search for elastic muon-neutrino electron scattering. — «Phys. Lett. B», 1973, v. 46, N 1, p. 121—124. Auth.: F. J. Hasert e. a.).
134. **Hasert F. J. e.a.** Observation of neutrino like interactions without muon or electron in the Gargamelle neutrino experiment. — «Phys. Lett. B», 1973, v. 46, N 1, p. 138—140. Auth: Hasert F. J. e. a.
135. **Kibble Т. W. B.** Coherent soft-photon states and infrared divergences. — «J. Math. Phys.», 1968, v.9, N 2, p. 315—324.
136. Coherent soft-photon states and infrared divergences. II. Mass-shell singularities of green's functions. — «Phys. Rev.», 1968, v. 173, N 5, p. 1527; III. Asymptotic states and reduction formulas. — «Phys. Rev.», 1968, v. 174, N 5, p. 1882; IV. The scattering operator. — «Phys. Rev.», 1968, v.175, N 5, p. 1624—1640.
137. **Абрикосов А. А.** Об инфракрасной катастрофе в квантовой электродинамике. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1956, т. 30, вып. 1, с. 96; Комптон-эффект при больших энергиях. — «Журн. эксперим. и теор.

- физ.», 1956, т. 30, вып. 1, с. 386; О рассеянии электрона на электро-
не и позитрона на электро-не при больших энергиях. — «Журн. эксперим.
и теор. физ.», 1956, т. 30, вып. 3, с. 544.
138. **Судаков В. В.** Вершинные функции для сверхвысоких энергий в кванто-
вой электродинамике. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1956, т. 30,
вып. 1, с. 87—95.
139. **Onsager L.** Statistical hydrodynamics. — «Nuovo cimento», 1949, Suppl.,
v. 6, N 2, p. 279—287.
140. **Feynman R. P.** Application of quantum mechanics to liquid helium. —
«Prog. Low Temperature Phys.», 1955, v.1, ch. 2, North-Holland, Amster-
dam.
141. **Bardeen T., Cooper L. N., Schrieffer T. R.** Theory of superconductivity. —
«Phys. Rev.», 1957, v.108, N 5, p. 1175—1204.
142. **Боголюбов Н. Н.** О новом методе в теории сверхпроводимости I. —
«Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 34, вып. 1, с. 58; **Толмачев В. В.,**
Тябликов С. В. О новом методе в теории сверхпроводимости II. — «Журн.
эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 34, вып. 1, с. 66; **Боголюбов Н. Н.** О но-
вом методе в теории сверхпроводимости III. — «Журн. эксперим. и
теор. физ.», 1958, т. 34, вып. 1, с. 73.
143. **Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В.** Новый метод в теории
сверхпроводимости. М., Изд-во АН СССР, 1958.
144. **Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.** К теории сверхпроводимости. — «Журн.
эксперим. и теор. физ.», 1950, т. 20, с. 1064—1082.
145. **Gell-Mann M., Brueckner K. A.** Correlation energy of an electron gas at
high density. — «Phys. Rev.», 1957, v.106, N 2, p. 354—372.
146. **Малеев С. В.** Аналитическое продолжение температурных диаграмм
и условия унитарности при конечных температурах. — «Теор. и мат.
физика», 1970, т. 4, № 1, с. 86—100.
147. **Стенли Г.** Фазовые переходы и критические явления. Пер. с англ. М.,
«Мир», 1973.
148. **Березин Ф. А.** Квантование. — «Изв. АН СССР, Сер. матем.», т. 38, № 5,
с. 1116—1175.
149. **Свидзинский А. В.** Метод функционального интегрирования в теории
сверхпроводимости. — «Теор. и мат. физика», 1971, т. 9, № 2, с. 273—290.
150. **Андреанов В. А., Попов В. Н.** Низкочастотная асимптотика функции
Грина и кинетические уравнения для ферми-бозе — газа. — «Вестн.
Ленингр. ин-та», 1974, № 16, с. 7—15.
151. **Капитонов В. С., Попов В. Н.** Гидродинамическое действие для плаз-
мы. — «Теор. и мат. физика», 1976, т. 26, № 2, с. 246—255.
152. **Фаддеев Л. Д.** Адроны из лептонов? — «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 21,
с. 25.
153. **Арефьева И. Я., Коренин В. Е.** Рассеяние в двухмерной модели с лаг-
ранжианом $\gamma^{-1}[2^{-1}(\partial\mu)^2 + \cos u - 1]$ — «Письма в ЖЭТФ», 1974,
т. 20, с. 312.
154. **Коренин В. Е., Кумин П. П., Фаддеев Л. Д.** Квантование солитонов. —
«Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 21, с. 138.
155. **Коренин В. Е., Фаддеев Л. Д.** Квантование солитонов. — «Теор. и мат.
физика», 1975, т. 25, с. 147.
156. **Dashen R. E., Haslacher B., Nevean A.** Nonperturbative methods and
extended — hadron models in field theory. — «Phys. Rev. D.», 1974,
v. 10, № 12, p. 4125.
157. **Christ N., Lee T. D.** Quantum expansion of soliton solutions. — «Phys.
Rev. D.», 1975, v.12, № 6, p. 1607.
158. **Tomboulis E.** Canonical quantisation of non linear waves. Phys. Rev.
D. 1975, v.12, № 6, p. 1678.
159. **Tackiw R., Woo N.** Semiclassical scattering of quantised nonlinear wa-
ves. — «Phys. Rev.», D., 1975, v. 12, № 6, p. 1705.
160. **Faddeev I. D.** Vortex-like Solutions of a Unified Model of Electromag-
netic and Weak Interactions of Leptons. München preprint MPI-PAE/Pth
16, 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Континуальный интеграл и квантовая механика	5
§ 1. Введение	5
§ 2. Континуальный интеграл в квантовой механике	7
§ 3. Квантование систем со связями	11
§ 4. Континуальные интегралы и квантование на многообразиях	16
Глава 2. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике	20
§ 5. Континуальный интеграл и теория возмущений в квантовой теории поля	20
§ 6. Континуальные интегралы и температурная диаграммная техника в статистической физике	30
Глава 3. Калибровочные поля	42
§ 7. Квантование калибровочных полей	42
§ 8. Квантовая электродинамика	47
§ 9. Поля Янга—Миллса	53
§ 10. Квантование гравитационного поля	66
§ 11. Попытки построения калибровочной инвариантной теории электромагнитного и слабого взаимодействий	83
Глава 4. Инфракрасная асимптотика функций Грина	92
§ 12. Метод последовательного интегрирования сначала по «быстрым», а затем по «медленным» полям	92
§ 13. Инфракрасная асимптотика функций Грина квантовой электродинамики	95
Глава 5. Рассеяние частиц высоких энергий	107
§ 14. Дважды логарифмическая асимптотика в квантовой электродинамике	107
§ 15. Эйкональное приближение	111
Глава 6. Сверхтекучесть	117
§ 16. Теория возмущений для сверхтекучих бозе-систем	117
§ 17. Бозе-газ малой плотности	123
§ 18. Применение континуальных интегралов к выводу низкочастотной асимптотики функций Грина	133
§ 19. Гидродинамический гамильтониан неидеального бозе-газа	140
§ 20. Сверхтекучесть двумерных и одномерных бозе-систем	150
§ 21. Квантовые вихри в бозе-системах	161
Глава 7. Сверхпроводимость	170
§ 22. Теория возмущений для сверхпроводящих ферми-систем	170
§ 23. Сверхпроводимость второго рода	177
Глава 8. Теория плазмы	190
§ 24. Гидродинамическое действие в теории плазмы	190
§ 25. Затухание плазменных колебаний	197
Глава 9. Модель Изинга	204
§ 26. Статистическая сумма модели Изинга как континуальный интеграл	204
§ 27. Корреляционная функция модели Изинга	215
Глава 10. Фазовые переходы	224
§ 28. Выделенная роль размерности $d = 4$	224
§ 29. Вычисление критических индексов и разложение Вильсона	234
Глава 11. Вихреподобные возбуждения в релятивистской теории поля	241
§ 30. Вихри в релятивистской модели Голдстоуна	241
§ 31. О вихреподобных решениях в квантовой теории поля	247
Список литературы	249