А. Г. ПОСТНИКОВ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ ЧИСЕЛ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.1
П 63
УДК 511.2

Введение в аналитическую теорию чисел. А. Г. Постников. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971.

Эта книга посвящена среднему звену аналитической теории чисел, среднему между учебной литературой и современными монографиями.

Автор стремился дать как можно более широкую картину задач аналитической теории чисел, стараясь избегать специализации, а также тем, уже достаточно хорошо освещенных в печати. Это объясняет заглавие книги «Введение в аналитическую теорию чисел».

Глубокие результаты в аналитической теории чисел связаны, конечно, с применением развитых аппаратов. Однако, наряду с овладением могучими орудиями, молодому научному работнику не мешает обеспечить себя запасом задач, в которых можно применить эту сильную технику. В этом деле мы и стремимся помочь молодому коллеге.

Издание рассчитано на научных работников, преподавателей, аспирантов, интересующихся теорией чисел и ее связями с другими областями науки.

Алексей Георгиевич Постников

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ ЧИСЕЛ

М., 1971 г., 416 стр. с илл.

Редактор *К. Ю. Булота*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректоры *Т. С. Плетнева, М. Л. Медведская*

Сдано в набор 21/I 1971 г. Подписано к печати 6/IX 1971 г. Бумага $84\times108/_{32}$.
Физ. печ. л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 21,51.
Тираж 10 000 экз. Т-14355. Цена книги 1 р. 60 к. Заказ № 967.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

$\frac{2-2-3}{44-71}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Книга посвящается
памяти незабвенного
Вячеслава Васильевича СТЕПАНОВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Литература по аналитической теории чисел весьма богата и естественным образом отражает исторически сложившееся в этой науке положение. Введением в аналитическую теорию чисел является дополнительный материал (задачи и их решения) учебника И. М. Виноградова «Основы теории чисел» [15]. В монографии З. И. Боревича и И. Р. Шафаревича «Теория чисел» [8] изложены основы метода производящих рядов Дирихле (в применении к теории алгебраических чисел). Книгу А. О. Гельфонда и Ю. В. Линника «Элементарные методы в аналитической теории чисел» [19] можно назвать хрестоматией по аналитической теории чисел. На русском языке имеются книги, трактующие теорию диофантовых приближений (см. Дж. В. С. Касселс [29]), теорию аппроксимации алгебраических и трансцендентных чисел (см. А. О. Гельфонд [18]), метод тригонометрических сумм (см. И. М. Виноградов [16]), вопросы распределения простых чисел и теорию L-функций Дирихле (см. А. Е. Ингам [28], Н. Г. Чудаков [86], Е. К. Титчмарш [64], К. Прахар [56]), вероятностную теорию чисел (см. И. П. Кубилюс [34]) и т. д. Тем не менее есть ряд фундаментальных вопросов аналитической теории чисел, которые в систематической форме недостаточно представлены в литературе, — это вопросы, прямо или косвенно связанные с понятием числовой полугруппы, иными словами, общая аддитивная теория чисел. Именно этому аспекту теории чисел и посвящена настоящая книга.

Мы предполагаем у читателя знакомство с основами анализа, теории чисел и теории вероятностей. По анализу достаточно сведений в размере учебника Г. М. Фихтенгольца [72], [73], [74], по теории чисел необходимо знание основного текста руководства И. М. Виноградова [15] или

А. А. Бухштаба [11], по теории вероятностей достаточно материала, изложенного в первых восьми главах учебника Б. В. Гнеденко [20].

Автор благодарит Г. А. Фреймана, представившего простой вывод асимптотической формулы Харди и Рамануджана. Автор признателен К. Ю. Булота, взявшему на себя труд по редактированию книги, его конструктивная критика была очень полезной. Большое спасибо всем лицам, которые помогли в работе над книгой.

Стандартные обозначения

Чтобы не быть назойливыми в обозначениях, условимся, что, если не оговорено противного, будем обозначать:

γ — постоянную Эйлера,

$\chi_4(n)$ — неглавный характер по модулю 4,

$\varphi(n)$ — функцию Эйлера,

$\tau(n)$ — количество натуральных делителей числа n,

$\sigma(n)$ — сумму натуральных делителей числа n,

$\nu(n)$ — количество различных простых делителей числа n,

$r(n)$ — количество представлений числа n в виде суммы двух квадратов,

$\alpha_p(n)$ — показатель, с которым простое число p входит в натуральное число n,

$\mu(n)$ — функцию Мёбиуса,

$\Lambda(n)$ — функцию Мангольдта $\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n=p^\alpha,\\ 0, & n\neq p^\alpha,\end{cases}$

(x) — расстояние от вещественного числа x до ближайшего к нему целого числа,

$[x]$ — целую часть вещественного числа x,

$\{x\}=x-[x]$ — дробную долю x,

$\Gamma(s)$ — гамма-функцию,

$\zeta(s)$ — дзета-функцию,

$\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x.

ВВЕДЕНИЕ

Нам надо дать обзор содержания книги и остановиться по ходу изложения на ведущих мыслях.

Современная жизнь и, в частности, математическая жизнь немыслима без непрестанного «отчуждения» аппарата от задач. Поэтому, прежде чем непосредственно приступать к задачам аналитической теории чисел, удобно выделить главу аппаратного характера.

Первая глава посвящена дополнительным сведениям из анализа. Здесь мы касаемся главным образом теорем тауберова типа.

В аналитической теории чисел широкое применение имеет метод производящих функций (метод производящих степенных рядов — главным образом в вопросах аддитивной теории чисел; метод производящих рядов Дирихле — в вопросах теории мультипликативных функций и метод характеристических функций — в вопросах распределения значений арифметических функций). Необходимым моментом метода производящих функций является применение процесса обращения (который приводит в ряде задач к явным формулам). Производящие ряды классических задач теории чисел допускают изучение во всей комплексной плоскости, и поэтому наиболее удобным аппаратом для обращения являются формула Коши для коэффициентов степенных рядов и формула Перрона для сумматорной функции ряда Дирихле. В общих задачах информация о производящем ряде Дирихле делается, вообще говоря, гораздо более скудной. Это и является причиной применения в общих вопросах теории чисел тауберовой теории.

В первой главе мы излагаем также теорему Эссеена, относящуюся к методу характеристических функций.

Многие задачи аналитической теории чисел имеют аддитивный характер. Для того чтобы уяснить, о чем идет речь, мы приведем несколько постановок задач.

Сначала о прямых аддитивных задачах.

Заданы две конечные или бесконечные последовательности вещественных чисел, расположенных в порядке возрастания:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \tag{1}$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \tag{2}$$

(можно предположить, что у каждой из этих двух последовательностей самое большее одна предельная точка на бесконечности). Образуем множество попарных сумм

$$\tau = \lambda_i + \mu_j. \tag{3}$$

Точке τ этого множества будем приписывать кратность, равную количеству представлений числа τ в указанном виде. Одна из задач состоит в том, чтобы из свойства последовательностей (1) и (2) вывести свойства множества их попарных сумм.

В это направление включается много задач; среди них выделим две серии:

а) Задачи о распределении кратностей. Эти задачи будем называть локальными. Здесь речь идет об изучении величины

$$p(\tau) = \sum_{\tau=\lambda_i+\mu_j} 1. \tag{4}$$

Более общей задачей является следующая. Заданы две функции вещественного переменного $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Требуется изучить величину

$$\tilde{p}(\tau) = \sum_{\tau=\lambda_i+\mu_j} f_1(\lambda_i) f_2(\mu_j). \tag{4'}$$

Условимся в терминологии: функцию $f(x)$, заданную на какой-то последовательности, будем называть законом, величину $\tilde{p}(\tau)$, определенную формулой (4′), будем называть композицией f_1 и f_2 и обозначать

$$\tilde{p} = f_1 * f_2.$$

б) Обозначим через $n_1(u)$ и через $n_2(u)$ количество чисел соответственно последовательностей (1) и (2), не превосходящих границы u (u является асимптотически возрастающим параметром); обозначим через $q(u)$ количество решений неравенства

$$\lambda_i + \mu_j \leqslant u.$$

Задача состоит в изучении величины $q(u)$, коль скоро заданы функции $n_1(u)$ и $n_2(u)$. Такие задачи будем называть интегральными. Очевидно,

$$q(u) = \sum_{\lambda_i \leqslant u} n_2(u - \lambda_i) = \sum_{\mu_j \leqslant u} n_1(u - \mu_j).$$

В становлении аналитической теории чисел сыграла большую роль вышедшая в конце прошлого века книга П. Бахмана «Аналитическая теория чисел» [92]. На страницах 447—449 этой книги доказывается следующая теорема:

Теорема. *Пусть A, B, α, β — данные положительные числа. Обозначим через $q(N)$ количество пар натуральных чисел (x, y), для которых*

$$Ax^\alpha + By^\beta \leqslant N.$$

Справедливо неравенство

$$q(N) = \frac{N^{1/\alpha + 1/\beta}}{A^{1/\alpha} B^{1/\beta}} \frac{1}{\alpha + \beta} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)} - \theta\left(\left(\frac{N}{A}\right)^{1/\alpha} + \left(\frac{N}{B}\right)^{1/\beta}\right),$$

$$0 < \theta < 1.$$

Для случаев $A = 1$, $B = 1$ эта теорема может рассматриваться как результат, относящийся к прямой аддитивной задаче.

Коснемся постановки аддитивных задач с неограниченным количеством слагаемых. Пусть задана неубывающая последовательность положительных чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \tag{1}$$

Добавим к этой последовательности нуль:

$$0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

Последовательность (1), бесконечно раз сложенная сама с собой, состоит по определению из чисел вида

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \ldots + n_s\lambda_s + \ldots, \tag{5}$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ — целые неотрицательные числа; естественно, что в каждом из выражений (5) присутствует лишь конечное число отличных от нуля чисел n_i. Примером такой задачи является рассмотренный Г. А. Фрейманом [79] вопрос об асимптотической формуле для количества решений в неотрицательных числах неравенства

$$2^{\alpha_2}3^{\alpha_3} \ldots r^{\alpha_r} \ldots \leqslant n$$

при $n \to \infty$.

По теме аддитивных задач с неограниченным количеством слагаемых мы приводим в этой книге прямую аддитивную теорему Бредихина [10]. Пусть G — мультипликативно записанная свободная полугруппа со счетной системой P образующих $\omega_1, \omega_2, \ldots$, и пусть N — такой гомоморфизм G на некоторую числовую мультипликативную полугруппу $\bar{G}$, при котором в полугруппе G имеется только конечное число элементов α с $N(\alpha) \leqslant x$, где через $N(\alpha)$ обозначен образ (или норма) элемента $\alpha \in G$ при гомоморфизме N. Обозначим

$$\pi_G(x) = \sum_{\substack{\omega \in P \\ N(\omega) \leqslant x}} 1 \quad \text{и} \quad \nu_G(x) = \sum_{\substack{N(\alpha) \leqslant x \\ \alpha \in G}} 1.$$

Теорема. *Если при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\pi_G(x) = \tau \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^{1+\varepsilon} x}\right),$$

то

$$\nu_G(x) = C_G x \ln^{\tau-1} x + O\left(\frac{x(\ln x)^{\tau-1}}{(\ln\ln x)^{\varepsilon_1}}\right),$$

где $\varepsilon_1 = \min(1, \varepsilon)$.

Покажем, что теорема Бредихина вкладывается в схему прямых аддитивных задач. Прежде всего, $N(\omega) > 1$ для каждого $\omega \in P$; если бы было $N(\omega_1) \leqslant 1$, то имелось бы бесконечное количество элементов α ($\alpha = \omega_1^n$, $n = 1, 2, \ldots$), для которых $N(\alpha) \leqslant 1$. Обозначим

$\ln N(\omega_j)=\lambda_j$. Расположим эти λ в порядке неубывания:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$$

Очевидно, что

$$n(u)=\sum_{\lambda_j \leqslant u} 1=\pi_G(e^u).$$

Сложим последовательность

$$0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots$$

неограниченное количество раз саму с собой. Тогда величина $q(u)$, выражающая количество решений в целых числах $n_1, n_2, \ldots$ неравенства

$$n_1\lambda_1+n_2\lambda_2+\ \ldots\ \leqslant u,$$

равна $\nu_G(e^u)$. Таким образом, в теореме Бредихина по величине $n(u)$ восстанавливается величина $q(u)$ — типичная прямая аддитивная задача.

Пусть G — свободная полугруппа, состоящая из натуральных чисел. Ради удобства к такой полугруппе будем всегда причислять число 1. Обозначим через $f(n)$ индикатор полугруппы G:

$$f(n)=\begin{cases} 1, & n \in G, \\ 0, & n \notin G. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\nu_G(x)=\sum_{\substack{n \in G \\ n \leqslant x}} 1=\sum_{n \leqslant x} f(n).$$

К вопросу о суммировании индикатора $f(n)$ может быть применена прямая аддитивная теорема Бредихина. Приведем два примера:

1. Зададим модуль k и r взаимно простых с k остатков по модулю k $l_1, l_2, \ldots, l_r$. Обозначим через P множество всех простых чисел, которые сравнимы по модулю k хотя бы с одним из чисел $l_1, l_2, \ldots, l_r$. Обозначим через G множество натуральных чисел, состоящих только из простых чисел, принадлежащих множеству P. Очевидно, что G — полугруппа. Мы имеем

$$\pi_G(x)=\sum_{\substack{p \equiv l_1, \ldots, l_r \pmod k \\ p \leqslant x}} 1=\frac{r}{\varphi(k)}\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Значит, по теореме Бредихина

$$\nu_G(x) = \frac{C_G x}{(\ln x)^{1-r/\varphi(k)}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{1-r/\varphi(k)} \ln\ln x}\right).$$

Это результат Э. Ландау ([133], стр. 641—669).

2. Как известно, множество чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел, образуют свободную полугруппу; базисом этой полугруппы является число 2, простые числа вида $4k+1$ и квадраты простых чисел вида $4k+3$. Для этой полугруппы G мы имеем

$$\pi_G(x) = 1 + \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod 4 \\ p \leqslant x}} 1 + \sum_{\substack{p \equiv 3 \pmod 4 \\ p \leqslant \sqrt{x}}} 1 = \frac{1}{2}\frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Отсюда по теореме Бредихина

$$\nu_G(x) = \sum_{\substack{n \in G \\ n \leqslant x}} 1 = C\frac{x}{\sqrt{\ln x}} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}\,\ln\ln x}\right).$$

Этот результат был установлен Э. Ландау [132].

В качестве примера локальной задачи с бесконечным количеством слагаемых укажем на классическую задачу Харди и Рамануджана. В ней предметом внимания является функция натурального аргумента $p(n)$, определенная как количество представлений числа n в виде суммы натуральных слагаемых. Например, $p(4) = 5$:

$$4 = 1+1+1+1, \quad 4 = 2+1+1,$$
$$4 = 2+2, \quad 4 = 3+1, \quad 4 = 4.$$

В этой задаче исходной последовательностью является натуральный ряд, который неограниченное количество раз складывается сам с собой.

Функция $p(n)$ является быстро возрастающей. Например, уже

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388.$$

Можно показать, что при $n \to \infty$

$$\ln p(n) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{n}.$$

Асимптотические формулы для $p(n)$ были получены в работах Харди и Рамануджана (см. об этом гл. 8 книги Г. Харди [121]), а также Я. В. Успенского [68]; в работах Харди и Рамануджана были получены более точные результаты, чем в работе Я. В. Успенского. При $n \to \infty$

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}.$$

Изложение задачи Харди и Рамануджана вошло в учебник Р. Эйуба [91], в этой книге можно почерпнуть достаточно полные сведения о предмете.

Функцию $p(n)$ в задаче Харди и Рамануджана можно определить как количество решений уравнения

$$n = 1 \cdot x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n + \ldots$$

в неотрицательных целых числах $x_i \geqslant 0$. В самом деле, последнее равенство означает, что в разбиении n на сумму натуральных слагаемых число 1 встречается x_1 раз, число 2 встречается x_2 раз и т. д. Такая постановка задачи естественным образом обобщается. Пусть задана монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_r,\ \ldots;$$

обозначим для данного натурального n через $p_{\text{общ}}(n)$ количество решений в целых неотрицательных числах x_i уравнения

$$n = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r + \ldots$$

Асимптотическое поведение функции $p_{\text{общ}}(n)$ исследовалось с помощью трех методов. Первый метод — элементарный (см. Г. А. Фрейман [75]). Другой метод, основанный на тауберовых теоремах для преобразования Лапласа быстро растущих функций, был развит А. Е. Ингамом [124] (мемуар Ингама воспроизводится в этой книге). Наконец, аналитический метод, основанный на формулах обращения для производящих функций, разрабатывался в работах С. Б. Хаселгроу и Х. Темперли [122], К.Ф. Рота и Г. Секереша [148]. Все эти методы дают однотипные формулы для $p_{\text{общ}}(n)$.

Теперь об обратных аддитивных задачах. В прямых аддитивных задачах исследователь идет от величины $n(u)$ к величине $q(u)$; в обратных задачах исследование ведется в противоположном направлении. Примером результата, относящегося к обратной аддитивной задаче, служит следующая теорема В. Х. Ташбаева [63].

Теорема. *Предположим, что последовательность* (1) *состоит из неотрицательных целых чисел и что она строго возрастающая. Пусть* $C>0$ — *константа,*

$$\alpha_1 < \frac{\alpha(1+\alpha)}{2} - 1, \quad \alpha_1 < \alpha$$

и

$$q(u) = Cu^{\alpha} + O(u^{\alpha_1}).$$

Тогда

$$n(u) = Bu^{\frac{\alpha}{2}} + O(u^{\omega}\ln u) + O\left(u^{\frac{\alpha}{2}-(1-\omega)}\ln u\right),$$

где

$$\omega = \frac{\alpha_1+1}{\alpha+1}, \qquad B = \frac{\sqrt{C\Gamma(\alpha+1)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}.$$

Систематическое исследование обратных аддитивных задач, относящихся к удвоению последовательностей, производится в книге Г. А. Фреймана [81].

В работах П. Эрдёша [111] и Г. А. Фреймана [76], [77] рассматривались обратные аддитивные задачи, в которых речь идет о разбиении чисел на неограниченное количество слагаемых. Для заданной последовательности вещественных чисел (1) обозначим через $q(u)$ количество решений в целых неотрицательных числах неравенства

$$\lambda_i + \lambda_j \leqslant u. \tag{6}$$

Как по порядку роста величины $q(u)$ определить порядок роста величины $n(u)$?

Пусть последовательность (1) есть последовательность логарифмов простых чисел

$$\ln 2, \ \ln 3, \ \ln 5, \ \ldots \tag{7}$$

Поскольку каждое целое число $n \geqslant 2$ однозначно представляется в виде произведения степеней простых чисел, то последовательность (7), неограниченно сложенная сама с собой, есть последовательность логарифмов целых чисел, больших единицы, причем каждый член этой последовательности имеет кратность, равную 1. Поэтому количество решений неравенства (6) есть количество натуральных чисел, не превосходящих e^u:

$$q(u) = [e^u] = e^u + O(1).$$

Это величина просто устроенная. Величина же $n(u) = \pi(e^u)$ лишь заменой аргумента отличается от основной функции теории распределения простых чисел. Таким образом, задачу о распределении простых чисел можно рассматривать как обратную аддитивную задачу. Такую точку зрения мы находим в работах А. Бёрлинга [93], В. Нимана [139], Б. М. Бредихина [9], см. также гл. III книги А. Винтнера [155].

Трактовка задач о распределении простых чисел как аддитивных может быть проиллюстрирована следующим доказательством неконечности множества простых чисел (доказательство заимствовано из книги Л. Г. Шнирельмана [88], стр. 44—45).

Пусть имеется лишь конечное множество простых чисел: $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все они. По основной теореме арифметики любое натуральное число n однозначно записывается в виде

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r};$$

$p_1 < p_2 < \ldots < p_r$, $\alpha_i \geqslant 0$, α_i — целые. Рассмотрим числа $1, 2, \ldots, N$ $(N \geqslant 2)$. Количество натуральных чисел n, не превосходящих N, равно в точности N. С другой стороны, каждому n взаимно однозначно соответствует единственный набор неотрицательных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Следовательно, количество решений $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ неравенства

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \leqslant N$$

в целых неотрицательных числах в точности равно N. Но если

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} \leqslant N,$$

то

$$\alpha_i \leqslant \frac{\ln N}{\ln p_i} + 1 \leqslant \frac{\ln N}{\ln 2} + 1 \leqslant 2\frac{\ln N}{\ln 2}.$$

Отсюда следует, что $N \leqslant 2^r \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^r$. Это неравенство вследствие медленности роста логарифмической функции при достаточно больших N противоречиво.

Фундаментальный закон аналитической теории чисел — асимптотический закон распределения простых чисел гласит: при $x \to \infty$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Естественным обобщением вопроса о распределении простых чисел является задача о распределении простых идеалов заданного поля алгебраических чисел K. Пусть K — поле алгебраических чисел степени n над полем рациональных чисел, $\pi_K(x)$ — количество простых идеалов с нормами, не превосходящими x. Формулируем асимптотический закон:

$$\pi_K(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Мы приводили теорему Бредихина, относящуюся к прямой аддитивной задаче. В работе Б. М. Бредихина [9] решается обратная задача по отношению к той, о которой говорилось; в этой работе устанавливается следующий результат:

Теорема. *Пусть*

$$\nu_G(x) = C_G x^{\theta} + O(x^{\theta_1}),$$

где $0 \leqslant \theta_1 < \theta$. *Тогда*

$$\pi_G(x) \sim \frac{1}{\theta}\frac{x^{\theta}}{\ln x}.$$

Эта теорема является обобщением не только асимптотического закона распределения простых чисел, но и асимптотического закона распределения простых идеалов поля алгебраических чисел. В самом деле, рассмотрим конечное расширение K поля рациональных чисел степени n. Множество G целых отличных от нуля идеалов поля K является свободной полугруппой с базой, состоящей из простых идеалов $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ этого поля. Пусть $N(\mathfrak{A})$ означает норму идеала $\mathfrak{A}$, и пусть

$$\nu_K(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{A} \in G \\ N(\mathfrak{A}) \leqslant x}} 1 \quad \text{и} \quad \pi_K(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{P} \in G \\ N(\mathfrak{P}) \leqslant x}} 1.$$

Теорема. *При* $x \to \infty$

$$\pi_K(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

В самом деле, по теореме Дирихле с остаточным членом (см., например, Э. Ландау [134])

$$\nu_K(x) = C_0 x + O(x^{(n-1)/(n+1)}).$$

Теперь можно применить теорему Бредихина с

$$\alpha = \mathfrak{A}, \quad \omega_i = \mathfrak{P}_i, \quad N(\alpha) = N(\mathfrak{A}), \quad \theta = 1.$$

Напомним, к слову, некоторые сведения об остаточном члене в асимптотическом законе распределения простых чисел. Как известно, если взять в качестве главного члена в асимптотической формуле для $\pi(x)$

$$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{dt}{\ln t},$$

то для $\pi(x)$ получается асимптотическое разложение по степеням $\ln x$.

Наиболее точные результаты в оценке разности

$$\pi(x) - \operatorname{li} x$$

достигаются аналитическим методом. В этих исследованиях понижение в остаточном члене зависит от того, в насколько широкой области критической полосы дзета-функции Римана $\zeta(s)$ (левее прямой $\operatorname{Re} s = 1$ и правее прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$) можно гарантировать отсутствие нулей у этой функции. Пусть $s = \sigma + it$. Адамар и Валле-Пуссен показали, что дзета-функция не имеет нулей в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\ln(|t| + 2)},$$

где $c>0$ — некоторая абсолютная постоянная. Этот результат приводит к оценке

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right);$$

$c>0$ — постоянная. Дальнейшие усиления зависят от уточнения оценок роста дзета-функции вблизи прямой $\sigma=1$. Это связано с оценками тригонометрических сумм вида

$$\sum_{N_1 \leqslant n < N_2} e^{it \ln n}.$$

С помощью оценок, полученных И. М. Виноградовым [14] и Н. М. Коробовым [32] в 1958 г. (обстоятельное изложение см. в книге А. Вальфиша [153]), доказано, что функция $\zeta(s)$ не имеет нулей в области

$$\sigma \geqslant 1 - c(\ln|t|+2)^{-2/3}.$$

Этот результат приводит к оценке

$$\pi(x) = \mathrm{li}\, x + O\left(x \exp\left(-c\,\frac{(\ln x)^{3/5}}{(\ln\ln x)^{1/5}}\right)\right)$$

(см. А. Е. Ингам [28], К. Прахар [56], Е. К. Титчмарш [64], А. Вальфиш [153]).

Пусть $d\geqslant 2$, $1\leqslant l<d$, $(l, d)=1$. Обозначим через $\pi(x, d, l)$ количество простых чисел, не превосходящих x и лежащих в прогрессии $l+du$, $u=0, 1, \ldots$ Для величины $\pi(x, d, l)$ устанавливается следующая формула:

$$\pi(x, d, l) = \frac{1}{\varphi(d)}\int_2^x \frac{du}{\ln u} + O\left(x \exp\left(-c\,\frac{(\ln x)^{3/5}}{(\ln\ln x)^{1/5}}\right)\right);$$

$c>0$ — константа в символе «O», зависит от d.

Аддитивные задачи с растущим количеством слагаемых обычно формулируются на языке теории вероятностей, именно говорят о нарастающих суммах случайных величин. У «непосвященных» такая формулировка зачастую порождает недоразумения: представляется, что задача накрепко связана с каким-то «реально протекающим» случайным процессом, а результаты, полученные с помощью вероятностных рассуждений, оцениваются как ненадежные. Дело же заключается в том, что в ряде ситуаций формализованная задача о случайном процессе оказывается тождественной с аддитивной задачей.

Предметом нашего внимания будут два типа задач: интегральные и локальные.

Опишем постановку интегральных задач. Задана бесконечная последовательность наборов целых чисел

$$\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \ldots;$$

числа, входящие в набор $\mathfrak{M}_i$, $i=1, 2, \ldots$, можно предполагать различными. Пусть t — вещественный параметр. Задача состоит в отыскании асимптотической формулы при $t \to \infty$ для количества решений неравенства

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant t,$$

где

$$x_i \in \mathfrak{M}_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В книге приведен пример на применение интегральной предельной теоремы, который иллюстрирует получение арифметических результатов с помощью вероятностной интерпретации. Один из основных методов теории приближений алгебраических чисел — метод Туэ, развитый Зигелем и Ротом. Т. Шнейдер [149] (Hilfsatz 1) указал, что в этом методе существенную роль играет то обстоятельство, что в гиперкубе большой размерности подавляющая часть целых точек лежит вблизи диагональной гиперплоскости куба. В параграфе «Лемма Шнейдера» мы приведем точную формулировку этого утверждения и покажем, как в этой задаче оказывается полезной вероятностная интерпретация.

Опишем постановку локальных задач с растущим количеством слагаемых. Пусть задана бесконечная последовательность конечных наборов целых чисел

$$\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \ldots$$

Пусть N — целое число. Задача состоит в отыскании асимптотической формулы для количества решений диофантова уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N,$$

$x_i \in \mathfrak{M}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, где растущим параметром является n. Мы ограничиваемся рассмотрением задач, в которых все множества $\mathfrak{M}_i$, $i=1, 2, \ldots$, одинаковые. Аппаратом для решения этих задач является локальная предельная теорема теории вероятностей для одинаково распределенных решетчатых случайных величин (см. Б. В. Гнеденко [20], стр. 265—272). Б. В. Гнеденко доказал эту теорему методом характеристических функций. При этом используется представление решения аддитивной задачи в виде интеграла от тригонометрической суммы. Ситуация та же, что и в аналитической теории чисел. Однако непосредственно для локальной предельной теоремы не требуется тонкого исследования поведения тригонометрической суммы, какое проводится в классических задачах аналитической теории чисел. Мы приводим в соответствующем параграфе книги примеры на применение локальных предельных теорем в арифметике.

Пусть $f(n)$ — целозначная функция целочисленного аргумента n, пусть P — фиксированное натуральное число. Рассмотрим задачу о представлении целого числа N в виде

$$N = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n),$$

где $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant P-1$; здесь n — растущий к бесконечности параметр. Легко видеть, что эта задача может быть сведена к локальной предельной теореме для одинаково распределенных независимых случайных величин. Ограничение фиксированного P не характерно для теории чисел. Для того чтобы решать задачу с растущим P, нужны локальные теоремы, равномерные относительно исходных распределений. Если в интегральной постановке такие теоремы существуют, то в локальных предельных теоремах приходится ограничиваться примерами. Мы рассматриваем задачу Л. П. Усольцева [67] о представлении числа N в виде

$$N = g^{x_1} + g^{x_2} + \ldots + g^{x_n},$$

где g — фиксированное число $\geqslant 2$, $0 \leqslant x_1\ x_2, \ldots, x_n \leqslant P-1$, $n \to \infty$, $P \to \infty$.

Третья глава книги носит название «Теория функций натурального аргумента».

Задача об определении средних значений функций натурального аргумента завещена классиками. Гаусс установил асимптотическую формулу

$$\sum_{n\leqslant N} r(n)=\pi N+O\left(\sqrt{N}\right),$$

а Дирихле доказал, что

$$\sum_{n\leqslant N}\tau(n)=N\ln N+(2\gamma-1)N+O\left(\sqrt{N}\right).$$

Упрощая ситуацию, можно сказать, что развитие задач о суммировании значений арифметических функций шло по двум направлениям.

1. Получение для классических функций теории чисел сумматорных формул с как можно более точными остаточными членами. Здесь сыграл большую роль мемуар Г. Ф. Вороного [17], в котором он уточняет упомянутую выше формулу для суммы значений $\tau(n)$. В реализации этого направления играет ведушую роль метод оценок тригонометрических сумм (Г. Вейль, И. М. Виноградов и другие). Введение в этот круг вопросов содержится в задачах учебника И. М. Виноградова [15].

2. Направление, которое будет по преимуществу в центре нашего внимания, состоит в создании как можно более общих теорем, относящихся к суммированию функций натурального аргумента.

Примером такой теоремы является следующая теорема А. Винтнера (см. [155], стр. 9).

Теорема. *Представим функцию натурального аргумента $f(n)$ в виде*

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\Phi(d)$$

и предположим, что ряд $\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\Phi(d)}{d}$ *абсолютно сходится. Тогда имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n)=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\Phi(d)}{d}.$$

Имеется целый ряд результатов, обобщающих теорему А. Винтнера. В книге в качестве примера одного из них мы приводим так называемую теорему Аксера. Вся первая глава книги А. Винтнера [155] посвящена взаимоотношению функций $f(n)$ и $\Phi(n)$, связанных соотношением

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\Phi(d).$$

Вопросы суммирования функций натурального аргумента являются для нас поводом для того, чтобы остановиться на аналогии между теорией чисел и анализом. Выпишем аналогичные понятия:

Теория чисел	Анализ
Натуральный ряд чисел.	Отрезок [0, 1] вещественной оси.
Арифметическая прогрессия с модулем D.	Полуотрезок $\left[\frac{a}{D}, \frac{a+1}{D}\right)$.
Асимптотическая плотность множества $\mathfrak{M}$ натуральных чисел: $D(\mathfrak{M})=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n\leqslant N,\, n\in\mathfrak{M}}1.$	Мера Лебега множества чисел с отрезка [0, 1].

Заметим, что проведение аналогии между асимптотической плотностью и мерой Лебега наталкивается на трудность: мера Лебега обладает свойством счетной аддитивности, в то время как асимптотическая плотность таким свойством не обладает. В самом деле, асимптотическая плотность множества, состоящего из одного натурального числа, равна нулю, а счетное объединение таких множеств дает натуральный ряд, асимптотическая плотность которого равна 1. То, что асимптотическая плотность не обладает свойством счетной аддитивности, не дает возможности непосредственно применить в задачах на распределение значений арифметических функций развитый аппарат теории вероятностей. И. П. Кубилюс (см. [34], гл. II) предложил несколько способов обхода этой трудности. Эти способы составляют методологическую основу для применения методов теории вероятностей к изучению распределения значений арифметических функций.

Теория чисел	Анализ
Сумма $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n)$.	Интегральная сумма функции $f(x)$, заданной на $[0, 1]$.
Периодическая с целым периодом D функция натурального аргумента.	Кусочно постоянная на полуотрезках $\left[\frac{a}{D}, \frac{a+1}{D}\right)$ функция.

Функцию $f(n)$ натурального аргумента назовем функцией хорошо приближающейся периодическими функциями, если каково бы ни было $\varepsilon > 0$ найдется периодическая с периодом A, где A — натуральное число, функция $f(n, A)$ такая, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} |f(n) - f(n, A)| \leqslant \varepsilon.$$

Доказывается, что всякая функция натурального аргумента, которая удовлетворяет условиям теоремы Винтнера, является хорошо приближающейся периодическими функциями. На такие функции переносятся многие свойства периодических функций, в частности, для этих функций существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} f(n) = M(f).$$

Аналогия, о которой мы беседуем, приобретает более отчетливый характер, если рассматривать натуральный ряд чисел как подмножество некоторого кольца. Мы имеем в виду кольцо полиадических чисел, введенное впервые, по-видимому, Г. Прюфером [141]. Остановимся коротко на этой конструкции. Обозначим через Z кольцо целых чисел. Определим на Z норму, положив

$$N(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{x}{k}\right), \quad x \in Z,$$

где (t) — расстояние от t до ближайшего к нему целого числа. Несложно проверяется, что функция пары чисел

$$\rho(x, y) = N(x - y)$$

обладает всеми свойствами метрики, относительно которой операции сложения и умножения непрерывны. Пополнение Z относительно метрики $\rho(x, y)$ является компактным кольцом, содержащим Z в качестве плотного подмножества. Е. В. Новоселов в статье [47] осмысливает ряд предложений элементарной теории чисел как тополого-алгебраические теоремы о кольце $\mathfrak{S}$.

На аддитивной группе $\mathfrak{S}$ существует нормированная мера Хаара. Эта мера не обладает свойством полноты. Пополнение меры Хаара приводит к построению вероятностной меры на $\mathfrak{S}$. При этом мера арифметической прогрессии

$$\alpha + \beta D,$$

$\alpha, \beta \in \mathfrak{S}$, D — натуральное, равна $1/D$. Поэтому вложение Z в $\mathfrak{S}$ элиминирует трудность с тем, что асимптотическая плотность не обладает свойством счетной аддитивности. В работе [50] Е. В. Новоселов трактует задачи о вычислении средних значений функций определенных классов как задачи интегрального исчисления на $\mathfrak{S}$. Вложение кольца целых чисел в кольцо полиадических чисел позволяет Е. В. Новоселову осмыслить с новой точки зрения теорию функций хорошо приближающихся периодическими и ряд предложений, относящихся к распределению значений арифметических функций (вероятностной теории чисел).

Глава IV посвящена теории мультипликативных функций.

Теория мультипликативных функций настолько многогранна и богата результатами, что чувствуется настоятельная потребность в специальной монографии, посвященной этой теме. Мы остановимся лишь на отдельных вопросах этой теории.

В первом параграфе главы излагаются сведения об оценках сверху мультипликативных функций.

С. Вигерт [154] доказал, что для каждого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших натуральных N выполняется неравенство

$$\tau(N) \leqslant 2^{\frac{\ln N}{\ln\ln N}(1+\varepsilon)}$$

и что существует бесконечная последовательность натуральных чисел N_l такая, что

$$\tau(N_l) > 2^{\frac{\ln N_l}{\ln\ln N_l}(1-\varepsilon)}.$$

Результат Вигерта был несколько усилен С. Рамануджаном (см. [142], стр. 78—128). Обобщая эти результаты, А. А. Дроздова и Г. А. Фрейман [22] доказали следующую теорему.

Теорема. *Пусть каноническое разложение числа N имеет вид $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$. Задана функция $l(\alpha)$, определенная для натуральных n и принимающая положительные значения, такая, что*

$$\ln\frac{l(r+1)}{l(r)} = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Обозначим

$$f(N) = l(\alpha_1)\, l(\alpha_2) \dots l(\alpha_s).$$

Имеет место оценка

$$f(N) \leqslant \exp\left[\sup_{m \geqslant 1} \frac{\ln l(m)}{m} \frac{\ln N}{\ln\ln N} + O\left(\frac{\ln N \ln\ln\ln N}{(\ln\ln N)^2}\right)\right].$$

Можно предложить более общую постановку вопроса. Пусть G — свободная мультипликативная полугруппа, состоящая из натуральных чисел. Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \dots$ базис полугруппы G. Зададим положительную функцию натурального аргумента $l(\alpha)$, удовлетворяющую условию

$$\ln\frac{l(r+1)}{l(r)} = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Определим на G функцию $f(N)$ следующим образом: если

$$N = \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \dots \omega_s^{\alpha_s},$$

то

$$f(N) = l(\alpha_1) \dots l(\alpha_s).$$

Теорема. *Расположим элементы базиса полугруппы G в возрастающем порядке:*

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots$$

Предположим, что при $s \to \infty$

$$\ln \omega_s = \ln s + O(\ln \ln s).$$

Тогда

$$f(N) \leqslant \exp\left[\sup_{m \geqslant 1} \frac{\ln l(m)}{m} \frac{\ln N}{\ln \ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln \ln N)^2} \ln \ln \ln N\right)\right].$$

Теорема Дроздовой и Фреймана является частным случаем этой теоремы, если в качестве G взять мультипликативную полугруппу всех натуральных чисел. В самом деле, базисом G является множество всех простых чисел. Согласно теореме Чебышева

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\ln x},$$

и, значит,

$$p_s \asymp s \ln s,$$

следовательно,

$$\ln p_s = \ln s + O(\ln \ln s),$$

т. е. выполнено условие на рост базиса.

Центральное место в четвертой главе занимают вопросы об асимптотическом поведении (при $N \to \infty$) сумм вида

$$\sum_{n \leqslant N} f(n),$$

где $f(n)$ — мультипликативная функция натурального аргумента, т. е. вопросы суммирования значений мультипликативных функций.

Суммирование мультипликативных функций встречается едва ли не в половине задач аналитической теории чисел. В частности, в эту постановку включаются имеющие широкое применение вопросы о суммах

$$\sum_{A \leqslant n \leqslant B} e^{it \ln n},$$

а также о суммах с характерами Гекке. Мы в состоянии коснуться лишь малой части грандиозной теории суммирования мультипликативных функций. В частности, мы почти не касаемся вопросов о суммах мультипликативных функций от полиномов.

К суммированию значений мультипликативных функций можно приложить методы, изложенные в главе «Теория функций натурального аргумента», но они не учитывают специфики мультипликативных функций и их применение не всегда выгодно.

В главе, посвященной мультипликативным функциям, мы проводим ту программу, о которой говорилось в связи с аддитивными задачами с бесконечным количеством слагаемых.

Пусть задана полугруппа G натуральных чисел, базисом которой является некоторая совокупность простых чисел. Индикатор этой группы, обозначим его $f(n)$, — вполне мультипликативная функция. Прямая аддитивная теорема Бредихина по поведению

$$\sum_{p \leqslant N} f(p)$$

восстанавливает асимптотическое поведение

$$\sum_{n \leqslant N} f(n).$$

Эта идея допускает широкое развитие.

Мультипликативная функция $f(n)$ определена, коль скоро заданы ее значения на множестве степеней простых чисел. Поскольку множество простых чисел в степенях выше первой редкое, то при ограничениях на величину $f(p^\alpha)$ при $\alpha \geqslant 2$ асимптотическое поведение суммы

$$\sum_{n \leqslant N} f(n) \tag{8}$$

будет определяться поведением

$$\sum_{p \leqslant N} f(p). \tag{9}$$

Расчет же последней суммы может быть произведен на основе асимптотических законов распределения простых чисел. Таким образом, асимптотические законы распределения простых чисел находят применение к вопросу о суммировании мультипликативных функций.

Здесь прежде всего следует указать на теорему Э. Вирзинга [156].

Теорема. *Пусть* $f(n)$ — *мультипликативная функция, удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $f(n) \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) $f(p^r) \leqslant C_1 C_2^r$, $C_2 < 2$;

3) *при* $x \to \infty$

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) \ln p = (\tau + o(1))\, x,$$

где $\tau \geqslant 0$ — *постоянная*.

Тогда при $x \to \infty$

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \left(\frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(\tau)} + o(1)\right) \frac{x}{\ln x} \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \ldots\right).$$

Доказательство теоремы Вирзинга проводится элементарным методом. Оно состоит из двух частей. В первой части устанавливается, что в условиях теоремы

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = (\tau + o(1)) \frac{x}{\ln x} \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}.$$

Во второй части устанавливается, что имеет место асимптотическое соотношение

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n} = \left(\frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(1+\tau)} + o(1)\right) \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \ldots\right).$$

Другим примером теоремы, идущей от свойств последовательности $f(p)$ к свойствам последовательности $f(n)$, является следующая теорема Г. Деланжа (см. [101]).

Теорема. *Пусть* $f(n)$ — *мультипликативная функция, удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $|f(n)| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) *ряд* $\sum_{p} \frac{f(p) - 1}{p}$ *сходится*.

Тогда существует предел

$$M(f)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}f(n)$$

и

$$M(f)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ \ldots\right).$$

Аддитивной арифметической функцией называется последовательность $g(n)$, $n=1, 2, \ldots$, такая, что для любых двух взаимно простых чисел n_1 и n_2

$$g(n_1n_2)=g(n_1)+g(n_2).$$

Примеры аддитивных функций: $\ln\frac{\varphi(n)}{n}$, $\nu(n)$.

Заметим, кстати, хотя это и не имеет для нас значения, что как функция $\ln\frac{\varphi(n)}{n}$, так и функция $\nu(n)$ являются сильно аддитивными функциями; так называются функции, удовлетворяющие дополнительному условию

$$g(p^\alpha)=g(p)$$

при любом простом p и натуральном α.

Обозначим

$$x^*=\begin{cases} x, & \text{если}\quad |x|\leqslant 1,\\ 1, & \text{если}\quad |x|>1.\end{cases} \tag{10}$$

Аддитивные функции $g(n)$ классифицируются в зависимости от того, сходится или расходится ряд

$$\sum_p\frac{(g(p)^*)^2}{p}. \tag{11}$$

Если ряд (11) сходится, то будем говорить, что функция $g(n)$ стабильна; если ряд (11) расходится, то будем говорить, что функция $g(n)$ нестабильна. Так как при любом простом p

$$\left(\ln\frac{\varphi(p)}{p}\right)^*=\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim-\frac{1}{p},$$

то ряд

$$\sum_p \frac{\left(\left(\ln \frac{\varphi(p)}{p}\right)^*\right)^2}{p}$$

сходится, т. е. функция $\ln \frac{\varphi(n)}{n}$ стабильна. Функция $\nu(n)$, очевидным образом, нестабильна.

Значительное место в нашей книге посвящено вопросам распределения значений аддитивных функций. Рассмотрим, например, вопрос о распределении значений функции $\ln \frac{\varphi(n)}{n}$. Возьмем какое-либо вещественное значение u и обозначим

$$F_P(u) = \frac{1}{P} \sum_{\substack{n \leqslant P \\ \ln \frac{\varphi(n)}{n} < u}} 1.$$

$F_P(u)$, очевидно, является функцией распределения. Нас интересует поведение $F_P(u)$ при больших P. Можно доказать, что последовательность функций распределения

$$F_1(u),\ F_2(u),\ \ldots,\ F_P(u),\ \ldots \tag{12}$$

слабо сходится (или сходится в основном); под этим разумеют сходимость к некоторой функции распределения в каждой точке непрерывности последней. Возникают три вопроса:

1. Каковы условия на функцию $g(n)$, чтобы существовала предельная функция $F(u)$? Этот вопрос будем называть вопросом об интегральных предельных теоремах.

2. Каковы свойства предельной функции $F(u)$?

3. С какой скоростью $F_P(u)$ приближается к $F(u)$?

Б. Иессен и А. Винтнер [125] для изучения распределения значений аддитивных функций предложили применять метод характеристических функций. Характеристическая функция функции распределения $F_P(u)$ (последовательность (12)) имеет вид

$$f_P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\, dF_P(u) = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^{P} e^{it \ln \frac{\varphi(n)}{n}}.$$

Функция $e^{it \ln \frac{\varphi(n)}{n}} = \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it}$, очевидно, мультипликативная. Характеристическая функция для эмпирической функции распределения аддитивной функции оказывается суммой значений мультипликативных функций. Это — общее обстоятельство, открывающее возможность для применения к вопросу о распределении значений аддитивных функций методов суммирования мультипликативных функций.

В 1938 г. П. Эрдёш [106] доказал, что для данной вещественной аддитивной функции $g(n)$ сходимость рядов

$$\sum_p \frac{g(p)^*}{p}, \tag{13}$$

$$\sum_p \frac{(g(p)^*)^2}{p} \tag{11}$$

является достаточным условием для того, чтобы последовательность эмпирических функций распределения

$$F_P(x) = \frac{1}{P} \sum_{n \leqslant P,\ g(n) < x} 1$$

слабо сходилась бы к предельной. В книге мы приводим доказательство теоремы Эрдёша, проведенное на основе теоремы Деланжа. В 1939 г. П. Эрдёш и А. Винтнер [108] показали, что это условие является и необходимым.

Теперь об исследовании свойств предельной функции. В этой же работе [108] Эрдёш и Винтнер указывают на следующую теорему.

Теорема. *Функция распределения, которая является асимптотической функцией распределения для аддитивной функции, не имеет разрывов* (*т. е. непрерывна*) *тогда и только тогда, когда ряд*

$$\sum_{g(p) \neq 0} \frac{1}{p}$$

расходится.

Эта теорема следует из того, что асимптотическую функцию распределения аддитивной функции $g(n)$ можно представить как результат бесконечной композиции некоторых чисто разрывных функций распределения и критерия (данного П. Леви [135]) непрерывности бесконечной композиции. Э. Р. Ван Кампен [126] дал другое доказательство критерия Леви.

В цитированной выше статье Б. Иессена и А. Винтнера [125] (стр. 86) доказывается следующая общая теорема.

Теорема. *Если*

$$F = F_1 * F_2 * \ldots$$

— сходящаяся бесконечная композиция функций распределения, каждая из которых чисто разрывная, то F либо чисто разрывная, либо сингулярная, либо абсолютно непрерывная.

Значит, непрерывная функция распределения, которая является асимптотической функцией распределения для аддитивной функции $g(n)$, может быть либо сингулярна, либо абсолютно непрерывна. В работе П. Эрдёша [107] показывается, что оба случая могут иметь место.

Вопрос о скорости стремления к предельной функции исследуется в работе А. С. Файнлейба [70].

Р. В. Уждавинис [66] получил результаты, расширяющие теорему Эрдёша на последовательности значений стабильных аддитивных функций, аргументом которых является полином.

Случай вещественнозначных аддитивных арифметических функций $g(n)$, для которых ряд

$$\sum_p \frac{g(p)^*}{p} \tag{13}$$

расходится, трактуется следующей теоремой Деланжа [104].

Теорема. *Пусть $g(n)$ — вещественная аддитивная функция, для которой ряд* (11) *сходится, а ряд* (13) *расходится. Тогда последовательность функций распределения*

$$\frac{1}{P} \sum_{n \leqslant P,\ g(n) < x + S_P} 1,$$

где $S_P = \sum\limits_{p \leqslant P} \frac{g(p)^*}{p}$, является слабо сходящейся.

Дальнейший обзор теории распределения значений аддитивных функций мы дадим в параграфе «Распределение значений нестабильных аддитивных функций».

Исходной задачей в цикле исследования распределения значений мультипликативных функций явилась задача о функции $\varphi(n)/n$. И. Шёнеберг [150] для изучения распределения значений этой функции применил метод моментов.

Если мультипликативная функция $f(n)$ положительна (как, например, $f(n)=\varphi(n)/n$), то задача о распределении значений такой функции непосредственно редуцируется к задаче о распределении значений аддитивной функции: можно положить

$$g(n)=\ln f(n).$$

Приведем некоторые результаты, относящиеся к распределению значений функции $\varphi(n)/n$. Возьмем $0\leqslant x\leqslant 1$ и обозначим

$$V_P(x)=\frac{1}{P}\sum_{\substack{n\leqslant P\\ \varphi(n)\leqslant nx}} 1.$$

Это — функция распределения, изменение которой сосредоточено на отрезке [0, 1]. Если рассмотреть функции распределения последовательности (12) $F_P(u)$, то, очевидно,

$$F_P(u)=V_P(e^u),\quad V_P(x)=F_P(\ln x).$$

Мы уже заметили, что последовательность функций распределения $V_P(x)$ слабо сходится к некоторой функции распределения $V(x)$. И. Шёнеберг [150] доказал непрерывность предельной функции $V(x)$. Явное выражение для $V(x)$ получил Г. Дэвенпорт [97]; это выражение позволило Б. А. Венкову [13] установить ряд свойств функции $V(x)$. Скорость стремления $V_P(x)$ к $V(x)$ была первоначально оценена М. М. Тяном [65], получившим довольно грубый результат. Более тонкие оценки были получены А. С. Файнлейбом [69], [70]. Он установил, что

$$\frac{1}{P}\sum_{\substack{n\leqslant P\\ \varphi(n)\leqslant nx}} 1 = V(x) + O\left(\frac{1}{\ln P}\left(\frac{\ln\ln P}{\ln\ln\ln P}\right)^2\right)$$

равномерно по x, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Естественно, возникает вопрос об изучении распределения значений вещественнозначных функций, не удовлетворяющих требованию, что они принимают только положительные значения. Первый результат в этом направлении принадлежит П. Эрдёшу [112], [113].

Теорема. *Пусть $f(n)\geqslant 0$ — мультипликативная функция, для которой ряды*

$$\sum_p \frac{(f(p)-1)^*}{p} \quad \text{и} \quad \sum_p \frac{((f(p)-1)^*)^2}{p} \tag{14}$$

сходятся. Тогда последовательность функций распределения

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)\leqslant x}} 1$$

при $N\to\infty$ слабо сходится к некоторой предельной функции распределения. Если, обратно, для мультипликативной функции $f(n)$, $f(n)\geqslant 0$, $F_N(x)$ слабо сходится к некоторой функции распределения $F(x)$ и

$$F(x)\neq\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

то ряды (14) *сходятся.*

А. В. Бакштис [3] получил аналог теоремы Эрдёша — Винтнера и расширение теоремы Эрдёша на вещественнозначные мультипликативные функции произвольного знака, а в работах [4] и [5] получил результаты в случае, когда требование сходимости рядов (14) нарушается. Основным аппаратом исследования в этих работах является построенная В. М. Золотаревым [24] теория перемножения независимых случайных величин. В книге мы приводим реферат работы А. В. Бакштиса [3].

Мы говорили о распределении значений стабильных аддитивных функций. Систематическое построение вероятностной теории чисел, данное под углом приложения к распределению значений нестабильных аддитивных функций, было осуществлено И. П. Кубилюсом в монографии [34]. В книге мы приводим лишь отдельные сведения по вероятностной теории нестабильных аддитивых функций.

В теоремах о сумматорных формулах для мультипликативных функций, о которых до сих пор шла речь (теорема Вирзинга, теорема Деланжа), условия на суммируемую функцию накладывались широкие, а результаты носили характер асимптотической эквивалентности. Для некоторых арифметических величин известны и являются вполне естественными асимптотические разложения. Вспомним, например, асимптотическое разложение $\pi(x)$ по степеням $\ln x$.

Приведем пример, относящийся к суммированию мультипликативных функций. Пусть k — некоторый модуль, $l_1, l_2, \ldots, l_r$ — r остатков по модулю k. Определим функцию $f(n)$ следующим образом: $f(n)=1$, если в каноническое разложение n входят лишь простые числа, сравнимые с $l_1, l_2, \ldots, l_r$ по модулю k; $f(n)=0$ для остальных n. Ясно, что $f(n)$ есть мультипликативная функция. Сумма

$$N(x, k, l_1, l_2, \ldots, l_r)=\sum_{n\leqslant x} f(n)$$

есть количество чисел, не превосходящих x, каждый простой делитель которых удовлетворяет сравнению $p\equiv l_\mu \pmod k$, $\mu=1, 2, \ldots, r$. Мы уже приводили асимптотическую формулу Ландау для этой величины. Теперь сформулируем следующий результат (Б. В. Левин и А. С. Файнлейб [37]).

Теорема. *При $x\to\infty$ имеет место следующее асимптотическое разложение*:

$$N(x, k, l_1, l_2, \ldots, l_r)\sim x\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (\ln x)^{\frac{r}{\varphi(m)}-\nu}.$$

Если результат Ландау является обобщением слабой формы асимптотического закона распределения простых чисел

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

то приведенная теорема является обобщением аппроксимации функции $\pi(x)$ интегральным логарифмом.

Мы говорили также об асимптотической формуле для суммы

$$\nu_G(x) = \sum_{\substack{n=u^2+v^2 \\ n \leqslant x}} 1.$$

Рамануджан предположил, что существует асимптотическое разложение для величин $\nu_G(x)$ по степеням $\ln x$. Это предположение оказалось справедливым: об истории вопроса и доказательстве теоремы см. И. С. Лютар [136].

Подобные разложения — классическая сфера действия метода производящих рядов Дирихле. В работе Левина и Файнлейба [37] доказана общая теорема о суммах значений мультипликативных функций (теорема 2.4.1), которая при определенных ограничениях на суммируемую функцию $f(n)$ конкретизируется в асимптотическое разложение (по степеням $\ln x$) суммы

$$\sum_{n \leqslant x} f(n).$$

При расчете асимптотического поведения этой суммы с конкретной функцией $f(n)$ применяется либо асимптотический закон распределения простых чисел, либо асимптотический закон распределения простых идеалов поля алгебраических чисел. Таким образом, метод Левина и Файнлейба — это метод переноса информации.

Мы, следуя работе [37], иллюстрируем метод на примере задачи о количестве чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, т. е. выводим асимптотическое разложение для величины

$$\nu_G(x) = \sum_{\substack{n=u^2+v^2 \\ n \leqslant x}} 1.$$

Для ряда классических задач теории чисел (например, проблемы круга, проблемы делителей) характерно суммирование мультипликативных функций, для которых в асимптотической формуле для выражения

$$\sum_{n \leqslant x} f(n)$$

имеется степенное понижение. Доказаны теоремы общего характера, позволяющие ориентироваться в таких постановках задач (см. Р. О. Кузьмин [36], К. Чандрасекхаран и Р. Нарасимхан [95], А. С. Файнлейб [71]). Для получения наиболее точных результатов в этих задачах обычно нужно использовать оценки тригонометрических сумм.

В настоящей книге мы рассматриваем лишь одну задачу на суммирование мультипликативной функции, в которой остаточный член асимптотической формулы имеет степенное понижение, — задачу о поведении при $x \to \infty$ суммы

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n^2).$$

Это упрощенный вариант вопроса, рассмотренного М. И. Строниной в работе [62]. Изложение носит элементарный характер, но в основе лежат две глубокие теоремы, доказательство которых проводится методом производящих рядов Дирихле с использованием современных средств аналитической теории чисел. Это, во-первых, оценка, относящаяся к проблеме делителей

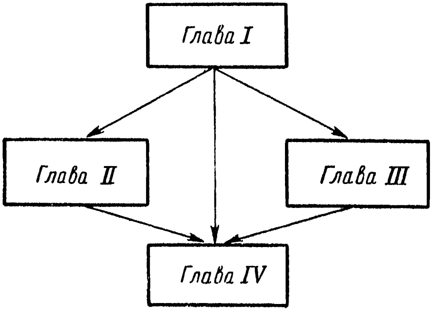
$$\sum_{n \leqslant x} \tau_3(n) = xP(\ln x) + O(x^{37/75+\varepsilon}),$$

где $\tau_3(n)$ — количество представлений n в виде произведения трех натуральных множителей, $P(x)$ — некоторый многочлен второй степени (см. [64], стр. 317). Во-вторых, это оценка для суммы значений функции Мёбиуса

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = O\left(xe^{-c\frac{(\ln x)^{3/5}}{(\ln \ln x)^{1/5}}}\right);$$

$c > 0$ — постоянная (см. [153], стр. 191).

Введение мы закончим схемой, поясняющей логическую связь глав книги.



ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИЗА

1.1. О теоремах тауберова типа для степенных рядов и рядов Дирихле

В аналитической теории чисел, как и в ряде других областей науки, применяется метод производящих функций. Производящими функциями аналитической теории чисел являются степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

и ординарные ряды Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}. \tag{2}$$

Степенные ряды и ординарные ряды Дирихле являются частными видами более общего понятия рядов Дирихле, под которыми разумеют выражения вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{3}$$

где

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n, \ \ldots, \ \lambda_n \to \infty.$$

В самом деле, ряд (1) после подстановки $z = e^{-s}$ принимает вид (3), а в ряде (2) $\lambda_n = \ln n$. Еще более общим объектом является преобразование Лапласа — Стилтьеса

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-ts}\, d\alpha(t), \tag{4}$$

где $\alpha(t)$ — определенная на $[0, \infty)$ функция, имеющая ограниченную вариацию на каждом конечном интервале изменения t.

Классическим утверждением теории степенных рядов является следующая теорема Абеля.

Теорема. *Пусть степенной ряд*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

с единичным кругом сходимости сходится в точке $z=1$ к сумме A. Тогда при $z \to 1$ по вещественной оси

$$\lim_{z \to 1-0} f(z)=A.$$

В теореме Абеля постулируется некоторое свойство коэффициентов степенного ряда $\left(\text{в данном случае сходимость ряда } \sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ и выводится некоторое свойство функции $f(z)$. Теоремы, идущие от свойств коэффициентов степенного ряда к свойствам функции, представимой степенным рядом, назовем теоремами абелева типа для степенного ряда.

Литтлвуду принадлежит следующее обращение теоремы Абеля.

Теорема. *Пусть коэффициенты степенного ряда* (1), *сходящегося при $|z|<1$, суть вещественные числа и $na_n \leqslant C$. Пусть существует предел*

$$\lim_{z \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = A.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

сходится и сумма его равна A. Тот же результат справедлив при условии $na_n \geqslant -C$.

В теореме Литтлвуда из свойств функции, представимой степенным рядом, выводится свойство коэффициентов степенного ряда. Теоремы такого типа будем называть тауберовыми теоремами.

Мы будем употреблять термины «абелева и тауберова теоремы» не только для степенных рядов, но и для преобразования Лапласа — Стилтьеса (4); именно теоремы, идущие от свойств функции $\alpha(t)$ к свойствам функции $f(s)$, будем называть абелевыми теоремами; теоремы, идущие в обратном направлении, будем называть тауберовыми теоремами. Заметим, что термины «абелева теорема» и «тауберова теорема» употребляются и в более широком смысле (см. об этом в книге Г. Харди [83]).

Наша цель сейчас состоит в том, чтобы дать обзор необходимых нам фактов тауберовой теории.

Прежде всего коснемся вопроса об обобщении теоремы Литтлвуда на преобразование Лапласа — Стилтьеса (4). Функция $\alpha(t)$, заданная на $[0, \infty)$, называется медленно колеблющейся, если

$$\alpha(t') - \alpha(t) \to 0$$

при $t \to \infty$, $t' > t$, $t'/t \to 1$. Следующее предложение будем называть обобщенной теоремой Литтлвуда.

Т е о р е м а. *Пусть интеграл*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha(t)$$

сходится при $s > 0$ и когда $s \to 0$ справа, то

$$f(s) \to A.$$

Пусть $\alpha(t)$ — медленно колеблющаяся функция. Тогда при $t \to \infty$

$$\alpha(t) \to A.$$

По поводу доказательства этой теоремы мы отсылаем к книге Г. Харди «Расходящиеся ряды» [83], стр. 208, где это утверждение сформулировано как теорема 105. Я. Коревоар [130] исследовал вопрос об остаточном члене в теореме Литтлвуда, при этом ему удалось дать и значительное обобщение этой теоремы. Теорема

Кореваара (мы формулируем ее не в полной общности) гласит:

Теорема. *Пусть* α — *вещественное число,* $K_1 > 0$ — *постоянная. Обозначим* *)

$$\varphi(n) = K_1 n^{\alpha}.$$

Пусть $\omega(u)$, *определенная при* $u > 0$, — *положительная, монотонно стремящаяся к нулю, когда* $u \to 0$, *функция с условием*

$$\varliminf_{u \to 0} u \ln \omega(u) > -\infty.$$

Предположим, что на степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nz}$ *наложены следующие условия:*

$$a_n > -\varphi(n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и при $z > 0$

$$|f(z) - A| < \omega(z).$$

Тогда при $n = 1, 2, \ldots$ *справедлива следующая оценка:*

$$\left| \sum_{k \leqslant n} a_k - A \right| \leqslant \min_{p \geqslant K_0} \left(K_2 \frac{n\varphi(n)}{p} + K_3^p \omega\left(\frac{p}{n}\right) \right),$$

где K_0, K_2, K_3 — *константы, зависящие только от функций* φ *и* ω, $K_3 > 1$.

Отметим два частных случая этой общей теоремы.

1. Если $a_n \geqslant -K_1/n$ и при $z \to 0$

$$f(z) = A + O\left(\frac{1}{\left(\ln \frac{1}{z}\right)^{\lambda}}\right),$$

$\lambda > 0$, то

$$\sum_{k \leqslant n} a_k = A + O\left(\frac{1}{\ln \ln n}\right).$$

2. Если $a_n \geqslant -K_1 n^{\alpha}$ и при $z \to 0$

$$f(z) = A + O(z^{\lambda}),$$

*) Наперекор списку стандартных обозначений $\varphi(n)$ здесь не обозначает функцию Эйлера.

причем $\lambda > -\alpha - 1$, то

$$\sum_{k \leqslant n} a_k = A + O(n^{1+\alpha} \ln^{-1} n).$$

В работе [130] Я. Кореваар приводит примеры, показывающие, что для широкого класса функций $\omega(u)$ его оценки неулучшаемы.

Легко доказать следующую теорему абелева типа для степенного ряда.

Теорема. *Задана бесконечная числовая последовательность*

$$a_1, a_2, \ldots$$

Предположим, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k \leqslant n} a_k = 1.$$

Тогда

$$\lim_{z \to 1-0} (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1.$$

Г. Харди и Дж. Литтлвуд [119] обнаружили, что эта теорема может быть обращена; именно ими было доказано следующее предложение.

Теорема. *Предположим, что для степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

с неотрицательными коэффициентами справедливо предельное соотношение

$$\lim_{z \to 1-0} (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k \leqslant n} a_k = 1.$$

Ограничение $a_n \geqslant 0$ существенно, как показывают примеры, его снять нельзя.

Тауберова теорема Харди и Литтлвуда допускает обобщение со степенных рядов на ряды Дирихле. Сформулируем ее вариант для ординарных рядов Дирихле.

Теорема. *Пусть ординарный ряд Дирихле с неотрицательными коэффициентами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}$$

при $\sigma \to 0$ *справа по вещественной оси эквивалентен* $1/\sigma$, *т. е.*

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} = 1.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\sum_{k \leqslant n} a_k \sim \ln n.$$

Было проведено много исследований относительно остаточного члена в тауберовой теореме Харди и Литтлвуда. Окончательное решение получил Г. Фрейд [117]; окончательное — это означает, что теорема Фрейда в общем случае не может быть усилена (пример Я. Кореваара [129]). В частности, теорема Фрейда утверждает, что если для степенного ряда с неотрицательными коэффициентами при $z \to 1-0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{(1-z)^\alpha}\left(1 + O\left((1-z)^\varepsilon\right)\right),$$

где $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, то

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha + O\left(\frac{x^\alpha}{\ln x}\right).$$

Мы посвящаем один параграф этой книги подробному изложению теоремы Фрейда.

Теперь перейдем к рассмотрению комплексных тауберовых теорем, т. е. теорем, в которых условие накладывается на поведение интеграла Лапласа — Стилтьеса в комплексной области. Комплексными тауберовыми теоремами являются прежде всего формулы обращения теории функций комплексного переменного.

Задан степенной ряд с радиусом сходимости, равным единице:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Пусть C — окружность с центром в начале координат радиуса, меньшего 1. По формуле Коши для коэффициентов степенного ряда

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Тогда (предполагая N целым числом) имеем

$$\sum_{n=0}^{N} a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^{N+1}}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(1-z)\,z^{N+1}}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{1-z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{1-z}\,\frac{1}{z^{N+1}}\,dz. \qquad (5)$$

Аналогом формулы (5) для рядов Дирихле является формула Перрона. Мы не будем здесь приводить эту формулу; в аналитической теории чисел используется несколько видоизмененная ее форма (см. Е. К. Титчмарш [64], стр. 66).

Теорема. *Пусть функция $f(s)$, $s=\sigma+it$, представлена сходящимся при $s>1$ ординарным рядом Дирихле*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

где $a_n=O(\psi(n))$, причем $\psi(n)$ не убывает и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma}}=O\left(\frac{1}{(\sigma-1)^{\alpha}}\right)$$

при $\sigma \to 1$. *Тогда, если* $C > 0$, $\sigma + C > 1$, x — *нецелое, а* N *ближайшее к* x *целое число, то*

$$\sum_{n<x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-iT}^{C+iT} f(s+w) \frac{x^w}{w}\, dw + O\left(\frac{x^C}{T(\sigma+C-1)^\alpha}\right) + \\ + O\left(\frac{\psi(2x)\, x^{1-\sigma} \ln x}{T}\right) + O\left(\frac{\psi(N)\, x^{1-\sigma}}{T\,|x-N|}\right).$$

Если же x — *целое число, то соответствующий результат имеет вид*

$$\sum_{n=1}^{x-1} \frac{a_n}{n^s} + \frac{a_x}{2x^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-iT}^{C+iT} f(s+w) \frac{x^w}{w}\, dw + \\ + O\left(\frac{x^C}{T(\sigma+C-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{\psi(2x)\, x^{1-\sigma} \ln x}{T}\right).$$

Обратить степенной ряд можно, используя информацию о его поведении в окрестности точки $z = 1$. При этом возникают аналоги вещественных тауберовых теорем — теоремы Литтлвуда и теоремы Харди — Литтлвуда.

Аналогом теоремы Литтлвуда является известная теорема П. Фату [116].

Теорема. *Пусть функция* $f(z)$ *определена степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

сходящимся при $|z| < 1$. *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична в точке* $z = 1$. *Если* $a_n \to 0$, *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

сходится.

Можно показать, что в случае вещественных коэффициентов a_n условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

можно заменить односторонним условием

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Полная аналогия с теоремой Литтлвуда! Мы видим, что (в данном случае) наложение условия в комплексной области ведет к ослаблению дополнительного тауберова условия (вместо $a_n = O(1/n)$ в теореме Литтлвуда лишь $a_n \to 0$ в теореме Фату).

Я. Коревар [131] дал количественную форму и обобщение теоремы Фату. Мы приведем здесь формулировку теоремы Кореваара в несколько менее общей форме, чем это сделано в оригинальной работе.

Теорема. *Пусть функция, представленная степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

аналитична при $|z| < 1$ *и аналитична в точке* $z = 1$. *Пусть* α — *вещественное число. Обозначим*

$$\psi(n) = Kn^{\alpha},$$

где $K > 0$ — *постоянная. Предположим, что*

$$a_n \geqslant -\psi(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\sum_{k \leqslant n} a_k = f(1) + O(\psi(n)).$$

Заметим, что эту теорему Коревар доказал методом, близким к тому методу, которым доказывается теорема Литтлвуда.

Теорема Фату была распространена на общие ряды Дирихле М. Риссом [147].

Теорема. *Пусть* c — *произвольное фиксированное положительное число. Пусть функция* $f(s)$ *представляется рядом Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_0 e^{-\lambda_0 c} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n c}}{e^{-\lambda_n c}} = 0,$$

вследствие которого $f(s)$ *является регулярной при* $\operatorname{Re} s > 0$ *функцией. Пусть, наконец,* $f(s)$ *регулярна в точке* $s = s_0$,

$\operatorname{Re} s_0 = 0$. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s_0}$$

сходится.

Для того чтобы связать теорему Фату для степенного ряда с теоремой Рисса, заметим (это легко доказать), что условие $a_n \to 0$ эквивалентно тому, что при любом $R > 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_0 + a_1 R + \ldots + a_n R^n}{R^n} = 0.$$

А. Г. Постников [53] указал на комплексный аналог тауберовой теоремы Харди и Литтлвуда.

Теорема. *Пусть степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

имеет радиус сходимости, равный 1. *Пусть* $z = re^{i\theta}$ $(r = |z|)$. *Предположим, что при* $|\theta| \leqslant c < \pi$ *выполняется неравенство*

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + O(1).$$

Тогда

$$\sum_{n \leqslant N} a_n = N + O(\ln N).$$

Сравнивая теорему Постникова с теоремой Фрейда, мы убеждаемся в том, что наложение условий в комплексной области приводит (в данной ситуации) к значительному улучшению остаточного члена.

В аналитической теории чисел имеет применение комплексная тауберова теорема для интегралов Дирихле — теорема Икеара.

Пусть $\psi(x)$ — неубывающая функция на интервале $(0, \infty)$ и $\psi(0) = 0$. Рассмотрим интеграл

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, d\psi(x). \tag{6}$$

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:* 1) *интеграл* (6) *сходится при* $\operatorname{Re} s > 1$;

2) *положим* $s=1+\varepsilon+it$ $(\varepsilon>0)$ *и обозначим* $h_\varepsilon(t)=f(s)-\frac{1}{s-1}$. *Равномерно по* t *на любом конечном интервале прямой* $\operatorname{Re} s=1$ *существует предел*

$$h(t)=\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(t).$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{e^x}=1.$$

Доказательство этой теоремы содержится во многих источниках, и мы не будем его приводить, отсылая, например, к книге С. Ленга [41], стр. 167.

Из этой теоремы получаем

Следствие. *Пусть*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

— ординарный ряд Дирихле с неотрицательными коэффициентами, который сходится при $\operatorname{Re} s>1$, *пусть, далее,* $f(s)$ *— регулярная функция на прямой* $\operatorname{Re} s=1$, *за исключением точки* $s=1$, *где она имеет полюс первого порядка с вычетом, равным* 1. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}a_n=1.$$

В теореме Икеара условие накладывается на поведение ряда Дирихле в окрестности всей абсциссы сходимости. Сравнивая этот результат с теоремой Харди и Литтлвуда для ординарного ряда Дирихле, мы видим, что наложение условий в окрестности всей абсциссы сходимости приводит к качественно более сильному результату.

Обобщения теоремы Икеара предлагались Д. А. Райковым [57] и Г. Деланжем [99]. Приведем теорему Деланжа.

Теорема. *Пусть* ρ *— вещественное число,* $\rho\neq 0, -1, -2, \ldots$ *Предположим, что при* $\operatorname{Re} s>a$

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,d\varphi(x)=\frac{1}{(s-a)^\rho}\,g(s)+h(s),$$

где $g(s)$ *и* $h(s)$ — *регулярные при* $\operatorname{Re} s \geqslant a$ *функции, и* $g(a) \neq 0$. *Тогда при* $x \to \infty$

$$\varphi(x) \sim \frac{g(a)}{\Gamma(\rho)} e^{ax} x^{\rho-1}.$$

Для задач аддитивной теории чисел, связанных с разбиением натуральных чисел на бесконечное количество слагаемых, имеют значение тауберовы теоремы, относящиеся к быстро растущим преобразованиям Лапласа — Стилтьеса. В этой книге мы приводим доказательство следующей теоремы Ингама (см. [124]).

Теорема. *Пусть в преобразовании Лапласа — Стилтьеса*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-us} d\alpha(u) \tag{4}$$

функция $\alpha(u)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\alpha(0) = 0$;

2) $\alpha(u)$ *не убывает при* $u \to \infty$;

3) $f(s) \sim C\left(\frac{M}{s}\right)^{m\beta - \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^{\beta}}$ (*где* C, M, m, $\beta > 0$ — *вещественные константы*) *равномерно, когда* $s \to 0$ *в любом углу вида* $|\operatorname{Im} s| \leqslant \Delta \operatorname{Re} s$, $0 < \Delta < \infty$. *Тогда при* $u \to \infty$

$$\alpha(u) \sim C\sqrt{\frac{1-\alpha}{2\pi}}(uM)^{m\alpha - \frac{1}{2}} e^{\frac{(uM)^{\alpha}}{\alpha}}.$$

1.2. Тауберова теорема Харди и Литтлвуда с остаточным членом Фрейда

Сформулируем теорему Фрейда.

Теорема. *Пусть* $f(t)$ — *неотрицательная при* $0 \leqslant t < \infty$ *функция:*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} d\tau(t),$$

где $\tau(t)$ — *определенная при* $0 \leqslant t < \infty$, *монотонно неубывающая функция. Пусть* $\alpha > 0$. *Если при вещественном*

$s>0$

$$F(s)=A\frac{\Gamma(1+\alpha)}{s^{\alpha}}(1+r(s)),$$

где

$$|r(s)|\leqslant C_0 s^{\varepsilon},$$

$A>0$, $C_0>0$, $\varepsilon>0$ — *постоянные, то*

$$\int_0^x f(t)\,d\tau(t)=Ax^{\alpha}(1+\rho(x)),$$

где

$$|\rho(x)|<\frac{C_1}{\ln x},$$

$C_1>0$ — *постоянная.*

Покажем, как в этой теореме содержится теорема Харди — Литтлвуда (с остаточным членом) для степенного ряда.

Пусть при $z\to 1$ для ряда с неотрицательными коэффициентами выполняется соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\frac{1}{(1-z)^{\alpha}}(1+O((1-z)^{\varepsilon})),$$

где $\varepsilon>0$. Тогда при $s\to 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}=\frac{1}{s^{\alpha}}(1+O(s^{\varepsilon})),$$

$\varepsilon>0$. Берем любую неотрицательную функцию $f(t)$, которая обладает свойством

$$f(n)=a_n,\quad n=0,\ 1,\ \ldots,$$

а функцию $\tau(t)$ определим равенствами

$$\tau(0)=0,$$
$$\tau(t)=[t]+1,\quad t>0.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-ts}\,d\tau(t)=\frac{1}{s^{\alpha}}(1+O(s^{\varepsilon})).$$

Теорема Фрейда дает $\left(A = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\right)$

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \int_0^x f(t)\, d\tau(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha + O\left(\frac{x^\alpha}{\ln x}\right).$$

Доказательство теоремы Фрейда опирается на теорию Маркова односторонних приближений.

Для данного $\alpha > 0$ мы вводим числа

$$s_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^k \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha - 1} dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Эти числа можно вычислить: сделаем замену переменных $\ln \frac{1}{x} = u$, получим

$$s_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u(k+1)} u^{\alpha-1}\, du =$$

$$= \frac{1}{(k+1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\, dz = \frac{1}{(k+1)^\alpha}.$$

Лемма 1. *При любом целом* $m \geqslant 1$

$$c_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Допустим, что $c_m = 0$, тогда между строками должно быть линейное соотношение, т. е. должны найтись m не равных одновременно нулю чисел $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ таких, что

$$\begin{aligned} \beta_0 s_0 &+ \beta_1 s_1 + \ldots + \beta_{m-1} s_{m-1} = 0, \\ \beta_0 s_1 &+ \beta_1 s_2 + \ldots + \beta_{m-1} s_m = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_0 s_{m-1} &+ \beta_1 s_m + \ldots + \beta_{m-1} s_{2m-2} = 0. \end{aligned}$$

Но первое равенство можно записать так:

$$\beta_0 \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx + \beta_1 \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx + \ldots$$

$$\ldots + \beta_{m-1} \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{m-1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1}) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1}) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = 0,$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\beta_0 x + \beta_1 x^2 + \ldots + \beta_{m-1} x^{m}) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = 0,$$

. . . .

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\beta_0 x^{m-1} + \beta_1 x^{m} + \ldots + \beta_{m-1} x^{2m-2}) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = 0.$$

Умножая первое равенство на β_0, второе на β_1, третье на β_2, ... и складывая, получим

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1})^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = 0.$$

На $(0, 1)$ найдется такой интервал (a, b), на котором

$$\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1} \neq 0.$$

Значит, на (a, b)

$$(\beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-1} x^{m-1})^2 \geqslant \rho > 0$$

и

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_{m-1}x^{m-1})^2\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\rho}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx>0,$$

ибо на (a, b) и $\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}>0$.

Противоречие доказывает утверждение.

Введем многочлены $t_m(x)$, $m=0, 1, \ldots$, следующим образом: $t_0(x)=1$; при $m\geqslant 1$

$$t_m(x)=L_0^{(m)}+L_1^{(m)}x+\ldots+L_{m-1}^{(m)}x^{m-1}+L_m^{(m)}x^m,$$

где числа $L_0^{(m)}, L_1^{(m)}, \ldots, L_{m-1}^{(m)}$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} L_0^{(m)}s_0+L_1^{(m)}s_1+\ldots+L_{m-1}^{(m)}s_{m-1}+s_m&=0,\\ L_0^{(m)}s_1+L_1^{(m)}s_2+\ldots+L_{m-1}^{(m)}s_m+s_{m+1}&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ L_0^{(m)}s_{m-1}+L_1^{(m)}s_m+\ldots+L_{m-1}^{(m)}s_{2m-2}+s_{2m-1}&=0, \end{aligned}$$

положим также $L_m^{(m)}=1$. Поскольку $c_m\neq 0$, то коэффициенты определяются однозначно:

$$t_m(x)=\frac{(-1)^m}{c_m}\begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^m\\ s_0 & s_1 & \ldots & s_m\\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{m+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-1}\end{vmatrix}.$$

Лемма 2. *Для каждого целого $m\geqslant 2$ найдутся такие вещественные числа a_m и b_m, что*

$$t_m(x)=(x+b_m)t_{m-1}(x)-a_m t_{m-2}(x).$$

Доказательство. Разделим $t_m(x)$ на $t_{m-1}(x)$ с остатком:

$$t_m(x)=(x+b_m)t_{m-1}(x)+R(x);$$

$R(x)$ имеет степень не выше $m-2$. Мы имеем

$$L_m^{(m)} - L_{m-1}^{(m-1)} = 0, \quad L_{m-1}^{(m)} - b_m L_{m-1}^{(m-1)} - L_{m-2}^{(m-1)} = 0.$$

Обозначим $R(x) = \sum_{k=0}^{m-2} b_k x^k$. Докажем, что коэффициенты $R(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-2} l_k s_{k+j} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{m-2} l_k s_{k+j} = s_j \left(L_0^{(m)} - b_m L_0^{(m-1)}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-2} \left(L_k^{(m)} - b_m L_k^{(m-1)} - L_{k-1}^{(m-1)}\right) s_{k+j} = s_j \left(L_0^{(m)} - b_m L_0^{(m-1)}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-2} \left(L_k^{(m)} - b_m L_k^{(m-1)} - L_{k-1}^{(m-1)}\right) s_{k+j} +$$

$$+ s_{j+m-1} \left(L_{m-1}^{(m)} - b_m L_{m-1}^{(m-1)} - L_{m-2}^{(m-1)}\right) + s_{j+m} \left(L_m^{(m)} - L_{m-1}^{(m-1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} L_k^{(m)} s_{k+j} - b_m \sum_{k=0}^{m-1} L_k^{(m-1)} s_{k+j} - \sum_{k=1}^{m} L_{k-1}^{(m-1)} s_{k+j} = 0.$$

Системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-2} L_k^{(m-2)} s_{k+j} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

удовлетворяют по определению коэффициенты полинома $t_{m-2}(x)$.

Так как

$$\begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_{m-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & \ldots & s_{2(m-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то

$$R(x) = -a_m t_{m-2}(x).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *При* $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 x^j t_m(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=0.$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 x^j t_m(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1\left(L_0^m x^j+L_1^{(m)}x^{j+1}+\ldots+x^{m+j}\right)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=$$

$$=\frac{L_0^{(m)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 x^j\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\ldots$$

$$\ldots+L_{m-1}^{(m)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 x^{m-1+j}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 x^{m+j}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=L_0^{(m)}s_j+L_1^{(m)}s_{j+1}+\ldots$$

$$\ldots+L_{m-1}^{(m)}s_{m-1+j}+s_{m+j}=0$$

при $j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$.

Следствие. *Если* $f(x)$ — *любой многочлен степени не превосходящей* $m-1$, *то*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 f(x)\,t_m(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=0.$$

В частности, если $i\neq j$, то

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 t_j(x)\,t_i(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=0.$$

Таким образом, многочлены $1,\ t_1(x),\ t_2(x),\ \ldots$ образуют ортогональную на $(0,\ 1)$ систему с весом $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}$.

Лемма 4. *Все корни многочлена $t_m(x)$ вещественные и различные и лежат на интервале* $(0, 1)$.

Доказательство. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — вещественные корни $t_m(x)$ нечетной кратности. Допустим, что $k < m$. Образуем многочлен

$$\omega(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)\, t_m(x).$$

Из разложения $t_m(x)$ на множители ясно, что

$$\omega(x) \geqslant 0.$$

По предположению $k < m$, и поэтому

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - c_1) \ldots (x - c_k)\, t_m(x) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha - 1} dx = 0,$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \omega(x) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha - 1} dx = 0.$$

Но этого быть не может, ибо $\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha - 1} > 0$ на $(0, 1)$, и $\omega(x)$ не тождественно равный нулю, принимающий только неотрицательные значения многочлен.

Докажем, что при любом $m \geqslant 1$ все корни $t_m(x)$ лежат на интервале $(0, 1)$. Предположим, что имеется корень ξ многочлена $t_m(x)$, который не лежит на интервале $(0, 1)$. Мы рассмотрим предположение $\xi \geqslant 1$ (предположение $\xi \leqslant 0$ рассматривается аналогично). Так как $-\frac{t_m(x)}{x - \xi}$ — многочлен степени не выше $m - 1$, то

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t_m(x) \left(-\frac{t_m(x)}{x - \xi}\right) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha - 1} dx = 0.$$

Но на $(0, 1)$ $-\frac{t_m^2(x)}{x - \xi} \geqslant 0$, $\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha - 1} > 0$, что приводит к противоречию с равенством

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(-\frac{t_m^2(x)}{x - \xi}\right) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha - 1} dx = 0.$$

Введем выражение

$$\psi_m(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{t_m(x)-t_m(z)}{x-z}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx.$$

Это многочлен степени не выше $m-1$ (легко видеть, что коэффициент при старшем члене в этом многочлене равен 1).

На основании рекуррентного соотношения для многочленов $t_m(x)$ доказывается следующее утверждение.

Лемма 5. *При* $m\geqslant 2$

$$\psi_m(z)=(z+b_m)\,\psi_{m-1}(z)-a_m\psi_{m-2}(z).$$

Рассмотрим рациональную функцию $\frac{\psi_m(x)}{t_m(x)}$. Разложим ее на простейшие дроби. Поскольку все корни $t_m(x)$ вещественные и простые, то разложение $\frac{\psi_m(x)}{t_m(x)}$ будет иметь вид

$$\frac{\psi_m(x)}{t_m(x)}=\sum_{\xi}\frac{\rho_m(\xi)}{x-\xi}$$

(ξ — корни уравнения $t_m(x)=0$, $\rho_m(\xi)$ — это обозначение для коэффициентов).

Лемма 6.

$$\rho_m(\xi_i)=\frac{\psi_m(\xi_i)}{t'_m(\xi_i)}.$$

Доказательство очевидно.

Установим следующую квадратурную формулу.

Лемма 7. *Какой бы ни был многочлен* $\Omega(x)$ *степени, не превосходящей* $2m-1$, *справедливо соотношение*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \Omega(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx=\sum_{\xi}\rho_m(\xi)\,\Omega(\xi).$$

Доказательство. Возьмем многочлен $\Omega(x)$ степени не выше $2m-1$ и разделим его на $t_m(x)$ с остатком:

$$\Omega(x)=t_m(x)\,\theta(x)+\Omega_0(x).$$

Установим формулу

$$\Omega_0(x)=\sum_{\xi_i}\frac{t_m(x)}{(x-\xi_i)\,t'_m(\xi_i)}\,\Omega(\xi_i).$$

В правой части и левой части стоят многочлены степени не выше $m-1$. Для того чтобы показать, что правая часть равна левой, достаточно показать, что значения правой части совпадают со значениями левой части в m точках.

При $x=\xi_j$, $j=1, 2, \ldots, m$

$$\Omega_0(\xi_j)=\Omega(\xi_j)-t_m(\xi_j)\,\theta(\xi_j)=\Omega(\xi_j).$$

При $x=\xi_j$, $j=1, 2, \ldots, m$

$$\sum_{\xi_j}\frac{t_m(x)}{(x-\xi_j)\,t'_m(\xi_j)}\,\Omega(\xi_j)\Big|_{x=\xi_j}=\Omega(\xi_j).$$

Формула установлена.

Рассмотрим

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\Omega(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t_m(x)\,\theta(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\Omega_0(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\Omega_0(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx.$$

Первый интеграл обратился в нуль, ибо $\theta(x)$ — многочлен степени не выше $m-1$. Далее,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\Omega(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\Omega_0(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\left(\sum_{\xi_i}\frac{t_m(x)}{(x-\xi_i)\,t'_m(\xi_i)}\right)\Omega(\xi_i)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=$$

$$=\sum_{\xi_i}\frac{\Omega(\xi_i)}{t'_m(\xi_i)}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{t_m(x)-t_m(\xi_i)}{x-\xi_i}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=$$

$$=\sum_{\xi_i}\Omega(\xi_i)\,\frac{\psi_m(\xi_i)}{t'_m(\xi_i)}=\sum_{\xi_i}\rho_m(\xi_i)\,\Omega(\xi_i).$$

Лемма доказана. Установим несколько следствий.

Следствие 1.

$$\rho_m(\xi_j) > 0, \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

Действительно, рассмотрим многочлен

$$Q(x) = \prod_{i \neq j} (x - \xi_i)^2 = \frac{t_m^2(x)}{(x - \xi_j)^2}.$$

Степень этого многочлена будет $2m - 2$. На $(0, 1)$ $Q(x) \geqslant 0$. Далее,

$$\sum_\xi \rho_m(\xi) Q(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 Q(x) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx > 0,$$

$$0 < \sum_\xi \rho_m(\xi) Q(\xi) = \rho_m(\xi_l) Q(\xi_l).$$

Но $Q(\xi_l) > 0$, следовательно, $\rho_m(\xi_l) > 0$, что и требовалось доказать.

Мы в дальнейшем будем обозначать корни многочлена $t_m(x)$ через $\xi_i^{(m)}$, а величины $\rho_m(\xi_i^{(m)})$ будем записывать как $\rho(\xi_i^{(m)})$.

Следствие 2. *Какова бы ни была непрерывная на отрезке* $[0, 1]$ *функция* $f(x)$,

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \rho(\xi_i^{(m)}) f(\xi_i^{(m)}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f(x) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx.$$

Доказательство. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Зададим $\varepsilon > 0$. По классической теореме Вейерштрасса существует такой многочлен $\Omega(x)$, что

$$|f(x) - \Omega(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть N — степень многочлена $\Omega(x)$. При $m \geqslant (N+2)/2$ по квадратурной формуле имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \Omega(\xi_i^{(m)}) \rho(\xi_i^{(m)}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \Omega(x) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx.$$

При $m \geqslant (N+2)/2$ оценим разность

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i^{(m)})\,\rho(\xi_i^{(m)}) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 f(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{m} \rho(\xi_i^{(m)})\left(f(\xi_i^{(m)}) - \Omega(\xi_i^{(m)})\right) + \sum_{i=1}^{m} \Omega(\xi_i^{(m)})\,\rho(\xi_i^{(m)}) - \right.$$

$$- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \Omega(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx +$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (\Omega(x) - f(x))\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \rho(\xi_i^{(m)})\,|f(\xi_i^{(m)}) - \Omega(\xi_i^{(m)})| +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |\Omega(x) - f(x)|\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} \rho(\xi_i^{(m)}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx\right) =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = 2\varepsilon.$$

Таким образом, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\varlimsup_{m\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i^{(m)})\,\rho(\xi_i^{(m)}) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 f(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx\right| < 2\varepsilon.$$

Но ε сколь угодно мало. Значит,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i^{(m)})\,\rho(\xi_i^{(m)}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 f(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx.$$

Следствие 3. *Пусть* $0 < \eta < 1$ — *произвольное фиксированное число. Пусть* $\xi_\nu^{(m)} < \eta < \xi_{\nu+1}^{(m)}$ (ν зависит от m).

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \xi_\nu^{(m)} = \eta, \quad \lim_{m\to\infty} \xi_{\nu+1}^{(m)} = \eta.$$

Докажем, например, что $\lim\limits_{m\to\infty} \xi_\nu^{(m)} = \eta$ (второе равенство доказывается аналогично).

Возьмем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$, определенную таким образом: $f(x)=0$ на $[0, \eta-\varepsilon]$ и $[\eta, 1]$, на $(\eta-\varepsilon, \eta)$ функция $f(x)>0$; в остальном $f(x)$ произвольна. К этой функции применим следствие 2:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\eta-\varepsilon<\xi_i^{(m)}<\eta} f\left(\xi_i^{(m)}\right) \rho\left(\xi_i^{(m)}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx > 0.$$

Значит, начиная с некоторого m,

$$\sum_{\eta-\varepsilon<\xi_i^{(m)}<\eta} f\left(\xi_i^{(m)}\right) \rho\left(\xi_i^{(m)}\right) > 0.$$

Следовательно, сумма не пустая. Значит, на интервал $(\eta-\varepsilon, \eta)$ попадет корень многочлена $t_m(x)$. Следствие доказано.

Лемма 8. *Пусть $0<\eta<1$ — фиксированное число. $\xi_\nu^{(m)} \leqslant \eta < \xi_{\nu+1}^{(m)}$ — два примыкающих к η корня $t_m(x)$. Справедлива оценка*

$$\rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right) \leqslant \frac{C}{m}, \quad \rho\left(\xi_{\nu+1}^{(m)}\right) \leqslant \frac{C}{m},$$

где константа C зависит от η.

Доказательство. Через C будем обозначать положительные постоянные, не обязательно одинаковые. Докажем первое неравенство, второе неравенство получится аналогично. Сначала докажем вспомогательное утверждение: для любого многочлена $\pi(x)$ степени не выше чем $m-1$ и с дополнительным условием $\pi\left(\xi_\nu^{(m)}\right)=1$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \pi^2(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \geqslant \rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right).$$

Действительно, степень $\pi^2(x)$ не превосходит $2m-2$; поэтому, применяя квадратурную формулу, получим

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \pi^2(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\sum_{i=1}^{m}\pi^2\left(\xi_i^{(m)}\right)\rho\left(\xi_i^{(m)}\right)\geqslant\rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right).$$

Для получения оценки $\rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right)$ подберем специальным образом полином

$$\frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m-2}\left(1-\frac{k}{m-1}\right)\cos k\theta\right)=\frac{1}{(m-1)^2}\frac{\sin^2\frac{m-1}{2}\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$-\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Разложение

$$\cos nx=\frac{(\cos x+i\sin x)^n+(\cos x-i\sin x)^n}{2}=$$

$$=\cos^n x-\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\ldots$$

содержит лишь четные степени синуса, но четные степени синуса выражаются в виде многочлена от $\cos x$. Поэтому

$$\frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m-2}\left(1-\frac{k}{m-1}\right)\cos k\theta\right)=$$

$$=\frac{1}{(m-1)^2}\frac{\sin^2\frac{m-1}{2}\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}=P(\cos\theta).$$

$P(\cos\theta)$ — многочлен степени $m-2$. Очевидно,

$$0\leqslant P(\cos\theta)\leqslant\frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m-2}\left(1-\frac{k}{m-1}\right)\right)=1$$

и далее,

$$P(\cos\theta)\leqslant\frac{1}{(m-1)^2\sin^2\frac{\theta}{2}}<\frac{C}{(m-1)^2\theta^2},$$

ибо $\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Итак,

$$0 \leqslant P(\cos\theta) \leqslant \min\left(1, \frac{C}{(m-1)^2 \theta^2}\right).$$

При $\theta = 0$

$$P(\cos\theta)|_{\theta=0} = \frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-2}\left(1 - \frac{k}{m-1}\right)\right) = 1.$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{P\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) + P\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)}{2} =$$

$$= \frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-2}\left(1 - \frac{k}{m-1}\right)\frac{\cos k\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos k\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-2}\left(1 - \frac{k}{m-1}\right)\cos\frac{k\pi}{2}\cos k\theta\right) = Q(\cos\theta).$$

Степень $Q(\cos\theta)$ меньше или равна $m-2$;

$$Q(\cos\theta) \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant Q(\cos\theta) \leqslant$$

$$\leqslant \min\left(1, \frac{C}{(m-1)^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)^2} + \frac{C}{(m-1)^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}\right).$$

В этом многочлене сделаем замену переменных. Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$, мы положим $\cos\theta = x - \xi_\nu^{(m)}$,

$$Q^*(x) = Q\left(x - \xi_\nu^{(m)}\right),$$

$$0 \leqslant Q^{*2}(x) \leqslant \min\left(1, \left(\frac{C}{(m-1)^2\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\left(x - \xi_\nu^{(m)}\right)\right)^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{C}{(m-1)^2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(x - \xi_\nu^{(m)}\right)\right)^2}\right)^2\right).$$

Так как $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, то

$$0 \leqslant Q^{*2}(x) \leqslant \min\left(1, \frac{C}{(m-1)^4\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\left(x - \xi_\nu^{(m)}\right)\right)^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{C}{(m-1)^4\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(x - \xi_\nu^{(m)}\right)\right)^4}\right).$$

Поскольку $-\xi_\nu^{(m)} \to -\eta$ при $m \to \infty$, то при достаточно большом m

$$x - \xi_\nu^{(m)} \geqslant -\xi_\nu^{(m)} \geqslant \eta' > -1$$

(последнее неравенство строгое). Поэтому величина

$$\frac{\pi}{2} + \arccos\left(x - \xi_\nu^{(m)}\right)$$

будет отстоять от нуля на конечную (не стремящуюся к нулю) величину

$$0 \leqslant Q^{*2}(x) \leqslant \min\left(1, \frac{C(\eta)}{(m-1)^4} + \frac{C}{(m-1)^4\left(\arcsin\left(x - \xi_\nu^{(m)}\right)\right)^4}\right).$$

Или так как $|\arcsin x| \geqslant x$, то

$$0 \leqslant Q^{*2}(x) \leqslant \min\left(1, \frac{C(\eta)}{(m-1)^4} + \frac{C}{(m-1)^4\left(x - \xi_\nu^{(m)}\right)^4}\right).$$

Сосчитаем величину $Q^*(\xi_\nu^{(m)})$, которую обозначим d_m:

$$d_m = Q^*(\xi_\nu^{(m)}) = Q\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\left(1 - \frac{k}{m-1}\right)\left(\cos\frac{k\pi}{2}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\equiv 0 \pmod 2}}^{m-2}\left(1 - \frac{k}{m-1}\right)\right) =$$
$$= \frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2} + \left[\frac{m-2}{2}\right] - \frac{2}{m-1}\sum_{k'=1}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} k'\right) =$$
$$= \frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{2} + \left[\frac{m-2}{2}\right] - \frac{1}{m-1}\left[\frac{m-2}{2}\right]\left(\left[\frac{m-2}{2}\right] + 1\right)\right).$$

Очевидно, что $d_m \to {}^1/_2$, так как при $m \to \infty$

$$d_m \sim \frac{2}{m}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{m}\frac{m^2}{4}\right) \sim \frac{1}{2}.$$

Будем различать два случая:

I. $\alpha \geqslant 1$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{Q^*(x)}{d_m}\frac{x}{\xi_\nu^{(m)}}\right)^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \geqslant \rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right).$$

Поскольку $d_m \to {}^1/_2$, $\xi_\nu^{(m)} \to \eta$, то

$$\rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right) < C \int_0^1 Q^{*2}(x)\, x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx.$$

Так как $x^2\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} < C$ на отрезке $[0, 1]$, то

$$\rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right) < C \int_0^1 Q^{*2}(x)\, dx,$$

$$\rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right) < C \left(\int\limits_{|x-\xi_\nu^{(m)}| \leqslant 1/m} dx + \frac{1}{(m-1)^4} \int\limits_{|x-\xi_\nu^{(m)}| \geqslant 1/m} dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(m-1)^4} \int\limits_{|x-\xi_\nu^{(m)}| \geqslant 1/m} \frac{dx}{\left(x-\xi_\nu^{(m)}\right)^4} \right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{m}\right) + O\left(\frac{1}{m^4}\int_0^1 dx\right) + O\left(\frac{1}{m^4} \int\limits_{\substack{-\infty \\ |z| > 1/m}}^{\infty} \frac{dz}{z^4}\right) = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

II. $0 < \alpha < 1$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{Q^*(x)}{d_m}\frac{1-x}{1-\xi_\nu^{(m)}}\right)^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \geqslant \rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right),$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{Q^*(x)}{d_m}\frac{1-x}{1-\xi_\nu^{(m)}}\right)^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \leqslant C \int_0^1 Q^{*2}(x)\, dx = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Таким образом, лемма 8 доказана.

Далее излагается конструкция Маркова аппроксимации ступенчатой функции.

Лемма 9. *Пусть* $0<\eta<1$ — *фиксированное число,* $\xi_1^{(m)}<\xi_2^{(m)}< \ldots <\xi_m^{(m)}$ — *корни* $t_m(x)$, $\xi_\nu^{(m)}$ *и* $\xi_{\nu+1}^{(m)}$, *примыкающие к* η, — *корни многочлена. Можно построить многочлен* $P_m(x)$ *степени* $2m-2$ *такой, что выполняются равенства*

$$P_m(\xi_1^{(m)}) = \ldots = P_m(\xi_{\nu+1}^{(m)}) = 1; \; P_m(\xi_{\nu+2}^{(m)}) = \ldots = P_m(\xi_m^{(m)}) = 0;$$

$$P'_m(\xi_1^{(m)}) = \ldots = P'_m(\xi_\nu^{(m)}) = 0; \; P'_m(\xi_{\nu+2}^{(m)}) = \ldots = P'_m(\xi_m^{(m)}) = 0.$$

Этот многочлен обладает таким свойством:

$$P_m(x) \geqslant \begin{cases} 1, & \text{если} \quad -\infty < x \leqslant \xi_{\nu+1}^{(m)}, \\ 0, & \text{если} \quad \xi_{\nu+1}^{(m)} \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Доказательство. По интерполяционной формуле Лагранжа мы можем построить многочлен $\tilde{P}_m(x)$ степени, не превосходящей $m-1$, который будет удовлетворять следующим условиям:

$$\tilde{P}_m(\xi_1^{(m)}) = \ldots = \tilde{P}_m(\xi_{\nu+1}^{(m)}) = 1; \; \tilde{P}_m(\xi_{\nu+2}^{(m)}) = \ldots = \tilde{P}_m(\xi_m^{(m)}) = 0.$$

Построим многочлен $A_m(x)$ степени, не превосходящей $m-2$, такой, что

$$A_m(\xi_i^{(m)}) = -\frac{\tilde{P}'_m(\xi_i^{(m)})}{t'_m(\xi_i^{(m)})}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \text{ но } i \neq \nu+1.$$

$P_m(x)$ берем в таком виде:

$$P_m(x) = \tilde{P}_m(x) + A_m(x)\, t_m(x).$$

Степень этого многочлена не превосходит $2m-2$. В силу построения $\tilde{P}_m(x)$ выполнены условия на $P_m(\xi_i^{(m)})$. Далее,

$$P'_m(x) = \tilde{P}'_m(x) + t'_m(x)\, A_m(x) + t_m(x)\, A'_m(x).$$

В силу построения $A_m(x)$ выполнены условия на $P'_m(\xi_i^{(m)})$.

Будем строить график $P_m(x)$. Рассмотрим $P'_m(x)$. На интервалах

$$(\xi_i^{(m)}, \xi_{i+1}^{(m)}),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,\ \nu+2,\ \ldots,\ m-1,$$

в силу теоремы Ролля есть точка, где $P'_m(x)$ обращается в нуль. Кроме того, есть еще по условию $m-1$ точек, где производная обращается в нуль. Итак, мы нашли

$$m-2+m-1=2m-3$$

корней $P'_m(x)$. Но степень $P'_m(x)$ (как производной $P_m(x)$) не превосходит $2m-3$. Таким образом, это будут все точки поворота графика $P_m(x)$ (и степень $P'_m(x)$ равна точно $2m-3$).

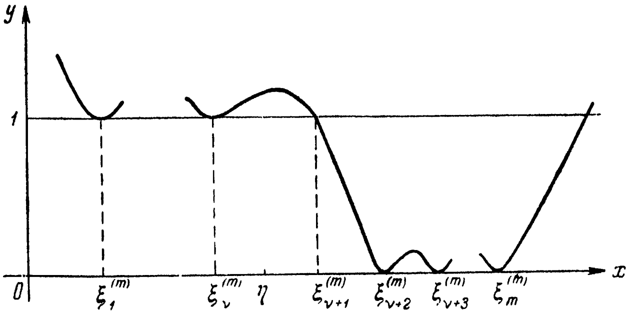


Рис. 1.

В частности, на полуинтервале $[\xi_{\nu+1}^{(m)}, \xi_{\nu+2}^{(m)})$ нет корней $P'_m(x)$. График многочлена $P_m(x)$ представлен на рис. 1. Из графика видно, что

$$P_m(x) \geqslant \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \xi_{\nu+1}^{(m)}, \\ 0, & \xi_{\nu+1}^{(m)} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Кроме того, так как $P'_m(x)$ имеет степень $2m-3$, то $P_m(x)$ имеет точно степень $2m-2$.

Лемма 9′. *Пусть* $0<\eta<1$;

$$\xi_1^{(m)} < \ldots < \xi_\nu^{(m)} < \eta < \xi_{\nu+1}^{(m)} < \ldots < \xi_m^{(m)}.$$

Существует многочлен $p_m(x)$ степени $2m-2$ такой, что выполнены условия

$$p_m\left(\xi_1^{(m)}\right) = \ldots = p_m\left(\xi_{\nu-1}^{(m)}\right) = 1; \quad p_m\left(\xi_\nu^{(m)}\right) = \ldots = p_m\left(\xi_m^{(m)}\right) = 0;$$

$$p'_m\left(\xi_1^{(m)}\right) = \ldots = p'_m\left(\xi_{\nu-1}^{(m)}\right) = 0; \quad p'_m\left(\xi_{\nu+1}^{(m)}\right) = \ldots = p'_m\left(\xi_m^{(m)}\right) = 0$$

и выполнены такие неравенства:

$$p_m(x) \leqslant \begin{cases} 1, & -\infty < x \leqslant \xi_\nu^{(m)}, \\ 0, & \xi_\nu^{(m)} \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Доказательство аналогично. График многочлена $p_m(x)$ изображен на рис. 2.

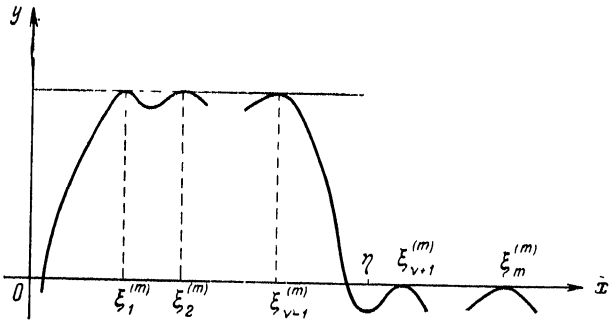


Рис. 2.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на $[0, 1]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \eta, \\ 0, & \eta \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно,

$$p_m(x) \leqslant f(x) \leqslant P_m(x).$$

Далее,

$$0 \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (P_m(x) - p_m(x)) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx =$$

$$= \sum_{i=1}^m \rho\left(\xi_i^{(m)}\right) \left[P_m\left(\xi_i^{(m)}\right) - p_m\left(\xi_i^{(m)}\right)\right] = \rho\left(\xi_\nu^{(m)}\right) + \rho\left(\xi_{\nu+1}^{(m)}\right).$$

Или в силу леммы 8

$$0 \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (P_m(x) - p_m(x)) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \leqslant \frac{C}{m}.$$

Для доказательства теоремы Фрейда требуется приближение функции $g(x)$, определенной равенствами

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1/e, \\ 1/x, & 1/e \leqslant x < 1 \end{cases}$$

(e — основание натуральных логарифмов). В дальнейшем возьмем $\eta = 1/e$. Мы имеем

$$g(x) = h(x) - ef(x),$$

где $h(x)$ — функция, определенная следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} e, & 0 \leqslant x < e^{-1}, \\ x^{-1}, & e^{-1} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция $h(x)$ непрерывная. Более того, она удовлетворяет условию Липшица: существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|h(x_1) - h(x_2)| < C|x_1 - x_2|.$$

Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $h(x)$.

По теореме Вейерштрасса мы можем аппроксимировать функцию $h(x)$ многочленом. Применяя теорему Джексона (см. И. П. Натансон [46], стр. 117), мы убеждаемся, что для каждого натурального m существует многочлен $\chi_m(x)$ степени m такой, что на $[0, 1]$

$$|h(x) - \chi_m(x)| \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{2m}\right) \leqslant \frac{C^*}{m},$$

с некоторой постоянной C^*.

Рассмотрим два многочлена:

$$\varphi_m(x) = \chi_m(x) - \frac{C^*}{m} - eP_m(x),$$

$$\Phi_m(x) = \chi_m(x) + \frac{C^*}{m} - ep_m(x).$$

Ясно, что $\varphi_m(x) \leqslant g(x) \leqslant \Phi_m(x)$. Мы имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} (\Phi_m(x) - \varphi_m(x))\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{2C^*}{m} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx +$$

$$+ e\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (P_m(x) - p_m(x)) \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx < \frac{C}{m} + \frac{C}{m} \leqslant \frac{2C}{m}.$$

Нам понадобятся некоторые свойства многочленов $\varphi_m(x)$ и $\Phi_m(x)$.

Лемма 10. *Существует постоянное число* $C > 0$ *такое, что*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\Phi_m(x)| = O(m^C),$$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\varphi_m(x)| = O(m^C).$$

Доказательство. Обозначим

$$\psi_m(x) = \Phi_m(x) - \varphi_m(x);$$

$\psi_m(x)$ — многочлен степени не выше $2m-2$ и $\psi_m(x) \geqslant 0$. Обозначим $\max \psi_m(x) = \eta_m$, и пусть максимум достигается в точках x_m: $\psi_m(x_m) = \eta_m$. В силу известной теоремы Маркова (И. П. Натансон [46], стр. 178) справедлива оценка

$$|\psi'_m(x)| < 2(2m)^2 \eta_m = 8m^2\eta_m.$$

Если $|x - x_m| \leqslant 1/16m^2$, то $\psi_m(x) \geqslant \eta_m/2$. Действительно, по теореме конечных приращений Лагранжа и теореме Маркова (И. П. Натансон [46], стр. 178)

$$\eta_m - \psi_m(x) \leqslant |x - x_m|\, 8m^2\eta_m \leqslant \frac{\eta_m}{2}.$$

Обозначим множество значений x, для которых $|x - x_m| \leqslant$ $\leqslant 1/16m^2$, через X.

Пусть $\alpha \geqslant 1$, тогда

$$\frac{C}{m} > \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\Phi_m(x) - \varphi_m(x)) \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\eta_m}{2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_X \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \geqslant \frac{\eta_m}{2\Gamma(\alpha)} \int_{1-1/16m^2}^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx >$$

$$> \frac{\eta_m}{2\Gamma(\alpha)} \int_{1-1/16m^2}^1 (1-x)^{\alpha-1} dx = \frac{\eta_m}{2\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\alpha(16m^2)^\alpha}$$

$\left(\text{ибо } \ln\frac{1}{x} > 1 - x \text{ при } 0 < x \leqslant 1\right)$.

Пусть $\alpha < 1$, тогда

$$\frac{C}{m} \geqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} (\Phi_m(x) - \varphi_m(x)) dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\eta_m}{2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_X \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx \geqslant \frac{\eta_m}{2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{1/16m^2} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx =$$

$$= \frac{\eta_m}{2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{16m^2}^\infty \frac{1}{(\ln y)^{1-\alpha}} \frac{1}{y^2} dy > \frac{\eta_m}{2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{16m^2}^\infty \frac{dy}{y^{3-\alpha}} =$$

$$= \frac{\eta_m}{2(2-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)(16m^2)^{2-\alpha}}.$$

В обоих случаях

$$C_1 m^{C_2} > \eta_m > 0$$

и

$$0 \leqslant \Phi_m(x) = \varphi_m(x) + \psi_m(x) \leqslant g(x) + \eta_m \leqslant e + O(m^C) = O(m^C).$$

С другой стороны,

$$e \geqslant \varphi_m(x) = \Phi_m(x) - \psi_m(x) \geqslant g(x) - \eta_m \geqslant -\eta_m \geqslant -C_1 m^{C_2}.$$

Этим лемма установлена.

Лемма 11. *Пусть имеется многочлен ν-й степени с вещественными коэффициентами $\pi_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_k x^k$, который на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет неравенству*

$|\pi_\nu(x)|\leqslant M$. *Для его коэффициентов справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant\nu}|\alpha_k|\leqslant C\frac{(4e)^\nu}{\nu}M;$$

C — абсолютная постоянная.

Доказательство. В этой лемме через C будем обозначать абсолютные постоянные, в разных случаях разные. Возьмем на отрезке $[0, 1]$ $\nu+1$ точек $x_i=i/\nu$, $i=0, 1, \ldots, \nu$. Так как многочлен ν-й степени определяется по своим значениям в $\nu+1$ различных точках, то по интерполяционной формуле Лагранжа

$$\pi_\nu(x)=\sum_{i=0}^{\nu}\pi_\nu(x_i)\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_\nu)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_\nu)}.$$

Обозначим k-ю симметрическую функцию величин $x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_\nu$ через $\Phi_i^{(k)}$. Мы имеем

$$\alpha_k=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^k\frac{\pi_\nu(x_i)\Phi_i^{(k)}}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_\nu)}.$$

Так как $0\leqslant x_i\leqslant 1$, то

$$|\Phi_i^{(k)}|\leqslant C_\nu^k\leqslant C_\nu^{[\nu/2]}.$$

По формуле Стирлинга

$$C_\nu^{[\nu/2]}\leqslant C\frac{2^\nu}{\sqrt{\nu}},$$

и, значит,

$$|\alpha_k|\leqslant\sum_{i=0}^{\nu}C\frac{2^\nu}{\sqrt{\nu}}\frac{|\pi_\nu(x_i)|}{\frac{i!\,(\nu-i)!}{\nu^\nu}}=C\frac{2^\nu}{\sqrt{\nu}}M\frac{\nu^\nu}{\nu!}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{\nu!}{i!\,(\nu-i)!}=$$

$$=C\frac{4^\nu}{\sqrt{\nu}}\frac{\nu^\nu}{\nu!}M<C\frac{(4e)^\nu}{\nu}M.$$

Лемма 11 доказана.

Пусть

$$\Phi_m(x)=\sum_{j=0}^{2m-2}B_jx^j\quad\text{и}\quad\varphi_m(x)=\sum_{j=0}^{2m-2}b_jx^j.$$

Лемма 12. *Существует постоянная $C>0$ такая, что*

$$\sum_{j=0}^{2m-2} |B_j| = O(e^{Cm}) \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{2m-2} |b_j| = O(e^{Cm}).$$

Доказательство. Из леммы 11 следует, что

$$\sum_{k=0}^{\nu} |\alpha_k| \leqslant C(4e)^{\nu} M.$$

Применяя последнее предложение к $\Phi_m(x)$ с $\nu=2m-2$ и $M=O(m^C)$, получим

$$\sum_{j=0}^{2m-2} |B_j| = O\left(m^C (4e)^{2m-2}\right) = O(e^{Cm}), \qquad C>0.$$

Аналогично для многочлена $\varphi_m(x)$ получим

$$\sum_{j=0}^{2m-2} |b_j| = O(e^{Cm}), \qquad C>0.$$

Лемма 12 доказана.

Теперь завершим доказательство теоремы Фрейда. По условию

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, d\tau(t) = \frac{A\Gamma(1+\alpha)}{s^{\alpha}}(1+r(s)).$$

Заменим s на $s(k+1)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s(k+1)t}\, d\tau(t) = \frac{A\Gamma(1+\alpha)}{s^{\alpha}(k+1)^{\alpha}}(1+r((k+1)s)).$$

Умножим это равенство на B_k и просуммируем по k от 0 до $2m-2$. Тогда

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\left(\sum_{k=0}^{2m-2} B_k e^{-skt}\right) d\tau(t) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\Phi_m(e^{-st})\, d\tau(t) =$$

$$= \frac{A\Gamma(1+\alpha)}{s^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{2m-2} \frac{B_k}{(k+1)^{\alpha}} + \sum_{k=0}^{2m-2} \frac{B_k r((k+1)s)}{(k+1)^{\alpha}}\right).$$

В силу того, что

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}\,\Phi_m(e^{-t})\,dt = \sum_{k=0}^{2m-2} B_k \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-(k+1)t}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m-2} B_k\,\frac{\Gamma(\alpha)}{(k+1)^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}\sum_{k=0}^{2m-2}\frac{B_k}{(k+1)^{\alpha}},$$

получаем

$$\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\Phi_m(e^{-st})\,d\tau(t) =$$

$$= \frac{A\alpha}{s^{\alpha}}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\Phi_m(e^{-t})\,e^{-t}\,dt + \frac{A\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha}}\sum_{k=0}^{2m-2} B_k\,\frac{r((k+1)s)}{(k+1)^{\alpha}} =$$

$$= \frac{A\alpha}{s^{\alpha}}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\Phi_m(e^{-t})\,dt + O\left(\frac{s^{\varepsilon}}{s^{\alpha}}\sum_{k=0}^{2m-2}\frac{|B_k|}{(k+1)^{\alpha-\varepsilon}}\right) =$$

$$= \frac{A\alpha}{s^{\alpha}}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\Phi_m(e^{-t})\,dt + O\left(\frac{s^{\varepsilon}}{s^{\alpha}}\,m^{C}\sum_{k=0}^{2m-2}|B_k|\right) =$$

$$= \frac{A\alpha}{s^{\alpha}}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\Phi_m(e^{-t})\,dt + O\left(\frac{e^{Cm}}{s^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

Аналогично мы получим такой результат:

$$\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\varphi_m(e^{-st})\,d\tau(t) =$$

$$= \frac{A\alpha}{s^{\alpha}}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\varphi_m(e^{-t})\,dt + O\left(\frac{e^{Cm}}{s^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

В интеграле

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\Phi_m(e^{-t})\,e^{-t}\,dt$$

проведем замену переменных $e^{-t}=x$:

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\Phi_m(e^{-t})\,e^{-t}\,dt=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\Phi_m(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(g(x)+\Phi_m(x)-\varphi_m(x))\,dx=$$

$$=\int_0^1 g(x)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(\Phi_m(x)-\varphi_m(x))\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_{1/e}^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{dx}{x}+\frac{C\Gamma(\alpha)}{m}=\int_0^1 z^{\alpha-1}\,dz+\frac{\Gamma(\alpha)\,C}{m}=\frac{1}{\alpha}+\frac{C\Gamma(\alpha)}{m}.$$

Далее,

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\varphi_m(e^{-t})\,e^{-t}\,dt=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\varphi_m(x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}(g(x)-(\Phi_m(x)-\varphi_m(x)))\,dx>\frac{1}{\alpha}-\frac{C\Gamma(\alpha)}{m}.$$

При $t\geqslant 0$

$$\varphi_m(e^{-st})\leqslant g(e^{-st})\leqslant\Phi_m(e^{-st}),$$

и, значит,

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}g(e^{-st})\,d\tau(t)\leqslant\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\Phi_m(e^{-st})\,d\tau(t)=$$

$$=\frac{A\alpha}{s^\alpha}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\Phi_m(e^{-t})\,e^{-t}\,dt+O\left(\frac{e^{Cm}}{s^{\alpha-\varepsilon}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A\alpha}{s^\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{C}{m}\right)+O\left(\frac{e^{Cm}}{s^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

Мы получили такую оценку:

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} g(e^{-st})\, d\tau(t) \leqslant \frac{A}{s^\alpha}\left(1+\frac{C}{m}\right)+O\left(\frac{e^{C_0 m}}{s^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

Аналогично

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} g(e^{-st})\, d\tau(t) \geqslant \frac{A}{s^\alpha}\left(1-\frac{C}{m}\right)+O\left(\frac{e^{C_0 m}}{s^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st} g(e^{-st})\, d\tau(t) = \int_0^{1/s} f(t)\, d\tau(t).$$

Так как

$$g(e^{-st}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t > 1/s, \\ e^{st}, & \text{если} \quad t \leqslant 1/s, \end{cases}$$

то

$$\frac{A}{s^\alpha}\left(1-\frac{C}{m}\right)+O\left(\frac{e^{C_0 m}}{s^{\alpha-\varepsilon}}\right) \leqslant \int_0^{1/s} f(t)\, d\tau(t) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A}{s^\alpha}\left(1+\frac{C}{m}\right)+O\left(\frac{e^{C_0 m}}{s^{\alpha-\varepsilon}}\right).$$

Обозначим $1/s = x$. Когда $s \to 0$, $x \to \infty$,

$$\int_0^x f(t)\, d\tau(t) = Ax^\alpha + O\left(\frac{x^\alpha}{m}\right) + O\left(x^{\alpha-\varepsilon} e^{C_0 m}\right).$$

Выберем $m = \left[\frac{\varepsilon}{2C_0}\ln x\right] + 1$. Тогда

$$\int_0^x f(t)\, d\tau(t) =$$
$$= Ax^\alpha + O\left(\frac{x^\alpha}{\ln x}\right) + O\left(x^{\alpha-\varepsilon} e^{C_0\left(\frac{\varepsilon}{2C_0}\ln x + 1\right)}\right) =$$
$$= Ax^\alpha + O\left(\frac{x^\alpha}{\ln x}\right) + O\left(x^{\alpha-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}}\right) = Ax^\alpha + O\left(\frac{x^\alpha}{\ln x}\right),$$

что и требуется доказать.

1.3. Тауберова теорема Ингама

Тауберова теорема Ингама (А. Е. Ингам [124]) относится к быстрорастущим преобразованиям.

Специфические обозначения: $\nearrow$ — монотонное неубывание, $\searrow$ — монотонное невозрастание. Обозначим, как обычно, $s=\sigma+it$ комплексное переменное.

Теорема. *Пусть интеграл*

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-us}\,dA(u)$$

сходится при $\sigma>0$, *и пусть*

1) $A(u)$ *не убывает*, $0\leqslant u<\infty$;

2) *имеется область* D, *целиком лежащая в полуплоскости* $\operatorname{Re}s>0$, *содержащая на границе точку* $s=0$, *и функция*

$$f_0(s)=\chi(s)\,e^{\varphi(s)},$$

причем про функции)* $\chi(s)$ *и* $\varphi(s)$ *предполагается, что:*

а) *функции* $\varphi(s)$ *и* $\chi(s)$ *аналитичны в* D;

б) $\varphi(s)$ *и* $\chi(s)$ *вещественны и положительны на полуотрезке* $(0,h]$ *положительной вещественной оси, лежащей в* D;

в) $-\sigma\varphi'(\sigma)\nearrow\infty$ *при* $\sigma\searrow 0$ *(в силу этого* $(-\sigma\varphi'(\sigma))'\geqslant 0$ *и, следовательно,* $\sigma\varphi''(\sigma)\geqslant-\varphi'(\sigma)>0$ *при достаточно малых положительных* σ);

г) *обозначим через* $\delta(\sigma)$ *расстояние от точки* σ *до границы области* D; *при* $\sigma\searrow 0$ *выполняется соотношение*

$$\frac{(\varphi''(\sigma))^{1/2}}{-\varphi'(\sigma)}=o\left(\frac{\delta(\sigma)}{\sigma}\right)$$

(так как начало не принадлежит области D, *то* $\delta(\sigma)\leqslant\sigma$);

д) $\varphi''(\sigma+z)=O(\varphi''(\sigma))$ *равномерно при* $|z|<\delta(\sigma)$, *когда* $\sigma\searrow 0$;

е)

$$\chi(\sigma+z)=O(\chi(\sigma))$$

равномерно при $|z|<\delta(\sigma)$ *при* $\sigma\searrow 0$;

---

*) Здесь $\varphi(s)$ не обозначает функцию Эйлера.

ж) *справедлива асимптотическая формула*

$$f(s) \sim f_0(s)$$

равномерно, когда $s \to 0$ *в* D;

з)

$$f(s) = O(f_0(|s|)),$$

когда s *находится в некотором фиксированном угле вида* $|t| \leqslant \Delta\sigma$.

Тогда

$$\eta_1(\Delta) \leqslant \varliminf_{u \to \infty} \frac{A(u)}{A_0(u)} \leqslant \varlimsup_{u \to \infty} \frac{A(u)}{A_0(u)} \leqslant \eta_2(\Delta), \tag{1}$$

где

$$A_0(\omega) = \frac{\chi(\sigma)\, e^{\varphi(\sigma) + \omega\sigma}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\varphi''(\sigma)}},$$

а $\sigma = \sigma_\omega$ *есть корень уравнения* $-\varphi'(\sigma) = \omega$ (*это решение существует и единственно для больших* ω), *функции* $\eta_1(\Delta)$ *и* $\eta_2(\Delta)$ *зависят только от* Δ, *строго положительны и конечны при любом* $0 < \Delta < \infty$, *и* $\eta_1(\Delta) \to 1$, $\eta_2(\Delta) \to 1$ *при* $\Delta \to \infty$. *В частности, если*

$$f(s) = O(f_0(|s|))$$

при любом Δ, $0 < \Delta < \infty$, *то*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{A(u)}{A_0(u)} = 1.$$

Прежде чем доказывать тауберову теорему Ингама, конкретизируем ее формулировку для частных случаев.

Пусть $\varphi(s) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^\beta$, $\chi(s) = C\left(\frac{M}{s}\right)^{m\beta - \frac{1}{2}}$, β, M, C — положительные постоянные, m — вещественная постоянная,

$$f_0(s) = C\left(\frac{M}{s}\right)^{m\beta - \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^\beta}.$$

За область D возьмем область вида $|t| \leqslant \Delta \cdot \sigma$, где $\Delta > 0$ фиксировано. Проверим условия: при малых σ, $\delta(\sigma) = \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2}}\sigma$

$$\varphi'(\sigma) = -M^\beta\sigma^{-\beta-1}, \quad \varphi''(\sigma) = (\beta + 1) M^\beta\sigma^{-\beta-2}.$$

Так как при $|z| \leqslant \delta(\sigma)$

$$2\sigma \geqslant |\sigma + z| \geqslant \sigma - \frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta^2}}\sigma,$$

то выполнены условия д) и е). Уравнение $-\varphi'(\sigma) = \omega$ имеет решение

$$\sigma_\omega = \frac{M^{\beta/(\beta+1)}}{\omega^{1/(\beta+1)}}.$$

Несложная выкладка дает

$$A_0(\omega) = \frac{C}{\sqrt{2\pi(\beta+1)}}(\omega M)^{m\frac{\beta}{\beta+1}-\frac{1}{2}} e^{\frac{\beta+1}{\beta}(\omega M)^{\beta/(\beta+1)}}.$$

Обозначив $\alpha = \beta/(\beta+1)$, получим

$$A_0(\omega) = C\sqrt{\frac{1-\alpha}{2\pi}}(\omega M)^{m\alpha-\frac{1}{2}} e^{\frac{(\omega M)^\alpha}{\alpha}}.$$

Итак, получается такой частный случай:

Следствие 1. *Пусть для интеграла*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-us}\,dA(u)$$

выполняются условия:

1) $A(0) = 0$, $A(u)$ *не убывает при* $u \to \infty$;

2) $f(s) \sim C\left(\frac{M}{s}\right)^{m\beta-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^\beta}$ (где C, M, β — положительные постоянные, m — вещественная постоянная) *равномерно, когда* $s \to 0$ *в некотором фиксированном угле вида* $|t| < \Delta_0\sigma$, $\Delta_0 > 0$.

Тогда

$$\eta_1 \leqslant \varliminf_{u\to\infty} \frac{A(u)}{C\sqrt{\frac{1-\alpha}{2\pi}}(uM)^{m\alpha-\frac{1}{2}} e^{\frac{(uM)^\alpha}{\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{u\to\infty} \frac{A(u)}{C\sqrt{\frac{1-\alpha}{2\pi}}(uM)^{m\alpha-\frac{1}{2}} e^{\frac{(uM)^\alpha}{\alpha}}} \leqslant \eta_2,$$

где η_1 *и* η_2 — *константы*, $\alpha = \beta/(\beta+1)$.

Следствие 2. *Пусть для интеграла*

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-us}\,dA(u)$$

выполняются условия:

1) $A(0)=0$, $A(u)$ *не убывает при* $u\to\infty$;

2) $f(s)\sim C\left(\frac{M}{s}\right)^{m\beta-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^{\beta}}$ (где C, M, β — положительные постоянные, m — вещественная постоянная) *равномерно, когда* $s\to 0$ *в любом угле вида* $|t|<\Delta\sigma$.

Тогда при $u\to\infty$

$$A(u)\sim C\sqrt{\frac{1-\alpha}{2\pi}}(uM)^{m\alpha-\frac{1}{2}}e^{\frac{(uM)^{\alpha}}{\alpha}},$$

где $\alpha=\beta/(\beta+1)$.

Доказательство теоремы Ингама. Сначала докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Равномерно для* $|z|\leqslant\tau(\sigma)=o(\delta(\sigma))$ *при* $\sigma\searrow 0$

$$\frac{f_0(\sigma+z)}{f_0(\sigma)}=\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)(1+o(1))+o(1)\right]=$$

$$=\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)\right]\times$$

$$\times(1+o(|z|^2\varphi''(\sigma)+1)\exp[\varepsilon|z|^2\varphi''(\sigma)]$$

для любого фиксированного $\varepsilon>0$.

Действительно, по определению $f_0(s)$

$$\frac{f_0(\sigma+z)}{f_0(\sigma)}=\frac{\chi(\sigma+z)}{\chi(\sigma)}\exp[\varphi(\sigma+z)-\varphi(\sigma)]=$$

$$=\left(1+\frac{\chi(\sigma+z)-\chi(\sigma)}{\chi(\sigma)}\right)\exp[\varphi(\sigma+z)-\varphi(\sigma)]. \qquad (2)$$

Но

$$\chi'(\sigma+z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\chi(\sigma+\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta=O\left(\frac{\chi(\sigma)}{\delta(\sigma)}\right).$$

Здесь Γ есть круг $|\zeta-z|=\frac{\delta(\sigma)}{2}$ (на этом круге $\sigma+\zeta$ не выходит за пределы области D, ибо $|z|=o(\delta(\sigma))$). Оценка $\chi'(\sigma+z)=O\left(\frac{\chi(\sigma)}{\delta(\sigma)}\right)$ равномерная при $|z|\leqslant\tau(\sigma)$.

Интегрирование дает

$$\chi(\sigma+z)-\chi(\sigma)=O\left(|z|\frac{\chi(\sigma)}{\delta(\sigma)}\right)=O\left(\frac{\tau(\sigma)\chi(\sigma)}{\delta(\sigma)}\right)=o(\chi(\sigma)).$$

Подобным образом

$$\varphi''(\sigma+z)-\varphi''(\sigma)=o(\varphi''(\sigma)).$$

Разлагая отдельно вещественную и мнимую части в ряд Тейлора, получим

$$\varphi(\sigma+z)-\varphi(\sigma)=z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2\varphi''(\sigma)}{2}+o(|z|^2\varphi''(\sigma))\cdot$$

Подставляя это в формулу (2), получим

$$\frac{f_0(\sigma+z)}{f_0(\sigma)}=(1+o(1))\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)+o(|z|^2\varphi''(\sigma))\right]=$$
$$=\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)+o(|z|^2\varphi''(\sigma))+o(1)\right].$$

Это дает первое равенство леммы 1.

Второе равенство получается из первого посредством применения соотношения $|e^w-1|\leqslant|w|e^{|w|}$:

$$\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)+o(|z|^2\varphi''(\sigma))+o(1)\right]=$$
$$=\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)\right]\times$$
$$\times(1+\exp[o(|z|^2\varphi''(\sigma))+o(1)]-1)=$$
$$=\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)\right]\times$$
$$\times\{1+o(1+|z|^2\varphi''(\sigma))\exp[o(|z|^2\varphi''(\sigma)+1)]\}=$$
$$=\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)\right]\times$$
$$\times\{1+o(1+|z|^2\varphi''(\sigma))(1+o(1))\exp[o(|z|^2\varphi''(\sigma))]\}=$$
$$=\exp\left[z\varphi'(\sigma)+\frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)\right]\times$$
$$\times\{1+o(1+|z|^2\varphi''(\sigma))\exp[o(|z|^2\varphi''(\sigma))]\}=$$

$$= \exp\left[z\varphi'(\sigma) + \frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)\right] \times$$
$$\times \{1 + o(1 + |z|^2\varphi''(\sigma))\exp[\varepsilon|z|^2\varphi''(\sigma)]\exp[o(|z|^2\varphi''(\sigma)) -$$
$$- \varepsilon|z|^2\varphi''(\sigma)]\} = \exp\left[z\varphi'(\sigma) + \frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)\right] \times$$
$$\times \{1 + o(1 + |z|^2\varphi''(\sigma))\, O(1)\exp[\varepsilon|z|^2\varphi''(\sigma)]\} =$$
$$= \exp\left[z\varphi'(\sigma) + \frac{z^2}{2}\varphi''(\sigma)\right] \times$$
$$\times \{1 + o(1 + |z|^2\varphi''(\sigma))\exp[\varepsilon|z|^2\varphi''(\sigma)]\},$$

где ε — сколь угодно малое фиксированное число.

Лемма 2. *$f_0(\sigma)$ возрастает, когда σ убывает* (для достаточно малых положительных значений σ).

Доказательство.

$$-\frac{f_0'(\sigma)}{f_0(\sigma)} = -\frac{\chi'(\sigma)}{\chi(\sigma)} - \varphi'(\sigma).$$

Применяя соотношение $\chi'(\sigma + z) = O\left(\frac{\chi(\sigma)}{\delta(\sigma)}\right)$ для $z = 0$, мы получим при $\sigma \searrow 0$

$$-\frac{f_0'(\sigma)}{f_0(\sigma)} = -\varphi'(\sigma) + O\left(\frac{1}{\delta(\sigma)}\right) \sim -\varphi'(\sigma),$$

ибо по условиям теоремы

$$\frac{1}{\delta(\sigma)} = o\left(-\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}\right) = o\left(\frac{-\varphi'(\sigma)}{\sqrt{\sigma\varphi'(\sigma)}}\right) = o(-\varphi'(\sigma)).$$

Поэтому при малых значениях σ $-f_0'(\sigma) > 0$, и лемма доказана.

Переходим к основной части доказательства теоремы. Главными переменными являются σ и ω, связанные уравнением

$$-\varphi'(\sigma) = \omega.$$

Про величину σ мы предполагаем, что она достаточно мала, а про ω предполагаем, что ω достаточно велико. Предельные переходы происходят при $\sigma \searrow 0$ и $\omega \nearrow \infty$.

В равенстве

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-us}\,dA(u)$$

произведем интегрирование по частям при $\sigma>0$:

$$f(s)=s\int_0^\infty A(u)\,e^{-us}\,du$$

(при $\sigma>0$ в силу сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-us}\,dA(u)$ $A(u)\,e^{-us}\to 0$). Заменим в последней формуле $s=\sigma+z$:

$$\int_0^\infty A(u)\,e^{-u(\sigma+z)}\,du=\frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z}.$$

Возьмем $T>0$, вещественное ξ и функцию $k(\zeta)$, регулярную на отрезке мнимой оси $[0, i]$ плоскости ζ. Последнее равенство умножим на $k(z/T)\,e^{\xi z}$. Мы имеем

$$k\left(\frac{z}{T}\right)e^{\xi z}\int_0^\infty A(u)\,e^{-u(\sigma+z)}\,du=k\left(\frac{z}{T}\right)e^{\xi z}\,\frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z}.$$

Проинтегрируем по отрезку мнимой оси плоскости z от 0 до iT и переменим порядок интегрирования:

$$\int_0^\infty A(u)\,e^{-u\sigma}\left(\int_0^{iT}k\left(\frac{z}{T}\right)e^{-z(u-\xi)}\,dz\right)du=\int_0^{iT}\frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z}\,k\left(\frac{z}{T}\right)e^{\xi z}\,dz.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменного $z/T=\zeta$:

$$\int_0^\infty A(u)\,e^{-u\sigma}T\left(\int_0^{i}k(\zeta)\,e^{-T\zeta(u-\xi)}\,d\zeta\right)du=\int_0^{iT}\frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z}\,k\left(\frac{z}{T}\right)e^{\xi z}\,dz.$$

Обозначим

$$R(v)=\int_0^{i}k(\zeta)\,e^{-v\zeta}\,d\zeta.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} A(u)\, R(T(u-\xi))\, Te^{-u\sigma}\, du = \int_0^{iT} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z}\, k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\, dz.$$

Положим $T=\Delta\sigma$, где параметр Δ определяет угол $|t|\leqslant\Delta\sigma$ в требовании з) теоремы. Функцию ξ выберем удовлетворяющей условию

$$\xi=\xi(\sigma)=\omega+O\left(\frac{1}{\sigma}\right)=-\varphi'(\sigma)+O\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

а на $k(\zeta)$ наложим дополнительное условие

$$k(0)\neq 0.$$

Введем параметр $\tau=\tau(\sigma)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\tau(\sigma)=o(\delta(\sigma))$ (и, значит, $\tau(\sigma)=o(\sigma)$);

2) $\dfrac{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}{-\varphi'(\sigma)}=o(\tau(\sigma))$.

Такой выбор возможен, ибо $\dfrac{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}{-\varphi'(\sigma)}=o(\delta(\sigma))$. За $\tau(\sigma)$ можно взять, например,

$$\tau(\sigma)=\sqrt{\delta(\sigma)\frac{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}{-\varphi'(\sigma)}}.$$

Пусть α — острый угол, определенный равенством $\operatorname{tg}\alpha=\tau/\sigma$ (рис. 3). В интеграле

$$\int_0^{iT} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z}\, k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\, dz,$$

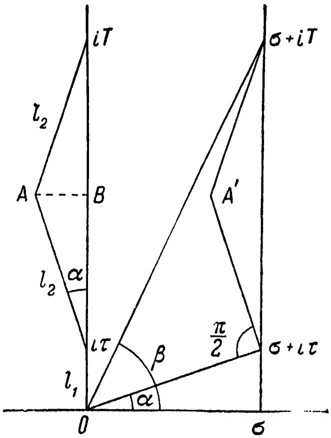


Рис. 3.

пользуясь теоремой Коши, заменим путь интегрирования с отрезка $[0, iT]$ на путь $l=l(\sigma)$, состоящий из отрезка мнимой оси $[0, i\tau]$ (обозначим эту часть нового пути через l_1) и ломаной линии l_2, состоящей из двух звеньев: от точки $i\tau$ до точки A с аффиксом $-\dfrac{T-\tau}{2}\operatorname{tg}\alpha+i\dfrac{T+\tau}{2}$

и от точки A до точки iT. Через B обозначим точку с аффиксом $i\frac{T+\tau}{2}$. Обозначим длину отрезка AB через P. Докажем, что на l_2 $\operatorname{Re}(\sigma+z)>0$, т. е. что $P<\sigma$. Мы имеем

$$\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\Delta\sigma-\tau}{2},\quad \frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}<\frac{\Delta\sigma}{2},\quad P<\frac{\Delta\sigma}{2}\frac{\tau}{\sigma}=o(\delta(\sigma)),$$

откуда

$$P=o(\sigma).$$

Обозначим через β угол между отрезком $[0, \sigma+iT]$ и вещественной осью. Так как $T=\Delta\sigma$, то $\operatorname{tg}\beta=\Delta$. Далее, $P/T=o(1)$, т. е. при малых σ z/T лежит в области аналитичности функции $k(\zeta)$. Таким образом, применение теоремы Коши законно. Итак,

$$T\int_0^\infty A(u)\,R(T(u-\xi))\,e^{-u\sigma}\,du=\int_l \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z}\,k\left(\frac{z}{T}\right)e^{\xi z}\,dz.$$

Исследуем интеграл, стоящий в правой части. Когда $z=iy$ лежит на l_1, то точка $\sigma+z$ лежит в D, ибо $\tau=o(\delta(\sigma))$, т. е. τ меньше, нежели $\delta(\sigma)$. Так как в области D

$$f(s)=f_0(s)\,e^{o(1)}$$

равномерно относительно s, то, когда z находится на l_1,

$$f(\sigma+z)=f_0(\sigma+z)\,e^{o(1)}$$

равномерно относительно z. Также, когда z находится на l_1,

$$k\left(\frac{z}{T}\right)=k\left(\frac{z}{\Delta\sigma}\right)=k(0)(1+o(1))=k(0)\,e^{o(1)}$$

равномерно относительно z и

$$\left|\frac{\sigma}{\sigma+z}\right|\leqslant\frac{\sigma}{\sigma-\tau}\to 1,$$

т. е. $\frac{1}{\sigma+z}=\frac{1}{\sigma}e^{o(1)}$ равномерно относительно z. На l_1

$$dz=i\,dy.$$

Итак,

$$\int_{l_1} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\, dz = \frac{ik(0)}{\sigma} \int_0^{\tau} f_0(\sigma+z)\, e^{\omega z + O\left(\frac{|z|}{\sigma}\right) + o(1)}\, dy =$$

$$= \frac{ik(0)}{\sigma} \int_0^{\tau} f_0(\sigma+z)\, e^{\omega z + o(1)}\, dy,$$

ибо $|z|/\sigma \leqslant \tau/\sigma = o(1)$. По лемме 1 с $\varepsilon = 1/4$ имеем равномерно относительно y

$$f_0(\sigma+z) = f_0(\sigma)\, e^{z\varphi'(\sigma) + \frac{z^2\varphi''(\sigma)}{2}} \left(1 + o(1+|z|^2\varphi''(\sigma))\, e^{\frac{|z|^2\varphi''(\sigma)}{4}}\right).$$

Но $\omega = -\varphi'(\sigma)$, $z = iy$. Поэтому

$$\int_{l_1} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\, dz = \frac{if_0(\sigma)}{\sigma} k(0) \times$$

$$\times \left(\int_0^{\tau} e^{-\frac{y^2\varphi''(\sigma)}{2}}\, dy + o\left(\int_0^{\tau} (1 + y^2\varphi''(\sigma))\, e^{-\frac{y^2\varphi''(\sigma)}{4}}\, dy \right)\right).$$

Делаем замену переменных $y\sqrt{\varphi''(\sigma)} = w$. Получим

$$\int_{l_1} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\, dz = i\frac{f_0(\sigma)}{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}} k(0) \times$$

$$\times \left(\int_0^{\tau\sqrt{\varphi''(\sigma)}} e^{-w^2/2}\, dw + o\left(\int_0^{\tau\sqrt{\varphi''(\sigma)}} (1+w^2)\, e^{-w^2/4}\, dw \right)\right).$$

Так как $\dfrac{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}{-\varphi'(\sigma)} = o(\tau)$, то $\dfrac{\sigma\varphi''(\sigma)}{-\varphi'(\sigma)} = o\left(\tau\sqrt{\varphi''(\sigma)}\right)$. Но $\dfrac{\sigma\varphi''(\sigma)}{-\varphi'(\sigma)} \geqslant 1$, отсюда $1 = o\left(\tau\sqrt{\varphi''(\sigma)}\right)$, $\dfrac{1}{\tau\sqrt{\varphi''(\sigma)}} = o(1)$, т. е.

$\tau\sqrt{\varphi''(\sigma)} \to \infty$ при $\sigma \searrow 0$,

$$\int\limits_{l_1} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\,dz = i\,\frac{f_0(\sigma)}{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}\, k(0) \times$$
$$\times \left(\int\limits_0^\infty e^{-w^2/2}\,dw + o(1)\right) = \frac{if_0(\sigma)\,k(o)}{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+o(1)).$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha \to 0$ при $\sigma \searrow 0$ и Δ — фиксированный угол, то при достаточно малом σ ломаная l_2, сдвинутая направо на расстояние σ, целиком лежит внутри угла $|t| \leqslant \sigma\Delta$. Из того, что угол отрезка, соединяющего точку 0 с точкой $\sigma+i\tau$, с отрезком, соединяющим точку A' с точкой $\sigma+i\tau$, равен $\pi/2$, следует, что когда $z \in l_2$, то

$$|\sigma+z| \geqslant \sigma.$$

Когда $z \in l_2$, то

$$k\left(\frac{z}{T}\right) = O(1).$$

Наконец, на l_2 равномерно относительно z

$$\frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z} = O\left(\frac{f_0(|\sigma+z|)}{\sigma}\, e^{\omega x + O\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)}\right) =$$
$$= O\left(\frac{f_0(|\sigma+z|)}{\sigma}\, e^{\omega z}\right),$$

ибо

$$O\left(\frac{|z|}{\sigma}\right) = O\left(\frac{T}{\sigma}\right) = O(1).$$

Но по лемме 2 и так как $|\sigma+z| > \sigma$,

$$f_0(|\sigma+z|) < f_0(\sigma).$$

Итак, на l_2 равномерно относительно z

$$\frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z} = O\left(\frac{f_0(\sigma)}{\sigma}\, e^{\omega x}\right).$$

На l_2 $x \leqslant 0$ и

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = \left|1 \pm \frac{\sigma}{\tau} i\right| = O\left(\frac{\sigma}{\tau}\right).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{z} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\, dz = O\left(\frac{f_0(\sigma)\,\sigma}{\sigma\tau} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\omega x}\, dx\right) =$$

$$= O\left(\frac{f_0(\sigma)}{\tau\omega}\right) = O\left(\frac{f_0(\sigma)}{-\tau\varphi'(\sigma)}\right) = o\left(\frac{f_0(\sigma)}{\sigma} \frac{1}{\varphi''(\sigma)}\right),$$

так как

$$-\frac{1}{\tau\varphi'(\sigma)} = o\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}\right).$$

Итак,

$$\int\limits_{l} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\, dz = \frac{i f_0(\sigma)\, k(0)}{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+o(1)).$$

Но

$$A_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{f_0(\sigma)}{\sigma\sqrt{\varphi''(\sigma)}}\, e^{\omega\sigma},$$

или

$$\int\limits_{l} \frac{f(\sigma+z)}{\sigma+z} k\left(\frac{z}{T}\right) e^{\xi z}\, dz \sim \frac{ik(0)\,\pi A_0(\omega)}{e^{\omega\sigma}}.$$

Мы получаем, что при $\sigma \searrow 0$

$$\int\limits_{0}^{\infty} A(u)\, R(T(u-\xi))\, T e^{-u\sigma}\, du \sim \frac{ik(0)\,\pi A_0(\omega)}{e^{\omega\sigma}}.$$

Сделав замену переменного $u = \xi + v/T$, мы получим

$$\int\limits_{-\xi T}^{\infty} A\left(\xi + \frac{v}{T}\right) R(v)\, e^{-v\sigma/T}\, dv \sim ik(0)\,\pi A_0(\omega)\, e^{(\xi-\omega)\sigma}. \tag{3}$$

Имеем

$$T\xi = -\Delta\sigma\varphi'(\sigma) + O(1);$$

поэтому $T\xi \to \infty$ при $\sigma \searrow 0$.

Для того чтобы доказать оценки (1), нужно в формуле (3) конкретизировать функцию $k(\zeta)$ и величину ξ; это делается по-разному для получения верхней и нижней оценок.

1. Оценка $\overline{\lim\limits_{\omega\to\infty}}\,\frac{A(\omega)}{A_0(\omega)}$. Положим $k(\zeta)=2(\zeta-i)$, $k(0)=-2i$. Тогда

$$R(v)=2\int_0^i(\zeta-i)\,e^{-\zeta v}\,d\zeta=-\frac{2i}{v}+\frac{2}{v^2}(1-e^{-iv})$$

и, значит,

$$\operatorname{Re}R(v)=\frac{2}{v^2}(1-\cos v)=\frac{4\sin^2\frac{v}{2}}{v^2}=\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\geqslant 0.$$

Переходя к вещественным частям в асимптотической формуле (3), получим

$$\int_{-\xi T}^{\infty}A\left(\xi+\frac{v}{T}\right)e^{-v\sigma/T}\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,dv\sim 2\pi A_0(\omega)\,e^{(\xi-\omega)\sigma}.$$

Пусть λ — фиксированное положительное число. В силу неубывания $A(v)$ и убывания $e^{-v\sigma/T}$ имеем

$$A\left(\xi-\frac{\lambda}{T}\right)e^{-\lambda\sigma/T}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,dv\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\xi T}^{\infty}A\left(\xi+\frac{v}{T}\right)e^{-v\sigma/T}\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,dv.$$

Отсюда

$$A\left(\xi-\frac{\lambda}{T}\right)\leqslant e^{\lambda/\Delta}\left(\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,dv\right)^{-1}(1+o(1))\,2\pi A_0(\omega)\,e^{(\xi-\omega)\sigma}.$$

Положим $\xi=\omega+\frac{\lambda}{T}$; при этом условие

$$\xi=\omega+O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

выполнено. Мы получим

$$\frac{A(\omega)}{A_0(\omega)} \leqslant 2\pi e^{2\lambda/\Delta}\left(\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,dv\right)^{-1}(1+o(1)),$$

$$\varlimsup_{\omega\to\infty} \frac{A(\omega)}{A_0(\omega)} \leqslant \frac{2\pi e^{2\lambda/\Delta}}{\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,dv}.$$

Беря $\lambda = \sqrt{\Delta}$, получаем

$$\varlimsup_{\omega\to\infty} \frac{A(\omega)}{A_0(\omega)} \leqslant 2\pi e^{2/\sqrt{\Delta}}\left(\int_{-\sqrt{\Delta}}^{\sqrt{\Delta}} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,dv\right)^{-1}.$$

Это соотношение вместе с формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2}\,dv = 2\pi$$

дает нам верхнюю оценку неравенства (1).

2. Возьмем теперь

$$k(\zeta) = 2(\zeta - i) - \frac{e^{\mu\zeta} - e^{-\mu\zeta}}{\mu}; \quad \mu > 0, \quad \mu \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Тогда $k(0) = -2i$ и

$$R(v) = 2\int_0^i (\zeta - i)\, e^{-v\zeta}\, d\zeta - \frac{1}{\mu}\int_0^i (e^{\mu\zeta} - e^{-\mu\zeta})\, e^{-v\zeta}\, d\zeta =$$

$$= \frac{2}{v^2}(1 - e^{-iv} - iv) - \frac{1}{\mu}\left(\frac{e^{-vi} - 1}{\mu - v} + \frac{e^{-vi} - 1}{\mu + v}\right) =$$

$$= -\frac{2i}{v} + (1 - e^{-iv})\left(\frac{2}{v^2} + \frac{1}{\mu(\mu + v)} - \frac{1}{\mu(v - \mu)}\right).$$

Это приводит к

$$\operatorname{Re} R(v) = (1 - \cos v)\left(\frac{2}{v^2} - \frac{2}{v^2 - \mu^2}\right) =$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - v^2} \left\} \begin{matrix} >0 & \text{при} & |v| < \mu \\ <0 & \text{при} & |v| > \mu. \end{matrix}\right.$$

Подставляя в основную формулу и переходя к реальным частям, получим

$$\int_{-\xi T}^{\infty} A\left(\xi + \frac{v}{T}\right) \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - v^2} e^{-v\sigma/T}\, dv \sim$$

$$\sim 2\pi A_0(\omega)\, e^{(\xi - \omega)\sigma}(1 + o(1)),$$

$$\int_{-\mu}^{\mu} A\left(\xi + \frac{v}{T}\right) \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - v^2} e^{-v\sigma/T}\, dv \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\xi T}^{\infty} A\left(\xi + \frac{v}{T}\right) \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - v^2} e^{-\sigma v/T}\, dv.$$

Значит,

$$e^{\mu\sigma/T} A\left(\xi + \frac{\mu}{T}\right) \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - v^2}\, dv \geqslant$$

$$\geqslant 2\pi A_0(\omega)\, e^{(\xi - \omega)\sigma}(1 + o(1)).$$

Положим $\xi = \omega - \frac{\mu}{T}$. Такой выбор возможен, ибо $\frac{\mu}{T} = O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$. Мы получим

$$e^{\mu/\Delta} A(\omega) \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - v^2}\, dv \geqslant 2\pi A_0(\omega)\, e^{-\mu/\Delta}(1 + o(1))$$

и, значит,

$$\varliminf_{\omega\to\infty} \frac{A(\omega)}{A_0(\omega)} \geqslant 2\pi e^{-2\mu/\Delta} \left(\int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 - v^2}\, dv \right)^{-1}.$$

Но

$$\int_{-\mu}^{\mu} 2\sin^2\frac{v}{2}\left(\frac{2}{v^2} + \frac{1}{\mu(\mu - v)} + \frac{1}{\mu(\mu + v)}\right) dv =$$

$$= \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} dv + 4 \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\mu^2 - v^2} dv =$$

$$= \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} dv + 8 \int_{0}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\mu^2 - v^2} dv =$$

$$= \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} dv + 8 \int_{0}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{w}{2}}{w(2\mu - w)} dw \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} dv + \frac{8}{\mu} \int_{0}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{w}{2}}{w} dw \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} dv + \frac{8}{\mu} \int_{0}^{1} \frac{w^2}{4w} dw + \frac{8}{\mu} \int_{1}^{\mu} \frac{dw}{w}$$

(мы сделали замену переменного $\mu - v = w$ и применили неравенство $1/(2\mu - w) < 1/\mu$). Итак,

$$\varliminf_{\omega\to\infty} \frac{A(\omega)}{A_0(\omega)} \geqslant 2\pi e^{-2\mu/\Delta} \left(\int_{-\mu}^{\mu} \frac{\sin^2 \frac{v}{2}}{\left(\frac{v}{2}\right)^2} dv + \frac{1}{\mu} + \frac{8 \ln \mu}{\mu} \right)^{-1}.$$

Полагаем $\mu = 2\pi\left(\left[\sqrt{\Delta}\right] + 1\right)$. Тем самым установлена нижняя оценка (1).

Теорема доказана.

1.4. Обобщенное неравенство Эссеена

Неравенство Эссеена (К. Г. Эссеен [115], см. также Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров [21], § 39) дает возможность находить оценку разности двух функций распределения по разности их характеристических функций. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения, $f(t)$ и $g(t)$ — их характеристические функции. Если $G'(x)$ существует и $G'(x) \leqslant A$ для всех x, то

$$\sup_x |F(x) - G(x)| < C\left(\frac{A}{T} + \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t}\right).$$

Для нужд теории чисел ограничение «$G'(x)$ существует и ограничено» оказывается иногда стеснительным. В работе А. С. Файнлейба [70] дается оценка разности функций распределения по разности их характеристических функций, справедливая без каких-либо ограничений.

Теорема. *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения, $f(t)$ и $g(t)$ — их характеристические функции.*

Тогда при $T > 0$

$$\sup_x |F(x) - G(x)| < C_1\left(S_G\left(\frac{1}{T}\right) + \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t}\right), \quad (1)$$

где C_1 — абсолютная постоянная, а

$$S_G(h) = \sup_x \frac{1}{2h} \int_0^h (G(x+u) - G(x-u))\, du.$$

Замечание. Из определения $S_G(h)$ вытекает, что

$$S_G(h) \leqslant \frac{1}{2} Q_G(2h) \leqslant Q_G(h),$$

где

$$Q_G(h) = \sup_x (G(x+h) - G(x))$$

— функция концентрации для $G(x)$. Если $G'(x)$ существует при всяком x и $G'(x) \leqslant A$, то оценка (1) становится неравенством Эссеена.

Доказательство. Пусть $T>0$. Рассмотрим функцию $P_T(x)$, определенную для всех вещественных x и обладающую следующими свойствами:

1) $0 \leqslant P_T(x) \leqslant C_1 T$ для всех x;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_T(x)\,dx = 1$;

3) $\int\limits_{0}^{C_2/T} P_T(x)\,dx = A(T) \geqslant C_3 > \frac{1}{2}$;

4) $\varphi_T(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P_T(x)\,dx = 0$, если $|t| > T$.

Здесь C_1, C_2, C_3 — положительные константы. Нетрудно убедиться в том, что функция

$$P_T(x) = T\,\frac{1-\cos(Tx-3)}{\pi\,(Tx-3)^2}$$

удовлетворяет условиям 1) — 4), если $C_1 = \frac{1}{2\pi}$, $C_2 = 6$, $C_3 = 1 - \frac{4}{3\pi} > \frac{1}{2}$. При этом

$$\varphi_T(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P_T(x)\,dx = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|t|}{T}\right) e^{3it/T}, & \text{если } |t| \leqslant T, \\ 0, & \text{если } |t| > T. \end{cases}$$

Пусть $h = C_2/T$. Тогда, так как $F(u)$ и $G(u)$ — функции распределения, то из условий 1) — 4) следует:

$$F(x) \leqslant \frac{1}{A(T)} \int\limits_{x}^{x+h} F(u)\,P_T(u-x)\,du =$$

$$= G(x) + \frac{1}{A(T)} \int\limits_{x}^{x+h} (G(u) - G(x))\,P_T(u-x)\,du +$$

$$+ \frac{1}{A(T)} \int\limits_{x}^{x+h} (F(u) - G(u))\,P_T(u-x)\,du \leqslant$$

$$\leqslant G(x) + \frac{C_1 T}{A(T)} \int_0^h (G(x+u) - G(x))\,du +$$
$$+ \frac{1}{A(T)} \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - G(u))\,P_T(u-x)\,du -$$
$$- \frac{1}{A(T)} \left(\int_{-\infty}^{x} + \int_{x+h}^{\infty} \right) (F(u) - G(u))\,P_T(u-x)\,du.$$

Пусть

$$F^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,P_T(u-x)\,du, \quad G^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u)\,P_T(u-x)\,du.$$

По формуле обращения при $y < x$

$$F^*(x) - F^*(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{t} f(t)\,\bar{\varphi}_T(t)\,dt$$

и

$$G^*(x) - G^*(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{t} g(t)\,\bar{\varphi}_T(t)\,dt$$

(так как $\varphi_T(t) = 0$ при $|t| > T$), откуда

$$F^*(x) - G^*(x) - (F^*(y) - G^*(y)) =$$
$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{f(t) - g(t)}{t} \bar{\varphi}_T(t)\,e^{-itx}\,dt -$$
$$- \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{f(t) - g(t)}{t} \bar{\varphi}_T(t)\,e^{-ity}\,dt. \qquad (2)$$

Если

$$\int_0^1 |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} = \infty,$$

то доказываемое неравенство тривиально. Если же это не так, то, устремляя в (2) y к $-\infty$, получаем (на основании теоремы о стремлении коэффициентов Фурье к нулю)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - G(u)) P_T(u-x)\,du = \\ = \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{f(t)-g(t)}{t} \bar{\varphi}_T(t) e^{-itx}\,dt,$$

откуда

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (F(u) - G(u)) P_T(u-x)\,du \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^T |f(t)-g(t)| \frac{dt}{t}. \quad (3)$$

Далее,

$$\frac{C_1 T}{A(T)} \int_0^h (G(x+u) - G(x))\,du \leqslant \\ \leqslant \frac{C_1}{C_3} T \int_0^h (G(x+u) - G(x-u))\,du \leqslant \frac{2C_1C_2}{C_3} S_G(h). \quad (4)$$

Из определения $S_G(h)$ ясно, что это неубывающая функция от h. Кроме того, так как

$$\frac{1}{4h} \int_0^{2h} (G(x+u) - G(x-u))\,du = \\ = \frac{1}{4h} \int_0^h (G(x+u) - G(x-u))\,du + \\ + \frac{1}{4h} \int_0^h (G(x+h+u) - G(x-h-u))\,du =$$

$$= \frac{1}{4h}\int_0^h (G(x+u) - G(x-u))\,du +$$

$$+ \frac{1}{4h}\int_0^h (G(x+h+u) - G(x+h-u))\,du +$$

$$+ \frac{1}{4h}\int_0^h (G(x+h-u) - G(x-h+u))\,du +$$

$$+ \frac{1}{4h}\int_0^h (G(x-h+u) - G(x-h-u))\,du =$$

$$= \frac{1}{2h}\int_0^h (G(x+u) - G(x-u))\,du +$$

$$+ \frac{1}{4h}\int_0^h (G(x+h+u) - G(x+h-u))\,du +$$

$$+ \frac{1}{4h}\int_0^h (G(x-h+u) - G(x-h-u))\,du,$$

то

$$S_G(2h) \leqslant 2S_G(h)$$

и

$$S_G(h) = S_G\left(\frac{C_2}{T}\right) \leqslant C_4 S_G\left(\frac{1}{T}\right), \quad C_4 = \text{const}. \tag{5}$$

Пусть

$$\alpha = \sup_x |F(x) - G(x)|.$$

Имеем

$$\left|\left(\int_{-\infty}^{x} + \int_{x+h}^{\infty}\right)(F(u) - G(u))\,P_T(u-x)\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\left(\int_{-\infty}^{x} + \int_{x+h}^{\infty}\right) P_T(u-x)\,du = \alpha\left(1 - \int_x^{x+h} P_T(u-x)\,du\right) =$$

$$= \alpha(1 - A(T)). \tag{6}$$

Из неравенств (3) — (6) вытекает

$$F(x) \leqslant G(x) + \frac{2C_1C_2C_4}{C_3} S_G\left(\frac{1}{T}\right) + \\ + \frac{1}{\pi A(T)} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \alpha\left(\frac{1}{A(T)} - 1\right),$$

или

$$F(x) - G(x) \leqslant \frac{2C_1C_2C_4}{C_3} S_G\left(\frac{1}{T}\right) + \\ + \frac{1}{\pi C_3} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \alpha\left(\frac{1}{C_3} - 1\right). \quad (7)$$

Совершенно аналогичным образом, исходя из неравенства

$$F(x) \geqslant \frac{1}{A(T)} \int_{x-h}^{x} F(u) P_T(x-u)\, du,$$

приходим к оценке разности $F(x) - G(x)$ снизу:

$$F(x) - G(x) \geqslant -\frac{2C_1C_2C_4}{C_3} S_G\left(\frac{1}{T}\right) - \\ - \frac{1}{\pi C_3} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} - \alpha\left(\frac{1}{C_3} - 1\right). \quad (8)$$

Так как неравенства (7) и (8) справедливы для всех x, то из них следует, что

$$\alpha \leqslant \frac{2C_1C_2C_4}{C_3} S_G\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{\pi C_3} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \alpha\left(\frac{1}{C_3} - 1\right).$$

Откуда, учитывая, что $C_3 > 1/2$, получаем

$$\alpha \leqslant \frac{2C_1C_2C_4}{2C_3 - 1} S_G\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{\pi(2C_3 - 1)} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t}.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $G(x)$ — *функция распределения,* $g(t)$ — *ее характеристическая функция,* $h>0$,

$$Q_G(h)=\sup_x(G(x+h)-G(x)),$$

$Q_G(h)$ — *функция концентрации. Имеет место неравенство*

$$Q_G(h)<C_5\sup_{t\geqslant 1/h}\frac{1}{t}\int_0^t|g(u)|\,du, \tag{9}$$

где C_5 — *абсолютная константа.*

Для доказательства положим в неравенстве (1)

$$F(x)=G(x+h);$$

тогда

$$f(t)=e^{-ith}g(t),$$

$$Q_G(h)<C\left(S_G\left(\frac{1}{T}\right)+\int_0^T|\,g(t)(e^{-ith}-1)\,|\frac{dt}{t}\right). \tag{10}$$

Возьмем здесь $T=1/h$ и воспользуемся формулой (см., например, Г. Крамер [33], стр. 41)

$$\frac{1}{2h}\int_0^h(G(x+u)-G(x-u))\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2e^{-2i\frac{tx}{h}}g\left(\frac{2t}{h}\right)dt,$$

из которой следует, что

$$S_G(h)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\left|g\left(\frac{2t}{h}\right)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{1/2}\left|g\left(\frac{2t}{h}\right)\right|dt+\frac{1}{\pi}\int_{1/2}^{\infty}\left|g\left(\frac{2t}{h}\right)\right|\frac{dt}{t^2}=$$

$$= \frac{h}{2\pi}\int_0^{1/h} |g(t)|\,dt + \frac{2}{\pi h}\int_{1/h}^{\infty} |g(t)|\frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left(h\int_0^{1/h} |g(t)|\,dt + \frac{1}{h}\int_{1/h}^{\infty}\frac{1}{t^2}\,d\left(\int_0^t |g(u)|\,du\right)\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi h}\int_{1/h}^{\infty}\left(\int_0^t |g(u)|\,du\right)\frac{dt}{t^3} \leqslant \frac{4}{\pi}\sup_{t\geqslant 1/h}\left(\frac{1}{t}\int_0^t |g(u)|\,du\right). \tag{11}$$

Отсюда, а также из очевидного неравенства

$$\int_0^{1/h} |g(t)(e^{-ith}-1)|\frac{dt}{t} \leqslant h\int_0^{1/h} |g(t)|\,dt \leqslant \sup_{t\geqslant 1/h}\frac{1}{t}\int_0^t |g(u)|\,du$$

следует формула (9).

Следствие 2. *В обозначениях теоремы*

$$\sup_x |F(x) - G(x)| <$$

$$< C\left(\sup_{t\geqslant T}\frac{1}{t}\int_0^t |g(u)|\,du + \int_0^T |f(t)-g(t)|\frac{dt}{t}\right). \tag{12}$$

Это сразу следует из (1) и (11).

ГЛАВА II

АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С РАСТУЩИМ И БЕСКОНЕЧНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ СЛАГАЕМЫХ

2.1. Аддитивная задача об удвоении последовательности

В предисловии мы говорили о прямой аддитивной задаче, заимствованной из книги П. Бахмана «Аналитическая теория чисел» [92].

В качестве другого примера рассмотрим аддитивную задачу (ее сообщил нам В. Ташбаев), в которой складываемые последовательности совпадают (такие задачи называют задачами об удвоении последовательностей).

Пусть дана бесконечная последовательность вещественных чисел

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \tag{1}$$

Обозначим через $n(u)$ количество чисел последовательности (1), не превосходящих u, и обозначим через $q(u)$ количество решений неравенства

$$a_i + a_j \leqslant u, \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Пусть известно, что при $u \to \infty$

$$n(u) = Cu^{\alpha} + O(u^{\alpha_1}), \tag{3}$$

где $C > 0$ — постоянная, $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha$; α_1 и α — постоянные.

Теорема. *При условии* (3) *имеет место*

$$q(N) = C^2 \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} N^{2\alpha} + O(N^{\alpha+\alpha_1}),$$

Доказательство. Прежде всего установим, что при условии (3)

$$a_i = C^{-1/\alpha} i^{1/\alpha} + O\left(i^{1/\alpha-(1-\alpha_1/\alpha)}\right).$$

Действительно, $n(a_i)=i$. Поэтому по (3)

$$i = Ca_i^{\alpha} + O\left(a_i^{\alpha_1}\right).$$

Отсюда следует, что $a_i^{\alpha} = O(i)$. Мы получаем

$$i = Ca_i^{\alpha} + O\left(i^{\alpha_1/\alpha}\right),$$

$$a_i = \left(\frac{i}{C} + O\left(i^{\alpha_1/\alpha}\right)\right)^{1/\alpha} = \frac{i^{1/\alpha}}{C^{1/\alpha}}\left(1 + O\left(i^{-(1-\alpha_1/\alpha)}\right)\right)^{1/\alpha} = \\ = \frac{i^{1/\alpha}}{C^{1/\alpha}}\left(1 + O\left(i^{-(1-\alpha_1/\alpha)}\right)\right) = \frac{i^{1/\alpha}}{C^{1/\alpha}} + O\left(i^{1/\alpha-(1-\alpha_1/\alpha)}\right).$$

Теперь докажем утверждение теоремы

$$q(N) = \sum_{a_i \leqslant N} n(N-a_i) = \\ = C\sum_{a_i \leqslant N}(N-a_i)^{\alpha} + O\left(\sum_{a_i \leqslant N}(N-a_i)^{\alpha_1}\right) = \\ = C\sum_{\substack{i \leqslant n(N) = \\ = CN^{\alpha}+O(N^{\alpha_1})}}\left(N - \left(\frac{i}{C}\right)^{1/\alpha} - O\left(i^{1/\alpha-(1-\alpha_1/\alpha)}\right)\right)^{\alpha} + \\ + O\left(n(N)N^{\alpha_1}\right) = C\sum_{\substack{i \leqslant n(N) = \\ = CN^{\alpha}+O(N^{\alpha_1})}}\left(N - \left(\frac{i}{C}\right)^{1/\alpha} - \\ - O\left(i^{1/\alpha-(1-\alpha_1/\alpha)}\right)\right)^{\alpha} + O\left(N^{\alpha+\alpha_1}\right).$$

По теореме Лагранжа о среднем значении имеем в силу $0<\alpha<1$

$$\left(N - \left(\frac{i}{C}\right)^{1/\alpha} - O\left(i^{1/\alpha-(1-\alpha_1/\alpha)}\right)\right)^{\alpha} - \left(N - \left(\frac{i}{C}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} = \\ = O\left(i^{1/\alpha-(1-\alpha_1/\alpha)}\right)O(1) = O\left(i^{1/\alpha-(1-\alpha_1/\alpha)}\right).$$

Итак,

$$q(N) = C \sum_{i \leqslant CN^{\alpha} + O(N^{\alpha_1})} \left(N - \left(\frac{i}{C}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} + O\left(\sum_{i \leqslant CN^{\alpha} + O(N^{\alpha_1})} i^{1/\alpha - (1-\alpha_1/\alpha)}\right) + O\left(N^{\alpha_1+\alpha}\right) =$$

$$= C \sum_{i \leqslant CN^{\alpha} + O(N^{\alpha_1})} \left(N - \left(\frac{i}{C}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} + O\left(\int_1^{CN^{\alpha} + O(N^{\alpha_1})} x^{1/\alpha - (1-\alpha_1/\alpha)}\, dx\right) + O\left(N^{\alpha+\alpha_1}\right).$$

Отсюда следует:

$$q(N) = C \sum_{i \leqslant CN^{\alpha} + O(N^{\alpha_1})} \left(N - \left(\frac{i}{C}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} + O\left(N^{\alpha+\alpha_1}\right) =$$

$$= C \int_0^{CN^{\alpha} + O(N^{\alpha_1})} \left(N - \left(\frac{x}{C}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} dx + O\left(N^{\alpha}\right) + O\left(N^{\alpha+\alpha_1}\right) =$$

$$= C \int_0^{CN^{\alpha}} \left(N - \left(\frac{x}{C}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} dx + O\left(N^{\alpha_1} N^{(\alpha_1 - \alpha + 1)\alpha}\right) + O\left(N^{\alpha+\alpha_1}\right) =$$

$$= C \int_0^{CN^{\alpha}} \left(N - \left(\frac{x}{C}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} dx + O\left(N^{\alpha_1+\alpha}\right),$$

ибо

$$\int_{CN^{\alpha} - O(N^{\alpha_1})}^{CN^{\alpha}} \left(N - \left(\frac{x}{C}\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha} dx =$$

$$= O\left(N^{\alpha_1}\left(\left(N^{\alpha}\right)^{1/\alpha} - \left(N^{\alpha} - O\left(N^{\alpha_1}\right)\right)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\right) =$$

$$= O\left(N^{\alpha_1}\left(N^{\alpha_1} N^{\alpha(1/\alpha - 1)}\right)^{\alpha}\right).$$

В интеграле сделаем замену переменных

$$x = C(Nu)^{\alpha}, \quad u = \frac{1}{N}\left(\frac{x}{C}\right)^{1/\alpha}.$$

Мы получаем

$$q(N) = C^2 N^{2\alpha} \alpha \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^\alpha \, du + O\left(N^{\alpha+\alpha_1}\right) =$$
$$= C^2 N^{2\alpha} \frac{\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} + O\left(N^{\alpha+\alpha_1}\right) =$$
$$= C^2 \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} N^{2\alpha} + O\left(N^{\alpha+\alpha_1}\right),$$

что и требовалось доказать.

2.2. Лемма Шнейдера

В качестве примера на вероятностную интерпретацию аддитивных задач мы приводим лемму Т. Шнейдера [149] (Hilfsatz 1), о которой мы упоминали во введении.

Лемма. *Пусть* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — *натуральные числа, большие единицы; n-мерный параллелепипед* $|x_l| \leqslant r_l/2$, $l = 1, 2, \ldots, n$, *разрезается* $n-1$*-мерной гиперплоскостью*

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{x_l}{r_l} = t$$

на две части. Пусть $Q_n(t)$ *обозначает отношение количества целых точек* (точек с целыми координатами), *заключенных в меньшую из двух частей, к количеству всех целых точек параллелепипеда. При* $n \to \infty$ *и* $t > \sqrt{\frac{n \ln n}{2}}$

$$Q_n(t) \to 0.$$

Чтобы подчеркнуть «вероятностный» характер леммы Шнейдера, приведем асимптотический закон, относящийся к этой задаче.

Теорема. *Пусть* $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — *натуральные числа, большие единицы. Обозначим через* $J_n(t)$ *количество решений неравенства*

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{x_l}{r_l} \leqslant t$$

в целых числах $|x_l| \leqslant r_l/2$. *Тогда равномерно относительно* x

$$\frac{J_n\left(x\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{n}\frac{\left[\frac{r_l}{2}\right]\left(\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)}{r_l^2}}\right)}{\prod_{l=1}^{n}\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} x^{-u^2/2}\,du + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Идея доказательства принадлежит Г. Кастельнуово [94], теорема доказана автором книги [54].

Рассмотрим последовательность законов распределения

$$P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,$$

где $P_l(x)$ определено следующим образом:

$$P_l(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1} & \text{для } x = \dfrac{n}{r_l},\ n \text{ — целое такое, что } |n| \leqslant \dfrac{r_l}{2}; \\ 0 & \text{для остальных вещественных } x. \end{cases}$$

Обозначим соответствующие функции распределения через $F_l(x)$, $l = 1, 2, \ldots$ Подсчитаем математическое ожидание и дисперсию закона $P_l(x)$:

$$a_l = \frac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1} \sum_{|x_l| \leqslant \frac{r_l}{2}} \frac{x_l}{r_l} = 0,$$

$$b_l^2 = \frac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1} \sum_{|x_l| \leqslant \frac{r_l}{2}} \frac{x_l^2}{r_l^2} = \frac{\left[\frac{r_l}{2}\right]\left(\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)}{3r_l^2}.$$

Пусть

$$\Phi_n(x) = F_1(x) * F_2(x) * \ldots * F_n(x)$$

(знак * обозначает композицию). Очевидно, что

$$\Phi_n(x)=\frac{J_n(x)}{\prod_{l=1}^{n}\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)}.$$

На основании общих теорем теории вероятностей математическое ожидание A_n и дисперсия B_n^2 функции распределения $\Phi_n(x)$ будут

$$A_n=0,\quad B_n^2=\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{n}\frac{\left[\frac{r_l}{2}\right]\left(\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)}{r_l^2}.$$

Проверим выполнение условий Линдеберга в этой задаче. Возьмем любое фиксированное $\tau>0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{l=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqslant\tau B_n}x^2\,dF_l(x)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1}\sum_{\frac{1}{2}\geqslant\frac{x_l}{r_l}\geqslant\tau B_n}\frac{x_l^2}{r_l^2}.$$

Очевидно, $b_l^2\geqslant C$, где C — абсолютная постоянная; если $r_l=2$, то $b_l^2=\frac{2}{3\cdot4}=\frac{1}{6}$; если $r_l\geqslant3$, то

$$\left[\frac{r_l}{2}\right]\geqslant\frac{r_l}{3}\quad\text{и}\quad b_l^2\geqslant\frac{1}{3r_l^2}\,\frac{r_l}{3}\,\frac{r_l}{2}=\frac{1}{18}.$$

Поэтому $B_n^2\geqslant Cn$, $B_n>\sqrt{Cn}$. Какое бы ни было $\tau>0$, при достаточно большом n τB_n перерастет $1/2$ и внутренняя сумма $\sum\limits_{\frac{1}{2}\geqslant\frac{x_l}{r_l}\geqslant\tau B_n}\frac{x_l^2}{r_l^2}$ будет пустая. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{l=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqslant\tau B_n}x^2\,dF_l(x)=0,$$

т. е. условие Линдеберга выполнено. По интегральной предельной теореме равномерно относительно x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_n(xB_n)}{\prod_{l=1}^{n}\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz.$$

Подставляя значение B_n, убеждаемся в справедливости теоремы.

Теперь подсчитаем остаточный член в нашей теореме. Для этого мы применим метод характеристических функций и, в частности, неравенство Эссеена.

Через C будем обозначать абсолютные постоянные, не обязательно различные. Через $\Phi(x)$ обозначим закон Гаусса:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

Вводим далее следующие обозначения:

$$\beta_{2l} = \sigma_l^2 = \frac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1} \sum_{|x|\leqslant\left[\frac{r_l}{2}\right]} \frac{x^2}{r_l^2} = \frac{\left[\frac{r_l}{2}\right]\left(\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)}{3r_l^2},$$

$$\beta_{3l} = \frac{2}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1} \sum_{x=0}^{\left[\frac{r_l}{2}\right]} \frac{x^3}{r_l^3} = \frac{\left(\left[\frac{r_l}{2}\right]\left(\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)\right)^2}{2\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)r_l^3},$$

$$s_n^2 = \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^2 = \sum_{l=1}^{n} \beta_{2l},$$

$$\rho_n = \frac{\sum_{l=1}^{n} \beta_{3l}}{s_n^3}\sqrt{n}, \qquad T_n = \frac{s_n^3}{4\left(\sum_{l=1}^{n} \beta_{3l}\right)}.$$

Через $f_l(t)$ и $\tilde{\varphi}_n(t)$ обозначим характеристические функции функций распределения соответственно $F_l(x)$ и $\Phi_n(s_n x)$:

$$f_l(t) = \frac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1} \sum_{|x| \leqslant \frac{r_l}{2}} e^{it\frac{x}{r_l}},$$

$$\tilde{\varphi}_n(t) = \prod_{l=1}^{n} f_l\left(\frac{t}{s_n}\right) = \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1} \left(\sum_{|x| \leqslant \frac{r_l}{2}} e^{it\frac{x}{s_n r_l}} \right).$$

Замечание 1. Справедливо неравенство

$$\beta_{2l}^{1/2} \leqslant \beta_{3l}^{1/3}.$$

В самом деле, обозначим $a_l = [r_l/2]$, $a_l \geqslant 1$. Неравенство после сокращений станет эквивалентным очевидному неравенству

$$11(a_l^2 + a_l) \geqslant 4.$$

Замечание 2. При любом n

$$\rho_n \geqslant 1.$$

Действительно, по неравенству Гёльдера

$$s_n^3 = \left(\sum_{l=1}^{n} \beta_{2l}\right)^{3/2} \leqslant \sqrt{n} \sum_{l=1}^{n} \beta_{2l}^{3/2}.$$

По замечанию 2 $s_n^3 \leqslant \sqrt{n} \sum_{l=1}^{n} \beta_{3l}$, т. е. $\rho_n \geqslant 1$.

Замечание 3. $\rho_n \leqslant C$.

В силу $[r_l/2] \geqslant 1$ $\sigma_l^2 \geqslant 1/12$, $\beta_{3l} \leqslant C$. Поэтому $\rho_n \leqslant C$.

Основную роль играет

Лемма 1. *При* $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$

$$\left|\tilde{\varphi}_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \leqslant C \frac{|t|^3}{T_n} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Доказательство. Если x — вещественное число, то

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} + \frac{\theta x^3}{6}, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

В силу этого неравенства

$$f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)=\frac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1}\sum_{|x|\leqslant\frac{r_l}{2}} e^{it\frac{x}{s_n r_l}}=$$

$$=\frac{1}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1}\sum_{|x|\leqslant\frac{r_l}{2}}\left(1+\frac{ixt}{r_l s_n}-\frac{x^2t^2}{2r_l^2s_n^2}+\theta\,\frac{|x|^3|t|^3}{6r_l^3s_n^3}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}\beta_{2l}\frac{t^2}{s_n^2}+\frac{\theta}{6}\beta_{3l}\frac{|t|^3}{s_n^3}.$$

По неравенству $\beta_{2l}^{1/2}\leqslant\beta_{3l}^{1/3}$ получаем

$$\left|f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)-1\right|\leqslant\frac{1}{2}\frac{\beta_{3l}^{2/3}|t|^2}{s_n^2}+\frac{1}{6}\beta_{3l}\frac{|t|^3}{s_n^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{3l}|t|^3}{s_n^3}\right)^{2/3}+\frac{1}{6}\beta_{3l}\frac{|t|^3}{s_n^3}.$$

Так как $\beta_{3l}\leqslant\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}$ и $|t|\leqslant\sqrt[3]{T_n}$, то

$$\beta_{3l}\frac{|t|^3}{s_n^3}\leqslant\frac{\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}}{s_n^3}T_n=\frac{1}{4}<1.$$

Поэтому

$$\left|f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)-1\right|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

Заметим, что $f_l(t/s_n)$ есть вещественное число. При $|\alpha|\leqslant 2/3$ по формуле Тейлора с двумя членами и остатком получим

$$|\ln(1+\alpha)-\alpha|\leqslant\frac{9}{2}\alpha^2.$$

Отсюда

$$\ln f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)=f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)-1+\frac{9}{2}\theta\left|f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)-1\right|^2.$$

Но при $|t|\leqslant\sqrt[3]{T_n}$

$$\left|f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)-1\right|\leqslant\left(\frac{\beta_{3l}|t|^3}{s_n^3}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{\beta_{3l}|t|^3}{s_n}\right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\ln f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)=f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)-1+2\theta\frac{\beta_{3l}\,|t|^3}{s_n^3}=-\frac{1}{2}\beta_{2l}\frac{t^2}{s_n^2}+\frac{13}{6}\theta\frac{\beta_{3l}\,|t|^3}{s_n^3}.$$

Суммируя и заменяя 13/6 на 3, получаем

$$\ln\tilde{\varphi}_n(t)=-\frac{t^2}{2}+3\theta\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}\right)\frac{|t|^3}{s_n^3},$$

или

$$\ln\left(\tilde{\varphi}_n(t)\,e^{\frac{1}{2}t^2}\right)=3\theta\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}\right)\frac{|t|^3}{s_n^3}.$$

Но при $\alpha>0$

$$e^{\alpha}=1+\alpha e^{\alpha}\theta,\quad 0<\theta<1,$$

и, значит,

$$\tilde{\varphi}_n(t)\,e^{t^2/2}=1+3\theta'\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}\right)\frac{|t|^3}{s_n^3}\,e^{3\theta\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}\right)\frac{|t|^3}{s_n^3}}.$$

Так как при $|t|\leqslant\sqrt[3]{T_n}$

$$\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}\right)\frac{|t|^3}{s_n^3}\leqslant\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}\right)\frac{T_n}{s_n^3}=\frac{1}{4},$$

то

$$\tilde{\varphi}_n(t)\,e^{t^2/2}=1+4C\theta\left(\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}\right)\frac{|t|^3}{s_n^3},$$

или

$$|\tilde{\varphi}_n(t)\,e^{t^2/2}-1|\leqslant C\frac{|t|^3}{T_n},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$|\tilde{\varphi}_n(t)|^2\leqslant e^{-t^2+\frac{|t|^3}{3T_n}}.$$

Доказательство.

$$|f_l(t)|^2 = \frac{1}{\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)^2} \sum_{|x_1|\leqslant \frac{r_l}{2}} \sum_{|x_2|\leqslant \frac{r_l}{2}} e^{it\frac{x_1-x_2}{r_l}} =$$

$$= \frac{1}{\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)^2} \sum_{|x_1|\leqslant \frac{r_l}{2}} \sum_{|x_2|\leqslant \frac{r_l}{2}} \cos t\frac{x_1-x_2}{r_l},$$

ибо в левой части равенства стоит вещественное число. Далее,

$$\cos t\frac{x_1-x_2}{r_l} \leqslant 1 - \frac{t^2}{2}\frac{(x_1-x_2)^2}{r_l^2} + \frac{1}{6}|t|^3\left|\frac{x_1-x_2}{r_l}\right|^3 \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{r_l^2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + \frac{2}{3}|t|^3\frac{|x_1|^3+|x_2|^3}{r_l^3}.$$

Это дает

$$|f_l(t)|^2 \leqslant 1 - \frac{t^2}{\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)^2 2r_l^2}\left(\sum_{|x_1|\leqslant \frac{r_l}{2}} \sum_{|x_2|\leqslant \frac{r_l}{2}} x_1^2 - \right.$$

$$\left. -2\sum_{|x_1|\leqslant \frac{r_l}{2}} \sum_{|x_2|\leqslant \frac{r_l}{2}} x_1x_2 + \sum_{|x_1|\leqslant \frac{r_l}{2}} \sum_{|x_2|\leqslant \frac{r_l}{2}} x_2^2\right) + \frac{2}{3}\frac{|t|^3}{\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)^2 r_l^3} \times$$

$$\times \left(\sum_{|x_1|\leqslant \frac{r_l}{2}} \sum_{|x_2|\leqslant \frac{r_l}{2}} |x_1|^3 + \sum_{|x_1|\leqslant \frac{r_l}{2}} \sum_{|x_2|\leqslant \frac{r_l}{2}} |x_2|^3\right) =$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1} \sum_{|x|\leqslant \frac{r_l}{2}} \frac{x^2}{r^2} + \frac{4|t|^3}{3\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)} \sum_{|x|\leqslant \frac{r_l}{2}} \frac{|x|^3}{r_l^3} =$$

$$= 1 - t^2\beta_{2l} + \frac{4}{3}|t^3|\beta_{3l}.$$

Имеет место неравенство $1+\alpha \leqslant e^\alpha$ $(\alpha > 0)$, из него следует:

$$|f_l(t)|^2 \leqslant \exp\left[-t^2\beta_{2l} + \frac{4}{3}|t|^3\beta_{3l}\right].$$

Отсюда

$$|\tilde{\varphi}_n(t)|^2 = \prod_{l=1}^{n}\left|f_l\left(\frac{t}{s_n}\right)\right|^2 = \exp\left[-\frac{t^2}{s_n^2}\sum_{l=1}^{n}\beta_{2l} + \frac{4}{3}\frac{|t|^3}{s_n^3}\sum_{l=1}^{n}\beta_{3l}\right] = \exp\left[-t^2 + \frac{|t|^3}{3T_n}\right].$$

Это и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть* $|t| \leqslant T_n$. *Тогда*

$$|\tilde{\varphi}_n(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant C\frac{|t|^3}{T_n}e^{-t^2/3}.$$

Доказательство. Если $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_n}$, то это следует из леммы 1:

$$|\tilde{\varphi}_n(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant \frac{C|t|^3}{T_n}e^{-t^2/2} < C\frac{|t|^3}{T_n}e^{-t^2/3}.$$

Пусть $\sqrt[3]{T_n} \leqslant |t| \leqslant T_n$. В этом случае применяем лемму 2

$$|\tilde{\varphi}_n(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant |\tilde{\varphi}_n(t)| + e^{-t^2/2} \leqslant Ce^{-t^2/3} + e^{-t^2/2} \leqslant \leqslant Ce^{-t^2/3} \leqslant C\frac{|t|^3}{T_n}e$$

(так как $|t| \geqslant \sqrt[3]{T_n}$).

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$\int_{-T_n}^{T_n}\left|\frac{\tilde{\varphi}_n(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right|dt \leqslant \frac{C}{T_n}.$$

Доказательство.

Мы имеем

$$\int_{-T_n}^{T_n}\left|\frac{\tilde{\varphi}_n(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right|dt \leqslant \frac{C}{T_n}\int_{-T_n}^{T_n}t^2e^{-t^2/3}\,dt \leqslant \leqslant \frac{C}{T_n}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/3}\,dt = O\left(\frac{1}{T_n}\right)$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Применим неравенство Эссеена:

$$\left|\frac{J_n(s_n x)}{\prod\limits_{l=1}^{n}\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)}-\Phi(x)\right| \leqslant C\left(\frac{A}{T_n}+\int\limits_{-T_n}^{T_n}\left|\frac{\tilde{\varphi}_n(t)-e^{-t^2/2}}{t}\right|dt\right);$$

здесь $A=\max|\Phi'(x)|=1/\sqrt{2\pi}$. По лемме 3

$$\left|\frac{J_n(s_n x)}{\prod\limits_{l=1}^{n}\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du\right| \leqslant \frac{C}{T_n} \leqslant C\frac{\rho_n}{\sqrt{n}}.$$

Но по замечанию 3 $\rho_n \leqslant C$.

Таким образом,

$$\left|\frac{J_n\left(x\sqrt{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2}\right)}{\prod\limits_{l=1}^{n}\left(2\left[\frac{r_l}{2}\right]+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}},$$

что и требовалось доказать.

Г. Бабаев (см. [2], § 3 гл. 1) применил аналогичные соображения для изучения распределения целых точек на равнобочной гиперболе.

2.3. Локальная предельная теорема теории вероятностей и ее применения в теории чисел

Мы говорим, что дискретная случайная величина (т. е. величина, принимающая конечное или счетное множество значений) ξ имеет решетчатое распределение, если существуют такие числа a и $D>0$, что всевозможные значения этой случайной величины принадлежат прогрессии

$$a+Dk,$$

$k=\ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Число D называется шагом распределения. Говорят, что шаг распределения максимален, если значения ξ нельзя включить в прогрессию $b+D_1k$ с большей разностью $D_1>D$.

Если через p_k обозначить вероятность равенства

$$\xi = a + Dk,$$

то характеристическая функция величины ξ запишется в виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{it(a+Dk)} = e^{ita} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{itDk}.$$

Характеристическая функция есть конечный или бесконечный тригонометрический ряд.

Пусть случайные величины

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

взаимно независимы, решетчато распределены и имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Рассмотрим их сумму

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n;$$

ζ_n — решетчатая случайная величина, и ее значения могут быть записаны в виде $na+Dk$. Обозначим через $P_n(k)$ вероятность равенства $\zeta_n = na + Dk$, обозначим, далее, через A_n математическое ожидание величины ζ_n. Обозначим

$$B_n^2 = \mathsf{D}\zeta_n = n\,\mathsf{D}\xi_1,$$

D — символ дисперсии, и положим

$$z_{n,k} = \frac{an + Dk - A_n}{B_n}.$$

Б. В. Гнеденко доказал следующее предложение, называемое локальной предельной теоремой теории вероятностей.

Теорема. *Пусть независимые случайные величины*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$ и их математические ожидания и дисперсии конечны. Тогда для того, чтобы равномерно относительно k $(-\infty<k<\infty)$

при $n \to \infty$ имело бы место соотношение

$$P_n(k) = \frac{D}{\sqrt{2\pi}\,B_n} e^{-z_{n,k}^2/2} + o\left(\frac{1}{B_n}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы шаг распределения D был максимален.

Доказательство теоремы Б. В. Гнеденко ([20], стр. 265—272) проводится методом характеристических функций.

Перейдем к вопросу об остаточном члене в локальной предельной теореме для решетчатых случайных величин. В книге [26] (стр. 169) сформулирована следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\max_k \left| \frac{B_n P_n(k)}{D} - e^{-z_{n,k}^2/2} \right| = O\left(n^{-\delta/2}\right), \quad 0 < \delta < 1,$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *шаг распределения D максимален;*

2) *при $z \to \infty$*

$$\int\limits_{|x| \geqslant z} x^2\, dF(x) = O\left(z^{-\delta}\right).$$

Есть большое количество работ, посвященных обобщению локальной предельной теоремы и, в частности, распространению ее на разнораспределенные слагаемые. Мы назовем фамилии Р. Мизеса, Г. М. Бавли, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохорова, Г. А. Фреймана, Ю. А. Розанова, В. В. Петрова, Т. А. Азларова, С. Х. Сираждинова, А. А. Миталаускаса и В. А. Статулявичюса, Д. А. Москвина, Л. П. Постниковой, А. А. Юдина, Н. Г. Гамкрелидзе. Библиографию можно найти в книге И. А. Ибрагимова, Ю. В. Линника [26] (стр. 510), а также в статьях А. А. Миталаускаса, В. А. Статулявичюса [42], Д. А. Москвина, Л. П. Постниковой, А. А. Юдина [43]. Заметим, что в работе Г. А. Фреймана [78] локальные предельные теоремы исследуются элементарным методом.

Приведем примеры на применение локальных предельных теорем теории вероятностей в арифметике.

Пример 1. Пусть $r_{n,P}(N)$ обозначает количество решений уравнения

$$N = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

в целых числах $0 \leqslant x_i \leqslant P$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть P фиксировано, $n \to \infty$. Рассмотрим закон распределения

$$P(x) = \frac{1}{P+1} \text{ для } x = 0, 1, \ldots, P.$$

Это решетчатый закон с максимальным шагом $D = 1$.

Рассмотрим далее закон распределения

$$P_n(x) = \underbrace{P(x) * P(x) * \ldots * P(x)}_{n \text{ раз}}.$$

Очевидно,

$$P_n(N) = \frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n}.$$

Можно применить локальную предельную теорему. Мы получаем, что равномерно относительно целых N

$$\sqrt{n\frac{P^2+2P}{12}}\,\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(N-nP/2)^2}{2n(P^2+2P)/12}\right) \to 0.$$

Итак, мы получили, что при фиксированном P и $n \to \infty$ равномерно относительно целых N

$$r_{n,P}(N) = \\ = \frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n(P^2+2P)/6}}\exp\left(-\frac{(N-nP/2)^2}{n(P^2+2P)/6}\right) + o\left(\frac{(P+1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right).$$

Пример 2. Пусть $r_{n,P}(N)$ имеет другой смысл, чем в примере 1, а именно: здесь этот символ означает количество решений диофантова уравнения

$$N = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

в числах $0 \leqslant x_i \leqslant P$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть P фиксировано, а $n \to \infty$. Рассмотрим закон распределения

$$P(x) = \frac{1}{P+1} \text{ для } x = 0^2, 1^2, 2^2, \ldots, P^2.$$

Это решетчатый закон распределения с максимальным шагом $D=1$. Математическое ожидание и дисперсия закона $P(x)$ равны

$$a=\frac{1}{P+1}(1^2+2^2+\ldots+P^2)=\frac{P(2P+1)}{6},$$

$$\sigma^2=\frac{1}{P+1}(1^4+2^4+\ldots+P^4)-\left(\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2=$$

$$=\frac{P(2P+1)(3P^2+3P-1)}{30}-\left(\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2=$$

$$=\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{180}.$$

Определим закон распределения

$$P_n(x)=\underbrace{P(x)*P(x)*\ldots P(x)}_{n\text{ раз}}.$$

Ясно, что

$$P_n(N)=\frac{r_{n,P}(N)}{(P+1)^n}.$$

Применяя локальную предельную теорему, получаем, что равномерно относительно целых N при $n\to\infty$ (P фиксировано)

$$r_{n,P}(N)=\frac{(P+1)^n}{\sqrt{2\pi nP(P+2)(2P+1)(8P-3)/180}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(N-nP(2P+1)/6)^2}{2nP(P+2)(2P+1)(8P-3)/180}\right)+o\left(\frac{(P+1)^{n-2}}{\sqrt{n}}\right).$$

Пример 3. Пусть $P\geqslant 1$ — фиксированное натуральное число. Обозначим через $A_n(P)$ количество решений диофантова уравнения

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=y_1+y_2+\ldots+y_n$$

в числах $0\leqslant x_i\leqslant P$, $0\leqslant y_i\leqslant P$, $i=1, 2, \ldots, n$. Обозначим

$$\sigma^2=\frac{2}{(P+1)^2}\sum_{k=1}^{P}(P+1-k)k^2$$

(можно эту величину вычислить точно, но нам это не понадобится).

Теорема. *Пусть P фиксировано, а $n \to \infty$; тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n(P)}{(P+1)^{2n}/\sigma\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Доказательство. Пусть $u(k)$ есть количество решений диофантова уравнения $x - y = k$ в числах $0 \leqslant x \leqslant P$, $0 \leqslant y \leqslant P$. Нетрудно подсчитать явное выражение для $u(k)$:

$$u(k) = P + 1 - |k| \text{ для } |k| \leqslant P,$$
$$u(k) = 0 \qquad \text{для } |k| \geqslant P + 1.$$

Рассмотрим закон распределения, определенный так:

$$P(k) = \frac{u(k)}{(P+1)^2} \text{ для целых } k.$$

Это решетчатый закон распределения с максимальным шагом $D = 1$. Сосчитаем среднее значение и дисперсию σ^2 закона $P(x)$:

$$a = \sum_{k=-P}^{P} \frac{u(k)}{(P+1)^2} k = 0,$$

$$\sigma^2 = 2\sum_{k=1}^{P} \frac{u(k)}{(P+1)^2} k^2 = \frac{2}{(P+1)^2} \sum_{k=1}^{P} (P+1-k) k^2.$$

Образуем теперь композицию

$$P_n(x) = \underbrace{P(x) * P(x) * \ldots * P(x)}_{n \text{ раз}}.$$

Ясно, что

$$P_n(0) = \frac{A_n(P)}{(P+1)^{2n}},$$

где $A_n(P)$ — количество решений диофантова уравнения

$$x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \ldots + x_n - y_n = 0$$

в числах $0 \leqslant x_i \leqslant P$, $0 \leqslant y_i \leqslant P$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Применяя локальную теорему Гнеденко, получаем при $n \to \infty$

$$\sigma\sqrt{n} \frac{A_n(P)}{(P+1)^{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \to 0,$$

что и требовалось доказать.

2.4. Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых

Как мы видели, локальная предельная теорема теории вероятностей позволяет получить асимптотическую формулу для количества решений диофантова уравнения

$$N = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n),$$

где $f(x)$ — целочисленная функция целочисленного аргумента и $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant Q-1$ при $n \to \infty$, а Q фиксировано. В связи с этим возникает вопрос о распространении этих асимптотических формул на случай, когда вместе с n может расти и Q.

Это и будет составлять предмет наших рассмотрений.

При вероятностной трактовке таких задач предъявляется требование к тому, чтобы с нарастанием количества одинаково распределенных решетчатых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

сама величина ξ могла бы претерпевать определенные изменения, т. е. нужны локальные предельные теоремы, равномерные относительно допустимых изменений.

Заметим, что теоремы такого рода есть в интегральных постановках задач. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

Положим $\mathbf{M}\xi_1 = a$, $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2 > 0$. Функцию распределения случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

обозначим через $F_n(x)$. Предположим, что существует абсолютный третий момент

$$\beta = \mathbf{M}\,|\,\xi_1 - a\,|^3.$$

Справедлива оценка

$$\left| F_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt \right| \leqslant C\,\frac{\beta}{\sigma^3}\,\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+|\,x\,|^3)}$$

с абсолютной постоянной C (см. С. В. Нагаев [45]). Это равномерная оценка относительно исходного распределения; из нее, например, следует, что центральная предельная теорема «остается в силе», если исходные распределения меняются так, что

$$\frac{\beta}{\sigma^3} = o\left(\sqrt{n}\right).$$

В локальных предельных теоремах вопрос о равномерных оценках значительно сложнее: для установления локальной предельной теоремы требуется оценка характеристической функции не только в окрестности нуля (что достаточно хорошо регулируется тремя первыми моментами), но и во всем интервале изменения ее аргумента. Таким образом, если мы желаем решать задачу о количестве представлений числа N в виде

$$N = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n),$$

$0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant Q-1$, где растут n и Q, то нам потребуются оценки тригонометрических сумм вида

$$\frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} e^{2\pi i \alpha f(x)}$$

с $Q \to \infty$. Естественно, что универсальных теорем об оценках такого рода сумм нет. Поэтому самое большее, на что мы можем надеяться, это выделение классов задач, в пределах которых будут устанавливаться равномерные локальные предельные теоремы.

А. Г. Постников [55] рассмотрел задачу о представлении

$$N = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

$0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant Q-1$, $n \to \infty$, x_i — целые, и решил эту задачу при ограничении $Q \leqslant K^n$, где $K > 1$. Это ограничение, как показано в работе С. Х. Сираждинова и Т. А. Азларова [60], не является существенным. Аддитивная задача с линейной функцией может быть решена с помощью специальной равномерной локальной теоремы; мы сформулируем ее в том виде, в каком ее доказал Т. М. Зупаров [25].

Теорема. *Пусть*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

— последовательность одинаково распределенных случайных величин. Пусть $\mathsf{P}(\xi = x) = p_x$, $x \in G$, *где* G *— множество из* Q *различных целых чисел. Мы предположим следующее:*

1) *существует постоянная* $1 < b < \infty$ *такая, что*

$$\max_{x \in G} \{x\} = bQ(1 + o(1));$$

2) $\min\limits_{x \in G} p_x \geqslant \frac{C_1}{Q}$, $C_1 > 0$ *— абсолютная постоянная;*

3) $\max\limits_{0 \leqslant m \leqslant h} \mathsf{P}(\xi \equiv m \pmod h) \leqslant \rho(h)$, *где* $\rho(h)$ *не зависит от* Q *и строго меньше* 1 *при любом* $h \geqslant 2$. *Обозначим через* a *математическое ожидание, а через* σ^2 *дисперсию случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *Для данного целого* N *обозначим*

$$P_n(N) = \mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = N),$$

$$u_N = \frac{N - an}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \Delta_n = \left| \sigma \sqrt{n}\, P_n(N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_N^2}{2}\right) \right|.$$

Существует такая постоянная $C_2 \geqslant 0$, *что для всех* $Q \geqslant 2$ *справедлива оценка*

$$\sup_N \Delta_n \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{n}} \left(1 + \sigma \sum_{x \in G} p_x^2\right).$$

В той же работе [55] А. Г. Постников рассмотрел задачу о представлении

$$N = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

с неотрицательными целыми x_i, не превосходящими Q, $n \to \infty$, $Q \leqslant K^n$, $K > 1$ — постоянная. Более общая методика, приводящая к усилению и обобщению результата А. Г. Постникова, докладывалась С. Б. Стечкиным на 4-м Всесоюзном математическом съезде. С. Х. Сираждинов и Т. А. Азларов [60] рассмотрели общее уравнение

$$N = x_1^s + x_2^s + \ldots + x_n^s,$$

s — произвольное натуральное число, причем ограничение $Q \leqslant K^n$, $K > 1$ было снято. Сформулируем теорему в том виде, в каком ее доказал Т. М. Зупаров [25].

Теорема. *Пусть $Q \geqslant 2$. Обозначим через $R_n(Q, N)$ количество представлений числа N в виде*

$$N = x_1^s + x_2^s + \ldots + x_n^s$$

с целыми x_i, $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant Q-1$. Предположим, что $0 \leqslant N \leqslant nQ^s$. Обозначим

$$a = \frac{1}{Q}\sum_{j=0}^{Q-1} j^s,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{Q}\sum_{j=0}^{Q-1} j^{2s} - a^2,$$

$$u_N = \frac{N - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Для любого фиксированного k существует такое $n_0 = n_0(s, k)$, что при $n \geqslant n_0$ имеет место соотношение

$$R_n(Q, N) = \frac{Q^n}{\sigma\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u_N^2/2} + \frac{\theta_{k,s}}{\sqrt{n}\,(1 + |u_N|^k)}\right),$$
$$|\theta_{k,s}| \leqslant 1.$$

Для нужд квантовой статистики А. Я. Хинчин ([85], стр. 254) установил асимптотическую формулу для числа решений диофантова уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N,$$

когда $n \to \infty$ и N/n остается постоянным. Без изменения метода Хинчина может быть решена задача об асимптотической формуле для числа решений уравнения

$$x_1^s + x_2^s + \ldots + x_n^s = N,$$

где s фиксировано, $n \to \infty$, N/n остается постоянным. Соединив идею Хинчина с методом тригонометрических сумм, Г. А. Фрейман [80] снимает ограничение, что отношение N/n остается постоянным, и тем самым решает проблему Варинга с растущим числом слагаемых. Приводим формулировку теоремы Фреймана.

Теорема. *Пусть* $r_n(N)$ — *количество решений уравнения*

$$x_1^s + x_2^s + \ldots + x_n^s = N.$$

При $n \to \infty$ *и* $n < CN$, *где* $0 < C < 1$, *имеет место асимптотическая формула*

$$r_n(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\, \mathsf{D}\xi}}\, e^{-\sigma N} \Phi^n(\sigma) \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1/2-\varepsilon}}\right)\right);$$

здесь σ *определяется из уравнения*

$$\frac{N}{n} = \frac{\sum\limits_{x=1}^{\infty} x^s e^{-\sigma x^s}}{\sum\limits_{x=1}^{\infty} e^{-\sigma x^s}}$$

(*легко доказать, что это уравнение имеет корень при* $n < CN$),

$$\Phi(\sigma) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\sigma x^s},$$

ξ — *случайная величина, которая принимает значения* x^s, $x = 1, 2, \ldots$, *с вероятностью* $\frac{1}{\Phi(\sigma)} e^{-\sigma x^s}$; $\mathsf{D}\xi$ — *ее дисперсия*; $\varepsilon > 0$ — *сколь угодно малая постоянная.*

О представлении чисел в виде суммы большого количества квадратов см. также работу Р. А. Ранкина [143].

Следуя работе Л. П. Усольцева [67], рассмотрим аддитивную задачу с растущим количеством слагаемых с показательной функцией

$$N = g^{x_1} + g^{x_2} + \ldots + g^{x_n};$$

$g \geqslant 4$ — целое число.

Теорема. *Пусть* $g \geqslant 4$, $Q \geqslant 3$ *и* n — *такие натуральные числа, что*

$$Q^2 \leqslant \frac{n}{9g^2 \ln g} - \sqrt{\frac{n}{9g^2 \ln g}} \ln n.$$

Пусть через $r_{n,Q,g}(N)$ *обозначено количество решений уравнения*

$$N = g^{x_1} + g^{x_2} + \ldots + g^{x_n}$$

в целых числах $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant Q-1$. *Тогда для любого натурального* N *такого, что* $N \leqslant ng^{Q-1}$ *и* $N \equiv n \pmod{(g-1)}$, *имеем*

$$r_{n,Q,g}(N) = \frac{(g-1)Q^n}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma}\left(\exp\left[-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}\right] + 8\theta_{n,Q,g}\sqrt{\frac{Q}{n}}\right),$$

где

$$a = \frac{g^Q-1}{(g-1)Q}, \quad \sigma^2 = \frac{g^{2Q}-1}{(g^2-1)Q} - \frac{(g^Q-1)^2}{(g-1)^2Q^2},$$

$$|\theta_{n,Q,g}| \leqslant 1.$$

Замечание. Очевидно, что для $N > ng^{Q-1}$ имеем

$$r_{n,Q,g}(N) = 0.$$

Основную роль при доказательстве этой теоремы играет следующая оценка тригонометрической суммы с показательной функцией.

Лемма. *Если* $g \geqslant 4$, $Q \geqslant 3$ — *натуральные числа,* α — *вещественное число, удовлетворяющее неравенству*

$$\frac{1}{g^Q} \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{1}{2(g-1)},$$

то

$$\left|\sum_{x=0}^{Q-1} \exp(2\pi i\alpha g^x)\right| \leqslant Q - \frac{1}{9g^2}.$$

Доказательство леммы. Поскольку замена α на $-\alpha$ не меняет значения модуля суммы, то можно считать, что $\alpha > 0$, т. е.

$$\frac{1}{g^Q} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2(g-1)}.$$

Пусть g-ичное представление числа α будет

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1(\alpha)}{g} + \frac{\varepsilon_2(\alpha)}{g^2} + \ldots, \quad 0 \leqslant \varepsilon_k(\alpha) \leqslant g-1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

g-ичное разложение не всегда однозначно, например:

$$\frac{1}{g}=\frac{g-1}{g^2}+\frac{g-1}{g^3}+\ldots,$$

но если условиться заменять разложения, в которых $\varepsilon_k(\alpha)=g-1$ при $k\geqslant k_0$, обрывающимися разложениями, т. е. разложениями, в которых $\varepsilon_k(\alpha)=0$ при $k\geqslant k_1$, то g-ичное представление числа α становится однозначным. Так как

$$\alpha\leqslant\frac{1}{2(g-1)}<\frac{1}{g}$$

(последнее неравенство строгое в силу $g\geqslant 4$), то $\varepsilon_1(\alpha)=0$. Далее,

$$0\leqslant\alpha-\frac{0}{g}-\frac{\varepsilon_2(\alpha)}{g^2}-\ \ldots\ -\frac{\varepsilon_Q(\alpha)}{g^Q}<\frac{1}{g^Q}.$$

Важно заметить, что последнее неравенство строгое в силу соглашения о том, что запись, в которой $\varepsilon_k(\alpha)=g-1$ при $k\geqslant Q$, не используется. Итак,

$$\alpha<\frac{\varepsilon_2(\alpha)}{g^2}+\ \ldots\ +\frac{\varepsilon_Q(\alpha)}{g^Q}+\frac{1}{g^Q}.$$

Значит, в силу неравенства $\alpha\geqslant 1/g^Q$

$$0<\frac{\varepsilon_2(\alpha)}{g^2}+\ \ldots\ +\frac{\varepsilon_Q(\alpha)}{g^Q}.$$

Из этого неравенства заключаем, что по меньшей мере один из знаков $\varepsilon_2(\alpha),\ \ldots,\ \varepsilon_Q(\alpha)$ отличен от нуля. Итак, для чисел α таких, что $\frac{1}{g^Q}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2(g-1)}$, $\varepsilon_1(\alpha)=0$ и по меньшей мере одно из чисел $\varepsilon_2(\alpha),\ \ldots,\ \varepsilon_Q(\alpha)$ не равно нулю.

Покажем, что для каждого α с отрезка $\left[\frac{1}{g^Q},\ \frac{1}{2(g-1)}\right]$ найдутся два числа $x_1=x_1(\alpha)$ и $x_2=x_2(\alpha)$ такие, что $x_1\neq x_2$ и $0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant Q-1$, причем

$$\{g^{x_2}\alpha\}-\{g^{x_1}\alpha\}\geqslant\frac{1}{6g}\quad\text{и}\quad 1-\{g^{x_2}\alpha\}+\{g^{x_1}\alpha\}\geqslant\frac{1}{6g}.$$

При доказательстве этого утверждения приходится рассматривать ряд отдельных случаев.

1) Среди знаков $\varepsilon_2(\alpha), \ldots, \varepsilon_Q(\alpha)$ есть знак l, $2 \leqslant l \leqslant g-2$. Пусть он стоит на месте x, т. е. $\varepsilon_x(\alpha) = l$. Тогда

$$\{g^{x-1}\alpha\} - \alpha = \frac{l}{g} + \frac{\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^2} + \ldots - \frac{\varepsilon_2(\alpha)}{g^2} - \ldots \geqslant$$
$$\geqslant \frac{l}{g} - \frac{g-1}{g^2} - \frac{g-1}{g^3} - \ldots = \frac{l-1}{g} \geqslant \frac{1}{g}.$$

Далее, представляя число 1 в виде

$$1 = \frac{g-1}{g} + \frac{g-1}{g^2} + \ldots,$$

будем иметь

$$1 + \alpha - \{g^{x-1}\alpha\} =$$
$$= \frac{g-1}{g} + \frac{g-1+\varepsilon_2(\alpha)}{g^2} + \ldots - \frac{l}{g} - \frac{\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^2} - \ldots \geqslant$$
$$\geqslant \frac{g-1-l}{g} + \frac{g-1-\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^2} + \ldots \geqslant \frac{g-1-l}{g} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{g-1-(g-2)}{g} = \frac{1}{g}.$$

2) Среди знаков $\varepsilon_2(\alpha), \ldots, \varepsilon_Q(\alpha)$ нет чисел l таких, что $2 \leqslant l \leqslant g-2$, но присутствует число $g-1$. Так как при $g \geqslant 3$

$$\frac{g-1}{g^2} + \frac{g-1}{g^3} > \frac{1}{2(g-1)},$$

то один из знаков $\varepsilon_2(\alpha)$ и $\varepsilon_3(\alpha)$ отличен от $g-1$.

2а) Пусть $\varepsilon_2(\alpha) = g-1$. Тогда $\varepsilon_3(\alpha)$ равно 0 или 1. Имеем

$$\{g\alpha\} - \alpha = \frac{g-1}{g} + \frac{\varepsilon_3(\alpha)}{g^2} + \frac{\varepsilon_4(\alpha)}{g^3} + \ldots - \frac{g-1}{g^2} -$$
$$- \frac{\varepsilon_3(\alpha)}{g^3} - \ldots \geqslant \frac{g-1}{g} - \frac{g-1}{g^2} - \frac{g-1}{g^3} - \ldots = \frac{g-2}{g} \geqslant \frac{1}{g}$$

(ибо $g \geqslant 3$).

Далее,

$$1+\alpha-\{\alpha g\}=\frac{g-1}{g}+\frac{g-1}{g^2}+\ldots+\frac{g-1}{g^2}+$$
$$+\frac{\varepsilon_3(\alpha)}{g^3}+\ldots-\frac{g-1}{g}-\frac{\varepsilon_3(\alpha)}{g^2}-\ldots\geqslant\frac{2(g-1)-\varepsilon_3(\alpha)}{g^2}+$$
$$+\frac{\varepsilon_3(\alpha)}{g^3}+\ldots\geqslant\frac{2(g-1)-1}{g^2}\geqslant\frac{1}{g},$$

так как $2g-3\geqslant g$ при $g\geqslant 3$, а значит, и при $g\geqslant 4$.

2б) Пусть $\varepsilon_3(\alpha)=g-1$. Тогда $\varepsilon_2(\alpha)$ есть или 0, или 1. Имеем

$$\{g^2\alpha\}-\{g\alpha\}=\frac{g-1}{g}+\frac{\varepsilon_4(\alpha)}{g^2}+\ldots-\frac{\varepsilon_2(\alpha)}{g}-\frac{g-1}{g^2}-$$
$$-\frac{\varepsilon_4(\alpha)}{g^3}-\ldots\geqslant\frac{g-1-\varepsilon_2(\alpha)}{g}-\frac{g-1}{g^2}-\frac{g-1}{g^3}-\ldots=$$
$$=\frac{g-2-\varepsilon_2(\alpha)}{g}\geqslant\frac{g-3}{g}\geqslant\frac{1}{g},$$

ибо $g\geqslant 4$. Далее,

$$1+\{g\alpha\}-\{g^2\alpha\}=\frac{g-1}{g}+\frac{g-1}{g^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_2(\alpha)}{g}+\frac{g-1}{g^2}+$$
$$+\frac{\varepsilon_4(\alpha)}{g^3}+\ldots-\frac{g-1}{g}-\frac{\varepsilon_4(\alpha)}{g^2}-\ldots\geqslant$$
$$\geqslant\frac{2(g-1)-\varepsilon_4(\alpha)}{g^2}>\frac{g-1}{g^2}.$$

2в) Пусть среди $\varepsilon_2(\alpha)$ и $\varepsilon_3(\alpha)$ нет $g-1$. Тогда найдется x, $4\leqslant x\leqslant Q$, такое, что $\varepsilon_{x-1}(\alpha)$ равно либо 0, либо 1, а $\varepsilon_x(\alpha)=g-1$. Имеем

$$\{g^{x-1}\alpha\}-\{g^{x-2}\alpha\}=\frac{g-1}{g}+\frac{\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^2}+\ldots-\frac{\varepsilon_{x-1}(\alpha)}{g}-$$
$$-\frac{g-1}{g^2}-\frac{\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^3}-\ldots\geqslant\frac{g-1-\varepsilon_{x-1}(\alpha)}{g}-$$
$$-\frac{g-1}{g^2}-\ldots\geqslant\frac{g-2-\varepsilon_{x-1}(\alpha)}{g}\geqslant\frac{g-2-1}{g}\geqslant\frac{1}{g},$$

$$1+\{g^{x-2}\alpha\}-\{g^{x-1}\alpha\}=$$
$$=\frac{g-1+\varepsilon_{x-1}(\alpha)}{g}+\frac{g-1+g-1}{g^2}+\frac{g-1+\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^3}+\ldots$$
$$\ldots-\frac{g-1}{g}-\frac{\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^2}-\ldots\geqslant\frac{\varepsilon_{x-1}(\alpha)}{g}+\frac{2(g-1)-\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^2}+$$
$$+\frac{\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^3}+\frac{\varepsilon_{x+2}(\alpha)}{g^4}+\ldots\geqslant\frac{g-1}{g^2}>\frac{1}{2g}.$$

3) Пусть знаки $\varepsilon_2(\alpha), \ldots, \varepsilon_Q(\alpha)$ либо нули, либо единицы. Пусть x — наименьший из номеров $2\leqslant x\leqslant Q$, для которого $\varepsilon_x(\alpha)=1$. Имеем

$$\{g^{x-1}\alpha\}-\alpha=\frac{1}{g}+\frac{\varepsilon_{x+1}(\alpha)}{g^2}+\ldots-\frac{0}{g}-\ldots-\frac{0}{g^{x-1}}-$$
$$-\frac{1}{g^x}-\ldots-\frac{1}{g^Q}-\frac{\varepsilon_{Q+1}(\alpha)}{g^{Q+1}}-\ldots>\frac{1}{g}-\sum_{r=x}^{Q}\frac{1}{g^r}-$$
$$-\sum_{r=Q+1}^{\infty}\frac{g-1}{g^r}=\frac{1}{g}-\frac{1}{g^{x-1}}\frac{1}{g-1}-\frac{1}{g^Q}\geqslant\frac{1}{g}-\frac{1}{g(g-1)}-\frac{1}{g^2}$$

(ибо $x-1\geqslant 1$), т. е.

$$\{g^{x-1}\alpha\}-\alpha\geqslant\frac{1}{g}\left(1-\frac{1}{g-1}-\frac{1}{g}\right)\geqslant\frac{1}{g}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6g}.$$

Далее,

$$1+\alpha-\{g^{x-1}\alpha\}=\frac{g-1}{g}+\frac{g-1}{g^2}+\ldots+\frac{1}{g^x}+\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{g}-\ldots\geqslant\frac{g-3}{g}\geqslant\frac{1}{g}.$$

Итак, при $g\geqslant 4$ и $Q\geqslant 3$ для каждого α с отрезка $\left[\frac{1}{g^Q}, \frac{1}{2(g-1)}\right]$ найдутся два номера x_1 и x_2, $x_1\neq x_2$, $0\leqslant x_1,\ x_2\leqslant Q-1$, такие, что

$$\{g^{x_2}\alpha\}-\{g^{x_1}\alpha\}\geqslant\frac{1}{6g}\quad\text{и}\quad 1-\{g^{x_2}\alpha\}+\{g^{x_1}\alpha\}\geqslant\frac{1}{6g}.$$

Обозначим угол между векторами $\exp(2\pi i g^{x_1}\alpha)$ и $\exp(2\pi i g^{x_2}\alpha)$, а именно тот угол, который не превосходит π, через φ. Установлено, что $\varphi\geqslant\frac{2\pi}{6g}=\frac{\pi}{3g}$. Мы имеем

$$\left|\sum_{x=0}^{Q-1} \exp(2\pi i g^x \alpha)\right| =$$

$$= \left|\exp(2\pi i g^{x_1}\alpha) + \exp(2\pi i g^{x_2}\alpha) + \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq x_1 \\ x \neq x_2}}^{Q-1} \exp(2\pi i g^x \alpha)\right| \leqslant Q-2+$$

$$+ |\exp(2\pi i g^{x_1}\alpha) + \exp(2\pi i g^{x_2}\alpha)| \leqslant Q - 2 +$$

$$+ 2|\cos\pi(\{g^{x_1}\alpha\} - \{g^{x_2}\alpha\})| \leqslant Q - 2 + 2\cos\frac{\pi}{6g} =$$

$$= Q - 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{6g}\right) = Q - 4\sin^2\frac{\pi}{12g} \leqslant Q - 4\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{12g}\right)^2 =$$

$$= Q - \frac{1}{9g^2}.$$

Итак,

$$\left|\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1} \exp(2\pi i g^x \alpha)\right| \leqslant 1 - \frac{1}{9g^2 Q}.$$

Лемма доказана.

Приступим к доказательству сформулированной выше теоремы. Заметим, что

$$\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1} g^x = \frac{g^Q - 1}{(g-1)Q};$$

$$\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1} (g^x - a)^2 = \frac{g^{2Q} - 1}{(g^2-1)Q} - \frac{(g^Q-1)^2}{(g-1)^2 Q^2} = \sigma^2.$$

Отметим еще, что

$$\left(1 - \frac{2}{Q}\right)\frac{g^{2Q}}{(g^2-1)Q} \leqslant \sigma^2.$$

Действительно, так как при $g \geqslant 4$ и $Q \geqslant 3$

$$\frac{Q}{g^{2Q}} + \frac{(g+1)(g^Q-1)^2}{(g-1)g^{2Q}} \leqslant \frac{3}{4^6} + \frac{5}{3} \leqslant 2,$$

то

$$\sigma^2 = \frac{g^{2Q}}{(g^2-1)\,Q}\left(1 - \frac{1}{Q}\left[\frac{Q}{2g^Q} + \frac{(g+1)(g^Q-1)^2}{(g-1)\,g^{2Q}}\right]\right) \geqslant \geqslant \frac{g^{2Q}}{(g^2-1)\,Q}\left(1 - \frac{2}{Q}\right).$$

Далее, очевидно, что

$$r_{n,Q,g}(N) = \int_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{x=0}^{Q-1}\exp\left(2\pi i\,\frac{\alpha}{g-1}\,g^x\right)\right)^n \exp\left(-2\pi i\,\frac{\alpha}{g-1}\,N\right)d\alpha,$$

откуда следует, что

$$\frac{r_{n,Q,g}(N)}{(g-1)\,Q^n} = \int_{-1/2(g-1)}^{1/2(g-1)}\left(\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1}\exp(2\pi i\alpha g^x)\right)^n \exp(-2\pi\alpha i N)\,d\alpha = = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{-A/2\pi\sqrt{n}\sigma}^{A/2\pi\sqrt{n}\sigma}\left(\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1}\exp(2\pi i\alpha g^x)\right)^n \exp(-2\pi i\alpha N)\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{n}\sigma}\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1}\exp\left(\frac{iw}{\sqrt{n}\sigma}(g^x-a)\right)\right)^n \times \times \exp\left(\frac{-iw}{\sqrt{n}\sigma}(N-na)\right)dw,$$

$$I_2 = \int\limits_{A/2\pi\sqrt{n}\sigma \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{1}{g^Q}}\left(\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1}\exp(2\pi i\alpha g^x)\right)^n \exp(-2\pi i\alpha N)\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{n}\sigma}\int\limits_{A \leqslant |w| \leqslant \frac{2\pi\sqrt{n}\sigma}{g^Q}}\left(\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1}\exp\left(\frac{iw}{\sqrt{n}\sigma}(g^x-a)\right)\right)^n \times \times \exp\left(-\frac{iw}{\sqrt{n}\sigma}(N-na)\right)dw,$$

$$I_3 = \int\limits_{\frac{1}{g^Q} \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{1}{2(g-1)}}\left(\frac{1}{Q}\sum_{x=0}^{Q-1}\exp(2\pi i\alpha g^x)\right)^n \exp(-2\pi i\alpha N)\,d\alpha,$$

а параметр A такой, что $0 < A < 2\pi\sqrt{n}\,\sigma/g^Q$.

Для оценки интеграла I_3 воспользуемся вышедоказанной леммой. В силу этой леммы

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\frac{1}{g^Q} \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{1}{2(g-1)}} \left| \frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} \exp(2\pi i \alpha g^x) \right|^n d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{9g^2Q}\right)^n \int\limits_{-1/2}^{1/2} d\alpha = \left(1 - \frac{1}{9g^2Q}\right)^n \leqslant e^{-n/9g^2Q}.$$

Приступая к оценке интегралов I_1 и I_2, условимся через θ_1, θ_2, ... обозначать величины, зависящие от n, g и Q, которые по модулю не превосходят 1.

Так как при любом вещественном t

$$\left| e^{it} - 1 - it + \frac{t^2}{2} \right| \leqslant \frac{|t|^3}{6},$$

то

$$\frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} \exp\left(\frac{iw}{\sqrt{n}\,\sigma}(g^x - a)\right) = 1 + \frac{iw}{\sqrt{n}\,\sigma} \frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} (g^x - a) -$$

$$- \frac{w^2}{2n\sigma^2} \frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} (g^x - a)^2 + \theta_1 \frac{|w|^3}{6n^{3/2}\sigma^3} \frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} |g^x - a|^3 =$$

$$= 1 - \frac{w^2}{2n} + \theta_2 \frac{|w|^3 g^{Q-1}}{6n^{3/2}\sigma}.$$

Если $|w| \leqslant 2\pi \sqrt{n}\,\sigma / g^Q$, то

$$\frac{w^2}{n} \leqslant \frac{4\pi^2}{g^{2Q}} \sigma^2 \leqslant \frac{4\pi^2}{g^{2Q}} \frac{g^{2Q}}{(g^2-1)Q} \leqslant \frac{4\pi^2}{(4^2-1)^3} \leqslant 1$$

и

$$\frac{|w|^3 g^{Q-1}}{6n^{3/2}\sigma} \leqslant \frac{w^2 2\pi \sqrt{n}\,\sigma g^{Q-1}}{6n^{3/2}\sigma g^Q} = \frac{\pi w^2}{3gn} \leqslant \frac{\pi w^2}{12n},$$

т. е.

$$\left| \frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} \exp\left(\frac{iw}{\sqrt{n}\,\sigma}(g^x - a)\right) \right| = \left| 1 - \frac{w^2}{2n} + \theta_2 \frac{|w|^3 g^{Q-1}}{6n^{3/2}\sigma} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \frac{w^2}{2n} + \frac{\pi w^2}{12n} \leqslant 1 - \frac{w^2}{5n} \leqslant e^{-w^2/5n},$$

откуда следует, что

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{n}\,\sigma} \int\limits_{A \leqslant |w| \leqslant \frac{2\pi\sqrt{n}\,\sigma}{g^Q}} \left| \frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} \exp\left(\frac{iw}{\sqrt{n}\,\sigma}(g^x - a)\right) \right|^n dw \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{2\pi\sqrt{n}\,\sigma} \int\limits_A^\infty e^{-w^2/5}\,dw \leqslant \frac{5}{2\pi\sqrt{n}\,\sigma A} e^{-A^2/5}.$$

Далее, так как при $|w| \leqslant 2\pi\sqrt{n}\,\sigma/g^Q$

$$\left| \frac{w^2}{2n} - \theta_2 \frac{|w|^3 g^{Q-1}}{6n^{3/2}\sigma} \right| \leqslant \frac{w^2}{2n} + \frac{\pi w^2}{12n} \leqslant \frac{16w^2}{21n} \leqslant \frac{16}{21}$$

и при $|z| < 1$

$$|\ln(1+z) - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2(1-|z|)}$$

(через $\ln$ мы обозначаем главное значение логарифма), то при $|w| \leqslant 2\pi\sqrt{n}\,\sigma/g^Q$

$$\ln\left(\frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} \exp\left(\frac{iw}{\sqrt{n}\,\sigma}(g^x - a)\right)\right) =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{w^2}{2n} + \theta_2 \frac{|w|^3 g^{Q-1}}{6n^{3/2}\sigma}\right) =$$

$$= -\frac{w^2}{2n} + \theta_2 \frac{|w|^3 g^{Q-1}}{6n^{3/2}} \frac{1}{\sigma} + \theta_3 \frac{\left(16\frac{w^2}{21n}\right)^2}{2\left(1 - \frac{16}{21}\right)} =$$

$$= -\frac{w^2}{2n} + \theta_4 \frac{|w|^3 g^{Q-1}}{6n^{3/2}} \frac{\sqrt{3(g^2-1)Q}}{g^Q} + \theta_3 \frac{128|w|^3}{105n^{3/2}} \frac{|w|}{\sqrt{n}} =$$

$$= -\frac{w^2}{2n} + \theta_5 \frac{\sqrt{3}|w|^3\sqrt{Q}}{6n^{3/2}} + \theta_6 \frac{128|w|^3}{105n^{3/2}} =$$

$$= -\frac{w^2}{2n} + \theta_7 \frac{|w|^3\sqrt{Q}}{n^{3/2}},$$

т. е.

$$\left(\frac{1}{Q} \sum_{x=0}^{Q-1} \exp\left(\frac{iw}{\sqrt{n}\,\sigma}(g^x - a)\right)\right)^n = \exp\left(-\frac{w^2}{2} + \theta_7 \frac{|w|^3\sqrt{Q}}{\sqrt{n}}\right),$$

откуда следует, что при дополнительном условии $A^6 \leqslant n/Q$ мы имеем

$$I_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}\,\sigma} \int_{-A}^{A} \exp\left(-\frac{w^2}{2} + \theta_7 \frac{|w|^3 \sqrt{Q}}{\sqrt{n}}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{iw}{\sqrt{n}\,\sigma}(N - na)\right) dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{n}\,\sigma} \int_{-A}^{A} \exp\left(-\frac{w^2}{2} - iw\frac{N-na}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)\left(1 + \theta_8 \frac{3|w|^3\sqrt{Q}}{\sqrt{n}}\right) dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{n}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{w^2}{2} - iw\frac{N-na}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) dw +$$
$$+ \theta_9 \frac{1}{\pi\sqrt{n}\,\sigma} \int_{A}^{\infty} e^{-w^2/2} dw + \theta_{10} \frac{3\sqrt{Q}}{\pi n\sigma} \int_{0}^{A} w^3 e^{-w^2/2} dw =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}\right) + \theta_{11} \frac{1}{\pi\sqrt{n}\,\sigma A} e^{-A^2/2} + \theta_{12} \frac{6\sqrt{Q}}{\pi n\sigma}.$$

Объединяя оценки для I_1, I_2 и I_3, мы при выполнении условий $A < 2\pi\sqrt{n}\,\sigma/g^Q$ и $A^6 \leqslant n/Q$ будем иметь

$$\frac{r_{n,Q,g}(N)}{(g-1)\,Q^n} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}\right) +$$
$$+ \theta_{11} \frac{1}{\pi\sqrt{n}\,\sigma A} e^{-A^2/2} + \theta_{12} \frac{6\sqrt{Q}}{\pi n\sigma} + \theta_{13} \frac{5}{2\pi\sqrt{n}\,\sigma A} e^{-A^2/5} +$$
$$+ \theta_{14} e^{-n/9g^2Q} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}\right) +$$
$$+ \theta_{15}\left(\frac{3}{A} e^{-A^2/5} + 7\sqrt{\frac{Q}{n}}\right),$$

так как в силу условия $Q^2 \leqslant \dfrac{n}{9g^2 \ln g} - \sqrt{\dfrac{n}{9g^2 \ln g}} \ln n$

$$\sqrt{2\pi n}\,\sigma e^{-n/9g^2Q} \leqslant \frac{\sqrt{2\pi n}\, g^Q}{\sqrt{(g^2-1)\,Q}} e^{-n/9g^2Q} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} g^{-\left(\frac{n}{9g^2 \ln g} - Q^2 - Q \ln n\right)\frac{1}{Q}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

Взяв $A=\sqrt{5\ln n}$, что не противоречит условиям $A < 2\pi\sqrt{n}\sigma/g^Q$ и $A^6 \leqslant n/Q$, мы получим

$$r_{n,\,Q,\,g}(N)=\frac{(g-1)\,Q^n}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma}\left(\exp\left(-\frac{(N-na)^2}{2n\sigma^2}\right)+8\theta_{16}\sqrt{\frac{Q}{n}}\right),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

2.5. Теорема Бредихина

Пусть G — мультипликативно записанная свободная коммутативная полугруппа со счетной системой P образующих элементов ω_1, ω_2, ..., и пусть N — такой гомоморфизм G на мультипликативную полугруппу $\overline{G}$, состоящую из положительных вещественных чисел, при котором для любого вещественного x в полугруппе G найдется самое большее лишь конечное количество элементов α таких, что

$$N(\alpha)\leqslant x.$$

Обозначим

$$\pi_G(x)=\sum_{\substack{N(\omega)\leqslant x\\ \omega\in P}} 1$$

и

$$\nu_G(x)=\sum_{\substack{N(\alpha)\leqslant x\\ \alpha\in G}} 1.$$

Теорема. *Пусть при* $x\to\infty$

$$\pi_G(x)=\frac{ax}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^{1+\varepsilon}x}\right), \qquad (1)$$

где $a>0$, $\varepsilon>0$ *фиксированы; тогда*

$$\nu_G(x)=C_G\,x\ln^{a-1}x+O\left(\frac{x\ln^{a-1}x}{(\ln\ln x)^{\varepsilon_1}}\right),$$

где $\varepsilon_1=\min(1,\ \varepsilon)$.

Доказательству предпошлем несколько лемм.

Лемма 1.

$$\nu_G(x)\leqslant C_1(\varepsilon)\,x\ln^a x.$$

Доказательство. Пусть ω_1 — такой элемент, что $N(\omega_1) \leqslant N(\omega)$. Мы имеем

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant x} \frac{1}{N(\alpha)} \leqslant \prod_{N(\omega) \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{N(\omega)}\right)^{-1} =$$

$$= \exp\left(\sum_{k \geqslant 1} \sum_{N(\omega) \leqslant x} \frac{1}{kN^k(\omega)}\right) \leqslant \exp\left(\sum_{N(\omega) \leqslant x} \frac{1}{N(\omega)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3N(\omega_1)} + \frac{1}{4N^2(\omega_1)} + \ldots\right) \sum_{N(\omega) \leqslant x} \frac{1}{N^2(\omega)}\right).$$

В силу условия (1) мы имеем

$$\sum_{N(\omega) \leqslant x} \frac{1}{N(\omega)} = a \ln \ln x + O(1),$$

$$\sum_{N(\omega) \leqslant x} \frac{1}{N^2(\omega)} = O(1).$$

Значит,

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant x} \frac{1}{N(\alpha)} \leqslant C \ln^a x.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant x} 1 \leqslant C_1 x \ln^a x.$$

Лемма 2. *Справедливо тождество*

$$\nu_G(x) \ln x = \int_1^x \nu_G(u) \frac{du}{u} + \sum_{k \geqslant 1} \sum_{N(\omega) \leqslant x} \nu_G\left(\frac{x}{N^k(\omega)}\right) \ln N(\omega).$$

Доказательство. Следующая формула представляет обобщение известного разложения $n!$ на простые множители:

$$\prod_{N(\alpha) \leqslant x} N(\alpha) = \prod_{N(\omega) \leqslant x} (N(\omega))^{\sum\limits_{k \geqslant 1} \nu_G\left(\frac{x}{N^k(\omega)}\right)}.$$

Логарифмируя, получаем

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant x} \ln N(\alpha) = \sum_{N(\omega) \leqslant x} \left(\sum_{k \geqslant 1} \nu_G\left(\frac{x}{N^k(\omega)}\right) \ln N(\omega)\right).$$

Но

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \ln N(\alpha) = \sum_{N(\alpha)\leqslant x} \int\limits_1^{N(\alpha)} \frac{du}{u} = \int\limits_1^x \frac{\sum\limits_{u\leqslant N(\alpha)\leqslant x} 1}{u}\, du =$$

$$= \nu_Q(x)\ln x - \int\limits_1^x \frac{\sum\limits_{N(\alpha)\leqslant u} 1}{u}\, du = \nu_Q(x)\ln x - \int\limits_1^x \frac{\nu_Q(u)}{u}\, du.$$

Лемма 3 усиливает оценку леммы 1.

Лемма 3.

$$\nu_Q(x) \leqslant C(\varepsilon)\, x \ln^{a-1} x.$$

Доказательство. Оценку леммы 1 подставляем в формулу леммы 2:

$$\int\limits_1^x \nu_Q(u)\frac{du}{u} = O\left(\int\limits_1^x \ln^a u\, du\right) = O(x\ln^a x).$$

Далее,

$$\sum_{N(\omega)\leqslant x} \nu_Q\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega) = \sum_{N(\alpha)\leqslant x}\ \sum_{N(\omega)\leqslant \frac{x}{N(\alpha)}} \ln N(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{N(\alpha)\leqslant x} \ln\frac{x}{N(\alpha)} \sum_{N(\omega)\leqslant \frac{x}{N(\alpha)}} 1 \leqslant C(\varepsilon) \sum_{N(\alpha)\leqslant x} \frac{x}{N(\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant C(\varepsilon)\, x\ln^a x,$$

и, наконец,

$$\sum_{k\geqslant 2}\ \sum_{N(\omega)\leqslant x} \nu_Q\left(\frac{x}{N^k(\omega)}\right)\ln N(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant C(\varepsilon) \sum_{k\geqslant 2}\ \sum_{N(\omega)\leqslant x} \frac{x\ln^a x}{N^k(\omega)} \ln N(\omega) =$$

$$= O\left(x\ln^a x \sum_{k\geqslant 2}\ \sum_{N(\omega)\leqslant x} \frac{\ln N(\omega)}{N^k(\omega)}\right) = O(x\ln^a x).$$

Теперь применяем лемму 2.

Формулировку следующей леммы 4 желательно сопоставить с формулировкой леммы 2, Лемма 4.

$$\nu_G(x)\ln x = \sum_{N(\omega)\leqslant x} \nu_G\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega) + O(x\ln^{a-1}x).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3, но с использованием оценки леммы 3 вместо оценки леммы 1.

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$\nu_G(x) = a\frac{x}{\ln x}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{1}{N(\alpha)} + O\left(\frac{x\ln^{a-1}x}{(\ln\ln x)^{\varepsilon_1}}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Мы исходим из формулы леммы 4

$$\nu_G(x)\ln x = \sum_{N(\omega)\leqslant x} \nu_G\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega) + O(x\ln^{a-1}x).$$

Мы имеем

$$\sum_{N(\omega)\leqslant x}\nu_G\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega) = \sum_{N(\alpha)\leqslant\frac{x}{N(\omega_1)}}\ \sum_{N(\omega)\leqslant\frac{x}{N(\alpha)}}\ln N(\omega)$$

Но, исходя из условий теоремы, имеем при помощи преобразования Абеля

$$\sum_{N(\omega)\leqslant x}\ln N(\omega) = ax + O\left(\frac{x}{\ln^{\varepsilon}x}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{N(\omega)\leqslant\frac{x}{N(\alpha)}}\ln N(\omega) = a\frac{x}{N(\alpha)} + O\left(\frac{x}{N(\alpha)\ln^{\varepsilon}\frac{x}{N(\alpha)}}\right),$$

и, значит,

$$\sum_{N(\omega)\leqslant x}\nu_G\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega) =$$

$$= ax\sum_{N(\alpha)\leqslant\frac{x}{N(\omega_1)}}\frac{1}{N(\alpha)} + O\left(x\sum_{N(\alpha)\leqslant\frac{x}{N(\omega_1)}}\frac{1}{N(\alpha)\ln^{\varepsilon}\frac{x}{N(\alpha)}}\right).$$

Отметим, что

$$\sum_{\frac{x}{N(\omega_1)} < N(\alpha) \leqslant x} \frac{1}{N(\alpha)} \leqslant \frac{N(\omega_1)}{x} \sum_{N(\alpha) \leqslant x} 1 = O(\ln^{a-1} x).$$

Поэтому

$$\sum_{N(\omega) \leqslant x} \nu_G \left(\frac{x}{N(\omega)}\right) \ln N(\omega) = ax \sum_{N(\alpha) \leqslant x} \frac{1}{N(\alpha)} + O(x \ln^{a-1} x) + \\ + O\left(x \sum_{N(\alpha) \leqslant \frac{x}{N(\omega_1)}} \frac{1}{N(\alpha) \ln^{\varepsilon} \frac{x}{N(\alpha)}}\right).$$

Теперь

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant \frac{x}{N(\omega_1)}} \frac{1}{N(\alpha) \ln^{\varepsilon} \frac{x}{N(\alpha)}} =$$

$$= \sum_{N(\alpha) \leqslant \frac{x}{\sqrt{\ln x}}} \frac{1}{N(\alpha) \ln^{\varepsilon} \frac{x}{N(\alpha)}} + \sum_{\frac{x}{\sqrt{\ln x}} < N(\alpha) \leqslant \frac{x}{N(\omega_1)}} \frac{1}{N(\alpha) \ln^{\varepsilon} \frac{x}{N(\alpha)}} =$$

$$= O\left(\sum_{N(\alpha) \leqslant \frac{x}{\sqrt{\ln x}}} \frac{1}{N(\alpha) (\ln \ln x)^{\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x} \sum_{N(\alpha) \leqslant \frac{x}{N(\omega_1)}} 1\right) =$$

$$= O\left(\frac{\ln^a x}{(\ln \ln x)^{\varepsilon}}\right) + O(\ln^{a-1/2} x) = O\left(\frac{\ln^a x}{(\ln \ln x)^{\varepsilon}}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{N(\omega) \leqslant x} \nu_G \left(\frac{x}{N(\omega)}\right) \ln N(\omega) = ax \sum_{N(\alpha) \leqslant x} \frac{1}{N(\alpha)} + O\left(\frac{x \ln^a x}{(\ln \ln x)^{\varepsilon}}\right).$$

Лемма 5 доказана.

Введем дзета-функцию полугруппы

$$\zeta_G(s) = \sum_{\alpha \in G} \frac{1}{N^s(\alpha)}.$$

Мы будем рассматривать $\zeta_G(s)$ при вещественных значениях s.

Лемма 6. *Если выполняется условие*

$$\pi_G(x) = \frac{ax}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^{1+\varepsilon} x}\right),$$

то при $s \to 1+0$

$$\zeta_G(s) = \frac{C}{(s-1)^a}(1 + r(s)),$$

где

$$|r(s)| \leqslant C_1 (s-1)^{\varepsilon}.$$

Доказательство. При $s > 1$

$$\zeta_G(s) = \prod_{\omega \in P} \left(1 - \frac{1}{N(\omega)}\right)^{-1}.$$

Отсюда

$$\zeta_G(s) = \exp\left(\sum_{\omega \in P} \frac{1}{N^s(\omega)} + \varphi_1(s)\right),$$

где $\varphi_1(s) = C_2 + O(s-1)$. Обозначим

$$R(x) = \pi_G(x) - \frac{ax}{\ln x}.$$

Предлагается следующая выкладка:

$$\sum_{\omega \in P} \frac{1}{N^s(\omega)} = s \sum_{\omega \in P} \int_{N(\omega)}^{\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} = s \int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{\sum\limits_{N(\omega) \leqslant x} 1}{x^{s+1}} dx =$$

$$= sa \int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{dx}{x^s \ln x} + s \int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Мы имеем

$$sa \int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{dx}{x^s \ln x} = sa \int_{\ln N(\omega_1)}^{\infty} \frac{e^{-(s-1)y}}{y} dy = sa \int_{(s-1)\ln N(\omega_1)}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz =$$

$$= sa \int_{(s-1)\ln N(\omega_1)}^{1} \frac{e^{-z}}{z} dz + sa \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz =$$

$$= sa \int_{(s-1)\ln N(\omega_1)}^{1} \frac{e^{-z}}{z} dz + C_3 + O(s-1) =$$

$$= sa \int_{(s-1)\ln N(\omega_1)}^{1} \frac{dz}{z} + O(s-1) + C_3 + O(s-1) =$$

$$= a \ln \frac{1}{s-1} + C_4 + O(s-1).$$

Итак,

$$\sum_{\omega \in P} \frac{1}{N^s(\omega)} = a \ln \frac{1}{s-1} + s \int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}}\, dx + \varphi_2(s),$$

где

$$\varphi_2(s) = C_4 + O(s-1).$$

Теперь

$$\int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{R(x)}{x^{s+1}}\, dx = \int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{R(x)}{x^2}\, dx + \int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{R(x)}{x^2} \left(\frac{1}{x^{s-1}} - 1 \right) dx.$$

По условию теоремы все интегралы в этой формуле абсолютно сходятся. Далее,

$$\int_{N(\omega_1)}^{\infty} \frac{R(x)}{x^2} \left(\frac{1}{x^{s-1}} - 1 \right) dx =$$

$$= \int_{N(\omega_1)}^{e^{1/(s-1)}} \frac{R(x)}{x^2} \left(\frac{1}{x^{s-1}} - 1 \right) dx + \int_{e^{1/(s-1)}}^{\infty} \frac{R(x)}{x^2} \left(\frac{1}{x^{s-1}} - 1 \right) dx =$$

$$= \int_{N(\omega_1)}^{e^{1/(s-1)}} \frac{R(x)\left(1 - x^{s-1}\right)}{x^{s+1}}\, dx + O\left(\int_{e^{1/(s-1)}}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^{1+\varepsilon} x} \right) =$$

$$= \int_{N(\omega_1)}^{e^{1/(s-1)}} \frac{R(x)\left(1 - x^{s-1}\right)}{x^{s+1}}\, dx + O\left((s-1)^{\varepsilon} \right) =$$

$$= O\left(\int_{N(\omega_1)}^{e^{1/(s-1)}} \frac{x^{s-1} - 1}{x^s \ln^{1+\varepsilon} x}\, dx \right) + O\left((s-1)^{\varepsilon} \right).$$

Так как $e^z - 1 \leqslant z e^z$ при $z > 0$, то, взяв $z = (s-1)\ln x$, получаем

$$\int_{N(\omega_1)}^{e^{1/(s-1)}} \frac{x^{s-1} - 1}{x^s \ln^{1+\varepsilon} x}\, dx \leqslant (s-1) \int_{N(\omega_1)}^{e^{1/(s-1)}} \frac{dx}{x \ln^{\varepsilon} x} = (s-1) \int_{\ln N(\omega_1)}^{1/(s-1)} \frac{dy}{y^{\varepsilon}} .$$

В условии (1) можно считать, что $\varepsilon < 1$, ибо если $\varepsilon > 1$, то

$$\frac{x}{\ln^{1+\varepsilon} x} < \frac{x}{\ln^{1+\varepsilon_0} x},$$

где ε_0 уже меньше 1. Тогда

$$(s-1)\int\limits_{\ln N(\omega_1)}^{1/(s-1)} \frac{dy}{y^{\varepsilon}} = O\left((s-1)^{\varepsilon}\right) + O(s-1) = O\left((s-1)^{\varepsilon}\right).$$

Таким образом,

$$\zeta_G(s) = \exp\left(a \ln \frac{1}{s-1} + C_4 + O\left((s-1)^{\varepsilon}\right)\right) = \\ = \frac{C_5}{(s-1)^a}\left(1 + O\left((s-1)^{\varepsilon}\right)\right).$$

Лемма доказана.

Докажем теорему. Представим $\zeta_G(s+1)$ в виде интеграла Стилтьеса

$$\zeta_G(s+1) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}\, d\beta(t),$$

где

$$\beta(t) = \sum_{N(\alpha) \leqslant e^t} \frac{1}{N(\alpha)},$$

$\beta(t)$ — неубывающая функция. По лемме 6

$$\zeta_G(s+1) = \frac{C}{s^a}(1 + r(s)),$$

где

$$|r(s)| < C_1 s^{\varepsilon}.$$

Применим теперь тауберову теорему Харди и Литтлвуда с остаточным членом Фрейда. Мы получаем

$$\beta(t) = \frac{C}{\Gamma(a+1)} t^a \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln t}\right)\right).$$

Полагая $t = \ln x$, мы получаем

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant x} \frac{1}{N(\alpha)} = \frac{C}{\Gamma(a+1)} \ln^a x \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln \ln x}\right)\right).$$

Эта формула в сочетании с формулой (2) доказывает утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть при* $x \to \infty$

$$\pi_G(x) = \frac{ax^\theta}{\theta \ln x} + O\left(\frac{x^\theta}{\ln^{1+\varepsilon} x}\right)$$

с некоторым $\theta > 0$. *Тогда*

$$\nu_G(x) = C_G x^\theta \ln^{a-1} x + O\left(\frac{x^\theta \ln^{a-1} x}{(\ln \ln x)^{\varepsilon_1}}\right),$$

где $\varepsilon_1 = \min(1, \varepsilon)$.

Доказательство. Определим гомоморфизм полугруппы $\overline{G}$ на полугруппу $\overline{\overline{G}}$, определяемый соответствием

$$x^\theta \to x,$$

и обозначим $\overline{N}(\alpha) = N^\theta(\alpha)$. Мы имеем

$$\pi_G(x^{1/\theta}) = \sum_{N(\omega) \leqslant x^{1/\theta}} 1 = \sum_{\overline{N}(\omega) \leqslant x} 1 = \frac{ax}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^{1+\varepsilon} x}\right).$$

Применяя теорему, получаем

$$\nu_G(y^{1/\theta}) = \sum_{\overline{N}(\alpha) \leqslant y} 1 = Cy \ln^{a-1} y + O\left(\frac{y \ln^{a-1} y}{(\ln \ln y)^{\varepsilon_1}}\right).$$

Теперь нужно сделать замену переменного $x = y^{1/\theta}$, и мы получаем требуемый результат.

2.6. Асимптотический закон распределения базисных элементов для свободных полугрупп

Мы изложим содержание работы Б. М Бредихина [9], в которой он распространяет элементарный метод доказательства асимптотического закона распределения простых чисел на изучение распределения базисных элементов свободных полугрупп.

Мы принимаем те же обозначения, которые вводились в начале § 2.5. Во введении мы заметили, что коль скоро при каждом вещественном x существует лишь конечное число элементов $\alpha \in G$, для которых

$$N(\alpha) \leqslant x,$$

то для всех элементов G, кроме единицы,

$$N(\alpha) > 1.$$

Если в полугруппе нет единицы, то формально присоединяем ее. Очевидно,

$$N(1) = 1.$$

В обозначениях

$$\nu_G(x) = \sum_{N(\alpha) \leqslant x} 1$$

и

$$\pi_G(x) = \sum_{N(\omega) \leqslant x} 1$$

будем опускать индекс G.

Теорема. *Пусть*

$$\nu(x) = Cx^{\theta} + O(x^{\theta_1}), \tag{1}$$

где $\theta_1 < \theta$, $C > 0$. *Тогда*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x^{\theta}/\ln x} = \frac{1}{\theta}. \tag{2}$$

Прежде чем доказывать эту теорему, введем аналоги классических функций теории чисел на полугруппе G.

1. Функция Мёбиуса на полугруппе G:

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 1, \\ (-1)^k, & \text{если } \alpha = \omega_1 \ldots \omega_k, \quad \omega_i \neq \omega_j, \\ 0, & \text{если } \alpha \text{ делится на квадрат} \\ & \qquad \text{неединичного элемента.} \end{cases}$$

2. Функция Мангольдта на полугруппе:

$$\Lambda(\alpha) = \begin{cases} \ln N(\omega), & \text{если } \alpha = \omega^x \text{ с } x \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \omega^x. \end{cases}$$

3. Функции Чебышева:

$$\psi(x) = \sum_{N(\alpha) \leqslant x} \Lambda(\alpha), \quad \vartheta(x) = \sum_{N(\omega) \leqslant x} \ln N(\omega).$$

Докажем простейшие свойства введенных функций.

Замечание 1.

$$\sum_{\delta \mid \alpha} \mu(\delta) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 1, \\ 1, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Если $\alpha = 1$, то замечание непосредственно следует из определения функции Мёбиуса. Пусть $\alpha \neq 1$. В силу мультипликативности функции Мёбиуса для

$$\alpha = \omega_1^{x_1}\omega_2^{x_2} \ldots \omega_s^{x_s}$$

имеем в случае, если не все x_i — нули,

$$\sum_{\delta \mid \alpha} \mu(\delta) = \prod_{j=1}^{s} \left(1 + \mu(\omega_j) + \ldots + \mu\left(\omega_j^{x_j}\right)\right) = \prod_{j=1}^{s} \left(1 + \mu(\omega_j)\right) = 0.$$

Замечание 2. Формула обращения Чебышева — Мёбиуса:

Если

$$f(\alpha) = \sum_{\delta \mid \alpha} \Phi(\delta),$$

то

$$\Phi(\alpha) = \sum_{\delta \mid \alpha} \mu(\delta) f\left(\frac{\alpha}{\delta}\right).$$

Замечание 3. Справедливо тождество

$$\sum_{\delta \mid \alpha} \Lambda(\delta) = \ln N(\alpha). \tag{4}$$

В самом деле, пусть $\alpha = \omega_1^{x_1}\omega_2^{x_2} \ldots \omega_s^{x_s}$, тогда

$$\sum_{\delta \mid \alpha} \Lambda(\delta) = \sum_{j=1}^{s} x_j \ln \omega_j = \ln N(\alpha).$$

Замечание 4. Справедливо тождество

$$\Lambda(\alpha) = -\sum_{\delta \mid \alpha} \mu(\delta) \ln N(\delta). \tag{5}$$

Для $\alpha = 1$ это тождество проверяется непосредственно. Пусть $\alpha \neq 1$. По формуле обращения Чебышева — Мёбиуса и равенству (4) имеем

$$\Lambda(\alpha) = \sum_{\delta \mid \alpha} \mu(\delta) \ln N\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = \ln N(\alpha) \sum_{\delta \mid \alpha} \mu(\delta) - \sum_{\delta \mid \alpha} \mu(\delta) \ln N(\delta) =$$

$$= -\sum_{\delta \mid \alpha} \mu(\delta) \ln N(\delta).$$

Доказательство теоремы опирается на ряд лемм.

Лемма 1. *Если*

$$f(x)=\ln x \sum_{N(\alpha)\leqslant x} h\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right), \tag{6}$$

то

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \mu(\alpha) f\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)=h(x)\ln x+\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \Lambda(\alpha) h\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \mu(\alpha) f\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)=$$

$$=\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \mu(\alpha)\ln\frac{x}{N(\alpha)} \sum_{N(\beta)\leqslant \frac{x}{N(\alpha)}} h\left(\frac{x}{N(\alpha)N(\beta)}\right)=$$

$$=\ln x\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \mu(\alpha) \sum_{N(\beta)\leqslant \frac{x}{N(\alpha)}} h\left(\frac{x}{N(\alpha\beta)}\right)-$$

$$-\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \mu(\alpha)\ln N(\alpha) \sum_{N(\beta)\leqslant \frac{x}{N(\alpha)}} h\left(\frac{x}{N(\alpha\beta)}\right)=$$

$$=\ln x\sum_{N(\gamma)\leqslant x} h\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)\sum_{\alpha\mid\gamma}\mu(\alpha)-\sum_{N(\gamma)\leqslant x} h\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)\sum_{\alpha\mid\gamma}\mu(\alpha)\ln N(\alpha)=$$

$$=\ln x\, h(x)+\sum_{N(\gamma)\leqslant x} h\left(\frac{x}{N(\gamma)}\right)\Lambda(\gamma)$$

по формулам (3) и (5).

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие (1).

Лемма 2. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \frac{1}{N^{\theta}(\alpha)}=C\theta\ln x+C_0+O\left(x^{\theta_1-\theta}\right).$$

Доказательство. С помощью преобразования Абеля получаем

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{1}{N^{\theta}(\alpha)}=\theta\int_{1}^{x}\frac{\sum\limits_{N(\alpha)\leqslant u}1}{u^{\theta+1}}\,du+\frac{\sum\limits_{N(\alpha)\leqslant x}1}{x^{\theta}}=$$

$$=\theta\int_{1}^{x}\frac{Cu^{\theta}+R(u)}{u^{\theta+1}}\,du+C+O(x^{\theta_1-\theta})=$$

$$=C\theta\ln x+\int_{1}^{\infty}\frac{R(u)}{u^{\theta+1}}\,du-\int_{x}^{\infty}\frac{R(u)}{u^{\theta+1}}\,du+C+O(x^{\theta_1-\theta}).$$

В силу $R(u)=O(u^{\theta_1})$, где $\theta_1<\theta$, оба последних интеграла сходятся. Значит,

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{1}{N^{\theta}(\alpha)}=C\theta\ln x+C'+O\left(\int_{x}^{\infty}\frac{du}{u^{1+\theta-\theta_1}}\right)+O(x^{\theta_1-\theta})=$$

$$=C\theta\ln x+C'+O(x^{\theta_1-\theta}).$$

Лемма 3.

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\ln N(\alpha)=Cx^{\theta}\ln x-\frac{C}{\theta}x^{\theta}+O(x^{\theta_1}\ln x).$$

Доказательство. С помощью преобразования Абеля получаем

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\ln N(\alpha)=-\int_{1}^{x}\frac{\sum\limits_{N(\alpha)\leqslant u}1}{u}\,du+\left(\sum_{N(\alpha)\leqslant x}1\right)\ln x=$$

$$=\nu(x)\ln x-\int_{1}^{x}\frac{\nu(u)}{u}\,du=Cx^{\theta}\ln x-C\int_{1}^{x}u^{\theta-1}\,du+$$

$$+O\left(\int_{1}^{x}u^{\theta_1-1}\,du\right)+O(x^{\theta_1}\ln x)=Cx^{\theta}\ln x-\frac{C}{\theta}x^{\theta}+O(x^{\theta_1}\ln x).$$

Лемма 4.

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta}(\alpha)}=\ln x+O\left(\frac{1}{x^{\theta-\theta_1}}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right)+O(1).$$

Доказательство. По формуле, обобщающей разложение $n!$ на простые множители, имеем

$$\prod_{N(\alpha)\leqslant x} N(\alpha) = \prod_{N(\omega)\leqslant x} (N(\omega))^{\nu\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)+\nu\left(\frac{x}{N^2(\omega)}\right)+\ldots}.$$

Поэтому

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \ln N(\alpha) = \sum_{N(\omega^r)\leqslant x} \nu\left(\frac{x}{N(\omega^r)}\right)\ln N(\omega) =$$
$$= \sum_{N(\alpha)\leqslant x} \nu\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)\Lambda(\alpha) =$$
$$= Cx^{\theta}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta}(\alpha)} + O\left(x^{\theta_1}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right).$$

Но по лемме 3

$$Cx^{\theta}\ln x - \frac{C}{\theta}x^{\theta} + O(x^{\theta_1}\ln x) =$$
$$= Cx^{\theta}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta}(\alpha)} + O\left(x^{\theta_1}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right).$$

Отсюда и получаем требуемое утверждение:

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta}(\alpha)} = \ln x + O\left(\frac{x^{\theta_1}}{x^{\theta}}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right) + O(1).$$

Лемма 5.

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) = Cx^{\theta}\ln x - \frac{C}{\theta}x^{\theta} + O(x^{\theta_1}\ln x).$$

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) = \sum_{N(\alpha)\leqslant x}\;\sum_{N(\beta)\leqslant\frac{x}{N(\alpha)}}\Lambda(\beta) =$$
$$= \sum_{N(\gamma)\leqslant x}\;\sum_{\beta\mid\gamma}\Lambda(\beta) = \sum_{N(\gamma)\leqslant x}\ln N(\gamma)$$

по формуле (4). Теперь достаточно применить лемму 3.

Лемма 6. *Справедлива формула*

$$\psi(x)\ln x+\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\Lambda(\alpha)\,\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)=\frac{2}{\theta}x^{\theta}\ln x+O(x^{\theta}). \tag{8}$$

Доказательство. В лемме 1 полагаем

$$h(x)=\theta\psi(x)-x^{\theta}+\lambda,$$

где λ подберем позднее. Тогда

$$f(x)=\ln x\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\left(\theta\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)-\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{\theta}+\lambda\right)=$$

$$=\theta\ln x\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)-x^{\theta}\ln x\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{1}{N^{\theta}(\alpha)}+\lambda\ln x\,\nu(x)=$$

$$=C\theta x^{\theta}\ln^2 x-Cx^{\theta}\ln x+O(x^{\theta_1}\ln^2 x)-C\theta x^{\theta}\ln^2 x-$$

$$-C_0x^{\theta}\ln x+O(x^{\theta_1}\ln x)+C\lambda x^{\theta}\ln x+O(x^{\theta_1}\ln x)=$$

$$=(-C_0-C+C\lambda)\,x^{\theta}\ln x+O(x^{\theta_1}\ln^2 x).$$

Если мы возьмем $\lambda=-(C+C_0)/C$, то получим

$$f(x)=O(x^{\theta_1}\ln^2 x). \tag{9}$$

Теперь преобразуем правую часть формулы (7):

$$h(x)\ln x+\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\Lambda(\alpha)\,h\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)=\theta\psi(x)\ln x-x^{\theta}\ln x+$$

$$+O(\ln x)+\theta\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\Lambda(\alpha)\,\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)-x^{\theta}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta}(\alpha)}+$$

$$+O\left(\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\Lambda(\alpha)\right)=\theta\left(\psi(x)\ln x+\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\Lambda(\alpha)\,\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)\right)-$$

$$-x^{\theta}\ln x-x^{\theta}\ln x+O\left(x^{\theta_1}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right)+O(\psi(x))=$$

$$=\theta\left(\psi(x)\ln x+\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\Lambda(\alpha)\,\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)\right)-2x^{\theta}\ln x+$$

$$+O\left(x^{\theta_1}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right).$$

Это приводит к неравенству

$$\psi(x)\ln x + \sum_{N(\alpha)\leqslant x} \Lambda(\alpha)\,\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) - \frac{2}{\theta}x^{\theta}\ln x +$$
$$+ O\left(x^{\theta_1}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right) = \frac{1}{\theta}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\mu(\alpha) f\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) =$$
$$= O\left(\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{\theta_1}\ln^2\frac{x}{N(\alpha)}\right) = O(x^{\theta_1}\ln^3 x),$$

и, значит,

$$\psi(x)\ln x + \sum_{N(\alpha)\leqslant x}\Lambda(\alpha)\,\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) =$$
$$= \frac{2}{\theta}x^{\theta}\ln x + O\left(x^{\theta_1}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right) + O(x^{\theta}). \quad (10)$$

Отсюда мы получаем

$$\psi(x) = O(x^{\theta}) + O\left(\frac{x^{\theta_1}}{\ln x}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right) =$$
$$= O(x^{\theta}) + O\left(x^{\theta_1}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{1}{N^{\theta_1}(\alpha)}\right).$$

Теперь с помощью абелева преобразования, аналогично рассуждениям леммы 2, получаем

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{1}{N^{\theta_1}(\alpha)} = O\left(\int_1^x \frac{u^{\theta}}{u^{\theta+1}}\,du\right) + O\left(\frac{x^{\theta}}{x^{\theta_1}}\right) = O(x^{\theta-\theta_1}).$$

Значит,

$$\psi(x) = O(x^{\theta}).$$

В силу этого неравенства

$$x^{\theta_1}\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)} = O\left(x^{\theta_1}\int_1^x\frac{\psi(u)\,du}{u^{\theta_1+1}}\right) + O\left(x^{\theta_1}\frac{\psi(x)}{x^{\theta_1}}\right) =$$
$$= O\left(x^{\theta_1}\int_1^x\frac{u^{\theta}}{u^{\theta_1+1}}\,du\right) + O(x^{\theta}) = O(x^{\theta}),$$

и, значит, из неравенства (10) получаем

$$\psi(x)\ln x + \sum_{N(\alpha)\leqslant x} \Lambda(\alpha)\psi\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) = \frac{2}{\theta}x^{\theta}\ln x + O(x^{\theta}).$$

Лемма 6 доказана.

Так как мы установили, что $x^{\theta_1}\sum\limits_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta_1}(\alpha)} = O(x^{\theta})$, то лемму 4 можно записать так:

Лемма 4′.

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta}(\alpha)} = \ln x + O(1).$$

Далее,

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta}(\alpha)} = \sum_{N(\omega)\leqslant x}\frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta}(\omega)} + O\left(\sum_{N(\omega)\leqslant \sqrt{x}}\frac{\ln N(\omega)}{N^{2\theta}(\omega)}\left(1+\frac{1}{N^{\theta}(\omega_1)}+\frac{1}{N^{2\theta}(\omega_1)}+\ldots\right)\right).$$

Мы имеем

$$1+\frac{1}{N^{\theta}(\omega_1)}+\frac{1}{N^{2\theta}(\omega_1)}+\ldots = O(1)$$

и

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{\theta}(\alpha)} = \sum_{N(\omega)\leqslant x}\frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta}(\omega)} + O\left(\sum_{N(\alpha)\leqslant \sqrt{x}}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{2\theta}(\alpha)}\right).$$

Но с помощью абелева преобразования получаем

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant \sqrt{x}}\frac{\Lambda(\alpha)}{N^{2\theta}(\alpha)} = O\left(\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\psi(u)}{u^{2\theta+1}}\,du\right) + O\left(\frac{\psi(x)}{x^{2\theta}}\right) = O(1).$$

Мы получаем еще одну форму леммы 4.

Лемма 4″.

$$\sum_{N(\omega)\leqslant x}\frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta}(\omega)} = \ln x + O(1).$$

Далее,

$$\psi(x)=\sum_{N(\alpha)\leqslant x}\Lambda(\alpha)=\sum_{N(\omega)\leqslant x}\ln N(\omega)+$$
$$+O\left(\frac{\ln x}{\ln N(\omega_1)}\sum_{N(\omega)\leqslant\sqrt{x}}\ln N(\omega)\right)=$$
$$=\vartheta(x)+O\left(\ln x\,\psi\left(\sqrt{x}\right)\right)=\vartheta(x)+O\left(x^{\theta/2}\ln x\right).$$

В дальнейшем будем через x, y, z обозначать положительные вещественные числа, через R или иногда более развернуто через R_x будем обозначать интервал $\left(\ln x,\ \frac{x}{\ln x}\right)$.

Из леммы 2 непосредственно выводим, что

$$\sum_{y<N(\alpha)\leqslant z}\frac{1}{N^{\theta}(\alpha)}=\theta C\ln\frac{z}{y}+O\left(y^{\theta_1-\theta}\right). \tag{11}$$

Из леммы 4″ вытекает, что

$$\sum_{N(\omega)\in R}\frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta}(\omega)}=\ln x+O(1). \tag{12}$$

Нижеследующая модификация леммы 6 является основой доказательства асимптотического закона.

Лемма 6′.

$$\vartheta(x)\ln x+\sum_{N(\omega)\in R}\vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega)=\frac{2}{\theta}x^{\theta}\ln x+O\left(x^{\theta}\ln\ln x\right).$$

Доказательство. Так как

$$\psi(x)=\vartheta(x)+O\left(x^{\theta/2}\ln x\right)=\vartheta(x)+O\left(x^{\theta/2+\varepsilon}\right),$$

где $0<\varepsilon<\theta/2$, то

$$\vartheta(x)\ln x+O\left(x^{\theta/2+\varepsilon}\right)+\sum_{N(\omega)\leqslant x}\vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega)+$$
$$+O\left(x^{\theta/2+\varepsilon}\sum_{N(\omega)\leqslant x}\frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta/2+\varepsilon}(\omega)}\right)=\frac{2}{\theta}x^{\theta}\ln x+O\left(x^{\theta}\right),$$

ибо, как мы видели при доказательстве леммы 6,

$$x^{\theta/2+\varepsilon} \sum_{N(\omega) \leqslant x} \frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta/2+\varepsilon}(\omega)} = O(x^{\theta}).$$

Значит,

$$\vartheta(x) \ln x + \sum_{N(\omega) \leqslant x} \vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right) \ln N(\omega) = \frac{2}{\theta} x^{\theta} \ln x + O(x^{\theta}). \quad (13)$$

Теперь

$$\sum_{N(\omega) \leqslant \ln x} \vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right) \ln N(\omega) = O\left(x^{\theta} \sum_{N(\omega) \leqslant \ln x} \frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta}(\omega)}\right) = O(x^{\theta} \ln \ln x)$$

и

$$\sum_{\frac{x}{\ln x} \leqslant N(\omega) \leqslant x} \vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right) \ln N(\omega) = O\left(x^{\theta} \sum_{\frac{x}{\ln x} \leqslant N(\omega) \leqslant x} \frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta}(\omega)}\right) = O\left(x^{\theta}\left(\ln x - \ln \frac{x}{\ln x}\right)\right) = O(x^{\theta} \ln \ln x).$$

Лемма 6′ установлена.

Лемма 7. *Если* $y < z \leqslant 2y$, *то*

$$\vartheta(z) - \vartheta(y) \leqslant \frac{2}{\theta}(z^{\theta} - y^{\theta}) + O\left(\frac{z^{\theta}}{\ln z}\right). \quad (14)$$

Доказательство. Из неравенства (13) с $x = z$ вычитаем неравенство (13) с $x = y$:

$$\vartheta(z) \ln z - \vartheta(y) \ln y \leqslant \frac{2}{\theta}(z^{\theta} \ln z - y^{\theta} \ln y) + O(z^{\theta}).$$

Но

$$\vartheta(y) \ln y = \vartheta(y) \ln z - \vartheta(y) \ln \frac{z}{y} = \vartheta(y) \ln z + O(y^{\theta}),$$

$$(\vartheta(z) - \vartheta(y)) \ln z \leqslant \frac{2}{\theta}\left(z^{\theta} \ln z - y^{\theta} \ln z - y^{\theta} \ln \frac{y}{z}\right) + O(z^{\theta}),$$

откуда в силу $\ln(y/z) = O(1)$ имеем

$$\vartheta(z) - \vartheta(y) \leqslant \frac{2}{\theta}(z^{\theta} - y^{\theta}) + O\left(\frac{z^{\theta}}{\ln z}\right).$$

Лемма 8. *Если* $1 \leqslant y < z \leqslant x$, *то*

$$\left| \sum_{y < N(\alpha) \leqslant z} \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) - Cx^{\theta} \ln \frac{z}{y} \right| \leqslant Bx^{\theta}, \tag{15}$$

где постоянная B *не зависит от* x, y *и* z.

Доказательство.

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant z} \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) = \sum_{N(\alpha) \leqslant z} \sum_{N(\omega) \leqslant \frac{x}{N(\alpha)}} \ln N(\omega) =$$

$$= \sum_{N(\omega) \leqslant \frac{x}{z}} \ln N(\omega) \sum_{N(\alpha) \leqslant z} 1 + \sum_{\frac{x}{z} \leqslant N(\omega) \leqslant x} \ln N(\omega) \sum_{N(\alpha) \leqslant \frac{x}{N(\omega)}} 1 =$$

$$= \nu(z)\, \vartheta\left(\frac{x}{z}\right) + \sum_{\frac{x}{z} \leqslant N(\omega) \leqslant x} \ln N(\omega)\, \nu\left(\frac{x}{N(\omega)}\right) =$$

$$= Cx^{\theta} \sum_{\frac{x}{z} \leqslant N(\omega) \leqslant x} \frac{\ln N(\omega)}{N^{\theta}(\omega)} + O(x^{\theta}) = Cx^{\theta} \ln z + O(x^{\theta}).$$

Аналогично

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant y} \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) = Cx^{\theta} \ln y + O(x^{\theta}).$$

Вычитая эти равенства, получаем требуемый результат.

Заметим, что из формулы (15) следует, что

$$\sum_{N(\alpha) \in R} \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) = Cx^{\theta} \ln x + O(x^{\theta} \ln \ln x) \tag{16}$$

(нужно положить $y = \ln x$, $z = x/\ln x$).

Обозначим

$$A = \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\vartheta(x)}{x^{\theta}}, \quad a = \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\vartheta(x)}{x^{\theta}}.$$

Лемма 9. $a + A = 2/\theta$.

Доказательство. Мы имеем для $x \geqslant x_0(\varepsilon)$

$$\frac{\vartheta(x)}{x^{\theta}} < A + \varepsilon,$$

и существует бесконечная последовательность стремящихся к бесконечности таких x, что $\vartheta(x)/x^\theta < a+\varepsilon$. Из равенства (13) и леммы 4″ получим

$$\frac{2}{\theta}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \leqslant A+\varepsilon+(a+\varepsilon)\frac{1}{\ln x}\sum_{N(\omega)\leqslant x}\frac{\ln N(\omega)}{N^\theta(\omega)} = A+a+2\varepsilon+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

откуда

$$\frac{2}{\theta}\leqslant A+a+2\varepsilon.$$

Но ε сколь угодно мало. Значит, $A+a\geqslant 2/\theta$. Аналогично доказывается противоположное неравенство $A+a\leqslant 2/\theta$.

Обозначим $a=1/\theta-\gamma$, $A=1/\theta+\gamma$, где $\gamma\geqslant 0$. Откроем нашу цель: нам надо доказать, что $A=a=1/\theta$, т. е. нам надо доказать, что $\gamma=0$. Мы будем доказывать это от противного: предположим, что $\gamma>0$.

Пусть h — фиксированное положительное число:

$$0<h<\min\left(\frac{3\gamma^3 C\theta}{400B},\ h_1,\ h_2,\ \ldots\right),$$

где B — постоянная из неравенства (15), h_1, h_2, ... — достаточно малые положительные постоянные, выбранные по ходу доказательства, которые зависят только от C, θ и γ. Далее в доказательстве будет участвовать достаточно большое число x_0, зависящее только от h, C, θ и γ.

Пусть $x>x_0$. Интервал R разделим на полуинтервалы I_t вида

$$(e^{(t-1)h/\theta}\ln x,\ e^{th/\theta}\ln x],$$

$t=1, 2, \ldots, m$ и $m=[(\ln x-2\ln\ln x)\,\theta/h]$; последний интервал I_{m+1} может иметь меньшую длину.

Из неравенства (11) следует, что при $x\geqslant x_0$

$$\sum_{N(\alpha)\in I_t}\frac{1}{N^\theta(\alpha)}<Ch+h^2. \tag{а}$$

Из неравенства (12) следует, что при $x\geqslant x_0$

$$(1-h^2)\ln x<\sum_{N(\omega)\in R}\frac{\ln N(\omega)}{N^\theta(\omega)}<(1+h^2)\ln x. \tag{б}$$

По определению γ при $y \geqslant \ln x$ $(x \geqslant x_0)$

$$\left(\frac{1}{\theta} - \gamma - h^2\right) y^\theta < \vartheta(y) < \left(\frac{1}{\theta} + \gamma + h^2\right) y^\theta. \tag{в}$$

На основании леммы 6′ при $x \geqslant x_0$

$$\left|\vartheta(x)\ln x + \sum_{N(\omega)\in R} \vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega) - \frac{2}{\theta} x^\theta \ln x\right| < h^2 x^\theta \ln x. \tag{г}$$

На основании леммы 7 при $\ln x \leqslant y < z < 2y$ (и $x \geqslant x_0$)

$$\vartheta(z) - \vartheta(y) < \frac{2}{\theta}(z^\theta - y^\theta) + \frac{1}{\theta} h^2 z^\theta. \tag{д}$$

На основании равенства (16) при $x \geqslant x_0$

$$\sum_{N(\alpha)\in R} \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) > (1-h)\, C x^\theta \ln x. \tag{е}$$

Существует последовательность чисел x, стремящаяся к бесконечности, для которой по определению γ

$$\vartheta(x) > \left(\frac{1}{\theta} + \gamma - h^2\right) x^\theta. \tag{ж}$$

Будем считать в дальнейшем, что $x \geqslant x_0$ и x такое, что выполняется неравенство (ж).

Лемма 10. *Пусть ω' — базисный элемент, для которого*

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\omega')}\right) < \left(\frac{1}{\theta} - \gamma + h\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\omega')}.$$

Тогда

$$\sum_{N(\omega')\in R} \frac{\ln N(\omega')}{N^\theta(\omega')} > \left(1 - \left(3 + \frac{1}{\theta}\right) h\right) \ln x. \tag{17}$$

В самом деле, из неравенства (г) имеем

$$\vartheta(x)\ln x + \sum_{N(\omega)\in R} \vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega) - \frac{2}{\theta} x^\theta \ln x < h^2 x^\theta \ln x.$$

Для ω, не являющегося ω', по условию леммы

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right) \geqslant \left(\frac{1}{\theta} - \gamma + h\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\omega)}.$$

Для ω' по неравенству (в) имеем

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\omega')}\right) \geqslant \left(\frac{1}{\theta} - \gamma - h^2\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\omega')} = \\ = \left(\frac{1}{\theta} - \gamma + h\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\omega')} - (h+h^2)\frac{x^\theta}{N^\theta(\omega')}.$$

Наконец, используя условие (ж), имеем

$$\vartheta(x)\ln x + \sum_{N(\omega)\in R} \vartheta\left(\frac{x}{N(\omega)}\right)\ln N(\omega) - \frac{2}{\theta}x^\theta \ln x \geqslant \\ \geqslant \left(\frac{1}{\theta} + \gamma - h^2\right)x^\theta \ln x + \left(\frac{1}{\theta} - \gamma + h\right)x^\theta \sum_{N(\omega)\in R}\frac{\ln N(\omega)}{N^\theta(\omega)} - \\ - x^\theta(h+h^2)\sum_{N(\omega')\in R}\frac{\ln N(\omega')}{N^\theta(\omega')} - \frac{2}{\theta}x^\theta \ln x.$$

Сокращая в этом неравенстве на x^θ, получаем

$$(h+h^2)\sum_{N(\omega')\in R}\frac{\ln N(\omega')}{N^\theta(\omega')} > \left(\frac{1}{\theta} + \gamma - h^2\right)\ln x + \\ + \left(\frac{1}{\theta} - \gamma + h\right)\sum_{N(\omega)\in R}\frac{\ln N(\omega)}{N^\theta(\omega)} - \left(\frac{2}{\theta} + h^2\right)\ln x.$$

Из неравенства (б) получаем

$$\sum_{N(\omega')\in R}\frac{\ln N(\omega')}{N^\theta(\omega')} \geqslant \\ \geqslant \frac{\ln x}{h+h^2}\left[\frac{1}{\theta} + \gamma - h^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \gamma + h\right)(1-h^2) - \frac{2}{\theta} - h^2\right] = \\ = \frac{1 - h - \frac{h}{\theta} + h\gamma - h^2}{1+h}\ln x \geqslant \frac{1 - h - \frac{h}{\theta} - h^2}{1+h}\ln x \geqslant \\ \geqslant \left(\frac{1-h-h^2}{1+h} - \frac{h}{\theta}\right)\ln x \geqslant \left(1 - 3h - \frac{h}{\theta}\right)\ln x.$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{N(\omega)\in I_t}\frac{\ln N(\omega)}{N^\theta(\omega)} < \frac{2}{\theta}h + \frac{4}{\theta}h^2. \tag{18}$$

Доказательство. В интервале $I_t = (y,\ ye^{h/\theta})$, где $y = e^{(t-1)h/\theta}\ln x$, при $h < h_1$, $ye^{h/\theta} < 2y$. Мы имеем, применяя (д),

$$\sum_{N(\omega)\in I_t} \frac{\ln N(\omega)}{N^\theta(\omega)} \leqslant \frac{1}{y^\theta} \sum_{y\leqslant N(\omega)\leqslant ye^{\frac{h}{\theta}}} \ln N(\omega) < \frac{2}{\theta}(e^h - 1) + \frac{h^2}{\theta} e^h,$$

откуда неравенство (18) легко следует.

Лемма 12. *Количество интервалов I_t, которые содержат числа $N(\omega')$, должно быть больше, чем M, где* $M = \frac{m}{2}\left(1 - \left(5 + \frac{1}{\theta}\right)h\right)$.

Доказательство. Допустим, что количество интервалов I_t, содержащих числа $N(\omega')$, не будет превосходить M. Тогда

$$\sum_{N(\omega')\in R} \frac{\ln N(\omega')}{N^\theta(\omega')} \leqslant$$

$$\leqslant M \max_t \sum_{N(\omega')\in I_t} \frac{\ln N(\omega')}{N^\theta(\omega')} \leqslant M \max_t \sum_{N(\omega)\in I_t} \frac{\ln N(\omega)}{N^\theta(\omega)} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\frac{2}{\theta}h + \frac{4}{\theta}h^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1+2h)\left(1 - \left(5 + \frac{1}{\theta}\right)h\right)\ln x < \left(1 - \left(3 + \frac{1}{\theta}\right)h\right)\ln x.$$

Полученное неравенство противоречит (17).

Лемма 13. *Если* $N(\alpha_1)\in R$, $N(\alpha_2)\in R$ и $e^{-h/\theta} \leqslant \frac{N(\alpha_1)}{N(\alpha_2)} \leqslant e^{h/\theta}$, *то*

$$\left|\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)\left(\frac{N(\alpha_1)}{x}\right)^\theta - \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_2)}\right)\left(\frac{N(\alpha_2)}{x}\right)^\theta\right| < \frac{6h}{\theta}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)\left(\frac{N(\alpha_1)}{x}\right)^\theta \geqslant \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_2)}\right)\left(\frac{N(\alpha_2)}{x}\right)^\theta.$$

На основании неравенства (д) при $h < h_2$

$$\left|\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)-\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_2)}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\theta}\left|\frac{x^\theta}{N^\theta(\alpha_1)}-\frac{x^\theta}{N^\theta(\alpha_2)}\right| + \frac{e^h h^2}{\theta}\frac{x^\theta}{N^\theta(\alpha_1)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\theta}\frac{2x^\theta}{N^\theta(\alpha_1)}\left((e^h-1)+\frac{h^2}{2}e^h\right) < \frac{1}{\theta}\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)^\theta 3h,$$

откуда по неравенству (в)

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_1)}\right)\left(\frac{N(\alpha_1)}{x}\right)^\theta \leqslant \frac{3h}{\theta}+\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_2)}\right)\left(\frac{N(\alpha_1)}{x}\right)^\theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3h}{\theta}+\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_2)}\right)\left(\frac{N(\alpha_2)}{x}\right)^\theta + \frac{\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_2)}\right)}{x^\theta}\left|N^\theta(\alpha_1)-N^\theta(\alpha_2)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3h}{\theta}+\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha_2)}\right)\left(\frac{N(\alpha_2)}{x}\right)^\theta +$$
$$+\frac{1}{N^\theta(\alpha_2)}\left(\frac{1}{\theta}+\gamma+h^2\right)\left|N^\theta(\alpha_1)-N^\theta(\alpha_2)\right|.$$

Но при достаточно малом h

$$\left(\frac{1}{\theta}+\gamma+h^2\right)(e^h-1) \leqslant \frac{3h}{\theta} \quad \left(\text{ибо } a \geqslant 0 \text{ и } \gamma \leqslant \frac{1}{\theta}\right).$$

Лемма 13′. *Если $N(\alpha)$ принадлежит тому же интервалу I_t, которому принадлежит одно из чисел $N(\omega')$, то*

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) < \left(\frac{1}{\theta}-\gamma+\left(1+\frac{6}{\theta}\right)h\right)\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^\theta. \tag{19}$$

Доказательство. Если $N(\alpha)$ и $N(\omega')$ принадлежат I_t, то условие леммы 13 выполняется. Поэтому

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)\left(\frac{N(\alpha)}{x}\right)^\theta < \vartheta\left(\frac{x}{N(\omega')}\right)\left(\frac{N(\omega')}{x}\right)^\theta + \frac{6h}{\theta}.$$

Но из определения ω', данного в формулировке леммы 10, получаем неравенство (19).

Лемма 14. *Имеется по крайней мере $m\gamma^2 C\theta/100B$ интервалов I_t таких, что для каждого числа $N(\alpha)$, принадлежащего этим интервалам,*

$$\left(\frac{1}{\theta}-\gamma+\left(1+\frac{6}{\theta}\right)h\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\alpha)} < \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) < \left(\frac{1}{\theta}-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\alpha)}.$$

Доказательство. Пусть имеется N интервалов I_t подряд, в которых

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)\left(\frac{N(\alpha)}{x}\right)^{\theta} < \frac{1}{\theta} - \frac{\gamma}{2}. \tag{20}$$

По лемме 8

$$\sum_{y < N(\alpha) \leqslant ye^{\frac{Nh}{\theta}}} \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) > \frac{Cx^{\theta}Nh}{\theta} - Bx^{\theta}. \tag{21}$$

С другой стороны, по неравенству (а)

$$\sum_{y < N(\alpha) \leqslant ye^{\frac{Nh}{\theta}}} \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) \leqslant x^{\theta}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\gamma}{2}\right) \sum_{y < N(\alpha) \leqslant ye^{\frac{Nh}{0}}} \frac{1}{N^{\theta}(\alpha)} <$$

$$< \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\gamma}{2}\right) x^{\theta} N (Ch + h^2). \tag{22}$$

Из неравенств (21) и (22) мы заключаем, что может быть (при $h < h_4$) самое большее $[3B/C\gamma h]$ подряд интервалов I_t, на которых выполняется неравенство (20).

По лемме 13′, если $N(\alpha)$ принадлежит интервалу I_t, где есть $N(\omega')$, то

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)\left(\frac{N(\alpha)}{x}\right)^{\theta} < \frac{1}{\theta} - \gamma + \left(1 + \frac{6}{\theta}\right) h < \frac{1}{0} - \frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому за каждой серией не более чем $[3B/C\gamma h]$ следующих друг за другом интервалов I_t, в которых есть $N(\omega')$ (кроме, возможно, последней), должны быть интервалы, в которых $\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)\left(\frac{N(\alpha)}{x}\right)^{\theta}$ увеличивается с величины, не превосходящей $\frac{1}{\theta} - \gamma + \left(1 + \frac{6}{\theta}\right) h$, по крайней мере до $\frac{1}{\theta} - \frac{\gamma}{2}$, т. е. на величину, большую

$$\frac{1}{2}\gamma - \left(1 + \frac{6}{\theta}\right) h.$$

По лемме 13 такое возрастание величины $\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)\left(\frac{N(\alpha)}{x}\right)^\theta$ требует (при $h<h_5$) по меньшей мере

$$\frac{\frac{1}{2}\gamma-\left(1+\frac{6}{\theta}\right)h}{\frac{6h}{\theta}}>\frac{\gamma\theta}{13h}$$

интервалов I_t. Из этих интервалов по крайней мере $\frac{\gamma\theta}{13h}-2>\frac{\gamma\theta}{14h}$ (при $h\leqslant h_6$) должно быть таких, что для каждого $N(\alpha)$ на этих интервалах

$$\left(\frac{1}{\theta}-\gamma+\left(1+\frac{6}{\theta}\right)h\right)\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^\theta<\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)<\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\gamma}{2}\right)\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^\theta.$$

По лемме 12 существует по меньшей мере

$$\frac{M}{[3B/C\gamma h]}-1>M\frac{C\gamma h}{3B}-1$$

таких множеств возрастающих отношений. Следовательно, число интервалов I_t, на которых выполняется неравенство (19), должно быть по крайней мере

$$\left(\frac{MC\gamma h}{3B}-1\right)\frac{\gamma\theta}{14h}=\frac{m\gamma^2C\theta}{B}\,\frac{1-\left(5+\frac{1}{\theta}\right)h}{84}\left(1-\frac{3B}{MC\gamma h}\right)>\frac{m\gamma^2C\theta}{100B}$$

при достаточно больших x (для которых справедливы неравенства (а)—(ж)) и $h\leqslant h_7$.

Лемма 15.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x^\theta}=\frac{1}{\theta}.$$

Доказательство. Покажем, что $\gamma=0$. Предположим, что $\gamma>0$. Тогда при достаточно малых h и достаточно больших x, удовлетворяющих неравенствам (а)—(ж), верны леммы 10—14. Обозначим через N_1 количество интервалов I_t таких, что для каждого α с $N(\alpha)$, принадлежащей какому-нибудь из них, справедливо неравенство

$$\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)<\left(\frac{1}{\theta}-\gamma+\left(1+\frac{h}{\theta}\right)h\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\alpha)};$$

через N_2 будем обозначать количество интервалов таких, что для каждого α с $N(\alpha)$, принадлежащей какому-нибудь из них,

$$\left(\frac{1}{\theta}-\gamma+\left(1+\frac{6}{\theta}\right)h\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\alpha)}<\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)<\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{x^\theta}{N^\theta(\alpha)};$$

$m+1-N_1-N_2$ — число остальных интервалов I_t, принадлежащих R.

На основании (а) и (в)

$$\sum_{N(\alpha)\in R}\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)<x^\theta(Ch+h^2)\left(N_1\left(\frac{1}{\theta}-\gamma+\left(1+\frac{6}{\theta}\right)h\right)+\right.$$
$$\left.+N_2\left(\frac{1}{\theta}-\frac{\gamma}{2}\right)+(m+1-N_1-N_2)\left(\frac{1}{\theta}+\gamma+h^2\right)\right)=$$
$$=x^\theta(Ch+h^2)\left((m+1)\left(\frac{1}{\theta}+\gamma+h^2\right)-\right.$$
$$\left.-N_1\left(2\gamma-\left(1+\frac{6}{\theta}\right)h\right)-N_2\left(\frac{3}{2}\gamma+h^2\right)\right).$$

На основании лемм 12 и 14, учитывая, что $m\leqslant\frac{\theta}{h}\ln x$, получаем

$$\sum_{N(\alpha)\in R}\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)<C\left(1-\frac{3\gamma^3C\theta}{200B}+\frac{1}{2}(\theta+6)h+\right.$$
$$+(5\theta+1)\gamma h+h^2\theta+\frac{1}{m}(1+\theta\gamma+\theta h^2)+\frac{h}{C}-\frac{h}{C}\frac{3\gamma^3C\theta}{200B}+$$
$$+\frac{1}{2}(\theta+6)\frac{h^2}{C}+(5\theta+1)\frac{h^2}{C}+\frac{h^3\theta}{C}+$$
$$\left.+\frac{h}{Cm}(1+\theta\gamma+\theta h^2)\right)x^\theta\ln x.$$

Возьмем $h<h_8$ и затем достаточно большое x (тогда и m будет достаточно большим) так, чтобы все слагаемые в скобках, кроме первых двух, дали величину, меньшую $\frac{1}{2}\frac{3\gamma^3C\theta}{200B}$. В результате мы получим неравенство

$$\sum_{N(\alpha)\in R}\vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)<\left(1-\frac{3\gamma^3C\theta}{400B}\right)Cx^\theta\ln x.$$

Так как $h < 3\gamma^3 C\theta/400B$, то получим неравенство

$$\sum_{N(\alpha)\in R} \vartheta\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right) < (1-h)\, Cx^\theta \ln x.$$

Но это противоречит неравенству (е). Итак, предположение, что $\gamma > 0$, привело нас к противоречию. Лемма 15 доказана.

Лемма 16.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x^\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

Доказательство сразу следует из соотношения $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\vartheta(x^{1/2})\ln x)$ и леммы 15.

Завершим доказательство асимптотического закона распределения базисных элементов свободной полугруппы. Из определения $\vartheta(x)$ следует, что

$$\vartheta(x) \leqslant \pi(x)\ln x.$$

С другой стороны, при любом фиксированном a, $0 < a < 1$,

$$\vartheta(x) \geqslant a\ln x\,(\pi(x) - \pi(x^a)).$$

Принимая во внимание $\pi(x) = O(x^\theta)$, получим

$$\frac{\vartheta(x)}{x^\theta} \leqslant \frac{\pi(x)}{x^\theta/\ln x} \leqslant \frac{1}{a}\,\frac{\vartheta(x)}{x^\theta} + O\left(\frac{x^{a\theta}\ln x}{x^\theta}\right),$$

$$\frac{1}{\theta} \leqslant \varliminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x^\theta/\ln x} \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x^\theta/\ln x} \leqslant \frac{1}{a}\,\frac{1}{\theta}.$$

Но так как a можно сделать сколь угодно близким к 1, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x^\theta/\ln x} = \frac{1}{\theta}.$$

Теорема доказана.

2.7. Задача Харди и Рамануджана

Одной из простейших задач на асимптотические формулы в аддитивной теории чисел является задача об асимптотической формуле для количества «неограниченных разбиений» натурального числа.

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $p(n)$ количество решений в неотрицательных числах x_1, $x_2, \ldots, x_r, \ldots$ диофантова уравнения

$$n = 1 \cdot x_1 + 2x_2 + \ldots + rx_r + \ldots$$

(натуральное число n всевозможным образом разбивается на натуральные слагаемые, в каком-либо представлении 1 встречается x_1 раз, 2 встречается x_2 раз и т. д.).

Теорема. *При $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}\right)\right).$$

Доказательство. Мы изложим простое доказательство этой теоремы, сообщенное нам Г. А. Фрейманом. Однако оно займет много места, поскольку мы будем излагать его не формально, именно мы будем пытаться «объяснить», почему употребляется тот или иной способ рассуждения.

Рассмотрим произведение (при $|x| < 1$)

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m},$$

или, раскрывая

$$\frac{1}{1-x^m} = 1 + x^m + x^{2m} + \ldots$$

и перемножая,

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) x^n.$$

Отсюда по формулам Коши для коэффициентов степенного ряда получаем

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx,$$

где C — окружность радиуса меньшего, чем единица. Заменим в интеграле $x = e^{-u}$, где $u = v + iw$, и обозначим $F(e^{-u}) = f(u)$. При $v > 0$ имеет место формула

$$f(u) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-mu}}$$

и

$$p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v + iw)\, e^{n(v+iw)}\, dw.$$

Замечание. Проведем сейчас прикидочное рассуждение, т. е. дадим грубую схему доказательства, ничего не обосновывая. Знак $\approx$ употребляется в смысле «приближенно равно». Выберем $w_0 > 0$ (w_0 зависит от n и зависит так, что при $n \to \infty$ $w_0 \to 0$):

$$p(n) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-w_0}^{w_0} f(v + iw)\, e^{n(v+iw)}\, dw.$$

По формуле Тейлора с двумя членами при $|w| < w_0$

$$\ln f(v + iw) \approx \ln f(v) + iw (\ln f(v))' - \frac{w^2}{2} (\ln f(v))'',$$

$$p(n) \approx \frac{e^{nv} e^{\ln f(v)}}{2\pi} \int_{-w_0}^{w_0} e^{iw((\ln f(v))' + n)} e^{-\frac{w^2}{2}(\ln f(v))''}\, dw.$$

До сих пор v являлось свободным параметром. Произведем теперь выбор v так, чтобы выполнялось соотношение

$$(\ln f(v))' + n = 0,$$

т. е. нам надо выбрать v из уравнения

$$n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{e^{vm} - 1}$$

$\left(\text{так как } (\ln f(v))' = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{e^{mv} - 1}\right)$. Решим это уравнение приближенно. Мы имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{e^{mv} - 1} = \frac{1}{v^2} \sum_{m=1}^{\infty} v \frac{vm}{e^{mv} - 1}.$$

Но $\sum_{m=1}^{\infty} v \frac{vm}{e^{mv}-1}$ является интегральной суммой с шагом v для интеграла $\int_0^{\infty} \frac{z}{e^z-1}\,dz$. Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{e^{vm}-1} \approx \frac{1}{v^2}\int_0^{\infty} \frac{z}{e^z-1}\,dz = \frac{(2\pi)^2}{v^2}\int_0^{\infty} \frac{x}{e^{2\pi x}-1}\,dx$$

$$(z = 2\pi x).$$

Интеграл этот вычисляется в конечном виде (см. Г. М. Фихтенгольц [73], стр. 721):

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{(2\pi)^2}.$$

Итак,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{e^{vm}-1} \approx \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{v^2}.$$

Надо брать v из уравнения $n \approx \frac{1}{v^2}\,\frac{\pi^2}{6}$, т. е. $v \approx \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$. Выберем v таким образом, чтобы оно было корнем уравнения $(\ln f(v))' + n = 0$. При таком выборе v получим

$$p(n) \approx \frac{e^{\ln f(v)+nv}}{2\pi}\int_{-w_0}^{w_0} e^{-\frac{w^2}{2}(\ln f(v))''}\,dw \approx$$

$$\approx \frac{e^{\ln f(v)+nv}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}(\ln f(v))''}\,dw = \frac{e^{\ln f(v)+nv}}{\sqrt{2\pi(\ln f(v))''}}$$

(употребляя классический интеграл). Как мы видели, $nv \approx \pi\sqrt{\frac{n}{6}}$. Далее будет показано, что

$$\ln f(v) \approx \pi\sqrt{\frac{n}{6}} + \frac{1}{4}\ln\frac{1}{24n}$$

и

$$(\ln f(v))'' \approx \frac{2n\sqrt{6n}}{\pi}.$$

Таким образом,

$$p(n) \approx \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{24n}}}{\sqrt{2\pi\frac{2n\sqrt{6n}}{\pi}}} = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{2\sqrt[4]{6n24nn^2}} = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{4\sqrt{3}n}.$$

Вернемся к строгому рассуждению. Положим $w_0 = n^{-3/4+\varepsilon/3}$, $\varepsilon > 0$, и разобьем интеграл, выражающий $p(n)$, на три части:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-w_0} + \int_{-w_0}^{w_0} + \int_{w_0}^{\pi}\right).$$

Лемма. *Пусть* $\operatorname{Re} u > 0$ *и* $u \to 0$, *оставаясь внутри некоторого угла, лежащего в правой полуплоскости. Тогда, понимая под* $\ln$ *главное значение логарифма, имеем*

$$\ln f(u) = \frac{\pi^2}{6u} + \frac{1}{2}\ln\frac{u}{2\pi} + O(|u|).$$

Доказательство.

$$\ln f(u) = -\sum_{m=1}^{\infty}\ln(1-e^{-mu}) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-mnu}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{nu}-1)}.$$

Замечание. Задача об определении асимптотического поведения ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{nu}-1)}$ при $u \to 0$ с точностью до членов порядка $O(|u|)$ решается искусственным приемом. Чтобы он не был «неожиданным», решим сначала более простую задачу: предположим, что u вещественно, и определим асимптотическое поведение ряда с точностью до $O(1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{nu}-1)} = \sum_{n\leqslant 1/u}\frac{1}{n(e^{nu}-1)} + \sum_{n>1/u}\frac{1}{n(e^{nu}-1)}.$$

Если $n > 1/u$, то $e^{nu}-1 \geqslant e^{nu}/2$ (ибо $e \geqslant 2$ и, кроме того, $1/n < u$). Поэтому

$$\sum_{n>1/u} \frac{1}{n(e^{nu}-1)} < u \sum_{n>1/u} \frac{2}{e^{nu}} < 2u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{nu}} = \frac{2u}{1-e^{-u}} \leqslant C$$

при $u \to 0$.

Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(e^{nu}-1)} = \sum_{n \leqslant 1/u} \frac{1}{n(e^{nu}-1)} + O(1).$$

В оставшейся сумме $nu \leqslant 1$, и мы воспользуемся легко проверяемым соотношением $\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + O(z)$ при $|z| \leqslant 1$:

$$\sum_{n \leqslant 1/u} \frac{1}{n(e^{nu}-1)} = \sum_{n \leqslant 1/u} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{nu} - \frac{1}{2} + O(nu)\right) =$$

$$= \frac{1}{u} \sum_{n \leqslant 1/u} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n \leqslant 1/u} \frac{1}{n} + O\left(\sum_{n \leqslant 1/u} u\right) =$$

$$= \frac{1}{u}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n>1/u} \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{u} + O(1) + O(1) =$$

$$= \frac{1}{u}\,\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{u} + O(1),$$

ибо

$$\frac{1}{u} \sum_{n>1/u} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{u}\left(\int_{1/u}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + O(u^2)\right) = O(1).$$

Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(e^{nu}-1)} = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{u} + O(1).$$

Вернемся к доказательству леммы. Пусть u, как это оговорено в условиях леммы, комплексное переменное с $\operatorname{Re} u = v > 0$, лежащее в некоторой окрестности точки 0. Для определения асимптотического поведения ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(e^{nu}-1)}$ с точностью до членов порядка $O(|u|)$ воспользуемся следующим искусственным приемом. Представим наш ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(e^{nu}-1)} = u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nu(e^{nu}-1)} = u \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(nu),$$

где обозначено $\Phi(z) = \frac{1}{z(e^z-1)}$. Представим, далее, выражение $\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{u}$ (см. предшествующее замечание) в виде $u\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi(nu)$ с точностью до членов порядка $O(|u|)$. Очевидно,

$$\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{u} = \frac{1}{u}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(un)^2}$$

и

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{u} = -\frac{1}{2}\ln(1-e^{-u}) - \frac{1}{2}\ln\frac{u}{1-e^{-u}}.$$

Поскольку при $u=0$ $\frac{u}{1-e^{-u}} = 1$, то функция $\frac{1}{u}\ln\frac{u}{1-e^{-u}}$ регулярна при $u=0$ и, значит, ограничена, $\frac{1}{u}\ln\frac{u}{1-e^{-u}} = O(1)$. Поэтому

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{u} = -\frac{1}{2}\ln(1-e^{-u}) + O(|u|),$$

и, значит,

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{u} = u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nu}}{2nu} + O(|u|).$$

Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(e^{nu}-1)} = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{u} +$$
$$+ u\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{nu(e^{nu}-1)} - \frac{1}{(nu)^2} + \frac{e^{-nu}}{2nu}\right) + O(|u|).$$

Обозначим

$$\varphi(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}-\frac{1}{z^2}+\frac{e^{-z}}{2z}.$$

Сумму

$$u\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{nu(e^{nu}-1)}-\frac{1}{(nu)^2}+\frac{1}{2}\frac{e^{-nu}}{nu}\right)$$

будем рассматривать как интегральную сумму с шагом, равным u, для интеграла

$$\int\limits_L\left(\frac{1}{z(e^z-1)}-\frac{1}{z^2}+\frac{e^{-z}}{2z}\right)dz=\int\limits_L\varphi(z)\,dz,$$

взятого по лучу, исходящему из точки 0 и проходящему через точку с аффиксом u (рис. 4). Этот интеграл сходящийся. Его сходимость на бесконечности очевидна. Сходимость в окрестности нуля следует из того, что функция $\varphi(z)$ аналитична в точке $z=0$. Действительно,

$$\varphi(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}-\frac{1}{z^2}+\frac{e^{-z}}{2z}=$$
$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\lambda_1(z)-\frac{1}{z^2}+$$
$$+\frac{1}{2z}+\lambda_2(z)=\lambda_1(z)+\lambda_2(z);$$

$\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$ — аналитические при $z=0$ функции.

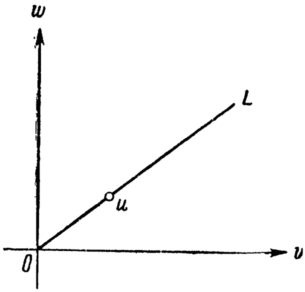


Рис. 4.

Оценим разность между интегралом и интегральной суммой. Обозначим часть пути L от 0 до u через L_1, от u до $2u$ через L_2, ..., от $(n-1)u$ до nu через L_n:

$$\int\limits_L\varphi(z)\,dz-u\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(nu)=$$
$$=\int\limits_{L_1}\varphi(z)\,dz-u\varphi(u)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\int\limits_{L_n}\varphi(z)\,dz-\varphi(nu)\right).$$

Поскольку длина L_1 равна $|u|$ и $\varphi(z)$ аналитична при $z=0$, то

$$\int_{L_1} \varphi(z)\,dz - u\varphi(u) = O(|u|).$$

Чтобы оценить разность $\int\limits_{L_n} \varphi(z)\,dz - \varphi(nu)$, воспользуемся формулой, очевидным образом получающейся интегрированием по частям:

$$\int_{L_n} \varphi(z)\,dz = u\varphi(nu) - \int_{L_n} (z-(n-1)u)\,\varphi'(z)\,dz.$$

Отсюда

$$\left|\int_{L_n} \varphi(z)\,dz - u\varphi(nu)\right| \leqslant |u| \max_{z\in L_n} |z-(n-1)u|\,|\varphi'(z)| \leqslant$$
$$\leqslant |u^2| \max_{z\in L_n} |\varphi'(z)|.$$

Ввиду этого

$$\left|\int_{L} \varphi(z)\,dz - u\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(nu)\right| \leqslant O(|u|) + |u|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \max_{z\in L_n} |\varphi'(z)|.$$

Поскольку u стремится к нулю внутри некоторого угла, существует такая абсолютная постоянная λ, что $\operatorname{Re} u/|u| > \lambda$. Разобьем сумму в правой части следующим образом:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \max_{z\in L_n} |\varphi'(z)| \leqslant \sum_{2\leqslant n\leqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n} |\varphi'(z)| +$$
$$+ \sum_{n>\frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n} |\varphi'(z)|.$$

В первой сумме $|z| \leqslant n\,|u| \leqslant \frac{1}{\lambda} + |u| \leqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon$ (ибо $u\to 0$). При $|\arg z| \leqslant C_\lambda < \pi$, $|z| \leqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon$ функция $\varphi'(z)$

регулярна и поэтому ограничена. В силу этого

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n} |\varphi'(z)|\leqslant C\frac{1}{|u|};$$

C — константа (зависящая от λ). Вторая сумма оценивается следующим образом. Очевидно,

$$\varphi'(z) = -\frac{e^z-1+ze^z}{(z(e^z-1))^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{e^{-z}}{2z}-\frac{e^{-z}}{2z^2}=$$

$$=-\frac{1}{z^2(e^z-1)}-\frac{1}{z(e^z-1)}-\frac{1}{z(e^z-1)^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{e^{-z}}{2z}-\frac{e^{-z}}{2z^2}.$$

Поэтому

$$\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}|\varphi'(z)|\leqslant \sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z|^2|e^z-1|}+$$

$$+\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z||e^z-1|}+$$

$$+\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z||e^z-1|^2}+2\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z|^3}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z||e^z|}+\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z|^2|e^z|}.$$

Поскольку $\frac{1}{|z|^2}\leqslant\frac{1}{|z|}$ (т. е. $|z|\geqslant 1$, а это верно, ибо $(n-1)|u|\geqslant 1$), то

$$\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}|\varphi'(z)|\ll$$

$$\ll\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z||e^z-1|}+\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z||e^z-1|^2}+$$

$$+\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z||e^z|}+\sum_{n\geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z\in L_n}\frac{1}{|z|^3}.$$

Но

$$\min_{z \in L_n} |z| = (n-1)|u|,$$

$$\min_{z \in L_n} |e^z| = e^{(n-1)\operatorname{Re} u} \geqslant e^{(n-1)\lambda|u|},$$

$$\min_{z \in L_n} |e^z - 1| \geqslant \min_{z \in L_n} |e^z| - 1 \geqslant e^{(n-1)\lambda|u|} - 1 \geqslant \frac{e^{(n-1)\lambda|u|}}{2}$$

$\left(\text{последнее в силу } (n-1)\lambda|u| \geqslant 1,\ n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|} + 1\right)$. Итак,

$$\sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z \in L_n} |\varphi'(z)| \ll$$

$$\ll \frac{1}{|u|} \sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \frac{e^{-(n-1)\lambda|u|}}{n-1} + \frac{1}{|u|} \sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \frac{e^{-2(n-1)\lambda|u|}}{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{|u|} \sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \frac{e^{-(n-1)\lambda|u|}}{n-1} + \frac{1}{|u|^3} \sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \frac{1}{(n-1)^3} \ll$$

$$\ll \frac{1}{|u|} \sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \frac{e^{-(n-1)\lambda|u|}}{n-1} + \frac{1}{|u|^3} \sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \frac{1}{(n-1)^3}.$$

Но

$$\sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \frac{e^{-(n-1)\lambda|u|}}{n-1} \ll \sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} e^{-(n-1)\lambda|u|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1 - e^{-\lambda|u|}} = O\left(\frac{1}{|u|}\right).$$

Точно такую оценку получаем и здесь:

$$\frac{1}{|u|^3} \sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \frac{1}{(n-1)^3} = \frac{1}{|u|^3} \int_{1/\lambda|u|}^{\infty} \frac{dx}{x^3} + O(1) = O\left(\frac{1}{|u|}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{n \geqslant \frac{1}{\lambda|u|}+1} \max_{z \in L_n} |\varphi'(z)| \ll \frac{1}{|u|}.$$

Это нам дает

$$\sum_{n=2}^{\infty} \max_{z \in L_n} |\varphi'(z)| \ll \frac{1}{|u|}$$

и

$$\left| \int_L \varphi(z)\, dz - \sum_{n=1}^{\infty} u\varphi(nu) \right| \ll |u|.$$

Итак, при наших предположениях

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(e^{nu}-1)} = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\ln u + \int_L \varphi(z)\, dz + O(|u|).$$

Рассмотрим теперь $\int_G \varphi(z)\, dz$, где G — граница сектора OAB радиуса R (рис. 5). В силу регулярности $\varphi(z)$ внутри сектора

$$\int_G \varphi(z)\, dz = 0.$$

Но когда $R \to \infty$, то интеграл, взятый по дуге окружности, стремится к нулю. Мы получаем

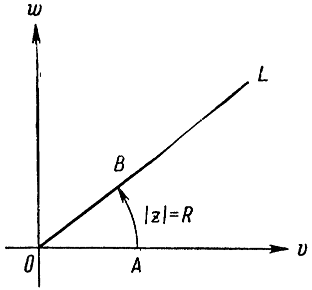


Рис. 5.

$$\int_L \varphi(z)\, dz = \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Обозначим

$$I = \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} + \frac{e^{-x}}{2x} \right) dx.$$

Этот интеграл вычисляется в конечном виде. Как известно (см. Г. М. Фихтенгольц [73], стр. 816),

$$\ln \Gamma(a) = \int_0^{\infty} \left((a-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1-e^{-x}} \right) \frac{dx}{x}, \quad a > 0.$$

Положим $a=1/2$; $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Мы имеем

$$\frac{\ln\pi}{2}=-\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{2}+\frac{e^{-x}-e^{-x/2}}{1-e^{-x}}\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=-\int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{2x}+\frac{1-e^{x/2}}{(e^x-1)\,x}\right)dx,$$

$$\frac{\ln\pi}{2}=\int_0^\infty\left(\frac{e^{x/2}}{(e^x-1)\,x}-\frac{1}{x^2}\right)dx-I.$$

В интеграле заменяем $x/2$ на x. Мы получаем

$$I=\int_0^\infty\left(\frac{e^x}{(e^{2x}-1)\,x}-\frac{1}{2x^2}\right)dx-\frac{\ln\pi}{2}=$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}-\frac{\ln\pi}{2}.$$

Но этот интеграл вычислен в книге Г. М. Фихтенгольца [73] (стр. 657):

$$I=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\ln\pi}{2}=-\frac{\ln 2\pi}{2}.$$

Итак,

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n\,(e^{nu}-1)}=\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{u}+\frac{\ln u}{2}-\frac{\ln 2\pi}{2}+O(|u|).$$

Лемма доказана.

Далее возьмем $v=\pi/\sqrt{6n}$.

Изучим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-w_0}^{w_0}f(v+iw)\,e^{n(v+iw)}\,dw.$$

Поскольку

$$w_0=n^{-3/4+\varepsilon/3}\quad\text{и}\quad v=\frac{\pi}{\sqrt{6}}n^{-1/2},$$

то u стремится к нулю при $n\to\infty$ по кривой, касательной к вещественной оси, и поэтому подавно $u=v+iw$

остается внутри некоторого угла. Мы можем применить лемму:

$$\ln f(v+iw)=\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{v+iw}+\frac{1}{2}\ln(v+iw)-\frac{\ln 2\pi}{2}+ +O(|v+iw|)=\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{v+iw}+\frac{1}{2}\ln v+ +\frac{1}{2}\ln\left(1+i\frac{w}{v}\right)-\frac{\ln 2\pi}{2}+O(|v+iw|).$$

При $|w|\leqslant w_0$ и $|w|<v$, $|v+iw|=O(v)$. Мы имеем

$$\frac{1}{v+iw}=\frac{1}{v}-\frac{w}{v^2}i-\frac{w^2}{v^3}+\frac{1}{v\left(1+i\dfrac{w}{v}\right)}-\frac{1}{v}+\frac{w}{v^2}i+\frac{w^2}{v^3}= =\frac{1}{v}-\frac{w}{v^2}i-\frac{w^2}{v^3}+\frac{1}{v}\,\frac{-i\dfrac{w^3}{v^3}}{1+i\dfrac{w}{v}}= =\frac{1}{v}-\frac{w}{v^2}i-\frac{w^2}{v^3}+O\left(\frac{w_0^3}{v^4}\right).$$

Далее ясно, что при $n\geqslant n_0$

$$\left|\frac{w}{v}\right|\leqslant\frac{\sqrt{6}}{\pi}\frac{1}{n^{1/4-\varepsilon/3}}<\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\left|\ln\left(1+i\frac{w}{v}\right)\right|\leqslant\left|\frac{w}{v}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{w}{v}\right|^2+\frac{1}{3}\left|\frac{w}{v}\right|^3+\ldots\leqslant \leqslant\left|\frac{w}{v}\right|\frac{1}{1-\left|\dfrac{w}{v}\right|}=O\left(\frac{w_0}{v}\right).$$

Итак, при $|w|\leqslant|w_0|$

$$\ln f(v+iw)=\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{1}{v}-\frac{w}{v^2}i-\frac{w^2}{v^3}\right)+ +\frac{\ln v}{2}-\frac{\ln 2\pi}{2}+O\left(v+\frac{w_0}{v}+\frac{w_0^3}{v^4}\right)= =\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\sqrt{6n}}{\pi}-\frac{6i}{\pi^2}nw-\frac{(6n)^{3/2}w^2}{\pi^3}\right)+\frac{1}{2\sqrt{6n}}+O(n^{-1/4+\varepsilon}),$$

Поэтому

$$\ln f(v+iw)=\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}-iwn-\frac{n\sqrt{6n}}{\pi}w^2+ \\ +\frac{1}{4}\ln\frac{1}{24n}+O(n^{-1/4+\varepsilon}).$$

Отсюда

$$I_2=\int_{-w_0}^{w_0} f(v+iw)\,e^{n(v+iw)}\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{2\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{24n}+O(n^{-1/4+\varepsilon})}\int_{-w_0}^{w_0} e^{-\frac{n\sqrt{6n}}{\pi}w^2}\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{\sqrt[4]{24n}}\,e^{O(n^{-1/4+\varepsilon})}\int_{-w_0}^{w_0} e^{-\frac{n\sqrt{6n}}{\pi}w^2}\,dw=$$

$$=\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{2\pi\sqrt[4]{24n}}\left(1+O(n^{-1/4+\varepsilon})\right)\int_{-w_0}^{w_0} e^{-\frac{n\sqrt{6n}}{\pi}w^2}\,dw.$$

Далее делаем в интеграле замену переменного $w=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{6n^3}}z$:

$$\int_{-w_0}^{w_0} e^{-\frac{n\sqrt{6n}}{\pi}w^2}\,dw=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{6n^3}}\int_{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt[4]{6}\,n^{\varepsilon/3}}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt[4]{6}\,n^{\varepsilon/3}} e^{-z^2/2}dz=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{6n^3}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz+O\left[\int_{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt[4]{6}\,n^{\varepsilon/3}}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz\right]\right].$$

Положим

$$M=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt[4]{6}\,n^{\varepsilon/3};$$

$\frac{1}{M}e^{-M^2/2}$ — величина очень малая при $n \to \infty$. Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{2n}\,\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{\sqrt[4]{144}}\left(1 + O\left(n^{-1/4+\varepsilon}\right)\right) = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{4\sqrt{3}\,n}\left(1 + O\left(n^{-1/4+\varepsilon}\right)\right).$$

Итак,

$$p(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{4\sqrt{3}\,n}\left(1 + O\left(n^{-1/4+\varepsilon}\right)\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{w_0}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{-w_0}\right).$$

Оценим оставшиеся интегралы. Достаточно ограничиться одним, скажем от w_0 до π. Возьмем за C достаточно большую постоянную и обозначим $w_1 = Cv$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{w_0}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{w_0}^{w_1} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{w_1}^{\pi} = I_1' + I_1''.$$

Оценим I_1', интеграл на пути $w_0 w_1$. На этом пути u лежит внутри некоторого угла, и можно применить лемму:

$$\ln f(u) = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\ln u + O(1).$$

Поэтому

$$I_1' \ll \int\limits_{w_0}^{w_1} \sqrt{|u|}\, e^{\frac{\pi^2}{6}\operatorname{Re}\frac{1}{u} + nv}\, dw.$$

Но $\operatorname{Re}\frac{1}{u} = \frac{v}{v^2 + w^2} \leqslant \frac{v^2}{v^2 + w_0^2}$. Кроме того, на $w_0 w_1$ $|u| \ll v$.

Поэтому

$$I_1' \ll \sqrt{v}\; w_1 \exp\left[\frac{\pi^2}{6}\,\frac{v}{v^2 + w_0^2} + nv\right] \ll$$

$$\ll v^{3/2}\left(\exp 2nv\right)\left(\exp\left[nv - \frac{\pi^2}{6}\,\frac{v}{v^2 + w_0^2}\right]\right)^{-1} \ll$$

$$\ll n^{-3/4}\left(\exp \pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right)\left(\exp\left[nv\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{w_0^2}{v^2}}\right)\right]\right)^{-1}.$$

Так как

$$1-\frac{1}{1+\frac{w_0^2}{v^2}}=\frac{\frac{w_0^2}{v^2}}{1+\frac{w_0^2}{v^2}}\geqslant\frac{w_0^2}{v^2},$$

$$nv\,\frac{w_0^2}{v^2}=\frac{\sqrt{6}}{\pi}\,n^{\frac{2}{3}\varepsilon},$$

$$I_1'\ll\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{n^{3/4}}\,e^{-\frac{\sqrt{6}}{\pi}n^{\frac{2}{3}\varepsilon}}=O\left(\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{n^{5/4-\varepsilon}}\right),$$

т. е. интеграл I_1' идет в остаточный член. Оценим интеграл на пути $w_1\pi$, т. е. интеграл I_1''. Мы имеем

$$|e^{nu}-1|=\sqrt{(e^{nv}\cos nw-1)^2+e^{2nv}\sin^2 nw}=$$
$$=\sqrt{(e^{nv}-1)^2+4e^{nv}\sin^2\frac{nw}{2}}.$$

Отсюда $|e^{nu}-1|\geqslant e^{nv}-1$ и (при $n|w|\leqslant\pi$)

$$|e^{nu}-1|\geqslant 2\left|\sin\frac{nw}{2}\right|\geqslant 2\,\frac{2}{\pi}\,\frac{n|w|}{2}=\frac{2}{\pi}\,n|w|.$$

Поэтому

$$|\ln f(u)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n|e^{nu}-1|}\leqslant\frac{\pi}{2|w|}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(e^{nv}-1)}<$$
$$<\left(\frac{\pi}{2C}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{v}=\frac{C_1}{v},$$

ибо

$$|w|\geqslant Cv,\quad C_1=\frac{\pi}{2C}+\frac{\pi^2}{6}-1.$$

Отсюда

$$I_1''\ll e^{C_1/v+nv}.$$

При C достаточно большом

$$\frac{C_1}{v}+nv<\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}-\delta\right)\sqrt{n},\qquad\delta>0.$$

Поэтому I_1'' идет в остаток.

Окончательно получаем

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}} (1 + O(n^{-1/4+\varepsilon})),$$

что и требовалось доказать.

2.8. Аддитивная теорема Ингама

Из тауберовой теоремы Ингама можно получить такое утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$ — *данная последовательность вещественных чисел, причем*

$$N(u) = Bu^\beta + R(u), \quad B > 0, \quad \beta > 0,$$

где $N(u)$ — *количество чисел* λ_ν, *не превосходящих* u, *и*

$$\int_0^u \frac{R(v)}{v}\, dv = b \ln u + c + o(1)$$

при $u \to \infty$. *Для вещественного* l *пусть будет* $p(l)$ — *количество решений уравнения*

$$l = r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \ldots$$

в целых $r_\nu \geqslant 0$.

Обозначим для вещественного u *и* $h > 0$

$$P(u) = \sum_{l<u} p(l),$$

где суммирование ведется по дискретному множеству чисел l, *для которых* $p(l) \neq 0$, *и*

$$P_h(u) = \frac{P(u) - P(u-h)}{h}.$$

Тогда при $u \to \infty$

$$P(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-\left(b+\frac{1}{2}\right)\alpha} u^{\left(b+\frac{1}{2}\right)(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad M = (B\beta\Gamma(\beta+1)\zeta(\beta+1))^{1/\beta}.$$

Также

$$P_h(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-\left(b-\frac{1}{2}\right)\alpha} u^{\left(b-\frac{1}{2}\right)(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$

где h — такая положительная константа, что $P_h(u)$ есть неубывающая функция u (если h принадлежит к данной последовательности λ_ν, то это условие выполняется).

Прежде чем доказывать эту теорему, покажем, как из нее следует теорема Харди и Рамануджана.

Положим $h_\nu = \nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Далее положим $h = 1$, тогда $p(u) = P_h(u)$, $N(u) = [u]$, $R(u) = [u] - u$,

$$B = \beta = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad M = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^u \frac{R(v)}{v}\,dv = \int_0^u \frac{[v]-v}{v}\,dv = \int_0^u \frac{[v]}{v}\,dv - u =$$

$$= \sum_{s=1}^{[u]-1} s \ln \frac{s+1}{s} + [u] \ln \frac{u}{[u]} - u = [u] \ln u - \sum_{s=1}^{[u]} \ln s - u =$$

$$= [u] \ln u - [u] \ln [u] + [u] - \frac{1}{2} \ln [u] - \frac{\ln 2\pi}{2} + o(1) - u =$$

$$= [u](\ln u - \ln [u]) + [u] - u - \frac{\ln [u]}{2} - \frac{\ln 2\pi}{2} + o(1)$$

(мы применили формулу Стирлинга). Так как

$$\ln u = \ln [u] + \frac{u - [u]}{u} + o\left(\frac{1}{u}\right),$$

то

$$\int_0^u \frac{R(v)}{v}\,dv = -\frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1).$$

Значит, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2} \ln 2\pi$. Теорема дает

$$p(u) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\ln 2\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}} u^{-1} e^{2\sqrt{\frac{\pi^2}{6} u}} = \frac{1}{4\sqrt{3}u} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3} u}}.$$

Доказательство теоремы Ингама. Мы имеем

$$N(u) = 2\frac{uN(u)}{2u} \leqslant \int_u^{2u} \frac{N(v)}{v}\,dv =$$

$$= 2\int_u^{2u} \frac{Bv^\beta}{v}\,dv + 2\int_u^{2u} \frac{R(v)}{v}\,dv = O(u^\beta).$$

Обозначим $L(u)=\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}\,dv$, $S(u)=L(u)-b\ln u-c$ и

$$g(s)=\sum p(l)\,e^{-ls}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-e^{-\lambda_\nu s}\right)^{-1}$$

при $\sigma>0$. Рассмотрим $\ln g(s)$. При $\sigma>0$ имеем

$$\ln g(s)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left(1-e^{-\lambda_\nu s}\right)=s\int\limits_0^{\infty}\ln\left(1-e^{-us}\right)dN(u)=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\frac{sN(u)}{e^{us}-1}\,du=\int\limits_0^{\infty}\frac{s}{e^{us}-1}\left(Bu^{\beta}\,du+u\,dL(u)\right)=$$

$$=\frac{B}{s^{\beta}}\int\limits_0^{\infty}\frac{(us)^{\beta}\,d(us)}{e^{us}-1}-\int\limits_0^{\infty}L(u)\,d\left(\frac{us}{e^{us}-1}\right)=$$

$$=\frac{B}{s^{\beta}}\int\limits_0^{\infty}\frac{z^{\beta}\,dz}{e^{z}-1}-\int\limits_0^{\infty}(b\ln u+c)\,s\psi'(us)\,du-\int\limits_0^{\infty}S(u)\,s\psi'(us)\,du=$$

$$=\frac{B}{s^{\beta}}\Gamma(\beta+1)\,\zeta(\beta+1)-\int\limits_0^{\infty}(b\ln u+c)\,s\psi'(us)\,du-$$

$$-\int\limits_0^{\infty}S(u)\,s\psi'(us)\,du,$$

где $\psi(z)=\frac{z}{e^{z}-1}$, $S(u)=o(1)$, когда $u\to\infty$, и $S(u)=O(|\ln u|)$, когда $u\searrow 0$. Очевидно,

$$\int\limits_0^{\infty}s(b\ln u+c)\,\psi'(us)\,du=$$

$$=\left((b\ln u+c)\frac{us}{e^{us}-1}-b\ln\left(1-e^{-us}\right)\right)\Bigg|_{u=0}^{\infty}=b\ln s-c.$$

Итак,

$$\ln g(s)=\frac{B}{s^{\beta}}\Gamma(\beta+1)\,\zeta(\beta+1)-b\ln s+c-\int\limits_0^{\infty}S(u)\,s\psi'(us)\,du.$$

Оценим интеграл $\int\limits_0^\infty S(u)\, s\psi'(us)\, du$:

$$\left|\int\limits_0^\infty S(u)\, s\psi'(us)\, du\right| = O\left(|s|\int\limits_0^{1/\sqrt{\sigma}} (|\ln u| + 1)\,|\psi'(us)|\,du\right) + \\ + O\left(|s|\int\limits_{1/\sqrt{\sigma}}^\infty |S(u)|\,|\psi'(us)|\,du\right).$$

Когда s находится в некотором произвольном угле $|t| \leqslant \Delta\sigma$, то

1) $\frac{|s|}{\sigma} = O(1)$ при $s \to 0$;

2) $\psi'(us) = O(1)$ при $s \to 0$ и $0 < u < \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$,

ибо $z/(e^z - 1)$ регулярна при $z = 0$. Далее,

$$\left|\int\limits_0^\infty S(u)\, s\psi'(uz)\, du\right| =$$

$$= O\left(\sigma\int\limits_0^{1/\sqrt{\sigma}} (|\ln u| + 1)\, du\right) + O\left(\sigma\int\limits_{1/\sqrt{\sigma}}^\infty |S(u)|\,|\psi'(us)|\,du\right).$$

Поскольку, когда $\sigma \to 0$, $1/\sqrt{\sigma} \to \infty$ и $S(u) = o(1)$ при $u \to \infty$, то

$$\sigma\int\limits_{1/\sqrt{\sigma}}^\infty |S(u)|\,|\psi'(us)|\,du = o\left(\sigma\int\limits_{1/\sqrt{\sigma}}^\infty |\psi'(us)|\,du\right).$$

Так как $\psi'(z)\, e^{z^2/2}$ остается ограниченной в любом угле $|t| \leqslant \Delta\sigma$, то

$$\int\limits_0^\infty S(u)\, s\psi'(us)\, du =$$

$$= O\left(\sigma\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\ln\frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \ln\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)\right) + o(1) = o(1).$$

Итак, в каждом фиксированном угле $|t| \leqslant \Delta\sigma$ имеем

$$\ln g(s) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^{\beta} - b \ln s + c + o(1),$$

и, значит,

$$g(s) \sim e^c s^{-b} e^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^{\beta}}$$

равномерно, когда $s \to 0$ внутри каждого фиксированного угла. Но

$$\int_0^{\infty} e^{-us}\, dP(u) = g(s),$$

т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-us}\, dP(u) \sim e^c s^{-b} e^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^{\beta}},$$

когда $s \to 0$ равномерно внутри каждого фиксированного угла. Далее,

$$\int_0^{\infty} e^{-us}\, dP_h(u) = \frac{1}{h}\left(\int_0^{\infty} e^{-us}\, dP(u) - \int_0^{\infty} e^{-(u+h)s}\, dP(u)\right) = \\ = \frac{1-e^{-hs}}{h} \int_0^{\infty} e^{-us}\, dP(u).$$

Очевидно, что $\frac{1-e^{-hs}}{h} \sim s$, когда $s \to 0$ по любому пути. Поэтому

$$\int_0^{\infty} e^{-us}\, dP_h(u) \sim e^c s^{-b+1} e^{\frac{1}{\beta}\left(\frac{M}{s}\right)^{\beta}},$$

когда $s \to 0$ равномерно внутри каждого фиксированного угла. Применяя частный случай тауберовой теоремы Ингама, получаем с $m = \frac{b \pm 1/2}{\beta}$, $C = M^{1/2 - m\beta} e^c$ утверждение теоремы 1. Кроме того, $(1 - e^{-hs})\, g(s)$ имеет положительные коэффициенты, если h принадлежит к λ_ν, т. е. $P_h(u)$ не убывает.

Теорема 2. *Пусть* $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ — *данная последовательность вещественных чисел, причем*

$$N(u)=Bu^{\beta}+R(u),$$

где $N(u)$ — *количество чисел* λ_ν, *не превосходящих* u, *и*

$$\int_0^u R(v)\,dv=bu+o(u).$$

Для вещественных l *обозначим через* $p^*(l)$ *количество решений уравнения*

$$l=r_1\lambda_1+r_2\lambda_2+\ldots$$

в числах r_ν, *которые равны либо* 0, *либо* 1.

Для вещественного u *и* $h>0$ *обозначим*

$$P^*(u)=\sum_{l<u}p^*(l),$$

где суммирование ведется по дискретному множеству l, *для которого* $p^*(l)\neq 0$, *и*

$$P_h^*(u)=\frac{P^*(u)-P^*(u-h)}{h}.$$

Тогда при $u\to\infty$

$$P^*(u)\sim\left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}2^b(M^*u)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{1}{\alpha}(M^*u)^\alpha},$$

где

$$\alpha=\frac{\beta}{\beta+1},\qquad M^*=\frac{(B\beta\Gamma(\beta+1)\,\zeta(\beta+1))^{1/\beta}}{(1-2^{-\beta})^{1/\beta}}.$$

Также

$$P_h^*(u)\sim\left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}2^bM^{*\frac{\alpha}{2}}u^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{\frac{1}{\alpha}(M^*u)^\alpha},$$

где h *есть такая положительная константа, что* $P_h^*(u)$ *есть неубывающая функция* u.

Замечание. Если числа h, $2h$, 2^2h, ... все принадлежат к данной последовательности λ_ν, то $P_h^*(u)$ есть неубывающая функция u. Очевидно,

$$P_h^*(u)=\frac{1}{h}\sum_{u-h\leqslant l<u}p^*(l).$$

Замечание будет доказано, если установить, что для всякого l такого, что $p^*(l) \neq 0$, выполняется неравенство

$$p^*(l) \leqslant p^*(l+h).$$

Ясно, что

$$l+h = l + 2^s h - 2^{s-1} h - \ldots - h.$$

Рассмотрим представление $l = \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m}$. Если среди чисел $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m}$ нет h, то

$$l+h = \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m} + h$$

есть допустимое представление. Допустим, что среди чисел $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m}$ есть $h, 2h, \ldots, 2^{s-1}h$, но нет $2^s h$; тогда

$$l+h = \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m} + 2^s h - 2^{s-1} h - \ldots - h$$

есть допустимое представление. Итак, каждому представлению l соответствует представление $l+h$.

Доказательство теоремы. Очевидно,

$$\sum_l p^*(l) e^{-ls} = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + e^{-\lambda_\nu s}) = g^*(s)$$

и

$$g^*(s) \sim 2^b e^{(\beta-1)\left(\frac{M^*}{\beta}\right)^s}$$

(где $M^{*\beta} = (1 - 2^{-\beta}) M^\beta$) при $s \to 0$ в любом угле. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Мы имеем

$$\ln g^*(s) = -\int_0^\infty \ln(1 + e^{-us})\, dN(u) = \int_0^\infty \frac{s}{1+e^{us}} N(u)\, du.$$

Функции $\ln(1+e^{-s})$ и $1/(1+e^s)$ регулярны в точке $s=0$ и

$$N(u) = Bu^\beta + R(u).$$

Поэтому мы можем использовать $R(u)\,du$ непосредственно без замены на $u\,dL(u)$. Пользуясь этими замечаниями, мы легко завершаем доказательство теоремы 2.

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА

3.1. Метрическая теория функций натурального аргумента

Ряд математиков прошлого века (в частности, Н. В. Бугаев) заметили аналогию между рядом операций теории чисел и некоторыми операциями математического анализа. На самом деле здесь имеется несколько (связанных между собой) аналогий. Одна из таких аналогий, которая отчетливо проявляется в задачах о сравнениях по модулю, равному степени простого числа, привела к созданию теории p-адических чисел (см. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич [8], гл. 1).

В этой главе мы будем иметь в виду главным образом другую аналогию, «сфера действия» которой — сравнения по любому модулю.

Аналогом понятия интервала является совокупность натуральных чисел, принадлежащих арифметической прогрессии

$$Dx + l;$$

$$D \text{ — натуральное, } x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 0 \leqslant l \leqslant D-1.$$

Займемся метрической теорией множеств натуральных чисел.

Прежде всего рассмотрим логарифмическую плотность. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество натуральных чисел. Определим функцию множества $\operatorname{mes}_* \mathfrak{M}$ по формуле

$$\operatorname{mes}_* \mathfrak{M} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{n \leqslant N,\ n \in \mathfrak{M}} \frac{1}{n}.$$

Если такого предела нет, то множество назовем неизмеримым в отношении логарифмической плотности. Если $\mathfrak{M}$ — конечное множество, то $\operatorname{mes}_* \mathfrak{M} = 0$. Если $\mathfrak{M}$ есть арифметическая прогрессия $Dx + l$, $D > 0$, то

$$\operatorname{mes}_* \mathfrak{M} = \frac{1}{D}.$$

Функция $\operatorname{mes}_* \mathfrak{M}$, когда $\mathfrak{M}$ есть натуральный ряд, равна 1. Интеграл по этой функции множества определяется так:

$$\int f(n)\, d \operatorname{mes}_* = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \in \mathfrak{M}}} \frac{f(n)}{n}.$$

Очевидно, что функция $\operatorname{mes}_* \mathfrak{M}$ является конечно-аддитивной. Примечательно, что она не является счетно-аддитивной. Приведем пример (сообщенный Ю. И. Маниным) такого разбиения натурального ряда на сумму непересекающихся арифметических прогрессий

$$l_i + D_i x,$$

при котором выполняется неравенство

$$\sum \frac{1}{D_i} < 1.$$

В качестве прогрессии $\mathfrak{B}_1$ возьмем совокупность чисел, делящихся на 3:

$$3,\ 6,\ 9,\ \ldots$$

Прогрессию $\mathfrak{B}_2$ возьмем с разностью $3^2 = 9$, а за ее первый член возьмем наименьшее не встречавшееся в $\mathfrak{B}_1$ натуральное число, т. е. $\mathfrak{B}_2$ есть прогрессия

$$1,\ 10,\ 19,\ \ldots$$

В качестве $\mathfrak{B}_3$ возьмем прогрессию с первым членом, равным наименьшему натуральному числу, не входящему в $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$, и с разностью равной $3^3 = 27$:

$$2,\ 29,\ 56,\ \ldots$$

Продолжаем построение прогрессий $\mathfrak{B}_j$. Очевидно, всякое натуральное число входит в какую-либо прогрессию $\mathfrak{B}_j$, т. е. объединение прогрессий $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ... дает весь натуральный ряд. Докажем, что при $i \neq j$ прогрессии $\mathfrak{B}_i$ и $\mathfrak{B}_j$ не пересекаются. Пусть $j > i$ и

$$l_j + 3^j D_j = l_i + 3^i D_i.$$

Мы видим, что

$$l_j = l_i + 3^i (D_i - 3^{j-i} D_j),$$

т. е. $l_j \in \mathfrak{B}_i$, что противоречит принципу выбора начальных чисел прогрессий. Таким образом, натуральный ряд раскладывается в сумму непересекающихся арифметических прогрессий. При этом сумма обратных величин разностей этих прогрессий равна

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким образом, функция множества $\mathrm{mes}_* \mathfrak{M}$ не является мерой.

Конечно-аддитивные функции множеств натуральных чисел с нормировкой, что для множества всех натуральных чисел функция равна 1, будем называть псевдомерами. Логарифмическая плотность является псевдомерой.

В качестве другой псевдомеры мы приводим асимптотическую плотность $D(\mathfrak{M})$ множества натуральных чисел $\mathfrak{M}$:

$$D(\mathfrak{M}) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N,\ n \in \mathfrak{M}} 1$$

(если этот предел существует). Мера конечного множества равна 0. Плотность прогрессии $Dx + l$, $x = 0, 1, \ldots$, равна $\frac{1}{D}$. Интеграл по этой функции множества от функции натурального аргумента $f(n)$ естественно определить как

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} f(n).$$

Этот предел, если он существует, будем обозначать $M(f)$ и называть средним значением функции $f(n)$.

$D(\mathfrak{M})$ не является счетно-аддитивной функцией множества. Это устанавливается хотя бы на основании того же примера, который приводился в отношении псевдомеры $\mathrm{mes}_* \mathfrak{M}$.

С помощью абелева преобразования легко доказать, что всякое множество, измеримое в отношении асимптотической плотности, будет измеримо в отношении логарифмической плотности (и числовые значения соответствующих псевдомер равны).

Приведем пример множества, измеримого в отношении логарифмической плотности, но неизмеримого в отношении асимптотической плотности. Возьмем последовательность

$$2,\ 3',\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15',\ 32,\ \ldots,\ 63',\ \ldots$$
$$\ldots',\ 2^{2k-1},\ \ldots,\ 2^{2k}-1\ ',\ 2^{2k+1},\ \ldots$$

(штрихи нужным нам образом разбивают последовательность). Обозначим это множество через $\mathfrak{M}$. Пусть P — растущий параметр. Разберем сначала случай $2^{2s+1} \leqslant P \leqslant 2^{2s+2}-1$. Мы имеем

$$\frac{1}{\ln P} \sum_{\substack{n \leqslant P \\ n \in \mathfrak{M}}} \frac{1}{n} =$$
$$= \frac{1}{\ln P} \left(\sum_{j=0}^{s-1} \sum_{\tau=0}^{2^{2j+1}-1} \frac{1}{2^{2j+1}+\tau} + \sum_{\tau=0}^{P-2^{2s+1}} \frac{1}{2^{2s+1}+\tau} \right) =$$
$$= \frac{1}{\ln P} \sum_{j=0}^{s-1} \ln \frac{2^{2j+2}-1}{2^{2j+1}} + O\left(\frac{1}{\ln P}\right) =$$
$$= \frac{s \ln 2}{\ln P} + O\left(\frac{1}{\ln P}\right) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\ln P}\right).$$

Если $2^{2s} \leqslant P \leqslant 2^{2s+1}-1$, то

$$\frac{1}{\ln P} \sum_{\substack{n \leqslant P \\ n \in \mathfrak{M}}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\ln P} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{\tau=0}^{2^{2j+1}} \frac{1}{2^{2j+1}+\tau} = \frac{s \ln 2}{\ln P} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\ln P}\right).$$

Покажем, что множество $\mathfrak{M}$ неизмеримо в отношении асимптотической плотности. Мы имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{2k}-1} \sum_{\substack{n \leqslant 2^{2k}-1 \\ n \in \mathfrak{M}}} 1 = \lim_{k\to\infty} \frac{2+2^3+\ldots+2^{2k-1}}{2^{2k-1}} = \frac{2}{3},$$

в то время как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} \sum_{\substack{n \leqslant 2^{2k+1} \\ n \in \mathfrak{M}}} 1 = \lim_{k\to\infty} \frac{2\,\frac{4^k-1}{3}+1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{3}.$$

Теперь приведем пример счетно-аддитивной функции, определенной на подмножествах натурального ряда. Зададим $\sigma_0 > 1$. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество натуральных чисел. Определим функцию множества $\operatorname{mes}_{\sigma_0}\mathfrak{M}$:

$$\operatorname{mes}_{\sigma_0}\mathfrak{M} = \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \sum_{n \in \mathfrak{M}} \frac{1}{n^{\sigma_0}},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана. В силу абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{n \in \mathfrak{M}} \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ эта функция множеств обладает свойством полной (счетной) аддитивности. Таким образом, мы имеем дело с мерой. Мера всего множества натуральных чисел равна 1. Мера множества, состоящего из какого-либо одного числа, не равна нулю. Любое множество натуральных чисел измеримо.

Интеграл от функции натурального аргумента $f(n)$ определяем по формуле

$$\int f(n)\, d \operatorname{mes}_{\sigma_0} = \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\sigma_0}}.$$

3.2. Теорема Винтнера

Всякую функцию натурального аргумента $f(n)$ можно представить в виде

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \Phi(d);$$

функция $\Phi(d)$ определяется по формуле обращения Мёбиуса — Чебышева

$$\Phi(n)=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d).$$

Сформулируем и докажем следующую теорему Винтнера о сумматорных формулах для арифметических функций (А. Винтнер [155], стр. 180).

Теорема 1. *Пусть в представлении функции натурального аргумента* $f(n)$,

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\Phi(d),$$

функция $\Phi(d)$ *удовлетворяет условию, что ряд* $\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\Phi(d)}{d}$ *абсолютно сходится. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n)=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\Phi(d)}{d}.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}f(n)=\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\sum_{d\mid n}\Phi(d)=\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N}\Phi(d)\left[\frac{N}{d}\right]=$$

$$=\sum_{d\leqslant N}\frac{\Phi(d)}{d}+O\left(\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N}|\Phi(d)|\right)=$$

$$=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\Phi(d)}{d}+O\left(\sum_{d\geqslant N+1}\frac{|\Phi(d)|}{d}\right)+O\left(\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N}|\Phi(d)|\right),$$

ибо ряд $\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{|\Phi(d)|}{d}$ по условию сходится. Заметим, что из условия сходимости этого ряда вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N}|\Phi(d)|=0.$$

В самом деле, обозначим

$$B_k = \sum_{d=1}^{k} \frac{|\Phi(d)|}{d}.$$

Применяя преобразование Абеля, находим

$$\frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N} |\Phi(d)| = \frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N} d\,\frac{|\Phi(d)|}{d} = \frac{1}{N}\left(NB_n - \sum_{k=1}^{N-1} B_k\right) = $$
$$= B_N - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} B_k.$$

По условию есть такая постоянная $\varkappa$, что

$$\lim_{N\to\infty} B_n = \varkappa.$$

Хорошо известно, что если $\lim\limits_{N\to\infty} B_N = \varkappa$, то

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} B_k = \varkappa.$$

Следовательно,

$$B_N - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} B_k \to 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(n) = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\Phi(d)}{d} + o(1) + o(1) = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\Phi(d)}{d} + o(1)$$

(мы воспользовались тем, что $\sum\limits_{d\geqslant N+1} \frac{1}{d}\Phi(d)$ есть остаток сходящегося ряда). Теорема доказана.

Замечание. Покажем, что теорема Винтнера может быть получена как следствие тауберовой теоремы Икеара. Действительно, если

$$f(n) = \sum_{d\mid n} \Phi(d),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n^s}.$$

Условие, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n}$ абсолютно сходится, обеспечивает для функции

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n^s}$$

при $\operatorname{Re} s \to 1$ равномерную сходимость на любом конечном интервале к предельной функции. По теореме Икеара получаем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n}.$$

Теорема Винтнера может применяться не только к мультипликативным функциям. Рассмотрим, например, функцию

$$t(n) = \sum_{d \mid n} \frac{1}{2^d}.$$

По теореме Винтнера

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} t(n) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d 2^d} = \ln 2.$$

Про функции, удовлетворяющие условиям теоремы Винтнера, мы будем говорить, что они принадлежат классу Винтнера (классу W).

Нижеследующую теорему будем называть обобщенной теоремой Винтнера.

Теорема 2. *Пусть $g(n)$ и $h(n)$ — две функции натурального аргумента (вещественные или комплексные). Определим функцию*

$$f(n) = \sum_{d/n} h(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Тогда

1) *если* g *и* h — *мультипликативные функции, то и* f — *мультипликативная функция*;

2) *если существует предел* $M(g) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n\leqslant N} g(n)$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n}$ *сходится, то существует предел* $M(f) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n\leqslant N} f(n)$ *и*

$$M(f) = M(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n}.$$

Докажем первое утверждение теоремы. Если $(n, m) = 1$, то

$$f(nm) = \sum_{d\mid nm} h(d)\, g\left(\frac{nm}{d}\right) = \sum_{d_1\mid n} \sum_{d_2\mid m} h(d_1 d_2)\, g\left(\frac{n}{d_1} \frac{m}{d_2}\right) = \sum_{d_1\mid n} \sum_{d_2\mid m} h(d_1)\, g\left(\frac{n}{d_1}\right) h(d_2)\, g\left(\frac{m}{d_2}\right) = f(n) f(m).$$

Докажем второе утверждение:

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{n\leqslant x} \sum_{d\mid n} h(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d\leqslant x} h(d) \sum_{m\leqslant \frac{x}{d}} g(m).$$

Пусть

$$\sum_{n\leqslant x} g(n) = M(g)\, x + x\eta(x);$$

$\eta(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Значит, $\eta(x)$ ограничена:

$$|\eta(x)| \leqslant H.$$

Мы имеем

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{d\leqslant x} h(d)\left[M(g)\frac{x}{d} + \frac{x}{d}\eta\left(\frac{x}{d}\right)\right].$$

Отсюда

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) = M(g)\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n} + \sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\eta\left(\frac{x}{n}\right).$$

Достаточно доказать, что $\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\eta\left(\frac{x}{n}\right)$ стремится к нулю, когда x стремится к бесконечности.

Пусть задано $\varepsilon > 0$, существует $x_0 = x_0(\varepsilon) > 1$ такое, что

$$|\eta(x)| \leqslant \varepsilon$$

для $x \geqslant x_0$. При $x \geqslant x_0$

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\eta\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{n\leqslant \frac{x}{x_0}}\left|\frac{h(n)}{n}\eta\left(\frac{x}{n}\right)\right| +$$

$$+\left|\sum_{\frac{x}{x_0}<n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\eta\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon\sum_{n\leqslant\frac{x}{x_0}}\frac{|h(n)|}{n} + H\sum_{\frac{x}{x_0}<n\leqslant x}\frac{|h(n)|}{n}.$$

По критерию Коши

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n}\eta\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|h(n)|}{n}.$$

Теорема доказана.

Теорема 1′. *Пусть в представлении функции натурального аргумента $f(n)$,*

$$f(n) = \sum_{d\mid n}\Phi(d),$$

функция $\Phi(d)$ удовлетворяет условию, что ряд $\sum\limits_{d=1}^{\infty}\frac{\Phi(d)}{d}$ абсолютно сходится. Пусть a и q — натуральные числа и $(a, q) = 1$. Тогда

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\,e^{2\pi i\frac{a}{q}m} = \frac{1}{q}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\Phi(qt)}{t}.$$

Доказательство.

$$\sum_{m=1}^{N} f(m)\, e^{2\pi i \frac{a}{q} m} = \sum_{m \leqslant N} \left(\sum_{d \mid m} \Phi(d) \right) e^{2\pi i \frac{a}{q} m} =$$

$$= \sum_{d=1}^{N} \Phi(d) \sum_{l < N/d} e^{2\pi i \frac{ad}{q} l} =$$

$$= \sum_{\substack{d \equiv 0 \pmod q \\ d \leqslant N}} \Phi(d) \left[\frac{N}{d} \right] + O\left(\sum_{d \leqslant N} \frac{|\Phi(d)|}{\left(\frac{ad}{q} \right)} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{d \equiv 0 \pmod q \\ d \leqslant N}} \Phi(d) \left[\frac{N}{d} \right] + \sum_{r=1}^{q-1} \frac{1}{\left(\frac{ar}{q} \right)} O\left(\sum_{d \leqslant N} |\Phi(d)| \right)$$

(через (α) обозначено расстояние от α до ближайшего к нему целого числа). Окончание доказательства проводится, как в теореме 1.

Теорема 1″. *Пусть на функцию натурального аргумента $f(n)$ наложено то же условие, что и в теореме 1′. Пусть q — натуральное число. Для любого натурального l, $1 \leqslant l \leqslant q$,*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv l \pmod q}}^{N} f(m) =$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{d \mid q} \frac{\varphi(d)}{\varphi\left(\frac{d}{(l, d)} \right)} \mu\left(\frac{d}{(l, d)} \right) \frac{1}{d} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\Phi(dt)}{t}.$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее выражение для суммы Рамануджана $S(q, m)$.

Лемма.

$$S(q, m) = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q-1 \\ (a, q)=1}} e^{2\pi i \frac{m}{q} a} = \frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{(m, q)} \right)} \mu\left(\frac{q}{(m, q)} \right).$$

Докажем лемму. Обозначим

$$f_m^*(x) = \begin{cases} x, & x \mid m, \\ 0, & x \nmid m. \end{cases}$$

Вычислим сумму

$$\sum_{q' \mid q} S(q', m) = \sum_{q' \mid q} \sum_{\substack{1 \leqslant t \leqslant q'-1 \\ (t, q')=1}} e^{2\pi i \frac{mt}{q'}} = \sum_{a=1}^{q} e^{2\pi i \frac{am}{q}} =$$

$$= \begin{cases} q, & \text{если } q \mid m, \\ 0, & \text{если } q \nmid m. \end{cases}$$

Значит,

$$\sum_{q' \mid q} S(q', m) = f_m^*(q).$$

Отсюда по формуле обращения получаем

$$S(q, m) = \sum_{q' \mid q} \mu\left(\frac{q}{q'}\right) f_m^*(q') = \sum_{q' \mid (q, m)} \mu\left(\frac{q}{q'}\right) q'.$$

В частности, $S(q, 1) = \mu(q)$. Обозначим $(m, q) = d$. Ясно, что

$$\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q-1 \\ (a, q)=1}} e^{2\pi i \frac{m}{q} a} = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q-1 \\ (a, q)=1}} e^{2\pi i \frac{m'}{q'} a},$$

где обозначено $m' = m/d$, $q' = q/d$; значит, $(m', q') = 1$. Сравнение

$$m'x \equiv l \pmod{q'},$$

где $(q', m') = 1$, имеет одно решение: $x = a_1$, $(a_1, q') = 1$. Это решение дает следующий ряд решений по модулю $q = q'd$:

$$a_1,\ a_1 + q',\ \ldots,\ a_1 + (d-1)q'. \tag{1}$$

Покажем, что в этом ряду есть точно $\varphi(q)/\varphi(q')$ чисел, взаимно простых с d. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — простые числа, входящие в q; $p_1, p_2, \ldots, p_t$ — те из них, которые входят в q'. Числа ряда (1) пробегают $d/p_1 \ldots p_t$ полных систем вычетов по модулю $p_1p_2 \ldots p_t$; число тех из них, которые взаимно просты с $p_1p_2 \ldots p_t$, равно

$$\varphi(p_1p_2 \ldots p_t) \frac{d}{p_1 \ldots p_t} = \frac{\varphi(q)}{\varphi(q')}.$$

Итак,

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q-1\\(a,\,q)=1}} e^{2\pi i\frac{m'}{q'}a}=\frac{\varphi(q)}{\varphi(q')}\sum_{(a,\,q')=1} e^{2\pi i\frac{a}{q'}}=$$

$$=\frac{\varphi(q)}{\varphi(q')}S(q',\,1)=\frac{\varphi(q)}{\varphi(q')}\mu(q').$$

Значит,

$$S(a,\,q)=\frac{\varphi(q)}{\varphi(q')}\mu(q'),$$

и лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1″. Мы имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{m\equiv l\,(\mathrm{mod}\,q)\\m\leqslant N}} f(m)=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{m-l}{q}s}=$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{s}{q}l}\,\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\,e^{2\pi i\frac{s}{q}m}.$$

Обозначим $q/(s,\,q)=d_s$, $s/(s,\,q)=t_s$. Тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{m\equiv l\,(\mathrm{mod}\,q)\\m\leqslant N}} f(m)=\frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{t_s}{d_s}l}\,\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\,e^{2\pi i\frac{t_s}{d_s}m}.$$

Отсюда

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{m\equiv l\,(\mathrm{mod}\,q)\\m\leqslant N}} f(m)=\frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} e^{-2\pi i\frac{t_s}{d_s}l}\,\frac{1}{d_s}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\Phi(d_s t)}{t},$$

или

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{m\equiv l\,(\mathrm{mod}\,q)\\m\leqslant N}} f(m)=\frac{1}{q}\sum_{d\mid q}\Biggl(\sum_{(d,\,t)=1} e^{-2\pi i\frac{t}{d}l}\Biggr)\frac{1}{d}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\Phi(dt)}{t}=$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{d\mid q}\frac{\varphi(d)}{\varphi\left(\dfrac{d}{(l,\,d)}\right)}\mu\left(\frac{d}{(l,\,d)}\right)\frac{1}{d}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\Phi(dt)}{t}.$$

Теорема 1″ доказана.

3.3. Почти периодические функции натурального аргумента

Во введении мы коснулись аналогии между теорией чисел и анализом. Теперь остановимся на ней более детально.

Аналогом равномерно непрерывных функций являются функции натурального аргумента $f(n)$, которые обладают следующим свойством: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что при $N \geqslant N(\varepsilon)$ и

$$a \equiv b \pmod{N!}$$

$$|f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Класс таких функций назовем полиадически непрерывными.

Приведем в качестве примера полиадически непрерывную функцию

$$f(n) = \frac{\varphi(n)\,\sigma(n)}{n^2}.$$

В самом деле, если каноническое разложение n имеет вид

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s},$$

то

$$f(n) = \frac{\varphi(n)\,\sigma(n)}{n^2} = \prod_{i=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left(1 + \frac{1}{p_i} + \ldots + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) = \prod_{i=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}\right).$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и положим $k = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right] + 1$. Найдется такое $N_0(\varepsilon)$, что если $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ и

$$a \equiv b \pmod{N!},$$

то простые числа, меньшие k, входящие в каноническое разложение a и b, одни и те же. Пусть

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s},$$

$$b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_1} \ldots q_r^{\beta_r};$$

тогда

$$\left|\frac{\varphi(a)\sigma(a)}{a^2}-\frac{\varphi(b)\sigma(b)}{b^2}\right|=$$

$$=\left|\prod_{p_i\mid a}\left(1-\frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}\right)-\prod_{q_i\mid b}\left(1-\frac{1}{q_i^{\beta_i+1}}\right)\right|\leqslant\sum_{n=k}^{\infty}\frac{2}{n^2}\leqslant\frac{3}{k}\leqslant\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Мы говорили об аналоге понятия меры на множестве натуральных чисел, в частности, вводили псевдомеру — асимптотическую плотность

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\in\mathfrak{M}}}1.$$

Рассмотрим какую-либо функцию натурального аргумента $f(n)$. Среднее значение этой функции по числам $1, 2, \ldots, N$, т. е. выражение

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n),$$

можно рассматривать как аналог интегральной суммы функции $f(n)$, в которой «отрезок интегрирования» разбит на интервалы одинаковой длины $1+Nx, 2+Nx, \ldots \ldots, N+Nx$. Теорема о существовании предела для функций $f(n)$ какого-либо класса

$$\lim_{N\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(N)}{N}$$

становится аналогом теоремы о существовании интеграла Римана.

По аналогии с доказательством теоремы о существовании интеграла от непрерывной функции можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для полиадически непрерывных функций $f(n)$ существует предел*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(N)}{N}.$$

Более широким классом, нежели полиадически непрерывные функции, являются функции, хорошо приближающиеся периодическими функциями. Функцию $f(n)$ натурального аргумента назовем хорошо приближающейся периодическими функциями, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется периодическая с натуральным периодом A функция $f(n, A)$ такая, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n) - f(n, A)| \leqslant \varepsilon.$$

Класс функций, хорошо приближающихся периодическими функциями, является вариантом класса почти периодических функций Безиковича. Мы будем обозначать класс функций, хорошо приближающихся периодическими функциями, через B^1.

Ясно, что всякая периодическая с целым периодом (обозначим этот период через A) функция $f(n)$ принадлежит классу B^1; можно взять

$$f(n, A) = f(n).$$

Покажем, что класс функций B^1 включает в себя класс функций, удовлетворяющих условию теоремы Винтнера (будем, как и выше, класс функций, удовлетворяющих условию теоремы Винтнера, называть классом Винтнера и обозначать буквой W). Именно справедливо утверждение:

Лемма. *Представим функцию натурального аргумента $f(n)$ в виде*

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \Phi(d).$$

Предположим, что функция $\Phi(d)$ удовлетворяет условию: ряд

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d}$$

абсолютно сходится. Тогда функция $f(n)$ принадлежит классу B^1.

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — первые l простых чисел натурального ряда. Обозначим через $\mathfrak{M}_l$

множество натуральных чисел n, имеющих такой вид:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}, \qquad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant l.$$

Мы видим, что множество $\mathfrak{M}_l$ содержит число 1. Зададим $\varepsilon > 0$; поскольку ряд $\sum\limits_{d=1}^{\infty} \frac{|\Phi(d)|}{d}$ сходится, то найдется такое l_0, что при $l \geqslant l_0$

$$\sum_{d \notin \mathfrak{M}_l} \frac{|\Phi(d)|}{d} < \varepsilon.$$

Определим функцию $f_\varepsilon(n)$ равенством

$$f_\varepsilon(n) = \sum_{\substack{d \in \mathfrak{M}_l \\ d \mid n}} \Phi(d).$$

Ясно, что $f_\varepsilon(n)$ — периодическая функция с периодом n_0, где

$$n_0 = p_1^l p_2^l \ldots p_l^l.$$

Мы имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |f(n) - f_\varepsilon(n)| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \notin \mathfrak{M}_l}} |\Phi(d)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{\substack{d \notin \mathfrak{M}_l \\ d \leqslant N}} |\Phi(d)| \left[\frac{N}{d}\right] \leqslant \sum_{d \notin \mathfrak{M}_l} \frac{|\Phi(d)|}{d} \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |f(n) - f_\varepsilon(n)| \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Итак, всякая функция, принадлежащая классу W, входит и в класс B^1. Мы сейчас построим примеры функций, принадлежащих классу B^1, но не принадлежащих классу Винтнера, т. е. установим, что класс B^1 шире, нежели класс W.

Теорема 2*). *Характер второго рода по любому модулю не принадлежит классу W.*

Доказательство. Пусть $\chi^{(2)}(n)$ — характер второго рода по модулю m. Положим

$$\chi^{(2)}(n)=\sum_{d\mid n}\Phi(d).$$

Тогда, пользуясь обращением Мёбиуса и учитывая мультипликативность функции $\chi^{(2)}(n)$, получаем

$$\Phi(n)=\prod_{p\mid n}\left(\chi^{(2)}\left(p^{\alpha_p(n)}\right)-\chi^{(2)}\left(p^{\alpha_p(n)-1}\right)\right)$$

$(\Phi(1)=1)$. Замечая, далее, что

$$\chi_0(n)\,|\,\Phi(n)\,|=\chi_0(n)\prod_{p\mid n}\left(1-\chi^{(2)}(p)\right)$$

($\chi_0(n)$ — главный характер), находим

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{|\,\Phi(n)\,|}{n}\geqslant\sum_{n\leqslant x}\frac{\chi_0(n)\,|\,\Phi(n)\,|}{n}>\sum_{\substack{\chi^{(2)}(p)=-1\\ p\leqslant x}}\frac{1}{p}=$$
$$=\frac{k}{\varphi(m)}\ln\ln x+O(1)$$

(теорема о распределении простых чисел в арифметической прогрессии $mq+a$), где k — число классов приведенной системы вычетов по модулю m, для вычетов которых $\chi^{(2)}(p)$ принимает значение, равное -1. Тот факт, что $k>0$, следует из свойства квадратичных характеров (см. Б. А. Венков [12], стр. 24). Теорема доказана.

Поскольку $\chi^{(2)}(n)$ — периодическая функция, то функция $\chi^{(2)}(n)$ принадлежит классу B^1.

Рассмотрим функцию $r(n)$. Мы покажем, что для любой ограниченной функции $f(n)$ выполняется соотношение

$$\varliminf_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|\,r(n)-f(n)\,|\geqslant\pi,$$

из которого следует, что $r(n)$ не принадлежит классу B^1. Обозначим через $b(n)$ функцию, определенную

*) Пример из работы Д. С. Мустафина [44].

следующим образом:

$$b(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ представимо в виде суммы двух квадратов,} \\ 0, & n \text{ непредставимо в виде суммы двух квадратов.} \end{cases}$$

Пусть $|f(n)| \leqslant M$. Мы имеем

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |r(n) - f(n)| \geqslant \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} b(n) |r(n) - f(n)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{x} \left(\sum_{n \leqslant x} r(n) - \sum_{n \leqslant x} b(n) |f(n)| \right) \geqslant \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} r(n) - \frac{M}{x} \sum_{n \leqslant x} b(n).$$

Так как сумма $\sum\limits_{n \leqslant x} r(n)$ есть количество целых точек в круге радиуса $\sqrt{x}$, то

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} r(n) = \pi + o(1).$$

В предисловии мы говорили о теореме Ландау (Э. Ландау [132])

$$\sum_{n \leqslant x} b(n) \sim A \frac{x}{\sqrt{\ln x}},$$

из которой следует, что

$$\sum_{n \leqslant x} b(n) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right).$$

Это дает

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |r(n) - f(n)| \geqslant \pi + o(1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right),$$

откуда и следует наше утверждение.

П. Эрдёш и А. Винтнер [110] установили, что функция Мёбиуса $\mu(n)$ не принадлежит классу B^1. В основе их рассуждений лежит следующее неравенство Дэвенпорта (см. Г. Дэвенпорт [98]): при любом $h > 0$ равномерно по θ

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) e^{2\pi i n\theta} = O\left(\frac{x}{\ln^h x}\right).$$

Обозначим

$$M(x, A) = \sum_{m+Aj \leqslant x} \mu(m + Aj).$$

Известно (см. А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник [19], стр. 86), что асимптотический закон распределения простых чисел в арифметической прогрессии можно вывести из следующего утверждения, которое мы будем называть слабой формой асимптотического закона распределения простых чисел в арифметической прогрессии.

Лемма. *Если* $d_m = (m, A) = 1$, *то*

$$M(x, A) = o(x).$$

Легко видеть, что неравенство Дэвенпорта есть обобщение и усиление этого утверждения.

Пользуясь слабой формой асимптотического закона распределения простых чисел в арифметической прогрессии, мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Каково бы ни было натуральное число A и периодическая с целым периодом A функция натурального аргумента $f(n, A)$,*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |\mu(n) - f(n, A)| \geqslant \frac{3}{\pi^2}.$$

Доказательство. Очевидная проверка убеждает нас в том, что

$$\frac{\mu^2(n) + \mu(n)}{2} = \begin{cases} 0, & \mu(n) = 0, \\ 0, & \mu(n) = -1, \\ 1, & \mu(n) = 1, \end{cases}$$

$$\frac{\mu^2(n) - \mu(n)}{2} = \begin{cases} 0, & \mu(n) = 0, \\ 1, & \mu(n) = -1, \\ 0, & \mu(n) = 1. \end{cases}$$

Пусть A — натуральное число, $f(n, A)$ — периодическая с периодом A функция натурального аргумента. Обозначим

$$f(1, A) = a_1, \quad f(2, A) = a_2, \ \ldots, \ f(A, A) = a_A.$$

Мы имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|\mu(n)-f(n, A)|\geqslant\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{A\left[\frac{N}{A}\right]}|\mu(n)-f(n, A)|=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{A}\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{A}\right]-1}|\mu(m+Aj)-a_m|.$$

Обозначим вещественную часть a_m через $\operatorname{Re}a_m$. Если $\operatorname{Re}a_m>0$, то

$$|\mu(m+Aj)-a_m|\geqslant\frac{\mu^2(m+Aj)-\mu(m+Aj)}{2}.$$

Если $\operatorname{Re}a_m<0$, то

$$|\mu(m+Aj)-a_m|\geqslant\frac{\mu^2(m+Aj)+\mu(m+Aj)}{2}$$

и

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f(n)-f(n, A)|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2N}\sum_{m=1}^{A}\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{A}\right]-1}\mu^2(m+Aj)+\frac{1}{2N}\sum_{m=1}^{A}\left(\pm_m\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{A}\right]}\mu(m+Aj)\right)=$$

$$=\frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{A\left[\frac{N}{A}\right]}\mu^2(n)+\frac{1}{2N}\sum_{m=1}^{A}\left(\pm_m\sum_{j=0}^{\left[\frac{N}{A}\right]-1}\mu(m+Aj)\right);$$

$\pm_m$ означает, что знак «$+$» или «$-$» берется в зависимости от знака $\operatorname{Re}a_m$.

Мы говорили о слабой форме асимптотического закона: если $d_m=(m, A)=1$, то

$$M(x, A)=\sum_{m+Aj\leqslant x}\mu(m+Aj)=o(x).$$

Легко видеть, что ограничение $d_m=1$ несущественно. Если $\mu(d_m)=0$, то при каждом j $\mu(m+Aj)=0$ и оценка

$$\sum_{m+Aj\leqslant x}\mu(m+Aj)=o(x)$$

выполняется автоматически. Если $\mu(d_m) \neq 0$,

$$\sum_{m+Aj \leqslant x} \mu(m+Aj) = \sum_{j_0=1}^{d_m} \sum_{m+Aj_0+Ad_mt \leqslant x} \mu(m+Aj_0+Ad_mt) =$$

$$= \sum_{\substack{j_0=1 \\ \left(\frac{m+Aj_0}{d_m},\, d_m\right)=1}}^{d_m} \sum_{m+Aj_0+Ad_mt \leqslant x} \mu\left(\frac{m+Aj_0}{d_m}+At\right) = o(x).$$

Итак,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |\mu(n) - f(n, A)| \geqslant \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{A\left[\frac{N}{A}\right]} \mu^2(n) + o(1) =$$

$$= \frac{1}{2N}\left(\frac{6}{\pi^2}N + O\left(\sqrt{N}\right)\right) + o(1) = \frac{3}{\pi^2} + o(1).$$

Это и доказывает теорему.

Содержание теории функций класса B^1 состоит в обобщении на них свойств периодических функций.

Докажем несколько теорем про сумматорные формулы и распределение значений функций класса B^1.

Теорема 4. *Для всякой функции $f(n)$ класса B^1 существует предел*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n).$$

Доказательство. Докажем существование предела на основе признака сходимости Коши. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такую периодическую функцию $f_\varepsilon(n)$, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n) - f_\varepsilon(n)| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем натуральные числа N_1 и N_2:

$$\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} f(n) = \frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} f_\varepsilon(n) + \frac{\theta_1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} |f(n) - f_\varepsilon(n)|, \qquad |\theta_1| \leqslant 1;$$

$$\frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2} f(n) = \frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2} f_\varepsilon(n) + \frac{\theta_2}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2} |f(n) - f_\varepsilon(n)|, \qquad |\theta_2| \leqslant 1.$$

Отсюда

$$\left|\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} f(n)-\frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2} f(n)\right| \leqslant \left|\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} f_\varepsilon(n)-\frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2} f_\varepsilon(n)\right| + \\ +\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1}|f(n)-f_\varepsilon(n)|+\frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2}|f(n)-f_\varepsilon(n)|.$$

Так как существует предел $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n\leqslant N} f_\varepsilon(n)$ (функция $f_\varepsilon(n)$ периодическая), то по необходимому признаку Коши при $N_1\geqslant N_0(\varepsilon)$ и $N_2\geqslant N_0(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} f_\varepsilon(n)-\frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2} f_\varepsilon(n)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Далее, так как

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\,\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|f(n)-f_\varepsilon(n)|\leqslant\varepsilon,$$

то при $N_1\geqslant \overline{N}_0(\varepsilon)$ и $N_2\geqslant \overline{N}_0(\varepsilon)$

$$\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1}|f(n)-f_\varepsilon(n)|\leqslant 2\varepsilon,$$

$$\frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2}|f(n)-f_\varepsilon(n)|\leqslant 2\varepsilon.$$

Таким образом, при

$$N_1\geqslant \max(N_0(\varepsilon),\ \overline{N}_0(\varepsilon)),$$

$$N_2\geqslant \max(N_0(\varepsilon),\ \overline{N}_0(\varepsilon))$$

$$\left|\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} f(n)-\frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2} f(n)\right|\leqslant\varepsilon+2\varepsilon+2\varepsilon=5\varepsilon.$$

В силу критерия Коши существует предел $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n\leqslant N} f(n)$.

Теорема доказана.

Теория средних значений арифметических функций — исходный пункт для дальнейших построений. Сейчас мы будем устанавливать теоремы о существовании пределов вида

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}F(f(n)).$$

Докажем следующую основную теорему *).

Теорема 5а. *Пусть $f(n)$ — функция из класса B^1. Предположим, что она ограничена и ее значения принадлежат конечному отрезку $[A, B]$. Пусть $F(x)$ — непрерывная на отрезке $[A, B]$ функция. Тогда существует предел*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}F(f(n)).$$

Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция $f(n)$ принадлежит классу B^1. Пусть, далее, функция $F(x)$ задана на $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет на этом участке условию Липшица первого порядка*

$$|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|.$$

Тогда функция $F(f(n))$ тоже принадлежит классу B^1.

Доказательство. Наряду с функцией $F(f(n))$ рассмотрим функцию $F(f_{\varepsilon/C}(n))$, где C — константа в условии Липшица, $f_{\varepsilon/C}(n)$ — обозначение, которое использовалось в доказательстве теоремы 4. Очевидно, что $F(f_{\varepsilon/C}(n))$ — периодическая функция. Далее,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|F(f(n))-F(f_{\varepsilon/C}(n))|\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{C}{N}\sum_{n\leqslant N}|f(n)-f_{\varepsilon/C}(n)|\leqslant C\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon.$$

Лемма доказана.

---

*) Другим путем этот результат получен в статье Е. В. Новоселова [51], п. 26, п. 19.

Доказательство теоремы. Предположим, что $F(x)$ — непрерывная на отрезке $[A, B]$ функция, удовлетворяющая условию Липшица первого порядка

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|.$$

Доопределим $F(x)$ на $(-\infty, A)$ и (B, ∞):

$$F(x) = F(A) + \operatorname{arctg}(x - A), \qquad -\infty < x \leqslant A;$$
$$F(x) = F(B) + \operatorname{arctg}(x - B), \qquad B \leqslant x < \infty.$$

Ясно, что так доопределенная функция непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \max(1, C)|x_1 - x_2|.$$

Функция $F(f(n))$ является функцией из класса B^1 (по лемме). Значит, существует (по теореме 4) предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} F(f(n)).$$

Мы замечаем, что доопределение функции не имеет никакого значения для суммы $\sum\limits_{n\leqslant N} F(f(n))$, ибо $A \leqslant f(n) \leqslant B$.

Предположим сначала, что функция $F(x)$ лишь непрерывна на отрезке $[A, B]$. Тогда она равномерно непрерывна на этом отрезке, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N_0 = N_0(\varepsilon)$, что если мы разобьем отрезок $[A, B]$ на части длины $(B - A)/N_0(\varepsilon)$, то для двух точек x' и x'', принадлежащих одной части,

$$|F(x') - F(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

Заменим кривую $y = F(x)$ ломаной, соединяющей точки

$$\left(A + k\frac{B-A}{N_0},\quad F\left(A + k\frac{B-A}{N_0}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, N_0.$$

Пусть уравнение этой ломаной задано функцией $y = F_\varepsilon(x)$. Ясно, что

$$|F(x) - F_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon;$$

$F_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Липшица (с константой, зависящей от ε). Поэтому существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} F_\varepsilon(f(n)).$$

Далее,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} |F(f(n)) - F_\varepsilon(f(n))| < \varepsilon.$$

Повторяя рассуждения, которые мы приводили при доказательстве теоремы 4, мы получим нужное нам утверждение.

Теорема 5б. *Представим функцию $f(n)$ натурального аргумента в виде*

$$f(n) = \sum_{d\mid n} \Phi(d);$$

предположим, что ряд $\sum \frac{\Phi(d)}{d}$ абсолютно сходится. Далее предположим, что значения функции $f(n)$ расположены на конечном отрезке $[A, B]$. Пусть $F(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[A, B]$. Тогда существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} F(f(n)).$$

Теорема 5б — непосредственное следствие теоремы 5а.

Теорему 5а и теорему 5б будем называть теоремами Новоселова.

Методом, предложенным Е. В. Новоселовым (см. М. М. Тян [65], теорема 5), мы докажем следующий результат.

Теорема 5в. *Обозначим через $t_3(n)$*

$$t_3(n) = \sum_{d\mid n} \frac{1}{d^2+1}.$$

Значения $t_3(n)$ находятся на отрезке $[1/2, \alpha]$, где $\alpha = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2+1}$. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условию

Липшица первого порядка на отрезке $[1/2, \alpha]$. *Существует такое число* $A(F)$, *что*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} F(t_3(n)) = A(F) + O\left(\frac{1}{\ln^2 N}\right).$$

Доказательство. Обозначим через T_N общее наименьшее кратное чисел $1, 2, \ldots, [(1-\beta)\ln N]$, где β фиксировано, $0<\beta<1$. Поскольку

$$\ln T_N = \sum_{n=1}^{[(1-\beta)\ln N]} \Lambda(n),$$

то по асимптотическому закону распределения простых чисел

$$T_N \leqslant N^{(1-\beta)(1+o(1))}.$$

Разделим N на T_N с остатком $N = R_N + \theta T_N$, $0 \leqslant \theta < 1$. Далее обозначим через $R_N(m)$ положительный остаток от деления натурального числа m на R_N, $1 \leqslant R_N(m) \leqslant R_N$. Полагая

$$f(m) = F(t_3(m)) \quad \text{и} \quad M = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |F(x)|,$$

будем иметь

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\right| =$$

$$= \left|\left(1-\frac{R_N}{N}\right)\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m) - \frac{1}{N}\sum_{m=R_N+1}^{N} f(m)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{R_N}{N}\right)M + \frac{1}{N}(N-R_N)M \leqslant \frac{M}{N^{\beta(1+o(1))}}.$$

Поскольку функция $f(R_N(m))$ периодическая с периодом R_N, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(R_N(m)) = \frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m).$$

По предположению $|F(x_1)-F(x_2)|<C|x_1-x_2|$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m)-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m)\right| =$$

$$=\left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T}\left(f(R_N(m))-f(m)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}|t_3(R_N(m))-t_3(m)| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\sum_{d\mid R_N(m)}\frac{1}{d^2+1}-\sum_{d\mid m}\frac{1}{d^2+1}\right|.$$

Поскольку R_N делится на T_N, которое в свою очередь делится на все натуральные числа n, $1\leqslant n\leqslant(1-\beta)\ln N$, то делители, не превосходящие $(1-\beta)\ln N$, у m и $R_N(m)$ одни и те же. Мы имеем

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m)-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\sum_{d\mid R_N(m)}\frac{1}{d^2+1}-\sum_{d\mid m}\frac{1}{d^2+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\left|\sum_{\substack{d\mid R_N(m)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d^2+1}-\sum_{\substack{d\mid m\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d^2+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\sum_{\substack{d\mid R_N(m)\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d^2+1}+\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{m=1}^{T}\sum_{\substack{d\mid m\\ d>(1-\beta)\ln N}}\frac{1}{d^2+1}.$$

Далее,

$$\left|\frac{1}{R_N}\sum_{m=1}^{R_N} f(m) - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{m=1}^{T} f(m)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T}\frac{1}{d^2+1}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant T\\ m=dx+R_N y\\ 1\leqslant dx\leqslant R_N}} 1 +$$

$$+ \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T}\frac{1}{d^2+1}\left[\frac{T}{d}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{C}{T}\sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T}\frac{1}{d^2+1}\sum_{x=1}^{\left[\frac{R_N}{d}\right]}\left(\left[\frac{T-dx}{R_N}\right]+1\right)+$$

$$+ C\sum_{d>(1-\beta)\ln N}\frac{1}{d^3} = O\left(\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T}\frac{1}{d^2+1}\sum_{x=1}^{\left[\frac{R_N}{d}\right]}\frac{T-dx}{R_N}\right)+$$

$$+ O\left(\frac{1}{\ln^2 N}\right) =$$

$$= O\left(\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T}\frac{1}{(d^2+1)R_N}\,\frac{T+T-d\left[\frac{R_N}{d}\right]}{2}\left[\frac{R_N}{d}\right]\right)+$$

$$+ O\left(\frac{1}{\ln^2 N}\right) = O\left(\overline{\lim_{T\to\infty}}\sum_{d>(1-\beta)\ln N}^{T}\frac{1}{d(d^2+1)}\right) + O\left(\frac{1}{\ln^2 N}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln^2 N}\right),$$

что и требовалось доказать.

Пусть $f(n)$ — вещественнозначная функция натурального аргумента. Пусть λ — фиксированное вещественное число. Обозначим через $P_N(f(n)<\lambda)$ количество натуральных чисел среди $1, 2, \ldots, N$, для которых $f(n)<\lambda$; далее обозначим

$$\nu_N(f(n)<\lambda) = \frac{P_N(f(n)<\lambda)}{N}.$$

Теорема 6а. *Пусть $f(n)$ — функция натурального аргумента, принадлежащая классу B^1. Тогда для всех вещественных λ, кроме, возможно, счетного множества, существует предел*

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N(f(n)<\lambda)=V(\lambda).$$

Для доказательства этой теоремы (предложенного Ю. В. Прохоровым в дополнении к книге М. Каца [30]) нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Дана последовательность вещественных чисел, расположенных на некотором конечном отрезке $[A, B]$:*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

Предположим, что для любой непрерывной на $[A, B]$ функции, удовлетворяющей условиям Липшица первого порядка, $F(x)$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} F(\alpha_n).$$

Тогда для всех чисел λ, принадлежащих отрезку $[A, B]$, возможно, за исключением счетного множества, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N(\alpha_n<\lambda)=V(\lambda).$$

Доказательство. Пусть λ — какое-либо число $A\leqslant\lambda\leqslant B$. Определим на $[A, B]$ функции

$$F_{\lambda,\varepsilon}(x)=\begin{cases} 1, & A\leqslant x\leqslant\lambda,\\ \text{линейная функция, равная 1 при } x=\lambda \text{ и 0 при } x=\lambda+\varepsilon, & \\ 0, & \lambda+\varepsilon\leqslant x\leqslant B; \end{cases}$$

$$F_{\lambda,-\varepsilon}(x)=\begin{cases} 1, & A\leqslant x\leqslant\lambda-\varepsilon,\\ \text{линейная функция, равная 1 при } x=\lambda-\varepsilon \text{ и 0 при } x=\lambda, & \\ 0, & \lambda\leqslant x\leqslant B. \end{cases}$$

Это непрерывные функции, удовлетворяющие условию Липшица. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} F_{\lambda,\,\varepsilon}(\alpha_n) = W_\varepsilon(\lambda),$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} F_{\lambda,\,-\varepsilon}(\alpha_n) = W_{-\varepsilon}(\lambda).$$

Так как $W_\varepsilon(\lambda) \geqslant W_{-\varepsilon}(\lambda)$ и при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

$$W_{\varepsilon_1}(\lambda) \geqslant W_{\varepsilon_2}(\lambda), \quad W_{-\varepsilon_1}(\lambda) \leqslant W_{-\varepsilon_2}(\lambda),$$

то при $\varepsilon \to 0$ существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon(\lambda) = W_+(\lambda),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} W_{-\varepsilon}(\lambda) = W_-(\lambda).$$

Очевидно, что

$$W_+(\lambda) \geqslant \overline{\lim_{N\to\infty}}\, \nu_N(\alpha_n < \lambda) \geqslant \underline{\lim_{N\to\infty}}\, \nu_N(\alpha_n < \lambda) \geqslant W_-(\lambda). \quad (1)$$

Далее, ясно, что если $\lambda_1 > \lambda_2$, то $W_-(\lambda_1) \geqslant W_+(\lambda_2)$. Поэтому может быть самое большее счетное множество таких λ, где $W_+(\lambda)$ строго больше $W_-(\lambda)$. Действительно, пусть λ — такая точка, где $W_+(\lambda) > W_-(\lambda)$. Возьмем в интервале $(W_-(\lambda),\ W_+(\lambda))$ рациональное число $p(\lambda)$. Так как при $\lambda_1 > \lambda_2$ $W_-(\lambda_1) \geqslant W_+(\lambda_2)$, то точки $p(\lambda_1)$ и $p(\lambda_2)$ различны. Значит, точек, в которых $W_+(\lambda) > W_-(\lambda)$, не более, чем рациональных чисел, т. е. счетное множество. В силу неравенства (1) есть самое большее счетное множество точек λ, где

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \nu_N(\alpha_n < \lambda) \neq \underline{\lim_{N\to\infty}}\, \nu_N(\alpha_n < \lambda).$$

Для всех точек, не входящих в это счетное множество, положим

$$V(\lambda) = W_+(\lambda) = W_-(\lambda).$$

Лемма доказана.

Пусть функция $f(n)$ принадлежит классу B^1.

1) Предположим, что $f(n)$ ограничена и ее значения принадлежат отрезку $[A,\ B]$. Тогда для любой

непрерывной на отрезке $[A, B]$ функции $F(x)$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} F(f(n)).$$

Согласно лемме для всех λ, за исключением, возможно, счетного множества значений, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N(f(N)<\lambda).$$

2) Предположим, что $f(n)$ — неограниченная функция. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(n) = \operatorname{arctg} f(n).$$

Функция $F(n)$ принадлежит классу B^1 и, очевидно, ограничена. Действительно, пусть $f_\varepsilon(n)$ — такая периодическая функция, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} |f(n) - f_\varepsilon(n)| \leqslant \varepsilon.$$

Функция

$$F_\varepsilon(n) = \operatorname{arctg} f_\varepsilon(n)$$

периодическая. Из того, что

$$0 < (\operatorname{arctg} x)' \leqslant 1,$$

следует, что

$$|F(n) - F_\varepsilon(n)| \leqslant |f(n) - f_\varepsilon(n)|,$$

и, значит,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} |F(n) - F_\varepsilon(n)| \leqslant \varepsilon.$$

Мы видели, что для всех Λ из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, кроме, быть может, счетного множества, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N(\operatorname{arctg} f(n) < \Lambda).$$

Положим $\lambda = \operatorname{tg} \Lambda$. Интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ при преобразовании $\lambda = \operatorname{tg}\Lambda$ переходит во всю прямую $(-\infty, \infty)$. Значит, для всех λ, кроме, возможно, счетного множества значений, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N(\operatorname{tg}\operatorname{arctg} f(n) < \lambda) = \lim_{N\to\infty} \nu_N(f(n) < \lambda).$$

Теорема доказана.

Теорема 6б. *Представим функцию натурального аргумента $f(n)$ в виде*

$$f(n) = \sum_{d\mid n} \Phi(d);$$

предположим, что $f(n)$ — такая функция, что ряд

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d}$$

абсолютно сходится. Тогда для всех λ, кроме, возможно, счетного множества, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N(f(n) < \lambda).$$

Доказательство. Условие теоремы показывает, что функция $f(n)$ принадлежит классу B^1. Остается применить теорему 6а.

3.4. Независимые функции натурального аргумента

В § 3.1 мы ввели меру $\operatorname{mes}_{\sigma_0}\mathfrak{M}$ и псевдомеры: логарифмическую плотность $\operatorname{mes}_*\mathfrak{M}$ и асимптотическую плотность $D(\mathfrak{M})$. Теперь мы в состоянии построить аналоги теории независимых функций для функций натурального аргумента. К исследованию независимых функций применяются концепции и методы теории вероятностей.

Когда мы имеем дело с мерой $\operatorname{mes}_{\sigma_0}\mathfrak{M}$, то нет необходимости говорить об аналогии: функция множества $\operatorname{mes}_{\sigma_0}\mathfrak{M}$ есть мера, и мы имеем строгие основания для применения теорем теории вероятностей.

Пусть p и q — простые числа. Докажем, что множество чисел $\mathfrak{M}_p$, делящихся на p, и множество чисел $\mathfrak{M}_q$, делящихся на q, независимы. Мы имеем

$$\operatorname{mes}_{\sigma_0}\mathfrak{M}_p = \frac{1}{\zeta(\sigma_0)}\frac{1}{p^{\sigma_0}}\zeta(\sigma_0) = \frac{1}{p^{\sigma_0}}$$

и

$$\operatorname{mes}_{\sigma_0} \mathfrak{M}_q = \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \frac{1}{q^{\sigma_0}} \zeta(\sigma_0) = \frac{1}{q^{\sigma_0}},$$

далее,

$$\operatorname{mes}_{\sigma_0} (n\colon\ p \mid n,\ q \mid n) = \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \frac{1}{p^{\sigma_0}} \frac{1}{q^{\sigma_0}},$$

и, значит,

$$\operatorname{mes}_{\sigma_0} (n\colon\ p \mid n,\ q \mid n) = \operatorname{mes}_{\sigma_0} (n\colon\ p \mid n) \operatorname{mes}_{\sigma_0} (n\colon\ q \mid n).$$

Аналогичное утверждение справедливо для произвольного количества простых чисел.

Пусть t — фиксированное вещественное число. Определим для каждого простого p функцию

$$f_p(n) = e^{-it\alpha_p(n) \ln p}.$$

Для двух различных простых чисел p и q функции $f_p(n)$ и $f_q(n)$ независимы. Пусть δ_p — какое-либо значение, которое может принимать функция $f_p(n)$, а δ_q — какое-либо значение, которое может принимать функция $f_q(n)$. По определению

$$\operatorname{mes}_{\sigma_0} (n\colon\ f_p(n) = \delta_p) = \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \sum_{\alpha_p(m) = \alpha_p(n)} \frac{1}{m^{\sigma_0}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \frac{1}{p^{\sigma_0 \alpha_p(n)}} \sum_{(m,\ p)=1} \frac{1}{m^{\sigma_0}} = \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma_0}}\right) \frac{1}{p^{\sigma_0 \alpha_p(n)}}.$$

Далее,

$$\operatorname{mes}_{\sigma_0} (n\colon\ f_p(n) = \delta_p,\ f_q(n) = \delta_q) = \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \sum_{\substack{\alpha_p(m) = \alpha_p(n) \\ \alpha_q(m) = \alpha_q(n)}} \frac{1}{m^{\sigma_0}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \frac{1}{p^{\sigma_0 \alpha_p(n)}} \frac{1}{q^{\sigma_0 \alpha_q(n)}} \sum_{(m,\ p) = (n,\ q) = 1} \frac{1}{m^{\sigma_0}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta(\sigma_0)} \frac{1}{p^{\sigma_0 \alpha_p(n)}} \frac{1}{q^{\sigma_0 \alpha_q(n)}} \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma_0}}\right) \left(1 - \frac{1}{q^{\sigma_0}}\right) \zeta(\sigma_0) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma_0}}\right) \frac{1}{p^{\sigma_0 \alpha_p(n)}} \left(1 - \frac{1}{q^{\sigma_0}}\right) \frac{1}{q^{\sigma_0 \alpha_q(n)}} =$$

$$= \operatorname{mes}_{\sigma_0} (n\colon\ f_p(n) = \delta_p) \operatorname{mes}_{\sigma_0} (n\colon\ f_q(n) = \delta_q),$$

что и требовалось доказать.

Вычислим интеграл

$$\int f_p(n)\,d\,\mathrm{mes}_{\sigma_0}=\frac{1}{\zeta(\sigma_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_p(n)}{n^{\sigma_0}}=\frac{1}{\zeta(\sigma_0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-it\alpha_p(n)\ln p}}{n^{\sigma_0}}=$$

$$=\frac{1}{\zeta(\sigma_0)}\left(1+\frac{e^{-it\ln p}}{p^{\sigma_0}}+\frac{e^{-2it\ln p}}{p^{2\sigma_0}}+\ldots\right)\sum_{(n,p)=1}\frac{1}{n^{\sigma_0}}=\frac{1-\frac{1}{p^{\sigma_0}}}{1-\frac{1}{p^{\sigma_0+it}}}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(n)=e^{-it\ln n}.$$

Мы имеем

$$\int f(n)\,d\,\mathrm{mes}_{\sigma_0}=\frac{\zeta(\sigma_0+it)}{\zeta(\sigma_0)}.$$

Ясно, что

$$f(n)=\prod_p e^{-it\ln p\alpha_p(n)}=\prod_p f_p(n).$$

В теории вероятностей доказывается теорема о том, что математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий (см. Б. В. Гнеденко [20], стр. 183). Доказательство существенно опирается на счетную аддитивность меры. Применяя эту теорему, мы получаем доказательство классического тождества Эйлера в виде

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0+it}}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}}=\frac{\prod\limits_p\left(1-\frac{1}{p^{\sigma_0}}\right)}{\prod\limits_p\left(1-\frac{1}{p^{\sigma_0+it}}\right)}.$$

Приведем пример на применение центральной предельной теоремы теории вероятностей. Определим функцию натурального аргумента

$$f(n)=\ln n,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Так как натуральный ряд есть пространство с мерой, то мы можем рассматривать $f(n)$ как случайную величину ξ. Легко сосчитать математическое ожидание и дисперсию этой величины:

$$a = -\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)},$$

$$b^2 = \left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right)'\bigg|_{\sigma=\sigma_0}.$$

Так как при $\sigma > 1$

$$\left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\ln n}{n^{\sigma}},$$

то $b \neq 0$. Сложим n раз независимые величины ξ и обозначим

$$\zeta_n = \underbrace{\xi + \ldots + \xi}_{n \text{ раз}}.$$

Обозначим, как и обычно, через $\tau_n(N)$ количество решений в натуральных числах уравнения

$$N = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Величина ζ_n принимает значение $\ln N$, $N = 1, 2, \ldots$, с вероятностью, равной $\frac{\tau_n(N)}{\zeta^n(\sigma_0) N^{\sigma_0}}$. Среднее значение и дисперсия этого закона соответственно равны

$$-n\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \quad \text{и} \quad n\left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right)'\bigg|_{\sigma=\sigma_0}.$$

Центральная предельная теорема теории вероятностей нам дает:

Теорема. *Пусть $\sigma_0 > 1$ — любое фиксированное число. Обозначим*

$$b^2(\sigma_0) = \left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right)'\bigg|_{\sigma=\sigma_0}.$$

Пусть α и β — любые вещественные числа. При $n \to \infty$

$$\sum_{\substack{-\frac{n\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} + \alpha\sqrt{b^2(\sigma_0)n} \leqslant \\ \leqslant N \leqslant -\frac{n\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} + \beta\sqrt{b^2(\sigma_0)n}}} \frac{\tau_n(N)}{N^{\sigma_0}} \sim \zeta^n(\sigma_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Если мы обратимся теперь к вероятностным теоремам с асимптотической плотностью, то встретим затруднение, состоящее в том, что плотность $D(\mathfrak{M})$ не является счетно-аддитивной функцией множества. Однако с помощью дополнительных соображений эту трудность можно преодолеть. Приведем пример, заимствованный из книги М. Каца [31], стр. 27.

Теорема. *Обозначим через $\omega(n)$ количество всех простых чисел, входящих в каноническое разложение числа n. Имеет место формула*

$$\rho_k = D(\omega(n) - \nu(n) = k) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-e^{i\xi}}\right)\right)e^{-i\xi k}\,d\xi,$$

где произведение в подынтегральном выражении распространено на все простые числа.

Прежде чем доказывать эту теорему, приведем ее вероятностную интерпретацию.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — фиксированное конечное множество простых чисел, и пусть $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — фиксированный набор натуральных чисел. Как известно (И. М. Виноградов [15], стр. 36, задача 19а), количество чисел, не превосходящих

$$\frac{N}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}}$$

и взаимно простых с $p_1p_2\ldots p_r$, равно

$$\sum_{d\,|\,p_1\ldots p_r}\mu(d)\left[\frac{N}{p_1^{k_1}\ldots p_r^{k_r}d}\right].$$

При фиксированных $p_1, p_2, \ldots, p_r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ и $N\to\infty$ это выражение асимптотически эквивалентно

$$\frac{N}{p_1^{k_1}\ldots p_r^{k_r}}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right).$$

Таким образом,

$$D(\alpha_{p_1}(n) = k_1, \ldots, \alpha_{p_r}(n) = k_r) = \\ = \frac{1}{p_1^{k_1}\ldots p_r^{k_r}}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right).$$

Эту формулу можно трактовать как следующее утверждение: при любом конечном наборе простых чисел $p_1, \ldots, p_r$ и любом наборе неотрицательных целых чисел $k_1, \ldots, k_r$

$$D\left(\alpha_{p_1}(n) = k_1, \ldots, \alpha_{p_r}(n) = k_r\right) = \\ = D\left(\alpha_{p_1}(n) = k_1\right) \ldots D\left(\alpha_{p_r}(n) = k_r\right).$$

Мы видим, что функции $\alpha_{p_i}(n)$ ведут себя аналогично независимым случайным величинам, т. е. функции $\alpha_{p_i}(n)$ независимы.

Введем функции

$$\beta_{p_i}(n) = \begin{cases} \alpha_{p_i}(n) - 1, & \text{если} \quad \alpha_{p_i}(n) \geqslant 1, \\ 0; & \text{если} \quad \alpha_{p_i}(n) = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что из независимости функций $\alpha_{p_i}(n)$ следует, что функции $\beta_{p_i}(n)$ тоже независимы.

Заметим, что

$$\omega(n) - \nu(n) = \sum_p \beta_p(n), \tag{1}$$

где сумма распространена на все простые числа.

При проведении аналогии математическим ожиданием функции $f(n)$ естественно назвать среднее

$$M(f) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n),$$

если оно существует.

Вычислим среднее значение функции $e^{i\xi\beta_p(n)}$. Для этого определим функцию $h_p(n)$ условиями

$$h_p(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq p^\alpha, \quad \alpha > 0, \\ 0, & n = p, \\ e^{i\xi(\alpha-1)} - e^{i\xi(\alpha-2)}, & n = p^\alpha, \quad \alpha \geqslant 2. \end{cases}$$

Очевидно, что $h_p(n)$ — мультипликативная функция. Легко проверяем, что

$$\sum_{d\mid n} h_p(d) = e^{i\xi\beta_p(n)}.$$

Теперь, как при доказательстве теоремы Винтнера,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} e^{i\xi\beta_p(n)} = \frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\sum_{d\mid n} h_p(d) = \frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} h_p(n)\left[\frac{N}{n}\right] =$$

$$= \sum_{n\leqslant N}\frac{h_p(n)}{n} + O\left(\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|h_p(n)|\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_p(n)}{n} + O\left(\sum_{n>N}\frac{|h_p(n)|}{n}\right) + O\left(\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|h_p(n)|\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_p(n)}{n} + O\left(\sum_{\alpha>\frac{\ln N}{\ln p}}\frac{1}{p^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{\ln N}{N}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_p(n)}{n} + O\left(\frac{\ln N}{N}\right).$$

Значит,

$$M\left(e^{i\xi\beta_p(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_p(n)}{n} = 1 + \frac{e^{i\xi}-1}{p^2} + \frac{e^{2i\xi}-e^{i\xi}}{p^3} + \ldots =$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-e^{i\xi}}\right).$$

Таким образом,

$$F(\xi) = M\left(e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))}\right) = M\left(e^{i\xi\sum_p\beta_p(n)}\right) =$$

$$= M\left(\prod_p e^{i\xi\beta_p(n)}\right) = \prod_p M\left(e^{i\xi\beta_p(n)}\right).$$

Если бы плотность была счетно-аддитивной, то по теореме о том, что математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий, мы на основании формулы (1) сразу бы написали, что

$$M\left(e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))}\right) = \prod_p M\left(e^{i\xi\beta_p(n)}\right).$$

Дадим строгое доказательство теоремы. По классической формуле

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))}e^{-i\xi k}\,d\xi=\begin{cases}1, & \text{если} \quad \omega(n)-\nu(n)=k,\\ 0, & \text{если} \quad \omega(n)-\nu(n)\neq k,\end{cases}$$

имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{\omega(n)-\nu(n)=k\\ n\leqslant N}} 1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))}\right)e^{-i\xi k}\,d\xi.$$

Для того чтобы исследовать тригонометрическую сумму

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))},$$

введем функцию $h(n)$, которую определим так:

$$h(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n=1,\\ 0, & \text{если в } n \text{ входит хоть одно простое число в первой степени},\\ \prod\limits_{p\mid n}\left(e^{i\xi(\alpha_i-1)}-e^{i\xi(\alpha_i-2)}\right), & n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s},\\ & \alpha_1\geqslant 2,\ \ldots,\ \alpha_s\geqslant 2;\end{cases}$$

$h(n)$ — мультипликативная функция. Пусть $n=p_1^{\gamma_1}\ldots p_l^{\gamma_l}$, тогда

$$\sum_{d\mid n} h(d)=\prod_{p\mid n}(1+h(p)+\ldots+h(p^{\gamma}))=e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))}.$$

Значит,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))}=\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} h(n)\left[\frac{N}{n}\right]=$$

$$=\sum_{n\leqslant N}\frac{h(n)}{n}+O\left(\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|h(n)|\right).$$

Для чисел n, каноническое разложение которых не содержит простых чисел в первой степени,

$$|h(n)|\leqslant 2^{\nu(n)}.$$

Значит,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|h(n)|=O\Bigg(\frac{1}{N}\sum_{l^2\leqslant N}2^{\nu(l)}\sum_{\substack{n\leqslant N/l^2\\ n\mid l}}1\Bigg)=$$

$$=O\Bigg(\frac{1}{N}\sum_{l\leqslant\sqrt{N}}2^{\nu(l)}\tau(l)\Bigg)=O\Bigg(\frac{1}{N}\sum_{l\leqslant\sqrt{N}}\tau^2(l)\Bigg)=$$

$$=O\Bigg(\frac{N^{2\varepsilon}}{N}\sum_{l\leqslant\sqrt{N}}1\Bigg)=O\left(\frac{N^{2\varepsilon}\sqrt{N}}{N}\right)=o(1).$$

Далее покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n}$ абсолютно сходится при любом ξ:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|h(n)|}{n}\leqslant\sum_{l^2\leqslant N}\frac{2^{\nu(l)}}{l^2}\sum_{\substack{u\mid l\\ u\leqslant N/l^2}}\frac{1}{u}+O\Bigg(\sum_{l\leqslant\sqrt{N}}\frac{\tau^2(l)}{l^2}\Bigg).$$

Обозначим

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))}=F(\xi).$$

По теореме Лебега об интегрировании ограниченной последовательности функций существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg(\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}e^{i\xi(\omega(n)-\nu(n))}\Bigg)e^{-i\xi k}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\xi)\,e^{-i\xi k}\,d\xi.$$

Поскольку ряд

$$F(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n}$$

абсолютно сходится и функция $h(n)/n$ мультипликативная, то функцию $F(\xi)$ можно разложить в бесконечное произведение:

$$F(\xi)=\prod_p\left(1+\frac{h(p)}{p}+\frac{h(p^2)}{p^2}+\dots\right)=$$

$$=\prod_p\left(1+\frac{e^{i\xi}-1}{p^2}+\frac{e^{2i\xi}-e^{i\xi}}{p^3}+\frac{e^{3i\xi}-e^{2i\xi}}{p^4}+\dots\right)=$$

$$=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{e^{i\xi}}{p^2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{e^{2i\xi}}{p^3}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\dots\right)=$$

$$=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p\left(1-\frac{e^{i\xi}}{p}\right)}\right)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-e^{i\xi}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Из теоремы следует, что ρ_k есть коэффициент при z^k в разложении (сходящемся при $|z|<1$) функции $\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-z}\right)$ в степенной ряд

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-z}\right)=\rho_0+\rho_1 z+\ \dots\ +\rho_k z^k+\ \dots$$

В частности,

$$\rho_0=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{6}{\pi^2}.$$

Это известный результат о плотности бесквадратных чисел.

Задача об исследовании асимптотического поведения величины

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)-\nu(n)=k}} 1$$

носит название задачи Реньи, именно А. Реньи принадлежат первые результаты в этой задаче (см. А. Реньи [144]).

Г. Деланж [105], И. Катаи [127] исследовали остаточный член в задаче Реньи.

Аддитивная функция

$$g(n)=\omega(n)-\nu(n)$$

обладает свойством, что она в простых числах равна нулю. И. П. Кубилюс доказал ([34], теорема 4.8) для таких функций асимптотический закон. Б. В. Левин и А. С. Файнлейб ([37], теорема 2.2.2) доказали следующее предложение.

Теорема. *Пусть $g(n)$ — аддитивная арифметическая функция, принимающая лишь целые значения и удовлетворяющая условию $g(p)=0$ для всех простых p. Тогда для любого целого k*

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ g(n)=k}} 1=\rho_k+O\left(\exp\left(-(\ln N)^{3/8-\varepsilon}\right)\right),$$

где ρ_k определяются из равенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k e^{i\xi k}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{e^{i\xi g(p^r)}}{p^r}\right).$$

Теорема 9 работы И. Катаи [128] дает широкое обобщение закона Реньи; в этой теореме идет речь о многомерной локальной теореме для аддитивных функций от значений целозначного полинома.

3.5. Полиадический анализ и его применения

Аналогия между теорией функций натурального аргумента и теорией функций вещественного переменного, о которой мы говорили во введении, приобретает более определенный характер, если распространить область определения рассматриваемых функций не только на кольцо целых чисел, но и на некоторое кольцо, содержащее кольцо целых чисел в качестве подкольца.

Обозначим через S кольцо целых чисел. Рассмотрим систему множеств Σ^*, состоящую из идеалов (m). Легко проверяются свойства:

1) Элементом, общим для всех множеств системы Σ^*, является лишь 0.

2) Пересечение двух множеств (m) и (n) из Σ^* есть снова множество из Σ^* (а именно идеал, порожденный общим наименьшим кратным чисел m и n).

3) Для всякого множества (m) из Σ^* найдется множество (n) из Σ^*, что в (m) содержатся все разности $nx - ny$ (нужно взять n кратным m).

4) Пусть (m) — любое множество из Σ^* и mx_0 — некоторый элемент (m). Тогда при любом (n) из Σ^* имеет место теоретико-множественное включение

$$(n)\, mx_0 \subset (m).$$

5) Для любого множества (m) из Σ^* найдется (n) из Σ^*, что

$$(n) \subset (m).$$

За n можно взять любое кратное m.

На основании теоремы 9 гл. III книги Л. С. Понтрягина ([52], стр. 107) систему Σ^* можно взять за полную систему окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел Z, причем операция сложения будет непрерывна в этой топологии. Напомним, что полной системой окрестностей в Z будут множества вида $a + (m)$.

Докажем, что операция умножения будет непрерывна во введенной топологии, т. е. для любых целых чисел a и b и любой окрестности W числа ab найдется такая окрестность U числа a и окрестность V числа b, что

$$UV \subset W.$$

Пусть W есть $ab + (l)$. Ясно, что за U мы можем взять $a + (l)$ и за V $b + (l)$.

Таким образом, мы превратили S в топологическое кольцо, обозначим это кольцо S_τ.

Введенная топология не дискретна: последовательность

$$a + 1!,\ a + 2!,\ \ldots,$$

не содержащая точки a, сходится к ней.

Теорема 1. *Функция*

$$\rho(x,\, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \left(\frac{x-y}{m} \right),$$

где (t) — расстояние от t до ближайшего к нему целого числа, метризует S_τ.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если

$$\rho(x,\ y)=0,$$

то $\left(\frac{x-y}{m}\right)=0$ при всяком m, т. е. при любом m $m\mid x-y$ и, следовательно, $x=y$. Далее заметим, что функция (t) удовлетворяет неравенству

$$(y-z)\leqslant(y-x)+(x-z)$$

или

$$(\alpha)\leqslant(\alpha+\beta)+(\beta).$$

Для доказательства нужно отдельно разобрать случаи:

1) $\alpha\leqslant\frac{1}{2},\ \beta\leqslant\frac{1}{2},\ \alpha+\beta\leqslant\frac{1}{2};$

2) $\alpha\leqslant\frac{1}{2},\ \beta\leqslant\frac{1}{2},\ \alpha+\beta\geqslant\frac{1}{2};$

3) $\alpha\leqslant\frac{1}{2},\ \beta\geqslant\frac{1}{2},\ \alpha+\beta\leqslant 1;$

4) $\alpha\geqslant\frac{1}{2},\ \beta\leqslant\frac{1}{2},\ \alpha+\beta\leqslant 1;$

5) $\alpha\geqslant\frac{1}{2},\ \beta\geqslant\frac{1}{2},\ \alpha+\beta\leqslant\frac{3}{2};$

6) $\alpha\geqslant\frac{1}{2},\ \beta\geqslant\frac{1}{2},\ \alpha+\beta\geqslant\frac{3}{2}.$

В силу этого замечания функция $\rho(x,\ y)$ удовлетворяет условию треугольника

$$\rho(y,\ z)\leqslant\rho(x,\ y)+\rho(x,\ z).$$

Пусть фиксировано целое a. Зададим $\varepsilon>0$ и найдем такое m_0, что

$$\sum_{m=m_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\left(\frac{a}{m}\right)<\varepsilon.$$

Поэтому для всех $x\in a+(m_0!)$ $\rho(x,\ a)<\varepsilon$. Далее, поскольку

$$\min_{x\notin a+(m)}\left(\frac{x-a}{m}\right)=\frac{1}{m},$$

то при $x \notin a + (m)$

$$\rho(x, a) \geqslant \frac{1}{2^m m}.$$

Значит, если

$$\rho(x, a) < \frac{1}{2^m m},$$

то

$$x = a + bm,$$

в частности, при

$$\rho(x, a) < \frac{1}{2^{n!} n!}$$

$$x \equiv a \,(\mathrm{mod}\, n!).$$

Теорема доказана.

Заметим, что метризация кольца S_τ, которая осуществляется приведенной выше функцией $\rho(x, y)$, не единственна. Е. В. Новоселов [47] приводит в качестве метризационной функции

$$\bar{\rho}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x, y)}{2^m},$$

где

$$\varphi_m(x, y) = \begin{cases} 0, & x \equiv y \pmod{m}, \\ 1, & x \not\equiv y \pmod{m}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Кольцо S_τ вполне ограничено.*

Доказательство. Мы имеем *)

$$\lim_{n \to \infty} n! = 0.$$

Поэтому для $\varepsilon > 0$ существует m такое, что

$$\rho(m!, 0) \leqslant \varepsilon.$$

Множество $\{0, 1, \ldots, m! - 1\}$ образует конечную ε-сеть. В самом деле, если $x \equiv i \,(\mathrm{mod}\, m!)$, то

$$\rho(x, i) \leqslant \varepsilon.$$

*) Предел понимается в смысле топологии кольца S_τ, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$, где $a_n \in S_\tau$ и $b \in S_\tau$ означает, что для каждого натурального k найдется такое N, что при $n > N$

$$a_n - b \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k!).$$

Из этой теоремы следует, что всякая бесконечная последовательность целых чисел содержит сходящуюся (в смысле топологии кольца S_τ) подпоследовательность что, впрочем, нетрудно доказать и непосредственно.

Приведем примеры непрерывных в топологии S_τ функций целого аргумента. Прежде всего, всякая периодическая с целым периодом k функция $f(n)$ будет непрерывной. Действительно, пусть $k \mid s!$; тогда, если $n \equiv m \pmod{s!}$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$|f(n) - f(m)| < \varepsilon.$$

В качестве примера полиадически непрерывной функции мы приводили функцию

$$f(n) = \frac{\sigma(n)\,\varphi(n)}{n^2}.$$

Распространим эту функцию на все целые значения n, положив $f(0) = 0$ и $f(-n) = f(n)$. Легко установить, что так определенная функция будет непрерывна в топологии S_τ; при этом следует, конечно, учесть, что разложение на простые множители чисел n и $-n$ одинаково.

Назовем бесконечную последовательность целых чисел

$$a_1, a_2, \ldots$$

нуль-последовательностью, если

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

(предел понимается в смыле топологии кольца S_τ).

Бесконечную последовательность целых чисел

$$a_1, a_2, \ldots$$

назовем фундаментальной последовательностью, если для каждого натурального числа k можно найти такое натуральное число N, что при любых натуральных n и m, больших N,

$$a_n \equiv a_m \pmod{k!}.$$

Очевидно, что всякая нуль-последовательность есть фундаментальная последовательность.

Теорема 3. *Пространство S_τ не полно.*

Доказательство. Последовательность

$$1!,\ 1!+2!,\ 1!+2!+3!,\ \ldots$$

является фундаментальной, но не имеет предела в S_τ.

Легко доказать, что сумма, разность и произведение (покомпонентное) двух фундаментальных последовательностей есть фундаментальная последовательность. Таким образом, фундаментальные последовательности образуют кольцо.

Мы будем говорить, что фундаментальная последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \ldots$$

эквивалентна фундаментальной последовательности

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,$$

если их разность есть нуль-последовательность. Соотношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Поэтому корректно следующее определение.

Определение. Полиадическим числом назовем класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей целых чисел.

Конструкции полиадических чисел предлагали X. Прюфер [141], Дж. фон Нейман [138], Е. В. Новоселов [47]. Изложение теории полиадических чисел имеется в книге Э. Хевитта и К. Росса [123] (§ 10), в этой книге множество полиадических чисел обозначается как Λ_a $(a=2,\ 3,\ \ldots)$.

Легко доказать, что если последовательность A_1 эквивалентна последовательности A_2, а последовательность B_1 эквивалентна последовательности B_2, то последовательности $A_1 \pm B_1$, A_1B_1 эквивалентны соответственно последовательностям $A_2 \pm B_2$, A_2B_2. Это замечание позволяет ввести в множество полиадических чисел операции сложения, вычитания и умножения, т. е. превратить множество полиадических чисел в кольцо. Обозначим кольцо полиадических чисел через $\mathfrak{S}$.

В кольце $\mathfrak{S}$ содержится часть, изоморфная кольцу S; вложение S в $\mathfrak{S}$ осуществляется сопоставлением элементу $a \in S$ класса фундаментальных последовательностей, содержащих последовательность

$$a,\ a,\ a,\ \ldots$$

Кольцо S_τ является метрическим пространством. Пополнение метрического пространства S_τ по приему, описанному, например, в книге П. С. Александрова [1] (§ 6 гл. VII), приводит к построению топологического кольца $\mathfrak{S}_\tau$. Пусть элемент $x \in \mathfrak{S}_\tau$ определяется фундаментальной последовательностью $\{x_k\}$, а элемент $y \in \mathfrak{S}_\tau$ определяется фундаментальной последовательностью $\{y_k\}$. Определив расстояние между элементами x и y:

$$\rho(x,\ y) = \lim_{k \to \infty} \rho(x_k,\ y_k),$$

мы метризуем кольцо $\mathfrak{S}_\tau$.

Теорема 4. *Кольцо $\mathfrak{S}_\tau$ вполне ограничено.*

Теорема следует из того, что полная ограниченность метрического пространства является свойством и его пополнения.

Теорема 5. *Система множеств $\alpha + (n)$, $\alpha \in \mathfrak{S}$, $n \in S$, $n \geqslant 1$, (n) — идеал в $\mathfrak{S}$, порожденный n, является топологическим базисом $\mathfrak{S}_\tau$.*

Доказательство см. в работе Новоселова [47].

Лемма. *Каждое полиадическое число может быть определено последовательностью целых рациональных чисел*

$$x_0,\ x_1,\ \ldots$$

такой, что

$$x_n \equiv x_{n+1} \pmod{(n+1)!}.$$

Доказательство. Возьмем полиадическое число, определенное фундаментальной последовательностью

$$a_1,\ a_2,\ \ldots$$

Пусть n_1 — наименьший номер такой, что при $m,\ n \geqslant n_1$

$$a_m \equiv a_n \pmod{2!}.$$

Положим

$$\bar{n}_1 = n_1.$$

Пусть n_2 — наименьший номер такой, что при $m, n \geqslant n_2$

$$a_m \equiv a_n \pmod{3!}.$$

Определим

$$\bar{n}_2 = \max(n_2, n_1 + 1).$$

Пусть n_3 — наименьший номер такой, что при $m, n \geqslant n_3$

$$a_m \equiv a_n \pmod{4!}.$$

Определим

$$\bar{n}_3 = \max(n_3, \bar{n}_2 + 1)$$

и т. д. Построим последовательность

$$x_k = a_{\bar{n}_k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть

$$\bar{n}_k \leqslant l < \bar{n}_{k+1}, \quad a_l - x_l = a_l - a_{\bar{n}_k}.$$

По определению $\bar{n}_k$

$$a_l - x_l \equiv 0 \pmod{(k+1)!}.$$

Таким образом, последовательность $\{x_k\}$ эквивалентна исходной. Далее, по построению

$$x_k \equiv x_{k+1} \pmod{(k+1)!}.$$

Канонической последовательностью называется последовательность целых положительных чисел вида

$$a_1, \; a_1 + a_2 2!, \quad a_1 + a_2 2! + a_3 3!, \; \ldots,$$

где $0 \leqslant a_j \leqslant j$.

Очевидно, что каноническая последовательность есть фундаментальная последовательность и определяет полиадическое число.

Лемма. *Каждое полиадическое число может быть определено канонической последовательностью.*

Зададим полиадическое число последовательностью целых рациональных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

причем

$$x_n \equiv x_{n+1} \pmod{(n+1)!}.$$

Существует единственное число a_1 такое, что

$$a_1 \equiv x_1 \pmod{2}, \quad 0 \leqslant a_1 \leqslant 1.$$

Положим $y_1 = a_1$. Ясно, что

$$y_1 \equiv x_1 \pmod 2.$$

Далее, существует единственное число a_2 такое, что

$$a_2 \equiv \frac{x_2 - a_1}{2} \pmod 3, \quad 0 \leqslant a_2 \leqslant 2.$$

Положим $y_2 = a_1 + 2a_2$. Очевидно,

$$y_2 \equiv x_2 \pmod{3!},$$

и, значит,

$$y_2 \equiv x_3 \pmod{3!}.$$

Пусть мы построили

$$y_n = a_1 + 2!\, a_2 + \ldots + n!\, a_n, \quad 0 \leqslant a_n \leqslant n,$$
$$y_n \equiv x_n \pmod{(n+1)!}.$$

Так как

$$y_n \equiv x_{n+1} \pmod{(n+1)!},$$

то

$$\frac{x_{n+1} - y_n}{(n+1)!}$$

есть целое число. Определим число a_{n+1} из условий

$$a_{n+1} \equiv \frac{x_{n+1} - y_n}{(n+1)!} \pmod{(n+2)}, \quad 0 \leqslant a_{n+1} \leqslant n+1,$$

и определим

$$y_{n+1} = y_n + (n+1)!\, a_{n+1}.$$

Ясно, что

$$y_{n+1} \equiv x_{n+1} \pmod{(n+2)!}.$$

Последовательность

$$y_1, y_2, \ldots$$

эквивалентна последовательности

$$x_1, x_2, \ldots$$

и является канонической. Лемма доказана.

Применив алгоритм, описанный в этой лемме, к последовательности $\{-1\}$, мы убеждаемся, что последовательность

$$\{1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + nn!\}$$

эквивалентна последовательности

$$\{-1\},$$

т. е. что

$$-1=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n!.$$

Легко доказать, что две разные канонические последовательности определяют два разных полиадических числа.

Арифметика в кольце полиадических чисел исследована в работе Новоселова [47].

Для теории чисел имеет значение исследование степенных рядов на кольце полиадических чисел. Этот аспект полиадического анализа трактуется в работе Новоселова [50], приложения к теории чисел даны в работе Новоселова [49].

Мы остановимся на теории меры и интеграла в полиадической области. На аддитивной группе кольца $\mathfrak{S}_\tau$, как на компактной группе, существует инвариантная относительно сложения мера — мера Хаара. Можно ввести меру в $\mathfrak{S}_\tau$ с помощью конструкции Хаара, но мы, следуя примеру В. Г. Спринджука ([61], часть II, гл. 1, § 2), введем меру в кольцо полиадических чисел с помощью канонического представления полиадических чисел. Каноническое представление дает отображение

$$\mathfrak{S}_\tau \longleftrightarrow (a_1, a_2, \ldots),$$

где a_n — целые числа с условием $0 \leqslant a_n \leqslant n$. Мы введем меру в множество последовательностей. Отображение перенесет эту меру в $\mathfrak{S}_\tau$.

Пусть s — любое натуральное число. Множество M последовательностей

$$a_1, a_2, \ldots$$

$(0 \leqslant a_n \leqslant n)$, у которых первые s знаков фиксированы, назовем элементарно-цилиндрическим множеством. Цилиндрическим множеством назовем конечную теоретико-множественную сумму элементарно-цилиндрических множеств. Легко доказать, что цилиндрические множества образуют алгебру.

Заметим, что элементарно-цилиндрическое множество, полученное фиксацией конечного количества элементов $a_1, \ldots, a_s$, есть прогрессия в $\mathfrak{S}_\tau$:

$$a_1 + a_2 2! + \ldots + a_s s! + ((s+1)!).$$

К алгебре цилиндрических множеств принадлежат все прогрессии

$$b + (n);$$

n — натуральное, $0 \leqslant b \leqslant n-1$ — целое. В самом деле, пусть $s+1$ — наименьшее число такое, что

$$n \mid (s+1)!.$$

Прогрессия $b+(n)$ распадается на $(s+1)!/n$ прогрессий по модулю $(s+1)!$.

Меру цилиндрического множества, заданного фиксацией элементов $a_1, a_2, \ldots, a_s$, определим равной $1/(s+1)!$. Меру цилиндрического множества определим как сумму мер непересекающихся элементарно-цилиндрических множеств, объединение которых образует это цилиндрическое множество. Легко видеть, что это определение корректно. При таком определении мера прогрессии $b+(n)$, где n — натуральное, равна $1/n$.

По известной теореме теории меры мы можем однозначно распространить введенную меру на наименьшую σ-алгебру, содержащую алгебру цилиндрических множеств. Меру измеримого множества E будем обозначать μE.

Аналогично тому, как доказывается лемма 4 § 3 гл. 1 части II книги Спринджука [61], доказывается утверждение:

Лемма. *Пусть E — измеримое множество точек из $\mathfrak{S}_\tau$ и $\omega_0 \in \mathfrak{S}_\tau$. Обозначим $E_0 = \omega_0 + E$. Тогда E_0 измеримо и*

$$\mu E_0 = \mu E.$$

Мера μ называется мерой Хаара — Лебега на $\mathfrak{S}_\tau$. В работе Новоселова [47] доказывается следующая лемма.

Лемма. *Пусть $(n_i, n_j) = 1$. Тогда*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} \alpha_k + (n_k)\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n_k} \prod_{i=1}^{k-1}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 1 - \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{n_k}\right).$$

Е. В. Новоселов [48] дает приложения теории меры на $\mathfrak{S}_\tau$ к вычислению плотностей некоторых подмножеств натурального ряда. Мы здесь не будем останавливаться на этих связях. Мы ограничимся лишь тем, что дадим элементарные доказательства некоторых теорем, которые Е. В. Новоселов приводит как теоремы, иллюстрирующие его теорию.

Теорема 6. *Пусть последовательность натуральных чисел*

$$m_1 < m_2 < \ldots \tag{1}$$

такая, что наименьший простой делитель числа m_n при $n \to \infty$ стремится к бесконечности. Тогда плотность множества чисел этой последовательности равна нулю.

Доказательство. Перенумеруем простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, p_2, ... Обозначим через $s(k)$ наименьшее число последовательности (1) такое, что при $m_l > s(k)$ все числа m_l не делятся на $p_1, p_2, \ldots, p_k$. По предположению $s(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Пусть $N \geqslant 1$, мы имеем

$$\sum_{m_l \leqslant N} 1 \leqslant s(k) + \sum_{\substack{l \in \mathfrak{M}_{p_1 \ldots p_k} \\ s(k) \leqslant l \leqslant N}} 1,$$

где $\mathfrak{M}_{p_1 \ldots p_k}$ — множество чисел, взаимно простых с $p_1 \ldots p_k$. Отсюда

$$\sum_{m_l \leqslant N} 1 \leqslant s(k) + \sum_{\substack{l \in \mathfrak{M}_{p_1 \ldots p_k} \\ l \leqslant N}} 1 = s(k) + \sum_{d \mid p_1 \ldots p_k} \mu(d) \left[\frac{N}{d}\right] =$$

$$= N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) + s(k) + 2^k.$$

Отсюда при любом k

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_{m_l \leqslant N} 1 = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Но так как

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\ln p_k} \to 0$$

при $k \to \infty$, то

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{m_i \leqslant N} 1 = 0.$$

Из этой теоремы следует, между прочим, что

$$\pi(x) = o(x), \tag{2}$$

ибо последовательность простых чисел удовлетворяет условиям задачи. Наше рассуждение родственно классическому доказательству соотношения (2), приведенному в книгах А. Е. Ингама ([28], стр. 19) и К. Прахара ([56], стр. 21—22).

Теорема 7. *Плотность множества чисел, состоящих из двух простых множителей, равна нулю.*

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — первые r простых чисел, расположенных в порядке возрастания. Обозначим через $M(x, p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, количество натуральных чисел, не превосходящих x, делящихся на p_i и взаимно простых с $\frac{p_1 \ldots p_r}{p_i}$. Очевидно, что

$$M(x, p_i) = \sum_{\substack{n \equiv 0 \pmod{p_i} \\ n \leqslant x}} \; \sum_{d \,\big|\, \left(n, \frac{p_1 \cdots p_r}{p_i}\right)} \mu(d) =$$

$$= \sum_{\substack{d \,\big|\, \frac{p_1 \cdots p_r}{p_i} \\ d \leqslant x}} \mu(d) \left[\frac{x}{dp_i}\right] = \frac{x}{p_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) + \theta 2^{r-1}.$$

Обозначим через $\pi_2(x)$ количество натуральных чисел, не превосходящих границы x и состоящих из двух простых сомножителей. Пусть u — некоторое положительное число, $p_1, \ldots, p_r$ — простые числа, не превосходящие u. Очевидно, что при $x > u$

$$\pi_2(x) \leqslant \pi_2(u) + \sum_{i=1}^{r} M(x, p_i).$$

Поэтому

$$\pi_2(x) \leqslant \pi_2(u) + x\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}\prod_{j\neq i}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) + r\cdot 2^{r-1} \leqslant$$

$$\leqslant u + r2^{r-1} + x\prod_{p_i\leqslant u}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\sum_{p_i\leqslant u}\frac{1}{p_i-1} \leqslant$$

$$\leqslant u + r2^{r-1} + xO\left(\frac{\ln\ln u}{\ln u}\right)$$

с абсолютной постоянной в символе O. Отсюда

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\pi_2(x)}{x} \leqslant C\frac{\ln\ln u}{\ln u}.$$

Но u сколь угодно велико. Значит,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi_2(x)}{x} = 0.$$

Подобным образом может быть доказана следующая теорема.

Теорема 8. *Обозначим через $\pi_k(x)$ количество чисел, не превосходящих x и состоящих точно из k простых сомножителей. Справедливо соотношение*

$$\pi_k(x) = o(x).$$

Теоремы 7, 8, как известно, усиливаются обобщенным асимптотическим законом распределения простых чисел, данным Э. Ландау:

$$\pi_k(x) \sim \frac{x(\ln\ln x)^{k-1}}{(k-1)!\ln x}.$$

С помощью меры Хаара — Лебега строится по классическому образцу интегрирование на $\mathfrak{S}_\tau$.

В работе [51] Е. В. Новоселов прилагает теорию меры и интеграла на $\mathfrak{S}_\tau$ к вопросам распределения значений арифметических функций. Принципиальным моментом здесь является продолжение функции натурального аргумента в кольцо $\mathfrak{S}_\tau$, причем продолжение такое, что функция с расширенной областью определения принадлежит к тому или иному «хорошему» классу. Будем более конкретными. Е. В. Новоселов [48] доказал, что последовательность натуральных чисел

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

равномерно распределена в $\mathfrak{S}_\tau$; это означает, что для любой непрерывной на $\mathfrak{S}_\tau$ функции $f(x)$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n)=\int f(x)\,d\mu.$$

Поэтому, если мы докажем, что некоторая функция натурального аргумента продолжается в $\mathfrak{S}_\tau$ так, что в $\mathfrak{S}_\tau$ она становится непрерывной, то из этого будет следовать существование для функции $f(x)$ предела

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n).$$

Полиадически непрерывная функция $f(n)$ натурального аргумента всегда может быть продолжена в $\mathfrak{S}_\tau$. Мы полагаем $f(0)=0$. Далее, пусть α определено каноническим рядом

$$\alpha=\sum_{j=1}^{\infty} a_j j!,\quad 0\leqslant a_j\leqslant j.$$

По свойству полиадической непрерывности последовательность

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} a_j j!\right)$$

удовлетворяет условию критерия Коши, и поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{j=1}^{n} a_j j!\right);$$

за определение $f(\alpha)$ принимается значение этого предела. Легко устанавливается, что определенная так функция на $\mathfrak{S}_\tau$ непрерывна. Итак, мы получаем, что для всякой полиадически непрерывной функции натурального аргумента $f(n)$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} f(n).$$

Теория непрерывных функций на $\mathfrak{S}_\tau$ тождественна с теорией почти периодических функций на $\mathfrak{S}_\tau$, ибо, как известно, на компактной группе всякая непрерывная функция почти периодична (см., например, Б. М. Левитан [40], стр. 295).

В работе [51] Е. В. Новоселов вводит и изучает некоторые классы функций на $\mathfrak{S}_\tau$. Мы обозначим соответственно через L_H класс функций, непрерывных на $\mathfrak{S}_\tau$, L_C — класс функций, почти всюду (по мере μ) непрерывных и ограниченных, L_* — класс функций, почти всюду непрерывных на $\mathfrak{S}_\tau$. Через $\Rrightarrow$ обозначим сходимость в $\mathfrak{S}_\tau$. Пусть $\{N_k\}$ — произвольная, но раз и навсегда фиксированная последовательность натуральных чисел, сходящаяся в $\mathfrak{S}_\tau$ к нулю и удовлетворяющая условиям

$$N_{k+1} > N_k, \qquad \frac{N_{k+1}}{N_k} \to 1.$$

Обозначив

$$s(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2,$$

мы можем при $s(n) \leqslant k < s(n+1)$ положить $N_k = (k - s(n) + n + 2)n!$. Обозначим символом $R_K(x)$ наименьший положительный вычет полиадического числа x по модулю N_K. Через $\mathfrak{H}^0$ обозначается класс функций таких, что при $k\to\infty$ $f(R_K(x))$ сходится по мере μ к $f(x)$. В работе Новоселова [51] показывается, что определение класса $\mathfrak{H}^0$, по существу, не зависит от выбора конкретной последовательности N_k. Через $\mathfrak{H}^r$, $r > 0$, обозначим класс функций $f(x)$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int |f(R_K(x)) - f(x)|^r \, d\mu \right)^{1/r} = 0.$$

Определение класса $\mathfrak{H}^r$ также, по существу, не зависит от конкретного выбора последовательности N_k. Чем больше r, тем уже класс функций $\mathfrak{H}^r$: при $r_1 \geqslant r_2$ $\mathfrak{H}^{r_1} \subset \mathfrak{H}^{r_2}$. Класс $\mathfrak{H}_C$ определен как множество ограниченных функций из $\mathfrak{H}^0$. Взаимоотношения введенных классов функций даются в виде схемы (рис. 6); стрелки обозначают включения.

$$\begin{tikzcd}
& & \mathfrak{H}_C \arrow[r] & \mathfrak{H}^r \arrow[dd] \\
L_H \arrow[r] & L_C \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & L_* \arrow[r] & \mathfrak{H}^0
\end{tikzcd}$$

Рис. 6.

Сформулируем некоторые свойства введенных классов.

Теорема 9. *Любая функция из* $\mathfrak{H}^0$ *измерима и почти всюду конечна. Если вещественнозначная функция* $f(x) \in \mathfrak{H}^0$, *то последовательность функций распределения*

$$F_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{f(m) < \lambda \\ m \leqslant N}} 1$$

слабо сходится к некоторой предельной функции распределения.

См. теорему пункта 13 работы [51].

Теорема 10. *Если вещественнозначная функция* $f(x)$ *принадлежит* $\mathfrak{H}^0$, *то при любом вещественном* t

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} e^{itf(n)} = \int e^{itf(n)}\, d\mu.$$

Это теорема пункта 26 работы [51].

Теорема 11. *Пусть* $f(x) \in \mathfrak{H}^r$, $r > 0$. *Обозначим через* M *замыкание числового множества* $f(m)$, $m = 1, 2, \ldots$. *Предположим, что функция* $g(z)$ *определена для* $z \in M$ *и удовлетворяет на* M *условию Липшица первого порядка. Тогда* $g(f(x)) \in \mathfrak{H}^r$.

Мы говорим о теореме пункта 24 работы [51].

Теорема 12. *Если* $f(x) \in \mathfrak{H}^1$, *то при любом натуральном* m *и* $0 \leqslant l \leqslant m-1$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \equiv l \pmod m \\ n \leqslant N}} f(n) = \int_{l+(m)} f(x)\, d\mu.$$

См. также § 2 работы [51].

Е. В. Новоселов предлагает критерий (и способы) продолжения функций, определенных для натуральных значений m, на кольцо $\mathfrak{S}_\tau$. Для сокращения речи выражение «функция натурального аргумента $f(m)$ может быть продолжена на $\mathfrak{S}_\tau$ так, что продолженная функция будет принадлежать классу ...» будем заменять «$f(m)$ принадлежит классу ...».

Теорема 13. *Предположим, что* $f_d(m)$, $1 \leqslant d < \infty$, — *последовательность периодических функций натурального периода* k_d, *а ряд*

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{k_d} \sum_{m=1}^{k_d} |f_d(m)|$$

сходится. Тогда функция

$$f(m) = \sum_{k_d \leqslant m} f_d(m)$$

принадлежит $\mathfrak{H}^1$ *и*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{m \leqslant N} f(m) e^{2\pi i \frac{a}{n} m} = \sum_{k_d \equiv 0 \pmod{n}} \frac{1}{k_d} \sum_{m=1}^{k_d} f_d(m) e^{2\pi i \frac{a}{n} m}.$$

См. § 4 работы [51].

Частным случаем этой теоремы является следующее утверждение.

Теорема 14. *Функции натурального аргумента, принадлежащие классу Винтнера* W, *принадлежат* $\mathfrak{H}^1$.

Теорема 15. *Пусть функция* $f(n)$ *представлена в виде*

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \Phi(d)$$

и функция $\Phi(d)$ *такая, что ряды*

$$\sum_{|\Phi(d)| \geqslant 1} \frac{1}{d}, \qquad \sum_{|\Phi(d)| < 1} \frac{|\Phi(d)|}{d}$$

сходятся. Тогда $f(n) \in \mathfrak{H}^0$.

Это теорема пункта 44 работы [51].

Е. В. Новоселов в работе [51] интерпретирует в терминах полиадического анализа ряд положений теории мультипликативных функций. На этом мы останавливаться не будем.

Наконец, в работе [51] даются подробные сведения об истории вопроса и необходимые библиографические указания.

Полиадический анализ позволяет осмыслить с общей точки зрения многие результаты, относящиеся к распределению значений арифметических функций, и не только мультипликативных. Он позволяет открывать новые, скрытые факты; приведем, например, теорему о непрерывности функции:

$$\Phi(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ \sum\limits_{d \mid n} \frac{1}{2^d} \leqslant x}} 1$$

(см. [51], § 5, пример 1).

3.6. Теорема Аксера

Нижеследующая теорема, называемая теоремой Аксера (см. Г. Харди [83], стр. 465), является усилением теоремы Винтнера.

Теорема. *Пусть функция натурального аргумента $f(n)$ представлена в виде*

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \Phi(d),$$

причем известно, что (1) *ряд* $\sum\limits_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d}$ *сходится*; (2) *справедлива оценка*

$$\sum_{d \leqslant N} |\Phi(d)| = O(N).$$

Тогда

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d}.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что из того, что сходится ряд

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d},$$

вытекает, что

$$\sum_{d \leqslant N} \Phi(d) = o(N).$$

Обозначим $\sum\limits_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d} = A$ и $\sum\limits_{d=1}^{N} \frac{\Phi(d)}{d} = S_N$. По условию $S_N = A + o(1)$ при $N \to \infty$. Но

$$\sum_{d=1}^{N} \Phi(d) = \sum_{d=1}^{N} \frac{\Phi(d)}{d} d = S_1 + \sum_{d=2}^{N} (S_d - S_{d-1}) d = \\ = NS_N - S_1 - S_2 - \ldots - S_{N-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{d=1}^{N} \Phi(d) = N(A + o(1)) - NA + o(N) = o(N).$$

Пусть выполнены условия теоремы. Мы имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \sum_{d \mid N} \Phi(d) = \frac{1}{N} \sum_{d \leqslant N} \Phi(d) \left[\frac{N}{d}\right] = \\ = \sum_{d \leqslant N} \frac{\Phi(d)}{d} - \frac{1}{N} \sum_{d \leqslant N} \Phi(d) \left\{\frac{N}{d}\right\} = \\ = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d} + o(1) - \frac{1}{N} \sum_{d \leqslant N} \Phi(d) \left\{\frac{N}{d}\right\}.$$

Все будет доказано, если мы покажем, что

$$\frac{1}{N} \sum_{d \leqslant N} \Phi(d) \left\{\frac{N}{d}\right\} \to 0.$$

Возьмем $0<\delta<1$. Мы имеем

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N}\Phi(d)\left\{\frac{N}{d}\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N\delta}\Phi(d)\left\{\frac{N}{d}\right\}\right|+\left|\frac{1}{N}\sum_{N\delta<d\leqslant N}\Phi(d)\left\{\frac{N}{d}\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N\delta}|\Phi(d)|+\frac{1}{N}\left|\sum_{n=[\delta N]+1}^{N}(A_n-A_{n-1})\left\{\frac{N}{n}\right\}\right|,$$

где $A_0=0$, $A_n=\sum\limits_{d\leqslant n}\Phi(d)$. Мы получаем при целом N

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N}\Phi(d)\left\{\frac{N}{d}\right\}\right|\leqslant\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N\delta}|\Phi(d)|+$$

$$+\frac{1}{N}\left|-A_{[\delta N]}\left\{\frac{N}{[\delta N]+1}\right\}+\sum_{n=[\delta N]+1}^{N-1}A_n\left(\left\{\frac{N}{n}\right\}-\left\{\frac{N}{n+1}\right\}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N\delta}|\Phi(d)|+\frac{1}{N}|A_{[\delta N]}|+$$

$$+\frac{1}{N}\max_{[\delta N]+1\leqslant n\leqslant N-1}|A_n|\sum_{n=[\delta N]+1}^{N-1}\left|\left\{\frac{N}{n}\right\}-\left\{\frac{N}{n+1}\right\}\right|.$$

На интервале $[\delta N]+1\leqslant n\leqslant N-1$ найдется самое большее $\frac{1}{\delta}+2$ значений n, где $\left[\frac{N}{n}\right]\neq\left[\frac{N}{n+1}\right]$. Для этих n применим оценку $\left|\left\{\frac{N}{n}\right\}-\left\{\frac{N}{n+1}\right\}\right|\leqslant 2$. Для тех n, для которых $\left[\frac{N}{n}\right]=\left[\frac{N}{n+1}\right]$, применим оценку

$$\left|\left\{\frac{N}{n}\right\}-\left\{\frac{N}{n+1}\right\}\right|=\frac{N}{n(n+1)}\leqslant\frac{N}{(\delta N)^2},$$

а всего таких значений n на участке $[\delta N]+1\leqslant n\leqslant N-1$ не более $N(1-\delta)$. Итак,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N}\Phi(d)\left\{\frac{N}{d}\right\}\right|\leqslant\frac{1}{N}\sum_{d\leqslant N\delta}|\Phi(d)|+\frac{1}{N}|A_{[\delta N]}|+$$

$$+\frac{1}{N}\max_{[\delta N]+1\leqslant n\leqslant N-1}|A_n|\left(\frac{2}{\delta}+4+\frac{1-\delta}{\delta^2}\right).$$

Для $\varepsilon > 0$ найдем такое δ, что при $N \geqslant N_0$

$$\frac{1}{N} \sum_{d \leqslant N\delta} |\Phi(d)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее при фиксированном δ найдем такое $N_1 > N_0$, что

$$\frac{1}{N} |A_{[\delta N]}| \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\frac{1}{N} \max_{[\delta N]+1 \leqslant n \leqslant N-1} |A_n| \left(\frac{2}{\delta} + 4 + \frac{1-\delta}{\delta^2}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Итак, при $N \geqslant N_1$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{d \leqslant N} \Phi(d) \left\{\frac{N}{d}\right\} \right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \left| \sum_{d \leqslant N} \Phi(d) \left\{\frac{N}{d}\right\} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Но ε сколь угодно малое. Теорема доказана.

Покажем, что теорема Винтнера есть следствие теоремы Аксера. Именно справедливо утверждение:

Замечание. Если ряд $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d}$ абсолютно сходится, то

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{d \leqslant N} |\Phi(d)| = 0.$$

Обозначим $B_k = \sum_{d=1}^{k} \frac{|\Phi(d)|}{d}$. Применяя преобразование Абеля, найдем

$$\frac{1}{N} \sum_{d=1}^{N} |\Phi(d)| = \frac{1}{N} \sum_{d=1}^{N} d \frac{|\Phi(d)|}{d} = B_N - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} B_k.$$

По условию существует такая постоянная $\varkappa$, что

$$\lim_{N \to \infty} B_N = \varkappa.$$

Но по теореме о пределе среднего арифметического

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\infty} B_k = \varkappa,$$

$$B_N - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} B_k \to 0$$

при $N\to\infty$. Следовательно,

$$\frac{1}{N} \sum_{d=1}^{N} |\Phi(d)| = o(1),$$

что и требуется.

Метод, который используется в доказательстве теоремы Аксера, может прилагаться не только к мультипликативным функциям. Рассмотрим, например, функцию

$$P_\alpha(n) = \sum_{d|n} \sin 2\pi d\alpha,$$

где α не есть целое число. Здесь $\Phi(d) = \sin 2\pi d\alpha$. Очевидно, что

$$\sum_{d\leqslant N} |\Phi(d)| = O(N),$$

а сходимость ряда

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi d\alpha}{d}$$

— это хорошо известный факт теории рядов Фурье (Г. М. Фихтенгольц [74], стр. 539),

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi d\alpha}{d} = -\pi\left(\{\alpha\} - \frac{1}{2}\right).$$

Мы получаем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} P_\alpha(n) = -\pi\left(\{\alpha\} - \frac{1}{2}\right).$$

По поводу обобщений теоремы Аксера отсылаем к статье Ф. В. Аткинсона и Л. Червелла [90].

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

4.1. Оценки сверху мультипликативных функций

Следующая теорема дана А. А. Дроздовой и Г. А. Фрейманом [22].

Теорема 1. *Пусть каноническое разложение числа N имеет вид*

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

Задана функция $l(\alpha)$, определенная для натуральных α, принимающая положительные значения, такая, что

$$\ln \frac{l(s+1)}{l(s)} = O\left(\frac{1}{s}\right). \tag{1}$$

Обозначим

$$f(N) = l(\alpha_1)\, l(\alpha_2) \dots l(\alpha_r).$$

Тогда имеет место оценка

$$f(N) \leqslant \exp\left(\sup_{m \geqslant 1} \frac{\ln l(m)}{m} \frac{\ln N}{\ln \ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln \ln N)^2} \ln \ln \ln N\right)\right). \tag{2}$$

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть G — свободная мультипликативная полугруппа, состоящая из натуральных чисел. Если 1 не принадлежит G, то включим ее в G. Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \dots$ базис полугруппы G. Зададим положительную функцию натурального аргумента $l(\alpha)$, удовлетворяющую условию (2). Определим на G функцию следующим образом: если

$$N = \pi_1^{\alpha_1} \dots \pi_s^{\alpha_s}$$

каноническое разложение N, то

$$f(N) = l(\alpha_1) \dots l(\alpha_s).$$

Теорема 2. *Расположим элементы базиса G в возрастающем порядке*:

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots$$

Предположим, что при $s \to \infty$

$$\ln \omega_s = \ln s + O(\ln \ln s).$$

Тогда

$$f(N) \leqslant \exp\left(\sup_{m \geqslant 1} \frac{\ln l(m)}{m} \frac{\ln N}{\ln \ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln \ln N)^2} \ln \ln \ln N\right)\right).$$

Доказательство. Пусть каноническое разложение числа N имеет вид

$$N = \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_r^{\alpha_r}.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r.$$

Определим для $s = 1, 2, \ldots, \alpha_1$ числа k_s следующим образом:

$$k_s = \begin{cases} i, & \text{если } \alpha_{i+1} < s < \alpha_i, \\ t, & \text{если } s = \alpha_i = \alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_t > \alpha_{t+1}. \end{cases}$$

Ясно, что k_s — невозрастающая функция индекса s. Мы можем записать $f(N)$ в виде

$$f(N) = l(1)^{k_1 - k_2} l(2)^{k_2 - k_3} \ldots l(\alpha_1 - 1)^{k_{\alpha_1 - 1} - k_{\alpha_1}} l(\alpha_1)^{k_{\alpha_1}} =$$

$$= l(1)^{k_1} \left(\frac{l(2)}{l(1)}\right)^{k_2} \ldots \left(\frac{l(\alpha_1)}{l(\alpha_1 - 1)}\right)^{k_{\alpha_1}} =$$

$$= \exp\left(k_1 \ln l(1) + k_2 \ln \frac{l(2)}{l(1)} + \ldots + k_{\alpha_1} \ln \frac{l(\alpha_1)}{l(\alpha_1 - 1)}\right) = e^{\Phi(N)}.$$

Обозначим

$$s_1 = [(\ln \ln N)^2].$$

Далее обозначим через s' максимальное s, для которого выполняется неравенство

$$k_s \geqslant \frac{\ln N}{(\ln \ln N)^2}.$$

Обозначим, наконец,

$$s_2 = \min(s_1, s').$$

Разобьем сумму $\Phi(N)$ на три части:

$$\Phi(N) = \sum_{s=1}^{s_2} + \sum_{s=s_2+1}^{s_1} + \sum_{s=s_1+1}^{\alpha_1}$$

(если $s_1 \leqslant s'$, то $s_1 = s_2$ и средняя сумма пустая). Обозначим

$$M_k = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_k.$$

Так как по условию теоремы

$$\ln \omega_k = \ln k + O(\ln \ln k),$$

то

$$\ln M_k = k \ln k + O(k \ln \ln k)$$

и, следовательно,

$$\ln k = \ln \ln M_k + O(\ln \ln \ln M_k),$$

что нам дает

$$k = \frac{\ln M_k}{\ln \ln M_k} + O\left(\frac{\ln M_k}{(\ln \ln M_k)^2} \ln \ln \ln M_k\right). \tag{3}$$

Величина

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \ln \pi_j,$$

на основании теоремы о перестановках (см. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа [84], стр. 315), достигает наименьшего значения, когда наряду с неравенствами $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r$, данными по условию, выполняются неравенства $\pi_1 < \pi_2 < \ldots < \pi_r$. Поэтому

$$N = \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_r^{\alpha_r} \geqslant \omega_1^{\alpha_1}\omega_2^{\alpha_2} \ldots \omega_r^{\alpha_r}.$$

Отсюда следует:

$$N \geqslant (\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{k_1})(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{k_2}) \ldots (\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{k_{\alpha_1}}) \geqslant$$
$$\geqslant (\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{k_s})^s$$

при любом $s=1, 2, \ldots, \alpha_1$. Это вместе с формулой (3) нам дает при $s\leqslant s_1$

$$k_s\leqslant \frac{\ln N^{1/s}}{\ln\ln N^{1/s}}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln\ln N}{\ln\ln N^{1/s}}\right)\right)=$$

$$=\frac{\ln N}{s\ln\dfrac{\ln N}{s}}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln\ln N}{\ln\dfrac{\ln N}{(\ln\ln N)^2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{\ln N}{s(\ln\ln N-\ln s)}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln\ln N}{\ln\ln N}\right)\right)=$$

$$=\frac{\ln N}{s\ln\ln N\left(1+O\dfrac{\ln\ln\ln N}{\ln\ln N}\right)}=\frac{\ln N}{s\ln\ln N}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln\ln N}{\ln\ln N}\right)\right),$$

откуда при $s\leqslant s_1$ и достаточно большом N

$$k_s\leqslant\frac{2}{s}\,\frac{\ln N}{\ln\ln N}. \tag{4}$$

При $s\leqslant s_2$ ввиду неравенства

$$\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2}\leqslant k_s=O\left(\frac{\ln N}{s\ln\ln N}\right)=O\left(\frac{\ln N}{\ln\ln N}\right)$$

мы получаем

$$\ln k_s=\ln\ln N+O(\ln\ln\ln N). \tag{5}$$

Из формулы

$$N\geqslant(\omega_1\omega_2\ldots\omega_{k_1})(\omega_1\omega_2\ldots\omega_{k_2})\ldots(\omega_1\omega_2\ldots\omega_{k_{\alpha_1}})$$

имеем

$$\ln N\geqslant\sum_{j=1}^{\alpha_1}\ln M_{k_j}=\sum_{j=1}^{\alpha_1}(k_j\ln k_j+O(k_j\ln\ln k_j)).$$

Это нам дает грубую оценку

$$\sum_{j=1}^{\alpha_1}k_j=O(\ln N), \tag{6}$$

а при $s\leqslant s_2$ ввиду (5) имеем более тонкую оценку:

$$\ln N\geqslant\sum_{s=1}^{s_2}k_s(\ln\ln N+O(\ln\ln\ln N))+O\left(\ln\ln\ln N\sum_{s=1}^{s_2}k_s\right)=$$

$$=\left(\sum_{s=1}^{s_2}k_s\right)(\ln\ln N+O(\ln\ln\ln N)).$$

Отсюда

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_{s_2} \leqslant \frac{\ln N}{\ln\ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2} \ln\ln\ln N\right). \tag{7}$$

Оценим теперь сумму $\sum\limits_{s=1}^{s_2}$. Мы имеем

$$\sum_{s=1}^{s_2} = k_1 \ln l(1) + \sum_{s=2}^{s_2} k_s \ln \frac{l(s)}{l(s-1)} =$$

$$= (k_1 - k_2)\ln l(1) + (k_2 - k_3)\ln l(2) + \ldots$$

$$\ldots + (k_{s_2-1} - k_{s_2})\ln l(s_2 - 1) + k_{s_2} \ln l(s_2) =$$

$$= (k_1 - k_2)\ln l(1) + (2k_2 - 2k_3)\frac{\ln l(2)}{2} + \ldots$$

$$\ldots + ((s_2 - 1)k_{s_2-1} - (s_2 - 1)k_{s_2})\frac{\ln l(s_2 - 1)}{s_2 - 1} +$$

$$+ s_2 k_{s_2} \frac{\ln l(s_2)}{s_2} \leqslant (k_1 + k_2 + \ldots + k_{s_2}) \sup_{m \geqslant 1} \frac{\ln l(m)}{m} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{m \geqslant 1} \frac{\ln l(m)}{m} \frac{\ln N}{\ln\ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2} \ln\ln\ln N\right).$$

Оценим сумму $\sum\limits_{s_2+1}^{s_1}$. Вследствие того, что при $s > s_2 - s'$ $k_s \leqslant \frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2}$, мы получаем

$$\sum_{s=s_2+1}^{s_1} k_s \ln \frac{l(s)}{l(s-1)} = O\left(\sum_{s=s_2+1}^{s_1} \frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2} \frac{1}{s}\right) =$$

$$= O\left(\frac{\ln N \ln\ln\ln N}{(\ln\ln N)^2}\right).$$

Оценим сумму $\sum\limits_{s=s_1+1}^{\alpha_1}$. Мы имеем

$$\sum_{s=s_1+1}^{\alpha_1} k_s \ln \frac{l(s)}{l(s-1)} = O\left(\sum_{s=s_1+1}^{\alpha_1} \frac{k_s}{s}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{(\ln\ln N)^2} \sum_{s=s_1+1}^{\alpha_1} k_s\right).$$

Отсюда по неравенству (7) получаем

$$\sum_{s=s_1+1}^{\alpha_1} k_s \ln \frac{l(s)}{l(s-1)} = O\left(\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2}\right).$$

Итак,

$$\Phi(N) \leqslant \sup_{m\geqslant 1} \frac{\ln l(m)}{m} \frac{\ln N}{\ln\ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2} \ln\ln\ln N\right),$$

и, следовательно,

$$f(N) \leqslant \exp\left[\sup_{m\geqslant 1} \frac{\ln l(m)}{m} \frac{\ln N}{\ln\ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2} \ln\ln\ln N\right)\right].$$

Теорема 2 доказана.

Теорема Дроздовой и Фреймана следует из этой теоремы: в качестве полугруппы G примем всю мультипликативную полугруппу натуральных чисел. По теореме Чебышева

$$C_1 \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < C_2 \frac{x}{\ln x},$$

отсюда для n-го простого числа q_n имеем

$$C_1' n \ln n \leqslant q_n \leqslant C_2' n \ln n.$$

Значит,

$$\ln q_n = \ln n + O(\ln\ln n),$$

и условия теоремы 2 выполнены.

Применим теорему Дроздовой и Фреймана к оценке сверху функции $\nu(N)$. Пусть $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$; мы имеем

$$2^{\nu(N)} = \prod_{p_i \mid N} l(\alpha_i),$$

где $l(\alpha) \equiv 2$. Мы получаем по теореме Дроздовой и Фреймана

$$2^{\nu(N)} < 2^{\frac{\ln N}{\ln\ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2} \ln\ln\ln N\right)},$$

т. е.

$$\nu(N) < \frac{\ln N}{\ln\ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2} \ln\ln\ln N\right).$$

Покажем, что оценку для $\nu(N)$ нельзя улучшить. Возьмем последовательность чисел N_j, определенных равенством

$$N_j = 2 \cdot 3 \cdot 5 \dots q_j$$

(q_j — j-е простое число). Тогда

$$2^{\nu(N_j)} = 2^{\pi(a_j)} = 2^{\frac{q_j}{\ln q_j} + O\left(\frac{q_j}{(\ln q_j)^2}\right)}.$$

Но

$$\ln N_j = \sum_{p \leqslant q_j} \ln p.$$

По асимптотическому закону распределения простых чисел

$$\ln N_j = q_j + O\left(\frac{q_j}{(\ln q_j)^2}\right).$$

Поэтому для выбранной последовательности чисел N_j

$$2^{\nu(N_j)} = 2^{\frac{\ln N_j}{\ln \ln N_j} + O\left(\frac{\ln N_j}{(\ln \ln N_j)^2}\right)}.$$

Приведем пример, в котором используется рассмотренное обобщение теоремы Дроздовой и Фреймана.

Оценим сверху функцию $r(N)$. Представим число N в виде

$$N = N_1 N_2,$$

где N_1 состоит только из простых чисел вида $4k+1$, а в N_2 простые числа такого вида не входят. Очевидно, что

$$r(N) \leqslant r(N_1) \quad \text{и} \quad N_1 \leqslant N.$$

Для оценки $r(N_1)$ рассмотрим мультипликативную полугруппу G натуральных чисел, состоящих только из простых чисел вида $4k+1$. Если

$$N_1 = \pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_r^{\alpha_r},$$

то

$$r(N_1) = 4(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_r + 1).$$

В нашем случае $l(\alpha) = \alpha + 1$. Мы получаем по теореме 2:

$$r(N) \leqslant r(N_1) \leqslant 2^{\frac{\ln N_1}{\ln \ln N_1} + O\left(\frac{\ln N_1}{(\ln \ln N_1)^2} \ln \ln \ln N_1\right)} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\frac{\ln N}{\ln \ln N} + O\left(\frac{\ln N}{(\ln \ln N)^2} \ln \ln \ln N\right)}.$$

Это тоже достижимая оценка.

4.2. Суммирование значений функции Эйлера

Сумматорная формула для функции Эйлера $\varphi(n)$ была рассмотрена еще в прошлом веке Ф. Мертенсом ([137], стр. 290—291). Мы докажем следующее утверждение.

Теорема. *При* $N \to \infty$

$$\sum_{m=1}^{N} \varphi(m) = \frac{3}{\pi^2} N^2 + O(N \ln N).$$

Доказательство. Известно, что

$$\varphi(m) = m \sum_{d \mid m} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Поэтому

$$\sum_{m \leqslant N} \varphi(m) = \sum_{m \leqslant N} m \sum_{d \mid m} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k \leqslant \frac{N}{d}} kd =$$

$$= \sum_{d \leqslant N} \mu(d) \sum_{k \leqslant \frac{N}{d}} k = \frac{N^2}{2} \sum_{d \leqslant N} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\frac{N^2}{N} \sum_{d \leqslant N} \frac{1}{d}\right) =$$

$$= \frac{N^2}{2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(N^2 \sum_{d \geqslant N} \frac{1}{d^2}\right) + O(N \ln N) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2} \frac{N^2}{2} + O(N \ln N),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. С помощью применения оценок тригонометрических сумм А. З. Вальфиш [153] (гл. IV) и А. И. Салтыков [59] доказали нетривиальный результат: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{m=1}^{N} \varphi(m) = \frac{3}{\pi^2} N^2 + O\left((N \ln N)^{2/3} (\ln \ln N)^{1+\varepsilon}\right).$$

Сформулируем теорему П. Эрдёша [112] о суммах функции $\varphi(n)/n$ по отрезку натурального ряда.

Теорема. *Пусть* $g(n)/\ln\ln\ln n\to\infty$. *Тогда*

$$\sum_{m=n}^{n+g(n)}\frac{\varphi(m)}{m}=\frac{6}{\pi^2}g(n)(1+o(1)).$$

Приведем результат о сумматорной функции для $\varphi(n)$ из работы С. Пиллэ и С. Човла [140].

Теорема. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)-\frac{3x^2}{\pi^2}=\Omega(x\ln\ln\ln x).$$

Доказательство. Обозначим

$$E(x)=\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)-\frac{3}{\pi^2}x^2.$$

Обозначим через $P(a, b)$ произведение всех простых чисел, лежащих между a и b. Через x_0 обозначим наименьшее положительное решение системы сравнений

$$\begin{gathered}x\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2),\\ x+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,P(2, 2^3)),\\ x+3\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,P\left(2^3, 2^{3^2}\right)\right),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x+2k-1\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,P\left(2^{3^{k-1}}, 2^{3^k}\right)\right).\end{gathered}$$

Очевидно, что x_0 есть четное число. Поскольку модули в системе сравнений взаимно просты, то x_0 меньше, чем произведение модулей, т. е.

$$x_0\leqslant P\left(1, 2^{3^k}\right),$$

откуда

$$\ln x_0\leqslant\sum_{p\leqslant 2^{3^k}}\ln p,$$

но так как

$$\sum_{p\leqslant u}\ln p\leqslant Cu,$$

то

$$C_1\ln\ln\ln x_0\leqslant k.$$

Далее, x_0+2k+1 делится на некоторое простое $p>2^{3^{k-1}}$, поэтому

$$x_0+2k+1>2^{3^{k-1}}.$$

Это дает $k\leqslant C_2\ln\ln x_0$. По формуле Мертенса

$$\prod_{p\leqslant T}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\ln T}.$$

Значит,

$$\prod_{T\leqslant p\leqslant T^3}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{3}+o(1)$$

и при $T\geqslant 2^{3^f}$, где f — абсолютная постоянная,

$$\prod_{T\leqslant p\leqslant T^3}\left(1-\frac{1}{p}\right)<\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Теперь

$$E(x_0+2k)-E(x_0)=\left(\sum_{x_0+1}^{x_0+2k}\varphi(n)\right)-\frac{12}{\pi^2}k^2-\frac{12}{\pi^2}x_0k.$$

Пусть t — четное число. Так как для четных чисел $\varphi(n)/n\leqslant 1/2$, то $\frac{\varphi(x_0+t)}{x_0+t}\leqslant\frac{1}{2}$. Если t — нечетное число из множества $2f+1,\ 2f+3,\ \ldots,\ 2k-1$ (при $k\geqslant f+1$), то, так как (при $s=(t-1)/2$), $P\left(2^{3^s},\ 2^{3^{s+1}}\right)\mid x_0+t$, учитывая (1), имеем $\frac{\varphi(x_0+t)}{x_0+t}\leqslant\frac{1}{2}$. Для $t=1,\ 2,\ \ldots,\ 2f$ воспользуемся неравенством $\frac{\varphi(x_0+t)}{x_0+t}<1$. Продолжаем выкладку:

$$E(x_0+2k)-E(x_0)=$$
$$=-\frac{12}{\pi^2}k^2-\frac{12}{\pi^2}x_0k+\sum_{x_0+1}^{x_0+2f}\varphi(n)+\sum_{x_0+2f+1}^{x_0+2k}\varphi(n).$$

Отсюда и из оценок для $\frac{\varphi(x_0+t)}{x_0+t}$ получаем

$$E(x_0+2k)-E(x_0)<-\frac{12}{\pi^2}k^2-\frac{12}{\pi^2}x_0k+$$
$$+f(2x_0+2f+1)+(k-f)(2x_0+2k+2f+1).$$

Так как $f = O(1)$, то

$$E(x_0+2k) - E(x_0) = \left(1 - \frac{12}{\pi^2}\right) x_0 k + O(x_0) + O(k^2).$$

Но

$$\frac{12}{\pi^2} - 1 > 0 \quad \text{и} \quad k = O(\ln\ln\ln x_0),$$

откуда следует, что

$$|E(x_0+2k) - E(x_0)| \geqslant C_3 x_0 k + O(x_0) + O((\ln\ln\ln x_0)^2) \geqslant$$
$$\geqslant C_4 x_0 \ln\ln\ln x_0 + O(x_0),$$

где C_3 и C_4 — положительные постоянные. Значит,

$$\max(|E(x_0+2k)|,\ |E(x_0)|) \geqslant \frac{C_4 x_0 \ln\ln\ln x_0}{2}.$$

Если

$$\max(|E(x_0+2k)|,\ |E(x_0)|) = |E(x_0)|,$$

то теорема доказана. Пусть

$$\max(|E(x_0+2k)|,\ |E(x_0)|) = |E(x_0+2k)|.$$

Обозначая $x_0 + 2k = \bar{x}_0$, получаем

$$E(\bar{x}_0) \geqslant \frac{C_4(\bar{x}_0 - 2k)\ln\ln\ln(\bar{x}_0 - 2k)}{2} > C_5 \bar{x}_0 \ln\ln\ln \bar{x}_0.$$

Теорема доказана и в этом случае.

Теорема. *Пусть k — целое, $k \geqslant 2$, b — целое, $(k, b) = c$. Справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{m \equiv b \,(\mathrm{mod}\, k) \\ m \leqslant N}} \varphi(m) = \frac{3}{\pi^2} \frac{k}{\varphi_2(k)} \prod_{p \mid c} \left(1 - \frac{1}{p}\right) N^2 + O(N \ln N),$$

где обозначено

$$\varphi_2(k) = k^2 \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Константа в символе O абсолютная.

Доказательство.

$$\sum_{\substack{m\equiv b \pmod k\\ m\leqslant N}} \varphi(m) = \sum_{\substack{m\equiv b \pmod k\\ m\leqslant N}} m \sum_{d\mid m} \frac{\mu(d)}{d} =$$

$$= \sum_{d\leqslant N} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{dx\equiv b \pmod k\\ x\leqslant N/d}} dx = \sum_{d\leqslant N} \mu(d) \sum_{\substack{dx\equiv b \pmod k\\ x\leqslant N/d}} x =$$

$$= \sum_{\tau\mid k} \sum_{\substack{(d,\, k)=\tau\\ d\leqslant N}} \mu(d) \sum_{\substack{dx\equiv b \pmod k\\ x\leqslant N/d}} x.$$

Внутренняя сумма будет непустой лишь для $\tau \mid c$, ибо из $dx-ky=b$ следует, что $\tau=(d,\ k)\mid b$. Итак,

$$\sum_{\substack{m\equiv b \pmod k\\ m\leqslant N}} \varphi(m) = \sum_{\tau\mid c} \sum_{\substack{(d,\, k)=\tau\\ d\leqslant N}} \mu(d) \sum_{\substack{\frac{d}{\tau} x\equiv \frac{b}{\tau} \left(\mathrm{mod}\ \frac{k}{\tau}\right)\\ x\leqslant N|d}} x =$$

$$= \sum_{\tau\mid c} \sum_{\substack{(d,\, k)=\tau\\ d\leqslant N}} \mu(d) \sum_{\substack{x\equiv x_0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{k}{\tau}\right)\\ x\leqslant N/d}} x =$$

$$= \sum_{\tau\mid c} \sum_{\substack{(d,\, k)=\tau\\ d\leqslant N}} \mu(d) \frac{1}{2\frac{k}{\tau}} \left(\frac{N}{d}\right)^2 + O\left(\sum_{\tau\mid c} \sum_{\substack{(d,\, k)=\tau\\ d\leqslant N}} \frac{1}{k/\tau}\,\frac{N}{d}\right) =$$

$$= \frac{N^2}{2k} \sum_{\tau\mid c} \tau \sum_{\substack{(d,\, k)=\tau\\ d\leqslant N}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\frac{N}{k} \sum_{\tau\mid c} \tau \sum_{l\leqslant \frac{N}{\tau}} \frac{1}{l\tau}\right) =$$

$$= \frac{N^2}{2k} \sum_{\tau\mid c} \tau \sum_{\substack{(d,\, k)=\tau\\ d\leqslant N}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\frac{N}{k} \sum_{\tau\mid c} \ln N\right) =$$

$$= \frac{N^2}{2k} \sum_{\tau\mid c} \frac{\tau}{\tau^2} \sum_{\left(l,\, \frac{k}{\tau}\right)=1} \frac{\mu((l,\ \tau))}{l^2} + O(N\ln N) =$$

$$= \frac{N^2}{2k} \sum_{\tau\mid c} \frac{\mu(\tau)}{\tau} \sum_{\substack{l\leqslant \frac{N}{\tau},\ (l,\, \tau)=1,\\ \left(l,\, \frac{k}{\tau}\right)=1}} \frac{\mu(l)}{l^2} + O(N\ln N).$$

Два условия $(l, \tau)=1$ и $(l, k/\tau)=1$ можно заменить одним $(l, k)=1$:

$$\sum_{\substack{m \leqslant N \\ m \equiv b \pmod k}} \varphi(m) = \frac{N^2}{2k} \sum_{\tau \mid c} \frac{\mu(\tau)}{\tau} \sum_{\substack{l \leqslant \frac{N}{\tau} \\ (l, k)=1}} \frac{\mu(l)}{l^2} + O(N \ln N).$$

Ясно, что

$$\sum_{\substack{l \leqslant \frac{N}{\tau} \\ (l, k)=1}} \frac{\mu(l)}{l^2} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^2} + O\left(\sum_{l=\left[\frac{N}{\tau}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{l^2}\right) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^2} + O\left(\frac{\tau}{N}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{m \leqslant N \\ m \equiv b \pmod k}} \varphi(m) = \frac{N^2}{2k} \sum_{\tau \mid c} \frac{\mu(\tau)}{\tau} \frac{\prod_p \left(1-\frac{1}{p^2}\right)}{\prod_{p \mid k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} + O\left(\frac{N}{k} \sum_{\tau \mid c} |\mu(\tau)|\right) + O(N \ln N) =$$

$$= \frac{N^2}{2k \prod_{p \mid k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \mid c}\left(1-\frac{1}{p}\right) + O(N \ln N) = \frac{3}{\pi^2} \frac{k}{\varphi_2(k)} \prod_{p \mid c}\left(1-\frac{1}{p}\right) N^2 + O(N \ln N),$$

что и требовалось доказать.

Н. П. Романов [58] изучал ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n} x^n$ (ряд, очевидно, сходится при $|x|<1$). Он установил тождество

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n} x^n = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2 \prod_{p \mid n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} Q_n(x),$$

где

$$Q_n(x) = \sum_{\rho(n)} \frac{\rho^2 x^2}{1 - \rho x},$$

суммирование ведется по всем первообразным корням n-й степени из единицы $\rho(n)$.

Остановимся кратко на нелинейных задачах о функции Эйлера. Обозначим

$$S_N = \sum_{n \leqslant N} \frac{\varphi(n^2+1)}{n^2+1}.$$

Теорема. *При* $N \to \infty$

$$S_N = \frac{1}{2} \prod_{p \equiv 1 \pmod 4} \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) N + O(\ln^2 N).$$

Доказательство. Мы имеем

$$S_N = \sum_{n \leqslant N} \frac{\varphi(n^2+1)}{n^2+1} = \sum_{n \leqslant N} \sum_{d \mid n^2+1} \frac{\mu(d)}{d} = \\ = \sum_{d \leqslant N^2+1} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{n^2+1 \equiv 0 \pmod d \\ n \leqslant N}} 1.$$

Обозначим через $L(d)$ количество решений сравнения $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod d$ с $1 \leqslant x \leqslant d$

$$S_N = \sum_{d \leqslant N^2+1} \frac{\mu(d)}{d} L(d) \left(\left[\frac{N}{d}\right] + \theta\right) = \\ = N \sum_{d \leqslant N^2+1} \frac{\mu(d) L(d)}{d^2} + O\left(\sum_{d \leqslant N^2+1} \frac{L(d)}{d}\right).$$

Как известно (см. Г. Дэвенпорт [23], стр. 52), $L(d)$ есть мультипликативная функция и (см. Б. А. Венков [12], стр. 24)

$$L(2) = 1, \quad L(2^\alpha) = 0 \quad \text{при } \alpha \geqslant 2,$$
$$L(p^\alpha) = 2, \quad p \equiv 1 \pmod 4 \quad \text{при любом } \alpha,$$
$$L(p^\alpha) = 0, \quad p \equiv 3 \pmod 4 \quad \text{при любом } \alpha.$$

Из этих равенств следует, что

$$L(d) \leqslant \tau(d).$$

Поэтому

$$\sum_{d\leqslant N^2+1}\frac{L(d)}{d}\leqslant\sum_{d\leqslant N^2+1}\frac{\tau(d)}{d}=O(\ln^2(N^2+1))=O(\ln^2 N),$$

и мы имеем

$$S_N=N\sum_{d\leqslant N^2+1}\frac{\mu(d)L(d)}{d^2}+O(\ln^2 N).$$

Далее,

$$S_N=N\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)L(d)}{d^2}+O\left(N\sum_{d>N^2+1}\frac{\tau(d)}{d^2}\right)+O(\ln^2 N).$$

Это дает

$$\sum_{d>N^2+1}\frac{\tau(d)}{d^2}=\sum_{n>N^2+1}\frac{\sum\limits_{d\mid n}1}{n^2}=$$

$$=\sum_{n>N^2+1}\frac{\sum\limits_{\substack{d\leqslant N^2+1\\ d\mid n}}1}{n^2}+\sum_{n>N^2+1}\frac{\sum\limits_{\substack{d>N^2+1\\ d\mid n}}1}{n^2}=$$

$$=\sum_{d\leqslant N^2+1}\frac{1}{d^2}\sum_{k\geqslant\frac{N^2+1}{d}}\frac{1}{k^2}+\sum_{d>N^2+1}\frac{1}{d^2}\sum_{k\geqslant\frac{N^2+1}{d}}\frac{1}{k^2}=$$

$$=O\left(\frac{1}{N^2}\sum_{d\leqslant N^2+1}\frac{1}{d}\right)+O\left(\sum_{d\geqslant N^2+1}\frac{1}{d^2}\right)=O\left(\frac{\ln N}{N^2}\right).$$

Итак,

$$S_N=N\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\ln^2 N).$$

В силу выражений для $L(p^\alpha)$

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)L(d)}{d^2}=\prod_p\left(1-\frac{L(p)}{p^2}\right)=\frac{1}{2}\prod_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}\left(1-\frac{2}{p^2}\right),$$

что и требовалось установить.

В работе В. Шварца [151] доказана общая теорема, из которой выведено такое следствие;

Теорема. *Пусть $f(n)$ — полином с целыми коэффициентами и с отличным от нуля дискриминантом; предположим, что общий наибольший делитель его коэффициентов равен 1. Предположим, что $f(n)>0$ для $n>0$. Обозначим через $L(d)$ количество решений сравнения*

$$f(n)\equiv 0 \pmod d.$$

При $N\to\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{n\leqslant N}\frac{\varphi(f(n))}{f(n)}=N\prod_{p\geqslant 2}\left(1-\frac{L(p)}{p^2}\right)+O(\ln^c N),$$

где $c>0$ — постоянная.

Проведем подсчет среднего значения функции $\ln\frac{\varphi(n)}{n}$. Мы имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\ln\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\sum_{p\mid n}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{p\leqslant N}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\left[\frac{N}{p}\right]=$$

$$=\sum_{p\leqslant N}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)}{p}+O\left(\frac{1}{N}\sum_{p\leqslant N}\ln\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right).$$

По формуле Мертенса

$$-\sum_{p\leqslant N}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\ln\prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)=O(\ln\ln N).$$

Ряд $\sum_{p}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)}{p}$ мажорируется сходящимся рядом и поэтому сходится. Таким образом,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\ln\frac{\varphi(n)}{n}=A+O\left(\sum_{p\geqslant N}\frac{1}{p^2}\right)+O\left(\frac{\ln\ln N}{N}\right),$$

где

$$A=\sum_{p}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)}{p}.$$

Так как $p_n \geqslant n \ln n$, то

$$\sum_{p \geqslant N} \frac{1}{p^2} \leqslant \sum_{n \geqslant \pi(N)} \frac{1}{n^2 \ln^2 n} \leqslant \sum_{n \geqslant c \frac{N}{\ln N}} \frac{1}{n^2 \ln^2 n} =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln^2 N} \sum_{n \geqslant c \frac{N}{\ln N}} \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{\ln^2 N} \frac{1}{\frac{N}{\ln N}}\right) = O\left(\frac{1}{N \ln N}\right).$$

Итак,

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \ln \frac{\varphi(n)}{n} = A + O\left(\frac{\ln \ln N}{N}\right).$$

4.3. Теорема Вирзинга

Для получения главных членов в сумматорных формулах для мультипликативных функций может быть использована следующая элементарная теорема Вирзинга (см. [156]).

Теорема. *Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям*: 1) $f(n) \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$; 2) $f(p^\nu) \leqslant c_1 c_2^\nu$ с $c_2 < 2$ *для простых p и* $\nu = 2, 3, \ldots$ *Предполагаем, что при $x \to \infty$*

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) = (\tau + o(1)) \frac{x}{\ln x},$$

где $\tau \geqslant 0$ — постоянное. Тогда при $x \to \infty$

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \left(\frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(\tau)} + o(1)\right) \frac{x}{\ln x} \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \ldots\right),$$

где γ — постоянная Эйлера, $\Gamma(\tau)$ — обозначение гамма-функции.

Замечание. Покажем, что условие

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) = \tau \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

эквивалентно условию

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) \ln p = \tau x + o(x).$$

Действительно, пусть

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)=\tau\frac{x}{\ln x}+o\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Мы имеем

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)\ln p=\ln x\sum_{p\leqslant x} f(p)-\sum_{p\leqslant x} f(p)\ln\frac{x}{p}=$$

$$=\ln x\sum_{p\leqslant x} f(p)-\sum_{p\leqslant x} f(p)\int_p^x\frac{du}{u}=$$

$$=\tau x+o(x)-\int_2^x\frac{\sum\limits_{p\leqslant u} f(p)}{u}\,du=\tau x+o(x)+O\left(\int_2^x\frac{du}{\ln u}\right)=$$

$$=\tau x+o(x).$$

Пусть, обратно, $\sum\limits_{p\leqslant x} f(p)\ln p=\tau x+o(x)$, $f(p)\geqslant 0$. Очевидно,

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)=\frac{1}{\ln x}\left(\sum_{p\leqslant x} f(p)\ln p+\sum_{p\leqslant x} f(p)\ln\frac{x}{p}\right)=$$

$$=O\left(\frac{x}{\ln x}\right)+\frac{1}{\ln x}\sum_{p\leqslant x} f(p)\ln\frac{x}{p}=O\left(\frac{x}{\ln x}\right)+\frac{1}{\ln x}\sum_{p\leqslant x} f(p)\int_p^x\frac{du}{u}=$$

$$=O\left(\frac{x}{\ln x}\right)+\frac{1}{\ln x}\int_2^x\frac{\sum\limits_{p\leqslant u} f(p)}{u}\,du=$$

$$=O\left(\frac{x}{\ln x}\right)+O\left(\frac{1}{\ln x}\int_2^x\frac{\sum\limits_{p\leqslant u} f(p)\ln p}{u}\,du\right)=$$

$$=O\left(\frac{x}{\ln x}\right)+O\left(\frac{1}{\ln x}\int_2^x O(1)\,du\right)=O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Теперь мы получаем

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)=\frac{1}{\ln x}\left(\tau x+o(x)+\frac{1}{\ln x}\int_2^x \frac{\sum\limits_{p\leqslant u} f(p)}{u}\,du\right)=$$

$$=\frac{\tau x}{\ln x}+o\left(\frac{x}{\ln x}\right)+O\left(\frac{1}{\ln x}\int_2^x O(1)\,du\right)=\frac{\tau x}{\ln x}+o\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Прежде чем доказывать теорему, условимся в обозначениях. Через $\mathfrak{P}$ будем обозначать множество простых чисел,

$$M(x)=\sum_{n\leqslant x} f(n),\quad l(x)=\sum_{n\leqslant x} f(n)\ln n,$$

$$m(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n},\ \Pi(x)=\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\right),$$

$$T(x)=\sum_{p\leqslant x} f(p),\quad \vartheta(x)=\sum_{p^2\leqslant x} f(p)\ln p.$$

Через θ будем обозначать числа, удовлетворяющие неравенству $|\theta|\leqslant 1$.

Замечание. Так как $f(p^\nu)\leqslant c_1c_2^\nu$, то сходится произведение

$$\prod_p e^{-f(p)/p}\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\right)=P.$$

Таким образом, при $x\to\infty$

$$\Pi(x)\sim Pe^{\sum\limits_{p\leqslant x}\frac{f(p)}{p}}.$$

Но

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{f(p)}{p}=\int_1^x\frac{dT(t)}{t}=\frac{T(x)}{x}+\int_1^x\frac{T(t)}{t^2}\,dt.$$

Так как $T(x)=\sum\limits_{p\leqslant x} f(p)=O\left(\frac{x}{\ln x}\right)=o(x)$, то

$$e^{\sum\limits_{p\leqslant x}\frac{f(p)}{p}}=e^{\int_1^x\frac{T(t)}{t^2}\,dt+o(1)}=(1+o(1))\,e^{\int_1^x\frac{T(t)}{t^2}\,dt}.$$

Таким образом, утверждение теоремы можно выразить в форме

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=\left(\frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(\tau)}+o(1)\right)\frac{Px}{\ln x}\,e^{\int\limits_1^x \frac{T(t)}{t^2}\,dt}.$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим выражение

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)\frac{\ln p}{p}=\int\limits_1^x \frac{\ln t}{t}\,dT(t)=\frac{\ln x}{x}\,T(x)+\int\limits_1^x T(t)\frac{\ln t-1}{t^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_1^x (\tau+o(1))\frac{dt}{t}+O(1)=(\tau+o(1))\ln x.$$

Мы также видели, что

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)\ln p=(\tau+o(1))\,x.$$

Далее установим ряд лемм.

Лемма 1. *Справедливы следующие оценки*

$$\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}} f(p^\nu)\ln p^\nu=o(x), \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{p^{\nu+\mu}\leqslant x\\ \nu\geqslant 1,\ \mu\geqslant 1}} f(p^\nu)f(p^\mu)\ln p^\mu=o(x) \tag{2}$$

Ряды

$$\sum_p \frac{f^2(p)}{p}, \tag{3}$$

$$\sum_{p,\ \nu\geqslant 2}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\ln p^\nu \tag{4}$$

сходятся. Справедлива оценка

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ \nu\geqslant 1,\ \mu\geqslant 1}} \frac{f(p^\nu)f(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}}\ln p^\mu=o(\ln x). \tag{5}$$

Доказательство.

$$\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}} f(p^\nu)\ln p^\nu\leqslant \ln x\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}} f(p^\nu)=O\Bigg(\ln x\sum_{\nu\leqslant\frac{\ln x}{\ln 2}} c_2^\nu\Bigg),$$

с некоторым $0 \leqslant c_2 < 2$ (последнее неравенство строгое). Если $c_2 \leqslant 1$, то оценка (1) получается сразу. Если $1 < c_2 < 2$, то

$$\sum_{\substack{p^\nu \leqslant x \\ \nu \geqslant 2}} f(p^\nu) \ln p^\nu = O\left(\ln x \, c_2^{\frac{\ln x}{\ln 2}}\right) = O\left(x^{\frac{\ln c_2}{\ln 2}} \ln x\right) = o(x),$$

ибо $\frac{\ln c_2}{\ln 2} < 1$ (неравенство строгое).

Докажем оценку (2):

$$\sum_{\substack{p^{\nu+\mu} \leqslant x \\ \nu \geqslant 1,\ \mu \geqslant 1}} f(p^\nu) f(p^\mu) \ln p^\mu \leqslant \ln x \sum_{\substack{p^{\nu+\mu} \leqslant x \\ \nu \geqslant 1,\ \mu \geqslant 1}} f(p^\nu) f(p^\mu) =$$

$$= \ln x \left(\sum_{\nu=\mu=1} + \sum_{\nu=1,\ \mu \geqslant 2} + \sum_{\nu \geqslant 2,\ \mu=1} + \sum_{\nu \geqslant 2,\ \mu \geqslant 2} \right).$$

Оценка первой суммы получается просто:

$$\sum_{\nu=\mu=1} = \sum_{p^2 \leqslant x} f^2(p) \leqslant \left(\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} f(p) \right)^2 = O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Суммы $\sum\limits_{\nu=1,\ \mu \geqslant 2}$ и $\sum\limits_{\nu \geqslant 2,\ \mu=1}$ оцениваются одинаково. Значит, достаточно работать только с суммой $\sum\limits_{\nu=1,\ \mu \geqslant 2}$:

$$\sum_{p^{1+\mu} \leqslant x} f(p) f(p^\mu) \leqslant \sum_{p^3 \leqslant x} f(p) \sum_{\mu \leqslant \frac{\ln x}{\ln p}} c_1 c_2^\mu =$$

$$= O\left(\sum_{p^3 \leqslant x} f(p)\, c_2^{\frac{\ln x}{\ln p}} \right) = O\left(\sum_{p^3 \leqslant x} f(p)\, x^{\frac{\ln c_2}{\ln p}} \right) =$$

$$= O\left(\sum_{p \leqslant c_2^2} f(p)\, x^{\frac{\ln c_2}{\ln p}} \right) + O\left(\sum_{c_2^2 < p \leqslant \sqrt[3]{x}} f(p)\, x^{\frac{\ln c_2}{\ln p}} \right) =$$

$$= O\left(x^{\frac{\ln c_2}{\ln 2}}\right) + O\left(\sum_{p \leqslant \sqrt[3]{x}} f(p)\, x^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= O\left(x^{\frac{\ln c_2}{\ln 2}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x} \right) = O(x^\alpha),$$

где $\alpha < 1$. Далее займемся оценкой суммы $\sum\limits_{\nu \geqslant 2,\, \mu \geqslant 2}$:

$$\sum_{\nu \geqslant 2,\, \mu \geqslant 2} \leqslant \sum_{p^4 \leqslant x} \sum_{\nu+\mu \leqslant \frac{\ln x}{\ln p}} c_1^2 c_2^{\nu+\mu} = O\left(\ln^2 x \sum_{p^4 \leqslant x} c_2^{\frac{\ln x}{\ln p}}\right) =$$

$$= O\left(\ln^2 x \sum_{p \leqslant c_2^2} c_2^{\frac{\ln x}{\ln 2}}\right) + O\left(\ln^2 x \sum_{c_2^2 < p < \sqrt[4]{x}} x^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= O\left(x^{\frac{\ln c_2}{\ln 2}} \ln^2 x\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x \frac{\sqrt[4]{x}}{\ln \sqrt[4]{x}}\right) = O(x^{\alpha}),$$

$0 < \alpha < 1$. Таким образом, оценка (2) доказана.

Так как $\sum\limits_{p \leqslant x} f(p) \sim (\tau + o(1)) \frac{x}{\ln x}$, то $f(p) = O\left(\frac{p}{\ln p}\right)$.

Поэтому

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{f^2(p)}{p^2} = O\left(\sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p \ln p}\right) = O\left(\int_{3/2}^{x} \frac{dT(t)}{t \ln t}\right).$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_{3/2}^{x} \frac{dT(t)}{t \ln t} = \int_{3/2}^{x} \frac{T(t)}{t^2 \ln^2 t}(1 + \ln t)\, dt = O(1).$$

Таким образом, частные суммы ряда $\sum\limits_{p} \frac{f^2(p)}{p^2}$ ограничены, что и доказывает его сходимость.

Докажем сходимость ряда

$$\sum_{p,\, \nu \geqslant 2} \frac{f(p^{\nu})}{p^{\nu}} \ln p^{\nu}.$$

Мы имеем

$$\sum_{\substack{\nu\geqslant 2\\ p^\nu\leqslant x}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\ln p^\nu \leqslant \sum_{p^2\leqslant x} \frac{f(p^2)}{p^2}\ln p^2 + \sum_{p^3\leqslant x} \frac{f(p^3)}{p^3}\ln p^3 + \ldots =$$

$$= O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \frac{c_2^2\ln p^2}{p^2} + \sum_{p\leqslant\sqrt[3]{x}} \frac{c_2^3\ln p^3}{p^3} + \ldots\right) =$$

$$= O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \ln p \sum_{\mu=2}^{\infty} \mu \frac{1}{\left(\frac{p}{c_2}\right)^\mu}\right) = O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \frac{\ln p}{p^2}\right) = O(1).$$

Значит, ряд (4) сходится.

Наконец, установим справедливость оценки

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ \nu\geqslant 1,\ \mu\geqslant 1}} \frac{f(p^\nu)f(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}}\ln p^\mu = o(\ln x).$$

Мы видели, что $f(p) = O\left(\frac{p}{\ln p}\right) = o(p)$. Для случая $\nu=1$, $\mu=1$ имеем

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{f^2(p)}{p^2}\ln p = \sum_{p\leqslant x} o\left(\frac{f(p)}{p}\ln p\right) = o(\ln x).$$

Если $\nu=1$, $\mu\geqslant 2$ (рассматривается и случай $\mu=1$, $\nu\geqslant 2$), то

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ \nu=1,\ \mu\geqslant 2}} \frac{f(p^\nu)f(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}}\ln p^\mu \leqslant \sum_{p\leqslant x} \frac{f(p)}{p}\ln p \sum_{\mu\geqslant 2} \mu c_1\left(\frac{c_2}{p}\right)^\mu =$$

$$= \sum_{p\leqslant x} O\left(\frac{f(p)}{p^3}\ln p\right) = O\left(\sum_p \frac{\ln p}{p^2}\right) \text{ (ибо } f(p) = O(p)\text{)},$$

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ \nu=1,\ \mu\geqslant 2}} \frac{f(p^\nu)f(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}}\ln p^\mu = O(1).$$

Наконец,

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ \nu \geqslant 2,\ \mu \geqslant 2}} \frac{f(p^\nu) f(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}} \ln p^\mu \leqslant \sum_{p \leqslant x} \ln p \sum_{\nu \geqslant 2,\ \mu \geqslant 2} \mu c_1^2 \left(\frac{c_2}{p}\right)^{\nu+\mu} =$$

$$= O\left(\sum_{p \leqslant x} \ln p \left(\sum_{\nu \geqslant 2} \left(\frac{c_2}{p}\right)^\nu\right)\left(\sum_{\mu \geqslant 2} \mu \left(\frac{c_2}{p}\right)^\mu\right)\right) =$$

$$= O\left(\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p^4}\right) = O(1).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При* $x \to \infty$

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = (\tau + o(1)) \frac{x}{\ln x} \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n} \tag{6}$$

$\left(т.\ е.\ M(x) = (\tau + o(1)) \frac{x}{\ln x} m(x)\right)$. *При* $\tau = 0$

$$M(x) = o\left(\frac{x}{\ln x} m(x)\right).$$

Доказательство.

$$l(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \ln n = \sum_{n \leqslant x} f(n) \sum_{\substack{p,\ \nu \\ p^\nu \mid n,\ p^{\nu+1} \nmid n}} \ln p^\nu =$$

$$= \sum_{p^\nu \leqslant x} \ln p^\nu \sum_{\substack{n' \leqslant \frac{x}{p^\nu} \\ (n',\ p)=1}} f(n'p^\nu) = \sum_{p^\nu \leqslant x} \ln p^\nu f(p^\nu) \sum_{\substack{n \leqslant \frac{x}{p^\nu} \\ (n,\ p)=1}} f(n) =$$

$$= \sum_{p^\nu \leqslant x} f(p^\nu) \ln p^\nu \left(\sum_{n \leqslant \frac{x}{p^\nu}} f(n) - \sum_{\substack{n \leqslant \frac{x}{p^\nu} \\ p \mid n}} f(n)\right) =$$

$$= \sum_{p^\nu \leqslant x} f(p^\nu) \ln p^\nu \left(\sum_{n \leqslant \frac{x}{p^\nu}} f(n) - \sum_{\substack{n \leqslant \frac{x}{p^\nu} \\ p^\mu \mid n,\ p^{\mu+1} \nmid n}} f\left(p^\mu \frac{n}{p^\mu}\right)\right) =$$

$$= \sum_{p^\nu \leqslant x} f(p^\nu) \ln p^\nu \left(\sum_{n \leqslant \frac{x}{p^\nu}} f(n) - \sum_{\substack{n' \leqslant \frac{x}{p^{\nu+\mu}} \\ (n',\, p)=1}} f(p^\mu) f(n') \right) =$$

$$= \sum_{n \leqslant x} f(n) \left(\sum_{p^\nu \leqslant \frac{x}{n}} f(p^\nu) \ln p^\nu - \sum_{\substack{p \nmid n \\ p^{\nu+\mu} \leqslant \frac{x}{n}}} f(p^\nu) f(p^\mu) \ln p^\nu \right)$$

(исключаются те p, которые делят n). Значит,

$$l(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \left(\sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} f(p) \ln p + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{p^\nu \leqslant \frac{x}{n} \\ \nu \geqslant 2}} f(p^\nu) \ln p^\nu - \sum_{\substack{p \nmid n \\ p^{\nu+\mu} \leqslant \frac{x}{n}}} f(p^\nu) f(p^\mu) \ln p^\nu \right). \qquad (7)$$

Возьмем функцию $h(x)$, растущую к бесконечности с ростом x, дальнейшие условия роста $h(x)$ уточним потом. Продолжим выкладку:

$$l(x) = \sum_{n \leqslant \frac{x}{h(x)}} f(n) \left(\sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} f(p) \ln p + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{p^\nu \leqslant \frac{x}{n} \\ \nu \geqslant 2}} f(p^\nu) \ln p^\nu - \sum_{\substack{p \nmid n \\ p^{\nu+\mu} \leqslant \frac{x}{n}}} f(p^\nu) f(p^\mu) \ln p^\nu \right) +$$

$$+ \sum_{\frac{x}{h(x)} < n \leqslant x} f(n) \left(\sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} f(p) \ln p + \sum_{\substack{p^\nu \leqslant \frac{x}{n} \\ \nu \geqslant 2}} f(p^\nu) \ln p^\nu - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{p \nmid n \\ p^{\nu+\mu} \leqslant \frac{x}{n}}} f(p^\nu) f(p^\mu) \ln p^\nu \right).$$

В первой сумме $x/n \geqslant h(x) \to \infty$, поэтому

$$\sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} f(p) \ln p = \frac{\tau}{n} x + o\left(\frac{x}{n}\right),$$

$$\sum_{\substack{p^\nu \leqslant \frac{x}{n} \\ \nu \geqslant 2}} f(p^\nu) \ln p^\nu = o\left(\frac{x}{n}\right),$$

$$\sum_{\substack{p \nmid n \\ p^{\nu+\mu} \leqslant \frac{x}{n}}} f(p^\nu) f(p^\mu) \ln p^\nu = o\left(\frac{x}{n}\right).$$

Во второй сумме мы будем пользоваться более грубыми оценками:

$$\sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} f(p) \ln p = O\left(\frac{x}{n}\right),$$

$$\sum_{\substack{p^\nu \leqslant \frac{x}{n} \\ \nu \geqslant 2}} f(p^\nu) \ln p^\nu = O\left(\frac{x}{n}\right),$$

$$\sum_{\substack{p \nmid n \\ p^{\nu+\mu} \leqslant \frac{x}{n}}} f(p^\nu) f(p^\mu) \ln p^\nu = O\left(\frac{x}{n}\right).$$

Так мы получаем

$$l(x) = x\tau \sum_{n \leqslant \frac{x}{h(x)}} \frac{f(n)}{n} + o\left(x \sum_{n \leqslant \frac{x}{h(x)}} \frac{f(n)}{n}\right) + O\left(x \sum_{\frac{x}{h(x)} \leqslant n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}\right) = x\tau \sum_{n \leqslant \frac{x}{h(x)}} \frac{f(n)}{n} +$$

$$+ o\left(x \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}\right) + O\left(x \sum_{\frac{x}{h(x)} \leqslant n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}\right) =$$

$$= x\tau \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n} + o\left(x \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}\right) + O\left(x \sum_{\frac{x}{h(x)} \leqslant n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}\right).$$

Отсюда

$$l(x) = xm(x)(\tau + o(1)) + O\left(x\frac{h(x)}{x}\sum_{\frac{x}{h(x)} \leqslant n \leqslant x} f(n)\right) =$$

$$= xm(x)(\tau + o(1)) + O\left(h(x)\sum_{n \leqslant x} f(n)\right).$$

Если ряд $\sum\limits_{n \leqslant x} f(n)$ сходится, то возьмем $h(x) = o(x)$. Тогда

$$h(x) = o(xm(x))$$

и

$$l(x) = xm(x)(\tau + o(1)).$$

Если ряд $\sum\limits_{n \leqslant x} f(n)$ расходится, то

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = o\left(\sum_{n \leqslant x} f(n) \ln n\right).$$

В самом деле, при фиксированном M

$$\frac{\sum\limits_{n \leqslant x} f(n)}{\sum\limits_{n \leqslant x} f(n) \ln n} \leqslant \frac{\sum\limits_{n \leqslant M} f(n) + \sum\limits_{M < n \leqslant x} f(n)}{\ln M \sum\limits_{M < n \leqslant x} f(n)}.$$

При достаточно большом x, поскольку ряд расходится,

$$\sum_{n \leqslant M} f(n) < \sum_{M < n \leqslant x} f(n).$$

Поэтому

$$\frac{\sum\limits_{n \leqslant x} f(n)}{\sum\limits_{n \leqslant x} f(n) \ln n} \leqslant \frac{2}{\ln M}.$$

Но M сколь угодно большое. Выберем $h(x)$ так, чтобы $h(x) \to \infty$, но все же

$$h(x) \sum_{n \leqslant x} f(n) = o(l(x)).$$

Тогда

$$l(x) = xm(x)(\tau + o(1)) + o(l(x)),$$

$$l(x)(1 + o(1)) = xm(x)(\tau + o(1)),$$

$$l(x) = xm(x)(\tau + o(1)).$$

Итак, всегда

$$l(x) = (\tau + o(1))\, x m(x).$$

Теперь

$$M(x) = \int_2^x \frac{dl(t)}{\ln t} = \frac{l(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{l(t)}{t \ln^2 t}\, dt =$$

$$= (\tau + o(1))\, \frac{x}{\ln x}\, m(x) + O\left(\int_2^x \frac{m(t)}{\ln^2 t}\, dt\right) =$$

$$= (\tau + o(1))\, \frac{x}{\ln x}\, m(x) + m(x)\, O\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}\right) =$$

$$= (\tau + o(1))\, \frac{x}{\ln x}\, m(x).$$

Лемма 3. *Предположим, что в исходном соотношении*

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) = (\tau + o(1))\, \frac{x}{\ln x}$$

τ *удовлетворяет неравенству* $0 < \tau \leqslant \sqrt{2}/2$. *Тогда существует такое* x_0, *что при* $x \geqslant x_0$

$$(1 - 2\tau^2)\, \Pi(x) \leqslant m(x) \leqslant \Pi(x). \tag{8}$$

Если $\tau = 0$, *то при* $x \to \infty$

$$m(x) \sim \Pi(x). \tag{9}$$

Доказательство. Неравенство

$$m(x) \leqslant \Pi(x)$$

вытекает из определения функций $m(x)$ и $\Pi(x)$ и мультипликативности функции $f(n)$.

Вся «хитрость» — в доказательстве нижнего неравенства для $m(x)$.

Пусть $X \geqslant 1$ — произвольное, но достаточно большое число. Положим

$$\tilde{f}(p^\nu) = \begin{cases} f(p^\nu) & \text{при} \quad p \leqslant X, \\ 0 & \text{при} \quad p > X \end{cases}$$

и посредством требования, что $\tilde{f}(n)$ — мультипликативная функция, распространим область определения этой функции на все натуральные n. Для заданного $\varepsilon > 0$

можно найти такое $x_1 = x_1(\varepsilon)$, что при $x \geqslant x_1(\varepsilon)$

$$\sum_{p \leqslant x} f(p)\,\frac{\ln p}{p} = (\tau + \varepsilon\theta)\ln x;$$

$|\theta| \leqslant 1$. Если $X \geqslant x_1(\varepsilon)$, то при $x_1(\varepsilon) \leqslant x \leqslant X$

$$\sum_{p \leqslant x} \tilde{f}(p)\,\frac{\ln p}{p} = (\tau + \varepsilon\theta)\ln x,$$

при $x \geqslant X$

$$\sum_{p \leqslant x} \tilde{f}(p)\,\frac{\ln p}{p} = \sum_{p \leqslant X} f(p)\,\frac{\ln p}{p} = (\tau + \varepsilon\theta)\ln X.$$

Поскольку $\tilde{f}(n)/n$ есть мультипликативная функция, то к ней можно применить тождество (7) (естественно, с заменой $f(n)$ на $\tilde{f}(n)/n$):

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n}\ln n = \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} \frac{\tilde{f}(p)}{p}\ln p +$$
$$+ \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{\substack{p^\nu \leqslant \frac{x}{n} \\ \nu \geqslant 2}} \frac{\tilde{f}(p^\nu)}{p^\nu}\ln p^\nu -$$
$$- \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{\substack{p \nmid n,\ \nu \geqslant 1,\ \mu \geqslant 1 \\ p^{\nu+\mu} \leqslant \frac{x}{n}}} \frac{\tilde{f}(p^\nu)\tilde{f}(p^\mu)}{p^{\nu+\mu}}\ln p^\nu = S + S_1 - S_2.$$

Мы имеем оценки

$$S_1 = \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{\substack{p^\nu \leqslant \frac{x}{n} \\ \nu \geqslant 2}} \frac{\tilde{f}(p^\nu)}{p^\nu}\ln p^\nu \leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{\substack{\nu \geqslant 2 \\ p \leqslant X}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\ln p^\nu,$$

$$S_2 = \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{\substack{p \nmid n \\ p^{\nu+\mu} \leqslant \frac{x}{n} \\ \nu \geqslant 1,\ \mu \geqslant 1}} \frac{\tilde{f}(p^\nu)}{p^\nu}\,\frac{\tilde{f}(p^\mu)}{p^\mu}\ln p^\nu \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{\substack{p \leqslant X \\ \nu \geqslant 1,\ \mu \geqslant 1}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\,\frac{f(p^\mu)}{p^\mu}\ln p^\nu.$$

Применяя оценку (4) (в ослабленном виде) и оценку (5), получаем при $X \geqslant x_2(\varepsilon)$

$$|S_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ln X \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n},$$

$$|S_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ln X \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n},$$

и, значит,

$$|S_1 - S_2| \leqslant |S_1| + |S_2| \leqslant \varepsilon \tilde{m}(x) \ln X,$$

где обозначено

$$\tilde{m}(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n}.$$

Далее,

$$S = \sum_{n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} \tilde{f}(p) \frac{\ln p}{p} = \sum_{n \leqslant \frac{x}{X}} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} \tilde{f}(p) \frac{\ln p}{p} +$$

$$+ \sum_{\frac{x}{X} < n \leqslant \frac{x}{x_1}} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} \tilde{f}(p) \frac{\ln p}{p} + \sum_{\frac{x}{x_1} < n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} \tilde{f}(p) \frac{\ln p}{p} =$$

$$= \sum_{n \leqslant \frac{x}{X}} \frac{\tilde{f}(n)}{n} (\tau + \varepsilon\vartheta) \ln X + \sum_{\frac{x}{X} < n \leqslant \frac{x}{x_1}} \frac{\tilde{f}(n)}{n} (\tau + \varepsilon\theta) \ln \frac{x}{n} +$$

$$+ \sum_{\frac{x}{x_1} < n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} \tilde{f}(p) \frac{\ln p}{p} = \sum_{n \leqslant \frac{x}{X}} \frac{\tilde{f}(n)}{n} (\tau + \varepsilon\theta) \ln X +$$

$$+ \sum_{\frac{x}{X} < n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} (\tau + \varepsilon\theta) \ln \frac{x}{n} +$$

$$+ \sum_{\frac{x}{x_1} < n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \left(\sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} \tilde{f}(p) \frac{\ln p}{p} - (\tau + \varepsilon\theta) \ln \frac{x}{n} \right).$$

При $x/x_1 < n \leqslant x$ $x/n \leqslant x_1$, и мы имеем

$$\left| \sum_{p \leqslant \frac{x}{n}} \tilde{f}(p) \frac{\ln p}{p} - (\tau + \varepsilon\theta) \ln \frac{x}{n} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{p \leqslant x_1} \tilde{f}(p) \frac{\ln p}{p} + (\tau + \varepsilon) \ln x_1 < K(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$S = (\tau + \theta_1 \varepsilon) \left(\tilde{m}\left(\frac{x}{X}\right) \ln X + \tilde{m}(x) \ln x - \tilde{m}\left(\frac{x}{X}\right) \ln x - \right.$$
$$\left. - \sum_{\frac{x}{X} < n \leqslant x} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \ln n \right) + \theta_2 K(\varepsilon) \tilde{m}(x),$$

где $|\theta_1| \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$. Возьмем X таким, что $\ln X \geqslant \geqslant \frac{1}{\varepsilon} K(\varepsilon)$. При этих условиях мы получим

$$\sum_{n \leqslant x} \tilde{f}(n) \frac{\ln n}{n} =$$
$$= (\tau + \varepsilon\theta) \left(\tilde{m}(x) \ln x - \tilde{m}\left(\frac{x}{X}\right) \ln \frac{x}{X} - \sum_{\frac{x}{X} < n \leqslant x} \tilde{f}(n) \frac{\ln n}{n} \right) +$$
$$+ 2\varepsilon\theta \tilde{m}(x) \ln X. \qquad (10)$$

Для $x = X$ мы получаем

$$(1 + \tau + \varepsilon\theta) \sum_{n \leqslant X} \tilde{f}(n) \frac{\ln n}{n} = (\tau + 3\varepsilon\theta) \tilde{m}(X) \ln X.$$

Значит,

$$\sum_{n \leqslant X} \tilde{f}(n) \frac{\ln n}{n} > \frac{\tau - 3\varepsilon}{1 + \tau + \varepsilon} \tilde{m}(X) \ln X = \frac{\tau - 3\varepsilon}{1 + \tau + \varepsilon} m(X) \ln X$$

(ибо при $t \leqslant X$ $\tilde{m}(t) = m(t)$).

Если $x \geqslant X$, то мы будем применять интегрирование по частям:

$$\sum_{n \leqslant x} \tilde{f}(n) \frac{\ln n}{n} = (\tau + \theta\varepsilon) \int_{x/X}^{x} \tilde{m}(t) \, d \ln t + 2\varepsilon\theta \tilde{m}(x) \ln X.$$

Но

$$\tilde{m}(t) = \sum_{n \leqslant t} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \leqslant \prod_{p \leqslant X} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \ldots\right),$$

следовательно,

$$\sum_{n \leqslant x} \tilde{f}(n) \frac{\ln n}{n} \leqslant (\tau + \varepsilon) \Pi(X) \int_{x/X}^{x} d \ln t + 2\varepsilon \Pi(X) \ln X = \\ = (\tau + 3\varepsilon) \Pi(X) \ln X.$$

Эта верхняя граница не зависит от x, и поэтому ряд $\sum \tilde{f}(n) \frac{\ln n}{n}$ сходится и для его суммы справедлива оценка

$$\sum \frac{\tilde{f}(n)}{n} \ln n \leqslant (\tau + 3\varepsilon) \Pi(X) \ln X.$$

Итак, при больших X

$$\ln X \sum_{n > X} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \leqslant \sum_{n > X} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \ln n \leqslant \\ \leqslant (\tau + 3\varepsilon) \Pi(X) \ln X - \frac{\tau - 3\varepsilon}{1 + \tau + \varepsilon} m(x) \ln X.$$

Это дает

$$\sum_{n > X} \frac{\tilde{f}(n)}{n} \leqslant (\tau + 3\varepsilon) \Pi(X) - \frac{\tau - 3\varepsilon}{1 + \tau + \varepsilon} m(X).$$

Но, с другой стороны,

$$\sum_{n > X} \frac{\tilde{f}(n)}{n} = \Pi(X) - m(X).$$

Это дает

$$(1 - \tau - 3\varepsilon) \Pi(X) \leqslant m(X) \left(1 - \frac{\tau - 3\varepsilon}{1 + \tau + \varepsilon}\right).$$

Таким образом, при достаточно больших $X \geqslant X_0$

$$m(X) \geqslant \Pi(X) \frac{(1 + \tau + \varepsilon)(1 - \tau - 3\varepsilon)}{1 + 4\varepsilon}.$$

Если $\tau = 0$, то, поскольку ε сколь угодно мало,

$$\varliminf_{X \to \infty} \frac{m(X)}{\Pi(X)} \geqslant 1.$$

Это в сочетании с $m(X) \leqslant \Pi(X)$ доказывает лемму для случая $\tau = 0$. Если $\tau > 0$, то при достаточно малом ε

$$\frac{(1+\tau+\varepsilon)(1-\tau-3\varepsilon)}{1+4\varepsilon} \geqslant 1 - 2\tau^2.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\delta > 0$ *фиксировано,* $x^\delta \leqslant y \leqslant x$. *При* $x \to \infty$

$$m(y) = (1 + o(1))\, m(x) \left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^\tau. \tag{11}$$

Символ $o(1)$ *равномерный относительно* y (*когда* $x^\delta \leqslant y \leqslant x$).

Доказательство. В формуле (10) положим $x = X$ и проинтегрируем полученное выражение по частям:

$$\tilde{m}(X) \ln X - \int_1^X \tilde{m}(t)\, d \ln t =$$
$$= (\tau + \varepsilon\theta) \int_1^X \tilde{m}(t)\, d\ln t + 2\varepsilon\theta \tilde{m}(X) \ln X.$$

Но так как при $t \leqslant X$ $\tilde{m}(t) = m(t)$, то при $X > x_0(\varepsilon)$

$$(1 + 2\varepsilon\theta)\, m(X) \ln X = (1 + \tau + \varepsilon\theta) \int_1^X m(t)\, d\ln t.$$

Отсюда вытекает следующая асимптотическая формула: при $x \to \infty$

$$m(x) \ln x \sim (1+\tau) \int_1^x m(t)\, d\ln t. \tag{12}$$

Функция $\ln \int_1^x m(t)\, d\ln t$ при $x > 1$ имеет при не целых x производную

$$\frac{1}{\int_1^x m(t)\, d\ln t} \, \frac{m(x)}{x}.$$

Эта производная при не целых x непрерывна. По формуле (12)

$$\frac{1}{\int\limits_1^x m(t)\,d\ln t}\,\frac{m(x)}{x}=\frac{1+\tau+o(1)}{x\ln x}.$$

Отсюда посредством интегрирования получаем

$$\ln\frac{\int\limits_1^x m(t)\,d\ln t}{\int\limits_1^y m(t)\,d\ln t}=\int\limits_y^x\frac{1+\tau+o(1)}{t\ln t}\,dt=(1+\tau+o(1))\ln\frac{\ln x}{\ln y}.$$

Символ $o(1)$ в этих равенствах относится к $y\to\infty$, но, так как $x^\delta\leqslant y\leqslant x$, $o(1)$ относится и к случаю $x\to\infty$. Далее,

$$\frac{\int\limits_1^x m(t)\,d\ln t}{\int\limits_1^y m(t)\,d\ln t}=e^{\ln\frac{\ln x}{\ln y}(1+\tau)}e^{o(1)\ln\frac{\ln x}{\ln y}}.$$

Но

$$1\leqslant\frac{\ln x}{\ln y}\leqslant\frac{1}{\delta},\qquad e^{o(1)\ln\frac{\ln x}{\ln y}}=1+o(1)$$

$$\frac{\int\limits_1^x m(t)\,d\ln t}{\int\limits_1^y m(t)\,d\ln t}=\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)^{1+\tau}(1+o(1)).$$

Используя же формулу (12), получаем

$$\frac{m(x)}{m(y)}=(1+o(1))\,\frac{\ln y}{\ln x}\,\frac{\int\limits_1^x m(t)\,d\ln t}{\int\limits_1^y m(t)\,d\ln t}=(1+o(1))\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)^{\tau}.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть множество $\mathfrak{P}$ простых чисел разбито на r классов*

$$\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{P}_r,$$

так что

а) *классы $\mathfrak{P}_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, не пересекаются:*

$$\mathfrak{P}_i \cap \mathfrak{P}_j = \varnothing;$$

б) *каждому классу $\mathfrak{P}_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, сопоставлена функция натурального аргумента $f_i(n)$ следующим образом:*

$$f_i(n) = \begin{cases} f(n), & \text{если все простые делители } n \text{ принадлежат } \mathfrak{P}_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим, что для каждого $i=1, 2, \ldots, r$ существует предел

$$\tau_i = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{p\leqslant x} f_i(p) \frac{\ln p}{p}$$

и $\tau_i \neq 0$.

Тогда при $x\to\infty$

$$m(x)\,\Gamma(1+\tau) \sim \prod_{i=1}^{r} m_i(x)\,\Gamma(1+\tau_i)$$

$\left(\text{где } m_i(x) \text{ обозначает } m_i(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} \frac{f_i(n)}{n}\right).$

Доказательство. Доказательство легко проводится индукцией по r. Для ее проведения достаточно установить справедливость леммы для $r=2$.

Пусть $n=n_1n_2$, где все простые множители n_1 принадлежат $\mathfrak{P}_1$, а все простые множители n_2 принадлежат $\mathfrak{P}_2$ (возможно, что n_1 или n_2 равно 1). Мы имеем

$$f(n) = f(n_1)\,f(n_2) = f_1(n_1)\,f_2(n_2)$$

и, значит,

$$m(x) = \sum_{n\leqslant x} \frac{f(n)}{n} = \sum_{n_1n_2\leqslant x} \frac{f_1(n_1)\,f_2(n_2)}{n_1n_2} =$$

$$= \sum_{n_1\leqslant x} \frac{f_1(n_1)}{n_1} \sum_{n_2\leqslant \frac{x}{n_1}} \frac{f_2(n_2)}{n_2} = \sum_{n_1\leqslant x} \frac{f_1(n_1)}{n_1}\, m_2\left(\frac{x}{n_1}\right).$$

Зададим $\varepsilon > 0$:

$$m(x) = \sum_{n_1 \leqslant x^{\varepsilon}} \frac{f_1(n_1)}{n_1} m_2\left(\frac{x}{n_1}\right) + \sum_{x^{\varepsilon} < n_1 \leqslant x^{1-\varepsilon}} \frac{f_1(n_1)}{n_1} m_2\left(\frac{x}{n_1}\right) + \\ + \sum_{x^{1-\varepsilon} < n_1 \leqslant x} \frac{f_1(n_1)}{n_1} m_2\left(\frac{x}{n_1}\right) = S_1 + S_2 + S_3.$$

Для оценки S_1 и S_3 мы применим неравенство (11):

$$S_1 = \sum_{n \leqslant x^{\varepsilon}} \frac{f_1(n)}{n} m_2\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant m_2(x) \sum_{n \leqslant x^{\varepsilon}} \frac{f_1(n)}{n} = \\ = m_2(x)\, m_1(x^{\varepsilon}) = m_1(x)\, m_2(x)\, O(\varepsilon^{\tau_1}).$$

Так как при $n > x^{1-\varepsilon}$ $x/n < x^{\varepsilon}$, то

$$S_3 = \sum_{x^{1-\varepsilon} < n \leqslant x} \frac{f_1(n)}{n} m_2\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant m_2(x^{\varepsilon}) \sum_{x^{1-\varepsilon} < n \leqslant x} \frac{f_1(n)}{n} \leqslant \\ \leqslant m_2(x^{\varepsilon})\, m_1(x) \leqslant m_1(x)\, m_2(x)\, O(\varepsilon^{\tau_2}).$$

Для исследования S_2 надо применить неравенство (11) более тонко. Так как при $n \leqslant x^{1-\varepsilon}$ $x^{\varepsilon} \leqslant x/n \leqslant x$, то

$$S_2 = \sum_{x^{\varepsilon} < n \leqslant x^{1-\varepsilon}} \frac{f_1(n)}{n} m_2\left(\frac{x}{n}\right) = \\ = (1 + o(1))\, m_2(x) \sum_{x^{\varepsilon} < n \leqslant x^{1-\varepsilon}} \frac{f_1(n)}{n} \left(\frac{\ln \frac{x}{n}}{\ln x}\right)^{\tau_2} = \\ = (1 + o(1))\, m_2(x) \int_{x^{\varepsilon}}^{x^{1-\varepsilon}} \left(\frac{\ln \frac{x}{t}}{\ln x}\right)^{\tau_2} dm_1(t).$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем с $u = \dfrac{\ln \frac{x}{t}}{\ln x}$

$$S_2 = (1 + o(1))\, m_2(x) \times \\ \times \left(\varepsilon^{\tau_2} m_1(x^{1-\varepsilon}) - (1-\varepsilon)^{\tau_2} m_1(x^{\varepsilon}) - \int_{x^{\varepsilon}}^{x^{1-\varepsilon}} m_1(t)\, du^{\tau_2}\right).$$

Применяя еще раз (к функции $m_1(t)$) неравенство (11), получаем

$$S_2=(1+o(1))\,m_2(x)\left((O(\varepsilon^{\tau_2})+O(\varepsilon^{\tau_1}))\,m_1(x)-\right.$$
$$\left.-(1+o(1))\,m_1(x)\int\limits_{x^{\varepsilon}}^{x^{1-\varepsilon}}\left(\frac{\ln t}{\ln x}\right)^{\tau_1}du^{\tau_2}\right)=$$
$$=(1+o(1))\,m_1(x)\,m_2(x)\times$$
$$\times\left((1+o(1))\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(1-u)^{\tau_1}du^{\tau_2}+O(\varepsilon^{\tau_2})+O(\varepsilon^{\tau_1})\right).$$

Таким образом, мы получаем

$$\frac{m(x)}{m_1(x)\,m_2(x)}=O(\varepsilon^{\tau_1}+\varepsilon^{\tau_2})+(1+o(1))\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(1-u)^{\tau_1}du^{\tau_2}=$$
$$=O(\varepsilon^{\tau_1}+\varepsilon^{\tau_2})+(1+o(1))\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^1(1-u)^{\tau_1}du^{\tau_2}+O\left(\varepsilon^{\tau_1}\int\limits_{1-\varepsilon}^1 du^{\tau_2}+\int\limits_0^1 du^{\tau_2}\right)\right)=$$
$$=O(\varepsilon^{\tau_1}+\varepsilon^{\tau_2})+(1+o(1))\int\limits_0^1(1-u)^{\tau_1}du^{\tau_2}=$$
$$=\frac{\Gamma(\tau_1+1)\,\Gamma(\tau_2+1)}{\Gamma(\tau_1+\tau_2+1)}+o(1)+O(\varepsilon^{\tau_1}+\varepsilon^{\tau_2}).$$

Так как ε произвольно, а $\tau_1+\tau_2=\tau$, то при $x\to\infty$

$$\frac{m(x)}{m_1(x)\,m_2(x)}\to\frac{\Gamma(1+\tau_1)\,\Gamma(1+\tau_2)}{\Gamma(1+\tau)}.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Задана последовательность неотрицательных чисел a_n. Известно, что при $x\to\infty$*

$$\sum_{n\leqslant x}a_n\sim\tau\ln x,$$

где $\tau>0$. Задано число $0<\beta<1$. Можно выделить подпоследовательность $a_{n'}$ такую, что

$$\sum_{n\leqslant x}a_{n'}\sim\beta\tau\ln x.$$

Доказательство. За первый член подпоследовательности возьмем a_2. Далее могут быть два случая: $a_2 \leqslant \beta\tau \ln 2$, тогда за второй член подпоследовательности берем a_3; если $a_2 > \beta\tau \ln 2$, то тогда a_3 пропускаем. Предполагаем, что мы знаем, какие члены составляют подпоследовательность до номера $N-1$:

$$a_1\chi(1),\ a_2\chi(2),\ \ldots,\ a_{N-1}\chi(N-1),$$

где

$$\chi(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \text{ остается}, \\ 0, & \text{если } a_i \text{ вычеркивается}. \end{cases}$$

Мы полагаем

$$\chi(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{n=1}^{N-1} a_n\chi(n) \leqslant \beta\tau \ln(N-1), \\ 0, & \text{если } \sum_{n=1}^{N-1} a_n\chi(n) > \beta\tau \ln(N-1). \end{cases}$$

Докажем, что при $N \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\chi(n) \sim \beta\tau \ln N.$$

Будем говорить, что N — рабочий номер, если $\chi(N)=1$, и N — холостой номер, если $\chi(N)=0$. Номер N назовем номером перескока, если выполняется одно из следующих двух условий:

$$\mathrm{A}_1)\quad \sum_{n=1}^{N-2} a_n\chi(n) \leqslant \beta\tau \ln(N-2), \text{ но } \sum_{n=1}^{N-1} a_n\chi(n) > \beta\tau \ln(N-1);$$

$$\mathrm{A}_2)\quad \sum_{n=1}^{N-2} a_n\chi(n) > \beta\tau \ln(N-2), \text{ но } \sum_{n=1}^{N-1} a_n\chi(n) \leqslant \beta\tau \ln(N-1).$$

В силу того, что при фиксированном N и $M \to \infty$ $\sum\limits_{N \leqslant n \leqslant M} a_n \sim \tau \ln M > \beta\tau \ln M$ (строгое неравенство), существует бесконечно много номеров перескока.

Обозначим

$$\varepsilon_N = \sup_{n \geqslant N} \frac{a_n}{\ln n}.$$

При $N \to \infty$ $\varepsilon_N \to 0$. Действительно, при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0, что при $n \geqslant N_0$

$$\left| \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{j \leqslant n+1} a_j - \frac{1}{\ln n} \sum_{j \leqslant n} a_n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$\left| \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} \right) \sum_{j \leqslant n} a_n - \frac{a_{n+1}}{\ln(n+1)} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

При $n \geqslant N_1$

$$\frac{1}{\ln n} \sum_{j \leqslant n} a_n \leqslant 2\tau.$$

При $n \geqslant \max(N_0, N_1)$

$$\frac{a_{n+1}}{\ln(n+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\tau}{\ln(n+1)} (\ln(n+1) - \ln n).$$

При $n \geqslant N_2$

$$\frac{a_n}{\ln n} \leqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим $\sum\limits_{n \leqslant N} a_n \chi(n)$.

а) Пусть N есть холостой номер. Тогда

$$\sum_{n \leqslant N} a_n \chi(n) = \sum_{n \leqslant N-1} a_n \chi(n) > \beta\tau \ln(N-1).$$

Пусть N' — ближайший, меньший N, номер перескока. Тогда

$$\beta\tau \ln(N'-1) + a_{N'} > \sum_{n \leqslant N} a_n \chi(n) > \beta\tau \ln(N-1),$$

$$\beta\tau + \frac{a_{N'}}{\ln N} > \frac{1}{\ln N} \sum_{n \leqslant N} a_n \chi(n) > \beta\tau \frac{\ln(N-1)}{\ln N},$$

$$\frac{a_{N'}}{\ln N} \leqslant \frac{a_{N'}}{\ln N'} \to 0,$$

так как при $N \to \infty$ и $N' \to \infty$.

б) Пусть N есть рабочий номер, а N' — ближайший, меньший N, номер перескока. Тогда

$$\beta\tau \ln(N-1) + a_N \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n \leqslant N} a_n \chi(n) \geqslant \beta\tau \ln(N'-1) + a_{N'} + a_{N'+1} + \ldots + a_N.$$

Поскольку $a_N/\ln N \to 0$, то

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\ln N} \sum_{n\leqslant N} a_n\chi(n) \leqslant \beta\tau.$$

Обозначим

$$\varepsilon_{N'} = \sup_{N>N'} \left| \frac{1}{\ln N} \sum_{n\leqslant N} a_n - \frac{1}{\ln N'} \sum_{n\leqslant N'} a_n \right|.$$

По критерию Коши при $N' \to \infty$ $\varepsilon_{N'} \to 0$. Мы имеем

$$\left(\frac{1}{\ln N'} - \frac{1}{\ln N}\right) \sum_{n\leqslant N'} a_n - \frac{1}{\ln N} \sum_{N'<n\leqslant N} a_n = \theta\varepsilon_{N'}, \quad |\theta| \leqslant 1$$

$$\sum_{N'\leqslant n\leqslant N} a_n = a_{N'} + \theta \ln N \varepsilon_{N'} + \frac{\ln N - \ln N'}{\ln N'} \sum_{n\leqslant N'} a_n.$$

Далее,

$$\frac{1}{\ln N} \sum_{n\leqslant N} a_n\chi(n) \geqslant \beta\tau \frac{\ln(N'-1)}{\ln N} + \theta\varepsilon_{N'} + \frac{a_{N'}}{\ln N} + \\ + \frac{\ln N - \ln N'}{\ln N} \frac{1}{\ln N'} \sum_{n\leqslant N'} a_n.$$

При достаточно больших N

$$\frac{1}{\ln N'} \sum_{n\leqslant N'} a_n > \beta\tau.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\ln N} \sum_{n\leqslant N} a_n\chi(n) > \beta\tau \left(\frac{\ln(N-1)}{\ln N} + \frac{\ln(N'-1) - \ln N'}{\ln N}\right) + \\ + \frac{a_{N'}}{\ln N} + \theta\varepsilon_{N'}$$

и

$$\underline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\ln N} \sum_{n\leqslant N} a_n\chi(n) \geqslant \beta\tau.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *При* $x \to \infty$

$$m(x) \sim \frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(1+\tau)} \Pi(x).$$

Доказательство. При $\tau = 0$ это утверждение содержится в лемме 3.

Пусть $\tau > 0$. Тогда

$$\sum_{p \leqslant x} f(p) \frac{\ln p}{p} \sim \tau \ln x.$$

Положим

$$a_n = \begin{cases} f(p) \dfrac{\ln p}{p}, & n = p \text{ простое}, \\ 0, & n \text{ составное}. \end{cases}$$

В этой записи

$$\sum_{n \leqslant x} a_n \sim \tau \ln x.$$

Зададим натуральное r. По лемме 6 мы можем разбить множество простых чисел $\mathfrak{P}$ на r непересекающихся классов $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ так, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$

$$\sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathfrak{P}_i}} f(p) \frac{\ln p}{p} \sim \frac{\tau}{r} \ln x.$$

Применим лемму 5. Мы получаем при $x \to \infty$

$$m(x) \Gamma(1 + \tau) \sim \left(\Gamma\left(1 + \frac{\tau}{r}\right)\right)^r \prod_{i=1}^{r} m_i(x).$$

К каждому $m_i(x)$ применим лемму 3:

$$m(x) \Gamma(1 + \tau) = (1 + o(1)) \Gamma\left(1 + \frac{\tau}{r}\right)^r \prod_{i=1}^{r} \left(1 + 2\theta_i \frac{\tau^2}{r^2}\right) \Pi_i(x),$$

где

$$\Pi_i(x) = \prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathfrak{P}_i}} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \ldots\right), \qquad |\theta_i| \leqslant 1.$$

Очевидно, что

$$\prod_{i=1}^{r} \Pi_i(x) = \Pi(x).$$

Далее, при $r \to \infty$

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 + 2\theta_i \frac{\tau^2}{r^2}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\Gamma(1+\tau x)=\frac{\tau\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=-\gamma\tau,$$

то

$$\lim_{r\to\infty}\Gamma\left(1+\frac{\tau}{r}\right)^r=e^{-\gamma\tau}.$$

Итак, переходя к пределу при $r\to\infty$, получаем при $x\to\infty$

$$m(x)\sim\frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(1+\tau)}\Pi(x).$$

Лемма 7 доказана.

Комбинируя результаты лемм 2 и 7, получаем: при $\tau>0$

$$M(x)\sim\frac{\tau x}{\ln x}m(x)\sim\frac{\tau e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(1+\tau)}\frac{x}{\ln x}\Pi(x)=\frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(\tau)}\frac{x}{\ln x}\Pi(x);$$

при $\tau=0$

$$M(x)=o\left(\frac{x}{\ln x}m(x)\right)=o\left(\frac{x}{\ln x}\Pi(x)\right).$$

Теорема Вирзинга доказана.

Б. В. Левин и А. С. Файнлейб [38] предложили следующее обобщение теоремы Вирзинга.

Теорема. *Пусть $f(n)$ — комплекснозначная мультипликативная функция. Предположим, что при $x\to\infty$*

$$\sum_{p\leqslant x}f(p)=(\tau+o(1))\frac{x}{\ln x}.$$

Далее, предположим, что

$$\sum_{p\leqslant x}|f(p)|=O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

и, наконец, при любом $r\geqslant 2$

$$f(p^r)=O\left((2p)^{c_0 r}\right),\qquad 0<c_0<\frac{1}{2}.$$

Тогда при $x\to\infty$

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)=\frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(\tau)}\frac{x}{\ln x}\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\dots\right)+$$
$$+o\left(\frac{x}{\ln x}\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{|f(p)|}{p}+\frac{|f(p^2)|}{p^2}+\dots\right)\right).$$

4.4. Неравенство Турана — Кубилюса

Займемся задачей о распределении значений функции $\nu(n)$, количества различных простых делителей числа n.

Заметим, что функция $\nu(n)$ обладает свойством строгой аддитивности, т. е. для двух взаимно простых чисел n и m

$$\nu(nm) = \nu(n) + \nu(m),$$

и для любого простого числа p и натурального r

$$\nu(p^r) = \nu(p)$$

(в данном случае $\nu(p^r) = \nu(p) = 1$).

Оценим порядок роста среднего значения этой функции:

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \nu(n) = \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \sum_{p \mid n} 1 = \frac{1}{N} \sum_{p \leqslant N} \left[\frac{N}{p}\right] =$$
$$= \sum_{p \leqslant N} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{\ln N}\right) = \ln \ln N + O(1).$$

Естественно, возникает вопрос о том, как сильно в среднем колеблется функция $\nu(n)$ около величины $\ln \ln n$. Обозначим через

$$P_N\left(|\nu(m) - \ln \ln N| \leqslant \psi(N) \sqrt{\ln \ln N}\right)$$

количество чисел $m = 1, 2, \ldots, N$, для которых при заданной положительной функции $\psi(N)$ выполняется неравенство

$$|\nu(m) - \ln \ln N| \leqslant \psi(N) \sqrt{\ln \ln N}.$$

Далее введем такое обозначение для частоты:

$$V_N\left(|\nu(m) - \ln \ln N| \leqslant \psi(N) \sqrt{\ln \ln N}\right) =$$
$$= \frac{P_N\left(|\nu(m) - \ln \ln N| \leqslant \psi(N) \sqrt{\ln \ln N}\right)}{N}.$$

Речь идет о поведении величины $V_N(\ldots)$ при $N \to \infty$.

Первый результат в этом направлении принадлежит Г. Харди и С. Рамануджану [120], доказавшим в 1917 г., что для любой положительной неограниченно возрастающей при $N \to \infty$ функции $\psi(N)$

$$\lim_{N\to\infty} V_N\left(|\nu(m) - \ln\ln N| \leqslant \psi(N)\sqrt{\ln\ln N}\right) = 1.$$

Другое доказательство этого результата было предложено П. Тураном [152]. Особенность этого доказательства состоит в том, что при его проведении наблюдается отчетливая аналогия с доказательством Чебышева закона больших чисел. Метод Турана был обобщен И. П. Кубилюсом [34]. Мы приведем доказательство следующего неравенства, называемого неравенством Турана — Кубилюса:

Теорема. *Обозначим для заданной комплексной аддитивной функции $f(n)$*

$$A(N) = \sum_{p \leqslant N} \frac{f(p)}{p} \quad \text{и} \quad D^2(N) = \sum_{p^\alpha \leqslant N} \frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha}.$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n) - A(N)|^2 < C_1 D^2(N),$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая от функции $f(n)$.

Доказательство. Мы будем писать $p^\alpha \| m$, если $p^\alpha | m$, а $p^{\alpha+1} \nmid m$. Ясно, что

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m) = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{p^\alpha \| m} f(p^\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{p^\alpha \leqslant N} f(p^\alpha) P_N(p^\alpha \| m),$$

где через $P_N(p^\alpha \| m)$ обозначено количество чисел, не превосходящих N, для которых $p^\alpha \| m$. Но

$$P_N(p^\alpha \| m) = \left[\frac{N}{p^\alpha}\right] - \left[\frac{N}{p^{\alpha+1}}\right].$$

Следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)=\frac{1}{N}\sum_{p^\alpha\leqslant N} f(p^\alpha)\left(\left[\frac{N}{p^\alpha}\right]-\left[\frac{N}{p^{\alpha+1}}\right]\right)=$$

$$=\sum_{p^\alpha\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}+\frac{2\theta}{N}\sum_{p^\alpha\leqslant N}|f(p^\alpha)|,\qquad |\theta|\leqslant 1.$$

Далее по неравенству Коши — Буняковского

$$\sum_{p^\alpha\leqslant N}|f(p^\alpha)|\leqslant\sqrt{\sum_{p^\alpha\leqslant N}p^\alpha\cdot\sum_{p^\alpha\leqslant N}\frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha}}=$$

$$=D(N)\Big(\sum_{p^\alpha\leqslant N}p^\alpha\Big)^{1/2}\leqslant\sqrt{N}\,D(N)\sqrt{\sum_{p^\alpha\leqslant N}1}\,.$$

Но

$$\sum_{p^\alpha\leqslant N}1\leqslant\sum_{p\leqslant N}1+\sum_{p\leqslant\sqrt{N}}\;\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{\ln N}{\ln p}}1=$$

$$=O\left(\frac{N}{\ln N}\right)+O\Big(\sum_{p\leqslant\sqrt{N}}\ln N\Big)=O\left(\frac{N}{\ln N}\right).$$

Значит,

$$\sum_{p^\alpha\leqslant N}|f(p^\alpha)|=O\left(\frac{N\,D(N)}{\sqrt{\ln N}}\right)$$

с абсолютной постоянной в символе O. Мы получим

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)=\sum_{p^\alpha\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}+O\left(\frac{D(N)}{\sqrt{\ln N}}\right).$$

Далее,

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)=A(N)+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant N\\ \alpha>1}}\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}-\sum_{p^\alpha\leqslant N}\frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}}+O\left(\frac{D(N)}{\sqrt{\ln N}}\right),$$

откуда

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m) - A(N)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant N \\ \alpha > 1}}\right|\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\left| + \left|\sum_{p^\alpha \leqslant N} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}}\right| + O\left(\frac{D(N)}{\sqrt{\ln N}}\right).$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$\left|\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant N \\ \alpha > 1}} \frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant N \\ \alpha > 1}} \frac{1}{p^\alpha} \sum_{p^\alpha \leqslant N} \frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha}} = O(D(N))$$

с абсолютной постоянной в символе O. Аналогично

$$\left|\sum_{p^\alpha \leqslant N} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha+1}}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{p^\alpha \leqslant N} \frac{1}{p^{\alpha+2}} \sum_{p^\alpha \leqslant N} \frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha}} = O(D(N)).$$

Итак,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m) - A(N)\right| = O(D(N)).$$

Отсюда

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n) - A(N)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|f(n) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\right|^2 + 2\left|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m) - A(N)\right|^2 =$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|f(n) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\right|^2 + O(D^2(N)).$$

Очевидно,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|f(n) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m)\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} |f(m)|^2 - \frac{1}{N^2}\left|\sum_{m=1}^{N} f(m)\right|^2.$$

Мы имеем

$$\sum_{m=1}^{N} |f(m)|^2 = \sum_{m=1}^{N} \sum_{p^\alpha \parallel m} \sum_{q^\beta \parallel m} f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)} =$$
$$= \sum_{p^\alpha \leqslant N} |f(p^\alpha)|^2 P_N(p^\alpha \parallel m) +$$
$$+ \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant N \\ p \neq q}} f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)}\, P_N(p^\alpha \parallel m,\ q^\beta \parallel m).$$

При $p \neq q$

$$P_N(p^\alpha \parallel m,\ q^\beta \parallel m) = P_N(p^\alpha q^\beta \mid m) - P_N(p^{\alpha+1} q^\beta \mid m) -$$
$$- P_N(p^\alpha q^{\beta+1} \mid m) + P_N(p^{\alpha+1} q^{\beta+1} \mid m) =$$
$$= \left[\frac{N}{p^\alpha q^\beta}\right] - \left[\frac{N}{p^{\alpha+1} q^\beta}\right] - \left[\frac{N}{p^\alpha q^{\beta+1}}\right] + \left[\frac{N}{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}\right] =$$
$$= \frac{N}{p^\alpha q^\beta}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) + 4\theta,$$

где $|\theta| \leqslant 1$. Отсюда и из оценки $P_N(p^\alpha \parallel m) \leqslant \frac{N}{p^\alpha}$ получаем

$$\sum_{m=1}^{N} |f(m)|^2 = O(ND^2(N)) + N \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant N \\ p \neq q}} \frac{f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)}}{p^\alpha q^\beta} \times$$
$$\times \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) + O\Bigl(\sum_{p^\alpha p^\beta \leqslant N} |f(p^\alpha)|\,|f(q^\beta)|\Bigr).$$

Будем оценивать последнюю сумму. По неравенству Коши — Буняковского

$$\sum_{p^\alpha p^\beta \leqslant N} |f(p^\alpha) f(q^\beta)| \leqslant$$
$$\leqslant \Bigl(\sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant N} p^\alpha q^\beta\Bigr)^{1/2} \Bigl(\sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant N} \frac{|f(p^\alpha)|^2 |f(q^\beta)|^2}{p^\alpha q^\beta}\Bigr)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{N}\, D^2(N) \Bigl(\sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant N} 1\Bigr)^{1/2} = O(ND^2(N)).$$

Значит,

$$\sum_{m=1}^{N} |f(m)|^2 = O(ND^2(N)) + $$

$$+ N \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant N} \frac{f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)}}{p^\alpha q^\beta}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) -$$

$$- N \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant N \\ p = q}} \frac{f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)}}{p^\alpha q^\beta}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Теперь аналогично предшествующим выкладкам имеем

$$\left| \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant N \\ p = q}} \frac{f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)}}{p^\alpha q^\beta}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant N \\ p = q}} \frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha q^\beta} \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta \leqslant N \\ p = q}} \frac{|f(q^\beta)|^2}{p^\alpha q^\beta} \right)^{1/2} =$$

$$= O\left(\sum_{p^\alpha \leqslant N} \frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^{\alpha+1}} \right) = O(D^2(N)).$$

Эти оценки дают

$$\sum_{m=1}^{N} |f(m)|^2 =$$

$$= N \sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant N} \frac{f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)}}{p^\alpha q^\beta}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) + O(ND^2(N)).$$

Мы получаем неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |f(n) - A(N)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\sum_{p^\alpha q^\beta \leqslant N} \frac{f(p^\alpha) f(q^\beta)}{p^\alpha q^\beta}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{N^2} \left| \sum_{m=1}^{N} f(m) \right|^2 \right) + O(D^2(N))$$

с абсолютной постоянной в символе O. Но мы уже видели, что

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(m) = \sum_{p^\alpha \leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha} + O\left(\frac{D(N)}{\sqrt{\ln N}}\right).$$

Значит,

$$\frac{1}{N^2}\left|\sum_{m=1}^{N} f(m)\right|^2 = \left|\sum_{p^\alpha \leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right|^2 + O\left(\frac{D^2(N)}{\ln N}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{D(N)}{\sqrt{\ln N}}\left|\sum_{p^\alpha \leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right|\right) =$$

$$= \left|\sum_{p^\alpha \leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{f(p^\alpha)}{p^\alpha}\right|^2 + O\left(\frac{D^2(N)}{\ln N}\right) + O\left(\frac{D^2(N)}{\sqrt{\ln N}}\sqrt{\ln\ln N}\right),$$

ибо опять-таки по неравенству Коши

$$\left(\sum_{p^\alpha \leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{p^\alpha \leqslant N}\frac{1}{p^\alpha}\right)\left(\sum_{p^\alpha \leqslant N}\frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha}\right) = O(D^2(N)\ln\ln N).$$

Отсюда

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n) - A(N)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta > N \\ p^\alpha \leqslant N,\ q^\beta \leqslant N}} \frac{f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)}}{p^\alpha q^\beta}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) + O(D^2(N)).$$

Опять мы применяем неравенство Коши — Буняковского и получаем

$$\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta > N \\ p^\alpha \leqslant N,\ q^\beta \leqslant N}} \frac{f(p^\alpha)\overline{f(q^\beta)}}{p^\alpha q^\beta}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta > N \\ p^\alpha \leqslant N,\ q^\beta \leqslant N}} \frac{1}{p^\alpha}\frac{1}{q^\beta}} \sqrt{\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant N \\ q^\beta \leqslant N}} \frac{|f(p^\alpha)|^2\,|f(q^\beta)|^2}{p^\alpha q^\beta}} =$$

$$= D^2(N)\sqrt{\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta > N \\ p^\alpha \leqslant N,\ q^\beta \leqslant N}} \frac{1}{p^\alpha}\frac{1}{q^\beta}}.$$

Очевидно,

$$\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta > N \\ p^\alpha \leqslant N,\ q^\beta \leqslant N}} \frac{1}{p^\alpha}\frac{1}{q^\beta} =$$

$$= 2\sum_{p^\alpha \leqslant \sqrt{N}} \frac{1}{p^\alpha} \sum_{\frac{N}{p^\alpha} < q^\beta \leqslant N} \frac{1}{q^\beta} + O\left(\sum_{\sqrt{N} \leqslant p^\alpha \leqslant N} \frac{1}{p^\alpha}\right) =$$

$$= 2\sum_{p^\alpha \leqslant \sqrt{N}} \frac{1}{p^\alpha}\left(\ln\frac{\ln N}{\ln N - \ln p^\alpha} + O\left(\frac{1}{\ln N}\right)\right) + O(1) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\ln N}\sum_{p^\alpha \leqslant \sqrt{N}} \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha}\right) + O(1) = O(1).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n) - A(N)|^2 = O(D^2(N))$$

с абсолютной постоянной в символе O. Неравенство Турана — Кубилюса доказано.

Следствие. *Пусть $f(n)$ — сильно аддитивная функция. Обозначим*

$$B^2(N) = \sum_{p \leqslant N} \frac{|f(p)|^2}{p}.$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n)-A(N)|^2 \leqslant C_1 B^2(N).$$

В самом деле, для сильно аддитивных функций

$$D^2(N)=\sum_{p^\alpha\leqslant N}\frac{|f(p^\alpha)|^2}{p^\alpha}=\sum_{p^\alpha\leqslant N}\frac{|f(p)|^2}{p^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p\leqslant N}\frac{|f(p)|^2}{p}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)B^2(N).$$

Покажем, что из неравенства Турана — Кубилюса вытекает теорема Харди и Рамануджана о функции $\nu(n)$. Так как для функции $\nu(n)$

$$A(N)=\sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p}=\ln\ln N+O(1)$$

и

$$B^2(N)=\sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p}=\ln\ln N+O(1)=O(\ln\ln N),$$

то по неравенству Турана — Кубилюса для сильно аддитивных функций

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|\nu(n)-\ln\ln N|^2\leqslant\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}|\nu(n)-A(N)|^2+O(1)=$$

$$=O(B^2(N))+O(1)=O(\ln\ln N).$$

Пусть теперь задана положительная, стремящаяся к бесконечности при $N\to\infty$ функция $\psi(N)$. Мы имеем

$$P_N\left(|\psi(n)-\ln\ln N|\geqslant\psi(N)\sqrt{\ln\ln N}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{n=1\\ |\psi(n)-\ln\ln N|\geqslant\psi(N)\sqrt{\ln\ln N}}}^{N} 1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\psi^2(N)\ln\ln N}\sum_{n=1}^{N}|\psi(N)-\ln\ln N|^2=O\left(\frac{N}{\psi^2(N)}\right).$$

Итак, при $N \to \infty$

$$V_N\left(|\psi(n) - \ln\ln N| \geqslant \psi(N)\sqrt{\ln\ln N}\right) \to 0,$$

что и требовалось установить.

4.5. Теоремы Деланжа

Речь идет о двух теоремах Деланжа — прямой и обратной. Сформулируем и докажем прямую теорему Деланжа.

Теорема 1. *Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция, $|f(n)| \leqslant 1$ для всех натуральных n. Предположим, что существует*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} f(n) = M(f)$$

и что $M(f) \neq 0$. Тогда

1) *ряд $\sum\limits_p \frac{1 - f(p)}{p}$ сходится;*

2) *существует такое натуральное r, что $f(2^r) \neq -1$.*

Доказательство. Для всякой мультипликативной функции $f(n)$ мы определим числа $c_r^{(p)}(f)$ ($r = 1, 2, \ldots, p$ пробегает простые числа) следующим образом:

а) при $r = 1$

$$c_1^{(p)}(f) = f(p); \tag{1}$$

б) при $r > 1$

$$c_r^{(p)}(f) = rf(p^r) - \sum_{j=1}^{r-1} c_j^{(p)}(f) f(p^{r-j}). \tag{1'}$$

Мы имеем для всех $n \geqslant 1$

$$f(n)\ln n = \sum_{p^j \mid n} c_j^{(p)}(f) f\left(\frac{n}{p^j}\right) \ln p. \tag{2}$$

В самом деле, пусть $n = p_0^r m$, $(m, p_0) = 1$. Если $r = 1$, то в правой части равенства мы имеем член

$$c_1^{(p_0)}(f) f(m) \ln p_0 = f(p_0) f(m) \ln p_0 = f(n) \ln p_0.$$

Если $r>1$, то в правую часть (2) входит сумма

$$\sum_{j=1}^{r} c_j^{(p_0)}(f) f(p_0^{r-j}m)\ln p_0 =$$
$$= f(m)\ln p_0\left(\sum_{j=1}^{r-1} c_j^{(p_0)}(f) f(p_0^{r-j}) + c_r^{(p_0)}(f)\right) =$$
$$= f(m)\ln p_0 r f(p_0^r) = f(mp_0^r)\ln p_0^r = f(n)\ln p_0^r.$$

Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция с добавочным условием

$$|f(n)|\leqslant 1.$$

Докажем по индукции, что

$$|c_r^{(p)}(f)|\leqslant 2^r-1. \tag{3}$$

Для $r=1$ это очевидно. Далее,

$$|c_r^{(p)}(f)|\leqslant r+\sum_{j=1}^{r-1}(2^j-1)=2^r-1.$$

Для каждого простого p степенной ряд

$$F_p(z)=1+\sum_{j=1}^{\infty} f(p^j)z^j$$

сходится при $|z|<1$. А ряд

$$c_p(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j^{(p)}(f)}{j}z^j$$

сходится (в силу неравенства (3)) при $|z|<1/2$.

Лемма 1. *При* $|z|<1/2$

$$F_p(z)=e^{c_p(z)}. \tag{4}$$

Доказательство. На основании равенств (1) и (1′) мы имеем

$$c_p'(z)F_p(z)=F_p'(z) \tag{5}$$

(равенства (1) и (1′) получаются при сравнении коэффициентов при одинаковых степенях z в соотношении (5)).

Отсюда, интегрируя, получаем

$$F_p(z) = ce^{c_p(z)},$$

где c — постоянная. Но из

$$F_p(0) = 1 \quad \text{и} \quad c_p(0) = 0$$

получаем, что $c = 1$.

Из равенств

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} f(p^j) z^j = e^{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^{(p)}(f)}{j} z^j} \tag{4}$$

и

$$1 - z = e^{\ln(1-z)} = e^{-\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}}$$

получаем при $|z| < 1/2$

$$(1-z)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} f(p^j) z^j\right) = e^{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{j} z^j}. \tag{4'}$$

Лемма 2. *Пусть для мультипликативной функции $f(n)$ выполнены условия теоремы* 1. *Пусть s стремится к* 1 *по вещественной оси со стороны значений, больших* 1 (*это будем обозначать* $s \to 1+0$). *Выражение*

$$\sum_p \frac{1 - f(p)}{p^s}$$

стремится при этом к конечному пределу.

Доказательство. В силу мультипликативности функции $f(n)$ мы имеем при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}}\right).$$

Отсюда

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}}\right),$$

и, учитывая равенство (4′), получаем

$$\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f(2^j)}{2^{js}}\right)e^{-\sum\limits_{p>2}\frac{1-f(p)}{p^s}+\sum\limits_{p>2,\ j>1}\frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}}.$$

При вещественном $s>1$

$$\operatorname{Re}\sum_{p>2,\ j>1}\frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}\leqslant\left|\sum_{p>2,\ j>1}\frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}\right|\leqslant\sum_{p>2,\ j>1}\frac{2^j}{jp^j}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p>2,\ j>1}\frac{2^{j-1}}{p^j}=\sum_{p>2}\frac{2}{p^2}\frac{1}{1-\dfrac{2}{p}}=\sum_{p>2}\frac{2}{p(p-2)}.$$

Отсюда при вещественном $s>1$

$$\left|\exp\left(-\sum_{p>2}\frac{1-f(p)}{p^s}+\sum_{p>2,\ j>1}\frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left[a-\sum_{p>2}\frac{1-\operatorname{Re}f(p)}{p^s}\right],$$

где

$$a=\sum_{p>2}\frac{2}{p(p-2)}.$$

По условию $1-\operatorname{Re}f(p)\geqslant 0$, значит,

$$\left|\exp\left[-\sum_{p>2}\frac{1-f(p)}{p^s}+\sum_{p>2,\ j>1}\frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}\right]\right|\leqslant e^a. \tag{6}$$

Мы теперь будем использовать условие теоремы о том, что при $x\to\infty$

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\sim M(f)\,x \tag{7}$$

и $M(f) \neq 0$. С помощью абелева преобразования из (7) легко получить, что при $s \to 1+0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sim \frac{M(f)}{s-1}. \tag{8}$$

Итак, при $s \to 1+0$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(2^j)}{2^{js}}\right) \times$$
$$\times \exp\left[-\sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} + \sum_{p>2,\ j>1} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}\right]$$

стремится к пределу $M(f) \neq 0$. При $s \to 1+0$

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(2^j)}{2^{js}}\right) \to \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(2^j)}{2^j}\right).$$

На основании неравенства (6) при $\operatorname{Re} s > 1$ выражение

$$\exp\left[-\sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} + \sum_{p>2,\ j>1} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}\right]$$

равномерно ограничено. Мы заключаем, что

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(2^j)}{2^j} \neq 0. \tag{9}$$

Если бы для всех целых $j \geqslant 1$ $f(2^j) = -1$, то

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(2^j)}{2^j} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 0, \tag{9'}$$

что противоречит неравенству (9). Мы доказали попутно второе утверждение теоремы.

Таким образом, функция

$$\exp\left[-\sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} + \sum_{p>2,\ j>1} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}\right]$$

при $s \to 1+0$ стремится к пределу, не равному нулю. На основании оценки (3) выражение

$$\sum_{p>2,\ j>1} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{js}}$$

стремится к

$$\sum_{p>2,\ j>1} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^{j}}.$$

Поэтому выражение

$$\exp\left[-\sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s}\right]$$

стремится при $s \to 1+0$ к пределу, не равному нулю, т. е. ряд

$$\sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s}$$

стремится при $s \to 1+0$ к конечному пределу. Лемма 2 доказана.

Утверждение леммы 2 можно выразить следующим образом: при $s \to 0+0$ (это означает, что вещественное s стремится к нулю со стороны положительной полуоси) выражение

$$\sum_{p} \frac{1-f(p)}{p^{1+s}}$$

стремится к конечному пределу. Обозначим этот предел через l. Нам теперь надо доказать, что сходятся ряды

$$\sum_{p} \frac{1-\operatorname{Re} f(p)}{p} \quad \text{и} \quad -\sum_{p} \frac{\operatorname{Im} f(p)}{p}$$

(первый ряд соответственно к $\operatorname{Re} l$, второй ряд к $\operatorname{Im} l$). По определению интеграла Стилтьеса

$$\sum_{p} \frac{1-\operatorname{Re} f(p)}{p^{s+1}} = \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha_1(t),$$

где

$$\alpha_1(t) = \sum_{\ln p \leqslant t} \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} = \sum_{p \leqslant e^t} \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p},$$

и

$$-\sum_p \frac{\operatorname{Im} f(p)}{p^{s+1}} = \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha_2(t),$$

где

$$\alpha_2(t) = \sum_{\ln p \leqslant t} -\frac{\operatorname{Im} f(p)}{p} = \sum_{p \leqslant e^t} -\frac{\operatorname{Im} f(p)}{p}.$$

Вывод теоремы Деланжа из леммы 2 осуществляется на основании обобщенной теоремы Литтлвуда, формулировку которой мы приводили в § 1.1. Чтобы завершить доказательство, нам надо показать, что функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ медленно колеблющиеся. Для этого мы используем классическую формулу

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + B + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Пусть $t' = \lambda t$, $\lambda > 1$, $t \to \infty$. Мы имеем

$$|\alpha_1(t') - \alpha_1(t)| = \left| \sum_{e^t < p \leqslant e^{\lambda t}} \frac{1 - \operatorname{Re} f(p)}{p} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{e^t < p \leqslant e^{\lambda t}} \frac{1}{p} = 2\ln\lambda + o(1)$$

и

$$|\alpha_2(t') - \alpha_2(t)| = \left| \sum_{e^t < p \leqslant e^{\lambda t}} \frac{\operatorname{Im} f(p)}{p} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{e^t < p \leqslant e^{\lambda t}} \frac{1}{p} = \ln\lambda + o(1).$$

Отсюда, когда $\lambda \to 1$ и $t \to \infty$,

$$\alpha_1(t') - \alpha_1(t) \to 0 \quad \text{и} \quad \alpha_2(t') - \alpha_2(t) \to 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $g(n)$ — мультипликативная функция такая, что*

1) $|g(n)| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) *ряд* $\sum_p \frac{1-g(p)}{p}$ *сходится.*

Тогда существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(n) = M(g)$$

и

$$M(g) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g(p^j)}{p^j}\right).$$

Замечание. При условии более сильном, чем условие 2) теоремы, а именно при требовании, что ряд

$$\sum_p \frac{g(p)-1}{p}$$

абсолютно сходится, утверждение тривиально. В самом деле, определим мультипликативную функцию $\Phi(n)$, заданную в степенях простых чисел, равенством

$$\Phi(p^k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ g(p^k) - g(p^{k-1}), & k \geqslant 1. \end{cases}$$

Мы имеем

$$\sum_{d\mid n} \Phi(d) = g(n),$$

$$\sum_{n\leqslant N} g(n) = N \sum_{n=1}^{N} \frac{\Phi(n)}{n} + O\left(\sum_{n\leqslant N} |\Phi(n)|\right).$$

В силу абсолютной сходимости ряда $\sum_p \frac{g(p)-1}{p}$ сходится и произведение

$$\prod_p \left(1 + \frac{|\Phi(p)|}{p} + \frac{|\Phi(p^2)|}{p^2} + \ldots\right) =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{|g(p)-1|}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right).$$

Значит, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Phi(n)|}{n}$. Отсюда абелевым преобразованием легко получить, что

$$\sum_{n \leqslant N} |\Phi(n)| = o(N).$$

Значит,

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n} + o(1) =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{g(p)-1}{p} + \frac{g(p^2)-g(p)}{p^2} + \ldots\right) + o(1) =$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{g(p)}{p} + \frac{g(p^2)}{p^2} + \ldots\right) + o(1).$$

Деланж дал два доказательства своей теоремы [101], [102]. Мы приводим доказательство его теоремы, данное А. Реньи [145].

Начнем с доказательства следующего предложения.

Лемма 3. *Пусть $g_1(n)$ и $g_2(n)$ — две мультипликативные функции такие, что*

$$|g_1(n)| \leqslant 1 \quad и \quad |g_2(n)| \leqslant 1.$$

Предположим что

1) *существует $M(g_1)$;*

2) $\sum_p \frac{|g_1(p)-g_2(p)|}{p} < \infty$;

3) *если $|g_1(2)|=1$ и $g_1(2^r)=(-1)^{r+1} g_1^r(2)$ для всех $r>1$, то $g_2(2^r)=g_1(2^r)$ при всех r, $r=1, 2, \ldots$*

Тогда существует $M(g_2)$ и

$$M(g_2) = M(g_1) \prod_p \frac{1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_2(p^j)}{p^j}}{1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_1(p^j)}{p^j}}.$$

(В случае, если множитель, соответствующий $p=2$, имеет вид 0/0, то он полагается равным 1).

Произведение, стоящее в правой части, абсолютно сходится.

Доказательство. Введем для каждого p две функции, определенные при $|z|<1$:

$$F_p(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} g_2(p^j)\, z^j$$

и

$$G_p(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} g_1(p^j)\, z^j.$$

Ясно, что $G_p(z) \neq 0$ при $|z|<1/2$, так как для $|z|<1/2$

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} g_1(p^j)\, z^j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |z|^j = \frac{|z|}{1-|z|} < 1.$$

Очевидно, что функция $\dfrac{F_p(z)}{G_p(z)}$ равна 1 при $z=0$, мероморфна при $|z|<1$ и аналитическая при $|z|<1/2$.

Положим для $|z|<1/2$

$$\frac{F_p(z)}{G_p(z)} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(p)} z^j$$

и определим мультипликативную функцию $h(n)$ равенствами

$$h(p^r) = h_r^{(p)}.$$

Для всех $n \geqslant 1$

$$g_2(n) = \sum_{d \mid n} h(d)\, g_1\left(\frac{n}{d}\right).$$

В самом деле, для любого простого p и натурального $r \geqslant 1$

$$\sum_{d \mid p^r} h(d)\, g_1\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{j=0}^{r} h(p^j)\, g_1(p^{r-j}) =$$

$$= g_1(p^r) + \sum_{j=1}^{r} h_j^{(p)} g_1(p^{r-j}) = g_2(p^r).$$

Кроме того (по обобщенной теореме Винтнера), функция $\sum_{d|n} h(d)\, g_1\left(\frac{n}{d}\right)$ мультипликативная.

Заметим, что для любого простого p и $r \geqslant 1$

$$|h(p^r)| \leqslant 2^r.$$

Это следует из того, что коэффициенты функции $F_p(z)/G_p(z)$ мажорируются коэффициентами ряда

$$\frac{1+\sum_{j=1}^{\infty} z^j}{1-\sum_{j=1}^{\infty} z^j} = \frac{1}{1-2z}.$$

Кроме того,

$$h(p) = h_1^{(p)} = g_2(p) - g_1(p).$$

Отсюда мы заключаем, что при любом $p > 2$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(p^j)}{p^j}$$

абсолютно сходится и мажорируется выражением

$$\frac{|g_1(p) - g_2(p)|}{p} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2^j}{p^j} = \frac{|g_1(p) - g_2(p)|}{p} + \frac{4}{p(p-2)}.$$

Докажем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|h(2^j)|}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|h_j^{(2)}|}{2^j}$$

сходится. Для этого достаточно показать, что функция $F_2(z)/G_2(z)$ аналитична в круге с центром в начале координат, радиуса большего, нежели $1/2$. В самом деле, предположим, что $G_2(z) = 0$ при некотором z, $|z| = 1/2$. Обозначив $z = e^{i\theta}/2$ и $g_1(2^j) = \rho_j e^{i\theta_j}$, $0 \leqslant \rho_j < 1$, имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j}{2^j} e^{i(j\theta + \theta_j)} = -1,$$

или, переходя к вещественным частям,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j}{2^j} \cos(j\theta + \theta_j) = -1.$$

Для того чтобы левая часть равнялась правой, необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\rho_j = 1, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\theta j + \theta_j = (2k_j + 1)\pi, \; j = 1, 2, \ldots,$$

с некоторыми целыми k_j. Из последнего соотношения мы заключаем, что

$$j\theta_1 - \theta_j \equiv \pi(j+1) \pmod{2\pi}.$$

Таким образом, если $G_2(z) = 0$ при $|z| = 1/2$, то необходимо

$$|g_1(2)| = 1$$

и при всех $j \geqslant 1$

$$g_1(2^j) = (-1)^{j+1} g_1(2)^j.$$

Но в этом случае по условию

$$\frac{F_2(z)}{G_2(z)} = 1.$$

Отсюда следует, что двойной ряд

$$\sum_p \sum_j \frac{h(p^j)}{p^j}$$

абсолютно сходится. Так как для любого $x > 0$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{|h(n)|}{n} \leqslant \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \sum_{p^j \leqslant x} \frac{|h(p^j)|}{p^j}\right)$$

и бесконечное произведение

$$\prod_p \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|h(p^j)|}{p^j}\right)$$

сходится, то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n}.$$

На основании обобщенной теоремы Винтнера существует среднее значение

$$M(g_2) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} g_2(n)$$

и

$$M(g_2) = M(g_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n}.$$

Далее, по мультипликативности $h(n)$ и абсолютной сходимости ряда в левой части

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n} = \prod \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(p^j)}{p^j}\right) = \prod \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j^{(p)}}{p^j}\right)$$

и произведение в правой части сходится абсолютно.

Если $p > 2$, то, так как $1/p < 1/2$,

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j^{(p)}}{p^j} = \frac{F_p\left(\frac{1}{p}\right)}{G_p\left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_2(p^j)}{p^j}}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_1(p^j)}{p^j}}.$$

Если $p = 2$ и $G_2(1/2) \neq 0$, мы имеем аналогично

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j^{(2)}}{2^j} = \frac{F_2\left(\frac{1}{2}\right)}{G_2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_2(2^j)}{2^j}}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_1(2^j)}{2^j}}.$$

Если $G_2(1/2)=0$, то $F_2(z)=G_2(z)$ и, в частности, $F_2(1/2)=0$. Тогда по соглашению

$$\frac{0}{0}=\frac{1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{g_2(2^j)}{2^j}}{1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{g_1(2^j)}{2^j}}=1.$$

Лемма доказана.

Мультипликативную функцию $g(n)$ назовем сильно мультипликативной, если при любом простом p и натуральном r

$$g(p^r)=g(p).$$

Докажем теорему Деланжа для частного случая сильно мультипликативных функций.

Лемма 4. *Пусть $g(n)$ — сильно мультипликативная функция такая, что*

$$|g(n)|\leqslant 1,\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

и ряд

$$\sum_p \frac{g(p)-1}{p}$$

сходится. Тогда существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(n)=M(g)$$

и

$$M(g)=\prod_p\left(1+\frac{g(p)-1}{p}\right).$$

Доказательство. По условию ряд

$$\sum_p \frac{1-g(p)}{p}$$

сходится. Из этого следует, что сходится ряд

$$\sum_p \frac{1-\operatorname{Re} g(p)}{p}.$$

А из условия, что $|g(n)| \leqslant 1$, вытекает, что все члены последнего ряда неотрицательны, т. е. этот ряд абсолютно сходится. Так же будет сходиться и ряд

$$\sum_{\operatorname{Re} g(p) \leqslant \frac{1}{2}} \frac{1}{p},$$

ибо

$$\sum_{\operatorname{Re} g(p) \leqslant \frac{1}{2}} \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Re} g(p) \leqslant \frac{1}{2}} \frac{1-\operatorname{Re} g(p)}{p} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p} \frac{1-\operatorname{Re} g(p)}{p}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{\operatorname{Re} g(p) \leqslant \frac{1}{2}} \frac{1}{p}$ сходится, то, учитывая результат леммы 3, мы убеждаемся, что достаточно доказать наше утверждение лишь для случая, когда для всех простых p

$$\operatorname{Re} g(p) > \frac{1}{2}.$$

Лемму будем доказывать методом «урезания». Он состоит в том, что вместо $g(n)$ рассматривают семейство вспомогательных функций $g_N(n)$, $N = 1, 2, \ldots$, определенных так:

1) $g_N(n)$ сильно мультипликативная;

2) $g_N(p) = \begin{cases} g(p), & p \leqslant \ln N, \\ 1, & p > \ln N. \end{cases}$

Таким образом,

$$g_N(n) = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant \ln N}} g(p).$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} g_N(n).$$

Чтобы вычислить это выражение, введем в рассмотрение функцию

$$h_N(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g_N(d).$$

Функция $h_N(n)$ мультипликативная (но не сильно мультипликативная, так как $h_N(p)=g_N(p)-1$ и $h_N(p^r)=0$ для $r\geqslant 2$). По формуле обращения Мёбиуса — Чебышева

$$g_N(n)=\sum_{d\mid n} h_N(d).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{h_N(n)}{n}$ содержит конечное число членов и, значит, является сходящимся. Разлагаем этот ряд в произведение, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_N(n)}{n}=\prod_{p\leqslant \ln N}\left(1+\frac{g(p)-1}{p}\right).$$

Теперь

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} g_N(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{d\mid n} h_N(d)=\frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N} h_N(d)\left[\frac{N}{d}\right]=$$
$$=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{h_N(d)}{d}+R_N,$$

где

$$R_N\leqslant\frac{1}{N}\sum_{d=1}^{\infty}|h_N(d)|\leqslant\frac{1}{N}\prod_{p\leqslant \ln N}(1+|g(p)-1|)\leqslant\frac{2^{\pi(\ln N)}}{N},$$

и, следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} R_N=0.$$

Так как

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{p\leqslant \ln N}\left(1+\frac{g(p)-1}{p}\right)=\prod_{p}\left(1+\frac{g(p)-1}{p}\right),$$

причем произведение, стоящее в правой части, сходится ввиду ограничения $|g(p)-1|<2$ и сходимости ряда $\sum\frac{g(p)-1}{p}$, то

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_N(n)=\prod_{p}\left(1+\frac{g(p)-1}{p}\right).$$

Чтобы доказать лемму, достаточно показать, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (g(n) - g_N(n)) = 0.$$

Здесь как раз и скрыта основная трудность доказательства. Обозначим

$$D_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (g(n) - g_N(n)).$$

Ясно, что

$$D_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_N(n) \left(\prod_{\substack{p \mid n \\ p > \ln N}} g(p) - 1 \right).$$

Положим

$$f_N(n) = \sum_{\substack{p \mid n \\ p > \ln N}} \ln g(p)$$

(если у n нет делителей, больших $\ln N$, то полагаем $f_N(n) = 0$). Мы имеем

$$|D_N| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |e^{f_N(n)} - 1|.$$

Для дальнейших оценок нам потребуется следующее неравенство: при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$

$$|e^z - 1| \leqslant |z|;$$

доказательство его очевидно:

$$|e^z - 1| = \left| \int_0^z e^\xi \, d\xi \right| \leqslant \int_0^{|z|} dx = |z|.$$

В силу того, что $\operatorname{Re} f_N(n) \leqslant 0$, получаем

$$|D_N|^2 \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |f_N(n)|^2.$$

Так как

$$|a+b|^2 \leqslant 2(|a|^2 + |b|^2),$$

то

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f_N(n)|^2 \leqslant \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|f_N(n)-\sum_{p\leqslant N}\frac{f_N(p)}{p}\right|^2+2\left|\sum_{p\leqslant N}\frac{f_N(p)}{p}\right|^2.$$

Вспомним теперь наше ограничение $\operatorname{Re} g(p)>\frac{1}{2}$. Положим $|g(p)|=r(p)$ и $\arg g(p)=\theta(p)$, $-\pi<\theta(p)\leqslant\pi$. Так как $\operatorname{Re} g(p)>1/2$, то $|r(p))|>1/2$.

Докажем несколько предварительных предложений.

Замечание 1. Ряд $\sum\limits_p \frac{\ln\frac{1}{r(p)}}{p}$ сходится.

Действительно, из неравенства $\ln\frac{1}{x}\leqslant 2(1-x)$, верного при $x\geqslant 1/2$, вытекает, что

$$\sum_p \frac{\ln\frac{1}{r(p)}}{p}\leqslant 2\sum_p \frac{1-r(p)}{p}\leqslant 2\sum_p \frac{1-\operatorname{Re} g(p)}{p}.$$

Замечание 2. Ряд $\sum\limits_p \frac{\ln^2 r(p)}{p}$ сходится.

Действительно, при $x\geqslant 1/2$ $\ln^2 x=O(1-x)$.

Замечание 3. Ряд $\sum\limits_p \frac{\theta^2(p)}{p}$ сходится.

Доказательство. Так как $\operatorname{Re} g(p)\geqslant 1/2$, то

$$\theta^2(p)=O(\sin^2\theta(p)).$$

Нам надо доказать сходимость ряда $\sum\limits_p \frac{\sin^2\theta(p)}{p}$.

Мы имеем

$$\frac{\sin^2\theta(p)}{1-\operatorname{Re} g(p)}\leqslant\frac{\sin^2\theta(p)}{1-\cos\theta(p)}=\frac{4\sin^2\frac{\theta(p)}{2}\cos^2\frac{\theta(p)}{2}}{2\sin^2\frac{\theta(p)}{2}}=$$

$$=2\cos^2\frac{\theta(p)}{2}<c_1,$$

и значит, $\sin^2\theta(p)=O(1-\operatorname{Re} g(p))$.

Замечание 4. Ряд $\sum_p \frac{\theta(p)}{p}$ сходится (возможно, не абсолютно сходится).

В самом деле, так как $|\theta - \sin\theta| \leqslant c\theta^2$ и ряд $\sum \frac{\theta^2(p)}{p}$ сходится, то нам достаточно показать сходимость ряда

$$\sum_p \frac{\sin\theta(p)}{p}.$$

Мы имеем

$$\sum_{p\leqslant N} \frac{\sin\theta(p)}{p} = \sum_{p\leqslant N} \frac{r(p)\sin\theta(p)}{p} + \sum_{p\leqslant N} \frac{(1-r(p))\sin\theta(p)}{p}.$$

Так как по условию ряд $\sum_p \frac{1-g(p)}{p}$ сходится, то, отделяя мнимую часть этого ряда, убеждаемся, что сходится и ряд $\sum_p \frac{r(p)\sin\theta(p)}{p}$. Далее,

$$\sum_{p\leqslant N} \frac{(1-r(p))\sin\theta(p)}{p} \leqslant \sum_{p\leqslant N} \frac{1-r(p)}{p} \leqslant \sum_{p\leqslant N} \frac{1-\operatorname{Re} g(p)}{p},$$

т. е. второй ряд абсолютно сходится.

Мы имели неравенство

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f_N(n)|^2 \leqslant \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} \left| f_N(n) - \sum_{p\leqslant N} \frac{f_N(p)}{p} \right|^2 + 2\left| \sum_{p\leqslant N} \frac{f_N(p)}{p} \right|^2.$$

Оценим сначала величину

$$\sum_{p\leqslant N} \frac{f_N(p)}{p}.$$

Мы имеем

$$\left| \sum_{p\leqslant N} \frac{f_N(p)}{p} \right|^2 \leqslant 2\left| \sum_{\ln N\leqslant p\leqslant N} \frac{\ln r(p)}{p} \right|^2 + 2\left| \sum_{\ln N\leqslant p\leqslant N} \frac{\theta(p)}{p} \right|^2.$$

Так как ряды $\sum_p \frac{\ln \frac{1}{r(p)}}{p}$ и $\sum_p \frac{\theta(p)}{p}$ сходятся, то при $N\to\infty$

$$\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{p\leqslant N}\frac{f_N(p)}{p}\right|^2=0;$$

$f_N(n)$ есть сильно аддитивная функция. Мы имеем по неравенству Турана — Кубилюса

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|f_N(n)-\sum_{p\leqslant N}\frac{f_N(p)}{p}\right|^2\leqslant c_1\sum_{p\leqslant N}\frac{|f_N(p)|^2}{p}=$$
$$=c_1\sum_{\ln N<p\leqslant N}\frac{\ln^2 r(p)+\theta^2(p)}{p}.$$

И так как ряды

$$\sum\frac{\ln^2 r(p)}{p}\quad\text{и}\quad\sum\frac{\theta^2(p)}{p}$$

сходятся, то

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|f_N(n)-\sum_{p\leqslant N}\frac{f_N(p)}{p}\right|^2=0,$$

и, значит,

$$\lim_{N\to\infty}D_N^2=0,$$

что нам и требуется. Лемма 4 доказана.

Пусть $g(n)$ — заданная мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $|g(n)|\leqslant 1$, $n=1, 2, \ldots$;

2) ряд $\sum_p\frac{1-g(p)}{p}$ сходится.

Построим сильно мультипликативную функцию $\bar g(n)$, определенную для простых $p>2$ равенством $\bar g(p)=g(p)$. Если $g(2)\neq -1$, то $\bar g(2)=g(2)$; если $g(2)=-1$, то $\bar g(2)=1$.

По лемме 3, которую можно применять в силу абсолютной сходимости ряда

$$\sum_p\frac{g(p)-\bar g(p)}{p},$$

мы имеем

$$M(g)=M(\bar{g})\frac{\prod\limits_p\left(1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{g(p^j)}{p^j}\right)}{\prod\limits_p\left(1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{\bar{g}(p)}{p^j}\right)}=$$

$$=M(\bar{g})\frac{\prod\limits_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{g(p^j)}{p^j}\right)}{\prod\limits_p\left(1+\frac{g(p)-1}{p}\right)}.$$

По лемме 4

$$M(\bar{g})=\prod_p\left(1+\frac{g(p)-1}{p}\right).$$

Итак,

$$M(g)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g(p^j)}{p^j}\right),$$

что и требовалось доказать.

Многомерный вариант теоремы Деланжа предложил И. Катаи (см. [128], теорема 1).

Для приложений к вопросу о распределении значений аддитивных функций нужна такая модификация теоремы Деланжа.

Теорема 2′. *Пусть t — параметр, принадлежащий какому-то конечному отрезку вещественной прямой, $g_t(n)$ — семейство мультипликативных функций, удовлетворяющих условиям:*

1) *при любом t $|g_t(n)|\leqslant 1$;*

2) *при любом $n=1, 2, \ldots$ $g_t(n)$ есть непрерывная функция t;*

3) *ряд*

$$\sum_p\frac{1-g_t(p)}{p}$$

равномерно сходится по t.

Тогда при $N \to \infty$ среднее

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} g_t(n)$$

равномерно по t сходится к своему предельному значению (и, значит, представляет непрерывную функцию аргумента t).

Доказательство основано на следующем принципе: если абсолютно сходящийся ряд, члены которого зависят от параметра t, мажорируется сходящимся по t рядом, то он тоже сходится равномерно по t (ибо остаток ряда стремится к нулю равномерно по t). Прежде всего мы убеждаемся в следующем утверждении. Пусть $g_t(n)$ и $h_t(n)$ — два семейства функций натурального аргумента. Определим функцию

$$f_t(n) = \sum_{d \mid n} h_t(n)\, g_t\left(\frac{n}{d}\right).$$

Пусть при каждом t существует $M(g_t(n))$, причем равномерно по t

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} g_t(n) - M(g_t(n)) \to 0$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{h_t(n)}{n}$ абсолютно и равномерно по t сходится. Тогда при каждом t существует среднее $M(f_t)$ и равномерно по t

$$M(f_t) - \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} f_t(n) \to 0.$$

На основании вышеизложенного убеждаемся в справедливости следующего варианта леммы 3.

Лемма 3′. *Пусть даны два семейства мультипликативных функций $g_t^{(1)}(n)$ и $g_t^{(2)}(n)$. Предположим, что*

1) *$M\left(g_t^{(1)}(n)\right)$ существует при каждом t;*

2) *ряд $\sum\limits_{p} \frac{\left| g_t^{(1)}(p) - g_t^{(2)}(p) \right|}{p}$ сходится равномерно по t;*

3) *если при каком-либо* t $|g_t^{(1)}(2)|=1$ *и* $g_t^{(1)}(2^r)=(-1)^{r+1}(g_t^{(1)}(2))^r$ *для всех* $r>1$, *то для всех* r

$$g_t^{(2)}(2^r)=g_t^{(1)}(2^r).$$

Тогда при любом t *существует* $M(g_t^{(2)}(n))$ *и*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} g_t^{(2)}(n)-M(g_t^{(2)}(n))\to 0$$

равномерно по t.

Имеет место аналог леммы 4.

Лемма 4′. *Пусть* $g_t(n)$ — *семейство сильно мультипликативных функций, причем*

$$|g_t(n)|\leqslant 1,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

и ряд

$$\sum_p \frac{g_t(p)-1}{p}$$

равномерно сходится по t. *Тогда равномерно по* t

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} g_t(n)-M(g_t(n))\to 0.$$

Доказательство. По условию леммы равномерно относительно t сходятся ряды

$$\sum_p \frac{1-\operatorname{Re} g_t(p)}{p}\quad \text{и}\quad \sum_{\operatorname{Re} g_t(p)\leqslant \frac{1}{2}} \frac{1}{p}.$$

Согласно лемме 3′ нам достаточно доказать лемму для случая, когда при всех простых p (и при всех значениях параметра t) $\operatorname{Re} g_t(p)>\frac{1}{2}$. По условию леммы и ограничению $\operatorname{Re} g_t(p)>1/2$ равномерно относительно t сходятся ряды

$$\sum_p \frac{\ln\frac{1}{r_t(p)}}{p},\quad \sum_p \frac{\ln^2 r_t(p)}{p},\quad \sum_p \frac{\theta_t^2(p)}{p},$$

$$\sum_p \frac{\theta_t(p)-\sin\theta_t(p)}{p},\quad \sum_p \frac{(1-r_t(p))\sin\theta_t(p)}{p},$$

А отсюда вытекает, что равномерно по t сходится ряд

$$\sum_p \frac{\theta_t(p)}{p}.$$

Введем сильно мультипликативные функции

$$g_{t,N}(p) = \begin{cases} g_t(p), & p \leqslant \ln N, \\ 1, & p > \ln N. \end{cases}$$

Легко убедиться, что предельный переход

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} g_{t,N}(n) = \prod_p \left(1 + \frac{g(p)-1}{p}\right)$$

происходит равномерно относительно t.

Положим

$$f_{t,N}(n) = \sum_{\substack{p \mid n \\ p > \ln N}} \ln g(p).$$

В силу неравенства

$$\left| \sum_{p \leqslant N} \frac{f_{t,N}(p)}{p} \right|^2 \leqslant 2 \left| \sum_{\ln N \leqslant p \leqslant N} \frac{\ln \frac{1}{r_t(p)}}{p} \right|^2 + 2 \left| \sum_{\ln N \leqslant p \leqslant N} \frac{\theta_t(p)}{p} \right|^2$$

и равномерной сходимости по t рядов

$$\sum_p \frac{\ln \frac{1}{r_t(p)}}{p} \quad \text{и} \quad \sum \frac{\theta_t(p)}{p}$$

мы заключаем, что при $N \to \infty$ равномерно по t

$$\sum_{p \leqslant N} \frac{f_{t,N}(p)}{p} \to 0.$$

По свойству, что ряды $\sum \frac{\ln^2 r_t(p)}{p}$ и $\sum \frac{\theta_t^2(p)}{p}$ равномерно по t сходятся, и по неравенству Турана — Кубилюса

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| f_{t,N}(n) - \sum_{p \leqslant N} \frac{f_{t,N}(p)}{p} \right|^2 \leqslant c \sum_{\ln N < p \leqslant N} \frac{\ln^2 r_t(p) + \theta_t^2(p)}{p}$$

мы заключаем, что равномерно по t

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|f_{t,N}(n)-\sum_{p\leqslant N}\frac{f_{t,N}(p)}{p}\right|^2\to 0.$$

Из этих двух утверждений следует, что равномерно по t

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}{}'\,(g_{t,N}(n)-g_t(n))\to 0.$$

Лемма 4′ установлена.

Доказательство теоремы заканчивается посредством применения леммы 3′ по уже известному пути.

4.6. Некоторые замечания относительно суммирования мультипликативных функций

В этом параграфе мы дадим обзор некоторых теорем о мультипликативных функциях $f(n)$, в которых по условиям на поведение этих функций в простых числах «восстанавливается» поведение этих функций при натуральных значениях аргумента.

Г. Деланж [100] доказал следующий результат.

Теорема. *Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция такая, что $|f(n)|\leqslant 1$ для всех n и для которой справедлива асимптотика*

$$\sum_{p\leqslant x} f(p)\sim\rho\frac{x}{\ln x}, \tag{1}$$

причем $\rho\neq 1$. Тогда

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=o(x).$$

К. А. Корради и И. Катаи ([96], теорема G) установили следующую теорему.

Теорема. *Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция такая, что $|f(n)|\leqslant 1$ для всех n. Предположим, что*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{|f(p)-\rho|}{p}=o(\ln\ln x), \tag{2}$$

где $|\rho|\leqslant 1$ *и* $\rho\neq 1$. *Тогда*

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=o(x).$$

Вышеупомянутый результат Деланжа в случае $|\rho|=1$ и $\rho\neq 1$ является следствием теоремы Корради и Катаи. В самом деле, это будет доказано, если установить, что из (1) следует

$$\sum_{p\leqslant x} |f(p)-\rho|=o\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

ибо из этого соотношения (2) получаем частным суммированием. Положим $\bar\rho f(p)=r_p e^{i\varphi_p}$, $0\leqslant r_p\leqslant 1$. Тогда (1) дает

$$\sum_{p\leqslant x}(1-r_p\cos\varphi_p)\leqslant\left|\sum_{p\leqslant x}(1-\bar\rho f(p))\right|=o\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Далее, из

$$\sum_{p\leqslant x}(1-r_p\cos\varphi_p)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |\varphi_p|<\frac{\pi}{2}}}(1-r_p\cos\varphi_p)+\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |\varphi_p|\geqslant\frac{\pi}{2}}}(1+r_p|\cos\varphi_p|)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |\varphi_p|<\frac{\pi}{2}}}(1-r_p\cos\varphi_p)+\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |\varphi_p|\geqslant\frac{\pi}{2}}}1+\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |\varphi_p|\geqslant\frac{\pi}{2}}}r_p|\cos\varphi_p|,$$

поскольку все три суммы состоят из неотрицательных слагаемых, мы заключаем, что

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |\varphi_p|\geqslant\frac{\pi}{2}}}1=o\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Мы имеем

$$\sum_{p\leqslant x}|f(p)-\rho|=\sum_{p\leqslant x}|1-\bar\rho f(p)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p\leqslant x}(1-r_p\cos\varphi_p+r_p|\sin\varphi_p|)\leqslant\sum_{p\leqslant x}|\sin\varphi_p|+o\left(\frac{x}{\ln x}\right)\leqslant$$

$$\leqslant O\left(\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\leqslant x}\sin^2\varphi_p\right)^{1/2}\right)+o\left(\frac{x}{\ln x}\right)=$$

$$=O\left(\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/2}\left(\sum_{p\leqslant x}(1-\cos\varphi_p)\right)^{1/2}\right)+o\left(\frac{x}{\ln x}\right)=$$

$$=O\left(\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/2}\left(\sum_{p\leqslant x}(1-r_p\cos\varphi_p)+\sum_{\substack{p\leqslant x\\ |\varphi_p|\geqslant\frac{\pi}{2}}}2\right)^{1/2}\right)+$$

$$+o\left(\frac{x}{\ln x}\right)=o\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

что и требовалось установить.

Как мы знаем, в теореме Вирзинга есть стеснительное ограничение

$$\sum_{p\leqslant x}{}' f(p)=(\tau+o(1))\frac{x}{\ln x}.$$

Имеется ряд исследований, цель которых состоит в том, чтобы получить асимптотику поведения суммы

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)$$

при более слабом ограничении на $\sum\limits_{p\leqslant x}f(p)$.

В работе [157] Э. Вирзинг доказывает следующий результат.

Теорема. *Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция такая, что*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}f(p)\sim\tau\ln x$$

с $\tau>0$ и $|f(p)|\leqslant C$, где C — постоянная. Далее,

$$\sum_{p,\ \nu,\ \nu\geqslant 2}\frac{1}{p^\nu}|f(p^\nu)|<\infty$$

и, кроме того, если $\tau \leqslant 1$, *то*

$$\sum_{\substack{p,\ \nu,\ \nu \geqslant 2 \\ p^\nu \leqslant x}} f(p^\nu) = O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Наконец,

$$\sum_p \frac{1}{p}(|f(p)| - \operatorname{Re} f(p)) < \infty.$$

Тогда при $x \to \infty$

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \sim \frac{e^{-\gamma\tau}}{\Gamma(\tau)} \frac{x}{\ln x} \prod_{p \leqslant x}\left(1 + \frac{f(p)}{p} + \ldots + \frac{f(p^n)}{p^n} + \ldots\right).$$

Покажем, что теорема Деланжа есть следствие этой теоремы Вирзинга (доказательство сообщил Б. В. Левин). Пусть мультипликативная функция $f(n)$ удовлетворяет условиям теоремы Деланжа. Проверим, что она тогда удовлетворяет и условиям приведенной выше теоремы Вирзинга:

а) $f(n)$ — мультипликативная и в теореме Деланжа, и в теореме Вирзинга;

б) $|f(n)| \leqslant 1$, и, следовательно, $|f(n)| \leqslant C$;

в) ввиду того, что ряд $\sum\limits_p \dfrac{1-f(p)}{p}$ сходится, т. е.

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1-f(p)}{p} = l + \varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} - l + \varepsilon(x),$$

откуда

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} f(p) = \int_2^x \ln y\, d\left(\sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)}{p}\right) =$$

$$= \int_2^x \ln y\, d\left(\sum_{p \leqslant y} \frac{1}{p} - l + \varepsilon(y)\right) = \int_2^x \ln y\, d(\ln\ln y + C + \varepsilon_1(y)),$$

$\varepsilon_1(y) \to 0$ при $y \to \infty$. Следовательно,

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} f(p) = \int_2^x \ln y \, d(\ln \ln y + C + \varepsilon_1(y)) =$$

$$= \int_2^x \frac{dy}{y} + \int_2^x \ln y \, d(\varepsilon_1(y)) =$$

$$= \ln x - \ln 2 + \varepsilon_1(y) \ln y \Big|_2^x - \int_2^x \frac{\varepsilon_1(y)}{y} dy = \ln x + o(\ln x).$$

Таким образом, $f(n)$ удовлетворяет первому условию теоремы Вирзинга с $\tau = 1$.

Рассмотрим выражение

$$\sum_{\substack{p,\, \nu,\, \nu \geqslant 2 \\ p^\nu \leqslant x}} f(p^\nu).$$

Мы имеем

$$\left| \sum_{\substack{p,\, \nu \\ \nu \geqslant 2,\, p^\nu \leqslant x}} f(p^\nu) \right| \leqslant \sum_{\substack{p,\, \nu \\ \nu \geqslant 2,\, p^\nu \leqslant x}} 1 =$$

$$= \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \sum_{2 \leqslant \nu \leqslant \ln x / \ln p} 1 \leqslant \ln x \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{\ln p} = O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Проверим выполнение последнего условия теоремы Вирзинга. Очевидно, что в условиях теоремы Деланжа

$$\sum_p \frac{1}{p} (|f(p)| - \operatorname{Re} f(p)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_p \frac{1}{p} (1 - \operatorname{Re} f(p)) \leqslant \left| \sum_p \frac{1}{p} (1 - f(p)) \right| < \infty.$$

Таким образом, доказано, что если $f(n)$ удовлетворяет условиям теоремы Деланжа, то она удовлетворяет условиям теоремы Вирзинга. Следовательно, в этой теореме Вирзинга мы получаем

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \sim e^{-\gamma} \frac{x}{\ln x} \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \ldots + \frac{f(p^n)}{p^n} + \ldots\right).$$

Так как по формуле Мертенса

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\ln x},$$

то

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\sim x\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{f(p)}{p}+\ldots+\frac{f(p^n)}{p^n}+\ldots\right).$$

По условию теоремы Деланжа ряд

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p}$$

сходится. Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\right)=$$
$$=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\right).$$

Итак,

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\sim\left(\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\right)\right)x.$$

Результаты общего характера, относящиеся к суммированию мультипликативных функций, были получены Г. Халацем [118]. Приведем некоторые из них.

Теорема. *Пусть $f(n)$ — произвольная мультипликативная функция со свойством $|f(n)|\leqslant 1$. Существуют комплексное число C_0, вещественное число a_0 и функция $L_0(u)$, обладающая свойством*

$$|L_0(u)|=1,$$

$$\frac{L_0(u_1)}{L_0(u)}\to 1 \text{ *равномерно при* } u\to\infty,\quad u\leqslant u_1\leqslant 2u,$$

такие, что

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=C_0L_0(\ln x)\,x^{1+ia_0}+o(x).$$

В этой теореме неявным образом содержится такое следствие:

Теорема. *Пусть* $f(n)$ — *мультипликативная функция,* $|f(n)| \leqslant 1$ *для всех* n *и существует* $r \geqslant 1$ *такое, что* $f(2^r) \neq -1$. *Тогда для справедливости оценки*

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = o(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p)\, e^{-ib})}{p}$$

расходился при любом вещественном b.

Остановимся на согласовании этого утверждения с теоремой Халаца. По ограничению $|f(n)| \leqslant 1$ мы находимся в условиях теоремы 2 работы [118]. Условие, что существует r такое, для которого $f(2^r) \neq -1$, эквивалентно неравенству

$$H(1 + it) \neq 0.$$

Пусть при любом вещественном b ряд

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p)\, e^{-ib})}{p}$$

расходится; тогда при любом t расходится ряд (обозначения работы [118])

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 - \operatorname{Re}(f^*(n)\, e^{-it})),$$

и тогда формула (23) работы [118] показывает, что

$$F^*(s) = o\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right),$$

что дает

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = o(n).$$

Допустим, что существует вещественное значение b, для которого

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p)\, e^{-ib})}{p} < \infty;$$

тогда найдется вещественное значение a_0 такое, что

$$\gamma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n}\left(1 - \operatorname{Re}\left(f^*(n)\, n^{-ia_0}\right)\right) < \infty,$$

но тогда, как показано в работе Халаца, существуют постоянная

$$C_0 = e^{-\gamma_0} \neq 0$$

и функция $L_0(u)$ со свойством

$$|L_0(u)| = 1, \quad \frac{L_0(u_1)}{L_0(u)} \to 1 \text{ равномерно при } u \to \infty,$$
$$u \leqslant u_1 \leqslant 2u,$$

такие, что

$$F^*(s) = \frac{C_0 L_0\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)}{s - (1 + ia_0)} + o\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right),$$

и, значит,

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \bar{C} L_0(\ln x)\, x^{1+ia_0} + o(x)$$

с $\bar{C} \neq 0$.

Рассмотрим в качестве примера функцию Мёбиуса

$$f(n) = \mu(n).$$

Если $b = 0$, то

$$\sum_{p} \frac{1 - \operatorname{Re}\left(f(p)\, e^{-ib}\right)}{p} = \sum_{p} \frac{2}{p} = \infty.$$

Пусть $b \neq 0$ — вещественное число, мы имеем

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1 - \operatorname{Re}\left(f(p)\, e^{-ib}\right)}{p} =$$
$$= \sum_{p \leqslant n} \frac{1 + \cos b \ln p}{p} = \sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} + \operatorname{Re} \sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p^{1+ib}}.$$

В теории дзета-функции (см., например, Е. К. Титчмарш [64], стр. 71—72) доказывается, что ряд

$$\sum_{p} \frac{1}{p^{1+ib}}$$

при $b \neq 0$ сходящийся. Отсюда в силу расходимости ряда $\sum\limits_p \frac{1}{p}$ мы выводим и расходимость ряда

$$\sum_p \frac{1+\cos b \ln p}{p}.$$

Значит,

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x).$$

В работе [118] Г. Халац доказывает следующую теорему.

Теорема. *Пусть для мультипликативной функции $f(n)$ выполнены следующие требования:*

1) *$f(p)$ ограничена по модулю или даже*

$$\sum_p \frac{|f(p)|^{1+\delta}}{p^\sigma} \ln p = O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)$$

с некоторым $\delta > 0$;

2) $$\sum_{\substack{p,\ k \\ k \geqslant 2}} \frac{|f(p^k)|}{p^k} < \infty;$$

3) *никакое из выражений*

$$1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \ldots$$

не обращается в нуль на прямой $\operatorname{Re} s = 1$;

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{C}{s-1} + o\left(\frac{|s|}{\sigma-1}\right)$$

равномерно при $\operatorname{Re} s = \sigma$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = Cx + o(x).$$

4.7. Теорема Эрдёша—Винтнера

В 1939 г. П. Эрдёш и А. Винтнер [108] доказали следующую теорему.

Теорема. *Для любой вещественной аддитивной функции $f(n)$ сходимость трех рядов*

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)|<1} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)|<1} \frac{f^2(p)}{p} \tag{1}$$

является необходимым и достаточным условием для слабой сходимости последовательности функций распределения

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)\leqslant x}} 1$$

при $N \to \infty$.

Достаточность этого условия была доказана в 1938 г. П. Эрдёшем [106].

Теорема Эрдёша — Винтнера может быть получена как следствие из теорем Деланжа. Докажем достаточность условий (1).

Пусть $f(n)$ — аддитивная функция. Характеристическая функция функции распределения

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)\leqslant x}} 1$$

равна

$$\varphi_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} e^{itf(n)}.$$

По обратной предельной теореме (Б. В. Гнеденко [20], стр. 241) необходимым и достаточным условием для слабой сходимости последовательности функций распределения

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)\leqslant x}} 1$$

к предельной является равномерная сходимость их характеристических функций $\varphi_N(t)$ при $t \in [-T, T]$ для всякого фиксированного T. Обозначим

$$g_t(n) = e^{itf(n)}$$

и

$$\varphi_N(t) = \sum_{n \leqslant N} g_t(n).$$

Коль скоро $f(n)$ есть аддитивная функция, то $g_t(n)$ есть мультипликативная функция. Проверим выполнение модифицированной теоремы Деланжа.

1) Очевидно, что при любом t $|g_t(n)| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$

2) При любом $n = 1, 2, \ldots$ функция $g_t(n) = e^{itf(n)}$ есть непрерывная функция.

3) Докажем, что при выполнении условий (1) последовательность

$$\sum_{p<N} \frac{1 - e^{itf(p)}}{p}$$

равномерно по $t \in [-T, T]$ сходится. Ряд $\sum_p \frac{1 - e^{itf(p)}}{p}$ представим в следующей форме:

$$\sum_p \frac{1 - e^{itf(p)}}{p} = \sum_{|f(p)|<1} \frac{1 - e^{itf(p)}}{p} + \sum_{|f(p)|\geqslant 1} \frac{1 - e^{itf(p)}}{p}.$$

Так как для вещественного y

$$|e^{iy} - 1 - iy| \leqslant \frac{y^2}{2},$$

то при $|t| \leqslant T$

$$\left| \sum_{p<N} \frac{1 - e^{itf(p)}}{p} + it \sum_{\substack{|f(p)|<1 \\ p<N}} \frac{f(p)}{p} \right| < \frac{T^2}{2} \sum_{\substack{|f(p)|<1 \\ p<N}} \frac{f^2(p)}{p} + C \sum_{\substack{|f(p)|\geqslant 1 \\ p<N}} \frac{1}{p}.$$

Из этого неравенства и условия (1) следует, что равномерно по t при $|t| \leqslant T$ сходится ряд

$$\sum_p \frac{1 - e^{itf(p)}}{p} + it \sum_{|f(p)|<1} \frac{f(p)}{p}.$$

Обозначим

$$B(t)=\sum_{p}\frac{1-e^{itf(p)}}{p} \quad \text{и} \quad B=\sum_{|f(p)|<1}\frac{f(p)}{p}.$$

Мы имеем

$$\left|\sum_{p<N}\frac{1-e^{itf(p)}}{p}-B(t)\right| \leqslant \left|\sum_{p<N}\frac{1-e^{itf(p)}}{p}+it\sum_{\substack{|f(p)|<1\\ p<N}}\frac{f(p)}{p}-\right.$$

$$\left.-B(t)-itB\right|+T\left|\sum_{\substack{|f(p)|<1\\ p<N}}\frac{f(p)}{p}-B\right|.$$

Отсюда следует, что при $N\to\infty$ $\sum\limits_{p<N}\dfrac{1-e^{itf(p)}}{p}$ стремится к $B(t)$ равномерно по t при $|t|\leqslant T$.

По модифицированной теореме Деланжа последовательность

$$F_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ f(n)<x}}1$$

слабо сходится к предельной функции распределения

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n<N\\ f(n)<x}}1\Rightarrow F(x).$$

Далее, по теореме Деланжа характеристическая функция функции распределения $F(x)$ есть

$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{e^{itf(p^{\alpha})}}{p^{\alpha}}\right).$$

Теорема доказана.

Другое доказательство теоремы Эрдёша — Винтнера было дано И. П. Кубилюсом (см. [35]).

Рассмотрим функцию $\varphi(n)/n$. Логарифм этой функции

$$f(n)=\ln\frac{\varphi(n)}{n}$$

есть сильно аддитивная функция. При любом $p > 2$ $|f(p)| < 1$. Далее, ряды

$$\sum_p \frac{\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)}{p} \quad \text{и} \quad \sum_p \frac{\ln^2\left(1-\frac{1}{p}\right)}{p}$$

сходятся. Поэтому по теореме Эрдёша — Винтнера последовательность функций распределения

$$F_N(u) = \sum_{\substack{\ln \frac{\varphi(n)}{n} < u \\ n \leqslant N}} 1$$

слабо сходится к предельной функции $F(u)$.

Обозначим $F_N(\ln u) = V_N(u)$ и $F(\ln u) = V(u)$. Ясно, что

$$V_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ \frac{\varphi(n)}{n} \leqslant \lambda}} 1$$

и что

$$V_N(\lambda) \Rightarrow V(\lambda).$$

Очевидно, что $V(0) = 0$, $V(1) = 1$.

Из того, что $V_N(\lambda) \Rightarrow V(\lambda)$, следует, что для любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $R(x)$ предел

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} R\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right) = A(R)$$

существует и $A(R) = \int\limits_0^1 R(x)\,dV(x)$.

Обобщение на многомерный случай теоремы Эрдёша — Винтнера дано И. Катаи ([128], теорема 3).

Теперь перейдем к вопросу о природе предельного закона распределения для данной аддитивной функции $f(n)$.

Сумму скачков функции распределения назовем ее полным скачком. У непрерывной функции распределения полный скачок равен нулю.

Пусть функция распределения не непрерывна: мы назовем ее чисто разрывной или смешанной сообразно тому, будет ли ее полный скачок равен 1 или меньше 1.

Докажем следующий частный случай теоремы П. Леви [135].

Теорема. *Пусть F есть бесконечная сходящаяся композиция чисто разрывных функций распределения F_k:*

$$F = F_1 * F_2 * \ldots * F_k * \ldots$$

Пусть d_k — максимальный скачок функции F_k. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-d_k)$ расходится, то предельная функция распределения будет непрерывной; если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-d_k)$ сходится, то предельная функция распределения будет чисто разрывной *).

Доказательство. Мы рассматриваем пространство всех последовательностей

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

вещественных чисел. Рассмотрим подмножество этих последовательностей, задаваемых неравенствами

$$\begin{gathered} a_1 \leqslant x_1 < b_1, \\ \cdots\cdots \\ a_k \leqslant x_k < b_k, \end{gathered}$$

где k — любое натуральное, $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ — произвольные вещественные числа. Для каждого такого подмножества определим число

$$(F_1(b_1) - F_1(a_1))(F_2(b_2) - F_2(a_2)) \ldots (F_k(b_k) - F_k(a_k)).$$

Эти подмножества обычным образом (см. П. Халмош [82]) порождают σ-алгебру множеств, а сконструированная функция на подмножествах продолжается до счетно-аддитивной функции множеств на этой алгебре,

*) При разборе доказательства этой теоремы по работе П. Леви [135] возникает трудность, вызванная опечаткой на стр. 128. В определении эквивалентности последовательностей нужно условие $\sum P(x_\nu \neq \bar{x}_\nu) < \infty$.

т. е. до меры. Эту меру будем называть вероятностью. Меру множества последовательностей, определенных какими-то условиями, будем обозначать $\mathsf{P}(\ldots)$, где в скобках выписаны заданные условия. Ясно, что

$$\mathsf{P}(x_1+x_2+\ldots+x_n<x)=F_1(x)*F_2(x)*\ldots*F_n(x)$$

и

$$\mathsf{P}(x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots<x)= \\ =F_1(x)*F_2(x)*\ldots*F_n(x)*\ldots$$

Докажем первую часть теоремы. Обозначим

$$S_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$$

и

$$S=x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$$

Пусть функция $F(x)$ не является непрерывной, т. е. существует значение S' величины S, которое имеет вероятность $\alpha>0$. Возьмем l таким, что

$$\mathsf{P}(|S-S'|\leqslant 2l)<\alpha+\varepsilon.$$

Далее выберем такое натуральное n', что при $n>n'$

$$\mathsf{P}(|S-S_n|>l)<\varepsilon.$$

Мы имеем

$$\mathsf{P}(|S-S_n|\leqslant l,\ |S_n-S'|\leqslant l)\leqslant \mathsf{P}(|S-S'|\leqslant 2l)<\alpha+\varepsilon,$$

следовательно,

$$\mathsf{P}(|S_n-S'|\leqslant l)<\frac{\alpha+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Далее из формулы

$$\alpha=\mathsf{P}(S=S')=\sum_x \mathsf{P}(S_n=x)\,\mathsf{P}(S-S_n=S'-x)\leqslant \\ \leqslant \sum_{S'-l<x<S'+l}\mathsf{P}(S_n=x)\,\mathsf{P}(S-S_n=S'-x)+\mathsf{P}(|S-S'|\geqslant l)\leqslant \\ \leqslant \sum_{S'-l<x<S'+l}\mathsf{P}(S_n=x)\,\mathsf{P}(S-S_n=S'-x)+\varepsilon$$

можно усмотреть, что среди значений, находящихся на интервале $(S'-l,\ S'+l)$, найдется по меньшей мере одно значение x такое, что $\mathsf{P}(S_n=x)>\alpha-\varepsilon$, иначе

$$\alpha\leqslant(\alpha-\varepsilon)\,\mathsf{P}(|S-S_n|\leqslant l)+\varepsilon\leqslant(\alpha-\varepsilon)(1-\varepsilon)+\varepsilon<\alpha.$$

Пусть S'_n — это значение, $|S - S'_n| < l$. Мы имеем

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_n = \mathbf{P}(S_n = S'_n) < \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Теперь

$$\mathbf{P}(S = S',\ S_n \neq S'_n) = \mathbf{P}(S = S') - \mathbf{P}(S = S',\ S_n = S'_n) = \\ = \alpha - \mathbf{P}(S - S_n = S' - S'_n,\ S_n = S'_n).$$

Так как величины $S - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots,\ S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ независимы, то

$$\mathbf{P}(S - S_n = S' - S'_n,\ S_n = S'_n) = \alpha_n \mathbf{P}(S - S_n = S' - S'_n).$$

Обозначим $\beta_n = \mathbf{P}(S - S_n = S' - S'_n)$. Имеем

$$\mathbf{P}(S = S',\ S_n \neq S'_n) = \alpha - \alpha_n \beta_n.$$

Далее,

$$\mathbf{P}(S = S',\ S_n \neq S'_n) = \mathbf{P}(S = S',\ |S_n - S'| \leqslant l,\ S_n \neq S'_n) + \\ + \mathbf{P}(S = S',\ |S_n - S'| > l,\ S_n \neq S'_n) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(|S_n - S'| \leqslant l,\ S_n \neq S'_n) + \mathbf{P}(|S_n - S| > l) = \\ = \mathbf{P}(|S_n - S'| \leqslant l) - \mathbf{P}(S_n = S'_n) + \mathbf{P}(|S_n - S| > l) \leqslant \\ \leqslant \frac{\alpha + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - (\alpha - \varepsilon) + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\alpha - \alpha_n \beta_n < \varepsilon \left(2 + \frac{1 + \alpha}{1 - \varepsilon}\right).$$

Значит,

$$\beta_n = \mathbf{P}(S - S_n = S' - S'_n) > \frac{\alpha - \varepsilon \left(2 + \frac{1 + \alpha}{1 + \varepsilon}\right)}{\alpha_n} > \\ > \frac{(1 - \varepsilon)\left(\alpha - \varepsilon \left(2 + \frac{1 + \alpha}{1 - \varepsilon}\right)\right)}{\alpha + \varepsilon} > 1 - C\varepsilon.$$

Мы заключаем, что максимальный скачок функции распределения случайной величины $S - S_n$ превосходит $1 - C\varepsilon$.

Максимальный скачок функции распределения суммы независимых случайных величин не превосходит максимального скачка функций распределения каждого из слагаемых. Пусть $N > n$. Очевидно,

$$S - S_n = S_N - S_n + S - S_N.$$

Отсюда следует, что максимальный скачок функции распределения величины $S_N - S_n$ превосходит $1 - C\varepsilon$. Это означает, что при любом значении a

$$\mathsf{P}\left(\sum_{\nu=n+1}^{N} x_\nu \neq a\right) \leqslant C\varepsilon.$$

Возьмем теперь последовательность чисел ε_l таких, что ряд $\sum \varepsilon_l$ сходится, и определим последовательность натуральных чисел n_l так, чтобы максимальный скачок суммы случайных величин

$$\sum_{\nu=n_l+1}^{n_{l+1}} x_\nu$$

не превосходил $C\varepsilon_l$.

Теперь потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть даны n независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим через d_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ максимальный скачок функции распределения случайной величины x_ν, а через f_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — максимальный скачок функции распределения случайной величины $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu$. Тогда справедливо неравенство*

$$1 - d_1 d_2 \ldots d_n \leqslant \frac{1 - f_n}{f_n^2}.$$

Для доказательства выберем постоянные $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ так, чтобы при $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathsf{P}(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu) = f_\nu.$$

Пусть теперь ν — какое-либо фиксированное из чисел $1, 2, \ldots, n-1$. Очевидно,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_\nu - a_\nu &= \\ = x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots &+ x_n - a_n) \geqslant \\ \geqslant \mathsf{P}(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu &= a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu) \times \\ \times \mathsf{P}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = f_\nu f_n.\end{aligned}$$

Так как при нарастании суммы независимых случайных величин максимальный скачок функции распределения не возрастает, то $f_\nu \geqslant f_n$, и, значит,

$$\mathsf{P}(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_\nu - a_\nu = \\ = x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_n - a_n) \geqslant f_n^2. \quad (2)$$

Обозначим через T событие (т. е. множество последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$), для которого хотя бы одна из сумм

$$x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_\nu - a_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

отлична от нуля, а через $\mathsf{P}(T)$ — его вероятность. Дополнительное событие $\overline{T}$, очевидно, состоит в том, что $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$. Ясно, что

$$\mathsf{P}(\overline{T}) \leqslant d_1 \ldots d_n.$$

Так как

$$\mathsf{P}(T) + \mathsf{P}(\overline{T}) = 1,$$

то

$$\mathsf{P}(T) \geqslant 1 - d_1 \ldots d_n. \quad (3)$$

Совместное осуществление событий T и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ происходит так: осуществляется событие T, т. е. находится ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, такое, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu \neq a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu$, и событие $x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_\nu - a_\nu \neq x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \ldots + x_n - a_n$. Поэтому и из формулы (2) получаем

$$\mathsf{P}(T,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leqslant \mathsf{P}(T)(1 - f_n^2). \quad (4)$$

Так как событие $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ есть следствие события $\overline{T}$, то

$$\mathsf{P}(\overline{T},\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \\ = \mathsf{P}(\overline{T}) = 1 - \mathsf{P}(T). \quad (5)$$

Складывая формулы (4) и (5), получаем

$$f_n = \mathsf{P}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leqslant \\ \leqslant \mathsf{P}(T)(1 - f_n^2) + 1 - \mathsf{P}(T) = 1 - \mathsf{P}(T) f_n^2,$$

откуда

$$\mathsf{P}(T) \leqslant \frac{1-f_n}{f_n^2},$$

или по формуле (3)

$$1 - d_1 d_2 \ldots d_n \leqslant \frac{1-f_n}{f_n^2}.$$

Лемма доказана.

Приложим доказанную лемму к каждой из сумм

$$\sum_{\nu=n_l+1}^{n_{l+1}} x_\nu$$

Мы получим

$$1 - d_{n_l+1} \ldots d_{n_{l+1}} \leqslant \frac{C\varepsilon_l}{(1-\varepsilon_l)^2},$$

и, следовательно, начиная с некоторого $l = \tau$,

$$\prod_{l=\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{C\varepsilon_l}{(1-\varepsilon_l)^2}\right) \leqslant \prod_{j=\tau}^{\infty} d_j,$$

т. е. произведение

$$\prod_{j=n_\tau+1}^{\infty} d_j = \prod_{j=n_\tau+1}^{\infty} (1-(1-d_j))$$

сходится (по соглашению, принятому относительно бесконечных произведений, значение этого бесконечного произведения не нуль). По критерию для сходимости бесконечных произведений мы заключаем, что ряд

$$\sum (1-d_j)$$

является сходящимся.

Таким образом, мы доказали, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1-d_k)$ расходится, то функция $F(x)$ непрерывна.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $F_k(x)$ — функции распределения чисто разрывных случайных величин x_k таких, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-d_k)$$

сходится. Посредством замены величины x_k на $x_k - a_k$ с подходяще выбранными постоянными a_k можно добиться того, что максимальный скачок у всех функций $F_k(x)$ будет при $x=0$. При достаточно больших n

$$\mathsf{P}(x_n + x_{n+1} + \ldots \neq 0) \leqslant \mathsf{P}(x_n \neq 0) + \mathsf{P}(x_{n+1} \neq 0) + \ldots = \\ = \sum_{k=n}^{\infty} (1 - d_k) < \varepsilon,$$

т. е.

$$\mathsf{P}(S \neq S_n) < \varepsilon.$$

Отсюда при любом β

$$\mathsf{P}(S_n = \beta)(1-\varepsilon) \leqslant \mathsf{P}(S = \beta) = \\ = \mathsf{P}(S_n \neq \beta,\ S - S_n \neq 0) + \mathsf{P}(S_n = \beta,\ S - S_n = 0) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon + \mathsf{P}(S_n = \beta). \qquad (6)$$

Это неравенство показывает, что все точки β положительной вероятности для суммы S суть точки положительной вероятности для суммы S_n (при достаточно больших n) и все точки β положительной вероятности для S_n суть точки положительной вероятности для S. Обозначим через Σ полный скачок функции распределения суммы S, а через $\Sigma^{(n)}$ полный скачок функции распределения суммы S_n. Суммируя неравенства (6) по точкам положительной вероятности (сумм S_n и S), имеем

$$\Sigma \geqslant \Sigma^{(n)}(1-\varepsilon).$$

Но $\Sigma^{(n)} = 1$, ибо все функции распределения $F_k(x)$ чисто разрывны; значит,

$$\Sigma \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Значение ε можно взять сколь угодно малым. Итак,

$$\Sigma = 1,$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

Э. Р. Ван Кампен [126] дал иное доказательство критерия Леви.

В работе П. Эрдёша и А. Винтнера [108] доказывается следующая теорема.

Теорема. *Функция распределения, которая является асимптотической функцией распределения для аддитивной функции $f(n)$, является непрерывной тогда и только тогда, когда ряд*

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p}$$

расходится.

Действительно, мы уже видели, что предельная функция распределения $F(x)$ имеет характеристическую функцию вида

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}\right).$$

Таким образом, если для простого p мы определим функцию распределения случайной величины $\rho(p)$, которая принимает значения

$$0 \qquad\qquad \text{с вероятностью } 1-\frac{1}{p},$$

$$f(p^\alpha) \quad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots) \quad \text{с вероятностью } \frac{1}{p^\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

то $F(x)$ можно представить в виде бесконечной композиции

$$F^{(2)}(x) * F^{(3)}(x) * F^{(5)}(x) * \ldots$$

Наибольший скачок функции распределения $F^{(p)}(x)$ равен

$$1-\frac{1}{p}\leqslant 1-\frac{1}{p}+\sum_{\substack{\alpha=2\\ f(p^\alpha)=0}}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{p}}{p^\alpha}\leqslant 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}, \text{ если } f(p)\neq 0,$$

$$1-\frac{1}{p^2}\leqslant 1-\frac{1}{p}+\sum_{\substack{\alpha=1\\ f(p^\alpha)=0}}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{p}}{p^\alpha}\leqslant 1-\frac{1}{p}+\frac{1-\frac{1}{p}}{p}+\frac{1}{p^2}=$$

$$=1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2}, \text{ если } f(p)=0.$$

Отсюда

$$\sum_p (1-d_p) = \sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p} + O\left(\sum_p \frac{1}{p^2}\right),$$

и теорема сведена к теореме Леви.

Пример. Рассмотрим аддитивную функцию $f(n) = \ln \frac{\varphi(n)}{n}$. Имеем

$$\sum_{\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\neq 0} \frac{1}{p} = \sum_p \frac{1}{p} = \infty.$$

Значит, асимптотическая функция распределения для $\ln \frac{\varphi(n)}{n}$, а следовательно, асимптотическая функция распределения и для $\varphi(n)/n$ непрерывны.

4.8. О распределении значений функции Эйлера

Мы уже говорили о том, что для каждого значения λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N,\ \varphi(n)<n\lambda} 1 = V(\lambda).$$

Далее мы установили, что функция $V(\lambda)$ непрерывна в каждой точке.

Г. Дэвенпорт [97] предложил метод, который позволяет дать явное выражение для функции

$$V(\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N,\ \varphi(n)<n\lambda} 1.$$

Ниже мы излагаем метод Дэвенпорта.

Возьмем число λ, $0<\lambda<1$, и назовем натуральное число n λ-числом, если $\varphi(n)/n<\lambda$. Очевидно, что при любом $m \geqslant 1$

$$\frac{\varphi(nm)}{nm} \leqslant \frac{\varphi(n)}{n},$$

т. е. все кратные λ-числа суть λ-числа. Ввиду этого целесообразно ввести понятие примитивного λ-числа:

число n называется примитивным λ-числом, если оно не содержит собственного делителя, являющегося λ-числом. Очевидно, что в примитивное λ-число простые сомножители могут входить лишь в первой степени. Из этого вытекает, что коль скоро дано конечное множество простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_r$, то существует лишь конечное множество примитивных λ-чисел, составленных только из $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Наконец, поскольку

$$\prod_{p \leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right) \to 0,$$

то для каждого λ, $0<\lambda<1$, существует бесконечно много примитивных чисел.

Пусть P — большое натуральное число. Обозначим через $\varepsilon_P(m)$ функцию, определенную так:

$$\varepsilon_P(m)=\begin{cases} 1, & \text{если все простые делители } m \text{ меньше } P, \\ 0, & \text{если у } m \text{ есть простой делитель, больший } P. \end{cases}$$

В силу того, что функция $\varepsilon_P(m)$ вполне мультипликативна

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_P(m)}{m}=\prod_{p \leqslant P}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

Обозначим для краткости $\Pi(P)=\prod\limits_{p \leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Лемма. *Для $V(\lambda)$ справедлива формула*

$$V(\lambda)=\lim_{P\to\infty}\sum_{\substack{m=1 \\ \varphi(m)\leqslant m\lambda}}^{\infty}\frac{\varepsilon_P(m)}{m}.$$

Доказательство. По теореме Деланжа при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^s\right).$$

Мы будем использовать это равенство для натуральных s.

С другой стороны, имеем

$$\lim_{P\to\infty} \Pi(P) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_P(m)}{m}\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right)^s =$$

$$= \lim_{P\to\infty} \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)^s \frac{1}{p^\alpha}\right) =$$

$$= \lim_{P\to\infty} \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\left(1-\frac{1}{p}\right)^s \sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}\right) =$$

$$= \lim_{P\to\infty} \prod_{p\leqslant P}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{s-1}\right) =$$

$$= \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^s\right).$$

Значит, при любом $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\lim_{P\to\infty} \Pi(P) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_P(m)}{m}\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right)^s = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s.$$

Отсюда следует, что для любого полинома $P(x)$

$$\lim_{P\to\infty} \Pi(P) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_P(m)}{m} P\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{m\leqslant N} P\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right).$$

С помощью теоремы Вейерштрасса о приближении функции полиномами получаем, что для любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции $F(x)$

$$\lim_{P\to\infty} \Pi(P) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_P(m)}{m} F\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} F\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right).$$

Производя обычное приближение функции

$$F(x)=\begin{cases} 1, & x\leqslant\lambda, \\ 0, & x>\lambda, \end{cases}$$

непрерывными функциями, убеждаемся в том, что

$$\lim_{P\to\infty} \Pi(P) \sum_{\substack{m=1 \\ \varphi(m)\leqslant m\lambda}}^{\infty} \frac{\varepsilon_P(m)}{m} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\leqslant N \\ \frac{\varphi(n)}{n}\leqslant\lambda}} 1 = V(\lambda).$$

Теорема. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu$ — начало последовательности примитивных λ-чисел, $[a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_k}]$ — общее наименьшее кратное чисел $a_{s_1}, a_{s_2}, \ldots, a_{s_k}$. Обозначим*

$$A_\nu = \frac{1}{a_\nu} - \sum_{\mu<\nu} \frac{1}{[a_\mu, a_\nu]} + \sum_{\lambda<\mu<\nu} \frac{1}{[a_\lambda, a_\mu, a_\nu]} - \ldots$$

(*плотность чисел, делящихся на a_ν, но не делящихся ни на какое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$*). *Тогда*

$$V(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu.$$

Доказательство. Величина $\sum\limits_{\nu=1}^{k} A_\nu$ есть плотность чисел, делящихся по меньшей мере на одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Поскольку все эти числа суть λ-числа, то

$$\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \leqslant V(\lambda).$$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

сходится и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \leqslant V(\lambda)$.

Нам надо доказать противоположное неравенство.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_h$ — последовательность примитивных λ-чисел, которые делятся только на простые числа $\leqslant P$. Число n, состоящее из простых чисел, не превосходящих P, будет λ-числом тогда и только тогда, когда n есть кратное какого-либо из чисел $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_h$, причем n/b_j состоит только из простых чисел, не превосходящих P. Отсюда

$$\sum_{\substack{n=1\\ \varphi(n)\leqslant n\lambda}}^{\infty} \frac{\varepsilon_P(n)}{n} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{h}(-1)^j \sum_{b_{i_1}<b_{i_2}<\ldots<b_{i_j}}' \frac{\varepsilon_P(k[b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_j}])}{k[b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_j}]} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_P(k)}{k}\sum_{j=1}^{h}(-1)^j \sum_{b_{i_1}<b_{i_2}<\ldots<b_{i_j}} \frac{\varepsilon_P([b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_j}])}{[b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_j}]} =$$

$$= \Pi(P)^{-1}\left(-\sum_{j=1}^{h}(-1)^j \sum_{b_{i_1}<b_{i_2}<\ldots<b_{i_j}}' \frac{1}{[b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_j}]}\right) =$$

$$= \Pi(P)^{-1} V(b_1, b_2, \ldots, b_h),$$

где $V(b_1, b_2, \ldots, b_h)$ — плотность множества тех чисел, которые делятся по меньшей мере на одно из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_h$. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_h$ есть подмножество чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где a_k — максимальное из $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_h$. Очевидно,

$$V(b_1, b_2, \ldots, b_h) \leqslant V(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu.$$

Так как

$$V(b_1, b_2, \ldots, b_h) = \Pi(P) \sum_{\substack{n=1\\ \varphi(n)\leqslant n\lambda}}^{\infty} \frac{\varepsilon_P(n)}{n},$$

то

$$\lim_{P\to\infty} V(b_1, b_2, \ldots, b_h) = V(\lambda).$$

Значит,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = V(\lambda).$$

Теорема доказана.

С помощью метода Дэвенпорта Б. А. Венков [13] установил следующие свойства функции

$$V(\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ \varphi(n) < \lambda n}} 1:$$

а) Функция $V(\lambda)$ есть возрастающая функция на сегменте $[0, 1]$, т. е. если $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > 0$, то $V(\lambda_1) > V(\lambda_2)$.

б) На всюду плотном множестве точек отрезка $[0, 1]$ функция $V(\lambda)$ имеет левую производную, равную бесконечности (это множество в работе Б. А. Венкова задано конструктивно).

П. Эрдёш [112] получил следующий результат о распределении значений функции $\varphi(n)/n$.

Теорема. *Обозначим через $F(x)$ функцию распределения для функции $\frac{n}{\varphi(n)}$. Мы имеем для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших x*

$$\exp(-\exp[(1+\varepsilon)ax]) < 1 - F(x) < \exp(-\exp[(1-\varepsilon)ax]),$$

где $a = \exp(-\gamma)$.

Займемся теперь вопросом о скорости стремления функции

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{\varphi(n) < n\lambda \\ n \leqslant N}} 1 = \Phi_N(\lambda)$$

к своему предельному значению $\Phi(\lambda)$.

Первые результаты в этом направлении были получены М. М. Тяном [65]. Мы приведем здесь доказательство более сильного результата, данного в работе А. С. Файнлейба [69].

Теорема. *Равномерно по $x \in [0, 1]$*

$$\Phi_N(x) = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{\ln \ln N}\right).$$

Доказательство. Пусть t — вещественное число. Изучим асимптотическое поведение суммы

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it}.$$

Рассмотрим функцию

$$h(n)=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left(\frac{\varphi(d)}{d}\right)^{it}.$$

Тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it}=\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\sum_{d\mid n}h(d)=\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}h(n)\left[\frac{N}{n}\right]=$$
$$=\sum_{n\leqslant N}\frac{h(n)}{n}+O\left(\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|h(n)|\right),$$

$h(n)$ — мультипликативная функция,

$$h(p)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{it}-1,\qquad h(p^s)=0,\qquad s\geqslant 2.$$

Мы имеем

$$|h(p)|=\left|e^{it\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1\right|\leqslant|t|\ln\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\leqslant\frac{2|t|}{p}.$$

Произведение

$$\prod_p\left(1+\frac{|h(p)|}{p}+\frac{h(p^2)}{p^2}+\ldots\right)=\prod_p\left(1+\frac{|h(p)|}{p}\right)$$

абсолютно сходится. Следовательно, абсолютно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|h(n)|}{n}.$$

Далее,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n}+O\left(\sum_{n>N}\frac{|h(n)|}{n}+\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|h(n)|\right).$$

Обозначим

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{it}\right).$$

Нам понадобятся две оценки величины

$$\sum_{n>N}\frac{|h(n)|}{n}+\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}|h(n)|$$

— при $|t|\leqslant 1$ и при $|t|>1$.

Пусть $|t| \leqslant 1$. Мы имеем оценки

$$|h(n)| \leqslant \mu^2(n) \frac{(2|t|)^{\nu(n)}}{n} \leqslant |t| \frac{\tau(n)}{n}.$$

Поэтому

$$\sum_{n>N} \frac{|h(n)|}{n} + \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |h(n)| \leqslant$$
$$\leqslant |t| \left(\sum_{n \geqslant N} \frac{\tau(n)}{n^2} + \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \frac{\tau(n)}{n} \right) \leqslant C|t|,$$

где постоянная C не зависит от N.

Пусть $|t| \geqslant 1$. Положим $\alpha = 1 - \frac{1}{\ln(|t|+3)}$. Так как $0 < \alpha < 1$, то

$$\sum_{n>N} \frac{|h(n)|}{n} + \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |h(n)| \leqslant \sum_{n>N} \frac{|h(n)|}{n} \left(\frac{n}{N}\right)^{1-\alpha} +$$
$$+ \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |h(n)| \left(\frac{N}{n}\right)^{\alpha} = N^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^{\alpha}} =$$
$$= N^{\alpha-1} \prod_p \left(1 + \frac{|h(p)|}{p^{\alpha}}\right) \leqslant N^{\alpha-1} \exp\left(\sum_p \frac{|h(p)|}{p^{\alpha}}\right) =$$
$$= N^{\alpha-1} \exp\left(\sum_{p \leqslant |t|+3} \frac{|h(p)|}{p^{\alpha}} + \sum_{p>|t|+3} \frac{|h(p)|}{p^{\alpha}}\right).$$

При $p \leqslant |t|+3$

$$\sum_{p \leqslant |t|+3} \frac{|h(p)|\, p^{1-\alpha}}{p} = \sum_{p \leqslant |t|+3} \frac{|h(p)|\, e^{\frac{\ln p}{\ln(|t|+3)}}}{p} \leqslant$$
$$\leqslant 2e \sum_{p \leqslant |t|+3} \frac{1}{p} < 6 \ln\ln(|t|+3) + O(1)$$

(мы воспользовались оценкой $|h(p)| \leqslant 2$). Далее,

$$\sum_{p>|t|+3} \frac{|h(p)|}{p^{\alpha}} \leqslant 2 \sum_{p>|t|+3} \frac{|t|}{p^{\alpha+1}} = O((|t|+3)^{1-\alpha}) = O(1).$$

Поэтому

$$\sum_{n>N} \frac{|h(n)|}{n} + \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |h(n)| = O(N^{\alpha-1} \ln^6(|t|+3)).$$

Итак, при $|t| \leqslant 1$ равномерно по N

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it} = f(t) + O(|t|),$$

а при $|t| > 1$

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it} = f(t) + O\left(e^{-\frac{\ln N}{\ln(|t|+3)}} \ln^6(|t|+3)\right).$$

Обозначим $F(x) = \Phi(e^x)$. $F(x)$ также является функцией распределения, характеристическая функция которой есть $f(t)$. Подсчитаем функцию концентрации:

$$Q(h) = \sup_x (F(x+h) - F(x)).$$

Выражение для $f(t)$ показывает, что $F(x)$ является функцией распределения суммы независимых случайных величин

$$\eta = \xi_2 + \xi_3 + \xi_5 + \ldots + \xi_p + \ldots$$

(p — простое число), где

$$\xi_p = \begin{cases} \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) & \text{с вероятностью } \frac{1}{p}, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \frac{1}{p}. \end{cases}$$

По заданному h найдем такой номер r, чтобы

$$\frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r p_{r+1}} < h \leqslant \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r},$$

$$\sum_{i=1}^{r} \ln p_i \leqslant \ln \frac{1}{h} < \sum_{i=1}^{r+1} \ln p_i.$$

Обозначим через $F^{(r)}(x)$ функцию распределения суммы независимых случайных величин

$$\xi_{p_1} + \xi_{p_2} + \ldots + \xi_{p_r}.$$

Функция распределения $F^{(r)}(x)$ имеет максимальный скачок, равный

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

(этот скачок происходит при $x=0$). Нам надо теперь оценить снизу расстояние между двумя точками, в которых имеет место скачок. Пусть $p_1, \ldots, p_l$ и $q_1, \ldots, q_s$ — два различных набора простых чисел, причем $p_i \leqslant p_r$ ($i=1, 2, \ldots, l$) и $q_j \leqslant p_r$ ($j=1, 2, \ldots, s$). Заметим, что в этом случае

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_l}\right) \neq \left(1-\frac{1}{q_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_s}\right).$$

В самом деле, пусть

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_l}\right) = \left(1-\frac{1}{q_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_s}\right),$$

тогда

$$(p_l-1)\ \ldots\ (p_1-1)q_1\ \ldots\ q_s = p_1\ \ldots\ p_l(q_1-1)\ \ldots\ (q_s-1).$$

Пусть среди чисел $p_1, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_s$ наибольшим является p_l. В силу однозначности разложения на простые множители $p_l \mid q_1 \ldots q_s$, и, следовательно, $p_l = q_s$. Сокращая на $1-1/p_l$ и повторяя этот процесс, мы приходим к равенству

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_{l-s}}\right)=1,$$

которое невозможно, если $l \neq s$. Итак, если наборы простых чисел разные, то по теореме Лагранжа

$$\left|\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_s}\right)\right| \geqslant$$
$$\geqslant \left|\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)-\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q_s}\right)\right| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{p_1 \ldots p_r},$$

ибо разность двух не равных целых чисел по модулю больше или равна 1. Таким образом, минимальное расстояние между точками скачка не меньше $1/p_1 \ldots p_r$, а h по условию меньше этой величины. Это нам дает

$$\sup_x \left(F^{(r)}(x+h) - F^{(r)}(x)\right) \leqslant \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \leqslant \frac{C}{\ln\ln\frac{1}{h}}.$$

Представим

$$\eta = \xi_2 + \ldots + \xi_p + \ldots = \eta_1 + \eta_2,$$

где η_1 и η_2 — независимые случайные величины:

$$\eta_1 = \xi_2 + \ldots + \xi_{p_r},$$

$$\eta_2 = \xi_{p_{r+1}} + \ldots$$

Пусть $\overline{F}^{(r)}(x)$ — функция распределения η_2. Мы имеем

$$\mathsf{P}(u - x \leqslant \eta_1 \leqslant u - x + h) \leqslant \sup_x \left(F^{(r)}(x+h) - F^{(r)}(x)\right).$$

Поэтому

$$\mathsf{P}(u < \eta < u + h) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \sup_x \left(F^{(r)}(x+h) - F^{(r)}(x)\right) d\overline{F}^{(r)}(x) =$$

$$= \sup_x \left(F^{(r)}(x+h) - F^{(r)}(x)\right).$$

Таким образом (мы повторили доказательство леммы о концентрации П. Леви, см. [135]),

$$\sup_x (F(x+h) - F(x)) \leqslant \sup_x \left(F^{(r)}(x+h) - F^{(r)}(x)\right) \leqslant \frac{C}{\ln\ln\frac{1}{h}}.$$

Обозначим через $F_N(x)$ (N — нижний индекс) функцию распределения, равную по определению $\Phi_N(e^x)$. Характеристическая функция $F_N(x)$ равна

$$\frac{1}{N}\sum_{n \leqslant N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it}.$$

Для оценки отклонения $F_N(x)$ от $F(x)$ применим обобщенную теорему Эссеена:

$$\sup_x |F_N(x) - F(x)| \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\sup_x \left(F\left(x + \frac{1}{T}\right) - F(x)\right) + \int_0^T \frac{\left|\frac{1}{N}\sum\limits_{n \leqslant N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it} - f(t)\right|}{t}\,dt\right].$$

Положим $y=\ln^7 T$. Мы имеем

$$\sup_x |F_N(x)-F(x)| = O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right)+$$

$$+O\left(\int_0^{1/y}\frac{\left|\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it}-f(t)\right|}{t}\,dt\right)+$$

$$+O\left(\int_{1/y}^{T}\frac{\left|\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{it}-f(t)\right|}{t}\,dt\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right)+O\left(\frac{1}{y}\right)+O\left(\int_{1/y}^{T}\frac{e^{-\frac{\ln N}{\ln(|t|+3)}}\ln^6(|t|+3)}{t}\,dt\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right)+O\left(\frac{1}{y}\right)+O\left(e^{-\frac{\ln N}{4\ln T}}\left(\int_{1/y}^{1}\frac{dt}{t}+\int_1^T\frac{\ln^6 t}{t}\,dt\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{1}{\ln\ln T}\right)+O\left(\frac{1}{\ln^7 T}\right)+O\left(e^{-\frac{\ln N}{4\ln T}}(\ln\ln T+\ln^7 T)\right).$$

Положим $T=e^{\sqrt{\ln N}}$, мы получим

$$\sup_x |F_N(x)-F(x)| = O\left(\frac{1}{\ln\ln N}\right).$$

Так как оценка равномерна по x, то и

$$\Phi_N(x)=\Phi(x)+O\left(\frac{1}{\ln\ln N}\right),$$

что и требовалось доказать.

В работе [70] А. С. Файнлейб доказывает следующую теорему:

Теорема. *Пусть $\psi(m)$ — вещественная аддитивная функция, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\sum_{p^r}\frac{\psi^2(p^r)}{p^r}<\infty$;

2) $|\psi(n)-\psi(m)|\geqslant(nm)^{-a}$, *если* $n\neq m$ — *бесквадратные числа,* a — *положительная постоянная.*

Тогда равномерно по x

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{\psi(n)\leqslant x+\sum\limits_{p\leqslant N}\frac{\psi(p)}{p}\\ n\leqslant N}} 1 = F(x) + O\left(\frac{\ln\ln\frac{1}{\rho_N}}{\ln\frac{1}{\rho_N}\ln\ln\ln\frac{1}{\rho_N}}\right),$$

где $F(x)$ — функция распределения, определенная характеристической функцией

$$f(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{it\psi(p^r)}}{p^r}\right)e^{-it\frac{\psi(p)}{p}},$$

а

$$\rho_N=\sum_{p>\exp\frac{\ln N\ln\ln\ln N}{\ln\ln N}}\frac{\psi^2(p)}{p}.$$

В применении к функции $\ln\frac{\varphi(n)}{n}$ эта теорема приводит к следующему результату: равномерно по $x\in[0, 1]$

$$\Phi_N(x)=\Phi(x)+O\left(\frac{1}{\ln N}\left(\frac{\ln\ln N}{\ln\ln\ln N}\right)^2\right).$$

Пусть $R(x)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция. М. М. Тян [65], И. И. Ильясов [27], А. С. Файнлейб [71] занимались вопросом об остаточном члене в соотношении

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}R\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=A(R).$$

Рассмотрим частный случай $R(x)=x^s$, где s — натуральное число. Докажем, что

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s=N\prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^s\right)+O\left(3^s(1+\ln N)^s\right).$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\sum_{d\mid n}\Phi(d)=\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s,$$

где

$$\Phi(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } d \text{ не делится на квадрат натурального, большего } 1, \\ \prod\limits_{p \mid d} \left(\left(1 - \frac{1}{p} \right)^s - 1 \right), & \text{если } d - \text{бесквадратное число.} \end{cases}$$

Мы имеем

$$\sum_{n \leqslant N} \left(\frac{\varphi(n)}{n} \right)^s = \sum_{n \leqslant N} \sum_{d \mid n} \Phi(d) = \sum_{d \leqslant N} \Phi(d) \left[\frac{N}{d} \right] =$$

$$= N \sum_{n \leqslant N} \frac{\Phi(n)}{n} + O\left(\sum_{n \leqslant N} |\Phi(n)| \right).$$

Ясно, что для бесквадратного n

$$|\Phi(n)| = \left| \prod_{p \mid n} \left(\left(1 - \frac{1}{p} \right)^s - 1 \right) \right| \leqslant \prod_{p \mid n} \frac{s}{p} = \frac{s^{\nu(n)}}{n},$$

где $\nu(n)$ — количество различных простых делителей числа n. Докажем, что

$$\sum_{n \leqslant N}' \frac{s^{\nu(n)}}{n} \leqslant (1 + \ln N)^s.$$

Это устанавливается индукцией по s. Для $s = 1$ тривиально:

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln N.$$

Предположим, что это неравенство доказано для $s - 1$. Мы имеем

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{s^{\nu(n)}}{n} = \sum_{n \leqslant N} \frac{\sum\limits_{d \mid n} |\mu(d)| (s-1)^{\nu(d)}}{n} =$$

$$= \sum_{d=1}^{N} \frac{|\mu(d)| (s-1)^{\nu(d)}}{d} \sum_{l \leqslant \frac{N}{d}} \frac{1}{l} \leqslant \sum_{d=1}^{N} \frac{(s-1)^{\nu(d)}}{d} \sum_{d \leqslant N} \frac{1}{l} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \ln N)^{s-1} (1 + \ln N) = (1 + \ln N)^s,$$

Итак,

$$\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s = N\sum_{n\leqslant N}\frac{\Phi(n)}{n}+O\left((1+\ln N)^s\right).$$

Докажем, что

$$\sum_{n>N}\frac{|\Phi(n)|}{n}=O\left(3^s\frac{(1+\ln N)^{s-1}}{N}\right).$$

Мы имеем

$$\sum_{n>N}\frac{|\Phi(n)|}{n}\leqslant\sum_{n>N}\frac{s^{\nu(n)}}{n^2}.$$

При $s=1$ эта сумма оценивается как $O\left(\frac{1}{N}\right)$. Далее по индукции

$$\sum_{n>N}\frac{s^{\nu(n)}}{n^2}=\sum_{n>N}\frac{\sum\limits_{d\mid n}|\mu(d)|(s-1)^{\nu(d)}}{n^2}=$$

$$=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{|\mu(d)|(s-1)^{\nu(d)}}{d^2}\sum_{l\geqslant\frac{N}{d}}\frac{1}{l^2}\leqslant\sum_{d=1}^{\infty}\frac{(s-1)^{\nu(d)}}{d^2}\sum_{l\geqslant\frac{N}{d}}\frac{1}{l^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{6}\sum_{d\geqslant N}\frac{(s-1)^{\nu(d)}}{d^2}+\sum_{d<N}\frac{(s-1)^{\nu(d)}}{d^2}\sum_{l\geqslant\frac{N}{d}}\frac{1}{l^2}.$$

Мы имеем при $d\leqslant N$

$$\sum_{l\geqslant\frac{N}{d}}\frac{1}{l^2}\leqslant 2\frac{d}{N}.$$

По предположению индукции

$$\sum_{d\geqslant N}\frac{(s-1)^{\nu(d)}}{d^2}\leqslant 3^{s-1}\frac{(1+\ln N)^{s-2}}{N},$$

и, как мы видели,

$$\sum_{d<N}\frac{(s-1)^{\nu(d)}}{d}\leqslant(1+\ln N)^{s-1}.$$

Поэтому

$$\sum_{n>N} \frac{s^{\nu(n)}}{n^2} \leqslant 2 \cdot 3^{s-1} \frac{(1+\ln N)^{s-2}}{N} + 2\frac{(1+\ln N)^{s-1}}{N} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(1+\ln N)^{s-1}}{N}(2 \cdot 3^{s-1}+2) \leqslant 3^s \frac{(\ln N+1)^s}{N}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n\leqslant N} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s = N\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n} + O(3^s(\ln N+1)^s).$$

В силу того, что $\frac{\Phi(d)}{d}$ — мультипликативная функция, имеем

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d} = \prod_p \left(1 + \frac{\left(1-\frac{1}{p}\right)^s - 1}{p}\right) =$$
$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^s\right),$$

что и требовалось доказать.

Из формулы для суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s$ легко выводится следующее утверждение (М. М. Тян [65]).

Теорема. *Обозначим $P(x)$ — полином степени s, который на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет неравенству $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| \leqslant M$. Тогда*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right) = \int_0^1 P(x)\,dV(x) + O\left(\frac{k^s M \ln^s N}{N}\right),$$

где $k > 1$ — некоторая постоянная, постоянная в символе O абсолютная.

С помощью полиномиальных приближений доказываются теоремы для непрерывных функций $R(x)$. Естественно, что остаточный член получается тем хуже, чем хуже дифференциальные свойства функции $R(x)$

Теорема. *Пусть* $R(x)$ — *целая функция порядка* ρ. *Обозначим* $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|R(x)|$. *При любом* $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}R\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 R(x)\,dV(x)+O\left(\frac{M+1}{N^{\frac{1}{1+\rho}+\varepsilon}}\right).$$

Теорема. *Пусть* $R(x)$ — *функция, аналитическая внутри эллипса с фокусами в точках* 0 *и* 1 *и с суммой полуосей, равной* r $(r>1/2)$. *Для такой функции*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}R\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=\int_0^1 R(x)\,dV(x)+$$
$$+O\left(\exp\left[-\ln(2r-\varepsilon)\frac{\ln\frac{N}{M}}{\ln\ln N+\ln 12(2r-\varepsilon)}\right]\right),$$

где $\varepsilon>0$ — *сколь угодно малая величина.*

Эти теоремы доказаны методом моментов.

Если про функцию $R(x)$ известно лишь, что какая-то производная удовлетворяет условию Липшица, то оценки, полученные методом моментов, невыгодны. Как показал А. С. Файнлейб, выгодно воспользоваться оценкой скорости стремления

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N,\\ \varphi(n)\leqslant n\lambda}}1$$

к $V(\lambda)$. Этим путем был установлен такой результат:

Теорема. *Пусть функция* $R(x)$ *удовлетворяет условию Липшица на отрезке* $[0, 1]$. *Тогда*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}R\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)=A(R)+O\left(e^{-C\sqrt{\ln N\ln\ln N}}\right),$$

где $C>0$ — *постоянная.*

Приведем еще результаты, относящиеся к распределению значений функции Эйлера.

В. Серпинский и А. Шинцель занимались вопросом о распределении последовательных значений функции $\varphi(n)$. В заметке А. Шинцеля [87] доказана

Теорема. *Для любой последовательности h положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_h$ и $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n такое, что*

$$\left|\frac{\varphi(n+i)}{\varphi(n+i-1)} - a_i\right| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, h.$$

В работе П. Эрдёша и А. Шинцеля [114], в частности, установлена следующая теорема.

Теорема. *Пусть $f(n)$ — положительная мультипликативная функция такая, что существует s такое, что*

1) *ряд*

$$\sum_p \frac{(f(p) - p^s)^2}{p^{2s+1}}$$

сходится;

2) *существует интервал (a, b), где или $a = 0$, или $b = \infty$, такой, что для любого натурального M множество чисел $f(n)/n^s$, $(n, M) = 1$, всюду плотно на (a, b).*

Задана последовательность h неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_h$ и $\varepsilon > 0$. Существует более $C(a_1, \ldots, a_h, \varepsilon)\, x$ натуральных чисел $n \leqslant x$, для которых

$$\left|\frac{f(n+i)}{f(n+i-1)} - a_i\right| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, h.$$

Проверим выполнение условий этой теоремы (с $s = 1$) для функции $\varphi(n)$.

1) $$\sum_p \frac{(\varphi(p) - p)^2}{p^3} = \sum_p \frac{1}{p^3} < \infty.$$

2) Выполнение второго условия мы проводим, вероятно, не оптимальным в отношении сложности способом. Нам надо доказать, что для каждого $\alpha \in (0, 1)$, натурального M и $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $(n, M) = 1$ и

$$\left|\frac{\varphi(n)}{n} - \alpha\right| \leqslant \varepsilon.$$

Это будет установлено, если мы покажем, что множество значений $\ln \frac{\varphi(n)}{n}$, где n пробегает числа, взаимно простые с заданными простыми числами $p_1, p_2, \ldots, p_s$, всюду плотно на $(-\infty, 0)$. Поскольку и $-\infty$, и 0

достижимы как пределы значений $\ln\frac{\varphi(n)}{n}$, $(n, p_1, \ldots, p_s) = 1$, то нам достаточно установить, что аддитивная функция

$$g(n) = \begin{cases} \ln\frac{\varphi(n)}{n}, & \text{если} \quad (n, p_1, \ldots, p_s) = 1, \\ 0, & \text{если} \quad (n, p_1, \ldots, p_s) > 1, \end{cases}$$

имеет непрерывную функцию распределения. Поскольку ряд

$$\sum_{g(p)\neq 0} \frac{1}{p} = \sum_{\substack{p \neq p_j \\ j=1, 2, \ldots, s}} \frac{1}{p}$$

расходится, то по теореме Эрдёша — Винтнера $g(n)$ обладает непрерывной функцией распределения.

В работе П. Эрдёша и А. Шинцеля [114] доказана общая теорема о совместном распределении значений аддитивной функции на последовательных значениях аргумента. Напомним обозначение:

$$x^* = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть $g(n)$ — аддитивная функция. Предположим, что*

1) *ряд* $\sum_p \frac{|g(p)|^*}{p}$ *сходится,*

2) *ряд* $\sum_p \frac{(|g(p)|^*)^2}{p}$ *сходится,*

3) *ряд* $\sum_{g(p)\neq 0} \frac{1}{p}$ *расходится.*

Тогда при любом натуральном h существует непрерывная функция распределения h-компонентного вектора

$$(g(m+1),\ g(m+2),\ \ldots,\ g(m+h)).$$

Сходный результат получил И. Катаи ([128], теорема 3).

4.9. Обобщение метода характеристических функций и теория мультипликативных функций

В аналитическом плане преимущество, которое предоставляется при изучении распределения значений положительных мультипликативных функций $f(n)$, состоит в том, что характеристическая функция, связанная с эмпирической функцией распределения $\ln f(n)$, есть нормированная сумма значений мультипликативной функции.

П. Эрдёш [112], [113] получил результат о распределении значений неотрицательных мультипликативных функций; формулировку этого результата мы приводили во введении.

Широкие возможности в изучении распределения значений мультипликативных функций произвольного знака открылись после того, как В. М. Золотарев [24] предложил такое обобщение метода характеристических функций, в рамках которого возможно сведение задачи о распределении значений вещественнозначной функции любого знака к суммированию мультипликативных функций. В. М. Золотарев ввел понятие характеристического преобразования функции распределения. Характеристическим преобразованием функции распределения $F(x)$ называется матрица

$$W(t)=\begin{pmatrix} w_0(t) & 0 \\ 0 & w_1(t)\end{pmatrix},$$

где

$$w_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{it}\operatorname{sgn}^j x\,dF(x),\qquad j=0,\ 1,$$

причем полагается $|0|^{it}\operatorname{sgn}^j 0=0$.

В работе В. М. Золотарева [24] показывается, как функция распределения восстанавливается по своему характеристическому преобразованию.

Применения основываются на следующей теореме, выражающей непрерывное соответствие между характеристическими преобразованиями и функциями распределения.

Теорема. *Если последовательность значений функций распределения $F_n(x)$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$ и*

$$F_n(0) \to F(0), \qquad F_n(+0) \to F(+0), \tag{1}$$

то последовательность характеристических преобразований $W_n(t)$ функций распределения $F_n(x)$ сходится при $n \to \infty$ равномерно в каждом конечном интервале к характеристическому преобразованию $W(t)$ функции $F(x)$. Обратно, если последовательность характеристических преобразований $W_n(t)$ функций распределения $F_n(x)$ сходится к матрице $W(t)$ с непрерывными элементами, то $W(t)$ является характеристическим преобразованием некоторой функции распределения $F(x)$ и последовательность функций распределения $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$.

Наметим доказательство этой теоремы.

Обозначим

$$c_n^+ = 1 - F_n(+0), \quad c_n^- = F_n(0),$$

а через $\varepsilon(x)$ — вырожденный закон распределения

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Легко доказать, что элементы $w_{j,n}(t)$, $j = 0, 1$, характеристического преобразования $W_n(t)$ можно представить в виде

$$w_{j,n}(t) = c_n^+ f_n^+(t) + (-1)^j c_n^- f_n^-(t),$$

где $f_n^+(t)$ и $f_n^-(t)$ — характеристические функции соответственно законов распределения

$$F_n^+(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_n^+}\left(F_n(e^x) - F_n(+0)\right), & \text{если } c_n^+ \neq 0, \\ \varepsilon(x), & \text{если } c_n^+ = 0, \end{cases}$$

и

$$F_n^-(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_n^-}\left(F_n(0) - F_n(-e^x + 0)\right), & \text{если } c_n^- \neq 0, \\ \varepsilon(x), & \text{если } c_n^- = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь при $n \to \infty$ функции $F_n(x)$ слабо сходятся к некоторой функции распределения $F(x)$ и выполнено условие (1). Тогда существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} c_n^+ = c^+, \quad \lim_{n\to\infty} c_n^- = c^-,$$

где

$$c^+ = 1 - F(+0) \text{ и } c^- = F(0).$$

1) Если $c^+ \neq 0$ и $c^- \neq 0$, то при достаточно большом n имеем

$$F_n^+(x) = \frac{1}{c_n^+}(F_n(e^x) - F_n(+0)),$$

$$F_n^-(x) = \frac{1}{c_n^-}(F_n(0) - F_n(-e^x + 0)).$$

Мы заключаем, что последовательности функций $F_n^+(x)$ и $F_n^-(x)$ слабо сходятся к некоторым функциям распределения $F^+(x)$ и $F^-(x)$. Отсюда вытекает, что $f_n^+(t)$ и $f_n^-(t)$ стремятся к характеристическим функциям $f^+(t)$ и $f^-(t)$ функций распределения $F^+(x)$ и $F^-(x)$. Значит,

$$w_{j,n}(t) \to w_j(t) = c^+f^+(t) + (-1)^j c^- f^-(t), \qquad j = 0,\ 1.$$

Мы видим также, что $w_j(t)$, $j=0, 1$, являются элементами характеристического преобразования предельной функции $F(x)$.

2) Пусть какое-либо из чисел c^+ или c^- равно нулю, а другое отлично от нуля. Последовательность функций распределения $F_n^+(x)$ слабо сходится к функции

$$F^+(x) = \frac{1}{c^+}(F(e^x) - F(+0)).$$

Значит, характеристические функции $f_n^+(t)$ сходятся к $f^+(t)$ и

$$w_{j,n}(t) \to w_j(t) = c^+f^+(t), \qquad j = 0,\ 1.$$

Поскольку $F(0) = 0$, то $F^-(x) = \varepsilon(x)$ и $w_j(t)$ являются элементами характеристического преобразования предельного закона $F(x)$.

3) Пусть $c^+=0$ и $c^-=0$. Тогда при $n\to\infty$

$$w_{j,n}(t)\to w_j(t)=0, \quad j=0,\ 1.$$

То, что элементы характеристического преобразования, соответствующего вырожденному закону, тождественно равны нулю, проверяется непосредственно.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть при $n\to\infty$ функции $w_{j,n}(t)$, $j=0, 1$, стремятся к непрерывным функциям $w_j(t)$, $j=0, 1$. Тогда существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} c_n^+ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(w_{0,n}(0)+w_{1,n}(0)\right)=c^+,$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n^- = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(w_{0,n}(0)-w_{1,n}(0)\right)=c^-.$$

Нам опять приходится рассматривать отдельно случаи:

1) Если $c^+\neq 0$ и $c^-\neq 0$, то при достаточно большом n функции

$$f_n^+(t)=\frac{1}{2c_n^+}\left[w_{0,n}(t)+w_{1,n}(t)\right]$$

и

$$f_n^-(t)=\frac{1}{2c_n^-}\left[w_{0,n}(t)-w_{1,n}(t)\right]$$

являются характеристическими функциями соответственно функций распределения $F_n^+(x)$ и $F_n^-(x)$ и стремятся к непрерывным функциям $f^+(t)$ и $f^-(t)$. Поэтому $F_n^+(x)$ и $F_n^-(x)$ слабо сходятся к предельным функциям распределения $F^+(x)$ и $F^-(x)$. Отсюда следует, что $F_n(e^x)$ в смысле слабой сходимости стремится к $1-c^+\left(1-F^+(x)\right)$, а $F_n\left(-e^x+0\right)$ сходится в смысле слабой сходимости к $c^-\left(1-F^-(x)\right)$. Так как функция $F(x)$, определенная в точках непрерывности формулой

$$F(x)=\begin{cases} c^-\left(1-F^-(\ln|x|)\right), & x<0, \\ 1-c^+\left(1-F^+(\ln x)\right), & x>0, \end{cases}$$

является функцией распределения, то отсюда следует слабая сходимость $F_n(x)$ к $F(x)$. Так как

$$F(+0)=1-c^+, \quad F(0)=c^-,$$

то
$$F_n(+0) \to F(+0), \quad F_n(0) \to F(0);$$
значит, по первой части нашего предложения предельные функции $w_j(t)$, $j=0, 1$, являются элементами характеристического преобразования функции $F(x)$.

2) Пусть какое-либо одно из чисел c^+, c^- равно нулю, скажем, $c^+ \neq 0$, $c^- = 0$. Мы доказываем аналогично первому случаю слабую сходимость функций $F_n(x)$ к функции распределения $F(x)$, определенной как
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x < 0, \\ 1 - c^+ \left(1 - F^+(\ln x)\right) & \text{для} \quad x > 0. \end{cases}$$
Далее мы проверяем выполнение условий (1), и тем самым устанавливается, что $w_j(t)$, $j=0, 1$, являются элементами характеристического преобразования функции $F(x)$.

3) Если $c^+ = 0$ и $c^- = 0$, то в силу неравенств
$$F_n(x) \leqslant F_n(0) = c_n^- \quad \text{для} \quad x \leqslant 0,$$
$$1 - F_n(x) \leqslant 1 - F_n(+0) = c_n^+ \quad \text{для} \quad x > 0$$
следует при $n \to \infty$ слабая сходимость $F_n(x)$ к вырожденному закону $\varepsilon(x)$. Кроме того, $F_n(0) \to 0$ и $F_n(+0) \to 1$. Поскольку элементы характеристического преобразования закона $\varepsilon(x)$ равны нулю, то очевидно соответствие предельных элементов характеристического преобразования предельному закону распределения.

Рассмотрим вещественнозначную мультипликативную функцию $f(n)$ и соответствующую ей эмпирическую функцию распределения
$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ f(n) \leqslant x}} 1.$$
Элементы характеристического преобразования функции $F_N(x)$ равны
$$w_{j,N}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |f(n)|^{it} \operatorname{sgn}^j f(n), \qquad j = 0, 1.$$
Мы видим, что вопрос о предельном поведении функций $F_N(x)$ свелся к задаче о суммировании

мультипликативных функций. Здесь по аналогии с доказательством теоремы Эрдёша — Винтнера естественно применить теорему Деланжа.

Именно таким методом А. В. Бакштис [3] получил аналог теоремы Эрдёша — Винтнера и расширение теоремы Эрдёша (см. [112], [113], формулировку мы приводили во введении) на мультипликативные функции произвольного знака, для которых сходятся ряды

$$\sum_p \frac{(|f(p)|-1)^*}{p} \quad \text{и} \quad \sum_p \frac{((|f(p)|-1)^*)^2}{p}. \tag{2}$$

Функцию распределения $F(x)$ назовем симметричной, если для любого $x>0$

$$1-F(x)=F(-x+0).$$

Приведем формулировки двух теорем А. В. Бакштиса. Пусть $f(n)$ — вещественнозначная мультипликативная функция.

Теорема. *Функция распределения*

$$\frac{1}{N} \sum_{f(n)\leqslant x,\ n\leqslant N} 1 \tag{3}$$

при $N\to\infty$ сходится к некоторой предельной несимметричной функции распределения тогда и только тогда, когда ряды (2) *и ряд*

$$\sum_{f(p)<0} \frac{1}{p} \tag{4}$$

сходятся и существует натуральное α такое, что $f(2^\alpha)\neq -1$.

Заметим, что эта теорема неприменима к функции Мёбиуса, ибо из соотношения

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \mu^2(n)=\frac{6}{\pi^2}$$

и асимптотического закона распределения простых чисел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \mu(n)=0$$

следует, что для функции Мёбиуса существует предельная функция распределения

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ \mu(n)=\alpha}} 1=\begin{cases}\dfrac{3}{\pi^2}, & \alpha=-1,\\ 1-\dfrac{6}{\pi^2}, & \alpha=0,\\ \dfrac{3}{\pi^2}, & \alpha=+1,\end{cases}$$

которая симметрична.

Теорема. *Если функции распределения* (3) *при* $N\to\infty$ *сходятся к некоторой предельной функции распределения, отличной от*

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad x\leqslant 0,\\ 1 & \textit{при} \quad x>0,\end{cases}$$

то она является симметричной тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из следующих условий:

1) *ряд* (4) *расходится*;

2) $f(2^\alpha)=-1$ *для всех натуральных чисел* α.

4.10. Распределение значений нестабильных аддитивных функций

В вопросе о распределении значений нестабильных аддитивных функций основным примером является функция $\nu(n)$.

В § 4.4 мы говорили об аналоге неравенства Чебышева для функции $\nu(n)$. П. Эрдёш и М. Кац [109] доказали аналог центральной предельной теоремы для функции $\nu(n)$.

Теорема. *Пусть вещественная сильно аддитивная арифметическая функция удовлетворяет условию: при* $n\to\infty$

$$B(n)=\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{g^2(p)}{p}\right)^{1/2}\to\infty$$

и $|g(p)| \leqslant 1$; *тогда при* $N \to \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N;\ g(n) \leqslant \\ \leqslant \sum\limits_{p \leqslant N} \frac{g(p)}{p} + xB(N)}} 1 \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du.$$

Ясно, что функция $\nu(n)$ удовлетворяет условиям теоремы Эрдёша — Каца.

И. П. Кубилюсом был введен класс H аддитивных функций. К классу H по определению принадлежат вещественные сильно аддитивные функции, для которых выполнены такие условия:

1) $B(n) \to \infty$;

2) существует такая функция $r(n) \to \infty$, $\dfrac{\ln r(n)}{\ln n} \to 0$, что

$$\frac{B(r(n))}{B(n)} \to 1.$$

Покажем, что аддитивные функции, рассматриваемые в теореме Эрдёша — Каца, принадлежат классу H. Первое условие общее. Далее,

$$1 + \frac{\ln \dfrac{\ln n}{\ln r(n)} + O\left(\dfrac{1}{\ln r(n)}\right)}{B^2(r(n))} \geqslant \frac{B^2(n)}{B^2(r(n))} \geqslant 1.$$

Так как ряд

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{g^2(p)}{p}$$

расходится, то существует неубывающая и стремящаяся к бесконечности функция $F(n)$ такая, что

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{g^2(p)}{p} \geqslant F(n).$$

Значит,

$$1 + o(1) + \frac{\ln \dfrac{\ln n}{\ln r(n)}}{F(r(n))} \geqslant \frac{B^2(n)}{B^2(r(n))} \geqslant 1.$$

Положим

$$\varphi(x) = e^{\ln x \ln F(x)}$$

и определим $r(n)$ как обратную функцию к $\varphi(n)$, $r(n) \to \infty$. Мы имеем

$$n = e^{\ln r(n) \ln F(r(n))}.$$

Тогда

$$\frac{\ln n}{\ln r(n)} = \ln F(r(n)) \to \infty.$$

Значит,

$$1 + o(1) + \frac{\ln \ln F(r(n))}{F(r(n))} \geqslant \frac{B^2(n)}{B^2(r(n))} \geqslant 1$$

и

$$\frac{B(n)}{B(r(n))} \to 1.$$

Сформулируем теорему И. П. Кубилюса о функциях класса H (см. [34], теорема 4.1).

Теорема. *Для того чтобы функция распределения*

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N,\ g(n) \leqslant \\ \leqslant \sum\limits_{p \leqslant N} \frac{g(p)}{p} + uB(N)}} 1,$$

где $g(n)$ — функция класса H, сходилась бы к предельному закону с дисперсией 1, *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция $K(u)$ с вариацией* 1, *что во всех точках непрерывности $K(u)$*

$$\frac{1}{B^2(n)} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ g(p) \leqslant uB(n)}} \frac{g^2(p)}{p} \to K(u).$$

Логарифм характеристической функции предельного закона вычисляется по формуле

$$\ln f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itu} - 1 - itu}{u^2}\, dK(u),$$

где подынтегральная функция при $u = 0$ считается равной $-\frac{1}{2}t^2$.

Покажем, что теорема Эрдёша — Каца является частным случаем теоремы Кубилюса. Пусть $g(n)$

ограничена по модулю. Тогда, как легко видеть,

$$K(u)=\begin{cases}1, & u>0,\\ 0, & u<0.\end{cases}$$

Поэтому

$$\ln f(t) = -\frac{t^2}{2},$$

что соответствует нормальному закону.

Б. В. Левин и А. С. Файнлейб в работе [39] при изучении вопросов распределения значений вещественнозначных аддитивных функций $g(n)$ исходят из поведения этих функций на множестве простых чисел. Под этим разумеется поведение при $N\to\infty$ последовательности функций распределения

$$\Phi_N(w)=\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p\leqslant N,\ g(p)<w} 1.$$

По поведению $\Phi_N(w)$ восстанавливается поведение последовательности функций распределения

$$F_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N,\ g(n)<x} 1$$

при $N\to\infty$.

Вопросу об остаточных членах в интегральных предельных теоремах было посвящено много исследований. В монографии И. П. Кубилюса (см. [34], стр. 126), и в работе М. Б. Барбана [6] приводится следующая теорема.

Теорема. *Пусть $g_1(n), \ldots, g_s(n)$ — вещественные сильно аддитивные функции такие, что при $N\to\infty$*

$$B_j(N)=\left(\sum_{p\leqslant N}\frac{g_j^2(p)}{p}\right)^{1/2}\to\infty,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

и

$$\frac{1}{B_j(N)}\max_{p\leqslant N}|g_j(p)|\leqslant\mu(N),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ s,$$

где $\mu(N)$ не возрастает и стремится к нулю. Зададим различные между собой целые неотрицательные числа $a_1, \ldots, a_s$. Тогда при $N\to\infty$ равномерно по N и при

$N \geqslant N_0$ *равномерно по* x

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N,\ \sum\limits_{j=1}^{s} \frac{g_j(n+a_j) - \sum\limits_{p \leqslant N} \frac{g_j(p)}{p}}{B_j(N)} < x\sqrt{s}} 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du + O\left(\mu(N)\left(e^{-x^2/2} \ln \frac{1}{\mu(N)} + 1\right)\right).$$

Для функции $\nu(n)$ были получены (В. Левеком и И. П. Кубилюсом) результаты более точные, чем те, которые дает общая теорема. И. П. Кубилюс показал, что

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N,\ \nu(n) \leqslant \ln\ln N + x\sqrt{\ln\ln N}} 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}\right).$$

Более общий результат в этом направлении был получен А. Реньи и П. Тураном [146], а именно ими была доказана

Теорема. *Пусть вещественная аддитивная функция* $g(n)$ *обладает тем свойством, что* $g(p) = 1$ *при любом простом* p *и существует постоянная* c *такая, что*

$$g(p^r) = O(r^c);$$

тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ g(n) \leqslant \ln\ln N + x\sqrt{\ln\ln N}}} 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}\right).$$

Б. В. Левин и А. С. Файнлейб доказали следующую теорему ([37], теорема 2.3.2).

Теорема. *Пусть* $g(n)$ — *вещественная аддитивная функция, удовлетворяющая условиям: во-первых,*

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{e^{i\xi g(p)} p}{p} \ln p = \tau(e^{i\xi}) \ln x + B(e^{i\xi}) + O\left(e^{-c(\ln x)^{\alpha}}\right)$$

равномерно по ξ, *где* $\tau(e^{i\xi})$ и $B(e^{i\xi})$ — *трижды дифференцируемые в окрестности* $\xi=0$ *функции; во-вторых, если* $|\xi|\leqslant\pi$, *то* $\operatorname{Re}\tau(e^{i\xi})\leqslant 1-\beta\xi^2$ *с* $\beta>0$, *и, наконец,*

$$g(n)=O\left(e^{(\ln n)^{\alpha-\varepsilon}}\right),\quad \varepsilon>0.$$

Тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ g(n)\leqslant\tau'(1)\ln\ln N+x\sqrt{a\ln\ln N}}}1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}\right)$$

равномерно по x, *где* $a=\tau'(1)+\tau''(1)$.

Покажем, что в этой теореме содержится как следствие теорема Реньи — Турана. В самом деле, в условиях теоремы равномерно по ξ

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{e^{i\xi}\ln p}{p}=e^{i\xi}\ln x+Be^{i\xi}+O\left(e^{-a\sqrt{\ln x}}\right).$$

Значит, $\tau(x)=x$, $B(x)=Bx$, $\alpha=1/2$. Далее,

$$\operatorname{Re}e^{i\xi}=\cos\xi\leqslant 1-\beta\xi^2,\quad \text{где}\quad \beta>0,\quad \text{при}\quad |\xi|\leqslant\pi.$$

Для $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$

$$g(n)=O\left(\alpha_1^c+\ldots+\alpha_s^c\right)=O\left(\nu(n)\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)^c\right)=O\left(e^{(\ln n)^{1/4}}\right).$$

Для функции $\nu(n)$ получено асимптотическое разложение предельной функции распределения по степеням $\frac{1}{\sqrt{\ln\ln N}}$ (см. Г. Деланж [103], И. П. Кубилюс [34], § 9). Б. В. Левин и А. С. Файнлейб ([37], теорема 2.3.3) обобщили и развили этот результат.

Развитием теории распределения значений аддитивных функций являются проблематика и результаты, относящиеся к распределению значений этих функций, когда аргумент пробегает подпоследовательности натурального ряда. Мы не останавливаемся на этих вопросах, а отсылаем к обзорной статье М. Б. Барбана ([7], § 7), где приводятся результаты, полученные в этом направлении, и даются указания на литературные источники.

4.11. Асимптотические разложения для сумм мультипликативных функций

Систематизация материала, относящегося к суммированию тех мультипликативных функций, для сумматорных формул которых имеется асимптотическое разложение, с успехом может быть проведена на основе разработанного Б. В. Левиным и А. С. Файнлейбом итерационного метода ([37]).

Для данной мультипликативной функции $f(n)$ обозначим

$$m(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n).$$

Мы введем для функции $f(n)$ аналог функции Мангольдта $\Lambda_f(n)$, определенной равенством

$$f(n) \ln n = \sum_{d \mid n} f(d) \Lambda_f\left(\frac{n}{d}\right). \tag{1}$$

Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

тогда

$$F'(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f(n) \ln n}{n^s}$$

и

$$-\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s}.$$

Покажем, что $\Lambda_f(1) = 0$ и $\Lambda_f(n) = 0$, если n не есть степень простого числа. В самом деле,

$$F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right),$$

поэтому

$$-\frac{F'(s)}{F(s)}=(-\ln F(s))'=$$
$$=\sum_p\left(-\ln\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\ldots\right)\right)'=$$
$$=\sum_p\frac{\frac{f(p)}{p^s}+2\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+3\frac{f(p^3)}{p^{3s}}+\ldots}{1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\ldots}=\sum_p\sum_j\frac{\Lambda_f(p^j)}{p^{js}}.$$

Остается сравнить коэффициенты с коэффициентами выражения

$$-\frac{F'(s)}{F(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda_f(n)}{n^s}.$$

Замечание. В § 4.5 при доказательстве первой теоремы Деланжа с мультипликативной функцией f связывались числа $c_r^{(p)}(f)$ ($r=1, 2, \ldots$, p пробегает простые числа). Эти числа однозначно определяются из равенства

$$f(n)\ln n=\sum_{p^j\mid n}c_j^{(p)}(f)\,f\left(\frac{n}{p^j}\right)\ln p. \tag{2}$$

Сравнивая равенства (1) и (2) для n, равного степени простого числа, убеждаемся в том, что

$$\Lambda_f(n)=\begin{cases}0, & n=1,\ n \text{ не есть степень простого числа},\\ c_j^{(p)}(f)\ln p, & n=p^j, \quad j\neq 0.\end{cases}$$

В итерационном методе асимптотическое поведение суммы $m(x)$ выводится из асимптотики суммы

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda_f(n). \tag{3}$$

В конкретных задачах данные о сумме (3) являются следствием законов распределения простых чисел (или простых идеалов). Обычно это равенства вида

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda_{\mathfrak{f}}(n)=\tau\ln x+B+h(x), \tag{4}$$

где $h(x)$ не возрастает и

$$h(x)=O\left(\min\left(1,\ \frac{1}{\ln^N x}\right)\right).$$

На функцию $f(n)$ мы наложим требование, чтобы

$$\sum_{n\leqslant x}|f(n)|=O(\ln^A x). \tag{5}$$

Приступим к описанию итерационного процесса. Исходной оценкой для $m(x)$ является оценка, очевидным образом следующая из требования (5):

$$m(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n)=O\left(\sum_{n\leqslant x}|f(n)|\right)=O(\ln^A x). \tag{6}$$

Для простоты предположим, что τ — вещественное число. Суммируя равенство (1) по всем $n\leqslant x$, получаем

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\ln n=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d\mid n}f(d)\Lambda_{\mathfrak{f}}\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\leqslant x}f(d)\sum_{k\leqslant\frac{x}{d}}\Lambda_{\mathfrak{f}}(k)=$$

$$=\tau\sum_{n\leqslant x}f(n)\ln\frac{x}{n}+B\sum_{n\leqslant x}f(n)+\sum_{n\leqslant x}f(n)h\left(\frac{x}{n}\right).$$

Это равенство запишем в таком виде:

$$-\sum_{n\leqslant x}f(n)\ln\frac{x}{n}+\ln x\sum_{n\leqslant x}f(n)=$$

$$=\tau\sum_{n\leqslant x}f(n)\ln\frac{x}{n}+B\sum_{n\leqslant x}f(n)+\sum_{n\leqslant x}f(n)h\left(\frac{x}{n}\right).$$

Вспомнив обозначение $m(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}f(n)$, мы запишем полученное соотношение следующим образом:

$$m(x)\ln x-(\tau+1)\int_1^x m(v)\frac{dv}{v}=Bm(x)+\sum_{n\leqslant x}f(n)h\left(\frac{x}{n}\right). \tag{7}$$

Так как $|h(x)| \leqslant c$, то по оценке (6) получаем

$$m(x)\ln x - (\tau+1)\int_1^x m(v)\frac{dv}{v} = O(\ln^A x).$$

Предположим, что $A-\tau-2 \neq -1$. Тогда

$$\frac{m(x)}{x(\ln x)^{\tau+1}} - \frac{\tau+1}{x(\ln x)^{\tau+2}}\int_1^x \frac{m(v)}{v}\,dv = O\left(\frac{\ln^{A-\tau-2} x}{x}\right).$$

Заменяя в этом соотношении букву x на u и интегрируя

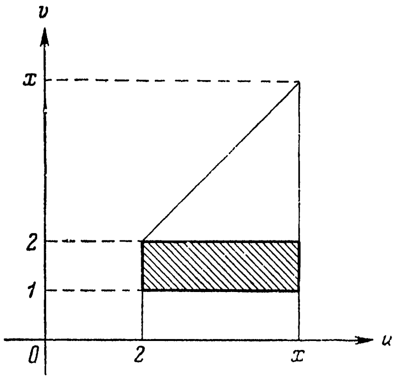


Рис. 7.

его от 2 до x, получаем

$$\int_2^x \frac{m(u)\,du}{u(\ln u)^{\tau+1}} - (\tau+1)\int_2^x \frac{du}{u(\ln u)^{\tau+2}}\int_1^u \frac{m(v)}{v}\,dv = c_2 + O\left((\ln x)^{A-\tau-1}\right).$$

Переменив порядок интегрирования во втором интеграле (см. рис. 7), получаем

$$\int_2^x \frac{m(u)\,du}{u(\ln u)^{\tau+1}} - (\tau+1)\int_1^x \frac{m(v)}{v}\,dv \int_{\max(2,\,v)}^x \frac{du}{u(\ln u)^{\tau+2}} = c_2 + O\left((\ln x)^{A-\tau-1}\right),$$

или

$$\int_2^x \frac{m(u)\,du}{u(\ln u)^{\tau+1}} - (\tau+1)\int_2^x \frac{m(v)}{v}\left(\int_v^x \frac{du}{u(\ln u)^{\tau+2}}\right)dv -$$

$$-(\tau+1)\int_1^2\int_2^x \frac{m(v)}{v}\,\frac{1}{u(\ln u)^{\tau+2}}\,du\,dv = c_2 + O\left((\ln x)^{A-\tau-1}\right),$$

$$\int_2^x \frac{m(u)}{u(\ln u)^{\tau+1}}\,du + \int_2^x \frac{m(v)}{v}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\tau+1}} - \frac{1}{(\ln v)^{\tau+1}}\right)dv +$$

$$+\int_1^2 \frac{m(v)}{v}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\tau+1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\tau+1}}\right)dv = c_2 + O\left((\ln x)^{A-\tau-1}\right).$$

После сокращения получаем

$$\frac{1}{(\ln x)^{\tau+1}}\int_1^x \frac{m(v)}{v}\,dv = c_2' + O\left((\ln x)^{A-\tau-1}\right),$$

т. е.

$$\int_1^x \frac{m(v)}{v}\,dv = c_2'(\ln x)^{\tau+1} + O\left((\ln x)^{A}\right).$$

Вместе с равенством

$$m(x)\ln x - (\tau+1)\int_1^x m(v)\,\frac{dv}{v} = O\left((\ln x)^{A}\right)$$

мы получаем

$$m(x)\ln x = c_2''(\ln x)^{\tau+1} + O\left((\ln x)^{A}\right),$$

или

$$m(x) = c_2''(\ln x)^{\tau} + O\left((\ln x)^{A-1}\right).$$

Если $\tau > A-1$, то мы получаем один член асимптотической формулы. Если $\tau \leqslant A-1$, то мы просто улучшили исходную оценку (6). В обоих случаях мы получаем начало итерационного процесса.

Приведем пример на применение метода. Рассмотрим функцию, определенную равенством

$$b(n)=\begin{cases} 0, & n \text{ не представляется в виде суммы двух квадратов,} \\ 1, & n \text{ представляется в виде суммы двух квадратов.} \end{cases}$$

Функция $b(n)$ мультипликативная.

Докажем следующее утверждение.

Лемма. *При любом натуральном F и при $x\to\infty$*

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}=a_0\sqrt{\ln x}+\sum_{r=1}^{F}\frac{a_r}{(\ln x)^{r-1/2}}+O\left(\frac{1}{(\ln x)^{F+1/2}}\right),$$

где a_0 — постоянная, отличная от нуля, $a_1, a_2, \ldots, a_F$ — постоянные.

Доказательство. Обозначим

$$f(n)=\frac{b(n)}{n}.$$

В силу теоремы теории чисел о структуре канонического разложения чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, и мультипликативности функции $f(n)=$ $=b(n)/n$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\frac{1}{1-\frac{1/2}{2^s}}\prod_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}\frac{1}{1-\frac{1/p}{p^s}}\prod_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}\frac{1}{1-\frac{1/p}{p^{2s}}}.$$

Отсюда

$$\ln\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=-\ln\left(1-\frac{1/2}{2^s}\right)-\sum_{p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}\ln\left(1-\frac{1/p}{p^s}\right)-$$
$$-\sum_{p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}\ln\left(1-\frac{1/p}{p^{2s}}\right)$$

и

$$-\left(\ln\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right)' = -\frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\right)'}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)\ln n}{n^s}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}} =$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(e^{-s\ln 2}\right)'}{1-\frac{1/2}{2^s}}+\sum_{p\equiv 1 \pmod 4}\frac{1}{p}\frac{\left(e^{-s\ln p}\right)'}{1-\frac{1/p}{p^s}}+\sum_{p\equiv 3 \pmod 4}\frac{1}{p^2}\frac{\left(e^{-2s\ln p}\right)'}{1-\frac{1/p^2}{p^{2s}}}=$$

$$=\frac{\ln 2/2^{s+1}}{1-\frac{1}{2^{s+1}}}+\sum_{p\equiv 1 \pmod 4}\frac{\ln p/p^{s+1}}{1-\frac{1}{p^{s+1}}}+\sum_{p\equiv 3 \pmod 4}\frac{2\ln p/p^{2(s+1)}}{1-\frac{1}{p^{2(s+1)}}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{2^{k(s+1)}}+\sum_{p\equiv 1 \pmod 4}\ln p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^{k(s+1)}}+$$

$$+\sum_{p\equiv 3 \pmod 4}2\ln p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^{2k(s+1)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda_f(n)}{n^s},$$

где

$$\Lambda_f(n)=\begin{cases}\dfrac{\ln p}{p^k}, & n=p^k,\quad p=2,\quad p\equiv 1 \pmod 4,\\[2mm] \dfrac{2\ln p}{p^{2k}}, & n=p^{2k},\quad p\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Итак

$$f(n)\ln n=\sum_{d\mid n}f(d)\,\Lambda_f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Из соотношения

$$\sum_{p\equiv 1 \pmod 4}\ln p=\frac{x}{2}+R(x),\quad R(x)=O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$$

с помощью абелева преобразования получаем

$$\sum_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{\ln p}{p} = \int_2^x \frac{\sum\limits_{p\equiv 1 \pmod 4,\ p\leqslant u} \ln p}{u^2}\, du + \frac{\sum\limits_{p\equiv 1 \pmod 4,\ p\leqslant x} \ln p}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^x \frac{du}{u} + \int_2^x \frac{R(u)}{u^2}\, du + \frac{1}{2} + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right) =$$

$$= \frac{\ln x}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} + \int_2^\infty \frac{R(u)}{u^2}\, du + O\left(\int_x^\infty \frac{e^{-c\sqrt{\ln u}}}{u}\, du\right) + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right) = \frac{\ln x}{2} + c_1 + O\left(\frac{1}{(\ln x)^N}\right).$$

Зададим любое натуральное N. Мы имеем

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda_f(n) = \frac{\ln x}{2} + c_2 + O\left(\min\left(1, \frac{1}{(\ln x)^N}\right)\right).$$

Далее,

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{b(n)}{n} = O\left(\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n}\right) = O(\ln x).$$

Мы находимся в условии применимости итерационного метода (с $A = 1$ и $\tau = 1/2$). Проведя один раз вычисление по описанной схеме, мы получаем

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{b(n)}{n} = a_0\sqrt{\ln x} + O(1).$$

Теперь мы можем взять $A = 1/2$. Проведя второй раз вычисления по схеме метода интегральных уравнений, мы получаем

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{b(n)}{n} = a_0\sqrt{\ln x} + O\left(\frac{1}{(\ln x)^{1/2}}\right). \tag{8}$$

Проведем теперь индукцию. Предположим, что установлено

$$m(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu (\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu}+O\left((\ln x)^{\frac{1}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\rho}}(\ln\ln x)^{r-1}\right). \tag{9}$$

Для $r=1$ утверждение (8) является более сильным утверждением, чем требуется. Если мы докажем, что при этих условиях будет выполняться оценка

$$m(x)=\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu (\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu}+O\left((\ln x)^{\frac{1}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\rho}}(\ln\ln x)^{r}\right),$$

то лемма будет доказана. Теперь в предположении индукции (9) рассмотрим сумму

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right),$$

фигурирующую в равенстве (7). Возьмем $0<\theta<1-\varepsilon_0$, ε_0 фиксировано, и проведем следующие оценки:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{x^{1-\theta}<n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\leqslant x^{1-\theta}}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)=$$

$$=\sum_{x^{1-\theta}<n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)+h(x^{\theta})\sum_{n\leqslant x^{1-\theta}}\frac{b(n)}{n}=$$

$$=\sum_{x^{1-\theta}<n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)+O\left(\frac{1}{\theta^{N}(\ln x)^{N-1/2}}\right)=$$

$$=\int\limits_{u=1-\theta}^{1}h(x^{1-u})\,dm(x^{u})+O\left(\frac{1}{\theta^{N}(\ln x)^{N-1/2}}\right).$$

Положим

$$R(x)=m(x)-\sum_{\nu=0}^{r-1}a_\nu(\ln x)^{1/2-\nu}.$$

Мы получаем

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{\nu=0}^{r-1}a_\nu\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(\ln x)^{1/2-\nu}\int\limits_{1-\theta}^{1}\frac{h(x^{1-u})}{u^{1/2+\nu}}\,du+$$

$$+\int\limits_{u=1-\theta}^{1}h(x^{1-u})\,dR(x^u)+O\left(\frac{1}{\theta^N(\ln x)^{N-1/2}}\right).$$

Интегрирование по частям дает

$$\left|\int\limits_{u=1-\theta}^{1}h(x^{1-u})\,dR(x^u)\right|=$$

$$=\left|h(1)R(x)-h(x^\theta)R(x^{1-\theta})+\int\limits_{1-\theta}^{1}R(x^u)\,dh(x^{1-u})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{x^{1-\theta}\leqslant z\leqslant x}|R(z)|\operatorname*{var}_{1\leqslant z\leqslant x^\theta}h(z)+$$

$$+O\left(\frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}}{(\ln\ln x)^{r-1}}\right),$$

ибо $h(x^\theta)=O(1)$, а для $R(x^{1-\theta})$ порядок оценки тот же, что и для $R(x)$. Но

$$\operatorname*{var}_{1\leqslant u\leqslant x^\theta}h(u)\leqslant\operatorname*{var}_{1\leqslant u\leqslant x^\theta}\sum_{n\leqslant u}\Lambda_f(n)+\operatorname*{var}_{1\leqslant u\leqslant x^\theta}\frac{\ln u}{2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n\leqslant x^\theta}|\Lambda_f(n)|+O(\theta\ln x)=$$

$$=\sum_{n\leqslant x^\theta}\Lambda_f(n)+O(\theta\ln x)=O(\theta\ln x).$$

Таким образом, сделав в интегралах замену переменных $z=1-u$, получаем

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{\nu=0}^{r-1}a_\nu\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu}\int_0^\theta h(x^z)(1-z)^{-\frac{1}{2}-\nu}dz+$$
$$+O\left(\theta(\ln x)^{\frac{3}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}(\ln\ln x)^{r-1}\right)+O\left(\frac{1}{\theta^N(\ln x)^{N-1/2}}\right)=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{r-2}a_\nu\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu}\int_0^\theta h(x^z)(1-z)^{-\frac{1}{2}-\nu}dz+$$
$$+a_{r-1}\left(\frac{3}{2}-r\right)(\ln x)^{\frac{3}{2}-r}\int_0^\theta h(x^z)(1-z)^{-\frac{1}{2}-r}dz+$$
$$+O\left(\theta(\ln x)^{\frac{3}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}(\ln\ln x)^{r-1}\right)+O\left(\frac{1}{\theta^N(\ln x)^{N-1/2}}\right);\quad(10)$$

если $r=1$, то первая сумма (от $\nu=0$ до $r-2$) пустая. В силу оценки для $h(x)$

$$(\ln x)^{\frac{3}{2}-r}\int_0^\theta h(x^z)(1-z)^{-\frac{1}{2}-r}dz=$$
$$=O\left((\ln x)^{\frac{3}{2}-r-N}\theta^{1-N}\right)+O\left((\ln x)^{\frac{1}{2}-r}\right).$$

Выражение с $h(x^z)(1-z)^{-\frac{1}{2}-\nu}$ преобразуем по формуле бинома

$$\int_0^\theta h(x^z)(1-z)^{-\frac{1}{2}-\nu}dz=$$
$$=\sum_{\mu=0}^{r-2-\nu}(-1)^\mu\binom{-\nu-\frac{1}{2}}{\mu}\int_0^\theta h(x^z)z^\mu dz+$$
$$+O\left(\int_0^\theta|h(x^z)|z^{r-\nu-1}dz\right).$$

В равенстве (7) величину $m(x)$, стоящую в правой части, выразим по формуле (9) (предположение индукции), а вместо $\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}h\left(\frac{x}{n}\right)$ подставляем полученную нами оценку (10). Это дает

$$m(x)\ln x-\frac{3}{2}\int\limits_1^x m(u)\frac{du}{u}=B\sum_{\nu=0}^{r-1}a_\nu(\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu}+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{r-2}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)a_\nu(\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu}\sum_{\mu=0}^{r-2-\nu}(-1)^\mu\binom{-\frac{1}{2}-\nu}{\mu}\times$$
$$\times\int\limits_0^\theta h(x^z)z^\mu\,dz+O\left(\sum_{\nu=0}^{r-2}(\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu}\int\limits_0^\theta|h(x^z)|z^{r-1-\nu}\,dz\right)+$$
$$+O\left(N^{1-\theta}(\ln x)^{\frac{3}{2}-r-N}\right)+O\left(\theta(\ln x)^{\frac{3}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}(\ln\ln x)^r\right)+$$
$$+O\left(\frac{1}{\theta^N}\frac{1}{(\ln x)^{N-\frac{1}{2}}}\right)+O\left((\ln x)^{\frac{1}{2}-r}\right).$$

Но

$$\int\limits_0^\theta h(x^z)z^\mu\,dz=\frac{1}{(\ln x)^{\mu+1}}\int\limits_1^{x^\theta}\frac{h(z)(\ln z)^\mu}{z}\,dz.$$

В силу оценки

$$h(z)=O\left(\frac{1}{(\ln z)^N}\right)$$

интеграл

$$\int\limits_1^\infty\frac{h(z)(\ln z)^\mu}{z}\,dz$$

сходится. Обозначим его через b_μ. Мы имеем

$$\int_0^\theta h(z)\,z^\mu\,dz = \frac{b_\mu}{(\ln x)^{\mu+1}} + O\left[\frac{1}{(\ln x)^{\mu+1}} \int_{x^\theta}^{\infty} \frac{h(z)(\ln z)^\mu}{z}\,dz\right] =$$

$$= \frac{b_\mu}{(\ln x)^{\mu+1}} + O\left[\frac{1}{(\ln x)^{\mu+1}} \int_{x^\theta}^{\infty} \frac{dz}{(\ln z)^{N-\mu} z}\right] =$$

$$= \frac{b_\mu}{(\ln x)^{\mu+1}} + O\left(\frac{1}{\theta^{N-\mu-1}(\ln x)^N}\right).$$

Это нам дает

$$m(x)\ln x - \frac{3}{2}\int_1^x m(u)\frac{du}{u} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} c_\nu (\ln x)^{1/2-\nu} + O\left(\frac{1}{\theta^N}\sum_{\nu=0}^{r-2}(\ln x)^{1/2-\nu-N}\sum_{\mu=0}^{r-\nu-2}\theta^{\mu+1}\right) +$$

$$+ O\left(\sum_{\nu=0}^{r-2}(\ln x)^{1/2-\nu-N}\theta^{r-\nu-N}\right) + O\left(\theta^{1-N}(\ln x)^{3/2-r-N}\right) +$$

$$+ O\left(\theta(\ln x)^{\frac{3}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}(\ln\ln x)^r\right) + O\left(\frac{1}{\theta^N}\frac{1}{(\ln x)^{N-1/2}}\right) +$$

$$+ O\left((\ln x)^{1/2-r}\right) = \sum_{\nu=0}^{r-1} c_\nu(\ln x)^{1/2-\nu} + O\left(\frac{\theta}{\theta^N(\ln x)^{N-1/2}}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{\theta^2}{\theta^N}\sum_{\nu=0}^{r-2}(\ln x)^{1/2-\nu-N}\right) + O\left(\theta^{1-N}(\ln x)^{3/2-r-N}\right) +$$

$$+ O\left(\theta(\ln x)^{\frac{3}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}(\ln\ln x)^r\right) + O\left(\frac{1}{\theta^N(\ln x)^{N-1/2}}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} c_\nu(\ln x)^{1/2-\nu} + O\left(\frac{1}{\theta^N}\frac{1}{(\ln x)^{N-3/2}}\right) +$$

$$+ O\left(\theta(\ln x)^{\frac{3}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}(\ln\ln x)^r\right) + O\left((\ln x)^{1/2-r}\right).$$

Положим

$$\theta = (\ln x)^{-\left(\frac{N}{N+1}\right)^r};$$

тогда, учитывая, что N — большое число и, значит, $\dfrac{1}{(\ln x)^{N-\frac{3}{2}}}$ есть малая величина, получаем

$$m(x)\ln x - \frac{3}{2}\int_1^x m(u)\frac{du}{u} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} c_\nu (\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu} + O\left((\ln x)^{\frac{3}{2}-\sum_{\rho=0}^{r-1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho} (\ln\ln x)^r\right). \quad (11)$$

Теперь по исходной схеме

$$\frac{m(x)}{x(\ln x)^{3/2}} - \frac{3}{2}\frac{1}{(\ln x)^{5/2}}\int_1^x m(u)\frac{du}{u} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{c_\nu}{(\ln x)^{r+\nu}} + O\left(\frac{(\ln x)^{-1-\sum_{\rho=0}^{r}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}}{x}(\ln\ln x)^r\right).$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{(\ln x)^{3/2}}\int_1^x \frac{m(u)\,du}{u} =$$

$$= c' + \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{c'_\nu}{(\ln x)^{\nu+1}} + O\left((\ln x)^{-\sum_{\rho=0}^{r}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}(\ln\ln x)^r\right).$$

Это дает

$$\int_1^x \frac{m(u)}{u}\,du = c'(\ln x)^{3/2} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{c'_\nu(\ln x)^{1/2}}{(\ln x)^\nu} + O\left((\ln x)^{\frac{3}{2}-\sum_{\rho=0}^{r}\left(\frac{N}{N+1}\right)^\rho}(\ln\ln x)^r\right).$$

Последнее соотношение вместе с неравенством (11) дает

$$m(x)=\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu (\ln x)^{\frac{1}{2}-\nu}+O\left((\ln x)^{\frac{1}{2}-\sum\limits_{\rho=0}^{r}\left(\frac{N}{N+1}\right)^{\rho}}(\ln\ln x)^{r}\right).$$

Конечно, длина нашей индукции по r ограничена выбором N, но мы можем взять N сколь угодно большим.

Лемма доказана.

Докажем уточнение упоминавшейся нами теоремы Э. Ландау [132].

Теорема. *При любом натуральном F имеет место соотношение*

$$\sum_{n\leqslant x} b(n)=\frac{a_0}{2}\frac{x}{\sqrt{\ln x}}+x\sum_{\nu=1}^{F}\frac{l_\nu}{(\ln x)^{\nu-1/2}}+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{F+1/2}}\right),$$

где $a_0\neq 0$, $l_1, \ldots, l_F$ — константы.

Доказательство. Произведем абелево преобразование

$$\sum_{n\leqslant x} b(n)=\sum_{n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}n=-\int_2^x\left(\sum_{n\leqslant u}\frac{b(n)}{n}\right)du+x\sum_{n\leqslant x}\frac{b(n)}{n}+O(1).$$

По лемме с $F\geqslant 1$

$$\sum_{n\leqslant x} b(n)=-\int_2^x\left(a_0\sqrt{\ln x}+\sum_{r=1}^{F}\frac{a_r}{(\ln x)^{r-1/2}}+O\left(\frac{1}{(\ln x)^{F+1/2}}\right)\right)dx+$$

$$+x\left(a_0\sqrt{\ln x}+\sum_{r=1}^{F}\frac{a_r}{(\ln x)^{r-1/2}}+O\left(\frac{1}{(\ln x)^{F+1/2}}\right)\right).$$

Произведя интегрирование по частям, получаем

$$\sum_{n\leqslant x} b(n)=\int_2^x\left(\frac{a_0}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln x}}-\sum_{r=1}^{F}\frac{r}{2}\frac{a_r}{(\ln x)^{r+1/2}}\right)dx+O\left(\frac{x}{(\ln x)^{F+1/2}}\right).$$

Теперь утверждение теоремы последовательно следует с помощью интегрирования по частям.

4.12. Одна задача на суммирование мультипликативных функций, в которой получается степенное понижение

В качестве примера на применение метода производящих рядов Дирихле рассмотрим задачу об асимптотическом поведении суммы

$$S(N)=\sum_{n\leqslant N}\tau(n^2). \tag{1}$$

При решении этой задачи мы будем следовать работе М. И. Строниной [62].

Теорема. *При $N\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S(N)=NP(\ln N)+O\left(N^{1/2}\exp\left(-c\,\frac{(\ln N)^{3/5}}{(\ln\ln N)^{1/5}}\right)\right), \tag{2}$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен второй степени, $c>0$ — постоянная.

Доказательство. Так как функция $\tau(n)$ мультипликативная, то и $\tau(n^2)$ есть мультипликативная функция. Введем функцию комплексного переменного s:

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n^2)}{n^s}.$$

Для функции $F(s)$ есть эйлерово произведение:

$$F(s)=\prod_p\left(1+\frac{3}{p^s}+\frac{5}{p^{2s}}+\frac{7}{p^{3s}}+\dots\right)=$$

$$=\prod_p\frac{1+\frac{1}{p^s}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^2}=\prod_p\frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^3}=\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n^2)}{n^s}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{(d^2)^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_3(n)}{n^s},$$

где $\tau_3(n)$ — количество представлений натурального числа n в виде произведения трех натуральных множителей. Сравнивая коэффициенты, получаем

$$\tau(n^2) = \sum_{m=d^2n} \mu(d)\,\tau_3(n). \tag{3}$$

Эту формулу легко получить и элементарно.

На основании формулы (3) имеем

$$S(N) = \sum_{d^2n \leqslant N}\sum \mu(d)\,\tau_3(n), \tag{4}$$

где суммирование распространено на все целые точки $d>0,\ n>0,\ d^2n\leqslant N$.

Возьмем $0<\varepsilon<1$, которое точно определим в дальнейшем, и сумму $S(N)$ в формуле (4) разобьем следующим образом:

$$S(N) = \sum_{d\leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \mu(d) \sum_{\varepsilon^{-2}\leqslant n\leqslant \frac{N}{d^2}} \tau_3(n) + \sum_{n\leqslant \varepsilon^{-2}} \tau_3(n) \sum_{d\leqslant\sqrt{\frac{N}{n}}} \mu(d).$$

Обозначим $M(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} \mu(n)$. Мы имеем

$$S(N) = \sum_{d\leqslant\varepsilon\sqrt{N}} \mu(d) \sum_{n\leqslant\frac{N}{d^2}} \tau_3(n) - M(\varepsilon\sqrt{N}) \sum_{n\leqslant\varepsilon^{-2}} \tau_3(n) + \\ + O\left(\sum_{n\leqslant\varepsilon^{-2}} \tau_3(n) \left| M\left(\sqrt{\frac{N}{n}}\right)\right|\right).$$

Для дальнейшего нам потребуется, во-первых, оценка функции $M(x)$:

$$M(x) = O(x\delta(x)),$$

где обозначено

$$\delta(x) = \exp\left(-c\,\frac{(\ln x)^{3/5}}{(\ln\ln x)^{1/5}}\right),$$

$c>0$ — постоянная (см. А. З. Вальфиш [153], стр. 191, формула (15)). Во-вторых, нам потребуется следующая формула Аткинсона (см. Е. К. Титчмарш [64], стр. 317, подробно — см. работу Ф. В. Аткинсона [89]):

$$\sum_{n\leqslant N} \tau_3(n) = N\overline{P}(\ln N) + O(N^{37/75}\ln^K N),$$

где $\overline{P}(x)$ — некоторый многочлен второй степени, K — достаточно большое натуральное число. Пусть

$$\overline{P}(x) = \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_0.$$

Обозначим $\theta' = \frac{37}{75} + \frac{1}{200}$, $\theta' < \frac{1}{2}$. Имеем

$$\sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \mu(d) \sum_{n \leqslant \frac{N}{d^2}} \tau_3(n) =$$
$$= \lambda_2 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} \ln^2 \frac{N}{d^2} + \lambda_1 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} \ln \frac{N}{d^2} +$$
$$+ \lambda_0 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \left(\frac{N}{d^2}\right)^{\theta'} \right).$$

Очевидно, что

$$\sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \left(\frac{N}{d^2}\right)^{\theta'} = N^{\theta'} \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{1}{d^{2\theta'}} = O\left(\varepsilon^{1-2\theta'} N^{1/2}\right).$$

Далее,

$$\lambda_2 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} \ln^2 \frac{N}{d^2} + \lambda_1 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} \ln \frac{N}{d^2} +$$
$$+ \lambda_0 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \lambda_2 N \ln^2 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} -$$
$$- 4\lambda_2 N \ln N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d) \ln d}{d^2} + 4\lambda_2 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} \ln^2 d +$$
$$+ \lambda_1 N \ln N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} - 2\lambda_1 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d) \ln d}{d^2} +$$
$$+ \lambda_0 N \sum_{d \leqslant \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \bar{\lambda}_2 N \ln^2 N + \bar{\lambda}_1 N \ln N + \bar{\lambda}_0 N +$$
$$+ O\left(N \ln^2 N \left| \sum_{d > \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| + N \ln N \left| \sum_{d > \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d) \ln d}{d^2} \right| + \right.$$
$$\left. + N \left| \sum_{d > \varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d) \ln^2 d}{d^2} \right| \right), \qquad (5)$$

так как все рассматриваемые ряды сходятся. Преобразование Абеля нам дает

$$\left|\sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| = \left|\sum_{d\geqslant[\varepsilon\sqrt{N}]+1} \frac{M(d)-M(d-1)}{d^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|M([\varepsilon\sqrt{N}])|}{(\varepsilon\sqrt{N})^2} + \sum_{d\geqslant[\varepsilon\sqrt{N}]+1} |M(d)|\left(\frac{1}{d^2}-\frac{1}{(d+1)^2}\right) =$$

$$= O\left(\frac{M([\varepsilon\sqrt{N}])}{(\varepsilon\sqrt{N})^2}\right) + O\left(\sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{|M(d)|}{d^3}\right).$$

Применим оценку для $M(x)$:

$$\left|\sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| = O\left(\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon N^{1/2}}\right) + O\left(\sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{\delta(d)}{d^2}\right) =$$

$$= O\left(\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon N^{1/2}}\right) + O\left(\delta(\varepsilon\sqrt{N}) \sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{1}{d^2}\right) = O\left(\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon\sqrt{N}}\right). \quad (6)$$

Подобным образом получаем

$$\sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)\ln d}{d^2} =$$

$$= O\left(\frac{M(\varepsilon\sqrt{N})\ln\varepsilon\sqrt{N}}{(\varepsilon\sqrt{N})^2}\right) + O\left(\sum_{d\geqslant[\varepsilon\sqrt{N}]+1} \frac{|M(d)|\ln d}{d^3}\right) =$$

$$= O\left(\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})\ln\varepsilon\sqrt{N}}{\varepsilon\sqrt{N}}\right) + O\left(\sum_{d\geqslant\varepsilon\sqrt{N}} \frac{\delta(d)\ln d}{d^2}\right).$$

Поскольку при любом положительном k функция

$$\delta(x)\ln^k x$$

при достаточно больших x является убывающей, то

$$\sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)\ln d}{d^2} = O\left(\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})\ln\varepsilon\sqrt{N}}{\varepsilon\sqrt{N}}\right) +$$

$$+ O\left(\delta(\varepsilon\sqrt{N})\ln\varepsilon\sqrt{N} \sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{1}{d^2}\right) = O\left(\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})\ln\varepsilon\sqrt{N}}{\varepsilon\sqrt{N}}\right). \quad (7)$$

И аналогично

$$\sum_{d>\varepsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)\ln^2 d}{d^2} = O\left(\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})\ln^2\varepsilon\sqrt{N}}{\varepsilon\sqrt{N}}\right). \qquad (8)$$

Обозначим

$$P(x) = \bar{\lambda}_2 x^2 + \bar{\lambda}_1 x + \bar{\lambda}_0.$$

Мы получаем

$$\sum_{d\leqslant\varepsilon\sqrt{N}} \mu(d) \sum_{n\leqslant\frac{N}{d^2}} \tau_3(n) = NP(\ln N) +$$

$$+ O\left(N^{1/2}\ln^2 N\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon} + N^{1/2}\ln N\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon}\ln\varepsilon\sqrt{N} + \right.$$

$$\left. + N^{1/2}\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})\ln^2\varepsilon\sqrt{N}}{\varepsilon}\right) + O\left(\varepsilon^{1-2\theta'}N^{1/2}\right) =$$

$$= NP(\ln N) + O\left(N^{1/2}\ln^2 N\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon}\right) + O\left(N^{1/2}\varepsilon^{1-2\theta'}\right).$$

Очевидно, что

$$M(\varepsilon\sqrt{N}) \sum_{n\leqslant\varepsilon^{-2}} \tau_3(n) = O\left(\varepsilon\sqrt{N}\delta(\varepsilon\sqrt{N})\frac{1}{\varepsilon^2}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right) =$$

$$= O\left(N^{1/2}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon}\right).$$

Далее,

$$\sum_{n\leqslant\varepsilon^{-2}} \tau_3(n) M\left(\sqrt{\frac{N}{n}}\right) = O\left(\sqrt{N}\sum_{n\leqslant\varepsilon^{-2}} \frac{\tau_3(n)}{n^{1/2}}\delta\left(\sqrt{\frac{N}{n}}\right)\right) =$$

$$= O\left(N^{1/2}\delta(\varepsilon\sqrt{N})\sum_{n\leqslant\varepsilon^{-2}} \frac{\tau_3(n)}{n^{1/2}}\right)$$

и с помощью абелева преобразования

$$\sum_{n\leqslant\varepsilon^{-2}} \frac{\tau_3(n)}{n^{1/2}} = O\left(\int_1^{\varepsilon^{-2}} \frac{\sum_{n\leqslant u}\tau_3(n)}{u^{3/2}}\,du\right) + O\left(\varepsilon\sum_{n\leqslant\varepsilon^{-2}}\tau_3(n)\right) =$$

$$= O\left(\int_1^{\varepsilon^{-2}} \frac{\ln^2 u}{u^{1/2}}\,du\right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Итак,

$$S(N) = NP(\ln N) + O\left(N^{1/2}\ln^2 N\,\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon}\right) + \\ + O\left(N^{1/2}\varepsilon^{1-2\theta'}\right) + O\left(N^{1/2}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon}\right).$$

Слегка огрубляя, получаем

$$S(N) = NP(\ln N) + O\left(\varepsilon^{1-2\theta'}\ln^2\frac{1}{\varepsilon}\ln^2 N\cdot N^{1/2}\left(1+\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon^{2(1-\theta')}}\right)\right).$$

Возьмем

$$\varepsilon = \delta\left(\sqrt[4]{N}\right)^{\frac{1}{2(1-\theta')}}.$$

Мы имеем

$$1+\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon^{2(1-\theta')}} = 1+\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\delta\left(\sqrt[4]{N}\right)}.$$

Так как ε дает понижение слабее любой степени N, то при достаточно больших N

$$\sqrt[4]{N} \leqslant \varepsilon\sqrt{N}$$

и в силу убывания $\delta(x)$

$$1+\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{N})}{\varepsilon^{2(1-\theta')}} \leqslant 2.$$

Учитывая все изложенное выше, получаем

$$S(N) = NP(\ln N) + O\left(N^{1/2}e^{-c'\frac{(\ln N)^{3/5}}{(\ln\ln N)^{1/5}}}\ln^k N\right) = \\ = NP(\ln N) + O\left(N^{1/2}e^{-c''\frac{(\ln N)^{3/5}}{(\ln\ln N)^{1/5}}}\right).$$

Теорема доказана.

Заметим, что значение суммы $S(N)$ выражает количество точек с целыми координатами, лежащих на поверхности конуса

$$z^2 = xy$$

в области $1 \leqslant z \leqslant N,\ x \geqslant 1,\ y \geqslant 1$.

Пример поучителен лишь тогда, когда он поясняет общую мысль. Ввиду этого мы считаем целесообразным остановиться на анализе приведенной выше задачи об исследовании суммы

$$S(N) = \sum_{n \leqslant N} \tau(n^2). \tag{1}$$

При изучении выражения (1) мы опирались на асимптотическую формулу для суммы значений функции $\tau_3(n)$, количества представлений числа n в виде произведения трех натуральных сомножителей, именно на формулу

$$\sum_{n \leqslant N} \tau_3(n) = N\bar{P}(\ln N) + O(N^{\lambda+\varepsilon}), \tag{9}$$

где $\bar{P}(x)$ — некоторый многочлен второй степени, $0 < \lambda < 1$ — постоянная, $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число.

Мы видели, что производящий ряд Дирихле функции $\tau_3(n)$ имеет вид

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_3(n)}{n^s} = \zeta^3(s). \tag{10}$$

Эффективным средством исследования является метод функционального уравнения. Поясним, о чем идет речь.

Считая N половиной нечетного числа, напишем формулу обращения для коэффициентов производящего ряда Дирихле (10) в виде

$$\sum_{n \leqslant N} \tau_3(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\delta-i\infty}^{1+\delta+i\infty} \frac{N^s}{s} \zeta^3(s)\, ds,$$

где $\delta > 0$ — постоянная. В интеграле, стоящем в правой части последнего равенства, заменим прямую интегрирования на контур C, состоящий из пяти линий, соединяющих точки $1+\delta-i\infty$, $1+\delta-iN^{\alpha}$, $-\delta-iN^{\alpha}$, $-\delta+iN^{\alpha}$, $1+\delta+iN^{\alpha}$, $1+\delta+i\infty$, где α — постоянное, о котором пока известно, что $1/2 \leqslant \alpha < 2/3$. Обозначим эти части контура C соответственно через C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. При замене пути интегрирования нам надо будет учесть вычеты, происходящие от полюсов подынтегральной функции в точках $s = 1$ и $s = 0$. Таким образом, мы получим

$$\sum_{n \leqslant N} \tau_3(n) = N\overline{P}(\ln N) - \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{N^s}{s} \zeta^3(s)\, ds =$$

$$= N\overline{P}(\ln N) + \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{N^s}{s} \zeta^3(s)\, ds + O(1). \qquad (11)$$

Здесь мы приводим лишь схему исследования суммы (9) методом функционального уравнения, подробные выкладки читатель найдет в работе Ф. В. Аткинсона [89]. Можно показать, что

$$\int_{C_1} \frac{N^s}{s} \zeta^3(s)\, ds = O(N^{1+\delta-\alpha} \ln N),$$

и аналогичная оценка справедлива для интеграла по линии C_5. Далее, на основе оценок для дзета-функции в критической полосе показывается, что

$$\int_{C_2} \frac{N^s}{s} \zeta^3(s)\, ds = O(N^{1+\delta-\alpha} \ln^2 N),$$

и аналогичная оценка справедлива для интеграла по прямой C_4. Значит,

$$\sum_{n \leqslant N} \tau_3(n) = N\overline{P}(\ln N) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta - iN^\alpha}^{-\delta + iN^\alpha} \frac{N^s}{s} \zeta^3(s)\, ds + O(N^{1+\delta-\alpha} \ln^2 N) =$$

$$= N\overline{P}(\ln N) + \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\delta - iN^\alpha}^{1+\delta + iN^\alpha} \frac{N^{1-s}}{1-s} \zeta^3(1-s)\, ds +$$

$$+ O(N^{1+\delta-\alpha} \ln^2 N). \qquad (12)$$

Для дзета-функции Римана имеет место функциональное уравнение

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{13}$$

Функциональное уравнение для производящего ряда Дирихле функции $\tau_3(n)$ получается из (13) возведением в куб:

$$\pi^{-3s/2}\Gamma^3\left(\frac{s}{2}\right)Z(s)=\pi^{-3(1-s)/2}\Gamma^3\left(\frac{1-s}{2}\right)Z(1-s). \tag{14}$$

Центральным моментом рассуждения является применение функционального уравнения (14). Преобразовав с помощью функционального уравнения формулу (12), получим

$$\sum_{n\leqslant N}\tau_3(n)=N\overline{P}(\ln N)+\frac{\pi^{3/2}}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\tau_3(n)\int\limits_{1+\delta-iN^{\alpha}}^{1+\delta+iN^{\alpha}}\frac{\Gamma^3\left(\frac{s}{2}\right)N^{1-s}}{(\pi^3 n)^s\,\Gamma^3\left(\frac{1-s}{2}\right)}\,\frac{ds}{1-s}+O(N^{1+\delta-\alpha}\ln^2 N). \tag{15}$$

Преобразования формулы (15), которые мы здесь не воспроизводим, приводят к формуле

$$\sum_{n\leqslant N}\tau_3(n)=N\overline{P}(\ln N)+\frac{N^{1/3}}{\pi\sqrt{3}}\sum_{n\leqslant X}\frac{\tau_3(n)}{n^{2/3}}\cos 6\pi(nN)^{1/3}+O(N^{1+\delta-\alpha}\ln^2 N), \tag{16}$$

где $X=N^{3\alpha-1}/8\pi^3$, $1/2\leqslant\alpha<2/3$, $\delta>0$.

Возьмем $\alpha=1/2$ и оценим тривиально сумму, стоящую в правой части формулы (16):

$$\sum_{n\leqslant N}\tau_3(n)=N\overline{P}(\ln N)+O\left(N^{1/3}\sum_{n\leqslant c\sqrt{N}}\frac{1}{n^{2/3-\varepsilon}}\right)+O(N^{1/2+\varepsilon})=N\overline{P}(\ln N)+O(N^{1/2+\varepsilon}). \tag{9'}$$

Итак, к формуле (9′) приводят вычисления, основанные на функциональном уравнении для ряда Дирихле

$$Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_3(n)}{n^s}=\zeta^3(s). \tag{10}$$

Рассматриваемая нами функция (10) — лишь одна из широкого множества функций, для которых имеет место функциональное уравнение. Для того чтобы «не утонуть» в частностях, нужно иметь теоремы общего характера о суммировании коэффициентов рядов Дирихле, которые удовлетворяют функциональным уравнениям определенного вида. Такие теоремы были доказаны Э. Ландау (см. Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Göttingen. Nachrichten, 1912, 687—791), а также Чандрасекхараном и Нарасимханом (см. [95]). Приведем формулировку теоремы Ландау.

Теорема. *Предположения:* c_ν, l_ν — *комплексные числа,* $\alpha\geqslant 0$, α_i, γ_i — *действительные числа,* δ_i, β_i — *положительные числа,* μ *и* ν — *натуральные,*

$$\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots;$$

а) *для любого* $\varepsilon>0$

$$c_n=O(n^{\alpha+\varepsilon});$$

б) *определенная для* $\sigma>1+\alpha$ *функция*

$$Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$$

мероморфна во всей плоскости и имеет конечное число полюсов в полосе $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$;

в) *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n e^{\lambda_n s}$$

абсолютно сходится при $\sigma<0$;

г) *при* $\sigma < 0$ *имеет место функциональное уравнение*

$$\Gamma(\alpha_1+\beta_1 s)\ \ldots\ \Gamma(\alpha_\mu+\beta_\mu s)\, Z(s) = \\ = \Gamma(\gamma_1-\delta_1 s)\ \ldots\ \Gamma(\gamma_\nu-\delta_\nu s)\sum_{n=1}^{\infty} l_n e^{\lambda_n s};$$

д) $\beta_1+\ \ldots\ +\beta_\mu=\delta_1+\ \ldots\ +\delta_\nu$;

е) *если положить*

$$\eta=\gamma_1+\ \ldots\ +\gamma_\nu-(\alpha_1+\ \ldots\ +\alpha_\mu)+\frac{1}{2}(\mu-\nu),$$

то $\eta \geqslant 1/2$ *и* $\eta \geqslant \alpha + 1/2$;

ж) *для фиксированной полосы* $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ *найдется постоянная* $\gamma=\gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ *такая, что для* $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ *и больших* $|t|$ *имеет место оценка*

$$Z(s) = O(e^{\gamma|t|}).$$

Результат: для любого $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\sum_{n \leqslant N} c_n = R(N) + O\left(N^{(\alpha+1)(2\eta-1)/(2\eta+1)+\varepsilon}\right),$$

где $R(N)$ — *сумма вычетов функции* $N^s Z(s)/s$ *для всех полюсов функции* $Z(s)/s$ *в полосе*

$$(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1} < \sigma \leqslant \alpha+1.$$

Формула (9′) является непосредственным следствием этой теоремы Ландау. Уравнение (14) запишем в виде

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta^3(s) = \\ = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{-3/2}\tau_3(n)}{n}\, e^{s\ln \pi^3 n}.$$

Здесь $\mu=\nu=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=1/2$, $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\delta_1=\delta_2=\delta_3=1/2$. В силу оценки $\tau_3(n)=O(n^\varepsilon)$ $\alpha=0$. Далее, $\eta=3/2$. Проверка условий на рост функции $Z(s)$ не представляет затруднений для читателя, знакомого с теорией дзета-функции. Итак,

$$\sum_{n \leqslant N} \tau_3(n) = N\overline{P}(\ln N) + O(N^{1/2+\varepsilon}). \qquad (9')$$

Если мы вернемся к исследованию суммы (1), то заметим, что оценки (9′) недостаточно для доказательства асимптотической формулы (2). Здесь нужна оценка (9) с $\lambda < {}^1/_2$.

Основой для исследования суммы значений функции $\tau_3(n)$ является формула (16). И в доказательстве теоремы Ландау имеется этап, аналогичный формуле (16). Оценка (9′) получается при грубой работе с формулой (16) — оценке по модулю членов ряда, стоящего в ее правой части. Резервы, за счет которых мы можем увеличить точность оценок, состоят в учете интерференции членов ряда. Это задача на оценки тригонометрических сумм, в данном конкретном случае на оценку трехкратной тригонометрической суммы

$$\sum_{\substack{xyz \leqslant X \\ x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ z \geqslant 1}} \sum \sum \exp [6\pi i (xyzN)^{1/3}]. \tag{17}$$

Для исследования тригонометрической суммы (17) применяются методы оценок тригонометрических сумм Вейля и Ван дер Корпута (изложение этих методов см. в монографии [64]). Кроме того, для улучшения оценки применяются разнообразные дополнительные приемы. Именно на таком пути получена оценка (9) с $\lambda = 37/75$ (см. Аткинсон [89]), которую мы использовали при выводе асимптотики (2); наиболее сильный результат получил Ран: $\lambda = 5/11$ (см. Chen Jing-Run, On the divisor problem for $d_3(n)$, Sciencia Sinica **XIV**, 1 (1965), 19—29).

Описанный выше метод можно распространить на некоторые случаи, когда для производящего ряда Дирихле

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \tag{18}$$

нет функционального уравнения нужного вида. Идея заключается в том, чтобы свести задачу о суммировании коэффициентов ряда (18) к такой же задаче, но относящейся к коэффициентам ряда Дирихле, для которого имеет место функциональное уравнение. Именно так мы и поступали, когда сводили оценку суммы (1) к оценке (9).

Средством для такого сведения может являться одна теорема А. С. Файнлейба (см. [71]).

Теорема. *Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — мультипликативные функции, $0<\lambda<1$. Пусть функция $\tilde{g}(n)$ определяется равенством*

$$\sum_{d\mid n}\tilde{g}(d)\,g\left(\frac{n}{d}\right)=\begin{cases}1 & \text{при } n=1,\\ 0 & \text{при } n\neq 1.\end{cases}\tag{19}$$

Далее предположим, что функция $g(n)$ такая, что

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|\tilde{g}(p^r)|}{p^{r\lambda}}<\infty\tag{20}$$

для всех простых p и при $N\to\infty$

$$\sum_{n\leqslant N}g(n)=NQ(\ln N)+O(N^{\lambda}),\tag{21}$$

где $Q(u)$ — многочлен степени k. Тогда, если

$$\sum_{p}\sum_{r}\frac{1}{p^{r\lambda}}\,|f(p^r)-g(p^r)|<\infty,\tag{22}$$

то

$$\sum_{n\leqslant N}f(n)=NP(\ln N)+O(N^{\lambda+\varepsilon}),\tag{23}$$

где $P(u)$ — многочлен степени k.

Заметим, что условие (19) можно записать в таком виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{g}(m)}{m^s}=1.\tag{19'}$$

Применим теорему Файнлейба к суммированию значений функции $\tau(n^2)$. Мы полагаем $g(n)=\tau_3(n)$. Тогда из (19′) находим

$$\tilde{g}(n) = \mu(n)\,\tau_3(n).$$

Мы говорили о том, что условие (21) выполняется с $\lambda = 1/2 + \varepsilon$.

Очевидно,

$$\sum_p \frac{|\tilde{g}(p^r)|}{p^{r(1/2+\varepsilon)}} = 1 + \frac{3}{p^{1/2+\varepsilon}} < \infty.$$

Положим $f(n) = \tau(n^2)$. Так как $\tau(p^2) = \tau_3(p)$ и

$$\tau(p^{2r}) = O(p^{r\varepsilon/2}),$$

$$\tau_3(p^r) = O(p^{r\varepsilon/2}),$$

то

$$\sum_p \sum_r \frac{1}{p^{r(1/2+\varepsilon)}}\,|\tau(p^{2r}) - \tau_3(p^r)| =$$

$$= O\left(\sum_p \sum_{r=2}^{\infty} p^{-r(1/2+\varepsilon/2)}\right) = O\left(\sum_p \frac{1}{p^{1+\varepsilon}}\right) = O(1).$$

Равенство (23) нам дает

$$\sum_{n \leqslant N} \tau(n^2) = N\overline{P}(\ln N) + O(N^{1/2+\varepsilon}).$$

Мы видим, что для того, чтобы получить асимптотическую формулу (2), теоремы Файнлейба недостаточно. Дело в том, как мне любезно сообщил Д. Исмоилов, что условия «близости» двух функций $g(n)$ и $f(n)$, выражаемого неравенством (22), недостаточно. Для того чтобы получить результат (2) из общих соображений, нужно усилить условие (22), а именно связать функции $g(n)$ и $f(n)$ соотношением

$$f(n) = \sum_{d^2 \mid n} \mu(d)\,g\left(\frac{n}{d^2}\right). \qquad (24)$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема. *Пусть функции* $f(n)$ *и* $g(n)$ *связаны условием* (24) *и* $g(n) \geqslant 0$. *Пусть при* $N \to \infty$

$$\sum_{n \leqslant N} g(n) = NQ(\ln N) + O(N^{\lambda}),$$

где $Q(x)$ — *полином* k*-й степени,* λ — *постоянная,* $0 < \lambda < {}^1/_2$. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n \leqslant N} f(n) = NP(\ln N) + O\left(N^{1/2} \exp\left[-c(\ln N)^{3/5}(\ln \ln N)^{-1/5}\right]\right),$$

где $P(x)$ — *полином* k*-й степени,* $c > 0$ — *постоянная, зависящая от* λ.

Асимптотическая формула (2) является непосредственным следствием этого утверждения.

Мы вынуждены быть весьма краткими. Для систематического изложения затронутого здесь круга вопросов потребовалась бы специальная монография.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.
2. Бабаев Г., Распределение целых точек на алгебраических поверхностях, Таджик. гос. ун-т, Душанбе, 1966.
3. Бакштис А., О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, Литов. матем. сб. **8**, № 1, 1968, 5—20.
4. Бакштис А., О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, II, Литов. матем. сб. **8**, № 2, 1968, 201—219.
5. Бакштис А., О предельных законах распределения мультипликативных арифметических функций, III, Литов. матем. сб. **8**, № 4, 1968, 643—680.
6. Барбан М. Б., Об одной теореме И. П. Кубилюса, ИАН Уз. ССР, сер. физ.-матем. 5, 1961, 3—9.
7. Барбан М. Б., Метод «большого решета» и его применения в теории чисел, УМН **21**, № 1 (127), 1966, 51—102.
8. Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, «Наука», 1964.
9. Бредихин Б. М., Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями, Матем. сб. **46** (88), № 2, 1958, 143—158.
10. Бредихин Б. М., Остаточный член в асимптотической формуле для $\nu_G(x)$, Известия высших учебных заведений СССР, Математика **6** (19), 1960, 40—49.
11. Бухштаб А. А., Теория чисел, «Просвещение», 1966.
12. Венков Б. А., Элементарная теория чисел, ОНТИ, 1937.
13. Венков Б. А., Об одной монотонной функции, Учен. зап. Ленингр. гос. ун-та, сер. матем. **16**, 1949, 3—19.
14. Виноградов И. М., Новая оценка $\zeta(1+it)$, ИАН, сер. матем. **22**, № 2, 1958, 161—164.
15. Виноградов И. М., Основы теории чисел, «Наука», 1965.
16. Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, «Наука», 1971.
17. Вороной Г. Ф., Об одной задаче из теории асимптотических функций. Г. Ф. Вороной, Собрание сочинений, т. II, Изд-во АН СССР, 1952, 6—49.
18. Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, Гостехиздат, 1952.
19. Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы аналитической теории чисел, Физматгиз, 1962.

20. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, «Наука», 1969.
21. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.
22. Дроздова А. А., Фрейман Г. А., Оценки некоторых арифметических функций, Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та **3**, 1958, 160—165.
23. Дэвенпорт Г., Высшая арифметика, «Наука», 1965.
24. Золотарев В. М., Общая теория перемножения независимых случайных величин, ДАН **142**, № 4, 1962, 788—791.
25. Зупаров Т. М., Равномерные локальные теоремы для одного класса случайных величин, ИАН Уз. ССР, сер. физ.-матем. **5**, 1968, 11—19.
26. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, «Наука», 1965.
27. Ильясов И., Суммирование сложных функций от функции Эйлера, ДАН **178**, № 3, 1968, 529—532.
28. Ингам А. Е., Распределение простых чисел, ОНТИ, 1936.
29. Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, ИЛ, 1961.
30. Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, ИЛ, 1963.
31. Кац М., Вероятность и смежные вопросы в физике, «Мир», 1965.
32. Коробов Н. М., Оценки тригонометрических сумм и их приложения, УМН **13**, № 4 (82), 1958, 185—192.
33. Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, 1947.
34. Кубилюс И. П., Вероятностные методы в теории чисел, Госполитнаучиздат Литов.ССР, Вильнюс, 1962.
35. Кубилюс И. П., Об асимптотических законах распределения аддитивных арифметических функций, Литов. матем. сб. **5**, № 2, 1965, 261—272.
36. Кузьмин Р. О., О распределении значений некоторых арифметических функций, ДАН **15**, № 3, 1937, 117—120.
37. Левин Б. В., Файнлейб А. С., Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел, УМН **22**, № 3 (135), 1967, 119—198.
38. Левин Б. В., Файнлейб А. С., Об одном методе суммирования мультипликативных функций, ИАН, сер. матем. **31**, № 3, 1967, 697—710.
39. Левин Б. В., Файнлейб А. С., Интегральные предельные теоремы для некоторых классов аддитивных арифметических функций, Труды Москов. матем. об-ва **18**, 1968, 19—54.
40. Левитан Б. М., Почти периодические функции, Гостехиздат, 1953.
41. Ленг С., Алгебраические числа, «Мир», 1966.
42. Миталаускас А. А., Статулявичюс В. А., Локальные предельные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых случайных величин, Литов. матем. сб. **6**, № 4, 1966, 569—583.

43. Москвин Д. А., Постникова Л. П., Юдин А. А., Об арифметическом методе получения локальных предельных теорем для решетчатых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен. **15**, № 1, 1970, 85—96.
44. Мустафин Д. С., К вопросу о классификации арифметических функций, ИАН, сер. матем. **29**, № 4, 1965, 877—886.
45. Нагаев С. В., Некоторые предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероятн. и ее примен. **12**, № 4, 1967, 655—665.
46. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
47. Новоселов Е. В., Топологическая теория делимости целых чисел, Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та **8**, 1960, 3—23.
48. Новоселов Е. В., Об интегрировании на одном бикомпактном кольце и его приложениях к теории чисел, Известия высших учебных заведений СССР, Математика **3** (22), 1961, 66—79.
49. Новоселов Е. В., Некоторые формулы, связанные с приведенной системой вычетов, ДАН **143**, № 6, 1962, 1274—1277.
50. Новоселов Е. В., Основы классического анализа и теории аналитических функций в полиадической области, Известия высших учебных заведений СССР, Математика **5** (36), 1963, 71—88.
51. Новоселов Е. В., Новый метод в вероятностной теории чисел, ИАН, сер. матем. **28**, № 2, 1964, 307—364.
52. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.
53. Постников А. Г., Тауберова теорема для рядов Дирихле, ДАН **92**, № 3, 1954, 487—490.
54. Постников А. Г., Об одном применении центральной предельной теоремы теории вероятностей, УМН **10**, № 1 (63), 1955, 147—149.
55. Постников А. Г., Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых, ИАН, сер. матем. **20**, № 6, 1956, 751—764.
56. Прахар К., Распределение простых чисел, «Мир», 1968.
57. Райков Д. А., Обобщение теоремы Икеара — Ландау, Матем. сб. **3** (45), № 3, 1938, 559—568.
58. Романов Н. П., К вопросу о распределении простых чисел, Матем. сб. **23** (65), № 2, 1948, 259—278.
59. Салтыков А. И., О функции Эйлера, Вестник Москов. ун-та, сер. матем., мех., № 6, 1960, 34—50.
60. Сираждинов С. Х., Азларов Т. А., Об одной равномерной локальной теореме, ИАН Уз. ССР, сер. физ.-матем., 1963, № 2, 32—37.
61. Спринджук В. Г., Проблема Малера в теории чисел, изд-во «Наука и техника», Минск, 1967.
62. Стронина М. И., Целые точки на круговых конусах, Известия высших учебных заведений СССР, Математика **8** (87), 1969, 112—116.
63. Ташбаев В. Х., Обратная аддитивная задача, Матем. сб. **52** (94), № 4, 1960, 947—952.
64. Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, ИЛ, 1953.
65. Тян М. М., К вопросу о распределении значений функции Эйлера, Литов. матем. сб. **7**, № 1, 1966, 105—119.

66. Уждавинис Р., Аналог теоремы Эрдёша — Винтнера для последовательности значений целочисленного полинома, Литов. матем. сб. **7**, № 2, 1967, 329—338.
67. Усольцев Л. П., Аддитивная задача с растущим количеством слагаемых с показательной функцией, Известия высших учебных заведений СССР, Математика **3** (58), 1967, 96—104.
68. Успенский Я. В., Асимптотические выражения числовых функций, встречающихся в задаче о разбиении чисел на слагаемые, Изв. Российск. АН **14**, 1920, 199—218.
69. Файнлейб А. С., О распределении значений функции Эйлера, Матем. заметки **1**, № 6, 1967, 645—652.
70. Файнлейб А. С., Обобщение неравенства Эссеена и его применение в вероятностной теории чисел, ИАН, сер. матем. **32**, № 4, 1968, 859—879.
71. Файнлейб А. С., Некоторые асимптотические формулы для сумм мультипликативных функций и их приложения, Литов. матем. сб. **7**, № 3, 1967, 535—545.
72. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Гостехиздат, 1948.
73. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Гостехиздат, 1948.
74. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Гостехиздат, 1949.
75. Фрейман Г. А., Элементарный метод решения задач о разбиении чисел на неограниченное число слагаемых, Труды Москов. матем. об-ва **4**, 1955, 112—124.
76. Фрейман Г. А., Обратные задачи аддитивной теории чисел, Учен. зап. Казан. гос. ун-та 115, кн. 14, 1955, 109—115.
77. Фрейман Г. А., Обратные задачи аддитивной теории чисел, ИАН, сер. матем. **19**, № 4, 1955, 275—284.
78. Фрейман Г. А., Элементарный метод доказательства предельных теорем теории вероятностей, Вестник Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., мех., астр. **1**, № 1, 1956, 57—73.
79. Фрейман Г. А., О густых последовательностях в теории разбиений, Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та **3**, 1958, 120—137.
80. Фрейман Г. А., Проблема Варинга с растущим числом слагаемых, Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та **3**, 1958, 105—119.
81. Фрейман Г. А., Начала структурной теории сложения множеств, Казан. гос. пед. ин-т, Елабуж. гос. пед. ин-т, Казань, 1966.
82. Халмош П., Теория меры, ИЛ, 1953.
83. Харди Г., Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951.
84. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, ИЛ, 1948.
85. Хинчин А. Я., Математические основания квантовой статистики, Гостехиздат, 1951.
86. Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, Гостехиздат, 1947.
87. Шинцель А., О функциях $\varphi(n)$ и $\sigma(n)$, Бюлл. Польск. АН, отд. III, **3**, № 8, 1955, 411—415.

88. Шнирельман Л. Г., Простые числа, Гостехиздат, 1940.
89. Atkinson F. V., A divisor problem, Quart. J. Oxford **12,** № 48, 1941, 193—200.
90. Atkinson F. V., Cherwell L., The mean values of arithmetical functions, Quart. J. Oxford **20,** № 78, 1949, 65—79.
91. Ayob R., An introduction to the analytic theory of numbers, Providence R I, 1963.
92. Bachmann P., Die analytische Zahlentheorie, Teubner, Leipzig, 1894.
93. Beuerling A., Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés, Acta Math. **68,** № 3—4, 1937, 255—291.
94. Castelnouvo G., Sur quelques problèmes se rattachant au calcul de probabilitiés, Ann. l'Instit. H. Poincaré **3,** 1933, 465—490.
95. Chandrasekharan K., Narasimhan R., Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions, Ann. Math. **76,** № 1, 1962, 93—136.
96. Corradi K. A., Kátai I., On the theory of multiplicative functions, Ann. Univ. Scient. Budapest, sec. math. **9,** 1966, 147—155.
97. Davenport H., Über numeri abundantes, Sitzungsber. Preuss. Acad., Phys.-Math. Kl. **27,** 1933, 830—837.
98. Davenport H., On some infinite series involving arithmetical functions, II, Quart. J. Oxford **8,** № 32, 1937, 313—320.
99. Delange H., Quelques théorèmes taubériens relatifs à l'intégrale de Laplace et leurs applications arithmétiques, Rendiconti Semin. Math. Univ. a Politech. Torino **14,** 1954—1955, 87—103.
100. Delange H., Un théorème sur la fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applicat ons, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 3-e ser. **78,** 1961, 1—29.
101. Delange H., Sur la fonctions arithmétiques multiplicatives, Ann. Scient. Ec Norm. Sup. 3-e ser. **78,** 1961, 273—304.
102. Delange H., Applicat on de la methode du crible à l'étude des valeur moyennes des certaines fonctions arithmétiques, Semin. Delange-Pisot, Theorie des nombres, 3-e ance, 1961/1962, **16,** 1—16.
103. Delange H., Sur les nombre des diviseurs premiers de *n*, Acta Arithmetica **7,** № 2, 1962, 191—215.
104. Delange H., On a class of multiplicative arithmetical functions, Scripta Math. **26,** № 2, 1963, 121—141.
105. Delange H., Sur un théorème de Rényi, Acta Arithmetica, **11,** № 2, 1965, 241—252.
106. Erdös P., On the density of some sequences of numbers, III, J. London Math. Soc. **13,** № 2, 1938, 119—127.
107. Erdös P., On the smoothness of asymptotic distribution of additive arithmetical functions, Amer. J. Math. **61,** № 3, 1939, 722—725.
108. Erdös P., Wintner A., Additive arithmetical functions and statistical independence, Amer. J. Math. **61,** № 3, 1939, 713—721.

109. Erdös P., Kac M., The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions, Amer. J. Math. **62**, № 4, 1940, 738—742.
110. Erdös P., Wintner A., Additive functions and almost periodicity (B^2), Amer. J. Math. **62**, № 3, 1940, 635—645.
111. Erdös P., On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partitions, Ann. of Math. **43**, № 3, 1942, 437—450.
112. Erdös P., Some remarks about additive and multiplicative functions, Bull. Amer. Math. Soc., **52**, № 6, 1946, 527—537.
113. Erdös P., Some remarks and corrections to one of my papers, Bull. Amer. Math. Soc. **53**, № 8, 1947, 761—763.
114. Erdös P., Schinzel A., Distributions of values of some arithmetical functions, Acta Arithmetica **6**, № 4, 1961, 473—485.
115. Esseen C. G., Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of Laplace-Gaussian law, Acta Math. **77**, № 1—2, 1945, 1—125.
116. Fatou P., Series trigonometriques et series de Taylor, Acta Math. **30**, 1906, 335—400.
117. Freud G., Restglied eines Tauberscher Satzes, I, Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae **2**, № 3—4, 1951, 299—308.
118. Halász G., Über die Mittelwerte multiplicativer zahlentheoretischer Funktionen, Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae **19**, № 3—4, 1968, 365—404.
119. Hardy G. H., Littlewood J. E., Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. London Math. Soc. (2) **13**, 1914, 174—191.
120. Hardy G. H., Ramanujan S., The normal number of prime factors of a number n, Quart. J. Pure and Appl. Math. **48**, 1917, 76—92.
121. Hardy G. H., «Ramanujan», Cambridge, 1940.
122. Haselgrove C. B., Temperley H. N. V., Asymptotic formulae in the theory of partitions, Proc. Cambridge Phil. Soc. **50**, № 2, 1954, 225—241.
123. Hewitt E., Ross K., Abstract harmonic analysis, I, Berlin, Springer, 1963.
124. Ingham A. E., A Tauberian theorem for partitions, Ann. of Math. (2) **42**, № 5, 1941, 1075—1090.
125. Jessen B., Wintner A., Distribution functions and the Riemann zeta function, Trans. Amer. Math. Soc. **38**, № 1, 1935, 48—88.
126. Kampen van E. R., Infinite product measures and infinite convulations, Amer. J. Math. **62**, № 2, 1940, 417—448.
127. Kátai I., Egy megjegyzés H. Delange «Sur un théorème de Rényi» cumü dolgozatához, Magyar Tudományos Akadémia, Mathematikai és Fisikai tudományok osztályának közlemeneyei **16**, 1966, 269—273.
128. Kátai I., On the distribution of arithmetical functions, Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae **20**, № 1—2, 1969, 69—87.
129. Korevaar J., An estimate of the error Tauberian theorem for power series, Duke Math. J. **18**, № 3, 1951, 723—733.

130. Korevaar J., A very general form of Littlewood's theorem, Proc. Koninklijke Nederl. Akad. van Wet., ser. A **57**, 1954, 36—45.
131. Korevaar J., Another numerical Tauberian theorem for power series, Proc. Koninklijke Nederl. Akad. van Wet., ser. A **57**, 1954, 46—56.
132. Landau E., Über die Einteilung der positiven Zahlen nach vier Klassen nach der Mindestzahl der zu ihrer addition Zusammensetzung erforderlichen Quadrate, Arch. Math. und Phys., III. Reihe **13**, № 4, 1908, 305—312.
133. Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. II, Leipzig, Teubner, 1909.
134. Landau E., Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, 2. Aufl., New York, 1949.
135. Lévy P., Sur les séries dont les termes sont de variables eventuelles indépendantes, Studia Math. **3**, 1931, 119—155.
136. Luthar I. S., A generalization of a theorem of Landau, Acta Arithmetica **13**, № 3, 1967, 223—228.
137. Mertens F., Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, J. reine und angew. Math. **77**, № 4, 1874, 289—338.
138. Neumann J., von, Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen, Acta Litt. Sci. Szeged **2**, 1926, 193—227.
139. Nyman B., A general prime number theorem, Acta Math. **81**, № 3—4, 1949, 293—307.
140. Pilai S. S., Chowla S., On the error terms in some asymptotic formulae in the theory of numbers, I, J. London Math. Soc. **5**, № 18, 1930, 95—101.
141. Prüfer H., Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, Math. Ann. **94**, № 3—4, 1925, 198—243.
142. Ramanujan S., Collected Papers, Cambridge Univ. press, 1927.
143. Rankin R. A., Representation of a number as the sum of large number of squares, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, ser. A **65**, № 4, 1960—1961, 318—331.
144. Rényi A., On the density of certain sequences of integers, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. **8**, 1955, 157—162.
145. Rényi A., A new proof of the theorem of Delange, Publ. Math. **12**, № 1—4, 1965, 323—330.
146. Rényi A., Turan P., On a theorem of Erdös-Kac, Acta Arithmetica **4**, № 1, 1958, 71—84.
147. Riez M., Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen, Acta Math. **40**, 1916, 349—361.
148. Roth K. F., Szekeres G., Some asymptotic formulae in the theory of partition, Quart. J. Oxford **5**, № 20, 1954, 241—259.
149. Schneider T., Über die Approximation algebraischer Zahlen, J. reine und angew. Math. **175**, № 3, 1936, 182—192.
150. Schoenberg J., Über die asymptotische Verteilung reelen Zahlen mod. 1, Math. Zs. **28**, № 2, 1928, 171—199.
151. Schwarz W., Über die Summe $\sum_{n \leqslant x} \varphi(f(n))$ und verwandte Probleme, Monatsh. Math. **66**, 1962, 43—54.

152. Turan P., On a theorem of Hardy and Ramanujan, J. London Math. Soc. **9**, № 4, 1934, 274—276.
153. Walfisz Arn., Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, Deutsch. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
154. Wigert S., Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier, Arkiv för Math., Astr., och Fhysik **3**, № 18, 1907, 1—9.
155. Wintner A., The theory of measure in arithmetical semi-groups, Baltimore, 1944.
156. Wirsing E., Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplicative Funktionen, I, Math. Ann. **143**, № 1, 1961, 75—102.
157. Wirsing E., Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplicative Funktionen, II, Acta Math. Acad Scient. Hungaricae **18**, № 3—4, 1967, 411—467.