

А. И. ПОТЕХИН  
КАНДИДАТ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ  
ДИФРАКЦИИ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

ИЗДАТЕЛЬСТВО „СОВЕТСКОЕ РАДИО“

---

МОСКВА — 1948

Книга дает подробный обзор некоторых из наиболее существенных задач по дифракции электромагнитных волн и их решений, строгих и приближенных. Задачи дифракции волн от щели и полуплоскости, цилиндра и шара рассматриваются методами геометрической и волновой оптики, криволинейных координат и разветвленных решений. Проводится сравнение результатов решения указанных задач, получаемых при помощи различных методов.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

## ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
15	1 снизу	$R > r$	$R < r$	Автора
24	5 .	$\int \psi \frac{dt}{dn} ds =$	$\int \psi \frac{\partial G}{\partial n} ds =$	.
32	1 .	$J_0(k_1 R \sin \alpha)$	$J_0(k R_1 \sin \alpha)$	Типографии
46	Везде	$E = \frac{1}{4\pi} \int$	$E = -\frac{1}{4\pi} \int$	Автора
48	12 сверху	(см. § 5)	(см. § 2)	Издательства
60	4 снизу	$H_R = H_\varphi$	$H_R = H_\varphi = 0$	Типографии
65	8 .	границы тока	границы тени	Издательства
92	8 сверху	$+k_x^2 \bar{H}$	$+k^2 \bar{H}$	.
97	3 .	$\bar{H}$	$\bar{E}$	Автора
98	10 снизу	[6]	[14]	.
116	16 сверху	$\sin(\varphi - \varphi_0)$	$\sin(\varphi + \varphi_0)$	.
123	6 .	рис. VI.2	рис. 67	Издательства

А. И. Петухин

рассматривает лишь одну группу дифракционных задач, проводя систематическое сопоставление некоторых из применяемых методов и уточняя решение отдельных вопросов теории.

Редакция

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Создание и развитие теории дифракции электромагнитных волн на всех своих этапах весьма многим обязано нашей отечественной науке. Для подтверждения этого достаточно назвать широко известные экспериментальные работы проф. Л. Н. ЛЕБЕДЕВА, ряд трудов проф. В. С. ИГНАТОВСКОГО, указавшего общее решение задачи еще в 1907 г., работы акад. Б. А. ВВЕДЕНСКОГО и работы акад. В. А. ФОКА по дифракции радиоволн вокруг земли, работы проф. А. А. ПИСТОЛЬКОРСА, разрешившего ряд вопросов, связанных с теорией дифракционных антенн. В настоящее время в теории дифракции советской науке бесспорно принадлежит ведущая роль.

Сама по себе теория дифракции теперь становится из прежней чисто теоретической области одной из инженерных дисциплин. Это означает, что круг лиц, разрабатывающих отдельные частные вопросы дифракции и применяющих теорию дифракции, значительно расширился, в соответствии с чем возросла и потребность в инженерно-технической литературе, в книгах, содержащих систематическое изложение вопроса. Разнообразие решаемых вопросов и различный подход к таким решениям, большое количество опубликованных работ по отдельным вопросам дифракции делают задачу систематизации всех материалов весьма трудной.

Предлагаемая вниманию читателя работа в силу указанных выше причин отнюдь не охватывает все вопросы дифракции, а рассматривает лишь одну группу дифракционных задач, проводя систематическое сопоставление некоторых из применяемых методов и уточняя решение отдельных вопросов теории.

*Редакция*

---

## ВВЕДЕНИЕ

### ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ

Явления дифракции, почти всегда имеющиеся при волновом движении, представляют большой интерес. Этим явлениям посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований. Явления дифракции упругих волн изучаются в теории упругости, акустике, гидродинамике, сейсмологии. Явления дифракции электромагнитных волн, которые нас будут интересовать, изучаются в радиотехнике и оптике; именно как отдел последней появилась впервые теория дифракции.

В радиотехнике прежде всего изучалась дифракция радиоволн, имеющая место при их распространении вокруг земного шара. Первые работы по этому вопросу появились в 1910 г. Несмотря на идеализацию ряда условий (открытая сферическая поверхность земли, однородность электрических свойств почвы, однородность атмосферы), задача о дифракции вокруг земного шара оказалась математически столь сложной, что только через двадцать с лишним лет было получено решение в приемлемой для практики форме. В настоящее время количество работ, посвященных дифракции радиоволн вокруг земного шара, составляет несколько десятков. Теперь эту задачу можно считать решенной [1] и на очереди стоит получение решения той же задачи, но при учете рефракции в атмосфере.

Второй задачей, точнее группой задач, является учет неровностей поверхности раздела, то-есть неровностей земной поверхности и неоднородности электрических свойств почвы, но без учета сферичности земли. Решение этих задач важно для радионавигации, которую интересуют явления девиации радиолуча [береговой эффект и подобные ему явления], а также и для радиолокации, которую интересуют, кроме того, такие явления, как отражение от „местных предметов“, от волн на поверхности моря и другие. Этим задачам был посвящен ряд работ

различных авторов, но далеко не все полученные результаты можно считать достаточными.

В последние годы стали широко применяться диапазоны дециметровых и сантиметровых волн. Расчет антенн для этих диапазонов (рупорных, параболических зеркал, линзовых, щелевых) входит в третью группу дифракционных задач радиотехники. Целью расчета является определение диаграмм направленности и „сопротивления излучения“ антенны.

Задачи, в которых решаются вопросы о влиянии различных неоднородностей в линиях canalизации энергии высокой частоты, также являются по существу дифракционными задачами. Примером такой задачи может служить расчет диафрагмы в волноводе. Эти задачи составят четвертую группу.

Наконец, к пятой группе задач мы отнесем задачи о дифракции электромагнитных волн от одиночного тела заданной формы, находящегося в свободном пространстве. При этом интересуются влиянием длины волны и поляризации падающего поля на интенсивность отраженной волны, влиянием формы и ориентировки отражающего тела. Простейшие задачи этой группы являются наиболее старыми — они перешли в радиотехнику из оптики и легче других поддаются решению строгими методами.

Мы затрудняемся дать исторический очерк развития учения о дифракции; даже составление полной библиографии вопроса представляется трудной задачей, ввиду очень большого и все увеличивающегося количества работ, опубликованных во многих, главным образом физических, журналах.

В нашей работе мы будем заниматься только некоторыми задачами из пятой группы.

### ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Задачи о дифракции электромагнитных волн характерны своей математической сложностью, обусловленной сложностью самого механизма распространения волновых процессов. В большинстве случаев эта математическая сложность до сих пор является непреодолимой преградой на пути получения точных решений. Вместе с тем, практика настоятельно требует решения ряда дифракционных задач, беглое перечисление которых было сделано выше. При этом естественны попытки отыскания приближенных методов решения.

При употреблении того или иного приближенного метода необходимо иметь представление о величине получающейся при этом ошибки и поэтому нужно сравнить его с точным решением или с результатом эксперимента. Наиболее подходящими для этой цели являются некоторые задачи пятой группы, точное решение которых было найдено ранее. Задачи должны быть по возможности разнообразными, ибо, в противном случае, проверку точности на нескольких частных случаях нельзя будет считать достаточно основательной для оценки метода.

Настоящая работа является попыткой сравнения некоторых известных методов решения, о которых будет сказано ниже, путем приложения их к задачам о полуплоскости, цилиндре и шаре. Мы будем вычислять дифрагированное поле только в волновой зоне, точнее, на расстоянии  $r \rightarrow \infty$ . Для уменьшения вычислительной работы мы будем считать тела идеальными проводниками, а окружающую их среду — идеальным изотропным диэлектриком. Все процессы будем считать установившимися во времени и зависимость от времени определять множителем  $e^{-i\omega t}$ . При вычислении дифрагированного поля находят иногда сразу сумму падающего и дифрагированного полей. Мы будем вычислять только дифрагированное поле, которое при эксперименте может быть выделено посредством применения направленной приемной антенны или посредством применения временной селекции (при излучении импульсами определенной длины) или и тем и другим одновременно. Разделение падающего и дифрагированного полей невозможно провести только в окрестности границ геометрической тени.

Как уже говорилось, проверка вычислений, проведенных, приближенными методами, возможна путем сравнения либо с данными точного эксперимента, либо с результатами вычислений при помощи строгих методов. Ввиду сложности организации точных экспериментальных работ в диапазонах микроволн нам представляется целесообразным иметь строгое решение для одного из тел простой формы; таким телом в частности может служить шар. Для этого случая в нашей работе приведены необходимые количественные данные.

#### ПРИМЕНЯЕМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Известны следующие строгие методы решения задач о дифракции электромагнитных волн: метод криволинейных координат, метод Зоммерфельда (приложимый только к случаю ди-

фракции от клина) и метод интегральных уравнений. Сравнительная оценка этих методов дается, например, в монографии Купрадзе [2]. Метод интегральных уравнений имеет перед другими то преимущество, что он может применяться к более широкому классу задач. Однако его эффективность в смысле скорости получения количественных результатов оставляет желать лучшего [3, 4].

Приближенные решения тех же задач мы получаем, применяя формулу Кирхгофа в классической, а также и в векторизованной форме, найденной сравнительно недавно Стрэттоном и Чу [5] и позднее Щелкуновым [6]. Другие известные модификации формулы Кирхгофа (например, [7]) нами не рассматриваются; в настоящее время они имеют, повидимому, только исторический или педагогический интерес.

Нами принят следующий порядок изложения. Сначала выбранные задачи решаются приближенными методами: применением метода Кирхгофа и в следующей главе применением принципа эквивалентности по Щелкунову. Далее решение тех же задач находится строгими методами. В заключительной главе проведено сравнение результатов, полученных различными методами, и сделаны соответствующие выводы.

В списке периодической литературы указаны только те работы, на которые приходится делать ссылки. Библиографию по отдельным вопросам можно найти в работах [8, 9, 10].



## Глава I

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ МЕТОДАМИ ОПТИКИ

#### 1. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ (ЛУЧЕВОЙ) ОПТИКИ

Геометрическая оптика решает задачу о вычислении пути световых лучей в среде с заданными оптическими свойствами. Если среда однородна, то лучи распространяются по прямым линиям; в общем случае, траектории лучей можно найти, например, с помощью принципа Ферма.

Так как нас интересуют только те случаи, когда среда является однородной, изотропной и ограниченной идеально-отражающими телами, то для нас достаточно следующих положений геометрической оптики:

1. Падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к отражающей поверхности в точке отражения лежат в одной плоскости.

2. Угол отражения равен углу падения.

3. Идеально-отражающая поверхность характеризуется коэффициентом отражения, равным единице, и отсутствием шероховатости.

Хотя в геометрической оптике явления дифракции не учитываются, представляет некоторый интерес получить решения наших задач при помощи принципа зеркального отражения. Эти решения будут являться предельными (при  $\lambda \rightarrow 0$ ) для строгих решений. Кроме направления отраженного света мы будем также определять и его интенсивность в различных направлениях.

#### Отражение от полуплоскости

Пусть полуплоскость  $x > 0$  является отражающим экраном и угол между экраном и направлением распространения падающего света  $n_0$  равен  $\varphi_0$  (рис. 1), причем  $n_0$  перпендикулярно к краю экрана. Согласно принципу зеркального отражения, угол между экраном и направлением распространения отраженного света  $n_1$  будет равен  $2\pi - \varphi_0$ . Область ограниченная углами  $\varphi = \varphi_0$  и  $\varphi = 2\pi$ , будет областью тени; область ограниченная углами  $\varphi = 0$

и  $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ , будет освещаться как падающим, так и отраженным светом. Интенсивность отраженного света  $\Psi_1$  равна интенсивности падающего света  $\Psi_0$  и внутри указанной области не зависит от координат точки наблюдения. Интенсивность света в области тени равна нулю. Диаграмма излучения света экраном будет выглядеть так, как показано на рис. 2,а в полярных и на рис. 2,б в прямоугольных координатах.

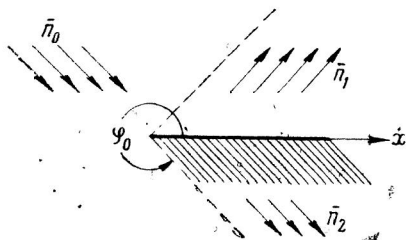


Рис. 1

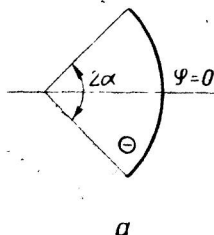
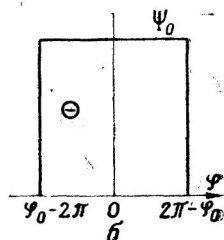


Рис. 2



Тень мы рассматриваем как результат наложения первичного светового поля на излученное экраном вторичное поле, равное по величине и противоположное по знаку первичному, а направление его распространения  $n_2$  совпадает в каждой точке с направлением падающего света  $n_0$ , которое он имел бы в этой точке при отсутствии экрана. Это позволит нам в дальнейшем провести сопоставление результатов, полученных в настоящем параграфе, с более точными решениями. Заметим, что такая формальная трактовка тени не требует понятий поляризации света и периодичности (фазы) световых волн и в этом смысле не выходит из рамок геометрической оптики; достаточно принять допущение, что интенсивность света (скалярная величина)  $\Psi$  может быть отрицательной. Следует также иметь в виду, что в области тени мы не можем в действительности провести отделение вторичного поля от первичного. Соответственно сказанному мы изображаем тень на диаграммах в виде лепестка, отмеченного знаком минус.

Угловая ширина диаграммы  $2\alpha$  зависит от величины угла падения  $\varphi_0$ :

$$\begin{aligned} 2\alpha &= 2\varphi_0 \quad \text{при } \varphi_0 < \pi, \\ 2\alpha &= 2(2\pi - \varphi_0) \quad \text{при } \varphi_0 > \pi, \end{aligned}$$

при  $\varphi_0 = 0$  отражения не происходит.

### Отражение от полосы

Рассмотрим отражение света от полосы с параллельными краями  $x = 0$  и  $x = a$ , считая, что направление падающего света  $n_0$  перпендикулярно к краю полосы. Так же как и в предыдущем

случае, находим, что если падающий свет распространяется под углом  $\varphi_0$ , то отраженный будет распространяться под углом  $2\pi - \varphi_0$ , а направление тени  $\vec{n}_2$  совпадает с направлением падающего света (рис. 3). Область отраженного света будет иметь границы  $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ ,  $r = \frac{a \sin \varphi_0}{\sin(\varphi_0 + \varphi)}$  и поверхность отражающей полосы; область тени будет иметь границы  $\varphi = \varphi_0$ ,  $r = \frac{a \sin \varphi_0}{\sin(\varphi_0 - \varphi)}$  и поверхность полосы.

Интенсивность отражающего света равна интенсивности падающего света и внутри указанной области не зависит от координат точки наблюдения; интенсивность света в области тени равна нулю. В отличие от предыдущего случая диаграмма излучения света экраном зависит от расстояния между началом координат и точкой наблюдения. Будем считать, что диаграммы определяются для некоторого  $r = \text{const}$ . Тогда при  $r < a$  диаграмма излучения полосы совпадет с диаграммой излучения полуплоскости (рис. 1, 2); при  $r > a$  диаграмма распадается на две лепестка, угловая ширина которых  $\alpha$  будет узкой при больших  $r$ , стремясь к нулю при  $r \rightarrow \infty$  (рис. 4). Кроме того, ширина диаграммы зависит от угла падения  $\varphi_0$ : при  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = \pi$  и  $\varphi_0 = 2\pi -$

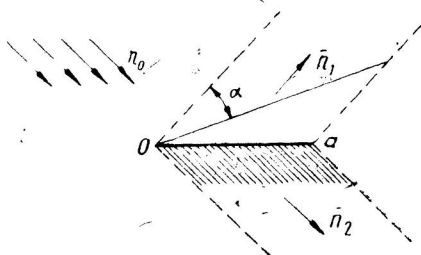


Рис. 3

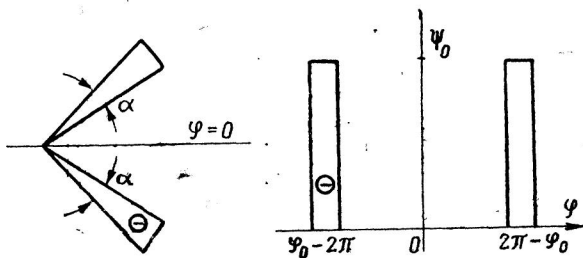


Рис. 4

отражения не происходит, при  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$  — отражается максимальное количество световой энергии.

### Отражение от цилиндра

Поместим начало координат на оси бесконечно-длинного цилиндра радиуса  $a$ . Ось  $z$  будем считать совпадающей с осью цилиндра, а направление распространения падающего света  $\vec{n}_0$  —

параллельным оси  $x$ , так что свет приходит со стороны  $x > 0$ . Плоскости  $y = a$  и  $y = -a$  при  $x < 0$  будут границами области тени и границами области отраженного света (рис. 5).

Направление тени  $n_2$  совпадает с направлением падающего света  $n_0$ ; интенсивность света в области тени равна нулю. Направление распространения отраженного света и его интенсивность зависят от координат точки наблюдения  $M$ . Ограничимся

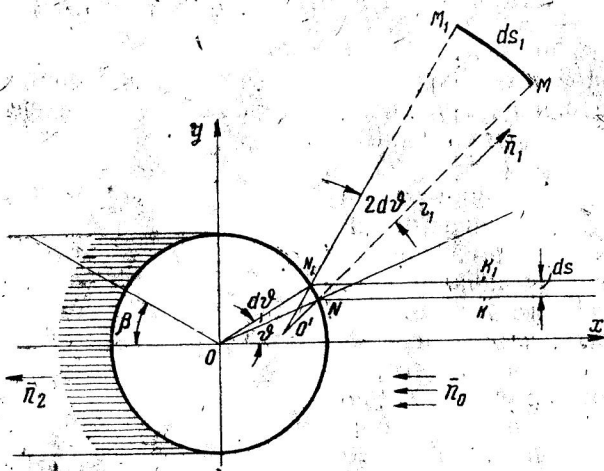


Рис. 5

случаем, когда расстояние от начала координат до точки  $M$  велико по сравнению с радиусом цилиндра. Возьмем на освещенной стороне цилиндра точку  $N$ , нормаль к поверхности в которой составляет угол  $\vartheta$  с осью  $x$ ; тогда, по принципу зеркального отражения, свет, отраженный в этой точке, будет распространяться по направлению  $n_1$ , составляющему угол  $2\vartheta$  с осью  $x$ . Свет падающий в точку  $N_1$ , находящуюся на расстоянии  $ad\vartheta$  от точки  $N$ , будет отражаться под углом  $2(\vartheta + d\vartheta)$ . Расстояние по оси  $y$  между лучами, падающими в точки  $N$  и  $N_1$ , будет

$$KK_1 = ds = ad\vartheta \cdot \cos\vartheta.$$

Расстояние между точками  $M$  и  $M_1$ , отраженных лучей равно

$$MM_1 = ds_1 = r_1 2d\vartheta.$$

Возьмем две элементарные площади длиной 1 (по оси  $z$ ) и шириною

$$KK_1 = ds = a \cos\vartheta d\vartheta \quad \text{и} \quad MM_1 = ds_1 = 2r_1 d\vartheta.$$

Поскольку интенсивность света пропорциональна плотности энергии в световом потоке, постольку между интенсивностью отра-

женного света  $\Psi_M$  и интенсивностью падающего света  $\Psi_0$  получится отношение

$$\frac{\Psi_M}{\Psi_0} = \frac{ds}{ds_1}, \quad \Psi_M = \Psi_0 \frac{ds}{ds_1}. \quad (1.1)$$

Отсюда интенсивность отраженного света, распространяющегося под углом  $2\vartheta$ , будет равна

$$\Psi_{2\vartheta} = \Psi_0 \frac{ds}{ds_1} = \Psi_0 \frac{a \cos \vartheta d\vartheta}{2r_1 d\vartheta} = \Psi_0 \frac{a}{2r_1} \cos \vartheta.$$

Так как координата точки отражения  $N$  меняется в пределах  $0 < |\vartheta| < \frac{\pi}{2}$ , то удобнее ввести угол  $\varphi = 2\vartheta$ , меняющийся в пределах  $0 < |\varphi| < \pi$ ; сделав подстановку  $\vartheta = \frac{\varphi}{2}$ , получим искомую формулу

$$\Psi_\varphi = \Psi_0 \frac{a}{2r_1} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (1.2)$$

Величины  $r_1$  и  $\varphi$  при  $r_1 \gg a$  можно считать полярными координатами точки наблюдения  $M$ .

На рис. 6 показана диаграмма интенсивности света, отраженного цилиндром. Ширина теневого лепестка будет (рис. 6)  $2\beta z \frac{2a}{r}$ .

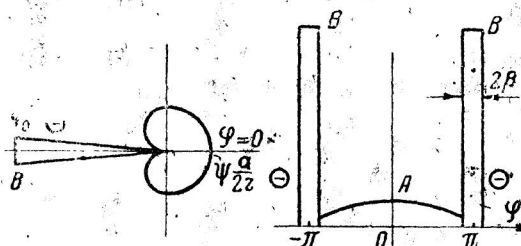


Рис. 6

Если мы примем на диаграмме за единицу масштаба  $\Psi_{\varphi=0} = \Psi_0 \frac{a}{2r}$ , то при  $r \rightarrow \infty$  точка  $B$  будем уходить в бесконечность, а угловая ширина теневого лепестка  $2\beta$  будет приближаться к нулю.

### Отражение от шара

Поместим начало координат в центре шара радиуса  $a$ . Пусть падающий свет приходит со стороны положительных  $z$  (рис. 7).

Рассмотрим на поверхности шара кольцевую полоску радиуса  $a \sin \vartheta$  шириною  $ad\vartheta$ . На эту полоску будет падать свет, прохо-

дящий через расположенное в плоскости  $z = \text{const}$  кольцо с площадью

$$ds = 2\pi a \sin \vartheta \cdot a d\vartheta \cdot \cos \vartheta = \pi a^2 \sin 2\vartheta d\vartheta.$$

Отраженный свет будет распространяться в области между двумя конусами, углы которых при вершине будут  $2\vartheta$  и  $2(\vartheta + d\vartheta)$ .

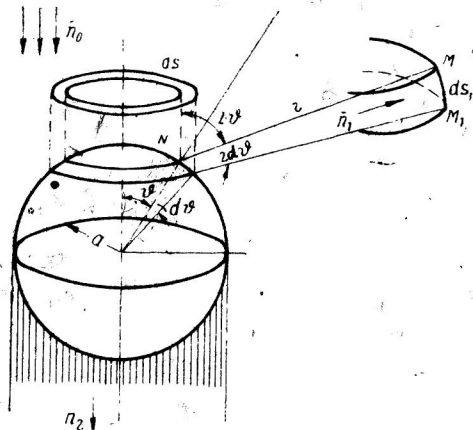


Рис. 7

Опишем вокруг шара концентрическую сферу радиуса  $r \gg a$ , на которой отраженный свет будет освещать полоску с площадью

$$ds_1 = 2\pi r \sin 2\vartheta \cdot r 2d\vartheta = 4\pi r^2 \sin 2\vartheta \cdot d\vartheta.$$

По соображениям, приведенным в предыдущей задаче, имеем соотношение между интенсивностями отраженного и падающего света

$$\frac{\Psi_M}{\Psi_0} = \frac{ds}{ds_1},$$

откуда находим

$$\Psi_M = \Psi_0 \frac{ds}{ds_1} = \Psi_0 \frac{\pi a^2 \sin 2\vartheta d\vartheta}{4\pi r^2 \sin 2\vartheta d\vartheta} = \Psi_0 \frac{a^2}{4r^2}.$$

Таким образом на больших расстояниях от шара интенсивность отраженного света

$$\Psi_M = \Psi_0 \frac{a^2}{4r^2} \quad (I.3)$$

не зависит от направления  $n_1$ , по которому распространяется отраженный свет (за исключением области тени, занимающей цилиндр радиуса  $a$ ). Повидимому шар является (в границах геометрической оптики) единственным телом, рассеивающим свет равномерно во все стороны.

На рис. 8 показана диаграмма интенсивности отраженного света в плоскости, проходящей через ось  $z$ . Ширина теневого лепестка

$$2\beta \cong \frac{2a}{r}.$$

Если мы примем на диаграмме за единицу масштаба  $\Psi_{\varphi=0} = \Psi_0 \frac{a^2}{4r^2}$ , то при  $r \rightarrow \infty$  точка  $B$  будет уходить в бесконечность, а ширина теневого лепестка  $2\beta$  — приближаться к нулю.

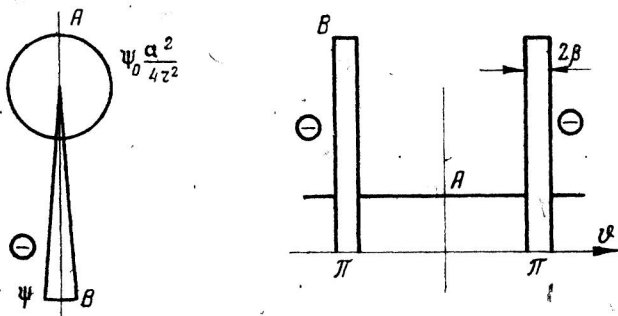


Рис. 8

### Отражение от произвольного выпуклого тела в направлении на источник света

Приведем формулу для интенсивности света, отраженного от произвольной, всюду выпуклой, зеркальной поверхности

$$\Psi_{\varphi, \vartheta} = \Psi_0 \frac{R_1 R_2}{4r^2}. \quad (1.4)$$

Здесь:  $\Psi_0$  — интенсивность падающего света,

$r$  — расстояние от начала координат до точки наблюдения, значительно превосходящее размеры отражающего тела,

$R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны отражающей поверхности в точке отражения  $N$  (предполагается, что  $R_1$  и  $R_2$  всюду больше нуля и много меньше расстояния до точки наблюдения).

В случае цилиндрической поверхности, когда один из радиусов кривизны бесконечен, вместо формулы (1.4) получим

$$\Psi_{\varphi} = \Psi_0 \frac{R}{2r} \cos \gamma. \quad (1.5)$$

Здесь  $\gamma$  — угол между направлением падающего света и нормалью к поверхности в точке отражения  $N$ , а радиус кривизны  $R \gg r$ .

Вывод формул (I. 4) и (I. 5) аналогичен выводу формул (I. 2) и (I. 3).

## 2. МЕТОД ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ

Отличительной особенностью геометрической оптики является представление о локальном характере явлений (отражение, преломление), имеющих место при распространении света, т. е. представление потока света в виде совокупности сколь угодно тонких пучков лучей, распространяющихся независимо друг от друга. Эта локальность проявляется, например в формулах для интенсивности отраженного света, которая получается зависящей от кривизны отражающей поверхности в точке отражения, но не от формы поверхности в целом.

Как показывает опыт и точная теория, расчеты геометрической оптики не оправдываются в тех случаях, когда радиусы кривизны отражающей или преломляющей поверхности сравнимы с длиной волны света; а также в тех случаях, когда точка наблюдения находится вблизи геометрической границы пучка световых лучей (границы тени, границы пучка отраженных лучей, каустические поверхности). В этих случаях приходится обращаться к более точным расчетам волновой оптики.

Волновая оптика рассматривает свет как волновой процесс, скорость распространения которого зависит от свойств среды и характеризуется интенсивностью света  $\psi^2 = f(x, y, z, t)$  и частотой. Так например, световое поле от точечного монохроматического источника в однородной изотропной среде описывается функцией

$$\psi = A \frac{e^{-i\omega \left( t - \frac{r}{c_1} \right)}}{r} = Ae^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (I.6)$$

где:

$A$  — амплитудный множитель,

$\omega$  — круговая частота,

$c_1$  — скорость света в данной среде,

$r$  — расстояние от источника до точки наблюдения,

$\kappa$  — волновой коэффициент,

$$\kappa = \frac{\omega}{c_1} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

и  $\lambda$  — длина волны света.

### Принцип Гюйгенса-Френеля. Формула Кирхгофа

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля каждая точка, в которой имеется световое возмущение, может рассматриваться как источник вторичной световой волны. Наложение вторичных волн дает в результате наблюдаемую интенсивность света (рис. 9). Для получения правильного результата следует учитывать фазу вторичных волн, приходящих в точку наблюдения, и кроме того,



амплитуду, которую следует положить зависящей от угла между волновой нормалью первичной волны и направлением на точку наблюдения.

Порядок проводимых вычислений  $\Psi$  по принципу Гюйгенс-Френеля можно показать, например, на случае дифракции от полуплоскости. Пусть свет распространяется вдоль оси  $y$ , а эк-

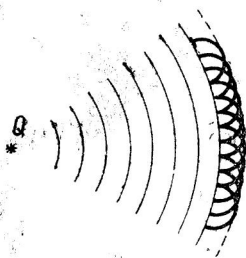


Рис. 9

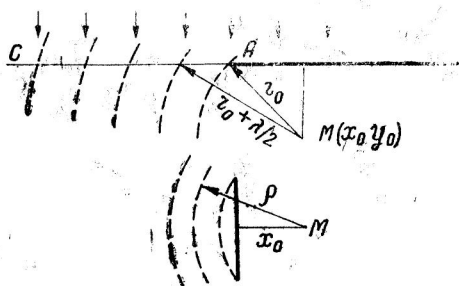


Рис. 10

ран  $AB$  (рис. 10) совпадает с полуплоскостью  $x > 0$ . Опишем из точки наблюдения  $M(x_0, y_0)$  сферы радиусами

$$AM = r_0, r_0 + \frac{\lambda}{2}, r_0 + 2 \frac{\lambda}{2} \dots$$

Эти сферы разобьют волновую поверхность  $CA$  на кольцевые зоны, называемые зонами Френеля (рис. 10). Элемент поверхности  $ds_n$   $n$ -ой зоны  $ds_n = \rho d\rho d\varphi$ ; где  $\rho^2 = r^2 - y_0^2$ , излучает сферическую волну, значение которой в точке  $M$

$$d\psi_n = K_n ds_n \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r}. \quad (1.7)$$

Функция  $K_n$  учитывает зависимость амплитуды вторичной волны от направления и в пределах зоны может считаться постоянной. Действие всей  $n$ -ой зоны найдем через интеграл

$$\Psi_n = K_n e^{-i\omega t} \int_{s_n} \frac{e^{ikr}}{r} ds_n. \quad (1.8)$$

Для действия всех зон в точке  $M$  найдем

$$\psi = 2i\lambda e^{-i\omega t} \cdot \frac{e^{ikr_0}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K_n (-1)^n \arccos \frac{x_0}{\sqrt{(r_0 + n \frac{\lambda}{2})^2 - y_0^2}} \quad (1.9)$$



которому должна удовлетворять функция  $\psi$ , описывающая волновой процесс распространения света. Формула (I. 11) получается [12, 13] в предположении, что функция  $\psi$ , а также ее первые и вторые производные по координатам однозначны и непрерывны внутри области интегрирования; это означает, что все имеющиеся источники и поверхности разрыва (экраны) должны находиться вне поверхности  $s$ .

В случае гармонической зависимости  $\psi$  от времени формула Кирхгофа приобретает более простой вид. Выражая зависимость от времени функцией  $e^{-i\omega t}$ , найдем сначала:

$$\psi = e^{-i\omega t} \psi_1(x, y, z),$$

$$[\psi] = e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)} \psi_1(x, y, z) = e^{-i\omega t} e^{ikr} \psi_1(x, y, z) = e^{ikr} \psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega e^{-i\omega t} \psi_1(x, y, z) = -i\omega \psi,$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial t}\right] = -i\omega e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)} \psi_1(x, y, z) = -i\omega e^{ikr} \psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial n} \psi_1(x, y, z),$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial n}\right] = e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)} \frac{\partial}{\partial n} \psi_1(x, y, z) = e^{ikr} \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Подставив найденные выражения в формулу (I. 11), получим

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ e^{ikr} \psi \frac{\partial}{\partial n} + \frac{ik}{r} e^{ikr} \psi \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r} e^{ikr} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\} ds$$

или

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\} ds. \quad (I.12)$$

Формулу (I. 12) чаще выводят с помощью теоремы Грина, не обращаясь к формуле (I. 11). Ввиду распространенности этого приема также и в других областях математической физики мы считаем полезным привести здесь и этот вывод.

Пусть  $\psi(x, y, z, t)$  и  $\varphi(x, y, z, t)$  вместе со своими первыми и вторыми производными однозначны и непрерывны внутри некоторой пространственной области  $v$ , включая границу; тогда по известной теореме Грина

$$\int_v (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dv = \int_s \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds,$$

где первый интеграл взят по объему  $v$ , второй — по его границе, а  $n$  — означает внутреннюю нормаль к поверхности  $s$ .

Если  $\psi$  и  $\varphi$  — гармонические функции времени и удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0,$$

то  $\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi = 0$ , интеграл по объему исчезает и

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (I.13)$$

Будем считать, что  $\psi$  — искомая нами функция, а на неопределенную пока функцию  $\varphi$  наложим дополнительно еще одно условие: точка  $M$  должна быть для функции  $\varphi$  особой точкой.

Простейшей функцией  $\varphi$ , удовлетворяющей волновому уравнению и последнему условию, является функция

$$\varphi = e^{-i\omega t} \frac{e^{i\kappa r}}{r} \quad (I.14)$$

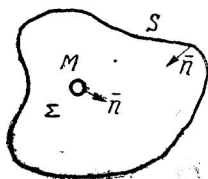


Рис. 12

( $r$  — расстояние от точки интегрирования до точки  $M$ ), на которой и остановимся. Так как теперь условия непрерывности функций в точке  $M$  нарушены, вырежем внутри интересующей нас области  $\mathcal{V}$  небольшую сферу  $\Sigma$  с центром в точке  $M$  (рис. 12). Теперь область  $\mathcal{V}$  ограничена двумя поверхностями  $s$  и  $\Sigma$  и вместо (I. 13) мы должны написать

$$\int_s \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds + \int_{\Sigma} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Sigma = 0. \quad (I.15)$$

На поверхности сферы, радиус которой  $R \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial R}, \quad \varphi = e^{-i\omega t} \frac{e^{i\kappa R}}{R} \rightarrow e^{-i\omega t} \frac{1}{R},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial R} = -e^{-i\omega t} e^{i\kappa R} \left( \frac{i\kappa}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \rightarrow \frac{e^{-i\omega t}}{R^2},$$

$$\psi \rightarrow \psi_M,$$

$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial R}$  — конечно;  $d\Sigma = R^2 d\Omega$  ( $\Omega$  — телесный угол с вершиной в точке  $M$ ).

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\Sigma = \\ & = \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ (\psi)_{cp} \int_{\Sigma} \frac{e^{-i\omega t}}{R^2} R^2 d\Omega + \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{cp} \int_{\Sigma} \frac{e^{-i\omega t}}{R} R^2 d\Omega \right\} = \psi_{cp} e^{-i\omega t} 4\pi; \\ & \int_s \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS - \psi 4\pi e^{-i\omega t} = 0; \\ & \int_s \left\{ \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( e^{-i\omega t} \frac{e^{i\kappa r}}{r} \right) - e^{-i\omega t} \frac{e^{i\kappa r}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right\} dS = -4\pi \psi e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Умножая последнее уравнение на  $\frac{e^{i\omega t}}{4\pi}$ , получаем формулу (I.12).

Как уже указывалось выше, внутри области, ограниченной поверхностью  $s$ , не должно быть источников и поверхностей разрыва; в остальном выбор  $s$  произволен. В частности, часть поверхности  $s$  может быть удалена в бесконечность, при этом влиянием удаленной части можно будет пренебречь [14]. Когда рассматривают дифракционные явления в отверстии экрана, то за поверхность интегрирования выбирают такую поверхность, часть которой примыкает к теневой стороне экрана и покрывает дифрагирующее отверстие, а другая часть относится в бесконечность (рис. 13)

Для того, чтобы провести вычисления по формуле Кирхгофа, нужно знать величины  $\psi$  и  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  на поверхности интегрирования

а так как их точные значения неизвестны, то приходится ограничиться приближенными значениями.

В качестве приближенных значений

берутся значения  $\psi$  и  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  на поверхности

интегрирования при свободном распространении света — в освещенной части  $s$  (покрывающей отверстие),

и  $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  в области геометрической тени и на бесконечно-удаленной

части  $s$ . Таким образом, хотя формула Кирхгофа и является строгим решением волнового уравнения, с помощью нее можно получить только приближенные

решения. Вообще говоря, чем короче длина волны  $\lambda$ , тем точнее будут найденные значения  $\psi$  [8]. При решении дифракционных задач в области оптики получаемое приближение является вполне достаточным для практических целей, поэтому формула Кирхгофа

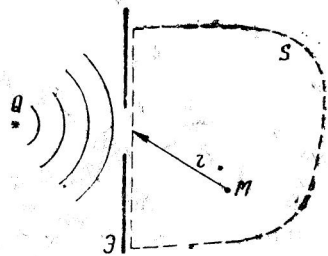


Рис. 13

широко применяется в оптике и в настоящее время. „В области оптических измерений классическая теория дифракции представляет практически совершенное и идеально работающее орудие“ (Земмерфельд [8] стр. 883).

Теория дифракции Кирхгофа применяется и в области более длинных волн — сантиметровых и дециметровых. Решение таких задач, например, как вычисление диаграммы направленности рупорной антенны, проводится обычно с ее помощью.

В теории линейных дифференциальных уравнений доказывается (уравнение  $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ ), что если регулярная функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, вместе со своей производной на каком-либо участке равна нулю, то она равна нулю везде.

Поэтому описанный выше способ отыскания решения, когда полагается  $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  на теневой стороне экрана, с точки зрения математической строгости не выдерживает критики. Земмерфельд устраняет [8] это противоречие тем, что вместо волновой функции (I. 14) берет соответствующую функцию Грина  $G$ , которая на поверхности  $s$  обращается в нуль. Тогда формула (I. 12) принимает вид

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int_s \psi \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (I.16)$$

При этом необходимость в употреблении приближенных значений  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  отпадает, и указанное противоречие устраняется. В частности, если экран является плоскостью, то берется функция Грина

$$G = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_1}}{r_1}. \quad (I.17)$$

Здесь:

$r_1$  — расстояние от точки интегрирования до точки  $M_1$  — зеркальной относительно  $M$ .

Функция Грина (I. 17) имеет особую точку при  $r=0$ , совпадающую с особой точкой волновой функции (I. 14), и вторую особую точку при  $r_1=0$  вне области интегрирования; в плоскости экрана  $r_1=r$ ,  $G=0$ .

Подставляя (I. 17) в (I. 16) и принимая

$$1 - \frac{1}{ikr} \cong 1,$$

что справедливо при  $r \gg \lambda$ , получим

$$\psi = -\frac{ik}{2\pi} \int_s \psi \frac{e^{ikr}}{r} \cos(n, r) ds. \quad (I.18)$$

Формула (I. 18) выражает не что иное, как принцип Гюйгенса: от каждого элемента поверхности  $ds$  распространяется сферическая волна  $\frac{e^{ikr}}{r}$ , амплитуда и фаза которой задаются функцией  $\psi$ , а  $\cos(n, r)$  является функцией направления.

В заключение этого раздела заметим, что формула (I. 12) в некоторых частных случаях может быть несколько упрощена. Напишем сначала (I. 12) в виде

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int_s \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) ds + \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = -I_1 + I_2. \quad (I.19)$$

Введем криволинейные координаты  $\xi, \eta, \zeta$  таким образом, чтобы одна поверхность  $\xi = \xi_1 = \text{const}$  совпала с поверхностью экрана  $\mathcal{E}$ , а направление нормали было касательным к координатной линии  $\xi$  (рис. 14).

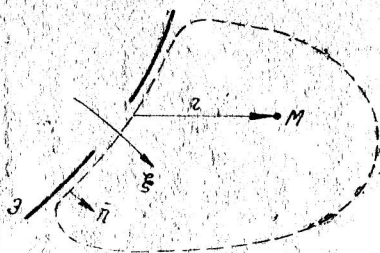


Рис. 14

Тогда на поверхности экрана  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ , а величины  $\psi$  и  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  будут функциями только координат  $\eta$  и  $\zeta$ . При этом интегралы (I. 12) можно записать так

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_s \psi_{\xi=\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) ds; \quad I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_s \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1} \frac{e^{ikr}}{r} ds.$$

В тех частных случаях, когда выполняется соотношение

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1} = C \psi_{\xi=\xi_1}, \quad (I.20)$$

где  $C$  — не зависит от координат  $\eta, \zeta$ , получим:

$$I_2 = \frac{C}{4\pi} \int_s \psi_{\xi=\xi_1} \frac{e^{ikr}}{r} ds, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \xi} = \frac{C}{4\pi} \int_s \psi_{\xi=\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) ds = C I_1;$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{C} \frac{\partial I_2}{\partial \xi}; \quad \psi = -\frac{1}{C} \frac{\partial I_2}{\partial \xi} + I_2 = \left( -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial \xi} + 1 \right) I_2 = \\ &= \left( 1 - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{C}{4\pi} \int_s \psi_{\xi=\xi_1} \frac{e^{ikr}}{r} ds. \end{aligned}$$

Таким образом, если выполняется соотношение (I. 20), формула (I. 12) принимает вид

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \left( C - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \int_S \psi_{\xi=\xi_1} \frac{e^{ikr}}{r} ds. \quad (I.21)$$

### 3. ДИФРАКЦИЯ ОТ ЩЕЛИ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

#### Дифракция от щели

Пусть неограниченный бесконечно-тонкий, идеально отражающий экран совпадает с плоскостью  $x = 0$  и в экране имеется щель, ограниченная линиями  $y = -a$ ,  $y = b$ . Рассмотрим случай, когда направление распространения входящей волны параллельно плоскости  $xy$  и составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$  (рис. 15). При этих условиях падающую волну можно представить уравнением

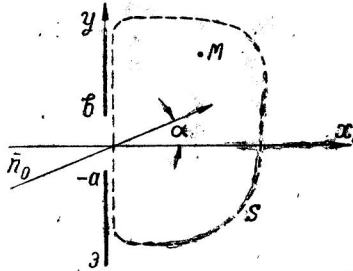


Рис. 15

$$\psi_0 = e^{-i\omega t} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}. \quad (I.22)$$

Обозначим координаты точки наблюдения  $M$  через  $x, y, 0$  и координаты произвольной точки в плоскости экрана через  $0, \eta, \zeta$ .

Согласно сказанному в предыдущем разделе, будем находить интеграл

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \psi \frac{d\zeta}{dn} dS = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \int_a^b d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\zeta \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{i\eta r}}{r} \right) d\zeta = \\ &= -\frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\zeta \sin \alpha} \frac{e^{i\eta r}}{r} d\zeta \end{aligned} \quad (I.23)$$

Заметим, что мы здесь не пользуемся условием

$$kr \gg 1. \quad (I.24)$$

Так как  $r = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2}$ , то ввиду четности подинтегральной функции относительно  $\zeta$ , опуская множитель  $e^{-i\omega t}$ , можем написать

$$\psi = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b d\eta e^{ik\eta y \sin \alpha} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\eta r}}{r} d\zeta. \quad (I.25)$$



Обозначив  $\rho^2 = x^2 + (y - \eta)^2$  и замечая, что

$$dr = \frac{\xi d\zeta}{r}, \quad d\zeta = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},$$

приведем интеграл (I. 25) к виду

$$\psi' = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b d\eta e^{ik\eta \sin \alpha} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{ikr} dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (I.26)$$

Внутренний интеграл выражается через функцию Ханкеля

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{ikr} dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \int_1^{\infty} \frac{e^{ik\rho\tau} d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}} = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(k\rho) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}).$$

Таким образом приходим к формуле

$$\psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^b e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta. \quad (I.27)$$

Формула (I.27) будет служить исходной для ряда других частных формул.

Рассмотрим случай, когда расстояние от точки наблюдения до щели велико по сравнению с шириной щели и  $a=b$ .

Обозначим:

$$x^2 + y^2 = R^2 \gg a, \quad \cos \varphi = \frac{x}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{R}.$$

При этом

$$\rho^2 = x^2 + (y - \eta)^2 = R^2 - 2y\eta + \eta^2,$$

$$\rho = R \sqrt{1 - 2\sin \varphi \frac{\eta}{R} + \left(\frac{\eta}{R}\right)^2} = R \left(1 - \frac{\eta}{R} \sin \varphi + \frac{\eta^2}{2R^2} \cos^2 \varphi + \dots\right)$$

Полагая  $k\rho \gg 1$  и заменяя функцию Ханкеля ее асимптотическим выражением, получим из формулы (I.27) с достаточным приближением

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{i}{2} \int_a^{\alpha} e^{ik\eta \sin \alpha} \frac{kx H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2})}{\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}} d\eta = \frac{ikx}{2} \int_a^{\alpha} \frac{e^{ik\eta \sin \alpha}}{\rho} H_1^{(1)}(k\rho) d\eta = \\ &\approx \frac{ikx}{2} \int_a^{\alpha} \frac{e^{ik\eta \sin \alpha}}{\rho} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i(k\rho - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} d\eta = \frac{kx}{2R} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_a^{\alpha} e^{ik\eta \sin \alpha} e^{ik\eta \cos^2 \varphi} d\eta = \\ &= \frac{k \cos \varphi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{ikR} \int_a^{\alpha} e^{ik\eta \sin \alpha} e^{ik(\eta \sin \varphi + \frac{\eta^2}{2R} \cos^2 \varphi)} d\eta = \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{k \cos \varphi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} \int_a^{\alpha} e^{ik\eta(\sin \alpha - \sin \varphi) + i\frac{k\eta^2}{2R} \cos^2 \varphi} d\eta. \end{aligned} \quad (I.28)$$

Последний интеграл сводится к интегралам Френеля:

$$C_1(u) = C\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) = \int_0^u \cos \frac{\pi t^2}{2} dt; \quad S_1(u) = S\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) = \int_0^u \sin \frac{\pi t^2}{2} dt;$$

$$F_1(u) = C_1(u) + iS_1(u).$$

Если пренебречь последним слагаемым в показателе подинтегральной функции (1.28), т. е. если принять

$$\rho = R - \eta \sin \varphi, \quad (1.29)$$

то получится простая формула

$$\psi = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\kappa \cos \varphi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}} \int_a^{\alpha} e^{i\kappa \eta (\sin \alpha - \sin \varphi)} d\eta =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}} \left[ \frac{\sin[\kappa \alpha (\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \right] \cos \varphi. \quad (1.30)$$

При нормальном падении волны на плоскость щели  $\sin \alpha = 0$  и

$$\psi = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}} \left[ \frac{\sin[\kappa \sin \varphi]}{\sin \varphi} \right] \cos \varphi, \quad (1.31)$$

Отметим характерные множители в формуле (1.31): множитель  $e^{i\kappa R} \sqrt{\kappa R}$ , определяющий зависимость от расстояния, показывает, что волна, распространяющаяся от щели, является цилиндрической; другой множитель  $\sin(\kappa \sin \varphi) / \sin \varphi$  характерен для линейной цепочки синфазных излучателей равной амплитуды, равноотстоящих друг от друга.

Когда мы приняли  $\rho = R - \eta \sin \varphi$  (1.29), то это значит, что мы приняли параллельность лучей, идущих от различных точек щели  $(0, 0, \eta)$  к точке наблюдения, что справедливо при  $\frac{a}{R} \rightarrow 0$ . Формула [1.28] учитывает непараллельность лучей и возникающую вследствие этого разность фаз  $\frac{\kappa \eta^2}{2R} \cos^2 \varphi$ . Дополняя выражение в показателе до полного квадрата, из [1.28] получим

$$\psi = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\kappa \cos \varphi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}} e^{i\frac{\kappa \eta^2}{2} \left( \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^2} \int_a^{\alpha} e^{i\frac{\kappa \eta}{2} \left( \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\eta \cos \varphi}{R} \right)} d\eta.$$

Обозначим для краткости

$$A = \frac{\sin \alpha - \sin \varphi}{\cos \varphi}; \quad B = \frac{\cos \varphi}{R}$$

и сделаем подстановку:

$$\frac{\kappa R}{2}(A+B\eta)^2 = \frac{\pi}{2}t^2; \quad \sqrt{\kappa R B}d\eta = \sqrt{\pi} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\kappa \cos \varphi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}} e^{i\frac{\pi}{2}\kappa A^2} \frac{1}{B\sqrt{\kappa R}} \int_{\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(A-Ba)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(A+Ba)}}^{\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(A+Ba)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(A+Ba)}} e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt = \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} e^{i\kappa R(1-\frac{A^2}{2})} \left\{ F_1 \left[ \sqrt{\frac{\kappa R}{\pi}} (A+Ba) \right] - F_1 \left[ \sqrt{\frac{\kappa R}{\pi}} (A-Ba) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Формула [1.32] пригодна для любых  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$  при условии  $\kappa R \gg 1$  и  $R \gg a$ . Множитель  $\left(1 - \frac{A^2}{2}\right)$  в показателе получился вследствие того, что мы удержали в показателе подынтегральной функции формулы [1.28] только вторую степень  $\eta$ . Удерживая третью степень  $\eta$ , можно было бы привести интеграл [1.28] к интегралу Эйри, выражающемуся через цилиндрические функции с индексом  $n = \pm 1/3$ ; при этом вместо  $\left(1 - \frac{A^2}{2}\right)$  получится более сложное выражение.

В курсах оптики обычно приводятся формулы, более простые, чем [1.32], но они пригодны только при малых  $\varphi$ .

### Дифракция от полуплоскости

Допустим, что границами щели являются  $y=a=0$  и  $y=b$ , тогда вместо формулы [1.27] напомним

$$\psi = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b e^{i\kappa \eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta.$$

Увеличивая  $b$  неограниченно, придем к случаю дифракции от полуплоскости

$$\psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{i\kappa \eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta. \quad (1.33)$$

В частности при нормальном падении волны на экран  $\alpha=0$ , и

$$\psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-y}^{\infty} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + \tau^2}) d\tau, \quad \eta - y = \tau. \quad (1.34)$$

Рассмотрим этот случай подробнее. Попытаемся выразить интеграл [I.34] через известные функции. Вычислим интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(\kappa_1 \sqrt{x^2 + v^2}) dv \quad (I.35)$$

с помощью известной формулы

$$H_0^{(1)}(\kappa, \rho) = \frac{2}{\pi i} \int_1^{\infty} \frac{e^{i\kappa_1 \rho \beta}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} d\beta = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\kappa_1 \sqrt{u^2 + \rho^2}}}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} du$$

$$I_1 = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} dv \int_0^{\infty} \frac{e^{i\kappa_1 \sqrt{u^2 + (x^2 + v^2)}}}{\sqrt{u^2 + (x^2 + v^2)}} du = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\kappa_1 \sqrt{u^2 + v^2 + x^2}}}{\sqrt{u^2 + v^2 + x^2}} du dv$$

Полученный двойной интеграл вычислим в полярных координатах, для чего заменим переменные  $u$  и  $v$  на  $R_1$  и  $\varphi_1$  по формулам  $u = R_1 \cos \varphi_1$ ,  $v = R_1 \sin \varphi_1$ ,  $du dv = R_1 dR_1 d\varphi_1$

$$I_1 = \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\kappa_1 \sqrt{R_1^2 + x^2}}}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} R_1 dR_1 d\varphi_1 \quad (I.36)$$

Последний интеграл будет абсолютно сходящимся, если волновое число  $\kappa_1$  имеет положительную мнимую часть:  $\kappa_1 = \kappa + i\kappa_2$  и  $\kappa_2 > 0$ , что соответствует распространению в поглощающей среде. Так как в интеграле [I.36] переменные разделились, то получаем просто:

$$I_1 = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} \frac{e^{i(\kappa + i\kappa_2) \sqrt{R_1^2 + x^2}}}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} R_1 dR_1 = \frac{e^{(i\kappa - \kappa_2) \sqrt{R_1^2 + x^2}}}{i\kappa - \kappa_2} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{i} \frac{e^{(i\kappa - \kappa_2)x}}{i\kappa - \kappa_2}$$

В пределе, при  $\kappa_2 \rightarrow 0$ ,  $\kappa_1 \rightarrow \kappa$ , получим  $I_1 = \frac{e^{i\kappa x}}{\kappa}$

Таким образом

$$\int_0^{\infty} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + v^2}) dv = \frac{e^{i\kappa x}}{\kappa} \quad (I.37)$$

Дифференцируя равенство [I.37] по параметру  $x$ , найдем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + v^2}) dv = - \int_0^{\infty} \frac{\kappa x}{\sqrt{x^2 + v^2}} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + v^2}) dv = i e^{i\kappa x}$$

Когда точка наблюдения находится на границе геометрической тени,  $y=0$  и формулы [1.34], [1.37] дают

$$\psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + \tau^2}) d\tau = \frac{e^{i\kappa x}}{2}, \quad (1.39)$$

т. е. независимо от расстояния до экрана,  $\psi$  на границе геометрической тени вследствие влияния экрана уменьшается в два раза.

Формулу [1.34] можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{i}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_y^{\infty} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + \tau^2}) d\tau - \int_0^y H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + \tau^2}) d\tau \right\} = \\ &= \frac{e^{i\kappa x}}{2} + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + \tau^2}) d\tau \end{aligned} \quad (1.40)$$

или

$$\psi = \frac{e^{i\kappa x}}{2} + \frac{i\kappa x}{2} \int_0^y \frac{H_1^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + \tau^2}) d\tau}{\sqrt{x^2 + \tau^2}} = \frac{e^{i\kappa x}}{2} + \frac{i\kappa x}{2} \int \frac{H_1^{(1)}(\kappa \rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

При  $\kappa \rho \gg 1$  последний интеграл можно преобразовать, используя асимптотическое разложение функции Ханкеля

$$\frac{i\kappa x}{2} \int_x^{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa \rho}} e^{i(\kappa \rho - \frac{3\pi}{4})} = \frac{\kappa x e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa}} \int_x^{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{e^{i\kappa \rho} d\rho}{\sqrt{\rho} \sqrt{(\rho+x)(\rho-x)}} = I.$$

Если угол дифракции невелик, т. е.  $y \ll x$ , можем принять  $\rho \approx x$ ; тогда

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_x^{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{e^{i\kappa \rho} d\rho}{\sqrt{\rho - x}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} e^{i\kappa x} \int_0^{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \frac{e^{i\kappa \tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau. \\ \psi &= \frac{e^{i\kappa x}}{2} \left\{ 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \frac{e^{i\kappa \tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\} \end{aligned}$$

Если определять точку наблюдения полярными координатами  $R$  и  $\varphi$ , то

$$\psi = \frac{e^{i\kappa R \cos \varphi}}{2} \left\{ 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_0^{R - R \cos \varphi} \frac{e^{i\kappa \tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\}.$$

Сделаем подстановку  $\kappa = \frac{\pi}{2} t^2$ ;  $d\kappa = \frac{\pi}{\kappa} t dt$ , тогда предыдущее выражение примет вид

$$\Psi = \frac{e^{i\kappa R \cos \varphi}}{2} \left\{ 1 + e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{\kappa} R(1-\cos \varphi)}} e^{i\frac{\pi}{2} t^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} dt \right\} = \frac{e^{i\kappa R \cos \varphi}}{2} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{\kappa} R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{2} t^2} dt \right\}.$$

Окончательная формула

$$\Psi = \frac{e^{i\kappa R \cos \varphi}}{2} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa R}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\}. \quad (1.41)$$

Как увидим ниже, формула (1.41) совпадает с формулой, получаемой по строгой теории (см. главу VI).

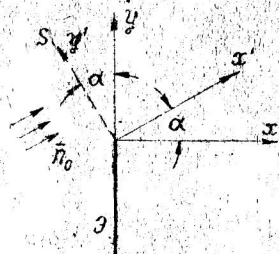


Рис. 16

Возвратимся теперь к формуле (1.33). Ее анализ более сложен, ввиду наличия множителя  $e^{i\kappa R \sin \alpha}$ . Поэтому поступим следующим образом: повернем  $S$ -поверхность интегрирования (полуплоскость  $y > 0$ ) на угол  $\alpha$ , чтобы она стала перпендикулярно к направлению распространения света (рис. 16). Вводя новые координаты

$$\left. \begin{aligned} x' &= R \cos \varphi' = R \cos(\varphi - \alpha), \\ y' &= R \sin \varphi' = R \sin(\varphi - \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

взамен формулы (1.33) напишем

$$\Psi = \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-y}^{\infty} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{(x')^2 + v^2}) dv. \quad (1.43)$$

откуда аналогичным образом вместо формулы (1.41) получим

$$\Psi = \frac{e^{i\kappa R \cos(\varphi - \alpha)}}{2} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa R}{\pi}} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \right) \right\}. \quad (1.44)$$

При непосредственном анализе формулы (1.33) нам нужно было бы вычислить ряд новых, более сложных интегралов, например, вместо (1.37)

$$\int_{-x \operatorname{tg} \alpha}^{\infty} e^{i\kappa v \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + v^2}) dv = \frac{e^{i\kappa x \cos \alpha}}{\kappa \cos \alpha}. \quad (1.45)$$

Поворот плоскости  $S$  позволяет избежать этих вычислений. Вопрос о прямом математическом доказательстве равенства (1.45) и других, получающихся при  $\alpha \neq 0$ , остается открытым.

### Дифракционные явления с освещенной стороны экрана

С помощью формулы (1.43) можно вычислить  $\psi$  в пределах сектора  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} + \alpha$ , если угол  $\alpha$  невелик. Если координата  $x$  точки наблюдения  $x < 0$ , а угол  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , в точку наблюдения попадает также волна, отраженная от экрана —  $\psi_{\text{отр}}$  (рис. 17); для того, чтобы вычислить  $\psi$  в этом случае, надо расположить поверхность интегрирования  $S$  на освещенной стороне экрана.

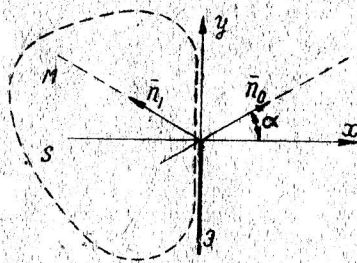


Рис. 17

При этом

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi} \int_S \psi_{\text{отр}} \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (1.46)$$

Здесь  $\psi_0$  — падающий поток, определяемый (1.22). Если убрать экран, второе слагаемое в формуле (1.46) исчезнет, величина  $\psi$  будет определяться только падающим потоком. На освещенной стороне экрана  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$  и, следовательно,

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^0 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\text{отр}} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi. \quad (1.47)$$

Принимая, что при  $x = 0$   $\psi_{\text{отр}} = \psi_0 = e^{ik\eta \sin \alpha}$ , получим:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^0 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi = \\ &= \psi_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^0 d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta_1 \sin \alpha} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi = \\ &= \psi_0 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{ik\eta_1 \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y + \eta_1)^2}) d\eta_1, \end{aligned} \quad (1.48)$$

или

$$\psi = \psi_0 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{ik\eta_1 \sin(-\alpha)} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (-y - \eta_1)^2}) d\eta_1, \quad (1.49)$$

Таким образом мы приходим к уже рассмотренной задаче, так как интегралы формул (1. 49) и (1. 33) совпадают с точностью до знака  $\alpha$  и  $y$ .

Отсюда следует, что при переходе с теневой стороны экрана (при  $\alpha = \alpha_1$ ) на освещенную в окрестности точки  $(-x, y)$  мы будем наблюдать те же дифракционные явления, которые имеются на теневой стороне экрана в окрестности точки  $(x, -y)$  при  $\alpha = -\alpha_1$ .

### Дифракция от полосы

Пусть экраном является бесконечно длинная полоса, идеально отражающая и бесконечно-тонкая, ограниченная линиями  $y = -a$  и  $y = b$ . На экран падает волна, описываемая уравнением (1. 22).

Для того, чтобы вычислить  $\psi$  в точке  $M(x, y, 0)$ , выбираем поверхность интегрирования  $s$  так же, как в случае дифракции от щели (рис. 18). На основании выводов, проведенных в предыдущих разделах, напомним сразу (опускающая множитель  $e^{-i\omega t}$ ).

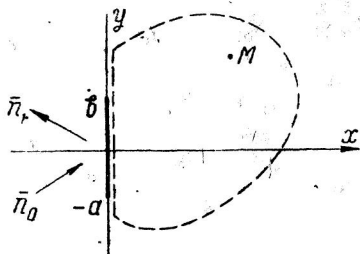


Рис. 18

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-\infty}^{-a} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \int_b^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta \right\} = \\ &= -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta + \\ &\quad + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Первый интеграл можно вычислить, пользуясь приемом, примененным к вычислению интеграла (1. 35)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta = \\ &= e^{iky \sin \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikv \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + v^2}) dv = \\ &= \frac{2e^{iky \sin \alpha}}{i} \int_0^{\infty} J_0(\kappa_1 R \sin \alpha) \frac{e^{ik\sqrt{R_1^2 + x^2}}}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} R_1 dR_1 \end{aligned}$$



Далее, в интеграле Зоммерфельда

$$\int_0^{\infty} J_0(\theta\lambda) \frac{e^{-a\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{i\nu\sqrt{a^2 + \theta^2}}}{\sqrt{a^2 + \theta^2}}$$

путь интегрирования проходит ниже особой точки  $\lambda = \nu$ , поэтому его можно переместить в область  $\text{Im}\nu > 0$ , не изменяя величины интеграла; согласно этому сделаем подстановку  $\nu = ix$ , ( $x > 0$ )

$$\int_0^{\infty} J_0(\theta\lambda) \frac{e^{-a\sqrt{\lambda^2 + x^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{-x\sqrt{a^2 + \theta^2}}}{\sqrt{a^2 + \theta^2}} \quad (1.51)$$

Сделав вторую подстановку  $a = ik_1$ , получим

$$\int_0^{\infty} J_0(\theta\lambda) \frac{e^{-ik_1\sqrt{\lambda^2 + x^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{-ix\sqrt{k_1^2 - \theta^2}}}{i\sqrt{k_1^2 - \theta^2}}; \quad (1.52)$$

или, изменив знак мнимой части,

$$\int_0^{\infty} J_0(\theta\lambda) \frac{e^{ik_1\sqrt{\lambda^2 + x^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{ix\sqrt{k_1^2 - \theta^2}}}{-i\sqrt{k_1^2 - \theta^2}}. \quad (1.53)^*$$

Применяя последнее равенство, находим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta = 2e^{iky \sin \alpha} \frac{e^{ikx \cos \alpha}}{\kappa \cos \alpha}.$$

Таким образом, как и следовало ожидать из физических соображений, первое слагаемое формулы (1.50)

$$-\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta = e^{iky \sin \alpha} e^{ikx \cos \alpha} = \psi_0.$$

Второе слагаемое формулы (1.50) соответствует значению  $\psi$ , даваемому ф-лой (1.27), взятому с обратным знаком (принцип Бабине).

Если сзади щели ( $x > 0$ ) будет поле  $\psi_{щ}$ , то сзади полосы

$$\psi_{\text{полосы}} = \psi_0 - \psi_{щ}. \quad (1.55)$$

\* Равенства (1.52) и (1.53), подобно равенству (1.37), следует рассматривать как предельные.

Отсюда вытекает, что полюсу можно заменить соответствующей совокупностью источников, интенсивность которых равна интенсивности падающего поля, а фаза — противоположна.

Впереди полосы будут также наблюдаться дифракционные явления. Для вычисления  $\psi$  помещаем поверхность интегрирования  $s$  впереди полосы (рис. 17). Подобно уравнению (1.47) напишем

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\text{отр}} \frac{e^{i\kappa r}}{r} d\xi = \\ &= \psi_0 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b e^{i\kappa\eta \sin\alpha} H_0^{(1)}(\kappa\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Изменим направление оси  $x$  на  $180^\circ$ , сделав подстановку  $x = -x_1$ , тогда

$$\psi = \psi_0 - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_a^b e^{i\kappa\eta \sin\alpha} H_0^{(1)}(\kappa\sqrt{x_1^2 + (y-\eta)^2}) d\eta. \quad (1.57)$$

Второе слагаемое ф-лы (1.57) в точности соответствует (1.27). Таким образом свет, отраженный от полосы, дифрагирует так же, как свет от зеркального изображения источника, прошедший сквозь щель в экране, расположенную на месте полосы (рис. 19).

#### 4. ДИФРАКЦИЯ ОТ ЦИЛИНДРА

Пусть на бесконечно длинный, идеально отражающий круговой цилиндр радиуса  $a$ , ось которого совпадает с осью  $z$  (рис. 20), падает плоская волна

$$\psi = e^{-i\omega t} e^{-i\kappa x} = e^{-i\omega t} e^{-i\kappa R \cos \varphi}. \quad (1.58)$$



Рис. 19

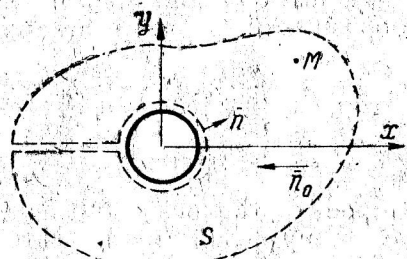


Рис. 20

При расчете дифракции на щели мы принимали, что в плоскости щели  $\psi = \psi_0$ , т. е. соответствует неискаженной падающей волне. Далее, при расчете дифракции от полосы было принято,

что величина отраженной волны  $\psi_{\text{отр}}$  на отражающей поверхности полосы соответствует величине падающей волны, т. е.

$$\psi = \psi_0. \quad (1.59)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем считать, что всегда у освещенной стороны отражающей поверхности, независимо от ее формы, выполняется соотношение (1.59). В действительности, это соотношение будет выполняться точно только при  $\lambda \rightarrow 0$ ; оно будет достаточно точным, если  $\lambda$  достаточно мала. Достаточную малость можно определить лишь сравнением с данными опыта или строгой теории. Равенство (1.59) можно было бы написать в несколько более общем виде

$$\psi_{\text{отр}} = e^{i\delta} \psi_0,$$

где  $e^{i\delta}$  — некоторый фазовый множитель, учитывающий, что при отражении фаза волны может измениться. Однако, поскольку в теории Кирхгофа не имеется средств для определения этого множителя, мы его будем опускать. У неосвещенной части поверхности отражающего тела будем считать  $\psi = 0$ .

В случае дифракции от цилиндра выбираем поверхность интегрирования  $s$ , как показано на рис. 20. Одна часть облегает поверхность цилиндра, другая часть относится в бесконечность. Интегрирование будем производить только по той части  $s$ , которая покрывает освещенную сторону цилиндра.

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi} \int_s \dots ds.$$

В дальнейшем слагаемое  $\psi_0$  будем опускать, т. е. вычислять в точке  $M$  только ту часть поля, которую посылает отражающее тело. Согласно сказанному, будем находить

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ \psi_{\text{отр}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right\} ds.$$

Обозначим координаты точки на поверхности цилиндра через  $a, \varphi_1, \zeta$ ; координаты точки наблюдения через  $R, \varphi, 0$ ; обозначим еще (рис. 21):

$$\rho = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos(\varphi_1 - \varphi)} \approx R - a \cos(\varphi_1 - \varphi) \approx R.$$

Тогда

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos(\varphi_1 - \varphi) + \zeta^2} = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{a - R \cos(\varphi_1 - \varphi)}{r} \approx -\frac{R \cos(\varphi_1 - \varphi)}{r}.$$

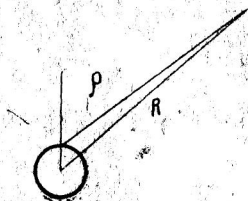


Рис. 21

Считая, что радиус цилиндра  $a \gg \lambda$ , получим (рис. 5):

$$\psi_{\text{отр}} \Big|_{R=a} \approx e^{-ika \cos \varphi_1} \frac{e^{ik(r_1 - 0'N)}}{\sqrt{r_1}} \sqrt{0'N} \Big|_{R=a} = e^{-ika \cos \varphi_1};$$

$$\frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial n} \Big|_{R=a} \approx e^{-ika \cos \varphi_1} \frac{ike^{ik(r_1 - 0'N)}}{\sqrt{r_1}} \sqrt{0'N} \cos \varphi_1 \Big|_{R=a} =$$

$$= ike^{-ika \cos \varphi_1} \cos \varphi_1.$$

Таким образом для достаточно больших расстояний получаем

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i\kappa a \cos \varphi_1} \frac{e^{i\kappa r}}{r} i\kappa \frac{R \cos(\varphi_1 - \varphi)}{r} - \frac{e^{i\kappa r}}{r} i\kappa e^{-i\kappa a \cos \varphi_1} \cos \varphi_1 \right] d\zeta =$$

$$= \frac{i\kappa a}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\kappa a \cos \varphi_1} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} \left[ \cos \varphi_1 + \frac{R \cos(\varphi_1 - \varphi)}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} \right] d\zeta. \quad (I.60)$$

Первый из внутренних интегралов выражается через функцию Ханкеля

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa \rho \sqrt{1 + \tau^2}}}{\sqrt{1 + \tau^2}} d\tau = \pi i H_0^{(1)}(\kappa \rho).$$

Для второго из внутренних интегралов найдем выражение, справедливое при  $\kappa \rho \gg 1$

$$I_2 = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}}{\rho^2 + \zeta^2} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa \rho \sqrt{1 + \tau^2}}}{1 + \tau^2} d\tau.$$

Замечаем, что  $\frac{\partial I_2}{\partial(\kappa \rho)} = iI_1 = -\pi H_0^{(1)}(\kappa \rho)$ , следовательно,

$$I_2 = -\pi \int_{\infty}^{\kappa \rho} H_0^{(1)}(z) dz = -\pi \left\{ H_1^{(1)}(\kappa \rho) + \frac{H_2^{(1)}(\kappa \rho)}{\kappa \rho} + \dots \right\} \approx -\pi H_1^{(1)}(\kappa \rho)$$

Нам остается вычислить интеграл

$$\varphi = \frac{i\kappa a}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\kappa a \cos \varphi_1} \left[ \pi i H_0^{(1)}(\kappa \rho) \cos \varphi_1 - \frac{R}{\rho} \cos(\varphi_1 - \varphi) \pi H_1^{(1)}(\kappa \rho) \right] d\varphi_1 \approx$$

$$= \frac{i\kappa a}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\kappa a \cos \varphi_1} \left[ i \cos \varphi_1 H_0^{(1)}(\kappa \rho) - \cos(\varphi_1 - \varphi) H_1^{(1)}(\kappa \rho) \right] d\varphi_1. \quad (I.61)$$

Применяя еще раз условие  $\kappa r \gg 1$ , напишем

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{i\kappa a}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{i\kappa a \cos \varphi} \left[ i \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{2} - \cos(\varphi_1 - \varphi))} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i(\kappa r - \frac{3\pi}{4})} \right] d\varphi_1 = \\
 &= \frac{i\kappa a}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-i\kappa a \cos \varphi} \left[ i \cos \varphi_1 e^{i\kappa R} + i \cos(\varphi_1 - \varphi) e^{i\kappa R} \right] d\varphi_1 = \\
 &= \frac{-\kappa a}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{i\kappa a \cos \varphi} e^{i\kappa [R - a \cos(\varphi_1 - \varphi)]} \left[ \cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi) \right] d\varphi_1 = \\
 &= -\frac{\kappa a \cos \frac{\varphi}{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i\kappa R} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-i2\kappa a \cos^2 \frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} \cos\left(\varphi_1 - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi_1. \quad (I.62)
 \end{aligned}$$

Последний интеграл в конечном виде через известные функции не выражается; подстановкой  $\varphi_1 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} = \beta$  он приводится к виду

$$I = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\pi - \frac{\varphi}{2}} e^{-ip \sin \beta} \sin \beta d\beta, \quad p = 2\kappa a \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (I.63)$$

Так как

$$e^{-ip \sin \beta} = J_0(p) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_{2n}(p) \cos 2n\beta - i J_{2n-1}(p) \sin(2n-1)\beta \right\},$$

то интеграл  $I$  представляется в виде ряда по цилиндрическим функциям

$$I = 2 \cos \frac{\varphi}{2} J_0(p) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(p) \frac{\cos n\varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} + 2n \sin n\varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{4n^2 - 1} - \pi i J_1(p). \quad (I.64)$$

Для больших углов  $|\varphi| \cong \pi$ , величина  $p \ll 1$ , и

$$I = 2 \cos \frac{\varphi}{2} - i\pi p = 2 \cos \frac{\varphi}{2} (1 - i\pi \kappa a). \quad (I.65)$$

При большом радиусе цилиндра  $\kappa a \gg 1$  и не слишком больших углах  $p \gg 1$ ; при этом

$$\left. \begin{aligned}
 J(p) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \cos\left(p - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
 J_{2n}(p) &\cong (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \cos\left(p - \frac{\pi}{4}\right),
 \end{aligned} \right\} \quad (I.66)$$

$$\left. \begin{aligned} 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\varphi}{4n^2 - 1} &= 2 - \pi \cos \frac{\varphi}{2}, \\ 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n \sin n\varphi}{4n^2 - 1} &= -\pi \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (I.66)$$

Из равенств (I. 64) и (I. 66) получаем

$$I \cong \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \left\{ 2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left( p - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( p - \frac{\pi}{4} \right) \left[ \left( \pi \cos \frac{\varphi}{2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2 \right) \cos \frac{\varphi}{2} + \pi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] + \pi i \sin \left( p - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \left| \cos \left( p - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ \left. - i \pi \sin \left( p - \frac{\pi}{4} \right) \right|. \quad (I.67)$$

Подстановка (I. 67) в (I. 62) дает

$$\psi = -\frac{\kappa a \cos \frac{\varphi}{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i\kappa R} e^{-i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \pi e^{-i \left( p - \frac{\pi}{4} \right)}$$

или, учитывая (I. 63),

$$\psi = \sqrt{\frac{a}{2R}} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{i\kappa R} e^{-i 2\kappa a \cos \frac{\varphi}{2}}. \quad (I.68)$$

Асимптотическая формула (I. 68) ( $\kappa a \gg 1$ ) за исключением фазовых множителей совпадает с формулой, полученной средствами геометрической оптики.

$$|\psi|^2 = \frac{a}{2R} \cos \frac{\varphi}{2} = \Psi.$$

Таким образом с увеличением радиуса цилиндра  $\psi$  растет пропорционально  $\sqrt{a}$ . Однако, если мы возьмем не слишком большое  $a$ , зависимость  $\psi$  от  $a$  не будет монотонной.

Рассмотрим, например случай  $\varphi = 0$

$$I_{\varphi=0} = \int_0^{\pi} e^{-ip_0 \sin \beta} \sin \beta d\beta. \quad (I.69)$$

Функция Струве нулевого порядка представляется интегралом

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \sin zt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \sin \beta) d\beta = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(z \sin \beta) d\beta.$$

Производная от  $H_0(z)$  равна

$$H_0'(z) = \frac{2}{\pi} - H_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \beta) \sin \beta d\beta,$$

следовательно,

$$I_{\varphi=0} = \int_0^{\pi} \cos(p_0 \sin \beta) \sin \beta d\beta - i \int_0^{\pi} \sin(p_0 \sin \beta) \sin \beta d\beta = \\ = 2 - \pi H_1(p_0) - i \pi J_1(p_0); p_0 = 2ka. \quad (1.71)$$

Асимптотическое выражение формулы (1.71) имеет вид

$$I_{\varphi=0} = \left\{ -\frac{1}{p_0^2} + \frac{1^2 \cdot 3}{p_0^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{p_0^6} + \dots \right\} + \pi \sqrt{\frac{2}{\pi p_0}} e^{-i(p_0 - \frac{\pi}{4})} \\ \left\{ 1 - \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8p_0)^2} + \dots \right\} + \\ + \pi \sqrt{\frac{2}{\pi p_0}} e^{i(p_0 - \frac{\pi}{4})} \left\{ \frac{4-1^2}{118p_0} - \dots \right\}, \quad (1.72)$$

откуда следует немонотонность зависимости  $\psi$  от  $a$ . Физической причиной этого является интерференция излучения вторичных источников Гюйгенса на поверхности цилиндра. В области  $|\varphi| \cong \pi$  (1.65) и (1.62) дают другую зависимость  $\psi$  от  $a$

$$\psi \cong i \sqrt{2\pi} (ka)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (1.73)$$

### 5. ДИФРАКЦИЯ ОТ ШАРА

Пусть на шар радиуса  $a$ , центр которого совпадает с началом координат, падает плоская волна

$$\psi_0 = e^{-i\omega t} e^{-ikz} = e^{-i\omega t} e^{-ikr \cos \vartheta}. \quad (1.74)$$

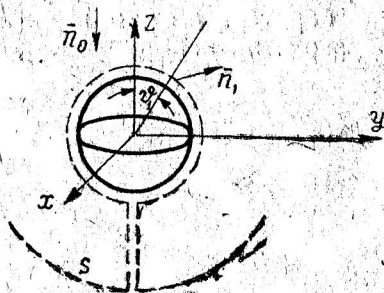


Рис. 22

Выбирая поверхность интегрирования  $s$ , как показано на рис. 22, будем вычислять

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} a d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \psi_{\text{отр}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr} \partial \psi_{\text{отр}}}{r \partial n} \right\} a \sin \vartheta_1 d\varphi_1. \quad (I.75)$$

Координаты точки на  $s$  обозначим через  $a$ ,  $\varphi_1$ ,  $\vartheta_1$  и координаты точки наблюдения через  $R$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$ . Для больших расстояний  $R \gg a$ , согласно теореме косинусов сферической тригонометрии, можем написать

$$\left. \begin{aligned} r &\cong R - a [\cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)], \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{\partial r}{\partial a} = - [\cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)]. \end{aligned} \right\} (I.76)$$

Применяя результаты геометрической оптики, примем на поверхности шара:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\text{отр}} \Big|_{R=a} &= e^{-ika \cos \vartheta_1}, \\ \frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial n} \Big|_{R=a} &\approx i\kappa e^{-ika \cos \vartheta_1} \cos \vartheta_1. \end{aligned} \right\} (I.77)$$

Подставляя (I.76) и (I.77) в формулу (I.75), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{4\pi} \int_0^{\pi/2} e^{i\kappa a \cos \vartheta_1} d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{e^{i\kappa R}}{r} i\kappa [\cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{e^{i\kappa R}}{r} i\kappa \cos \vartheta_1 \right\} \sin \vartheta_1 d\varphi_1 = \\ & \cong i\kappa \frac{a^2 e^{i\kappa R}}{4\pi R} \int_0^{\pi/2} e^{-i\kappa a \cos \vartheta_1} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} e^{-i\kappa a [\cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)]} \\ & \quad \times [(\cos \vartheta + 1) \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)] d\varphi_1. \end{aligned} \quad (I.78)$$

Полученный интеграл в общем виде через известные функции, повидимому, не берется. Можно вычислить его мнимую часть следующим образом: интегрируя по  $\varphi_1$ , находим

$$\begin{aligned} \psi &= i\kappa \frac{a^2 e^{i\kappa R}}{4\pi R} \int_0^{\pi/2} e^{-i\kappa a \cos \vartheta_1} \sin \vartheta_1 e^{-i\kappa a \cos \vartheta \cos \vartheta_1} \left\{ (\cos \vartheta + 1) \cos \vartheta_1 \cdot 2\pi J_0(\kappa a \sin \vartheta \sin \vartheta_1) - \right. \\ & \quad \left. - i \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cdot 2\pi J_1(\kappa a \sin \vartheta \sin \vartheta_1) \right\} d\vartheta_1 = \\ & \cong i\kappa \frac{a^2 e^{i\kappa R}}{R} \int_0^{\pi/2} e^{-i2\kappa a \cos^2 \vartheta_1 \cos \vartheta} \cos \frac{\vartheta_1}{2} \left\{ \cos \frac{\vartheta_1}{2} J_0(\kappa a \sin \vartheta \sin \vartheta_1) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 - \right. \\ & \quad \left. - i \sin \frac{\vartheta_1}{2} J_1(\kappa a \sin \vartheta \sin \vartheta_1) \sin^2 \vartheta_1 \right\} d\vartheta_1. \end{aligned} \quad (I.79)$$



Через  $J_0$  и  $J_1$  обозначаем цилиндрические функции нулевого и первого порядков. Мнимую часть интеграла (1.79)

$$\begin{aligned}
 Im = & -\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\kappa a \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta_1) J_0(\kappa a \sin \vartheta_1 \cdot \sin \vartheta) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 d\vartheta_1 - \\
 & -\cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\kappa a \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta_1) J_1(\kappa a \sin \vartheta \sin \vartheta_1) \sin^2 \vartheta_1 d\vartheta_1,
 \end{aligned} \quad (1.80)$$

приведем к интегралу Солина

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_p(x \cos \alpha) J_q(y \sin \alpha) \cos^{p+1} \alpha \sin^{q+1} \alpha d\alpha = \\
 & = \frac{x^p y^q}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{p+q+1}} J_{p+q+1}(\sqrt{x^2 + y^2}),
 \end{aligned} \quad (1.81)$$

если заменим синус и косинус от сложного аргумента в (1.80) через цилиндрические функции по формулам:

$$\sin t = \sqrt{\frac{\pi t}{2}} J_{1/2}(t); \quad \cos t = \sqrt{\frac{\pi t}{2}} J_{3/2}(t). \quad (1.82)$$

При этом получим

$$Im = -\frac{1}{2\kappa a} \left[ \cos\left(2\kappa a \cos \frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\sin\left(2\kappa a \cos \frac{\vartheta}{2}\right)}{2\kappa a \cos \frac{\vartheta}{2}} \right]. \quad (1.83)$$

Соответствующая часть  $\psi$  примет вид

$$\psi_{Im} = -\frac{a}{2R} e^{i\kappa R} \left[ \cos\left(2\kappa a \cos \frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\sin\left(2\kappa a \cos \frac{\vartheta}{2}\right)}{2\kappa a \cos \frac{\vartheta}{2}} \right]. \quad (1.84)$$

Квадрат „амплитуды“ осциллирующей функции (1.84), равный  $a^2/4R$ , совпадает с величиной интенсивности  $\Psi$ , найденной нами выше средствами геометрической оптики.

Действительную часть интеграла (1.79) нам вычислить не удалось. Вычисление можно провести при  $\vartheta = 0$ , что соответ-

ствует направлению оси  $z$ , т. е. направлению на источник приходящих волн. Полагая  $\vartheta = 0$ , из формулы (1.79) получим:

$$\begin{aligned} \psi_{\vartheta=0} &= ik \frac{a^2 e^{ikR}}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2ka \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{a}{2R} e^{ikR} \left[ e^{-i2ka} \left( \frac{i}{2ka} - 1 \right) - \frac{i}{2ka} \right] = \\ &= -\frac{a}{2R} e^{ikR} e^{-i2ka} \left[ 1 - \frac{i}{2ka} + \frac{ie^{i2ka}}{2ka} \right]; \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$|\psi|_{\vartheta=0} = \frac{a}{2R} \sqrt{1 - \frac{\sin 2ka}{ka} + \frac{1 - \cos 2ka}{2(ka)^2}} \quad (1.86)$$

Поскольку формулы (1.77) справедливы при  $a \gg \lambda$ , т. е. при  $ka \gg 1$ , вместо (1.85) напомним

$$\psi_{\vartheta=0} = -\frac{a}{2R} e^{ikR} \left[ 1 - \frac{\sin 2ka}{2ka} \right] e^{-i2ka} \quad (1.87)$$

Для случая  $\vartheta = \pi$ , т. е. в окрестности тени, из (1.79) можно получить

$$\psi_{\vartheta=\pi} = \frac{2(ka)^3}{3kR} e^{ikR} \left[ 1 + \frac{3i}{4ka} \right] \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (1.88)$$

Здесь отметим кубическую зависимость  $\psi$  от  $a$  при фиксированной  $\vartheta$ .

## ГЛАВА II

### ВЕКТОРИЗОВАННЫЕ ФОРМЫ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА

#### 6. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Формула Кирхгофа не учитывает поляризацию поля, т. е. его векторный характер, и это затрудняет применение формулы к решению задач дифракции электромагнитных волн.

Падающее поле может быть поляризовано различным образом по отношению к экрану и в зависимости от поляризации поля дифракционные явления будут протекать различным образом.

Электромагнитное поле описывается векторными величинами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (или векторными потенциалами  $\vec{Z}$  и  $\vec{Z}^*$ ) и фактически необходимо решить с выполнением соответствующих граничных условий вытекающее из уравнений Максвелла векторное волновое уравнение

$$\nabla^2 \vec{f} + k^2 \vec{f} = 0,$$

где под  $\vec{f}$  понимается один из названных векторов. Это уравнение эквивалентно системе из трех скалярных волновых уравнений для компонент  $\vec{f}$  по координатам, которые в общем случае нельзя решить отдельно, ибо переменные не разделяются. Формула Кирхгофа является решением одного скалярного уравнения  $\Delta \psi + k^2 \psi = 0$  и, строго говоря, не может помочь в решении поставленной задачи.

Можно делать попытки в качестве величины  $\psi$  в формуле Кирхгофа рассматривать одну из компонент вектора  $\vec{E}$  (или  $\vec{H}$ ). Тогда и в дифрагированном поле будет определена только эта компонента. Далее появляются непреодолимые затруднения: если считать остальные две компоненты равными нулю, уравнения Максвелла окажутся нарушенными; если же поставить задачу отыскания остальных компонент, то оказывается, что для ее решения не имеется достаточных данных. Можно также в качестве  $\psi$  рассматривать одну из компонент векторного потенциала и затем находить векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  известными операциями дифференцирования. Однако в этом случае результат будет зависеть от того, какую из компонент векторного потенциала мы выбираем за исходную; результат будет также зависеть от того,

какой именно векторный потенциал применяется: электрический или магнитный.

Несмотря на указанные трудности, такие попытки все же делаются<sup>1)</sup>, так как метод нахождения дифрагированного поля при помощи формулы Кирхгофа очень прост, а получающаяся при этом ошибка может быть при благоприятных условиях<sup>2)</sup> сравнительно небольшой. Ниже будет проведено сравнение результатов, полученных при помощи формулы Кирхгофа в предыдущей главе, с более точными решениями.

Рассмотрим теперь более точные методы решения, в которых учитывается векторный характер электромагнитного поля. Эти методы являются логическим развитием теории Кирхгофа и имеют с ней общие черты: 1) величина дифрагированного поля в данной точке дается интегралом по замкнутой поверхности, окружающей данную точку, причем функция, стоящая под интегралом, определяется величиной поля и соответствующими производными; 2) при фактическом выполнении вычислений дифракционные искажения падающего поля на поверхности интегрирования не учитываются. Иначе говоря, уточнением является учет векторного характера вторичных источников Гюйгенса.

Выражения для подинтегральных функций даются различными авторами в различной форме, хотя они и должны совпадать по величине в каждой точке поверхности интегрирования; последнее следует из произвольности выбора поверхности интегрирования и однозначности решения. Все же, с точки зрения вычислительной практики, эти формулы могут быть неравноценными. В дальнейшем мы еще вернемся к этому вопросу.

## 7. ФОРМУЛЫ СТРЕТТОНА И ЧУ

Один из путей уточнения результата, получаемого применением формулы Кирхгофа, указали Стрэттон и Чу. Вывод основной формулы они [5] основывают на векторном аналоге теоремы Грина

$$\int_V \{ \bar{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{P} - \bar{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{Q} \} dv = \int_S \{ [\bar{P} \operatorname{rot} \bar{Q}] - [\bar{Q} \operatorname{rot} \bar{P}] \} \bar{n} ds, \quad (\text{II.1})$$

получаемом ими приложением формулы Гаусса—Остроградского к вектору  $[\bar{P} \operatorname{rot} \bar{Q}]$ , ( $\bar{n}$ —внешняя нормаль к поверхности). Авторы пишут уравнения электромагнитного поля в виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} + i \omega \varepsilon \bar{E} &= \bar{j} \\ \operatorname{rot} \bar{E} - i \omega \mu \bar{H} &= -\bar{j}^* \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{E} &= \rho / \varepsilon \\ \operatorname{div} \bar{H} &= \rho^* / \mu \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

<sup>1)</sup> Ряд новых результатов получен, таким образом, А. А. Пистолькорсом в серии работ, опубликованных за последние четыре года (в Журнале технической физики и других).

<sup>2)</sup> Например, в случае дифракции от щели в достаточно большом плоском экране.

Фиктивные  $\bar{j}^*$  — плотность магнитного тока и  $\rho^*$  — плотность магнитного заряда вводятся для того, чтобы получить возможность рассматривать разрывы тангенциальной компоненты  $\bar{E}$ , запрещаемые уравнениями Максвелла. К уравнениям (II. 2) добавляются:

$$\operatorname{div} \bar{j} = i \omega \rho; \quad \operatorname{div} \bar{j}^* = i \omega \rho^*. \quad (\text{II.3})$$

Из уравнений (II. 2) следует:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E} - \kappa^2 \bar{E} &= i \omega \mu \bar{j} - \operatorname{rot} \bar{j}^* \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H} - \kappa^2 \bar{H} &= i \omega \varepsilon \bar{j}^* + \operatorname{rot} \bar{j} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{II.4})$$

где  $\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ .

Полагая в (II. 1)  $\bar{P} = \bar{E}$ ,  $\bar{Q} = \varphi \bar{a}$ ,  $\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}$ ,

где  $\bar{a}$  — постоянный вектор произвольного направления,  $r$  — расстояние от элемента поверхности  $ds$  до точки наблюдения, и проведя несложные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} & \int_v \left\{ i \omega \mu \bar{j} \varphi - [\bar{j}^* \operatorname{grad} \varphi] + \rho^* \operatorname{grad} \varphi \right\} dv = \\ & = \int_s \left\{ i \omega \mu [\bar{n} \bar{H}] \varphi + [\bar{n} \bar{E}] \operatorname{grad} \varphi + \bar{n} \bar{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right\} ds, \quad (\text{II.5}) \end{aligned}$$

Формула (II. 5) справедлива при условии аналитичности под интегральных функций; так как функция  $\varphi$  этому условию не удовлетворяет при  $r=0$ , то в объеме интегрирования следует вырезать сферу  $\Sigma$  малого радиуса с центром в точке наблюдения, а к интегралу по поверхности  $s$  добавить интеграл по поверхности сферы  $\Sigma$ . Так же, как и при выводе формулы Кирхгофа, уменьшая радиус сферы до нуля, получим поле в точке наблюдения

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -\frac{1}{4\pi} \int_v \left\{ i \omega \mu \bar{j} \varphi - [\bar{j}^* \operatorname{grad} \varphi] + \rho^* \operatorname{grad} \varphi \right\} dv - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ i \omega \mu [\bar{n} \bar{H}] \varphi + [\bar{n} \bar{E}] \operatorname{grad} \varphi + \bar{n} \bar{E} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right\} ds. \quad (\text{II.6}) \end{aligned}$$

Проводя аналогичные выкладки, или используя симметрию уравнений (II. 2) и просто сделав соответствующие замены в (II. 6), можно получить

$$\begin{aligned} \bar{H} = & -\frac{1}{4\pi} \int_v \left\{ i\omega \varepsilon \bar{j} \varphi + [\bar{j} \operatorname{grad} \varphi] + \rho^*/\mu \operatorname{grad} \varphi \right\} dv + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ i\omega \varepsilon [\bar{n} \bar{E}] \varphi - [\bar{n} \bar{H}] \operatorname{grad} \varphi - \bar{n} \bar{H} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right\} ds. \quad (\text{II. 7}) \end{aligned}$$

По поводу формул (II. 6) и (II. 7) Стрэттон и Чу замечают, что они эквивалентны формулам, полученным ранее Игнатовским [15]. Величины  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ , даваемые (II. 6) и (II. 7), удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Так как поверхность интегрирования  $s$  обычно выбирается таким образом, чтобы внутри нее отсутствовали экраны, то внутри объема  $v$   $\rho = \rho^* = \bar{j} = \bar{j} = \bar{j} = 0$ . При этом получают искомые формулы:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ i\omega \mu [\bar{n} \bar{H}] \varphi - [\bar{n} \bar{E}] \operatorname{grad} \varphi + \bar{n} \bar{E} \operatorname{grad} \varphi \right\} ds, \quad (\text{II. 8})$$

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ i\omega \varepsilon [\bar{n} \bar{E}] \varphi - [\bar{n} \bar{H}] \operatorname{grad} \varphi - \bar{n} \bar{H} \operatorname{grad} \varphi \right\} ds. \quad (\text{II. 9})$$

Можно исключить  $\bar{H}$  из (II. 8) на основании (II. 2) и рассматривать получаемую при этом формулу

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ [\bar{n} \operatorname{rot} \bar{E}] \varphi + [[\bar{n} \bar{E}] \operatorname{grad} \varphi] + \bar{n} \bar{E} \operatorname{grad} \varphi \right\} ds. \quad (\text{II. 10})$$

как решение волнового уравнения  $\nabla^2 \bar{E} + \kappa^2 \bar{E} = 0$ ; однако это, по видимому, не представляет практического интереса (то же и в отношении  $\bar{H}$ ).

Если, определить теперь поверхностные плотности:

$$\left. \begin{aligned} \text{электрического тока} \quad \bar{j} &= -[\bar{n} \bar{H}], \\ \text{электрического заряда} \quad \sigma &= -\varepsilon \bar{n} \bar{E}, \\ \text{магнитного тока} \quad \bar{j}^* &= [\bar{n} \bar{E}], \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 11})$$

и подставить (II. 11) в (II. 8), то получится

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi} \int_s \left\{ -i\omega \mu \bar{j} \varphi + [\bar{j}^* \operatorname{grad} \varphi] + \frac{\sigma}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varphi \right\} ds \quad (\text{II. 12})$$

и аналогичное уравнение для  $\bar{H}$ .

Значения  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ , найденные по формулам Стрэттона и Чу (II.8), (II.9) и (II.12), удовлетворяют уравнениям Максвелла. Для случая дифракции от отверстия Стрэттон и Чу приводят формулу (II.12) к виду

$$\bar{E} = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{4\pi} \oint_C \text{grad } \varphi \bar{H} d\bar{l} - \quad (\text{II.13})$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ i\omega\mu [\bar{n} \bar{H}] \varphi + [[\bar{n} \bar{E}] \text{grad } \varphi] + \bar{n} \bar{E} \cdot \text{grad } \varphi \right\} ds$$

учитывая, что на границе отверстия (контур  $C$ ), токи  $\bar{j}$  и  $\bar{j}^*$  будут претерпевать разрыв, если считать, что на теневой стороне экрана  $\bar{E} = \bar{H} = 0$ . Авторы замечают, что формула (II.13) совершенно идентична формуле Коттлера [16]:

$$4\pi \bar{E} = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \oint_C \bar{H} \text{grad } \varphi \cdot d\bar{l} + \oint_C \varphi [\bar{E} d\bar{l}] - \int_{S_1} \left\{ \bar{E} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \bar{E}}{\partial n} \right\} ds. \quad (\text{II.14})$$

Аналогично получается формула для магнитного поля

$$4\pi \bar{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \oint_C \bar{E} \text{grad } \varphi \cdot d\bar{l} + \int_{S_1} \left\{ i\omega\epsilon [\bar{n} \bar{E}] \varphi - [[\bar{n} \bar{H}] \text{grad } \varphi] - \bar{n} \bar{H} \cdot \text{grad } \varphi \right\} ds = \frac{1}{i\omega\mu} \oint_C \bar{E} \text{grad } \varphi \cdot d\bar{l} + \oint_C \varphi [\bar{H} d\bar{l}] - \int_{S_1} \left\{ \bar{H} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \bar{H}}{\partial n} \right\} ds. \quad (\text{II.15})$$

Значения  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ , даваемые формулами (II.14) и (II.15), также удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Сравнивая с формулой Кирхгофа (II.2), например, формулу (II.10), можно заметить, как именно отражается на решении векторный характер поля.

Не останавливаясь на выводе формул (II.14) и (II.15), мы сделаем относительно них одно замечание: поскольку формулы содержат интегралы по границам отверстия, где падающее поле искажено влиянием экрана более всего, постольку на первый взгляд может показаться, что это отрицательно отразится на точности результата. На самом же деле, точность будет такой же, как и при вычислении по формулам, в которые входят толь-

ко поверхностные интегралы, так как в последних интегрирование производится по всей площади отверстия, следовательно, и по участкам, сколь угодно близким к границам, что означает, что фактически принимается та же степень приближения. Возможность преобразования формы (II. 12) к (II. 14) подтверждает это однозначным образом.

В заключение этого раздела заметим, что классический метод получения формул (II. 8) и (II. 9) делает очевидным их преимущество по отношению к формуле Кирхгофа, аналогичную преимуществу последней по отношению к известной формуле теории потенциала ( $\kappa = 0$ ). Сравнивая вывод формул (II. 8), (II. 9) с выводом формулы Кирхгофа (см. § 5), замечаем, что разница заключается в применении (II. 1) вместо теоремы Грина и функций  $\frac{-e^{ikr}}{r}$  вместо  $\frac{e^{ikr}}{r}$ . Поэтому мы считаем возможным называть (II. 8) и (II. 9) векторизованными формами интеграла Кирхгофа.

### 8. РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Иным путем рекомендуется решать задачи о дифракции электромагнитных волн в ряде работ Щелкунова [6, 17, 18], а именно — при помощи принципа эквивалентности. Доказательство принципа эквивалентности и более общей теоремы индукции можно найти в указанных работах Щелкунова.

В 1901 г. Лав (*Love A. E.*) открыл [19] следующий принцип эквивалентности: „поле в свободной от источников области  $v$ , ограниченной поверхностью  $s$ , может быть произведено электрическими и магнитными токами, распределенными по этой поверхности, и в этом смысле действительные источники поля можно

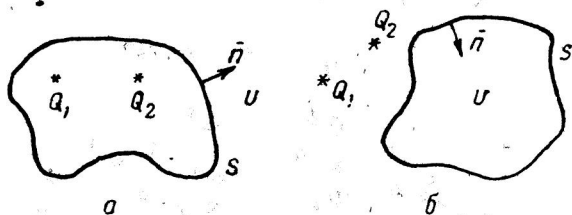


Рис. 23

заменить „эквивалентными“ поверхностными токами“. Плотности поверхностных токов определяются по формулам:

$$\vec{j} = [n\vec{H}^i], \quad \vec{j}^* = [\vec{E}^i n], \quad (\text{II. 16})$$

где:  $\vec{E}^i, \vec{H}^i$  — поле на поверхности  $s$ , создаваемое действительными источниками  $Q$ ;  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности  $s$ , направленная внутрь области  $v$ .

Область  $v$  может быть неограниченной (рис. 23а) или ограниченной (рис. 23б); выбор поверхности  $s$  производится в зависимости от решаемой задачи.



Вычислив эквивалентные поверхностные токи  $\bar{j}$  и  $\bar{j}^*$  по формулам (II. 16), можно найти создаваемые ими магнитный векторный потенциал

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int_s \bar{j} \frac{e^{ikr}}{r} ds. \quad (\text{II.17})$$

и электрический векторный потенциал

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi} \int_s \bar{j}^* \frac{e^{ikr}}{r} ds \quad (\text{II.18})$$

и, наконец, вычислить поле:

$$\bar{E} = i\omega\mu\bar{A} - \frac{1}{i\omega\varepsilon} \text{grad div } \bar{A} - \text{rot } \bar{F}, \quad (\text{II.19})$$

$$\bar{H} = \text{rot } \bar{A} - \frac{1}{i\omega\mu} \text{grad div } \bar{F} + i\omega\varepsilon\bar{F}. \quad (\text{II.20})$$

Можно показать, что результаты проведенных таким образом вычислений будут совпадать с результатами, полученными по формулам Стрэттона и Чу. В самом деле, применяя обозначения волновой функции  $\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}$  и скалярного потенциала

$$u = \frac{\text{div } A}{i\omega\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_s \sigma\varphi ds,$$

из формул (II. 17), (II. 18) и (II. 19) получаем

$$\bar{E} = i\omega\mu \frac{1}{4\pi} \int_s \bar{j}\varphi ds - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \text{grad}_1 \int_s \sigma\varphi ds - \frac{1}{4\pi} \text{rot}_1 \int_s (\varphi\bar{j}^*) ds. \quad (\text{II.21})$$

Так как дифференцирование производится по координатам точки наблюдения, то

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{grad}_1 \int_s \sigma\varphi ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_s \text{grad}_1 (\sigma\varphi) ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_s \sigma \text{grad}_1 \varphi ds,$$

$$\text{rot}_1 \int_s (\varphi\bar{j}^*) ds = \int_s \text{rot}_1 (\varphi\bar{j}^*) ds = \int_s [\text{grad}_1 \varphi \bar{j}^*] ds,$$

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi} \int_s i\omega\mu \bar{j}\varphi ds - \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{grad}_1 \varphi ds + \frac{1}{4\pi} \int_s [\bar{j}^* \text{grad}_1 \varphi] ds. \quad (\text{II.22})$$

Формула (II. 22) совпадает с формулой Стрэттона и Чу. Другой знак у слагаемых, содержащих градиент, получился в формуле (II. 22) вследствие того, что при выводе последней мы дифференцировали по координатам точки наблюдения, что отмечено индексом 1.

Таким образом оба метода решения дают один и тот же результат. Как замечает Шелкунов [17], преимущество принципа эквивалентности заключается в том, что помимо своей эвристической роли он сокращает математическую работу. Нам кажется, что с этим мнением следует согласиться, так как при вычислении поля по формуле (II. 19) необходимо найти только два интеграла  $\bar{A}$  и  $\bar{F}$ , тогда как в формулу (II. 22) входят три интеграла того же типа. Как видно из предыдущей главы, интегралы даже при простых задачах могут быть довольно сложными. Правда, в формулу (II. 19) входят дифференциальные операторы, но дифференцирование, как правило, всегда проще интегрирования.

В следующих разделах этой главы мы будем находить решения, применяя принцип эквивалентности. Вместо формул (II. 19) и (II. 20) мы будем применять формулы (II. 27) и (II. 28), получающиеся из (II. 19) и (II. 20) следующим несложным преобразованием.

Так как нас интересуют величины с гармонической зависимостью от времени, то магнитный векторный потенциал можем заменить на электрический вектор Герца,

$$\bar{A} = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial t} = -i\omega \bar{Z} \quad (\text{II.23})$$

и электрический векторный потенциал — на магнитный вектор Герца

$$\bar{F} = \frac{\partial \bar{Z}^*}{\partial t} = -i\omega \bar{Z}^* \quad (\text{II.24})$$

Тогда интеграл от электрических токов даст электрический вектор Герца

$$\bar{Z} = \frac{i}{4\pi\omega} \int \bar{j} \frac{e^{ikr}}{r} ds, \quad (\text{II.25})$$

а интеграл от магнитных токов даст магнитный вектор Герца

$$\bar{Z}^* = \frac{1}{4\pi\omega} \int \bar{j}^* \frac{e^{ikr}}{r} ds. \quad (\text{II.26})$$

Вместо формул (II. 19) и (II. 20) получаем:

$$\bar{E} = \frac{k^2}{\epsilon} \bar{Z} + \frac{1}{\epsilon} \text{grad div } \bar{Z} + i \omega \text{rot } \bar{Z}^*, \quad (\text{II.27})$$

$$\bar{H} = \frac{k^2}{\mu} \bar{Z}^* + \frac{1}{\mu} \text{grad div } \bar{Z}^* - i \omega \text{rot } \bar{Z}. \quad (\text{II.28})$$

При применении векторов Герца, повидимому, лучше отне-  
нется происхождение векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  от электрических или  
магнитных токов.

Как в формулировке принципа эквивалентности, так и в вы-  
воде Стрэттона и Чу вводится понятие магнитных токов. При-  
менение в физической теории фиктивных величин, хотя бы и  
удобных для математического анализа, оставляет некоторую не-  
удовлетворенность, поскольку их физическое содержание оста-  
ется не раскрытым. В своей работе [17] Щелкунов останавливается  
на вопросе о физическом содержании понятия „магнитного тока“,  
распределенного в пространстве, но не для случая поверхност-  
ного магнитного тока. Другие авторы довольствуются формаль-  
ным определением „магнитного тока“. В руководствах по тео-  
рии электромагнитного поля этот вопрос не затрагивается, по-  
видимому, исключением является новая книга Щелкунова [18].  
Поэтому мы считаем уместным остановиться на этом вопросе.

## 9. О ФИЗИЧЕСКОМ СОДЕРЖАНИИ ТЕРМИНА „ЛИСТОК МАГНИТНОГО ТОКА“

В процессе развития естествознания, и в частности физики,  
первично введенные понятия и отражающие их термины или от-  
мирают, или наполняются новым содержанием; по мере расши-  
рения объема знания появляются новые понятия и новые термины.

Так, в настоящее время уже не употребляются такие терми-  
ны как „электрическая жидкость“, „магнитная жидкость“ и пр.  
Однако некоторые термины, выражающие фиктивные, или ус-  
ловные, понятия до сих пор сохранились и некоторые из них  
способствуют представлению картины реального электромагнит-  
ного поля. К ним можно отнести термины „магнитный заряд“,  
„магнитная проводимость“, „магнитный ток“, „магнитный диполь“  
и др.

В качестве магнитного диполя обычно представляется эле-  
ментарная рамка электрического тока. Замена элементарной  
рамки магнитным диполем дает возможность упростить анализ  
и известным образом привести в соответствие различные фор-  
мулы для поля рамки с формулами для поля электрического  
диполя [9]. Совокупность магнитных диполей с общей осью мо-

жет рассматриваться как линейный магнитный ток (рис. 24а). Наоборот, линейный магнитный ток можно разложить на магнитные диполи, то-есть на элементарные рамки.

Рассмотрим теперь некоторую плоскую поверхность, обтекаемую магнитным током — листок магнитного тока. Разобьем его на элементы — магнитные диполи (элементарные рамки). Токи в прилегающих одна к другой сторонах (перпендикулярных к плоскости листка) соседних рамок—элементов (рис. 24,б) взаимно компенсируются и остается действие токов только в тех

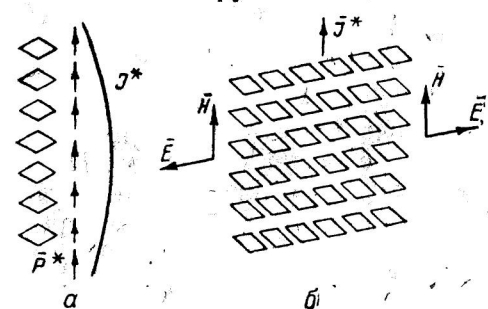


Рис. 24

сторонах рамок, которые параллельны плоскости листка. Эти стороны рамок образуют два листка электрического тока, разделенные бесконечно-малым расстоянием, токи в которых направлены в противоположные стороны. Отсюда следует, что листок магнитного тока представляет собой не что иное, как двойной листок электрического тока.

Таким образом вместо терминов „магнитный диполь“ и „листок магнитного тока“ можно применять эквивалентные по содержанию термины „элементарная рамка“ и „двойной листок электрического тока“.

Если на участке некоторой поверхности одновременно имеются слой электрического тока и слой магнитного тока, причем векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{j}^*$  перпендикулярны, то можно так подобрать их величины, что их поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  с одной стороны поверхности будут складываться, а с другой стороны — взаимно уничтожаться.

Окружим какой-либо источник поля, например, полуволновый вибратор, поверхностью  $s$ , проходящей от него на достаточно большом расстоянии и совпадающей с волновым фронтом.

Выделим в качестве вторичного источника Гюйгенса элемент поверхности  $s$  и построим систему сферических координат так, чтобы начало отсчета углов  $\varphi$  совпадало с направлением  $\vec{j}$ , а начало отсчета углов  $\vartheta$  совпадало с  $\vec{n}$  (рис. 25). Такой элемент поверхности  $ds$  будет излучать как комбинация взаимно-перпендикулярных электрического и магнитного диполей. Поле электрического диполя на расстоянии  $r \gg \lambda$

$$E = E_0 \sin \alpha,$$

где

$$E_0 = 120 \pi \frac{\kappa j (dl)^2}{4 \pi r}; \quad \cos \alpha = \cos \varphi \sin \vartheta.$$

Компоненты поля диполя по координатам:

$$E_{\varphi} = E_0 \sin \varphi; \quad E_{\vartheta} = E_0 \cos \varphi \cos \vartheta.$$

Поле элементарной рамки

$$E = E_0 \sin \beta,$$

где  $E_0$  — та же величина, что и у электрического диполя, если выполняется равенство  $j^* = 120 \pi j$ ;  $\cos \beta = \sin \varphi \sin \vartheta$ .

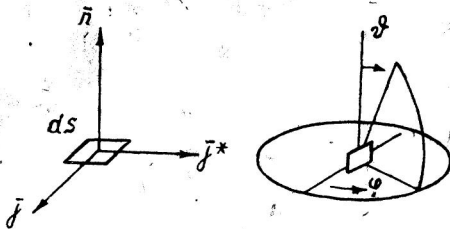


Рис. 25

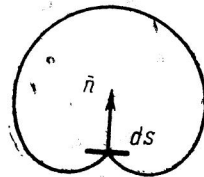


Рис. 26

Компоненты поля рамки по координатам

$$E_{\varphi} = E_0 \sin \varphi \cos \vartheta; \quad E_{\vartheta} = E_0 \cos \varphi.$$

Суммарное поле от диполя и рамки:

$$E_{\varphi} = E_0 \sin \varphi (1 + \cos \vartheta),$$

$$E_{\vartheta} = E_0 \cos \varphi (1 + \cos \vartheta),$$

$$|\bar{E}| = \sqrt{E_{\varphi}^2 + E_{\vartheta}^2} = E_0 (1 + \cos \vartheta).$$

Таким образом диаграмма излучения элемента поверхности  $ds$  является телом вращения, образованного вращением кардиоиды  $(1 + \cos \vartheta)$  вокруг нормали  $\bar{n}$  к поверхности (рис. 26). Излучение назад отсутствует. Если поверхность  $s$  недостаточно удалена от вибратора, то ее элементы будут излучать и в направлении на вибратор.

## 10. ДИФРАКЦИЯ ОТ ПОЛОСЫ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

Пусть бесконечно-длинная, исчезающей толщины полоса ограничена линиями  $y = -a$  и  $y = a$  (рис. 18). Направление падающей волны лежит в плоскости  $xoy$  и составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$

$$\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-i\omega t} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}$$

Рассмотрим два случая поляризации падающей волны.

**1 случай.**  $\bar{E}_0 \parallel \bar{z}^0$  — вектор электрического поля падающей волны параллелен краю полосы.

В этом случае поле падающей волны можно записать уравнениями ( $e^{-i\omega t}$  опускаем):

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, & E_x &= E_y = 0, \\ H_x &= H_0 \sin \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_y &= -H_0 \cos \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, & H_z &= 0 \end{aligned} \right| \quad (\text{II.29})$$

Примем, что непосредственно у поверхности полосы отраженное поле будет таким, как при  $\lambda \rightarrow 0$ , тогда можем написать:

$$\left. \begin{aligned} E_{z \text{ отр}} &= -E_0 e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_{x \text{ отр}} &= -H_0 \sin \alpha e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_{y \text{ отр}} &= -H_0 \cos \alpha e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \end{aligned} \right|_{x=0} \quad (\text{II.30})$$

Выберем поверхность интегрирования  $s$  так, как показано на рис. 27. Части 3—4 и 7—6 поверхности  $s$  считаем примыкающими друг к другу; сумма интегралов по этим частям равна нулю вследствие противоположного направления их нормалей. Слагаемые, определяемые на  $s$  падающей волной (II.29), учитывать не будем, так как после интегрирования они опять в качестве слагаемого дадут (II.29). Интеграл по части 4—5—6 рассматривать не будем, предполагая отнести эту часть на бесконечность. Остается рассмотреть интегралы по частям 1—2, 2—3, 7—1.

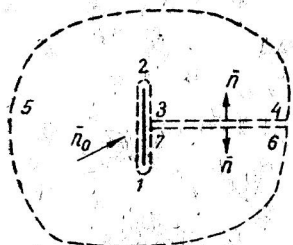


Рис. 27

На освещенной стороне 1—2 отраженное поле мы записали уравнениями (II.30). Что касается теневой стороны 2—3, 7—1, то здесь мы примем, что непосредственно у поверхности экрана имеется полная тень, получающаяся вследствие того, что на поле (II.29) падающей волны накладывается поле, противоположное по знаку, но равной ему величины, и излучаемое теневой стороной экрана:

$$\left. \begin{aligned} E_{z \text{ отр}} &= -E_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_{x \text{ отр}} &= -H_0 \sin \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_{y \text{ отр}} &= H_0 \cos \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \end{aligned} \right|_{x=0} \quad (\text{II.31})$$

Электрическое поле (II.30) на части 1—2 поверхности  $s$  определит магнитный ток плотности

$$\bar{j}^* = [\bar{E}_{z \text{ отр}} \bar{n}], \quad j^* = j_y^* = E_0 e^{iky \sin \alpha} \quad (\text{II.32})$$

Электрическое поле (II.31) на части 2—3, 7—1 поверхности определит магнитный ток плотности

$$\bar{j}^* = [\bar{E}_z \text{отр } \bar{n}]; \quad 'j^* = 'j_y^* = -E_0 e^{iky \sin \alpha}. \quad (\text{II.33})$$

Так как толщина полосы исчезающе мала, то действие магнитных токов (II.32) и (II.33) будет взаимно компенсироваться: суммарный магнитный вектор Герца равен нулю. Далее, компоненты магнитного поля дадут: на освещенной стороне

$$\bar{j} = [\bar{n} \bar{H}_y \text{отр}]; \quad j = j_z = H_0 \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}; \quad (\text{II.34})$$

на теневой стороне

$$\bar{j} = [\bar{n} \bar{H}_y \text{отр}]; \quad 'j = 'j_z = H_0 \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}. \quad (\text{II.35})$$

Таким образом поле, дифрагированное от полосы, можно рассматривать как поле листка электрического тока с плотностью

$$j = j_z = 2H_0 \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}. \quad (\text{II.36})$$

Поскольку электрический вектор Герца будет иметь, так же как и ток, только компоненту по  $z$ , то напомним по (II.25)

$$Z = Z_z = \frac{i}{4\pi\omega} 2H_0 \cos \alpha \int_{-a}^a e^{ik\eta \sin \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta d\eta,$$

здесь

$$r = \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2}.$$

Внутренний интеграл выражается через функцию Ханкеля нулевого порядка и мы приходим к формуле

$$Z_z = -\frac{H_0 \cos \alpha}{2\omega} \int_{-a}^a e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta. \quad (\text{II.38})$$

Полученный интеграл (II.38) был подробно рассмотрен в предыдущей главе, поэтому здесь промежуточные выкладки опускаем. Так как в данном случае  $\text{div } \bar{Z} = \frac{dZ_z}{dz} = 0$ , то из (II.27) следует

$$E = E_z = \frac{\kappa^2}{\varepsilon} Z_z = -\frac{\kappa E_0}{2} \cos \alpha \int_{-a}^a e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta. \quad (\text{II.39})$$

Полагая  $a = b$  и рассматривая достаточно большие расстояния, получим в полярных координатах

$$E = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_0 \cos \alpha \frac{e^{i\kappa R} \sin [\kappa a (\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sqrt{\kappa R} \sin \alpha - \sin \varphi} e^{-i\frac{3\pi}{4}}. \quad (\text{II.40})$$

Более точная формула будет содержать интегралы Френеля.

Полагая в (II. 39)  $b=0$  и  $a=\infty$ , получим для случая полуплоскости  $y < 0$

$$E = -\frac{\kappa E_0}{2} \cos \alpha \int_{-\infty}^0 e^{i\kappa \eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta. \quad (\text{II.41})$$

Этот интеграл также рассматривался в предыдущей главе; при малых углах дифракции ( $y \ll x$ ) он приводится к формуле (при  $\alpha = 0$ )

$$E = E_0 \frac{e^{i\kappa R \cos \varphi}}{2} \left[ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2\sqrt{\frac{\kappa R}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right], \quad (\text{II.42})$$

где

$$F_1(u) = \int_0^u e^{i\frac{\pi t^2}{2}} dt.$$

Отметим, что вследствие сделанного выбора поверхности интегрирования  $s$ , формулы (II.40) и (II.42) справедливы для любого значения азимута.

**2 случай.**  $\vec{H} \parallel z$  — вектор магнитного поля падающей волны параллелен краю полосы.

В этом случае поле падающей волны можно записать так:

$$H_z = H_0 e^{i\kappa(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}; \quad H_x = H_y = 0; \quad (\text{II.43})$$

$$E_x = -E_0 \sin \alpha e^{i\kappa(x \cos \alpha + y \sin \alpha)};$$

$$E_y = E_0 \cos \alpha e^{i\kappa(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}; \quad E_z = 0.$$

У освещенной стороны полосы отраженное поле определим аналогично первому случаю:

$$\left. \begin{aligned} H_{z \text{ отр}} &= H_0 e^{i\kappa(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ E_{x \text{ отр}} &= -E_0 \sin \alpha e^{i\kappa(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ E_{y \text{ отр}} &= -E_0 \cos \alpha e^{i\kappa(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \end{aligned} \right|_{x=0} \quad (\text{II.44})$$



С теневой стороны экрана:

$$\left. \begin{aligned} H_{z \text{ отр}} &= -H_0 e^{i\kappa(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \\ E_{x \text{ отр}} &= E_0 \sin \alpha e^{i\kappa(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \\ E_{y \text{ отр}} &= -E_0 \cos \alpha e^{i\kappa(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \end{aligned} \right|_{x=0} \quad (\text{II.45})$$

Магнитные поля (II.44) и (II.45) дадут в совокупности электрический ток плотности

$$j = j_y = 2H_0 e^{i\kappa y \sin \alpha} \quad (\text{II.46})$$

Электрическое поле (II.44) определит магнитный ток плотности

$$\bar{j}^* = [\bar{E}_{\text{отр}} \bar{n}]; \quad j_z^* = j_z^* = E_0 \cos \alpha e^{i\kappa y \sin \alpha} \quad (\text{II.47})$$

Электрическое поле (II.45) определит магнитный ток плотности

$$\bar{j}^* = [\bar{E}'_{\text{отр}} \bar{n}], \quad j_z^* = j_z^* = -E_0 \cos \alpha e^{i\kappa y \sin \alpha} \quad (\text{II.48})$$

Таким образом, как и в первом случае, магнитные токи компенсируются и магнитный вектор Герца  $\bar{Z}^* = 0$ .

Очевидно, что магнитный вектор Герца всегда будет равен нулю при дифракции от бесконечно-тонкого экрана (не обязательно плоского), если поле, излучаемое экраном, определять именно таким образом, как это было сделано выше:

$$\left. \begin{aligned} \text{на освещенной стороне} \quad \begin{cases} E_{t \text{ отр}} = -E_{t \text{ пад}}, & E_{n \text{ отр}} = E_{n \text{ пад}}, \\ H_{t \text{ отр}} = H_{t \text{ пад}}, & H_{n \text{ отр}} = -H_{n \text{ пад}}, \end{cases} \\ \text{на теневой стороне} \quad \begin{cases} \bar{E}_{\text{отр}} = -\bar{E}_{\text{пад}}, & \bar{H}_{\text{отр}} = -\bar{H}_{\text{пад}} \end{cases} \end{aligned} \right| \quad (\text{II.49})$$

Плотность электрического тока определяется при этом по формуле

$$\bar{j} = 2[\bar{n} \bar{H}_{\text{пад}}] \quad (\text{II.50})$$

В дальнейших задачах мы будем сразу заменять экран листком электрического тока с плотностью, определяемой по формуле (II.50).

Формулу (II.50) можно получить, не пользуясь принципом эквивалентности, а просто исходя из условий на границе идеального проводника в предположении слабой искривленности его поверхности. Именно так поступает в своей работе [20] А. И. Узков; где ему удалось исследовать работу параболического зеркала при источнике, смещенном из фокуса.

Так как в рассматриваемом здесь случае ток (II.46) имеет только одну компоненту  $j_y$ , то и вектор Герца имеет только одну компоненту

$$Z = Z_y = \frac{i}{4\pi\omega} 2 H_0 \int_{-a}^b e^{ik\eta \sin \alpha} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta, \quad (\text{II.51})$$

Отсюда находим для дифрагированного поля

$$\begin{aligned} H = H_z &= \frac{H_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b e^{ik\eta \sin \alpha} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta = \\ &= \frac{i}{2} H_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(\kappa \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta. \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Формула (II.52) для магнитного поля с точностью до амплитудного множителя  $H_0$  совпадает с формулой (I.56), полученной в предыдущей главе для скалярной волны  $\psi$  [см. также формулу (I.27)].

Для очень больших расстояний наблюдения  $R \gg a$ , при  $a = b$  получим

$$H = \sqrt{\frac{2}{\pi}} H_0 \frac{e^{ikR}}{\sqrt{\kappa R}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin[\kappa a (\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \cos \varphi. \quad (\text{II.53})$$

Из формулы (II.53), на основании второго уравнения Максвелла, получим

$$E_x = E_\varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_0 \frac{e^{ikR}}{\sqrt{\kappa R}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin[\kappa a (\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \cos \varphi; \quad (\text{II.54})$$

$$E_x \ll E_\varphi, \quad E_z = 0.$$

Формулы более точные, чем (II.53) и (II.54), будут содержать интегралы Френеля.

Для случая полуплоскости ( $a = \infty$ ,  $b = 0$ ,  $\alpha = 0$ , формула (II.52) дает (при  $y \ll x$ ):

$$H = -H_0 \frac{e^{ikR \cos \varphi}}{2} \left[ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa R}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right]; \quad (\text{II.55})$$

$$E_\varphi \approx -E_0 \frac{e^{ikR \cos \varphi}}{2} \left[ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa R}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \cos \varphi, \quad (\text{II.56})$$

$$\begin{aligned} E_x \approx -E_0 \frac{e^{ikR \cos \varphi}}{2} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa R}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \sin \varphi + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\kappa R}} e^{i 2\kappa R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

$$E_z = 0$$

## 11. ДИФРАКЦИЯ ОТ ЦИЛИНДРА

Рассмотрим дифракцию от кругового идеально-проводящего цилиндра неограниченной длины, ось которого совпадает с осью  $z$  цилиндрической системы координат  $R, \varphi, z$ , а радиус равен  $a$ . Так же, как и в предыдущем параграфе, рассмотрим два случая поляризации падающей волны, направление прихода которой будет считать нормальным к оси  $z$ .

1 случай.  $\vec{E} \parallel \vec{z}^0$ . Поле падающей волны запишем уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_0 e^{-ikR \cos \varphi}; E_R = E_\varphi = 0; \\ H_R &= H_0 \sin \varphi e^{-ikR \cos \varphi}; \\ H_\varphi &= H_0 \cos \varphi e^{-ikR \cos \varphi}; H_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.58})$$

Плотность электрического тока на освещенной стороне цилиндра

$$j = j_z = 2H_\varphi = 2H_0 \cos \varphi e^{-ik a \cos \varphi}. \quad (\text{II.59})$$

Электрический вектор Герца

$$\begin{aligned} Z = Z_z &= \frac{i}{4\pi\omega} \int j_z \frac{e^{i\kappa r}}{r} dS = \frac{2i H_0}{4\pi\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi_1 e^{-i\kappa a \cos \varphi_1} \frac{e^{i\kappa r}}{r} d\zeta = \\ &= \frac{a H_0}{2\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_1 e^{-i\kappa a \cos \varphi_1} H_0^{(1)}(\kappa \rho) d\varphi_1, \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

где  $\rho \approx R - a \cos(\varphi_1 - \varphi)$ . Полагая  $\kappa \rho \gg 1$ , на основании асимптотического представления функции Ханкеля, получим

$$Z = -\frac{a H_0}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i\kappa R} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_1 e^{-i\kappa a [\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)]} d\varphi_1, \quad (\text{II.61})$$

В данном случае  $\text{div } \vec{Z} = \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$

$$E = E_z = \frac{\kappa^2}{\epsilon} Z_z = -\frac{\kappa E_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i\kappa R} e^{-i\frac{\pi}{4}} \alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\kappa a \cos \frac{\varphi}{2} \cos(\varphi_1 - \frac{\varphi}{2})) \cos \varphi_1 d\varphi_1, \quad (\text{II.62})$$

Сделаем подстановку  $\varphi_1 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} = \beta$ ,  $d\varphi_1 = d\beta$ , тогда получим:

$$E = -\frac{\kappa E_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i\kappa R} e^{-i\frac{\pi}{4}} \alpha \left[ 2 \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\sin(p \sin \varphi/2)}{p} + \cos \frac{\varphi}{2} I(p, \varphi) \right], \quad (\text{II.63})$$

$$\text{где: } \varphi = 2\kappa a \cos \frac{\varphi}{2}, \quad I(p, \varphi) = \int_{-\varphi/2}^{\pi-\varphi/2} e^{-i p \sin \beta} \sin \beta d\beta. \quad (\text{II.64})$$

Интеграл (II.64) был рассмотрен нами в предыдущей главе; он представляется в виде ряда по цилиндрическим функциям. При  $p \gg 1$

$$I(p, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \pi e^{-i(p - \frac{\pi}{4})}; \quad (\text{II.65})$$

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\kappa E_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i\kappa R} \alpha \left[ \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\sin(\kappa a \sin \varphi)}{\kappa a \cos \varphi/2} + \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa a \cos \varphi/2}} e^{-i2\kappa a \cos \varphi/2} \right] = \\ &\approx -E_0 \sqrt{\frac{a}{2R}} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{i\kappa R} e^{-i2\kappa a \cos \varphi/2} \end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

Формула (II.66) совпадает с точностью до амплитудного множителя  $E_0$  с формулой (I.68), полученной методом Кирхгофа.

Рассмотрим два частных случая. При  $\varphi = 0$  из (II.63) получим

$$E = -E_0 \frac{e^{i\kappa R} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi \kappa R}} \kappa a \left[ 2 - \pi H_1(2\kappa a) - i\pi J_1(2\kappa a) \right], \quad (\text{II.67})$$

где  $J_1$  — цилиндрическая функция первого порядка.

$H_1$  — функция Струве первого порядка.

Метод Кирхгофа дает формулу, совпадающую с формулой (II.67). При  $\varphi \approx \pi$ :  $p \ll 1$ ,  $I(p, \varphi) \approx 2\cos \frac{\varphi}{2} \cdot (1 - i\pi \kappa a)$ ; формула (II.63)

дает при этом

$$E = -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \kappa a \left[ 1 - i\pi \kappa a \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right],$$

откуда при  $\varphi = \pi$  имеем

$$E = -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\kappa R}}{\sqrt{\kappa R}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \kappa a; \quad (\text{II.68})$$

по методу Кирхгофа — при  $\varphi = \pi$  функция  $\psi \approx 0$ , как это следует из формулы (I.73).

**2 случай.**  $\vec{H}_0 \parallel \vec{z}^0$

Поле падающей волны запишем уравнениями:

$$\begin{aligned} E_y &= -E_0 \sin \varphi e^{-i\kappa R \cos \varphi}; \\ E_\varphi &= -E_0 \cos \varphi e^{-i\kappa R \cos \varphi}; \quad E_z = 0; \\ H_z &= H_0 e^{-i\kappa R \cos \varphi}; \quad H_R = H_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

Плотность электрического тока на освещенной стороне цилиндра

$$\vec{j} = \vec{j}_\varphi = -2H_0 e^{-i\kappa a \cos \varphi}. \quad (\text{II.70})$$

Электрический вектор Герца будет иметь две компоненты

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{i}{4\pi\omega} \int_s \bar{J} \frac{e^{ikr}}{r} ds = \\ &= -\frac{iH_0}{2\pi\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\bar{R}^0 \sin(\varphi_1 - \varphi) + \bar{\varphi}^0 \cos(\varphi_1 - \varphi)] e^{-ik\alpha \cos \varphi_1} a d\varphi_1 \int \frac{e^{ikr}}{r} dz = \\ &= \frac{iH_0 a}{2\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\bar{R}^0 \sin(\varphi_1 - \varphi) + \bar{\varphi}^0 \cos(\varphi_1 - \varphi)] e^{-ik\alpha \cos \varphi_1} H_0^{(1)}(kr) d\varphi_1, \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

где:  $\bar{R}^0, \bar{\varphi}^0$  — единичные векторы,  $\rho \approx R - a \cos(\varphi_1 - \varphi)$ .

Полагая  $kr \gg 1$  и заменяя функцию Ханкеля асимптотическим выражением, получим

$$\bar{z} = -\frac{iH_0 a}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\bar{R}^0 \sin(\varphi_1 - \varphi) + \bar{\varphi}^0 \cos(\varphi_1 - \varphi)] e^{-ik\alpha [\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)]} d\varphi_1. \quad (\text{II.72})$$

Так как  $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$ , то магнитное поле

$$H = H_z = -\frac{i\omega}{R} \left[ \frac{\partial(RZ_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial Z_{R\varphi}}{\partial \varphi} \right] \approx -i\omega \frac{\partial Z_\varphi}{\partial R}. \quad (\text{II.73})$$

Подставляя (II.72) в (II.73), получим

$$H \approx -H_0 \frac{ik\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi_1 - \varphi) e^{-ik\alpha [\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)]} d\varphi_1 \quad (\text{II.74})$$

или, в другой форме

$$\begin{aligned} H &= -H_0 \frac{ik\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\varphi/2}^{\pi - \varphi/2} e^{-i2k\alpha \cos \varphi/2 \sin \beta} \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) d\beta = \\ &= -H_0 \frac{ik\alpha}{\sqrt{2\pi k R}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[ -2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\sin(p \sin \varphi/2)}{p} + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot J(p, \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Здесь обозначения те же, что и в формуле (II.63).

При  $p \gg 1$

$$H = -iH_0 \sqrt{\frac{a}{2R}} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{ikR} e^{-i2k\alpha \cos \frac{\varphi}{2}} \quad (\text{II.76})$$

и, согласно второму уравнению Максвелла

$$E = E_\varphi = iE_0 \sqrt{\frac{a}{2R}} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{ikR} e^{-i2k\alpha \cos \frac{\varphi}{2}} \quad (\text{II.77})$$

Таким образом, сравнивая (II.66) и (II.77), заключаем, что при достаточно большом радиусе цилиндра, точнее — при  $2ka \cos \frac{\varphi}{2} \gg 1$ , интенсивность отраженного поля не зависит от поляризации падающего поля.

При  $\varphi=0$  формула (II.75) переходит в формулу (II.67). При  $\varphi \approx \pi$ ,  $p \ll 1$ , из (II.75) получим:

$$H \approx -iH_0 \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{\kappa R}}} e^{-i\frac{\pi}{4} \kappa a \cos \varphi}, \quad (II.78)$$

$$E = E_{\varphi} \approx iE_0 \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{\kappa R}}} e^{-i\frac{\pi}{4} \kappa a \cos \varphi}. \quad (II.79)$$

Формула (II.79) отличается от формулы (II.68) множителем  $\cos \varphi$  и при  $\varphi=\pi$  дает ту же величину поля.

## 12. ДИФРАКЦИЯ ОТ ШАРА.

Пусть на шар радиуса  $a$ , центр которого совпадает с началом координат, падает плоская волна, электрическое поле которой параллельно оси  $x$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-ikz}$$

Магнитное поле падающей волны  $H = H_y$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-ikz}. \quad (II.80)$$

или, в сферических координатах:

$$H_r = -H_0 \sin \varphi \sin \vartheta e^{-ikr \cos \vartheta},$$

$$H_{\varphi} = -H_0 \cos \varphi e^{-ikr \cos \vartheta}, \quad (II.81)$$

$$H_{\vartheta} = -H_0 \sin \varphi \cos \vartheta e^{-ikr \cos \vartheta}.$$

Плотность электрического тока на освещенной стороне шара

$$\left. \begin{aligned} \vec{j} &= 2[n\vec{H}], \\ j_r &= 0, \\ j_{\varphi} &= -2H_0 \sin \varphi_1 \cos \vartheta_1 e^{-ika \cos \vartheta_1} \\ j_{\vartheta} &= 2H_0 \cos \varphi_1 e^{-ika \cos \vartheta_1} \end{aligned} \right\} \quad (II.82)$$

Линии тока на поверхности шара не сходятся в одну точку, как могло бы показаться с первого взгляда, но лежат в плоскос-

тях  $y = \text{const}$  (рис. 28). Компоненты плотности тока в прямоугольных координатах:

$$\left. \begin{aligned} j_x &= 2H_0 \cos \vartheta_1 e^{-ika \cos \vartheta}, & j_y &= 0, \\ j_z &= -2H_0 \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1 e^{-ika \cos \vartheta_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.83})$$

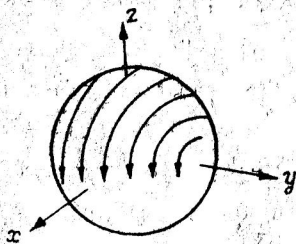


Рис. 28

Электрический вектор Герца

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z} &= \frac{i}{4\pi\omega} \int_S \bar{j} \frac{e^{ikr}}{r} ds; \\ Z_x &= \frac{iH_0}{2\pi\omega} \int_S \cos \vartheta_1 e^{-ika \cos \vartheta_1} \frac{e^{ikr}}{r} ds, & Z_y &= 0, \\ Z_z &= -\frac{iH_0}{2\pi\omega} \int_S \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1 e^{-ika \cos \vartheta_1} \frac{e^{ikr}}{r} ds. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.84})$$

Применяя обозначения координат на шаре  $a$ ,  $\varphi_1$ ,  $\vartheta_1$  и координат точки наблюдения  $R$ ,  $\varphi$ ,  $\vartheta$  для достаточно больших  $R \gg a$ , можем записать

$$\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ika [\cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)]} = \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ika \varphi}; \quad (\text{II.85})$$

тогда из (II.84) получим:

$$Z_x = \frac{iH_0}{2\pi\omega} \frac{a^2 e^{ikR}}{R} \int_0^{\pi/2} d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 e^{-ika \cos \vartheta_1} \cdot e^{-ika\varphi} d\varphi_1, \quad (\text{II.86})$$

$$Z_z = \frac{iH_0}{2\pi\omega} \frac{a^2 e^{ikR}}{R} \int_0^{\pi/2} d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} \cos \varphi_1 \sin^2 \vartheta_1 e^{-ika \cos \vartheta_1} \cdot e^{-ika\varphi} d\varphi_1. \quad (\text{II.87})$$

Компоненты вектора Герца в сферических координатах

$$\left. \begin{aligned} Z_r &= Z_x \cos \varphi \cos \vartheta + Z_z \cos \vartheta, \\ Z_\varphi &= -Z_x \sin \varphi, \\ Z_\vartheta &= Z_x \cos \varphi \cos \vartheta - Z_z \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.88})$$

Учитывая условие  $kR \gg 1$ , найдем по формуле (II.28):

$$H_{\varphi} = -i\omega \frac{\partial Z_{\vartheta}}{\partial R}; \quad H_{\vartheta} = i\omega \frac{\partial Z_{\varphi}}{\partial R} \quad (\text{II.89})$$

и затем, согласно второму уравнению Максвелла,

$$E_{\varphi} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Z_{\varphi}}{\partial R^2} = \frac{k^2}{\varepsilon} Z_{\varphi} = \frac{k^2}{\varepsilon} Z_x \sin \varphi, \quad (\text{II.90})$$

$$E_{\vartheta} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 Z_{\vartheta}}{\partial R^2} = \frac{k^2}{\varepsilon} Z_x \cos \varphi \cos \vartheta - \frac{k^2}{\varepsilon} Z_z \sin \vartheta. \quad (\text{II.91})$$

Подставляя в последние формулы значения  $Z_x$  и  $Z_z$  из (II.86) и (II.87), получим:

$$E_{\varphi} = -E_0 \frac{ika^2 e^{ikR}}{2\pi R} \sin \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 e^{i\kappa a \cos \vartheta_1} e^{-i\kappa a \varphi} d\varphi_1, \quad (\text{II.92})$$

$$E_{\vartheta} = E_0 \frac{ika^2 e^{ikR}}{2\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_1 \cos \varphi \sin^2 \vartheta_1) e^{-i\kappa a \cos \vartheta_1} e^{-i\kappa a \varphi} d\varphi_1, \quad (\text{II.93})$$

Дифрагированное электрическое поле (II.92) и (II.93) в отличие от скалярного поля  $\psi$  (I.79), вычисленного по теории Кирхгофа, зависит от азимута  $\varphi$ . Если выполнить интегрирование по  $\varphi_1$ , то получится:

$$E_{\varphi} = -E_0 \frac{ika^2 e^{ikR}}{R} \sin \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2ka \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta_1} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 J_0(ka \sin \vartheta \sin \vartheta_1) d\vartheta_1. \quad (\text{II.94})$$

$$E_{\vartheta} = E_0 \frac{ika^2 e^{ikR}}{R} \cos \varphi \left\{ \cos \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2ka \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta_1} \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 J_0(ka \sin \vartheta \sin \vartheta_1) d\vartheta_1 - \right. \\ \left. - \sin \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2ka \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta_1} \sin^2 \vartheta_1 J_1(ka \sin \vartheta \sin \vartheta_1) d\vartheta_1 \right\}. \quad (\text{II.95})$$

Интегралы, входящие в формулы (II.94) и (II.95), получаются и при решении методом Кирхгофа (см. I.79).



Положим  $\varphi=0$ ,  $\vartheta=0$ ; при этом  $E_\varphi=0$ ,

$$E_{\vartheta=0} = E_0 \frac{ika^2 e^{ikR}}{R} \int_0^{\pi/2} e^{-i2ka \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_1} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 =$$

$$= -E \frac{a}{2R} e^{ikR} e^{-i2ka} \left[ 1 + \frac{1 - e^{i2ka}}{i2ka} \right]. \quad (\text{II.96})$$

Формула (II.96) с точностью до амплитудного множителя совпадает с формулой (I.85)

При  $\varphi=0$ ,  $\vartheta=\pi$ ,

$$E = E_\vartheta = iE_0 \frac{ka^2}{2R} e^{ikR}; \quad (\text{II.97})$$

метод Кирхгофа для этого направления дает  $\psi=0$ .

### 13. ФОРМУЛА ФОКА

В последнее время В. А. Фоку удалось получить формулу, которая позволяет вычислить величину дифракционного поля более точно, чем при помощи принципа эквивалентности. В последнем случае полагается, что плотность тока на освещенной части тела связана с тангенциальной компонентой падающего магнитного поля уравнением

$$\bar{j} = 2[\bar{n}H_{\text{пад}}]$$

и что в области геометрической тени  $j=0$ , то-есть, что на границе тени плотность тока меняется скачком.

Фок дает для плотности тока вблизи границы тока следующую формулу

$$\bar{j} = [\bar{n}H_{\text{пад}}]G(\xi). \quad (\text{II.98})$$

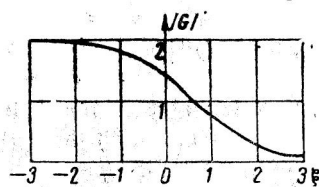


Рис. 29

Переменная  $\xi$  определяется расстоянием  $l$ , измеряемым от границы геометрической тени на поверхности тела в плоскости падения (рис. 30)

$$\xi = \frac{kl}{\sqrt{2(kR_0)^2}}, \quad (\text{II.99})$$

где  $R_0$ —радиус кривизны сечения поверхности плоскостью падения на границе геометрической тени и  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . На рис. 29

показан график зависимости модуля функции  $G(\xi)$ . При больших значениях  $\xi$ :

$$\left. \begin{aligned} G(\xi) &\approx 0, & (\xi \rightarrow \infty) \\ G(\xi) &\approx 2, & (\xi \rightarrow -\infty) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.100})$$

$\xi$  считается положительной в сторону тени и отрицательной в сторону света. Аналитически функция  $G$  представляется интегралом

$$G(\xi) = \frac{e^{i\frac{\xi^2}{3}}}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{i\xi\tau}}{W^3(\tau)} d\tau, \quad (\text{II.101})$$

который берется по контуру, идущему по прямой  $\arg\tau = \frac{2}{3}\pi$  от бесконечности к нулю и далее по вещественной оси  $\arg\tau = 0$  от нуля до бесконечности. Функция  $W(\tau)$ , стоящая в знаменателе под интегралом (II.101), представляется следующим интегралом

$$W(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{\tau z - \frac{z^3}{3}} dz. \quad (\text{II.102})$$

Здесь контур интегрирования идет по прямой  $\arg z = -\frac{2}{3}\pi$  от бесконечности до нуля и далее по вещественной оси от нуля до бесконечности.

В своей работе [21] Фок дает для функции  $G(\xi)$  таблицы для интервала значений  $-4,5 < \xi < 4,5$  и асимптотические формулы

$$\begin{aligned} G(\xi) &= 2 + \frac{i}{2\xi^3} + \dots \quad \text{при } \xi < -4,5, \\ G(\xi) &= 1,8325e^{-0,8823\xi} e^{i\left(\frac{\xi^3}{3} + 0,5094\xi\right)} \quad \text{при } \xi > 4,5, \end{aligned} \quad (\text{II.103})$$

которые выведены в предположении, что длина волны весьма мала по сравнению с размерами тела и радиусами кривизны его поверхности.

Фок применяет для определения плотности тока на поверхности тела (абсолютно проводящего) интегральное уравнение

$$\bar{j} = 2 [n \bar{H}_{\text{ннн}}] + \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{s}} \left[ n [\bar{j}_1(\bar{r} - \bar{r}_1)] \right] \frac{(1 - i\kappa R) e^{i\kappa R}}{R^3} ds, \quad (\text{I.104})$$

где  $R$  — длина хорды между двумя точками на поверхности: точкой  $\bar{r}(x, y, z)$ , для которой вычисляется интеграл, и точкой  $\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ , по координатам которой интегрируется. Ана-

лизируя уравнение (II. 104). Фок находит, что в случае слабо искривленной поверхности тела поле в области полутени имеет локальный характер и что все тела с плавно меняющейся кривизной имеют в области полутени одно и то же распределение тока, если только кривизна их в данной точке одинакова и если одинакова падающая волна. „Ширина“ полосы полутени

$$d = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi} R_0^2} = \frac{1}{\kappa} \sqrt[3]{2 (\kappa R_0)^3}, \quad (\text{II.105})$$

где  $R_0$  — радиус кривизны сечения [поверхности тела плоскостью падения (рис. 30).

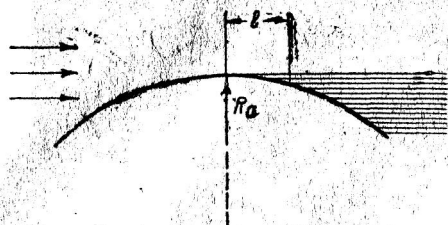


Рис. 30

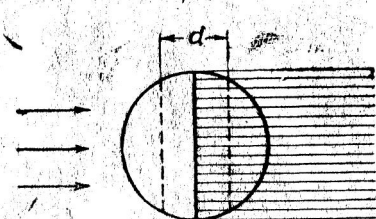


Рис. 31

В другой работе [22] Фок получает те же формулы (обобщая их на случай конечной проводимости на основании указанного М. А. Леонтовичем вида граничных условий) другим путем — методом параболического уравнения. Выводов формул Фока мы здесь не приводим ввиду их значительной сложности.

Вычислив по формуле (II. 98) плотность тока, можно найти интегрированием по поверхности тела вектор-потенциал и затем величину поля, как это было сделано в предыдущих разделах.

Таким образом приходим к формулам:

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_s \left[ \bar{n} \bar{H}_{\text{нак}} \right] G(\xi) \frac{e^{ikr}}{r} ds; \quad (\text{II.106})$$

$$\bar{E} = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \left( \kappa^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div} \right) \int_s \left[ \bar{n} \bar{H}_{\text{нак}} \right] G(\xi) \frac{e^{ikR}}{r} ds. \quad (\text{II.107})$$

Величина интегралов (II.106) и (II.107) должна находиться путем численного интегрирования.

Для того, чтобы получить некоторое представление о границах применимости формулы Фока (II. 98), рассмотрим случай дифракции от шара (рис. 31). Положим, что формула (II. 98) применима, если ширина области полутени не превышает диаметра шара

$$2l \approx 6d < 2R_0, \quad 3\sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi} R_0^2} < R_0.$$

Тогда должно быть

$$R_0 > \frac{3^3 \lambda}{\pi} \quad | \quad (II.108)$$

или

$$\kappa R_0 > 2 \cdot 3^3 = 54$$

Формулы (II.106) и (II.107) требуют большого объема вычислительной работы, поэтому применять их здесь не будем; дальнейшее их обсуждение дадим в заключительной главе.

---

### Глава III

## МЕТОД КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ. ДИФРАКЦИЯ ОТ ЦИЛИНДРА

### 14. СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ОТ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА МЕТОДОМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

В этой главе мы рассмотрим решение задачи о дифракции от кругового цилиндра неограниченной длины радиуса  $a$  методом криволинейных координат [23]. Его сущность заключается в том, что решение какой-либо задачи проводится в системе криволинейных (обычно ортогональных) координат, выбранной таким образом, чтобы поверхности раздела совпадали с некоторыми координатными поверхностями. При этом запись граничных условий так упрощается, что решение поставленной задачи облегчается самым существенным образом. Метод криволинейных координат наиболее эффективен в тех случаях, когда поверхности раздела имеют простую форму. В нашем случае следует применить, очевидно, систему цилиндрических координат  $r, \varphi, z$ .

Искомые выражения для поля дифрагированной волны должны:

а) удовлетворять уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = -i \omega \varepsilon \bar{E}; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = i \omega \mu \bar{H},$$

или векторным волновым уравнениям, вытекающим из уравнений Максвелла:

$$\nabla^2 \bar{E} + \kappa^2 \bar{E} = 0; \quad \nabla^2 \bar{H} + \kappa^2 \bar{H} = 0,$$

б) удовлетворять граничным условиям:

$$[\bar{n}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)] = 0; \quad [\bar{n}(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)] = 0,$$

где индексом 1 обозначено поле снаружи цилиндра, индексом 2 — поле внутри цилиндра;

в) на бесконечности иметь характер уходящих волн (принцип излучения).

Мы ограничимся случаем цилиндра идеальной проводимости  $g = \infty$ ; в этом случае поле внутри цилиндра  $\vec{E}_2 = \vec{H}_2 = 0$  и первое граничное условие принимает вид

$$[\bar{n} \vec{E}_1] = [\bar{n}(\vec{E}_{\text{пад}} + \vec{E}_{\text{отр}})]_{r=a} = 0. \quad (\text{III. 1})$$

Так как при идеальной проводимости на поверхности цилиндра имеется поверхностный ток с плотностью  $\vec{j}$ , то второе граничное условие принимает вид

$$[\bar{n} \vec{H}] = [\bar{n}(\vec{H}_{\text{пад}} + \vec{H}_{\text{отр}})]_{r=a} = \vec{j}. \quad (\text{III. 2})$$

При идеальной проводимости для получения однозначного решения задачи достаточно одного граничного условия (III. 1); уравнение (III. 2) служит для нахождения плотности поверхностного тока.

Выберем систему координат следующим образом (рис. 32). ось  $z$  совместим с осью цилиндра, а ось  $x$  выберем так, чтобы направление прихода падающей волны  $\vec{s}$  лежало в плоскости  $xoz$ . Вектор электрического поля  $\vec{E}$  падающей волны может быть ориентирован в плоскости фронта волны произвольным образом, поэтому разложим его на две компоненты — параллельную и перпендикулярную оси  $y$

$$\vec{E} = E_y \vec{j} + (E_x \vec{i} + E_z \vec{k}). \quad (\text{III. 3})$$

Магнитное поле  $\vec{H}$  будет представлено соответственно

$$\vec{H} = (H_x \vec{i} + H_z \vec{k}) + H_y \vec{j}. \quad (\text{III. 4})$$

Очевидно, что вместо общего случая можно рассмотреть отдельно два частных:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= E_y \vec{j}, \\ \vec{H} &= H_x \vec{j} + H_z \vec{k}, \end{aligned} \right\} (\text{III. 5}) \quad \left. \begin{aligned} \vec{E} &= E_x \vec{i} + E_z \vec{k}, \\ \vec{H} &= H_y \vec{j}. \end{aligned} \right\} (\text{III. 6})$$

В первом случае вектор электрического поля перпендикулярен оси  $z$ , во втором случае перпендикулярен оси  $z$  вектор магнитного поля. Мы будем называть их далее „случай  $\vec{E}_\perp$ “ и

случай  $H_{\perp}$ ; в первом случае  $E_z = 0$ , во втором случае  $H_z = 0$ .

Будем решать векторное волновое уравнение

$$\nabla^2 \bar{E} + \kappa^2 \bar{E} = 0, \quad (III.7)$$

эквивалентное трем скалярным уравнениям:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} + \kappa^2 E_r = \frac{1}{r^2} E_r + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \varphi}, \quad (III.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_{\varphi}}{\partial z^2} + \kappa^2 E_{\varphi} = \\ = \frac{1}{r^2} E_{\varphi} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (III.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \kappa^2 E_z = 0 \quad (III.10)$$

В уравнения (III.8) и (III.9) входят сразу две компоненты поля, что осложняет их решение, поэтому будем сначала искать решение уравнения (III.10).

Представим  $E_z$  в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной координаты

$$E_z = R(r) \Phi(\varphi) Z(z). \quad (III.11)$$

Подставляя (III.11) в (III.10), получим для функций  $R(r)$ ,  $\Phi(\varphi)$  и  $Z(z)$  обыкновенные дифференциальные уравнения [11], решением которых являются функции:

$$Z(z) = C_1 e^{ixz} + C_2 e^{-ixz}, \quad (III.12)$$

$$\Phi(\varphi) = C_3 e^{in\varphi} + C_4 e^{-in\varphi}. \quad (III.13)$$

$$R(r) = C_5 H_n^{(1)}(\kappa_k r) + C_6 H_n^{(2)}(\kappa_k r). \quad (III.14)$$

где

$$\kappa_k = \sqrt{\kappa^2 - \kappa^2}. \quad (III.15)$$

Число  $n$  нужно считать целым во избежание неоднозначности решения по координате  $\varphi$ .

Подставляя найденные выражения для  $Z$ ,  $\Phi$ ,  $R$  в (III.11) получим

$$E_z = (G_1 e^{i\kappa z} + G_2 e^{-i\kappa z}) (C_3 e^{in\varphi} + C_4 e^{-in\varphi}) [C_5 H_n^{(1)}(\kappa_k r) + C_6 H_n^{(2)}(\kappa_k r)]. \quad (\text{III.16})$$

Так как зависимость от времени принята в форме  $e^{-i\omega t}$  то для удовлетворения принципа излучения необходимо принять  $C_6 = 0$ .

Учитывая свойство функции Ханкеля  $H_n^{(1)}(x) = (-1)^n H_n^{(2)}(x)$ , запишем полное решение уравнения (III.10) в виде суммы

$$E_z = (C_1 e^{i\kappa z} + C_2 e^{-i\kappa z}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi} H_n^{(1)}(\kappa_k r). \quad (\text{III.17})$$

Если направление  $\vec{S}$  прихода падающей волны составляет угол  $\alpha$  с направлением оси  $z$  (рис. 32), то зависимость компонент поля падающей волны от координаты  $z$  будет определяться множителем  $e^{i\kappa z \cos \alpha}$ .

Так как граничные условия (III.1) для компонент вектора  $\vec{E}$  не зависят от координаты  $z$ , то получим однозначно:

$$C_2 = 0; \quad \kappa = \kappa \cos \alpha, \quad (\text{III.18})$$

$$\kappa_k = \kappa \sin \alpha. \quad (\text{III.19})$$

Вместо (III.17) можем теперь написать

$$E_z = E_0 e^{i\kappa z \cos \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa_k r) e^{in\varphi}. \quad (\text{III.20})$$

Решение (III.20) имеет вид ряда Фурье, что представляется естественным ввиду очевидной необходимости периодической зависимости от  $\varphi$ . Это замечание имеет силу и для других компонент поля, поэтому будем принимать далее зависимость от  $\varphi$  сразу в виде  $e^{in\varphi}$ .

Положим:

$$E_r = R_r Z_r e^{in\varphi}. \quad (\text{III.21})$$

$$E_\varphi = R_\varphi Z_\varphi e^{in\varphi}. \quad (\text{III.22})$$

Подставляя (III.21) и (III.22) в уравнения (III.8) и (III.9) и сокращая на  $e^{in\varphi}$ , с помощью несложных выкладок находим:

$$\frac{Z_r'}{Z_r} = \text{const}_1; \quad \frac{Z_\varphi'}{Z_\varphi} = \text{const}_2,$$



т. е. мы получим для  $Z_r$  и  $Z_\varphi$  уравнения, решением которых будет

$$Z_r = Z_\varphi = e^{ixz}. \quad (\text{III.23})$$

Из уравнения  $\text{div } \bar{E} = 0$  следует

$$\frac{\partial}{\partial r}(rR_r) + in\varphi + ixE_0A_n rH_n^{(1)}(\kappa_k r) = 0. \quad (\text{III.24})$$

Таким образом для функций  $R_r$  и  $R_\varphi$  получаем систему уравнений:

$$R_r'' + \frac{1}{r}R_r' + \left(\kappa^2 - x^2 - \frac{n^2 + 1}{r^2}\right)R_r = \frac{2in}{r^2}R_\varphi'. \quad (\text{III.25})$$

$$R_\varphi'' + \frac{1}{r}R_\varphi' + \left(\kappa^2 - x^2 - \frac{n^2 + 1}{r^2}\right)R_\varphi = -\frac{2in}{r^2}R_r'. \quad (\text{III.26})$$

Будем теперь рассматривать случай нормального падения плоской волны:  $\alpha = 90^\circ$ ,  $x = \kappa \cos \alpha = 0$ . Рассмотрение общего случая  $x \neq 0$  будет продолжено в § 16. При  $x = 0$  уравнение (III.24) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(rR_r) + inR_\varphi = 0. \quad (\text{III.27})$$

При  $n=0$  уравнения (III.27) и (III.25) дают  $R_r \equiv 0$ , при  $n \neq 0$ :

$$R_r'' + \frac{1}{r}R_r' + \left(\kappa^2 - \frac{n^2 + 1}{r^2}\right)R_r = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(rR_r)$$

или

$$R_r'' + \frac{3}{r}R_r' + \left(\kappa^2 + \frac{1-n^2}{r^2}\right)R_r = 0. \quad (\text{III.28})$$

Решением уравнения (III.28) является функция

$$\frac{H_n^{(1)}(\kappa r)}{r};$$

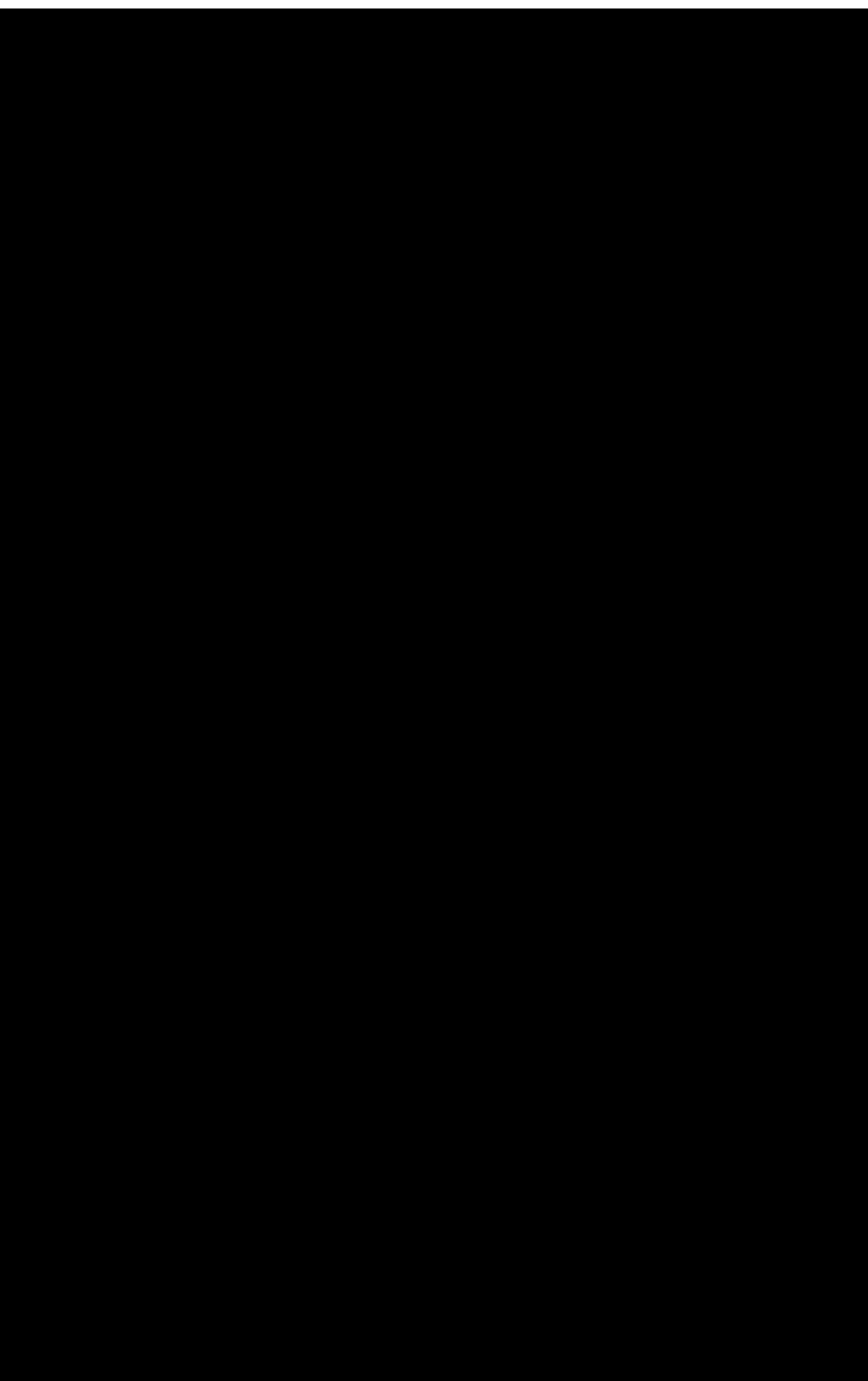
мы берем функцию Ханкеля первого рода, как и при нахождении  $E_z$ , чтобы выполнить принцип излучения.

Для получения  $R_r = 0$  при  $n=0$  и для более удобной размерности коэффициентов, в качестве частного решения (III.28) примем

$$R_r = E_0 n B_n \frac{H_n^{(1)}(\kappa r)}{\kappa r}. \quad (\text{III.29})$$

Так как при  $x=0$  функции  $Z_r = Z_\varphi = 1$ , то в качестве полного решения запишем

$$E_r = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n B_n \frac{H_n^{(1)}(\kappa r)}{\kappa r} e^{in\varphi}. \quad (\text{III.30})$$



Здесь остаются неизвестными коэффициенты  $A_n$ . Применяя известную в теории цилиндрических функций формулу

$$e^{ika \cos \varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(ka) e^{in\varphi}, \quad (\text{III.40})$$

находим:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left[ (-i)^n J_n(ka) + A_n H_n^{(1)}(ka) \right] e^{in\varphi} = 0: \quad (\text{III.41})$$

$$A_n = - (i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}, \quad (\text{III.42})$$

Коэффициенты  $A_n$  определились сразу благодаря тому, что выражение в фигурной скобке (III.41) содержит только постоянные величины, что явилось следствием рационального выбора системы координат; в данном случае поверхность цилиндра просто совпадает с координатной поверхностью  $r=a$ . В этом, можно сказать мгновенном, определении коэффициентов ряда и состоит преимущество метода криволинейных координат. Какие трудности возникают при решении задачи в неподходящей системе координат, будет показано в § 16.

Подставляя (III.42) в (III.20), находим:

$$E_z = - E_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}. \quad (\text{III.43})$$

Учитывая соотношения для пустоты  $\epsilon\mu = 120\pi k$ ,  $E_0 = 120\pi H_0$ , из (III.83) и (III.43) находим:

$$H_r = -H_0 \frac{1}{kr} \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}; \quad (\text{III.44})$$

$$H_\varphi = -iH_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \frac{dH_n^{(1)}(kr)}{d(kr)} e^{in\varphi}. \quad (\text{III.45})$$

Отметим аналогию в построении формул (III.44), (III.45) и (III.30), (III.32).

Вычислим плотность тока на поверхности цилиндра, пользуясь уравнением (III.2). Так как  $H_z = 0$ , то вектор  $\vec{j}$  будет иметь компоненту только по оси  $z$ .

$$\begin{aligned} j &= j_z = H_\varphi = \\ &= H_0 \left[ \cos \varphi e^{-ika \cos \varphi} - i \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \frac{dH_n^{(1)}(ka)}{d(ka)} e^{ik\varphi} \right]. \quad (\text{III.46}) \end{aligned}$$

Расчет по найденным формулам мы проведем в § 15.

### б) Случай $E_{\perp}$

Поле падающей волны определяется выражениями:

$$\begin{aligned} E_x = E_z = 0, & \quad \left[ \begin{array}{l} H_x = H_y = 0, \\ H_z = H_0 e^{-ikx}, \end{array} \right] \end{aligned} \quad (III.47)$$

или, в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} E_r = E_0 \sin \varphi e^{-ikr \cos \varphi}, & \quad \left[ \begin{array}{l} H_r = H_{\varphi} = 0, \\ H_z = H_0 e^{-ikr \cos \varphi}. \end{array} \right] \end{aligned} \quad (III.48)$$

Применяя граничное условие (III.36) и (III.20) находим для компонент дифрагированного поля:

$$E_z = 0; \quad H_r = H_{\varphi} = 0 \quad (III.49)$$

— следует из (III.33). Таким образом в поле отраженной волны компоненты  $E_z$ ,  $H_r$ ,  $H_{\varphi}$  отсутствуют так же, как и в поле падающей волны.

Применяя граничное условие к компоненте  $E_{\varphi}$ , находим из (III.48) и (III.32)

$$E_0 \cos \varphi e^{-ikr \cos \varphi} + i E_0 \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \frac{dH_n^{(1)}(ka)}{d(ka)} e^{in\varphi} = 0 \quad (III.50)$$

Из формулы (III.40) нетрудно получить такую формулу

$$\cos \varphi e^{-ikr \cos \varphi} = i \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{dJ_n(ka)}{d(ka)} e^{in\varphi}, \quad (III.51)$$

которая совместно с (III.50) дает

$$B_n = -(-i)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (III.52)$$

Подставляя (III.52) в (III.32) и (III.30), находим:

$$E_z = -E_0 \frac{1}{kr} \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi} \quad (III.53)$$

$$E_{\varphi} = i E_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)'}(kr) e^{in\varphi} \quad (III.54)$$

Подставляя (III.53) и (III.54) в третье уравнение (III.33), получим

$$H_z = H_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}. \quad (III.55)$$

Наконец, применяя второе граничное условие (III.2), находим плотность тока на поверхности цилиндра. Так как  $H_\varphi = 0$ , то вектор  $\vec{j}$  будет иметь компоненту только по  $\varphi$ .

$$\vec{j} = j_\varphi \hat{e}_\varphi = H_{1z} \hat{e}_\varphi = H_0 \left\{ e^{-i\kappa a \cos \varphi} + \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n \frac{J'_n(\kappa a)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} H_n^{(1)}(\kappa a) e^{in\varphi} \right\} \hat{e}_\varphi \quad (\text{III.56})$$

Штрихи при цилиндрических функциях в формулах (III.52—III.56) обозначают производную по всему аргументу.

### 15. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ТОЧНЫМ ФОРМУЛАМ

Положим, что точка наблюдения находится на достаточно большом расстоянии от цилиндра ( $\kappa r \gg 1$ ), так что можно применить асимптотические формулы:

$$H_n^{(1)}(\kappa r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} (-i)^n, \quad (\text{III.57})$$

$$\frac{dH_n^{(1)}(\kappa r)}{d(\kappa r)} \approx i \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa r}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} (-i)^n. \quad (\text{III.58})$$

Тогда найденные ранее формулы примут вид:

случай  $H_\perp$

$$E_z = -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n(\kappa a)}{H_n^{(1)}(\kappa a)} e^{in\varphi} \quad (\text{III.59})$$

$$H_\varphi = H_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n(\kappa a)}{H_n^{(1)}(\kappa a)} e^{in\varphi} \quad (\text{III.60})$$

случай  $E_\perp$

$$E_\varphi = E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J'_n(\kappa a)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} e^{in\varphi}, \quad (\text{III.61})$$

$$H_z = H_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa R}} e^{i(\kappa r - \frac{\pi}{4})} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J'_n(\kappa a)}{H_n^{(1)'}(\kappa a)} e^{in\varphi} \quad (\text{III.62})$$

Выражения для  $E$  и  $H$  в общих случаях одинаковы, что является характерным для поля на большом расстоянии от источника. Радиальными компонентами поля на большом расстоянии можно пренебречь, что показывает множитель  $1/\kappa r$ .



На рис. 34 показан график модуля функции  $F_n$  при  $\varphi=180^\circ$ , что соответствует области тени. Здесь также  $|F_n|$  монотонно возрастает с увеличением  $ka$ . При  $ka < 0,05$

$$|F_n(ka, \pi)| \approx \operatorname{Im} F_n \approx -\frac{2}{\pi} \left[ \ln \frac{ka}{2} + C \right]^{-1} \quad (\text{III.66})$$

При  $ka \gg 1$  модуль функции  $|F_n|$  аппроксимируется прямой.

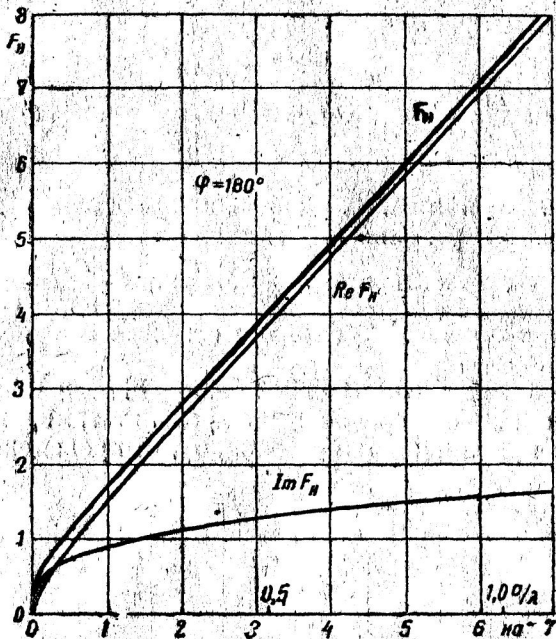


Рис. 34

Из формулы (III.59) следует

$$|E| = \frac{E_0}{\sqrt{kr}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} |F_n|. \quad (\text{III.67})$$

Полагая, что величина  $ka$  меняется за счет изменения радиуса цилиндра  $a$ , получим из формулы (III.67) пропорциональную зависимость между  $|E|$  и  $|F_n|$ . Иначе говоря, рассмотренные графики дают в некотором масштабе зависимость величины дифрагированного поля от радиуса цилиндра, точнее — от отношения  $a/\lambda$  при  $\lambda = \text{const}$ . Значения  $a/\lambda$  показаны выше оси абсцисс. Однако величина  $ka$  может меняться за счет изменения  $k$  при  $a = \text{const}$ . Для этого случая мы представим формулу (III.67) в виде

$$|E| = E_0 \sqrt{\frac{a}{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|F_n|}{\sqrt{ka}}, \quad (\text{III.68})$$

откуда следует, что величина дифрагированного поля пропорциональна величине  $(ka)^{-1/2} |F_n|$ . На рис. 35 и 36 даны графики  $(ka)^{-1/2} |F_n|$  для направлений  $\varphi=0^\circ$  и  $\varphi=180^\circ$ ; они пока-

зывают величину дифрагированного поля в функции от длины волны  $\lambda$ , точнее — от отношения  $a/\lambda$  при  $a = \text{const}$ .

При  $\lambda \rightarrow \infty$   $ka \rightarrow \infty$  и кривые уходят в бесконечность. Отсюда, конечно, не следует, что дифрагированное поле возрастает неограниченно при  $\lambda \rightarrow \infty$ , так как при этом  $kr \rightarrow 0$  и формулы (III.57) и (III.58) применять нельзя. Обращаясь к точной формуле (III.43), находим при  $k \rightarrow 0$

$$E \approx -E_0 \frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} H_0^{(1)}(kr) \approx -E_0 \frac{\ln \frac{kr}{2}}{\ln \frac{ka}{2}} \rightarrow -E_0. \quad (\text{III.69})$$

Кривые (рис. 35) и (рис. 36) справедливы только до тех пор, пока выполняется условие  $kr \gg 1$ .

При  $ka \rightarrow \infty$ , то есть при  $\lambda \rightarrow 0$ , кривая  $\frac{|F_H|}{\sqrt{ka}}$  при  $\varphi = 0^\circ$  приближается к значению  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , которые можно определить методами геометрической оптики; при  $\varphi = 180^\circ$  кривая (рис. 35) растет как  $\sqrt{ka}$ . Подробное сравнение с результатами, получаемыми при помощи приближенных методов, будет проведено в главе VI.

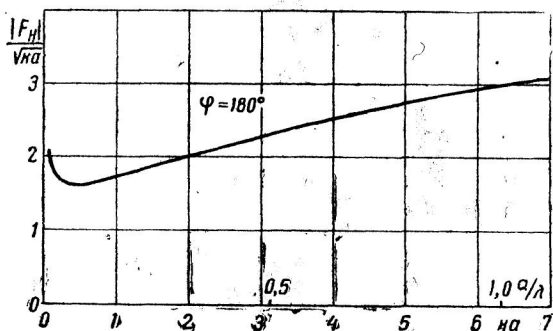
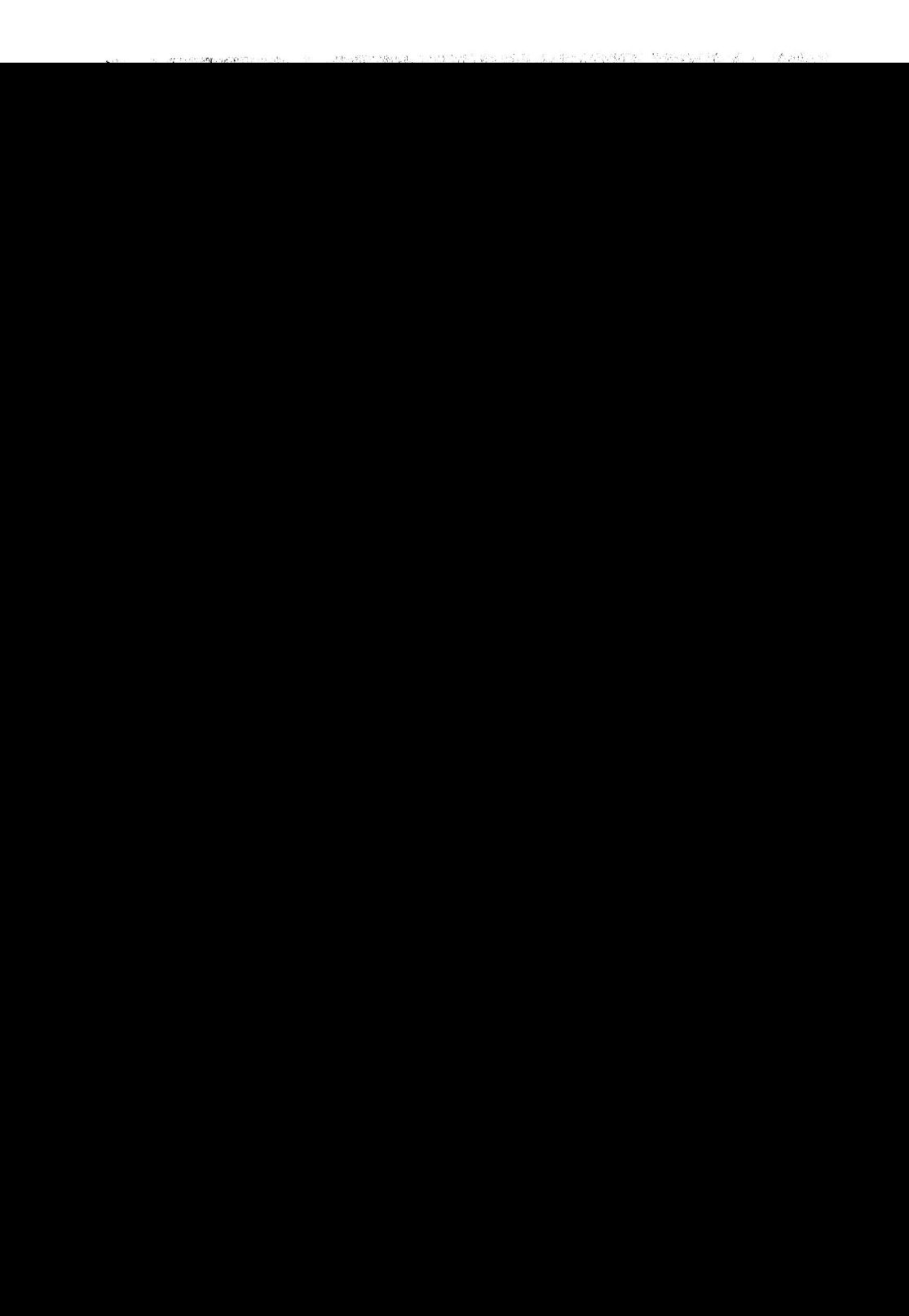


Рис. 35

Выше мы проследили влияние  $ka$  на величину дифрагированного поля для двух направлений  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 180^\circ$ . Будем считать теперь  $ka = \text{const}$  и  $\varphi = \text{var}$ . На рис. 37 даны кривые  $|F_H|$  в функции от величины  $\varphi$ , приведенные к единице при  $\varphi = 0^\circ$ . Их можно трактовать как „диаграммы направленности“ цилиндра, возбуждаемого нормально падающей плоской волной, когда электрическое поле параллельно оси цилиндра (случай  $H_\perp$ ).

Пунктиром нанесена предельная кривая, найденная методами геометрической оптики. Кривые наглядно показывают, как постепенно меняется форма „диаграммы направленности“ при увеличении  $ka$ . При  $ka < 0,1$  можно считать, что величина дифрагированного поля не зависит от  $\varphi$ . При увеличении  $ka$  в интервале  $0,1 \div 1,5$  на диаграмме появляется лепесток с максимумом при





$\varphi = 180^\circ$ ; этот лепесток постепенно сужается, а максимум его растет. При  $ka = 2,2$  замечаем уже второй лепесток с максимумом при  $\varphi \approx 85^\circ$ . При  $ka = 4$  максимум второго лепестка смещается на  $\varphi \approx 125^\circ$  и при  $\varphi \approx 80^\circ$  появляется третий лепесток. При  $ka = 6$  максимум второго лепестка смещается на  $\varphi \approx 144^\circ$ , максимум третьего — на  $\varphi \approx 113^\circ$  и при  $\varphi \approx 85^\circ$  намечается четвертый лепесток и т. д. Таким образом при дальнейшем увеличении  $ka$  лепесток при  $\varphi \approx 180^\circ$  возрастает в максимуме, одновременно уменьшаясь по ширине, кроме него появляются все новые ле-

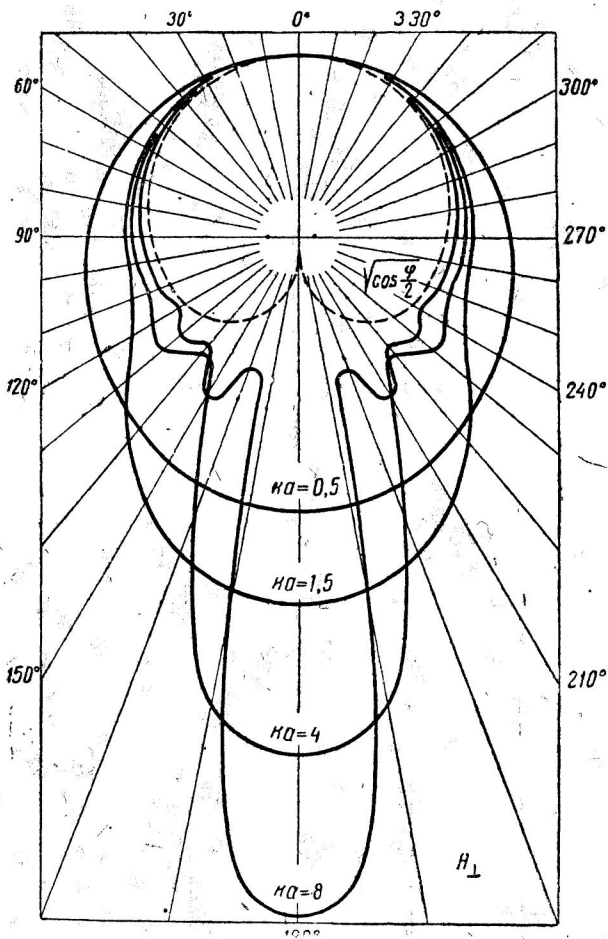


Рис. 38

пестки, которые также постепенно сужаются, перемещаясь в направлении к области тени. Провалы между лепестками постепенно углубляются и кривая в целом приближается к  $\sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}}$  за исключением окрестности  $\varphi = 180^\circ$ . На рис. 38 даны некоторые из рассмотренных кривых в полярных координатах.

Перейдем теперь к случаю  $E_{\perp}$ . На рис. 39 приведены графики модуля функции  $F_E$  при  $\varphi = 0^\circ$ , действительной и мнимой части  $F_E$ . В отличие от случая  $F_n$  (рис. 33) здесь кривая модуля возрастает с увеличением  $ka$  немонотонно: наблюдается неограниченное количество  $\max$ , и  $\min$ . Этот волнистый характер кривой  $|F_E|$  объясняется резонансными явлениями. При некоторых

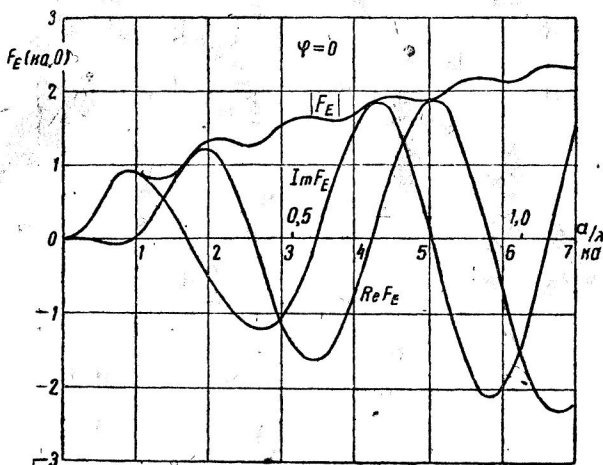


Рис. 39

определенных соотношениях между длиной волны падающего поля и диаметром цилиндра наступает резонанс. При  $ka \gg 1$  волновой период приближенно равен единице

$$\Delta ka_{\text{рез}} \approx \frac{\pi a}{\lambda/2} \approx 1,$$

то-есть резонанс повторяется, когда число полуволн, укладываемых на половине окружности цилиндра, увеличивается на единицу. Резонансные явления более резко выражены при малых диаметрах цилиндра, с увеличением  $ka$  они постепенно сглаживаются и кривая  $|F_E|$  растет как  $\sqrt{ka}$ . При  $ka < 0,05$

$$|F_E(ka, 0)| \approx |\text{Im } F_E| = \frac{3\pi(ka)^2}{4}. \quad (\text{III.70})$$

На рис. 40 показан график  $|F_E|$  при  $\varphi = 180^\circ$ ; здесь резонансные явления сказываются очень слабо—волнистость кривых незначительна. При  $ka < 0,05$

$$|F_E(ka, \pi)| \approx |\text{Im } F_E| \approx \frac{\pi(ka)^2}{4}. \quad (\text{III.71})$$

Из формулы (III.61) следует

$$|E| = \frac{E_0}{\sqrt{\kappa r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} |F_E|. \quad (\text{III.72})$$

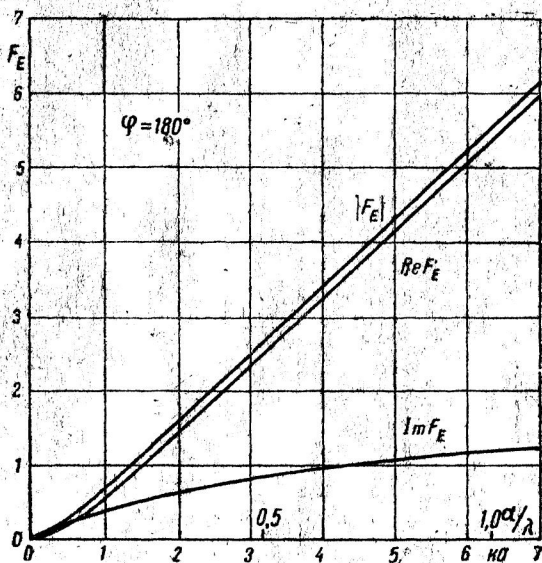


Рис. 40

Полагая, что величина  $ka$  меняется за счет изменения радиуса цилиндра при  $\lambda = \text{const}$ , можем найти с помощью кривых (рис. 39 и 40) и формулы (III.72) величину дифрагированного поля.

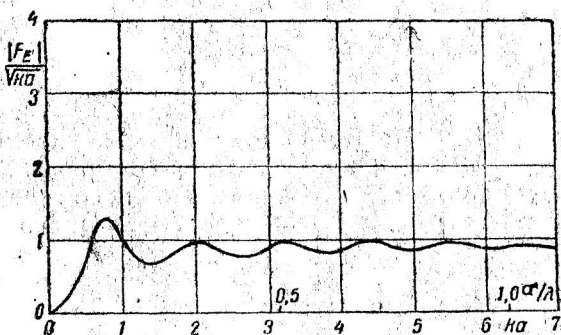


Рис. 41

Если считать  $a = \text{const}$  и  $\lambda = \text{var}$ , то величину  $|E|$  найдем, пользуясь формулой

$$|E| = E_0 \sqrt{\frac{a}{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|F_E|}{\sqrt{\kappa a}} \quad (\text{III.73})$$

и графиками  $|F_E| \cdot (ka)^{-1/2}$ , данными на рис. 41 и 42. При  $ka \gg 1$  кривая  $|F_E(ka, 0)|(ka)^{-1/2}$  колеблется около значения  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , кривая  $|F_E(ka, \pi)|(ka)^{-1/2}$  при увеличении  $ka$  растет как  $\sqrt{ka}$ . По кривой рис. 41 можно определить резонансные частоты падающего поля.

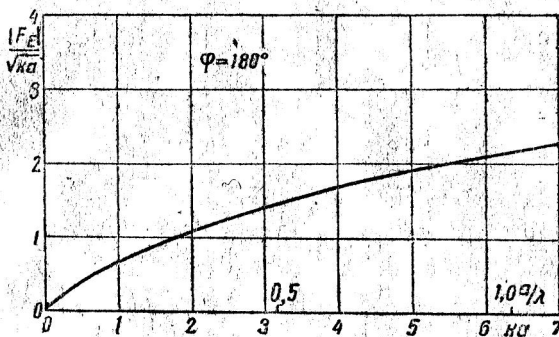


Рис. 42

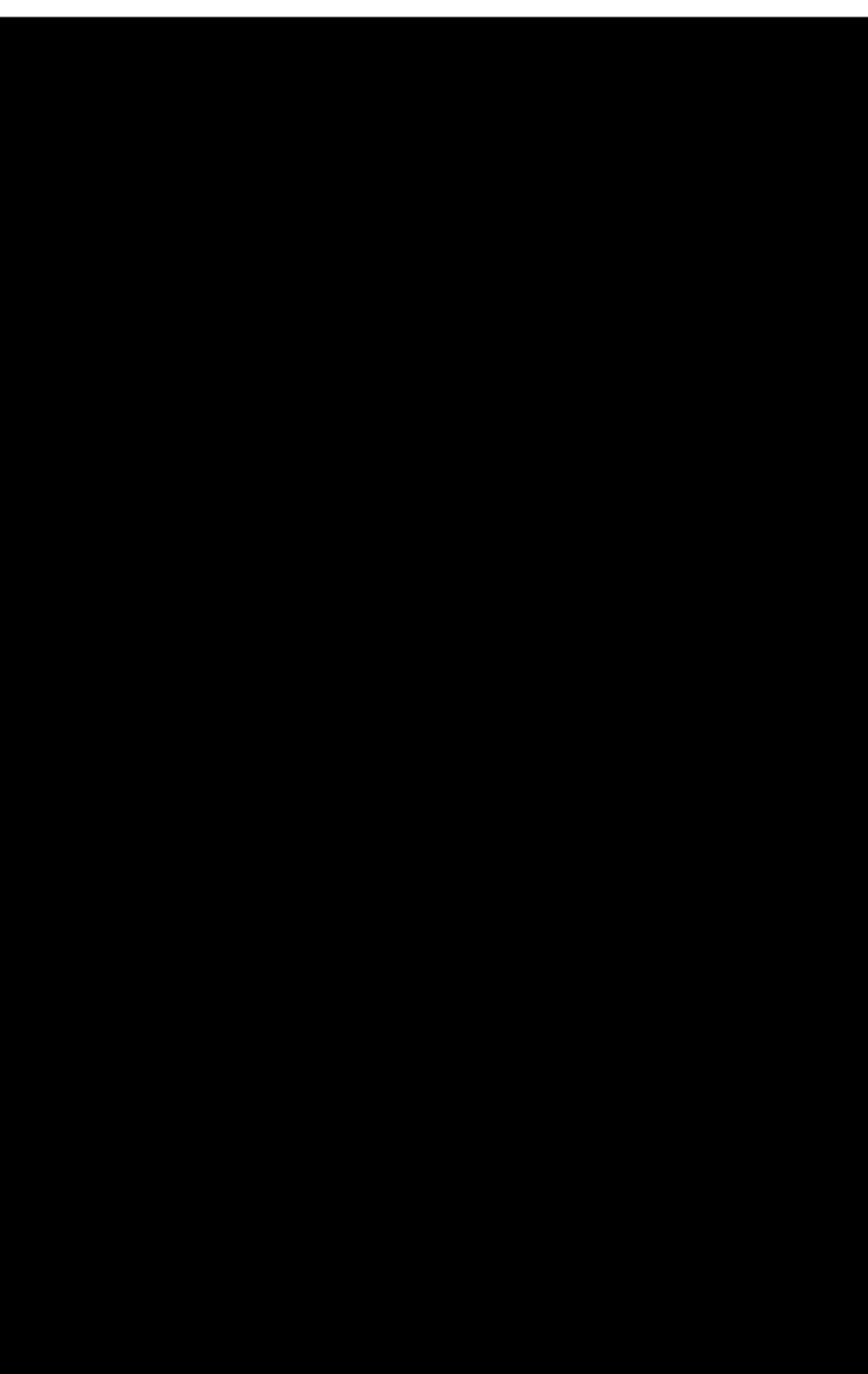
Форма „диаграмм направленности“ дифрагированного поля показана на рис. 43. Пунктиром нанесена предельная кривая, найденная методами геометрической оптики. Здесь так же, как и в случае  $H_{\perp}$ , диаграммы имеют лепестковый характер, причем число лепестков увеличивается по мере увеличения  $ka$ . Отличие заключается в более глубоких провалах между лепестками, в больших отклонениях от предельной кривой. При тех значениях  $ka$ , которые близки к точкам „антирезонанса“  $ka = 1,5; 2,6; 4,0$ , при  $\varphi = 0^\circ$  имеется неглубокий, но все же заметный мп. Теневой лепесток с тах при  $180^\circ$  более широк, чем в случае  $H_{\perp}$ .

Насколько нам известно, рассмотренные кривые впервые вычислены нами.

В заключение этого раздела приведем кривые (рис. 44) плотности тока на поверхности цилиндра в случае  $H_{\perp}$ , вычисленные по формуле (III.46) инж. Головизиной Е. Н. Из кривых видно, что плотность тока монотонно падает при обходе периферии от  $\varphi = 0^\circ$  до  $\varphi = 180^\circ$ . При увеличении  $ka$  кривые  $|j|$  постепенно приближаются к предельной, вычерченной пунктиром.

## 16. СЛУЧАЙ КОСОГО ПАДЕНИЯ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДР С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В большинстве работ, посвященных дифракции от цилиндра, рассматривается случай нормального падения плоской волны. При этом приходится отыскивать только три компоненты поля:  $E_z, H_r, H_\varphi$  — в случае  $H_{\perp}$  и  $E_z, E_r, E_\varphi$  — в случае  $E_{\perp}$ . Реше-



ние случая косо́го падения более сложно, так как теперь нужно отыскивать, как будет показано далее, пять компонент; это представляется особенно затруднительным, когда поперечное сечение цилиндра имеет более сложную форму, чем круг.

В этом разделе мы покажем, что решение случая косо́го падения при любой форме поперечного сечения цилиндра.

Поместим начало координат внутри цилиндра (рис. 45). Ось  $z$  направим параллельно образующей цилиндра, ось  $x$  направим так, чтобы направ-

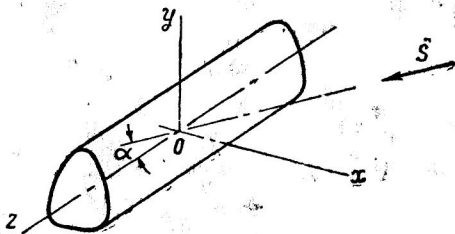


Рис. 45

ление  $\vec{S}$  прихода волны лежало в плоскости  $xOz$ , составляя угол  $\alpha$  с осью  $z$ . Направляющую цилиндра, получаемую пересечением поверхности цилиндра плоскостью  $z = \text{const}$ , будем считать кривой, уравнение которой в полярных координатах

$$\rho = f(\varphi). \quad (\text{III.74})$$

Функцию  $f(\varphi)$  будем считать однозначной.

Так же, как и в § 14 будем рассматривать отдельно случай  $E_{\perp}$  и случай  $H_{\perp}$ , решая задачу в полярных координатах.

**Случай  $E_{\perp}$ .**

Поле падающей волны определяется выражениями:

$$E_r = E_0 \sin \varphi e^{a-s},$$

$$E_{\varphi} = E_0 \cos \varphi e^{a-s},$$

$$E_z = 0,$$

$$H_r = -H_0 \cos \alpha \cos \varphi e^{a-s},$$

$$H_{\varphi} = H_0 \cos \alpha \sin \varphi e^{a-s},$$

$$H_z = -H_0 \sin \alpha e^{a-s},$$

(III.75)

где  $a = ikz \cos \alpha$  и  $s = ikr \sin \alpha \cos \varphi$ .

Решая векторное волновое уравнение (III.7) в цилиндрических координатах, мы нашли компоненту  $E_z$  в форме (III.20). В случае  $E_{\perp}$   $A_n = 0$ ,  $E_z = 0$  и уравнение (III.24) превращается в (III.27) при любом  $x = k \cos \alpha$ ; при этом, решая совместно (III.25), (III.26) и (III.27), получим вместо (III.29)

$$R_r = E_0 n B_n \frac{H_n^{(1)}(\kappa_k r)}{\kappa_k r}, \quad (\text{III.76})$$

где  $\kappa_n = \kappa \sin \alpha$ . Подставляя (III.76) и (III.23) в (III.21), найдем в качестве полного решения

$$E_r = E_0 e^{ixz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n B_n \frac{H_n^{(1)}(\kappa_n r)}{\kappa_n r} e^{in\varphi} \quad (\text{III.77})$$

и, применяя уравнение дивергенции,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i \tilde{E}_c e^{ixz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{d H_n^{(1)}(\kappa_n r)}{d(\kappa_n r)} e^{in\varphi} \quad (\text{III.78})$$

Компоненты магнитного поля можем найти из уравнения Максвелла (III.33)

$$\begin{aligned} H_r &= -i H_0 \cos \alpha e^{ixz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{d H_n^{(1)}(\kappa_n r)}{d(\kappa_n r)} e^{in\varphi}, \\ H_\varphi &= H_0 \cos \alpha e^{ixz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n B_n \frac{H_n^{(1)}(\kappa_n r)}{\kappa_n r} e^{in\varphi}, \\ H_z &= -H_0 \sin \alpha e^{ixz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(\kappa_n r) e^{in\varphi} \end{aligned} \quad (\text{III.79})$$

Так как  $E_z = 0$ , а зависимость от координаты  $z$  — гармоническая, то компоненты  $H_z$  и  $E_\varphi$ ,  $H_\varphi$  и  $E_r$  прямо пропорциональны друг другу.

Коэффициенты  $B_n$  должны быть такими, чтобы выполнялось граничное условие  $E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = 0$ , то-есть

$$\begin{aligned} & E_0 \cos \varphi e^{ixz} e^{-i\kappa_n r \cos \varphi} \sin \beta - E_0 \sin \varphi e^{ixz} e^{-i\kappa_n r \cos \varphi} \cos \beta + \\ & + i E_0 \sin \beta e^{ixz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{d H_n^{(1)}(\kappa_n \rho)}{d(\kappa_n \rho)} e^{in\varphi} + \cos \beta E_0 e^{ixz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n B_n \frac{H_n^{(1)}(\kappa_n \rho)}{\kappa_n \rho} e^{in\varphi} = 0, \end{aligned}$$

или, после деления на  $E_0 e^{ixz} \cos \beta$

$$\begin{aligned} & i \operatorname{tg} \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{d J_n(\kappa_n \rho)}{d(\kappa_n \rho)} e^{in\varphi} + \frac{1}{\kappa_n \rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n n J_n(\kappa_n \rho) e^{in\varphi} + \\ & + i \operatorname{tg} \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{d H_n^{(1)}(\kappa_n \rho)}{d(\kappa_n \rho)} e^{in\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n B_n \frac{H_n^{(1)}(\kappa_n \rho)}{\kappa_n \rho} e^{in\varphi} = 0; \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

$\beta$  — угол между радиусом-вектором и касательной к поверхности  $\rho$  в плоскости  $z = \text{const}$  (рис. 46); из аналитической геометрии известно, что  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\rho}{\rho'}$ .

Суммы в (III.80) не являются рядами Фурье, так как  $\rho$  зависит от  $\varphi$  по (III.74).



Здесь становится очевидным смысл применения метода криволинейных координат. Если бы система координат была выбрана таким образом, чтобы поверхность  $\rho = f(\varphi)$  совпадала с одной из координатных поверхностей, то для определения каждого коэффициента  $B_n$  получилось бы только одно уравнение, как это было, например, в § 15.

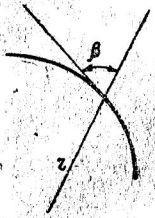


Рис. 46

Теперь остается более сложный путь. Функцию  $\rho = f(\varphi)$  надо представить в виде ряда Фурье

$$\rho = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m e^{im\varphi} \quad (III.81)$$

и разложить функции Бесселя и Ханкеля в (III.80) по степеням  $\kappa_\kappa \rho$ . Тогда из (III.80) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{nm}(\kappa_\kappa \rho_m, n, m, l, B_n) e^{i(n+m+l)\varphi} = 0 \quad (III.82)$$

т. е. бесконечную систему уравнений, из которой и нужно находить коэффициенты  $B_n$ . Однако мы не будем исследовать вопрос о способах нахождения  $B_n$ .

Обратим внимание на следующее. Положим, что решение (III.82) будет иметь вид

$$B_n = \Phi(\kappa_\kappa \rho_m). \quad (III.83)$$

Если падение волны — нормальное:  $\kappa_\kappa = \kappa \sin 90^\circ = \kappa$ , то

$$B_n = \Phi(\kappa \rho_m). \quad (III.84)$$

Сравнивая (III.84) и (III.83), заключаем, что выражения для коэффициентов  $B_n$  при косом падении волны отличаются только тем, что вместо  $\kappa$  в них стоит  $\kappa_\kappa$ . Следовательно, мы можем переписать найденные решения (III.77), (III.78), (III.79) так:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= E_0 e^{ixz} \sum_{-\infty}^{\infty} n B_n(\kappa_\kappa \rho) \frac{H_n^{(1)}(\kappa_\kappa r)}{\kappa_\kappa r} e^{in\varphi}, \\ E_\varphi &= i E_0 e^{ixz} \sum_{-\infty}^{\infty} B_n(\kappa_\kappa \rho) \frac{dH_n^{(1)}(\kappa_\kappa r)}{d(\kappa_\kappa r)} e^{in\varphi}, \\ E_z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (III.85)$$

$$\begin{aligned}
 H_r &= -iH_0 \cos \alpha e^{ixz} \sum_{-\infty}^{\infty} B_n(\kappa_k \rho) \frac{dH_n^{(1)}(\kappa_k r)}{d(\kappa_k r)} e^{in\varphi}, \\
 H_\varphi &= H_0 \cos \alpha e^{ixz} \sum_{-\infty}^{\infty} nB_n(\kappa_k \rho) \frac{H_n^{(1)}(\kappa_k r)}{\kappa_k r} e^{in\varphi}, \\
 H_z &= -H_0 \sin \alpha e^{ixz} \sum_{-\infty}^{\infty} B_n(\kappa_k \rho) H_n^{(1)}(\kappa_k r) e^{in\varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{III.86}$$

При нормальном падении волны компоненты  $H_r$  и  $H_\varphi$  отсутствуют:  $H_r = H_\varphi = 0$ , так как  $\cos \alpha = 0$ .

Анализируя строение формул (III.85), (III.86), делаем следующие выводы:

1) Формулы для компонент  $E_r$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_z$  при косом падении волны ( $\alpha \neq 90^\circ$ ) в случае  $E_\perp$  можно получить из формул для  $E_r$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_z$  при нормальном падении, если в последних заменить всюду  $\kappa$  на  $\kappa_k$  и затем приписать множитель  $e^{ixz}$ , выражение для  $H_z$  умножается, кроме того, на  $\sin \alpha$ ; компонента  $E_z$  остается равной нулю при любом  $\alpha$ .

2) Формулы для компонент  $H_r$  и  $H_\varphi$  (появляющихся при косом падении) в случае  $E_\perp$  можно получить из формул для  $E_\varphi$  и  $E_r$  при косом падении, если в последних заменить  $E_0$  на  $-H_0 \cos \alpha$  и  $H \cos \alpha$  соответственно.

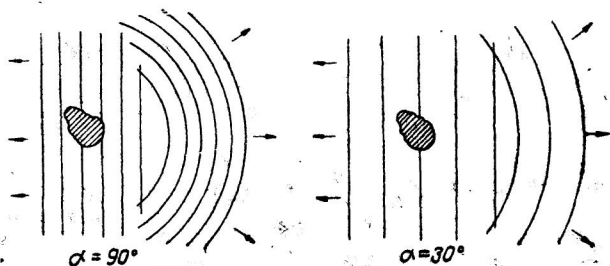


Рис. 47

3) Физический смысл замены  $\kappa$  на  $\kappa_k$ , т. е. появления множителя  $\sin \alpha$  при волновом коэффициенте  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ , состоит в том, что при изменении угла падения  $\alpha$  от  $\alpha = 90^\circ$  к  $\alpha < 90^\circ$  распределение энергии отраженной волны в плоскости  $r, \varphi$  происходит так же, как при изменении частоты в  $\frac{\kappa_k}{\kappa} = \sin \alpha$  раз.

На рис. 47 условно показано, как изменяется расстояние между эквиfazными поверхностями при изменении  $\alpha$  от  $90^\circ$

к  $30^\circ$  ( $\kappa_k = 0,5 \kappa$ ). Изменение одинаково для падающей и отраженной волн.

4) На больших расстояниях от цилиндра  $\kappa_k r \gg 1$ , когда функции Ханкеля можно заменить их асимптотическими выражениями; при  $\varphi = \text{const}$  фазовый множитель имеет вид  $e^{i(xz + \kappa_k r)}$ . Следовательно, линия равных фаз будет прямой

$$z \cos \alpha + r \sin \alpha = \text{const.} \quad (\text{III.87})$$

Последнее уравнение говорит, что на большом расстоянии от цилиндра фронт дифрагированной волны имеет коническую форму. При  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  фронт волны становится цилиндрическим, при  $\alpha \rightarrow 0$  конус фронта разворачивается в плоскость; в последнем случае имеем распространение электромагнитной волны вдоль цилиндра.

5) Из структуры формул (III.85) следует, что дифрагированное поле в случае  $E_\perp$  можно представить посредством магнитного вектора Герца  $Z^*$ , имеющего только одну компоненту

$$Z^* = Z_z^* = -E_0 \frac{e^{ixz}}{\omega} \sum_{-\infty}^{\infty} B_n(\kappa_k \rho) \frac{H_n^{(1)}(\kappa_k r)}{\kappa_k} e^{in\varphi} \quad (\text{III.88})$$

так же, как и падающее поле — вектором Герца

$$Z^* = Z_z^* = -E_0 \frac{e^{ixz}}{\omega \kappa_k} e^{-i\kappa_k r \cos \varphi}. \quad (\text{III.89})$$

При этом становится очевидным, что мы пришли фактически к плоской задаче.

Другие выводы будут сделаны далее, после рассмотрения случая  $H_\perp$ .

#### Случай $H_\perp$

Поле падающей волны определяется выражениями:

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \cos \alpha \cos \varphi e^{ixz} e^{-i\kappa_k r \cos \varphi}, \\ E_\varphi &= -E_0 \cos \alpha \sin \varphi e^{ixz} e^{-i\kappa_k r \cos \varphi}, \\ E_z &= E_0 \sin \alpha e^{ixz} e^{-i\kappa_k r \cos \varphi}, \\ H_r &= H_0 \sin \varphi e^{ixz} e^{-i\kappa_k r \cos \varphi}, \\ H_\varphi &= H_0 \cos \varphi e^{ixz} e^{-i\kappa_k r \cos \varphi}, \\ H_z &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

Решение волнового уравнения  $\nabla^2 \bar{E} + \kappa^2 \bar{E} = 0$  в случае  $H_\perp$  несколько сложнее, чем в предыдущем, так как здесь имеются все

три компоненты  $\vec{E}$ . Для экономии места мы не будем приводить выкладок по отысканию этого решения и напомним его сразу по другим соображениям.

Вид решения векторного волнового уравнения различен при наличии или отсутствии компоненты вектора по оси  $z$ , что например, видно из сравнения (III.87) и (III.83). В случае  $H_{\perp}$  электрическое поле имеет компоненту  $E_z$ , но в случае  $E_{\perp}$  мы нашли решение (III.86) векторного волнового уравнения  $\nabla^2 \vec{H} + \kappa_k^2 \vec{H} = 0$ , когда  $H_z \neq 0$ . Поэтому, используя выражения (III.86), можем написать искомое решение сразу:

$$\begin{aligned} E_r &= iE_0 \cos \alpha e^{i\kappa z} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(\kappa_k \rho) \frac{dH_n^{(1)}(\kappa_k r)}{d(\kappa_k r)} e^{in\varphi}, \\ E_{\varphi} &= -E_0 \cos \alpha e^{i\kappa z} \sum_{-\infty}^{\infty} nA_n(\kappa_k \rho) \frac{H_n^{(1)}(\kappa_k r)}{\kappa_k r} e^{in\varphi}, \\ E_z &= E_0 \sin \alpha e^{i\kappa z} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(\kappa_k \rho) H_n^{(1)}(\kappa_k r) e^{in\varphi}. \end{aligned} \quad (III.91)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что (III.91) действительно является решением векторного волнового уравнения и удовлетворяет уравнению  $\text{div} \vec{E} = 0$ . Коэффициенты  $A_n$ , конечно, отличаются от коэффициентов  $B_n$  и находятся из граничных условий. Вектор  $\vec{H}$  находим опять с помощью уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} H_r &= H_0 e^{i\kappa z} \sum_{-\infty}^{\infty} nA_n(\kappa_k \rho) \frac{H_n^{(1)}(\kappa_k r)}{\kappa_k r} e^{in\varphi}, \\ H_{\varphi} &= iH_0 e^{i\kappa z} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(\kappa_k \rho) \frac{dH_n^{(1)}(\kappa_k r)}{d(\kappa_k r)} e^{in\varphi}, \\ H_z &= 0. \end{aligned} \quad (III.92)$$

Относительно решений (III.91) и (III.92) можно сделать выводы, аналогичные полученным выше:

1) Формулы для компонент  $H_r$ ,  $H_{\varphi}$ ,  $E_z$  при косом падении волны (в случае  $H_{\perp}$ ) можно получить из формул для  $H_r$ ,  $H_{\varphi}$ ,  $E_z$  при нормальном падении, если в последних заменить всюду  $\kappa$  на  $\kappa_k$  и затем приписать множитель  $e^{i\kappa z}$ ; выражение для  $E_z$  умножается, кроме того, на  $\sin \alpha$ ; компонента  $H_z$  остается равной нулю при любом  $\alpha$ .

2) Формулы для компонент  $E_z$  и  $E_{\varphi}$  (появляющихся при косом падении) в случае  $H_{\perp}$  можно получить из формул для  $H_{\varphi}$

и  $H$ , при косом падении, если в последних заменить  $H_0$  на  $E_0 \cos \alpha$  и  $-E_0 \cos \alpha$  соответственно.

3) Замена  $\kappa$  на  $\kappa_\kappa$  говорит о том, что при косом падении волны распределение энергии отраженной волны в плоскости  $r, \varphi$  будет таким же, как при нормальном падении волны при  $\lambda$ , удлинненной в  $\frac{\kappa}{\kappa_\kappa}$  раз.

4) На достаточно больших расстояниях от цилиндра  $\kappa_\kappa r \gg 1$  фронт дифрагированной волны имеет конический характер.

5) Из структуры формул (III.92) следует, что дифрагированное поле в случае  $H_\perp$  можно представить посредством электрического вектора Герца  $Z$ , имеющего только одну компоненту

$$Z = Z_z = H_0 \frac{e^{i\kappa z}}{\omega} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(\kappa_\kappa \rho) \frac{H_n^{(1)}(\kappa_\kappa r)}{\kappa_\kappa} e^{in\varphi}, \quad (\text{III.93})$$

так же, как и падающее поле — вектором Герца

$$Z = Z_z = H_0 \frac{e^{i\kappa z}}{\omega \kappa_\kappa} \cdot e^{-i\kappa_\kappa \cos \varphi}. \quad (\text{III.94})$$

Как было замечено в начале этой главы, система координат выбирается в зависимости от условий поставленной задачи. Применение системы цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  не является обязательным; более того не всегда наиболее удобным является метод криволинейных координат. Однако, независимо от выбора системы координат, полученные выше выводы о соотношении решений для случаев косого и прямого падения волны остаются в силе.

Положим, что задача решается в системе криволинейных ортогональных координат  $u, v, z_1$ , выбранных так, чтобы поверхность  $\rho = f(\varphi)$  была одной из координатных. Пусть координаты  $u, v, z_1$  связаны с цилиндрическими координатами следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(r, \varphi), \\ v &= f_2(r, \varphi), \\ z_1 &= z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.95})$$

Зависимость компонент поля (III.85), (III.86), (III.91), (III.92) от угла падения  $\alpha$  выражается в трех формах:

1. Величина угла  $\alpha$  определяет зависимость от координаты  $z$  множителем  $e^{i\kappa z \cos \alpha}$ . Поскольку  $z_1 = z$ , то этот множитель останется без изменения и в новой системе координат  $u, v, z_1$  ибо сам угол  $\alpha$  от предлагаемого изменения системы координат не зависит.

2. От величины угла  $\alpha$  зависит волновое число  $\kappa_\kappa$ , входящее в функции под знаком  $\Sigma$ . Как было отмечено выше, изменение  $\kappa_\kappa$  приводит к изменению картины распределения дифрагированного поля в плоскости  $z = \text{const}$ , которая не может зависеть от выбора системы координат. И после преобразования

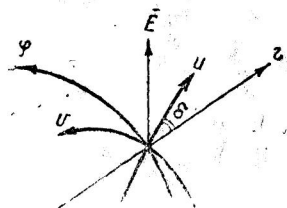


Рис. 48

координат по (III.95) зависимость  $\kappa_\kappa$  от  $\alpha$  останется прежней:  $\kappa_\kappa = \kappa \sin \alpha$ . Поэтому предложение о замене  $\kappa$  на  $\kappa_\kappa$  при переходе от случая нормального падения к случаю косоуго падения волны останется в силе и при новой системе координат:

3. Величиной угла  $\alpha$  определяются амплитудные множители  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ . Для компонент вектора мы можем написать (рис. 48):

$$\begin{aligned} E_u &= E_r \cos \delta + E_\varphi \sin \delta, \\ E_v &= E_\varphi \cos \delta - E_r \sin \delta, \\ E_{z_1} &= E_z, \end{aligned} \quad \left| \quad (III.96)\right.$$

откуда следует, что наличие или отсутствие амплитудного множителя  $\sin \alpha$  или  $\cos \alpha$  у соответствующих компонент поля не зависит от системы координат. Наконец, из (III.96) также следует согласно выводу 2:

в случае  $E_\perp$ :

$$\begin{aligned} H_u &= -\frac{H_0 \cos \alpha}{E_0} E_v \\ H_v &= \frac{H_0 \cos \alpha}{E_0} E_u \end{aligned} \quad \left| \quad (III.97)\right.$$

в случае  $H_\perp$

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{E_0 \cos \alpha}{H_0} H_v \\ E_v &= -\frac{E_0 \cos \alpha}{H_0} H_u \end{aligned} \quad \left| \quad (III.93)\right.$$

Координата  $u$  считается здесь „квазирадиальной“.

Таким образом мы показали возможность приведения случая косоуго падения к случаю нормального падения волны в системе координат (III.95) при любой форме поперечного сечения цилиндра, определяемой однозначной функцией  $\rho = f(\varphi)$ .

При выводе проводимость цилиндра полагалась идеальной. Повидимому, это ограничение несущественно и выводы могут быть распространены на случай цилиндра с произвольными параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $g$ ; тогда они могут быть полезными в теории „береговой рефракции“ [26, 27]. Укажем, что формулы для диф-

рагированного поля от кругового цилиндра с произвольными параметрами при косом падении волны, приведенные в книге Страттона [10], подчиняются полученным здесь соотношениям. Формулы Зоммерфельда [8] для дифракции от клина также подчиняются найденным соотношениям.

В заключение этой главы заметим, что решение конкретной задачи о дифракции от цилиндрической поверхности удобнее проводить, применяя соответствующий вектор Герца. При этом будет достаточно отыскать решения скалярного волнового уравнения, поскольку вектор Герца имеет только одну компоненту по оси  $z$ . Можно было бы все приведенные выше выкладки построить именно таким образом: предположить, что задача решается при введении вектора Герца с одной координатой, найти выражения для компонент  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  и затем доказать правильность решения. Мы предпочли обратный путь. Решение задачи с помощью вектора Герца будет проведено в следующей главе для случая дифракции от шара.

---

## Глава IV

### МЕТОД КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ. ДИФРАКЦИЯ ОТ ШАРА

#### 17. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ДИФРАГИРОВАННОГО ПОЛЯ

Решение задачи о дифракции от шара проводится методом криволинейных координат в сферических координатах [28, 29]. Будем находить искомые формулы для  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  с помощью векторов Герца  $\bar{Z}$  и  $\bar{Z}^*$ .

Из теории поля известно, что, вообще говоря, введение потенциальных функций не является однозначной операцией. Так, например, некоторое электромагнитное поле можно описать электрическим вектором Герца  $\bar{Z}$  и его же можно описать магнитным вектором Герца  $\bar{Z}^*$ . Выбор между  $\bar{Z}$  и  $\bar{Z}^*$  делается при учете конкретных условий данной задачи, исходя из большей простоты вычислений.

Так, при решении задачи о косом падении волны на цилиндр следует применить  $\bar{Z}$  в случае  $\bar{H}_\perp$  и  $\bar{Z}^*$  в случае  $\bar{E}_\perp$ . При решении задачи о дифракции от шара мы будем применять оба вектора  $\bar{Z}$  и  $\bar{Z}^*$ .

Представим вектор  $\bar{Z}$  в виде суммы двух векторов

$$\bar{Z} = \bar{\tau} + \bar{T}, \quad (\text{IV.1})$$

поле вектора  $\bar{\tau}$  будем считать безвихревым:  $\bar{\tau} = \text{grad } \psi$  и поле вектора  $\bar{T}$  соленоидальным:  $\bar{T} = \text{rot } \bar{Q}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -i \omega \text{rot } \bar{Z} = -i \omega \text{rot } \bar{T}, \\ \bar{E} &= \frac{1}{\epsilon} (\text{grad div } \bar{\tau} + \kappa^2 \bar{\tau} + \kappa^2 \bar{T}) = \frac{\kappa^2}{\epsilon} \bar{T}. \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$



Для вектора  $Z^*$  можно написать аналогичные соотношения:

$$\bar{Z}^* = \bar{\tau}^* + \bar{T}^*, \quad (IV.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{H} &= i\omega \operatorname{rot} \bar{Z}^* = i\omega \operatorname{rot} \bar{T}^*, \\ \bar{H} &= \frac{1}{\mu} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\tau}^* + \kappa^2 \bar{\tau}^* + \kappa^2 \bar{T}^*) = \frac{\kappa^2}{\mu} \bar{T}^*. \end{aligned} \quad (IV.4)$$

Когда источником поля является элементарная рамка (магнитный диполь), то:

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{div} \bar{\tau} = 0, \quad \bar{\tau} = 0, \\ \bar{E} &= i\omega \operatorname{rot} \bar{Z}^* = \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \bar{Z}. \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Если источник поля — электрический диполь, то:

$$\bar{H} = -i\omega \operatorname{rot} \bar{Z} = \frac{\kappa^2}{\mu} \bar{Z}^*. \quad (IV.6)$$

Уравнения (IV.5) и (IV.6), связывающие  $Z$  и  $Z^*$ , подобны уравнениям Максвелла.

Применим известный метод разложения на два частичных поля, употребляемый при решении уравнений Максвелла: в первом частичном поле („электрические“ волны) принимается  $H_r = 0$ , во втором частичном поле („магнитные“ волны) принимается  $E_r = 0$ . Эти частичные поля, каждое в отдельности, можно получить в действительности посредством излучателей, сконструированных соответственным образом. В дальнейшем эти частичные поля будем обозначать буквами  $E$  и  $H$  с индексами 1 и 2 слева наверху.

Итак, положим

$${}^1H_r = 0. \quad (IV.7)$$

Из уравнения

$$\bar{H} = -i\omega \operatorname{rot} \bar{Z} \quad (IV.8)$$

следует

$${}^1H_r = \frac{i\omega}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial T_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{\partial (T_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (IV.9)$$

Для того, чтобы выполнялось (IV.9), предположим, что

$$T_\vartheta = T_\varphi = 0. \quad (IV.10)$$

Тогда из уравнения (IV.6) следует

$$\bar{Z}_r^* = 0. \quad (IV.11)$$

Из уравнения (IV.8) находим далее:

$$\begin{aligned} {}^1H_\varphi &= \frac{i\omega}{r} \frac{\partial T_r}{\partial \vartheta}, \\ {}^1H_\vartheta &= -\frac{i\omega}{r \sin \vartheta} \frac{\partial T_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (IV.12)$$

Подставляя (IV.12) в первое уравнение Максвелла, получим:

$$\begin{aligned} {}^1E_r &= \frac{-1}{\epsilon r^2 \sin \vartheta} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 T_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T_r}{\partial \vartheta} \right) \right], \\ {}^1E_\varphi &= \frac{1}{\epsilon r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 T_r}{\partial r \partial \varphi}, \\ {}^1E_\vartheta &= \frac{1}{\epsilon r} \frac{\partial^2 T_r}{\partial r \partial \vartheta}, \end{aligned} \quad (IV.13)$$

Теперь мы можем получить дифференциальное уравнение для  $T_r$ , подставляя (IV.13) и (IV.12) во второе уравнение Максвелла

$$\frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T_r}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 T_r = 0. \quad (IV.14)$$

Уравнение (IV.14) решается методом разделения переменных [6].

Полным решением уравнения (IV.14) будет сумма

$$T_r = \sum_n \sum_m \zeta_n(\kappa r) P_n^n(\cos \vartheta) (a_n \cos m \varphi + b_n \sin m \varphi). \quad (IV.15)$$

Здесь и далее применяем обозначения:

$$\begin{aligned} \zeta_n(\kappa r) &= \sqrt{\frac{\pi \kappa r}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\kappa r), \\ \psi_n(\kappa r) &= \sqrt{\frac{\pi \kappa r}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r). \end{aligned} \quad (IV.16)$$

Положим

$${}^2E_r = 0. \quad (IV.17)$$

Из уравнения

$$\bar{E} = i\omega \operatorname{rot} \bar{Z}^* = i\omega \operatorname{rot} \bar{T}^* \quad (IV.18)$$

следует

$${}^2E_r = \frac{-i\omega}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial T_\vartheta^*}{\partial \varphi} - \frac{(\partial T_\varphi^* \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) = 0 \quad (IV.19)$$

Для того, чтобы выполнялось (IV.19), предположим, что

$$T_\vartheta^* = T_\varphi^* = 0. \quad (IV.20)$$

Тогда из уравнения (IV.5) следует

$$Z_r = 0. \quad (IV.21)$$

Из уравнения (IV.18) находим:

$$\left. \begin{aligned} {}^2E_\varphi &= -\frac{i\omega}{r} \frac{\partial T_r^*}{\partial \vartheta}, \\ {}^2E_\vartheta &= \frac{i\omega}{r \sin \vartheta} \frac{\partial T_r^*}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (IV.22)$$

Компоненты  $\vec{H}$  находим из второго уравнения Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} {}^2H_r &= \frac{-1}{\mu r^2 \sin \vartheta} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 T_r^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T_r^*}{\partial \vartheta} \right) \right], \\ {}^2H_\varphi &= \frac{1}{\mu r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 T_r^*}{\partial r \partial \varphi}, \\ {}^2H_\vartheta &= \frac{1}{\mu r} \frac{\partial^2 T_r^*}{\partial r \partial \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (IV.23)$$

Подставляя (IV.22) и (IV.23) в первое уравнение Максвелла, получим дифференциальное уравнение для  $T_r^*$

$$\frac{\partial^2 T_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T_r^*}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T_r^*}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 T_r^* = 0. \quad (IV.24)$$

Оно совпадает с уравнением (IV.14) и, следовательно, имеет решение вида (IV.15)

$$T_r^* = \sum_{n,m} \zeta_n(\kappa r) P_n^m(\cos \vartheta) (c_n \cos m\varphi + d_n \sin m\varphi). \quad (IV.25)$$

Представляя падающее поле аналогичными суммами и применяя граничные условия, получим:

$$T_r = -E_0 \frac{i\epsilon \cos \varphi}{\kappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\psi'_n(\kappa a)}{\zeta'_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) P'_n(\cos \vartheta). \quad (IV.26)$$

$$T_r^* = E_0 \frac{i \sin \varphi}{\omega \kappa} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\psi_n(\kappa a)}{\zeta_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) P'_n(\cos \vartheta). \quad (IV.27)$$

Наконец, подставляя (IV.26) и (IV.27) в выражения-

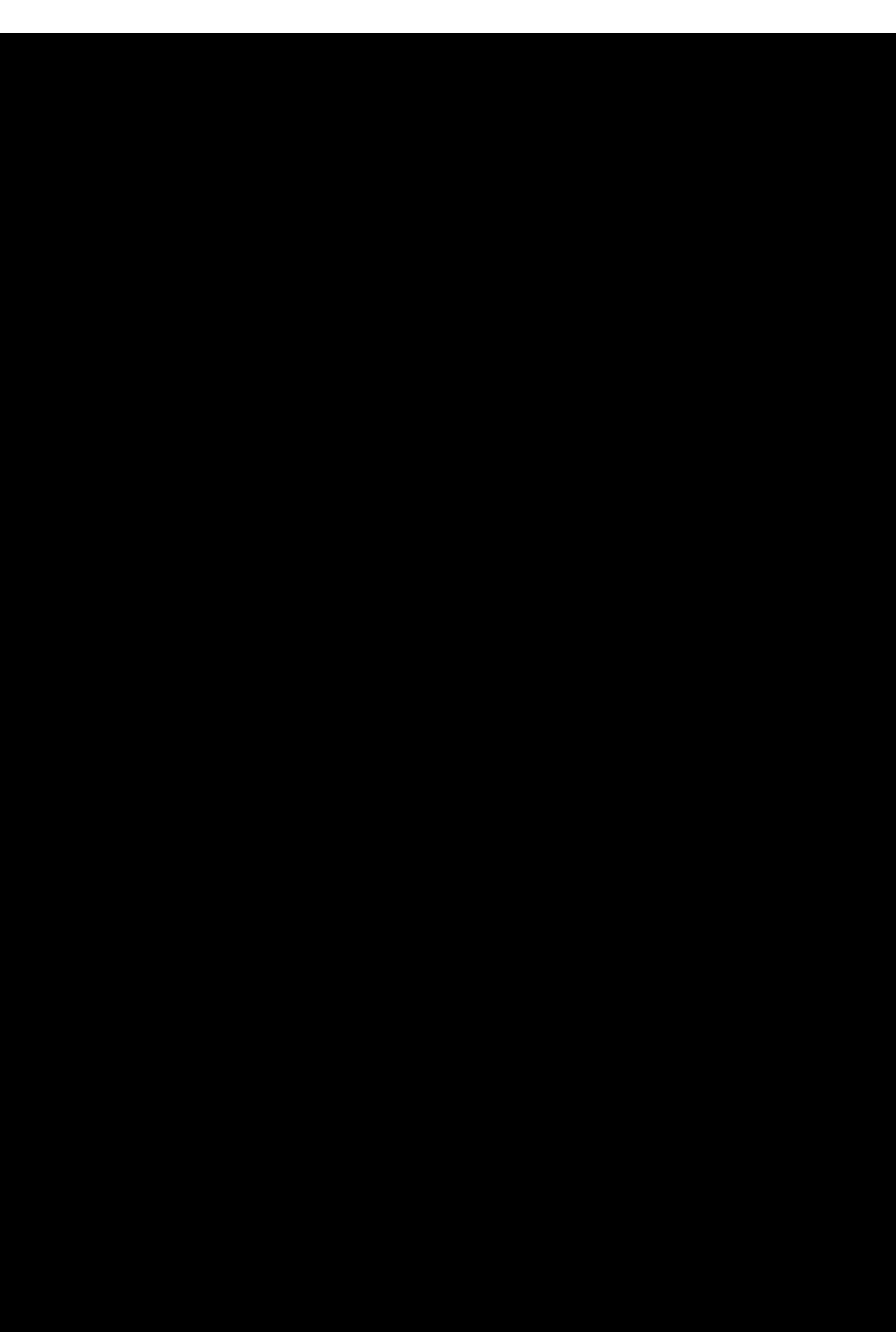
$$\begin{aligned} E_r &= {}^1E_r + {}^2E_r = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} + \kappa^2 T_r \right), \\ E_\varphi &= {}^1E_\varphi + {}^2E_\varphi = \frac{1}{\varepsilon r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 T_r}{\partial r \partial \varphi} - \frac{i \omega \partial T_r^*}{r \partial \vartheta}, \\ E_\vartheta &= {}^1E_\vartheta + {}^2E_\vartheta = \frac{1}{\varepsilon r} \frac{\partial^2 T_r}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{i \omega}{r \sin \vartheta} \frac{\partial T_r^*}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (IV.28)$$

$$\begin{aligned} H_r &= {}^1H_r + {}^2H_r = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 T_r^*}{\partial^2 r^2} + \kappa^2 T_r^* \right), \\ H_\varphi &= {}^1H_\varphi + {}^2H_\varphi = \frac{1}{\mu r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 T_r^*}{\partial r \partial \varphi} + \frac{i \omega \partial T_r}{r \partial \vartheta}, \\ H_\vartheta &= {}^1H_\vartheta + {}^2H_\vartheta = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial^2 T_r^*}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{i \omega}{r \sin \vartheta} \frac{\partial T_r}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (IV.29)$$

находим формулы для компонент дифрагированного поля:

$$\begin{aligned} E_r &= -i E_0 \frac{\cos \varphi}{(\kappa r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \frac{\Psi'_n(\kappa a)}{\zeta'_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) P'_n(\cos \vartheta); \\ E_\varphi &= E_0 \frac{\sin \varphi}{\kappa r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \left[ i \frac{\Psi'_n(\kappa a)}{\zeta'_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) \frac{P'_n(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Psi_n(\kappa a)}{\zeta_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) \frac{d P'_n(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \right]; \\ E_\vartheta &= E_0 \frac{\cos \varphi}{\kappa r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ -i \frac{\Psi'_n(\kappa a)}{\zeta'_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) \frac{d P'_n(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Psi_n(\kappa a)}{\zeta_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) \frac{P'_n(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (IV.30)$$

$$\begin{aligned} H_r &= i H_0 \frac{\sin \varphi}{(\kappa r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \frac{\Psi_n(\kappa a)}{\zeta_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) P'_n(\cos \vartheta); \\ H_\varphi &= H_0 \frac{\cos \varphi}{\kappa r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ i \frac{\Psi_n(\kappa a)}{\zeta_n(\kappa a)} \zeta'_n(\kappa r) \frac{P'_n(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Psi'_n(\kappa a)}{\zeta'_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) \frac{d P'_n(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \right]; \\ H_\vartheta &= H_0 \frac{\sin \varphi}{\kappa r} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[ i \frac{\Psi_n(\kappa a)}{\zeta_n(\kappa a)} \zeta'_n(\kappa r) \frac{d P'_n(\cos \vartheta)}{d \vartheta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Psi'_n(\kappa a)}{\zeta'_n(\kappa a)} \zeta_n(\kappa r) \frac{P'_n(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (IV.31)$$



$E_\pi$  — поле во втором направлении. Амплитуду падающего поля положим равной единице.

Принимая во внимание равенства:

$$\begin{aligned} \left. \frac{P_n'(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right|_{\vartheta=0} &= \frac{n(n+1)}{2}, & \left. \frac{dP_n'(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0} &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \left. \frac{P_n'(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right|_{\vartheta=\pi} &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, & \left. \frac{dP_n'(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\pi} &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Запишем:

$$E_0 = i \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2} \left[ \frac{\Psi_n(ka)}{\zeta_n(ka)} - \frac{\Psi_n'(ka)}{\zeta_n'(ka)} \right], \quad (\text{IV.37})$$

$$E_\pi = -i \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left[ \frac{\Psi_n(ka)}{\zeta_n(ka)} + \frac{\Psi_n'(ka)}{\zeta_n'(ka)} \right] \quad (\text{IV.38})$$

Формулы (IV.37) и (IV.38) значительно проще исходных формул (IV.30), однако, и они оказываются не столь простыми, когда дело доходит до вычислений.

Так как нас интересует абсолютная величина поля, то формулы (IV.37) и (IV.38) запишем в виде:

$$|E_0| = \frac{1}{kr} F_0(ka), \quad (\text{IV.39})$$

$$|E_\pi| = \frac{1}{kr} F_\pi(ka), \quad (\text{IV.40})$$

где  $F_0$  и  $F_\pi$  обозначают модули соответствующих сумм.

Нами были построены кривые  $F_0(ka)$  и  $F_\pi(ka)$  для интервала значений  $ka = 0 \div 10$ . Имевшиеся у нас таблицы [25] функций  $J_{\pm(n+1/2)}(x)$  при  $n=0, 1, 2, \dots, 6$  и  $x=0, 1, 2, \dots, 50$ , позволили вычислить значения  $F_0$  и  $F_\pi$  для  $ka=0, 1, 2, 3, 4, 5$  с точностью до четырех знаков; однако, этих точек оказалось недостаточно для построения кривых. Нами были вычислены значения функций  $J_{\pm(n+1/2)}(x)$  при  $n=0, 1, 2, \dots, 6$  для промежуточных точек  $x=0; 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; \dots, 3,0$  по известным для  $J_{n+1/2}(x)$  рядам и рекуррентным формулам.

Перейдем к обсуждению полученных результатов.

Кривые  $F_0$ ,  $F_\pi$  на рис. 49 и 50 дают в некотором масштабе величину амплитуды дифрагированного поля (напомним, что амплитуда падающего поля принята равной единице) в зависимости от величины радиуса шара при  $\lambda = \text{const}$ . На рис. 49 кружочками показаны значения поля, вычисленные Блюмером [31]. Пунктиром вычерчены участки кривых, полученные с помощью графической экстраполяции.

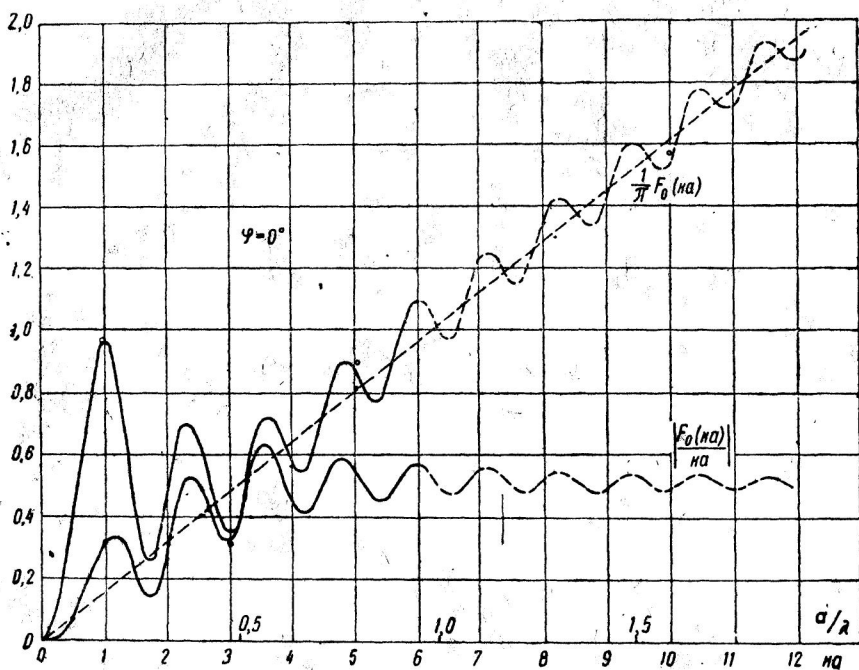


Рис. 49

При малых значениях радиуса шара  $ka < 0,1$  дифрагированное поле можно представить формулами:

$$E_0 = \frac{e^{ikr}}{kr} \frac{3(ka)^3}{4}; \quad E_\pi = \frac{e^{ikr}}{kr} \frac{(ka)^3}{4}.$$

При  $ka > 6$  можно применять приближенные формулы:

$$|E_0| \approx \frac{ka}{2kr}; \quad |E_\pi| \approx \frac{(ka)^2}{2kr}.$$

Для случая, когда радиус шара  $a = \text{const}$  и меняется длина волны падающего поля, формулы (IV.39) и (IV.40) перепишем в виде:

$$|E_0| = \frac{a}{r} \frac{1}{ka} F_0(ka); \quad (\text{IV.41})$$

$$|E_\pi| = \frac{a}{r} \frac{1}{ka} F_\pi(ka). \quad (\text{IV.42})$$

В этом случае величина дифрагированного поля пропорциональна величине  $F(ka)/ka$ . На рис. 49 и 50 даны соответствующие кривые [32].

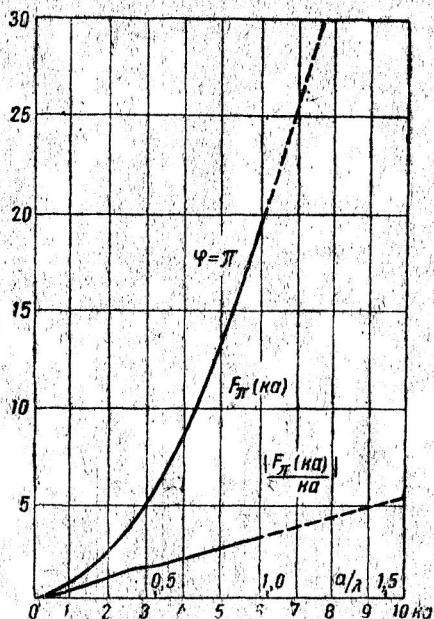


Рис. 50

При больших значениях  $ka$  можно применять асимптотические формулы:

$$|E_0| \approx \frac{a}{r} 0,5; \quad (\text{IV.43})$$

$$|E_\pi| \approx \frac{a}{r} \cdot \frac{ka}{2}. \quad (\text{IV.44})$$

Формула (IV.43) совпадает с формулой, получаемой средствами геометрической оптики.



## Глава V

### МЕТОД РАЗВЕТВЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ. ДИФРАКЦИЯ ОТ ПОЛУПЛОСКОСТИ

#### 19. ВЫВОД ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

Метод разветвленных решений, предложенный Зоммерфельдом [33,8], позволяет исследовать случай дифракции от идеально-отражающего клина, образованного двумя полуплоскостями. Как указывает Купрадзе [2], возможно обобщение метода и на случай, когда клин имеет более двух граней (рис. 51); однако, переход к призме с конечной площадью поперечного сечения невозможен. Мы рассмотрим только частный случай, когда угол клина равен нулю, т. е. случай полуплоскости.

Пусть бесконечно тонкий, идеально отражающий экран, расположенный в плоскости  $xz$ , совпадает с полуплоскостью  $x > 0$ . Направление прихода падающей плоской волны нормально к краю экрана и составляет угол  $\varphi_0$  с осью  $x$ . Дополним физическое пространство вспомогательным фиктивным пространством. Будем считать, что плоскость экрана является плоскостью разреза как физического, так и вспомогательного пространства и

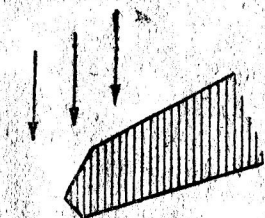


Рис. 51

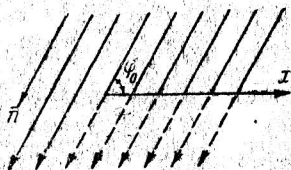


Рис. 52

что физическое пространство „сшито“ с вспомогательным пространством по плоскости разреза. Ось  $z$  является линией разветвления.

При этом падающая волна не отражается от экрана, а переходит во вспомогательное пространство (рис. 52). Далее, считаем, что во вспомогательном пространстве также имеется волна, падающая на экран под углом  $2\pi - \varphi_0$  (зеркальное отраже-

ние действительной падающей волны). Эта волна, попав на экран, переходит в физическое пространство (рис. 53), создавая, таким образом, поток, называемый обычно отраженным.

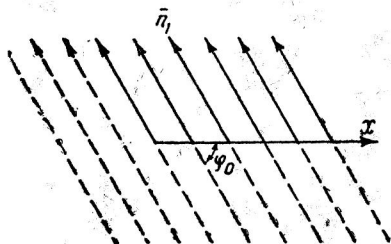


Рис. 53



Рис. 54

Падающая волна в физическом пространстве, попав во вспомогательное пространство, частично огибает там линию разветвления и рассеивается в виде цилиндрической волны (рис. 54). Точно так же падающая волна во вспомогательном пространстве, выйдя в физическое пространство (рис. 55), частично огибает линию разветвления.



Рис. 55

Проведенное дополнение физического пространства вспомогательным позволяет применить для описания происходящих волновых процессов функции, регулярные во всех точках пространства (за исключением линии разветвления). Вид этих функций будет устанавлен далее.

Явления дифракции будут различными при различной поляризации падающего поля. Решение задачи при произвольной поляризации нетрудно написать, если известны решения двух частных случаев, которые рассмотрим отдельно.

**1 случай  $H_{\perp}$ .** В этом случае вектор электрического поля  $\vec{E}$  падающей волны параллелен краю экрана,  $E = E_z$  и, как было показано в главе IV, можно применить электрический вектор Герца, имеющий одну компоненту  $Z_z$ . Вектор электрического поля  $\vec{E}$  отраженной волны также будет иметь только одну компоненту  $E_z$ . Таким образом в данном случае достаточно отыскать решение уравнения

$$\nabla^2 E_z + \kappa^2 E_z = 0 \quad (V.1)$$

с граничными условиями

$$E_z = 0 \text{ при } \varphi = 0; 2\pi. \quad (V.2)$$

**2 случай  $E_{\perp}$ .** В этом случае вектор магнитного поля  $\vec{H}$  падающей волны параллелен краю экрана и можно применить маг-

нитный вектор Герца, имеющий одну компоненту  $Z_z^*$ . Вектор магнитного поля также будет иметь только одну компоненту  $H_z$  и в этом случае необходимо решить волновое уравнение

$$\nabla^2 H_z + \kappa^2 H_z = 0 \quad (V.3)$$

с граничными условиями:

$$E_z = 0 \text{ при } \varphi = 0; 2\pi \quad (V.4)$$

или, что следует из уравнений Максвелла, с граничными условиями:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0, 2\pi. \quad (V.5)$$

Таким образом задача в обоих случаях сводится к решению волнового уравнения

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad (V.6)$$

которое мы будем решать в полярных координатах  $r, \varphi$  с граничными условиями:

$$u = 0 \text{ при } \varphi = 0, 2\pi \quad (V.7)$$

для первого случая ( $u = E_z$ ) и

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0, 2\pi, \quad (V.8)$$

для второго случая ( $u = H_z$ ).

Плоская волна, распространяющаяся вдоль оси  $x$  по направлению к началу координат, записывается выражением (множитель  $e^{-i\omega t}$  опускаем):

$$u = A e^{-ikx} = A e^{-ikr \cos \varphi}. \quad (V.9)$$

Если направление прихода волны  $\alpha$  произвольно, то

$$u = A e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (V.10)$$

В общем случае амплитуда волны  $A$  может зависеть от  $\alpha$ .

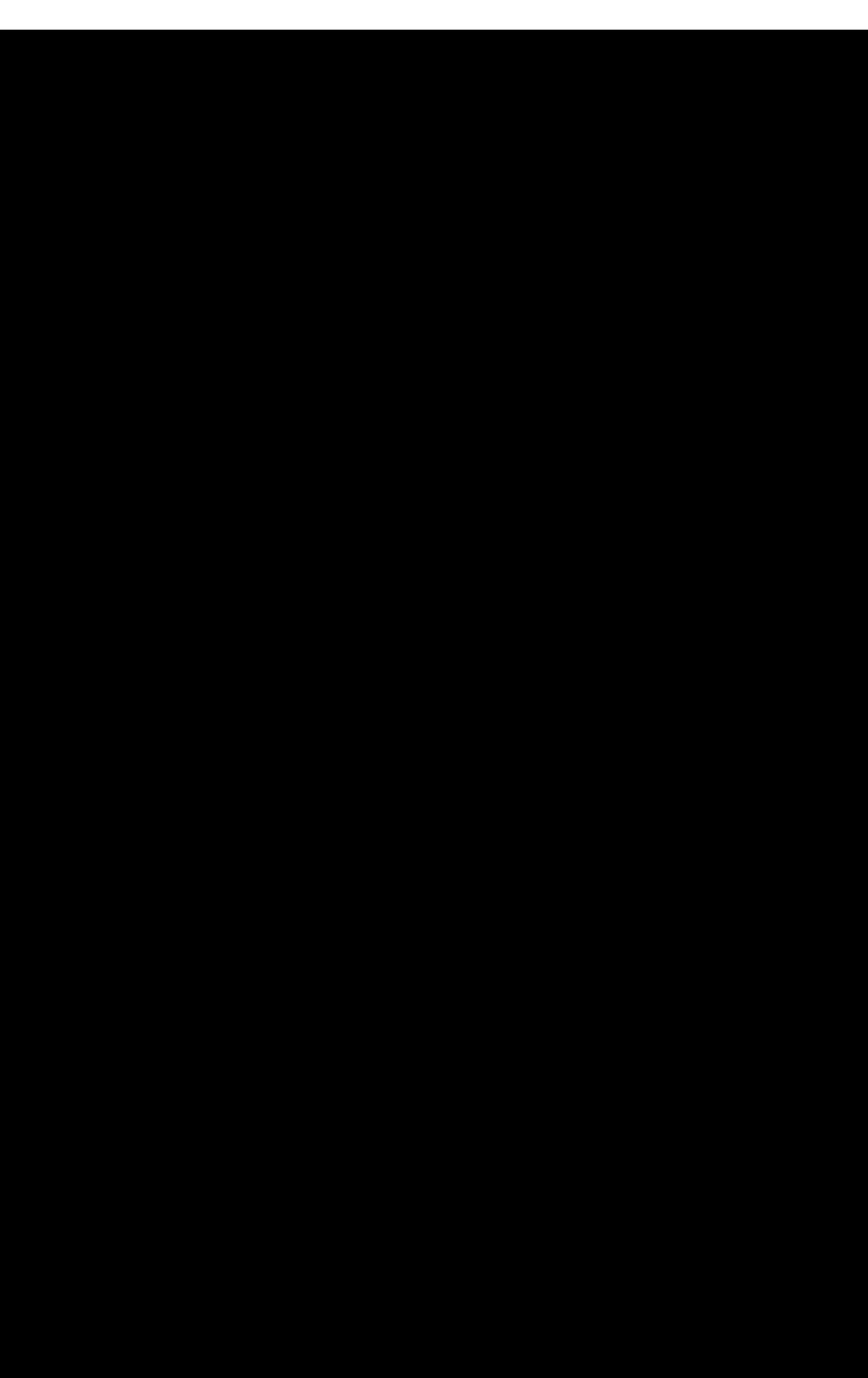
$$u = A(\alpha) e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (V.11)$$

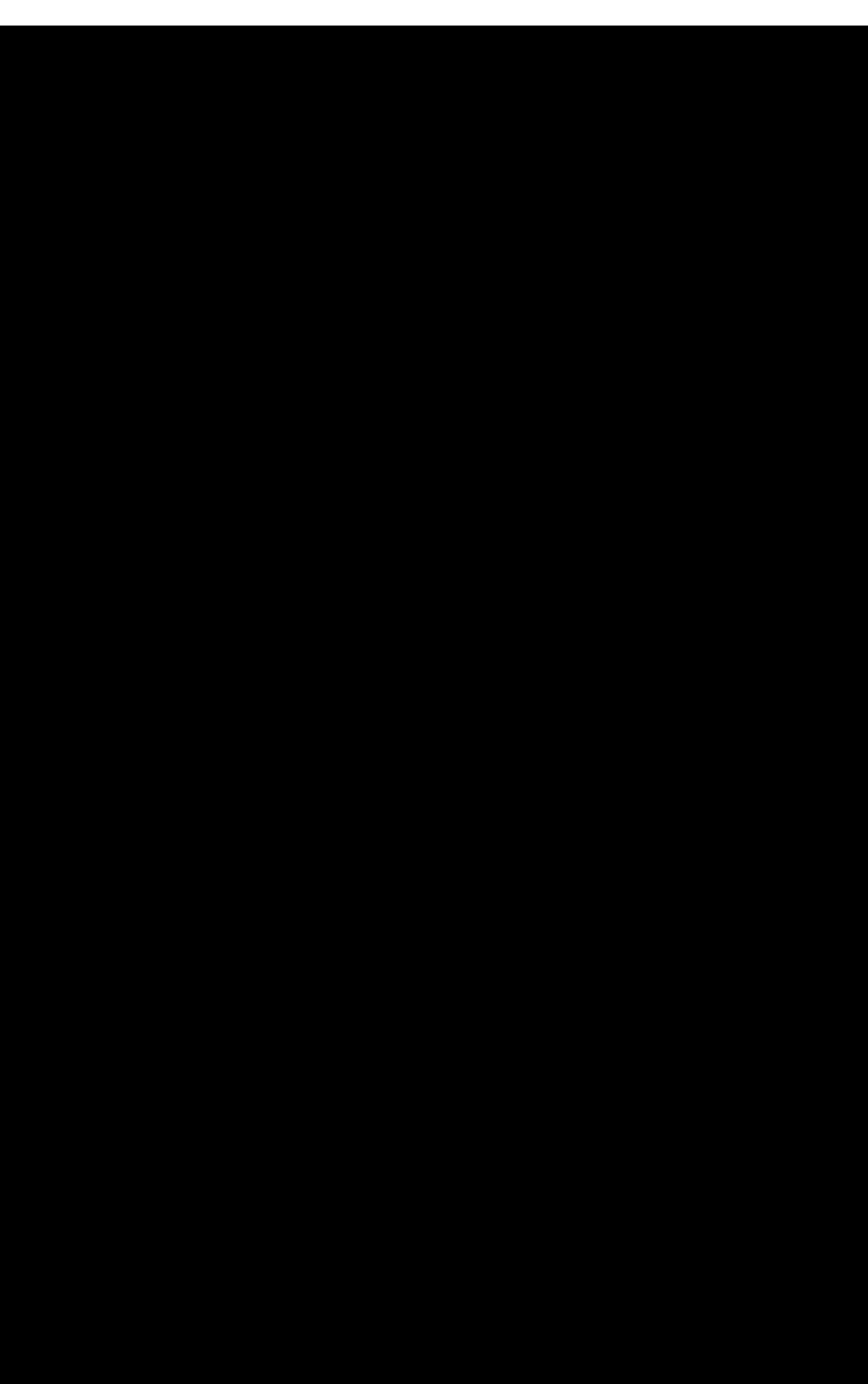
Очевидно, что функции (V.9), (V.10) и (V.11) от  $r$  и  $\varphi$  являются решениями волнового уравнения (V.6). Решением волнового уравнения будут также и комбинации функций вида (V.11), например:

$$u = \sum_n A_n(\alpha) e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)}$$

или

$$u = \int A(\alpha) e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)} d\alpha. \quad (V.12)$$





Величина интеграла (V.18) будет различной, в зависимости от того, на каком листе находятся пути интегрирования ( $\Gamma$ ). На рис. 57 и 58 показаны пути интегрирования на первом и втором листах  $z$ .

Так как функция  $A(z)$  имеет период  $4\pi$ , то на первом листе она имеет полюсы в точках  $z = \varphi_0$ ;  $z = \varphi_0 + 4\pi$  . . . и на втором листе — в точках  $\varphi_0 + 2\pi$ ;  $\varphi_0 + 6\pi$  . . .

Допустим, что  $r \rightarrow \infty$ , тогда на заштрихованных полосах подинтегральная функция обращается в нуль. Сместим теперь петли ( $\Gamma$ ) таким образом, чтобы они проходили только по заштрихованным областям, как показано на рис. 57 и 58 пунктиром.

Тогда на втором листе

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} u_2 \rightarrow 0, \quad (V.19)$$

На первом листе при смещении верхней ветви ( $\Gamma$ ) нам придется обойти полюс, и интеграл (V.18) будет определяться вычетом в точке  $z = \varphi_0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_1 \rightarrow e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (V.20)$$

Таким образом при интегрировании по первому листу получается выражение для свободно распространяющейся волны ( $r \rightarrow \infty$ ), которая действительно существует (рис. 52) при условии

$$|\varphi - \varphi_0| < \pi. \quad (V.21)$$

Линия  $|\varphi - \varphi_0| = \pi$  соответствует геометрической границе тени. Теперь произведем операцию, которая была нами отложена: проведем разрез из точки разветвления  $z = +i\infty$  по линии  $x_1 = \text{const}$  так, чтобы для точек  $z$  на первом листе выполнялось условие (V.21). Если угол  $\varphi$  таков, что

$$|\varphi - \varphi_0| > \pi, \quad (V.22)$$

т. е. проходит в области тени, переходим на второй лист.

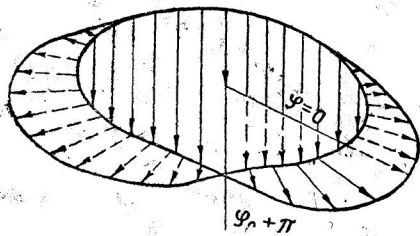


Рис. 59

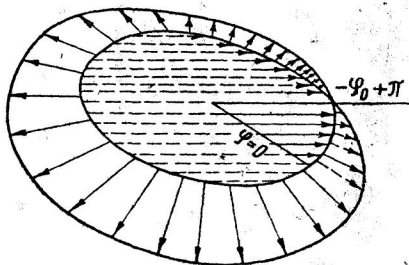


Рис. 60

Рис. 59 иллюстрирует сказанное: сплошной штриховкой показаны углы  $\varphi$  в физическом пространстве, пунктирной штриховкой — углы во вспомогательном пространстве. При  $0 < \varphi < \varphi_0 + \pi$

точка наблюдения находится на прямом свете, соответственно чему интеграл на плоскости  $z$  берется на первом листе и дает при этом  $u_1$  (V.20). При  $\varphi_0 + \pi < \varphi < 2\pi$  точка наблюдения находится в области тени, куда попадает только дифрагированное поле, при этом интеграл на плоскости  $z$  берется на втором листе и равен  $u_2$ . При  $\varphi = \varphi_0 + \pi$  производится переход с первого листа на второй.

Вычисление поля, отраженного от экрана, проводится аналогичным образом, что иллюстрируется рис. 60. Будем считать, что отраженная волна приходит на экран из вспомогательного пространства (сплошная штриховка) с направлением  $-\varphi_0$ . При  $0 < \varphi < -\varphi_0 + \pi$  точка наблюдения находится в области отраженной волны, интеграл на плоскости  $z$  берется на первом листе и дает  $u_1$  (V.20). При  $-\varphi_0 + \pi < \varphi < 2\pi$  точки наблюдения находятся вне области отраженной волны, однако, поле последней попадает и туда вследствие дифракции; для этих точек вычисляем интеграл на втором листе плоскости  $z$  и получаем  $u_2$  (V.19). При  $\varphi = -\varphi_0 + \pi$  производится переход с первого листа на второй.

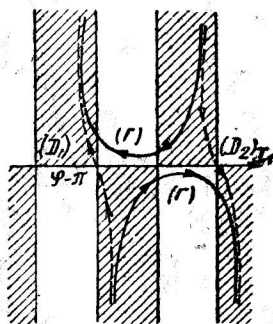


Рис. 61

Приступим теперь к вычислению интеграла (V.18), полагая, что выполняется неравенство (V.22), т. е. беря значение подынтегральной функции на втором листе. Пути интегрирования ( $\Gamma$ ), показанные на рис. 58, видоизменим для удобства вычисления так, как показано на рис. 61. Пути ( $D$ ) эквивалентны путям ( $\Gamma$ ), поскольку в интересующей нас области подынтегральная функция регулярна.

Сделаем подстановки:

$$z = \varphi - \pi + \zeta$$

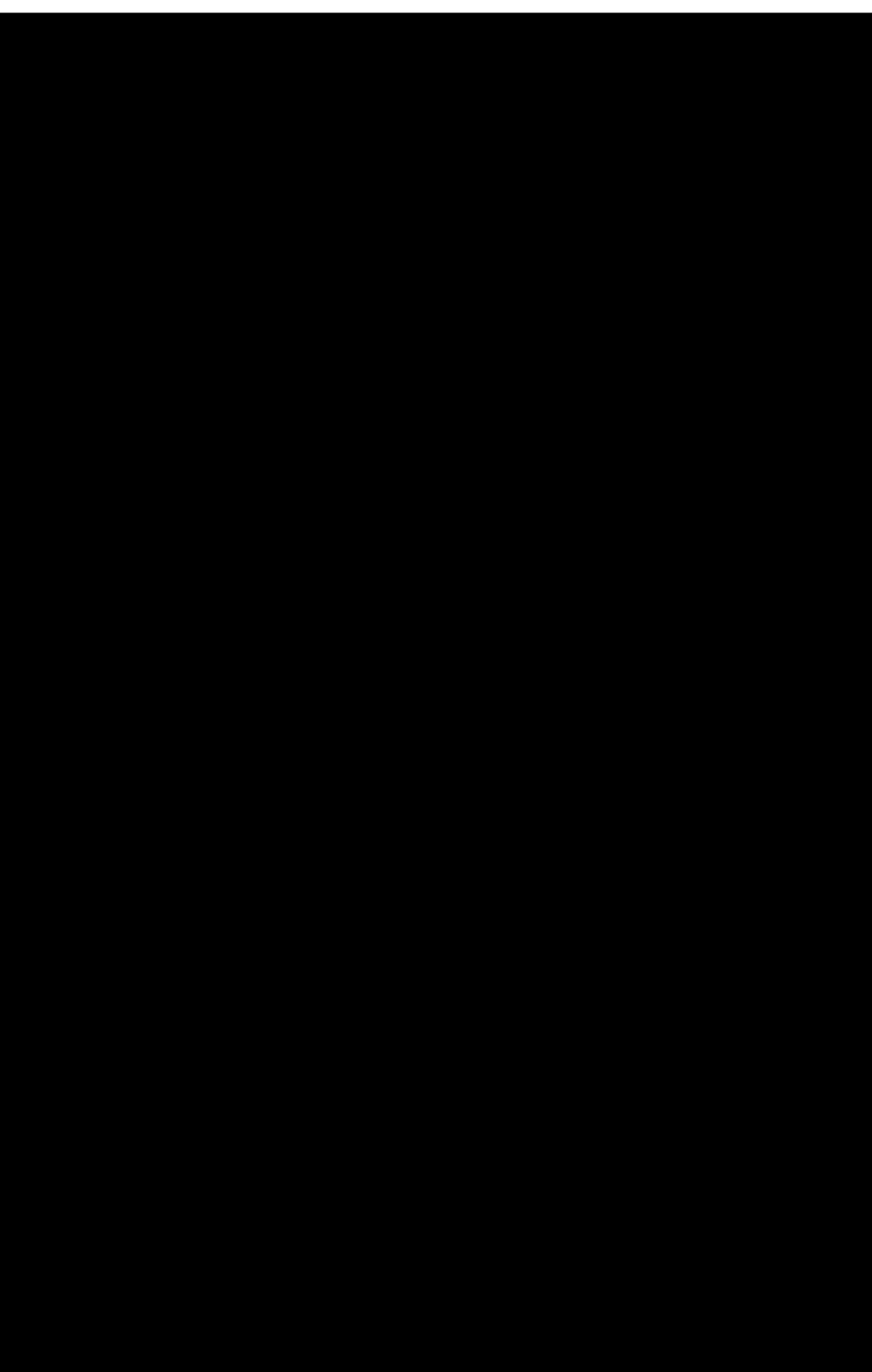
при интегрировании по пути  $D_1$  и

$$z = \varphi + \pi + \zeta$$

при интегрировании по пути  $D_2$ ; при этом из (V.18) получим:

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{(D_1)} \frac{-ie^{i\frac{\varphi+\zeta}{2}}}{-ie^{i\frac{\varphi-\zeta}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0}{2}}} e^{ikr \cos \zeta} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{(D_2)} \frac{ie^{i\frac{\varphi+\zeta}{2}}}{ie^{\frac{\varphi+\zeta}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0}{2}}} e^{ikr \cos \zeta} d\zeta =$$





Формула (V.26) дает значение  $u$  на втором листе, но по правилам аналитического продолжения эта формула действительна и для первого листа. Сделаем проверку: положим, что  $r \rightarrow \infty$ , тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad u = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

что совпадает с (V.20).

Применяя интеграл Френеля

$$F_1(v) = \int_0^v e^{i\frac{\pi}{2} t^2} dt \quad (V.27)$$

преобразуем формулу (V.26) к виду

$$u(r, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2\sqrt{\frac{\kappa r}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right\}; \quad (V.28)$$

Напомним, что  $F_1(-v) = -F_1(v)$ , знак аргумента функции  $F_1$  определяется знаком  $\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}$ , величину  $\sqrt{\frac{\kappa r}{\pi}}$  считаем положительной.

Функция  $u$  (V.26) или (V.28) является решением волнового уравнения (V.6).

Граничные условия (V.7) будут выполняться при добавлении к (V.28) второй функции (со знаком минус)

$$u_{отр}(r, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2\sqrt{\frac{\kappa r}{\pi}} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right) \right\}, \quad (V.29)$$

представляющей отраженную волну (рис. 53). Граничные условия (V.8) выполняются при добавлении к (V.28) функции (V.29) со знаком плюс.

Таким образом для случая  $H_{\perp}$  получаем формулу

$$E_z = \frac{E_0}{2} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2\sqrt{\frac{\kappa r}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right\} - \frac{E_0}{2} e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2\sqrt{\frac{\kappa r}{\pi}} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right) \right\} \quad (V.30)$$

и для случая  $E_{\perp}$ ;

$$H_z = \frac{H_0}{2} e^{i k r \cos(\varphi - \varphi_0)} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa r}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) \right\} + \\ + \frac{H_0}{2} e^{-i k r \cos \varphi + \varphi_0} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa r}{\pi}} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right) \right\} \quad (\text{V.31})$$

Формулы (V.30) и (V.31) дают решение поставленной задачи.

В выводе Зоммерфельда, изложенном в [8], допущены некоторые шероховатости; так, например, применяя на протяжении нескольких глав временной множитель в форме  $e^{-i \omega t}$ , он получает разветвленное решение в § 1.3 (стр. 855), пригодное при  $e^{+i \omega t}$ , как это выяснилось уже впоследствии в § 2.3 (стр. 876). Для этого, чтобы получить решение, пригодное при  $e^{-i \omega t}$ , мы сдвигаем пути интегрирования по действительной оси  $x_1$  на некоторую величину в сторону отрицательных  $x_1$ .

В следующем параграфе дается анализ картины распределения токов вблизи края экрана. Дальнейшие выводы делаются в главе VI.

## 20. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

### Случай $E_{\perp}$ .

Вычислим плотность тока на экране. Так как (V.30) и (V.31) дают величину **результатирующего** поля, то из (V.31) находим сразу, полагая  $\varphi = 0$

$$j_x = j_x = H_0 e^{-i k x \cos \varphi_0} \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa x}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) \right\} \quad (\text{V.32})$$

+ плотность тока на освещенной стороне экрана, и полагая  $\varphi = 2\pi$ , плотность тока на теневой стороне экрана

$$j_x = j_x = -H_0 e^{-i k x \cos \varphi_0} \left\{ 1 - \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa x}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) \right\} \quad (\text{V.33})$$

Минус, стоящий впереди, получается потому, что нормаль к теневой стороне экрана направлена в сторону отрицательных значений  $y$ .

Учитывая равенство  $F_1(\infty) = \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$  и полагая  $\cos \frac{\varphi_0}{2} > 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ , получим вдали от края экрана:

$$j_x = 2H_0 e^{-\kappa x \cos \varphi_0}, \quad j_x = 0, \quad (\text{V.34}) \\ \varphi = 0 \qquad \qquad \qquad \varphi = 2\pi.$$

Вблизи края экрана, при  $x \rightarrow 0$ ,  $1 \gg \sqrt{2} |F_1|$ :

$$j_x = H_0 e^{-i k x \cos \varphi_0}, \quad j_x = -H_0 e^{-i k x \cos \varphi_0} \quad (\text{V.35}) \\ \varphi = 0 \qquad \qquad \qquad \varphi = 2\pi.$$

Формулы (V.35) показывают нам, что в случае  $E_1$  токи вблизи края экрана на освещенной и теневой сторонах экрана равны по величине, но текут в противоположные стороны. Это означает, что на краю экрана сосредоточенные заряды отсутствуют: ток, текший по освещенной стороне экрана, огибает край экрана и переходит на теневую сторону (рис. 62). Этот вывод остается верным при любом угле падения  $\varphi_0$  и, следовательно, будет верным и для экранов конечной величины, например, полосы, поскольку влияние (других) краев экрана можно представить в виде некоторой совокупности падающих вдоль экрана плоских волн.

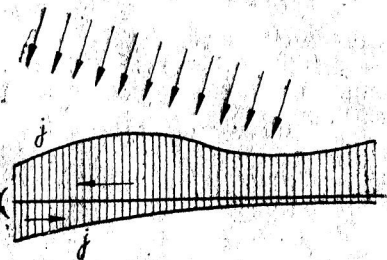


Рис. 62

Формулы (V.32) и (V.33) показывают, что при удалении от края экрана плотность тока на теневой стороне экрана убывает монотонно, а на освещенной стороне колеблется около величины  $2H_0$ .

Складывая (V.32) и (V.33) получим в отличие от [II.46] суммарный ток

$$j_x = 2H_0 e^{-ikx} \cos \varphi_0 \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{kx}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right). \quad (V.36)$$

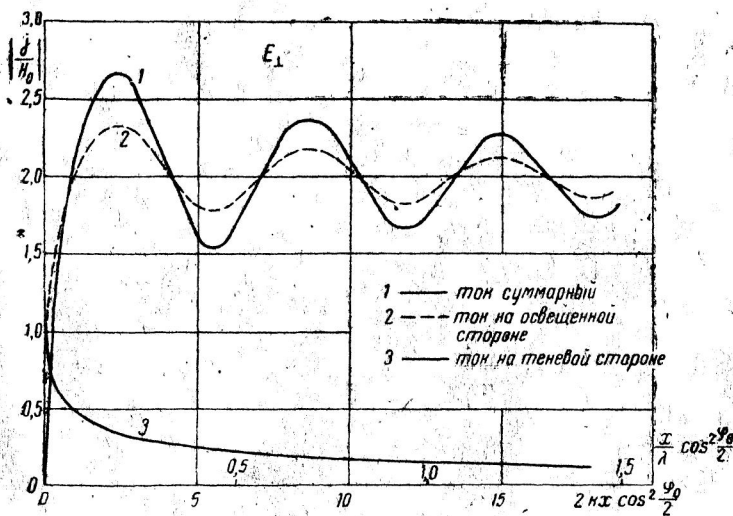


Рис. 63

На рис. 63 показано распределение тока вблизи края экрана

$$j = j \left( kx \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \right).$$

При  $x \rightarrow \infty$  формула (V.36) дает

$$j_x = 2H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \quad (\text{V.37})$$

и при  $x = 0$

$$j_x = 0. \quad (\text{V.38})$$

Исходя из формулы (V.36), можно определить ширину зоны краевого эффекта на поверхности экрана.

Ширина зоны краевого эффекта зависит от угла падения  $\varphi_0$ : она минимальна при  $\varphi_0 \rightarrow 0$  и простирается в бесконечность при  $\varphi_0 \rightarrow \pi$  (рис. 63). При  $\varphi_0 = \pi$  суммарный ток  $j_x = 0$ , явления дифракции отсутствуют; в этом случае силовые линии электрического поля падающей волны перпендикулярны к поверхности экрана; тени нет.

### Случай $H_{\perp}$

Применяя уравнение Максвелла, находим из (V.30):

$$\begin{aligned} i\omega\mu H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = \frac{E_0}{2r} ikr \sin(\varphi - \varphi_0) e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} & \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(-) \right\} - \\ - \frac{E_0}{2r} ikr \sin(\varphi + \varphi_0) e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} & \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(+) \right\} + \\ + \frac{E_0}{2r} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kr \cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} & \cdot \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} - \\ \frac{E_0}{2r} e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kr \cos^2 \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} & \cdot \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \end{aligned} \quad (\text{V.39})$$

$$H_z = 0.$$

Ток на поверхности экрана имеет только одну компоненту по оси  $z$ . Полагая  $\varphi = 0$ , получим из (V.39) для освещенной стороны экрана:

$$\begin{aligned} j_{z=0} = H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \sin \varphi_0 & \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) + \right. \\ & \left. + i \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kx \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{2\pi kx \cos \frac{\varphi_0}{2}}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

при  $x \rightarrow \infty$   $j_z = -2H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \sin \varphi_0$ .

Полагая  $\varphi = 2\pi$ , получим из (V.39) для теневой стороны экрана: при  $x \rightarrow \infty$   $j_z = 0$ .

$$\begin{aligned} j_{z=2\pi} = H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \sin \varphi_0 & \left\{ 1 - \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) - \right. \\ & \left. - i \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kx \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{2\pi kx \cos \frac{\varphi_0}{2}}} \right\}; \end{aligned} \quad (\text{V.41})$$

Как видно из формул (V.40) и (V.41), ток вблизи края течет на обеих сторонах экрана в одну сторону; при  $x \rightarrow 0$

$$i_z \rightarrow -H_0 \sin \frac{\varphi_0}{2} \frac{i\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi \kappa x}}. \quad (\text{V.42})$$

Плотность тока при  $x \rightarrow 0$  стремится к бесконечности, однако, ток на полоске экрана конечной ширины  $a$  конечен, так как интеграл

$$\int_0^a x^{-1/2} dx$$

сходится.

Складывая (V.40) и (V.41), получим суммарный ток

$$j_z = -2H_0 e^{-i\kappa x \cos \varphi_0} \sin \varphi_0 \left\{ \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{\kappa x}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) + \right. \\ \left. + i \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2\kappa x \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{2\pi \kappa x} \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right\}. \quad (\text{V.43})$$

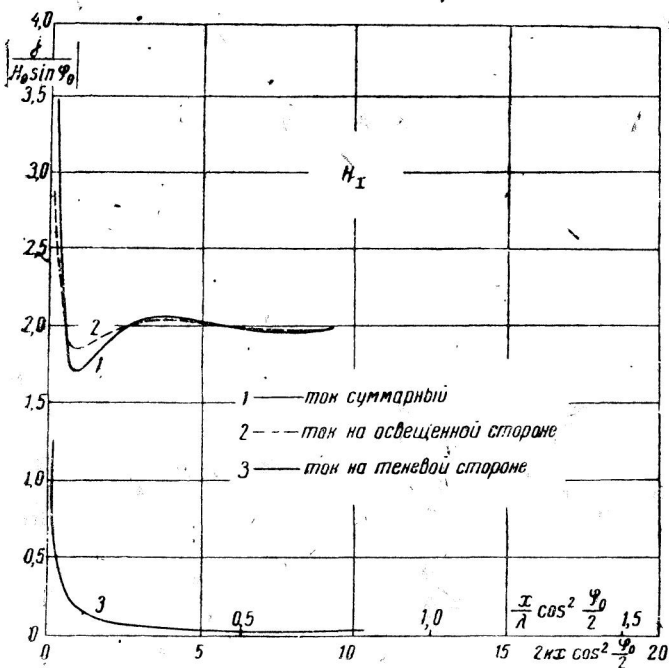


Рис. 64

На рис. 64 показано распределение тока вблизи края экрана. В отличие от случая  $E_{\perp}$  здесь зона краевого эффекта имеет незначительную ширину.

При  $\varphi_0 \rightarrow 0$  на всем экране  $j \rightarrow 0$ , а поле вблизи экрана исчезает.

При  $\varphi_0 \rightarrow \pi$

$$j = -2H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \frac{i\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi kx}}. \quad (\text{V.44})$$

В отличие от случая  $E_{\perp}$  здесь дифракционные явления имеют место и при  $\varphi_0 = \pi$ , при этом формула (V.30) дает

$$E_z = E_0 e^{ikr \cos \varphi} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2 \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (\text{V.45})$$

Отметим в заключение еще одно следствие, вытекающее из формулы (V.36) и (V.43): представим, что поле падает на полосу столь широкую, что зоны краевого эффекта малы по сравнению с ее шириной; при этом дифракцию у каждого края можно анализировать раздельно. Тогда, если направление прихода волны нормально к поверхности полосы ( $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ), дифракция у обоих краев будет описываться симметричными формулами. Если же  $\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}$ , явления у краев будут различными; именно, если поле падает справа (рис. 65), краевые явления будут более ярко выражены — будут занимать большую часть полосы — у правой кромки полосы. Зона краевого эффекта у левой кромки полосы будет более узкой.



Рис. 65

Если вместо (V.30) и (V.31) написать более общие формулы для случая косо падения волны (например, применяя метод, указанный в § 16) и найти затем соответствующие выражения для тока, то последние могут играть роль функции  $G$  Фока (см. § 13) при решении задач о дифракции от бесконечного тонкого, слабо искривленного экрана конечной, но достаточно большой величины. Под достаточно большой величиной экрана мы понимаем такую, когда зона краевого эффекта не достигает середины экрана. В частности, таким путем можно попытаться уточнить вычисления Узкова [20] диаграмм направленности параболического зеркала.

## Глава VI

### СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

#### 21. ДИФРАКЦИЯ ОТ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Аргументом интеграла Френеля, входящего в формулу (V.28), полученную строгим методом, является величина

$$s_1 = 2\sqrt{\frac{kr}{\pi} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}$$

и, следовательно, во всех точках поверхности  $s_1 = \text{const}$  амплитуда поля имеет одну и ту же величину. Уравнение  $s_1 = \text{const}$ , связывающее координаты  $r$  и  $\varphi$ , является уравнением параболы, ось которой совпадает с границей геометрической тени (рис. 66). Выбирая подходящим образом величину  $s_1$  (см. например [14]), получим такую параболу, что поле вне ее можно будет определить по более простой формуле, в которой интегралы Френеля заменены их асимптотическими выражениями.

Область внутри параболы можно назвать областью полутени. Вне параболы, с одной ее стороны, будет область прямого света, с другой ее стороны — область тени. Явление дифракции наиболее сильно проявляется в области полутени, вблизи границы геометрической тени.

Рассмотрим теперь точные формулы (V.30) и (V.31) для двух случаев поляризации поля. Если отвлечься от знака второго слагаемого в этих формулах, показывающего, что фаза отраженного потока зависит от поляризации падающего поля, то следует признать в остальном эти формулы одинаковыми. Учитывая, что на достаточно большом расстоянии от края экрана, в волновой зоне, электрическое и магнитное поле связаны простой зависимостью  $E = 120\pi H$ , приходим к интересному выводу.

В случае дифракции от полуплоскости величина поля (а следовательно, и вектор Герца) в точках, достаточно удаленных

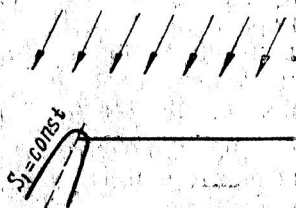


Рис. 66

от края полуплоскости, не зависит от поляризации падающей волны.

Поле, отраженное от экрана, и тень за экраном являются следствием существования токов (V.36) и (V.43) на экране. Интегрированием по всей поверхности экрана можно найти их вектор—потенциал и затем —поле. В обоих случаях поляризации ток можно разбить на два слагаемых: одно соответствует падающему полю ( $j=2H_0$ ) и второе—цилиндрической волне, порождаемой краем экрана [8]. При этом от поляризации падающей волны зависит только второе слагаемое, учитывающее наличие краевого эффекта. Из вывода, который мы сделали выше в отношении величины поля в волновой зоне ( $\frac{1}{\sqrt{kr}} \ll 1$ ), следует, что наличие „возмущенной“ компоненты тока можно не учитывать. Иными словами: при вычислении поля на расстоянии  $\sqrt{kr} \gg 1$  можно не учитывать краевого эффекта.

Но если это так, то при вычислениях поля приближенными методами (когда краевые эффекты не учитываются) мы должны получить правильный ответ. Действительно, просматривая формулы (I.41), (II.42) и (II.55), замечаем, что они дают в области полутени ту же величину поля, что и точные формулы.

Зоммерфельд, применяя [8] метод Кирхгофа в случае дифракции от полуплоскости, приходит к формуле, отличающейся от нашей (I.41) тем, что интеграл Френеля берется от другого аргумента. Однако такой результат является следствием некорректного перехода от случая щели к случаю полуплоскости; именно: при вычислении поля от щели Зоммерфельд считает лучи, идущие от различных точек щели к точке наблюдения, параллельными; при переходе же к полуплоскости такое приближение недопустимо. При более аккуратном вычислении аргумент интеграла Френеля получается одинаковым с аргументом, получающимся при строгом решении.

Очевидно, что вывод о допустимости пренебрежения краевым эффектом в случае дифракции от полуплоскости нельзя распространять на случай дифракции от полосы. Из литературы известны формулы строгого решения последней задачи [34], а также и некоторые количественные данные [35], из которых следует, в частности, что при дифракции от полосы наблюдаются резонансные явления, если ширина полосы сравнима с длиной волны (в случае  $E_{\perp}$ ). Подробнее на этом останавливаться не будем.

Относительно случая дифракции от плоского экрана произвольной формы укажем на работу Леонтовича [36], где он строго доказал принцип дополнительности при дифракции электромагнитных волн.



## 22. ДИФРАКЦИЯ ОТ ЦИЛИНДРА

Обратимся к случаю дифракции от цилиндра. Для удобства сравнения результатов, полученных различными методами, будем оперировать величиной  $E \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}$ , которая не зависит ни от расстояния до точки наблюдения, ни от абсолютной величины радиуса цилиндра.

Рассмотрим направление  $\varphi=0$ , т. е. направление прихода падающей волны. На рис. 67 даны графики зависимости величины  $E \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}$  от  $ka$ .

Пунктиром показана величина  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  амплитуды светового возмущения, найденная средствами геометрической оптики (см. формулу I.2).

Кривая *A* получена методом Кирхгофа (формула I.62), она же получается при применении принципа эквивалентности (формулы II.67 и II.75). Кривые *B* и *C* получены строгим решением; кривая *B* соответствует случаю  $H_{\perp}$  (формула III.59) и кривая *C* — случаю  $E_{\perp}$  (формула III.61).

При рассмотрении названных кривых прежде всего обращает внимание неожиданно быстрое сближение различных кривых при увеличении  $ka$ . Так, уже при  $\frac{a}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,5$  кривые расходятся не более, чем на 10%. Казалось бы, при таком малом радиусе цилиндра дифракционные явления должны быть достаточно существенными и значения поля, вычисленные приближенными методами, должны значительно отличаться от истинных. Однако, как показывают рассматриваемые кривые, это не совсем так.

Для объяснения слабого влияния дифракционных явлений здесь можно выдвинуть две причины. Первая причина заключается в том, что поверхность цилиндра представляется колебательной системой с большим декрементом затухания и явления резонанса (которые не учитываются приближенными теориями) здесь слабо выражены. Вторая причина заключается в следующем. Дифракция наиболее сказывается вблизи границы геомет-

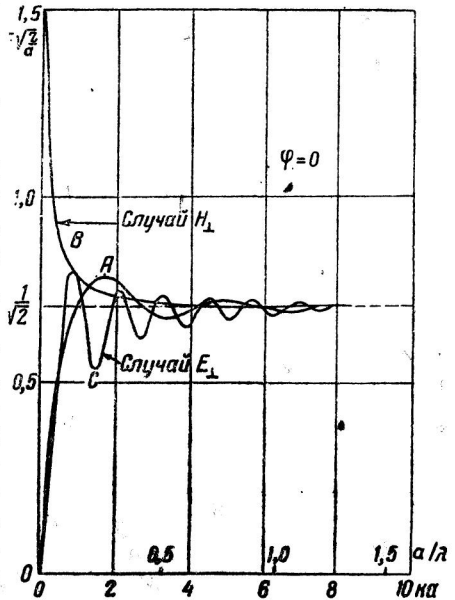


Рис. 67

рической тени, в данном случае в области  $\varphi \approx 180^\circ$ ; рис. 37 и 43 доказывают это достаточно убедительно. Чем далее точка наблюдения от границ тени, тем более применимы приближенные методы. В этом отношении направление  $\varphi = 0^\circ$  является наиболее благоприятным.

Сделаем некоторые замечания относительно каждой кривой в отдельности. В случае  $E_\perp$  кривая  $C$  извивается вокруг предельного значения, причем в точках резонанса отклоняется менее, чем в точках „антирезонанса“.

В точках резонанса кривая  $C$  находится выше кривой  $B$ . Кривая  $B$  (случай  $H_\perp$ ) монотонно приближается к предельному значению. Очевидно, что в этом случае явлений резонанса не может быть, так как ток течет вдоль бесконечного цилиндра, однородного по всей длине, а явления резонанса наблюдаются только в тех системах с распределенными постоянными, где имеются „прямые“ и „отраженные“ волны электрических тока и заряда. Наоборот, в любой системе конечных размеров обязательно существуют резонансные частоты, если она образована из проводников достаточной проводимости. На кривой  $A$  имеются, так же как и на кривой  $C$ , максимумы и минимумы; однако, своим происхождением они обязаны не явлениям резонанса, а интерференции излучения от соответствующих зон Френеля, амплитуду и фазу колебаний в которых мы взяли приближенно. Иначе говоря, немонотонность кривой  $A$  (охватывающей оба случая  $E_\perp$  и  $H_\perp$ ) появилась только вследствие приближенности метода.

Рассмотрим теперь направление тени  $\varphi = 180^\circ$ . На рис. 68 даны кривые зависимости величины  $E \sqrt{kr} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  от  $ka$ . Кривая  $A$  получается при применении принципа эквивалентности (формула II.68); она является прямой с угловым коэффициентом 1. Кривые  $B$  и  $C$  получены строгим решением; кривая  $B$  соответствует случаю  $H_\perp$  (формула III.59) и кривая  $C$  — случаю  $E_\perp$  (формула III.61). Относительная ошибка, получающаяся при вычислении поля по формуле II.68, уменьшается с ростом  $ka$ .

При  $ka \rightarrow \infty$  все три кривые возрастают до бесконечности. Этот ход кривых объясняется тем, что при выводе соответствующих формул мы полагали  $r \rightarrow \infty$ ; в действительности амплитуда дифрагированного поля не превышает амплитуды поля падающей волны. Геометрическая оптика дает для направления  $\varphi = 180^\circ$  равенство амплитуд поля падающей и отраженной волны (см. § 1).

При вычислении по методу Кирхгофа мы получили для  $\varphi = 180^\circ$  поле, равное нулю (формула I.73). Повидимому, такой результат объясняется недостаточной точностью вычисления соответствующего интеграла I.60.

Для произвольных направлений  $\varphi$  величина дифрагированного поля приближенными методами нами не вычислялась. Согласно сказанному выше, точность будет большей при меньших  $\varphi$ ; величина получающейся при этом ошибки в среднем будет больше ошибки при  $\varphi=0^\circ$  и меньше ошибки при  $\varphi=180^\circ$ .

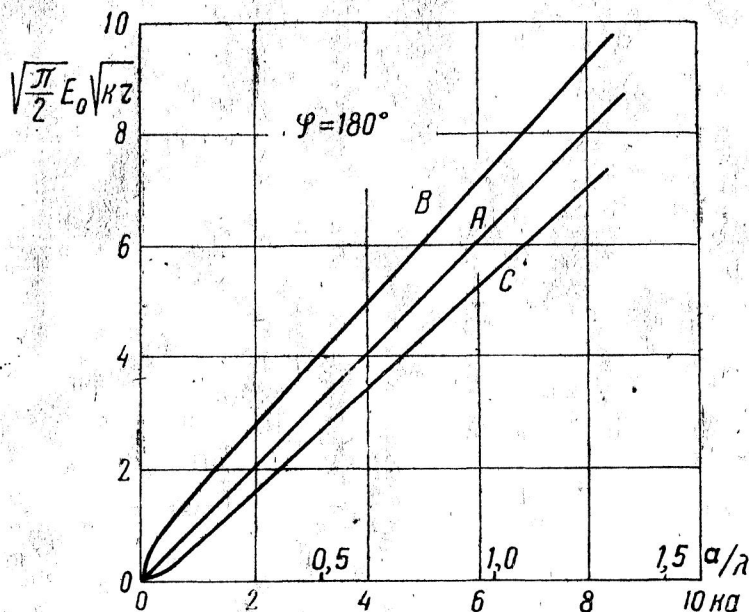


Рис. 68

Для оценки приближенных методов вернемся к рис. VI.2, так как определение величины дифрагированного поля в направлении  $\varphi=0$  более существенно при решении пятой группы дифракционных задач, нежели в других направлениях. Сравнивая кривую *A* с кривыми *B* и *C*, приходим к следующим заключениям:

1) Приближенные методы не дают возможности определить резонансные частоты отражающего тела.

2) Величины поля в *max* и *min* кривой *A*, даваемые приближенными методами, отклоняются от предельного значения  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  менее, чем соответствующие величины по точной кривой *C*.

3) При некоторых частотах ( $ka=1,5; 3,2; 5,0$ ) кривая *A* дает большую ошибку, чем „оптическая“ прямая  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

4) При  $ka < 0,8$  кривые *A* и *C* идут к началу координат монотонным образом.

5) В случае дифракции от цилиндра при вычислении поля в направлении на источник поля ( $\varphi=0$ ) достаточно применить методы геометрической оптики, если  $ka > 1$ ; более точные прибли-

женные методы, учитывающие дифракцию, не уточняют результата.

б) При вычислении поля в направлении тени применение векторизованной формулы Кирхгофа дает удовлетворительные результаты.

### 23. ДИФРАКЦИЯ ОТ ШАРА

На рис. 69 даны графики зависимости величины  $E \cdot \frac{r}{a}$  от  $ka$ .

Пунктиром показана оптическая асимптота, т. е. кривая, найденная средствами геометрической оптики. Кривая А получена

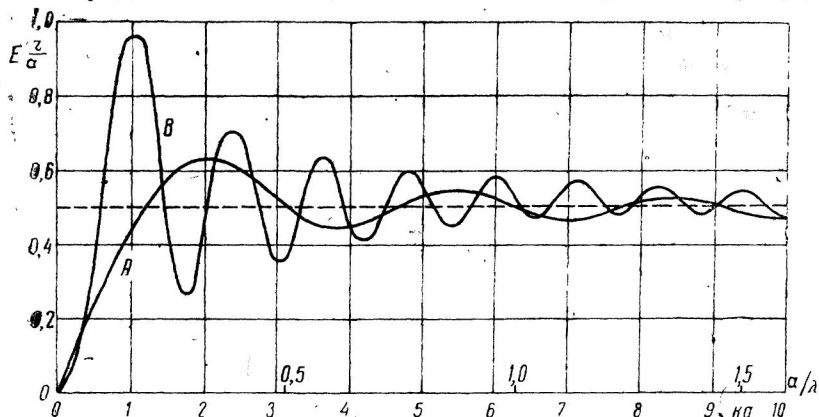


Рис. 69

методом Кирхгофа (формула I.86); она же получается при применении принципа эквивалентности (формула II.96). Кривая В получена строгим решением (формула IV.37).

При  $ka > 1,5$  обе кривые расходятся между собой и оптической асимптотой менее, чем на 10%, этим и отличаются от аналогичных кривых (рис. 67) для цилиндра. Резонансные явления в случае дифракции от шара более резко выражены, чем при дифракции от цилиндра, причем резонансные частоты шара не совпадают с резонансными частотами цилиндра.

Однако общий характер кривых остается тем же и, следовательно, позволяет сделать аналогичные выводы:

1) приближенные методы учета дифракции не дают возможности определить резонансные частоты отражающего тела;

2) при некоторых частотах ( $ka = 1,8; 3,0; 3,5; 5,5$ ) кривая А дает большую ошибку, чем оптическая асимптота;

3) в случае дифракции от шара при вычислении поля в направлении на первичный источник поля ( $\varphi = 0$ ) достаточно применить методы геометрической оптики, если  $ka > 1$ ; формула Кирхгофа в классической и векторизованной форме не дает возможности уточнить результат;

4) при вычислении поля в направлении тени применение векторизованной формулы Кирхгофа дает удовлетворительный результат.

## 24. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

А. Случай отражающего тела конечных размеров и с конечными радиусами кривизны поверхности. Точка наблюдения находится вдали от границы геометрической тени

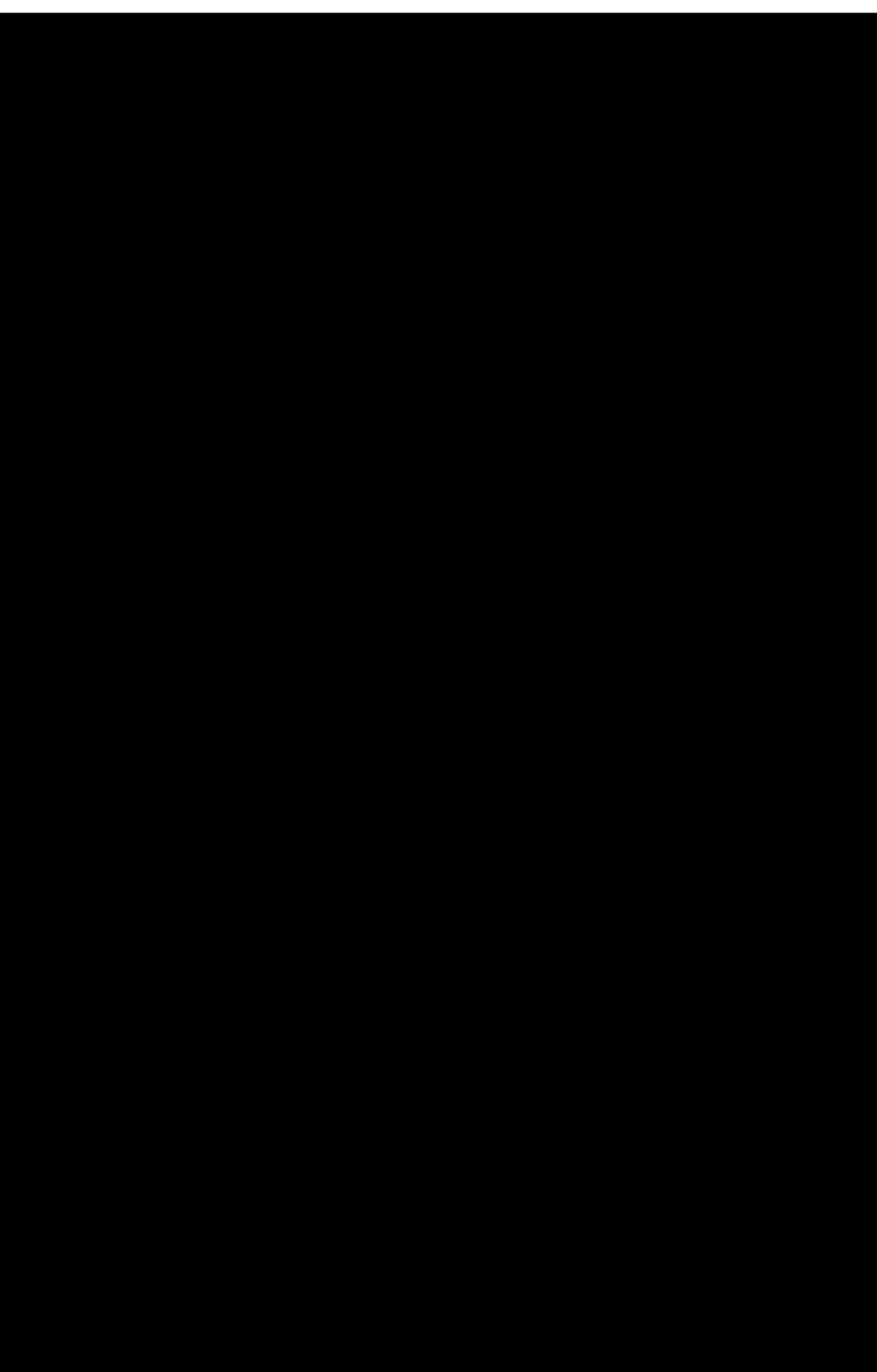
Для практики представляется интересным прежде всего случай, когда дифракция происходит от тела конечных размеров и подлежит определению величина дифрагированного поля, распространяющегося обратно к источнику поля. Нами был рассмотрен случай дифракции от шара. При этом было найдено, что, благодаря явлениям резонанса, величина отраженного поля может быть и больше, и меньше оптической асимптоты. Есть основания утверждать, что осциллирующий характер зависимости величины отраженного поля от длины волны будет и у эллипсоида, а также и у других всюду выпуклых тел.

Остановимся на вопросе: при какой форме тела резонансные явления будут выражены особенно ярко. Этот вопрос эквивалентен другому вопросу — при какой форме тела декремент затухания собственных колебаний мал. Здесь следует учитывать два обстоятельства, обусловленные особенностями колебательных систем с распределенными постоянными.

Первое обстоятельство — то, что система с распределенными постоянными может быть возбуждена, кроме основной (наиболее низкой) частоты, еще и на обертонах, причем декремент колебаний зависит от номера обертона.

Из кривой, вычисленной нами для шара, следует, что наиболее резко выражен первый резонанс и по мере увеличения номера обертона резонансные горбы становятся все более и более тупыми. Наиболее острым является первый резонанс и у очень вытянутого эллипсоида вращения ( $\epsilon \approx 1$ ), как это вытекает из исследований Абрагама [37] и Сузанта [38]: ширина резонансного горба логарифмически растет с номером обертона. Так как шар можно рассматривать, как эллипсоид вращения с нулевым эксцентриситетом ( $\epsilon = 0$ ), то можно сделать вывод, что и при любом значении эксцентриситета  $0 < \epsilon < 1$  наиболее острым будет первый резонанс. Но если исходить из соображения, что при весьма коротких волнах (по сравнению с размерами отражающего тела) резонансные явления не должны наблюдаться и отражение должно происходить по законам геометрической оптики, то можно прийти к выводу, что не только у эллипсоида вращения, но и у других тел наиболее резко выраженным должен быть первый резонанс и по мере повышения частоты резонансные явления должны постепенно исчезать. Естественно, что скорость убывания резонансных максимумов у различных тел будет различна и, повидимому, та форма тела, при которой первый резонансный горб более узок, имеет и большее число заметных резонансных горбов.

Второе обстоятельство то, что характер колебания в системе с распределенными постоянными зависит от способа возбуждения, а именно могут возникать различные типы колебаний. Ли-



Эта простая зависимость, определяемая свойствами ближней зоны, позволяет сделать следующий вывод: чем более вытянута форма тела в направлении, параллельном вектору электрического поля падающей волны, тем более резко будут проявляться явления резонанса.

На рис. 70 показан в двух проекциях последовательный ряд все более „широкополосных“ форм отражающего тела: 1, 2, 3 — вытянутые эллипсоиды вращения, 4 — шар, 5 — сплюснутый эллипсоид вращения, 6 — вытянутый эллипсоид вращения, большая ось которого перпендикулярна вектору  $E$  падающего поля, 7 — бесконечно-длинный цилиндр, ось которого перпендикулярна вектору  $E$  падающего поля. В качестве иллюстрации сюда можно было бы добавить результаты приближенных вычислений о дифракции от провода конечной длины, приведенные в работе Ван-Флека и др. [41], подтверждающие наши соображения.

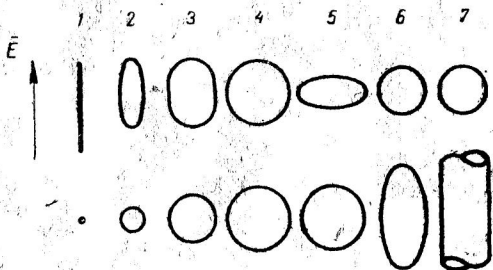


Рис. 70

Естественно, что при возбуждении тела плоской падающей волной резонансные явления не будут протекать точно так же, как при возбуждении сосредоточенной э. д. с., включенной „в разрез“, однако, общая картина будет одинакова; различие будет тем меньше, чем ближе форма тела к стержнеобразной.

Таким образом мы приходим к заключению, что чем более вытянута форма тела в направлении, параллельном вектору электрического поля падающей волны, тем менее приложимы приближенные методы расчета дифрагированного поля [распространяющегося обратно к передатчику], не учитывающие явления резонанса.

Этот вывод распространяется и на расчеты по формуле Фока, поскольку при этом явления резонанса также не учитываются. В этом отношении формула Фока не дает возможности уточнить результат, почему мы и воздержались от ее применения, учитывая объем необходимых при этом вычислений.

Чтобы выводы, к которым мы пришли выше, не показались — с точки зрения практики — мало утешительными, напомним, что явления резонанса существенны только при недостаточно высоких частотах. Так, приближенные вычисления [41] показывают, что для очень вытянутой формы тела (провод с отношением длины к диаметру  $L/D=450$ ) при волне  $\lambda=0,1L$  величина средней эффективной отражающей площади (пропорциональной отношению векторов Пойнтинга отраженной к падающей волне) колеблется из-за явлений резонанса, увеличиваясь и уменьшаясь всего в два раза. По Пейджу и Адамсу [43] декремент вытянутого эллипсоида вращения в области первого резонанса медленно па-

дает с увеличением эксцентриситета  $\varepsilon$  от 0 до 0,7 и при  $\varepsilon \rightarrow 1$  быстро падает до нуля.

### Б. Поле в точках вблизи границ геометрической тени

Как точный, так и приближенный методы расчета, проведенные для случаев дифракции от шара и цилиндра, показывают, что при не слишком длинной волне поле—при неизменном объекте—в направлении тени растет линейно с частотой, становясь значительно большим поля, отраженного в обратном направлении.

При нахождении распределения энергии в отраженном потоке средствами геометрической оптики (§ 1) мы трактовали тень как результат наложения „теневого потока“ на падающий поток. При этом „теновый лепесток“ выделяется на диаграмме своей величиной (рис. 6). При расчете поля по дифракционным формулам (III.61) и (IV.42) при  $\lambda \rightarrow 0$  поле в направлении тени воз-

растает до величины  $E_0$ , т. е.  $\frac{E_{\varphi} = \pi}{E_{\varphi} = 0} \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Это явление, называемое „эффектом Ми“, имеет простое физическое объяснение. При достаточно короткой волне тень тела имеет такую же форму, как и тень плоского экрана соответствующей формы. Но в таком случае вычисление „теневого лепестка“ данного тела можно заменить вычислением „теневого лепестка“ плоского экрана соответствующей формы. Особенностью же плоского экрана (конечной площади) является как раз возрастание поля с частотой в двух направлениях, симметричных относительно плоскости экрана: в направлении тени и в направлении отраженного потока.

Таким образом „эффект Ми“ является совершенно нормальным явлением, когда размеры тела больше длины волны. Если длина волны значительно превышает размеры тела, т. е. в тех случаях, когда дифракционные явления выражены наиболее отчетливо, — „эффект Ми“ отсутствует.

Как показывают кривые рис. 40 резонансные явления сказываются на величине теневого лепестка незначительно.

Можно ожидать, что при применении формулы Фока здесь получатся более точные результаты, чем при применении других приближенных методов, так как при расчете по Фоку берутся более точные выражения для тока в области полутени, а величина теневого лепестка определяется именно токами в области полутени (при достаточно короткой волне).

### В. Случай, когда на поверхности отражающего тела имеются плоские площадки или ребра

В случаях, когда на поверхности тела имеются плоские площадки (радиусы кривизны бесконечны) или ребра (один из радиусов кривизны равен нулю), методы геометрической оптики недостаточны, даже если размеры отражающего тела настолько



велики по сравнению с длиной волны, что можно не опасаться влияния резонансных явлений.

Хотя мы не проводили анализа таких случаев, но для полноты обзора затронем и их, отметив присущие им особенности. Выше мы пришли к выводу, что в случае конечных радиусов кривизны и больших размеров тела для вычисления величины

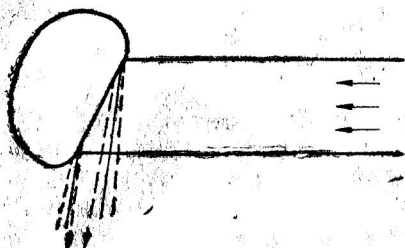


Рис. 71

отраженного поля достаточно геометрической оптики. На рис. 71 изображено тело, часть поверхности которого является плоской. Согласно геометрической оптике лучи, отраженные от плоской части поверхности, будут параллельными. Так как в действительности параллельные пучки лучей не существуют, то необходимо учитывать здесь дифракционные явления. В первом

приближении можно считать, что дифракция будет происходить так же, как у шайбы соответствующей формы: амплитуда отраженного поля будет расти, приблизительно пропорционально частоте падающего поля (что, конечно, не следует из геометрической оптики).

На рис. 72 изображено тело, на поверхности которого имеются два ребра, которые будем считать перпендикулярными

вектору  $\vec{E}$  падающего поля. В этом случае в отраженном потоке будут области геометрической тени (отмечены косой штриховкой); очевидно, что на границах этих областей необходимо учитывать явления дифракции. Вторая особенность этого случая

заключается в том, что на поверхности тела будут существовать волны тока, отраженные ребрами. Следовательно, если расстояние между ребрами соизмеримо с длиной волны, то будут наблюдаться резонансные явления. Вероятно, для возникновения отраженных

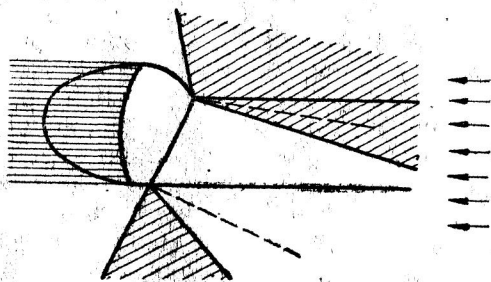


Рис. 72

волн тока не обязательно наличие ребер — линий, на которых один из главных радиусов кривизны  $R=0$ , но достаточно наличие линий, на которых один из радиусов кривизны достаточно мал по сравнению с длиной волны. В этих случаях методы геометрической оптики также недостаточны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Весь рассмотренный материал позволяет нарисовать общую картину состояния вопроса относительно решения дифракционных задач пятой группы следующим образом: в настоящее время строго решена только одна задача о дифракции плоской электромагнитной волны от тела конечных размеров—задача о дифракции от шара. При этом вычисления показывают существенное влияние резонансных явлений, имеющих место при возбуждении шара падающей волной. Это влияние заметно сказывается на величине поля, отраженного обратно на передатчик и слабо на величине поля, в направлении тени. При изменении частоты резонанс наблюдается каждый раз, когда число полуволн, укладываемых на половине экватора, изменяется, примерно, на единицу. При укорочении волны резонансные явления проявляются все слабее и слабее; для  $\frac{a}{\lambda} > 2$  их можно не учитывать при технических расчетах.

Качественные соображения и приближенные расчеты показывают, что резонансные явления должны иметь место и при других формах тела; они будут даже у бесконечно длинного цилиндра с конечным периметром поперечного сечения, если падающее поле имеет компоненту электрического поля, перпендикулярную оси цилиндра. Роль резонансных явлений тем больше, чем более вытянута форма тела в направлении электрического поля падающей волны, т. е., чем ближе она к стержнеобразной. Роль резонансных явлений уменьшается до пренебрежимой при повышении частоты до некоторого предела; этот предел тем выше, чем ближе форма тела к стержнеобразной.

Расчет величины поля, отраженного обратно на передатчик, при помощи приближенных дифракционных формул (не учитывающих явлений резонанса) дает ошибки такой же величины, как и расчет методами геометрической оптики.

При вытянутых стержнеобразных формах тела ( $\epsilon_{\text{эвк}} > 0,95$ ) представляется более целесообразным применение теории приемных антенн [42].

При расчете величины поля в области тени и вблизи границ геометрической тени рекомендуется применять приближенные дифракционные формулы, дающие в этом случае удовлетвори-

тельный результат. В случае дифракции от полуплоскости результаты вычислений поля вдали от края экрана по приближенным и точным методам совпадают. Из рассмотренных приближенных методов вычисления: по классической формуле Кирхгофа, по формулам Стрэттона и Чу, по формуле Фока, применением принципа эквивалентности по Щелкунову, наиболее приемлемым для практики является последний.

Формулы Щелкунова принципиально эквивалентны формулам Стрэттона и Чу, но имеют форму, более удобную для вычислений. Формула Фока более точна, однако требует нахождения численным интегрированием интегралов по поверхности тела даже при самых простых аналитических формах поверхности. Формулы Щелкунова и Стрэттона и Чу являются по существу векторизованной формой классической формулы Кирхгофа и дают возможность учитывать поляризацию поля, не требуя заметного усложнения вычислений.

Трудно ожидать появления количественного решения новых задач пятой группы методами строгой теории, за исключением, может быть, задачи о дифракции от эллипсоида. Поэтому основная тяжесть дальнейших исследований должна быть перенесена на опыты, причем представляется удобным принять за эталон шар, поскольку он не требует определенного ориентирования в пространстве.

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Фейнберг. Радиотехника, т. 1 (1947), стр. 5.
2. В. Купрадзе. Основные задачи математической теории дифракции  
1935. Москва - Ленинград.
3. С. Михлин. Интегральные уравнения. 1947. ОГИЗ.
4. В. Фок. Вестник Академии Наук СССР. № 3 (1946), стр. 28.
5. Дж. Страттон и Л. Чу. Физикал Ревю. 56 (1939) № 1, стр. 99.
6. С. Щелкунов. Физикал Ревю. 56 (1939). № 2 стр. 308.
7. З. Бэкер и Е. Копсон. Математическая теория принципа Гюйгенса. 1939, Оксфорд (англ.).
8. Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. 1937. ОГИЗ.
9. Б. Введенский. Основы теории распространения радиоволн.  
1934. ГТТИ.
10. Дж. Страттон. Электромагнитная теория. 1941. Нью-Йорк (англ.)
11. К. Шефер. Теоретическая физика. т. III, ч. 2, 1938. ОНТИ.
12. Н. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления  
1938. ОНТИ.
13. В. Смирнов. Курс высшей математики. т. II. 1933. ГТТИ.
14. М. Борн. Оптика. 1937. Харьков. ОНТИ.
15. В. Игнатовский. Аннален дер Физик. 23 (1907) стр. 875. 25  
(1908) стр. 99.
16. Ф. Коттлер. Аннален дер Физик. 71 (1923) стр. 457.
17. С. Щелкунов. Белл Систем Текникэл Джорнэл 15 (1936) стр. 92  
и 106.
18. С. Щелкунов. Электромагнитные волны. 1944. Нью-Йорк (англ.).
19. А. Лева. Фил. Тренс. Ройал Сосайети. 197 (1901) стр. 1.
20. А. Узков. К расчету больших радиозеркал малой кривизны. (Доклад на Всесоюзной научной сессии в мае 1945 г., посвященной празднованию 50-летия изобретения радио А. С. Поповым).
21. В. Фок. Ж. Э. Т. Ф. 15 (1945) вып. 12, стр. 693.
22. В. Фок. Известия Академии Наук СССР, серия физическая 10 (1946  
стр. 171.
23. В. Игнатовский. Аннален дер Физик. 18 (1905), стр. 495.
24. А. Гершуни. Световое поле. 1936. ОНТИ.
25. Я. Шпильрейн. Таблицы специальных функций, ч. 1, 1933 ГТТИ
26. Г. Гринберг. Ж. Э. Т. Ф. 14 (1944) вып. 3-4, стр. 84.
27. Е. Фейнберг. Известия Академии Наук СССР, серия физическая  
10 (1946) стр. 196.
28. Г. Ми. Аннален дер Физик. 26 (1908) стр. 377.
29. П. Дебай. Аннален дер Физик. 30 (1903) стр. 57.
30. Б. Введенский и А. Аренберг. Известия Академии Наук  
СССР Отд. техн. наук № 9, 1946, стр. 1211.
31. Х. Блюмер. Цайтшифт фюр Физик. 32 (1925) стр. 119. 38 (1926)  
стр. 304 и 520.
32. А. Вольперти и А. Потехин. Ж. Э. Т. Ф. 17 (1947) вып. 9 стр. 807.
33. А. Зоммерфельд. Математике Аннален. 47 (1896), стр. 319.
34. А. Пистолькорс Ж. Т. Ф. 16 (1946) вып. 10, стр. 1161.

35. П. Морзе и П. Рубинштейн. Физикал Ревю. 54 (1938) стр. 895.
  36. М. Леонтович. Ж. Э. Т. Ф. 16 (1946) вып. 6.
  37. М. Абрагам. Аннален дер Физик. 66 (1898) стр. 435. (Имеется русский перевод в сборнике „Электрические колебания и волны“ 1941, под ред. В. Лебединского и М. Шулейкина).
  38. А. Сузант. Радиотехника 1937, № 3, 4.
  39. М. Левин. Известия Академии Наук СССР, серия физическая. 11 (1947) стр. 117.
  40. В. Кессених. Ж. Т. Ф. 9 (1939), стр. 1557.
  41. Дж. Ван Флек, Ф. Блох и М. Хамермеш. Джорнэл ов Эпплайд Физикс, 18 (1947) стр. 274.
  42. А. Пистолькорс. Приемные антенны. 1937, глава IV.
  43. Л. Пэйдж и Н. Адамс. Физикал Ревю, 53 (1938) стр. 819.
  44. Бэйтман. Математический анализ волнового движения в оптике и электричестве. 1915, Кэмбридж (англ.).
  45. Справочник по физике, том XX (нем.).
  46. Справочник по физической оптике (Герке) 1 (1927) (нем.).
  47. Энциклопедия математических наук, том V. 3 (1909) (нем.).
  48. Б. Введенский и А. Аренберг. Распространение УКВ, 1938.
-

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>Глава I. Решение задач дифракции методами оптики</b>	
1. Метод геометрической (лучевой) оптики . . . . .	9
2. Метод волновой оптики . . . . .	16
3. Дифракция от щели и полуплоскости . . . . .	24
4. Дифракция от цилиндра . . . . .	34
5. Дифракция от шара . . . . .	39
<b>Глава II. Векторизованные формы интеграла Кирхгофа</b>	
6. Общие замечания . . . . .	43
7. Формулы Стрэттона и Чу . . . . .	44
8. Решение при помощи принципа эквивалентности . . . . .	48
9. О физическом содержании термина „Листок магнитного тока“ . . . . .	51
10. Дифракция от полосы и полуплоскости . . . . .	53
11. Дифракция от цилиндра . . . . .	59
12. Дифракция от шара . . . . .	62
13. Формула Фока . . . . .	65
<b>Глава III. Метод криволинейных координат. Дифракция от цилиндра</b>	
14. Строгое решение задачи о дифракции от кругового цилиндра методом криволинейных координат . . . . .	69
15. Количественные вычисления по точным формулам . . . . .	77
16. Случай косо́го падения волны на цилиндр с произвольной формой поперечного сечения . . . . .	85
<b>Глава IV. Метод криволинейных координат. Дифракция от шара</b>	
17. Вывод формул для компонент дифрагированного поля . . . . .	96
18. Вычисление поля для двух направлений: $\vartheta = 0$ , $\vartheta = \pi$ . . . . .	101
<b>Глава V. Метод разветвленных решений. Дифракция от полуплоскости</b>	
19. Вывод основных формул . . . . .	105
20. Анализ полученного решения . . . . .	114
<b>Глава VI. Сравнение решений, полученных различными методами</b>	
21. Дифракция от полуплоскости . . . . .	119
22. Дифракция от цилиндра . . . . .	121
23. Дифракция от шара . . . . .	124
24. Общие выводы . . . . .	125
Заклучение . . . . .	130
Литература . . . . .	132

Редактор *Н. А. Шорин.*  
Тех. редактор *С. И. Ермачков.*  
Корректор *Е. Н. Ерышанова.*

---

Сдано в набор 5/X 1948 г. Подписано  
к печати 17/XII 1948 г. А—08498  
форм. бум. 6×92<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Объем 8<sup>1</sup>/<sub>2</sub> п.л.  
Тир. 3000 экз. Цена 10 руб. Зак. 2695.

---

Тип. изд-ва „Советское радио“.