

538  
п. 64  
27672

*А. И. Потехин*

---

**ИЗЛУЧЕНИЕ  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МОСКОВСКОЕ ОБЩЕСТВО ИСПЫТАТЕЛЕЙ ПРИРОДЫ

п ч

*А. И. Потехин*

ИЗЛУЧЕНИЕ  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

27672

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

И 71  
Н 111  
Ф 1

Излучение и распространение электромагнитных волн в анизотропной среде. А. И. Потехин. Изд-во «Наука», 1971 г., стр. 76.

В работе дается систематическое изложение задач по распространению электромагнитных волн в одноосной анизотропной среде, излучаемых листом тока, бесконечно длинной нитью или элементарным диполем. Поле вычисляется на любом расстоянии от источника строгими методами. Ориентация оси нити с током или оси диполя полагается параллельной или перпендикулярной оси анизотропии. Все задачи решаются единым методом, при котором остается ясным «физический смысл» на всех этапах вычислений. Ответ дается в замкнутой форме во всех рассмотренных случаях (плоские, цилиндрические, конические и квазисферические волны).

Илл. — 8, библи. — 16 назв.

Ответственный редактор

доктор техн. наук Л. Б. ТАРТАКОВСКИЙ

Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах представляет большой интерес не только для теории, но и для практики. Этой теме посвящено весьма большое число работ; но в большинстве из них рассматривается распространение плоских волн. Следует признать, что математический анализ случая плоских волн значительно проще и, в то же время, позволяет выяснить ряд характерных особенностей процессов в анизотропных средах. При этом некоторые вопросы остаются нерешенными. Например, для геофизической разведки необходимо исследовать процессы излучения и распространения сферических волн. В работе [1] находится общее решение задачи об излучении в анизотропных средах. К сожалению, полученный там интеграл весьма сложен и применяется только для нахождения поля в дальней зоне (для этого находится асимптотическое выражение методом перевала). А так как в дальней зоне кривизна сферической волны невелика, то по существу мы опять попадаем в область, где можно ограничиться рассмотрением плоских волн. При этом ближняя зона, рассмотрение которой необходимо при применении длинных волн, остается неисследованной.

В настоящей работе находятся строгие выражения для поля излучения диполя и нити с током, пригодные для любых расстояний от источника. Среда принимается линейной, что допустимо при малых амплитудах поля.

Рассматривается случай одноосной негиротропной среды; анализ явлений в более сложных анизотропных средах выходит за рамки нашей работы.

Большую часть объема книги занимают результаты исследований автора, впоследствии составивших содер-

жание цикла лекций, которые читались в 1964 г. аспирантам Московского Горного института. Позже появились работы [2, 3], в которых получены некоторые из наших результатов, но другим методом. При изложении материала был принят тот принцип, по которому следует заботиться прежде всего об экономии времени слушателя, а не лектора. Практика показывает, что с этой точки зрения слушателю (или читателю) выгоднее затратить некоторое время на подробности выводов, чем потом, досадуя на неясности, возникающие из-за излишне сжатого изложения, с трудом восстанавливать пропущенное, затрачивая на это гораздо больше времени.

Кроме того, следует учесть также, что для значительной категории читателей может представлять интерес сама методика вычислений. Поэтому мы излагаем некоторые выкладки более подробно, чем это обычно делается в журнальных статьях. Что касается достаточно квалифицированного читателя, то он может опуская промежуточные этапы или ограничиваясь беглым ознакомлением с ними, сразу обратиться к выводам. Распространение плоских волн освещается не в полной мере, а лишь настолько, чтобы избавить читателя от необходимости обращаться к специальным пособиям за справками. Начиная работу в этой области могут обратиться, например, к книгам [4—9].

## Волны 1 и 2-го типов

Отказываясь от рассмотрения среды с произвольной анизотропией, будем рассматривать представляющий интерес для практики характерный случай, когда электрические параметры среды представляются тензорами

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

Такие параметры может иметь одноосный кристалл с осью симметрии вдоль оси  $z$  или среда с тонкослойной структурой, однородная в среднем, если толщина слоев много меньше рабочей длины волны. При учете потерь в среде элементы тензоров будут представляться комплексными числами.

При гармонической зависимости поля от времени  $e^{i\omega t}$  уравнения Максвелла для области, свободной от источников, записываются в виде

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} = -i\omega \overleftrightarrow{\mu} \mathbf{H}, \quad (1.3)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} = i\omega \overleftrightarrow{\epsilon} \mathbf{E},$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \epsilon \frac{dE_x}{dx} + \epsilon \frac{dE_y}{dy} + \epsilon_z \frac{dE_z}{dz} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{B} = \mu \frac{dH_x}{dx} + \mu \frac{dH_y}{dy} + \mu_z \frac{dH_z}{dz} = 0, \quad (1.3a)$$

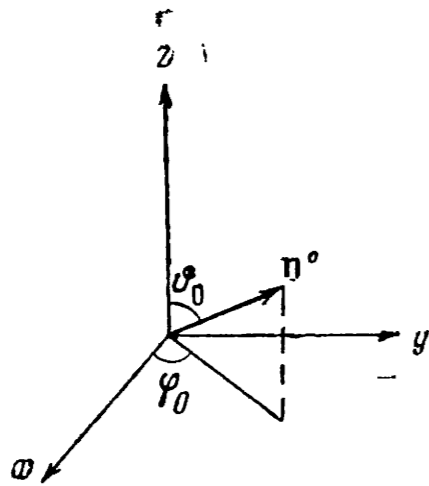


Рис. 1

Будем решать их в прямоугольных координатах, рассмотрим сначала вспомогательные задачи об излучении плоских волн.

Положим, что поле возбуждается плоским неограниченным листом электрического тока и имеет характер бегущих плоских волн. Движение плоской волны наиболее компактно описывается функцией

$$\Psi = e^{i(\omega t - \Gamma n^0 r)}, \quad (1.4)$$

где  $\Gamma$  — постоянная распространения по направлению  $n^0$ ;  $r$  — радиус-вектор точки наблюдения;  $n^0$  — единичный вектор направления, который перпендикулярен к фазовому фронту волны и может быть определен через заданные азимутальный и полярный углы  $\varphi_0$ ,  $\vartheta_0$  и орты прямоугольной системы координат (рис. 1)

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + \mathbf{j} \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 + \mathbf{k} \cos \vartheta_0. \quad (1.5)$$

Так как

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} x + \mathbf{j} y + \mathbf{k} z,$$

то, раскрывая скалярное произведение в показателе (1.4), получим

$$\begin{aligned} \Gamma \mathbf{n}^0 \mathbf{r} &= \Gamma (x \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + y \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 + z \cos \vartheta_0) = \\ &= \alpha x + \beta y + \gamma z. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Постоянные распространения вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$

$$\begin{aligned} \alpha &= \Gamma \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0, \\ \beta &= \Gamma \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0, \\ \gamma &= \Gamma \cos \vartheta_0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

связаны соотношением

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \Gamma^2, \quad (1.8)$$

которое получается очевидным образом из (1.7). Таким образом, вместо (1.4) можем записать волновую функцию в виде

$$\Psi = e^{i\omega t} e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \quad (1.9)$$

Производные волновой функции по координатам выражаются через ту же функцию:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i\alpha \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -i\beta \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -i\gamma \Psi. \quad (1.10)$$

Векторы поля плоской волны можно записать с помощью выражений

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (\mathbf{i} E_x + \mathbf{j} E_y + \mathbf{k} E_z) \Psi, \\ \mathbf{H} &= (\mathbf{i} H_x + \mathbf{j} H_y + \mathbf{k} H_z) \Psi, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где комплексные амплитудные множители  $E_x$ ,  $E_y$ , ...,  $H_z$  подлежат определению. Подставляя (1.11) в уравнения Максвелла (1.3) и учитывая (1.10), приходим к системе из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{aligned} \gamma E_y - \beta E_z + \omega \mu H_x &= 0, \\ -\gamma E_x + \alpha E_z + \omega \mu H_y &= 0, \\ \beta E_x - \alpha E_y + \omega \mu_z H_z &= 0, \\ \omega \varepsilon E_x - \gamma H_y + \beta H_z &= 0, \\ \omega \varepsilon E_y + \gamma H_x - \alpha H_z &= 0, \\ \omega \varepsilon_z E_z - \beta H_x + \alpha H_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Так как все уравнения системы (1.12) являются однородными, ее определитель должен быть равен нулю (в противном случае система не имеет решения — ее уравнения несовместны)

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma & -\beta & \omega \mu & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & \alpha & 0 & \omega \mu & 0 \\ \beta & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \omega \mu_z \\ \omega \varepsilon & 0 & 0 & 0 & -\gamma & \beta \\ 0 & \omega \varepsilon & 0 & \gamma & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \omega \varepsilon_z & -\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.13)$$

Раскрывая определитель (1.13), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \alpha^4 \omega^2 \epsilon \mu + \beta^4 \omega^2 \epsilon \mu + \gamma^4 \omega^2 \epsilon_z \mu_z + 2\alpha^2 \beta^2 \omega^2 \epsilon \mu + \alpha^2 \gamma^2 \omega^2 (\epsilon \mu_z + \epsilon_z \mu) + \\ & + \beta^2 \gamma^2 \omega^2 (\epsilon \mu_z + \epsilon_z \mu) - \alpha^2 \omega^4 \epsilon \mu (\epsilon \mu_z + \epsilon_z \mu) - \\ & - \beta^2 \omega^4 \epsilon \mu (\epsilon \mu_z + \epsilon_z \mu) - 2\gamma^2 \omega^4 \epsilon_z \mu_z \epsilon \mu + \omega^6 \epsilon^2 \mu^2 \epsilon_z \mu_z = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя в (1.14) величины (1.7) и разделив почленно на

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu, \quad (1.15)$$

приходим к уравнению четвертой степени относительно  $\Gamma$

$$\begin{aligned} & \Gamma^4 \left[ \sin^4 \vartheta_0 \cos^4 \varphi_0 + \sin^4 \vartheta_0 \cdot \sin^4 \varphi_0 + \frac{\epsilon_z}{\epsilon} \frac{\mu_z}{\mu} \cos^4 \vartheta_0 + \right. \\ & + 2 \sin^4 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 + \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0 + \\ & + \left. \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 \right] - \\ & - \Gamma^2 k^2 \left[ \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \varphi_0 + \left[ \frac{\epsilon_z}{\epsilon} + \frac{\mu_z}{\mu} \right] \sin^2 \vartheta_0 \sin^2 \varphi_0 + \right. \\ & + \left. 2 \frac{\epsilon_z}{\epsilon} \frac{\mu_z}{\mu} \cos^2 \vartheta_0 \right] + \frac{\epsilon_z}{\epsilon} \frac{\mu_z}{\mu} k^4 = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что после упрощения путем несложных преобразований зависимость от угла  $\varphi_0$  исчезает и уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} & \Gamma^4 \left[ \sin^4 \vartheta_0 + \frac{\epsilon_z}{\epsilon} \frac{\mu_z}{\mu} \cos^4 \vartheta_0 + \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \vartheta_0 \right] - \\ & - \Gamma^2 k^2 \left[ \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin^2 \vartheta_0 + 2 \frac{\epsilon_z}{\epsilon} \frac{\mu_z}{\mu} \cos^2 \vartheta_0 \right] + \\ & + \frac{\epsilon_z \mu_z}{\epsilon \mu} k^4 = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Биквадратное уравнение (1.16) решается обычным путем. При этом находим

$$\Gamma_{1,2}^2 = k^2 \frac{2 \frac{\epsilon_z}{\epsilon} \frac{\mu_z}{\mu} \cos^2 \vartheta_0 + \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin^2 \vartheta_0 \pm \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} - \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin^2 \vartheta_0}{2 \left[ \sin^4 \vartheta_0 + \left( \frac{\epsilon_z}{\epsilon} + \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \vartheta_0 + \frac{\epsilon_z \mu_z}{\epsilon \mu} \cos^4 \vartheta_0 \right]}. \quad (1.17)$$

Теперь можно заключить, что система (1.12) имеет решение, когда постоянная распространения определяется согласно (1.17). Полученное выражение можно упростить.

Обозначим

$$\frac{\epsilon_z}{\epsilon} = 1 + \delta_1, \quad \frac{\mu_z}{\mu} = 1 + \delta_2. \quad (1.18)$$

Тогда из (1.17) получим

$$\Gamma_{1,2}^2 = k^2 \frac{(2 + \delta_1 + \delta_2) \pm (\delta_1 - \delta_2) + (\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_1 \delta_2) \cos^2 \vartheta_0 \pm (\delta_2 - \delta_1) \cos^2 \vartheta_0}{2 [1 + (\delta_1 + \delta_2) \cos^2 \vartheta_0 + \delta_1 \delta_2 \cos^4 \vartheta_0]}.$$

Последняя формула дает после выбора знака «плюс» в числителе

$$\begin{aligned} \Gamma_1^2 &= k^2 \frac{(1 + \delta_1)(1 + \delta_2 \cos^2 \vartheta_0)}{1 + (\delta_1 + \delta_2) \cos^2 \vartheta_0 + \delta_1 \delta_2 \cos^4 \vartheta_0} = \\ &= k^2 \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_1 \cos^2 \vartheta_0}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

и при выборе знака «минус»

$$\Gamma_2^2 = k^2 \frac{(1 + \delta_2)(1 + \delta_1 \cos^2 \vartheta_0)}{1 + (\delta_1 + \delta_2) \cos^2 \vartheta_0 + \delta_1 \delta_2 \cos^4 \vartheta_0} = k^2 \frac{1 + \delta_2}{1 + \delta_2 \cos^2 \vartheta_0}. \quad (1.20)$$

В каких случаях следует брать первое значение ( $\Gamma_1$ ) корня и в каких случаях второе ( $\Gamma_2$ ), на этот вопрос можно ответить только после дальнейшего анализа.

Отметим некоторые характерные частные случаи:

1) среда с изотропными свойствами

$$\delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = k^2; \quad (1.21)$$

2) среда с электрической анизотропией

$$\delta_2 = 0, \quad \Gamma_1^2 = k^2 \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_1 \cos^2 \vartheta_0}, \quad \Gamma_2^2 = k^2; \quad (1.22)$$

3) среда с магнитной анизотропией

$$\delta_1 = 0, \quad \Gamma_1^2 = k^2, \quad \Gamma_2^2 = k^2 \frac{1 + \delta_2}{1 + \delta_2 \cos^2 \vartheta_0}; \quad (1.23)$$

4) среда с уравновешенной анизотропией

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta, \quad \Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = k^2 \frac{1 + \delta}{1 + \delta \cos^2 \vartheta_0}. \quad (1.24)$$

В последнем случае, когда  $\varepsilon_z/\varepsilon = \mu_z/\mu$ , степень отклонения от изотропности одинакова как по электрической проницаемости, так и по магнитной. При этом, как следует из (1.24), оба значения для постоянной распространения совпадают (для всех направлений). Поэтому можно предложить называть этот случай случаем уравновешенной анизотропии. Отметим еще, что при  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = k$ , иными словами при распространении плоской волны вдоль оси  $z$  анизотропия среды не сказывается.

Возвратимся теперь к системе уравнений (1.12). Поскольку мы установили, что величина постоянной распространения  $\Gamma$  не зависит от угла  $\varphi_0$ , последний может быть произвольным. Допустим, что направление распространения лежит в плоскости  $xoz$ , т. е. что  $\varphi_0 = 0$ . При этом  $\beta = 0$  и система (1.12) распадается на две частных системы:

$$\begin{aligned} -\gamma E'_x + \alpha E'_z + \omega\mu H'_y &= 0, \\ \omega\varepsilon E'_x - \gamma H'_y &= 0, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \omega\varepsilon_z E'_z + \alpha H'_y &= 0; \\ \gamma E''_y + \omega\mu H''_x &= 0, \\ -\alpha E''_y + \omega\mu_z H''_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\omega\varepsilon E''_y + \gamma H''_x - \alpha H''_z = 0.$$

Рассмотрим сначала первую из них. Положим

$$E'_z = A_1 \Psi_1, \quad (1.27)$$

где  $A_1$  — амплитудный множитель  $A_1 \neq 0$ .

Из третьего и второго уравнений (1.25) находим

$$\begin{aligned} H'_y &= -\frac{\omega\varepsilon_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} A_1 \Psi_1, \\ E'_x &= -\frac{\varepsilon_z \cos \vartheta_0}{\varepsilon \sin \vartheta_0} A_1 \Psi_1. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Подстановка (1.28) в первое уравнение (1.25) дает равенство

$$\left( \frac{\varepsilon_z \Gamma \cos^2 \vartheta_0}{\varepsilon \sin \vartheta_0} + \Gamma \sin \vartheta_0 - \frac{\omega^2 \mu \varepsilon_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} \right) A_1 \Psi_1 = 0$$

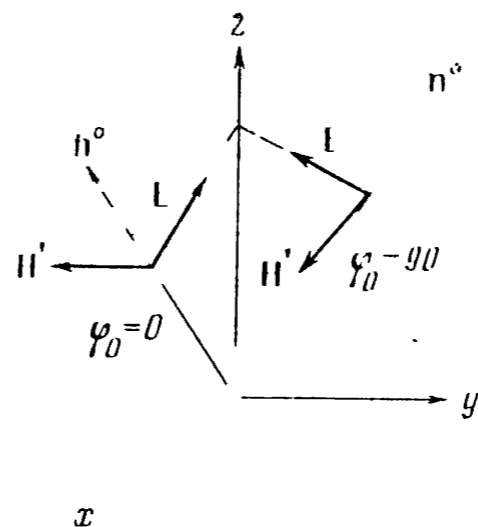


Рис. 2.

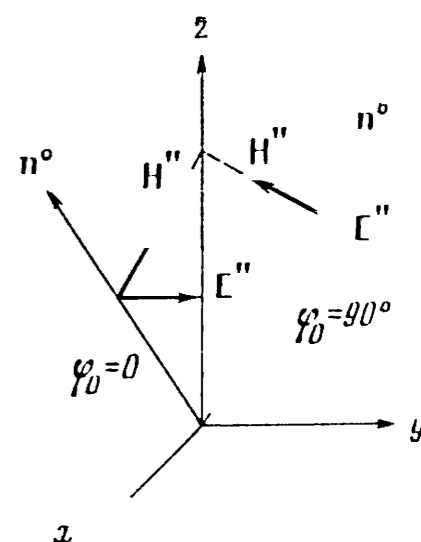


Рис. 3.

или

$$(1 + \delta_1) \Gamma^2 \cos^2 \vartheta_0 + \Gamma^2 \sin^2 \vartheta_0 - k^2 (1 + \delta_1) = 0,$$

откуда следует

$$\Gamma^2 = k^2 \frac{(1 + \delta_1)}{(1 + \delta_1) \cos^2 \vartheta_0 + \sin^2 \vartheta_0} = \Gamma_1^2$$

в соответствии с (1.19). Следовательно, система (1.25) описывает волны с постоянной распространения  $\Gamma_1$ . Их можно условно называть волнами первого типа или квази-электрическими.

Рассматривая систему (1.26), положим

$$H''_z = A_2 \Psi_2. \quad (1.29)$$

Из второго и первого уравнений (1.26) находим

$$\begin{aligned} E''_y &= \frac{\omega\mu_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} A_2 \Psi_2, \\ H''_x &= -\frac{\mu_z \cos \vartheta_0}{\mu \sin \vartheta_0} A_2 \Psi_2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Подстановка (1.30) в третье уравнение (1.26) дает равенство

$$\left( \frac{\omega^2 \varepsilon \mu_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} - \frac{\mu_z \Gamma \cos^2 \vartheta_0}{\mu \sin \vartheta_0} - \Gamma \sin \vartheta_0 \right) A_2 \Psi_2 = 0$$



$$\text{или } k^2(1 + \delta_2) - (1 + \delta_2)\Gamma^2 \cos^2 \vartheta_0 - \Gamma^2 \sin^2 \vartheta_0 = 0,$$

откуда следует

$$\Gamma^2 = k^2 \frac{(1 + \delta_2)}{(1 + \delta_2) \cos^2 \vartheta_0 + \sin^2 \vartheta_0} = \Gamma_2^2$$

в соответствии с (1.20).

Следовательно, система (1.26) описывает волны с постоянной распространения  $\Gamma_2$ . Их можно условно называть волнами второго типа или квази-магнитными. Волны первого и второго типов могут существовать отдельно или одновременно в зависимости от способа возбуждения.

Аналогичный результат получается, если принять, что направление распространения лежит в плоскости  $yoz$ , т. е. при  $\varphi_0 = 90^\circ$ . При этом  $\alpha = 0$ , и вместо (1.27) и (1.28) находим

$$\begin{aligned} H'_x &= \frac{\omega \varepsilon_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} A_1 \Psi_1, & E^z &= A_1 \Psi_1, \\ E'_y &= -\frac{\varepsilon_z \cos \vartheta_0}{\varepsilon \sin \vartheta_0} A_1 \Psi_1, & \Gamma &= \Gamma_1. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Вместо (1.29) и (1.30) находим

$$\begin{aligned} E''_x &= -\frac{\omega \mu_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} A_2 \Psi_2, & H''_z &= A_2 \Psi_2, \\ H''_y &= -\frac{\mu_z \cos \vartheta_0}{\mu \sin \vartheta_0} A_2 \Psi_2, & \Gamma &= \Gamma_2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Нетрудно видеть, что (1.31) и (1.32) можно получить из предыдущего случая поворотом системы координат вокруг оси  $z$  на  $90^\circ$ . При этом составляющие векторов по оси  $z$  не меняются, составляющие по оси  $x$  переходят в составляющие по оси  $y$  и наоборот. Рис. 2, 3 иллюстрируют сказанное. Общий случай можно получить поворотом системы координат вокруг оси  $z$  на произвольный угол  $\varphi_0$ . Таким образом, приходим к формулам для квази-электрических волн

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{\varepsilon_z \cos \vartheta_0}{\varepsilon \sin \vartheta_0} \cos \varphi_0 A_1 \Psi_1, & H'_x &= \frac{\omega \varepsilon_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} \sin \varphi_0 A_1 \Psi_1, \\ E'_y &= -\frac{\varepsilon_z \cos \vartheta_0}{\varepsilon \sin \vartheta_0} \sin \varphi_0 A_1 \Psi_1, & H'_y &= \frac{\omega \varepsilon_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} \cos \varphi_0 A_1 \Psi_1, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$E'_z = A_1 \Psi_1 = A_1 e^{i(\omega t - \Gamma_1 n_1^0 r)}, \quad H'_z = 0$$

и для квази-магнитных волн

$$E''_x = -\frac{\omega \mu_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} \sin \varphi_0 A_2 \Psi_2, \quad H''_x = -\frac{\mu_z \cos \vartheta_0}{\mu \sin \vartheta_0} \cos \varphi_0 A_2 \Psi_2,$$

$$E''_y = \frac{\omega \mu_z}{\Gamma \sin \vartheta_0} \cos \varphi_0 A_2 \Psi_2, \quad H''_y = -\frac{\mu_z \cos \vartheta_0}{\mu \sin \vartheta_0} \sin \varphi_0 A_2 \Psi_2,$$

$$E''_z = 0, \quad H''_z = A_2 \Psi_2 = A_2 e^{i(\omega t - \Gamma_2 n_2^0 r)}.$$

(1.34)

Поскольку независимо от направления распространения ( $\vartheta_0, \varphi_0$ ) у первых волн  $H_z = 0$  и у вторых волн  $E_z = 0$ , можно использовать это обстоятельство для решения системы уравнений (1.12). Полагая с самого начала  $H_z = 0$ , получим из (1.12) опять решение (1.33), а полагая  $E_z = 0$ , придем к (1.34). Полное решение уравнений Максвелла получим как:

$$E_x = E'_x + E''_x,$$

$$E_y = E'_y + E''_y,$$

и т. д.

В полученных решениях остались неопределенными только амплитудные множители  $A$ , которые определяются из граничных условий.

Отметим различие волн первого и второго типа. Путем вычисления скалярных произведений можно показать, что у волн первого типа ( $H_z = 0$ ) векторы  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \perp \mathbf{n}^0$ , а  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{n}^0$  неперпендикулярны между собой; у волн второго типа ( $E_z = 0$ ) векторы  $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}^0$ ,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , а  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{n}^0$  неперпендикулярны между собой. Наконец, если волны первого и второго типа распространяются в одном направлении, то  $\mathbf{E} \perp \mathbf{E}''$  и  $\mathbf{H}' \perp \mathbf{H}''$ .

## Излучение плоского листа с током

В простейшем случае излучателем плоской волны может быть лист неограниченной величины, расположенный на плоскости  $xoy$  (рис 4), по которому течет ток, имеющий во всех точках листа одинаковые амплитуду, фазу и

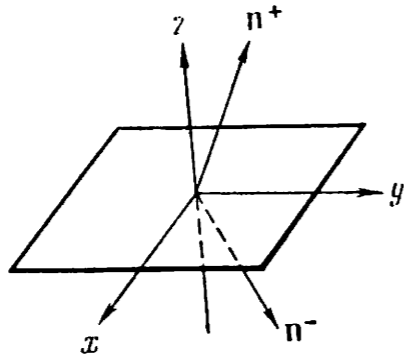


Рис. 4

направление. Такой лист излучает симметрично в обе стороны. При излучении волн первого типа в полупространстве  $z > 0$  поле описывается выражениями (1.33), которые, если принять за амплитудный множитель

$$A_1 = \frac{\Gamma_1 \sin \vartheta'_0}{2\omega\epsilon_z} j'_0, \quad (2.1)$$

принимают вид

$$\begin{aligned} E'_x &= -j'_0 \frac{\Gamma_1 \cos \vartheta'_0}{2\omega\epsilon} \cos \varphi'_0 \Psi_1, & H'_x &= j'_0 \frac{\sin \varphi'_0}{2} \Psi_1, \\ E'_y &= -j'_0 \frac{\Gamma_1 \cos \vartheta'_0}{2\omega\epsilon} \sin \varphi'_0 \Psi_1, & H'_y &= -j'_0 \frac{\cos \varphi'_0}{2} \Psi_1, \\ E'_z &= j'_0 \frac{\Gamma_1 \sin \vartheta'_0}{2\omega\epsilon_z} \Psi_1, & \Psi_1 &= e^{i\omega t} e^{-l(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)}, \\ & & H'_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Штрих справа сверху показывает, что рассматриваются волны первого типа. В нижнее полупространство  $z < 0$  листом излучается аналогичная волна в симметричном направлении ( $\varphi_0 = \varphi'_0$ ,  $\vartheta_0 = 180^\circ - \vartheta'_0$ ). Выражения для составляющих векторов поля в нижнем полупространстве можно тоже получить из (1.33), если положить

$$A_1^- = -\frac{\Gamma_1 \sin \vartheta'_0}{2\omega\epsilon_z} j'_0 \quad (2.3)$$

и изменить знак перед  $\cos \vartheta'_0$

$$\begin{aligned} E'_x &= -j'_0 \frac{\Gamma_1 \cos \vartheta'_0}{2\omega\epsilon} \cos \varphi'_0 \Psi_1^-, & H'_x &= -j'_0 \frac{\sin \varphi'_0}{2} \Psi_1^-, \\ E'_y &= -j'_0 \frac{\Gamma_1 \cos \vartheta'_0}{2\omega\epsilon} \sin \varphi'_0 \Psi_1^-, & H'_y &= j'_0 \frac{\cos \varphi'_0}{2} \Psi_1^-, \\ E'_z &= j'_0 \frac{\Gamma_1 \sin \vartheta'_0}{2\omega\epsilon} \Psi_1^-, & \Psi_1^- &= e^{i\omega t} e^{-l(\alpha_1 x + \beta_1 y - \gamma_1 z)}, \\ & & H'_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Направление вектора  $\mathbf{H}$  у поверхности листа с разных сторон ( $z > 0$  и  $z < 0$ ) противоположно. Поэтому граничное условие для плотности тока

$$\mathbf{j} = [\mathbf{n}(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)] = 2[\mathbf{nH}^+]_{z=0}$$

дает величину

$$\begin{aligned} j'_x &= +j'_0 \cos \varphi'_0 e^{i\omega t} e^{-l(\alpha_1 x + \beta_1 y)}, \\ j'_y &= j'_0 \sin \varphi'_0 e^{i\omega t} e^{-l(\alpha_1 x + \beta_1 y)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как было замечено ранее, при  $\vartheta'_0 = 0$  получается  $\Gamma_1 = k$  и выражения (2.2), (2.4) и (2.5) будут определять величины для плоской волны в изотропном пространстве

Аналогичная картина имеет место при излучении волн второго типа. Принимая за амплитудный множитель

$$A_2 = -\frac{\mu \sin \vartheta''_0}{2\mu_z \cos \vartheta''_0} j''_0, \quad (2.6)$$

17

получим из (1.34)

$$\begin{aligned} E_x &= j_0'' \frac{\omega \mu}{2\Gamma_2 \cos \vartheta_0''} \sin \varphi_0'' \Psi_2, & H_x &= j_0'' \frac{\cos \varphi_0''}{2} \Psi_2, \\ E_y &= -j_0'' \frac{\omega \mu}{2\Gamma_2 \cos \vartheta_0''} \cos \varphi_0'' \Psi_2, & H_y &= j_0'' \frac{\sin \varphi_0''}{2} \Psi_2, \\ E_z &= 0, & H_z &= -j_0'' \frac{\mu \sin \vartheta_0''}{2\mu_z \cos \vartheta_0''} \Psi_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\Psi_2 = e^{i\omega t} e^{-l(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)}.$$

В нижнем полупространстве  $z < 0$  излучается волна второго типа в симметричном направлении. Так как направление вектора  $\mathbf{H}$  у поверхности листа с разных сторон противоположно, то плотность тока будет

$$\begin{aligned} j_x &= -j_0'' \sin \varphi_0'' e^{i\omega t} e^{-l(\alpha_2 x + \beta_2 y)}, \\ j_y &= j_0'' \cos \varphi_0'' e^{i\omega t} e^{-l(\alpha_2 x + \beta_2 y)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При  $\vartheta_0'' = 0$  приходим к плоской волне в изотропном пространстве. Как видно из (2.5) и (2.8), направление тока на листе и направление распространения волны связаны между собою.

Представляется интересным случай, когда излучаются одновременно волны первого и второго типов. Так как волны в верхнем и нижнем полупространстве симметричны, то далее ограничимся рассмотрением только верхнего полупространства. Множитель  $e^{i\omega t}$  будем опускать. Определим условия, при которых фазовые множители в выражениях для плотности тока (2.5) и (2.8) будут одинаковы

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \alpha_2 x + \beta_2 y. \quad (2.9)$$

Равенство (2.9) будет выполняться при любых  $x$  и  $y$ , если коэффициенты в правой и левой частях (2.9) одинаковы

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Gamma_1 \sin \vartheta_0' \cos \varphi_0' = \alpha_2 = \Gamma_2 \sin \vartheta_0'' \cos \varphi_0'', \\ \beta_1 &= \Gamma_1 \sin \vartheta_0' \sin \varphi_0' = \beta_2 = \Gamma_2 \sin \vartheta_0'' \sin \varphi_0''. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.10) при помощи деления находим

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \operatorname{tg} \varphi_0' = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \operatorname{tg} \varphi_0'', \quad \varphi_0' = \varphi_0'', \quad (2.11)$$

и после сокращения общих множителей в (2.10) и возведения в квадрат

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \Gamma_1^2 \sin^2 \vartheta_0' = \Gamma_2^2 \sin^2 \vartheta_0'' = \alpha_2^2 + \beta_2^2. \quad (2.12)$$

Подставив (1.19) и (1.20) в (2.12), получим:

$$\frac{(1 + \delta_1)(1 - \cos^2 \vartheta_0')}{1 + \delta_1 \cos^2 \vartheta_0'} = \frac{(1 + \delta_2)(1 - \cos^2 \vartheta_0'')}{1 + \delta_2 \cos^2 \vartheta_0''}$$

откуда

$$\cos^2 \vartheta_0' = \frac{\delta_1 - \delta_2 + (1 + 2\delta_2 + \delta_1 \delta_2) \cos^2 \vartheta_0''}{(1 + 2\delta_1 + \delta_1 \delta_2) - (\delta_1 - \delta_2) \cos^2 \vartheta_0''}. \quad (2.13)$$

Значит, если выполняется равенство (2.9), то направления распространения волн первого и второго типов лежат в одной вертикальной плоскости ( $\varphi' = \varphi_0''$ ), но составляют разный угол с осью  $z$ . Заметим, что связь между углами  $\vartheta_0'$  и  $\vartheta_0''$  зависит от величин  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , но не зависит от угла  $\varphi_0$ .

Суммируя (2.5) и (2.8), получим с учетом (2.9) плотность тока при одновременном излучении волн обоих типов

$$\begin{aligned} j_x &= j_x' + j_x'' = (j_0' \cos \varphi_0'' - j_0'' \sin \varphi_0'') e^{-l(\alpha_2 x + \beta_2 y)}, \\ j_y &= j_y' + j_y'' = (j_0' \sin \varphi_0'' + j_0'' \cos \varphi_0'') e^{-l(\alpha_2 x + \beta_2 y)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Положим теперь, что выполняется соотношение

$$j_0' \cos \varphi_0'' - j_0'' \sin \varphi_0'' = 0,$$

что возможно, если

$$j_0' = j_0'' \operatorname{tg} \varphi_0''. \quad (2.20)$$

При выполнении условий (2.10) и (2.20) получим из (2.19), (2.2) и (2.7)

$$j_x = 0, \quad (2.21)$$

$$j_y = \frac{j_0''}{\cos \varphi_0''} e^{-l(\alpha_2 x + \beta_2 y)};$$

$$E_x = E'_x + E''_x = j_0 \left[ \frac{-\Gamma_1 \cos \vartheta'_0 \sin \varphi''_0}{2\omega\epsilon} e^{-i\Gamma_1 \cos \vartheta'_0 z} + \frac{\omega\mu \sin \varphi''_0}{2\Gamma_0 \cos \vartheta''_0} e^{-i\Gamma_2 \cos \vartheta''_0 z} \right] e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 y)}, \quad (2.22)$$

$$E_y = E'_y + E''_y = j_0 \left[ -\frac{\Gamma_1 \cos \vartheta'_0 \sin^2 \varphi''_0}{2\omega\epsilon \cos \varphi''_0} e^{-i\Gamma_1 \cos \vartheta'_0 z} - \frac{\omega\mu \cos \varphi''_0}{2\Gamma_2 \cos \vartheta''_0} e^{-i\Gamma_2 \cos \vartheta''_0 z} \right] e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 y)}; \quad (2.23)$$

$$E_z = j_0 \frac{\Gamma_1 \sin \vartheta'_0}{2\omega\epsilon_z} \operatorname{tg} \varphi''_0 e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_1 z)}; \quad (2.24)$$

$$H_x = H'_x + H''_x = j_0 \left[ \frac{\sin^2 \varphi''_0}{2 \cos \varphi''_0} e^{-i\Gamma_1 \cos \vartheta'_0 z} + \frac{\cos \varphi''_0}{2} e^{-i\Gamma_2 \cos \vartheta''_0 z} \right] e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 y)}; \quad (2.25)$$

$$H_y = H'_y + H''_y = j_0 \left[ -\frac{\sin \varphi''_0}{2} e^{-i\Gamma_1 \cos \vartheta'_0 z} + \frac{\sin \varphi''_0}{2} e^{-i\Gamma_2 \cos \vartheta''_0 z} \right] e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 y)}; \quad (2.26)$$

$$H_z = -j_0 \frac{\mu \sin \vartheta''_0}{2\mu_z \cos \vartheta''_0} e^{-i(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)}. \quad (2.27)$$

Таким образом, если имеется только составляющая  $j_y$ , то происходит излучение волн обоих типов одновременно (в любом направлении), в отличие от случаев, рассмотренных ранее. Соотношение амплитуд волн зависит от направления распространения. В частных случаях амплитуда одной из волн обращается в нуль. То обстоятельство, что вектор плотности тока оказался направленным именно по оси  $y$ , не имеет специфического значения: по-

воротом системы координат вокруг оси  $z$  его можно ориентировать по оси  $x$  или в другом направлении.

Для упрощения дальнейших выкладок исключим тригонометрические функции посредством равенств (2.10) и вытекающих из них

$$\operatorname{tg} \varphi''_0 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \quad \sin \varphi''_0 = \frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}, \quad \cos \varphi''_0 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}},$$

$$\Gamma_1 \sin \vartheta'_0 = \Gamma_2 \sin \vartheta''_0 = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}. \quad (2.28)$$

Из (1.19) находим путем несложных преобразований

$$\Gamma_1^2 = k^2 \frac{(1 + \delta_1) \Gamma_1^2}{\Gamma_1^2 + \delta_1 \Gamma_1^2 \cos^2 \vartheta'_0}, \quad 1 = k^2 \frac{1 + \delta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1 \gamma_1^2},$$

$$\gamma_1^2 = \Gamma_1^2 \cos^2 \vartheta'_0 = k^2 \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{1 + \delta_1}. \quad (2.29)$$

Аналогичным образом находим из (1.20)

$$\gamma_2^2 = \Gamma_2^2 \cos^2 \vartheta''_0 = k^2 \frac{\alpha_2^2 + \beta_2^2}{1 + \delta_2}. \quad (2.30)$$

По соображениям более удобной нормировки тока возьмем величину амплитудного множителя в виде

$$j_0'' = j_0 \cos \varphi''_0. \quad (2.31)$$

Индексы «1» и «2» у коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  будем опускать, поскольку  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ .

Тогда получим окончательно следующие формулы:

$$j = j_y = j_0 e^{-i(\alpha x + \beta y)}; \quad (2.32)$$

$$E_x = \frac{j_0}{2\omega\epsilon} \left[ -\frac{\alpha\beta\gamma_1 e^{-i\gamma_1 z}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{k^2 \alpha\beta e^{-i\gamma_2 z}}{(\alpha^2 + \beta^2) \gamma_2} \right] e^{-i(\alpha x + \beta y)}; \quad (2.33)$$

$$E_y = \frac{j_0}{2\omega\epsilon} \left[ -\frac{\beta^2 \gamma_1 e^{-i\gamma_1 z}}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{k^2 \alpha^2 e^{-i\gamma_2 z}}{(\alpha^2 + \beta^2) \gamma_2} \right] e^{-i(\alpha x + \beta y)}; \quad (2.34)$$

$$E_z = \frac{j_0}{2\omega\epsilon} \frac{\beta e^{-i\gamma_1 z}}{1 + \delta_1} e^{-i(\alpha x + \beta y)}; \quad (2.35)$$

$$H_x = \frac{j_0}{2} \left[ \frac{\beta^2 e^{-i\gamma_1 z}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2 e^{-i\gamma_2 z}}{\alpha^2 + \beta^2} \right] e^{-i(\alpha x + \beta y)}; \quad (2.36)$$

$$H_y = \frac{j_0}{2} \left[ -\frac{\alpha\beta e^{-i\gamma_1 z}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha\beta e^{-i\gamma_2 z}}{\alpha^2 + \beta^2} \right] e^{-i(\alpha x + \beta y)}; \quad (2.37)$$

$$H_z = -\frac{j_0}{2} \frac{\alpha e^{-i\gamma_2 z}}{(1 + \delta_2) \gamma_2} e^{-i(\alpha x + \beta y)}, \quad (2.38)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 + \delta_1}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 + \delta_2}}. \quad (2.39)$$

Размерность амплитудного множителя  $j_0$  плотности тока в практической системе единиц —  $A/m$ . Нетрудно проверить, что (2.33) — (2.38) удовлетворяют уравнениям Максвелла (1.3) при любых значениях  $\alpha$  и  $\beta$ .

### Излучение цилиндрических волн синфазной нитью тока

От рассмотренного выше случая излучения плоских волн листом тока можно перейти к случаю излучения цилиндрических волн бесконечно-длинной нитью, поперечное сечение которой исчезающе мало. Для этого используем известный прием [15], при котором цилиндрическая волна представляется как сумма (или интеграл) плоских волн, распространяющихся в различных направлениях  $\vartheta_0$  и  $\varphi_0$ .

Так как размерность  $\alpha$  не нулевая, будем проводить интегрирование по безразмерному волновому числу  $h = \alpha/k$ ; при этом размерность всех величин сохранится. Амплитуду плоских волн можно принять неизменной, т. е. не зависящей от  $\alpha$ . В результате интегрирования (2.32) получим распределение тока с плотностью

$$\begin{aligned} j_\Sigma(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} j(\alpha, x) dh = j_0 e^{-i\beta y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikxh} dh = \\ &= j_0 e^{-i\beta y} \cdot 2\pi\delta(kx). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Дельта-функция показывает, что ток сосредоточен в виде бесконечной нити на оси  $y$ , поскольку  $\delta(kx) = 0$  при  $x \neq 0$ . Для определения величины этого тока вычислим интеграл

$$I_\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} j_\Sigma(x) dx = 2\pi j_0 e^{-i\beta y} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(kx) dx = \frac{2\pi}{k} j_0 e^{-i\beta y}. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что ток нити  $I_\Sigma$  равен по величине току, текущему по полоске (листа) шириною  $\approx \lambda$  (с плотностью  $j_0$ ). Поле, излучаемое нитью, находим вычислением соответствующих интегралов. Положим сначала  $\beta = 0$ ,

т. е. рассмотрим случай синфазной нити. При  $\beta=0$  из (2.33), (2.35) и (2.37) следует

$$E_x = E_z = H_y = 0. \quad (3.3)$$

Остаются составляющие  $E_y, H_x, H_z$ . Умножая (2.34) на  $dh$  и интегрируя, находим

$$E_y = -j_0 \frac{k^2}{2\omega\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-lz\gamma_2}}{\gamma_2} e^{-i\alpha x} dh = j_0 \frac{k^2}{2\omega\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-lz\sqrt{k^2 - k^2 h^2 / (1 + \delta)}}}{\sqrt{k^2 - \frac{k^2}{1 + \delta_2} h^2}} \times \\ \times e^{-lkxh} dh = -j_0 \frac{k\nu_2}{\omega\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{e^{-l\frac{kz}{\nu_2} \sqrt{\nu_2^2 - h^2}}}{\sqrt{\nu_2^2 - h^2}} \cos kxh dh. \quad (3.4)$$

В (3.4) и далее будем применять обозначения

$$1 + \delta_2 = \frac{\mu z}{\mu} = \nu_2^2, \\ 1 + \delta_1 = \frac{\epsilon z}{\epsilon} = \nu_1^2. \quad (3.5)$$

Интеграл (3.4) сводится к табличным. В качестве исходного для вычислений возьмем табличный интеграл № 6.596.9 [11]:

$$\int_0^{\infty} J_\nu(uh) K_\mu(v\sqrt{h^2 - q^2}) (h^2 - q^2)^{-\mu/2} h^{\nu+1} dh = \\ = \frac{\pi}{2} \exp\left[-i\pi\left(\mu - \nu - \frac{1}{2}\right)\right] \times \\ \times \frac{u^\nu}{v^\mu} \left[\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{q}\right]^{\mu-\nu-1} H_{\mu-\nu-1}^{(2)}(q\sqrt{u^2 + v^2}), \quad (3.6)$$

в котором примем  $\mu = 1/2, \nu = -1/2$ . Цилиндрические функции с полуцелым индексом сводятся к элементарным функциям

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

поэтому приходим к формуле

$$\int_0^{\infty} \cos uhe^{-v\sqrt{h^2 - q^2}} (h^2 - q^2)^{-1/2} dh = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(q\sqrt{u^2 + v^2}). \quad (3.7)$$

Приравнивая  $kx = u, \nu_2 = q, kz/\nu_2 = v$ , получим

$$E_y = -i \frac{j_0 k \nu_2}{\omega\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{kz}{\nu_2} \sqrt{h^2 - \nu_2^2}}}{\sqrt{h^2 - \nu_2^2}} \cos kxh dh = \\ = -j_0 \frac{\pi k \nu_2}{2\omega\epsilon} H_0^{(2)}\left(\nu_2 \sqrt{\nu_2 (kx)^2 + \left(\frac{kz}{\nu_2}\right)^2}\right),$$

или, учитывая (3.2),

$$E_y = -I_\Sigma \frac{k^2 \nu_2}{4\omega\epsilon} H_0^{(2)}(k\sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2}). \quad (3.8)$$

Для вычисления  $H_x$  применим интеграл, получающийся из (3.7) при дифференцировании по параметру  $v$ ,

$$\int_0^{\infty} \cos uhe^{-v\sqrt{h^2 - q^2}} dh = \frac{\pi}{2i} \frac{qv}{\sqrt{u^2 + v^2}} H_1^{(2)}(q\sqrt{u^2 + v^2}). \quad (3.9)$$

Из (2.36) при  $\beta=0$  находим в соответствии с (3.9)

$$H_x = \frac{j_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-lz\gamma_2} e^{-i\alpha x} dh = j_0 \int_0^{\infty} e^{-l\frac{kz}{\nu_2} \sqrt{\nu_2^2 - h^2}} \cos kxh dh = \\ = j_0 \frac{\pi}{2i} \frac{\nu_2 \frac{kz}{\nu_2}}{\sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{kz}{\nu_2}\right)^2}} H_1^{(2)}\left(\nu_2 \sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{kz}{\nu_2}\right)^2}\right) = \\ = -i I_\Sigma \frac{\nu_2 kz}{4\sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2}} H_1^{(2)}(k\sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2}). \quad (3.10)$$

Для вычисления  $H_z$  применим интеграл, получающийся из (3.7) дифференцированием по параметру  $u$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{h \sin uhe^{-v\sqrt{h^2 - q^2}}}{\sqrt{h^2 - q^2}} dh = \frac{\pi}{2i} \frac{qu}{\sqrt{u^2 + v^2}} H_1^{(2)}(q\sqrt{u^2 + v^2}). \quad (3.11)$$

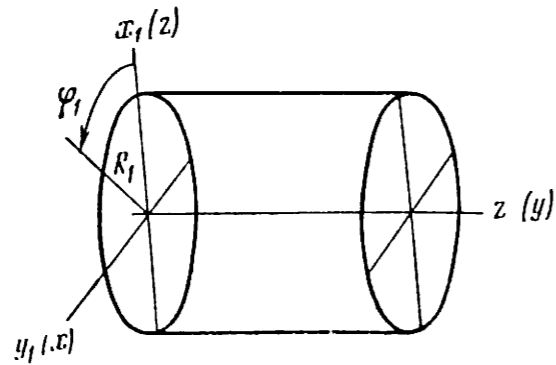


Рис. 5

Таким образом, находим

$$\begin{aligned}
 H_z &= -\frac{j_0}{2v_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-iz\gamma_2}}{\gamma_2} e^{-iax} dh = \\
 &= i \frac{kj_0}{v_2^2} \int_0^{\infty} \frac{he^{-iz\gamma_2}}{\gamma_2} \sin kxh dh = \quad (3.12) \\
 &= iI_{\Sigma} \frac{v_2 kx}{4 \sqrt{v_2^2 x^2 + z^2}} H_1^{(2)} \left( \sqrt{v_2^2 x^2 + z^2} \right).
 \end{aligned}$$

Полученные выражения (3.8), (3.10) и (3.12) описывают поле цилиндрической волны. Их можно записать в другом виде, применив цилиндрические координаты  $R_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $z_1$ , ось которых  $z_1$  совпадает с осью  $y$ , а угол  $\varphi_1$  отсчитывается от оси  $z$  к оси  $x$  (рис. 5). Нить тока  $I_{\Sigma}$  расположена на оси  $z_1$  цилиндрических координат. Переход к новым координатам проводится по формулам

$$\begin{aligned}
 z_1 &= y, & z &= R_1 \cos \varphi_1, \\
 R_1^2 &= z^2 + x^2, & x &= R_1 \sin \varphi_1, \\
 \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{x}{z}, & y &= z_1.
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

В предложенной цилиндрической системе координат электрическое поле также имеет только одну составляющую

$$E_{z_1} = -I_{\Sigma} \frac{k^2 v_2}{4\omega\epsilon} H_0^{(2)} \left( kR_1 \sqrt{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1} \right). \quad (3.14)$$

Далее находим

$$\begin{aligned}
 H_{\varphi_1} &= H_x \cos \varphi_1 - H_z \sin \varphi_1 = \\
 &= -iI_{\Sigma} \frac{k v_2 H_1^{(2)} \left( kR_1 \sqrt{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1} \right)}{4 \sqrt{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}}, \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$H_{R_1} = H_x \sin \varphi_1 + H_z \cos \varphi_1 = 0, \quad H_{z_1} = 0.$$

Из (3.15) видно, что магнитное поле нити имеет только азимутальную составляющую, как и в случае изотропной среды. Отличием является зависимость от угла  $\varphi_1$ , исчезающая при  $v_2=1$ . При малых расстояниях от нити ( $R_1 \rightarrow 0$ ) формула (3.15) упрощается, поскольку

$$H_1^{(2)}(xR_1) = J_1(xR_1) - iN_1(xR_1) \rightarrow -iN_1(xR_1) \rightarrow \frac{2i}{\pi x R_1}. \quad (3.16)$$

При этом

$$H_{\varphi_1} = \frac{I_{\Sigma}}{2\pi R_1} \cdot \frac{v_2}{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}, \quad (3.17)$$

и при  $v_2=1$

$$H_{\varphi_1} = \frac{I_{\Sigma}}{2\pi R_1}$$

— известная формула для магнитного поля прямолинейного тока. На больших расстояниях цилиндрические функции можно заменить асимптотическими выражениями. Тогда

$$\begin{aligned}
 E_{z_1} &= -I_{\Sigma} \frac{k^2 v_2}{4\omega\epsilon} \sqrt{\frac{2i}{\pi k R_1}} \frac{e^{-ikR_1 \sqrt{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}}}{(v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1)^{1/4}}, \\
 H_{\varphi_1} &= I_{\Sigma} \frac{k v_2}{4} \sqrt{\frac{2i}{\pi k R_1}} \frac{e^{-ikR_1 \sqrt{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}}}{(v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1)^{3/4}}.
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что поверхности равных амплитуд магнитного поля и поверхности равных фаз не совпадают между собой и имеют более сложную форму, чем у цилиндрических волн в изотропной среде.

Введем обозначение

$$\kappa_2 = k \sqrt{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}.$$

Тогда (3.14) и (3.15) запишутся короче

$$\begin{aligned} E_{z_1} &= -I_\Sigma \frac{k^2 v_2^2}{4\omega \varepsilon} H_0^{(2)}(\kappa_2 R_1), \\ H_{\varphi_1} &= -i I_\Sigma \frac{k^2 v_2^2}{4\kappa_2} H_1^{(2)}(\kappa_2 R_1), \\ E_{R_1} &= E_{\varphi_1} = H_{R_1} = H_{z_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Очевидно, что  $\kappa_2$  можно рассматривать как волновой коэффициент, величина которого не постоянна, но зависит от направления  $\varphi_1$ , что соответствует физике явления. Вследствие этой зависимости форма волнового фронта отличается от формы кругового цилиндра. В рассмотренном выше случае волновой фронт имеет форму эллиптического цилиндра. В самом деле, полагая

$$k R_1 \sqrt{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1} = k C = \text{const},$$

находим уравнение поверхности волнового фронта

$$R_1 = \frac{C}{\sqrt{v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}} \quad (3.19a)$$

— уравнение эллиптического цилиндра. Его форма зависит только от магнитной анизотропии, так как электрическое поле имеет всего одну компоненту  $\overleftrightarrow{E}_{z_1}$  ( $E_y$ ), зависящую только от одного элемента тензора  $\varepsilon$ .

Правильность решения (3.19), полученного интегрированием по  $\alpha/k$ , можно проверить, решая уравнения Максвелла в цилиндрических координатах  $R_1, \varphi_1, z_1$ . Тензоры (1.1)' и (1.2) в прямоугольной системе координат  $x_1, y_1, z_1$  принимают вид

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\varepsilon} &= \begin{vmatrix} \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix}, \\ \overleftrightarrow{\mu} &= \begin{vmatrix} \mu_z & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Далее, переходя от декартовых координат  $x_1, y_1, z_1$  к цилиндрическим, находим вместо

$$D_{x_1} = \varepsilon_z E_{x_1}, \quad D_{y_1} = \varepsilon E_{y_1}, \quad D_{z_1} = \varepsilon E_{z_1}$$

соотношения

$$\begin{aligned} D_{R_1} \cos \varphi_1 - D_{\varphi_1} \sin \varphi_1 &= \varepsilon_z (E_{R_1} \cos \varphi_1 - E_{\varphi_1} \sin \varphi_1), \\ D_{R_1} \sin \varphi_1 + D_{\varphi_1} \cos \varphi_1 &= \varepsilon (E_{R_1} \sin \varphi_1 + E_{\varphi_1} \cos \varphi_1), \\ D_{z_1} &= \varepsilon E_{z_1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Умножим первое из равенств (3.21) на  $\cos \varphi_1$ , второе на  $\sin \varphi_1$  и затем сложим их

$$D_{R_1} = E_{R_1} (\varepsilon_z \cos^2 \varphi_1 + \varepsilon \sin^2 \varphi_1) + E_{\varphi_1} (-\varepsilon_z + \varepsilon) \cos \varphi_1 \sin \varphi_1. \quad (3.22)$$

Умножим первое равенство (3.21) на  $\sin \varphi_1$ , второе — на  $\cos \varphi_1$  и затем вычтем первое из второго

$$D_{\varphi_1} = E_{R_1} (\varepsilon - \varepsilon_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + E_{\varphi_1} (\varepsilon_z \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon \cos^2 \varphi_1). \quad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) следует, что тензор диэлектрической проницаемости в цилиндрической системе координат  $R_1, \varphi_1, z_1$  имеет вид

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_z \cos^2 \varphi_1 & (\varepsilon - \varepsilon_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ (\varepsilon - \varepsilon_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 & \varepsilon_z \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon \cos^2 \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix}. \quad (3.24)$$

Здесь характерным является зависимость элементов тензора от угла  $\varphi_1$ . Аналогичным образом находим

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} \mu \sin^2 \varphi_1 + \mu_z \cos^2 \varphi_1 & (\mu - \mu_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ (\mu - \mu_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 & \mu_z \sin^2 \varphi_1 + \mu \cos^2 \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{vmatrix}. \quad (3.25)$$

Уравнения Максвелла в принятой цилиндрической системе координат записываются в форме

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial E_{\varphi_1}}{\partial z_1} = -i\omega [H_{R_1} (\mu \sin^2 \varphi_1 + \mu_z \cos^2 \varphi_1) + H_{\varphi_1} (\mu - \mu_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1], \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial E_{R_1}}{\partial z_1} - \frac{\partial E_{z_1}}{\partial R_1} = -i\omega [H_{R_1} (\mu - \mu_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + H_{\varphi_1} (\mu_z \sin^2 \varphi_1 + \mu \cos^2 \varphi_1)], \quad (3.27)$$



$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial (R_1 E_{\varphi_1})}{\partial R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial E_{R_1}}{\partial \varphi_1} = -i\omega\mu H_z; \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial H_{z_1}}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial H_{\varphi_1}}{\partial z_1} = i\omega [E_{R_1} \varepsilon \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_z \cos^2 \varphi_1] + E_{\varphi_1} (\varepsilon - \varepsilon_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial H_{R_1}}{\partial z_1} - \frac{\partial H_z}{\partial R_1} = i\omega [E_{R_1} (\varepsilon - \varepsilon_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + E_{\varphi_1} (\varepsilon_z \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon \cos^2 \varphi_1)], \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1 H_{\varphi_1}}{\partial R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial H_{R_1}}{\partial \varphi_1} = i\omega \varepsilon E_{z_1}. \quad (3.31)$$

Уравнения расходимости записываются так:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} = & \frac{\varepsilon \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon_z \cos^2 \varphi_1}{R_1} \frac{\partial (R_1 E_R)}{\partial R_1} + \\ & + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{R_1} \frac{\partial (R_1 E_{\varphi_1})}{\partial R_1} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_z}{R_1} \frac{\partial (\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 E_{R_1})}{\partial \varphi_1} + \\ & + \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} [E_{\varphi_1} (\varepsilon_z \sin^2 \varphi_1 + \varepsilon \cos^2 \varphi_1)] + \varepsilon \frac{\partial E_{z_1}}{\partial z_1} = 0, \quad (3.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = & \frac{\mu \sin^2 \varphi_1 + \mu_z \cos^2 \varphi_1}{R_1} \frac{\partial (R_1 H_{R_1})}{\partial R_1} + \\ & + \frac{(\mu - \mu_z) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{R_1} \frac{\partial (R_1 H_{\varphi_1})}{\partial R_1} + \frac{\mu - \mu_z}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} (\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 H_{R_1}) + \\ & + \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} [H_{\varphi_1} (\mu_z \sin^2 \varphi_1 + \mu \cos^2 \varphi_1)] + \mu \frac{\partial H_{z_1}}{\partial z_1} = 0. \quad (3.33) \end{aligned}$$

При  $\varepsilon_z = \varepsilon$  и  $\mu_z = \mu$  полученные уравнения приобретают форму, известную для изотропной среды. Теперь же их вид и решение гораздо сложнее. Ограничимся рассмотрением частного случая  $\beta = 0$ , когда поле не зависит от координаты  $z_1$ . В этом случае вся система уравнений (3.26) — (3.31) разбивается на две подсистемы, из которых возьмем первую:

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial \varphi_1} = -i\omega\mu \left[ H_{R_1} \left( \sin^2 \varphi_1 + \frac{\mu_z}{\mu} \cos^2 \varphi_1 \right) + H_{\varphi_1} \left( 1 - \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \right], \quad (3.34)$$

$$\frac{-\partial E_{z_1}}{\partial R_1} = -i\omega\mu \left[ H_{R_1} \left( 1 - \frac{\mu_z}{\mu} \right) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + H_{\varphi_1} \left( \frac{\mu_z}{\mu} \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \right) \right], \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial (R_1 H_{\varphi_1})}{\partial R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial H_{R_1}}{\partial \varphi_1} = i\omega \varepsilon E_{z_1}. \quad (3.36)$$

Применяя опять обозначение  $\mu_z/\mu = v_2^2$ , находим из (3.34) и (3.35) составляющие магнитного поля

$$\begin{aligned} H_{R_1} = & \frac{i \left( v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \right) \frac{\partial E_{z_1}}{\partial \varphi_1}}{\omega \mu v_2^2 R_1} + \\ & + \frac{i (1 - v_2^2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\omega \mu v_2^2} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial R_1}, \quad (3.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\varphi_1} = & -i \frac{(\sin^2 \varphi_1 + v_2^2 \cos^2 \varphi_1) \frac{\partial E_{z_1}}{\partial R_1}}{\omega \mu v_2^2} - \\ & - \frac{i (1 - v_2^2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\omega \mu v_2^2 R_1} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial \varphi_1}. \quad (3.38) \end{aligned}$$

Подстановка (3.37) и (3.38) в (3.36) дает уравнение для  $E_{z_1}$

$$\begin{aligned} & \left[ (\sin^2 \varphi_1 + v_2^2 \cos^2 \varphi_1) \left( \frac{\partial^2 E_{z_1}}{\partial R_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial R_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{(v_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) \frac{\partial^2 E_{z_1}}{\partial \varphi_1^2}}{R_1^2} \right] + \\ & + \frac{(1 - v_2^2)}{R_1} \left[ (\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) \frac{\partial E_{z_1}}{\partial R_1} + 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \frac{\partial^2 E_{z_1}}{\partial R_1 \partial \varphi_1} - \right. \\ & \left. - \frac{2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{R_1} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial \varphi_1} \right] + k v_2^2 E_{z_1} = 0. \quad (3.39) \end{aligned}$$

Полученное уравнение имеет довольно сложный вид и способ его решения не очевиден. Метод разделения переменных, применимый при  $\nu_2=1$ , не помогает при решении уравнений вида (3.39). Чаще всего дифференциальные уравнения с неразделяющимися переменными решаются приближенными методами. В некоторых случаях могут быть полезны искусственные методы. Сложность дифференциальных уравнений, получающихся при анализе распространения неплоских волн в анизотропных средах, является одной из причин, мешающих до сих пор решению задач в этой области.

В нашем случае известно выражение (3.14), полученное способом интегрирования по волновому коэффициенту. Оно является решением уравнения (3.39), что нетрудно проверить подстановкой.

Составляющие магнитного поля можно вычислить с помощью (3.37) и (3.38).

Еще более сложное решение получается, если отказаться от выполнения принятого условия  $\beta=0$ , т. е.  $\partial/\partial z_1=0$ . Этот случай рассмотрим в следующем разделе.

Выше было найдено электромагнитное поле синфазной нити электрического тока, расположенной на оси  $y$ . Более простым является случай, когда нить электрического тока расположена на оси  $z$ . Уравнения Максвелла в цилиндрических координатах  $(R, \varphi, z)$  в этом случае имеют такой же вид, как и при изотропной среде. Их решение можно получить методом разделения переменных, а можно и интегрированием по волновому коэффициенту. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{Ik^2}{4\omega\epsilon} H_0^{(2)}(k\nu_1 r), \\ H_\varphi &= -i \frac{Ik\nu_1}{4} H_1^{(2)}(k\nu_1 r). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Остальные компоненты поля равны нулю.

В этом случае анизотропия среды не отражается существенным образом на характере процесса. Поверхность равных фаз имеет форму кругового цилиндра, ось которого совпадает с осью  $z$ . Изменилась только длина волны в  $\nu_1$  раз.

В соответствии с этим результатом можно найти поле более сложных источников, которые можно представить в виде совокупности (дискретной или интегральной) синфазных нитей тока в анизотропной среде, параллельных оси  $z$ .

Так, например, несложно решить задачу о дифракции на полуплоскости

$$y=0, \quad x > 0 \quad \text{при} \quad E \parallel z^0.$$

### Излучение конических волн нитью тока

В предыдущем разделе были получены выражения (3.19) для цилиндрических волн, излучаемых бесконечно длинной нитью, расположенной вдоль оси  $y$ , по которой течет переменный ток

$$I = j_0 \frac{2\pi}{k} e^{i\omega t};$$

фаза тока не зависит от  $y$ , т. е. одинакова во всех точках нити. В этом разделе займемся исследованием более сложного случая, когда на оси  $y$  имеется нить с бегущей волной тока

$$I_{\Sigma} = j_0 \frac{2\pi}{k} e^{-i\beta y} e^{i\omega t}. \quad (4.1)$$

В этом случае ( $\beta \neq 0$ ) имеются все шесть составляющих поля; равенства (3.3) не выполняются. Попытаемся применить тот же прием интегрирования по волновому числу. Проще других находится  $E_z$ . Интегрируя (2.35) и используя формулу (3.9), находим

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{j_0 \beta e^{-i\beta y}}{2\omega \epsilon (1 + \delta_1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma_1 z} e^{-i\alpha x} dh = \\ &= \frac{I_{\Sigma} k \beta}{2\pi \omega \epsilon v_1^2} \int_0^{\infty} \cos kx h e^{-iz \sqrt{k^2 - \frac{k^2 h^2 \beta^2}{v_1^2}}} dh = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{I_{\Sigma} k \beta}{2\pi \omega \epsilon v_1^2} \int_0^{\infty} \cos kx h e^{-i \frac{kz}{v_1} \sqrt{\left(v_1^2 - \frac{\beta^2}{k^2}\right) - h^2}} dh = \\ &= \frac{I_{\Sigma} k \beta}{2\pi \omega \epsilon v_1^2} \frac{\pi}{2i} \frac{\frac{kz}{v_1} \sqrt{v_1^2 - \frac{\beta^2}{k^2}}}{\sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{kz}{v_1}\right)^2}} \times \\ &\times H_1^{(2)} \left( \sqrt{v_1^2 - \frac{\beta^2}{k^2}} \sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{kz}{v_1}\right)^2} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{k^2 - \frac{\beta^2}{v_1^2}}, \\ k_2 &= \sqrt{k^2 - \frac{\beta^2}{v_2^2}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

тогда после преобразований получим

$$\begin{aligned} E_z &= -I_{\Sigma} \frac{i\beta k_1 z}{4\omega \epsilon v_1 \sqrt{v_1^2 x^2 + z^2}} H_1^{(2)} \left( k_1 \sqrt{v_1^2 x^2 + z^2} \right) = \\ &= I_{\Sigma} \frac{i\beta}{4\omega \epsilon v_1} \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(2)} \left( k_1 \sqrt{v_1^2 x^2 + z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

При переходе к цилиндрическим координатам по (3.13) формула (4.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} E_z &= -I_{\Sigma} \frac{i\beta k_1 \cos \varphi_1}{4\omega \epsilon v_1 \sqrt{v_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}} \times \\ &\times H_1^{(2)} \left( k_1 R_1 \sqrt{v_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1} \right) = E_{x_1}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Проведенное вычисление сходно с вычислением интеграла (3.10). Характерным отличием результата (4.3) от (3.10) является замена в аргументе цилиндрической функции коэффициента  $k$  на  $k_1$ . Из (4.2) видно, что при  $\beta = 0$  получается  $k_1 = k$ ; при  $\beta^2 < k^2 v_1^2$  число  $k_1$  — действительное, а при  $\beta^2 > k^2 v_1^2$ , число  $k_1$  — мнимое. В последнем случае функция Ганкеля заменяется на функцию

Макдональда

$$K_0(\rho) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i\rho) = -\frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}(-i\rho).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} E_z &= I_\Sigma \frac{i\beta}{4\omega\varepsilon\nu_1} \frac{2i}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} K_0 \left( \sqrt{\frac{\beta^2}{\nu_1^2} - k^2} \sqrt{\nu_1^2 x^2 + z^2} \right) = \\ &= -I_\Sigma \frac{\beta}{2\pi\omega\varepsilon\nu_1} \frac{\partial}{\partial z} K_0 \left( k' \sqrt{\nu_1^2 x^2 + z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.3a)$$

Физически это означает, что при больших  $\beta^2$  энергия не излучается нитью, а идет вдоль нити, оставаясь в ближней зоне (связанная волна). Таким же образом находим  $H_z$ , используя формулу (3.11),

$$\begin{aligned} H_z &= -\frac{j_0 e^{-i\beta y}}{2\nu_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha e^{-i\gamma_2 z}}{\gamma_2} e^{-i\alpha x} dh = \\ &= -\frac{I_\Sigma k}{4\pi\nu_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k h e^{-i\alpha x} \sqrt{k^2 - \frac{k^2 h^2 + \beta^2}{\nu_2^2}}}{\sqrt{k^2 - \frac{k^2 h^2 + \beta^2}{\nu_2^2}}} e^{-i\alpha x} dh = \\ &= i \frac{I_\Sigma k}{2\pi\nu_2} \int_0^{\infty} \frac{h e^{-i\frac{kz}{\nu_2} \sqrt{\left(\frac{\nu_2^2}{2} - \frac{\beta^2}{k^2}\right) - h^2}}}{\sqrt{\left(\frac{\nu_2^2}{2} - \frac{\beta^2}{k^2}\right) - h^2}} \sin kx h dh = \\ &= i \frac{I_\Sigma k}{4\nu_2} \frac{kx \sqrt{\left(\frac{\nu_2^2}{2} - \frac{\beta^2}{k^2}\right)}}{\sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{kz}{\nu_2}\right)^2}} \times \\ &\quad \times H_1^{(2)} \left( \sqrt{\frac{\nu_2^2}{2} - \frac{\beta^2}{k^2}} \sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{kz}{\nu_2}\right)^2} \right), \\ H_z &= i I_\Sigma \frac{\nu_2 k_2 x}{4 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2}} H_1^{(2)} \left( k_2 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2} \right) = \\ &= -i I_\Sigma \frac{1}{4\nu_2} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)} \left( k_2 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

При переходе к цилиндрическим координатам получим

$$\begin{aligned} H_z &= i I_\Sigma \frac{\nu_2 k_2 \sin \varphi_1}{4 \sqrt{\nu_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1}} \times \\ &\quad \times H_1^{(2)} \left( k_2 R_1 \sqrt{\nu_2^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1} \right) = H_{x_1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В (4.6) в отличие от (4.4) входят величины  $\nu_2$  и  $k_2$ . При  $\beta^2 > k^2 \nu_2^2$  функция Ханкеля заменяется на функцию Макдональда

Теперь перейдем к вычислению других составляющих векторов поля. Составляющая  $E_x$  определяется интегралом

$$E_x = \frac{j_0 \beta e^{-i\beta y}}{2\omega\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\alpha \gamma_1 e^{-i\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{k^2 a e^{-i\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2) \gamma_2} \right] e^{-i\alpha x} dh. \quad (4.7)$$

Остальные составляющие определяются родственными интегралами. Их можно вычислить (путем дифференцирования по параметру), если сначала вычислить интегралы типа

$$I(\nu_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2) \gamma_1} dh, \quad I(\nu_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2) \gamma_2} dh. \quad (4.8)$$

Однако интеграл (4.8) не приводится к известным табличным интегралам.

Можно попытаться найти искомые выражения путем решения уравнений Максвелла в цилиндрических координатах  $R_1, \varphi_1, z_1$ . Получающиеся при этом уравнения имеют очень сложный вид и способ их решения неясен. Все же рассмотрение исходных дифференциальных уравнений полезно. Напишем уравнения (1.3) в развернутом виде, учитывая зависимость от  $y$  в виде  $\exp(-i\beta y)$ ,

$$\begin{aligned} -i\beta H_z - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega\varepsilon E_x, & -i\beta E_z - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega\mu H_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon E_y, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega\mu H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} + i\beta H_x &= i\omega\varepsilon E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} + i\beta E_x &= -i\omega\mu H_z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Подставим  $E_x$  из первого уравнения (4.9) в пятое:

$$\frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left( -i\beta H_z - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y.$$

Откуда после несложных преобразований следует

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon \mu H_y = -i\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - i\beta \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (4.10)$$

Так как в (4.10) неизвестная  $H_y$  дифференцируется только по  $z$ , то можно написать

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} + k^2 H_y = -i\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - i\beta \frac{\partial H_z}{\partial z} = f_1(z). \quad (4.11)$$

Функции в правой части (4.11) можем считать известными, поскольку они легко находятся из (4.3) и (4.5).

Таким образом, для вычисления  $H_y$  нужно решить обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью.

Решение дифференциального уравнения типа (4.11) без правой части известно:

$$H_y = C_1 e^{ikz} + C_2 e^{-ikz}.$$

Решение неоднородного уравнения (4.11) находится [16], например, методом вариации постоянных в виде квадратур

$$H_y = \frac{e^{ikz}}{2ik} \int_{z_0}^z e^{-ik\zeta} f_1(\zeta) d\zeta + \frac{e^{-ikz}}{-2ik} \int_{z_0}^z e^{ik\zeta} f_1(\zeta) d\zeta = \frac{1}{k} \int_{z_0}^z \sin k(z-\zeta) f_1(\zeta) d\zeta. \quad (4.12)$$

Подстановка (4.12) в (4.11) показывает, что уравнение (4.11) выполняется.

$$f_1(z) = -i\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - i\beta \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{I_\Sigma \beta}{4\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H_0^{(2)} \left( k_1 \sqrt{\nu_1^2 x^2 + z^2} \right) -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{I_\Sigma \beta}{4\nu_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H_0^{(2)} \left( k_2 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2} \right) = \\ & = \frac{\beta I_\Sigma}{4} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left[ \frac{1}{\nu_1} H_0^{(2)} \left( k_1 \sqrt{\nu_1^2 x^2 + z^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\nu_2} H_0^{(2)} \left( k_2 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.12), получим в предположении допустимости перестановки операций интегрирования  $\zeta$  и дифференцирования по  $x$  следующее выражение для  $H_y$ :

$$\begin{aligned} H_y = & \frac{\beta I_\Sigma}{4k} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z \sin k(z-\zeta) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{\nu_1} H_0^{(2)} \left( k_1 \sqrt{\nu_1^2 x^2 + \zeta^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\nu_2} H_0^{(2)} \left( k_2 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + \zeta^2} \right) \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Выражение для  $H_x$  можно найти из третьего уравнения (4.9) или из уравнения дивергенции

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 = \mu \frac{\partial H_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (4.15)$$

При этом получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial x} = & i\beta H_y - \nu_2^2 \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{i\beta^2 I_\Sigma}{4k} \int_{z_0}^z \sin k(z-\zeta) \times \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{\nu_1} H_0^{(2)} \left( k_1 \sqrt{\nu_1^2 x^2 + \zeta^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\nu_2} H_0^{(2)} \left( k_2 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + \zeta^2} \right) \right] d\zeta \left. - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{i I_\Sigma \nu}{4} \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(2)} \left( k_2 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2} \right) \right\}, \right. \\ H_x = & \frac{i I_\Sigma}{4} \left\{ \nu_2 \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(2)} \left( k_2 \sqrt{\nu_2^2 x^2 + z^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{k} \int_{z_0}^z \sin k(z-\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} [\dots] d\zeta \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В найденных выражениях (4.14) и (4.16) функции Ханкеля заменяются на функции Макдональда, если  $\beta^2$  достаточно велико.

Например

$$H_y = \frac{i\beta I_\Sigma}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z \sin k(z-\zeta) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{v_1} K \left( k_1' \sqrt{v_1^2 x^2 + \zeta^2} \right) - \frac{1}{v_2} K_0 \left( k_2' \sqrt{v_2^2 x^2 + \zeta^2} \right) \right] d\zeta, \quad (4.14a)$$

где

$$k_1' = \sqrt{\frac{\beta^2}{v_1^2} - k^2}, \quad k_2' = \sqrt{\frac{\beta^2}{v_2^2} - k^2}.$$

Из (4.9) можно получить и формулы для  $E_x$  и  $E_y$ . Интегралы типа (4.14) по-видимому не сводятся к известным и производят новую специальную функцию. Необходимо заметить, что нижний предел  $z_0$  пока остался неопределенным.

Вернемся теперь к способу нахождения поля нити интегрированием по безразмерному волновому коэффициенту  $h$ . Величина  $H_y$  определяется интегралом от функции (2.37)

$$H_y = \frac{j_0 \beta e^{-i\beta y}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{ae^{-i\gamma_1 z}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{ae^{-i\gamma_2 z}}{\alpha^2 + \alpha^2} \right] e^{-i\alpha x} dh = \\ = i \frac{j_0 \beta e^{-i\beta y}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{e^{-i\gamma_1 z}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{e^{-i\gamma_2 z}}{\alpha^2 + \beta^2} \right] e^{-i\alpha x} dh = \\ = i \frac{I_\Sigma \beta}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ - \int_0^{\infty} \frac{\cos kxhe^{-\frac{kz}{v_1} \sqrt{h^2 - \left(\frac{v_1 k_1}{k}\right)^2}}}{h^2 + \beta^2/k^2} dh + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{\cos kxhe^{-\frac{kz}{v_2} \sqrt{h^2 - \left(\frac{v_2 k_2}{k}\right)^2}}}{h^2 + \beta^2/k^2} dh \right\}. \quad (4.17)$$

Два интеграла в фигурных скобках (4.17) однотипны; второй получается из первого заменой постоянной  $v_1$  на  $v_2$ , поэтому достаточно проанализировать один из них:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos kxhe^{-\frac{kz}{v_1} \sqrt{h^2 - \left(\frac{v_1 k_1}{k}\right)^2}}}{h^2 + \beta^2/k^2} dh. \quad (4.18)$$

Сравним (4.18) с интегралом (3.9). Подынтегральная функция в (4.18), кроме точек разветвления  $h = \pm q$ , имеет еще полюса  $h \pm i\beta/k$ , расположение которых определяется величиной  $\beta$ . Допустим сначала, что  $\beta^2 > k^2 v_1^2$ . При этом

$$\left(\frac{v_1 k_1}{k}\right)^2 = v_1^2 - \frac{\beta^2}{k^2} < 0.$$

Обозначим

$$-\left(\frac{v_1 k_1}{k}\right)^2 = \frac{\beta^2}{k^2} - v_1^2 = h_1^2 > 0. \quad (4.19)$$

Тогда (4.18) можно записать в виде

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\cos kxhe^{-\frac{kz}{v_1} \sqrt{h^2 + h_1^2}}}{h^2 + h_1^2 + v_1^2} dh. \quad (4.20)$$

Представим знаменатель (4.20) в виде разности двух дробей:

$$\frac{1}{h^2 + h_1^2 + v_1^2} = \frac{i}{2v_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{h^2 + h_1^2 + iv_1}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + h_1^2 - iv_1}} \right], \\ I_1 = \frac{i}{2v_1} \int_0^{\infty} \frac{\cos kxhe^{-\frac{kz}{v_1} \sqrt{h^2 + h_1^2}}}{\sqrt{h^2 + h_1^2 + iv_1}} dh - \\ - \frac{i}{2v_1} \int_0^{\infty} \frac{\cos kxhe^{-\frac{kz}{v_2} \sqrt{h^2 + h_1^2}}}{\sqrt{h^2 + h_1^2 + iv_1}} dh. \quad (4.21)$$

Теперь умножим и разделим интегралы (4.21) на  $e^{ikz}$ , достигнув при этом соответствия между аргументом показательной функции и знаменателем дроби

$$I_1 = \frac{ie^{ikz}}{2\nu_1} \int_0^\infty \cos kxh \frac{e^{-\frac{kz}{\nu_1} [\sqrt{h^2+h_1^2}+i\nu_1]}}{\sqrt{h^2+h_1^2+i\nu_1}} dh -$$

$$- \frac{ie^{-ikz}}{2\nu_1} \int_0^\infty \cos kxh \frac{e^{-\frac{kz}{\nu_1} [\sqrt{h^2+h_1^2}-i\nu_1]}}{\sqrt{h^2+h_1^2-i\nu_1}} dh.$$

Далее представим в виде интеграла дробь

$$\frac{e^{-\frac{kz}{\nu_1} [\sqrt{h^2+h_1^2}+i\nu_1]}}{\sqrt{h^2+h_1^2+i\nu_1}} = -\frac{k}{\nu_1} \int_\infty^z e^{-\frac{kz}{\nu_1} [\sqrt{h^2+h_1^2}+i\nu_1]} d\zeta, \quad (4.22)$$

и аналогичным образом вторую дробь. Меняя затем порядок интегрирования, получим

$$I_1 = -\frac{ike^{ikz}}{2\nu_1^2} \int_\infty^z d\zeta \int_0^\infty \cos kxhe^{-\frac{k\zeta}{\nu_1} [\sqrt{h^2+h_1^2}+i\nu_1]} dh +$$

$$+ \frac{ike^{-ikz}}{2\nu_1^2} \int_\infty^z d\zeta \int_0^\infty \cos kxhe^{-\frac{k\zeta}{\nu_1} [\sqrt{h^2+h_1^2}+i\nu_1]} dh =$$

$$= -\frac{ike^{ikz}}{2\nu_1^2} \int_\infty^z e^{-ik\zeta} d\zeta \int_0^\infty \cos kxhe^{-\frac{k\zeta}{\nu_1} [\sqrt{h^2+h_1^2}]} dh +$$

$$+ \frac{ike^{-ikz}}{2\nu_1^2} \int_\infty^z e^{ik\zeta} d\zeta \int_0^\infty \cos kxhe^{-\frac{k\zeta}{\nu_1} \sqrt{h^2+h_1^2}} dh. \quad (4.23)$$

В таблицах интегралов [11] имеется интеграл № 3.961.2, в котором изменим обозначения величин

$$\int_0^\infty e^{-v\sqrt{\gamma^2+h^2}} \frac{\cos uhdh}{\sqrt{\gamma^2+h^2}} = K_0(\gamma\sqrt{u^2+v^2}).$$

Из него дифференцированием по параметру  $v$  получим другой интеграл

$$-\int_0^\infty \cos uhe^{-v\sqrt{h^2+\gamma^2}} dh = \frac{\partial}{\partial v} K_0(\gamma\sqrt{u^2+v^2}) =$$

$$= -\frac{v\gamma}{\sqrt{u^2+v^2}} K_1(\gamma\sqrt{u^2+v^2}). \quad (4.24)$$

Сравнивая (4.24) с (3.9), можно прийти к заключению, что они получаются один из другого при соответствующей замене параметров ( $q$  на  $i\gamma$ ).

Возвращаясь к нашему интегралу (4.23), можем теперь с учетом (4.24) написать

$$I_1 = -\frac{ike^{ikz}}{2\nu_1^2} \int_\infty^z e^{-ik\zeta} \frac{\frac{k\zeta}{\nu_1} h_1}{\sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{k\zeta}{\nu_1}\right)^2}} \times$$

$$\times K_1\left(h_1 \sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{k\zeta}{\nu_1}\right)^2}\right) d\zeta + \frac{ike^{-ikz}}{2\nu_1^2} \int_\infty^z e^{ik\zeta} \times$$

$$\times \frac{\frac{k\zeta}{\nu_1} h_1}{\sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{k\zeta}{\nu_1}\right)^2}} K_1\left(h_1 \sqrt{(kx)^2 + \left(\frac{k\zeta}{\nu_1}\right)^2}\right) d\zeta =$$

$$= \frac{-ike^{ikz}}{2\nu_1^2} \int_\infty^z e^{-ik\zeta} \frac{\zeta h_1}{\sqrt{(\nu_1 x)^2 + \zeta^2}} K_1\left(\frac{kh_1}{\nu_1} \sqrt{(\nu_1 x)^2 + \zeta^2}\right) d\zeta +$$

$$+ \frac{ike^{-ikz}}{2\nu_1^2} \int_\infty^z e^{ik\zeta} \frac{\zeta h_1}{\sqrt{(\nu_1 x)^2 + \zeta^2}} K_1\left(\frac{kh_1}{\nu_1} \sqrt{(\nu_1 x)^2 + \zeta^2}\right) d\zeta =$$

$$= -\frac{k}{\nu_1^2} \int_\infty^z \frac{e^{-ikz} e^{ik\zeta} - e^{ik\zeta} e^{-ikz}}{2i} \cdot \frac{h_1 \zeta}{\sqrt{(\nu_1 x)^2 + \zeta^2}} K_1 \times$$

$$\times \left(\frac{kh_1}{\nu_1} \sqrt{(\nu_1 x)^2 + \zeta^2}\right) d\zeta =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{k}{v_1^2} \int_{-\infty}^z \sin k(\zeta - z) \frac{h_1 \zeta}{V(v_1 x)^2 + \zeta^2} K_1 \left( \frac{kh_1}{v_1} V(v_1 x)^2 + \zeta^2 \right) d\zeta = \\
&= -\frac{1}{v_1} \int_{-\infty}^z \sin k(z - \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0 \left( \frac{kh_1}{v_1} V(v_1 x)^2 + \zeta^2 \right) d\zeta. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получим:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{\cos kxhe^{-\frac{kz}{v^2} \sqrt{h^2 + h_2^2}}}{h^2 + h_2^2 + v_2^2} dh = \\
&= -\frac{1}{v_2} \int_{-\infty}^z \sin k(z - \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0 \left( \frac{kh_2}{v_2} V(v_2 x)^2 + \zeta^2 \right) d\zeta. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Полученные интегралы хорошо сходятся, поскольку функция Макдональда убывает по закону показательной функции при  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Подставим (4.25) и (4.26) в (4.17)

$$\begin{aligned}
H_y &= i \frac{I_{\Sigma} \beta}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial x} \{-I_1 + I_2\} = \\
&= i \frac{\beta I_{\Sigma}}{2\pi k} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^z \sin k(z - \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{v_1} K_0 \left( \frac{kh_1}{v_1} V(v_1 x)^2 + \zeta^2 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{v_2} K_0 \left( \frac{kh_2}{v_2} V(v_2 x)^2 + \zeta^2 \right) \right] d\zeta. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что выражения (4.27) и (4.14а) совпадут, если в (4.14а) принять за нижний предел  $z_0$ , который ранее оставался неопределенным:  $z_0 = \infty$ .

В соответствии с этим вместо (4.14) напишем

$$\begin{aligned}
H_y &= \frac{\beta I_{\Sigma}}{4k} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^z \sin k(z - \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{v_1} H_0^{(2)} \left( k_1 V(v_1^2 x^2 + \zeta^2) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{v_2} H_0^{(2)} \left( k_2 V(v_2^2 x^2 + \zeta^2) \right) \right] d\zeta. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Интеграл (4.28) можно упростить, применяя прием интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^z \sin k(z - \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} H_0^{(2)} \left( k_1 V(v_1^2 x^2 + \zeta^2) \right) d\zeta = \\
&= \sin k(z - \zeta) H_0^{(2)} \left( k_1 V(v_1^2 x^2 + \zeta^2) \right) \Big|_{\zeta=-\infty}^{\zeta=z} + \\
&+ k \int_{-\infty}^z \cos k(z - \zeta) H_0^{(2)} \left( k_1 V(v_1^2 x^2 + \zeta^2) \right) d\zeta.
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к формулам

$$\begin{aligned}
H_y &= \frac{\beta I_{\Sigma}}{4} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^z \cos k(z - \zeta) \left[ \frac{1}{v_1} H_0^{(2)} \left( k_1 V(v_1^2 x^2 + \zeta^2) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{v_2} H_0^{(2)} \left( k_2 V(v_2^2 x^2 + \zeta^2) \right) \right] d\zeta, \quad (4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_x &= \frac{i I_{\Sigma}}{4} \left\{ \beta^2 \int_{-\infty}^z \cos k(z - \zeta) \left[ \frac{1}{v_1} H_0^{(2)} \left( k_1 V(v_1^2 x^2 + \zeta^2) - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{v_2} H_0^{(2)} \left( k_2 V(v_2^2 x^2 + \zeta^2) \right) \right] d\zeta + \right. \\
&\quad \left. + v_2 \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(2)} \left( k_2 V(v_2^2 x^2 + z^2) \right) \right\}. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Формула для  $H_x$  была получена из уравнения дивергенции (4.15). Если же находить  $H_x$  интегрированием выражения (2.36), то получается

$$\begin{aligned}
H_x &= \frac{j_0 e^{-I\beta z}}{2} \left\{ \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_1 z}}{a^2 + \beta^2} e^{-iax} dh + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 e^{-i\gamma_2 z}}{a^2 + \beta^2} e^{-iax} dh \right\} = \frac{j_0 e^{-i\beta y}}{2k^2} \left\{ 2\beta^2 I_1 - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_2 \right\} =
\end{aligned}$$



$$= i \frac{I_{\Sigma}}{4} \left\{ \frac{\beta^2}{v_1} \int_{\infty}^z \cos k(z-\zeta) H_0^{(2)}(k_1 \sqrt{v_1^2 x^2 + \zeta^2}) d\zeta - \frac{1}{v_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\infty}^z \cos k(z-\zeta) H_0^{(2)}(k_2 \sqrt{v_2^2 x^2 + \zeta^2}) d\zeta \right\}. \quad (4.31)$$

Выражения (4.30) и (4.31) эквивалентны. Из (4.31) можно получить (4.30), если применить метод интегрирования по частям и учесть равенство

$$\frac{1}{v_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(k_2 \sqrt{v_2^2 x^2 + \zeta^2}) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} H_0^{(2)}(k_2 \sqrt{v_2^2 x^2 + \zeta^2}) = -k_2^2 H_0^{(2)}(k_2 \sqrt{v_2^2 x^2 + \zeta^2}). \quad (4.32)$$

Перейдем теперь к вычислению  $E_x$  и  $E_y$ .

Формулу для  $E_x$  можно получить из первого уравнения (4.9) подстановкой (4.5) и (4.29)

$$E_x = \frac{1}{\omega \epsilon} \left[ -\beta H_z + i \frac{\partial H_y}{\partial z} \right] = i \frac{\beta I_{\Sigma}}{4\omega \epsilon} \left\{ \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(k_2 \sqrt{v_2^2 x^2 + z^2}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int_{\infty}^z \cos k(z-\zeta) \left[ \frac{1}{v_1} H_0^{(2)}(k_1 \sqrt{v_1^2 x^2 + \zeta^2}) - \frac{1}{v_2} H_0^{(2)}(k_2 \sqrt{v_2^2 x^2 + \zeta^2}) \right] d\zeta \right\}. \quad (4.33)$$

Формулу для  $E_y$  получим, подставляя (4.5) и (4.30) и учитывая (4.32),

$$E_y = \frac{1}{i\omega \epsilon} \left\{ -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} \right\} = \frac{I_{\Sigma}}{4\omega \epsilon} \left\{ -v_2 k_2^2 H_0^{(2)}(k_2 \sqrt{v_2^2 x^2 + z^2}) + \right.$$

$$\left. + \beta^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{\infty}^z \cos k(z-\zeta) \left[ \frac{1}{v_1} H_0^{(2)}(k_1 \sqrt{v_1^2 x^2 + \zeta^2}) - \frac{1}{v_2} H_0^{(2)}(k_2 \sqrt{v_2^2 x^2 + \zeta^2}) \right] d\zeta \right\}. \quad (4.44)$$

Вид найденных формул говорит о том, что нить тока с переменной фазой (4.1) излучает конические волны, т. е. такие волны, у которых фронт имеет форму конуса. Чтобы убедиться в этом, возьмем, например, формулу (4.4) для  $E_z$  и, предполагая  $R_1$  достаточно большим, заменим цилиндрическую функцию ее асимптотическим выражением

$$E_z = -j_0 \frac{2\pi e^{-i\beta z}}{k} \frac{i\beta k_1 \cos \varphi_1}{4\omega \epsilon v_1 \Phi_1} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 R_1 \Phi_1}} e^{-i(k_1 R_1 \Phi_1 - \frac{3\pi}{4})} = j_0 \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta k_1 \cos \varphi_1}{k\omega \epsilon v_1 \Phi_1} \frac{e^{-i(\beta z_1 + k_1 \Phi_1 R_1)}}{\sqrt{k_1 R_1}}. \quad (4.45)$$

В (4.45) для краткости введено обозначение

$$\Phi_1 = \sqrt{v_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1},$$

а временной множитель  $e^{i\omega t}$  опущен.

Фронт волны определяется поверхностью с постоянной фазой

$$\beta z_1 + k_1 \Phi_1 R_1 = \text{const}, \quad (4.46)$$

т. е. в данном случае поверхностью конуса с эллиптическим поперечным сечением.

Аналогичный результат получается, если исходить из формулы (4.6) для  $H_z$ . Остальные компоненты поля описываются более сложными функциями.

Для того чтобы показать ход вычислений, найдем асимптотическое значение интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{kz}{v_1}} \sqrt{h^2 - \left(\frac{v_1 k_1}{k}\right)^2}}{h^2 + \beta^2/k^2} e^{-ikxh} dh, \quad (4.47)$$

которым определяется  $H_y$  в соответствии с (4.17).

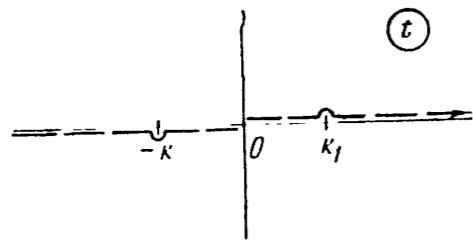


Рис. 6

Интеграл можно записать более компактно, если перейти к величинам

$$\beta_1^2 = \beta^2 / \nu_1^2, \quad t = \frac{k}{\nu_1} h, \quad dh = \frac{\nu_1}{k} dt. \quad (4.48)$$

Теперь

$$I = \frac{k}{\nu_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z \sqrt{t^2 - k_1^2}}}{t^2 + \beta_1^2} e^{-i\nu_1 x t} dt \quad (4.49)$$

Коэффициент  $k_1$  может быть действительным или мнимым числом в зависимости от величины  $\beta$ . Рассмотрим случай, когда  $k_1^2 > 0$ .

В этом случае на пути интегрирования (рис. 6), который проходит по действительной оси  $-\infty < t < \infty$ , имеются две точки разветвления  $t = \pm k_1$ , разбивающие весь путь на три участка рис. 6. На среднем участке

$$\left| e^{-z \sqrt{t^2 - k_1^2}} \right| = 1;$$

на крайних участках этот множитель быстро убывает с возрастанием  $t$ .

Наличие точек разветвления затрудняет нахождение асимптотической формулы. Поэтому сделаем подстановку, после которой подынтегральная функция становится однозначной

$$t = ik_1 \operatorname{sh} \tau, \quad dt = ik_1 \operatorname{ch} \tau d\tau, \quad (4.50)$$

$$t^2 - k_1^2 = -k_1^2 \operatorname{sh}^2 \tau - k_1^2 = -k_1^2 \operatorname{ch}^2 \tau.$$

Обозначим действительную и мнимую часть переменного  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ .

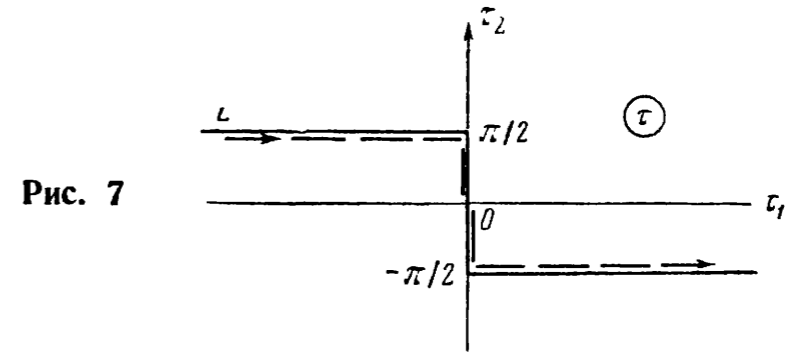


Рис. 7

Тогда  $t = ik_1 \operatorname{sh}(\tau_1 + i\tau_2) = ik_1 \operatorname{sh} \tau_1 \cos \tau_2 - k_1 \operatorname{ch} \tau_1 \sin \tau_2$ .

Нетрудно видеть, что путь интегрирования  $L$  на плоскости комплексного переменного  $\tau$  имеет вид ломаной линии, показанной на рис. 7. Он проходит от  $\tau = -\infty + i\pi/2$  до  $\tau = \infty - i\pi/2$ .

Точка  $t = -k_1$  соответствует точке  $\tau = 0 + i\pi/2$ , а точка  $t = k_1$  точке  $\tau = 0 - i\pi/2$ .

В соответствии с подстановкой (4.50) интеграл (4.49) принимает вид

$$I = \frac{ikk_1}{\nu_1} \int_L \frac{e^{-ik_1 z \operatorname{ch} \tau + \nu_1 x k_1 \operatorname{sh} \tau}}{-k_1^2 \operatorname{sh}^2 \tau + \beta_1^2} \operatorname{ch} \tau d\tau. \quad (4.51)$$

Так как величины  $k_1 z$  и  $k_1 x$  могут быть очень большими одновременно, целесообразно их объединить. Для этого введем параметры  $\rho$  и  $\psi$ , которые для определенности будем считать положительными

$$\nu_1 x = \rho \operatorname{ch} i\psi = \rho \cos \psi, \quad \rho = \sqrt{(\nu_1 x)^2 + z^2},$$

$$iz = \rho \operatorname{sh} i\psi = i\rho \sin \psi, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{z}{\nu_1 x}. \quad (4.52)$$

При этом вместо (4.51) получим

$$I = \frac{ikk_1}{\nu_1} \int_L \frac{e^{k_1 \rho \operatorname{sh}(\tau - i\psi)}}{\beta_1^2 - k_1^2 \operatorname{sh}^2 \tau} \operatorname{ch} \tau d\tau. \quad (4.53)$$

Асимптотическое значение интеграла (4.53) находится методом перевала [14]. Рассмотрим подробнее поведение подынтегральной функции в (4.53). Определяющим является числитель дроби, стоящей под интегралом  $F = e^{k_1 \rho \operatorname{sh}(\tau - i\psi)}$ , величина которого при  $\rho \rightarrow \infty$  будет неограниченно возрастать или уменьшаться до нуля в зависи-

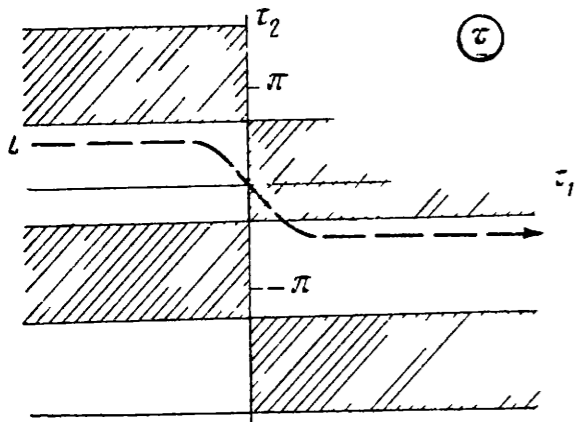


Рис. 8

мости от знака действительной части гиперболического синуса

$$\operatorname{Re} [\operatorname{sh} (\tau - i\psi)] = \operatorname{Re} [\operatorname{sh} \tau_1 \cos (\tau_2 - \psi) - i \operatorname{ch} \tau_1 \sin (\tau_2 - \psi)] = \operatorname{sh} \tau_1 \cos (\tau_2 - \psi), \quad (4.54)$$

$$|F| = |e^{k_1 \rho \operatorname{sh} (\tau - i\psi)}| = e^{k_1 \rho \operatorname{sh} \tau_1 \cos (\tau_2 - \psi)}.$$

В правой полуплоскости  $\tau_1 > 0$  находим

$$\operatorname{sh} \tau_1 \cos (\tau_2 - \psi) > 0,$$

если величина  $\tau_2$  находится, например, в пределах

$$-\frac{\pi}{2} < \tau_2 - \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (4.55a)$$

В левой полуплоскости  $\tau_1 < 0$  находим также

$$\operatorname{sh} \tau_1 \cos (\tau_2 - \psi) > 0,$$

если величина  $\tau_2$  находится в пределах

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < \tau_2 - \psi < \frac{3\pi}{2}, \\ -\frac{3\pi}{2} < \tau_2 - \psi < -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.55b)$$

На рис. 8 указанные области отмечены кривой штриховкой. Они расположены периодически по оси  $\tau_2$ . В этих областях согласно (4.54)  $|F| \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow \infty$ .

В областях, оставшихся незаштрихованными,  $\operatorname{sh} \tau_1 \cos (\tau_2 - \psi) < 0$  и, следовательно, если  $\tau \neq 0$ ,

$$|F| \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty.$$

в них располагается путь интегрирования  $L$ . Подынтегральная функция в (4.53) имеет еще особенности: полюса на действительной оси в точках

$$\tau_n = \pm \operatorname{arsh} \frac{\beta_1}{k_1}.$$

Их влиянием можно пренебречь, поскольку они находятся в стороне от пути интегрирования. Случай  $\beta = 0$ , когда коническая волна вырождается в цилиндрическую, был рассмотрен в предыдущем разделе. Здесь  $\beta \neq 0$ .

Точка  $\tau = \tau_k = 0 + i(-\pi/2 + \psi)$  является перевальной; в ней

$$\frac{d}{d\tau} \operatorname{sh} (\tau - i\psi) |_{\tau=\tau_k} = \operatorname{ch} (\tau_k - i\psi) = 0,$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \operatorname{sh} (\tau - i\psi) |_{\tau=\tau_k} = \operatorname{sh} (\tau_k - i\psi) = -i.$$

Линия быстрого изменения проходит через точку перевала параллельно биссектрисе четвертого квадранта. Для того чтобы путь интегрирования проходил по линии быстрого изменения, нужно первоначальный путь  $L$  (рис 7) соответствующим образом деформировать, например, как показано пунктиром на рис. 8.

Применение метода перевала дает асимптотическую формулу

$$\int f(\tau) e^{p\varphi(\tau)} d\tau \cong \sqrt{\frac{2\pi}{-p\varphi''(\tau_x)}} f(\tau_x) e^{p\varphi(\tau_x)},$$

в соответствии с которой находим

$$\begin{aligned} I &\cong \frac{ikk_1}{v_1} \sqrt{\frac{2\pi}{ik_1\rho}} \frac{\operatorname{ch} [i(\psi - \pi/2)]}{\beta_1^2 + k_1^2 \operatorname{sh}^2 [i(\psi - \pi/2)]} e^{-ik_1\rho} = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} kk_1 v_1 \sin \psi}{\beta^2 + v_1^2 k_1^2 \cos^2 \psi} \frac{e^{-i(k_1\rho - \pi/4)}}{\sqrt{k_1\rho}} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Учитывая (4.52) и переходя затем к цилиндрическим координатам по (3.13), получим

$$I = \frac{\sqrt{2\pi} k k_1 v_1 \Phi_1 \cos \varphi_1}{\beta^2 \Phi_1^2 + v_1^4 k_1^2 \sin^2 \varphi_1} \frac{e^{-i(k_1 \Phi_1 R_1 - \pi/4)}}{k_1 \Phi_1 R_1}, \quad (4.57)$$

что однотипно с (4.45).

Заметим, что в одних интегралах имеется параметр  $v_1$ , в других —  $v_2$ . Волновые коэффициенты получаются соответственно  $k_1 \Phi_1$  и  $k_2 \Phi_2$ . Это означает, что нить с током (4.1) излучает одновременно два типа конических волн, отличающихся скоростью распространения в радиальном направлении (скорость распространения вдоль оси конуса задается величиной  $\beta$ ).

Функции, описывающие зависимость  $E_x, E_y, H_x, H_y$  от координат, являются, по-видимому, новыми функциями, родственными неполным цилиндрическим функциям [12]. Более подробный анализ их выходит за рамки этой работы.

## 5

### Излучение квази-сферических волн электрическим диполем

К случаю электрического диполя можно прийти путем интегрирования волн тока на проводе. Ранее нами было analyzed поле нити с током (3.2)

$$I_z = \lambda j_0 e^{-i\beta y},$$

полученной при интегрировании (3.1). Введем безразмерное волновое число  $q = \beta/k$  и вычислим интеграл

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} I_z(y) dq = \lambda j_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikyq} dq = \lambda j_0 2\pi \delta(ky). \quad (5.1)$$

Дельта-функция показывает, что ток имеется только на бесконечно-коротком отрезке нити в начале координат, образуя элементарный диполь.

Момент диполя

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} I dy = \lambda j_0 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ky) dy = \lambda^2 j_0 = \frac{4\pi^2}{k^2} j_0, \quad (5.2)$$

т. е. равен по величине моменту тока, текущему по квадратному листу с размерами  $\lambda \times \lambda$ , с поверхностной плотностью  $j_0$ . Поле диполя находится интегрированием выражений (2.33) — (2.38) по  $h$  и  $q$ . Все десять интегралов, которые надо при этом вычислить, относятся к одному типу; некоторые из них получаются дифференцированием по параметру других.

Начнем с вычисления интеграла, получающегося при нахождении  $E_x$ . Обозначим его через  $I_1$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta e^{-i\gamma_2 z}}{(\alpha^2 + \beta^2) \gamma_2} -i(\alpha x + \beta y) dh = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{khkqe^{-i z \sqrt{k^2 - k^2(h^2 + q^2) \nu_2^{-2}}}}{(k^2 h^2 + k^2 q^2) \sqrt{k^2 - k^2(h^2 + q^2) \nu_2^{-2}}} e^{-i(kxh + kyq)} dh dq = \\
 &= \frac{\nu_2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{hqe^{-\frac{ikz}{\nu_2} \sqrt{\nu_2^2 - (h^2 + q^2)}}}{(h^2 + q^2) \sqrt{\nu_2^2 - (h^2 + q^2)}} e^{-i(kxh + kyq)} dn dq. \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Последовательное интегрирование сначала по  $h$ , затем по  $q$ , приводит к очень сложным выкладкам. Более приемлемый путь находится при изменении переменных интегрирования.

Перейдем от переменных  $h$  и  $q$  к  $R$  и  $\varphi$  по формулам

$$\begin{aligned}
 h &= R \cos \varphi, & h^2 + q^2 &= R^2, \\
 q &= R \sin \varphi, & dh dq &= R dR d\varphi. \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

При этом получим, обозначая для краткости  $kz/\nu_2 = \zeta_2$ ,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{\nu_2}{k} \int_0^{\infty} R dR \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 \cos \varphi \sin \varphi e^{-i\zeta_2 \sqrt{\nu_2^2 - R^2}}}{R^2 \sqrt{\nu_2^2 - R^2}} \times \\
 &\times e^{-i(kxR \cos \varphi + kyR \sin \varphi)} d\varphi = \frac{\nu_2}{k} \int_0^{\infty} \frac{R e^{-i\zeta_2 \sqrt{\nu_2^2 - R^2}}}{\sqrt{\nu_2^2 - R^2}} \times \\
 &\times \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \sin \varphi e^{-i(kxR \cos \varphi + kyR \sin \varphi)} d\varphi dR. \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

Преобразуем внутренний интеграл к более простому виду, для чего применим обозначения постоянных

$$kx = \rho \sin \psi, \quad ky = \rho \cos \psi,$$

и затем сделаем подстановку  $\tau = \varphi + \psi$ ,

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi \sin \varphi e^{-iR(kx \cos \varphi + ky \sin \varphi)} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi e^{-iR\rho(\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi)} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\varphi e^{-iR\rho \sin(\varphi + \psi)} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi + \psi}^{\pi + \psi} \sin 2(\tau - \psi) e^{-iR\rho \sin \tau} d\tau = \\
 &= \frac{1}{4i} \int_{-\pi + \psi}^{\pi + \psi} [e^{i2(\tau - \psi)} - e^{-i2(\tau - \psi)}] e^{-iR\rho \sin \tau} d\tau = \\
 &= \frac{e^{-i2\psi}}{4i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2\tau - R\rho \sin \tau)} d\tau - \frac{e^{i2\psi}}{4i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-2\tau - R\rho \sin \tau)} d\tau. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Пределы интегрирования в (5.6) могут быть сдвинуты потому что подынтегральная функция — периодическая. Последние интегралы дают бесселевы функции

$$i_1 = \frac{e^{-i2\psi}}{4i} 2\pi J_2(\rho R) - \frac{e^{i2\psi}}{4i} 2\pi J_2(\rho R) = -\pi \sin 2\psi J_2(\rho R). \quad (5.7)$$

Таким образом, приходим к интегралу

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{\pi \nu_2}{k} \sin 2\psi \int_0^{\infty} \frac{R J_2(\rho R)}{\sqrt{\nu_2^2 - R^2}} e^{-i\zeta_2 \sqrt{\nu_2^2 - R^2}} dR = \\
 &= -\frac{i\pi \nu_2}{k} \sin 2\psi \int_0^{\infty} \frac{R J_2(\rho R)}{\sqrt{R^2 - \nu_2^2}} e^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - \nu_2^2}} dR. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

При  $\zeta_2 > 0$  подынтегральная функция быстро убывает, при  $R \rightarrow \infty$  интеграл сходится. Далее, так как

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x),$$

получаем

$$I_1 = \frac{i\pi\nu_2}{k} \sin 2\psi \int_0^\infty \frac{RJ_0(\rho R)}{\sqrt{R^2 - \nu_2^2}} e^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - \nu_2^2}} dR - \\ - 2 \frac{i\pi\nu_2}{k\rho} \sin 2\psi \int_0^\infty \frac{J_1(\rho R)}{\sqrt{R^2 - \nu_2^2}} e^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - \nu_2^2}} dR.$$

Один из этих интегралов является табличным [11]

$$f = \int_0^\infty \frac{RJ_0(\rho R)}{\sqrt{R^2 - \nu_2^2}} e^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - \nu_2^2}} dR = \frac{e^{-i\nu_2 \sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}}}{\sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}}. \quad (5.9)$$

Для нахождения другого интеграла умножим правую и левую сторону равенства (5.9) на параметр  $\rho$  и затем проинтегрируем по  $\rho$

$$\int_0^\infty \frac{Re^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - \nu_2^2}}}{\sqrt{R^2 - \nu_2^2}} \int_0^\rho \rho J_0(\rho R) d\rho dR = \int_0^\rho \frac{\rho e^{-i\nu_2 \sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}}}{\sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}} d\rho, \\ \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - \nu_2^2}}}{\sqrt{R^2 - \nu_2^2}} \rho J_1(\rho R) dR = \frac{e^{-i\nu_2 \sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}}}{-i\nu_2} \Big|_0^\rho,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - \nu_2^2}}}{\sqrt{R^2 - \nu_2^2}} J_1(\rho R) dR = \frac{i}{\rho\nu_2} \left( e^{-i\nu_2 \sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}} - e^{-i\nu_2 \zeta_2} \right). \quad (5.10)$$

В результате находим

$$I_1 = \frac{i\pi\nu_2}{k} \sin 2\psi \cdot \frac{e^{-i\nu_2 \sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}}}{\sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}} + \\ + \frac{2\pi}{k\rho^2} \sin 2\psi \left( e^{-i\nu_2 \sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}} - e^{-i\nu_2 \zeta_2} \right). \quad (5.11)$$

Чтобы вернуться к прежним обозначениям, следует учесть, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{x}{y}, \quad \sin 2\psi = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad \rho^2 = (kx)^2 + (ky)^2,$$

отсюда следует

$$I_1 = i \frac{2\pi\nu_2^2 xy}{k^2(x^2 + y^2)} \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2 + y^2)\nu_2^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2)\nu_2^2 + z^2}} + \\ + \frac{4\pi xy}{k^3(x^2 + y^2)^2} \left( e^{-ik\sqrt{(x^2 + y^2)\nu_2^2 + z^2}} - e^{-ikz} \right). \quad (5.12)$$

Выражение (3.33) для  $E_x$  содержит еще одно слагаемое. Для его нахождения вычислим сначала вспомогательный интеграл

$$I_x = \int_{-\infty}^\infty dq \frac{\alpha\beta e^{-i\gamma_1 z}}{(\alpha^2 + \beta^2)\gamma_1} e^{-i(\alpha x + \beta y) dh}. \quad (5.13)$$

который отличается от интеграла (5.3) только заменой  $\gamma_2$  на  $\gamma_1$ . А так как  $\gamma_1$  отличается от  $\gamma_2$  только заменой константы  $\nu_2$  на  $\nu_1$ , то мы можем сразу вместо (5.11) написать, обозначая через  $\zeta_1 = kz/\nu_1$ ,

$$I_x = \frac{i\pi\nu_1}{k} \sin 2\psi \frac{e^{-i\nu_1 \sqrt{\zeta_1^2 + \rho^2}}}{\sqrt{\zeta_1^2 + \rho^2}} + \\ + \frac{2\pi}{k\rho^2} \sin 2\psi \left( e^{-i\nu_1 \sqrt{\zeta_1^2 + \rho^2}} - e^{-i\nu_1 \zeta_1} \right). \quad (5.14)$$

Теперь замечаем, что при дифференцировании интегралов (5.3) и (5.13) по параметру  $z$  получатся интегралы, необходимые для определения  $H_y$ . Таким образом, находим

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty dq \int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha\beta e^{-i\gamma_1 z}}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i(\alpha x + \beta y) dh} = \frac{1}{-i} \frac{\partial I_x}{\partial z} = \\ = \frac{-2\pi\nu_1^2 x\bar{y}}{k^2(x^2 + y^2)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2 + y^2)\nu_1^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2)\nu_1^2 + z^2}} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + i \frac{4\pi xy}{k^3 (x^2 + y^2)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}} - e^{-ikz} \right] = \\
& = \frac{-2\pi v_1^2 xy}{k^2 (x^2 + y^2)} \left[ \frac{-ikze^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2) v_1^2 + z^2]} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{ze^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2) v_1^2 + z^2]^{3/2}} \right] + \\
& + i \frac{4\pi xy}{k^3 (x^2 + y^2)^2} \left[ \frac{-ikze^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 v_1^2 + z^2}} + ike^{-ikz} \right], \quad (5.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta e^{-i\gamma_2 z}}{a^2 + \beta^2} e^{-i(ax+\beta y)} dh = \frac{1}{-i} \frac{\partial I_1}{\partial z} = \\
& = -\frac{2\pi v_2^2 xy}{k^2 (x^2 + y^2)} \left[ -ikz \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_2^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2]} - \right. \\
& \quad \left. - z \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_2^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2]^{3/2}} \right] + i \frac{4\pi xy}{k^2 (x^2 + y^2)^2} \times \\
& \quad \times \left[ -ikz \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_2^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^2 v_2^2 + z^2}} + ike^{-ikz} \right], \quad (5.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_y &= \frac{j_0}{2} [-I_2 + I_3] = \frac{j_0}{2} \frac{2\pi xyz}{k^2 (x^2 + y^2)} \times \\
& \quad \times \left\{ -e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}} \left[ \frac{ikv_1^2}{(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{v_1^2}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{3/2}} \right] - \frac{2}{(x^2 + y^2)} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2}} - \frac{e^{-ikz}}{z} \right] + e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_2^2 + z^2}} \times \\
& \times \left[ \frac{ikv_2^2}{(x^2 + y^2)v_2^2 + z^2} + \frac{v_2^2}{[(x^2 + y^2)v_2^2 + z^2]^{3/2}} \right] + \\
& + \frac{2}{(x^2 + y^2)} \left[ \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_2^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2)v_2^2 + z^2}} - \frac{e^{-ikz}}{z} \right] \}. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Полученные выражения можно упростить, если перейти от прямоугольных координат  $x, y, z$  к сферическим, что и сделаем позже.

Для нахождения  $E_x$  надо вычислить еще интеграл

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta\gamma_1 e^{-i\gamma_1 z}}{a^2 + \beta^2} e^{-i(ax+\beta y)} dh = \frac{1}{-i} \frac{\partial I_2}{\partial z}. \quad (5.18)$$

Его значение находим путем дифференцирования (5.15) по  $z$

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{2\pi v_1^2 xy}{k^2 (x^2 + y^2)} \left[ \frac{-ike^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]} - \right. \\
& \quad - \frac{(1 + k^2 z^2) e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{3ikz^2 e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^2} + \\
& \quad \left. + \frac{3z^2 e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{5/2}} \right] - \frac{4\pi xy}{k^3 (x^2 + y^2)^2} \times \\
& \quad \times \left[ \frac{-ike^{-i\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2}} - \frac{k^2 z^2 e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{3/2}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{ikz^2 e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)^2 v_1^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{3/2}} + k^2 e^{-ikz} \right]. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

В соответствии с (2.33) умножим (5.3) на  $k^2$  и вычтем (5.18). При этом получим

$$\begin{aligned}
 E_x = & \frac{j_0}{2\omega\epsilon} [-I_4 + k^2 I_1] = \frac{j_0}{2\omega\epsilon} \left\{ i \frac{2\pi v_1^2 xy}{k^2 (x^2 + y^2)} \times \right. \\
 & \times \left[ \frac{-ik}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]} - \frac{k^2 z^2 + 1}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{3/2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{3ikz^2}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^2} + \frac{3z^2}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{5/2}} \right] \times \\
 & \times e^{-ik\sqrt{(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2}} + \frac{4\pi xy}{k^2 (x^2 + y^2)^2} \left[ \frac{-i}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{1/2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{kz^2}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]} + \frac{iz^2}{[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{3/2}} \right] \times \\
 & \times e^{-ik[(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2]^{1/2}} + i \frac{2\pi v_2^2 xy}{(x^2 + y^2)} \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2 + y^2)v_2^2 + z^2}}}{(x^2 + y^2)v_2^2 + z^2} + \\
 & \left. + \frac{4\pi xy}{k(x^2 + y^2)^2} e^{-ik\sqrt{(x^2 + y^2)v_2^2 + z^2}} \right\}. \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Для нахождения составляющей  $E_y$  необходимо вычислить интеграл

$$\begin{aligned}
 I_5 = & \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{-i\gamma_2 z}}{(x^2 + \beta^2) \gamma_2} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dh = \\
 = & \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 h^2 e^{-iz\sqrt{k^2 - \gamma_2^2 (h^2 + q^2) v_2^{-2}}}}{(k^2 h^2 + k^2 q^2) \sqrt{k^2 - k^2 (h^2 + q^2) v_2^{-2}}} \times \\
 & \times e^{-i(kxh + kyq)} dh dq = \frac{v_2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_2 e^{-i\frac{kz}{v_2} \sqrt{v_2^2 - (h^2 + q^2)}}}{(h^2 + q^2) \sqrt{v_2^2 - (h^2 + q^2)}} \times \\
 & \times e^{-i(kxh + kyq)} dh dq. \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

Изменим переменные интегрирования согласно (5.4). Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 I_5 = & \frac{v_2}{k} \int_0^{\infty} R dR \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 \cos \varphi e^{-i\gamma_2 \sqrt{v_2^2 - R^2}}}{R^2 \sqrt{v_2^2 - R^2}} e^{-i(kxR \cos \varphi + kyR \sin \varphi)} d\varphi = \\
 = & \frac{v_2}{k} \int_0^{\infty} \frac{R e^{-i\gamma_2 \sqrt{v_2^2 - R^2}}}{\sqrt{v_2^2 - R^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi e^{-i(kxR \cos \varphi + kyR \sin \varphi)} d\varphi dR. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Внутренний интеграл приведем к более простому виду, как при вычислении интеграла  $i_1$  (5.6)

$$\begin{aligned}
 i_5 = & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi e^{-i(kxR \cos \varphi + kyR \sin \varphi)} d\varphi = \\
 = & \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi e^{-iR\rho(\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi)} d\varphi = \\
 = & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi e^{-iR\rho \sin(\varphi + \psi)} d\varphi = \int_{-\pi + \psi}^{\pi + \psi} \cos^2(\tau - \psi) e^{-iR\rho \sin \tau} d\tau = \\
 = & \frac{1}{4} \int_{-\pi + \psi}^{\pi + \psi} [e^{i(\tau - \psi)} + e^{-i(\tau - \psi)}]^2 e^{-iR\rho \sin \tau} d\tau, \\
 i_5 = & \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i2\tau} e^{-i2\psi} + 2 + e^{-i2\tau} e^{i2\psi}) e^{-iR\rho \sin \tau} d\tau = \\
 = & \frac{e^{-i2\psi}}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2\tau - R\rho \sin \tau)} d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iR\rho \sin \tau} d\tau + \\
 & + \frac{e^{i2\psi}}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(2\tau + R\rho \sin \tau)} d\tau = \frac{e^{-i2\psi}}{4} 2\pi J_2(\rho R) + \pi J_0(\rho R) + \\
 & + \frac{e^{i2\psi}}{4} 2\pi J_2(\rho R) = \pi J_0(\rho R) + \pi \cos 2\psi J_2(\rho R) = \quad (5.23)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \pi J_0(\rho R) + \pi \cos 2\psi \left[ \frac{2}{\rho R} J_1(\rho R) - J_0(\rho R) \right] = \\
&= \pi (1 - \cos 2\psi) J_0(\rho R) + \frac{2\pi}{\rho R} \cos 2\psi J_1(\rho R).
\end{aligned}$$

Подставим (5.23) в (5.22) и учтем (5.9) и (5.10). При этом получим

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{i\pi v_2'(1 - \cos 2\psi)}{k} \int_0^\infty \frac{R e^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - v_2^2}}}{\sqrt{R^2 - v_2^2}} J_0(\rho R) dR + \\
&+ \frac{i2\pi v_2 \cos 2\psi}{k\rho} \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta_2 \sqrt{R^2 - v_2^2}}}{\sqrt{R^2 - v_2^2}} J_1(\rho R) dR = \\
&= \frac{i\pi v_2'(1 - \cos 2\psi) e^{-i v_2 \sqrt{\xi_2^2 + \rho^2}}}{k \sqrt{\xi_2^2 + \rho^2}} - \\
&- \frac{2\pi \cos 2\psi}{k\rho^2} \left( e^{-i v_2 \sqrt{\xi_1^2 + \rho^2}} - e^{-i v_2 \xi_2} \right). \quad (5.24)
\end{aligned}$$

$$\text{Так как } 1 - \cos 2\psi = 2 \sin^2 \psi = 2 \left( \frac{kx}{\rho} \right)^2 = \frac{2x^2}{x^2 + y^2},$$

то

$$\begin{aligned}
I_5 &= i\pi \frac{2x^2 v_2^2}{k^2(x^2 + y^2)} \frac{e^{-ik \sqrt{(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2}} - \\
&- \frac{2\pi(y^2 - x^2)}{k^3(x^2 + y^2)^2} \left( e^{-ik \sqrt{(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2}} - e^{-ikz} \right). \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что при дифференцировании  $I_5$  по  $z$  получается один из интегралов, который нужно вычислить при нахождении  $H_x$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\alpha^2 e^{-i\gamma_2 z}}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dh = \frac{1}{-i} \frac{\partial I_5}{\partial z} = -\frac{2\pi v_2^2 x^2}{k^2(x^2 + y^2)^2} \times$$

$$\begin{aligned}
&\times \left[ \frac{-ikze^{-ik \sqrt{(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2]} - \frac{ze^{-ik \sqrt{(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2}}}{[(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2]^{3/2}} \right] - \\
&- i \frac{2\pi(y^2 - x^2)}{k^3(x^2 + y^2)^2} \left[ \frac{-ikze^{-ik \sqrt{(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2}}}{\sqrt{(x^2 + y^2) v_2^2 + z^2}} + ike^{-ikz} \right]. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Теперь вычислим вспомогательный интеграл

$$\begin{aligned}
I_y &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 e^{-i\gamma_2 z}}{(\alpha^2 + \beta^2) \gamma_1} e^{-i(\alpha x + \beta z)} dh = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 q^2 e^{-iz \sqrt{k^2 - k^2(h^2 + q^2) v_1^{-2}}}}{(k^2 h^2 + k^2 q^2) \sqrt{k^2 - k^2(h^2 + q^2) v_1^{-2}}} \times \\
&\times e^{-i(kxh + kyq)} dh = \\
&= \frac{v_1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^2 e^{-i \frac{kz}{v_1} \sqrt{v_1^2 - (h^2 + q^2)}}}{(h^2 + q^2) \sqrt{v_1^2 - (h^2 + q^2)}} e^{-i(kxh + kyq)} dh. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Для вычисления этого интеграла изменим переменные интегрирования по (5.4)

$$\begin{aligned}
I_y &= \frac{v_1}{k} \int_0^\infty R dR \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 \sin^2 \varphi e^{-i v_1 \sqrt{v_1^2 - R^2}}}{R^2 \sqrt{v_1^2 - R^2}} \times \\
&\times e^{-i(kxR \cos \varphi + kyR \sin \varphi)} d\varphi = \frac{v_1}{k} \int_0^\infty \frac{R e^{-i v_1 \sqrt{v_1^2 - R^2}}}{\sqrt{v_1^2 - R^2}} \times \\
&\times \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi e^{-i(kxR \cos \varphi + kyR \sin \varphi)} d\varphi dR.
\end{aligned}$$

Для нахождения внутреннего интеграла можно восполь-

зоваться выкладками, проведенными при вычислении интеграла  $i_5$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi e^{-i(kxR \cos \varphi + kyR \sin \varphi)} d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi e^{-iR\rho \sin(\varphi+\psi)} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iR\rho \sin(\varphi+\psi)} d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi e^{-iR\rho \sin(\varphi+\psi)} d\varphi = \\ &= 2\pi J_0(\rho R) - \pi(1 - \cos 2\psi) J_0(\rho R) - \frac{2\pi}{\rho R} \cos 2\psi J_1(\rho R) = \\ &= \pi(1 + \cos 2\psi) J_0(\rho R) - \frac{2\pi}{\rho R} \cos 2\psi J_1(\rho R). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Подстановка (5.28) дает с учетом (5.9) и (5.10)

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{i\nu_1\pi(1 + \cos 2\psi)}{k} \int_0^{\infty} \frac{Re^{-i\nu_1\sqrt{R^2-\nu_1^2}}}{\sqrt{R^2-\nu_1^2}} J_0(\rho R) dR - \\ &- \frac{i2\pi\nu_1 \cos 2\psi}{k\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\nu_1\sqrt{R^2-\nu_1^2}}}{\sqrt{R^2-\nu_1^2}} J_0(\rho R) dR = \\ &= \frac{i\nu_1\pi(1 + \cos 2\psi)}{k} \frac{e^{-i\nu_1\sqrt{\zeta_1^2+\rho^2}}}{\sqrt{\zeta_1^2+\rho^2}} + \\ &+ \frac{2\pi \cos 2\psi}{k\rho^2} (e^{-i\nu_1\sqrt{\zeta_1^2+\rho^2}} - e^{-i\nu_1\zeta_1}) = \\ &= i\pi \frac{2y^2\nu_1^2}{k^2(x^2+y^2)} \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}} + \\ &+ \frac{2\pi(y^2+x^2)}{k^3(x^2+y^2)^2} \left( e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}} - e^{-ikz} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

t4

При дифференцировании  $I_y$  по  $z$  получается интеграл, который нужно вычислить для нахождения  $H_x$

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 e^{-i\gamma_1 z}}{a^2 + \beta^2} e^{-i(ax+\beta y)} dh = \frac{1}{-i} \frac{\partial I_y}{\partial z} = \\ &= -\pi \frac{2\nu_1^2 y^2}{k^2(x^2+y^2)} \left[ \frac{-ikze^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2]} - \right. \\ &- \left. \frac{ze^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2]^{3/2}} \right] + \\ &+ i \frac{2\pi(y^2-x^2)}{k^2(x^2+y^2)^2} \left[ \frac{-ikze^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}} + ike^{-ikx} \right], \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{J_0}{2} [I_7 + I_6] = \frac{J_0}{2} \frac{2\pi z}{k^2(x^2+y^2)} \times \\ &\times \left\{ \nu_1^2 y^2 \left[ \frac{ik}{[(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2]} + \frac{1}{[(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2]^{3/2}} \right] \times \right. \\ &\times e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}} + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)} \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)\nu_1^2+z^2}} - \\ &- \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)} \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_2^2+z^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)\nu_2^2+z^2}} - \nu_2^2 x^2 \times \\ &\times \left[ \frac{ik}{[(x^2+y^2)\nu_2^2+z^2]} + \frac{1}{[(x^2+y^2)\nu_2^2+z^2]^{3/2}} \right] \times \\ &\times \left. e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)\nu_2^2+z^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

5-2842

65

Для нахождения интеграла, входящего в выражение для  $E_y$ , следует продифференцировать  $I_7$  по  $z$

$$\begin{aligned}
 I_8 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 \gamma_1 e^{-i\gamma_1 z}}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dh = \frac{1}{-i} \frac{\partial I_7}{\partial z} = \\
 &= i\pi \frac{2v_1^2 y^2}{k^2 (x^2 + y^2)} \left[ \frac{ike^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]} + \frac{(1+k^2z^2)e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{3/2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3ikz^2e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^2} - \frac{3z^2e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{5/2}} \right] - \\
 &\quad - \frac{2\pi(y^2-x^2)}{k^2(x^2+y^2)^2} \left[ \frac{-ie^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{\sqrt{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{kz^2e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]} + \frac{iz^2e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{3/2}} + ke^{-ikz} \right]. \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

Подстановка (5.32) и (5.21) дает

$$\begin{aligned}
 E_y &= \frac{-j_0}{2\omega\epsilon} [I_8 + k^2 I_5] = \frac{-j_0}{2\omega\epsilon} \frac{2\pi}{k^2(x^2+y^2)} \times \\
 &\quad \times \left\{ iv_1^2 y^2 \left[ \frac{ik}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]} + \frac{k^2z^2+1}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{3/2}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{3ikz^2}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^2} - \frac{3z^2}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{5/2}} \right] \times \right. \\
 &\quad \times e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}} + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)} \left[ \frac{i}{\sqrt{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]}} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{kz^2}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]} - \frac{iz^2}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{3/2}} \times \\
 &\quad \times e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}} + ik^2 x^2 v_2^2 \frac{e^{ik\sqrt{(x^2+y^2)v_2^2+z^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)v_2^2+z^2}} - \\
 &\quad - \frac{k(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)} e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_2^2+z^2}} \left. \right\}. \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

Для нахождения  $H_z$  вычислим сначала вспомогательный интеграл

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_2 z}}{\gamma_2} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dh = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz\sqrt{k^2-k^2(h^2+q^2)v_2^2}}}{\sqrt{k^2-k^2(h^2+q^2)v_2^2}} e^{-i(kxh+kyq)} dh dq = \\
 &= \frac{v_2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{kz}{v_2}\sqrt{v_2^2-(h^2+q^2)}}}{\sqrt{v_2^2-(h^2+q^2)}} e^{-i(kxh+kyq)} dh dq. \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

Применив известный способ вычисления

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{v_2}{k} \int_0^{\infty} R dR \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\zeta_2 \sqrt{v_2^2-R^2}}}{\sqrt{v_2^2-R^2}} e^{-i(kxR \cos\varphi + kyR \sin\varphi)} d\varphi = \\
 &= \frac{v_2}{k} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\zeta_2 \sqrt{v_2^2-R^2}}}{\sqrt{v_2^2-R^2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(kxR \cos\varphi + kyR \sin\varphi)} d\varphi dR = \\
 &= \frac{2\pi v_2 i}{k} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\zeta_2 \sqrt{R^2-v_2^2}}}{\sqrt{R^2-v_2^2}} J_0(\rho R) dR = \frac{2\pi i v_2}{k} \frac{e^{-i v_2 \sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}}}{\sqrt{\zeta_2^2 + \rho^2}} = \\
 &= \frac{2\pi i v_2^2}{k^2} \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_2^2+z^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)v_2^2+z^2}}. \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

Теперь получаем, дифференцируя (5.35) по  $x$ ,

$$I_9 = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-i\gamma_2 z}}{\gamma_2} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dh = \frac{1}{-i} \frac{\partial I_z}{\partial x} =$$

$$= \frac{2\pi v_2^2}{k^2} \left[ \frac{ikx v_2^2 e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_2^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_2^2+z^2]} + \frac{v_2^2 x e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_2^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_2^2+z^2]^{3/2}} \right], \quad (5.36)$$

отсюда следует

$$H_z = -\frac{j_0}{2} \frac{x 2\pi \gamma_2^2}{k^2} \left[ \frac{ik}{[(x^2+y^2)v_2^2+z^2]} \frac{1}{[(x^2+y^2)v_2^2+z^2]^{3/2}} \right] \times$$

$$\times e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_2^2+z^2}}. \quad (5.37)$$

Для вычисления  $E_z$  применим следующий способ: сначала заменим в интеграле  $I_z$  параметр  $v_2$  на  $v_1$ . При этом в соответствии с (5.35) получим

$$I'_z = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma_1 z}}{\gamma_1} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dh =$$

$$= \frac{2\pi i v_1^2}{k^2} \frac{e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}. \quad (5.38)$$

Далее будем дифференцировать  $I'_z$  сначала по  $y$ , затем по  $z$

$$\frac{\partial I'_z}{\partial y} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta e^{-i\gamma_1 z}}{\gamma_1} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dh =$$

$$= \frac{2\pi i v_1^2}{k^2} \left[ \frac{-ik v_1^2 y e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]} - \right.$$

$$\left. - \frac{v_1^2 y e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{3/2}} \right], \quad (5.39)$$

$$I_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} \beta e^{-i\gamma_1 z} e^{-i(\alpha x + \beta y)} dh = -\frac{\partial^2 I'_z}{\partial z \partial y} =$$

$$= -\frac{2\pi i v_1^4 y}{k^2} \left[ \frac{-k^2 z e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + 3 \frac{ikze}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^2} + \frac{3ze^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{5/2}} \right]. \quad (5.40)$$

Таким образом находим

$$E_z = \frac{j_0}{\omega \epsilon} \frac{2\pi i v_1^2 y z}{k^2} \left[ \frac{k^2}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{3/2}} - \frac{3ik}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{[(x^2+y^2)v_1^2+z^2]^{5/2}} \right] e^{-ik\sqrt{(x^2+y^2)v_1^2+z^2}}. \quad (5.41)$$

Полученные выражения для составляющих поля электрического диполя справедливы для любых расстояний от диполя. Поскольку в таком виде они довольно сложны, представляется целесообразным перейти от прямоугольных координат к сферическим

Так как

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$z = r \cos \vartheta,$$

то

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta, \quad x^2 - y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

$$(x^2 + y^2)v_1^2 + z^2 = v_1^2 r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta = r^2 (v_1^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta),$$

$$(x^2 + y^2)v_2^2 + z^2 = v_2^2 r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta = r^2 (v_2^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta). \quad (5.42)$$

Введем обозначения

$$\Gamma_{1c} = k \sqrt{v_1^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta},$$

$$\Gamma_{2c} = k \sqrt{v_2^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta}. \quad (5.43)$$

Эти величины играют роль волновых чисел, определяющих скорость распространения квази-сферических волн по направлению  $r$ .

Применяя принятые обозначения, (5.2) и (5.43), можем написать

$$E_x = \frac{p}{4\pi\omega\epsilon} \sin\varphi \cos\varphi \left\{ iv_1^2 e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{-ik^3}{\Gamma_{1c}^2 r^2} - k^3 \frac{k^2 r^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^3 r^3} + k^4 \frac{3ikr^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^4 r^4} + k^5 \frac{3r^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^5 r^5} \right] + \frac{2e^{-i\Gamma_{1c}r}}{r^2 \sin^2\vartheta} \left[ \frac{-ik}{\Gamma_{1c}r} - \frac{k^3 r^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^2 r^2} + \frac{ik^3 r^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^3 r^3} \right] + \left( i \frac{k^3 v_2^2}{\Gamma_{2c}} + \frac{2k}{r^2 \sin^2\vartheta} \right) e^{-i\Gamma_{2c}r} \right\}, \quad (5.44)$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\omega\epsilon} \left\{ iv_1^2 \sin^2\varphi e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{-ik^3}{\Gamma_{1c}^2 r^2} - k^3 \frac{k^2 r^2 \cos^2\vartheta + 1}{\Gamma_{1c}^3 r^3} + k^4 \frac{3ikr^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^4 r^4} + k^5 \frac{3r^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^5 r^5} \right] + \frac{(1 - 2 \cos^2\varphi) e^{-i\Gamma_{1c}r}}{r^2 \sin^2\vartheta} \left[ \frac{-ik}{\Gamma_{1c}r} - \frac{k^2 r^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^2 r^2} + k^3 \frac{ir^2 \cos^2\vartheta}{\Gamma_{1c}^3 r^3} \right] - \left( \frac{ik^3 v_2^2 \cos^2\varphi}{\Gamma_{2c}r} - \frac{k(1 - 2 \cos^2\varphi)}{r^2 \sin^2\vartheta} \right) e^{-i\Gamma_{2c}r} \right\}, \quad (5.45)$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\omega\epsilon} iv_1^2 \sin\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \left\{ \frac{k^5}{\Gamma_{1c}^3 r} - \frac{3ik^5}{\Gamma_{1c}^4 r^2} - \frac{3k^5}{\Gamma_{1c}^5 r^3} \right\} e^{-i\Gamma_{1c}r}, \quad (5.46)$$

$$H_x = \frac{p}{4\pi} \cos\vartheta \left\{ v_1^2 \sin^2\varphi \left[ \frac{ik^3}{\Gamma_{1c}^2 r} + \frac{k^3}{\Gamma_{1c}^3 r^2} \right] e^{-i\Gamma_{1c}r} + k \frac{(2 \sin^2\varphi - 1)}{\Gamma_{1c} r^2 \sin^2\vartheta} e^{-i\Gamma_{1c}r} - k \frac{(2 \sin^2\varphi - 1)}{\Gamma_{2c} r^2 \sin^2\vartheta} e^{-i\Gamma_{2c}r} + v_2^2 \cos^2\varphi \left[ \frac{ik^3}{\Gamma_{2c} r} + \frac{k^3}{\Gamma_{2c}^3 r^2} \right] e^{-i\Gamma_{2c}r} \right\}, \quad (5.47)$$

$$H_y = \frac{p}{4\pi} \sin\varphi \cos\varphi \cos\vartheta \left\{ -v_1^2 e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{ik^3}{\Gamma_{1c}^2 r} + \frac{k^3}{\Gamma_{1c}^3 r^2} \right] - \frac{2ke^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c} r^2 \sin^2\vartheta} + v_2^2 e^{-i\Gamma_{2c}r} \left[ \frac{ik^3}{\Gamma_{2c}^2 r} + \frac{k^3}{\Gamma_{2c}^3 r^2} \right] + \frac{2ke^{-i\Gamma_{2c}r}}{\Gamma_{2c} r^2 \sin^2\vartheta} \right\}, \quad (5.48)$$

$$H_z = \frac{p}{4\pi} v_2^2 \cos\varphi \sin\vartheta \left[ \frac{ik^3}{\Gamma_{2c}^2 r} + \frac{k^3}{\Gamma_{2c}^3 r^2} \right] e^{-i\Gamma_{2c}r}. \quad (5.49)$$

Составляющие в сферических координатах находятся по формулам

$$\begin{aligned} E_r &= E_x \cos\varphi \sin\vartheta + E_y \sin\varphi \sin\vartheta + E_z \cos\vartheta, \\ E_\varphi &= -E_x \sin\varphi + E_y \cos\varphi, \\ E_\vartheta &= E_x \cos\varphi \cos\vartheta + E_y \sin\varphi \cos\vartheta - E_z \sin\vartheta. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Подставляя в (5.50) найденные ранее выражения, после несложных преобразований получим

$$E_r = \frac{pk^3}{4\pi\omega\epsilon} \sin\varphi \sin\vartheta \left\{ e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{1 + v_1^2}{\Gamma_{1c}^2 r^2} - i \frac{1 + v_1^2}{\Gamma_{1c}^3 r^3} \right] + \frac{e^{-i\Gamma_{2c}r}}{k^2 r^2 \sin^2\vartheta} + \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}^2 r^2 \sin^2\vartheta} \left[ \frac{i}{\Gamma_{1c}r} - \frac{i\Gamma_{1c}}{k^2 r} - 1 \right] \right\}, \quad (5.51)$$

$$E_\varphi = \frac{pk^3}{4\pi\omega\epsilon} \cos\varphi \left\{ e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{i}{\Gamma_{1c}^3 r^3} - \frac{1}{\Gamma_{1c}^2 r^2} \right] + \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}^2 r^2 \sin^2\vartheta} \times \left[ 1 - \frac{i}{\Gamma_{1c}r} + \frac{i\Gamma_{1c}}{k^2 r} \right] - e^{-i\Gamma_{2c}r} \left[ \frac{iv_2^2}{\Gamma_{2c}r} + \frac{1}{k^2 r^2 \sin^2\vartheta} \right] \right\}, \quad (5.52)$$

$$E_\vartheta = \frac{pk^3}{4\pi\omega\epsilon} \sin\varphi \cos\vartheta \left\{ e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{1 + v_1^2}{\Gamma_{1c}^2 r^2} - i \frac{1 + v_1^2}{\Gamma_{1c}^3 r^3} \right] + \frac{e^{-i\Gamma_{2c}r}}{k^2 r^2 \sin^2\vartheta} + e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ -\frac{ik^2 v_1^2}{\Gamma_{1c}^3 r} - \frac{3k^2 v_1^2}{\Gamma_{1c}^4 r^2} + \frac{3ik^2 v_1^2}{\Gamma_{1c}^5 r^3} \right] - \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}^2 r^2 \sin^2\vartheta} \left[ 1 - \frac{i}{\Gamma_{1c}r} + \frac{i\Gamma_{1c}}{k^2 r} \right] \right\}. \quad (5.53)$$

Поскольку из (5.43) следует

$$\frac{\Gamma_{1c}^2}{k^2} = v_1^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = (v_1^2 - 1) \sin^2 \vartheta + 1,$$

$$\sin^2 \vartheta = \frac{\Gamma_{1c}^2 - k^2}{k^2 (v_1^2 - 1)}, \quad (5.54)$$

то (5.51) — (5.53) можно привести к более компактному виду

$$E_r = \frac{pk^3}{4\pi\omega\varepsilon} \sin \psi \sin \vartheta \left\{ e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{1 + v_1^2}{\Gamma_{1c}^2 r^2} - i \frac{2v_1^2}{\Gamma_{1c}^3 r^3} \right] + \left( \frac{e^{-i\Gamma_{2c}r}}{k^2 r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}^2 r^2 \sin^2 \vartheta} \right) \right\}, \quad (5.55)$$

$$E_\varphi = \frac{pk^3}{4\pi\omega\varepsilon} \cos \varphi \left\{ e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{iv_1^2}{\Gamma_{1c}^3 r^3} - \frac{1}{\Gamma_{1c}^2 r^2} \right] + \left( \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}^2 r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{e^{-i\Gamma_{2c}r}}{k^2 r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - i \frac{v_2^2 e^{-i\Gamma_{2c}r}}{\Gamma_{2c}r} \right\}. \quad (5.56)$$

$$E_\vartheta = \frac{pk^3}{4\pi\omega\varepsilon} \sin \varphi \cos \vartheta \left\{ e^{-i\Gamma_{1c}r} \left[ \frac{1 + v_1^2}{\Gamma_{1c}^2 r^2} - i \frac{2v_1^2}{\Gamma_{1c}^3 r^3} - i \frac{k^2 v_1^2}{\Gamma_{1c}^3 r} - \frac{3k^2 v_1^2}{\Gamma_{1c}^4 r^2} + i \frac{3k^2 v_1^2}{\Gamma_{1c}^5 r^3} \right] + \left( \frac{e^{-i\Gamma_{2c}r}}{k^2 r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}^2 r^2 \sin^2 \vartheta} \right) \right\}. \quad (5.57)$$

Аналогичным образом из (5.47) — (5.49) получаем

$$H_r = \frac{pk^2}{4\pi} \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \left\{ \left( \frac{e^{-i\Gamma_{2c}r}}{k\Gamma_{2c}r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{k\Gamma_{1c}r^2 \sin^2 \vartheta} \right) \right\}, \quad (5.58)$$

$$H_\varphi = \frac{pk^2}{4\pi} \sin \varphi \cos \vartheta \left\{ \left[ -\frac{ikv_1^2}{\Gamma_{1c}^2 r} - \frac{kv_1^2}{\Gamma_{1c}^3 r^2} \right] e^{-i\Gamma_{1c}r} + \left( \frac{e^{-i\Gamma_{2c}r}}{k\Gamma_{2c}r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{k\Gamma_{1c}r^2 \sin^2 \vartheta} \right) \right\}, \quad (5.59)$$

$$H_\vartheta = \frac{pk^2}{4\pi} \cos \varphi \left\{ \left[ \frac{ikv_2^2}{\Gamma_{2c}^2 r} + \frac{kv_2^2}{\Gamma_{2c}^3 r^2} \right] e^{-i\Gamma_{2c}r} + \cos^2 \vartheta \left( \frac{e^{-i\Gamma_{2c}r}}{k\Gamma_{2c}r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{k\Gamma_{1c}r^2 \sin^2 \vartheta} \right) \right\}. \quad (5.60)$$

В случае уравновешенной анизотропии, когда  $v_2 \rightarrow v_1 \neq 1$ , круглые скобки везде обратятся в нуль.

Если  $v_1 \neq v_2$ , то разность двух дробей в круглых скобках обращается в нуль при  $\vartheta \rightarrow 0$ , хотя каждая из дробей неограниченно возрастает. При выбранной ориентировке диполь излучает сразу оба типа волн (ось диполя перпендикулярна оси  $z$ ). Это означает, что при передаче достаточно коротких импульсных сигналов на больших расстояниях произойдет удвоение числа импульсов при распространении во всех направлениях, исключая  $\vartheta = 0$ . В случае уравновешенной анизотропии ( $v_2 = v_1$ ) расщепления волн не происходит, хотя зависимость скорости распространения от направления остается.

Выше была решена задача о поле диполя, направленном по оси  $y$ , т. е. перпендикулярно оси анизотропии. Более простой является задача о диполе, ось которого совпадает с осью анизотропии.

Приведем соответствующие формулы без выводов

$$E_r = \frac{pk^3}{4\pi\omega\varepsilon} \left[ \frac{2}{\Gamma_{1c}r} - \frac{2i}{\Gamma_{1c}^2 r^2} \right] \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}r} \cos \vartheta, \quad (5.61)$$

$$E = \frac{ipk^3}{4\pi\omega\varepsilon} \left[ \left( 1 - \frac{3i}{\Gamma_{1c}r} - \frac{3}{\Gamma_{1c}^2 r^2} \right) \frac{v_1^2 k^2}{\Gamma_{1c}^2} + \left( \frac{2i}{\Gamma_{1c}r} + \frac{2}{\Gamma_{1c}^2 r^2} \right) \right] \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}r} \sin \vartheta, \quad (5.62)$$

$$H_\varphi = i \frac{pk}{4\pi\Gamma_{1c}} \left( 1 - \frac{i}{\Gamma_{1c}r} \right) \frac{e^{-i\Gamma_{1c}r}}{\Gamma_{1c}r} \sin \vartheta,$$

$$H_k = H_\vartheta = H_\varphi = 0.$$

Здесь, как и выше,

$$\Gamma_{c1} = k \sqrt{v_1^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta}.$$

В более общем случае ось диполя может быть направлена под произвольным углом к оси  $z$ . В этом случае вектор момента диполя можно разложить на две компоненты (параллельную и перпендикулярную оси  $z$ ), вычислить их поле по отдельности и затем сложить.

Полученные выражения для поля диполя можно рассматривать как функции Грина для соответствующих задач.

Вычислением можно показать, что в дальней зоне вектор Пойнтинга направлен радиально, как и в случае изотропной среды; доказательство этого оставляем читателю.

## Заключение

Проведенные вычисления показали, что если излучатели элементарного вида (диполь, бесконечно-длинная нить тока) помещаются в одноосной анизотропной среде с тензорными электрическими параметрами (1.1) и (1.2), то их поле можно вычислить в замкнутом виде в большинстве случаев с помощью ранее известных функций. Полученные выражения можно применить в качестве функций Грина при решении задач со сложными источниками поля [13]. Они будут полезны при вычислении сопротивления излучения антенн в анизотропной среде и др.

Нами были рассмотрены источники поля с электрическим током. Решение тех же задач с магнитным током можно получить, применяя принцип перестановочной двойственности, согласно которому производится замена

$$\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}^e \rightleftharpoons -\mathbf{j}^m, \quad \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \rightleftharpoons -\overset{\leftrightarrow}{\mu}.$$

Примененный нами способ интегрирования по волновому коэффициенту до сих пор применяется в радиотехнике гораздо реже, чем обычный спектральный анализ, в котором напряжения и токи (например, импульсные) представляются в виде совокупности гармоник, хотя с точки зрения математики они эквивалентны. Можно надеяться, что наша работа поможет более широкому распространению этого способа.

## Литература

1. *Ф. В. Бункин*. Об излучении в анизотропных средах. — Ж. эксп. и теор. физ., 1957, 32, вып. 2, стр. 338.
2. *R. A. Hurd*. A note on the field of a dipole in a uniaxial medium. — Canadian J. of Physics, 1965, 43, N 4, p. 684.
3. *K. Takaki*. Electric dipole fields in an axially symmetric anisotropic plasma. — J. of the physical society of Japan, 1965, 20, N 7, 1230.
4. *Г. С. Ландсберг*. Оптика. М., ГИТТЛ, 1952.
5. *А. В. Шубников*. Оптическая кристаллография. М., Изд-во АН СССР, 1952.
6. *К. Шефер*. Теоретическая физика, т. III, ч. 2. Оптика. М., ОНТИ, 1938.
7. *Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц*. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
8. *Ф. И. Федоров*. Оптика анизотропных сред. Минск, Изд-во АН БССР, 1957.
9. *Л. М. Бреховских*. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
10. *Д. Е. Вакман*. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., изд-во «Сов. радио», 1962.
11. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
12. *М. М. Агрест, М. З. Максимов*. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. М., Атомиздат, 1965.
13. *Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин*. Возбуждение электромагнитных волн. М., изд-во «Энергия», 1966.
14. *P. C. Clemow*. The theory of electromagn. waves in a simple anisotropic medium. Electronics Quarterly (PIEE), 110, 1963, № T—1, p. 101.
15. *Дж. Стреттон*. Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.
16. *Э. Камке*. Справочник по дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.

## Содержание

Предисловие . . . . .	5
1. Волны 1 и 2-го типов . . . . .	7
2. Излучение плоского листа с током . . . . .	16
3. Излучение цилиндрических волн нитью тока . . . . .	23
4. Излучение конических волн нитью тока . . . . .	34
5. Излучение квази-сферических волн электрическим диполем . . . . .	53
Заключение . . . . .	75
Литература . . . . .	76



## ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

---

### ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ КНИГИ ПО ФИЗИКЕ:

*Анатолий Иванович Потехин*

#### Излучение и распространение электромагнитных волн в анизотропной среде

*Утверждено к печати  
Московским обществом испытателей природы  
Академии наук СССР*

Редактор *Л. В. Кудрявцева*  
Художник *Н. С. Степанова*  
Художественный редактор *Н. И. Власик*  
Технический редактор *Т. С. Подыниглазова*

Сдано в набор 11/V 1971 г. Подписано к печати 25/VIII 1971 г.  
Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага № 2. Усл. печ. л. 4,2.  
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 2500. Т-14143. Тип. зак. 2842.  
Цена 21 коп.

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., 21  
Набрано в московской типографии № 8 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР,  
Хохловский пер., 7. Зак. 3124  
Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука».  
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

**ПОМЕРАНЧУК И. Я.**

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ. В трех томах. Т. I.  
ФИЗИКА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР. НЕЙТРОННАЯ ФИЗИКА.  
25 л. 2 р.

**ПОМЕРАНЧУК И. Я.**

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ. В трех томах. Т. II.  
ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ  
И СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. 25 л. 2 р.

**ПОМЕРАНЧУК И. Я.**

СОБРАНИЕ НАУЧНЫХ ТРУДОВ. В трех томах. Т. III.  
ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ. СИЛЬНЫЕ ВЗАИМО-  
ДЕЙСТВИЯ. 30 л. 2 р. 30 к.

**ФЕРМИ Э.**

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ. Т. I. (СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»)  
50 л. 3 р. 75 к.

**ФЕРМИ Э.**

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ. Т. II. (СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»)  
50 л. 3 р. 75 к.

**РЕЗЕРФОРД Э.**

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ. РАДИОАКТИВНОСТЬ.  
(СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»). 25 л. 2 р.

---

Для получения книг почтой заказы просим направлять по адресу: Москва, В-463, Мичуринский проспект, 12, магазин «Книга — почтой» Центральной конторы «Академкнига»; Ленинград, П-110, Петрозаводская улица, 7, магазин «Книга — почтой» Северо-Западной конторы «Академкнига» или в ближайший магазин «Академкнига»:

Алма-Ата, ул. Фурманова, 91/97;

Баку, ул. Джапаридзе, 13;

Днепропетровск, проспект Гагарина, 24;