К. ПРАХАР

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

Band 91

PRIMZAHLVERTEILUNG

von

KARL PRACHAR
WIEN

SPRINGER-VERLAG
BERLIN — GÖTTINGEN — HEIDELBERG
1957

К. ПРАХАР

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Перевод с немецкого
А. А. КАРАЦУБЫ

Под редакцией
А. И. ВИНОГРАДОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“ • МОСКВА 1967

УДК 511.2

Монография известного специалиста в области теории чисел К. Прахара подводит итог многолетним исследованиям по распределению простых чисел.

В русской литературе немного книг по теории чисел, а по теме монографии имеется лишь небольшая книга Ингама, переведенная в начале 30-х годов.

Настоящее издание книги К. Прахара содержит два добавления, в которых содержится обзор результатов по распределению простых чисел, полученных после выхода в свет немецкого издания.

Книга будет полезна и интересна математикам различных специальностей, начиная со студентов университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3

От издательства

Проблема распределения простых чисел в натуральном ряде занимает центральное место в аналитической теории чисел и является одной из труднейших и интереснейших математических проблем. Предлагаемая вниманию читателей книга Прахара была написана в 1957 г. — почти полвека спустя после выхода в свет классического труда Э. Ландау (E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig, 1909). Она отражает прогресс, достигнутый в теории распределения простых чисел за этот пятидесятилетний период.

По полноте охвата материала и тщательности изложения книга стоит на таком же высоком уровне как и превосходная книга Ландау. Ее могут читать все, интересующиеся теорией чисел.

Достижения в теории распределения простых чисел за десять лет, прошедших со времени выхода немецкого издания книги Прахара, отражены в двух добавлениях, написанных по просьбе издательства М. Б. Барбаном совместно с А. И. Виноградовым (о методе решета) и Н. М. Коробовым (о методе тригонометрических сумм).

Издательство считает своим приятным долгом выразить благодарность автору — проф. К. Прахару, который любезно прислал список исправлений специально для русского издания.

Предисловие

Наука о распределении простых чисел в последние два десятилетия обогатилась различными новыми результатами, которые в имеющейся на эту тему литературе не изложены или изложены только частично. Достаточно полные сочинения Ландау и Ингама стали большой редкостью. Эстерман в недавно вышедшей брошюре вследствие небольшого объема многого не излагает, и то же самое можно сказать о брошюре Троста. Кроме этого, существуют еще монографии Титчмарша о ζ-функции Римана, Виноградова о теории тригонометрических сумм (переведена на английский язык и дополнена Э. Давенпорт и К. Ф. Ротом), монографии Хуа о простых числах и Чудакова о теории L-функций Дирихле (две последние изданы только на русском языке). Однако с настоящей книгой эти монографии имеют общими только некоторые разделы. Она представляет систематическое введение в различные разделы теории простых чисел. Естественно, здесь также не удается добиться абсолютной полноты. Так, например, доказательство Линника и Чудакова теоремы Гольдбаха — Виноградова дано совсем коротко и схематично. „Большое решето" Линника, которое Реньи применил с некоторым улучшением к доказательству своей теоремы о представимости натурального числа в виде суммы простого числа и почти простого числа, совсем опускается. Опускаются также все оценки снизу, которые можно получить с помощью метода решета Бруна.

Вышеназванные сочинения, в особенности непревзойденные по способу изложения сочинения Ингама и Титчмарша, служили автору примером, однако пришлось добавить многое из того, что до сих пор содержалось только в оригинальных статьях. Прежде всего, здесь нужно упомянуть улучшение Сельбергом метода решета Бруна (гл. II), различные интересные результаты Эрдёша о разностях последовательных простых чисел (гл. V); теорему о том, что почти все четные числа представимы в виде суммы двух нечетных простых чисел (гл. VI); теорему Родосского о простых числах в „короткой“ арифметической прогрессии с доказательством Татудзавы, лучший известный до сих пор остаточный член в теореме о простых числах [1]), теоремы Хохайзеля и Ингама о разности последовательных простых чисел с обобщением Татудзавы (гл. IX) и в последней главе доказательство Родосского теоремы Линника о наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. Вариант элементарного доказательства теоремы о простых числах принадлежит Бройшу. Оправданием для изложения довольно сложных теорем последних трех глав может служить большой интерес, который вызывают методы, применявшиеся при их доказательстве. Поэтому можно надеяться, что большой круг читателей предпримет новые исследования по этим интересным вопросам [2]).

Чтение глав I, II, V, а также большей части глав VI, VIII и некоторой части гл. III не требует никаких предварительных знаний из теории функций. Здесь необходимо только знание основ дифференциального и интегрального исчисления, а также немногих фактов из элементарной теории чисел. Некоторые теоремы, прежде всего из теории функций, которые во вводных лекциях вообще не излагаются, собраны чаще всего с доказательством в приложении. Текст, напечатанный мелким шрифтом, содержит дополнительные результаты и замечания. Если там даются доказательства, то они проводятся не всегда подробно.

Список литературы не претендует на полноту, а скорее может служить руководством по имеющейся литературе. Дальнейшие ссылки на литературу можно найти у Остмана [1] и Титчмарша [4].

При чтении книги не обязательно придерживаться последовательности глав. Так, например, можно читать гл. V и VI ранее гл. III и IV, а § 5, 6 гл. III в дальнейшем вообще не используются.

Я благодарю прежде всего моего уважаемого учителя проф. Е. Главку, который всегда поддерживал меня своей инициативой и ценными советами; я весьма обязан также руководителям математического института университета в Вене проф. Ж. Радону и проф. Н. Хофрайтеру, которые сделали для меня возможной спокойную работу. За различные ценные сообщения я особенно благодарен проф. П. Эрдёшу.

---

[1]) О последних результатах в теореме о простых числах см. добавление II. — *Прим. ред.*

[2]) О современном состоянии вопроса см. добавление I. — *Прим. ред.*

Часть рукописи была просмотрена В. Кнеделем и В. Небауэром из Вены, Г. Ж. Ригером из Гессена. Я благодарен им как за устранение многочисленных погрешностей, так и за улучшение изложения. Рукопись и корректуры были критически просмотрены В. Флухом, Х. Бекичем, А. Блюмелем, В. Хайтманеком и Х. Роппертом. Всем этим помощникам я искренне благодарен за большой труд, который они проделали при этой самоотверженной работе. Я искренне благодарен А. Катингер, которая очень тщательно напечатала машинописный текст рукописи.

Проф. Ф. К. Шмидту и издательству Шпрингер я особенно благодарен за то, что книга была принята к изданию в этой серии, за приветливость и предупредительность по отношению ко мне и прежде всего за прекрасное оформление книги.

К. Прахар

ВВЕДЕНИЕ

Точно неизвестно, когда впервые в истории математики возникло понятие простого числа. Простое число — положительное целое число, отличное от единицы, которое делится только на 1 и само на себя. Насколько известно, впервые Евклид доказал, что последовательность простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, . . . не обрывается, т. е. что имеется бесконечно много простых чисел. Но и до Евклида были известны некоторые свойства простых чисел. Так, например, теорема Ферма о том, что для любого простого числа p и любого целого a разность $a^p - a$ делится на p, вероятно, была уже известна древним китайцам.

С более точными исследованиями распределения простых чисел мы встречаемся после Евклида впервые у Эйлера (1744 г.). Эйлер доказал, например, что ряд $\sum 1/p$, где суммирование распространяется на все простые числа, расходится, из чего, в частности, следует, что имеется бесконечно много простых чисел. Эйлер заметил также, что простых чисел „бесконечно меньше“, чем натуральных чисел. Точнее, если через $\pi(x)$ обозначается число простых чисел, не превосходящих x, то частное $\pi(x)/x$ стремится к 0 при $x \to \infty$. Позднее Лежандр доказал это более строго.

Главная проблема теории распределения простых чисел состоит в исследовании $\pi(x)$, т. е, количества простых чисел, меньших или равных x. Если мы рассмотрим достаточно большое число членов последовательности простых чисел, то заметим, что скорее всего не существует элементарной функции, с помощью которой можно представить $\pi(x)$ для всех целых $x > 0$, так как возрастание $\pi(x)$ происходит очень неравномерно. Поэтому нужно попробовать найти простые приближения для $\pi(x)$. Лежандр предположил в 1798 г., что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi(x) \ln(x)}{x} = 1$ и, следовательно, для большого x логарифмическая часть всех натуральных чисел состоит из простых чисел. Точнее Лежандр предполагал, что $\pi(x) = x/\{\ln x - B(x)\}$, причем $B(x)$ при $x \to \infty$ стремится к константе $B = 1{,}083\ldots$ Еще до Лежандра Гауссом было высказано предположение о том, что $\pi(x)$ с „гораздо меньшей" ошибкой приближается с помощью функции

$$\int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} = \mathrm{li}\, x - C, \quad C = \mathrm{li}\, 2 = 1{,}04\ldots,$$

чем с помощью $x/\ln x$ [1]). (Как нетрудно доказать, частное обеих функций стремится к 1 при $x \to \infty$.) Если последнее предположение правильно, то без особого труда можно получить в формуле Лежандра $\lim\limits_{x\to\infty} B(x) = B = 1$ и, следовательно, гипотеза Лежандра отчасти неверна. Точные результаты в этом направлении были получены впервые Чебышевым в 1851 и 1852 гг. Чебышев показал, что если предел $\pi(x) : \dfrac{x}{\ln(x)}$ при $x \to \infty$ существует, то он должен равняться 1. Чебышев получил даже более сильную теорему: для любого большого $A > 0$ и любого малого $\delta > 0$ существуют сколь угодно большие значения x, для которых

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} < \delta \frac{x}{\ln^A x},$$

и (возможно, отличные от этих) значения x, для которых

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} > -\delta \frac{x}{\ln^A x},$$

т. е. для любого большого числа A

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \left(\pi(x) - \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} \right) : \frac{x}{\ln^A x} \geqslant 0$$

и соответствующий нижний предел $\leqslant 0$.

Далее Чебышев сумел показать, что при подходящих константах a и A, где $0 < a < 1 < A$, для всех достаточно больших x

$$a \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < A \frac{x}{\ln x}$$

(для констант Чебышев нашел значение $a = 0{,}92129\ldots$, $A = 1{,}0555$).

---

[1]) $\mathrm{li}\, x$ — интегральный логарифм, определенный равенством

$$\mathrm{li}\, x = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \right) \frac{d\xi}{\ln \xi} \quad (x > 1).$$

Из всех этих результатов не следует еще, что $\lim\limits_{x\to\infty} \pi(x) : \frac{x}{\ln x}$ существует, но следует, что этот предел равен 1, если он существует, и во всяком случае нижний предел $\geqslant a$ и верхний предел $\leqslant A$. Из результатов Чебышева следует также, что гипотеза Лежандра может быть верна лишь при $B=1$.

Только с помощью вспомогательных средств, созданных Риманом, удалось доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\pi(x) : \frac{\ln x}{x}\right) = 1.$$

В этом состоит содержание асимптотического закона распределения простых чисел[1]). Риман ввел функцию комплексного переменного $\zeta(s)$, которая для любого s, имеющего действительную часть, большую 1, задается равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

(причем p в произведении пробегает все простые числа). Дирихле, Чебышев и еще раньше Эйлер также пользовались этой функцией (в частности Эйлер выяснил тождественность ряда и произведения). Однако они рассматривали эту функцию исключительно для действительного s. Риман показал, что с помощью применения теории функций комплексного переменного к исследованию $\zeta(s)$ можно получить новые глубокие результаты о распределении простых чисел. Функция $\zeta(s)$ регулярна во всей s-плоскости, кроме простого полюса при $s=1$ (с вычетом 1). Она удовлетворяет, как доказал Риман, функциональному уравнению, которое позволяет по значению в точке s вычислить ее значение в точке $1-s$. Оказалось, что нули $\zeta(s)$ в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $\sigma = \operatorname{Re} s$ играют исключительную роль во многих вопросах теории простых чисел. Риман указал формулу, которая представляет функцию $\pi(x)$ (точнее некоторые функции, родственные $\pi(x)$) в виде функции от x и от нулей $\zeta(s)$ в этой полосе. Кроме того, он дал приближенную формулу

$$\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + r(T)$$

для числа нулей $\zeta(s)$ в полосе $-T \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant T$ для большого T. Функция $r(T)$ имеет порядок не выше порядка величины $\ln T$. Эти результаты Римана были строго доказаны только в 1894 г. Мангольдтом, после того как Адамар развил свою теорию целых функций конечного порядка. Сама теорема о простых числах была доказана лишь в 1896 г. Адамаром и (независимо от него) Валле-Пуссеном

[1]) В дальнейшем это утверждение называется теоремой о простых числах.— *Прим. ред.*

с помощью теории целых функций конечного порядка. При этом пришлось доказать, что на прямой $\operatorname{Re} s = \sigma = 1$ нет нулей $\zeta(s)$. Валле-Пуссен доказал даже более точное соотношение

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} + R(x),$$

где для достаточно большого x

$$|R(x)| < c_1 x e^{-c_2 \sqrt{\ln x}},$$

т. е. ошибка меньше чем $x/\ln^A x$ при сколь угодно большом постоянном числе A. Таким образом было показано, что функция

$$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} + C \quad (C = \operatorname{li} 2 = 1{,}04 \ldots)$$

дает лишь хорошее приближение для функции $\pi(x)$.

Позднее Ландау сильно упростил доказательство этих фактов и сделал это доказательство независимым от теории целых функций конечного порядка. Поскольку доказательство теоремы о простых числах было получено только обходным путем, с помощью применения теории функций комплексного переменного, было предпринято много попыток получить „чисто действительное“ доказательство этой теоремы. Эти усилия оставались напрасными до 1948 г., в котором П. Эрдёшу и А. Сельбергу с помощью соотношения, найденного А. Сельбергом, удалось указать „действительный“ подход к доказательству теоремы о простых числах.

Оценка Валле-Пуссена ошибки $R(x)$ при приближении $\pi(x)$ с помощью $\int_2^x d\xi/\ln \xi$ (которая до сих пор не получена без применения теории комплексных функций) была долгое время лучшим результатом, доказанным в этом направлении. С помощью применения метода Вейля к оценке тригонометрических сумм вида $\sum_n e^{2\pi i f(n)}$, где $f(n)$ — полином от n, а n пробегает натуральный ряд чисел, Литлвуду в 1921 г. удалось доказать для $R(x)$ лучшую оценку

$$|R(x)| < c_1 x e^{-c_2 \sqrt{\ln x \ln \ln x}}.$$

В 1935 г. Виноградов развил новый, очень сложный метод оценок тригонометрических сумм. С помощью этого метода Чудаков сумел доказать, что для большого x

$$|R(x)| < c_1 x e^{-c_2 (\ln x)^a}$$

при некотором $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Он доказал это для любого $a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{42}\right)$. Улучшая метод Виноградова (наиболее эффективное из улучшений принадлежит самому Виноградову и было очень упрощено Хуа), a можно в этой оценке еще увеличить. До сих пор лучшая оценка следующая:

$$|R(x)| < c_1 x e^{-\lambda(x)}, \quad \lambda(x) = c_2 \frac{\ln^{\frac{4}{7}} x}{(\ln \ln x)^{\frac{3}{7}}}.$$

Она получена Татудзавой из результата Хуа[1]).

Еще Лежандр предположил, что в любой арифметической прогрессии $l, l+k, l+2k, \ldots$, где $k \geqslant 1$ — целое, а l и k — взаимно простые числа, встречается бесконечно много простых чисел. Это предположение было впервые доказано Дирихле в 1837 г. В доказательстве он использовал так называемые L-функции, соответствующие числу k, аналогичные функции $\zeta(s)$. Эти L-функции в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ задаются равенством

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

где $\chi(n)$ — характер по модулю k. Теория L-функций Дирихле развилась в одно из важнейших вспомогательных средств теории простых чисел.

Пусть $\pi(x, k, l)$ — число не превосходящих x простых чисел p, для которых $p \equiv l \pmod{k}$. С помощью L-функций Дирихле Валле-Пуссен доказал теорему о простых числах для арифметической прогрессии

$$\lim_{x \to \infty} \left[\pi(x, k, l) : \frac{x}{\varphi(k) \ln x}\right] = 1.$$

Согласно этой теореме, в любом из $\varphi(k)$ классов вычетов, взаимно простых с k, находится „одинаково много“ простых чисел. Валле-Пуссен показал далее, что

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} + R(x, k, l),$$

где

$$|R(x, k, l)| < c_1 x e^{-c_2 \sqrt{\ln x}},$$

причем $c_1 = c_1(k)$, $c_2 = c_2(k)$ — положительные константы. Для доказательства этой формулы необходимо исследовать нули функции $L(s, \chi)$ в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ ($\sigma = \operatorname{Re} s$). Эти нули играют здесь ту же роль, что и нули $\zeta(s)$ при исследовании $\pi(x)$.

---

[1]) В настоящее время известны более сильные результаты (см. добавление II). — *Прим. ред.*

В последней формуле оценка ошибки $R(x, k, l)$, кроме x, зависит еще от k. Если допустить, что k и x стремятся к бесконечности, то оценить ошибку — трудная проблема. Это требует исследования нулей функций $L(s, \chi)$, когда модуль k растет. Такие исследования были начаты Ландау, Титчмаршем и Пейджем. В период с 1918 по 1935 г. ими было показано, что верхняя оценка для $R(x, k, l)$ верна равномерно по k для $k \leqslant e^{c\sqrt{\ln x}}$ и большого x при положительной константе c, если выбирать определенным образом значения k, которые не должны быть кратны зависящему от x и неизвестному точно модулю k^*, причем $k^* > c \ln x/(\ln \ln x)^2$.

В 1935 г. Зигель доказал теорему о нулях L-рядов, из которой можно вывести (Вальфиш, 1936 г.), что верхняя оценка верна равномерно для всех без исключения $k \leqslant (\ln x)^A$, где A — любое большое постоянное, $c_1 = c_1(A)$, $c_2 = c_2(A)$. Для $k > e^{c\sqrt{\ln x}}$ оценка $|R(x, k, l)| < c_1 x e^{-c_2\sqrt{\ln x}}$ при достаточно большом c становится сомнительной, так как тогда главный член

$$\frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} \sim \frac{x}{\varphi(k) \ln x}$$

меньше, чем оценки для ошибки $R(x, k, l)$. Для таких k нельзя даже считать, что $\pi(x, k, l) > 0$, т. е. имеется по крайней мере одно простое число $p \leqslant x$, такое, что $p \equiv l \pmod k$. Используя результаты Линника (1943—1945 гг.) о плотности нулей L-функций, Родосскому (1949 г.) удалось доказать формулу

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi} \{1 + \varepsilon(x, k, l)\}.$$

Здесь $\varepsilon(x, k, l)$ стремится равномерно к нулю при $x \to \infty$ для определенным образом выбранных значений $k \leqslant e^{\lambda(x)}$, где $\lambda(x) = c \ln x/\ln \ln x$. Независимо от Родосского это доказал также Хасельгров в 1951 г. Та же теорема была доказана Татудзавой (в 1950 г.) другими оригинальными методами.

Возникает вопрос, когда появляется первое простое число в арифметической прогрессии $l, l+k, l+2k, \ldots$, если $l < k$ и l взаимно просто с k. В 1947 г. Линник доказал, что имеется такая независимая от k константа c, что первое простое число этой прогрессии меньше k^c $(k \geqslant 2)$. Более простое доказательство той же теоремы дал Родосский в 1954 г.

При теоретико-групповом исследовании Бертран принял без доказательства, что между x и $2x$ $(x \geqslant 1)$ всегда лежит простое число. Если p_n обозначает n-е простое число, то отсюда следует, что $p_{n+1} < 2p_n$. Доказательство этого утверждения получено Чебышевым. Уже Лежандр предполагал, что для всех достаточно больших n

$p_{n+1}-p_n<\sqrt{p_n}$. Это до сих пор не доказано, но Хохайзель в 1930 г. сумел доказать, что существует число $a<1$, для которого $p_{n+1}-p_n<p_n^a$. Доказательство последнего утверждения опирается на исследования плотности нулей ζ-функции, проведенные Карлсоном. Хохайзель доказал свою теорему для значения a, большего чем $1-\frac{1}{33\,000}$. Это значение улучшалось впоследствии Хейльбронном, Чудаковым и Ингамом. В 1937 г. Ингам получил теорему для $a=5/8$ и даже для несколько меньшего a. Похожие результаты можно также вывести для простых чисел в арифметической прогрессии (Татудзава, 1950 г.).

Для доказательства упомянутых до сих пор результатов чаще всего приходилось привлекать средства теории функций комплексного переменного. Некоторые проблемы решались, наоборот, труднее или даже вовсе не решались этими методами. Примером такой проблемы является вопрос о количестве простых близнецов $p\leqslant x$, т. е. о количестве простых чисел $p\leqslant x$, для которых $p+2$ также простое. Хотя до сих пор неизвестно, имеется ли бесконечно много таких близнецов, Брун в 1920 г. нашел метод (метод решета Бруна), который позволяет оценить сверху количество таких близнецов. Он показал для большого x, что при подходящем c имеется не больше, чем $cx/\ln^2 x$, близнецов, меньших или равных x. Метод Бруна применим также в других числовых проблемах и дает многие интересные результаты (подробности см. в гл. V). В 1947 г. Сельберг нашел модификацию метода Бруна, которая очень изящна и дает в константах несколько лучшие результаты, чем метод Бруна.

Метод Бруна дал также первые результаты по проблеме Гольдбаха. Эта проблема состоит в том, чтобы доказать, что каждое четное число большее 4 является суммой двух нечетных простых чисел, а каждое нечетное число большее 8 — суммой трех нечетных простых чисел. Шнирельман с помощью метода Бруна доказал сначала, что числа, которые можно представить суммой двух простых чисел, имеют положительную плотность. Затем он вывел отсюда, что каждое достаточно большое натуральное число представимо в виде суммы постоянного числа простых чисел. В 1922 г. Харди и Литлвуд доказали с помощью своего известного аналитического метода, что предположение Гольдбаха правильно для всех достаточно больших нечетных чисел, если функция $\zeta(s)$ и функция $L(s,\chi)$ не имеют нулей при $\operatorname{Re} s\geqslant 3/4$. Еще Риман предполагал, что все нули $\zeta(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s>0$ лежат на прямой $\sigma=\operatorname{Re} s=1/2$ (гипотеза Римана), а Пильц предполагал то же самое для нулей L-функций. В 1937 г. Виноградову удалось доказать теорему Гольдбаха для нечетных чисел без недоказанных до сих пор предположений о нулях $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$. Проблема Гольдбаха для четных чисел еще не решена, хотя методами Харди — Литлвуда — Виноградова можно доказать, что „почти все“ четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел. При этом возможно бесконечное множество исключений.

При предположении правильности гипотезы Римана можно доказать, что при некотором подходящем c для остаточного члена в теореме о простых числах верна оценка $|R(x)| < c\sqrt{x}\ln x$. Литлвуд показал в 1914 г., что при достаточно малом постоянном δ найдется сколь угодно большое x, такое, что

$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x > \delta \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \ln\ln\ln x,$$

а, с другой стороны, найдется сколь угодно большое (отличное от предыдущего) значение x, такое, что

$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x < -\delta \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \ln\ln\ln x.$$

Следовательно, $R(x)$ при $x \to \infty$ не может быть величиной меньшего порядка, чем величина $\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\ln\ln\ln x$. Кроме того, отсюда видно, что неравенство $\pi(x) < \mathrm{li}\, x$ верно не для всех x, как предполагали долгое время на основании таблиц.

Общие обозначения

Через m, n обозначаются всегда, если не оговорено противное, натуральные числа, через p — простые числа. Через c, A, B, C, K обозначаются положительные константы, причем *одинаково обозначенные константы не обязательно должны иметь одно и то же значение*. Иногда — но только в одном и том же параграфе — c снабжается индексами (c_1, c_2 ...). Если в некоторое равенство входят константы c, c_1, ..., A, то это значит, что равенство справедливо при подходящем значении этих констант. Через ε обозначается чаще всего любое сколь угодно малое положительное число. $[x]$ для действительного x — наибольшее целое число, не превосходящее x. Пустые суммы обозначают всегда нуль, пустые произведения — единицу. Мы пишем часто $\sum\limits_{n}$ вместо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$, в суммах вида $\sum\limits_{m \leqslant x}$, $\sum\limits_{n \leqslant x}$, ... всегда суммирование производится от $m = 1$ и $n = 1$. Через (a, b) обозначаем наибольший общий делитель, а через $[a, b]$ — наименьшее общее кратное целых чисел a и b. Натуральный логарифм обозначается $\ln$. Далее мы полагаем $\ln_2(\ \ ) = \ln\ln(\ \ )$, $\ln_3(\ \ ) = \ln\ln\ln(\ \ )$, ... Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, положительные для достаточно большого x. Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то пишем $f(x) \sim g(x)$ $(x \to \infty)$. Что касается ссылок на теоремы и формулы, то, например, (5.4.1) означает „глава 5, § 4, формула (4.1)“; (7.4) означает „та же глава, § 7, формула (7.4)“; (П. 1.3)—„приложение, § 1, формула (1.3)“ и т. д.

Глава I

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1. Некоторые свойства простых чисел

При определении простых чисел необходимо понятие делимости целых чисел, которое предполагается известным. Натуральное число n, большее единицы, называется простым, если оно не делится ни на какое другое натуральное число, кроме единицы и самого себя. Единицу целесообразно не причислять к простым числам. Согласно этому определению ряд простых чисел начинается числами 2, 3, 5, ... Следующая теорема доказывается в учебниках элементарной теории чисел и поэтому мы приводим ее без доказательства:

Теорема 1.1. *Каждое натуральное число $n > 1$ можно записать в виде*

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}, \quad n_i \geqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

причем p_i — различные простые числа. (Простые числа p_i и соответствующие степени n_i определяются однозначно, с точностью до порядка.)

Возникает вопрос: обрывается ли ряд простых чисел или таких чисел бесконечно много? Уже Евклид показал, что имеет место последний случай.

Теорема 1.2 [1]. *Существует бесконечно много простых чисел.*

Доказательство. Предположим противное; пусть имеется только конечное число простых чисел и они занумерованы, например, в порядке возрастания: $p_1, p_2, \dots, p_r$. Число $z = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ не делится ни на какое из простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_r$. По теореме 1.1 должно существовать по крайней мере одно простое число, на которое z делится без остатка. Но это число должно быть отличным от $p_1, p_2, \dots, p_r$, а это противоречит тому, что нет простых чисел, кроме $p_1, p_2, \dots, p_r$. Тем самым теорема 1.2 доказана.

Второе доказательство теоремы 1.2 [2]. Снова предполагаем, что имеется только конечное число простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_r$.

---

[1]) Евклид, Начала, кн. 9.
[2]) Эйлер [1].

Составим следующее произведение:

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1}=\prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots\right). \tag{1.1}$$

Все ряды справа абсолютно сходятся; следовательно, их можно почленно перемножить, и получившийся ряд должен опять сходиться:

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots\right)=\sum{}'\frac{1}{n}. \tag{1.2}$$

Суммирование справа проводится по тем числам n, которые являются произведениями чисел $p_1, p_2, \ldots, p_r$ и их степеней, а также по $n=1$. По теореме 1.1 каждое число $n>1$ можно представить в виде произведения степеней простых чисел. Следовательно, справа в знаменателях должно появиться каждое число n, так как мы предположили, что $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все простые числа. Поэтому ряд, стоящий с правой стороны (1.2), должен быть рядом $\sum\frac{1}{n}$, о котором известно, что он расходится. Мы пришли к противоречию, и наше предположение опровергнуто.

При первом доказательстве теоремы 1.2 мы только ради простоты ссылались на теорему 1.1. Легко понять, что каждое натуральное число делится по крайней мере на одно простое число. Напротив, при втором доказательстве теорема 1.1 использовалась полностью.

Спрашивается: имеется ли простая формула, по которой можно вычислять простые числа, не обращаясь к их определению? В некотором смысле это отражается следующей теоремой.

Теорема 1.3. *Не существует полинома*

$$f(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \tag{1.3}$$

где a_i — целые, $n\geqslant 1$, $a_0\neq 0$, значения которого $f(m)$ для всех целых $m=1, 2, 3, \ldots$ являются простыми числами.

Доказательство. Очевидно, что $|f(n_0)|>1$ для достаточно большого n_0. Возьмем простое число p, на которое делится $f(n_0)$, и рассмотрим следующее равенство:

$$f(n_0+kp)=f(n_0)+kpf_1(n_0, p, k). \tag{1.4}$$

Число $f_1(n_0, p, k)$ при этом целое, и все три числа (1.4) делятся на p для всех $k=1, 2, 3, \ldots$. Так как для достаточно большого k число $|f(n_0+kp)|$ больше p и кратно p, то оно либо кратно p^2, либо, кроме p, содержит еще и другие простые множители. Тем самым теорема доказана.

Уже теорема 1.3 показывает, что простые числа распределены в некотором смысле неравномерно. Имеет место

Теорема 1.4. *В последовательности натуральных чисел имеются сколь угодно большие пробелы, не содержащие простых чисел, т. е. существуют цепочки любой длины из следующих друг за другом составных чисел.*

Доказательство. Действительно, последовательность

$$n!+2,\ n!+3,\ \ldots,\ n!+n \tag{1.5}$$

содержит только составные числа и для достаточно большого n становится как угодно длинной.

Позднее (гл. V и IX) мы познакомимся с многочисленными теоремами о расстояниях между последовательными простыми числами.

Приведем еще следующую теорему Серпинского [3].

Теорема. *Пусть*

$$\alpha=\sum_{n=1}^{\infty} p_n 10^{-2^n},$$

где через p_n обозначено n-е простое число. Тогда

$$p_n=[10^{2^n}\alpha]-10^{2^{n-1}}[10^{2^{n-1}}\alpha].$$

Доказательство. Действительно

$$\left[10^{2^n}\alpha\right]=10^{2^n-2}p_1+\ldots+p_n+\left[p_{n+1}10^{-2^n}+\ldots+p_{n+k}10^{-2^n(2^k-1)}+\ldots\right],$$

$$10^{2^{n-1}}\left[10^{2^{n-1}}\alpha\right]=10^{2^{n-1}}\Big\{10^{2^{n-1}-2}p_1+\ldots p_{n-1}+$$
$$+\left[p_n10^{-2^{n-1}}+p_{n+1}10^{-2^{n-1}\cdot 3}+\ldots\right]\Big\}.$$

Мы покажем ниже (теорема 2.1), что $p_n<3^{n+1}$. Пользуясь этим, легко подсчитать, что числа в квадратных скобках меньше 1, откуда уже следует утверждение теоремы.

Доказанное соотношение дает простую формулу для нахождения n-го простого числа. Однако эта формула не годится для вычислений, так как, чтобы найти нужное количество десятичных знаков числа α, требуется знать достаточно много простых чисел.

§ 2. Простейшие оценки $\pi(x)$

Обозначим через $\pi(x)$, $x>0$, количество простых чисел, не превосходящих x. Например, $\pi(1)=0$, $\pi(2)=1$, $\pi(3)=2$, $\pi(11)=5$ и т. д. В § 1 было доказано, что $\pi(x)$ стремится к бесконечности при $x\to\infty$. Теперь мы дадим простые оценки характера стремления $\pi(x)$ к бесконечности.

Теорема 2.1. *Для n-го простого числа p_n при любых $x\geqslant 1$, $n\geqslant 1$ имеют место неравенства*

$$\pi(x)>\ln x-1,\quad p_n<e^{n+1}<3^{n+1}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Аналогично тому, как это было сделано в (1.1) и (1.2), имеем

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}={\sum}'\frac{1}{n}, \tag{2.2}$$

причем штрих в $\sum'$ означает, что суммирование проводится только по тем n, простые множители которых не превосходят x. В частности,

$$\sum{}' \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} > \int\limits_1^{[x]+1} \frac{d\xi}{\xi} > \ln x. \tag{2.3}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leqslant \prod_{k=2}^{\pi(x)+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-1} = \frac{2 \cdot 3 \cdots \{\pi(x)+1\}}{1 \cdot 2 \cdots \pi(x)} = \pi(x)+1, \tag{2.4}$$

так как для m-го простого числа

$$1 - \frac{1}{p_m} \geqslant 1 - \frac{1}{m+1}.$$

Из (2.2) — (2.4) следует утверждение теоремы [1]), если воспользоваться еще тем, что $\pi(p_n) = n$.

Теорема 2.2 [2]). *Ряд*

$$\sum_p \frac{1}{p}, \tag{2.5}$$

где p пробегает все простые числа, расходится.

Доказательство. После логарифмирования формул (2.2) и (2.3) получаем

$$\sum_{p \leqslant x} \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > \ln \ln x \quad (x > 1). \tag{2.6}$$

Далее

$$\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} + \ldots <$$
$$< \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots = \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)}, \tag{2.7}$$

и поэтому из (2.6) следует

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} > \ln \ln x - \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p(p-1)} > \ln \ln x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Отсюда при $x \to \infty$ получается утверждение теоремы.

---

[1]) Согласно нашим обозначениям оба последних произведения равны 1, если $1 \leqslant x < 2$.

[2]) Эйлер [1].

Обе последние теоремы показывают, что в некотором смысле имеется „много" простых чисел. Теперь мы получим для $\pi(x)$ оценку сверху.

Теорема 2.3[1]). *Имеет место соотношение*

$$\lim_{x\to\infty} (\pi(x)/x) = 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы применим решето Эратосфена, позволяющее найти все простые числа $\leqslant x$, если уже известны простые числа $\leqslant \sqrt{x}$. Пусть $x \geqslant 4$ и $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все простые числа $\leqslant \sqrt{x}$. Если вычеркнуть из ряда натуральных чисел $\leqslant x$ сначала кратные p_1, из оставшихся чисел — кратные p_2 и т. д. до p_r, то останутся, кроме числа 1, те простые числа p, для которых $\sqrt{x} < p \leqslant x$, так как всякое другое число $\leqslant x$ делится по крайней мере на одно $p \leqslant \sqrt{x}$. Мы утверждаем теперь, что количество невычеркнутых чисел $1+\pi(x)-\pi(\sqrt{x})$ равно следующему выражению:

$$[x] - \sum_{1\leqslant i\leqslant r}\left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{1\leqslant i<k\leqslant r}\left[\frac{x}{p_ip_k}\right] - \\ - \sum_{1\leqslant i<k<l\leqslant r}\left[\frac{x}{p_ip_kp_l}\right] + \ldots + (-1)^r\left[\frac{x}{p_1p_2\ldots p_r}\right]. \tag{2.9}$$

Действительно, количество чисел, не превосходящих x и кратных p_i, равно $\left[\frac{x}{p_i}\right]$. Если вычесть это количество из $[x]$ для всех $i=1, \ldots, r$, то для чисел, которые делятся на p_i и p_k, вычитаются две единицы вместо одной. Если присоединить теперь 1 для каждого числа, которое делится на p_i и p_k, то тем самым прибавим $\left[\frac{x}{p_ip_k}\right]$. Это делается для всех комбинаций i, k, $1 \leqslant i < k \leqslant r$. Но при этом опять прибавили слишком много, так как, например, для числа $p_1p_2p_3$ сначала единица трижды вычиталась, а затем опять трижды прибавилась $\left(\text{при } -\left[\frac{x}{p_1}\right], -\left[\frac{x}{p_2}\right], -\left[\frac{x}{p_3}\right] \text{ и } \left[\frac{x}{p_1p_2}\right], \left[\frac{x}{p_1p_3}\right], \left[\frac{x}{p_2p_3}\right]\right)$, так что для этого числа из $[x]$ вообще ничего не вычиталось. Продолжая таким образом, доходим наконец до последнего члена (2.9); если некоторое число $\leqslant x$ делится точно на s чисел из $p_1, \ldots, p_r$, то из $[x]$ в (2.9) оно вычитается в совокупности

$$s - C_s^2 + \ldots + (-1)^{s-1} C_s^s = 1 - (1-1)^s = 1 \tag{2.10}$$

раз.

---

[1]) Лежандр [1], стр. 12—15.

Выражение (2.9) содержит всего

$$1+r+C_r^2+\ldots+C_r^r=2^r$$

членов. Если опустить квадратные скобки в формуле (2.9), то от каждой скобки возникает ошибка самое большее в единицу, и ошибка во всем выражении будет не больше 2^r. Следовательно, согласно (2.2) и (2.3),

$$1+\pi(x)-\pi(\sqrt{x})=x-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\frac{x}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant r}\frac{x}{p_ip_k}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^r\frac{x}{p_1\ldots p_r}+R=x\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+R=$$

$$=x\prod_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+R\leqslant\frac{x}{\ln\sqrt{x}}+2^r<2\frac{x}{\ln x}+2^{\sqrt{x}};\qquad(2.11)$$

здесь $|R|\leqslant 2^r$ и $r=\pi(\sqrt{x})<\sqrt{x}$. Однако формула (2.11) не годится для оценки $\pi(x)$ сверху, так как $2^{\sqrt{x}}\geqslant x$ и ошибка R может стать такой большой, что мы не получим из (2.11) даже тривиального неравенства $\pi(x)<x$. Лучшую оценку получают следующим образом. Если в прежнем рассуждении заменить $\sqrt{x}$ на u, где $2\leqslant u\leqslant\sqrt{x}$, и $p_1,\ldots,p_r$ на совокупность простых чисел $\leqslant u$, то формула (2.9) дает число чисел $\leqslant x$, которые не делятся ни на какое $p\leqslant u$. Это число очевидно не меньше чем $\pi(x)-\pi(u)$. Отсюда следует оценка, аналогичная (2.11):

$$\pi(x)-\pi(u)<\frac{x}{\ln u}+2^u,\qquad(2.12)$$

$$\pi(x)<u+\frac{x}{\ln u}+2^u.\qquad(2.13)$$

Теперь можно выбрать u так, чтобы $2^u<\frac{x}{\ln u}$. Положим $u=\alpha\ln x$, $\alpha<\frac{1}{\ln 2}$; тогда получим

$$\pi(x)<\alpha\ln x+\frac{x}{\ln\ln x+\ln\alpha}+x^{\alpha\ln 2}\qquad(2.14)$$

для достаточно большого x. Если c_1 — положительная константа >3, то для достаточно большого x имеет место неравенство

$$\pi(x)<c_1\frac{x}{\ln\ln x},\qquad(2.15)$$

так как при $x \to \infty$

$$\lim\left\{\frac{1}{3}c_1\,\frac{x}{\ln\ln x}\Big/\frac{x}{\ln\ln x+\ln\alpha}\right\}=\frac{1}{3}c_1>1,$$

$$\lim\left\{\frac{1}{3}c_1\,\frac{x}{\ln\ln x}\Big/x^{\alpha\ln 2}\right\}=\infty \quad (\text{если } \alpha\ln 2<1)$$

и

$$\lim\left\{\frac{1}{3}c_1\,\frac{x}{\ln\ln x}\Big/\alpha\ln x\right\}=\infty.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.3.

Определим теперь часто применяемые символы o, O. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две функции, которые определены для достаточно большого положительного x, причем $f(x)$ — любая комплекснозначная функция, а $g(x)$—положительная для достаточно больших x. Тогда соотношения

$$\begin{gathered} f(x)=O(g(x)), \\ \text{соответственно}\quad f(x)=o(g(x)) \text{ при } x\to\infty, \end{gathered} \tag{2.16}$$

означают, что для достаточно больших x имеем

$$\begin{gathered} |f(x)|\leqslant Ag(x) \text{ при подходящем } A>0, \\ \text{соответственно}\quad \frac{|f(x)|}{g(x)}\to 0 \quad\text{при}\quad x\to\infty. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Аналогично можно определить соотношения $f(x)=O(g(x))$, $f(x)= =o(g(x))$ при $x\to+0$, если предполагать $g(x)$ положительной для достаточно малых положительных x.

Чаще всего мы будем опускать условия „$x\to\infty$", „$x\to+0$", если из текста однозначно вытекает, что имеется в виду.

Основное содержание теорем 2.1 — 2.3 может быть выражено теперь так:

$$\frac{1}{\pi(x)}=O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\quad \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\neq O(1),\quad \pi(x)=O\left(\frac{x}{\ln\ln x}\right)\quad (x\to\infty).$$

Заметим, что равенство $f(x)=O(g(x))$ надо читать слева направо. Например, $O(x)=O(x^2)$ при $x\to\infty$, но не $O(x^2)=O(x)$.

Мы будем применять эти символы также и в случае, когда f и g определены только для целых x или когда f и g определены для достаточно больших целых x, и будем писать тогда $O(n)$, $O\left(\frac{1}{n}\right)$ и т. д. Иногда мы будем указывать определенную область значений x, для которых верно первое неравенство (2.17). Так, например, $\frac{1}{\ln x}=O(1)$, $2\leqslant x<\infty$, означает, что $\frac{1}{\ln x}$ в этой области остается ограниченным. Константа A в условии (2.17) не зависит от того, какое x берется из этой области. В равенстве

$$1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n^2+O(n) \quad (n\to\infty) \tag{2.18}$$

первый член правой части — главный член, а второй член — остаток, который должен быть малым по сравнению с главным членом. Не имело бы смысла писать, например, равенство

$$1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n^2+O(n^2) \quad (n\to\infty),$$

так как $\frac{1}{2}n^2+O(n^2)=O(n^2)$ при $n\to\infty$, в то время как формула (2.18) показывает больше, чем $1+2+\ldots+n=O(n^2)$.

Теперь ясно, что значит, например, соотношение

$$\sum_n x^n = O\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{при} \quad x\to 1-0.$$

§ 3. Истинный порядок $\pi(x)$

Мы не знаем простых явных формул, которые позволяли бы по заданному x вычислять $\pi(x)$. Поэтому естественно искать простые функции, которые возможно лучше приближают $\pi(x)$. Мы покажем теперь, что в некотором смысле $x/\ln x$ — именно такая функция. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p \quad (x>0), \tag{3.1}$$

введенную Чебышевым. Оказывается, что эту сумму легче оценить, чем $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}\cdot 1$. Позднее по поведению этой суммы мы будем судить о поведении $\pi(x)$. Разумеется, чем больше простых чисел, не превосходящих x, тем больше сумма (3.1)

Теорема 3.1[1]) *Имеют место соотношения*

$$c_2x<\theta(x)<c_3x, \quad 0<c_2<c_3 \quad (x\geqslant 2), \tag{3.2}$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}=\ln x+O(1) \quad (x\geqslant 1). \tag{3.3}$$

Доказательство. Докажем сначала равенство[2])

$$n!=\prod_{p\leqslant n}p^{e_p}, \quad e_p=\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right], \quad n\geqslant 1. \tag{3.4}$$

---

[1]) Чебышев [1], [2], Мертенс [1], Шапиро [1]. Для $x<2$, $\theta(x)=0$ и поэтому левая часть неравенства (3.2) неверна.

[2]) Сумма обрывается, как только p^k становится больше n, т. е. при $k>\ln n/\ln p$.

Действительно, в последовательности 1, 2, 3, ..., n имеется всего $[n/p]$ чисел, которые делятся на p. Из них $[n/p^2]$ делятся на p^2, из них опять $[n/p^3]$ делятся на p^3 и т. д. Сумма всех этих величин равна степени, в которой p входит в $n!$.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Логарифмируя равенство (3.4) и принимая во внимание, что

$$\ln n! = n \ln n + O(n) \quad (n \geqslant 2), \tag{3.5}$$

получим

$$\sum_{p \leqslant n} \left[\frac{n}{p}\right] \ln p + \sum_{p \leqslant n} \left[\frac{n}{p^2}\right] \ln p + \ldots = n \ln n + O(n). \tag{3.6}$$

Число k сумм слева есть наибольшее целое число g, для которого $n/2^g \geqslant 1$. Следовательно, $k = [\ln n/\ln 2]$. Тогда

$$\sum_{p \leqslant n} \ln p \left(\left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots\right) \leqslant$$
$$\leqslant n \sum_{p \leqslant n} \ln p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right) = n \sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)} <$$
$$< n \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} = O(n), \tag{3.7}$$

так как последний ряд сходится (для достаточно большого m общий член ряда меньше $m^{-3/2}$). Из (3.6) и (3.7) следует, что

$$\sum_{p \leqslant n} \left[\frac{n}{p}\right] \ln p = n \ln n + O(n). \tag{3.8}$$

Если воспользоваться этим равенством для n и для $2n$, то получим

$$\sum_{p \leqslant 2n} \left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right) \ln p = O(n), \tag{3.9}$$

поскольку при $p > n$ $\left[\frac{n}{p}\right]$ всегда равно 0. Для $n < p \leqslant 2n$ имеем $\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = 1$; для других p это выражение во всяком случае неотрицательно, так как $[2\alpha] - 2[\alpha] \geqslant 0$, какое бы ни было $\alpha \geqslant 0$. Следовательно, из (3.9), опуская слева члены с $p < n$, получим

$$\sum_{n < p \leqslant 2n} \ln p = \theta(2n) - \theta(n) < c_4 n. \tag{3.10}$$

При $n = [x]$, $x \geqslant 2$, отсюда следует, что

$$\theta(2x) - \theta(x) = \theta([2x]) - \theta([x]) =$$
$$= \theta([2x]) - \theta(2[x]) + \theta(2[x]) - \theta([x]) =$$
$$= O(\ln [2x]) + O([x]) < c_5 x, \tag{3.11}$$

так как $\ln[2x] \leqslant \ln 2x < x$ при $x \geqslant 2$. Это же неравенство, возможно с другой константой c_5, справедливо и при $0 < x < 2$. Теперь, если $k = [\ln x/\ln 2] + 1$, то

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{k} \left\{ \theta\left(\frac{x}{2^{i-1}}\right) - \theta\left(\frac{x}{2^i}\right) \right\} < c_5 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x}{2^i} = c_5 x. \tag{3.12}$$

Таким образом, первая часть неравенства (3.2) доказана.

Если в (3.8) опустить квадратные скобки, то ошибка, получившаяся от каждой скобки, не превзойдет единицы. Поэтому верно следующее соотношение:

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{n}{p} \ln p + O\Bigl(\sum_{p \leqslant n} \ln p\Bigr) = n \ln n + O(n) \quad (n \geqslant 2). \tag{3.13}$$

Отсюда и из (3.12) после деления на n получаем

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{\ln p}{p} + O(1) = \ln n + O(1) \quad (n \geqslant 1). \tag{3.14}$$

Теперь равенство (3.3) также доказано, так как $\ln x - \ln n = O(1)$ при $n = [x]$ и $x \geqslant 1$. Теперь докажем вторую часть (3.2). Для этого воспользуемся равенством (3.3). Из него для $0 < \alpha < 1$ следует, что

$$\sum_{\alpha x < p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln \frac{1}{\alpha} + O(1) \quad (x \to \infty), \tag{3.15}$$

причем константа в $O(1)$ не зависит от α.

Может случиться, что константа A из (2.17), появляющаяся при определении $O(\ )$, зависит от некоторых параметров. Так, например, при $x \to \infty$ мы могли бы вместо (3.15) написать $\displaystyle\sum_{\alpha x < p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = O(1)$, но тогда нужно было бы добавить, что константа в $O(1)$ зависит от α. Чаще всего из текста будет понятно, от каких параметров зависит константа в $O(1)$.

Согласно (3.12) $\theta(\alpha x)/\alpha x = O(1)$. Следовательно, при $x \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{\alpha x < p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} < \frac{1}{\alpha x} \sum_{\alpha x < p \leqslant x} \ln p =$$
$$= \frac{1}{\alpha x} \{\theta(x) - \theta(\alpha x)\} = \frac{\theta(x)}{\alpha x} + O(1) \quad (x \to \infty), \tag{3.16}$$

причем опять константа в $O(1)$ не зависит от α. Из (3.15) и (3.16) получаем

$$\theta(x) > \alpha x \left\{ \ln \frac{1}{\alpha} + O(1) \right\} \quad (x \to \infty). \tag{3.17}$$

Выберем α, которое до сих пор не фиксировалось, настолько малым, чтобы выражение в фигурной скобке в (3.17) было положительно[1]). Теперь неравенство (3.2) доказано для достаточно большого x. Отсюда следует, что оно верно для всех $x \geqslant 2$ [2]).

С помощью неравенства (3.2) мы докажем теперь следующее утверждение:

Теорема 3.2. *При $x \geqslant 2$ имеют место неравенства*

$$c_6 \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < c_7 \frac{x}{\ln x}, \quad 0 < c_6 < c_7. \tag{3.18}$$

Доказательство. Действительно,

$$\{\pi(x) - \pi(\sqrt{x})\} \ln \sqrt{x} < \theta(x) \leqslant \pi(x) \ln x. \tag{3.19}$$

Правая часть этого неравенства следует сейчас же из определения $\theta(x)$. Левая часть неравенства следует из того, что

$$\sum_{p \leqslant x} \ln p \geqslant \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \ln p > \ln \sqrt{x} \sum_{\sqrt{x} \leqslant p \leqslant x} 1.$$

Так как $\pi(\sqrt{x}) = O(\sqrt{x})$, из (3.19) заключаем, что

$$\frac{1}{2}\pi(x) + O(\sqrt{x}) < \frac{\theta(x)}{\ln x} \leqslant \pi(x).$$

Отсюда, учитывая (3.2), получаем утверждение теоремы, поскольку, например, из правой части (3.2) следует, что

$$\frac{1}{2}\pi(x) + O(\sqrt{x}) < c_3 \frac{x}{\ln x},$$

т. е.

$$\pi(x) < 2c_3 \frac{x}{\ln x} + O(\sqrt{x}) < c_7 \frac{x}{\ln x}.$$

Теорема 3.3. *Пусть p_n есть n-е простое число, $n \geqslant 2$* [3]). *Тогда*

$$c_8 n \ln n < p_n < c_9 n \ln n, \quad 0 < c_8 < c_9. \tag{3.20}$$

Доказательство. Из неравенства (3.18) при $x = p_n$ следует, что

$$c_6 \frac{p_n}{\ln p_n} < n \tag{3.21}$$

и

$$n \leqslant c_7 \frac{p_n}{\ln p_n}. \tag{3.22}$$

---

[1]) Это можно сделать ввиду того, что $\ln(1/\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to +0$ и по определению $-K < O(1) < K$ при некотором $K > 0$, независимом от α и x.

[2]) Возможно, что при этом c_2 и c_3 изменятся.

[3]) Так как $\ln 1 = 0$, то n предполагается $\geqslant 2$.

Из (3.21) получаем $\ln p_n + \ln c_6 - \ln\ln p_n < \ln n$. Следовательно, для достаточно большого n

$$\frac{1}{2}\ln p_n < \ln n. \tag{3.23}$$

Действительно, так как $p_n \to \infty$, то для достаточно большого n выполнено неравенство

$$\frac{1}{2}\ln p_n < \ln c_6 + \ln p_n - \ln\ln p_n.$$

Из неравенств (3.21) и (3.23) следует правая часть (3.20). Левая часть получается из (3.22) и из неравенства

$$\ln p_n > \ln n.$$

§ 4. Суммы и произведения по простым числам

Применим теперь полученные оценки к исследованию некоторых сумм и произведений по простым числам.

Теорема 4.1. *При $x \to \infty$ имеют место соотношения*

$$\begin{gathered}\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + a + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\\ \prod_{p \leqslant x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = B\ln x + O(1).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь a и B — некоторые константы, причем $B >$ (

Доказательство. Пусть $x \geqslant 3$. Очевидно, что

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p}\,\frac{1}{\ln p}.$$

Положим теперь в теореме П. 1.4[1]) $\lambda_n = p_n$ $(\lambda_1 = 2)$

$$a_n = \ln p_n / p_n, \quad g(x) = 1/\ln x.$$

Тогда $A(x)$ становится суммой из (3.3) и мы получаем

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \{\ln x + O(1)\}\frac{1}{\ln x} + \int_2^x \{\ln\xi + O(1)\}\frac{d\ln\xi}{\ln^2\xi}. \tag{4.2}$$

[1]) Буква „П“ в ссылках всегда обозначает приложение.

Поскольку $\int\limits_2^\infty \frac{d\xi}{\xi \ln^2 \xi}$ сходится,

$$\int\limits_2^x O(1)\frac{d\xi}{\xi\ln^2\xi} = \left(\int\limits_2^\infty - \int\limits_x^\infty\right) O(1)\frac{d\xi}{\xi\ln^2\xi} =$$

$$= a_1 + O\left(\int\limits_x^\infty \frac{d\ln\xi}{\ln^2\xi}\right) = a_1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \qquad (4.3)$$

где a_1 — константа, знак которой пока не определен. Из (4.2), (4.3) следует первая часть (4.1) при $a = a_1 + 1 - \ln\ln 2$. Далее,

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \exp\sum_{p\leqslant x}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p^2}+\ldots\right). \qquad (4.4)$$

Так как $\sum\limits_{n>m}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{m}$, имеем

$$\sum_{\leqslant x}\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}+\ldots\right) = \left(\sum_{2\leqslant p<\infty} - \sum_{p>x}\right)\left(\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}+\ldots\right) =$$

$$= c_{10} + O\left(\sum_{p>x}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots\right)\right) = c_{10} + O\left(\sum_{p>x}\frac{1}{p(p-1)}\right) =$$

$$= c_{10} + O\left(\sum_{n>x}\frac{1}{n(n-1)}\right) = c_{10} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

При $c>0$, $0\leqslant cu\leqslant 1/2$ имеет место неравенство

$$e^{cu} = 1 + cu + \frac{1}{2!}(cu)^2 + \ldots \leqslant 1 + cu\{1 + cu + (cu)^2 + \ldots\}.$$

Положим здесь $u = 1/\ln x$, а c равным константе в $O(1/\ln x)$. Тогда мы получим

$$\exp O(1/\ln x) = 1 + O(1/\ln x)$$

для $\ln x \geqslant 2c$. Для $2\leqslant x\leqslant e^{2c}$ это соотношение очевидно и, следовательно, имеет место при $x\geqslant 2$.

Теперь, исходя из (4.4) и уже доказанной части теоремы (4.1), мы получаем

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \exp\{\ln\ln x + a + c_{10} + O(1/\ln x)\} =$$

$$= B\ln x\{1 + O(1/\ln x)\}, \quad B = \exp(a + c_{10}) > 0. \qquad (4.5)$$

Этим теорема (4.1) полностью доказана. Константы a и B будут определены в гл. 3, § 5. Из формул (2.2) и (2.3) сразу следует, что $B\geqslant 1$.

Теорема 4.2. *При постоянном* $\alpha > -1$ *имеют место неравенства*

$$c_{11}\frac{x^{1+\alpha}}{\ln x} < \sum_{p \leqslant x} p^{\alpha} < c_{12}\frac{x^{1+\alpha}}{\ln x} \quad (x \geqslant 2), \tag{4.6}$$

причем c_{11} *и* c_{12} *зависят от* α.

Доказательство. Мы докажем сначала правую часть неравенства. При $\alpha \geqslant 0$ она следует из (3.18), если учесть, что сумма содержит $\pi(x)$ членов, которые все не больше x^{α}. Пусть теперь $0 < \beta < 1$. Согласно (3.18) и (3.20),

$$\sum_{2<p\leqslant x} p^{-\beta} = \sum_{2<p_n\leqslant x} p_n^{-\beta} \leqslant \leqslant \sum_{2<p_n\leqslant x} (c_8 n \ln n)^{-\beta} \leqslant \sum_{2<n\leqslant c_7 x/\ln x} (c_8 n \ln n)^{-\beta}. \tag{4.7}$$

Из (П. 1.8) следует

$$\sum_{2<n\leqslant x} (n \ln n)^{-\beta} = O\left(\int_2^x \frac{d\xi}{(\xi \ln \xi)^{\beta}}\right). \tag{4.8}$$

Мы имеем

$$\int_2^x \frac{d\xi}{\xi^{\beta}\ln^{\beta}\xi}\left(1 - \frac{\beta}{(1-\beta)\ln\xi}\right) = \frac{\xi^{1-\beta}}{(1-\beta)\ln^{\beta}\xi}\Bigg|_2^x = O\left(\frac{x^{1-\beta}}{\ln^{\beta} x}\right). \tag{4.9}$$

Ввиду того что $1-\beta/(1-\beta)\ln\xi > \frac{1}{2}$ при $\xi > x_0$, для интеграла в (4.8)[1]) справедлива та же самая оценка, так как

$$\int_2^x \frac{d\xi}{\xi^{\beta}\ln^{\beta}\xi} = \left(\int_2^{x_0} + \int_{x_0}^{x}\right)\frac{d\xi}{\xi^{\beta}\ln^{\beta}\xi} < O(1) + 2\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\xi^{\beta}\ln^{\beta}\xi}\left(1 - \frac{\beta}{(1-\beta)\ln\xi}\right).$$

Если в этой оценке заменить x на $c_7 x/\ln x$, то правая часть неравенства (4.6) получается из (4.7) также и для $-1 < \alpha < 0$.

Теперь докажем левую часть (4.6). Для $\alpha \geqslant 0$ при любом $\varepsilon > 0$ и $x > x_0(\varepsilon)$ имеем, согласно (3.18),

$$\sum_{p\leqslant x} p^{\alpha} \geqslant \sum_{\varepsilon x<p\leqslant x} p^{\alpha} \geqslant \{\pi(x) - \pi(\varepsilon x)\}(\varepsilon x)^{\alpha} > > \varepsilon^{\alpha} x^{1+\alpha}\left(\frac{c_6}{\ln x} - \frac{\varepsilon c_7}{\ln \varepsilon x}\right) > c(\varepsilon)\frac{x^{1+\alpha}}{\ln x},$$

[1]) Интеграл можно оценить несколько проще:

$$\int_{x_0}^{x} (\xi^{\delta}/\ln^{\beta}\xi)\,\xi^{-(\beta+\delta)}\,d\xi \leqslant x^{\delta}/\ln^{\beta} x \int_{x_0}^{x} \xi^{-(\beta+\delta)}\,d\xi,$$

где $\beta+\delta<1$, $\delta>0$, и $\xi^{\delta}/\ln^{\beta}\xi$ при $\xi \geqslant x_0$ монотонно возрастает.

причем $c(\varepsilon)$ — положительная константа, которая может зависеть от α (ε предполагается настолько малым, что $c_6 - c_7\varepsilon > 0$). Далее при $1 > \beta > 0$ в силу (3.18) получаем

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p^\beta} \geqslant \frac{\pi(x)}{x^\beta} > c_6 \frac{x^{1-\beta}}{\ln x}. \tag{4.10}$$

Этим неравенство (4.6) полностью доказано.

Теорема 3.2 наводит на вопрос, существует ли предел $\pi(x)\ln x/x$ при $x \to \infty$. Существование этого предела — центральная часть теоремы о простых числах, которую, однако, мы сможем доказать лишь позднее.

Теорема 4.3. *Если*

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x} \tag{4.11}$$

существует, то a должно быть равно 1.

Доказательство. Соотношение (4.11) можно записать так:

$$\pi(x) = a\frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad (x \geqslant 2). \tag{4.12}$$

Используя теорему П. 1.4, отсюда получим

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_2^x \frac{\pi(\xi)}{\xi^2}\,d\xi = \frac{a}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right) +$$
$$+ \int_2^x \left\{\frac{a}{\xi\ln\xi} + o\left(\frac{1}{\xi\ln\xi}\right)\right\} d\xi = a\ln\ln x + o(\ln\ln x) \quad (x \to \infty). \tag{4.13}$$

По определению $o(\ )$ для любого $\varepsilon > 0$ величина $o(1/\xi\ln\xi)$ не превосходит $\varepsilon/\xi\ln\xi$ при $\xi > x(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\left|\int_2^x o\left(\frac{1}{\xi\ln\xi}\right)d\xi\right| \leqslant \left|\int_0^{x_0(\varepsilon)} o\left(\frac{1}{\xi\ln\xi}\right)d\xi\right| + \varepsilon\int_{x_0(\varepsilon)}^x \frac{d\xi}{\xi\ln\xi} =$$
$$= c(\varepsilon) + \varepsilon\ln\ln x < 2\varepsilon\ln\ln x \quad (x > x_1(\varepsilon)),$$

и интеграл слева есть $o(\ln\ln x)$ при $x \to \infty$. Сравнивая (4.13) с (4.1), получим $a = 1$.

§ 5. Различные применения

Обозначим через $\varphi(n)$ функцию Эйлера, т. е. количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Известно, что

$$\varphi(n) = n\prod_{p\mid n}\left(1 - \frac{1}{p}\right), \tag{5.1}$$

где запись $p \mid n$ означает, что p — делитель числа n. Множитель $1 - 1/p$ тем меньше, чем меньше p. Следовательно, это произведение мало, если n имеет много маленьких простых делителей. Очевидно, что $\varphi(n) \leqslant n$ $(n \geqslant 1)$.

Теорема 5.1[1]). *Имеет место неравенство*

$$\varphi(n) > c_{13} \frac{n}{\ln \ln n} \quad (n \geqslant 3)\,^{2)}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $v(n)$ — количество различных простых делителей n, а p_i есть i-й простой делитель. Так как $B \ln x + o(\ln x) < c \ln x$ при $x \geqslant 2$ и достаточно большом $c > 0$, то, согласно (4.1), имеем

$$\prod_{p \mid n}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{v(n)}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \prod_{p \leqslant p_{v(n)}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) > c_{14} \frac{1}{\ln p_{v(n)}}. \tag{5.3}$$

С другой стороны, в силу (3.2)

$$n \geqslant \prod_{p \mid n} p \geqslant \prod_{i=1}^{v(n)} p_i = \prod_{p \leqslant p_{v(n)}} p, \tag{5.4}$$

$$\ln n \geqslant \sum_{p \leqslant p_{v(n)}} \ln p = \theta\left(p_{v(n)}\right) > c_2 p_{v(n)}. \tag{5.5}$$

Поэтому $\ln p_{v(n)} < c_{15} \ln \ln n$, и утверждение теоремы следует из (5.3).

Обозначим через $d(n)$ число положительных делителей числа n (причем 1 и само n также считаются). Очевидно, $d(p) = 2$ и всегда $d(n) \geqslant 2$. Если $n = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$, то

$$d(n) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_r + 1), \tag{5.6}$$

поскольку для кратности p_i в каком-нибудь делителе n имеется $n_i + 1$ возможность: $0, 1, 2, \ldots, n_i$.

Неравенство $d(n) \leqslant n$ тривиально. Несколько лучше оценка $d(n) \leqslant 2\sqrt{n}$. Действительно для $n = d_1 d_2$ или $d_1 \leqslant \sqrt{n}$ или $d_2 \leqslant \sqrt{n}$. Докажем теперь более точное утверждение.

Теорема 5.2[3]) *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *и* $n > n_0(\varepsilon)$

$$d(n) < \exp\left\{(1 + \varepsilon) \ln 2 \frac{\ln n}{\ln \ln n}\right\}. \tag{5.7}$$

---

[1]) Ландау [2].

[2]) При $n = 2$ неравенство (5.2) тривиально, так как $\ln \ln n < 0$.

[3]) Виман [1], Рамануджан [1].

Доказательство. Пусть $n=\prod_{p\mid n} p^{n_p} \geqslant 3$. Возьмем любое $\alpha>1$ и образуем число

$$d(n)\,2^{-\alpha\frac{\ln n}{\ln\ln n}}=\prod_{p\mid n}(n_p+1)\,p^{-n_p\alpha\frac{\ln 2}{\ln\ln n}}=$$
$$=\prod_{\substack{p\leqslant \ln^{1-\eta} n\\ p\mid n}}\cdot\prod_{\substack{p> \ln^{1-\eta} n\\ p\mid n}}=P_1\cdot P_2, \qquad (5.8)$$

причем $0<\eta<1$. Если $\eta=\eta(\alpha)$ выбрать настолько малым, чтобы $(1-\eta)\alpha$ стало больше единицы, то для любого p из произведения P_2 получим

$$(n_p+1)\,p^{-n_p\alpha\frac{\ln 2}{\ln\ln n}}<(n_p+1)(\ln n)^{-(1-\eta)\,n_p\alpha\frac{\ln 2}{\ln\ln n}}=$$
$$=(n_p+1)\,2^{-n_p(1-\eta)\alpha}<(n_p+1)\,2^{-n_p}\leqslant 1.$$

Следовательно, $P_2<1$. Число множителей в P_1 не больше чем

$$\pi\left(\ln^{1-\eta} n\right)<c_7\frac{\ln^{1-\eta} n}{(1-\eta)\ln\ln n},$$

а каждый множитель не превосходит величины

$$(n_p+1)\,2^{-n_p\alpha\frac{\ln 2}{\ln\ln n}}\leqslant n_p 2^{-n_p\alpha\frac{\ln 2}{\ln\ln n}}+1.$$

Теперь легко проверить, что функция

$$f(\xi)=\xi 2^{-\xi b}$$

при постоянном $b>0$ имеет максимум $1/e\,b\ln 2$. Следовательно, каждый множитель P_1 не больше чем $\dfrac{\ln\ln n}{e\alpha\ln^2 2}+1$. Отсюда для достаточно большого n получаем неравенство

$$P_1\leqslant(c_{16}\ln\ln n)^{c_7\frac{\ln^{1-\eta} n}{(1-\eta)\ln\ln n}}=2^{o\left(\ln^{1-\eta} n\right)}\qquad(n\to\infty)\qquad(5.9)$$

с константой c_{16}, зависящей от α. Для достаточно большого n из (5.8), (5.9) и неравенства $P_2\leqslant 1$ следует утверждение теоремы, если положить $\alpha=1+\varepsilon$.

Можно доказать [1]), что оценку (5.7) нельзя существенно улучшить, т. е. имеется бесконечно много n, для которых

$$d(n)>\exp\left\{(1-\varepsilon)\ln 2\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right\}. \qquad (5.10)$$

[1]) Виман [1], Рамануджан [1].

Но в среднем при $n \geqslant x$, где x — достаточно большое число, $d(n)$ гораздо меньше и имеет порядок $\ln x$. Более точно это замечание формулируется так:

Теорема 5.3[1]). *Имеет место равенство*

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \ln x + O(x) \qquad (x \geqslant 1). \tag{5.11}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{m \mid n} 1 = \sum_{m \leqslant x} \left[\frac{x}{m}\right] = \sum_{m \leqslant x} \left\{\frac{x}{m} + O(1)\right\},$$

так как $\left[\frac{x}{m}\right] = \sum\limits_{m \mid n,\, n \leqslant x} 1$. Отсюда, если воспользоваться тем, что

$$\sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m} = \ln x + O(1), \tag{5.12}$$

следует утверждение (5.11).

Можно легко показать, что

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)\, x + O(\sqrt{x}),$$

где γ — постоянная Эйлера (гл. I, задача 17). В уточнении остаточного члена этой формулы состоит проблема делителей Дирихле.

Формула (5.11) означает, что $\sum\limits_{n \leqslant x} d(n)$ ведет себя так, как $\ln x$, умноженный на число слагаемых в сумме. Если образовать сумму $\sum\limits_{n \leqslant x} d^2(n)$, то, применяя неравенство Шварца (П.12.3), получим

$$\left\{\sum_{n \leqslant x} 1 \cdot d(n)\right\}^2 \leqslant \sum_{n \leqslant x} 1^2 \sum_{n \leqslant x} d^2(n).$$

Из (5.11) следует, что

$$\sum_{n \leqslant x} d^2(n) \geqslant c_{17} x \ln^2 x \qquad (x \geqslant 2). \tag{5.13}$$

Относительно большую часть суммы (5.13) составляют большие значения $d(n)$, так как они там возводятся в квадрат. Можно доказать[2]), что

$$\sum_{n \leqslant x} d^2(n) \sim c_{18} x \ln^3 x, \tag{5.14}$$

$x \to \infty$, $c_{18} > 0$ (см. гл. III, задачу 7). Получим теперь оценку сверху для $\sum\limits_{n \leqslant x} d^2(n)$.

---

[1]) Дирихле [2].
[2]) Рамануджан [2], Вильсон [1].

Теорема 5.4. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{n\leqslant x} d^2(n) < c_{19}x\ln^3 x \qquad (x\geqslant 2). \tag{5.15}$$

Доказательство. При $x\geqslant 2$ имеем

$$\sum_{n\leqslant x} d^2(n) = \sum_{n\leqslant x} d(n)\sum_{m\mid n} 1 = \sum_{m\leqslant x}\ \sum_{n\leqslant x,\, m\mid n} d(n) =$$

$$= \sum_{m\leqslant x}\left\{d(m)+d(2m)+\ \dots\ +d\left(\left[\frac{x}{m}\right]m\right)\right\}. \tag{5.16}$$

Далее из формулы (5.6) следует общее для всех натуральных чисел a, b неравенство

$$d(a\cdot b)\leqslant d(a)\,d(b). \tag{5.17}$$

Следовательно,

$$d(m)+\ \dots\ +d\left(\left[\frac{x}{m}\right]m\right)\leqslant d(m)\sum_{k\leqslant x/m} d(k),$$

и по теореме 5.3 получаем

$$\sum_{k\leqslant x} d(k)\leqslant c_{20}x\ln 2x \qquad (x\geqslant 1). \tag{5.18}$$

Следовательно, при $x\geqslant 2$, $1\leqslant m\leqslant x$

$$\sum_{k\leqslant x/m} d(k)\leqslant c_{20}\frac{x}{m}\ln 2\frac{x}{m} < c_{21}\frac{x}{m}\ln x,$$

причем c_{21} не зависит от m. Согласно (5.16),

$$\sum_{n\leqslant x} d^2(n) < c_{21}x\ln x\sum_{m\leqslant x}\frac{d(m)}{m}. \tag{5.19}$$

Если мы покажем еще, что

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2}\ln^2 x + O(\ln x) \qquad (x\geqslant 2), \tag{5.20}$$

то неравенство (5.15) будет доказано. Для доказательства соотношения (5.20) положим в теореме П. 1.4 $a_n = d(n)$, $g(x)=1/x$, $\lambda_n = n$. Пользуясь (5.11), получим

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n} = \ln x + O(1) + \int\limits_1^x(\xi\ln\xi + O(\xi))\frac{d\xi}{\xi^2} =$$

$$= \int\limits_1^x \ln\xi\, d\ln\xi + O\left(\int\limits_1^x\frac{d\xi}{\xi}\right),$$

из чего уже следует (5.20).

Мы уже доказали в теореме 4.1, что

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = B \ln x + o(\ln x) \qquad (B > 0).$$

Отсюда можно судить о величине $\prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$. Докажем более общую теорему

Теорема 5.5. *Пусть s — произвольное целое число и M — произвольное конечное множество простых чисел, больших $|s|$. Тогда имеют место неравенства*

$$\prod_{p \in M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-s} < c_{22} \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{s}{p}\right)^{-1}, \tag{5.21}$$

$$\prod_{p \in M} \left(1 - \frac{s}{p}\right)^{-1} < c_{23} \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-s}, \tag{5.22}$$

$$\prod_{p \in M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-s} < c_{24} \prod_{p \in M} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{s}, \tag{5.23}$$

$$\prod_{p \in M} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{s} < c_{25} \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-s}, \tag{5.24}$$

причем константы c зависят только от s, но не от выбора множества M.

Доказательство. Неравенство (5.21) следует из неравенства Бернулли

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s} \geqslant 1 - \frac{s}{p}, \qquad p > |s|.$$

Чтобы доказать (5.22), заметим сначала, что, поскольку $\left|C^n_{|s|}\right| \leqslant |s|^n$, $p \geqslant |s| + 1$, по формуле бинома имеем

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s} = 1 - \frac{s}{p} + \frac{\delta(s, p)}{p^2},$$

где

$$|\delta(s, p)| = \left| C_s^2 - \frac{1}{p} C_s^3 + - \ldots \right| \leqslant$$
$$\leqslant |s|^2 \left(1 + \frac{|s|}{p} + \frac{|s|^2}{p^2} + \ldots\right) \leqslant |s|^2 (|s| + 1) = c(s).$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{p \in M} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{s} \left(1 - \frac{s}{p}\right)^{-1} \leqslant \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{s}{p} + \frac{c(s)}{p^2}\right) \left(1 - \frac{s}{p}\right)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{p \in M} \left\{ 1 + \frac{c(s)}{p^2} (|s| + 1) \right\},$$

так как $\left|1-\frac{s}{p}\right|^{-1} \leqslant |s|+1$ при $p \geqslant |s|+1$. Кроме того, имеет место неравенство

$$\prod_{p \in M}\left(1+\frac{c(s)(|s|+1)}{p^2}\right) < \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{c(s)(|s|+1)}{n^2}\right) < \infty, \tag{5.25}$$

и, таким образом, (5.22) доказано. Неравенства (5.23) и (5.24) легко следуют из следующих двух неравенств:

$$\prod_{p \in M}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \leqslant 1,$$

$$\prod_{p \in M}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) > \prod_{2 \leqslant p < \infty}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) > \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \\ = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\,\ldots = \frac{1}{2}. \tag{5.26}$$

С л е д с т в и я. Пусть $x \geqslant 2$. Имеем из (5.23)

$$\prod_{p \leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} < c\prod_{p \leqslant x}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

По теореме 4.1 из (5.21) при $s=-2$ получаем

$$\prod_{p \leqslant x}\left(1+\frac{2}{p}\right) < c\ln^2 x.$$

Кроме того, из теоремы 4.1 и (5.21) следует

$$\prod_{2 < p \leqslant x}\left(1-\frac{2}{p}\right) < \frac{c}{\ln^2 x},$$

и

$$\prod_{p \mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} < c\prod_{p \mid n}\left(1+\frac{1}{p}\right) \quad \text{для целого } n \geqslant 1.$$

Здесь $c > 0$ и не обязательно одно и то же во всех этих неравенствах.

Задачи к главе I

1. Из первого доказательства теоремы 1.2 вывести, что $p_{n+1} < 2^{2^n}$, и отсюда для больших x показать, что $\pi(x) > \alpha \ln\ln x$ при $\alpha < 1/\ln 2$.

2. Пусть $F_n = 2^{2^n}+1$, $n = 1, 2 \ldots$ Доказать, что $(F_n, F_m) = 1$ при $n \neq m$. Это дает третье доказательство теоремы 1.2[1].

---

[1]) Пойя, Сегё [1].

3. Пользуясь доказательством теоремы 1.4, показать, что для всякого как угодно большого x при подходящем $c > 0$ всегда имеется больше чем $c \ln x / \ln \ln x$ последовательных составных чисел, не превосходящих x.

4. При достаточно большом A и достаточно большом x между x и Ax лежит по крайней мере одно простое число. (Следует воспользоваться (3.18).)

5. Для любого малого $\varepsilon > 0$ имеется бесконечно много пар простых чисел p_n, p_{n+1}, таких, что $p_{n+1} < (1+\varepsilon) p_n$.

6. Пусть $d_1 = p_1$ и $d_n = p_n - p_{n-1}$ при $n > 1$.

Показать, что при подходящем c (для достаточно большого x)

$$cx < \sum_{p_n \leqslant x} d_n \leqslant x.$$

7. В задаче 3 можно заменить $\ln x / \ln \ln x$ на $\ln x$ (см. задачу 6).

8. При подходящем $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ неравенство $p_{n+1} - p_n < c_1 \ln p_n$ выполняется более чем для $c_2 x / \ln x$ простых чисел $p_n \leqslant x$. *Указание*: из задачи 6 следует, что

$$\sum_{p_n \leqslant x,\, d_n > c \ln x} 1 \leqslant \frac{x}{c \ln x}.$$

9. Пусть $V(x)$ — наименьшее общее кратное всех чисел $\leqslant x$. Показать, что

$$e^{c_1 x} < V(x) < e^{c_2 x}, \qquad 0 < c_1 < c_2.$$

10. Доказать, что

$$\sum_{p > x} \frac{1}{p^{1+\delta}} < \frac{c(\delta)}{x^{\delta} \ln x}$$

при постоянном $\delta > 0$.

11. Доказать, что ряд

$$\sum \frac{1}{p (\ln \ln p)^{\alpha}}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

12. Пусть $\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \sum \ln p$, где суммирование проводится по всем p и всем m, таким, что $p^m \leqslant x$. Тогда

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots,$$

причем ряд обрывается самое большее на $[\ln x / \ln 2]$ члене.

13. Если $\psi(x)$ определено как и в задаче 12, то справедливо следующее равенство:

$$\ln n! = \psi(n) + \psi\left(\frac{1}{2} n\right) + \psi\left(\frac{1}{3} n\right) + \ldots.$$

14. Докажите, что $\psi(n) < 2n$ (см. задачу 12) и что

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{1}{2}x\right) + \psi\left(\frac{1}{3}x\right) - \ldots = x\ln 2 + O(\ln x)$$

(следует воспользоваться тем, что левая часть равна $\ln[x]! - 2\ln\left[\frac{1}{2}x\right]!$, и формулой Стирлинга).

15. Доказать, что

$$\theta(x) - \theta\left(\frac{1}{2}x\right) + \theta\left(\frac{1}{3}x\right) - \ldots = x\ln 2 + O\left(\sqrt{x}\right).$$

16. Докажите, что для каждого простого числа p имеются числа m со следующим свойством: не существует ни для какого натурального числа n точной степени p^m, которая делила бы $n!$.

17. Доказать равенство

$$\sum_{m \leqslant x} \left[\frac{x}{m}\right] = 2 \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \left[\frac{x}{m}\right] - [\sqrt{x}]^2$$

и показать, что

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O\left(\sqrt{x}\right),$$

где γ — постоянная Эйлера $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$.

18. Пусть $v(n)$ — число различных простых делителей n. Докажите, что

$$\sum_{n \leqslant x} v(n) = x\ln\ln x + o(x\ln\ln x).$$

19. (Продолжение.) Докажите, что

$$\sum_{n \leqslant x} v^2(n) = x(\ln\ln x)^2 + O(x\ln\ln x).$$

20[1]). Из задач 18 и 19 вывести формулу

$$\sum_{n \leqslant x} \{v(n) - \ln\ln n\}^2 = O(x\ln\ln x)$$

и отсюда получить, что

$$\sum_{n \leqslant x}{}' 1 = O\left\{x(\ln\ln x)^{1-2b}\right\} = o(x),$$

где $\sum'$ означает, что суммирование проводится по тем n, для которых

$$|v(n) - \ln\ln n| > (\ln\ln n)^b, \quad \frac{1}{2} < b < 1.$$

---

[1]) Туран [1].

Глава II

МЕТОДЫ РЕШЕТА

§ 1. Обозначения

В этой главе будут употребляться следующие обозначения: x — достаточно большое положительное число, ε — сколь угодно малое положительное число; i, j, k, l, m, n, r, s — натуральные числа, p, q — простые числа. $N(z; B)$ — число тех чисел z, которые удовлетворяют условию B; $v(n) = N(p; p \mid n)$ — число различных простых делителей n. Положительные константы c_1, c_2 ... мы будем чаще всего перенумеровывать только внутри параграфа. Там, где значение констант не очень важно, мы будем употреблять буквы c, C, A, B. Таким образом, эти константы не всегда имеют одно и то же значение.

§ 2. μ-функция Мёбиуса

При доказательстве теоремы 1.2.3 применялся так называемый метод решета. Из чисел $n \leqslant x$ вычеркивают определенные числа и пытаются оценить сверху число остающихся чисел. Число остающихся чисел $1 + \pi(x) - \pi(\sqrt{x})$ задавалось выражением (1.2.9). Мы можем записать это выражение несколько проще с помощью μ-функции Мёбиуса. Функция Мёбиуса μ определяется следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ делится на } m^2 \text{ для какого-нибудь } m > 1, \\ (-1)^{v(n)}, \text{ если } n \text{ не делится на } m^2 \text{ при } m > 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

в частности, $\mu(1) = 1$. Тогда (1.2.9) можно записать так:

$$1 + \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) = \sum_{d \mid D} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right], \tag{2.2}$$

где

$$D = p_1 p_2 \ldots p_r = \prod_{p \leqslant \sqrt{x}} p.$$

Мы докажем теперь одну общую формулу, которую также можно получить с помощью метода решета.

Теорема 2.1 [1]). *Пусть даны натуральные числа $k_1, k_2, \ldots, k_N$, среди которых могут быть и равные, и любая действительная*

[1]) Мёбиус [1].

или комплексная функция $f(k)$, *которая определена при* $k=k_i$, $i=1, 2, \ldots, N$. *Обозначим для каждого числа* d[1])

$$S_d = \sum_{d \mid k_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N} f(k_i), \tag{2.3}$$

и

$$S = \sum_{k_i=1,\ 1 \leqslant i \leqslant N} f(k_i). \tag{2.4}$$

Тогда имеет место равенство

$$S = \sum_d \mu(d) S_d, \tag{2.5}$$

причем суммирование проводится по всем d, *которые делят какое-нибудь* k_i (*для остальных* d, *разумеется*, $S_d=0$).

Доказательство. Сначала докажем следующее главное свойство μ-функции:

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n>1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Первая часть (2.6) очевидна, так как $\mu(1)=1$. Пусть $n>1$. Рассмотрим разложение $n=p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$ числа n на простые множители. Обозначим $n'=p_1 \ldots p_r$. Тогда из определения $\mu(\ \ )$ имеем

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{d \mid n'} \mu(d) = \sum_{s=0}^{r} \sum_{d \mid n',\ v(d)=s} \mu(d) =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} C_r^s (-1)^s = (1-1)^r = 0. \tag{2.7}$$

Из (2.6) следует теперь, что

$$S = \sum_{k_i=1,\ 1 \leqslant i \leqslant N} f(k_i) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} f(k_i) \sum_{d \mid k_i} \mu(d) =$$

$$= \sum_d \mu(d) \sum_{d \mid k_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N} f(k_i) = \sum_d \mu(d) S_d, \tag{2.8}$$

что и требовалось доказать.

Формула (2.2) получается как частный случай (2.5), если в качестве k_i взять $[x]$ чисел (n, D), $n \leqslant x$, и если $f(k_i)$ положить равными 1 для всех k_i. В этом случае $S_d=[x/d]$.

Как частный случай той же формулы (2.5) получается известная формула обращения Мёбиуса (см. задачу 5), если в качестве k_i взять числа n/δ, причем n фиксировано, а δ — делитель n. В качестве $f(k_i)$ следует взять значения $f(\delta)$ какой-нибудь функции f.

[1]) При этом суммирование в (2.3) проводится по всем k_i, кратным d, а в (2.4) — по всем k_i, равным единице.

Заметим, что (2.5) можно получить без вычислений с помощью метода решета, сначала вычитая из $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant N} f(k_i)$ все суммы $S_p = \sum\limits_{p \mid k_i} f(k_i)$ затем прибавляя все $S_{p_1p_2} = \sum\limits_{p_1p_2 \mid k_i} f(k_i)$ и т. д. Дальнейшие применения теорема 2.1 находит в задачах в конце главы.

Будем считать, что в этой главе n всегда пробегает последовательность из N натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_N$, которые мы предполагаем заданными; кроме того, считаем, что $N > 1$.

Применим теорему 2.1 к одному важному частному случаю. Положим $n = m(m+2)$, $m = 1, 2, \ldots, N$, и в качестве k_i в теореме 2.1 возьмем числа (n, D), где $D = \prod\limits_{p\leqslant u} p$. Пусть $f(k_i) = 1$ для всех k_i. Тогда S — количество тех чисел $n = m(m+2)$, $1 \leqslant m \leqslant N$, которые не имеют простых делителей, меньших или равных u. Если положим $u = \sqrt{N+2}$, то для такого n получим, что m и $m+2$ — простые числа, большие $\sqrt{N+2}$. Наоборот, каждая пара простых p и $q = p+2$, $\sqrt{N+2} < p < q \leqslant N+2$ причисляется к S. Два простых числа вида p и $q = p+2$ называются *простыми близнецами*. Число таких близнецов при $p \leqslant N$, очевидно, равно

$$N(p \leqslant N;\ p+2 - \text{простое}) = S + O\left(\sqrt{N}\right). \tag{2.9}$$

Здесь применяется теорема 2.1 при $k_m = (m(m+2), D)$, $1 \leqslant m \leqslant N$, $f(k_m) = 1$. Далее

$$S_d = N(m \leqslant N;\ m(m+2) \equiv 0 \pmod d). \tag{2.10}$$

Рассмотрим сравнение

$$m(m+2) \equiv 0 \pmod d, \tag{2.11}$$

где $d \mid D$ и d свободно от квадратов. Обозначим $\omega(d)$ количество решений сравнения (2.11), т. е. количество различных вычетов по $\operatorname{mod} d$, которые ему удовлетворяют. Тогда

$$\begin{gathered} S_d = \omega(d)\frac{N}{d} + R_d, \\ |R_d| \leqslant \omega(d) \end{gathered} \tag{2.12}$$

и

$$\omega(p) = \begin{cases} 1 & \text{для } p = 2, \\ 2 & \text{для } p > 2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.5) следует, что

$$S = \sum_{d \mid D} \mu(d) S_d = N \sum_{d \mid D} \mu(d)\frac{\omega(d)}{d} + \sum_{d \mid D} \mu(d) R_d. \tag{2.14}$$

Если $d = p_1 p_2 \ldots p_r$ — свободное от квадратов число, то по известным теоремам о сравнениях имеем

$$\omega(d) = \omega(p_1)\,\omega(p_2)\ldots\omega(p_r). \tag{2.15}$$

Отсюда и из (2.13) получаем

$$\sum_{d\mid D}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d} = \prod_{p\mid D}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) = \frac{1}{2}\prod_{2<p\leqslant\sqrt{N+2}}\left(1-\frac{2}{p}\right), \tag{2.16}$$

а из (2.14), (2.16) и (2.12) следует, что

$$S = \frac{1}{2}N\prod_{2<p\leqslant\sqrt{N+2}}\left(1-\frac{2}{p}\right) + O\left(\sum_{d\mid D}\omega(d)\right). \tag{2.17}$$

Из (2.9) и следствия из теоремы 1.5.5 получим

$$N(p\leqslant N;\ p+2 - \text{простое}) < c\frac{N}{\ln^2 N} + O\left(\sum_{d\mid D}\omega(d)\right) + O\left(\sqrt{N}\right). \tag{2.18}$$

Так как $\omega(d)\geqslant 1$ и, согласно (1.3.18), число простых делителей D равно $\pi\left(\sqrt{N+2}\right) > c\sqrt{N}/\ln N$ $(N>1)$, то имеем

$$\sum_{d\mid D}\omega(d) \geqslant \sum_{d\mid D} 1 = 2^{\pi(\sqrt{N+2})} > 2^{c\sqrt{N}/\ln N}, \quad N>1. \tag{2.19}$$

Отсюда видно, что формула (2.18) не пригодна для оценки сверху числа простых близнецов, не превосходящих N, также как формула (1.2.11) не пригодна для оценки сверху $\pi(x)$. Действительно, остаточный O-член становится больше, чем главный член $cN/\ln^2 N$. Положение не улучшится, если заменить в определении D число $\sqrt{N+2}$ на меньшее число, как было сделано при доказательстве формулы (1.2.15). Тогда бы мы получили, как легко проверить, самое большее, что[1])

$$N(p\leqslant N;\ p+2 - \text{простое}) < c\frac{N}{\ln_2 N} \quad (N>1), \tag{2.20}$$

но это тривиально следует из неравенства

$$N(p\leqslant N;\ p+2 - \text{простое}) \leqslant \pi(N) < c\frac{N}{\ln N}.$$

Долгое время думали, что вообще нельзя получить нужную оценку методом решета. Но В. Бруну [1] удалось показать с помощью нового способа оценки ошибки, что

$$N(p\leqslant N;\ p+2 - \text{простое}) < c\frac{N}{\ln^2 N} \quad (N>1). \tag{2.21}$$

---

[1]) Напомним, что $\ln_2 N$ — сокращенное обозначение $\ln\ln N$.

В. Брун решил еще несколько аналогичных проблем. В последнее время А. Сельберг [2] с помощью обобщения метода решета сумел новым, более простым способом доказать и несколько улучшить результаты Бруна. Метод Сельберга будет изложен ниже. При этом речь идет всегда об оценках сверху.

Для оценок снизу получены пока гораздо худшие результаты, которые чаще всего требуют очень больших вычислений. Реньи [1], например, доказал, что имеется бесконечно много p, для которых число простых делителей $p+2$ меньше постоянного числа. А. И. Виноградов недавно доказал с помощью метода решета Сельберга, что имеется бесконечно много пар $(m, m+2)$, таких, что каждое из обеих чисел имеет не более трех простых множителей. Однако пока неизвестно, существует ли бесконечно много простых близнецов. На оценках снизу мы здесь останавливаться не будем.

§ 3. Метод решета А. Сельберга

Пусть n пробегает $N>1$ натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_N$, среди которых могут быть и равные. Положим

$$S=N(n;\ p\nmid n \text{ для } p\leqslant z);\quad D=\prod_{p\leqslant z} p,\quad z\geqslant 2. \tag{3.1}$$

По формуле (2.6)[1]) имеем

$$S=\sum_{n,\,(n,\,D)=1} 1=\sum_{n}\sum_{d\,|(D,\,n)} \mu(d)=\sum_{d\,|\,D} \mu(d)\, S_d, \tag{3.2}$$

причем

$$S_d=\sum_{n,\,d\,|\,n} 1. \tag{3.3}$$

Предположим, что для S_d имеется „приближенная формула“

$$S_d=\frac{\omega(d)}{d}N+R_d,\quad |R_d|\leqslant\omega(d), \tag{3.4}$$

$\omega(1)=1$. При этом $\omega(m)$ должна быть мультипликативной функцией. Мы называем функцию целочисленного аргумента $f(m)\not\equiv 0$ мультипликативной, если для всех m_1, m_2, $(m_1, m_2)=1$, выполняется равенство

$$f(m_1)f(m_2)=f(m_1 m_2).$$

Если это свойство выполняется для всех m_1, m_2 без ограничения, то $f(m)$ называется вполне мультипликативной функцией. В частности, $f(1)=1$, так как $f(m\cdot 1)=f(m)f(1)$ и при $f(m)\neq 0$, $f(1)=1$. Сумма S_d формулы (2.12) удовлетворяет этому требованию.

---

[1]) Здесь $\sum\limits_{n}$ обозначает не $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$, а $\sum\limits_{n_i,\ 1\leqslant i\leqslant N}$, так как в этой главе мы ограничиваемся числами n_i.

Из (3.2) и (3.4) и мультипликативности $\omega(n)$ следует

$$S = N\sum_{d\mid D}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d} + O\left(\sum_{d\mid D}|R_d|\right) = \\ = N\prod_{p\leqslant z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) + O\left(\sum_{d\mid D}|R_d|\right). \qquad (3.5)$$

Также как в примере § 2, здесь при достаточно большом z число делителей D будет очень велико. Тогда остаточный член в (3.5) может стать не меньше главного члена, и формула станет бессодержательной.

Следуя идее Сельберга, мы сначала заменим в (3.2) множители $\mu(d)$ на любые числа ρ_d, для которых

$$\sum_{d\mid m}\rho_d \geqslant \sum_{d\mid m}\mu(d) \qquad (3.6)$$

при всех натуральных m. Тогда

$$S \leqslant \sum_n \sum_{d\mid(n,\,D)}\rho_d = \sum_{d\mid D}\rho_d S_d \qquad (3.7)$$

и так же, как формула (3.5) выводится из формулы (3.4), получаем

$$S \leqslant N\sum_{d\mid D}\rho_d\frac{\omega(d)}{d} + O\left(\sum_{d\mid D}|\rho_d R_d|\right). \qquad (3.8)$$

Хотя суммы в остаточных членах (3.5) и (3.8) имеют много слагаемых, полагая достаточно многие из ρ_d равными нулю, мы можем существенно понизить величину остатка в (3.8). При $m=1$ формула (3.6) дает $\rho_1 \geqslant \mu(1) = 1$. Положим $\rho_1 = 1$. Если имеется две системы ρ'_d, ρ''_d, для которых выполняется (3.6) и $\rho'_1 = \rho''_1 = 1$, то можно составить третью такую же систему чисел ρ_d по формуле

$$\left(\sum_{d\mid m}\rho'_d\right)\left(\sum_{d\mid m}\rho''_d\right) = \sum_{d\mid m}\rho_d, \qquad \rho_d = \sum_{[d_1,\,d_2]=d}\rho'_{d_1}\rho''_{d_2}. \qquad (3.9)$$

Здесь $[d_1, d_2]$ — наименьшее общее кратное чисел d_1 и d_2. Выберем, в частности, $\rho'_d = \rho''_d = \lambda_d$. Тогда числа ρ_d, определенные формулой

$$\left(\sum_{d\mid m}\lambda_d\right)^2 = \sum_{d\mid m}\rho_d, \qquad \rho_d = \sum_{[d_1,\,d_2]=d}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}, \qquad (3.10)$$

будут удовлетворять условию (3.6), если λ_d удовлетворяют этому условию. Однако ρ_d из формулы (3.10) удовлетворяют условию (3.6), если положить $\lambda_1 = 1$ даже тогда, когда λ_d не удовлетворяют этому условию. Это следует из равенства (2.6) и того, что $\lambda_1 = 1$,

$\left(\sum_{d\mid m}\lambda_d\right)^2 \geqslant 0$ при $m > 1$. Если подставим значение ρ_d из (3.10) в (3.7), то получим

$$S \leqslant \sum_n \left(\sum_{d\mid(n,D)} \lambda_d\right)^2 = \sum_{d\mid D}\left(\sum_{[d_1,d_2]=d} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\right) S_d. \tag{3.11}$$

Полагаем теперь $\lambda_d = 0$ при $d > z$. Так как $D = \prod_{p\leqslant z} p$, то достаточно распространить суммирование во внутренней сумме в (3.11) на те d, для которых

$$d\mid n, \quad d \leqslant z, \quad d \text{ свободно от квадратов.} \tag{3.12}$$

Очевидно, что $d\mid(n, D)$.

Ниже мы будем считать, что n пробегает $N > 1$ значений $n_1, \ldots$ $\ldots, n_N$, которые не предполагаются различными. Рассмотрим для $z \geqslant 2$ число $D = \prod_{p\leqslant z} p$. Это число свободно от квадратов, т. е. не делится на m^2, каково бы ни было число $m > 1$. Пусть S — число тех i, для которых $(n_i, D) = 1$. Пусть также для натурального $d\mid D$ через S_d обозначено число тех i, для которых $d\mid n_i$. Таким образом,

$$S = \sum_{i,\,(n,\,D)=1} 1 = \sum_n \sum_{d\mid(n,D)} \mu(d) = \sum_{d\mid D} \mu(d) S_d. \tag{3.13}$$

Собственно говоря, например, первую из сумм следовало бы записать $\sum_{i,\,(n_i,\,D)=1} 1$. То же относится и к остальным суммам.

Пусть для всех $d\mid D$ определена функция $\omega(d)$; $\omega(d)$ — мультипликативная функция в следующем смысле: для $d = p_1p_2\ldots p_r$, $d\mid D$ должно быть $\omega(d) = \omega(p_1)\ldots\omega(p_r)$, $\omega(1) = 1$. Далее $0 \leqslant \omega(d) < d$ для всех $d > 1$, $d\mid D$. Определим для $d\mid D$ число R_d формулой

$$S_d = \frac{\omega(d)}{d} N + R_d. \tag{3.14}$$

Обозначим $f(d) = \frac{d}{\omega(d)}$, причем условимся, что $f(d) = +\infty$ для $\omega(d) = 0$, $\frac{b}{+\infty} = 0$, $b\cdot(+\infty) = \pm\infty$ при конечном $b \gtrless 0$. Таким образом, $f(1) = 1$, $1 < f(d) \leqslant +\infty$, если $d > 1$. Ниже для обозначения бесквадратных чисел будем применять буквы d, d_1, d_2, δ, u, u_1 и r. Для $r \leqslant z$, $r\mid D$ положим

$$f_1(r) = f(r)\prod_{p\mid r}\left(1 - \frac{1}{f(p)}\right) > 0. \tag{3.15}$$

Если $f(r)=+\infty$, то и $f_1(r)=+\infty$. Для конечных $f(r)$

$$f_1(r)=f(r)\sum_{d\mid r}\frac{\mu(d)}{f(d)}=\sum_{d\mid r}\mu(d)f\left(\frac{r}{d}\right). \tag{3.16}$$

Очевидно, что $f_1(1)=1$. Положим далее

$$Z=\sum_{r\leqslant z}\frac{1}{f_1(r)}, \tag{3.17}$$

так что $1\leqslant Z<+\infty$, и для $d\leqslant z$ введем величины

$$\lambda_d=\frac{\mu(d)}{Z}\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right)^{-1}\sum_{\substack{r\leqslant\frac{z}{d}\\ (r,d)=1}}\frac{1}{f_1(z)}. \tag{3.18}$$

Отсюда видно, что $\lambda_1=1$.

Теорема 3.1 *Имеет место оценка*

$$S\leqslant\frac{N}{Z}+R,\quad R=\sum_{d_1,d_2\leqslant z}|\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}R_{[d_1,d_2]}|. \tag{3.19}$$

Доказательство. Заметим сначала, что достаточно определить $\omega(p)$ для простых делителей числа D, так, чтобы $0\leqslant\omega(p)<p$. После этого можно однозначно продолжить $\omega(d)$ на все делители d числа D.

1. Пусть сначала $\omega(p)>0$ для всех $p\mid D$, и, таким образом, $f(d)$ конечно и имеет место (3.16).

Для натурального n величины λ_d, введенные в (3.18), удовлетворяют неравенству

$$\sum_{\substack{d_1\mid n,\ d_2\mid n\\ d_1,d_2\leqslant z}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}=\Bigg(\sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant z}}\lambda_d\Bigg)^2\geqslant\sum_{d\mid n}\mu(d),$$

так как левая часть равна единице для $n=1$ и, кроме того, всегда неотрицательна.

$$S=\sum_n\sum_{d\mid(n,D)}\mu(d)\leqslant\sum_n\sum_{\substack{d_1\mid n,\ d_2\mid n\\ d_1,d_2\leqslant z}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2},$$

причем само собой разумеется, что d_1 и d_2 — делители числа D. Если обозначить

$$\rho_d=\sum_{\substack{[d_1,d_2]=d\\ d_1,d_2\leqslant z}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2},$$

то

$$S\leqslant\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d\mid D}}\rho_d S_d\leqslant\sum_{\substack{d\leqslant z^2\\ d\mid D}}\frac{N}{f(d)}\sum_{\substack{d_1,\,d_2\leqslant z\\ [d_1,\,d_2]=d}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}+$$

$$+\sum_{d_1,\,d_2\leqslant z}|\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}R_{[d_1,\,d_2]}|=NP+R,$$

где

$$P=\sum_{d_1,\,d_2\leqslant z}\frac{\lambda_{d_1}}{f(d_1)}\,\frac{\lambda_{d_2}}{f(d_2)}\,f((d_1,\,d_2)).$$

Действительно, $f([d_1,\,d_2])\;\;f((d_1,\,d_2))=f(d_1)\cdot f(d_2)$, если $d_1,\,d_2\mid D$. Теперь для $r\mid D$, $r\leqslant z$, согласно (3.16),

$$f(r)=\sum_{s\mid r}f(s)\sum_{d\mid\frac{r}{s}}\mu(d)=\sum_{\delta\mid r}\sum_{d\mid\delta}\mu(d)\,f\left(\frac{\delta}{d}\right)=\sum_{\delta\mid r}f_1(\delta).$$

Итак

$$P=\sum_{d_1,\,d_2\leqslant z}\frac{d_1}{f(d_1)}\,\frac{d_2}{f(d_2)}\sum_{\delta\mid d_1,\,\delta\mid d_2}f_1(\delta)=$$

$$=\sum_{\delta\leqslant z}f_1(\delta)\left(\sum_{\delta\mid d}\frac{\lambda_d}{f(d)}\right)^2=\sum_{\delta\leqslant z}f_1(\delta)\,y_\delta^2,\tag{3.20}$$

где

$$y_\delta=\sum_{\delta\mid d,\;d\leqslant z}\frac{\lambda_d}{f(d)}.\tag{3.21}$$

Если $u=dr$, то по формулам (3.15) и (3.18) мы получаем для $d\mid D$

$$\frac{Z\lambda_d}{f(d)}=\frac{\mu(d)\prod\limits_{p\mid d}\left(1-\dfrac{1}{f(p)}\right)^{-1}}{f(d)}\sum_{\substack{r\leqslant\frac{z}{d}\\ (r,\,d)=1}}\frac{1}{f_1(r)}=\mu(d)\sum_{\substack{u\leqslant z\\ d\mid u}}\frac{1}{f_1(u)}.\tag{3.22}$$

Для $\delta\leqslant z$ из (3.21) и (3.22) следует

$$Zy_\delta=\sum_{\substack{d,\,u\\ \delta\mid d,\;d\mid u\\ u\leqslant z}}\frac{\mu(d)}{f_1(u)}.$$

Положим $d=\delta d_1$, $u=\delta u_1$. Тогда

$$Zy_\delta=\sum_{\substack{u_1,\,(u_1,\,\delta)=1\\ u_1\leqslant\frac{z}{\delta}}}\frac{\mu(\delta)}{f_1(\delta u_1)}\sum_{d_1\mid u_1}\mu(d_1)=\frac{\mu(\delta)}{f_1(\delta)}.$$

По формулам (3.20) и (3.22) получаем

$$P=\sum_{\delta\leqslant z} f_1(\delta)\, y_\delta^2=\frac{1}{Z^2}\sum_{\delta\leqslant z}\frac{1}{f_1(\delta)}=\frac{1}{Z}.$$

2. Пусть теперь $\omega(p')=0$ для некоторых простых делителей p' числа D, а $\omega(p'')>0$ для остальных $p''\mid D$. Числа S и S_d определяются через $n_1, \ldots, n_N$, z независимо от выбора функции ω. Выберем $\varepsilon>0$ и заменим ω функцией $\omega^{(\varepsilon)}$ так, чтобы $\omega^{(\varepsilon)}(p')=\varepsilon$, $\omega^{(\varepsilon)}(p'')=\omega(p'')$. Тогда в соответствии с формулами (3.15) — (3.19) определятся числа $R_d^{(\varepsilon)}$, $f^{(\varepsilon)}(r)$, $f_1^{(\varepsilon)}(r)$, $Z^{(\varepsilon)}$, $\lambda_d^{(\varepsilon)}$ и $R^{(\varepsilon)}$. В силу (3.19) и первой части доказательства имеет место неравенство

$$S\leqslant\frac{N}{Z^{(\varepsilon)}}+R^{(\varepsilon)}. \tag{3.23}$$

Действительно, очевидно, что при $\varepsilon\to 0$ имеем $\omega^{(\varepsilon)}(d)\to\omega(d)$,

$$R_d^{(\varepsilon)}\to R_d,\quad \frac{1}{f^{(\varepsilon)}(r)}\to\frac{1}{f(r)},\quad \frac{1}{f_1^{(\varepsilon)}(r)}\to\frac{1}{f_1(r)},\quad Z^{(\varepsilon)}\to Z\,(1\leqslant Z<\infty),$$

$\lambda_d^{(\varepsilon)}\to\lambda_d$, $R^{(\varepsilon)}\to R$ и (3.23) следует из (3.19).

Выведем теперь общую оценку величин Z и R, которая полезна для многочисленных применений.

Теорема 3.2[1]). *Обозначим через (z) множество тех натуральных чисел m, для которых $\prod\limits_{p\mid m} p\leqslant z$, и пусть $m=\prod\limits_{p\mid m} p^{m_p}$ ($\kappa(z)$ принадлежат, в частности, все числа $\leqslant z$). Тогда в обозначениях теоремы* 3.1 *имеем*

$$Z=\sum_{m\in(z)}\frac{1}{m}\prod_{p\mid m}\omega^{m_p}(p). \tag{3.24}$$

Пусть далее для всех d, d_1, d_2 (в обозначениях теоремы 3.1)

$$|R_d|\leqslant\omega(d),\quad \omega([d_1, d_2])\leqslant\omega(d_1)\,\omega(d_2)\ ^{2)}. \tag{3.25}$$

Тогда справедливо неравенство

$$R=\sum_{d_1,\, d_2\leqslant z}|\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}R_{[d_1,\, d_2]}|\leqslant z^2\prod_{p\leqslant z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-2}. \tag{3.26}$$

Доказательство. Из (3.16), (3.15) и того, что

$$f(d)=d/\omega(d)=\prod_{p\mid d} p/\omega(p),$$

---

[1]) Чулановский [I].

[2]) Последнее условие обязательно выполняется, если $\omega((d_1, d_2))\geqslant 1$.

следует, что

$$Z=\sum_{r\leqslant z}\mu^2(r)\frac{\omega(r)}{r}\prod_{p\mid r}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}=$$
$$=\sum_{r\leqslant z}\mu^2(r)\prod_{p\mid r}\left(\frac{\omega(p)}{p}+\frac{\omega^2(p)}{p^2}+\ldots\right). \tag{3.27}$$

После перемножения отсюда получим (3.24). Далее, согласно (3.25), имеем $|R_{[d_1,\,d_2]}|\leqslant\omega(d_1)\,\omega(d_2)$, следовательно, используя (3.19), приходим к неравенству

$$R\leqslant\sum_{d_1,\,d_2\leqslant z}|\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\omega(d_1)\,\omega(d_2)|=$$
$$=\left\{\sum_{d\leqslant z}|\lambda_d|\,\omega(d)\right\}^2\leqslant\left\{\sum_{d\leqslant z}\mu^2(d)\,\omega(d)\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}\right\}^2, \tag{3.28}$$

так как $f_1(r)>0$ для бесквадратного числа r, и, следовательно, имеет место оценка

$$\sum_{r\leqslant z/d,\ (r,\,d)=1}\frac{\mu^2(r)}{f_1(r)}\leqslant\sum_{r\leqslant z}\frac{\mu^2(r)}{f_1(r)}=Z. \tag{3.29}$$

Из того, что $m=\prod_{p\mid m}p^{m_p}$, функция $\omega(m)$ мультипликативна, $\omega(p)/p<1$ и (z) — подмножество множества чисел, все простые сомножители которых не превосходят z, мы можем заключить, что

$$\sum_{d\leqslant z}\mu^2(d)\,\omega(d)\prod_{p\mid d}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}=\sum_{d\leqslant z}d\mu^2(d)\prod_{p\mid d}\frac{\omega(p)}{p}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant z\sum_{d\leqslant z}\mu^2(d)\prod_{p\mid d}\left(\frac{\omega(p)}{p}+\frac{\omega^2(p)}{p^2}+\ldots\right)=$$
$$=z\sum_{m\in(z)}\frac{1}{m}\prod_{p\mid m}\omega^{m_p}(p)\leqslant z\prod_{p\leqslant z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1}. \tag{3.30}$$

Таким образом, неравенство (3.26) доказано.

§ 4. Примеры на метод решета

Сохраним обозначения предыдущего параграфа и рассмотрим вопрос о том, какова верхняя граница числа простых чисел, которые встречаются в арифметической прогрессии

$$l+k,\quad l+2k,\ \ldots,\ l+Nk, \tag{4.1}$$

если $k\geqslant 1$, $0\leqslant l<k$, $(k,l)=1$. При $k=2$ в последовательность (4.1) при растущем N войдут все простые числа большие двух. Если усло-

вие $(k, l)=1$ не выполнено, то среди чисел (4.1) нет ни одного простого числа. В § 3 мы положим

$$n=l+km, \quad m=1, 2, \ldots, N, \quad N>1 \tag{4.2}$$

и тогда в обозначениях § 3

$$S=N(m \leqslant N;\ p \nmid km+l \text{ для } p \leqslant z), \quad z \geqslant 2, \tag{4.3}$$

$$S_d=N(m \leqslant N;\ km+l \equiv 0 \pmod d). \tag{4.4}$$

Пусть $\omega(d)$ — число тех r, $0 \leqslant r < d$, для которых выполняется сравнение

$$kr+l \equiv 0 \pmod d. \tag{4.5}$$

Тогда, очевидно,

$$S_d=\omega(d)\frac{N}{d}+R_d, \quad |R_d| \leqslant \omega(d). \tag{4.6}$$

Согласно известной теореме о сравнениях по составному модулю, $\omega(d)$ — мультипликативная функция. Далее, так как $(k, l)=1$,

$$\omega(p)=\begin{cases} 1, & p \nmid k, \\ 0, & p \mid k. \end{cases} \tag{4.7}$$

Легко видеть, что $\omega([d_1, d_2]) \leqslant \omega(d_1)\omega(d_2)$. Впрочем, это неравенство имеет место всегда, если $\omega(m)$ — неотрицательное целое число и $\omega(p^s)=\omega(p)$ для любой степени простого числа. Тем самым условия для применения теорем 3.1 и 3.2 выполнены. Согласно (3.24) и (3.26), соответственно получаем

$$Z=\sum_{m \in (z),\ (m, k)=1}\frac{1}{m} \geqslant \sum_{m \leqslant z,\ (m, k)=1}\frac{1}{m}, \tag{4.8}$$

$$R \leqslant z^2 \prod_{p \leqslant z,\ p \nmid k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}. \tag{4.9}$$

Чтобы получить для S оценку сверху (3.19), мы должны оценить Z снизу, а R сверху. Для этого нам нужна

Лемма 4.1. *Пусть $N \geqslant 2$, P — какое-нибудь множество простых чисел, не бо́льших N, и пусть N_P — множество, состоящее из P и всех чисел, не бо́льших N, которые содержат только простые сомножители из P. Тогда имеет место неравенство*

$$\prod_{p \in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \leqslant B \sum_{m \in N_P}\frac{1}{m}, \tag{4.10}$$

причем B — положительная константа, не зависящая от P и N.

Доказательство. Если P — множество всех простых чисел $\leqslant N$, то (4.10) следует из (1.4.1) и из равенства

$$\sum_{m\leqslant N}\frac{1}{m}=\ln N+O(1)\quad (N\geqslant 1) \tag{4.11}$$

[см. (1.5.12)]. Предположим, что (4.10) уже доказано для непустого множества P и соответствующих чисел $m\in N_P$. Пусть q — простое число из P, а P' — множество простых чисел из P, за исключением q, $N_{P'}$ — аналогичное множество для N_P[1]). Тогда достаточно доказать, что из справедливости (4.10) для P и N_P следует справедливость этого же самого неравенства для P' и $N_{P'}$ с той же константой B. Имеем

$$\prod_{p\in P'}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\left(1-\frac{1}{q}\right)\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}, \tag{4.12}$$

$$\sum_{m\in N_{P'}}\frac{1}{m}=\sum_{m\in N_P}\frac{1}{m}-\sum_{m\in N_P,\ q\mid m}\frac{1}{m}, \tag{4.13}$$

$$\sum_{m\in N_P,\ q\mid m}\frac{1}{m}\leqslant\sum_{m'\in N_P}\frac{1}{qm'}=\frac{1}{q}\sum_{m\in N_P}\frac{1}{m}. \tag{4.14}$$

Из двух последних формул следует, что

$$\sum_{m\in N_{P'}}\frac{1}{m}\geqslant\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{m\in N_P}\frac{1}{m}. \tag{4.15}$$

Формулы (4.12), (4.15) и предположение, что справедливо неравенство

$$\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\leqslant B\sum_{m\in N_P}\frac{1}{m},$$

влекут за собой неравенство

$$\prod_{p\in P'}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\leqslant B\sum_{m\in N_{P'}}\frac{1}{m},$$

и тем самым все доказано.

Возьмем в лемме 4.1 в качестве множества P простые числа $\leqslant N$, не делящие k. Тогда, согласно (1.4.1), из (4.8) после замены N на $[z]$ следует неравенство

$$Z\geqslant\sum_{m\leqslant z,\ (m,\ k)=1}\frac{1}{m}\geqslant\frac{1}{B}\prod_{p\leqslant z,\ p\nmid k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\varphi(k)}{Bk}\prod_{p\leqslant z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}>c\,\frac{\varphi(k)}{k}\ln z\quad (z\geqslant 2). \tag{4.16}$$

[1]) Если P' пусто, то $N_{P'}$ содержит только единицу.

Теорема 4.1[1]). *Пусть* $1 \leqslant k < x$, $0 \leqslant l < k$, $(k, l) = 1$ *и*

$$\pi(x, k, l) = N(p \leqslant x, \ p \equiv l \pmod k). \tag{4.17}$$

Тогда

$$\pi(x, k, l) < c \frac{x}{\varphi(k) \ln(x/k)}, \tag{4.18}$$

причем константа c *не зависит от* x *и* k.

Доказательство. Из (1.4.1) и (4.9) в прежних обозначениях получаем

$$R = O(z^2 \ln^2 z) \quad (z \geqslant 2). \tag{4.19}$$

По теоремам 3.1, 3.2 и формуле (4.16) имеем

$$S = N(m \leqslant N; \ p \nmid mk + l \ \text{для} \ p \leqslant z) <$$
$$< N \left\{ c \frac{\varphi(k)}{k} \ln z \right\}^{-1} + O(z^2 \ln^2 z). \tag{4.20}$$

Выберем $z = N^{1/2}/\ln^2 N$ и будем предполагать, что $N > N_0 = e^{16}$. Тогда, очевидно, $z \geqslant 2$, $\ln z > c \ln N$. Поскольку $z^2 \ln^2 z = O(N/\ln^2 N)$, из (4.20) и неравенства $k/\varphi(k) \geqslant 1$ следует, что

$$S < c \frac{k}{\varphi(k)} \frac{N}{\ln N} + O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right) < c_1 \frac{kN}{\varphi(k) \ln N}, \tag{4.21}$$

где константа c не зависит от N и k. Теперь положим

$$N = N(m; \ km + l \leqslant x) = [(x - l)/k] \leqslant \frac{x}{k}.$$

Пусть $x/k > c_2 = e^{16} + 2$, тогда $N > e^{16}$ и, так как $N/\ln N$ монотонно возрастает, из (4.21) следует, что

$$S < c \frac{x}{\varphi(k) \ln(x/k)}. \tag{4.22}$$

Неравенство

$$\pi(x, k, l) \leqslant S + \frac{z}{k} + 1 \tag{4.23}$$

имеет место потому, что в числе S считаются простые числа $p = mk + l$ $(1 \leqslant m \leqslant N)$ с условием $z < p \leqslant x$ и число простых чисел $p \equiv l \pmod k$, $p \leqslant z$, во всяком случае не превосходит $z/k + 1$. Так как при $x/k > c_2$ $z/k = N^{1/2}/k \ln^2 N = O(\sqrt{x/k})$, то в этом случае (4.18) следует из (4.23). Для $x/k \leqslant c_2$ теорема 4.1 тривиальна, так как очевидно, что $\pi(x, k, l) \leqslant \frac{x}{k} + 1$.

Позже мы укажем теоретико-числовые применения теоремы 4.1.

---

[1]) При $k \leqslant x^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, см. Титчмарш [2] (теорема Бруна — Титчмарша).

Докажем теперь одну теорему, обобщающую теорему 4.1 и дающую, в частности, оценку числа простых близнецов, не превосходящих некоторого числа.

Теорема 4.2. *Пусть* $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s$ — *целые числа, причем для* $i = 1, 2, \ldots, s$

$$a_i \neq 0, \qquad (a_i, b_i) = 1. \tag{4.24}$$

Предположим, что равенства $a_i = \pm a_k$, $b_i = \pm b_k$ *при* $i \neq k$ *не могут выполняться одновременно. Обозначим* $\omega(p)$ *число различных по* $\operatorname{mod} p$ *решений сравнения*

$$(a_1 m + b_1)(a_2 m + b_2) \ldots (a_s m + b_s) \equiv 0 \pmod p \tag{4.25}$$

и пусть $\omega(p) < p$ *для всех* p[1]. *Пусть, наконец,*

$$E = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} a_i \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant s} (a_i b_k - a_k b_i).$$

Тогда при $N \geqslant 2$ *имеет место оценка*

$$N(m \leqslant N;\ |a_i m + b_i| \text{ — простое при } i = 1, 2, \ldots, s) <$$

$$< c(s) \frac{N}{\ln^s N} \prod_{p \mid E} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(s - \omega(p))}, \tag{4.26}$$

в которой $c(s)$ *зависит только от* s, *но не зависит от* N, a_i, b_i.

Прежде чем доказать неравенство (4.26), заметим, что оно остается верным, если $\omega(p) = p$ для какого-нибудь p. Действительно, в этом случае для каждого достаточно большого m по крайней мере одно из чисел $a_i m + b_i$ содержит собственный делитель p и, следовательно, не простое. Поэтому левая часть (4.26) остается меньше константы.

Доказательство теоремы 4.2. Положим в теоремах 3.1 и 3.2

$$n = \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} |a_i m + b_i|, \qquad 1 \leqslant m \leqslant N. \tag{4.27}$$

Заметим, что в этих теоремах числа n не обязательно должны быть различными. Мы будем сначала предполагать, что $\prod (a_i m + b_i) \neq 0$ при $1 \leqslant m \leqslant N$, следовательно, n — натуральное число (что предполагалось и в предыдущей теореме). Тогда $\omega(d)$ — число решений сравнения

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant s} (a_i m + b_i) \equiv 0 \pmod d, \tag{4.28}$$

[1] Так как известно, что сравнение (4.25) имеет не более чем s различных решений, то достаточно предположить, что это неравенство выполняется при $p \leqslant s$.

и легко проверить, что условия теорем 3.1 и 3.2 выполнены. Таким образом,

$$S = N\Big(m \leqslant N;\quad p \nmid \prod_{i \leqslant s} |a_i m + b_i| \quad \text{для} \quad p \leqslant z\Big) < NZ^{-1} + O(R), \tag{4.29}$$

где

$$Z \geqslant \sum_{m \leqslant z} \frac{1}{m} \prod_{p \mid m} \omega^{m_p}(p), \tag{4.30}$$

$$R \leqslant z^2 \prod_{p \leqslant z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-2} \qquad (z \geqslant 2). \tag{4.31}$$

Теперь для оценки Z необходимы некоторые вспомогательные соображения.

Обозначим для натурального s через $d_s(m)$ число различных разложений m вида

$$m = k_1 k_2 \ldots k_s, \qquad 1 \leqslant k_i \leqslant m, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{4.32}$$

при этом два разложения считаются равными только тогда, когда $k_1' = k_1'', \ldots, k_s' = k_s''$ [1]). В частности, $d_1(m) = 1$ при всех $m \geqslant 1$, $d_2(m) = d(m)$. Будем еще предполагать, что $d_0(m) = 0$ при $m > 1$ и $d_s(1) = 1$ при всех $s \geqslant 0$.

Покажем теперь, что $d_s(m)$ — мультипликативная функция от m, и что при $s \geqslant 0$ и целом неотрицательном α имеет место неравенство [2])

$$s^\alpha \geqslant d_s(p^\alpha). \tag{4.33}$$

При $s \leqslant 1$ это тривиально. Далее при $\alpha \geqslant 0$ имеем

$$d_2(p^\alpha) = d(p^\alpha) = \alpha + 1 \leqslant 2^\alpha.$$

Пусть неравенство (4.33) уже доказано для всех s, $2 \leqslant s \leqslant r$. Тогда

$$d_{r+1}(p^\alpha) = \sum_{0 \leqslant a \leqslant \alpha} d_r(p^a) \leqslant \sum_{0 \leqslant a \leqslant \alpha} r^a \leqslant (r+1)^\alpha$$

и, таким образом, (4.33) доказано для всех s.

Мультипликативность $d_s(m)$ следует из того, что для $m = m'm''$, $(m', m'') = 1$ каждому разложению (4.32) числа m соответствует точно одна пара разложений

$$m' = k_1' \ldots k_s', \quad m'' = k_1'' \ldots k_s'',$$
$$k_i = k_i' k_i'', \quad (k_i', k_i'') = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

и наоборот.

---

[1]) Например, разложения $2 = 1 \cdot 1 \cdot 2$, $2 = 1 \cdot 2 \cdot 1$, $2 = 2 \cdot 1 \cdot 1$ нужно считать различными, но разложение, которое получается из $2 = 1 \cdot 1 \cdot 2$ при перестановке обеих единиц считается совпадающим с исходным (например, $d_3(12) = 18$).

[2]) При $\alpha = s = 0$ полагаем $s^\alpha = 1$.

Теперь получаем

$$\omega(p) = s \quad \text{для} \quad p \nmid E.$$

Это следует из того, что при $p \nmid E$, $(p, a_i) = 1$ каждое сравнение

$$a_i m + b_i \equiv 0 \pmod p), \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

имеет ровно одно решение, и при $i \neq k$ сравнения

$$a_i m + b_i \equiv a_k m + b_k \equiv 0 \pmod p)$$

не могут выполняться одновременно.

Действительно в противном случае $p \mid (a_i b_k - a_k b_i)$ и поэтому $p \mid E$. Впрочем, при $i \neq k$ всегда $a_i b_k - a_k b_i \neq 0$, так как из $a_i b_k = a_k b_i$ и (4.24) следовало бы, что $a_i = \pm a_k$, $b_i = \pm b_k$, что противоречит условию теоремы.

Для каждого натурального числа u положим $u = \overset{0}{u}\,\overset{1}{u}\,\overset{2}{u} \ldots \overset{s}{u}$, причем $\overset{k}{u}$ обозначает делитель u, который содержит только те простые числа $p \mid u$, для которых $\omega(p) = k$, и $\overset{k}{u}$ считается равным единице, если u не содержит ни одного такого p. Далее положим

$$P_k = \prod_{\omega(p)=k} p, \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1.$$

Очевидно, что P_k делят E и что $(P_k, P_j) = 1$ при $k \neq j$. Теперь, так как $d_s(m)$ — мультипликативная функция, из неравенства (4.33) получим

$$\sum_{m \leqslant z} \frac{1}{m} \prod_{p \mid m} \omega^{m_p}(p) = \sum_{m \leqslant z} \frac{1}{m} \prod_{k=0}^{s} \prod_{\substack{\omega(p)=k \\ p \mid m}} \omega^{m_p}(p) =$$

$$= \sum_{m \leqslant z} \frac{1}{m} \prod_{k=0}^{s} \prod_{\substack{\omega(p)=k \\ p \mid m}} k^{m_p} \geqslant \sum_{m \leqslant z} \frac{1}{m} d_0(\overset{0}{m}) \ldots d_s(\overset{s}{m}). \tag{4.34}$$

Далее имеем неравенство

$$\sum_{m \leqslant z} \frac{1}{m} d_0(\overset{0}{m}) \ldots d_s(\overset{s}{m}) \geqslant \sum \frac{1}{k_1} \sum \frac{1}{k_2} \ldots \sum \frac{1}{k_s}, \tag{4.35}$$

в котором справа суммирование распространено на $1 \leqslant k_1, k_2, \ldots, k_s \leqslant z^{1/s}$, $(k_1, P_0) = 1$, $(k_2, P_0 P_1) = 1, \ldots, (k_s, P_0 \ldots P_{s-1}) = 1$. В произведении всех сумм $\sum \frac{1}{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, сначала появляются только члены вида $1/m$, где $m = k_1 \ldots k_s \leqslant z$. Если мы напишем

$$\begin{aligned} k_1 &= \overset{1}{k}_1 \overset{2}{k}_1 \ldots \overset{s}{k}_1, \\ k_2 &= \quad \overset{2}{k}_2 \ldots \overset{s}{k}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ k_s &= \qquad\quad \overset{s}{k}_s, \end{aligned}$$

то

$$m = k_1 k_2 \ldots k_s = \overset{1}{k}_1 (\overset{2}{k}_1 \overset{2}{k}_2) \ldots (\overset{s}{k}_1 \overset{s}{k}_2 \ldots \overset{s}{k}_s) = \overset{1}{m} \overset{2}{m} \ldots \overset{s}{m} \tag{4.36}$$

и

$$\overset{i}{m} = \overset{i}{k}_1 \overset{i}{k}_2 \ldots \overset{i}{k}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s,$$

такое разложение $\overset{i}{m}$, какое засчитывается при подсчете $d_i(m)$ $(i = 1, \ldots, s)$. Поэтому при перемножении в (4.35) член $1/m$ встречается самое большее $d_0(\overset{0}{m}) \ldots d_s(\overset{s}{m})$ раз. Легко также видеть, что если $m = k_1' k_2' \ldots k_s'$ и не все k_i равны соответствующим k_i', то разложения $\overset{i}{m}$ по формуле (4.36) не для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ равны соответствующим разложениям $\overset{i}{m} = \overset{i}{k}{}_1' \ldots \overset{i}{k}{}_s'$.

Из (4.30), (4.34), (4.35), используя, кроме того, (4.16) при $z \geqslant 2^s$, получим

$$Z > c \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{\varphi(P_0 P_1 \ldots P_{i-1})}{P_0 \ldots P_{i-1}} \ln z^{1/s} \right), \qquad z \geqslant 2^s,$$

где c зависит только от s. Следовательно,

$$Z > c \frac{\varphi^s(P_0) \varphi^{s-1}(P_1) \ldots \varphi(P_{s-1})}{P_0^s P_1^{s-1} \ldots P_{s-1}} \ln^s z,$$

причем теперь все константы могут зависеть от s. Из (4.31), (1.4.1), (1.5.22) в силу того, что $\omega(p) \leqslant s$, получаем оценку для R:

$$R \leqslant c z^2 \prod_{s < p \leqslant z} \left(1 - \frac{s}{p}\right)^{-2} = O(z^2 \ln^{2s} z),$$

причем константа c происходит от простых чисел, не превосходящих s. Подставляя эти оценки в (4.29), получим неравенство

$$S < cK \frac{N}{\ln^s z} + O(z^2 \ln^{2s} z), \qquad z \geqslant 2^s, \tag{4.37}$$

в котором по определению P_l

$$K = K(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s) = \prod_{p \mid E} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(s-\omega(p))} \geqslant 1.$$

Положим теперь $z = N^{1/2} \ln^{-2s} N$. Тогда для достаточно большого $N > N_0(s)$

$$z \geqslant 2^s, \quad c \ln N < \ln z < \ln N$$

и

$$z^2 \ln^{2s} z = O(N \ln^{-2s} N).$$

При $s \geqslant 1$ отсюда и из (4.37) следует, что

$$S < cK \frac{N}{\ln^s N}, \qquad K \geqslant 1. \tag{4.38}$$

Таким образом, для S оценка (4.26) уже доказана. Теперь очевидно, что

$$N(m \leqslant N, \ |a_i m + b_i| \text{ — простое}, \quad i = 1, 2, \ldots, s) \leqslant$$
$$\leqslant S + N(m \leqslant N; \ \min_{1 \leqslant i \leqslant s} |a_i m + b_i| \leqslant z). \tag{4.39}$$

Далее имеем

$$N(m \leqslant N, \ \min_{1 \leqslant i \leqslant s} |a_i m + b_i| \leqslant z) \leqslant \sum_{i=1}^{s} N(m \leqslant N; \ |a_i m + b_i| \leqslant z).$$

Теперь для каждого i имеет место оценка

$$N(m \leqslant N; \ |a_i m + b_i| \leqslant z) \leqslant \frac{2z}{|a_i|} + 1 = O(z),$$

причем, так как $|a_i| \geqslant 1$, константа в $O(\ )$ не зависит от a_i, b_i [1]). Отсюда следует оценка

$$N(m \leqslant N; \ \min_{1 \leqslant i \leqslant s} |a_i m + b_i| \leqslant z) = sO(z) = O\left(N^{1/2}\right),$$

и, согласно формулам (4.38), (4.39), получаем утверждение теоремы 4.2.

До сих пор мы предполагали, что $\prod_{i \leqslant s} |a_i m + b_i| > 0$ для $1 \leqslant m \leqslant N$. Общий случай можно свести к этому. Действительно, пусть $m_1, \ldots, m_r$ $(r \leqslant s)$ — целочисленные корни полинома $\prod_{i \leqslant s} (a_i m + b_i)$ при $1 \leqslant m \leqslant N$, и пусть $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_r \leqslant N$ (из нашего предположения следует, что все корни простые). Интервал $1 \leqslant m \leqslant N$ делится корнями m_j $(j = 1, \ldots, r)$ не больше

[1]) Числа $a_i m + b_i$, $|a_i m + b_i| \leqslant z$ лежат на отрезке длины $2z$ и удалены друг от друга на расстояние $\geqslant |a_i|$.

чем на $r+1 \leqslant s+1$ подинтервалов. Положим $m = m'_j + m'$ при $m_j < m < m_{j+1}$. Тогда $a_i m + b_i = a'_i m' + b'_i$, где $a'_i = a_i$; $b'_i = b_i + m_j a_i$, и числа a'_i, b'_i опять удовлетворяют условиям, которые наложены на a_i, b_i в теореме 4.2. При этом для $m_j < m < m_{j+1}$ и $N_j = m_{j+1} - m_j - 1 \leqslant N$ всегда $1 \leqslant m' \leqslant N_j$.

По уже доказанному имеем

$$N(m_j < m < m_{j+1};\ |a_i m + b_i| \text{— простое при } i = 1, \ldots, s) <$$
$$< c(s) \frac{N_j}{\ln^s N_j} \prod_{p \mid E} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(s-\omega(p))} \leqslant c(s) \frac{N}{\ln^s N} \prod_{p \mid E} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(s-\omega(p))}$$

для $N > N_0(s)$, так как здесь правая часть неравенства растет с ростом N. Эта же самая оценка получается и для чисел, принадлежащих начальному и конечному интервалам $1 \leqslant m < m_1$ и $m_r < m \leqslant N$, если они существуют. Таким образом,

$$N(m \leqslant N;\ |a_i m + b_i| \text{— простое при } i = 1, 2, \ldots, s) <$$
$$< (s+1)\, c(s) \frac{N}{\ln^s N} \prod_{p \mid E} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-(s-\omega(p))},$$

чем теорема 4.2 полностью доказана[1]).

Теперь займемся некоторыми специальными случаями теоремы 4.2. При $s = 1$, $a_1 = k$, $b_1 = l$ $(l, k) = 1$ по существу получается теорема 4.1. Полагая $s = 2$; $a_1, b_1, a_2, b_2 = 1, 0, 1, 2$, получим следующую теорему.

Теорема 4.3. *Число простых чисел $p \leqslant N$, для которых $p + 2$ простое, меньше чем*

$$c \frac{N}{\ln^2 N}.$$

Из этого результата следует известная теорема Бруна.

Если p' пробегает все простые близнецы, то ряд

$$\sum \frac{1}{p'}$$

сходится[2]).

Предположим, что существует бесконечно много близнецов, и расположим по величине первые простые числа в каждой паре в последовательность

$$p'_1 < p'_2 < \ldots < p'_k \leqslant x < p'_{k+1} < \ldots,$$

где $x \geqslant 2$ — произвольное достаточно большое число.

---

[1]) Теорема имеет место при $N > N_0(s)$ для достаточно большого $N_0(s)$ однако, увеличивая $c(s)$, можно получить, что (4.26) имеет место и при $N < N_0(s)$ (произведение из (4.26) всегда $\geqslant 1$).

[2]) Брун [1].

По теореме 4.3 имеем

$$k < c\frac{x}{\ln^2 x}.$$

Отсюда следует, что

$$p'_{k+1} > x > c_1 k\ln^2 x \geqslant c_1 k\ln^2 k.$$

Поэтому получаем

$$\sum \frac{1}{p'_k} < c\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k\ln^2 k}.$$

Известно, что последний ряд сходится и, следовательно, $\sum 1/p' < \infty$, причем все равно, суммируем ли мы только по первым близнецам каждой пары, или по вторым, или же по обоим близнецам.

Положим в теореме 4.2 $s=2$, $N=[x]$, a_1, b_1, a_2, $b_2 = 1$, 0, 1, b, где b — положительное или отрицательное четное число. Тогда получим

Теорема 4.4[1]). *Имеет место оценка*

$$N(p\leqslant x,\ |p+b|\text{— простое}) < c\frac{x}{\ln^2 x}\prod_{p\mid b}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}. \qquad (4.40)$$

Для отрицательного b и $p < -b$ выражение „$|p+b|$ — простое число" обозначает, что

$$-b = p+q,\quad q\text{ — простое}. \qquad (4.41)$$

Теорема 4.4 дает тогда оценку сверху для числа разложений вида (4.41) четного числа $-b$ в сумму двух простых чисел, из которых одно не превосходит x.

В 1742 г. Гольдбах предположил, что каждое четное число >2 представимо в виде суммы двух простых чисел. Эта проблема Гольдбаха до сих пор не решена (см. гл. VI).

Положим теперь в теореме 4.2 $s=2$, a_1, b_1, a_2, $b_2=1$, 0, k, 1; $k>0$ — целое число. Мы получим следующую теорему.

Теорема 4.5[2]). *Для четного $k\geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$N(p\leqslant N;\ kp+1\text{— простое}) < c\frac{N}{\ln^2 N}\prod_{p\mid k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}. \qquad (4.42)$$

Эту же теорему можно сформулировать так:

---

1) Шнирельман [1].
2) Эрдёш [2].

Теорема 4.6[1]). *Для четного k, $2 \leqslant k < x$, имеем*

$$N(p \leqslant x,\ p-1 = kq,\ q - \text{простое}) < c\frac{x}{\varphi(k)\ln^2(x/k)}. \quad (4.43)$$

Это утверждение получаем из теоремы 4.5, подставляя вместо N число тех m, для которых $mk+1 \leqslant x$, т. е. полагая $N = [(x-1)/k]$ также, как при доказательстве теоремы 4.1.

Теорема 4.7[2]). *Число простых чисел $p \leqslant N$, для которых все числа $p+b_1$, $p+b_2$, ..., $p+b_s$, $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_s$—простые, меньше чем*

$$c\frac{N}{\ln^{s+1}N}\prod_{p\mid E}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-(s+1-\omega(p))}, \quad E = \prod_{1\leqslant i\leqslant s} b_i \prod_{1\leqslant i<k\leqslant s}(b_k - b_i), \quad (4.44)$$

где $\omega(p)$—число решений сравнения $m(m+b_1)\ldots(m+b_s) \equiv 0 \pmod p$.

Эта теорема также следует из теоремы 4.2 в случае $a_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$ и $s \to s+1$.

Теорема 4.7 в некоторых случаях тривиальна, например, если b — нечетное число или если $s=2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$. В последнем случае для всех m

$$m(m+2)(m+4) \equiv 0 \pmod 3$$

и, следовательно, $\omega(3) = 3$, что мы исключили в теореме 4.2.

Теорема 4.8. *Пусть g — положительное четное число. Тогда*

$$N(p,\ g = p+q,\ q - \text{простое}) < c\frac{g}{\ln^2 g}\prod_{p\mid g}\left(1+\frac{1}{p}\right). \quad (4.45)$$

Теорема следует из теоремы 4.4 при $b = -g$, $x = g$ и формулы (1.5.23).

Теперь докажем еще две теоремы, которыми мы будем пользоваться в гл. X.

Теорема 4.9. *Пусть k—натуральное число и $x \geqslant k^2$, $2 \leqslant z \leqslant k^\alpha$, где α — постоянное вещественное число, $0 < \alpha < 1/2$. Тогда при $0 \leqslant l < k$, $(l, k) = 1$*

$$N(n \leqslant x;\ n \equiv l \pmod k,\ p \nmid n,\ p \leqslant z) < c(\alpha)\frac{x}{\varphi(k)\ln z}. \quad (4.46)$$

Доказательство. Возьмем, также как при доказательстве теоремы 4.1, в теоремах 3.1 и 3.2 в качестве n числа $n \leqslant x$,

---

[1]) До сих пор неизвестно, бесконечно много или нет простых чисел p, для которых $1/2\ (p-1)$ — простое число.

[2]) См., например, Эрдёш [3].

$n \equiv l \pmod k$. Тогда при $x \geqslant k^2$ число таких чисел N не превзойдет cx/k и мы получаем аналогично формулам (4.20) — (4.22)

$$N(n \leqslant x;\ n \equiv l \pmod k,\ p \nmid n,\ p \leqslant z) < c\left(\frac{x}{\varphi(k)\ln z} + z^2 \ln^2 z\right).$$

Так как $x \geqslant k^2$ и $z \leqslant k^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$, то при достаточно большом k первый член правой части этого неравенства больше второго. Этим неравенство (4.46) доказано.

Теорема 4.10. *Пусть* $z \geqslant 2$ *и* $x > z^a$, $a > 2$. *Тогда*

$$N(n \leqslant x;\ p \nmid n,\ p \leqslant z) < c(a)\frac{x}{\ln z}. \tag{4.47}$$

Доказательство. Положим в формуле (4.20) $k = 1$, $l = 0$, $N = [x]$. Для искомого числа находим оценку сверху:

$$c\left(\frac{x}{\ln z} + z^2 \ln^2 z\right).$$

Так как $x > z^a$, $a > 2$, то при достаточно большом z первый член больше второго. Этим неравенство (4.47) доказано.

Между прочим, формула (4.47) при $z = x^{1/4}$ содержит правую часть неравенства (1.3.18).

Задачи к главе II

Доказать следующие утверждения:

1. $1 = \sum\limits_{0 < d \leqslant n} \mu(d)[n/d]$.

2. $\mu^2(n) = \sum\limits_{d^2 \mid n} \mu(d)$.

3. $\mu_l(n) = \sum\limits_{d^l \mid n} \mu(d)$ равно 0 или 1, смотря по тому, делится или не делится n на l-ю степень d, $l \geqslant 1$.

4. $\sum\limits_{d \mid n} \mu(d) \ln^m d = 0$, если $v(n) > m \geqslant 1$ (применить полную индукцию).

5. Если $g(k) = \sum\limits_{d \mid k} f(d)$ для натурального k, то $f(n) = \sum\limits_{d \mid n} \mu(d) g(n/d)$, $n = 1, 2, \ldots$, и наоборот[1]).

6. $\left|\sum\limits_{d \leqslant x} \mu(d)/d\right| \leqslant 1$ (см. задачу 1).

[1]) Формула обращения Мёбиуса.

7. $\sum\limits_{\delta \mid n} \mu(\delta)\, d(n/\delta) = 1$ (см. задачу 5).

8. $\sum\limits_{m \leqslant x} \mu^2(m) = \sum\limits_{d \leqslant \sqrt{x}} \mu(d) \left[\frac{x}{d^2}\right]$.

9. Вычислить

$$\sum_{0 \leqslant a < m,\ (a,\ m)=1} e^{2\pi i \frac{a}{m}}, \quad m \geqslant 1.$$

Доказать следующие утверждения:

10. $\sum\limits_{p \leqslant x} d(p-1) = O(x)$ [1]).

11. Пусть $g(n) = n/\varphi(n)$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant x} g(n) = O(x), \quad \sum_{p \leqslant x} g(p-1) = O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

$$\left(g(n) \leqslant \sum_{d \mid n} 1/d\right).$$

12. $\sum\limits_{p \leqslant N} g(N-p) = O(N/\ln N)$.

13. Число решений уравнения

$$N = p_1 + p_2 + p_3 \qquad (p_i \text{ простое})$$

не больше $cN^2/\ln^3 N$.

14. Число чисел $n \leqslant x$, которые могут быть представлены в виде $n = p_1 + p_2 + p_3$, больше cx, $c > 0$.

15. $N(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k;\ N = p_1 + p_2 + \ldots + p_k) < c\,\frac{N^{k-1}}{\ln^k N}$, $c = c(k)$, $k \geqslant 3$.

16. Оценить сверху $\sum\limits_{p \leqslant x} d^2(p-1)$.

17. Оценить сверху $\sum\limits_{p \leqslant x} g^2(p-1)$, $g(n) = n/\varphi(n)$.

18. Пусть $Q(x)$ — число свободных от квадратов чисел, не превосходящих x. Доказать

$$Q(x) = Ax + O(\sqrt{x}),$$

$$A = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad (= 6/\pi^2; \text{ см. гл. III})$$ [2]).

[1]) Титчмарш [2].
[2]) Гегенбауэр [1].

19. Получить из задачи 17 гл. I оценку для $\sum_{n \leqslant x}$

20[1]. $\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = Ax^2 + O(x \ln x)$,

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n} \mu(n) n^{-2} \quad (= 3/\pi^2).$$

21. $\sum_{n \leqslant x} \varphi(n)/n = Ax + O(\ln x), \quad A = \sum_{n} \mu(n) n^{-2}$

22. $\sum_{n \leqslant x} 1/\varphi(n) = O(\ln x)$ (задача 11).

---

[1]) Дирихле [2].

Глава III

ТЕОРЕМА О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

§ 1. Введение

В этой главе мы уточним результаты, полученные в гл. I в теоремах 3.2 и 4.3. Именно, мы получим асимптотический закон распределения простых чисел, или теорему о простых числах. Будет доказано, что $\lim\limits_{x\to\infty} \pi(x)\ln x/x$ существует и равен единице. Эту же теорему можно выразить формулой

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \to \infty. \tag{1.1}$$

Равенство предела единице следует из его существования по теореме 1.4.3, но здесь оно будет получено независимо.

Теорема о простых числах впервые была доказана Адамаром [1] и Валле-Пуссеном [1]. Долгое время существовали лишь доказательства, использующие теорию функций комплексного переменного. Только в 1948 г. Эрдёш и Сельберг нашли „чисто вещественное" доказательство. Однако методами теории функций комплексного переменного можно получить оценки, которые далеко превосходят (1.1) и которые пока не удается получить элементарными средствами. Кроме того, теоретико-функциональные вспомогательные средства необходимы сегодня и для решения других числовых проблем. Поэтому при доказательстве теоремы о простых числах мы в полной мере пользуемся теоретико-функциональными методами. Это, пожалуй, самый короткий путь к доказательству, если иметь небольшие познания в теории функций.

§ 2. ζ-функция Римана [1])

При втором доказательстве теоремы 1.1.2 мы использовали соотношение

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n}. \tag{2.1}$$

Чтобы доказать, что имеется бесконечно много простых чисел, нужно доказать, что правая часть этого неравенства стремится к ∞ при

[1]) Риман [1].

$x \to \infty$. Тогда отсюда будет видно, что слева имеется „достаточно много“ простых чисел. Более точное выражение вместо „достаточно много“ можно получить, приняв во внимание, что $\sum\limits_{n \leqslant x} 1/n \geqslant \ln x$.

Существенно более точное выражение для (1.1) можно доказать, рассматривая вместо суммы (2.1) сходящийся при $s > 1$ ряд

$$\sum_n \frac{1}{n^s}. \tag{2.2}$$

Исследуя функцию, определенную формулой (2.2) для комплексных значений s, мы найдем свойства этой функции, из которых может быть получено соотношение (1.1). Функция, определенная равенством (2.2), называется дзета-функцией Римана и обозначается $\zeta(s)$.

Теорема 2.1. *Ряд*

$$\sum_n n^{-s} \tag{2.3}$$

равномерно сходится при $\operatorname{Re} s \geqslant 1+\varepsilon$, *и функция, определяемая этим рядом, регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Re} s > 1$. *При этом* n^{-s} *для комплексного* s *задается равенством* $n^{-s} = e^{-s \ln n}$, *где* $\ln n$ *означает действительный логарифм положительного числа* n.

Доказательство. Пусть $s = \sigma + it$. Равномерная сходимость ряда следует из неравенства

$$|n^{-s}| = n^{-\sigma} \leqslant n^{-(1+\varepsilon)}, \quad \sigma \geqslant 1+\varepsilon. \tag{2.4}$$

Регулярность $\zeta(s)$ при $\operatorname{Re} s > 1$ следует из известной теоремы Вейерштрасса о регулярности предельной функции равномерно сходящейся последовательности аналитических функций, так как для каждой точки из полуплоскости $\sigma > 1$ найдется такое ε, что эта точка будет внутренней точкой области $\sigma \geqslant 1+\varepsilon$.

Далее всюду буквы σ и t обозначают действительную и мнимую части комплексного переменного s.

Связь между простыми числами и ζ-функцией устанавливается следующей теоремой. (Если не оговорено противное, то n пробегает числа 1, 2, ..., а p пробегает все простые числа 2, 3, 5, ...)

Теорема 2.2. *При* $\sigma > 1$ *имеет место равенство*

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_n \frac{1}{n^s} = \zeta(s). \tag{2.5}$$

Доказательство получается из следующей более общей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть* $f(n)$ — *действительная или комплексная мультипликативная функция, определенная для всех нату-*

ральных n, *т. е.* $f(mn)=f(m)f(n)$ *при* $(n, m)=1$ *и* $f(1)=1$. *Если* $\sum\limits_n |f|<\infty$, *то*

$$\prod_p \{1+f(p)+f(p^2)+\ldots\}=\sum_n f(n). \tag{2.6}$$

Доказательство. Перемножая конечное число абсолютно сходящихся рядов в левой части равенства (2.6) и пользуясь мультипликативностью f, получим равенство

$$\prod_{p\leqslant x} \{1+f(p)+f(p^2)+\ldots\}=\sum_n{}' f(n), \tag{2.7}$$

где $\sum' = \sum$ означает суммирование по всем n, которые содержат только простые множители $\leqslant x$, и еще $n=1$. Далее имеем

$$\begin{gathered}\sum_n{}' f(n)=\sum_{n\leqslant x} f(n)+R(x),\\ |R(x)|\leqslant \sum_{n>x} |f(n)|.\end{gathered} \tag{2.8}$$

При $x\to\infty$ следует, что $R(x)\to 0$, так как $\sum\limits_n |f(n)|<\infty$, и утверждение теоремы следует из двух последних соотношений.

Теорема 2.2 получается, если положить $f(n)=n^{-s}$. Предположим сначала, что s действительное число и $s>1$. Тогда $(1-1/p^s)^{-1}>1$ и, следовательно, $\zeta(s)$ также действительное число и $\zeta(s)>1$. Прологарифмировав (2.5), получим

$$\ln\zeta(s)=\sum_p \ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_p\sum_n \frac{1}{np^{ns}}. \tag{2.9}$$

В этой формуле все логарифмы положительны. Дифференцируя (2.9), получим [1])

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_p \frac{\ln p}{p^s-1}=\sum_p\sum_n \frac{\ln p}{p^{ns}}. \tag{2.10}$$

Равенство (2.9) можно дифференцировать, так как получившийся ряд равномерно сходится в полуплоскости $s\geqslant 1+\varepsilon$. Действительно, ряд в этой полуплоскости имеет сходящуюся мажоранту $\sum \ln p/(p^{1+\varepsilon}-1)$. Порядок суммирования в двойном ряду (2.10) можно переменить, так как члены этого ряда положительны.

Для комплексного s в полуплоскости $\sigma>1$ мы выберем ветви многозначных функций в (2.9) и в (2.10) так, чтобы при действи-

---

[1]) Мы пишем $\dfrac{f'}{f}(s)$ вместо $\dfrac{f'(s)}{f(s)}$.

тельном $s>1$ они были действительными. Тогда по принципу аналитического продолжения они определены при любом комплексном s с $\sigma>1$ [1]). Положим теперь

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, \text{ если } n=p^m \quad (m\geqslant 1),\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases} \tag{2.11}$$

В частности, $\Lambda(1)=0$. Тогда (2.10) запишется так

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (\sigma>1). \tag{2.12}$$

Ряды вида $\sum a_n n^{-s}$, где a_n не зависят от s, называются рядами Дирихле (приложение, § 2). Ряд в правой части (2.12), а также ряд, определяющий $\zeta(s)$, являются рядами Дирихле. Введем теперь следующую функцию — сумму коэффициентов ряда Дирихле (2.12):

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=\sum_{p^m\leqslant x}\ \sum_{m\geqslant 1}\ln p. \tag{2.13}$$

Здесь в двойной сумме суммирование ведется по всем простым числам p и всем натуральным m, для которых $p^m\leqslant x$.

Между функциями $\pi(x)$ и $\psi(x)$ существует следующая связь.

Теорема 2.4. *Из равенства*

$$\psi(x)=x+o(x) \quad (x\to\infty) \tag{2.14}$$

следует

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad (x\to\infty). \tag{2.15}$$

Таким образом, для доказательства теоремы о простых числах достаточно доказать (2.14).

Доказательство. Из (2.14) следует, что

$$\theta(x)=x+o(x) \quad (x\to\infty). \tag{2.16}$$

Действительно,

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p=\sum_{p^m\leqslant x}\sum\ln p-\sum_{p^m\leqslant x}\ \sum_{2\leqslant m\leqslant \ln x/\ln p}\ln p=$$

$$=\sum_{p^m\leqslant x}\sum\ln p-\sum_{2\leqslant m\leqslant \ln x/\ln 2}\ \sum_{p^m\leqslant x}\ln p=$$

$$=\psi(x)+o\left(x^{1/2}\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=\psi(x)+o(x) \quad (x\to\infty), \tag{2.17}$$

[1]) Ср. с теоремой 4.1.

так как при фиксированном m $\sum\limits_{p,\ p^m \leqslant x} \ln p = \theta\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = O\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$. Но

$$\pi(x) \ln x \geqslant \theta(x),$$

и, с другой стороны, для каждого постоянного α, $0 < \alpha < 1$ (так же как в (1.3.19))

$$\{\pi(x) - \pi(x^\alpha)\} \ln x^\alpha \leqslant \theta(x).$$

Следовательно, в силу неравенства $\pi(x^\alpha) \leqslant x^\alpha$ имеем

$$\alpha\pi(x) \ln x \leqslant \theta(x) + \alpha x^\alpha \ln x.$$

Итак, из формулы (2.16) следует

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}\, \pi(x) \Big/ \frac{x}{\ln x} \leqslant \frac{1}{\alpha} \lim \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{\alpha} \quad (x \to \infty), \\ &\underline{\lim}\, \pi(x) \Big/ \frac{x}{\ln x} \geqslant \lim \frac{\theta(x)}{x} = 1 \quad (x \to \infty). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Так как это верно для каждого $\alpha < 1$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \pi(x) \ln x / x = 1$ и, следовательно, верно (2.15). Таким образом, в дальнейшем нам остается доказать равенство (2.14).

§ 3. Связь между $-\zeta'/\zeta$ и $\psi(x)$

Теорема 3.1. *Функция $\zeta(s)$ может быть аналитически продолжена на полуплоскость $\sigma > 0$ и регулярна там за исключением простого полюса при $s = 1$. В окрестности точки $s = 1$ имеют место следующие разложения:*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + \ldots, \tag{3.1}$$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} + b_0 + b_1(s-1) + \ldots. \tag{3.2}$$

Доказательство. Положим в теореме П. 1.5 $a = 1$, $x = N \geqslant 1$, $g(\xi) = \xi^{-s}$. Тогда получим

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{1}{n^s} = \int_1^N \frac{d\xi}{\xi^s} + 1 - s \int_1^N (\xi - [\xi]) \frac{d\xi}{\xi^{s+1}}. \tag{3.3}$$

Отсюда при $\sigma > 1$ и $N \to \infty$ следует, что

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty (\xi - [\xi]) \frac{d\xi}{\xi^{s+1}}. \tag{3.4}$$

Последний интеграл абсолютно и равномерно сходится при $\sigma \geqslant \varepsilon > 0$, так как $0 \leqslant \xi - [\xi] < 1$ и $|\xi^{-(s+1)}| = \xi^{-(\sigma+1)}$, $\sigma + 1 \geqslant 1 + \varepsilon$. Поэтому правая часть (3.4) представляет при $\sigma > 0$ функцию, регулярную за исключением точки $s = 1$. Эта функция и дает аналитическое продолжение функции $\zeta(s)$, которая была определена только при $\sigma > 1$, на полуплоскость $\sigma > 0$. Разложение (3.1) следует сразу же из (3.4), а (3.2) из (3.1).

Теперь мы применим теорему П. 3.1 к функции $f(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$. Здесь $a_n = \Lambda(n)$. Согласно (2.11) и (3.2), можно положить $\Phi(n) = \ln n$ и $\alpha = 1$. Кроме того, выберем $w = u + iv = 0$ и будем предполагать, что $b > 1$. Положим далее $x = N + \frac{1}{2}$, $N \geqslant 1$ — целое. Тогда (П. 3.3) дает нам

$$\psi(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{x}\, ds + \\ + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)} + \frac{x \ln^2 x}{T}\right), \qquad (3.5)$$

так как при $x = N + \frac{1}{2}$ последний член в (П. 3.3) содержится в предпоследнем. Величины $b > 1$ и $T \geqslant 1$ будут определены позднее в зависимости от x. Докажем сначала следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть* $\frac{1}{2} < a < 1$, $b > 1$, $T \geqslant 2$ *и* Γ — *замкнутый прямоугольный контур, который состоит из следующих отрезков*: $\Gamma_1 = (b - iT,\ b + iT)$, $\Gamma_2 = (b + iT,\ a + iT)$, $\Gamma_3 = (a + iT,\ a - iT)$, $\Gamma_4 = (a - iT,\ b - iT)$. *Если* $\zeta(s)$ *не имеет нулей внутри* Γ *и на* Γ, *то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{s}\, ds = \\ = x + O\left\{ \max_{s \in \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4} \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \left(\frac{x^b}{T \ln x} + x^a \ln T\right)\right\}. \qquad (3.6)$$

Доказательство. Так как $\zeta(s) \neq 0$ внутри Γ и на Γ, то ζ'/ζ согласно теореме 3.1 регулярна внутри Γ везде, кроме простого полюса $s = 1$ с вычетом, равным 1. Согласно теореме о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{s}\, ds = \\ = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} - \int_{\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4}\right) \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{s}\, ds = \\ = x + O\left(\int_{\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4} \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\, \frac{x^s}{s}\right| |ds|\right), \qquad (3.7)$$

так как

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\,\frac{x^s}{s}\right\}=x.$$

Далее, так как $|s|\geqslant T$, $s\in\Gamma_2$, $a<1<b$, то

$$\int\limits_{\Gamma_2}\left|\frac{x^s}{s}\right||ds|\leqslant\frac{1}{T}\int\limits_a^b x^\sigma\,d\sigma=O\left(\frac{x^b}{T\ln x}\right).$$

То же самое имеет место и для интеграла по Γ_4. Наконец, замечая, что $|x^s|=x^\sigma=x^a$, $|s|^{-1}=(\sigma^2+t^2)^{-1/2}$, $\sigma>\frac{1}{2}$ для $s\in\Gamma_3$, получаем

$$\int\limits_{\Gamma_3}\left|\frac{x^s}{s}\right||ds|=O\left(\int\limits_1^T x^a\,\frac{dt}{t}\right)=O\left(x^a\ln T\right)$$

(интеграл при $0\leqslant t\leqslant 1$ меньше $2x^a=O(x^a\ln T)$, так как $\sigma>\frac{1}{2}$, $T\geqslant 2$). Если все это подставим в (3.7), то получим (3.6).

Теорема 3.3 [1]). *Теорема о простых числах будет доказана и будет доказано даже более точное утверждение*

$$\psi(x)=x+O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)\quad(x\to\infty),\tag{3.8}$$

где c — положительная константа, если доказать, что для достаточно большого T (например, $T>T_0>2$) в теореме 3.2 можно положить $a=1-c_1/\ln T>\frac{1}{2}$. При таком выборе a внутри и на границе Γ нет нулей $\zeta(s)$ и имеет место неравенство

$$\max_{s\in\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right|<c_2\ln T\tag{3.9}$$

(c_1, c_2 — *некоторые положительные константы*).

Доказательство. Подставим (3.6) в (3.5) и воспользуемся формулой (3.9). Тогда получим равенство

$$\psi(x)=x+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)}+\frac{x\ln^2 x}{T}+\frac{x^b\ln T}{T\ln x}+x^a\ln^2 T\right),$$

где $T>T_0$, $b>1$, $a=1-c_1/\ln T$. Если мы положим теперь $b=1+1/\ln x$, то

$$\psi(x)=x+O\left(\frac{x}{T}\ln x+\frac{x}{T}\ln^2 x+\frac{x\ln T}{T\ln x}+x^{1-c_1/\ln T}\ln^2 T\right)=$$
$$=x+O\left(\frac{x}{T}\ln^2 x+\frac{x\ln T}{T\ln x}+x^{1-c_1/\ln T}\ln^2 T\right)\tag{3.10}$$

[1]) Равенство (3.8) исходит от Валле-Пуссена [2]. Метод доказательства, применяемый ниже, см. у Ландау [7].

для $x = N + \frac{1}{2}$, $T > T_0$. Выберем теперь T в зависимости от x так, чтобы остаток был как можно меньше. Число $x^{1-c_1/\ln T}\ln^2 T$ велико при большом T, и оба первых слагаемых остаточного члена при большом T малы. Все три слагаемых приблизительно одного порядка, если взять $T = \exp\left(c_3 \sqrt{\ln x}\right)$. Следовательно, при $x \to \infty$

$$\frac{x}{T}\ln^2 x = O\left(xe^{-c_4\sqrt{\ln x}}\right), \quad 0 < c_4 < c_3,$$

так как $\ln^A x = O\left(\exp\left\{(c_3 - c_4)\sqrt{\ln x}\right\}\right)$ при любом постоянном $A > 0$ [1]),

$$\frac{x\ln T}{T\ln x} = c_3\frac{x}{T\sqrt{\ln x}} = O\left(xe^{-c_3\sqrt{\ln x}}\right),$$

$$x^{1-c_1/\ln T}\ln^2 T = x\exp\left\{-\frac{c_1}{c_3}\sqrt{\ln x} + \ln_2 x + 2\ln c_3\right\} =$$

$$= O\left(xe^{-c_5\sqrt{\ln x}}\right), \quad c_5 < c_1/c_3.$$

Подставим теперь все это в (3.10) и возьмем N настолько большим, чтобы при $x = N + \frac{1}{2}$, $T = \exp\left(c_3\sqrt{\ln x}\right)$ было выполнено неравенство $T > T_0$. Тогда

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c_6\sqrt{\ln x}}\right), \quad c_6 = \min(c_4, c_5),$$

если x стремится к бесконечности по значениям вида $x = N + \frac{1}{2}$. Так как для каждого $x > 0$ $\psi(x) = \psi\left([x] + \frac{1}{2}\right)$, то тем самым равенство (3.8) полностью доказано.

Метод, примененный в теоремах 3.2 и 3.3, называется методом комплексного интегрирования. Функция $\psi(x)$ выражается через интеграл по формуле (3.5) с точностью до некоторой ошибки. Сдвиг пути интегрирования налево, проведенный в теореме 3.2, дает для этого интеграла в качестве главного члена x с ошибкой, которая состоит из интегралов по Γ_3 и Γ_2, Γ_4. Желательно путь интегрирования сдвинуть налево как можно дальше, так как имеющийся в интеграле по Γ_3 член $|x^s|$ тем меньше, чем меньше a. Член $|x^s|$ при доказательстве равенства (3.8) порождает член $x^{1-c_1/\ln T}$, который при оценке ошибки в некотором смысле является наиболее трудным, так как из-за него нельзя брать T слишком большим. Помехой для переноса пути интегрирования левее является возможное появление нулей $\zeta(s)$, в которых ζ'/ζ имеет полюс. В этом случае выводы при доказательстве теоремы 3.2 становились бы неверными. Доказательство предположения, сделанного в теореме 3.3, что при подходящем $c_1 > 0$

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ в области } \sigma \geqslant 1 - \frac{c_1}{\ln T}, \ |t| \leqslant T, \tag{3.11}$$

является основой доказательства теоремы о простых числах (см. ниже теорему 4.5). Соотношение (3.9) тогда относительно легко доказать, так как

---

[1]) Напомним, что для краткости мы положили $\ln\ln x = \ln_2 x$.

в этом случае в окрестности точки s, где $\zeta(s) \neq 0$, функция ζ'/ζ не может быть слишком большой (см. ниже теорему 4.7). Отметим между прочим, что из (3.5) при $x = N + 1/2$ следует соотношение

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \frac{x^s}{s}\, ds, \qquad b > 1,$$

если положить

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} = \lim_{T\to\infty} \int_{b-iT}^{b+iT}.$$

§ 4. О нулях $\zeta(s)$

Для исследования нулей $\zeta(s)$ мы привлечем некоторые вспомогательные теоретико-функциональные теоремы (см. приложение, § 4).

Теорема 4.1. $\zeta(s)$ *не имеет нулей в области* $\sigma > 1$, *т. е.*

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ при } \sigma > 1. \tag{4.1}$$

Доказательство. Согласно (2.5), при $\sigma > 1$ имеем

$$|\zeta(s)| > \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1} = \exp\left\{-\sum_p \ln\left(1 + \frac{1}{p^\sigma}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_p \left(-\frac{1}{p^\sigma} + \frac{1}{2p^{2\sigma}} - \ldots\right)\right\} > \exp\left(-\sum_p \frac{1}{p^\sigma}\right) > 0, \tag{4.2}$$

так как $\sum 1/p^\sigma < \infty$, $\sigma > 1$, что и требовалось доказать.

Заметим еще, что в достаточно малой окрестности точки $s = 1$ $\zeta(s) \neq 0$, так как в этой точке функция $\zeta(s)$ имеет полюс.

Лемма 4.1. *При* $\sigma > 1$ *имеем* [1])

$$\operatorname{Re}\left\{3\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \frac{4\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i2t)\right\} \leqslant 0. \tag{4.3}$$

Доказательство. Выражение, стоящее слева при $\sigma > 1$, согласно (2.12), равно

$$-\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \{3 + 4\cos(t \ln n) + \cos(2t \ln n)\}.$$

Но для любого φ имеет место очевидное соотношение

$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geqslant 0,$$

откуда и следует (4.3).

[1]) Re и Im обозначают, как обычно, действительную и мнимую части комплексного числа.

Теорема 4.2. [1]) *Имеет место соотношение*

$$\zeta(1+it) \neq 0, \quad t \gtrless 0. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $1+it_1$, $t_1 \neq 0$, является m-кратным нулем $\zeta(s)$, $m \geqslant 1$. Тогда ζ'/ζ имеет в этой точке полюс первого порядка с вычетом $m \geqslant 1$. Поэтому

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it_1) \sim \frac{m}{\sigma-1}, \quad \sigma \to 1+0. \tag{4.5}$$

Согласно разложению (3.2) имеем

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \sim -\frac{1}{\sigma-1}, \quad \sigma \to 1+0, \tag{4.6}$$

и так как $s = \sigma + i2t_1$ — регулярная точка для $\zeta(s)$, то при $\sigma \to 1+0$ справедливо соотношение

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i2t_1) \sim \frac{k}{\sigma-1}, \quad k \geqslant 0 \text{ — целое [2]}). \tag{4.7}$$

Так как $4m \geqslant 4$ и $k \geqslant 0$, то из формул (4.5) — (4.7) при $\sigma \to 1+0$ следует, что

$$\operatorname{Re}\left\{3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it_1) + \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i2t_1)\right\} \sim$$
$$\sim \frac{1}{\sigma-1}(-3+4m+k) \to \infty. \tag{4.8}$$

Но при σ, достаточно близком к 1, это противоречит (4.3), таким образом, (4.4) доказано.

Приведенное доказательство основано на том, что при $\zeta(1+it_1) = 0$ выражение $\zeta'(1+it_1)/\zeta(1+it_1)$ должно обращаться в бесконечность. Действительная часть членов ряда (2.12) не всегда имеет один и тот же знак, и отсюда нельзя определить непосредственно знак $\operatorname{Re}(\zeta'/\zeta)$ вблизи $\sigma = 1$. Комбинация значений функции ζ'/ζ, применяемая в (4.8), имеет то преимущество, что по лемме 4.1 известен ее знак при $\sigma > 1$. Кроме того, поскольку $4 > 3$, отсюда следует, что полюса $3\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$ при $\sigma = 1$ не достаточно, чтобы компенсировать обращение в бесконечность $4\zeta'(\sigma+it_1)/\zeta(\sigma+it_1)$ при $\sigma = 1$. Вместо $3+4\cos\varphi+\cos 2\varphi$ можно взять также любой другой тригонометрический полином $P(\varphi) = a_0 + a_1\cos\varphi + \ldots + a_r\cos r\varphi$, для которого $a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $a_0 < a_1$ и $P(\varphi) \geqslant 0$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Годится, например, полином $5+8\cos\varphi+4\cos 2\varphi+\cos 3\varphi$; наоборот, полином $1+\cos\varphi$ не годится, хотя всегда $1+\cos\varphi \geqslant 0$.

Чтобы доказать утверждение (3.11), которое сильнее теоремы 4.2, нам нужны некоторые вспомогательные оценки.

---

[1]) Адамар [1], Валле-Пуссен [1]. Другие доказательства см. у Титчмарша [4].

[2]) При $k = 0$ это должно означать, что отношение $\zeta'(\sigma+i2t_1)/\zeta(\sigma+i2t_1)$ при $\sigma \to 1+0$ остается ограниченным. $k > 0$ только для $\zeta(1+i2t_1) = 0$.

Теорема 4.3. *При любом постоянном $A > 0$ имеют место оценки*:

$$\zeta(s) = O(t^{\delta}), \quad \sigma \geqslant 1-\delta, \quad t \geqslant 2, \quad 0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4.9}$$

$$\zeta(s) = O(\ln t), \quad \sigma \geqslant \max\left(\frac{1}{2},\ 1-\frac{A}{\ln t}\right), \quad t \geqslant 2. \tag{4.10}$$

Константа в $O(\ )$ *в формуле* (4.9) *может зависеть от* δ, *такая же константа в* (4.10) — *от* A, *но они не зависят от* t.

Доказательство. Мы можем предположить, что $\sigma \leqslant 2$, так как при $\sigma > 2$ имеем

$$|\zeta(s)| = \left|\sum_n n^{-s}\right| \leqslant \sum_n n^{-\sigma} < \sum_n n^{-2} = O(1).$$

Согласно теореме П.1.5, при $a = N$, $x \to \infty$ для $\sigma > 1$, $N \geqslant 1$ получим

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty} (\xi - [\xi])\frac{d\xi}{\xi^{s+1}}, \tag{4.11}$$

так как

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{N < n \leqslant x} \frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^s} - s\int_N^{\infty} (\xi - [\xi])\frac{d\xi}{\xi^{s+1}}.$$

Формула (4.11) доказывается сначала при $\sigma > 1$. Правая часть (4.11) регулярна при $\sigma > 0$, поскольку $\int_N^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{\sigma+1}} < \infty$ вплоть до $s = 1$. Следовательно, формула (4.11) может быть аналитически продолжена на область $\sigma > 0$. Для $\sigma \geqslant 1-\delta$ и $0 < \delta \leqslant 1/2$ имеем

$$\left|\sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^s}\right| \leqslant \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^{\sigma}} \leqslant \sum_{n \leqslant N} \frac{1}{n^{1-\delta}} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{d\xi}{\xi^{1-\delta}} \leqslant 1 + \frac{1}{\delta}N^{\delta}. \tag{4.12}$$

При $\sigma \geqslant 1-\delta$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{N^{1-s}}{1-s}\right| \leqslant \frac{1}{t}N^{1-\sigma} \leqslant \frac{1}{t}N^{\delta}, \tag{4.13}$$

и для $\frac{1}{2} \leqslant 1-\delta \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t \geqslant 2$ получаем

$$\left|s\int_N^{\infty} (\xi - [\xi])\frac{d\xi}{\xi^{s+1}}\right| \leqslant |s|\int_N^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{\sigma+1}} \leqslant 2\frac{t}{\sigma}N^{-\sigma} \leqslant 4tN^{-(1-\sigma)}. \tag{4.14}$$

Из неравенств (4.12) — (4.14) при $t \geqslant 2$ и постоянном δ, согласно (4.11), выводим соотношение

$$\zeta(s) = O\left(N^{\delta} + t^{-1}N^{\delta} + tN^{\delta-1}\right) = O\left(N^{\delta} + tN^{\delta-1}\right),$$

в котором константа в $O(\ )$ зависит от δ и при $\delta \to 0$ стремится к бесконечности. Если мы выберем N, которое до сих пор не определялось, равным $[t]$, то получим формулу (4.9). Формулы (4.12)—(4.14) верны также в случае, когда δ зависит от N. Если мы положим $\delta = A/\ln N$ и возьмем N настолько большим, чтобы $A/\ln N < \frac{1}{2}$, то вследствие того, что $N^{\delta} = O(1)$, при $1 - A/\ln N \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t \geqslant 2$ получим

$$\zeta(s) = O\left(\ln N + t^{-1} + tN^{-1}\right),$$

где константа в $O(\ )$ зависит от A. Если теперь возьмем $N = [t]$, то при $t > t_1 \geqslant 2$ получим $A/\ln[t] < \frac{1}{2}$. Теперь формула (4.10) следует из последнего равенства при $t > t_1$. Для области $2 \leqslant t \leqslant t_1$ соотношение (4.10) выполняется тривиально, так как в ней функция $\zeta(s)$ ограничена.

Так как $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ [1]), то из (4.9) и (4.10) следует, что

$$\zeta(s) = O(|t|^{\delta}), \quad \sigma \geqslant 1 - \delta, \quad 0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}, \quad |t| \geqslant 2, \tag{4.15}$$

$$\zeta(s) = O(\ln|t|), \quad \sigma \geqslant \max\left(\frac{1}{2},\ 1 - \frac{A}{\ln|t|}\right), \quad |t| \geqslant 2. \tag{4.16}$$

Теорема 4.4. *При $\sigma > 1$ имеют место соотношения* [2])

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n} \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{4.17}$$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < 1 + \frac{1}{\sigma - 1} \quad (\sigma > 1). \tag{4.18}$$

Доказательство. Поскольку произведение $\prod (1 - 1/p^s)^{-1}$ сходится при $\sigma > 1$, из (2.5) следует, что

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad \sigma > 1. \tag{4.19}$$

---

[1]) При $\sigma > 1$ это следует из представления $\zeta(s)$ в виде ряда, а при $\sigma > 0$ — по принципу симметрии. Ограничение $|t| \geqslant 2$ несущественно. Какое-нибудь ограничение вида $|t| \geqslant t_0 > 0$ из-за полюса при $s = 1$ необходимо, но можно было бы с правой стороны (4.15) и (4.16) добавить еще член $O(1/|s-1|)$; здесь нужно взять практически $t_0 > 1$, например $t_0 = 2$; при $t_0 \leqslant 1$ нужно было бы заменить $\ln|t|$, например, на $\ln(|t| + 2)$, так как при $t = 1$ имеем $A/\ln t = \infty$. То же самое замечание имеет место для ограничения $|t| \geqslant 3$ в некоторых из следующих теорем.

[2]) Определение $\mu(n)$ см. в гл. II, § 2.

Если в теореме 2.3 мы положим $f(n)=\mu(n)n^{-s}$, то получим

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum\frac{\mu(n)}{n^s},\quad \sigma>1,$$

а это вместе с (4.19) дает равенство (4.17). Неравенство (4.18) при $\sigma>1$ следует из неравенств

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|\leqslant\sum_n\frac{|\mu(n)|}{n^\sigma}<\sum_n\frac{1}{n^\sigma}<1+\int_1^\infty\frac{d\xi}{\xi^\sigma}.$$

Теорема 4.5 [1]). *Функция $\zeta(s)$ не имеет нулей при подходящем $c_7>0$ в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_7}{\ln|t|}\geqslant\frac{1}{2},\quad |t|\geqslant 3. \tag{4.20}$$

Доказательство. Мы можем предположить, что $t\geqslant 3$, поскольку в силу равенства $\zeta(\bar{s})=\overline{\zeta(s)}$ возможные нули $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно действительной оси. Если (4.20) справедливо для некоторого c_7, то то же неравенство будет верно, если вместо c_7 поставить меньшее значение [2]). Пусть $\rho_1=\beta+it_1$ — нуль $\zeta(s)$, причем $t_1\geqslant 3$, $\beta=1-b/\ln t_1$. Согласно теореме 4.2, b должно быть положительно. Формула (4.20) будет доказана, если мы покажем, что $b>c_7$ для некоторого c_7, не зависящего от t_1. Положим в (4.3) $t=t_1$, $\sigma=\sigma_0=1+a/\ln t_1$, где $0<a<{}^1/_2$ и более точно a будет определено позже. Чтобы оценить $\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+it_1)$, применим теорему П.4.5 (при предположении, что ρ_1 — нуль $\zeta(s)$). Положим в этой теореме

$$F(s)=\zeta(s),\quad s_0=\sigma_0+it_1,\quad r=\frac{1}{2}.$$

Тогда, согласно теореме 4.1, $\zeta(s)\neq 0$ при $\operatorname{Re}(s-s_0)\geqslant 0$. Доказывая формулу (4.20) с возможно меньшим c_7, мы можем, очевидно, ограничиться рассмотрением нулей, у которых $\beta>1-{}^1/_8={}^7/_8$ [3]). Пусть $\beta=\operatorname{Re}\rho_1>1-{}^7/_8$. При достаточно малом a, например при $0<a<a_1<{}^1/_2$, число ρ_1 лежит в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r=\frac{1}{4}$, что удовлетворяет условиям теоремы П.4.5 ($t_1\geqslant 3$ может быть сколь угодно велико). Теперь нам нужна еще оценка $|F(s)/F(s_0)|=|\zeta(s)/\zeta(s_0)|$

---

[1]) Валле-Пуссен [2].

[2]) Следовательно, $1-c_7/\ln|t|\geqslant{}^1/_2$ для всех достаточно малых c_7 и $|t|\geqslant 3$.

[3]) ${}^7/_8$ берем для того, чтобы рассматриваемые нули для каждого $t_1\geqslant 3$ наверняка лежали в области $|s-s_0|\leqslant{}^1/_4$, как этого требует теорема П.4.5.

в круге $|s-s_0|\leqslant 1/2$. По формулам (4.9) при $\delta=1/2$ и (4.18) при $|s-s_0|\leqslant 1/2$ имеет место оценка

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}=O\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sigma_0-1}\right)=O\left(\frac{1}{a}\,t^{\frac{1}{2}}\ln t_1\right), \tag{4.21}$$

где константа в $O(\ )$ не зависит от a. Оценка (4.9) применима ввиду того, что область $|s-s_0|\leqslant 1/2$ целиком лежит в области $\sigma\geqslant 1/2$, $t\geqslant 2$ (так как $\sigma_0>1$, $t_1\geqslant 3$). Для $|s-s_0|\leqslant 1/2$, $t_1\geqslant 3$ из (4.21) следует оценка

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)}=O\left(\frac{1}{a}\,t_1^{\frac{1}{2}}\ln t_1\right), \tag{4.22}$$

так как $|t-t_1|\leqslant 1/2$. Следовательно, мы можем применить теорему П.4.5 с $M=c_8\frac{1}{a}\,t_1^{\frac{1}{2}}\ln t_1$. Согласно формуле (П.4.10), для $h\geqslant 1$, так как $t_1\geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+it_1)\geqslant -8\left(\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\ln t_1+\ln_2 t_1+\ln c_8\right)+\frac{1}{\sigma_0-\beta}>\\ >-c_9\left(\ln\frac{1}{a}+\ln t_1\right)+\frac{1}{\sigma_0-\beta}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Применим теперь теорему П.4.5 в несколько другой форме, заменяя s_0 через $s_0'=\sigma_0+i2t_1$, и возьмем опять $r=1/2$. Тогда, так как $|t-2t_1|\leqslant 1/2$ при $|s-s_0'|\leqslant 1/2$, в области $|s-s_0'|\leqslant 1/2$ из (4.9) и (4.18) получим

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0')}=O\left(\frac{1}{a}\,t^{\frac{1}{2}}\ln t_1\right)=O\left(\frac{1}{a}\,t_1^{\frac{1}{2}}\ln t_1\right). \tag{4.24}$$

Следовательно, мы можем применить теорему П.4.5 для $M=c_{10}\frac{1}{a}\,t_1^{\frac{1}{2}}\ln t_1$. Так же как и при выводе (4.23), согласно П.4.9 [1]), имеем

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0+i2t_1)>-c_{11}\left(\ln\frac{1}{a}+\ln t_1\right). \tag{4.25}$$

Отсюда можно вывести оценку третьего члена в (4.3). Согласно формуле (3.2), для первого члена мы получим следующую оценку:

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)=\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0)>-\frac{1+\varepsilon}{\sigma_0-1}. \tag{4.26}$$

Эта оценка справедлива при любом $\varepsilon>0$ и достаточно малом σ_0-1, т. е. при достаточно малом a. Таким образом, мы можем взять a из интервала $0<a<a(\varepsilon)<a_1<1/2$. Положим в оценках (4.23), (4.25)

[1]) Безразлично имсет или не имеет $\zeta(s)$ нули в круге $|s-s_0'|\leqslant 1/2 r=1/4$.

и (4.26) $\sigma_0 = 1 + a/\ln t_1$, $\beta = 1 - b/\ln t_1$ и подставим это в (4.3). Тогда получим

$$-\frac{3(1+\varepsilon)}{a}\ln t_1 + \frac{4}{a+b}\ln t_1 - (4c_9 + c_{11})\left(\ln\frac{1}{a} + \ln t_1\right) < 0. \quad (4.27)$$

Теперь выберем ε настолько малым, чтобы $4 - 3(1+\varepsilon) > 0$ (например, $\varepsilon = 1/4$). Тогда при $0 < a < a_2 < a_1 < 1/2$, $(a_2 = a(\varepsilon),\ \varepsilon = 1/4)$ имеем

$$\left(-\frac{15}{4a} + \frac{4}{a+b} - c_{12}\right)\ln t_1 - c_{12}\ln\frac{1}{a} < 0. \quad (4.28)$$

Так как $\frac{1}{a}$ при $a \to +0$ стремится к бесконечности быстрее, чем $\ln\frac{1}{a}$, то при достаточно малом a, например при $0 < a < a_3 < a_2$, имеет место неравенство

$$\left(-\frac{15}{4a} + \frac{4}{a} - c_{12}\right)\ln 3 - c_{12}\ln\frac{1}{a} > 0. \quad (4.29)$$

Поэтому $\left(\frac{1}{4a} - c_{12}\right) > 0$. При $0 < a < a_3$ из (4.28) следует

$$\left(-\frac{15}{4a} + \frac{4}{a+b} - c_{12}\right)\ln 3 - c_{12}\ln\frac{1}{a} < 0, \quad (4.30)$$

если b настолько мало, что выражение в скобках положительно $\left(\text{это возможно, так как } \frac{1}{4a} - c_{12} > 0\right)$, например $0 < b < b_1 = b_1(a) < \frac{1}{8}\ln 3$. При $b = 0$ левая часть (4.30) переходит в левую часть (4.29). Отсюда следует, что для постоянного a, $0 < a < a_3$, и всех достаточно малых b, например $0 < b < b_2 < b_1$ (b_2 не зависит от t_1), неравенство (4.30) дает нам противоречие. Этим теорема 4.5 доказана.

Мы видим, что принцип доказательства теоремы 4.5 тот же самый, что и доказательства теоремы 4.2. Неравенство (4.23) означает, что $\mathrm{Re}\,(\zeta'/\zeta)$ — большое положительное число вблизи точки $s = \beta + it_1$; это видно из присутствия члена $1/(\sigma_0 - \beta)$ $(\sigma_0 > \beta)$. Равенство (3.2) показывает, что $\mathrm{Re}\,(\zeta'/\zeta)$ большое по модулю отрицательное для действительного $s > 1$ вблизи $s = 1$. Но член $-3(1+\varepsilon)/a$, порожденный полюсом, при достаточно малом b уже может не компенсировать члена $4/(a+b)$, порожденного нулями. Неравенство (4.25) нужно для того, чтобы третий член $\zeta'(\sigma_0 + i2t_1)/\zeta(\sigma_0 + i2t_1)$ существенно не менялся от этого обстоятельства. Положение сложнее, чем в теореме 4.2 из-за того, что мы должны использовать (4.3) для получения сведений о точках слева от прямой $\sigma = 1$, в то время как в теореме 4.2 нас интересовали нули только на этой прямой. Поэтому вместо оценок (4.5), (4.6), (4.7) здесь появляются более сложные оценки (4.23), (4.26), (4.25), для доказательства которых была необходима теорема П.4.5.

Теорема 4.6. *Если* $T \geqslant 3$, *то при подходящем* c_{13}

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ в области } \sigma \geqslant 1 - \frac{c_{13}}{\ln T} \geqslant \frac{1}{2}, \quad |t| \leqslant T+1. \tag{4.31}$$

Доказательство. Если $|t| \geqslant 3$, то утверждение теоремы следует из теоремы 4.5, так как $c_7/\ln|t| \geqslant c_7/\ln(T+1)$ для $3 \leqslant |t| \leqslant T+1$ и $\ln T/\ln(T+1) \geqslant \ln 3/\ln 4$ для $T \geqslant 3$. В области $1/2 \leqslant \sigma < 1$, $|t| \leqslant 3$ лежит самое большее конечное число нулей $\zeta(s)$, а на прямой $\sigma = 1$ вообще нет нулей. Поэтому при достаточно малом c имеем [1])

$$\zeta(s) \neq 0, \quad \sigma \geqslant 1 - c, \quad |t| \leqslant 3, \tag{4.32}$$

и отсюда следует (4.31) также для $|t| \leqslant 3$; можно, например, взять $c_{13} = \min(c_7 \ln 3/\ln 4, \quad c \ln 3)$.

Теорема 4.7 [2]). *Если* $T \geqslant 3$, *то при подходящем* c_{14}

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < c_{15} \ln T, \quad \begin{cases} \sigma \geqslant 1 - \dfrac{c_{14}}{\ln T} \geqslant \dfrac{1}{2}, & 3 \leqslant |t| \leqslant T, \\ \sigma = 1 - \dfrac{c_{14}}{\ln T}, & |t| \leqslant 3. \end{cases} \tag{4.33}$$

Доказательство. Пусть $3 \leqslant |t_1| \leqslant T$. Применим теорему П. 4.6, положив в ней $F(s) = \zeta(s)$, $s_0 = \sigma_0 + it$, $\sigma_0 = 1 + a/\ln T$, $r = \frac{1}{2}$, $r_1 = 2a/\ln T$. При достаточно малом a, например $0 < a < a_1 < \frac{1}{2}$, для всех $T \geqslant 3$ имеем $r_1 < \frac{1}{4} r$ и, согласно теореме 4.6, получаем

$$F(s) = \zeta(s) \neq 0 \quad \text{в} \quad \text{области} \quad |s - s_0| \leqslant r, \quad \operatorname{Re}(s - s_0) > -2r_1.$$

Так как $|t_1| \geqslant 3$, то $\zeta(s)$ регулярна в круге $|s - s_0| = r \leqslant \frac{1}{2}$, причем, если фиксировать $a = c_{16}$, в этом круге имеет место оценка:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s_0)} = O\left(\frac{1}{a} T^{\frac{1}{2}} \ln T\right) = O\left(T^{\frac{1}{2}} \ln T\right),$$

аналогичная (4.22). Далее, согласно (2.12) и (3.2), для $\sigma_0 > 1$ получаем

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s_0)\right| \leqslant -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) = O\left(\frac{1}{\sigma_0 - 1}\right) = O\left(\frac{1}{a} \ln T\right) = O(\ln T). \tag{4.34}$$

---

[1]) Так как $\zeta(s)$ при $\sigma > 0$ — аналитическая функция (кроме полюса $s = 1$) и нули $\zeta(s)$ не могут находиться в любой близости отрезка $\sigma = 1$, $|t| \leqslant 3$.

[2]) Метод доказательства см. у Ландау [7].

Следовательно, условия теоремы П. 4.6 выполнены при $M = cT^{\frac{1}{2}} \ln T$. Из (П. 4.14) находим

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right| < c_{17} \ln T, \qquad |s - s_0| \leqslant r_1 = \frac{2c_{16}}{\ln T}.$$

В частности, при $t = t_1$ имеем $1 - c_{16}/\ln T \leqslant \sigma \leqslant 1 + 3c_{16}/\ln T$. Поскольку функция $-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)$ при $\sigma > 1$ монотонно убывает, согласно (2.12) и (3.2), соотношения (4.33) при $\sigma \geqslant 1 - 3c_{16}/\ln T$ получаются из оценки

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \right| \leqslant -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right) \qquad (\sigma > 1).$$

Тем самым теорема доказана для $3 \leqslant |t| \leqslant T$. Так как $\zeta(s)$ не имеет нулей в полуплоскости $\sigma > 1$, в области $|t| \leqslant 3$, $1 - c_{17}/\ln T \leqslant \sigma \leqslant 2$ при достаточно малом c_{17} из (3.2) следует оценка

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O\left(\frac{1}{|s-1|}\right).$$

Отсюда в свою очередь при достаточно малом c, $\sigma = 1 - c/\ln T$ и $|t| \leqslant 3$ получаем оценку

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\ln T).$$

Теперь теорема 4.7 полностью доказана.

Теоремы 4.6 и 4.7 показывают, что предположения, которые предполагались верными в теореме 3.3, выполнены. Тем самым соотношение (3.8) полностью доказано. Из этого соотношения по теореме 2.4 вытекает теорема о простых числах.

Остаточный член в (3.8) имеет порядок меньше, чем $x/\ln^m x$ для сколь угодно большого постоянного m. Из (3.8) для $\pi(x)$ можно получить гораздо больше, чем соотношение $\pi(x) \sim x/\ln x$. Мы сделаем это в ближайшей главе для более общего случая простых чисел в арифметической прогрессии. Остаточный член в теореме о простых числах можно улучшить, заменив $\sqrt{\ln x}$ на $\ln^\alpha x$ при некотором $\alpha > \frac{1}{2}$. Однако это требует относительно более сложных вспомогательных средств (см. гл. VIII и IX).

Теорему о простых числах впервые доказали независимо друг от друга Адамар и Валле-Пуссен. Последний доказал более точное соотношение (3.8). Приведенное здесь доказательство с применением теорем П., § 3 и § 4, принадлежит Ландау [7]. Впрочем можно, если требуется доказать только соотношение $\psi(x) = x + o(x)$, заменить теоремы из П., § 4, гораздо более элементарными утверждениями (см., например, Ландау [5], гл. XI, XII; Ингам [2], гл. II). Методами Винера [1, 2] теорему о простых числах удается вывести из (4.4) без дальнейшего применения теории функций комплексного переменного. Сельбергу [3] и Эрдёшу [7] удалось дать доказательство, которое совершенно обходится без теории функций комплексного переменного и вариант которого мы приведем в § 6.

§ 5. Дальнейшие применения метода комплексного интегрирования[1])

Метод, применявшийся для доказательства теоремы о простых числах в § 1 — 4, можно коротко охарактеризовать так: для оценки суммы вида $\sum_{n \leqslant x} a_n$ (а именно, $a_n = \Lambda(n)$) рассматривают «производящую функцию»

$$f(s) = \sum_n a_n n^{-s}$$

(а именно, $f(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$) и из ее аналитических свойств пробуют сделать заключение о порядке верхней суммы. Естественно, что исследование аналитических свойств ζ'/ζ представляло основную трудность. Здесь будут коротко излагаться некоторые аналогичные проблемы.

Согласно (4.17), функция $1/\zeta(s)$ при $\sigma > 1$ разлагается в ряд Дирихле, сумма коэффициентов которого равна $\sum_{n \leqslant x} \mu(n)$.

Теорема 5.1. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right) \qquad (x \to \infty). \tag{5.1}$$

Доказательство. Из теоремы П. 3.1 при $a_n = \mu(n) = O(1)$, $\alpha = 1$, $w = 0$, $b > 1$ следует равенство

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)} + \frac{x \ln x}{T}\right), \tag{5.2}$$

если предположить, что x—половина нечетного числа $\geqslant 3$. Нам нужна теперь оценка $1/\zeta(s)$ слева от прямой $\sigma = 1$, чтобы можно было сдвинуть туда путь интегрирования так же, как мы это делали раньше для ζ'/ζ. Пусть $T \geqslant 3$ и A — положительная константа, которая существует согласно (4.33) и для которой выполняется соотношение

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| = O(\ln T), \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{A}{\ln T} \geqslant \frac{1}{2}, \quad 3 \leqslant |t| \leqslant T. \tag{5.3}$$

Тогда для такого s имеем

$$\int\limits_{\sigma}^{1+A/\ln T} \operatorname{Re}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(\eta + it)\right\} d\eta = \operatorname{Re} \ln \frac{1}{\zeta(s)} \Bigg|_{\sigma+it}^{1+A/\ln T+it} . \tag{5.4}$$

[1]) См. также Ландау [4], гл. 39—49; Титчмарш [4].

Теперь, согласно (3.1), получаем оценку

$$\left|\zeta\left(1+\frac{A}{\ln T}+it\right)\right| \leqslant \zeta\left(1+\frac{A}{\ln T}\right) = O(\ln T).$$

В силу (4.18) такое же неравенство имеет место и для

$$1\Big/\left|\zeta\left(1+\frac{A}{\ln T}+it\right)\right|.$$

Отсюда получаем

$$\ln\left|\zeta\left(1+\frac{A}{\ln T}+it\right)\right| = O(\ln_2 T).$$

Подставляя это и (5.3) в (5.4) и применяя (4.18) в области $\sigma \geqslant 1 - A/\ln T$, $3 \leqslant |t| \leqslant T$, получаем [1])

$$\ln\frac{1}{|\zeta(s)|} = \int\limits_{\sigma}^{1+A/\ln T} O(\ln T)\,d\eta + O(\ln_2 T) = O(\ln_2 T).$$

В этой же области

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O(\ln^B T), \qquad B > 0. \tag{5.5}$$

При подходящем A то же равенство имеет место в области $\sigma \geqslant 1 - A/\ln T$, $|t| \leqslant T$ $(T \geqslant 3)$, так как, согласно (4.4), $1/\zeta(s)$ ограничена в области $|t| \leqslant 3$, $\sigma \geqslant 1 - A/\ln T$, если A — достаточно малое число. Если в (5.2) выбрать $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$ и взять $a = 1 - A/\ln T$, а Γ, Γ_2, Γ_3, Γ_4 определить как в теореме 3.2, то

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,ds = 0,$$

$$\int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,ds = \left(\int\limits_{\Gamma} - \int\limits_{\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4}\right)\frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,ds,$$

так как $1/\zeta$ регулярна внутри Γ, и

$$\int\limits_{\Gamma_2\Gamma_4} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,ds = O\left(\frac{\ln^B T}{T}\int\limits_a^b x^\sigma\,d\sigma\right) = O\left(\frac{x\ln^B T}{T\ln x}\right),$$

$$\int\limits_{\Gamma_3} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\,ds = O\left(\ln^B T \cdot x^{1-A/\ln T}\int\limits_2^T \frac{dt}{t}\right).$$

[1]) Сначала только для $\sigma \leqslant 1 + A/\ln T$, а затем в силу теоремы 4.4 также и для $\sigma > 1 + A/\ln T$.

Подставляя все это в (5.2), найдем

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=O\left(\frac{x\ln x}{T}+\frac{x\ln^B T}{T\ln x}+x^{1-A/\ln T}\ln^{B+1}T\right).$$

Если положим здесь $T=\exp\left(c\sqrt{\ln x}\right)$, то для любого $x\geqslant 1$ получим утверждение, аналогичное утверждению теоремы 3.3.

Отсюда можно получить сразу же, что ряд

$$\sum_n \mu(n)\,n^{-(1+it)} \tag{5.6}$$

сходится для любого t. Так как

$$\int_1^\infty e^{-c\sqrt{\ln\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi}<\infty,$$

то, согласно теореме П.1.4, для $a_n=\mu(n)$ имеем

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\,n^{-(1+it)}=O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)+\int_1^x O\left(\xi e^{-c\sqrt{\ln\xi}}\right)\xi^{-2-it}\,d\xi=$$

$$=a+O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)+O\left(\int_x^\infty e^{-c\sqrt{\ln\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi}\right),\quad a=a(t).$$

Отсюда следует сходимость ряда (5.6). Сумма ряда получается из теоремы Абеля о предельном значении рядов Дирихле (П., § 2)

$$a(t)=\lim_{\sigma\to 1+0}\left(\sum_n\mu(n)\,n^{-(\sigma+it)}\right)=\lim_{\sigma\to1+0}1/\zeta(\sigma+it)=\begin{cases}\dfrac{1}{\zeta(1+it)}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\sum_n\mu(n)\,n^{-1}=0. \tag{5.7}$$

Уже давно известно, что равенство (5.7) можно получить из теоремы о простых числах без применения теории функций комплексного переменного и что, наоборот, из (5.7) можно получить теорему о простых числах также без применения теории функций комплексного переменного (см. Ландау [1, 6]). Перед открытием элементарного, т. е. без использования теории функций, доказательства теоремы о простых числах две теоремы называли эквивалентными, если для доказательства любой из них нужны были теоретико-функциональные вспомогательные средства, но одна из другой получалась элементарно, т. е. без теории функций. В этом смысле теорема о простых числах и формула (5.7) должны считаться эквивалентными. Отчасти еще и сегодня можно защищать это (несколько проблематичное) различие между доказываемыми элементарно и недоказываемыми элементарно теоремами. Например, соотношение (3.8), более сильное, чем теорема о простых числах, пока никто не смог доказать без теории функций.

Аналогично ряду (5.6) можно исследовать ряд

$$\sum_{n\leqslant x} \mu(n)\ln^{\alpha} n\cdot n^{-(1+it)},\quad \alpha\geqslant 0.$$

По теореме П.1.4 и формуле (5.1) находим

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^{1+it}}\ln^{\alpha} n = O\left(\ln^{\alpha} x\cdot e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)+b+$$

$$+O\left(\int_x^{\infty} e^{-c\sqrt{\ln\xi}}\ln^{\alpha}\xi\,\frac{d\xi}{\xi}\right)=b+O\left(e^{-c_1\sqrt{\ln x}}\right),\qquad (5.8)$$

так как

$$\int_x^{\infty} e^{-c\sqrt{\ln\xi}}\ln^{\alpha}\xi\,\frac{d\xi}{\xi}\leqslant A\int_x^{\infty} e^{-c_2\sqrt{\ln\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi}$$

и

$$\int_x^{\infty} e^{-c\sqrt{\ln\xi}}\frac{d\xi}{\xi}=\int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{\ln\xi}}\,e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{\ln\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi}\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{\ln x}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{\ln\xi}}\,\frac{d\xi}{\xi}=O\left(e^{-\frac{1}{2}c\sqrt{\ln x}}\right).$$

Поэтому сходимость ряда установлена. Для целого α значение ряда получается из теоремы Абеля о предельном значении рядов Дирихле (П., § 2):

$$\sum_{n}\mu(n)\ln^{\alpha}n\,n^{-(1+it)}=\lim_{\sigma\to 1+0}\sum_{n}\mu(n)\ln^{\alpha}n\,n^{-(\sigma+it)}$$

и

$$\sum_{n}\mu(n)\ln^{\alpha}n\,n^{-s}=(-1)^{\alpha}\left(\frac{d}{ds}\right)^{\alpha}\frac{1}{\zeta(s)}.$$

В частности, при $s=1$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{\zeta(s)}=(s-1)+a_2(s-1)^2+\ldots,$$

следовательно

$$\sum_{n}\frac{\mu(n)}{n}\cdot\ln n=-1.\qquad (5.9)$$

С функцией $\mu(n)$ тесно связана функция $\lambda(n)$, которая определяется следующим образом:

$$\lambda(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ (-1)^{V(n)}, & n>1,\end{cases}$$

причем $V(n)$ — число всех (а не только различных) простых сомножителей n[1]). Легко проверить, что для $\sigma > 1$ имеет место равенство

$$\sum_n \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} - \ldots\right) =$$
$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \frac{(1-p^{-s})}{(1-p^{-2s})} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

Далее получаем

$$\sum_n \frac{1}{n^{2s}} \sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_n \frac{\lambda(n)}{n^s}.$$

Отсюда и из теоремы П.2.3 ($a_{n^2} = 1$, $a_m = 0$ для $m \neq n^2$) следует равенство

$$\lambda(n) = \sum_{d^2 \mid n} \mu\left(\frac{n}{d^2}\right). \tag{5.10}$$

Его можно доказать и непосредственно из определений $\mu(n)$ и $\lambda(n)$.

Теорема 5.2. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda(n) = O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right). \tag{5.11}$$

Доказательство. Теорему можно доказывать так же, как теорему 5.1, используя свойства $\zeta(2s)/\zeta(s)$. Все зависит главным образом от $1/\zeta(s)$, так как $\zeta(2s)$ ограничена при $\sigma > {}^3/_4$. Но можно доказать (5.11) проще, пользуясь теоремой 5.1 и формулой (5.10). Из них следует, что

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d^2 \mid n} \mu\left(\frac{n}{d^2}\right) =$$
$$= \sum_{d^2 \leqslant x} \sum_{m \leqslant x \mid d^2} \mu(m) = \sum_{d \leqslant x^{1/2}} O\left(\frac{x}{d^2} \exp\left(-c \ln^{\frac{1}{2}} \frac{x}{d^2}\right)\right). \tag{5.12}$$

Так как при $\delta > 0$

$$\sum_{n > N} n^{-(1+\delta)} \leqslant \int_N^\infty \xi^{-(1+\delta)} d\xi = \frac{1}{\delta} N^{-\delta},$$

[1]) Простой сомножитель, входящий в n в степени k, считается k раз. — *Прим. ред*

то

$$\sum_{d\leqslant x^{1/2}} \frac{1}{d^2}\exp\left(-c\ln^{\frac{1}{2}}\frac{x}{d^2}\right)=\sum_{d\leqslant x^{1/4}}+\sum_{x^{1/4}<d\leqslant x^{1/2}}\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-c\ln^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{n}\frac{1}{n^2}+\sum_{n>x^{1/4}}\frac{1}{n^2}=O\left(e^{-c_1\sqrt{\ln x}}\right)+O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Подставляя это в (5.12), получаем (5.11).

Теорему 5.2 можно сформулировать еще так: имеется асимптотически одинаково много чисел с четным и нечетным числом простых множителей. Именно, если мы положим

$$S_{\pm 1}(x)=\sum_{n\leqslant x,\ \lambda(n)=\pm 1} 1,$$

то из (5.11) следует, что $S_1(x)-S_{-1}(x)=o(x)$. С другой стороны,

$$S_1(x)+S_{-1}(x)=\sum_{n\leqslant x} 1=[x].$$

Из этих двух равенств получаем

$$S_1(x)=\frac{1}{2}x+o(x),\quad S_{-1}(x)=\frac{1}{2}x+o(x).$$

Подобно равенству (5.10), из теоремы П.2.3 следует многочисленные соотношения между $\psi(n)$, $\mu(n)$, $\Lambda(n)$, $d(n)$; некоторые из этих соотношений мы сейчас приведем. Из равенства

$$\sum_{n}\frac{1}{n^s}\sum_{n}\frac{\mu(n)}{n^s}=1\quad(\sigma>1),$$

которое выполняется в силу теоремы П. 2.3, следует, что

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad n=1,\\ 0, & \text{если}\quad n>1.\end{cases}$$

Далее из $(1/\zeta)'=(-\zeta'/\zeta)(1/\zeta)$ можно заключить, что

$$\sum_{n}\frac{1}{n^s}\sum_{n}\frac{\mu(n)}{n^s}\ln n=-\sum_{n}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

и отсюда

$$\Lambda(n)=-\sum_{d\mid n}\mu(d)\ln d. \tag{5.13}$$

Из равенства $\zeta'=(\zeta'/\zeta)\zeta$ следует

$$\sum_{n}\frac{1}{n^s}\sum_{n}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\sum_{n}\frac{\ln n}{n^s},$$

а потому

$$\sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \ln n. \tag{5.14}$$

Из равенства (5.14) следует соотношение

$$\sum_{n \leqslant x} \sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right] = \ln [x]!,$$

которым мы пользовались в гл. I. Из него по (1.3.2) и (2.17) получаем

$$x \sum_{d \leqslant x} \frac{\Lambda(d)}{d} = \ln [x]! + O(x),$$

так как

$$\sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) = O(x).$$

Последнее равенство приводит опять к формуле $\sum_{p \leqslant x} \ln p/p = \ln x + O(1)$. Из равенства

$$-\sum_{n} \frac{\mu(n)}{n^s} \ln n = \sum_{n} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \sum_{n} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

следует равенство

$$-\mu(n) \ln n = \sum_{d \mid n} \mu(d) \Lambda\left(\frac{n}{d}\right), \tag{5.15}$$

а из него

$$-\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \ln n = \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \sum_{m \leqslant x/d} \Lambda(m) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \psi\left(\frac{x}{n}\right). \tag{5.16}$$

Перемножая ряды Дирихле, получаем

$$\zeta^2(s) = \sum_{n} \frac{1}{n^s} \sum_{d \mid n} 1 = \sum_{n} \frac{d(n)}{n^s}, \tag{5.17}$$

и из равенства $\zeta^2 \cdot \zeta^{-1} = \zeta$ следует, что

$$\sum_{\delta \mid n} \mu(\delta) d\left(\frac{n}{\delta}\right) = 1. \tag{5.18}$$

Равенство $\zeta'' \cdot \zeta^{-1} = (\zeta'/\zeta)' + (\zeta'/\zeta)^2$ приводит к соотношению

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) \ln^2 \frac{n}{d} = \Lambda(n) \ln n + \sum_{d \mid n} \Lambda(d) \Lambda\left(\frac{n}{d}\right). \tag{5.19}$$

Естественно, что $\Lambda(d)\Lambda(n/d)$ только тогда отлично от нуля, когда d и n/d являются степенями простых чисел; следовательно, последняя сумма обратится в нуль, если n имеет более двух различных простых множителей.

Равенства (5.13) — (5.19) легко доказать и без использования рядов Дирихле.

Функция $\ln\zeta(s)$ при $\sigma > 1$ представляется рядом

$$\ln\zeta(s) = \sum_p \sum_m \frac{1}{mp^{ms}} = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s \ln n} \text{ [1]} \tag{5.20}$$

(при $n=1$ нужно положить $\Lambda(n)/\ln n = 0$), что сразу же получается из разложения произведения $\zeta(s)$. Под $\ln\zeta$ понимают ту ветвь логарифма, которая действительна для действительного $s=\sigma > 1$.

Теорема 5.3. *При $x \to \infty$ имеет место равенство*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n \ln n} = \ln\ln x + \gamma + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right), \tag{5.21}$$

где γ — постоянная Эйлера.

Доказательство. Пусть $x > 2$, $T > 3$ и x равно половине нечетного числа. Тогда, согласно теореме П.3. 1 с параметрами $w=1$, $b > 0$, $a_n = O(1)$, получим

$$\sum_{n<x} \frac{\Lambda(n)}{n\ln n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \ln\zeta(s+1)\frac{x^s}{s}\,ds + O\left(\frac{x^b}{Tb} + \frac{\ln x}{T}\right),$$

так как в этом случае можно взять $\alpha = 1$. При $b = 1/\ln x$ это означает, что

$$\sum_{n<x} \frac{\Lambda(n)}{n\ln n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \ln\zeta(s+1)\frac{x^s}{s}\,ds + O\left(\frac{\ln x}{T}\right). \tag{5.22}$$

Теперь имеет место следующее соотношение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \ln\zeta(s+1)\frac{x^s}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{-\delta-iT} + \int_{-\delta-iT}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{-\delta+iT} + \int_{-\delta+iT}^{b+iT} + \int_C\right), \tag{5.23}$$

где C — окружность с центром в точке $s=0$, пробегаемая в положительном направлении и имеющая начало и конец в точке $s=-\delta$, которая определяется следующим образом: в области $\sigma \geqslant -\delta$, $|t| \leqslant T$ не должно быть нулей функции $\zeta(s+1)$ и на пути интегрирования в правой части (5.23) должно выполняться равенство $\ln\zeta(s+1) = O(\ln_2 T)$. Формула (5.23) следует из теоремы о вычетах, так как

[1] Для $n = p^m$ естественно имеем $1/mp^{ms} = \Lambda(n)/n^s \ln n$.

$\ln \zeta(s+1) \cdot x^s/s$ регулярна и однозначна внутри замкнутого контура, который получается из путей интегрирования левой и правой части равенства (5.23). При подходящем $A > 0$ величину δ можно взять равной $A/\ln T$ $(T > 3)$; при этом, однако, надо принять во внимание, что при $|s| \to 0$ имеет место равенство [1])

$$\ln \zeta(s+1) = \ln \frac{1}{s} + O(|s|), \tag{5.24}$$

так что при достаточно малом A, в частности также и на C, имеет место оценка

$$\ln \zeta(s+1) = O\left\{\ln (A/\ln T)^{-1}\right\} + O(1) = O(\ln_2 T).$$

Полагая теперь [2]) $T = \exp\left\{c\sqrt{\ln x}\right\}$, находим

$$\int\limits_{-\delta-iT}^{-\delta} \ln \zeta(s+1) \frac{x^s}{s}\, ds = O\left\{x^{-\delta} \ln_2 T \int\limits_0^T |-A/\ln T - it|^{-1}\, dt\right\} =$$
$$= O(x^{-\delta} \ln T \ln_2 T) = O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right) \text{ [3])}.$$

Это же соотношение имеет место для интеграла по пути $(-\delta, \delta + iT)$. Далее

$$\int\limits_{-\delta+iT}^{b+iT} \ln \zeta(s+1) \frac{x^s}{s}\, ds = O\left(\frac{\ln_2 T}{T} \int\limits_{-\delta}^{b} x^\sigma\, d\sigma\right) =$$
$$= O\left(\frac{\ln_2 T}{T} x^b\right) = O\left(\frac{\ln_2 T}{T}\right) = O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$$

и то же самое — для интеграла по пути $(-\delta - iT,\ b - iT)$. Так как функция

$$\frac{1}{s}\left\{\ln \zeta(s+1) - \ln \frac{1}{s}\right\}$$

в окрестности $s = 0$ однозначна и регулярна, то при достаточно малом A имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \ln \zeta(s+1) \frac{x^s}{s}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \ln \frac{1}{s} \frac{x^s}{s}\, ds.$$

---

[1]) Вытекающее из разложения $\zeta(s+1) = 1/s + a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ в окрестности точки $s = 0$. При этом $-\pi < \operatorname{Im} \ln (1/s) \leqslant \pi$.

[2]) Напомним, что c не всегда имеет одно и то же значение.

[3]) При $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеет место оценка $|-A/\ln T - it|^{-1} \leqslant (\ln T)/A$, а при $1 \leqslant t \leqslant T$ весь модуль не больше $1/t$.

Из равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\ln\frac{1}{s}\,\frac{ds}{s}=\Delta_C\left\{-\frac{1}{4\pi i}\ln^2 s\right\}=$$
$$=-\frac{1}{4\pi i}\left\{\ln^2(\delta e^{i\pi})-\ln^2(\delta e^{-i\pi})\right\}=-\ln\delta,$$

в котором $\Delta_c f(s)$ обозначает изменение $f(s)$ вдоль C, следует

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\ln\zeta(s+1)\,\frac{x^s}{s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\ln\frac{1}{s}\,\frac{x^s-1}{s}\,ds-\ln\delta. \qquad (5.25)$$

Для вычисления последнего интеграла возьмем $\delta'<\delta$ и преобразуем C в следующий путь: отрезок $(-\delta, -\delta')$ с $\arg s=-\pi$, круг радиуса δ' с центром в точке $s=0$ (проходимый в положительном направлении) и отрезок $(-\delta', -\delta)$ с $\arg s=\pi$. Интегралы вдоль действительных отрезков дают вместе величину

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta}^{\delta'}\ln\left(\frac{1}{\eta e^{-i\pi}}\right)\frac{x^{-\eta}-1}{\eta}\,d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta'}^{\delta}\ln\left(\frac{1}{\eta e^{i\pi}}\right)\frac{x^{-\eta}-1}{-\eta}\,d\eta=$$
$$=-\int\limits_{\delta'}^{\delta}\frac{x^{-\eta}-1}{\eta}\,d\eta=\int\limits_{\delta'\ln x}^{\delta\ln x}\frac{1-e^{-u}}{u}\,du.$$

Выберем теперь $\delta'=\delta'(x)$ так, чтобы $\delta'\ln x\to 0$ при $x\to\infty$; из определения δ следует, что

$$\delta\ln x=A\ln x/\ln T=c\sqrt{\ln x}\to\infty.$$

Тогда для $x\to\infty$ получим

$$\int\limits_{\delta'\ln x}^{\delta\ln x}\frac{1-e^{-u}}{u}\,du=\int\limits_{\delta'\ln x}^{1}\frac{1-e^{-u}}{u}\,du-\int\limits_{1}^{\delta\ln x}\frac{e^{-u}}{u}\,du+\ln(\delta\ln x)=$$
$$=\gamma+\ln(\delta\ln x)+O\left(\delta'\ln x+e^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

так как

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du,\text{[1]}$$

$$\int_0^{\delta' \ln x} \frac{1-e^{-u}}{u}\,du = O\left(\int_0^{\delta' \ln x} du\right) = O(\delta' \ln x),$$

$$\int_{\delta \ln x}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du \leqslant \int_{\delta \ln x}^\infty e^{-u}\,du = x^{-\delta} = O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

Из равенства $(x^s - 1)/s = \ln x\,(1 + O(|s| \ln x))$, $|s| \ln x \to 0$, следует

$$\int_{|s|=\delta'} \ln\left\{\frac{1}{s}\frac{x^s-1}{s}\right\} ds = O\left(\delta' \ln \frac{1}{\delta'} \ln x\right).$$

Положим теперь $\delta' = \exp\{-c \ln x\}$ и внесем все это в (5.25). Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \ln \zeta(s+1)\,\frac{x^s}{s}\,ds = \ln_2 x + \gamma + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

Подставляя эти оценки в (5.25), (5.22) и принимая во внимание, что $\ln x/T = O\left(e^{-\sqrt{\ln x}}\right)$, получаем (5.21). Из формулы (5.21) следует теорема 1.4.1 с более точным остаточным членом:

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln_2 x + \gamma - \sum_p \sum_{m \geqslant 2} \frac{1}{mp^m} + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

Можно и без теории функций доказать, что константа a в теореме 1.4.1 совпадает с постоянной Эйлера. Это было известно уже давно (Мертенс [1], см. также Харди [1]). Если известно, что выполняется равенство

$$A(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln_2 x + a + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \quad (x \to \infty),$$

то, так как $A(x)\,x^{1-\sigma} \to 0$ $(x \to \infty)$, из теоремы П.1.4 при $\sigma > 1$ следует соотношение

$$f(\sigma) = \sum_p p^{-\sigma} = \sum_p \frac{1}{p}\,p^{1-\sigma} = (\sigma - 1)\int_2^\infty A(\xi)\,\xi^{-\sigma}\,d\xi.$$

---

[1]) Это формально следует из равенства

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = \int_0^1 \left\{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n\right\}\frac{du}{u} - \int_1^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \frac{du}{u}$$

при $n \to \infty$. Вводя новую переменную $1 - u/n$, после коротких преобразований получаем эту формулу.

Отсюда

$$f(\sigma)=(\sigma-1)\int_2^\infty \ln_2\xi\,\frac{d\xi}{\xi^\sigma}+(\sigma-1)\int_2^\infty a\,\frac{d\xi}{\xi^\sigma}+$$

$$+(\sigma-1)\int_2^\infty R(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi^\sigma}=J_1+J_2+J_3;\quad R(\xi)=O(1/\ln\xi).$$

Из интегрального представления функции $\Gamma(s)$ с помощью дифференцирования получаем

$$\gamma=-\int_0^\infty e^{-u}\ln u\,du$$

(так как $\gamma=-\Gamma'(1)$). Если положить $\xi^{\sigma-1}=e^u$, то при $\sigma\to 1+0$ можно написать

$$J_1=(\sigma-1)\int_1^\infty \ln_2\xi\,\frac{d\xi}{\xi^\sigma}+O((\sigma-1))=\int_0^\infty e^{-u}\ln\frac{u}{\sigma-1}\,du+$$

$$+O((\sigma-1))=-\gamma-\ln(\sigma-1)+o(1),$$

$$J_2=a+o(1),$$

$$|J_3|\leqslant c(\sigma-1)\int_2^\infty \frac{d\xi}{\xi^\sigma\ln\xi}\leqslant$$

$$\leqslant c(\sigma-1)\left\{\int_1^{1/(\sigma-1)}\frac{d\xi}{\xi}+\int_{1/(\sigma-1)}^\infty \frac{1}{\ln\{1/(\sigma-1)\}}\,\frac{d\xi}{\xi^\sigma}\right\}=o(1).$$

В итоге при $\sigma\to 1+0$

$$f(\sigma)=-\ln(\sigma-1)-\gamma+a+o(1). \tag{5.26}$$

С другой стороны, согласно (2.9) и (3.1), для $f(\sigma)$ выполняется равенство

$$f(\sigma)=\ln\zeta(\sigma)-\sum_p\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{mp^{m\sigma}}=-\ln(\sigma-1)+o(1)-\sum_p\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{mp^m}$$

при $\sigma\to 1+0$. Сравнивая это с (5.26), получаем

$$a=\gamma-\sum_p\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{mp^m}.$$

Так как имеют место равенства

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=-\sum_{p\leqslant x}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)-\sum_p\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{mp^m}+\sum_{p>x}\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{mp^m}$$

и

$$\sum_{p>x}\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{mp^m}\leqslant\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}=O\left(\frac{1}{x}\right),$$

то из (5.21) следует, что

$$-\sum_{p\leqslant x}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=\ln_2 x+\gamma+O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$$

Отсюда уже получается асимптотическая формула

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\left(1+O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)\right).$$

Если не пользоваться вспомогательными теоретико-функциональными средствами, из теоремы 1.4.1 можно было бы получить в остаточном члене этой формулы только $O(1/\ln x)$. Впрочем, если не интересоваться значением γ, формулу (5.21) можно получить также с помощью частного суммирования из равенства $\psi(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\Lambda(n)=x+O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$ по теореме П.1.4 без дальнейшего применения комплексного интегрирования.

§ 6. Элементарное доказательство теоремы о простых числах

Основой всех до сих пор известных элементарных доказательств теоремы о простых числах является асимптотическая формула Сельберга [3]

$$\theta(x)\ln x+\sum_{p\leqslant x}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p=2x\ln x+o(x\ln x)\qquad(x\to\infty).\quad(6.1)$$

Если считать теорему о простых числах доказанной, то эта формула следует сейчас же из результатов гл. I. Действительно, из равенства $\theta(x)=x+o(x)$ при $x\to\infty$ следует, что $\theta(x)\ln x=x\ln x+o(x\ln x)$. Далее получаем

$$\sum_{p\leqslant x}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p=\sum_{p\leqslant x/\ln x}+\sum_{x/\ln x<p\leqslant x}=$$

$$=x\sum_{p\leqslant x/\ln x}\frac{\ln p}{p}+o\left(x\sum_{p\leqslant x/\ln x}\frac{\ln p}{p}\right)+O\left(x\sum_{x/\ln x<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}\right)=$$

$$=x\ln x+o(x\ln x),\quad(6.2)$$

так как $\theta\left(\frac{x}{p}\right)=x/p+o\left(\frac{x}{p}\right)$ при $p\leqslant x/\ln x$, а $\theta\left(\frac{x}{p}\right)=O\left(\frac{x}{p}\right)$ при $p\leqslant x$ и так как в силу (1.3.3) имеет место соотношение

$$\sum_{x/\ln x<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}=\ln\ln x+O(1),\qquad x\to\infty.$$

Но не только равенство (6.1) следует из теоремы о простых числах, а также, наоборот, из этого равенства можно получить теорему о простых числах. Этим относительно сложным переходом от (6.1) к теореме о простых числах и отличаются друг от друга различные элементарные доказательства. Доказательство (6.1) возможно без использования вспомогательных теоретико-функциональных средств.

Если (6.1) записать в форме

$$\theta(x) + \frac{1}{\ln x} \sum_{p \leqslant x} \theta\left(\frac{x}{p}\right) \ln p = 2x + o(x), \tag{6.3}$$

то второй член слева можно считать за среднее значение функции $\theta(x)$ по всем точкам x/p. В этом случае равенство (6.3) означает, что значение функции $\theta(x)$ плюс некоторое среднее значение асимптотически ведут себя так, как если бы $\theta(x)$ было эквивалентно x. Теоремы, которые позволяют судить по поведению среднего значения функции о поведении самой функции, называются, как известно, тауберовыми теоремами.

Гораздо легче судить о поведении среднего значения по поведению функции, как мы это делали при выводе (6.2), чем наоборот, поскольку при усреднении свойства функции, вообще говоря, „стираются". Например, легко можно доказать, что из соотношений

$$f(s) = \sum a_n n^{-s}, \quad \sigma > 1, \quad \sum_{n \leqslant x} a_n \sim Ax, \quad x \to \infty,$$

при $s \to 1+0$ следует соотношение

$$(s-1) f(s) \to A$$

(здесь $\sum\limits_{n \leqslant x} a_n$ — функция и $(s-1) f(s)$ — „среднее значение"). Обратное, однако, вообще говоря, не верно, как видно на примере следующей функции (Ингам [2], стр. 38):

$$f(s) = \zeta(s) + \frac{1}{2}\{\zeta(s+i) + \zeta(s-i)\}.$$

Если бы обратное было всегда (или по крайней мере при $a_n \geqslant 0$) верно, то отсюда при $a_n = \Lambda(n)$ следовала бы теорема о простых числах.

Для доказательства (6.1) нам нужна

Лемма 6.1. *Пусть функция $F(x)$ определена при $x \geqslant 1$, и пусть функция $G(x)$ задана равенством*

$$G(x) = \sum_{m \leqslant x} F\left(\frac{x}{m}\right) \ln x. \tag{6.4}$$

Тогда имеет место соотношение

$$F(x) \ln x + \sum_{n \leqslant x} F\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = \sum_{d \leqslant x} \mu(d)\, G\left(\frac{x}{d}\right). \tag{6.5}$$

Доказательство. Из равенства $\ln n = \sum\limits_{d \mid n} \Lambda(d)$ по формуле обращения Мёбиуса[1]) следует

$$\Lambda(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \ln \frac{n}{d}.$$

[1]) Гл. II, задача 5 и теорема 2.2.1.

Отсюда получается (см. (2.2.6))

$$F(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\ln\frac{x}{n}\sum_{d\mid n}\mu(d)+\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{d\mid n}\mu(d)\ln\frac{n}{d}=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{d\mid n}\mu(d)\left\{\ln\frac{x}{n}+\ln\frac{n}{d}\right\}=\sum_{n\leqslant x}F\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{d\mid n}\mu(d)\ln\frac{x}{d}=$$

$$=\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\ln\frac{x}{d}\sum_{m\leqslant x/d}F\left(\frac{x}{dm}\right)=\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\,G\left(\frac{x}{d}\right).$$

Теорема 6.1. *При $x\geqslant 1$ справедливо равенство*

$$\psi(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)\Lambda(n)=2x\ln x+O(x). \tag{6.6}$$

Доказательство. Если положим в лемме 6.1 $F(x)=F_1(x)=$ $=\psi(x)$, то найдем, что

$$G(x)=G_1(x)=\ln x\sum_{m\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{m}\right)=$$

$$=\ln x\sum_{m\leqslant x}\sum_{n\leqslant x/m}\Lambda(n)=\ln x\sum_{k\leqslant x}\sum_{d\mid k}\Lambda(d)=$$

$$=\ln x\sum_{k\leqslant x}\ln k=x\ln^2 x-x\ln x+O(\ln^2 x)\ ^{1)}.$$

Если теперь положим $F(x)=F_0(x)=x-\gamma-1$, где γ — постоянная Эйлера, и используем [2]) равенство

$$\sum_{m\leqslant x}\frac{1}{m}=\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right), \tag{6.7}$$

то будем иметь

$$G(x)=G_0(x)=\ln x\sum_{m\leqslant x}\left\{\frac{x}{m}-\gamma-1\right\}=x\ln^2 x-x\ln x+O(\ln x).$$

В частности, отсюда следует, что

$$G_1(x)=G_0(x)+O\left(\sqrt{x}\right).$$

---

[1]) По формуле Стирлинга $\sum_{k\leqslant x}\ln k=x\ln x+O(x)$.

[2]) Это соотношение известно и следует впрочем также из теоремы П.1.5 (так же как при доказательстве (П.1.10)).

Так как в силу (П.1.10)

$$\sum_{d \leqslant x} \sqrt{\frac{x}{d}} = O(x),$$

то

$$\sum_{d \leqslant x} \mu(d)\, G_1\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{d \leqslant x} \mu(d)\, G_0\left(\frac{x}{d}\right) + O(x).$$

Отсюда следует, что при $F = F_1$ и $F = F_0$ левая часть равенства (6.5) остается одной и той же с точностью до $O(x)$. Из (1.3.2), (2.17) и из соотношения

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} + \sum_{p} \sum_{m \geqslant 2,\, p^m \leqslant x} \frac{\ln p}{p^m},$$

где двойная сумма меньше $\sum\limits_{n} \ln n/n^2 = O(1)$, следует, что

$$F_0(x) \ln x + \sum_{n \leqslant x} F_0\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) =$$

$$= (x - \gamma - 1) \ln x + \sum_{n \leqslant x} \left(\frac{x}{n} - \gamma - 1\right) \Lambda(n) = 2x \ln x + O(x).$$

Из (6.6) получаем

$$\psi(x) \ln x + \sum_{p \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{p}\right) \ln p = 2x \ln x + o(x \ln x), \tag{6.8}$$

потому что $\psi(x) = O(x)$ и

$$\sum_{p} \sum_{m \geqslant 2} \frac{x}{p^m} \ln p = O(x).$$

Доказательство теоремы этим заканчивается.

Равенство (6.1) следует теперь из равенства (6.8). Действительно, имеем

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \ldots + \theta\left(x^{\frac{1}{k}}\right), \quad k = [\ln x/\ln 2],$$

и, следовательно,

$$\psi(x) = \theta(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \ln x\right) = \theta(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right). \tag{6.9}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{p \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{p}\right) \ln p = \sum_{p \leqslant x} \theta\left(\frac{x}{p}\right) \ln p + O(R(x)).$$

При этом

$$R(x) = \sum_{p \leqslant x} \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \ln p = O(x),$$

поскольку, согласно (1.4.6), справедлива оценка

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p^{\frac{1}{2}}}\leqslant \ln x\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}=O\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Это доказательство, более простое по сравнению с первоначальным доказательством Сельберга, принадлежит Татудзаве и Исеки [1].

Из соотношения (6.1) должна следовать теперь теорема о простых числах. Для этого потребуются некоторые леммы.

Лемма 6 2. *При* $1\leqslant y<z$ *имеет место равенство*

$$\sum_{y<n\leqslant z}\frac{1}{n}=\ln\frac{z}{y}+O\left(\frac{1}{y}\right). \tag{6.10}$$

Доказательство получается сейчас же из (6.7).

Лемма 6.3. *При* $1\leqslant y<z\leqslant x$ *имеет место оценка*

$$\left|\sum_{y<n\leqslant z}\theta\left(\frac{x}{n}\right)-x\ln\frac{z}{y}\right|<Bx \tag{6.11}$$

с константой B, *не зависящей от* x, y, z.

Доказательство. При $1\leqslant y\leqslant x$ имеем

$$\sum_{n\leqslant y}\theta\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant y}\sum_{p\leqslant x/n}\ln p=\sum_{n\leqslant y}\left(\sum_{p\leqslant x/y}+\sum_{x/y<p<x/n}\right)\ln p=$$

$$=\sum_{p\leqslant x/y}[y]\ln p+\sum_{x/y<p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]\ln p=$$

$$=x\sum_{x/y<p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}+O(\theta(x))+[y]\,\theta\left(\frac{x}{y}\right).$$

Согласно (1.3.2) и (1.3.3), отсюда следует при $1\leqslant y\leqslant x$

$$\sum_{n\leqslant z}\theta\left(\frac{x}{n}\right)=x\ln y+O(x),$$

откуда получается (6.11).

Оценка (6.11) означает, что если сумма $\sum\theta(x/n)$ распространена на не слишком маленькую область, то она ведет себя как $\sum x/n$. Эта оценка тривиальна, если $x\ln(z/y)=O(x)$, т. е. если z/y ограничено величиной, не зависящей от x.

Лемма 6.4. *При* $1\leqslant y<z\leqslant 2y$ *имеют место неравенства*

$$0\leqslant\theta(z)-\theta(y)\leqslant 2(z-y)+o(z). \tag{6.12}$$

Доказательство. Левая часть неравенства очевидна. Если в формуле (6.11) положим $x = z$, то получим

$$\theta(z)\ln z + \sum_{p\leqslant z}\theta\left(\frac{z}{p}\right)\ln p = 2z\ln z + o(z\ln z). \tag{6.13}$$

Напишем равенство (6.1) для $x = y$ и прибавим к левой части $\theta(y)\ln(z/y) = O(y)$ (так как $z \leqslant 2y$) и к правой части $2y\ln(z/y) = O(y)$. Тогда

$$\theta(y)\ln z + \sum_{p\leqslant y}\theta\left(\frac{y}{p}\right)\ln p = 2y\ln z + o(z\ln z).$$

Если вычесть это из (6.13) и воспользоваться тем, что $\theta(y) \leqslant \theta(z)$, $\theta(y/p) \leqslant \theta(z/p)$, то получим (6.12).

(6.12) выражает некоторое свойство непрерывности $\theta(x)$. Если считать теорему о простых числах в форме (2.14) доказанной, то, естественно, имеет место соотношение $\theta(z) - \theta(y) = z - y + o(z)$.

Ниже (до конца § 6) символ $\sum'$ будет всегда означать суммирование по интервалу $(\ln x,\ x/\ln x)$. Если n находится в этом интервале, то и $n \to \infty$ и $\frac{x}{n} \to \infty$ при $x \to \infty$. Далее при $x \to \infty$

$$\sum_p{}' \frac{\ln p}{p} = (1 + o(1))\ln x, \tag{6.14}$$

$$\theta(x)\ln x + \sum_p{}' \theta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = 2(1 + o(1))\,x\ln x, \tag{6.15}$$

$$\sum{}' \theta\left(\frac{x}{n}\right) = (1 + o(1))\,x\ln x. \tag{6.16}$$

Формула (6.14) получается из равенства

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} = \ln x + o(1), \tag{6.17}$$

так как часть суммы, распространенная на области $p \leqslant \ln x$ и $x/\ln x < p \leqslant x$, есть $O(\ln\ln x)$. Соотношение (6.15) следует из (6.1), если опять воспользоваться (6.17) и равенством $\theta(x/p) = O(x/p)$. Наконец формула (6.16) получается из леммы 6.3 при $y = \ln x$, $z = x/\ln x$.

Положим теперь

$$a = \varliminf\frac{\theta(x)}{x}, \quad A = \varlimsup\frac{\theta(x)}{x} \quad (x \to \infty). \tag{6.18}$$

Уже известно, что $0 < a \leqslant A < \infty$ (1.3.2).

Лемма 6.5 *Имеет место равенство* $a+A=2$ *и, следовательно,* $a \leqslant 1 \leqslant A$.

Доказательство. По определению верхнего предела имеется последовательность неограниченно растущих значений x, для которых

$$\theta(x)=A(1+o(1))x. \tag{6.19}$$

Кроме того, по определению нижнего предела для каждой последовательности неограниченно растущих значений x имеем

$$\theta(x)>a(1+o(1))x. \tag{6.20}$$

Так как $x/p \to \infty$ для p из интервала $(\ln x,\ x/\ln x)$, то если мы заставим x в (6.15) пробегать последовательность, для которой справедливо равенство (6.19), то получим

$$A(1+o(1))x\ln x+\sum_p{}' a(1+o(1))\frac{x}{p}\ln p<2(1+o(1))x\ln x. \tag{6.21}$$

Отсюда, согласно (6.14), следует неравенство $a+A\leqslant 2$. С другой стороны, если заставить x пробегать последовательность значений, для которой $\theta(x)=a(1+o(1))x$, и воспользоваться тем, что всегда выполняется неравенство

$$\theta(x)<A(1+o(1))x \quad (x\to\infty), \tag{6.22}$$

то получим также, что $a+A\geqslant 2$. Таким образом, равенство $A+a=2$ доказано.

Разделим теперь интервал $(\ln x,\ x/\ln x)$ на

$$m=\left[\frac{1}{\delta}(\ln x-2\ln\ln x)\right]\sim\frac{1}{\delta}\ln x \tag{6.23}$$

интервалов J_k вида

$$J_k=(e^{(k-1)\delta}\ln x,\ e^{k\delta}\ln x), \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{6.24}$$

и один интервал

$$J_{m+1}=(e^{m\delta}\ln x,\ x/\ln x),$$

который может быть пустым. При этом $0<\delta\leqslant\frac{1}{2}$ и δ — пока любое действительное число, не зависящее от x. Тогда, согласно формуле (6.10), имеет место равенство

$$\sum_{n\in J_k}\frac{1}{n}=\delta(1+o(1)) \quad (1\leqslant k\leqslant m). \tag{6.25}$$

Константы в $o(\ )$ и $O(\ )$ и константы $c_1,\ c_2,\ \ldots$ в дальнейшем всегда не зависят от δ; следовательно, при возможном уменьшении δ

они остаются теми же самыми. Все последующие равенства и неравенства имеют место, если x больше некоторой величины, зависящей от δ (которая вообще при $\delta \to 0$ неограниченно растет); это будем считать известным не оговаривая особо. Далее (до конца § 6) x будет пробегать последовательность действительных чисел $\to\infty$, удовлетворяющих условию

$$\theta(x) = A(1+o(1))\,x. \tag{6.26}$$

Лемма 6.6. *Неравенство*

$$\theta\left(\frac{x}{p_1}\right) < (a+\delta)\frac{x}{p_1} \tag{6.27}$$

имеет место для множества простых чисел p_1 *из интервала* $(\ln x,\ x/\ln x]$, *удовлетворяющих условию*

$$\sum_{p_1}{}' \frac{\ln p_1}{p_1} > (1 - c_1\delta)\ln x. \tag{6.28}$$

Доказательство. Пусть p_2 пробегает множество простых чисел из интервала $(\ln x,\ x/\ln x]$, для которых не выполнено (6.27). Следовательно,

$$\theta\left(\frac{x}{p_2}\right) \geqslant (a+\delta)\frac{x}{p_2}.$$

Из-за того, что $x/p_1 \to \infty$ $(x\to\infty)$, по определению a в силу (6.26) имеют место неравенства

$$2(1+o(1))\,x\ln x < (2+\delta^2)\,x\ln x,$$

$$\theta\left(\frac{x}{p_1}\right) > (a-\delta^2)\frac{x}{p_1}, \qquad \theta(x) > (A-\delta^2)\,x.$$

Если подставим это в (6.15), то получим

$$(2+\delta^2)\,x\ln x > (A-\delta^2)\,x\ln x +$$
$$+ (a-\delta^2)\,x\sum_{p_1}{}'\frac{\ln p_1}{p_1} + (a+\delta)\,x\sum_{p_2}{}'\frac{\ln p_2}{p_2} =$$
$$= (A-\delta^2)\,x\ln x + (a+\delta)\,x\sum_{p}{}'\frac{\ln p}{p} - (\delta+\delta^2)\,x\sum_{p_1}{}'\frac{\ln p_1}{p_1}.$$

Из (6.14) следует

$$\sum_{p}{}'\frac{\ln p}{p} > (1-\delta^2)\ln x.$$

Подставим это в верхнюю формулу и воспользуемся тем, что $a + A = 2$, $a \leqslant 1$ и $\delta \leqslant \frac{1}{2}$,

$$(\delta+\delta^2)\sum_{p_1}{}'\frac{\ln p_1}{p_1} > \{\delta - (2+a)\,\delta^2 - \delta^3\}\ln x > (\delta - 4\delta^2)\ln x.$$

Так как $(\delta-4\delta^2)/(\delta+\delta^2)=1-5\delta/(1+\delta)>1-5\delta$, то (6.28) доказано при $c_1=5$.

Лемма 6.6 в некотором смысле есть улучшение леммы 6.5 и выражает приблизительно следующее: если $\theta(x)/x$ — большое, то очень многие из $\theta(x/p)\cdot p/x$ должны быть маленькими.

Лемма 6.7. *Имеют место неравенства*

$$\sum_{p_1\in J_k}\frac{\ln p_1}{p_1}<2\delta+c_2\delta^2,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1, \tag{6.29}$$

причем J_k — интервалы, определенные в (6.24).

Доказательство. В силу (6.12), полагая $y=e^{(k-1)\delta}\ln x$, получаем

$$\sum_{p_1\in J_k}\ln p_1\leqslant\sum_{p\in J_k}\ln p<2(ye^\delta-y)+\delta^2ye^\delta.$$

Так как $e^\delta-1<\delta+\delta^2\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\right)=\delta+\delta^2$, $\delta\leqslant\frac{1}{2}$ и $p\geqslant y$ для $p\in J_k$, то

$$\sum_{p_1\in J_k}\frac{\ln p_1}{p_1}<2(e^\delta-1)+\delta^2e^\delta<2\delta+c_2\delta^2.$$

Неравенство (6.29) можно рассматривать как выражение свойства непрерывности $\sum\limits_{p\leqslant x}\ln p/p$. Если бы вместо (6.12) мы использовали только (6.17), то получили бы вместо $2\delta+c_2\delta^2$ только $\delta+O(1)$, что при $\delta\to 0$ не стремится к 0.

Лемма 6.8. *Пусть N_1 — число интервалов J_k, $k\leqslant m+1$, которые содержат по крайней мере одно p_1. Тогда*

$$N_1>m\left(\frac{1}{2}-c_3\delta\right)\sim\left(\frac{1}{2\delta}-c_3\right)\ln x,\qquad x\to\infty. \tag{6.30}$$

Доказательство. Если предположить, что (6.30) не выполнено, то по лемме 6.7 получим

$$\sum_{p_1}{}'\frac{\ln p_1}{p_1}<N_1(2\delta+c_2\delta^2)\leqslant(2\delta+c_2\delta^2)\left(\frac{1}{2\delta}-c_3+o(1)\right)\ln x,$$

а это для достаточно большого c_3 противоречит (6.28).

Лемма 6.9. *Для всех n_1, n_2 из интервала* $(\ln x,\ x/\ln x]$, *удовлетворяющих неравенству*

$$e^{-\delta}\leqslant\frac{n_1}{n_2}\leqslant e^\delta, \tag{6.31}$$

имеем

$$\left|\frac{n_1}{x}\,\theta\left(\frac{x}{n_1}\right)-\frac{n_2}{x}\,\theta\left(\frac{x}{n_2}\right)\right|\leqslant c_4\delta. \tag{6.32}$$

Доказательство. Пусть $(n_1/x)\,\theta(x/n_1) \geqslant (n_2/x)\,\theta(x/n_2)$. По формуле (6.12) получаем

$$\left|\theta\left(\frac{x}{n_1}\right)-\theta\left(\frac{x}{n_2}\right)\right| < 2\left|\frac{x}{n_1}-\frac{x}{n_2}\right|+\delta\frac{x}{n_1}e^{\delta}=$$
$$=\frac{x}{n_1}\left(2\left|1-\frac{n_1}{n_2}\right|+\delta e^{\delta}\right)\leqslant\frac{x}{n_1}\left\{2(e^{\delta}-1)+\delta e^{\delta}\right\}\leqslant c_5\frac{x}{n_1}\delta,$$

так как $e^{\delta}<1+2\delta\leqslant 2$ для $\delta\leqslant\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что

$$\frac{n_1}{x}\theta\left(\frac{x}{n_1}\right)\leqslant\frac{n_1}{x}\theta\left(\frac{x}{n_2}\right)+c_5\delta\leqslant\frac{n_2}{x}\theta\left(\frac{x}{n_2}\right)e^{\delta}+c_5\delta.$$

Принимая во внимание неравенства $e^{\delta}<1+2\delta$ и $\theta(x/n_2)<cx/n_2$, получаем

$$\frac{n_1}{x}\theta\left(\frac{x}{n_1}\right)\leqslant\frac{n_2}{x}\theta\left(\frac{x}{n_2}\right)+c_6\delta,$$

откуда следует (6.32), если $(n_1/x)\,\theta(x/n_1)\geqslant(n_2/x)\,\theta(x/n_2)$; в другом случае нужно только поменять местами n_1 и n_2.

Лемма 6.10. *Пусть J_k, $k\leqslant m+1$, — интервал, в котором находится по крайней мере одно p_1. Тогда*

$$\theta\left(\frac{x}{n}\right)\leqslant(a+c_7\delta)\frac{x}{n}\quad \text{для каждого}\quad n\in J_k. \tag{6.33}$$

Доказательство. Утверждение леммы при $c_7=1+c_4$ сразу следует из (6.32) и (6.27); (6.32) справедливо, поскольку $e^{-\delta}\leqslant \leqslant n/p_1\leqslant e^{\delta}$ для $p_1\in J_k$ и $n\in J_k$.

Выберем $\lambda=\frac{1}{2}(A-a)$. Тогда, так как $A+a=2$, получим $a=1-\lambda$, $A=1+\lambda$, $0\leqslant\lambda<1$. Предположим, что $\lambda>0$, и докажем, что это ведет к противоречию.

В последующем константы в $o(\ )$, $O(\ )$ и константы c_8, c_9, … не зависят как от x, δ, так и от λ. Насколько большим должно быть x, для того чтобы выполнялись соответствующие неравенства, зависит, вообще говоря, от δ и λ.

Лемма 6.11. *Пусть N_2 — число тех интервалов J_k, $k\leqslant m$, для которых имеет место неравенство*

$$(a+c_7\delta)\frac{x}{n}<\theta\left(\frac{x}{n}\right)\leqslant\left(1-\frac{1}{2}\lambda\right)\frac{x}{n}\quad \text{при каждом}\quad n\in J_k. \tag{6.34}$$

Тогда при достаточно малом δ (например, при $0<\delta<\delta_1(\lambda)$) выполняется оценка

$$N_2>c_8\frac{\lambda^2}{\delta}\ln x. \tag{6.35}$$

Доказательство. Рассмотрим цепь из M следующих друг за другом интервалов J_k, $k \leqslant m$, для которых имеет место неравенство

$$\theta\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)\frac{x}{n} \quad \text{при каждом} \quad n \in J_k. \tag{6.36}$$

Если просуммировать последнее неравенство по всем n из всех M интервалов, то, согласно (6.25), получим

$$\sum \theta\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) x \sum \frac{1}{n} = x\left(1 - \frac{1}{2}\lambda + o(1)\right) M\delta$$

(мы предполагали $k \leqslant m$). С другой стороны, по лемме 6.3 имеем

$$\sum \theta\left(\frac{x}{n}\right) > xM\delta - c_9 x.$$

Оба неравенства вместе дают

$$M\delta\left(\frac{1}{2}\lambda + o(1)\right) < c_9,$$
$$M < c_{10}\frac{1}{\lambda\delta}.$$

Если в интервале J_k находится хотя бы одно p_1, то, выбирая, например, $\delta < \delta_2(\lambda) = \min\left(\frac{1}{2}, \lambda/4c_7\right)$, в силу леммы 6.10 получим

$$\theta\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant (a + c_7\delta)\frac{x}{n} =$$
$$= (1 - \lambda + c_7\delta)\frac{x}{n} < \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)\frac{x}{n} \quad \text{для каждого} \quad n \in J_k. \tag{6.37}$$

За последовательностью из не более чем $c_{10}/\lambda\delta$ друг за другом следующих интервалов, где выполнено (6.33) (кроме, быть может, последней такой последовательности), следует последовательность интервалов, в которых $\theta(x/n)\,n/x$ растет от $(1 - \lambda + c_7\delta)$ по крайней мере до $\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right)$[1]), иначе говоря, возрастает для $\delta < \delta_2(\lambda)$ по меньшей мере на

$$\frac{1}{2}\lambda - c_7\delta > \frac{1}{4}\lambda.$$

По лемме 6.9 для такого увеличения требуется по меньшей мере

$$\frac{\frac{1}{4}\lambda}{c_4\delta} = c_{11}\frac{\lambda}{\delta}$$

[1]) Если (6.33) выполняется, то выполняется также (6.36); $\theta(x/n)\,n/x$ может, естественно, иногда отсутствовать.

интервалов J_k. Для достаточно малого δ (6.34) справедливо самое меньшее в

$$c_{11}\frac{\lambda}{\delta}-2>c_{12}\frac{\lambda}{\delta}, \qquad 0<\delta<\delta_3(\lambda)<\delta_2(\lambda),$$

таких интервалов[1]).

По лемме 6.8 имеется по крайней мере

$$\frac{N_1-1}{c_{10}/\lambda\delta}-1>\left(\frac{1}{2\delta}-c_3\right)\frac{\lambda\delta}{c_{10}}(1+o(1))\ln x>c_{13}\lambda\ln x,$$
$$0<\delta<\delta_4(\lambda)<\delta_3(\lambda),$$

таких цепочек интервалов J_k с растущим $\theta\left(\frac{x}{n}\right)n/x$. В каждой цепочке содержится по крайней мере $c_{12}\lambda/\delta$ интервалов, где выполнено (6.34), и это дает в совокупности самое меньшее

$$c_{13}\lambda\ln x\cdot c_{12}\frac{\lambda}{\delta}=c_{12}c_{13}\frac{\lambda^2}{\delta}\ln x$$

таких интервалов. Этим утверждение доказано с $c_8<c_{12}c_{13}$.

Теорема 6.2. *Имеем $\lambda=0$ и, следовательно,*

$$\varliminf\frac{\theta(x)}{x}=\varlimsup\frac{\theta(x)}{x}=1. \tag{6.38}$$

Доказательство. Предположим, что $\lambda>0$. Тогда (в прежних обозначениях) из (6.25) и (6.37) следует

$$\sum_n{}'\theta\left(\frac{x}{n}\right)<x\delta(1+o(1))\Big\{N_1(1-\lambda+c_7\delta)+$$
$$+N_2\left(1-\frac{1}{2}\lambda\right)+(m+1-N_1-N_2)(1+\lambda+o(1))\Big\},$$

так как для n, не причисленных к N_1 и N_2, обязательно имеет место неравенство

$$\theta\left(\frac{x}{n}\right)<\frac{x}{n}A(1+o(1)), \qquad A=1+\lambda.$$

[1]) Так как если (6.34) не имеет места для некоторого J_k, то по лемме 6.9 для всех $n\in J_k$ или $\theta(x/n)\,n/x\leqslant ac_7\delta+c_4\delta$, или, если J_k — последний интервал последовательности, возможно, $\theta(x/n)\,n/x>1-\frac{1}{2}\lambda-c_4\delta$.

Далее это дает, при достаточно малом δ, если использовать формулу (6.23) и леммы 6.8 и 6.11,

$$\sum_n{}' \theta\left(\frac{x}{n}\right) < x\delta(1+o(1))\Big\{(m+1)(1+\lambda+o(1))-$$

$$-N_1(2\lambda-c_7\delta+o(1))-N_2\left(\frac{3}{2}\lambda+o(1)\right)\Big\}<$$

$$< x\ln x\cdot(1+o(1))\Big\{\lambda+1-\left(\frac{1}{2}-c_3\delta\right)(2\lambda-c_7\delta)-\frac{3}{2}c_8\lambda^3\Big\}^{1)}.$$

Уменьшим δ, если нужно, настолько, чтобы выражение в фигурных скобках стало меньше единицы. Это возможно, так как $\lambda>0$, и мы получим противоречие с формулой (6.16). Следовательно, $\lambda=0$ и равенство (6.38) также доказано.

По теореме 2.4 из (6.38) следует теорема о простых числах.

Примененный здесь метод — выводить теорему о простых числах из формулы Сельберга (6.1) — принадлежит Р. Бройшу [1]. Другие методы можно найти у Эрдёша [7], Сельберга [3], Райта [1]. Естественно, что различные способы выводить из формулы (6.1) теорему о простых числах имеют много общего, поскольку это связано с существом дела.

Первоначально формула (6.1) доказывалась несколько иначе. Если положить

$$\lambda(d)=\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}$$

и $f(n)=\sum_{d\mid n}\lambda(d)$, то для $n\leqslant x$, как легко показать, имеют место соотношения

$$f(1)=\ln^2 x,\quad f(p^\alpha)=-\ln^2 p+2\ln x\ln p,\quad f(p^\alpha q^\beta)=2\ln p\ln q,$$

где p и q — различные простые числа, α, β — натуральные числа и $f(n)=0$ для всех остальных n. Если мы образуем сумму

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n),$$

то числа n, имеющие больше чем два простых сомножителя, отсеиваются; $\lambda(d)$ играют роль, аналогичную ρ_d в методе решета Сельберга в гл. II. Следовательно, можно назвать $f(n)$ „фильтрующей функцией“, которая, правда, отсеивает не только простые числа, но также еще числа, имеющие не более двух простых сомножителей. Подставляя значения $f(n)$, получаем

$$S(x)=\theta(x)\ln x+\sum_{p\leqslant x}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p+o(x\ln x).$$

С другой стороны, можно также записать

$$S(x)=\sum_{d\leqslant x}\mu(d)\ln^2\frac{x}{d}\cdot\left[\frac{x}{d}\right].$$

1) Следует принять во внимание, что $c+o(1)=c(1+o(1))$.

Из этой формулы можно после некоторых преобразований получить $S(x) = 2x\ln x + o(x\ln x)$. Если положить $z = x/\ln^2 x$, то ошибка, возникающая при опускании квадратных скобок, не больше чем

$$\sum_{d \leqslant x} \ln^2 \frac{x}{d} \leqslant \sum_{d \leqslant z} \ln^2 x + \ln^2 \frac{x}{z} \sum_{z < d \leqslant x} 1 = o(x \ln x).$$

Для главного члена нужна формула

$$\sum_{d \leqslant x} \frac{\mu(d)}{d} \ln^2 \frac{x}{d} = 2\ln x + O(1).$$

Доказательство этой формулы см. у Сельберга [3].

Вышеприведенное доказательство Татудзавы и Исеки упрощает несколько более трудные вычисления первоначального доказательства.

По поводу обсуждения некоторых аналитических фактов, связанных с элементарным доказательством теоремы о простых числах, см. также Винер и Геллерт [1].

Задачи к главе III

1. Показать, что

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

и тем самым доказать, что из существования предела $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x)/x$ вытекает, что он равен 1.

2. Другое доказательство теоремы 4.2 проходит следующим образом [1]). При $\sigma > 1$

$$\ln \zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} + f(s),$$

где $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\sum \frac{1}{p^{\sigma}} \sim \ln \frac{1}{\sigma - 1}, \quad \sigma \to 1 + 0.$$

Если бы $\zeta(1 + it_1)$ равнялось нулю, то при $s = \sigma + it_1$, $\sigma \to 1 + 0$, мы имели бы

$$\sum \frac{\cos(t_1 \ln p)}{p^{\sigma}} = \ln|\zeta(s)| + \operatorname{Re} f(s) \sim \ln(\sigma - 1).$$

Последнее и предпоследнее равенства позволяют видеть, что $\cos(t_1 \ln p)$ в известном смысле должен быть близок к -1 для многих p. Но тогда $\cos(2t_1 \ln p)$ должен быть близок к 1 (для многих p) и было бы

$$\ln|\zeta(\sigma + i2t_1)| \sim \sum \frac{\cos(2t_1 \ln p)}{p^{\sigma}} \sim \sum \frac{1}{p^{\sigma}} \sim \ln \frac{1}{\sigma - 1}.$$

---

[1]) Адамар [1].

Отсюда опять следует, что $\sigma+i2t$ — полюс $\zeta(s)$, а это невозможно. Проведите эти рассуждения точнее.

3. Доказать, что ряд

$$\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s}(1+\cos(t\ln n))$$

имеет абсциссу сходимости 1. При $\sigma>1$ этот ряд представляет функцию

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta'}{\zeta}(s+it)+\frac{\zeta'}{\zeta}(s-it)\right\}.$$

4. Еще одно доказательство теоремы 4.2 состоит в следующем[1]). При $\sigma>1$ имеем

$$f(s)=\frac{\zeta^2(s)\,\zeta(s+it)\,\zeta(s-it)}{\zeta(2s)}=\sum_n \frac{|C_n|^2}{n^s}, \quad t\gtrless 0,$$

$$C_n=\sum_{d\mid n} d^{it}.$$

Пусть α — абсцисса сходимости этого ряда. Тогда по теореме (П.2.4) α — особая точка $f(s)$ и $f(s)$ регулярна при $\sigma>\alpha$. Пусть $\zeta(1+it_1)=0$ и, следовательно, $\zeta(1-it_1)=0$, тогда должно быть $\alpha\leqslant 0$[2]). Это невозможно, так как тогда было бы $f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant|C_1|^2=1$, в то время как в действительности $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

5. Докажите, что

$$\zeta'(s)=O(\ln^2|t|), \quad \sigma>\max\left(\frac{1}{2},\ 1-\frac{c}{\ln|t|}\right), \quad |t|\geqslant 2$$

при постоянном c.

6. Из равенства

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+1-s\int_1^\infty(\xi-[\xi])\frac{d\xi}{\xi^{s+1}}, \quad \sigma>0,$$

следует $\zeta(\sigma)<0$, $0<\sigma<1$.

В задачах 7—11 нужно доказать асимптотические формулы комплексным интегрированием и вычислить константы.

7. $\sum_{n\leqslant x} d^2(n)\sim cx\ln^3 x$,

$$\left(\sum_n d^2(n)\,n^{-s}=\zeta^4(s)/\zeta(2s)\right).$$

---

[1]) Ингам [1].

[2]) $\zeta(\sigma)\neq 0$, $0<\sigma<1$ (см. задачу 6 и гл. IV, § 7).

8. $\sum\limits_{n \leqslant x} d_m(n) \sim cx \ln^{m-1} x,$

где $d_m(n)$ — число разложений $n = n_1 n_2 \ldots n_m$.

9. Пусть $r(n)$ — число решений уравнений $\varphi(m) = n$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant x} r(n) \sim cx,$$

$$\left(\sum_n r(n) n^{-s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{\varphi^s(p)} + \frac{1}{\varphi^s(p^2)} + \ldots\right)\right).$$

10. В обозначениях теоремы 2.4.2

$$Z = \sum_{m \in (z)} \frac{1}{m} \prod_{p \mid m} \omega^{m_p}(p) \sim c \ln^s z$$

при постоянных $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s$ $\left(m = \prod\limits_{p \mid m} p^{m_p}\right)$.

11. $\sum\limits_{n \leqslant x} \frac{1}{d(n)} \sim c \frac{x}{\sqrt{\ln x}}$ [1].

Как изменятся константы в задачах 7—11, если потребовать, чтобы n (соответственно m) были бесквадратными числами?

12. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1)\ldots(s+k)} ds = \begin{cases} 0 & (0 < y \leqslant 1), \\ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{y}\right)^k & (y \geqslant 1), \end{cases}$$

где $b > 0$ и $k \geqslant 1$ — целое.

13 [2]. С помощью задачи 12 докажите при $b > 1$

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leqslant x} (x - n) \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) ds.$$

14. С помощью теоремы 4.7 докажите, что $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2} x^2$.

15. Из задачи 14 получить асимптотическое равенство $\psi(x) \sim x$. При этом использовать следующее. Пусть $a_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n, \quad A_1(x) = \int_0^x A(\xi)\, d\xi = \sum_{n \leqslant x} (x - n) a_n.$$

Тогда из $A_1(x) \sim Ax^a$, $x \to \infty$ $(a, A > 0)$ следует соотношение $A(x) \sim Aax^{a-1}$. (Надо использовать тот факт, что при $\varepsilon > 0$

[1]) Вильсон [1].

[2]) По поводу задач 13—15 см. Ингам [2], гл. 2.

выполняются неравенства

$$\frac{1}{\varepsilon x}\int\limits_{(1-\varepsilon)x}^{x} A(\xi)\,d\xi \leqslant A(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon x}\int\limits_{x}^{(1+\varepsilon)x} A(\xi)\,d\xi.$$

Обратное доказать легче, и оно имеет место без ограничения $a_n \geqslant 0$. Следовательно, если теорема о простых числах $\psi(x) \sim x$ уже доказана, то $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$.

16. Докажите при $b>0$ формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{y^s}{s^2}\,ds = \begin{cases} 0, & 0<y\leqslant 1, \\ \ln y, & y\geqslant 1. \end{cases}$$

17. С помощью задачи 16 докажите, что

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\ln\frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-ix^2}^{2+ix^2}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{x^s}{s^2}\,ds + O(1).$$

18. С помощью задачи 17 докажите асимптотическое равенство

$$\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\ln\frac{x}{n} \sim x$$

и из него соотношение $\psi(x) \sim x$ [1]).

19. Исследуйте сходимость рядов

$$\sum\frac{\ln p}{p^s},\quad \sum\frac{1}{p^s},\quad \prod\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

при $s=1+it,\ t\gtrless 0$.

20. Для функции $\psi_1(x)$ из задачи 13 при $b>1$ справедливо равенство

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} h(s)\,x^{s-1}\,ds,$$

$$h(s) = -\frac{1}{s(s+1)}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\frac{1}{s-1}\right),$$

причем оно имеет место даже при $b=1$. Отсюда следует

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(1+it)\,e^{iut}\,du,$$

---

[1]) Ландау [5], гл. XII.

$u = \ln x$. Из того, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)| < \infty,$$

обобщая лемму Римана — Лебега из теории рядов Фурье, получаем

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \right\} = 0.$$

Это другое доказательство[1]) соотношения $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2} x^2$.

21. Докажите (5.16) без рядов Дирихле и докажите тем самым, что из соотношения $\psi(x) \sim x$ следует равенство $\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x)$.

---

[1]) Ингам [2]; Титчмарш [3].

Глава IV

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

§ 1. Введение

Пусть k — натуральное, а l — целое число, $0 \leqslant l < k$. Спрашивается: существует ли бесконечно много простых чисел в последовательности $l,\ l+k,\ l+2k, \ldots$? Для этого необходимо, чтобы l и k были взаимно просты, так как каждый общий делитель l и k делит также и $l+nk$ $(n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$. Поэтому если $(l, k)>1$, то при $n>1$ числа $l+nk$ заведомо не простые.

Во всей гл. IV, если не оговорено противное, числа l и k всегда будут предполагаться взаимно простыми. В некоторых частных случаях легко можно показать, что имеется бесконечно много простых чисел вида $l+nk$ $(n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$. Например, при $k=1,\ l=0$ и $k=2,\ l=1$ это следует из того, что существует бесконечно много простых чисел. При $k=4,\ l=3$ это следует так же, как при доказательстве теоремы 1.1.2 из того, что число $4p_1p_2 \ldots p_m+3$ должно иметь по крайней мере один простой делитель вида $4n+3$ [1]). Это приводит к противоречию, если предположить, что нет простых чисел вида $4n+3$, кроме $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m$.

Доказательство того, что в каждой арифметической прогрессии, разность которой k взаимно проста с начальным членом l, имеется бесконечно много простых чисел, т. е. что сравнение

$$p \equiv l \pmod{k} \tag{1.1}$$

имеет бесконечно много простых решений, впервые получил Дирихле [2]). Для доказательства этого утверждения он ввел так называемые характеры, о которых мы будем говорить в § 2.

В гл. I мы доказали бесконечность множества простых чисел, пользуясь неравенством

$$\prod_{p \leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \geqslant \sum_{n \leqslant x}\frac{1}{n}. \tag{1.2}$$

---

[1]) Так как произведение двух простых чисел вида $4n+1$ опять число такого вида и каждое простое число $\neq 2$ или $\equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 4$.

[2]) Дирихле [1].

Логарифмируя это неравенство, получим

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} + O(1) \geqslant \ln \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n}, \tag{1.3}$$

так как $\sum_{p,}\sum_{m \geqslant 2} 1/mp^m < \infty$. Отсюда уже следует, что $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} \to \infty$ при $x \to \infty$.

Для доказательства того, что имеется бесконечно много простых чисел p, $p \equiv l \pmod{k}$, достаточно показать, что

$$\sum_{p \leqslant x,\ p \equiv l \pmod{k}} \frac{1}{p} \to \infty \text{ при } x \to \infty. \tag{1.4}$$

Для этой суммы гораздо труднее найти соотношение, аналогичное соотношению (1.3) для суммы $\sum 1/p$ по всем $p \leqslant x$.

Если бы, например, в (1.2) мы взяли произведение только по тем p, для которых $p \equiv l \pmod{k}$, то справа появилась бы сумма вида $\sum_{m \leqslant x} 1/m$, где m пробегает все числа, состоящие из простых множителей p, $p \equiv l \pmod{k}$. Но заранее также неизвестно, расходится ли $\sum 1/m$, как не известно, имеется ли бесконечно много $p \equiv l \pmod{k}$.

Эту трудность преодолел Дирихле, рассмотрев произведения вида

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{f(p)}{p}\right)^{-1}, \tag{1.5}$$

где $f(p)$ — некоторые вполне мультипликативные функции[1]). (Собственно говоря, он рассмотрел функции

$$P(s) = \prod_{2 \leqslant p < \infty} \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{1.6}$$

при $s > 1$[2]), но мы не будем ими заниматься в данный момент.) Перемножая (1.5) и пользуясь полной мультипликативностью $f(n)$, получим, например, при $|f(p)| \leqslant 1$

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{f(p)}{p}\right)^{-1} = \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + \ldots\right) = \sum{}' \frac{f(n)}{n}, \tag{1.7}$$

[1]) Это означает, что $f(n) \not\equiv 0$ и $f(n)\,f(m) = f(nm)$ для всех натуральных чисел n и m.

[2]) Сходимость произведения предполагается.

причем штрих у знака суммы означает, что суммирование проводится по всем n, которые получаются от перемножения $p \leqslant x$. Имеет место формула

$$\ln \prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{f(p)}{p}\right)^{-1} = \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p} + O(1), \tag{1.8}$$

которая совместно с (1.7) даст сведения о сумме

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p}, \tag{1.9}$$

если мы получим соответствующие сведения о сумме в правой части равенства (1.7). Уже понятно, что полезно положить, например, $f(p) = 1$ для $p \equiv l \pmod k$ и $f(p) = 0$ для $p \not\equiv l \pmod k$. Впоследствии мы определим мультипликативные функции $f_1, f_2, \ldots, f_h$, $h = \varphi(k)$, зависящие от k и l, которые обладают свойством

$$\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{h} f_i(m) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad m \equiv l \pmod k, \\ 0 & \text{для} \quad m \not\equiv l \pmod k, \end{cases}$$

$$|f_i(n)| \leqslant 1, \ i = 1, 2, \ldots, h \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.10}$$

и для которых сравнительно легко изучать соответствующие суммы в правой части равенства (1.7)[1]). В действительности мы поступим несколько иначе и вместо

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{f_i(p)}{p}\right)^{-1}, \quad \sum{}' \frac{f_i(n)}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, h,$$

будем использовать функции

$$P_i(s) = \prod_{2 \leqslant p < \infty} \left(1 - \frac{f_i(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad F_i(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_i(n)}{n^s}, \quad i = 1, 2, \ldots, h. \tag{1.11}$$

Так как $|f_i(n)| \leqslant 1$, то при $s > 1$ произведение и ряд (1.11) абсолютно сходятся. Легко показать, что $P_i(s) = F_i(s)$ при $s > 1$ и, кроме того, при $s \to 1 + 0$ имеет место формула

$$\ln F_i(s) = \ln P_i(s) = \sum_{p} \frac{f_i(p)}{p^s} + O(1) \quad (1 \leqslant i \leqslant h).$$

---

[1]) Эта формула позволяет отобрать простые числа, сравнимые с l по модулю k. После того как произошел этот отбор, рассуждения проходят с помощью функций $F_i(s)$, введенных в (1.11), во многом аналогично рассуждениям, проведенным в гл. III при доказательстве теоремы о простых числах (т. е. для $k = 1$, $h = 1$, $F_1(s) = \zeta(s)$).

Отсюда и из (1.10) следует соотношение

$$\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h}\ln F_i(s)=\sum_{p\equiv l\,(\mathrm{mod}\ k)}\frac{1}{p^s}+O(1). \tag{1.12}$$

Основная трудность — доказать соотношение

$$\sum_{i=1}^{h}\ln F_i(s)\to\infty \quad (s\to 1+0). \tag{1.13}$$

Из него сразу же следует, что сумма в правой части (1.12) имеет бесконечно много членов[1]).

§ 2. Характеры

Рассмотрим целое число $k>1$, и пусть

$$k=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r} \tag{2.1}$$

— разложение k на простые множители. Обозначим через $g_1, g_2, \dots$ $\dots, g_r$ первообразные корни по модулям $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_r^{\alpha_r}$. Тогда, как известно, для каждого натурального числа l, $(l, k)=1$, имеются числа $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r$, такие, что

$$\begin{gathered} l\equiv(-1)^{\gamma}5^{\gamma_0}\left(\mathrm{mod}\ 2^{\alpha_0}\right),\quad l\equiv g_i^{\gamma_i}\left(\mathrm{mod}\ p_i^{\alpha_i}\right),\\ 0\leqslant\gamma<2,\quad 0\leqslant\gamma_0<2^{\alpha_0-2},\quad 0\leqslant\gamma_i<\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)=p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\end{gathered} \tag{2.2}$$

для $i=1, 2, \dots, r$, и для каждого l, $0<l<k$, $(l, k)=1$, имеется только одна система $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_r$ такого вида[2]). Пусть теперь $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ — любые корни из единицы порядков 2, 2^{α_0-2} $\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right), \dots, \varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)$. Такую систему корней из единицы можно выбрать $2\cdot 2^{\alpha_0-2}\cdot\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\dots\varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)$ способами.

Определим функцию $\chi(n)=\chi(n;\ \varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ формулой

$$\chi(l)=\begin{cases}\varepsilon^{\gamma}\varepsilon_0^{\gamma_0}\varepsilon_1^{\gamma_1}\dots\varepsilon_r^{\gamma_r} & \text{для}\quad (l, k)=1,\\ 0 & \text{для}\quad (l, k)>1,\end{cases} \tag{2.3}$$

---

[1]) Для $k=h=1$, $l=0$, $F_1(s)=\zeta(s)$ очевидно, что из $\ln\zeta(s)=$ $=\sum_p p^{-s}+O(1)$ по теореме 3.3.1 для $s\to 1+0$ следует расходимость ряда $\sum 1/p$; следовательно, существует бесконечно много простых чисел.

[2]) См., например, Хассе [1], § 5. Для $\alpha_0=1$ первое сравнение надо заменить сравнением $l\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$; γ и γ_0 отсутствуют.

где γ, γ_0, γ_1, ..., γ_r для $(l, k)=1$ задаются формулами (2.2). Если ε, ε_0, ε_1, ..., ε_r выбраны всеми возможными способами, то мы получим в совокупности $\varphi(k)$ функций[1]). Эти функции, определенные на множестве всех натуральных чисел, называются характерами по модулю k. В частности характер, образованный системой $\varepsilon=\varepsilon_0=\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_r=1$ называют главным характером и обозначают $\chi_0(l)=\chi_0$. Из определения χ_0 следует, что

$$\chi_0(l)=\begin{cases} 1, & (l, k)=1, \\ 0, & (l, k)\neq 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Для каждого характера $\chi(1)=1$.

Пример. При $k=5$ имеются четыре характера со значениями

$$\begin{array}{lcccc} \chi_0=1, & 1, & 1; & 1, & 0, \\ \chi_1=1, & i, & -i, & -1, & 0, \\ \chi_2=1, & -i, & i, & -1, & 0, \\ \chi_3=1, & -1, & -1, & 1, & 0 \end{array}$$

для $l\equiv 1, 2, 3, 4, 5 \pmod 5$.

Легко получить следующие соотношения для любых натуральных m и n:

$$\chi(m)=\chi(n), \quad m\equiv n \pmod k, \tag{2.5}$$

$$\chi(m)\chi(n)=\chi(mn). \tag{2.6}$$

Главные свойства характеров выражаются формулами

$$\sum_{l \bmod k}\chi(l)=\begin{cases} \varphi(k), & \text{если } \chi=\chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi\neq\chi_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\sum_{\chi}\chi(l)=\begin{cases} \varphi(k), & \text{если } l\equiv 1 \pmod k, \\ 0, & \text{если } l\not\equiv 1 \pmod k, \end{cases} \tag{2.8}$$

причем l в (2.7) пробегает полную систему вычетов по $\bmod k$, а χ в (2.8) пробегает все $\varphi(k)$ характеров по $\bmod k$. Чтобы доказать формулу (2.7), воспользуемся соотношением

$$\sum_{l \bmod k}\chi(l)=\sum_{\gamma, \gamma_0, \ldots, \gamma_r}\varepsilon^{\gamma}\varepsilon_0^{\gamma_0}\ldots\varepsilon_r^{\gamma_r}=\sum_{\gamma}\varepsilon^{\gamma}\sum_{\gamma_0}\varepsilon_0^{\gamma_0}\ldots\sum_{\gamma_r}\varepsilon_r^{\gamma_r}, \tag{2.9}$$

в котором суммирование проводится по всем $0\leqslant\gamma<2$, $0\leqslant\gamma_0<2^{\alpha_0-2}$, ..., $0\leqslant\gamma_r<\varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)$. Если хотя бы одно из чисел ε, ε_0, ..., ε_r не равно 1, т. е. если χ не главный характер, то соответствующая сумма

[1]) Позднее выяснится, что эти функции только меняются местами, если выбрать другие g_i.

равна нулю, так как для каждого корня m-й степени из единицы $\zeta \neq 1$

$$\zeta^0+\zeta^1+\zeta^2+\ldots+\zeta^{m-1}=0.$$

При $\varepsilon=\varepsilon_0=\ldots=\varepsilon_r=1$ для суммы (2.9) получаем значение $2\cdot 2^{\alpha_0-2}\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\ldots\varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)$, что и доказывает (2.7).

Теперь докажем (2.8). Имеем

$$\sum_{\chi}\chi(l)=\sum_{\varepsilon,\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_r}\varepsilon^{\gamma}\varepsilon_0^{\gamma_0}\ldots\varepsilon_r^{\gamma_r}=\sum_{\varepsilon}\varepsilon^{\gamma}\sum_{\varepsilon_0}\varepsilon_0^{\gamma_0}\ldots\sum_{\varepsilon_r}\varepsilon_r^{\gamma_r},\qquad(2.10)$$

где суммирование проводится при постоянной системе $\gamma, \gamma_0, \ldots, \gamma_r$, соответствующей l, по всем корням из единицы $\varepsilon, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_r$ порядков $2, 2^{\alpha_0-2}, \ldots, \varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)$. Если хотя бы одно из чисел γ не равно нулю, т. е. если $l \not\equiv 1 \pmod k$, то соответствующая сумма обращается в 0, так как

$$\sum_{\zeta}\zeta^a=0,\quad a\not\equiv 0 \pmod m,$$

если ζ пробегает все корни m-й степени из единицы. Для $\gamma=\gamma_0=\gamma_1=\ldots$ $\ldots=\gamma_r=0$ значение суммы в (2.10) снова равно $2\cdot 2^{\alpha_0-2}\ldots\varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)=$ $=\varphi(k)$, что и доказывает формулу (2.8).

При $(l, k)=1$ из (2.8) следует

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\chi(n)\bar{\chi}(l)=\begin{cases}1, & n\equiv l \pmod k,\\ 0, & n\not\equiv l \pmod k.\end{cases}\qquad(2.11)$$

Для каждого характера χ функция $\bar{\chi}$ определяется формулой

$$\bar{\chi}(l)=\chi^{-1}(l)\quad\text{для}\quad(l, k)=1,\qquad(2.12)$$

так как значение χ для $(l, k)=1$ есть всегда произведение корней из единицы. Пусть теперь l' — решение сравнения $l'l\equiv 1 \pmod k$. Тогда очевидно, что $(l', k)=1$, и так как $\chi(1)=1$, согласно формулам (2.5), (2.6), получаем

$$\chi(l)\chi(l')=1.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\chi}\chi(n)\bar{\chi}(l)=\sum_{\chi}\chi(n)\chi^{-1}(l)=\sum_{\chi}\chi(n)\chi(l')=\sum_{\chi}\chi(nl').$$

Из последнего соотношения и соотношения (2.8) следует (2.11), так как равнозначны следующие сравнения: $n\equiv l \pmod k$ и $nl'\equiv 1 \pmod k$, $n\not\equiv l \pmod k$ и $nl'\not\equiv 1 \pmod k$.

Теорема 2.1. *Каждая функция $f(n)$, определенная для всех натуральных чисел n и удовлетворяющая соотношениям*

a) $f(n)=0, \qquad (n, k)>1,$

$\quad f(n)\neq 0, \qquad (n, k)=1,$

b) $f(m)=f(n), \quad m\equiv n \pmod k,$

c) $f(mn)=f(m)f(n)$ *при любых натуральных m и n (полная мультипликативность),*

должна быть одной из рассмотренных функций $\chi(n)$.

Действительно, во-первых, из c) следует $f(1)=f(1)f(1)$, и так как из a) $f(1)\neq 0$, то $f(1)=1$. Далее, обобщая (2.2), в элементарной теории чисел доказывают, что существуют такие числа $\omega, \omega_0, \ldots, \omega_r$, что любое число l, $0\leqslant l<k$, $(l, k)=1$, можно единственным образом представить в виде

$$l\equiv \omega^{\gamma}\omega_0^{\gamma_0}\ldots\omega_r^{\gamma_r} \pmod k, \tag{2.13}$$

причем $\gamma, \gamma_0, \ldots, \gamma_r$ имеют те же значения, что и в формуле (2.2). Кроме того, имеют место соотношения

$$\omega^2\equiv \omega_0^{2^{\alpha_0-2}}\equiv \ldots \equiv \omega_r^{\varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)}\equiv 1 \pmod k\,^{1)}.$$

Принимая во внимание c) и b), из последнего соотношения получаем $\{f(\omega)\}^2=f(\omega^2)=f(1)=1$, так что $f(\omega)=\pm 1$. Аналогично получаем, что $f(\omega_0)$, $f(\omega_1)$ ... должны быть корнями из единицы порядков 2^{α_0-2}, $\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)$, ... Так как $f(l)=f^{\gamma}(\omega)f^{\gamma_0}(\omega_0)\ldots f^{\gamma_r}(\omega_r)$, то ясно, что f — характер.

Следовательно, характер по $\operatorname{mod} k$ можно определить как такую функцию, которая удовлетворяет условиям a), b), c).

Очевидно, что произведение $\chi'(n)\chi''(n)=\chi(n)$ двух характеров $\chi'(n)$ и $\chi''(n)$ — опять характер.

Теорема 2.2. *Никакие два характера из совокупности $\varphi(k)$ характеров не равны, т. е. не совпадают при всех значениях n.*

Пусть, например, в соотношении (2.3)

$$\chi'(n)=\chi'\left(n, \varepsilon', \varepsilon_0', \ldots, \varepsilon_r'\right),$$
$$\chi''(n)=\chi''\left(n, \varepsilon'', \varepsilon_0'', \ldots, \varepsilon_r''\right).$$

---

[1]) Нужно только величины $\omega, \omega_0, \ldots, \omega_n$ определить так, чтобы $\omega\equiv -1 \pmod{2^{\alpha_0}}$, $\omega\equiv 1 \pmod{k/2^{\alpha_0}}$, $\omega_0\equiv 5 \pmod{2^{\alpha_0}}$, $\omega_0\equiv 1 \pmod{k/2^{\alpha_0}}$, $\omega_1\equiv g_1 \left(\operatorname{mod} p_1^{\alpha_1}\right)$, $\omega_1\equiv 1\left(\operatorname{mod} k/p_1^{\alpha_1}\right)$ и т. д.

Тогда или $\varepsilon' \neq \varepsilon''$, или по крайней мере для одного i $(i=0, 1, \ldots, r)$ $\varepsilon'_i \neq \varepsilon''_i$. Если имеет место последний случай, то, очевидно, $\chi'(l) \neq \chi''(l)$ для такого l, для которого

$$\gamma=\gamma_0=\ldots=\gamma_{i-1}=\gamma_{i+1}=\ldots=\gamma_r=0, \quad \gamma_i=1.$$

Если при $k=1$ определить единственный характер $\chi(n)=\chi_0(n)=1$ для всех натуральных чисел n, то этот характер обладает всеми свойствами выше определенных характеров.

Область определения $\chi(n)$ можно распространить на нуль и на отрицательные целые числа. Для этого надо предположить, что условие b) выполнено для всех целых чисел. При $k=1$ надо положить $\chi(0)=1$ и $\chi(m)=1$ при $m \neq 0$ (так как $(m, 1)=1$ для любого целого m); при $k>1$ полагают $\chi(0)=0$, так как $(0, k)=k>1$.

§ 3. L-функции и теорема Дирихле

Пусть $k \geqslant 1$. После того как введены характеры, можно построить функции $f_i(n)$, определенные в § 1. Именно если за функции $f_i(n)$ $(i=1, 2, \ldots, \varphi(k))$ взять $\varphi(k)$ функций $\chi(n)\overline{\chi}(l)$, то ввиду (2.11) условие (1.10) выполнено. Функции $F_i(s)$ из (1.11) отличаются множителем $\overline{\chi}(l)$ от $\varphi(k)$ функций $L(s, \chi)$, где

$$L(s, \chi)=\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}=\prod_p \left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re} s=\sigma>1.$$

Так как $|\chi(n)|=1$ или 0, то последний ряд сходится во всяком случае в области $\sigma>1$ и функция $L(s, \chi)$, определяемая этим рядом, аналитична в этой области (см. П., § 2). В частности, для $k=1$ существует только главный характер, и $L(s, \chi)$ переходит в функцию $\zeta(s)$. Многие из свойств $L(s, \chi)$, которые будут доказаны впоследствии, аналогичны свойствам $\zeta(s)$, однако поведение $L(s, \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, в некотором смысле отлично от поведения $L(s, \chi_0)$.

Теорема 3.1. *При* $\sigma>1$ *имеет место разложение*

$$L(s, \chi)=\prod_{p \nmid k}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{3.1}$$

для любого χ *по* mod k[1]).

Это утверждение следует из теоремы 3.2.3, если положить $f(p)=0$ при $p \mid k$ и $f(p)=\chi(p)/p^s$ при $p \mid k$, и из соотношения

$$1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi(p^2)}{p^{2s}}+\ldots=1+\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi^2(p)}{p^{2s}}+\ldots=\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

[1]) Так как $\chi(p)=0$ для $p \mid k$, то оба произведения имеют одно и то же значение.

В частности, справедлива формула

$$L(s, \chi_0)=\prod_{p\nmid k}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p\mid k}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)\qquad(\sigma>1).\qquad(3.2)$$

Например, при $k=2$ имеется только главный характер χ_0 и, следовательно,

$$L(s, \chi_0)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=(1-2^{-s})\zeta(s).$$

При $k=3$ имеется два характера χ_0 и χ_1. $\chi_0=0, 1, 1$ и $\chi_1=$ $=0, 1, -1$ для $n\equiv 0, 1, 2 \pmod 3$. Тогда имеем

$$L(s, \chi_0)=(1-3^{-s})\zeta(s),$$

$$L(s, \chi_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(3n+1)^{-s}-(3n+2)^{-s}\right\}.$$

При $k=4$ имеется два характера χ_0 и χ_1. $\chi_0=0, 1, 0, 1$ и $\chi_1=$ $=0, 1, 0, -1$ для $n\equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$. Следовательно, имеем функции

$$L(s, \chi_0)=(1-2^{-s})\zeta(s),$$

$$L(s, \chi_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(4n+1)^{-s}-(4n+3)^{-s}\right\}.$$

Теорема 3.2. *В области* $\sigma>1$ $L(s,\chi)\neq 0$ *для любого* $\chi \pmod k$.

Действительно, из формулы (3.1) следует неравенство

$$|L(s, \chi)|\geqslant\prod_{p\nmid k}\left(1+\left|\frac{\chi(p)}{p^s}\right|\right)^{-1}\geqslant\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1}.$$

Из него получаем утверждение теоремы таким же путем, как и в теореме 3.4.1.

Из только что доказанной теоремы следует, что выражение (3.1) можно логарифмировать:

$$\ln L(s, \chi)=\sum_{p\nmid k}\ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{p\nmid k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(p^m)}{mp^{ms}},\qquad\sigma>1.$$

Двойной ряд представляет собой то значение $\ln L(s, \chi)=$ $=\ln\left\{\sum_n\chi(n)n^{-s}\right\}$, которое стремится к нулю, если s стремится к ∞ по действительным положительным числам. Поскольку $L(s, \chi)\neq 0, \infty$ при $\sigma>1$, эта ветвь логарифма однозначна и регулярна в области $\sigma>1$. Двойной ряд там абсолютно сходится, и поэтому можно менять порядок суммирования. Так как $\Lambda(n)/\ln n = \ln p/m \ln p = \frac{1}{m}$ при $n = p^m$ и $\chi(n) = 0$ при $(n, k) > 1$, то получаем формулу

$$\ln L(s, \chi) = \sum_n \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s \ln n}, \qquad \sigma > 1\,[1]. \tag{3.3}$$

Продифференцируем равенство (3.3)

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_n \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^s}, \qquad \sigma > 1; \tag{3.4}$$

дифференцирование законно, так как последний ряд равномерно сходится при $\sigma \geqslant 1 + \varepsilon$.

Теорема 3.3. *При $\chi \neq \chi_0$ ряд $\sum\limits_n \chi(n) n^{-s}$ сходится также и в области $0 < \sigma \leqslant 1$. Все функции $L(s, \chi)$ аналитически продолжаемы в область $0 < \sigma \leqslant 1$ и регулярны там, за исключением функции $L(s, \chi_0)$. Она имеет при $s = 1$ полюс первого порядка и разложение*

$$L(s, \chi_0) = \frac{a_{-1}}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + \ldots,$$
$$a_{-1} = \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(k)}{k}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $\chi \neq \chi_0$. Из неравенства $|\chi(n)| \leqslant 1$ и формулы (2.7) для любого $\xi > 0$ имеем

$$\left| \sum_{n \leqslant \xi} \chi(n) \right| \leqslant \varphi(k), \tag{3.6}$$

так как последняя сумма обращается в 0 через k последовательных членов $\chi(n)$. Из теоремы П. 1.4 получаем

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n)}{n^s} = \left\{ \sum_{n \leqslant N} \chi(n) \right\} N^{-s} + s \int_1^N \left\{ \sum_{n \leqslant \xi} \chi(n) \right\} \frac{d\xi}{\xi^{s+1}}. \tag{3.7}$$

Последний интеграл ввиду неравенства (3.6) сходится также и при $0 < \sigma \leqslant 1$. Тем самым при $\chi \neq \chi_0$ наше утверждение следует из теоремы П. 2.1. При $\chi = \chi_0$ оно следует из формулы (3.2) и теоремы 3.3.1.

В частности, имеем

$$L(1, \chi) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n}, \qquad \chi \neq \chi_0. \tag{3.8}$$

---

[1]) Надо положить $\Lambda(1)/\ln 1 = 0$.

Для доказательства того, что существует бесконечно много чисел p, $p \equiv l \pmod k$, достаточно доказать соотношение

$$\lim_{\sigma \to 1+0} \sum_{p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} p^{-\sigma} = \infty. \tag{3.9}$$

Так как $1/p > 1/p^{\sigma}$, $\sigma > 1$, то из (3.9) легко следует расходимость ряда

$$\sum_{p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} p^{-1}.$$

Теперь, согласно (2.11), имеет место формула

$$\sum_{p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{p} \frac{1}{p^s} \sum_{\chi} \chi(p) \bar{\chi}(l) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s}, \quad \sigma > 1, \tag{3.10}$$

где в правой части равенства суммирование проводится по всем p. Согласно (3.3), при $\sigma > 1$ имеет место равенство

$$\ln L(s, \chi) = \sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s} + O\left\{\sum_{p} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right)\right\}$$

и, следовательно,

$$\sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s} = \ln L(s, \chi) + O(1), \quad s \to 1+0.$$

Из (3.10) следует, что

$$\sum_{p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \{\ln L(s, \chi) + O(1)\} =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \ln L(s, \chi) + O(1), \; s \to 1+0, \tag{3.11}$$

причем $s \to 1+0$ означает, что s стремится справа к единице, принимая действительные значения. Константа в $O(1)$ даже не зависит от k, так как количество членов вида $O(1)$, встречающихся в сумме, равно $\varphi(k)$.

Из (3.5) получаем

$$\ln L(s, \chi_0) = \ln \frac{1}{s-1} + O(1), \; s \to 1+0. \tag{3.12}$$

Ввиду того что

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \ln L(s, \chi) = \ln L(s, \chi_0) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \ln L(s, \chi),$$

из (3.11) и (3.12) следовало бы (3.9), если бы доказать, что

$$\sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \ln L(s, \chi) = O(1), \quad s \to 1+0, \tag{3.13}$$

или что $L(1, \chi) \neq 0, \infty$ при $\chi \neq \chi_0$. Неравенство $L(1, \chi) \neq \infty$ при $\chi \neq \chi_0$ следует из регулярности $L(s, \chi)$ при $s = 1$ (теорема 3.3). Наиболее трудная часть доказательства (3.9) и вместе с тем того, что имеется бесконечно много простых чисел p, $p \equiv l \pmod{k}$, состоит в доказательстве соотношения $L(1, \chi) \neq 0$, $\chi \neq \chi_0$, которое мы теперь приведем.

§ 4. Необращение в нуль $L(1+it, \chi)$

При доказательстве соотношения

$$L(1, \chi) \neq 0 \tag{4.1}$$

мы должны различать два случая: 1) $\chi(n)$ принимает по крайней мере для одного n комплексное значение; 2) $\chi(n)$ для всех n — действительное число. В первом случае χ называется комплексным характером, во втором случае — действительным. Действительный характер $\chi(n)$ должен быть равен 0, ± 1, так как $|\chi(n)| = 1$ или 0; следовательно, $\chi^2(n) = \{\chi(n)\}^2 = 1$ для $(n, k) = 1$ и $\chi^2(n) = \{\chi(n)\}^2 = 0$ для $(n, k) > 1$. Таким образом, характер является действительным или комплексным, смотря по тому, $\chi^2 = \chi_0$ или $\chi^2 \neq \chi_0$.

Теорема 4. 1[1]).

$$L(1+it, \chi) \neq 0 \quad \textit{для } \chi^2 \neq \chi_0 \quad \textit{и всех } t; \tag{4.2}$$

$$L(1+it, \chi) \neq 0 \quad \textit{для } \chi^2 = \chi_0 \quad \textit{и} \quad t \neq 0. \tag{4.3}$$

Доказательство. Из (3.4) при $\sigma > 1$ имеем

$$\operatorname{Re}\left\{3\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0) + 4\frac{L'}{L}(\sigma+it, \chi) + \frac{L'}{L}(\sigma+i2t, \chi^2)\right\} = \\ = -\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \operatorname{Re}\{3\chi_0(n) + 4\chi(n) n^{-it} + \chi^2(n) n^{-2it}\} \leqslant 0, \tag{4.4}$$

так как $3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1+\cos\varphi)^2 \geqslant 0$ (мы положили $\varphi = \arg(\chi(n) n^{-it})$. Из (3.5) следует

$$\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0) = -\frac{1}{\sigma - 1} + O(1), \quad \sigma \to 1+0. \tag{4.5}$$

Если бы число $1+it$ было нулем функции $L(s, \chi)$, например m-го порядка, $m \geqslant 1$, то мы имели бы

$$\frac{L'}{L}(\sigma+it, \chi) = \frac{m}{\sigma-1} + O(1), \quad \sigma \to 1+0. \tag{4.6}$$

---

[1]) Дирихле [1], Валле-Пуссен [1], [2].

По теореме 3.3 $s=1+2it$ — регулярная точка функции $L(s, \chi^2)$, кроме случая $\chi^2=\chi_0$, $t=0$. Исключая этот случай, при $\sigma \to 1+0$ получим

$$\frac{L'}{L}(\sigma+i2t, \chi^2)=\frac{a}{\sigma-1}+O(1), \ a \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Из формул (4.5), (4.6), (4.7) находим

$$\operatorname{Re}\left\{3\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0)+4\frac{L'}{L}(\sigma+it, \chi)+\frac{L'}{L}(\sigma+i2t, \chi^2)\right\}=$$
$$=\frac{1}{\sigma-1}(-3+4m+a)+O(1), \ \sigma \to 1+0. \tag{4.8}$$

Так как $m \geqslant 1$, $4m>3$, $a \geqslant 0$, это противоречит (4.4). Следовательно, предположение, что $m \geqslant 1$, было неверным и справедливы формулы (4.2) и (4.3).

В случае $\chi^2=\chi_0$, $t=0$ нам потребуется

Лемма 4.1. *Для $\chi^2=\chi_0$ имеет место соотношение*

$$\zeta(s) L(s, \chi)=\sum_n a_n n^{-s}, \ \sigma>1, \tag{4.9}$$

где a_n — действительные числа и

$$a_n \geqslant 0, \ a_{n^2} \geqslant 1. \tag{4.10}$$

Доказательство. Имеем [1])

$$\zeta(s) L(s, \chi)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Характер $\chi(p)$ может принимать только значения 0, ± 1. Для $\chi(p)=1$ $(\sigma>1)$

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=1+\frac{2}{p^s}+\frac{3}{p^{2s}}+\ldots;$$

для $\chi(p)=-1$

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=1+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\ldots$$

и для $\chi(p)=0$

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots.$$

---

[1]) Произведение можно распространить на все p, так как $\chi(p)=0$ при $p \mid k$.

Перемножая произведения всех трех типов, получим ряд Дирихле [1]) с коэффициентами $a_n \geqslant 0$, $a_{n^2} \geqslant 1$, так как во всех трех случаях коэффициенты при p^{-2ms} не меньше 1.

Теорема 4.2 [2]). *Для $\chi^2 = \chi_0$ имеет место неравенство*

$$L(1, \chi) \neq 0 \text{ и, кроме того, } L(1, \chi) > 0 \text{ для } \chi \neq \chi_0. \quad (4.11)$$

Доказательство. Так как $L(1, \chi_0) = \infty$, то надо исследовать только случай $\chi \neq \chi_0$. Рассмотрим ряд в формуле (4.9). Так как $a_{n^2} \geqslant 1$, то при $s = {}^1/_2$ частичный ряд

$$\sum_n a_{n^2} n^{-2s},$$

расходится. Следовательно, и сам ряд $\sum\limits_n a_n n^{-s}$ расходится при $\sigma < {}^1/_2$. Для абсциссы сходимости σ_0 (см. П., § 2) этого ряда имеют место неравенства $1 \geqslant \sigma_0 \geqslant {}^1/_2$. С другой стороны, по теореме Ландау (теорема П. 2.4) $s = \sigma_0$ — особая точка функции $\zeta(s) L(s, \chi)$. Но так как $\zeta(s)$ и $L(s, \chi)$ при ${}^1/_2 \leqslant \sigma < 1$ регулярны, то σ_0 должно равняться 1. Но тогда $s = 1$ не может быть нулем $L(s, \chi)$. Действительно, в противном случае функция $\zeta(s) L(s, \chi)$ при $s = 1$ была бы регулярной, так как полюс первого порядка $\zeta(s)$ компенсировался бы нулем $L(s, \chi)$ порядка $\geqslant 1$. Следовательно, $L(1, \chi) \neq 0$. Из равенства

$$L(1, \chi) = \lim_{\sigma \to 1+0} (\sigma - 1) \zeta(\sigma) L(\sigma, \chi)$$

и положительности a_n следует, что $L(1, \chi) > 0$.

Теорема 4.3. *Пусть $k \geqslant 1$ и $0 \leqslant l < k$, $(l, k) = 1$. Тогда имеется бесконечно много простых чисел p вида*

$$p = l + nk, \; n = 1, 2, \ldots . \quad (4.12)$$

Доказательство. По теоремам 4.1 и 4.2 $L(1, \chi) \neq 0$ для всех характеров χ. Отсюда следует формула (3.13), и с помощью (3.11), (3.12) получается (3.9), чем утверждение теоремы доказано.

Вместо формул (3.10) и (3.11) для доказательства теоремы 4.3 можно применить аналогично доказываемое равенство

$$\sum_{p \equiv l \pmod{k}} \frac{\ln p}{p^s} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi) \right) + O(1). \quad (4.13)$$

---

[1]) Это перемножение бесконечного числа рядов Дирихле законно по теореме 3.2.3, так как $|a_n| = \left| \sum\limits_{d \mid n} \chi(d) \right| \leqslant d(n)$, и ряд $\sum\limits_n d(n) n^{-s}$ при $\sigma > 1$ абсолютно сходится.

[2]) Дирихле [1], Мертенс [2], Ландау [4].

Вместо (3.9) получим тогда соотношение

$$\sum_{p \equiv l \pmod{k}} \frac{\ln p}{p^\sigma} \to \infty \quad \text{при} \quad \sigma \to 1+0. \tag{4.14}$$

При доказательстве теоремы 4.3 мы использовали в полной мере вспомогательные средства теории функций комплексного переменного и теории рядов Дирихле. Имеются доказательства, которые обходятся без многих из этих вспомогательных средств (см. Хассе [1]). В последнее время найдены доказательства, которые позволяют обходиться совершенно без этих вспомогательных средств (А. Сельберг [4], Г. Цассенхаус [1]) [1]). Здесь положение аналогично положению при доказательстве теоремы о простых числах. Однако здесь „элементаризация" аналитического доказательства в известном смысле легче [2]) и поэтому удалась независимо от методов А. Сельберга (Цассенхаус [1]). Мы даем только набросок элементарного доказательства (Шапиро [2]).

Пусть сначала $\chi \neq \chi_0$. Докажем прежде всего с помощью частного суммирования, что

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(n) f(n) = O\{f(x)\},$$

где $f(x)$ — произвольная функция, монотонно стремящаяся к нулю при возрастании x. Отсюда следует, что

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} = L(1, \chi) + O\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} \ln n = -L'(1, \chi) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right),$$
$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \tag{4.15}$$

причем теперь естественно, что $L(1, \chi)$, $-L'(1, \chi)$, $L\left(\frac{1}{2}, \chi\right)$ — предельные значения левых частей равенств (4.15) при $x \to \infty$ (теория L-рядов не используется!). Теперь легко доказать следующую формулу обращения: для любой функции $f(x)$ и вполне мультипликативной функции $P(n)$ $(P(n) \neq 0)$ из равенства

$$g(x) = \sum_{n \leqslant x} P(n) f\left(\frac{x}{n}\right), \qquad x \geqslant 1,$$

следует

$$f(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) P(n) g\left(\frac{x}{n}\right), \qquad x \geqslant 1,$$

и наоборот. Применяя это к функциям

$$g(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \frac{x}{n} = xL(1, \chi) + O(1)$$

---

[1]) См. также книгу А. О. Гельфонда и Ю. В. Линника „Элементарные методы в аналитической теории чисел", Физматгиз, 1962. — *Прим. ред.*

[2]) Так как при этом ничего точного о числе доказывать не нужно.

и соответственно к

$$g(x) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} = L(1, \chi)\, x \ln x + xL'(1, \chi) + O(\ln x)$$

при $P(n) = \chi(n)$, согласно (4.15), получаем

$$L(1, \chi) \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \frac{\chi(n)}{n} = O(1) \tag{4.16}$$

и соответственно

$$x \ln x = L(1, \chi) F(x, \chi) + xL'(1, \chi) \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \frac{\chi(n)}{n} + O(x), \tag{4.17}$$

так как $\sum\limits_{n \leqslant x} \ln(x/n) = O(x)$. Вид функции $F(x, \chi)$ далее не важен. Из (4.16) и (4.17) следует, что $L(1, \chi)$ и $L'(1, \chi)$ не могут одновременно обращаться в нуль. Так как $L'(1, \chi) \neq \infty$ [1]) то имеет место соотношение

$$L'(1, \chi) \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \frac{\chi(n)}{n} = \begin{cases} \ln x + O(1) & \text{для} \quad L(1, \chi) = 0, \\ O(1) & \text{для} \quad L(1, \chi) \neq 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Далее имеем

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} \Lambda(n) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) \ln \frac{n}{d} =$$

$$= \sum_{dm \leqslant x} \frac{\chi(dm)}{dm} \mu(d) \ln m = \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \frac{\chi(d)}{d} \sum_{m \leqslant x/d} \frac{\chi(m)}{m} \ln m =$$

$$= \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \frac{\chi(d)}{d} \left\{ -L'(1, \chi) + O\left(\frac{d}{x} \ln \frac{x}{d}\right) \right\} =$$

$$= -L'(1, \chi) \sum_{d \leqslant x} \mu(d) \frac{\chi(d)}{d} + O(1). \tag{4.19}$$

Легко показать, что

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n} \Lambda(n) = \sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p)}{p} \ln p + O(1),$$

а это вместе с (4.18) и (4.19) дает

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p)}{p} \ln p = \begin{cases} O(1) & \text{для} \quad L(1, \chi) \neq 0, \\ -\ln x + O(1) & \text{для} \quad L(1, \chi) = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

---

[1]) Вторая часть (4.18) следует из того, что в силу $L(1, \chi) \neq 0$ сумма из (4.16) остается ограниченной.

Теперь уже можно показать, что для комплексного χ $L(1, \chi)$ не равно 0: из (2.8), (4.20) и (1.3.3) при $x \to \infty$ следует

$$\sum_{\chi} \sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p)}{p} \ln p = \varphi(k) \sum_{p \leqslant x,\ p \equiv 1 \pmod k} \frac{\ln p}{p} =$$

$$= \sum_{p \leqslant x\ (p,\ k)=1} \frac{\ln p}{p} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{p \leqslant x} \frac{\chi(p)}{p} \ln p = (1 - M) \ln x + O(1),$$

где M — число тех характеров $\chi \neq \chi_0$, для которых $L(1, \chi) = 0$. Очевидно, что эта сумма $\geqslant 0$. Поэтому M должно равняться нулю или единице. Если бы $L(1, \chi) = 0$ для комплексного χ, то тогда и $L(1, \overline{\chi}) = 0$, т. е. было бы $M \geqslant 2$, что невозможно. Таким образом, если исключить только действительные характеры, $L(1, \chi)$ обязательно не равно нулю при $\chi \neq \chi_0$. Чтобы доказать это также и для всех действительных характеров χ, образуем сумму

$$S(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{\sqrt{n}},$$

где $a_n = \sum_{d \mid n} \chi(d)$ — коэффициенты из леммы 4.1. То, что $a_n \geqslant 0$ и $a_{n^2} \geqslant 1$, можно доказать без рядов Дирихле, так как из мультипликативности $\chi(n)$ для $n = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$ следует, что

$$a_n = \prod_{i=1}^{r} \left\{1 + \chi(p_i) + \chi^2(p_i) + \ldots + \chi^{n_i}(p_i)\right\}.$$

Каждый сомножитель произведения $\geqslant 0$ (из-за того, что $\chi = 0, \pm 1$) и $\geqslant 1$ для четного n_i. Из этих свойств a_n следует, что $\lim S(x, \chi) = \infty$ при $x \to \infty$. Покажем, что $\lim S(x, \chi)$ конечен, если $L(1, \chi) = 0$. Имеем

$$S(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{d \mid n} \chi(d) = \sum_{dm \leqslant x} \frac{\chi(d)}{\sqrt{dm}} =$$

$$= \left(\sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \sum_{m \leqslant x/d} + \sum_{m < \sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x} < d \leqslant x/m} \right) \frac{\chi(d)}{\sqrt{dm}}.$$

С помощью теоремы П. 1.5 можно доказать, что

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + b + O(1/\sqrt{x})\ ^{1)},$$

---

[1]) $b = -1 - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (\xi - [\xi])\, \xi^{-\frac{3}{2}} d\xi.$

и это, согласно (4.15), дает для первой двойной суммы следующую асимптотику:

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\left\{2\sqrt{\frac{x}{d}}+b+O\left(\sqrt{\frac{d}{x}}\right)\right\}=2\sqrt{x}\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}+$$
$$+b\left\{L\left(\frac{1}{2},\chi\right)+O(1/\sqrt{x})\right\}+O(1)=2\sqrt{x}\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}+O(1).$$

Для второй двойной суммы из третьего равенства (4.15) получаем оценку

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{m}}\left\{O\left(\sqrt{\frac{m}{x}}\right)+O\left(1/x^{\frac{1}{4}}\right)\right\}=O(1).$$

Объединяя все вместе, получим

$$S(x,\chi)=2\sqrt{x}\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}+O(1).$$

Отсюда и из первого равенства (4.15) при $L(1,\chi)=0$ следовало бы соотношение

$$S(x,\chi)=O(1),$$

что противоречит равенству $\lim\limits_{x\to\infty}S(x,\chi)=\infty$. Следовательно, $L(1,\chi)\neq 0$ для действительного характера χ. Тем самым доказано, что в (4.20) может появиться лишь первая возможность, следовательно,

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\chi(p)}{p}\ln p=O(1)\quad\text{для всех}\quad\chi\neq\chi_0.$$

Отсюда, как при выводе (3.10), с помощью (2.8) получаем, наконец, соотношение

$$\sum_{p\leqslant x,\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\frac{\ln p}{p}=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)\sum_{p\leqslant x}\frac{\chi(p)}{p}\ln p=$$
$$=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{p\leqslant x,\ (p,k)=1}\frac{\ln p}{p}+O(1)=\frac{1}{\varphi(k)}\ln x+O(1),$$

что доказывает бесконечность числа простых чисел p, таких, что $p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)$.

Приведенное доказательство необращения в нуль $L(1,\chi)$ для действительного характера χ принадлежит Мертенсу [2].

§ 5. О нулях L-функции вблизи прямой $\sigma=1$

Рассмотрим опять натуральные взаимно простые числа l и k. Через $\pi(x,k,l)$ обозначим число простых чисел p, для которых $p\leqslant x$, $p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)$. Выше мы доказали, что

$$\pi(x,k,l)\to\infty\quad(x\to\infty)$$

при фиксированных k, l. Наша ближайшая цель — доказать соотношение

$$\pi(x, k, l) \sim \frac{x}{\varphi(k) \ln x} \quad (x \to \infty) \tag{5.1}$$

при фиксированных k, l. Это равенство означает, что в $\varphi(k)$ классах $(\mathrm{mod}\, k)$, содержащих взаимно простые с k вычеты, находится асимптотически равное число простых чисел из совокупности $x/\ln x$ простых чисел. Очевидно, что $\pi(x, 1, 0) = \pi(x)$. Для доказательства асимптотического закона распределения простых чисел $\pi(x) \sim x/\ln x$ (теорема 1.1.2) и еще более точного соотношения $\psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$ в гл. III необходимо было исследование нулей $\zeta(s)$ на прямой $\sigma = 1$ и слева от нее. Подобное исследование мы должны провести также и для нулей $L(s, \chi)$. Мы докажем соотношение

$$\pi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k) \ln x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right), \tag{5.2}$$

более сильное, чем (5.1) (и даже соотношение с несколько лучшим приближением), которое имеет место равномерно для $k \leqslant \omega(x)$, причем $\omega(x) < x$ может стремиться к бесконечности. Равномерность по $k \leqslant \omega(x)$ означает, что для константы в $O(\quad)$ можно брать одно и то же значение, если k остается меньше $\omega(x)$. Утверждения такого вида доказывать гораздо труднее, чем утверждения для постоянного k. Очевидно, что уже трудно решить, имеются ли вообще простые числа $p \leqslant x$, $p \equiv 1\, (\mathrm{mod}\, k)$, когда k растет вместе с x.

Чтобы получить асимптотические формулы, которые справедливы равномерно для некоторой области значений k, мы должны в последующем доказывать все оценки равномерно по k, т. е. так, чтобы константы не зависели от k.

Теорема 5.1. *При $\sigma > 1$ имеет место равенство*[1])

$$\frac{1}{L(s, \chi)} = \sum_{n} \mu(n) \frac{\chi(n)}{n^s}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Теорема следует из теорем 3.1 и 3.2.3, если принять во внимание, что $\mu(n)\chi(n)/n^s$ — мультипликативная функция.

Для оценки $L(s, \chi)$ целесообразно ввести вспомогательную функцию

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + w)^{-s}, \quad \sigma > 1, \quad 0 < w \leqslant 1; \tag{5.4}$$

---

[1]) Напомним, что $\sum\limits_{n}$ обозначает $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$, если ничего другого не сказано.

в частности, $\zeta(s, 1)=\zeta(s)$. Очевидно, что

$$L(s, \chi)=\sum_{0<l\leqslant k}\chi(l)\sum_{n=0}^{\infty}(kn+l)^{-s}, \quad \sigma>1.$$

Следовательно,

$$L(s, \chi)=k^{-s}\sum_{0<l\leqslant k}\chi(l)\zeta\left(s, \frac{l}{k}\right), \quad \sigma>1. \tag{5.5}$$

Как мы сейчас покажем, функцию $\zeta(s, w)$ можно аналитически продолжить в область $0<\sigma\leqslant 1$, поэтому формула (5.5) имеет место и для этой области.

Теорема 5.2. *Пусть $0<\delta\leqslant 1/2$ и A — положительная константа. Функцию $\zeta(s, w)$ можно аналитически продолжить на область $0<\sigma\leqslant 1$. При этом имеют место соотношения*

$$\zeta(s, w)=w^{-s}+O(|t|^{\delta}), \quad \sigma\geqslant 1-\delta, \quad |t|\geqslant 2; \tag{5.6}$$

$$\zeta(s, w)=w^{-s}+O(\ln|t|), \quad \sigma\geqslant\max\left(\frac{1}{2}, 1-A/\ln|t|\right), \quad |t|\geqslant 2, \tag{5.7}$$

в которых константы в $O(\quad)$ зависят от δ и соответственно от A, но не зависят от w.

Доказательство. Так как $\zeta(\bar{s}, w)=\overline{\zeta(s, w)}$, достаточно доказать теорему для $t\geqslant 2$.

Из $w\geqslant 0$ при $\sigma>2$ следует

$$|\zeta(s, w)-w^{-s}|\leqslant\sum_{n}(n+w)^{-2}\leqslant\sum_{n}n^{-2}=O(1).$$

Поэтому можно предположить, что $\sigma\leqslant 2$. По теореме II. 1.5 (для $a=N$, $x\to\infty$) при $N\geqslant 1$, $\sigma>1$ получаем

$$\zeta(s, w)-w^{-s}=\sum_{n\leqslant N}(n+w)^{-s}+\int_{N}^{\infty}(\xi+w)^{-s}\,d\xi-$$
$$-s\int_{N}^{\infty}(\xi-[\xi])(\xi+w)^{-(s+1)}\,d\xi=$$
$$=\sum_{n\leqslant N}(n+w)^{-s}+\frac{(N+w)^{1-s}}{s-1}-s\int_{N}^{\infty}(\xi-[\xi])\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}. \tag{5.8}$$

Эта формула дает аналитическое продолжение $\zeta(s, w)$ на область $\sigma>0$, так как последний интеграл в ней представляет функцию, регулярную при $\sigma>0$. Принимая во внимание неравенства $0\leqslant\xi-[\xi]<1$, из 5.8 получим

$$|\zeta(s, w)-w^{-s}|\leqslant\sum_{n\leqslant N}(n+w)^{-\sigma}+\frac{(N+w)^{1-\sigma}}{|s-1|}+\frac{|s|}{\sigma}N^{-\sigma}.$$

При любом $\delta \in (0, {}^1/_2]$ в области $2 \geqslant \sigma \geqslant 1-\delta$, $t \geqslant 2$ имеет место оценка

$$\zeta(s, w) - w^{-s} = O\Big(\sum_{n \leqslant N} n^{-1+\delta} + t^{-1}N^{\delta} + tN^{-1+\delta}\Big) = \\ = O\big(\delta^{-1}N^{\delta} + t^{-1}N^{\delta} + tN^{-1+\delta}\big), \qquad (5.9)$$

в которой константа в $O(\ )$ не зависит от δ. Если положить $N = [t]$, зафиксировать δ и допустить в константах из $O(\ )$ зависимость от δ, то остаточный член примет вид

$$O\big(N^{\delta} + t^{-1}N^{\delta} + tN^{-1+\delta}\big) = O\big(t^{\delta}\big).$$

С другой стороны, если мы возьмем $\delta = A/\ln t$, $N = [t]$, то остаточный член в (5.9) станет равным

$$O\big(\ln t\, N^{A/\ln t} + t^{-1}N^{A/\ln t} + tN^{-1+A/\ln t}\big) = O(\ln t),$$

поскольку $\delta \leqslant {}^1/_2$ при большом t.

Теорема 5.3. *При* $\sigma \geqslant {}^1/_2$, $|t| \leqslant 11$, $0 < w \leqslant 1$ *имеет место соотношение*

$$\zeta(s, w) = w^{-s} + \frac{1}{s-1} + O(1), \qquad (5.10)$$

где константа в $O(\ )$ *не зависит от* s *и* w[1]).

Доказательство. Для $\sigma > 2$ имеем $\zeta(s, w) = w^{-s} + O(1)$. Следовательно, равенство (5.10) справедливо. Пусть теперь $\sigma \leqslant 2$. Если в (5.8) положим $N = 1$, то получим

$$\zeta(s, w) - w^{-s} = (1+w)^{-s} + \frac{(1+w)^{1-s}}{s-1} + O(1)$$

при ${}^1/_2 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|t| \leqslant 11$. В этой же области $(1+w)^{-s} = O(1)$ и

$$\frac{(1+w)^{1-s}}{s-1} = \frac{1}{s-1} - \Big\{\ln(1+w) - \frac{1}{2!}(s-1)\ln^2(1+w) + \ \ldots\Big\} = \\ = \frac{1}{s-1} + O(1),$$

так как $|s-1| = O(1)$, $0 < \ln(1+w) \leqslant \ln 2$.

Теорема 5.4. *Пусть* $k \geqslant 1$ *и* χ — *любой характер по* $\operatorname{mod} k$. *Если* $0 < \delta \leqslant {}^1/_2$, $A > 0$ *и*

$$E_0 = E_0(\chi, k) = \begin{cases} 1, & \chi = \chi_0, \\ 0, & \chi \neq \chi_0, \end{cases} \qquad (5.11)$$

[1]) Требование $|t| \leqslant 11$ не существенно. Соотношение (5.10) имеет место также, если 11 заменить на любую константу $B > 0$ от которой, естественно, будет зависеть константа в $O(\ )$.

то имеют место соотношения

$$L(s, \chi)=O\left\{(k|t|)^{\delta}\right\}, \quad \sigma \geqslant 1-\delta, \quad |t| \geqslant 2, \tag{5.12}$$

$$L(s, \chi)=O\left(k^{A/\ln|t|} \ln k|t|\right), \quad \sigma \geqslant \max\left(1-\frac{A}{\ln k|t|}, \frac{1}{2}\right), \quad |t| \geqslant 2, \tag{5.13}$$

$$L(s, \chi)=E_0 \frac{\varphi(k) k^{-1}}{s-1}+O\left(k^{1/2}\right), \quad \sigma \geqslant \frac{1}{2}, \quad |t| \leqslant 11. \tag{5.14}$$

Все константы не зависят от k, но могут зависеть от δ и соответственно от A.

Доказательство. Из (5.5) и (5.6) при $\sigma \geqslant 1-\delta$, $|t| \geqslant 2$ следует, что

$$L(s, \chi)=\sum_{0<l \leqslant k} \chi(l) l^{-s}+O\left(k^{-(1-\delta)} \sum_{0<l \leqslant k}|t|^{\delta}\right)=$$
$$=O\left\{\sum_{n \leqslant k} n^{-(1-\delta)}+(k|t|)^{\delta}\right\}=O\left\{(k|t|)^{\delta}\right\}.$$

где константа в $O(\ )$ может зависеть от δ; это дает формулу (5.12). Из (5.5), (5.7) при $\sigma \geqslant \max(1/2, 1-A/\ln k|t|)$, так как $k \geqslant 1$ и $|t| \geqslant 2$, следует оценка (5.13):

$$L(s, \chi)=\sum_{0<l \leqslant k} \chi(l) l^{-s}+O\left(k^{-\sigma} \sum_{0<l \leqslant k} \ln|t|\right)=$$
$$=O\left\{k^{A/\ln|t|}\left(\sum_{0<l \leqslant k} l^{-1}+\ln|t|\right)\right\}=O\left(k^{A/\ln|t|} \ln k|t|\right).$$

Из (5.5) и (5.10) при $\sigma \geqslant 1/2$, $|t| \leqslant 11$ следует, что

$$L(s, \chi)=\sum_{0<l \leqslant k} \chi(l) l^{-s}+\frac{k^{-s}}{s-1} \sum_{0<l \leqslant k} \chi(l)+O\left(k^{1-\sigma}\right). \tag{5.15}$$

Теперь, учитывая (2.7), при $\sigma \geqslant 1/2$ получим

$$\sum_{0<l \leqslant k} \chi(l) l^{-s}=O\left(\sum_{n \leqslant k} n^{-\frac{1}{2}}\right)=O\left(k^{\frac{1}{2}}\right), \tag{5.16}$$

$$\sum_{0<l \leqslant k} \chi(l)=E_0 \varphi(k). \tag{5.17}$$

Далее при $|s-1| \leqslant 1/2$ имеет место равенство

$$\frac{k^{-s}}{s-1}=k^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}-\ln k+\frac{1}{2!}(s-1) \ln^2 k-\ \ldots\right\}=$$
$$=k^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}+O\left(\exp \frac{1}{2} \ln k\right)\right\}=\frac{k^{-1}}{s-1}+O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right), \tag{5.18}$$

ибо при $|s-1|>{}^1/_2$, $\sigma\geqslant{}^1/_2$ имеем $k^{-s}/(s-1)=O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)$. Подставляя это и (5.16), (5.17) в (5.15), получаем (5.14).

Мы установили уже в равенстве (3.5), что вычет $L(s, \chi_0)$ при $s=1$ равен $\prod\limits_{p|k}(1-1/p)=\varphi(k)/k$.

Теорема 5.5. *При* $\sigma>0$ *имеет место оценка*

$$\frac{1}{L(s, \chi)}=O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right). \tag{5.19}$$

Доказательство. Из (5.3) и неравенства $|\mu(n)|\leqslant 1$ следует

$$\left|\frac{1}{L(s, \chi)}\right|\leqslant\sum_n\frac{1}{n^\sigma}\leqslant 1+\frac{1}{\sigma-1}.$$

Поэтому имеем (5.19).

Уже в § 4, чтобы доказать, что $s=1$ не является нулем $L(s, \chi)$, мы должны были в случае действительного характера применить метод, отличный от метода, применявшегося в случае комплексного характера или действительного характера при $s=1+it\neq 1$. В дальнейшем такие случаи также должны рассматриваться отдельно.

Теорема 5.6. *Пусть* $k\geqslant 1$. *Для всех* χ *по* $\operatorname{mod} k$ *при подходящем* c_1 *имеем*

$$L(s, \chi)\neq 0, \quad \sigma\geqslant 1-\frac{c_1}{\ln k|t|}\geqslant\frac{3}{4}, \quad |t|\geqslant 3. \tag{5.20}$$

Доказательство. Это утверждение достаточно доказать при $t\geqslant 3$, так как вместе с χ является характером также функция $\overline{\chi}$ и $L(\overline{s}, \chi)=\overline{L(s, \overline{\chi})}$[1]).

Пусть $\rho_1=\beta+it_1$ — нуль функции $L(s, \chi)$, причем $1-{}^1/_8<\beta<1$, $t_1\geqslant 3$. Если мы положим $\beta=1-b/\ln kt_1$, то достаточно, очевидно, доказать, что b должно быть больше c_2 при подходящем c_2, не зависящем от k и t_1. Положим $\sigma_0=1+a/\ln kt_1$, где сначала пусть $a\in(0, {}^1/_2]$ и позднее в случае необходимости будет еще уменьшено. Теперь применим теорему П.4.5 для $F(s)=L(s, \chi)$, $r={}^1/_2$, $s_0=\sigma_0+it_1$. По теореме 3.2 $L(s, \chi)$ в области $|s-s_0|\leqslant{}^1/_2$, $\operatorname{Re}(s-s_0)>0$ не имеет нулей. Для достаточно малого a, например $0<a<a_1<{}^1/_2$, ρ_1 содержится в круге $|s-s_0|\leqslant{}^1/_2r={}^1/_4$ для

---

[1]) При $\sigma>1$ это сейчас же следует из представления ряда $L(s, \chi)$; по принципу симметрии это имеет место для всех s области регулярности. Естественно, если существование c_1 однажды установлено, всегда, уменьшая c_1, можно получить неравенство $1-c_1/\ln k|t|\geqslant{}^3/_4$ для всех $|t|\geqslant 3$.

любого $k \geqslant 1$, $t_1 \geqslant 3$; кроме того, круг $|s-s_0| \leqslant 1/2$ лежит в области $\sigma > 1/2$, $|t| \geqslant 2$. Из (5.12) и (5.19), так как $t_1 \geqslant 3$ и $|t-t_1| \leqslant 1/2$, следует, что в круге $|s-s_0| \leqslant 1/2$

$$\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)} = O\left(k^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \ln kt_1\right) = O\left(\frac{1}{a} k^{\frac{1}{2}} t_1^{\frac{1}{2}} \ln kt_1\right). \tag{5.21}$$

Поэтому при применении теоремы П.4.5 можно считать выполненным неравенство

$$\ln M < c_3\left(\ln kt_1 + \ln \frac{1}{a}\right), \quad 0 < a < a_1, \tag{5.22}$$

где c_3 не зависит от a (и от k, t_1). Эта теорема дает теперь

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(\sigma_0 + it_1, \chi) > \frac{1}{\sigma_0 - \beta} - c_4\left(\ln kt_1 + \ln \frac{1}{a}\right). \tag{5.23}$$

Снова применим теорему П.4.5 с заменой $s_0 \to s_0' = \sigma_0 + i2t_1$, $r = 1/2$, $F(s) = L(s, \chi^2)$. Тогда получим

$$\frac{L(s,\chi^2)}{L(s_0',\chi^2)} = O\left(k^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \ln kt_1\right) =$$

$$= O\left(k^{\frac{1}{2}} (2t_1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \ln kt_1\right) = O\left(\frac{1}{a} k^{\frac{1}{2}} t_1^{\frac{1}{2}} \ln kt_1\right) \tag{5.24}$$

в круге $|s-s_0'| \leqslant 1/2$; следовательно, для M получается неравенство такой же формы, как (5.22), но возможно с другой константой c_3. Теперь из теоремы П. 4.9 следует, что

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(\sigma_0 + i2t_1, \chi^2) > -c_5\left(\ln kt_1 + \ln \frac{1}{a}\right). \tag{5.25}$$

Наконец, для $\sigma > 1$ и всех χ по mod k в силу равенства (3.4) и теоремы 3.3.1 имеем

$$\begin{gathered} \left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| \leqslant \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma-1}, \quad \sigma \to 1+0\,^{1)}, \\ \operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi) > -\frac{1+\varepsilon}{\sigma_0-1} = -(1+\varepsilon)\frac{1}{a}\ln kt_1 \end{gathered} \tag{5.26}$$

для достаточно малого a, например для $0 < a < a_2 = a_2(\varepsilon) < a_1$. Если подставим все это в (4.4) (с $\sigma = \sigma_0$), то для $0 < a < a_2$

$$-\frac{3(1+\varepsilon)}{\sigma_0-1} \ln kt_1 + \frac{4}{\sigma_0-\beta} - c_6\left(\ln kt_1 + \ln\frac{1}{a}\right) \leqslant 0$$

---

[1]) Недостаточно сослаться только на (3.5), после чего $L'/L \sim 1/(\sigma-1)$ при $\sigma \to 1+0$, если χ — главный характер, так как граница должна быть независима от k.

и, следовательно,

$$\left\{-3(1+\varepsilon)\frac{1}{a}+4\frac{1}{a+b}-c_6\right\}\ln kt_1-c_6\ln\frac{1}{a}\leqslant 0. \qquad (5.27)$$

Теперь возьмем ε настолько малым, чтобы $3(1+\varepsilon)<4$, например $\varepsilon={}^1/_4$. Тогда для достаточно малого a, например $0<a<a_3$, имеем

$$\left(-\frac{15}{4}\frac{1}{a}+4\frac{1}{a}-c_6\right)\ln 3-c_6\ln\frac{1}{a}>0,$$

так как $1/a$ при $a\to 0$ растет быстрее, чем $\ln 1/a$. Для достаточно малого b, например для $b\leqslant c_2$, также имеем неравенство

$$\left(-\frac{15}{4}\frac{1}{a}+4\frac{1}{a+b}-c_6\right)\ln 3-c_6\ln\frac{1}{a}>0,$$

и так как $kt_1\geqslant 3$, то это неравенство противоречит (5.27) и теорема 5.6 доказана. Доказано также и неравенство $1-c_1/\ln k|t|\geqslant {}^3/_4$, $|t|\geqslant 3$, так как, уменьшая c_2, всегда можно добиться, чтобы для всех $t\geqslant 3$ было $1-{}^1/_8<1-c_2/\ln kt$.

Теорема 5.7. *Пусть $k\geqslant 1$. При подходящем c_7, не зависящем от k, имеет место соотношение*

$$L(s,\chi)\neq 0 \text{ для } \chi^2\neq\chi_0 \text{ в области } \sigma\geqslant 1-\frac{c_7}{\ln 2k},\quad |t|\leqslant 5^{1)}. \qquad (5.28)$$

Доказательство. Как и в теореме 5.6, достаточно доказать утверждение для $t\geqslant 0$[2]. Пусть $\rho_1=\beta+it_1$ — нуль функции $L(s,\chi)$ в области $1-{}^1/_8<\beta<1$, $0\leqslant|t_1|\leqslant 5$. Положим $\sigma_0=1+a/\ln 2k$ и $\beta=1-b/\ln 2k$, где $0<a\leqslant{}^1/_2$ (a позднее будет определено точно), и также, как при доказательстве теоремы 5.6, применим теорему П. 4.5. Вместо соотношения (5.21) получаем теперь из (5.14), (5.19) ($s_0=\sigma_0+it_1$)

$$\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}=O\left(k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a}\ln 2k\right) \qquad (5.29)$$

в круге $|s-s_0|\leqslant{}^1/_2$, так как $E_0=0$ при $\chi\neq\chi_0$. Следовательно, при применении теоремы П. 4.5 можно взять

$$\ln M<c_8\left(\ln 2k+\ln\frac{1}{a}\right). \qquad (5.30)$$

---

[1]) Мы пишем $\ln 2k$, чтобы включить случай $k=1$. При $k\geqslant 2$ можно, естественно, заменить $c_7/\ln 2k$ на $c/\ln k$.

[2]) Если $\chi^2\neq\chi_0$, то также $\overline{\chi}^2\neq\chi_0$.

При этом условия применимости теоремы для достаточно малого a, очевидно, выполнены. Вместо (5.23) мы получаем теперь из П. 4.10

$$\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_0+it_1,\ \chi)>\frac{1}{\sigma_0-\beta}-c_9\left(\ln 2k+\ln\frac{1}{a}\right)=$$
$$=\frac{1}{a+b}\ln 2k-c_9\left(\ln 2k+\ln\frac{1}{a}\right). \qquad (5.31)$$

Все неравенства до конца § 5 справедливы только для достаточно малого a (возможно зависящего от ε), и это не всегда будет оговариваться.

Теперь применим теорему II. 4.5 с $s_0\to s_0'=\sigma_0+i2t_1$. В круге $|s-s_0'|\leqslant{}^1/_2$ имеем $|t|\leqslant 11$, так как $|t_1|\leqslant 5$; следовательно, для оценки $|L(s,\ \chi^2)|$ там применима оценка (5.14). Так как $\chi^2\neq\chi_0$, то при $E_0=0$ мы получаем отсюда и из (5.19) равенство

$$\frac{L(s,\ \chi^2)}{L(s_0',\ \chi^2)}=O\left(k^{1/2}\frac{1}{a}\ln 2k\right). \qquad (5.32)$$

Следовательно, для $\ln M$ опять получается граница того же вида как в (5.30) (возможно с другими константами). Теорема П. 4.9 дает теперь

$$\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_0+i2t_1,\ \chi^2)>-c_{10}\left(\ln 2k+\ln\frac{1}{a}\right), \qquad (5.33)$$

и из (5.26) следует, что

$$\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_0,\ \chi_0)>-(1+\varepsilon)\frac{1}{\sigma_0-1}=-(1+\varepsilon)\frac{1}{a}\ln 2k. \qquad (5.34)$$

Теперь, подставляя (5.31), (5.33), (5.34) в (4.4), получаем

$$\left\{-3(1+\varepsilon)\frac{1}{a}+4\frac{1}{a+b}-c_{11}\right\}\ln 2k-c_{11}\ln\frac{1}{a}\leqslant 0. \qquad (5.35)$$

Если, например, опять положить $\varepsilon={}^1/_4$ и a в случае необходимости уменьшить еще настолько, чтобы было

$$\left\{-3\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{a}+4\frac{1}{a}-c_{11}\right\}\ln 2-c_{11}\ln\frac{1}{a}>0,$$

то (5.35) приводит к противоречию при $b\leqslant c_{12}$ для всех $k\geqslant 1$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 5.8. *При $k\geqslant 1$ имеет место соотношение*

$$L(s,\ \chi)\neq 0\quad \textit{для}\quad \chi^2=\chi_0,\quad \sigma>1-\frac{c_{13}}{\ln 2k};\quad 0<|t|\leqslant 5; \qquad (5.36)$$

причем, следовательно, $\operatorname{Im} s\neq 0$.

Доказательство. Мы можем предположить $\chi \neq \chi_0$, так как при $\chi = \chi_0$ по (3.2) $L(s, \chi)$ совпадает с $\zeta(s)$ с точностью до множителя $\prod_{p \mid k} (1 - 1/p^s)$, который не обращается в 0 в области $\sigma > 0$, и по теореме 3.4.6 утверждение в этом случае верно.

Мы употребим те же обозначения, что при доказательстве предыдущей теоремы, и снова предположим $0 < t_1 \leqslant 5$. Тогда мы сможем вывести неравенства (5.31) и (5.34) для $\chi^2 = \chi_0$. Однако перестает быть верным результат, который вел к (5.32), так как теперь функция $L(s, \chi^2) = L(s, \chi_0)$ может быть нерегулярна в круге $|s - s_0'| \leqslant 1/2$ в том случае, когда точка $s = 1$ находится в этом круге. Применим теперь теорему П. 4.5 к функции

$$F(s) = (s-1) L(s, \chi^2) = (s-1) L(s, \chi_0)$$

и положим $r = 1/2$, $s_0 \to s_0' = \sigma_0 + i2t_1$. В силу (5.14) имеем

$$(s-1) L(s, \chi_0) = \frac{\varphi(k)}{k} + O\left(|s-1| k^{1/2}\right) = O\left(k^{1/2}\right) \tag{5.37}$$

в круге $|s - s_0'| \leqslant 1/2$. Далее, согласно (5.19),

$$\frac{1}{(s_0'-1) L(s_0', \chi_0)} = O\left(\frac{1}{(\sigma_0 - 1)^2}\right) = O\left(\frac{1}{a^2} \ln 2k\right). \tag{5.38}$$

Следовательно, в круге $|s - s_0'| \leqslant 1/2$

$$\frac{F(s)}{F(s_0')} = \frac{(s-1) L(s, \chi_0)}{(s_0'-1) L(s_0', \chi_0)} = O\left(\frac{1}{a^2} k^{1/2} \ln^2 2k\right).$$

Поэтому при применении теоремы П. 4.5 можно положить

$$\ln M < c_{14}\left(\ln 2k + \ln \frac{1}{a}\right)$$

и получить из П. 4.9 неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{F'}{F}(s_0') = \operatorname{Re} \frac{L'}{L}(\sigma_0 + i2t_1, \chi_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{s_0' - 1} > -c_{15}\left(\ln 2k + \ln \frac{1}{a}\right). \tag{5.39}$$

Подставляя это вместе с (5.31), (5.34) в (4.4) и замечая, что $1/|s_0' - 1| \geqslant \operatorname{Re} 1/(s_0' - 1)$, для достаточно малого a, $0 < a < a(\varepsilon)$, получаем

$$-3(1+\varepsilon)\frac{1}{\sigma_0 - 1} + 4\frac{1}{\sigma_0 - \beta} - \frac{1}{|s_0' - 1|} - c_{16}\left(\ln 2k + \ln \frac{1}{a}\right) \leqslant 0. \tag{5.40}$$

Отсюда получается противоречие (для достаточно малого a) только тогда, когда $1/|s_0'-1|$ не слишком велико. Следовательно, рассмотрим

$$t_1 > \frac{A}{\ln 2k}, \tag{5.41}$$

причем A сначала любая положительная константа, которую позднее мы определим точнее. Тогда

$$\frac{1}{|s_0'-1|} \leqslant \frac{1}{2t_1} \leqslant \frac{1}{2A}\ln 2k.$$

Подставляя это в (5.40), при $\varepsilon = {}^1/_4$ и $\sigma_0 = 1 + a/\ln 2k$, $\beta = 1 - b/\ln 2k$ получим

$$\left\{-3\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{a} + \frac{4}{a+b} - c_{17}\right\}\ln 2k - c_{17}\ln\frac{1}{a} \leqslant 0$$

(где $c_{17} = c_{16} + 1/(2A)$ зависит от A и при $A \to 0$ $c_{17} \to \infty$). Это дает при достаточно малом a противоречие, например, для $b \leqslant c_{18}$, как при доказательстве теорем 5.6 и 5.7.

Если неравенство (5.41) не выполнено, неравенство (4.4) больше не нужно. Вместо (4.4) можно применить тогда следующее соотношение. При $\sigma_0 > 1$ и действительном χ имеет место

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_0) + \frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi)\right\} = -\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma_0}}(\chi_0(n) + \chi(n)) \leqslant 0, \tag{5.42}$$

так как всегда $\chi_0(n) + \chi(n) \geqslant 0$.

Пусть теперь $\rho_1 = \beta + it_1$ — нуль функции $L(s, \chi)$, причем $1 - \frac{1}{8} < \beta < 1$ и

$$0 < t_1 \leqslant \frac{A}{\ln 2k}, \quad A > 0. \tag{5.43}$$

Вместе с ρ_1 также $\overline{\rho_1} = \beta - it_1$ является нулем $L(s, \chi)$, так как для действительного χ

$$L(\overline{s}, \chi) = \overline{L(s, \overline{\chi})} = \overline{L(s, \chi)}.$$

Теперь применим теорему П. 4.5 с

$$F(s) = L(s, \chi), \quad s_0 = \sigma_0 = 1 + a/\ln 2k, \quad r = \frac{1}{2}$$

и, в частности, применим (П. 4.11) с $\rho_2 = \overline{\rho_1}$. Если a и A достаточно малы, то ρ_1 и $\overline{\rho_1}$ для каждого $k \geqslant 1$ содержатся в круге $|s - s_0| \leqslant {}^1/_4$. Так как $\chi \neq \chi_0$, мы можем для оценки $|L(s, \chi)|$ опять применить

(5.14) с $E_0=0$. Тогда для достаточно малых a и A из (П. 4.11) следует, что

$$\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi) > \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sigma_0-\rho_1}+\frac{1}{\sigma_0-\bar{\rho}_1}\right\}-c_{19}\left(\ln 2k+\ln\frac{1}{a}\right). \quad (5.44)$$

Подставляя это и (5.34) в (5.42), получим

$$-(1+\varepsilon)\frac{1}{\sigma_0-1}+\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sigma_0-\rho_1}+\frac{1}{\sigma_0-\bar{\rho}_1}\right\}-c_{19}\left(\ln 2k+\ln\frac{1}{a}\right)\leqslant 0,$$

и, следовательно,

$$-(1+\varepsilon)\frac{1}{\sigma_0-1}+2\frac{\sigma_0-\beta}{(\sigma_0-\beta)^2+t_1^2}-c_{19}\left(\ln 2k+\ln\frac{1}{a}\right)\leqslant 0.$$

Для $\sigma_0=1+a/\ln 2k$, $\beta=1-b/\ln 2k$ с помощью (5.43) получаем неравенство

$$\left\{-(1+\varepsilon)\frac{1}{a}+2\frac{a+b}{(a+b)^2+A^2}-c_{19}\right\}\ln 2k-c_{19}\ln\frac{1}{a}\leqslant 0. \quad (5.45)$$

Теперь выберем ε настолько малым, чтобы $1+\varepsilon<2$ (например, $\varepsilon={}^1/_2$), и выберем a таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{a}+\frac{2}{a}-c_{19}\right)\ln 2-c_{19}\ln\frac{1}{a}>0,$$

что возможно всегда. Величину A мы уменьшим, если необходимо, настолько, чтобы, кроме того, имело место неравенство

$$\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{a}+\frac{2a}{a^2+A^2}-c_{19}\right)\ln 2-c_{19}\ln\frac{1}{a}>0.$$

Это противоречит при $b\leqslant c_{20}$ неравенству (5.45) с $\varepsilon={}^1/_2$, каково бы ни было $k\geqslant 1$. Тем самым теорема 5.8 полностью доказана.

Здесь уже видно, что исследование нулей $L(s, \chi)$ с действительными характерами, которые находятся вблизи действительной оси, особенно трудно.

§ 6. Действительные нули L-функций с действительными характерами. Примитивные характеры

Теорема 6.1. *При подходящем c_1 функция $L(s, \chi)$, $\chi^2=\chi_0$ имеет в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_1}{\ln 2k}, \qquad t=0 \quad (6.1)$$

самое большее один простой нуль.

Доказательство. Мы можем опять предположить, что $\chi\neq\chi^0$, так как $L(s, \chi_0)$ в области $\sigma>0$ имеет те же нули, что и $\zeta(s)$.

Пусть $\rho_1 = \beta_1$ и $\rho_2 = \beta_2$ — два действительных нуля функции $L(s, \chi)$, причем $1 - {}^1/_8 < \beta_1 < 1$, $1 - {}^1/_8 < \beta_2 < 1$. Положим

$$\beta_1 = 1 - b_1/\ln 2k, \quad \beta_2 = 1 - b_2/\ln 2k.$$

Мы должны доказать, что при подходящем c_2, независимом от k, или $b_1 > c_2$, или $b_2 > c_2$. Если $\sigma_0 = 1 + a/\ln 2k$, то при достаточно малом a можно применить теорему П. 4.5 с $F(s) = L(s, \chi)$, $s_0 = \sigma_0$, $r = {}^1/_2$. Используя (5.14) (для $E_0 = 0$) и (5.19), мы получим из П. 4.11

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi) > \frac{1}{\sigma_0 - \beta_1} + \frac{1}{\sigma_0 - \beta_2} - c_3 \left(\ln 2k + \ln \frac{1}{a} \right). \tag{6.2}$$

Подставляя это вместе с (5.34) в (5.42), получим

$$-(1+\varepsilon)\frac{1}{\sigma_0 - 1} + \frac{1}{\sigma_0 - \beta_1} + \frac{1}{\sigma_0 - \beta_2} - c_4 \left(\ln 2k + \ln \frac{1}{a} \right) \leqslant 0. \tag{6.3}$$

Если мы положим $\varepsilon = {}^1/_2$, то получим далее

$$\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{a} + \frac{1}{a + b_1} + \frac{1}{a + b_2} - c_4 \right) \ln 2k - c_4 \ln \frac{1}{a} \leqslant 0$$

и отсюда для достаточно малого a

$$\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{a} + \frac{2}{a + \max(b_1, b_2)} - c_4 \right) \ln 2k - c_4 \ln \frac{1}{a} \leqslant 0. \tag{6.4}$$

Выберем a настолько малым, чтобы было

$$\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{a} + \frac{2}{a} - c_4 \right) \ln 2 - c_4 \frac{1}{a} > 0,$$

тогда (6.4) представляет собой противоречие, как только $\max(b_1, b_2)$ достаточно мал, например, при $\max(b_1, b_2) \leqslant c_5$, где c_5 не зависит от k. Отсюда следует, что два различных нуля не могут лежать в области (6.1), если только c_1 достаточно мало. Случай единственного по крайней мере двукратного нуля β ($\beta_1 = \beta_2$) исследуется аналогично. Вместо (6.2) нужно применить неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi) > \frac{2}{\sigma_0 - \beta} - c \left(\ln 2k + \ln \frac{1}{a} \right),$$

следующее из П. 4.10 при $h = 2$.

Существует ли для всех k область вида (6.1) (с одной и той же константой), где $L(s, \chi) \neq 0$ для всех действительных χ по $\operatorname{mod} k$, до сих пор неизвестно. Мы докажем следующее утверждение: если в этой области $L(s, \chi_1)$ обращается в нуль, то имеется „много“ χ_2, для которых $L(s, \chi_2)$ там не обращается в нуль.

Для дальнейшего нам потребуется понятие эквивалентных характеров и понятие примитивного характера.

Пусть χ_1 и χ_2 — два характера, и k_1 и k_2 — соответствующие модули. Для чисел n, взаимно простых с k_1 и k_2, т. е. таких, что

$(n, [k_1, k_2]) = 1$, где $[k_1, k_2]$ — наименьшее общее кратное k_1 и k_2, мы имеем $\chi_1(n) \neq 0$, $\chi_2(n) \neq 0$. Характеры χ_1 и χ_2 называются эквивалентными, если

$$\chi_1(n) = \chi_2(n) \text{ для } (n, [k_1, k_2]) = 1 \tag{6.5}$$

или, короче говоря, если χ_1 и χ_2 равны для тех n, для которых оба значения не равны нулю. Тогда функция, определенная равенствами

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi_1(n) = \chi_2(n), & (n, [k_1, k_2]) = 1, \\ 0, & (n, [k_1, k_2]) > 1, \end{cases} \tag{6.6}$$

представляет собой характер χ по $\bmod [k_1, k_2]$. Легко проверить, что основные свойства а), b), с) из § 2 для $\chi(n)$ выполнены. В последующем k_1 и k_2 всегда будут натуральными числами. Если для характера χ_1 по $\bmod k_1$ имеется эквивалентный характер χ_2 по $\bmod k_2$, то говорят, что χ_1 определим по модулю k_2 или, коротко, χ_1 определим по $\bmod k_2$. Характер χ_2 называют определяющим для χ_1 по $\bmod k_2$, k_2 — определяющим модулем χ_1.

Тривиальным образом χ_1 само определимо по модулю k_1. В (6.6) $\chi(n)$ есть определяющий характер для $\chi_1(n)$ и $\chi_2(n)$ по модулю $[k_1, k_2]$.

Лемма 6.1. *Каждый характер χ_1 по $\bmod k_1$ может определяться по любому модулю, который кратен k_1.*

Доказательство. Пусть k_2 такое кратное. Тогда

$$\chi_2(n) = \begin{cases} \chi_1(n), & (n, k_2) = 1, \\ 0, & (n, k_2) > 1 \end{cases}$$

— характер по $\bmod k_2$, так как условия а), b), с) из § 2 выполнены; очевидно, χ_2 эквивалентен χ_1.

Лемма 6.2. *Пусть $k_2 \mid k_1$ и $(m, k_2) = 1$. Тогда имеются такие числа y, что*

$$(m + k_2 y, k_1) = 1. \tag{6.7}$$

Доказательство. Пусть k' — произведение всех простых чисел, которые делят k_1, но не делят k_2, и пусть $(m', k') = 1$. Тогда сравнение

$$m + k_2 y \equiv m' \pmod{k'}$$

разрешимо. Если y — решение, то

$$(m + k_2 y, k') = (m', k') = 1$$

и, с другой стороны,

$$(m + k_2 y, k_2) = (m, k_2) = 1$$

по предположению.

Следовательно, $(m+k_2y, k_1)=1$.

Лемма 6.3. *Пусть* $k_2 \mid k_1$. *Для того чтобы характер* χ_1 *по* $\operatorname{mod} k_1$ *был определим также по* $\operatorname{mod} k_2$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\chi_1(n)=1 \text{ для всех } n, \quad n \equiv 1 \pmod{k_2}, \quad (n, k_1)=1. \tag{6.8}$$

Доказательство. Необходимость следует сейчас же. А именно, если характер χ_2 по $\operatorname{mod} k_2$ эквивалентен χ_1, то должно быть $\chi_2(n)=\chi_1(n)$ для всех n, удовлетворяющих (6.8). Но с другой стороны, для этих же самых n должно быть $\chi_2(n)=1$, так как $n \equiv 1 \pmod{k_2}$.

Наоборот, предположим, что имеет место (6.8). Каждому m, взаимно простому с k_2, сопоставим значение $\chi_2(m)$. Для этого определим y, как в лемме 6.2, и положим

$$\chi_2(m)=\chi_1(m+k_2y). \tag{6.9}$$

Это определение не зависит от выбора y. Действительно, пусть, например, $(m+k_2y_1, k_1)=(m+k_2y_2, k_1)=1$. Определим $\overline{m}$ при помощи сравнения $m\overline{m}=1 \pmod{k_2}$; очевидно, что $(\overline{m}, k_2)=1$ и по лемме 6.2 имеется такое z, что $(\overline{m}+k_2z, k_1)=1$. Тогда имеем $(m+k_2y_1)(\overline{m}+k_2z) \equiv 1 \pmod{k_2}$, и оба сомножителя взаимно просты с k_1. Таким образом, если предположить, что (6.8) справедливо, то имеет место соотношение

$$\chi_1(m+k_2y_1)\chi_1(\overline{m}+k_2z)=\chi_1((m+k_2y_1)(\overline{m}+k_2 z))=1$$

и также

$$\chi_1(m+k_2y_2)\chi_1(\overline{m}+k_2z)=1.$$

Так как

$$\chi_1(\overline{m}+k_2z) \neq 0 \quad ((\overline{m}+k_2z, k_1)=1),$$

то отсюда следует

$$\chi_1(m+k_2y_1)=\chi_1(m+k_2y_2).$$

Если положить $\chi_2(n)=0$ для $(n, k_2)>1$, то с помощью равенства (6.9) характер по $\operatorname{mod} k$ определен полностью; для этого достаточно доказать свойства a), b), c) из § 2. Свойство a) следует из того, что из $(m+k_2y, k_1)=1$ получаем

$$\chi_1(m+k_2y) \neq 0.$$

Для доказательства b) допустим, например, $m_1 \equiv m_2 \pmod{k_2}$, $(m_1, k_2)=(m_2, k_2)=1$. Определим m' из сравнения $m_1m' \equiv m_2m' \equiv$ $\equiv 1 \pmod{k_2}$, а затем определим числа y_1, y_2, z так, чтобы числа

$$m_1+k_2y_1, \quad m_2+k_2y_2, \quad m'+k_2z$$

были взаимно просты с k_1. Тогда из (6.8) следует

$$\chi_1(m_1+k_2y_1)\,\chi_1(m'+k_2z)=\chi_1((m_1+k_2y_1)(m'+k_2z))=1$$

и также

$$\chi_1(m_2+k_2y_2)\,\chi_1(m'+k_2z)=1.$$

Итак мы получили $\chi_1(m_1+k_2y_1)=\chi_1(m_2+k_2y_2)$, т. е. $\chi_2(m_1)=\chi_2(m_2)$ для $m_1\equiv m_2 \pmod{k_2}$. Свойство с) следует при $(m_1m_2,\ k_2)=1$ из равенства

$$\chi_2(m_1)\,\chi_2(m_2)=\chi_1(m_1+k_2y_1)\,\chi_1(m_2+k_2y_2)=$$
$$=\chi_1(m_1m_2+k_2(y_1m_2+y_2m_1+k_2y_1y_2))=\chi_2(m_1m_2)$$

(в очевидных обозначениях)[1]).

Лемма 6.4. *Пусть χ_1 по $\bmod k_1$ и χ_2 по $\bmod k_2$ — два эквивалентных характера, и пусть $k'=(k_1,\ k_2)$. Тогда имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}\chi_1(n)&=1 \quad \textit{для} \quad n\equiv 1 \pmod{k'},\ (k_1,\ n)=1,\\ \chi_2(n)&=1 \quad \textit{для} \quad n\equiv 1 \pmod{k'},\ (n,\ k_2)=1\end{aligned} \tag{6.10}$$

и χ_1 и χ_2 могут определяться по $\bmod k'$.

Доказательство. Пусть $n\equiv 1 \pmod{k'}$, например $n=1+mk'$. Так как $k'=ak_1+bk_2$ (a, b — целые), то $n=1+mak_1+mbk_2$. Пусть теперь $(n,\ k_1)=1$; тогда $1+mbk_2$ взаимно просто с k_1 и k_2 и по определению эквивалентности имеет место равенство

$$\chi_1(n)=\chi_1(1+mak_1+mbk_2)=\chi_1(1+mbk_2)=\chi_2(1+mbk_2)=\chi_2(1)=1.$$

Также доказывается второе из соотношений (6.10), и из леммы 6.3 следует утверждение доказываемой леммы.

Теорема 6.2. *Все определяющие модули характера χ кратны единственному определяющему модулю k^*, который называют ведущим для χ.*

Доказательство. Пусть наименьший определяющий модуль k^* характера χ больше единицы. Каждый другой определяющий модуль кратен k^*. В противном случае число $(k,\ k^*)$ было бы опять определяющим модулем (по лемме 6.4) и имело бы $(k,\ k^*)<k^*$. (Мы воспользовались транзитивностью соотношения эквивалентности для характеров.) Если наименьший определяющий модуль равен 1, то теорема очевидна

Далее наименьший определяющий модуль будем обозначать через k^*, а характер, эквивалентный χ по $\bmod k^*$, — через χ^*. Имеется только

---

[1]) В случае $(m_1m_2,\ k_2)>1$ это также очевидно.

один такой характер по $\mathrm{mod}\, k^*$, эквивалентный χ, так как никакие два из $\varphi(k^*)$ характеров по $\mathrm{mod}\, k^*$ для всех n не имеют одинаковых значений (§ 2).

Пример. Пусть χ — характер по $\mathrm{mod}\, 6$, причем $\chi(n) = 1, -1$ для $n \equiv 1, 5 \pmod 6$. Здесь $k^* = 3$ — ведущий модуль характера χ, а $\chi^*(n) = 1, -1$ для $n \equiv 1, 2 \pmod 3$.

Если характер χ по $\mathrm{mod}\, k$ не определяется никаким модулем, который делит k, то χ называется примитивным характером. Тогда имеем $k^* = k$, $\chi^* = \chi$. В частности, χ^*, всегда примитивный характер (следовательно, $\chi^{**} = \chi^*$). Таким образом каждому характеру сопоставляется единственный примитивный характер χ^*. Два эквивалентных характера имеют один и тот же примитивный характер. Для данного характера по каждому модулю имеется по крайней мере один эквивалентный характер. Множество n с $\chi^*(n) \neq 0$, вообще говоря, шире множеств n с $\chi(n) \neq 0$. Первое из этих множеств есть наибольшее множество, в которое функция $\chi(n)$ может быть продолжена в определенном смысле без потери свойств характера.

Чтобы узнать о заданном характере, примитивный он или нет, достаточно по лемме 6.3 проверить, существует ли для каждого d, $d \mid k$ хотя бы одно n, такое, что

$$n \equiv 1 \pmod d, \quad (n, k) = 1, \quad \chi(n) \neq 1.$$

Два примитивных характера или совпадают для всех n, или не эквивалентны.

В частности, для каждого k главный характер χ_0 имеет ведущий модуль $k^* = 1$ и $\chi_0^*(n) = 1$ для всех целых n,

Если χ — действительный характер, то χ^* тоже действительный характер; это следует, например, из (6.9), так как характер χ_2 должен быть действительным, если χ_1 — действительный характер.

Подробное представление о теории характеров можно получить, например, из книги Хассе [1].

Теорема 6.3. *Пусть χ — характер $\mathrm{mod}\, k$, модуль k^* — ведущий для χ, и χ^* соответствующий примитивный характер $\mathrm{mod}\, k^*$. Между $L(s, \chi)$ и $L(s, \chi^*)$ существует соотношение*

$$L(s, \chi^*) = \prod_{p \mid k,\, p \nmid k^*} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right)^{-1} L(s, \chi). \tag{6.11}$$

$L(s, \chi^*)$ и $L(s, \chi)$ имеют в полуплоскости $\sigma > 0$ одни и те же нули[1]).

Доказательство. Формула (6.11) следует из того, что в разложении в произведение $L(s, \chi^*)$ при $p \nmid k^*$ все сомножители сов-

[1]) Если они там вообще имеются, что позднее (гл. VII) будет показано.

падают с соответствующими сомножителями в произведении для $L(s, \chi)$. При $p|k$, $p \nmid k^*$ имеем $\chi^*(p) \neq 0$, $\chi(p)=0$. В силу (6.11) функции $L(s, \chi)$, $L(s, \chi^*)$ для каждого s из области $\sigma > 0$ или обе обращаются в нуль, или обе отличны от нуля, так как $|\chi^*(p)/p^s| = 1/p^\sigma < 1$, и поэтому при $\sigma > 0$ всегда $1 - \chi^*(p)/p^s \neq 0$, ∞. Также и кратность возможного нуля одна и та же. Произведение в формуле (6.11) можно распространить на все $p|k$, так как для $p|k^*$ имеем $\chi^*(p) = 0$. Следовательно, имеет равенство

$$L(s, \chi) = L(s, \chi^*) \prod_{p|k} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right). \tag{6.12}$$

Теорема 6.4. *Пусть χ_1^* и χ_2^* — действительные характеры по модулям k_1^* и k_2^*, причем $\chi_1^* \neq \chi_2^*$. Тогда существует такая константа $c_6 > 0$, что в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_6}{\ln k_1^* k_2^*}, \quad t = 0 \tag{6.13}$$

по крайней мере одна из функций $L(s, \chi_1^*)$, $L(s, \chi_2^*)$ не обращается в нуль.

Доказательство. Достаточно предположить, что $\chi_1^* \neq \chi_0^*$, $\chi_2^* \neq \chi_0^*$, где χ_0^* — примитивный характер по mod 1, принадлежащий всем главным характерам. Для $\chi_1^* = \chi_0^*$ имеем $L(s, \chi_1^*) = \zeta(s)$ и $\zeta(\sigma) \neq 0$ при $\sigma > 1 - c$, $c > 0$ [1]).

Определим χ_1^* и χ_2^* по модулю $k_1^* k_2^* = k$ и обозначим таким образом полученные характеры через χ_1 и χ_2. Очевидно, что $k > 2$ и $\chi_1 \neq \chi_0$, и $\chi_2 \neq \chi_0$, $\chi_1 \neq \chi_2$; для $\chi_1 = \chi_2$ было бы $k_1^* = k_2^*$, $\chi_1^* = \chi_2^*$. Характеры χ_1 и χ_2 — действительные и $\chi_1\chi_2 \neq \chi_0$, так как в противном случае для любого n было бы $\chi_1(n) = \chi_2(n) = (0, \pm 1)$. С помощью теоремы 6.3 мы можем доказать утверждение для функций $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \chi_2)$ вместо $L(s, \chi_1^*)$ и $L(s, \chi_2^*)$. При $\sigma > 1$ имеет место соотношение

$$\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0) + \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1) + \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_2) + \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1\chi_2) = \\ = -\sum_n b_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \leqslant 0, \tag{6.14}$$

так как

$$b_n = \chi_0(n) + \chi_1(n) + \chi_2(n) + \chi_1(n)\chi_2(n) = \\ = (1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n)) \geqslant 0, \quad (n, k) > 1.$$

---

[1]) $0 < \sigma < 1$ (см ниже (7.1)).

Если теперь $\rho_1 = \beta_1 = 1 - b_1/\ln k$ и соответственно $\rho_2 = \beta_2 = 1 - b_2/\ln k$ — нули функций $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \chi_2)$, причем $1 - {}^1/_8 < \beta_1$, $\beta_2 < 1$ и $\sigma_0 = 1 + a/\ln k$, то, применяя теорему П. 4.5 также, как в (4.5.31), получаем для достаточно малого a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_1) &= \frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_1) > \frac{1}{\sigma_0 - \beta_1} - c\left(\ln k + \ln\frac{1}{a}\right), \\ \operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_2) &= \frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_2) > \frac{1}{\sigma_0 - \beta_2} - c\left(\ln k + \ln\frac{1}{a}\right). \end{aligned} \tag{6.15}$$

При этом константа c может не быть одной и той же.

Так как $\chi_1 \neq \chi_0$ и $\chi_2 \neq \chi_0$, мы можем для оценки $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \chi_2)$ в круге $|s - \sigma_0| \leqslant {}^1/_2$ опираться на формулу (5.14) при $E_0 = 0$. Это же мы можем сделать при оценке $L(s, \chi_1\chi_2)$, поскольку $\chi_1\chi_2 \neq \chi_0$. Из (П. 4.9) получим

$$\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_1\chi_2) = \frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_1\chi_2) > -c\left(\ln k + \ln\frac{1}{a}\right) \tag{6.16}$$

опять для достаточно малого a. Подставим это вместе с (6.15) и (5.34) в (6.14). Тогда

$$-(1+\varepsilon)\frac{1}{\sigma_0 - 1} + \frac{1}{\sigma_0 - \beta_1} + \frac{1}{\sigma_0 - \beta_2} - c\left(\ln k + \ln\frac{1}{a}\right) < 0$$

или (при $\varepsilon = {}^1/_2$)

$$\left\{-\frac{3}{2}\frac{1}{a} + \frac{1}{a + b_1} + \frac{1}{a + b_2} - c\right\}\ln k - c\ln\frac{1}{a} < 0$$

для достаточно малого a. Можно уменьшить a, если это необходимо, настолько, чтобы было

$$\left\{-\frac{3}{2}\frac{1}{a} + \frac{2}{a} - c\right\}\ln 2 - c\ln\frac{1}{a} > 0.$$

Теперь, как при доказательстве теоремы 6.1, получаем $\max(b_1, b_2) > c_7$.

Теорема 6.5. *Пусть χ_1 и χ_2 — действительные не эквивалентные характеры по модулям k_1 и k_2. Тогда в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_6}{\ln k_1 k_2}, \quad t = 0 \tag{6.17}$$

по крайней мере одна из функций $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \chi_2)$ не обращается в нуль.

Доказательство. Утверждение следует, с одной стороны, из теоремы 6.4, так как функции $L(s, \chi_1^*)$ и $L(s, \chi_2^*)$ в области $\sigma > 0$ имеют те же нули, что $L(s, \chi_1)$ и $L(s, \chi_2)$, а с другой стороны, из неравенства $k_1k_2 \geqslant k_1^*k_2^*$. Так как χ_1 и χ_2 не эквивалентны, то выполнено также условие $\chi_1^* \neq \chi_2^*$, Теорема 6.6. *Пусть z — любое действительное число, $z > 2$. Существует не зависящая от z константа c_8 со следующим свойством: для всех действительных χ по модулям, не превосходящим z,*

$$L(s, \chi) \neq 0, \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{c_8}{\ln z}, \quad t = 0, \tag{6.18}$$

возможно, за исключением тех действительных χ, которые эквивалентны единственному не определенному более точно примитивному характеру $\chi^* = \chi^*(z)$ по модулю $k^* = k^*(z)$ [1].

Доказательство. Достаточно доказать, что 6.18 имеет место для всех действительных примитивных характеров χ^* по модулям, не превосходящим z, за исключением, быть может, одного. Если теперь $\chi_1^* \bmod k_1^*$, $\chi_2^* \bmod k_2^*$, $k_1^* \leqslant z$, $k_2^* \leqslant z$ — два таких примитивных характера, то по теореме 6.4 при $\chi_1^* \neq \chi_2^*$ в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_6}{\ln k_1^* k_2^*}, \quad t = 0$$

имеет нуль не более чем одна из функций $L(s, \chi_1^*)$, $L(s, \chi_2^*)$. Так как $\ln k_1^* k_2^* \leqslant \ln z^2 = 2 \ln z$, то то же самое имеет место при $\sigma \geqslant 1 - c_6/2 \ln z$, чем утверждение доказано для $c_8 = \frac{1}{2} c_6$.

Модули, для которых могут существовать такие действительные характеры, для которых (6.18) не выполняется, кратны единственному модулю $k^* = k^*(z)$.

Если теорема 6.6 выполняется с некоторым значением c_8, то она, очевидно, имеет место, если c_8 заменить на меньшую константу.

Теорема 6.7. *Пусть $z \geqslant k_0 + 1$, где k_0 — натуральное число. При подходящем $c = c(k_0)$, не зависящем от z, в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c(k_0)}{\ln z}, \quad t = 0 \tag{6.19}$$

могут иметь нули только те из L-функций

$$L(s, \chi), \quad \chi \text{ по } \bmod k, \quad k \leqslant z, \tag{6.20}$$

для которых $k \equiv 0 \pmod{k^*}$, причем $k^* = k^*(z) > k_0$. Все такие χ принадлежат к тому же самому χ^* по $\bmod k^*$.

Доказательство. По теореме 5.7 можно ограничиться действительными характерами, так как в силу неравенства $k \leqslant z$ в утверждении можно заменить $2k$ на $2z$. Для действительных характеров

[1]) Модуль k^* зависит от z, так как для постоянного k^* можно всегда выбрать z настолько большим, что в области $\sigma \geqslant 1 - c_8/\ln z$ нет действительных нулей ни у какой функции $L(s, \chi)$, где χ — характер по $\bmod k^*$ (теоремы 4.1 и 4.2). Следовательно, $k^*(z) \to \infty$ при $z \to \infty$.

утверждение следует из теорем 6.6 и 4.2, и можно всегда выбрать $c=c(k_0)$, меньшее чем c_8, настолько малым, что в области $\sigma \geqslant 1 - c(k_0)/\ln(k_0+1)$, $t=0$ ни одна из действительных L-функций по модулям, не превосходящим k_0, не обращается в нуль. Так как $(k_0+1) \leqslant z$, то же самое имеет место в области $\sigma \geqslant 1 - c(k_0)/\ln z$, $t=0$.

До сих пор не доказано, что в теоремах 6.4 и 6.5 выражение „не больше одной" можно заменить на „никакая" и, следовательно, в теоремах 6.6 и 6.7 все, что относится к $\chi^*(z)$, $k^*(z)$, можно опустить.

Теорема 6.8. *Пусть $k_0 \geqslant 1$ — целое. При подходящем $c=c(k_0)$ не более чем одна из L-функций, которые образованы всеми характерами модуля k, имеет действительный нуль в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c(k_0)}{\ln 2k}, \tag{6.21}$$

и возможное исключение может появиться лишь при модулях, больших k_0.

Это следует из теоремы 6.7 с $z=k$.

Теорема 6.9. *Существует константа $c_0>0$ со следующими свойствами:*

a) *Для целого $k \geqslant 1$ в области*[1])

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_0}{\ln k(|t|+2)} \geqslant \frac{3}{4} \quad (t \text{ — любое}) \tag{6.22}$$

$L(s,\chi) \neq 0$ для всех χ по $\mathrm{mod}\, k$, *за исключением, быть может, L-функции, соответствующей действительному χ по* $\mathrm{mod}\, k$, *которая имеет там действительный нуль первого порядка β_1.*

b) *Для любого $z \geqslant 2$ в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_0}{\ln z(|t|+2)} \geqslant \frac{3}{4} \quad (t \text{ — любое}) \tag{6.23}$$

$L(s,\chi) \neq 0$ для всех χ по модулям, не превосходящим z, за исключением, быть может, тех $L(s,\chi)$, для которых χ эквивалентно одному и тому же примитивному характеру $\chi^* = \chi^*(z)$ $\mathrm{mod}\, k^*$, *$k^* = k^*(z)$.*

Если $k_0 \geqslant 1$ — целое, то с помощью уменьшения c_0 можно добиться, чтобы в a) *при $k \leqslant k_0$ не было никаких исключений, а в* b) *было $k^*(z) > k_0$ при всех $z \geqslant 2$.*

Доказательство получается применением теорем из § 5, 6 со ссылкой на монотонность функции $\ln x$.

Теоремы, доказанные в § 5, 6 о нулях L-функций, принадлежат Грюнвалю [1], Ландау [9], [10], Титчмаршу [2] и Пейджу [1]. Идея рассматривать функции (6.14) принадлежит, вероятно, Ландау [9].

---

[1]) $\ln k|t|$ и $\ln 2k$ заменяются на $\ln k(|t|+2)$, чтобы охватить случаи $|t| \geqslant 3$ и $|t| \leqslant 3$.

§ 7. Число простых чисел в арифметической прогрессии

Теперь мы будем применять теоремы о нулях L-функций к асимптотической оценке величины

$$\pi(x,\ k,\ l)=\sum_{p\leqslant x,\ p\equiv l \pmod k} 1.$$

Наши рассуждения будут аналогичны проведенным в гл. III, только возможное существование в области (6.22) „исключительных" нулей приводит к некоторым осложнениям.

Обозначим через χ_1 возможно существующий исключительный характер $\bmod k\ (k\geqslant 1)$, а через β_1 исключительный нуль $L(s,\ \chi_1)$ в области (6.22). χ_1 никогда не равно χ_0, так как из равенства[1])

$$\left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)=1-2^{-s}+3^{-s}-+\ \ldots,\quad \sigma>0 \qquad (7.1)$$

следует, что $\left(1-2^{1-\sigma}\right)\zeta(\sigma)>0$, и поэтому $\zeta(\sigma)$ меньше нуля при $0<\sigma<1$. Отсюда видно, что $L(s,\ \chi_0)<0$.

Существование χ_1 и β_1 зависит от c_0. Именно, уменьшая c_0, всегда можно добиться того, чтобы для постоянного k не существовало никаких исключительных характеров.

В гл. IV, а также в гл. VII, IX, X мы считаем константу c_0 из теоремы 6.9 заданной. Остальные константы в этой главе зависят, вообще говоря, от c_0.

Если нет исключительных характеров χ_1 и нулей β_1, то во всех равенствах нужно опустить члены, в которых встречаются χ_1 или β_1,

Теорема 7.1. *При подходящем $c_1>0$ и произвольном действительном числе t в области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_1}{\ln k(|t|+2)}\geqslant\frac{3}{4},\quad k\geqslant 1, \qquad (7.2)$$

имеют место оценки

$$\frac{L'}{L}(s,\ \chi)=O(\ln k(|t|+2)),\quad \chi\neq\chi_0,\chi_1, \qquad (7.3)$$

$$\frac{L'}{L}(s,\ \chi_0)=-\frac{1}{s-1}+O(\ln k(|t|+2)), \qquad (7.4)$$

$$\frac{L'}{L}(s,\ \chi_1)=\frac{1}{s-\beta_1}+O(\ln k(|t|+2)). \qquad (7.5)$$

Доказательство. Применим теорему П.4.6 в случае, когда $r=1/2$, $s_0=\sigma_0+it_1$, t_1 — любое действительное число, $\sigma_0=1+$ $+a/\ln k(|t_1|+2)$, причем пусть сначала $0<a<1/2$ (позже a будет

[1]) Равенство (7.1) позволяет, между прочим, очень просто получить продолжение $\zeta(s)$ в область $0<\sigma<1$.

определено более точно). В круге $|s-s_0|\leqslant 1/2$ справедливы оценки (5.12) и (5.14). Положим теперь в формулировке теоремы П.4.6

а) $F(s)=L(s,\chi)$ при $\chi\neq\chi_0,\chi_1$,

б) $F(s)=(s-1)L(s,\chi_0)$ при $\chi=\chi_0$,

в) $F(s)=L(s,\chi_1)/(s-\beta_1)$ при $\chi=\chi_1$.

В случае а) из (5.12), (5.14), (5.19) следует оценка[1])

$$\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}=O\left\{k^{1/2}(|t_1|+2)^{1/2}\frac{1}{a}\ln k(|t_1|+2)\right\},\quad |s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}. \tag{7.6}$$

Аналогично в случае б)

$$\frac{(s-1)L(s,\chi_0)}{(s_0-1)L(s_0,\chi_0)}=O\left\{(1+|s-1|)k^{1/2}(|t_1|+2)^{1/2}\frac{1}{a^2}\ln^2 k(|t_1|+2)\right\}=$$
$$=O\left\{\frac{1}{a^2}k^c(|t_1|+2)^c\right\},\quad |s-s_0|\leqslant 1/2, \tag{7.7}$$

причем константа c не зависит от k, t_1 и a и может иметь не всегда одно и то же значение.

В случае в) мы возьмем c_2 настолько малым, чтобы круг

$$|s-\beta_1|\leqslant c_2$$

целиком лежал в полуплоскости $1/2\leqslant\sigma$. Это можно сделать ввиду того, что $3/4\leqslant\beta_1<1$. Например, можно взять $c_2=1/8$. При $|s-\beta_1|\geqslant c_2$, $1/2\leqslant\sigma$ из (5.12), (5.14), (5.19) и $s_0-\beta_1=O(|t_1|+2)$ следует оценка

$$\frac{L(s,\chi_1)(s_0-\beta_1)}{L(s_0,\chi_1)(s-\beta_1)}=O\left\{k^{1/2}(|t|+2)^{1/2}(|t_1|+2)\frac{1}{a}\ln k(|t_1|+2)\right\}. \tag{7.8}$$

Так как функция, стоящая в левой части (7.8), регулярна в круге $|s-\beta_1|\leqslant c_2$, то (7.8) имеет место в этом круге[2]), а следовательно, всюду в полуплоскости $1/2\leqslant\sigma$ и, в частности, в круге $|s-s_0|\leqslant 1/2$. Теперь применим теорему П.4.6 в случае $r_1=2a/\ln k(|t_1|+2)$. Тогда очевидно, что при $0<a<a_1<1/2$, $r_1<\frac{1}{4}r=1/8$ и во всех случаях а), б), в) $F(s)\neq 0$ в области

$$\sigma\geqslant 1-\frac{3a}{\ln k(|t_1|+2)},\quad |s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}$$

(по теореме 6.9, так как в случае в) β_1 — нуль первого порядка), как этого требует применение теоремы П.4.6. Фиксируем a так, чтобы оно удовлетворяло этому условию. Из (7.6), (7.7) и (7.8) следует, что во всех трех случаях, применяя теорему П.4.6, можно взять

$$\ln M<c\ln k(|t_1|+2).$$

---

[1]) При $|s-s_0|\leqslant 1/2$ имеем $O(|t|+2)=O(|t_1|+2)$.

[2]) По принципу максимума.

При $|s-s_0|\leqslant 1/2$ в (7.8) можно заменить t на t_1. Теперь мы не будем больше отмечать особо зависимость константы c от фиксированного выше a. Нужно еще проверить, выполнено ли соотношение (П.4.12) во всех трех случаях. В случае а) из (5.26) следует

$$\frac{F'}{F}(s_0)=\frac{L'}{L}(s_0,\ \chi)=O(\ln k(|t_1|+2)).$$

В случае б) из (5.26) и неравенства $|s_0-1|>\sigma_0-1=a/\ln k(|t_1|+2)$ вытекает

$$\frac{F'}{F}(s_0)=\frac{L'}{L}(s_0,\ \chi_0)+\frac{1}{s_0-1}=O(\ln k(|t_1|+2)).$$

Наконец, в случае в) из (5.26) и неравенства $|s_0-\beta_1|\geqslant\sigma_0-\beta_1>$ $>a/\ln k(|t_1|+2)$ получаем

$$\frac{F'}{F}(s_0)=\frac{L'}{L}(s_0,\ \chi_1)-\frac{1}{s_0-\beta}=O(\ln k(|t_1|+2)).$$

Поэтому во всех трех случаях теорема П.4.6 применима. Мы получаем оценки (7.3), (7.4) и (7.5) сначала для $s=\sigma+it_1$, $|\sigma-\sigma_0|\leqslant$ $\leqslant r_1=2a/\ln k(|t_1|+2)$ в области

$$1-\frac{a}{\ln k(|t|+2)}\leqslant\sigma\leqslant 1+\frac{3a}{\ln k(|t|+2)}.$$

При $\sigma>1+3a/\ln k(|t|+2)$ эти оценки следуют из формулы (5.26), имеющей место для любого характера.

Рассмотрим теперь при $k\geqslant 1$ для всех χ по $\operatorname{mod} k$ функции

$$\psi(x,\ \chi)=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\,\Lambda(n) \tag{7.9}$$

и при l, взаимно простом с k, функцию

$$\psi(x,\ k,\ l)=\sum_{n\leqslant x,\ n\equiv l\,(\operatorname{mod} k)}\Lambda(n), \tag{7.10}$$

которая при $k=1$ переходит в функцию $\psi(x)$. Согласно (2.11), имеет место равенство

$$\psi(x,\ k,\ l)=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi \operatorname{mod} k}\bar\chi(l)\,\psi(x,\ \chi). \tag{7.11}$$

Теорема 7.2. *Если положить*

$$E_1=E_1(\chi,\ k)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad \chi=\chi_1,\\ 0 & \text{при}\quad \chi\neq\chi_1,\end{cases} \tag{7.12}$$

то имеет место соотношение

$$\psi(x,\ \chi)=E_0x-E_1\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}+O\left(xe^{-c_3\sqrt{\ln x}}\right), \tag{7.13}$$

которое равномерно при $k \leqslant \exp\left(c_4 \sqrt{\ln x}\right)$. (Определение E_0 см. в (5.11).)

Доказательство. Применим теорему П.3.1 в случае

$$f(s) = -\frac{L'}{L}(s, \chi), \quad b > 1, \quad w = 0.$$

Согласно (3.4), $a_n = O(\ln n)$, и так как

$$\left|\frac{L'}{L}(s, \chi)\right| \leqslant -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right), \quad \sigma \to 1 + 0, \tag{7.14}$$

то можно взять $\alpha = 1$. Тогда при $x = N + 1/2$, $N \geqslant 1$, $T > 0$, $b = 1 + 1/\ln x$, $w = 0$ получаем формулу

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x}{T} \ln^2 x\right). \tag{7.15}$$

Пусть P_1, P_2 — точки $1 + 1/\ln x \pm iT$ и Q_1, Q_2 — точки

$$1 - \frac{c_1}{\ln k(T+2)} \pm iT.$$

Обозначим через Γ_1 отрезок $\overline{P_1Q_1}$, через Γ_2 — отрезок кривой $\sigma = 1 - c_1/\ln k(|t| + 2)$, ведущий от Q_1 до Q_2, через Γ_3—отрезок $\overline{Q_2P_2}$, и через C — замкнутый путь $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \overline{P_2P_1}$.

Сначала предположим, что $\chi \neq \chi_1$. Тогда на C нет ни одной особой точки подинтегральной функции. Аналогично выводу соотношения (3.3.7) получаем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds = E_0 x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds. \tag{7.16}$$

Если потребовать, чтобы $T \geqslant 2$ $(1/(s-1) = O(1)$ при $s \in \Gamma_1 + \Gamma_3)$, то, согласно (7.3) и (7.4), имеет место оценка

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_3} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds = O\left\{\ln k(T+2) \frac{1}{T} \int_{1-c_1/\ln k(T+2)}^{1+1/\ln x} x^\sigma d\sigma\right\} =$$
$$= O\left(\frac{x}{T} \ln kT\right). \tag{7.17}$$

Так как в силу (7.2) $\sigma \geqslant 3/4$ для всех $s \in \Gamma_2$, то на Γ_2 имеем $1/(s-1) = O(\ln 2k)$ и $1/s = O\{1/(|t| + 1)\}$. Поэтому из (7.3) и (7.4) следует

$$\int_{\Gamma_2} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds = O\left(\ln kT \int_1^T x^{1-c_1/\ln k(t+2)} \frac{dt}{t}\right).$$

Это есть

$$O\left(x^{1-c_5/\ln kT}\ln^2 kT\right), \qquad T \geqslant 2, \tag{7.18}$$

так как показатель в последнем интеграле имеет максимум

$$1 - c_1/\ln k(T+2) < 1 - c_5/\ln kT \qquad (T \geqslant 2).$$

Если положить $\ln T = \sqrt{\ln x}$ для достаточно большого x и принять во внимание, что $\ln k \leqslant c_4\sqrt{\ln x}$, то $\ln kT = O\left(\sqrt{\ln x}\right)$ и порядок величины всех остаточных членов при достаточно малом c_6 будет равен $O\left(x\exp\left\{-c_6\sqrt{\ln x}\right\}\right)$. Тем самым утверждение теоремы при $\chi \neq \chi_1$ доказано.

Рассмотрим случай $\chi = \chi_1$. Если для исключительного нуля β_1, который может существовать, выполняется неравенство

$$\beta_1 \geqslant 1 - \frac{c_1}{2\ln 2k},$$

то для $s \in \Gamma_2$

$$\frac{1}{s-\beta_1} = O(\ln 2k).$$

В этом случае используется формула (7.5) и доказательство протекает так же, как при $\chi \neq \chi_1$, только в правой части равенства (7.16) появляется член

$$\operatorname*{Res}_{s=\beta_1}\left\{-\frac{L'}{L}(s,\ \chi_1)\,\frac{x^s}{s}\right\} = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}.$$

В случае неравенства

$$\beta_1 < 1 - \frac{c_1}{2\ln 2k} \tag{7.19}$$

мы проводим вокруг точки пересечения Γ_2 с действительной осью $\sigma = 1 - c_1/\ln 2k$, $t = 0$ окружность радиуса ${}^3/_4\, c_1/\ln 2k$ и заменяем соответствующий кусок Γ_2 на кусок дуги окружности, проходящей через точку $\sigma = 1 - {}^1/_4\, c_1/\ln 2k$, $t = 0$. Пусть Γ_2' — измененный таким образом путь и $C' = \Gamma_1 + \Gamma_2' + \Gamma_3 + \overline{P_2P_1}$. Тогда имеют место соотношения

$$\operatorname*{Res}_{C'}\left\{-\frac{L'}{L}(s,\ \chi_1)\,\frac{x^s}{s}\right\} = 0, \qquad \frac{1}{s-\beta_1} = O(\ln 2k), \qquad s \in \Gamma_2'.$$

Следовательно, как и раньше[1]),

$$\psi(x,\ \chi) = O\left(xe^{-c_7\sqrt{\ln x}}\right).$$

---

[1]) Естественно, что здесь $E_0 = 0$, так как $\chi_1 \neq \chi_0$.

Из (7.19) и неравенства $1 - c_1/2\ln 2k > \beta_1 \geqslant 3/4$ при $k \leqslant \exp\left(c_4 \sqrt{\ln x}\right)$ получаем

$$\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} = O\left(x^{1-c_1/2\ln 2k}\right) = O\left(xe^{-c_8\sqrt{\ln x}}\right).$$

Следовательно, равенство (7.13) выполнено и в этом случае, если c_3 достаточно мало. Отличие в том, что второй член правой части содержится в этом случае в остаточном члене. Тем самым теорема 7.2 полностью доказана.

Из хода доказательства вытекает, что c_4 в (7.13) можно взять любым, но при увеличении c_4, вообще говоря, c_3 должно будет уменьшаться. Позднее мы покажем, что теорему 7.2 можно существенно улучшить (гл. IX).

Теорема 7.3. *Имеет место равенство*

$$\psi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} - \frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)}\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O\left(xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right), \tag{7.20}$$

которое выполняется равномерно при $k \leqslant \exp\left(c_{10}\sqrt{\ln x}\right)$. *Второй член не равен нулю, если существует исключительный характер* χ_1 *по* $\operatorname{mod} k$ *и исключительный нуль* $\beta_1 = \beta_1(k)$ *соответствующей функции* $L(s, \chi_1)$.

Доказательство. Из равенства (7.11) и теоремы 7.2 следует, что

$$\psi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)\left\{E_0 x - E_1\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)\right\}.$$

Отсюда получается (7.20), если принять во внимание определения E_0, E_1 и соотношение $\bar{\chi}_1 = \chi_1$, $\sum\limits_{\chi} 1 = \varphi(k)$.

Функция $\operatorname{li} x$ — „интегральный логарифм x" — определяется формулой

$$\operatorname{li} x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x}\right)\frac{d\xi}{\ln \xi} \qquad (x > 1).$$

Очевидно, что

$$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{d\xi}{\ln\xi} + O(1) \qquad (x \to \infty). \tag{7.21}$$

Далее для любого натурального m с помощью интегрирования по частям получаем

$$\int_2^x \frac{d\xi}{\ln\xi} = \frac{x}{\ln x} + O(1) + \int_2^x \frac{d\xi}{\ln^2\xi} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \frac{2!\,x}{\ln^3 x} + \ldots + \frac{(m-1)!\,x}{\ln^m x} + O\left(\frac{x}{\ln^{m+1} x}\right), \tag{7.22}$$

так как

$$\int_2^x \frac{d\xi}{\ln^m \xi} = \left(\int_2^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x\right)\frac{d\xi}{\ln^m \xi} = O\left\{\sqrt{x} + \frac{x}{(\ln\sqrt{x})^m}\right\} = O\left(\frac{x}{\ln^m x}\right). \tag{7.23}$$

Лемма 7.1. *Пусть равенство*

$$\psi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\{R(x, k)\} \qquad (x \to \infty) \tag{7.24}$$

выполняется равномерно при $k \leqslant \omega(x)$, $(k, l) = 1$, *причем* $\omega(x)$ *обозначает любую неотрицательную функцию* x. *Будем предполагать, что при* $x > x_0$, *где* x_0 *не зависит от* k, *функция* $R(x, k)/\ln^2 x$ *монотонно возрастает. Пусть далее при* $k \leqslant \omega(x)$ *выполняется оценка* $x^{1/2} = O(R(x, k))$. *Для фиксированных* x *функция* $R(x, k)$ *должна быть равномерно ограничена по* k. *Если все эти условия выполнены, то имеет место равенство*

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{li} x + O\left\{\frac{R(x, k)}{\ln x}\right\} \qquad (x \to \infty), \tag{7.25}$$

которое выполняется равномерно при $1 \leqslant k \leqslant \omega(x)$.

Доказательство. При любом k

$$\pi(x, k, l) = \sum_{p \leqslant x,\ p \equiv l \pmod k} 1 = \sum_{n \leqslant x,\ n \equiv l \pmod k} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} -$$

$$- \sum_{\substack{p^m \leqslant x,\ p^m \equiv l \pmod k \\ m \geqslant 2}}\sum \frac{1}{m} = \sum_{n \leqslant x,\ n \equiv l \pmod k} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} + O\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\right)$$

так как (см. (1.3.18))

$$\sum_{p^m \leqslant x,}\ \sum_{m \geqslant 2} \frac{1}{m} = O\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x} + \left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right] x^{1/3}\right).$$

Далее, согласно теореме П.1.4 и равенству (7.24), при $k \leqslant \omega(x)$

$$\sum_{n \leqslant x,\ n \equiv l \pmod k} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} = \frac{x}{\varphi(k)\ln x} +$$

$$+ O\left(\frac{R(x, k)}{\ln x}\right) - \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \xi d\,\frac{1}{\ln \xi} + O\left(\int_2^x R(\xi, k)\left|d\,\frac{1}{\ln \xi}\right|\right).$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_2^x \xi d\,\frac{1}{\ln \xi} = \frac{x}{\ln x} + O(1) - \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi}.$$

Далее в силу монотонности $R(x, k)/\ln^2 x$ при $x > x_0$ имеем

$$\int_2^x R(\xi, k)\left|d\frac{1}{\ln\xi}\right| = \left(\int_2^{x_0} + \int_{x_0}^x\right) R(\xi, k)\left|d\frac{1}{\ln\xi}\right| \leqslant$$
$$\leqslant O(1) + \frac{R(x, k)}{\ln^2 x}\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi} = \frac{R(x, k)}{\ln x} + O(1),$$

где константа в $O(1)$ не зависит от k, так как $R(\xi, k)$ ограничена при $\xi \leqslant x_0$ и $k \geqslant 1$. Если принять во внимание (7.21), то получим (7.25).

Теорема 7.4. *Равенство*

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{\varphi(k)} + xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right) \tag{7.26}$$

выполняется равномерно при $k \leqslant \exp\left(c_{10}\sqrt{\ln x}\right)$.

Доказательство следует из теоремы 7.3 и леммы 7.1, если положить

$$R(x, k) = \frac{1}{\varphi(k)}\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}, \tag{7.27}$$

воспользоваться неравенством $\beta_1 \geqslant 3/4$ и несколько ухудшить остаточный член.

Теорема 7.5. *При постоянном* k

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{li} x + O\left(xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right), \tag{7.28}$$

в частности,

$$\pi(x, k, l) \sim \frac{x}{\varphi(k)\ln x}, \qquad x \to \infty. \tag{7.29}$$

Доказательство. По теореме 4.2 имеем[1]) $\beta_1 \leqslant 1 - \delta$, $\delta = \delta(k) > 0$. Следовательно, если k фиксировано, из (7.26) получаем

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{1-\delta}}{\varphi(k)} + xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right).$$

Отсюда вытекает равенство (7.28), причем константа, естественно, может зависеть от k.

При $k = 1$ получаем

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right) \tag{7.30}$$

[1]) Исключительный характер χ_1 действителен, так как $\chi_1^2 = \chi_0$.

и отсюда, согласно (7.21) и (7.22),

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}\left\{1+\frac{1!}{\ln x}+\frac{2!}{\ln^2 x}+\ldots+\frac{m!}{\ln^m x}+O\left(\frac{1}{\ln^{m+1} x}\right)\right\}. \quad (7.31)$$

Уже Гаусс заметил, что $\pi(x)$ приближается функцией $\operatorname{li} x$ с ошибкой меньшей, чем $O(x/\ln^m x)$, где m как угодно велико. Это доказывается с помощью равенства (7.30), так как $x\exp\{-c\sqrt{\ln x}\}=O(x/\ln^m x)$ для любого сколь угодно большого постоянного m.

В качестве приближения функции $\pi(x)$ Лежандр рассматривал функцию

$$\frac{x}{\ln x - B}=\frac{x}{\ln x}\left\{1+\frac{B}{\ln x}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right\}$$

и указал в качестве „наилучшего значения" B число 1,08 ... Из равенства (7.30) следует, напротив, что $B=1$ — лучшее значение. Это впервые установил Чебышев [1], правда без соотношения (7.30), которое тогда еще не было известно и которое, как и теорема 7.5 (для фиксированного k), было доказано впервые Валле-Пуссеном [2]. Более слабое утверждение (7.29), которое называется „теоремой о простых числах в арифметических прогрессиях", можно, как и теорему о простых числах в гл. III, доказать элементарно, с помощью формулы, аналогичной равенству Сельберга (6.1).

Для дальнейших применений мы докажем еще одну теорему.

Теорема 7.6. *Равенство*

$$\pi(x,\ k,\ l)=\frac{x}{\varphi(k)\ln x}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \quad (7.32)$$

выполняется равномерно при $k\leqslant\exp\left(c_{11}\sqrt{\ln x}\right)$; *исключение могут составить те* k, *которые кратны некоторому* $k^*=k^*(x)>1$ [1]).

Доказательство. По теореме 6.7 в случае $k_0=1$, $z=\exp\left(c_{11}\sqrt{\ln x}\right)$ получим

$$\beta_1<1-\frac{c_{12}}{\sqrt{\ln x}} \quad (7.33)$$

для каждого возможного исключительного нуля β_1, который появляется при модуле $k\not\equiv 0 \pmod{k^*}$ $(k^*>1)$. (Напомним, что так как c_0 фиксировано, то исключительный нуль $\operatorname{mod} k$ существует только тогда, когда $L(\beta_1,\ \chi)=0$ для χ по $\operatorname{mod} k$ и для $\beta_1\geqslant 1-c_0/\ln 2k$.) Неравенство (7.33) дает нам

$$x^{\beta_1}=O\left(x\exp\left(-c_{12}\sqrt{\ln x}\right)\right)$$

и остаточный член в (7.26) заменяется здесь на $O\left\{x\exp\left(-c\sqrt{\ln x}\right)\right\}$, чем утверждение теоремы доказано.

Результаты этого параграфа, которые относятся к k, растущему вместе с x, принадлежат Титчмаршу [2] и Пейджу [1].

[1]) Число 1, естественно, можно заменить на любое постоянное число, но для применений целесообразно зафиксировать его.

§ 8. Теорема Зигеля

Теоремы § 6 не полны в том отношении, что мы до сих пор не знаем ни одной функции $\delta=\delta(k)>0$, которая устроена так, что в области

$$\sigma \geqslant 1-\delta(k), \qquad t=0$$

ни одна из L-функций, образованных характерами χ по $\bmod k$, не обращается в нуль. Из теорем 4.1 и 4.2 следует только, что такая положительная функция всегда должна существовать.

Пейдж [1] доказал, что $\delta(k)=c/k^{\frac{1}{2}}\ln k$ — такая функция. Мы докажем здесь глубокий результат Зигеля [1] о том, что для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta(k)=c(\varepsilon)/k^{\varepsilon}$, причем $c(\varepsilon)$ — положительная константа. Правда, нужно заметить, что известные до сих пор доказательства теоремы Зигеля „не эффективны" в том смысле, что они при достаточно малом ε не позволяют вычислить константу $c(\varepsilon)$. Для доказательства теоремы нам потребуется несколько лемм.

Лемма 8.1. *При всех $k \geqslant 1$ и $\chi \neq \chi_0$ имеет место соотношение*

$$L(1, \chi)=O(\ln 2k). \tag{8.1}$$

Доказательство следует из соотношения (5.15), справедливого при $s=1$, где при $\chi \neq \chi_0$ второй член правой части обращается в нуль.

Лемма 8.2. *В области*

$$\sigma \geqslant 1-\frac{c_1}{\ln 2k} \geqslant \frac{1}{2}, \qquad k \geqslant 1,$$

при $\chi \neq \chi_0$ имеет место соотношение

$$L'(\sigma, \chi)=O(\ln^2 2k). \tag{8.3}$$

Доказательство. При $\sigma>1$

$$-L'(s, \chi)=\sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s} \ln n.$$

Из теоремы П.1.4 при $\lambda_1=k$, $x \to \infty$ и $\sigma>1$ следует

$$-L'(s, \chi)=\sum_{n<k} \frac{\chi(n)}{n^s} \ln n-\int_k^{\infty} C(\xi)\, d\, \frac{\ln \xi}{\xi^s}, \tag{8.4}$$

причем мы положили $C(\xi)=\sum_{k \leqslant n \leqslant \xi} \chi(n)$. Согласно (3.6),

$$|C(\xi)| \leqslant \varphi(k)=O(k).$$

Поэтому при $\sigma > 0$ интеграл

$$\int_k^\infty C(\xi)\left(\frac{1}{\xi^{s+1}} - s\frac{\ln \xi}{\xi^{s+1}}\right)d\xi$$

абсолютно сходится, и (8.4) справедливо также в полуплоскости $\sigma > 0$. Далее при $\sigma \geqslant 1 - c_1/\ln 2k \geqslant {}^1/_2$ имеем

$$\sum_{n<k} n^{-\sigma}\ln n \leqslant \ln 2k \sum_{n<k} n^{-\sigma} \leqslant \ln 2k \sum_{n<k} n^{-1+c_1/\ln 2k} = O(\ln^2 2k)$$

и

$$\int_k^\infty |C(\xi)|\frac{\ln \xi}{\xi^{\sigma+1}}d\xi = O\left(k\int_k^\infty \frac{\ln \xi}{\xi^{\sigma+1}}d\xi\right) = O\left(k\frac{\ln 2k}{k^\sigma}\right) = O(\ln 2k),$$

так как

$$\int_k^\infty \frac{\ln \xi}{\xi^{\sigma+1}}d\xi = -\frac{\ln \xi}{\sigma\xi^\sigma}\Big|_k^\infty + \int_k^\infty \frac{d\xi}{\sigma\xi^{\sigma+1}} = O\left(\frac{\ln 2k}{k^\sigma}\right). \tag{8.5}$$

Лемма 8.3. *Пусть χ_1, χ_2 — два действительных характера*[1]) *по* $\operatorname{mod} k_1$, k_2, *а $\chi_1\chi_2$ — произведение характеров χ_1 и χ_2, определенное по модулю k_1k_2. Тогда при $\sigma > 1$ имеет место равенство*

$$F(s) = \zeta(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)L(s, \chi_1\chi_2) = \sum_n b_n n^{-s}, \tag{8.6}$$

где $b_1 = 1$ и $b_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство проводится так же, как доказательство леммы 4.1, и поэтому мы его проводить не будем[2]).

Лемма 8.4. *Пусть χ_1, χ_2 — действительные примитивные характеры по* $\operatorname{mod} k_1, k_2$ *и $\chi_1 \neq \chi_2$, $\chi_1, \chi_2 \neq \chi_0$ (следовательно, $k_1 \geqslant 2$, $k_2 \geqslant 2$). Если $F(s)$ обозначает функцию, определенную формулой* (8.6), *то*

$$F(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1-\sigma}(k_1k_2)^{c_2(1-\sigma)} \tag{8.7}$$

в области $1 - c_3 \leqslant \sigma < 1$ при подходящих c_2, c_3, причем

$$\lambda = L(1, \chi_1)L(1, \chi_2)L(1, \chi_1\chi_2). \tag{8.8}$$

---

[1]) В этом параграфе мы откажемся от соглашения, что через χ_1 обозначается исключительный характер.

[2]) Вообще всегда можно произведение $\prod L(s, \chi)$, образованное по мультипликативным группам характеров, представить рядом Дирихле с неотрицательными коэффициентами. Функции (4.9), соответственно (8.6), по существу ζ-функции Дедекинда квадратичного, соответственно биквадратичного, числового поля, см. Хассе [1].

Доказательство. Произведение $\chi_1\chi_2$ не может быть главным характером по $\operatorname{mod} k_1k_2$, так как $\chi_1 \neq \chi_2$. Следовательно, функция $L(s, \chi_1\chi_2)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 0$. Поэтому там регулярна также функция $F(s)$, за исключением простого полюса при $s = 1$ с вычетом, равным λ. Следовательно, функция

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} \tag{8.9}$$

всюду регулярна в полуплоскости $\sigma > 0$. Разложим ее в окрестности точки $s = 2$ в степенной ряд, так же как в теореме П.2.4. При $m \geqslant 0$

$$F^{(m)}(2) = (-1)^m \sum_n b_n n^{-2} \ln^m n,$$

и по лемме 8.3

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2-s)^m, \quad a_m \geqslant 0, \quad a_0 \geqslant 1, \quad |s-2| < 1, \tag{8.10}$$

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m - \lambda)(2-s)^m, \quad |s-2| < 1. \tag{8.11}$$

Так как $g(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 0$, то равенство (8.11) справедливо также в круге $|s-2| \leqslant {}^3/_2$. Далее при $|s-2| = {}^3/_2$

$$\zeta(s) = O(1), \qquad \frac{1}{s-1} = O(1)$$

и в силу равенства (5.14)

$$L(s, \chi_1) L(s, \chi_2) L(s, \chi_1\chi_2) = O\{(k_1k_2)^{c_4}\},$$

так как χ_1, χ_2 и $\chi_1\chi_2$ отличны от главного характера. Кроме того, согласно (5.14),

$$L(1, \chi_1) L(1, \chi_2) L(1, \chi_1\chi_2) = O\{(k_1k_2)^{c_4}\}.$$

В итоге получаем

$$g(s) = O\{(k_1k_2)^{c_4}\} \tag{8.12}$$

для $|s-2| = 3/2$ и отсюда по принципу максимума в круге $|s-2| \leqslant 3/2$.

Из формул (8.11), (8.12), оценивая коэффициенты по Коши, получим

$$|a_m - \lambda| \leqslant c_5 (k_1k_2)^{c_4} \left(\frac{2}{3}\right)^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.13}$$

Выберем теперь c_6 так, чтобы $2 - (1 - c_6) = 1 + c_6 < 3/2$ $(c_6 < 1/2)$, т. е. $\alpha = (1 + c_6)\,{}^2/_3 < 1$. Тогда при $1 - c_6 \leqslant \sigma < 1$ ввиду неравенств

(8.13), (8.10) и $a_0 \geqslant 1$ получим

$$F(\sigma)-\frac{\lambda}{\sigma-1}=\sum_{0\leqslant m<M}(a_m-\lambda)(2-\sigma)^m+\sum_{m\geqslant M}(a_m-\lambda)(2-\sigma)^m \geqslant$$

$$\geqslant 1-\lambda\frac{(2-\sigma)^M-1}{1-\sigma}-c_5(k_1k_2)^{c_4}\frac{\alpha^M}{1-\alpha}. \qquad (8.14)$$

Теперь выберем M настолько большим, чтобы последний член стал меньше $^1/_2$ для всех $k_1\geqslant 2$, $k_2\geqslant 2$. Этого можно добиться, полагая $M=c_7\ln k_1k_2$ с подходящей константой c_7, зависящей от α. Далее в области $1-c_6\leqslant\sigma<1$ имеет место оценка

$$(2-\sigma)^M=\exp\{M\ln(2-\sigma)\}<\exp\{c_7\ln k_1k_2\cdot c_8(1-\sigma)\},$$

из которой следует утверждение леммы при $c_3=c_6$, $c_2=c_7c_8$.

Теорема 8.1. *Для любого $\varepsilon>0$ и для каждого действительного характера χ при $k>k_0(\varepsilon)$ имеет место соотношение*

$$L(\sigma,\ \chi)\neq 0, \quad \sigma>1-k^{-\varepsilon}.$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для примитивного характера $\chi\neq\chi_0^*$.

Применим лемму 8.4. Пусть χ_1 и χ_2 — характеры вида, рассмотренного в лемме, и $L(\sigma_1,\ \chi_1)=0$ для σ_1 из области $1-c_3\leqslant\sigma_1<1$. Из (8.7) ввиду $F(\sigma_1)=0$ следует

$$\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{1-\sigma_1}(k_1k_2)^{c_2(1-\sigma_1)}<0$$

и поэтому

$$L(1,\ \chi_1)L(1,\ \chi_2)L(1,\ \chi_1\chi_2)>\frac{1}{2}(1-\sigma_1)(k_1k_2)^{-c_2(1-\sigma_1)}. \qquad (8.15)$$

По лемме 8.1 для любого $\varepsilon>0$ при $k_1k_2>k(\varepsilon)$

$$L(1,\ \chi_1)L(1,\ \chi_1\chi_2)=O(\ln^2 k_1k_2)<(k_1k_2)^{\varepsilon}.$$

Подставляя это в верхнее неравенство при $k_1k_2>k(\varepsilon)$, получим

$$L(1,\ \chi_2)>\frac{1}{2}(1-\sigma_1)(k_1k_2)^{-c_2(1-\sigma_1)-\varepsilon}, \qquad (8.16)$$

так как в силу (4.11) при $\chi\neq\chi_0$ всегда $L(1,\ \chi)>0$.

Пусть $1-\sigma_1\leqslant c_9\varepsilon$, где c_9 будет точнее определено ниже. Тогда из (8.16) следует

$$L(1,\ \chi_2)>\frac{1}{2}(1-\sigma_1)(k_1k_2)^{-\varepsilon(1+c_2c_9)}. \qquad (8.17)$$

Если положим теперь $c_9=1/c_2$ и выберем k_2 настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{2}(1-\sigma_1)k_1^{-2\varepsilon}>k_2^{-\varepsilon},$$

например, $k_2 > k_2'(\varepsilon, k_1)$, то из (8.17) при $k_1k_2 > k(\varepsilon)$, $k_2 > k_2'(\varepsilon, k_1)$ следует оценка

$$L(1, \chi_2) > k_2^{-3\varepsilon}. \tag{8.18}$$

Поэтому, если имеется характер χ_1 по $\mathrm{mod}\, k_1$, для которого $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$ при σ_1 из области $1 - c_9\varepsilon \leqslant \sigma_1 < 1$, то из (8.18) при

$$k > \max\left(k_2'(\varepsilon, k_1), k(\varepsilon)/k_1\right) = k'(\varepsilon)$$

следует

$$L(1, \chi) > k^{-3\varepsilon}. \tag{8.19}$$

Теперь при $1 - k^{-4\varepsilon} \leqslant \sigma \leqslant 1$ по теореме о среднем значении получается

$$L(\sigma, \chi) = L(1, \chi) - (1 - \sigma) L'(\overline{\sigma}, \chi),$$

где $\sigma \leqslant \overline{\sigma} \leqslant 1$ и $k > k''(\varepsilon)$. Отсюда по лемме 8.2 и из (8.19) заключаем, что

$$|L(\sigma, \chi)| > k^{-3\varepsilon} + O\left(k^{-4\varepsilon} \ln^2 k\right) > 0,$$

если k остается больше некоторой величины, зависящей от ε. Тем самым, если в области $1 - c_9\varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1$ имеется нуль какой-нибудь L-функции по какому-нибудь модулю k_1, утверждение теоремы доказано с 4ε вместо ε. Если же в этой области все $L(s, \chi)$ не равны нулю, то утверждение теоремы следует из того, что

$$c_9\varepsilon > k^{-\varepsilon},$$

если k больше некоторого числа, зависящего от ε.

Теорема 8.2. *Для любого $\varepsilon > 0$, $k \geqslant 1$ и для каждого действительного характера χ*

$$L(\sigma, \chi) \neq 0 \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant 1 - \frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}, \tag{8.20}$$

где $c(\varepsilon)$ обозначает константу, зависящую только от ε.

Доказательство сразу же следует из теоремы 8.1 и из того, что $L(1, \chi) \neq 0$ по теореме 4.2 [1]).

Теорема 8.3. *Пусть A — сколь угодно большое положительное число. Тогда имеет место оценка*

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{li} x + O\left(xe^{-c_{10}\sqrt{\ln x}}\right), \qquad x \to \infty, \tag{8.21}$$

равномерная при $1 \leqslant k \leqslant \ln^A x$, $(l, k) = 1$.

При этом константы в (8.21) зависят от A.

---

[1]) Теоремы 8.1 и 8.2, очевидно, эквивалентны, так как $\varepsilon > 0$ — любое.

Доказательство. Из теоремы 8.2 следует, что для β_1 — исключительного нуля L-функций по модулям, не превосходящим $\ln^A x$, при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\beta_1 < 1 - \frac{c(\varepsilon)}{\ln^{A\varepsilon} x}.$$

Если мы положим $\varepsilon = {}^1/_2 A$, то

$$x^{\beta_1} = O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$$

с константой c, зависящей от A. Отсюда, согласно (7.26), следует утверждение теоремы.

Теорема 8.3 до сегодняшнего дня является лучшей среди утверждений относительно равенства

$$\pi(x,\ k,\ l) = \frac{x}{\varphi(k)\ln x}(1 + o(1)), \tag{8.22}$$

которое справедливо равномерно для всех k, меньших некоторой величины, растущей вместе с x [1]).

Приведенное выше доказательство теоремы Зигеля принадлежит Эстерману [2].

Эта теорема дает также сведения о числе классов квадратичных форм. Рассмотрим отрицательный фундаментальный дискриминант $-k$ и число $h(k)$ классов квадратичных форм с этим дискриминантом. Тогда

$$h(k) = \frac{\sqrt{k}}{\pi}\sum_n \frac{\chi(n)}{n}, \tag{8.23}$$

причем $\chi(n) = \left(\frac{-k}{n}\right)$, а $\left(\frac{-k}{n}\right)$ — символ Кронекера (см., например, Хассе [1]). Символ Кронекера — действительный характер по mod k; можно показать, что он является примитивным характером по mod k. Если мы положим

$$L(s,\ \chi) = \sum_n \left(\frac{-k}{n}\right) n^{-s},$$

то

$$h(k) = \frac{\sqrt{k}}{\pi} L(1,\ \chi). \tag{8.24}$$

Гекке впервые доказал (доказательство Гекке см. у Ландау [10]), что из $L(\sigma,\ \chi) \neq 0$ в области $\sigma \geqslant 1 - a/\ln k$ (например, при $k \geqslant 2$) следовало бы

$$h(k) > c(a)\frac{\sqrt{k}}{\ln k}, \quad L(1,\ \chi) > \frac{c(a)}{\ln k}. \tag{8.25}$$

При этом a достаточно мало и не зависит от k, а $c(a)$ зависит только от a. Это можно получить следующим образом. Совершенно так же, как в (8.7),

---

[1]) Следовательно, без всякого исключения.

можно доказать, что при $0 < 1-\sigma \leqslant c_{11}$ и любом действительном характере χ по $\operatorname{mod} k$ имеет место оценка

$$\zeta(\sigma) L(\sigma, \chi) > \frac{1}{2} - \frac{L(1, \chi)}{1-\sigma} k^{c_{12}(1-\sigma)}. \tag{8.26}$$

Нужно только там вместо $F(s)$ рассмотреть функции $\zeta(s) L(s, \chi)$. Если теперь $L(\sigma, \chi) \neq 0$ в области $1 - a/\ln k \leqslant \sigma \leqslant 1$, то там же $\zeta(\sigma) L(\sigma, \chi) < 0$, так как

$$\zeta(\sigma) L(\sigma, \chi) \sim \frac{L(1, \chi)}{\sigma - 1}, \quad \sigma \to 1-0$$

и $L(1, \chi) > 0$. Из (8.26) при $\sigma = 1 - a/\ln k$ следует неравенство

$$0 > \frac{1}{2} - c(a) L(1, \chi) \ln k$$

и, таким образом, неравенство (8.25).

Соотношения

$$\varliminf h(k) = \infty \quad \text{и} \quad \varliminf L(1, \chi) \sqrt{k} = \infty \tag{8.27}$$

справедливы, если в области $\sigma > 1/2$ какая-нибудь из функций $L(s, \chi)$, χ по $\operatorname{mod} k$ обращается в нуль. Этого факта достаточно для доказательства (8.27) [1]) по теореме Гекке. При доказательстве, как и в теореме 8.1, используется то, что из $L(\sigma, \chi_1) = 0$ вблизи $\sigma = 1$ следует, что $L(1, \chi_2)$ велико, если χ_2 — характер по достаточно большому модулю k_2. Теорема Зигеля 8.2 дает больше, чем результат Хейльбронна (8.27), а именно оценку

$$h(k) > c(\varepsilon) k^{\frac{1}{2} - \varepsilon},$$

поскольку из (8.26) и $\zeta(\sigma) L(\sigma, \chi) < 0$ в области $1 - c(\varepsilon) k^{-\varepsilon} \leqslant \sigma \leqslant 1$ при $\sigma = 1 - c(\varepsilon) k^{-\varepsilon}$ следует неравенство

$$0 > \frac{1}{2} - c(\varepsilon) k^{\varepsilon} L(1, \chi), \quad L(1, \chi) > \frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}.$$

Об элементарном доказательстве (8.27) см. Линник [5]. В теории простых чисел теорема Зигеля впервые применялась Вальфишем [1].

Задачи к главе IV

1. Пусть p — простое, χ — характер по $\operatorname{mod} p$, число a — целое и

$$S_a(p) = \sum_{n-1}^{p-1} \chi(n) e^{2\pi i \frac{a}{p} n}.$$

Доказать, что имеют место равенства $|S_a(p)| = \sqrt{p}$ при $(a, p) = 1$ и

$$S_a(p) = \bar{\chi}(a) S_1(p).$$

[1]) Равенства (8.27) предполагались уже Гауссом.

2. Пусть M, N — целые, $0 \leqslant M < N < p$. Доказать, что для любого неглавного характера χ по $\bmod p$ имеет место оценка[1])

$$\left| \sum_{M < n \leqslant N} \chi(n) \right| < \sqrt{p} \ln p.$$

3. Число n, как известно, только тогда представляется в виде суммы двух квадратов, когда каждый простой сомножитель вида $4n+3$ встречается в n в четной степени. Докажите, что число чисел такого вида, меньших x, эквивалентно $bx/\sqrt{\ln x}$, где b — некоторая положительная константа[2]).

4. Пусть $A(x)$ означает число тех n, не превосходящих x, для которых все простые сомножители принадлежат прогрессиям

$$km + l_1, \ \ldots, \ km + l_r \qquad (r \leqslant \varphi(k)).$$

Докажите, что[3])

$$A(x) \sim x/(\ln x)^{1 - r/\varphi(k)}.$$

5. Перенесите варианты доказательств теоремы о простых числах из задач к гл. III на случай теоремы о простых числах для арифметической прогрессии.

---

[1]) Пойя [1], Виноградов [1].
[2]) Ландау [5], т. 2.
[3]) Титчмарш [2].

Глава V

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Введение

Здесь будут изложены некоторые применения наших результатов, в первую очередь полученных в гл. II.

Пусть x обозначает достаточно большое положительное число, и равенства, в которых встречается x, имеют место, возможно, только для достаточно большого x (каждый раз особо это напоминаться не будет). Пусть далее ε — произвольно малое положительное число. Насколько велико должно быть x, чтобы было справедливо равенство, в котором встречаются ε и x, зависит, вообще говоря, от ε. Буквами i, j, k, l, m, n, r, s, z в этой главе будут обозначаться натуральные числа, p и q обозначают простые числа, $N(z; B)$, как и в гл. II,— число чисел, которые удовлетворяют условию B. Через $v(n)$ обозначим число различных простых делителей числа n.

§ 2. О простых числах в арифметической прогрессии

В данной арифметической прогрессии

$$kn+l, \quad 0 \leqslant l < k \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

только тогда может встретиться бесконечно много простых чисел, когда $(k, l)=1$. С помощью метода решета можно указать верхнюю оценку количества $\pi(x, k, l)$ простых чисел в этой прогрессии, которые не превосходят x. Из теоремы 2.4.1 следует

Теорема 2.1 [1]) *Пусть* $0 < a < 1$ *и*

$$1 \leqslant k \leqslant x^a. \tag{2.1}$$

Тогда существует константа $C=C(a)$, *такая, что*

$$\pi(x, k, l) < C\frac{x}{\varphi(k)\ln x} \tag{2.2}$$

для всех l, *удовлетворяющих условиям* $(l, k)=1$, $0 \leqslant l < k$.

Значение этой оценки состоит в том, что она справедлива для любого k, которое лежит в области (2.1) с одной и той же константой C. Оценка снизу, аналогичная теореме 2.1, до сих пор неизве-

---

[1]) Титчмарш [2].

стна (см. гл. IV). Однако мы покажем, что по крайней мере „в конечной части“ всех простых классов вычетов по $\operatorname{mod} k$ должно находиться „много“ простых чисел.

Теорема 2.2. *При предположениях теоремы* 2.1 *для каждого k и подходящих c_1 и c_2 (не зависящих от x и k) имеется больше чем $c_1\varphi(k)$ различных значений l, для которых*

$$\pi(x,\ k,\ l) > c_2 \frac{x}{\varphi(k)\ln x}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть c_2 — положительная константа, меньшая 1. Простые классы вычетов по $\operatorname{mod} k$, из которых каждый содержит меньше чем $c_2 x/\varphi(k)\ln x$ простых чисел, не превосходящих x, вместе содержат меньше чем

$$\varphi(k)\cdot c_2 \frac{x}{\varphi(k)\ln x} = c_2 \frac{x}{\ln x}$$

таких простых чисел. Так как $c_2 < 1$, то остальные простые классы вычетов по $\operatorname{mod} k$ по теореме о простых числах содержат больше чем

$$(1-\varepsilon-c_2)\frac{x}{\ln x} - \frac{\ln k}{\ln 2} > (1-2\varepsilon-c_2)\frac{x}{\ln x}$$

простых чисел, не превосходящих x при любом $\varepsilon > 0\ (x > x_0(\varepsilon))$. Член $\ln k/\ln 2 = O(\ln x)$ происходит от простых делителей числа k, которые не содержатся ни в каком из простых классов вычетов по $\operatorname{mod} k$. По теореме 2.1 в каждом классе вычетов $\operatorname{mod} k$ имеется не более чем $Cx/\varphi(k)\ln x$ простых чисел, не превосходящих x. Следовательно (по принципу Дирихле), должно существовать не меньше чем

$$(1-2\varepsilon-c_2)\,\frac{x}{\ln x}\Big/ C\,\frac{x}{\varphi(k)\ln x} = c_1\varphi(k)$$

классов вычетов по $\operatorname{mod} k$, каждый из которых содержит не меньше чем $c_2 x/\varphi(k)\ln x$ простых чисел, не превосходящих x; при этом c_2 выбиралось так, что $2\varepsilon < 1 - c_2$. Тем самым утверждение теоремы доказано.

Для констант c_1 и C из доказательства следует, что $c_1 < 1/C$. Можно также дать оценку снизу для большего числа классов вычетов, если ограничиться в определенном смысле „конечной долей“ всех модулей $k \leqslant x^a$.

Теорема 2.3[1]). *Пусть $k \leqslant x^a$, $0 < a < 1$. Тогда для каждого b, $0 < b < 1$, найдется такое n, что в каждом разложении*

$$k = k_1 k_2 \ldots k_n,\quad (k_i,\ k_j) = 1\quad (i \neq j),$$

[1]) Эрдёш [1].

имеется k_r $(1 \leqslant r \leqslant n)$, *удовлетворяющее при некотором* $c_3 = c_3(b)$ *неравенству*

$$\pi(x,\ k_r,\ l) > c_3 \frac{x}{\varphi(k_r) \ln x} \tag{2.4}$$

не меньше, чем для $b\varphi(k_r)$ *различных классов вычетов* $l \bmod k_r$.

Доказательство. Пусть k разлагается указанным образом на n попарно взаимно простых сомножителей $k_1, k_2, \ldots, k_n$, причем $n \geqslant 1$. Ниже на n будут введены новые ограничения. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ мы разделим простые классы вычетов по $\bmod k_i$ на две группы и обозначим классы вычетов первой и второй группы соответственно через r_i' и r_i''. В первой группе находятся классы вычетов r_i', для которых

$$\pi(x,\ k_i,\ r_i') \leqslant c_3 \frac{x}{\varphi(k_i) \ln x},$$

константа c_3 потом будет определена точнее. Во второй группе находятся такие классы вычетов r_i'', что

$$\pi(x,\ k_i,\ r_i'') > c_3 \frac{x}{\varphi(k_i) \ln x}.$$

Для каждого $i \leqslant n$

$$\sum_{r_i'} \pi(x,\ k_i,\ r_i') \leqslant \varphi(k_i) \cdot c_3 \frac{x}{\varphi(k_i) \ln x} = c_3 \frac{x}{\ln x}.$$

Следовательно,

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{r_i'} \pi(x,\ k_i,\ r_i') \leqslant c_3 n \frac{x}{\ln x}. \tag{2.5}$$

Предположим теперь, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$\sum_{r_i'} 1 < b\varphi(k_i), \tag{2.6}$$

и покажем, что при достаточно малом c_3 и достаточно большом n это приводит к противоречию.

По известным теоремам о решениях сравнений по составным модулям, так как k_i попарно взаимно просты, из (2.6) следует, что

$$\sum_{\substack{z \bmod k \\ z \equiv r_i'' \pmod{k_i}\ (1 \leqslant i \leqslant n)}} 1 < \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} b\varphi(k_i) = b^n \varphi(k).$$

При этом суммирование должно распространяться на все z, $0 \leqslant z < k$, для которых $(z, k) = 1$ и z по каждому модулю k_i

($i=1, 2, \ldots, n$) сравнимо с каким-нибудь r_i''. Теорема 2.1 теперь дает

$$\sum_{\substack{z \bmod k \\ z\equiv r_i'' (\bmod k_i)\,(1\leqslant i\leqslant n)}} \pi(x, k, z) < b^n\varphi(k)\cdot C\frac{x}{\varphi(k)\ln x} = Cb^n\frac{x}{\ln x}. \quad (2.7)$$

Каждое простое число, не превосходящее x, или принадлежит множеству простых чисел, для которых выполняются оценки (2.5) и (2.7), или делит k. Справедлива оценка

$$\sum_{p\mid k} 1 \leqslant \frac{\ln k}{\ln 2} = O(\ln x).$$

Это дает совместно с (2.5) и (2.7) неравенство

$$\pi(x) < c_3 n\frac{x}{\ln x} + Cb^n\frac{x}{\ln x} + O(\ln x).$$

Если взять c_3 настолько малым и n настолько большим, что $c_3n + Cb^n < 1$, то это противоречит теореме о простых числах. Следовательно, в этом случае неравенство (2.6) не может быть верным для всех i ($i=1, 2, \ldots, n$). Поэтому для некоторых i должно быть не меньше чем $b\varphi(k_i)$ различных классов вычетов r_i''. Этим теорема 2.3 доказана.

§ 3. О числах вида p_1+p_2

Пусть p_1 и p_2 — нечетные простые числа. Числа n, которые представляются в виде суммы

$$n = p_1 + p_2, \quad (3.1)$$

тогда обязательно четные. Покажем теперь, что эти числа имеют положительную (асимптотическую) плотность. Говорят, что некоторое множество натуральных чисел имеет положительную плотность, если число чисел этого множества, которые не превосходят x, всегда больше чем cx при некоторой положительной константе c.

Теорема 3.1 [1]). *Справедливо неравенство*

$$N(n\leqslant x;\ n=p_1+p_2) > cx. \quad (3.2)$$

---

[1]) Шнирельман [1]. Там также доказывается утверждение: если множество чисел имеет положительную плотность, то каждое число можно представить в виде суммы постоянного числа слагаемых из этого множества; откуда следует, что каждое достаточно большое натуральное число представимо в виде суммы постоянного числа простых чисел.

Доказательство. Пусть

$$f(n)=N\left(p_1,\ p_2;\ p_1\leqslant\frac{1}{2}x,\ p_2\leqslant\frac{1}{2}x,\ p_1+p_2=n\right). \tag{3.3}$$

Согласно (1.3.18),

$$N\left(p_1;\ p_1\leqslant\frac{1}{2}x\right)=\pi\left(\frac{1}{2}x\right)>cx/\ln x.$$

Аналогичное неравенство верно и для p_2, $p_2\leqslant\frac{1}{2}x$. При $n=p_1+p_2$, $p_1\leqslant\frac{1}{2}x$, $p_2\leqslant\frac{1}{2}x$, неравенство $n\leqslant x$ очевидно. Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)>c_1\frac{x^2}{\ln^2 x}. \tag{3.4}$$

Используем теперь теорему 2.4.8, которая утверждает, что многие суммы p_1+p_2 не могут быть равными. Поэтому из $n\leqslant x$ следует

$$f(n)<c_2\frac{x}{\ln^2 x}g(n), \tag{3.5}$$

где

$$g(n)=\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\sum_{d|n,\ \mu^2(d)=1}\frac{1}{d}.$$

Оказывается, что

$$\sum_{n\leqslant x} g^2(n)<c_3x. \tag{3.6}$$

Действительно из (1.5.24) и (1.5.22) получаем

$$\sum_{n\leqslant x}\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)^2<c\sum_{n\leqslant x}\prod_{p|n}\left(1+\frac{2}{p}\right)=c\sum_{m\leqslant x,\ \mu^2(m)=1}\frac{2^{v(m)}}{m}\left[\frac{x}{m}\right],$$

и отсюда вытекает (3.6), потому что ввиду (1.5.7) для чисел m, свободных от квадратов, $2^{v(m)}=d(m)=O\left(m^{\varepsilon}\right)$, и значит

$$\sum_{\substack{1\leqslant m<\infty\\ \mu^2(m)=1}}\frac{2^{v(m)}}{m^2}<\infty. \tag{3.7}$$

Пусть c_4 — некоторая положительная константа. Тогда из (3.5) следует оценка

$$\sum_{n\leqslant x,\ g(n)>c_4} f(n)<c_2\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{n\leqslant x,\ g(n)>c_4} g(n),$$

а из (3.6)

$$\sum_{n\leqslant x,\ g(n)>c_4} g(n)<\frac{1}{c_4}\sum_{n\leqslant x,\ g(n)>c_4} g^2(n)<\frac{1}{c_4}\sum_{n\leqslant x} g^2(n)<\frac{c_3}{c_4}x.$$

Таким образом,

$$\sum_{n \leqslant x,\ g(n) > c_4} f(n) < \frac{c_2 c_3}{c_4} \frac{x^2}{\ln^2 x}. \tag{3.8}$$

Выберем c_4 настолько большим, чтобы $c_2 c_3/c_4 < c_1$. Тогда из (3.4) и (3.8) следует

$$\sum_{n \leqslant x,\ g(n) \leqslant c_4} f(n) > c_5 \frac{x^2}{\ln^2 x}, \quad c_5 = c_1 - \frac{c_2 c_3}{c_4}. \tag{3.9}$$

Для тех n, для которых $g(n) \leqslant c_4$, из (3.5) получим

$$f(n) < c_2 c_4 \frac{x}{\ln^2 x}.$$

Вместе с этим (3.9) дает

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ f(n) > 0,\ g(n) \leqslant c_4}} c_2 c_4 \frac{x}{\ln^2 x} > c_5 \frac{x^2}{\ln^2 x}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} 1 > \frac{c_5}{c_2 c_4} x,$$

и неравенство (3.2) доказано.

Несколько проще получить (3.2) с помощью неравенства Шварца. Согласно (3.4), (3.5) и (3.6), имеем

$$c_1 \frac{x^2}{\ln^2 x} < \sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} f(n) \leqslant \left\{ \sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} 1^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} f^2(n) \right\}^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \left\{ \sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} \cdot 1 \right\}^{\frac{1}{2}} c_2 \frac{x}{\ln^2 x} (c_3 x)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

Отсюда опять следует (3.2).

Если бы для всех n всегда было $g(n) < c$, то доказательство можно было получить гораздо проще. Тогда было бы $f(n) < cx/\ln^2 x$ при $n \leqslant x$ и из (3.4) следовало бы по принципу Дирихле

$$\sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} c \frac{x}{\ln^2 x} > c_1 \frac{x^2}{\ln^2 x}.$$

Поэтому

$$\sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} 1 > cx.$$

Но функция $g(n)$ не ограничена. Действительно, при $n = p_1p_2 \ldots p_r$ (через p_i обозначено i-е простое число) по теореме 1.5.5 и формуле (1.4.1), так как $\ln n \leqslant \theta(p_r) < cp_r$, имеет место оценка

$$g(n) = \prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) = \prod_{p \leqslant p_r}\left(1+\frac{1}{p}\right) > c \prod_{p \leqslant p_r}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} >$$
$$> c \ln p_r > c \ln_2 n. \qquad (3.11)$$

Следовательно функция $g(n)$ не ограничена, и нужно оценить „разброс" $\sum_{n \leqslant x} g^2(n)$, чтобы показать, что не слишком велика сумма $\sum_{n \leqslant x} g(n)$, распространенная на те n, для которых $g(n) > c_4$.

Из (3.4) сразу же следует, что существуют числа $n \leqslant x$, которые могут быть представлены в виде суммы двух простых чисел, не превосходящих x, более чем $c_1x/\ln^2 x$ способами. Действительно, согласно (3.4), для каждого $n \leqslant x$ не может выполняться неравенство $f(n) \leqslant c_1x/\ln^2 x$ (см. также задачу 1).

Теорема 3.2 [1]). *Существует бесконечно много чисел n, которые представляются в виде суммы двух простых чисел больше чем*

$$c\,\frac{n}{\ln^2 n}\ln_2 n \qquad (3.12)$$

способами (причем c — константа, не зависящая от n) [2]).

Доказательство. В силу теоремы 4.7.6 существует такая константа c_6, что

$$\pi(x, k, l) \sim \frac{x}{\varphi(k)\ln x} \qquad (3.13)$$

для всех $k \leqslant \exp\left(c_6\sqrt{\ln x}\right)$, за исключением, быть может, кратных $k^* = k^*(x)$, $k^* > 1$. Положим теперь

$$k = \prod_{\substack{p \leqslant c_7\sqrt{\ln x} \\ p \neq p_0}} p \qquad (c_7 < c_6),$$

где $p_0 = p_0(x)$ — любое простое число, содержащееся в k^*; условие $p \neq p_0$ нужно опустить, если не существует ни одного k^*. Тогда имеем $k^* \nmid k$ и, так как $\theta(x) \sim x$,

$$\ln k \leqslant \theta\left(c_7\sqrt{\ln x}\right) < c_6\sqrt{\ln x}.$$

Отсюда следует соотношение (3.13). Пусть теперь $0 \leqslant l < k$, $(l, k) = 1$.

---

[1]) Прахар [2].

[2]) Это показывает ввиду оценки $g(n) = \prod_{p \mid n}(1+1/p) \leqslant cn/\varphi(n) < \ln_2 n$ (теорема 1.5.1), что верхняя граница в (3.5) достигается в основном для бесконечно многих n с „большим" значением функции $g(n)$.

Тогда в силу (3.13) выполняется неравенство

$$\pi(x, k, l) > \frac{x}{2\varphi(k)\ln x}$$

и, так как $(-l, k)=1$, также неравенство

$$\pi(x, k, -l) > \frac{x}{2\varphi(k)\ln x}.$$

Поэтому имеет место оценка

$$N(p_1, p_2;\ p_1 \leqslant x,\ p_2 \leqslant x,\ p_1 \equiv l,\ p_2 \equiv -l \pmod{k}) > \frac{x^2}{4\varphi(k)^2 \ln^2 x}. \tag{3.14}$$

Для каждой такой пары p_1, p_2 выполняется сравнение

$$p_1 + p_2 \equiv 0 \pmod{k} \quad \text{и} \quad p_1 + p_2 \leqslant 2x.$$

В итоге получается $\varphi(k)$ возможностей для выбора l и, так как для различных значений l соответствующие пары p_1, p_2 различны,

$$N(p_1, p_2;\ p_1 \leqslant x,\ p_2 \leqslant x,\ p_1 + p_2 \equiv 0 \pmod{k}) > \frac{x^2}{4\varphi(k)\ln^2 x}. \tag{3.15}$$

Если положить

$$f(n) = N(p_1, p_2;\ p_1 \leqslant x,\ p_2 \leqslant x,\ p_1 + p_2 = n),$$

то из (3.15) следует

$$\sum_{\substack{n \leqslant 2x \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} f(n) > \frac{x^2}{4\varphi(k)\ln^2 x}. \tag{3.16}$$

Поскольку

$$\sum_{\substack{n \leqslant 2x \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \leqslant \frac{2x}{k} + 1 < 3\frac{x}{k},$$

то из (3.16) следует, что существует такая функция $f(n)$, что

$$f(n) > \frac{x^2}{4\varphi(k)\ln^2 x} \Big/ 3\frac{x}{k} = \frac{x}{12\ln^2 x} \cdot \frac{k}{\varphi(k)}. \tag{3.17}$$

Теперь имеет место неравенство

$$\frac{k}{\varphi(k)} = \prod_{p \mid k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{\substack{p \leqslant c_7\sqrt{\ln x} \\ p \neq p_0}}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > c_8\left(1 - \frac{1}{p_0}\right)\ln_2 x.$$

Неравенство $p_0 \geqslant 2$ равносильно $1 - 1/p_0 \geqslant {}^1/_2$. Поэтому из (3.17) получаем, что для достаточно большого x имеются числа $n \leqslant 2x$, которые представимы в виде суммы двух простых чисел больше чем

$$c_9 \frac{x}{\ln^2 x}\ln_2 x > c_{10}\frac{n}{\ln^2 n}\ln_2 n$$

способами. Таким образом, теорема 3.2 доказана. Кроме того, можно утверждать, что таких n должно существовать бесконечно много, так как левая часть неравенства при $n\to\infty$ тоже стремится к бесконечности, а фиксированное число допускает только конечное число представлений.

§ 4. Разность между соседними простыми числами

Пусть в этом параграфе p_i всегда обозначает i-е простое число и $p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leqslant x$—простые числа, не превосходящие x и расположенные в порядке возрастания. Обозначим также $d_i = p_i - p_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant r$ и $d_1 = p_1$. По теореме о простых числах

$$(1-\varepsilon)\frac{x}{\ln x} < r < (1+\varepsilon)\frac{x}{\ln x}. \tag{4.1}$$

Аналогично по той же теореме между $(1-\varepsilon)x$ и x всегда должно лежать простое число, так как имеют место соотношения[1])

$$\pi(x) - \pi((1-\varepsilon)x) \sim \frac{x}{\ln x} - \frac{(1-\varepsilon)x}{\ln(1-\varepsilon)x} \sim \frac{\varepsilon x}{\ln x}.$$

Таким образом, из $p_r \leqslant x < p_{r+1}$ следует

$$(1-\varepsilon)x < \sum_{p_i \leqslant x} d_i = p_r \leqslant x. \tag{4.2}$$

Отсюда сейчас же получаем оценку

$$N(p_i \leqslant x;\ d_i \geqslant c_1 \ln x) \leqslant \frac{x}{c_1 \ln x}. \tag{4.3}$$

Выберем теперь c_1 настолько большим и ε настолько малым, чтобы величина $(1-\varepsilon) - 1/c_1 = c_2$ стала больше нуля. Тогда по теореме о простых числах

$$N(p_i \leqslant x;\ d_i < c_1 \ln x) > c_2 \frac{x}{\ln x}. \tag{4.4}$$

Следовательно, приращения d_i, которые образованы простыми числами $p_i \leqslant x$, дают „конечную (т. е. не бесконечно малую) часть“ всех приращений, меньших $c_1 \ln x$.

Теорема 4.1[2]). *При подходящих константах c_3 и c_4 существует больше чем $c_3 \ln x$ различных приращений $d_i < c_4 \ln x$, которые образованы простыми числами $p_i \leqslant x$.*

Доказательство. Пусть

$$f(n) = N(p_i \leqslant x;\ d_i = n).$$

---

[1]) См. также гл. I, задача 4.

[2]) Кнёдель [1], Прахар [1].

По теоремам 2.4.4 и 1.5.5

$$f(n) < c_5 \frac{x}{\ln^2 x} g(n), \quad g(n) = \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Из этой формулы, формулы (4.4) и неравенства Шварца получаем

$$c_2 \frac{x}{\ln x} < \sum_{n < c_1 \ln x} f(n) \leqslant \left\{ \sum_{\substack{n < c_1 \ln x \\ f(n) > 0}} 1 \right\}^{\frac{1}{2}} c_5 \frac{x}{\ln^2 x} \left\{ \sum_{n < c_1 \ln x} g^2(n) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, из (3.6) следует неравенство

$$\sum_{\substack{n < c_1 \ln x \\ f(n) > 0}} 1 > c \ln x. \tag{4.5}$$

Теорему 4.1 можно переформулировать так: числа n, которые представляются в виде разности двух соседних простых чисел, имеют положительную (асимптотическую) плотность. Если положить $N = [c_1 \ln x]$, то формула (4.5) говорит, что число чисел n, не превосходящих N и представимых в виде разности соседних простых чисел, больше чем $c_7 N$.

Согласно одной старой гипотезе[1], существует бесконечно много номеров i, для которых $d_i = p_i - p_{i-1} = 2$. Числа p_i и p_{i-1} называются тогда простыми близнецами. Если это до сих пор недоказанное предположение правильно, то

$$\varliminf d_i / \ln p_i = 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

До сих пор доказано только гораздо менее содержательное соотношение $\varliminf d_i / \ln p_i \leqslant a < 1$. Сначала докажем следующую простую теорему.

Теорема 4.2. *Имеет место неравенство*

$$\varliminf \frac{d_i}{\ln p_i} \leqslant 1 \quad (i \to \infty). \tag{4.6}$$

Доказательство. Если это не так, то существует такое число $A > 1$, что при $i > i_0$ выполняется неравенство $d_i > A \ln p_i$. Отсюда следует, что

$$\sum_{p_i \leqslant x} d_i = \sum_{p_i \leqslant p_{i_0}} d_i + \sum_{p_{i_0} < p_i \leqslant x} d_i = \sum\nolimits_0 + \sum\nolimits_1. \tag{4.7}$$

Но $\sum_0 = O(1)$, и из $\theta(x) = x + o(x)$ вытекает

$$\sum\nolimits_1 > A \sum_{p_{i_0} < p_i \leqslant x} \ln p_i = A\theta(x) + O(1) = Ax + o(x).$$

[1]) Гольдбах, 1742 г.

Подставляя это в (4.7), получаем соотношение

$$\sum_{p_i \leqslant x} d_i > Ax + o(x) \quad (A > 1),$$

которое противоречит неравенству (4.2). Тем самым теорема доказана.

Теорема 4.3 [1]). *Существует такая константа* a, $0 < a < 1$, *что*

$$\underline{\lim} \frac{d_i}{\ln p_i} \leqslant a < 1 \quad (i \to \infty). \tag{4.8}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что существует число p_i, удовлетворяющее условиям

$$\frac{1}{2} x < p_i \leqslant x, \quad d_i \leqslant a \ln x \quad (0 < a < 1)$$

для всех достаточно больших x. Для такого p_i выполняются соотношения

$$\frac{d_i}{\ln p_i} < \frac{d_i}{\ln \frac{1}{2} x} \leqslant a'$$

с $a < a' < 1$. Имеет место оценка

$$S = \sum_{\frac{1}{2} x < p_i \leqslant x} d_i < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) x, \tag{4.9}$$

так как по теореме о простых числах между $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) x$ и $\frac{1}{2} x$ должно лежать по крайней мере одно простое число. Теперь нужно показать, что оценка (4.9) невозможна, если всегда $d_i > a \ln x$, причем $a < 1$ будет в дальнейшем определено точнее. Предположим, что $d_i > a \ln x$ при $\frac{1}{2} x < p_i \leqslant x$, и положим

$$M = N\left(p_i;\ \frac{1}{2} x < p_i \leqslant x,\ a \ln x < d_i \leqslant A \ln x\right),$$

где $A > 1$ (величина A позже будет определена более точно). Тогда

$$S = \sum_{\substack{\frac{1}{2} x < p_i \leqslant x \\ a \ln x < d_i \leqslant A \ln x}} d_i + \sum_{\substack{\frac{1}{2} x < p_i \leqslant x \\ d_i > A \ln x}} d_i >$$

$$> Ma \ln x + \{\pi(x) - \pi(x/2) - M\} A \ln x =$$

$$= \left\{\pi(x) - \pi\left(\frac{1}{2} x\right)\right\} A \ln x - M(A - a) \ln x. \tag{4.10}$$

---

[1]) Эрдёш [5].

Из теоремы 2.4.4 следует, как и при доказательстве теоремы 4.1, что

$$f(n)=N(p_i\leqslant x,\ d_i=n)<c_5\frac{x}{\ln^2 x}g(n),$$

и отсюда

$$M\leqslant\sum_{a\ln x<n\leqslant A\ln x}f(n)<c_5\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{a\ln x<n\leqslant A\ln x}g(n).$$

Теперь, если предположить $A<2$, принимая во внимание (3.5), имеем

$$\sum_{a\ln x<n\leqslant A\ln x}g(n)\leqslant\sum_{a\ln x<n\leqslant A\ln x}\sum_{d\mid n}\frac{1}{d}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{d\leqslant A\ln x}\frac{1}{d}\left\{\frac{(A-a)\ln x}{d}+1\right\}<c_7(A-a)\ln x,$$

где c_7 не зависит от a, A $(x>x_0(a,A))$. Это дает оценку

$$M\leqslant c_8(A-a)\frac{x}{\ln x}\qquad(c_8=c_5c_7).$$

Подставляя ее в (4.10), получаем

$$S>\left\{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\frac{x}{\ln x}\right\}A\ln x-c_8(A-a)^2x=$$

$$=x\left\{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)A-c_8(A-a)^2\right\}.$$

Можно так выбрать величины a и A, соблюдая условия $a<1<$ $<A<2$, чтобы для малого ε выполнялось неравенство

$$\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)A-c_8(A-a)^2>\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

Это противоречит предположению (4.9) и тем самым доказывает теорему.

Основная идея доказательства неравенства (4.8) следующая. Рассматривают приращения d_i простых чисел из интервала $\frac{1}{2}x<p_i\leqslant x$. Должны всегда существовать „малые“ приращения ($d_i\leqslant a\ln x$), так как в противном случае сумма всех d_i была бы слишком большой, а согласно теореме 2.4.4, не может быть слишком много приращений d_i, таких, что $a\ln x<d_i\leqslant A\ln x$; следовательно, все другие приращения d_i тогда были бы больше $A\ln x$

§ 5. Большие приращения соседних простых чисел

Обозначим опять i-е простое число через p_i и покажем, что при подходящем $c > 0$ для бесконечно многих p_i выполняется неравенство [1])

$$d_i = p_i - p_{i-1} > c \ln p_i \frac{\ln_2 p_i \ln_4 p_i}{\ln_3^2 p_i}. \tag{5.1}$$

Для доказательства необходимы некоторые вспомогательные теоремы.

Пусть p_i — простое число, для которого имеет место неравенство (5.1). Согласно (4.4), для конечной доли всех простых чисел $p_j \leqslant p_i$ имеет место соотношение $d_j < c \ln p_i$. Следовательно, приращения d_i из (5.1) в определенном смысле „сверх нормы большие“.

Лемма 5.1 [2]). *Пусть M — какое-нибудь множество из N натуральных чисел, и числа q_i, $i = 1, 2, \ldots, z$, пробегают какое-нибудь множество различных простых чисел, каждое из которых не входит в M. Тогда для каждого q_i существует такое r_i, $0 < r_i < q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, z)$, что имеет место соотношение*

$$N(m \in M;\ m \not\equiv r_i (\operatorname{mod} q_i),\ i = 1, 2, \ldots, z) \leqslant N \prod_{1 \leqslant i \leqslant z} \frac{q_i - 2}{q_i - 1}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Среди $q_1 - 1$ простых классов вычетов по $\operatorname{mod} q_1$ имеется по крайней мере один, например r_1, для которого выполняется неравенство

$$N(m \in M;\ m \equiv r_1 (\operatorname{mod} q_1)) \geqslant \frac{N}{q_1 - 1}.$$

Тогда

$$N(m \in M;\ m \not\equiv r_1 (\operatorname{mod} q_1)) \leqslant N - \frac{N}{q_1 - 1} = N \frac{q_1 - 2}{q_1 - 1}.$$

Если из M отбросить те числа, которые сравнимы с $r_1 (\operatorname{mod} q_1)$, то останется, например, N_1 чисел. Предположим, что $q_2 \neq q_1$. Повторение процесса дает

$$N(m \in M;\ m \not\equiv r_1 (\operatorname{mod} q_1),\ m \not\equiv r_2 (\operatorname{mod} q_2)) \leqslant$$
$$\leqslant N_1 \frac{q_2 - 2}{q_2 - 1} \leqslant N \frac{(q_1 - 2)(q_2 - 2)}{(q_1 - 1)(q_2 - 1)}.$$

Продолжая этот процесс, убеждаемся в правильности леммы 5.1.

---

[1]) Эрдёш [1], Ранкин [1].
[2]) Чанг [1].

Лемма 5.2 [1]). *Пусть $N(x, y)$ — число всех чисел, не превосходящих x, которые имеют только простые множители, не превосходящие y. Тогда для $y = y(x) \leqslant x$, $y(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, имеет место оценка*

$$N(x, y) < x \exp\left\{-\frac{\ln_3 y}{\ln y} \ln x + \ln_2 y + O\left(\frac{\ln_2 y}{\ln_3 y}\right)\right\}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть знак $\sum'$ обозначает суммирование по таким числам, простые сомножители которых не превосходят y. Сначала будем предполагать, что η — любое положительное действительное число. Тогда, так как $x/n \geqslant 1$ при $n \leqslant x$,

$$N(x, y) = \sum_{n \leqslant x}' 1 \leqslant \sum_{n \leqslant x}' \left(\frac{x}{n}\right)^\eta = x^\eta \sum_{n \leqslant x}' \frac{1}{n^\eta} \leqslant$$

$$\leqslant x^\eta \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^\eta} = x^\eta \prod_{p \leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p^\eta}\right)^{-1} = x^\eta P. \tag{5.4}$$

Предположим теперь, что $\eta > 1/2$, и с помощью частного суммирования (теорема П.1.4) при $y \to \infty$ найдем

$$\ln P = \sum_{p \leqslant y} \ln\left(1 - \frac{1}{p^\eta}\right)^{-1} = \pi(y) \ln\left(1 - \frac{1}{y^\eta}\right)^{-1} + \eta \int_2^y \frac{\pi(\xi)\, d\xi}{(\xi^\eta - 1)\xi} =$$

$$= O\left(\frac{y^{1-\eta}}{\ln y}\right) + \eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1)\ln \xi} + O\left(\eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1)\ln^2 \xi}\right), \tag{5.5}$$

так как, согласно (4.7.31),

$$\pi(\xi) = \xi/\ln \xi + O(\xi/\ln^2 \xi).$$

Рассмотрим теперь три слагаемых в правой части соотношения (5.5) и положим $1 - \eta = \delta = \ln_3 y/\ln y$. Тогда

$$\frac{y^{1-\eta}}{\ln y} = \frac{e^{\delta \ln y}}{\ln y} = \frac{\ln_2 y}{\ln y}.$$

Далее при $y \to \infty$ получаем

$$\eta \int_2^y \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1)\ln \xi} = (1 - \delta)\left\{\int_2^y \frac{d\xi}{\xi^\eta \ln \xi} + O(1)\right\},$$

$$(1-\delta) \int_2^y \frac{d\xi}{\xi^\eta \ln \xi} = (1-\delta) \int_{\delta \ln 2}^{\delta \ln y} e^u \frac{du}{u} = (1-\delta)\left(\int_{\delta \ln 2}^{1} + \int_1^{\delta \ln y}\right) e^u \frac{du}{u} =$$

$$= (1-\delta)\left\{\ln \frac{1}{\delta} + O(1) + \frac{e^{\delta \ln y}}{\delta \ln y} + O\left(\frac{e^{\delta \ln y}}{(\delta \ln y)^2}\right)\right\},$$

[1]) Ранкин [1]. Несколько худшую оценку можно получить элементарнее (Эрдёш [1]). Улучшение оценки (5.3) (которое, правда, незначительно) см. у де Брейна [1].

так как

$$\int_{\delta \ln 2}^{1} (e^u - 1)\frac{du}{u} = O(1),$$

$$\int_{1}^{\ln z} \frac{e^u}{u}\, du = \int_{e}^{z} \frac{d\xi}{\ln \xi} = \frac{z}{\ln z} + O\left(\frac{z}{\ln^2 z}\right).$$

Последнее устанавливается с помощью интегрирования по частям, так же как и формула (4.7.22).

Следовательно, при $y \to \infty$ получим

$$\eta \int_{2}^{y} \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1)\ln \xi} = \left(1 - \frac{\ln_3 y}{\ln y}\right)\Big\{\ln_2 y - \ln_4 y + O(1) + \\ + \frac{\ln_2 y}{\ln_3 y} + O\left(\frac{\ln_2 y}{\ln_3^2 y}\right)\Big\} = \ln_2 y + O\left(\frac{\ln_2 y}{\ln_3 y}\right).$$

Наконец [1]),

$$\eta \int_{2}^{y} \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1)\ln^2 \xi} = O\left(\int_{2}^{y} \frac{d\xi}{\xi^\eta \ln^2 \xi}\right),$$

$$\int_{2}^{y} \frac{d\xi}{\xi^\eta \ln^2 \xi} = \delta\left(\int_{\delta \ln 2}^{1} + \int_{1}^{\delta \ln y}\right) e^u \frac{du}{u^2} = \delta\left\{O\left(\frac{1}{\delta \ln 2}\right) + O\left(\frac{e^{\delta \ln y}}{(\delta \ln y)^2}\right)\right\}.$$

Следовательно, при $\delta = \ln_3 y/\ln y$

$$\eta \int_{2}^{y} \frac{d\xi}{(\xi^\eta - 1)\ln^2 \xi} = O(1) \quad (y \to \infty).$$

Если подставить все это в (5.5), то получим

$$\ln P = \ln_2 y + O\left(\frac{\ln_2 y}{\ln_3 y}\right) \quad (y \to \infty).$$

Поэтому утверждение леммы получается из (5.4) при $\eta = 1 - \ln_3 y/\ln y$.

Теорема 5.1. *Пусть p_i есть i-е простое число и $d_i = p_i - p_{i-1}$ $(i > 1)$. Тогда существует бесконечно много чисел p_i, для которых выполняется оценка*

$$d_i = p_i - p_{i-1} > c \ln p_i \frac{\ln_2 p_i \ln_4 p_i}{\ln_3^2 p_i}, \tag{5.6}$$

причем c — некоторая положительная константа, не зависящая от p_i.

---

[1]) Во втором интеграле нужно положить $u = \ln \xi$ и затем делать так же, как в (4.7.22).

Доказательство. Достаточно доказать следующее. Пусть p_1, $p_2, \ldots, p_n$ — первые n простых чисел. Тогда для достаточно большого n всегда имеется $z\,(=z_n)$, $0<z\leqslant p_1p_2\ldots p_n$, и натуральное число $U\,(=U_n)$,

$$U > c_1p_n\frac{\ln p_n \ln_3 p_n}{\ln_2^2 p_n}, \tag{5.7}$$

такие, что каждое из чисел $z+2$, $z+3, \ldots, z+U$ содержит в качестве собственного делителя по крайней мере одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Чтобы показать, что отсюда следует утверждение теоремы, выберем n таким, чтобы $p_n\leqslant\frac{1}{2}\ln x<p_{n+1}$. Тогда

$$p_1p_2\ldots p_n=\exp\left\{\theta\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\right\}<x,$$

и из теоремы о простых числах следует

$$\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\ln x<p_n\leqslant\frac{1}{2}\ln x.$$

Таким образом,

$$c_1p_n\frac{\ln p_n\ln_3 p_n}{\ln_2^2 p_n}>c_2\ln x\frac{\ln_2 x\ln_4 x}{\ln_3^2 x}.$$

Если неравенство (5.7) уже доказано, то всегда существуют такие числа $z<x$, что при

$$m=\left[c_2\ln x\frac{\ln_2 x\ln_4 x}{\ln_3^2 x}\right]$$

среди чисел $z+2$, $z+3, \ldots, z+m$ нет ни одного простого числа. Если в качестве p_i возьмем ближайшее простое число, следующее за $z+m$, то неравенство (5.6) выполнено, так как тогда $\ln p_{i-1}<\ln(x+1)$ и $\ln p_{i-1}\sim\ln p_i$ при $p_i\to\infty$ по теореме о простых числах или по теореме 1.3.3 [1]). Таким образом, если заставить x неограниченно расти, то получается бесконечно много p_i, для которых выполнено (5.6).

Прежде чем доказывать утверждение (5.7), заметим, что в измененном виде теорема 5.1 очевидна, если вместо (5.7) потребовать, чтобы выполнялось только неравенство $U\geqslant p_n$. Тогда при $z=p_1p_2\ldots p_n$ среди чисел $z+2$, $z+3, \ldots, z+p_n$ нет ни одного простого. Это давало бы, как легко заметить, для бесконечно много-

---

[1]) Потому, что $\ln p_{i-1}<\ln(x+1)\sim\ln x\;(x\to\infty)$ и функция, стоящая в квадратных скобках, монотонна, можно заменить там $\ln x$ на $\ln p_{i-1}$; кроме того, так как $\ln p_{i-1}\sim\ln p_i$, $\ln_2 p_{i-1}\sim\ln_2 p_i$, $\ln_3 p_{i-1}\sim\ln_3 p_i$, можно заменить там p_{i-1} на p_i.

гих p_i оценку $d_i > (1-\varepsilon)\ln p_i$, которая является почти тривиальным следствием теоремы о простых числах. Действительно, если бы при $p_0 < p_i \leqslant x$ всегда было $d_i \leqslant (1-\varepsilon)\ln p_i$, то, поскольку $\theta(x) = x + O(x)$, получалось бы, что

$$\sum_{p_i \leqslant x} d_i = \Big(\sum_{p_i \leqslant p_0} + \sum_{p_0 < p_i \leqslant x}\Big) d_i \leqslant O(1) + (1-\varepsilon) \sum_{p_i \leqslant x} \ln p_i = (1-\varepsilon)x + o(x).$$

Это противоречит (4.2), если заменить там ε на $\frac{1}{2}\varepsilon$.

Перейдем теперь к доказательству утверждения (5.7). Сначала заметим, что сравнения

$$z \equiv a_1 \pmod{p_1}, \quad z \equiv a_2 \pmod{p_2}, \ \ldots, \ z \equiv a_n \pmod{p_n} \tag{5.8}$$

имеют решения в области

$$0 < z \leqslant p_1 p_2 \ldots p_n \tag{5.9}$$

при любых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Проблема состоит в том, чтобы указать в этой области z и возможно большее число U так, чтобы каждое из чисел $z+g$, $g = 2, 3, \ldots, U$ делилось по крайней мере на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Этого можно добиться для различных g различными способами.

Пусть U сначала некоторое натуральное число, большее чем p_n, и X, Y, Z — любые действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$0 < X < Y < Z < p_n < U. \tag{5.10}$$

Этими неравенствами определяются пять интервалов

$$J_1 = (0, X], \ \ldots, \ J_5 = (p_n, U].$$

Разделим множество чисел $g = 2, 3, \ldots, U$ на пять подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_5$ (не обязательно составленных из разных элементов) так, что число g принадлежит M_k, если оно содержит по крайней мере один простой делитель $p^{(k)}$ из J_k ($k = 1, 2, \ldots, 5$). В последующем $p^{(k)}$ пробегают простые числа из J_k. Для простого числа p, $2 \leqslant p \leqslant U$, очевидно, равнозначна принадлежность к множествам J_k и M_k.

Сначала мы потребуем от z, чтобы оно делилось на все $p^{(1)}$ и $p^{(3)}$, т. е. чтобы для всех $p^{(1)} \in M_1$, $p^{(3)} \in M_3$ выполнялись сравнения

$$z \equiv 0 \pmod{p^{(1)}}, \quad z \equiv 0 \pmod{p^{(3)}}. \tag{5.11}$$

Тогда при $g \in M_1 + M_3$ число $z + g$ — не простое. Пусть теперь $g \notin M_1 + M_3$. Выберем X, Z и U так, чтобы множества M_2 и $M_4 + M_5$ не имели общего элемента, именно возьмем

$$XZ > U. \tag{5.12}$$

Отсюда для чисел g с условием $p^{(2)} | g$, $p^{(4)} | g$ следует неравенство $g \geqslant p^{(2)} p^{(4)} > XZ > U$, а должно быть $g \leqslant U$. Из (5.12) также следует, что g может содержать не больше одного простого делителя $p \in M_4 + M_5$. В итоге получаем, что каждое $g \notin M_1 + M_3$ удовлетворяет только одному из двух условий:

$$g \in M_2,\ g \text{ имеет только простые множители из } M_2, \tag{5.13}$$

или

$$g \in M_4 + M_5 \text{ — простое.} \tag{5.14}$$

Множество простых g, $g \in M_4 + M_5$, обозначим через P. Теперь применим лемму 5.1, взяв в ней за q_l число $p^{(2)}$, за M множество P. Тогда $N = \pi(U) - \pi(Z)$. Для каждого $p^{(2)}$ существует $r(p^{(2)})$, $0 < r(p^{(2)}) < p^{(2)}$, обладающее таким свойством.

Для каждого $g \in P$, за исключением некоторых $g_1, g_2, \ldots, g_A$, где

$$A \leqslant \{\pi(U) - \pi(Z)\} \prod_{p^{(2)} \in M_2} \frac{p^{(2)} - 2}{p^{(2)} - 1}, \tag{5.15}$$

выполняется сравнение

$$g \equiv r(p^{(2)}) \pmod{p^{(2)}}. \tag{5.16}$$

Потребуем, чтобы z удовлетворяло еще условиям

$$z \equiv -r(p^{(2)}) \pmod{p^{(2)}} \text{ для всех } p^{(2)} \in M_2. \tag{5.17}$$

Тогда отсюда и из (5.11) следует, что числа $z + g$ не простые для $g \in M_1 + M_3$ или $g \in M_4 + M_5$, $g \neq g_1, g_2, \ldots, g_A$. Число z определено теперь однозначно по модулю $\prod\limits_{p \in M_1 + M_2 + M_3} p$. Обозначим теперь g, $g \in M_2$, $g \notin M_1 + M_3$ и $g_1, g_2, \ldots, g_A$ через $g'_1, g'_2, \ldots, g'_m$. Как мы сейчас покажем, с помощью подходящего выбора величин X, Y, Z, U можно добиться того, чтобы m стало меньше, чем число простых чисел $p^{(4)}$ $(z < p^{(4)} \leqslant p_n)$. Поэтому простые числа $p_1^{(4)}, p_2^{(4)}, \ldots, p_m^{(4)}$ $\left(Z < p_i^{(4)}, \ldots, p_m^{(4)} \leqslant p_n\right)$ можно выбрать различными, и сравнения $z + g'_j \equiv 0 \left(\operatorname{mod} p_j^{(4)}\right)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ вместе со сравнениями (5.11), (5.17) имеют точно одно решение по модулю

$$p_1^{(4)} \ldots p_m^{(4)} \prod_{p \in M_1 + M_2 + M_3} p. \tag{5.18}$$

Этот модуль делит $p_1 p_2 \ldots p_n$, и, следовательно, указанные сравнения имеют одно решение z, $z \leqslant p_1 p_2 \ldots p_n$, по модулю $p_1 p_2 \ldots p_n$. Для этого решения $z + g$ — не простое при всех $g = 2, 3, \ldots, U$, если выполнено еще условие

$$\prod_{Y < p \leqslant Z} p = \prod_{p \in M_3} p > U, \tag{5.19}$$

так как в этом случае $z+g'_j$ не может быть равным $p_j^{(4)}$ в силу (5.11). Утверждение теоремы, следовательно, будет доказано, если мы сумеем так выбрать X, Y, Z, U, чтобы были выполнены условия (5.12) и (5.19) и, кроме того, имело место соотношение

$$\pi(p_n)-\pi(Z) > m = A + N\left(g;\ g\leqslant U,\ g\in M_2,\ g\notin M_1+M_3\right). \tag{5.20}$$

Положим при $p_n\to\infty$

$$X=\ln p_n,\quad U=\delta p_n\,\frac{\ln p_n \ln_3 p_n}{\ln_2^2 p_n},\quad Z=\frac{1}{2}p_n,$$

$$Y=\exp\left(\alpha\,\frac{\ln U\ln_3 U}{\ln_2 U}\right)=\exp\left\{\alpha\,\frac{\ln p_n\ln_3 p_n}{\ln_2 p_n}(1+o(1))\right\},$$

где величины δ, α положительны и позднее будут определены более точно. Очевидно, что (5.12) и (5.19)[1]) имеют место для достаточно большого p_n. Далее по теореме о простых числах при $p_n\to\infty$

$$\pi(p_n)-\pi(Z)\sim\frac{p_n}{2\ln p_n} \tag{5.21}$$

и, согласно (5.15), при фиксированных δ, α и $p_n\to\infty$ получаем

$$A\leqslant\pi(U)\prod_{p\in M_2}\frac{p-2}{p-1} < c_3\frac{U}{\ln U}\prod_{X<p\leqslant Y}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c_3\frac{U}{\ln U}\prod_{X<p\leqslant Y}\left(1-\frac{1}{p}\right) < c_4\frac{U\ln X}{\ln U\ln Y}=$$

$$=\frac{c_4\delta}{\alpha}(1+o(1))\frac{p_n}{\ln p_n}. \tag{5.22}$$

Наконец по лемме 5.2

$$N(g;\ g\leqslant U,\ g \text{ имеет только простые множители из } M_2) <$$

$$< U\exp\left\{-\frac{\ln U}{\ln Y}\ln_3 Y+\ln_2 Y+o(\ln_2 Y)\right\} <$$

$$< c_5\delta p_n\frac{\ln p_n\ln_3 p_n}{\ln_2^2 p_n}\exp\left\{-\left(\frac{1}{\alpha}-1+o(1)\right)\ln_2 p_n\right\}. \tag{5.23}$$

Если мы выберем α настолько малым, чтобы $1/\alpha-1>2$, т. е. $\alpha<\frac{1}{3}$, и затем $\delta=\delta(\alpha)$ настолько малым, чтобы $c_4\delta/\alpha$ было меньше $\frac{1}{2}$, то (5.20) следует из (5.21) — (5.23). Этим теорема 5.1 доказана.

Метод доказательства теоремы 5.1 принадлежит Эрдёшу [1].

[1]) Последнее верно потому, что $\theta(x)\sim x$ $(x\to\infty)$ и, следовательно, $\theta(Z)-\theta(Y)\sim\frac{1}{2}p_n$ $(p_n\to\infty)$.

§ 6. Цепочки больших приращений последовательных простых чисел

Обозначим $p_1 < p_2 < \ldots$ все простые числа, расположенные в порядке возрастания.

Теорема 6.1[1]). *Пусть $r(x)$ и $D(x)$ — положительные неубывающие функции от x и $r = r(x)$ при всех x — натуральное число. Обозначим через $A(x)$ число простых чисел $p_i \leqslant x$, таких, что*

$$p_{i+1} - p_i > D, \quad p_{i+2} - p_{i+1} > D, \ \ldots, \ p_{i+r} - p_{i+r-1} > D. \tag{6.1}$$

Тогда если $r(x)$ и $D = D(x)$ удовлетворяют условию

$$r(x)\, D(x) = o(\ln x), \tag{6.2}$$

то имеет место соотношение

$$A(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Доказательство. Для доказательства применим теорему 2.4.8. Если положить в ней

$$f(d) = N(p_i \leqslant x;\ p_i - p_{i-1} = d),$$

то получим

$$f(d) < c_1 \frac{x}{\ln^2 x} g(d), \quad g(d) = \prod_{p \mid d} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Отсюда следует, что число тех $p_i \leqslant x$, для которых по крайней мере одна разность $p_{i+k} - p_{i+k-1}$ равна d, меньше чем

$$c_1 r \frac{x}{\ln^2 x} g(d) + r^2,$$

так как каждая пара последовательных простых чисел может быть представлена в виде p_{i+k-1}, p_{i+k} $(1 \leqslant k \leqslant r)$ не более чем для r значений i[2]). Далее видно, что число тех $p_i \leqslant x$, для которых по крайней мере одна разность $p_{i+k} - p_{i+k-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ не больше D, меньше чем

$$c_1 r \frac{x}{\ln^2 x} \sum_{d \leqslant D} g(d) + r^2 D < c_2 r D \frac{x}{\ln^2 x}. \tag{6.3}$$

---

[1]) См. Серпинский [2], Эрдёш [6], Вальфиш [2], Прахар [3].

[2]) Второе слагаемое получается от того, что для последних r простых чисел, не превосходящих x, некоторые из p_{i+k} $(k = 1, 2, \ldots, r)$ могут быть больше чем x и соответствующие разности не попадут в число первых.

Это следует из соотношения $r^2D = o(\ln^2 x)$, $rD \geqslant 1$ и[1])

$$\sum_{n \leqslant y} g(n) \leqslant \sum_{n \leqslant y} \sum_{d \mid n} \frac{1}{d} = \sum_{d \leqslant y} \frac{1}{d}\left[\frac{y}{d}\right] < c_3 y. \tag{6.4}$$

В силу (6.2) правая часть (6.3) равна $o(x/\ln x)$, чем доказана теорема 6.1.

Из теоремы 6.1 при $r=2$ следует, что все простые числа p_i, не превосходящие x, за исключением самое большее $o(x/\ln x)$ чисел, удалены от своего правого (левого) соседа больше, чем на $D(x)$, если только $D(x) = o(\ln x)$. Приведенный способ доказательства показывает также существование бесконечно многих p_i, удовлетворяющих условиям (6.1), только вместо (6.2) следует использовать неравенство $rD < c \ln x$ для достаточно малого c. Методами, аналогичными примененным в § 5, Эрдёш [8] доказал, что существует бесконечно много чисел p_i, удовлетворяющих условиям

$$p_i - p_{i-1} > A \ln p_i, \quad p_{i+1} - p_i > A \ln p_i,$$

где константу A можно считать сколь угодно большой.

§ 7. О числе делителей чисел вида $p-1$

Каждое простое число p имеет только два делителя, но можно предположить, что числа $p-1$ имеют „много“ делителей[2]). Следующая теорема показывает, что для простых чисел p, не превосходящих x, „в среднем“ число делителей $d(p-1)$ равно $O(\ln x)$.

Теорема 7.1[3]). *Имеет место равенство*

$$\sum_{p \leqslant x} d(p-1) = O(x). \tag{7.1}$$

Доказательство. Для доказательства применим теорему 2.1. Так как для $p \leqslant x$, $p-1 = d_1 d_2$ по крайней мере одно из чисел d_1, d_2 должно быть меньше чем $\sqrt{x}$, то

$$\sum_{p \leqslant x} \sum_{d \mid p-1} 1 = \sum_{d \leqslant x} \sum_{p \equiv 1 \pmod d} 1 \leqslant 2 \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \pi(x, d, 1). \tag{7.2}$$

По теореме 2.1 при $a = 1/2$ получаем

$$\sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \pi(x, d, 1) \leqslant c_1 \frac{x}{\ln x} \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{\varphi(d)}. \tag{7.3}$$

---

[1]) Из (3.6) следует даже оценка $\sum_{n \leqslant y} g^2(n) < cy$.

[2]) Все доказанное в этом параграфе для чисел вида $p-1$ имеет место также для чисел вида $p-l$ при фиксированном целом l.

[3]) Титчмарш [2].

Положив $g(n)=\prod\limits_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$ в формуле (1.5.23), имеем

$$\frac{n}{\varphi(n)}=\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}<c_2 g(n).$$

Из (6.4) поэтому следует оценка

$$\sum_{n\leqslant z}\frac{n}{\varphi(n)}<c_3 z \quad (z\geqslant 1),$$

и отсюда с помощью частичного суммирования (теорема П.1.4) находим

$$\sum_{n\leqslant N}\frac{1}{\varphi(n)}=\sum_{n\leqslant N}\frac{n}{\varphi(n)}\cdot\frac{1}{n}=O(1)+\int_1^N O(\xi)\frac{d\xi}{\xi^2}=O(\ln N)\quad (N\geqslant 2). \tag{7.4}$$

Подставляя это в (7.3), получаем равенство

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\pi(x,\ d,\ 1)=O(x),$$

из которого вместе с (7.2) следует (7.1).

Обозначим опять через $v(n)$ число различных простых делителей числа n. Известно, что „нормальное" число простых делителей числа n равно $\ln\ln n$, т. е., за исключением $o(x)$ значений n, $n\leqslant x$, выполняются неравенства

$$(1-\varepsilon)\ln_2 n<v(n)<(1+\varepsilon)\ln_2 n$$

(Харди и Рамануджан [1], Туран [1]). Следующая теорема показывает, что числа $p-1$ ведут себя так же, как и все натуральные числа.

Теорема 7.2[1]). *Для каждого* $\varepsilon>0$ *выполняется равенство*

$$N(p\leqslant x;\ (1-\varepsilon)\ln_2 x<v(p-1)<(1+\varepsilon)\ln_2 x)=\frac{x}{\ln x}+o\left(\frac{x}{\ln x}\right), \tag{7.5}$$

причем константа в $o(\ )$ *зависит от* ε.

Для доказательства теоремы 7.2 необходимо следующее вспомогательное утверждение, которое также интересно само по себе.

Лемма 7.1. *Пусть* $k\geqslant 1$ *и*

$$f_k(x)=N(p\leqslant x;\ v(p-1)=k). \tag{7.6}$$

---

[1]) Эрдёш [2].

Тогда имеет место оценка

$$f_k(x) < c_4 \frac{x}{(k-1)!\ln^2 x} (\ln_2 x + c_5)^{k+2} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right), \tag{7.7}$$

где константа в $o(\ )$ *не зависит от* k.

Доказательство. Обозначим через M_1 и M_2 соответственно множества простых чисел p, не превосходящих x, для которых выполняются следующие условия: 1) все простые делители $p-1$ не превосходят $y = \exp(\ln x/\ln_2 x)$; 2) наибольший простой делитель $p-1$ входит в разложение $p-1$ по крайней мере во второй степени.

Покажем, что число элементов обоих множеств есть $o(x/\ln^2 x)$. Если в лемме 5.2 положить $y = \exp(\ln x/\ln_2 x)$, то найдем

$$N(p \leqslant x;\ p \in M_1) < x \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln_2 x \ln_3 x\right\} = o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{7.8}$$

Для $p \in M_2$, $p \notin M_1$ число $p-1$ делится на квадрат числа, большего чем $y = \exp(\ln x/\ln_2 x)$. Следовательно, в силу (П.1.12)

$$N(p \leqslant x,\ p \in M_2,\ p \notin M_1) \leqslant \sum_{m > y} \frac{x}{m^2} = O\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$= O\left(x \exp\left\{-\frac{\ln x}{\ln_2 x}\right\}\right) = o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{7.9}$$

Пусть теперь $p \notin M_1 + M_2$. Для каждого $k \geqslant 1$ обозначим через $n^{(k)}$ числа n, для которых $v(n) = k$. Пусть далее $v(p-1) = k$, $p \notin M_1 + M_2$, т. е.

$$p - 1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

$p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, где $p_k > y$, следовательно, $p_k > 2$ и $\alpha_k = 1$. Тогда имеет место равенство

$$p - 1 = p_k n^{(k-1)}, \tag{7.10}$$

где $n^{(k-1)} < x/y = x\exp(-\ln x/\ln_2 x)$. Теперь воспользуемся теоремой 2.4.6. При $q > 2$ имеем

$$N(p \leqslant x;\ p - 1 = qn,\ q \text{ — простое}) < c_6 \frac{x}{\varphi(n)\ln^2(x/n)}.$$

Так как

$$\varphi(n) > c\frac{n}{\ln_2 n} \geqslant c\frac{n}{\ln_2 x},$$

то при $n \leqslant x$ это дает по теореме 1.5.1

$$N\left(p \leqslant x;\ \ v(p-1)=k,\ \ p \notin M_1+M_2\right) <$$

$$< c_7 x \ln_2 x \sum_{\substack{n < x/y \\ v(n)=k-1}} \frac{1}{n \ln^2 (x/n)} \leqslant c_7 \frac{x}{\ln^2 x} \ln_2^3 x \sum_{\substack{n < x/y \\ v(n)=k-1}} \frac{1}{n}. \quad (7.11)$$

Теперь, поскольку $k \geqslant 2$, имеет место оценка[1])

$$\sum_{\substack{n < x/y \\ v(n)=k-1}} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{(k-1)!} \left\{ \sum_{p < x/y} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^m} \right\}^{k-1} < \frac{c_8}{(k-1)!} (\ln_2 x + c_9)^{k-1}, \quad (7.12)$$

так как при возведении в $(k-1)$-ю степень член $1/p_1^{\alpha_1} \ldots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$ с различными $p_1, \ldots, p_{k-1}$ встречается точно $(k-1)!$ раз. Подставляя это в (7.11) и принимая во внимание (7.8) и (7.9), получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 7.2. Достаточно доказать соотношение

$$\sum_{k < (1-\varepsilon) \ln_2 x} f_k(x) + \sum_{k > (1+\varepsilon) \ln_2 x} f_k(x) = O\left(\frac{x}{\ln^{1+\delta} x}\right) \quad (7.13)$$

при $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Ограничимся рассмотрением первой суммы, так как для второй доказательство аналогично. Согласно (7.7)[2]) имеет место оценка

$$\sum_{k < (1-\varepsilon) \ln_2 x} f_k(x) < c_4 \frac{x}{\ln^2 x} \sum_{k < (1-\varepsilon) \ln_2 x} \frac{(\ln_2 x + c_5)^{k+2}}{(k-1)!} + o\left(\frac{x}{\ln^2 x} \ln_2 x\right), \quad (7.14)$$

и нам нужно оценить теперь сумму в правой части последнего неравенства. Если положить

$$B\{k\} = \frac{1}{(k-1)!} (\ln_2 x + c_5)^{k+2},$$

то сначала получим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} B\{k\} = e^{c_5} \ln x \cdot (\ln_2 x + c_5)^3. \quad (7.15)$$

[1]) По теореме 1.4.1, так как $\sum\limits_{p,} \sum\limits_{m \geqslant 2} 1/p^m < \infty$.

[2]) Соотношение (7.7) выполняется тривиально также при $k = 1$.

Если положить $l = l(x) = \ln_2 x$, то для достаточно большого $x > x(\varepsilon)$ имеют место неравенства

$$B\{1\} < B\{2\} < \ldots < B\{[(1-\varepsilon)l]\}.$$

Кроме того,

$$\frac{B\left\{\left[\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)l\right]\right\}}{B\{[(1-\varepsilon)l]\}} = \frac{(\ln_2 x + c_5)^{[l(1-\varepsilon/2)]-[l(1-\varepsilon)]}}{[l(1-\varepsilon)]\{[l(1-\varepsilon)]+1\}\ldots\left\{\left[l\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]-1\right\}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(\ln_2 x + c_5)^{\frac{1}{2}\varepsilon l - 1}}{\{l(1-\varepsilon)+1\}\ldots\left\{l\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right\}} > \frac{1}{(\ln_2 x + c_5)^2}\left(\frac{\ln_2 x + c_5}{l\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon l} >$$

$$> \frac{\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon l}}{(\ln_2 x + c_5)^2} = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}\varepsilon \ln\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}}{(\ln_2 x + c_5)^2} > \ln^{\delta} x \ln_2^4 x$$

для достаточно малого $\delta = \delta(\varepsilon)$ и $x > x(\varepsilon)$. Отсюда, согласно (7.15), получается оценка

$$\sum_{k < (1-\varepsilon)\ln_2 x} B\{k\} < \ln_2 x \cdot B\{[(1-\varepsilon)l]\} <$$

$$< \ln_2 x \frac{B\left\{\left[l\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]\right\}}{\ln^{\delta} x \ln_2^4 x} < \frac{1}{\ln^{\delta} x \ln_2^3 x}\sum_{k=1}^{\infty} B\{k\} = O(\ln^{1-\delta} x).$$

Подставляя ее в (7.14), получаем утверждение теоремы.

§ 8. Теорема Романова

В этом параграфе мы будем заниматься представлением натуральных чисел n в виде

$$n = p + a^m, \tag{8.1}$$

где $a > 1$ — фиксированное целое число, p пробегает все простые числа, а m соответственно все натуральные числа. Число решений неравенства

$$p + a^m \leqslant x \tag{8.2}$$

есть $O(x)$, так как число простых чисел, не превосходящих x, есть $O(x/\ln x)$ и число чисел m, удовлетворяющих неравенству $a^m \leqslant x$, есть $O(\ln x)$ [1]).

[1]) В этом параграфе все константы могут зависеть от a.

Если ограничиться простыми числами p, не превосходящими $\frac{1}{2}x$, и числами m, для которых a^m не превосходит $\frac{1}{2}x$, то видно, что число решений неравенства (8.2) больше cx. Если теперь „в среднем“ не слишком многие из чисел $p+a^m$ представляют равные числа, то можно ожидать, что больше, чем cx, чисел n, не превосходящих x, могут быть представлены в виде (8.1). Это утверждение доказано Романовым [1]. Положим

$$f(n)=f(n,\ x)=N(p\leqslant x,\ a^m\leqslant x;\ p+a^m=n). \tag{8.3}$$

При $n\leqslant x$, очевидно, $f(n)$ зависит только от n, но не от x.

Неравенство

$$\sum_{n\leqslant x} f^2(n)<c\sum_{n\leqslant x} f(n)$$

является основным, так как из него следует, что значений n, при которых $f(n)$ велико, не слишком много. На самом деле отсюда, так же как и в § 3, с помощью неравенства Шварца следует теорема Романова

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\leqslant\Big\{\sum_{n\leqslant x} f^2(n)\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{n\leqslant x,\ f(n)>0}\cdot 1\Big\}^{1/2}<$$

$$<\Big\{c\sum_{n\leqslant x} f(n)\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{n\leqslant x,\ f(n)>0}\cdot 1\Big\}^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant x,\ f(n)>0}\cdot 1>c\sum_{n\leqslant x} f(n)>cx,$$

так как

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=N(p\leqslant x,\ a^m\leqslant x;\ p+a^m\leqslant x)>cx.$$

Лемма 8.1. *Число решений системы*

$$p+a^m=p_1+a^{m_1}\leqslant x, \tag{8.4}$$

где p, p_1 — простые числа, а m, m_1 — любые натуральные числа, равно $\sum_{n\leqslant x} f^2(n)$. Здесь функция $f(n)$ определяется равенством (8.3).

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что для каждой из $f(n)$ пар p, m решений уравнения $p+a^m=n$ существует $f(n)$ пар p_1, m_1 решений уравнения $p_1+a^{m_1}=n$. Это означает, что уравнение $p+a^m=p_1+a^{m_1}=n$ имеет ровно $f^2(n)$ решений p, m, p_1, m_1. Суммирование по всем $n\leqslant x$ дает утверждение леммы.

Лемма 8.2. *Пусть $e(d)$ для любого числа a, взаимно простого с d, является показателем a по $\bmod d$, т. е. число $e(d)\geqslant 1$ — целое,*

$$a^{e(d)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, d),$$

и это сравнение не имеет места, если $e(d)$ заменить на собственный делитель $e(d)$. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{n\leqslant x} f^2(n) < c_1 x \sum_{d\leqslant x}{}' \frac{1}{de(d)} + O(x), \tag{8.5}$$

причем $\sum'$ обозначает суммирование по числам, взаимно простым с a и свободным от квадратов.

Доказательство. По лемме 8.1 это неравенство достаточно доказать для числа решений системы (8.4). Из (8.4) следует равенство

$$p - p_1 = a^{m_1} - a^m, \tag{8.6}$$

причем для величин p, p_1, m, m_1, во всяком случае должны выполняться следующие неравенства:

$$p \leqslant x, \quad p_1 \leqslant x, \quad m \leqslant \frac{\ln x}{\ln a}, \quad m_1 \leqslant \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{8.7}$$

Пусть теперь $S = S(x)$ — число решений (8.6) в области (8.7). Тогда

$$\sum_{n\leqslant x} f^2(n) \leqslant S. \tag{8.8}$$

При фиксированных m и m_1, $m \neq m_1$, по теореме 2.4.4 имеет место оценка

$$N(p \leqslant x,\ p_1 \leqslant x;\ p - p_1 = a^{m_1} - a^m) < c_2 \frac{x}{\ln^2 x} g(a^{m_1} - a^m),$$
$$g(n) = \prod_{p\mid n} (1 + 1/p).$$

Теперь при $m_1 > m$ имеем

$$g(a^{m_1} - a^m) = g(a^m(a^{m_1-m} - 1)) = g(a^m)\, g(a^{m_1-m} - 1) =$$
$$= g(a)\, g(a^{m_1-m} - 1) = c_3 g(a^{m_1-m} - 1),$$

и аналогичное равенство при $m_1 < m$. Таким образом, в любом случае при $m \neq m_1$

$$g(a^{m_1} - a^m) \leqslant c_3 g(a^{|m_1-m|} - 1).$$

При фиксированном целом $h \geqslant 1$ получаем

$$N(m,\ m_1 \leqslant \ln x/\ln a;\ |m_1 - m| = h) < c_4 \ln x.$$

В итоге получается оценка

$$N(p,\ p_1 \leqslant x;\ m_1,\ m_2 \leqslant \ln x/\ln a;\ p - p_1 = a^{m_1} - a^m,\ m \neq m_1) <$$
$$< c_2 \frac{x}{\ln^2 x} \sum_{\substack{m,\ m_1 \leqslant \ln x/\ln a \\ m \neq m_1}} g(a^{m_1} - a^m) < c_2 c_3 c_4 \frac{x}{\ln x} \sum_{1\leqslant h\leqslant \ln x/\ln a} g(a^h - 1). \tag{8.9}$$

Кроме того, число таких наборов p, p_1, m, m_1 в области (8.7), для которых $m = m_1$ и выполнено (8.6), во всяком случае есть $O\{\pi(x)(\ln x/\ln a)\} = O(x)$. Совместно с (8.9) это дает нам

$$S < c_5 \frac{x}{\ln x} \sum_{1 \leqslant h \leqslant \ln x/\ln a} g(a^h - 1) + O(x). \tag{8.10}$$

Теперь, если $y = \ln x/\ln a$ и $\sum'$ обозначает суммирование по натуральным числам, взаимно простым с a и свободным от квадратов, имеет место оценка

$$\sum_{1 \leqslant h \leqslant y} g(a^h - 1) = \sum_{1 \leqslant h \leqslant y} \sum_{d \mid a^h - 1}{}' \frac{1}{d} =$$
$$= \sum_{d \leqslant x}{}' \frac{1}{d} \sum_{h \leqslant y,\ e(d) \mid h} \cdot 1 \leqslant y \sum_{d \leqslant x}{}' \frac{1}{de(d)} < c_6 \ln x \sum_{d \leqslant x}{}' \frac{1}{de(d)}.$$

Если подставить ее в (8.10), то, согласно (8.8), получим утверждение леммы.

Лемма 8.3 [1]). *Имеет место неравенство*

$$\sum_{1 \leqslant d < \infty}{}' \frac{1}{de(d)} < \infty, \tag{8.11}$$

где $\sum'$ *обозначает суммирование по числам, взаимно простым с* a *и свободным от квадратов.*

Доказательство. До конца доказательства d обозначает свободное от квадратов и взаимно простое с a число. Достаточно доказать, что

$$N(d \leqslant x;\ e(d) \leqslant \ln^2 d) = O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right). \tag{8.12}$$

Докажем сначала, что (8.11) следует из этого соотношения. Имеем

$$\sum_{d \leqslant x}{}' \frac{1}{de(d)} = \left(\sum_{\substack{d \leqslant x \\ e(d) \leqslant \ln^2 d}}{}' + \sum_{\substack{d \leqslant x \\ e(d) > \ln^2 d}}{}' \right) \frac{1}{de(d)} =$$
$$= \sum_{d \leqslant x,\ e(d) \leqslant \ln^2 d}{}' \frac{1}{de(d)} + O(1), \tag{8.13}$$

так как $\sum 1/d \ln^2 d < \infty$. Если (8.12) уже доказано, то по теореме П. 1.4 можно оценить первый член правой части (8.13), причем за λ_n

---

[1]) Эта лемма — самая трудная часть доказательства теоремы Романова. Настоящее доказательство принадлежит Эрдёшу и Турану [I].

нужно взять свободные от квадратов взаимно простые с a числа d, удовлетворяющие условию $e(d) \leqslant \ln^2 d$:

$$\sum_{d \leqslant x,\ e(d) \leqslant \ln^2 d}' \frac{1}{de(d)} \leqslant \sum_{d \leqslant x,\ e(d) \leqslant \ln^2 d}' \frac{1}{d} =$$

$$= \frac{1}{x} O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) + \int_2^x O\left(\frac{\xi}{\ln^2 \xi}\right) \frac{d\xi}{\xi^2} = O(1).$$

Отсюда следует (8.11).

Таким образом, достаточно доказать (8.12). Если мы положим $l = [\ln^2 x]$, то каждое d, удовлетворяющее условию $e(d) \leqslant l$, должно быть делителем числа

$$P = \prod_{n \leqslant l} (a^n - 1) < a^{l^2}. \tag{8.14}$$

Можно оценить число $v(P)$ различных простых делителей P:

$$v(P) \leqslant \frac{\ln P}{\ln 2} = O(l^2) = O(\ln^4 x). \tag{8.15}$$

Пусть теперь m — натуральное число, не превосходящее $v(P)$. (Позднее мы определим его более точно в зависимости от x.) Тогда в силу (8.15) получаем

$$N(d \leqslant x;\ e(d) \leqslant \ln^2 x,\ v(d) \leqslant m) \leqslant N(d \leqslant x;\ d \mid P,\ v(d) \leqslant m) \leqslant$$
$$\leqslant C^1_{v(P)} + \ldots + C^m_{v(P)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \{v(P)\}^m = e \cdot \{v(P)\}^m = O(c^m \ln^{4m} x) \quad (c > 1). \tag{8.16}$$

С другой стороны, из (1.5.11) следует [1])

$$N(d \leqslant x;\ d \mid P,\ v(d) > m) \leqslant N(n \leqslant x,\ v(n) > m) \leqslant$$
$$\leqslant N\big(n \leqslant x;\ d(n) > 2^m\big) < \sum_{n \leqslant x} d(n)\, 2^{-m} < cx \ln x \cdot 2^{-m}, \tag{8.17}$$

так как свободное от квадратов число с m различными простыми делителями имеет 2^m делителей. Положим теперь $m = \left[\frac{1}{10} \ln x / \ln_2 x\right]$. Тогда

$$c^m \log^{4m} x = O\big(\sqrt{x}\big)$$

и

$$x \ln x \cdot 2^{-m} = O\left(x \exp\left\{-c_7 \frac{\ln x}{\ln_2 x}\right\}\right).$$

---

[1]) Здесь $d(n)$ обозначает число положительных делителей n.

Следовательно, в силу (8.16) и (8.17) имеет место оценка

$$N(d \leqslant x;\ e(d) \leqslant \ln^2 d) = \\ = O\left(\sqrt{x} + x\exp\left\{-c_7 \frac{\ln x}{\ln_2 x}\right\}\right) = O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Отсюда следует (8.12), а потому также (8.11).

П. Эрдёш [1]) дал следующее исключительно простое доказательство леммы 8.3. Если d пробегает свободные от квадратов взаимно простые с a числа, то (сначала формально) имеем

$$\sum{}' \frac{1}{de(d)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{e(d)=m}{}' \frac{1}{d}.$$

Рассмотрим сумму

$$S(x) = \sum_{m \leqslant x} \sum_{e(d)=m}{}' \frac{1}{d}.$$

В этой сумме каждое d появляется не более одного раза, и каждое появляющееся d является делителем числа

$$P = \prod_{m \leqslant x} (a^m - 1) < a^{x^2}.$$

Число различных простых делителей P не больше чем $[x^2 \ln a/\ln 2] = N$. Поэтому

$$S(x) \leqslant \sum_{d \mid P}{}' \frac{1}{d} = \prod_{p \mid P}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \leqslant \prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right),$$

причем $p_1 < p_2 < \ldots$ — простые числа, расположенные в порядке возрастания. Из соотношений [2]) $p_N \sim N \ln N$ и (1.4.1) следует

$$S(x) = O(\ln N) = O(\ln x).$$

Отсюда с помощью частного суммирования получается утверждение леммы 8.3

$$\sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m} \sum_{e(d)=m}{}' \frac{1}{d} = \frac{1}{x} O(\ln x) + \int_1^x O(\ln 2\xi) \left| d\,\frac{1}{\xi} \right| = O(1).$$

Теорема 8.1. *Рассмотрим целое число* $a \geqslant 2$. *Числа* n, *которые могут быть представлены в виде*

$$n = p + a^m,\ p - \textit{простое},\ m = 1, 2, \ldots,$$

имеют положительную асимптотическую плотность.

---

[1]) Это доказательство было сообщено автору устно проф. Эрдёшем.

[2]) Из равенства $\pi(x) = (1 + o(1))\, x/\ln x$ получаем, что $\ln \pi(x) = (1 + o(1)) \ln x$; следовательно, $\ln x = (1 + o(1)) \ln \pi(x)$; при $x = p_N$, $\pi(x) = N$, $N = (1 + o(1))\, p_N/\ln N$.

Доказательство. Если функция $f(n)$ задана соотношением (8.3), то из лемм 8.2 и 8.3 следует оценка

$$\sum_{n \leqslant x} f^2(n) < c_8 x.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = N(p,\ m;\ p + a^m \leqslant x) \geqslant N\left(p,\ m;\ p \leqslant \frac{1}{2}x,\ a^m \leqslant \frac{1}{2}x\right) > c_9 x.$$

Неравенство Шварца дает нам

$$c_9 x < \sum_{n \leqslant x} f(n) < \left\{\sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} 1\right\}^{1/2} \{c_8 x\}^{1/2}.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы в следующем виде:

$$\sum_{n \leqslant x,\ f(n) > 0} 1 > cx.$$

Очевидно, что в виде $p + 2^m$ с нечетным p могут представляться только нечетные числа. Можно доказать, что существует арифметическая прогрессия, состоящая из нечетных чисел, которые не представимы в таком виде (Корпут [2], Эрдёш [9]). Для функции $f(n)$, определенной выше, Эрдёш [9] доказал оценку

$$\sum_{n \leqslant x} f^m(n) < c(m)\, x \qquad (m > 0).$$

Задачи к главе V

Докажите следующие утверждения.

1. При подходящих c_1, c_2 и

$$f(n) = N(p_1,\ p_2;\ p_1 + p_2 = n)$$

имеет место оценка

$$N\left(n \leqslant x,\ c_1 \frac{x}{\ln^2 x} < f(n) < c_2 \frac{x}{\ln^2 x}\right) > cx$$

(следует воспользоваться неравенством

$$\sum_{n \leqslant x,\ f(n) \leqslant \delta x/\ln^2 x} f(n) \leqslant \delta \frac{x^2}{\ln^2 x}$$

и результатами § 3).

2. При подходящих c_1, c_2, c_3, c_4 и

$$f(n) = N(p_1,\ p_2;\ p_1 \leqslant x,\ p_2 \leqslant x,\ p_1 - p_2 = n)$$

(p_1, p_2 — последовательные простые числа) имеет место соотношение

$$N\left(n \leqslant c_1 \ln x;\ c_2 \frac{x}{\ln^2 x} < f(n) < c_3 \frac{x}{\ln^2 x}\right) > c_4 \ln x$$

(следует воспользоваться оценкой

$$\sum_{\substack{n \leqslant c_1 \ln x \\ f(n) \leqslant \delta x/\ln^2 x}} f(n) \leqslant \delta c_1 \frac{x}{\ln x}\Big).$$ [1]

3) Число чисел n, не превосходящих x, которые имеют не более k простых множителей, меньше чем

$$\frac{c}{(k-1)!} \frac{x}{\ln x} \ln_2^{k-1} x,$$

где c не зависит от k [2]).

4. Более чем для $c_1 x/\ln x$ простых чисел $p_i \leqslant x$ при соответствующем $a < 1$ имеет место соотношение [3])

$$p_i - p_{i-1} < a \ln p_i.$$

5. При достаточно малом δ не существует такого действительного числа A, что для всех $p_i \leqslant x$, за исключением самое большее $o(x/\ln x)$ значений i, при $x \to \infty$ имеет соотношение [4])

$$A < \frac{p_i - p_{i-1}}{\ln x} \leqslant A + \delta.$$

6. Для числа $N = N(x)$ решений уравнения $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \leqslant x$ с простыми p_1, p_2, p_3, p_4 имеют место оценки

$$c_1 x^2/\ln^4 x < N < c_2 x^2/\ln^4 x.$$

7. Для числа $N_m = N_m(x)$ решений системы уравнений

$$p_1' + p_1'' = p_2' + p_2'' = \ldots = p_m' + p_m'' \leqslant x$$

имеют место оценки

$$c_1(m)\, x^m/\ln^{2m} x < N_m < c_2(m)\, x^m \ln^{2m} x.$$

8. Для числа M решений уравнения

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = p_1' + p_2' + \ldots + p_m' \leqslant x$$

имеют место оценки

$$c_1(m)\, x^{2m-2}/\ln^{2m} x < M < c_2(m)\, x^{2m-2}/\ln^{2m} x.$$

---

[1]) Кнёдель [1].
[2]) Харди и Рамануджан [1].
[3]) Риччи [1].
[4]) Риччи [1].

9. Пусть $d_i = p_i - p_{i-1}$ $(p_0 = 0)$. Тогда имеют место соотношения [1])

$$c_1 \frac{x}{\ln^2 x} < \sum_{p_i \leqslant x} \frac{1}{d_i} < c_2 \frac{x}{\ln^2 x} \ln_2 x,$$

$$c_1(\alpha) \frac{x}{\ln^{1+\alpha} x} < \sum_{p_i \leqslant x} \frac{1}{d_i^\alpha} < c_2(\alpha) \frac{x}{\ln^{1+\alpha} x} \quad (0 < \alpha < 1).$$

10. Пусть

$$S(n) = \sum_{p<n} \frac{1}{n-p}.$$

Тогда

$$\sum_{n \leqslant x} S(n) \sim x,$$

$$c_1 x < \sum_{n \leqslant x} S^2(n) < c_2 x$$ [2]).

11. Пусть q пробегает все простые числа, а функция $S(n)$ определена, как в задаче 10. Тогда

$$c_1 \frac{x}{\ln x} < \sum_{q \leqslant x} S(q) < c_2 \frac{x}{\ln x},$$

$$c_3 \frac{x}{\ln x} < \sum_{q \leqslant x} S^2(q) < c_4 \frac{x}{\ln x}.$$

12. Пусть g — фиксированное натуральное число. Тогда числа, представимые в виде $p + m^g$, $m = 1, 2, \ldots$, имеют положительную плотность [3]).

13. Числа, представимые в виде $p + p_1^g$, где p, p_1 — простые, имеют положительную плотность.

14. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots$ — какая-нибудь последовательность натуральных чисел, а $m(x)$ — число членов этой последовательности, для которых $a^{m_j} \leqslant x$, где a — фиксированное целое число, большее единицы. Тогда число различных чисел n, не превосходящих x, которые представимы в виде $n = p + a^{m_i}$, больше чем $c(a)\, x m(x) / \ln x$.

15. Пусть

$$P(x) = a_0 x^g + a_1 x^{g-1} + \ldots + a_g,$$

где $a_0, \ldots, a_g$ — целые, $a_0 > 0$. Тогда если a — фиксированное целое число, большее единицы, то числа, представимые в виде $p + P(a^m)$, где p — простое, $m = 1, 2, \ldots$, имеют положительную плотность.

---

[1]) Эрдёш и Реньи [1].

[2]) Эрдёш и де Брейн (по сообщению проф. Эрдёша).

[3]) Романов [1].

16. Пусть $r(n)$ — число решений уравнения

$$n = n_1^2 + n_2^2,$$

где n_1, $n_2 \geqslant 0$ — целые числа. Тогда имеют место соотношения

$$\sum_{n \leqslant x} r(n) \sim \frac{1}{4} \pi x,$$

$$\sum_{n \leqslant x} r^2(n) = O(x \ln x).$$

Для доказательства последнего соотношения достаточно оценить число решений уравнения $n_1^2 + n_2^2 = m_1^2 + m_2^2 \leqslant x$; из этого уравнения следует равенство $(n_1 - m_1)(n_1 + m_1) = (m_2 - n_2)(m_2 + n_2)$, в котором каждое выражение в скобках по модулю не превосходит $2\sqrt{x}$. Следовательно, достаточно оценить число решений уравнений $d_1 d_2 = \delta_1 \delta_2$, $0 < d_1, d_2, \delta_1, \delta_2 \leqslant 2\sqrt{x}$. Из последнего уравнения получаем [1])

$$d_1 = ad_1', \ \delta_1 = a\delta_1', \ d_2 = b\delta_1', \ \delta_2 = bd_1', \ (d_1', \delta_1') = 1,$$
$$d_1' \leqslant 2\sqrt{x}, \ \delta_1' \leqslant 2\sqrt{x}, \ a \text{ и } b < \min\left\{2\sqrt{x}/d_1', \ 2\sqrt{x}/\delta_1\right\}.$$

17. Используя результат задачи 16, докажите неравенство

$$\sum_{n \leqslant x, \ r(n) > 0} 1 > c \frac{x}{\ln x}$$

(см. гл. IV, задача 3).

18. Число решений уравнения $n_1^2 + n_2^2 - m_1^2 - m_2^2 = n$, где $0 < n_1, n_2, m_1, m_2 \leqslant n^{1/2}$, меньше чем

$$cn \sum_{d \mid n} \frac{1}{d}.$$

Докажите, что числа вида

$$n^2 + m^2 + 2^{k^2} \quad (n, \ m, \ k > 0 \text{ — целые})$$

имеют положительную плотность [2]).

19. При некотором $c > 0$ имеется бесконечно много натуральных чисел n, для которых

$$N\left(n_1, \ n_2; \ n_1^2 + n_2^2 = n\right) > 2^{c \ln n / \ln_2 n}.$$

---

[1]) Серпинский [1].
[2]) С. Сельберг [1].

Нужно рассмотреть такие n_1, n_2, что $n_1^2+n_2^2\equiv 0\pmod{p_1'\ \ldots\ p_r'}$, где $p_1', \ldots, p_r'$ суть r первых простых чисел вида $4n+1$, и использовать теорему 2.3.

20. Имеется бесконечно много таких n, что

$$N(p,\ m;\ p+m^g=n)>c\frac{n^{1/g}}{\ln n}\ln_2 n,$$

и бесконечно много таких n, что

$$N(p,\ m;\ p+m^g=n)<c\frac{n^{1/g}}{\ln n\ln_2 n}\ ^{1)}.$$

Нужно рассмотреть сравнение $p+m^g\equiv a\pmod{p_1p_2\ \ldots\ p_r}$, где a ни для одного простого числа $p_1, \ldots, p_r$ не является g-м степенным вычетом (тогда m^g-a взаимно просто с $p_1p_2\ \ldots\ p_r$) и подсчитать решения, для которых $p\leqslant x$, $m^g\leqslant x$. Для второй части воспользуйтесь тем же сравнением, но теперь пусть a будет степенным вычетом для $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

Докажите неравенства:

21. $$N(p,\ p_1;\ p+p_1^g=n)>c\frac{n^{1/g}}{\ln^2 n}\ln_2 n.$$

22. $$N(p,\ m;\ p+2^m=n)>c\ln_2 n\ ^{2)}.$$

23. $$N(p,\ p_1;\ p^2+p_1^2=n)>2^{c\ln n/\ln_2 n}\ ^{3)}.$$

24. Докажите, что всегда существует пара натуральных чисел m, n, $m\leqslant x$, $n\leqslant x$, $m\neq n$, для которой система

$$p_1+p_2=m,$$
$$p_2+p_3=n$$

имеет больше чем $cx\ln_2^2 x/\ln^3 x$ решений.

---

1) Из устного сообщения проф. Эрдёша.
2) Эрдёш [9].
3) Эрдёш [4].

Глава VI

ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

§ 1. Введение

В гл. V было доказано, что числа, которые представимы в виде $n = p_1 + p_2$, где p_1, p_2 — простые числа, имеют положительную плотность. То же самое справедливо для чисел, представимых в виде $n = p_1 + p_2 + p_3$ (p_1, p_2, p_3 — простые числа). Если p_1, p_2, p_3 — нечетные простые числа, то $p_1 + p_2$ — четное и $p_1 + p_2 + p_3$ — нечетное числа. Гольдбах в 1742 г. высказал предположение, что любое четное число, большее 4, можно представить в виде суммы двух, и любое нечетное число, большее 7, — в виде суммы трех нечетных простых чисел. В этой главе будут доказаны следующие утверждения:

1) любое достаточно большое нечетное число представимо в виде суммы трех нечетных простых чисел;

2) „почти все“ четные числа представимы в виде суммы двух нечетных простых чисел, или, точнее, количество четных чисел, не превосходящих x, которые не представимы в виде суммы двух нечетных простых чисел, есть $O(x/\ln^A x)$ при $x \to \infty$, где A — любое большое положительное число (константа в $O(\ \ )$ может, естественно, зависеть от A).

Сначала Харди и Литлвуд [2] доказали эти утверждения с помощью до сих пор недоказанной гипотезы, что все L-функции $L(s, \chi)$ по всем характерам и по всем модулям $k \geqslant 1$ не имеют нулей при $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{3}{4}$. Виноградову [3] удалось провести доказательство независимо от этого недоказанного предположения и тем самым полностью доказать оба утверждения [1]). Впрочем первое следует из второго. Действительно, если n — нечетное число, то $n - p$ — четное для нечетного p и имеется $\sim n/\ln n$ $(n \to \infty)$ чисел вида $n - p$, из которых самое большее $O(n/\ln^A n)$ не представимы в виде суммы двух простых чисел. Следовательно, существует представление $n - p = p_1 + p_2$,

---

[1]) Сам Виноградов доказал только 1; 2 может быть доказано без особых трудностей с помощью метода Виноградова (см. Корпут [1], Эстерман [1], Чудаков [1]). Уже раньше Эстерман доказал, что каждое достаточно большое нечетное число представимо в виде суммы двух простых чисел и одного числа, которое содержит не более двух простых множителей.

$n = p + p_1 + p_2$ для числа значений p, $p < n$, большего чем $(1-\varepsilon)\, n/\ln n$. Этим доказано первое утверждение.

До сих пор не решено, можно ли представить любое достаточно большое четное число в виде суммы двух простых чисел (см., однако, Реньи [1]).

§ 2. Введение тригонометрических сумм

Рассмотрим r последовательностей натуральных чисел $\{n_1\}$, $\{n_2\}$, ..., $\{n_r\}$. Пусть $r(N)$ — количество представлений натурального числа N в виде

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_r, \tag{2.1}$$

где n_k всегда пробегает числа из $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$. Положим

$$S_N^{(k)}(\xi) = \sum_{n_k \leqslant N} e^{2\pi i \xi n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{2.2}$$

Тогда

$$r(N) = \int_0^1 \prod_{k=1}^{r} S_N^{(k)}(\xi)\, e^{-2\pi i N \xi}\, d\xi. \tag{2.3}$$

Если мы раскроем произведение, то получим члены вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i \xi (n_1 + n_2 + \ldots + n_r - N)}\, d\xi, \tag{2.4}$$

но, как известно, для целого m

$$\int_0^1 e^{2\pi i \xi m}\, d\xi = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Таким образом, интеграл (2.4) только тогда не обращается в 0 (и равен 1), когда выполняется (2.1). Вообще из представления (2.3) для величины $r(N)$ можно получить немного. Во многих случаях, однако, можно приближенно определить поведение подинтегральной функции в рациональных точках области интегрирования и даже в определенной окрестности каждой рациональной точки. Если взять затем рациональные точки в области интегрирования (0,1) так плотно, чтобы их окрестности покрывали весь интервал, то можно интеграл по области (0,1) составить из интегралов по окрестностям отдельных рациональных точек. Если уже имеются простые формулы приближения для интегралов по окрестностям отдельных рациональных точек, то можно, таким образом, сказать что-то о величине $r(N)$.

Метод, только что грубо набросанный, принадлежит Харди, Литлвуду и Рамануджану [1]). Правда, они развивали этот метод в несколько другой форме, а именно рассматривали функции

$$f^{(k)}(s) = \sum_{1 \leqslant n_k < \infty} s^{n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

комплексного переменного s ($|s| < 1$). Тогда

$$\prod_{k=1}^{r} f^{(k)}(s) = \sum_{N=1}^{\infty} r(N)\, s^N$$

и величины $r(N)$ определяются по формуле Коши

$$r(N) = \frac{1}{2\pi i} \int \prod_{k} f^{(k)}(s)\, s^{-(N+1)}\, ds,$$

причем интегрирование ведется по кругу радиуса < 1 с центром в $s = 0$. Здесь появляются функции $f^{(k)}(s)$ и круг с радиусом < 1 (радиус устремляют к 1 при $N \to \infty$) вместо тригонометрических сумм (2.2) и интервала (0,1). Тригонометрические суммы в этом вопросе были введены впервые И. М. Виноградовым.

Если положить $r = 3$ и $\{n_1\} = \{n_2\} = \{n_3\} = \{p\}$, где $\{p\}$ — последовательность простых чисел, то $r(N)$ — число представлений N в виде суммы трех простых чисел. Аналогично для $r = 2$, $\{n_1\} = \{n_2\} = \{p\}$ — число представлений N в виде суммы двух простых чисел. Оказывается, что в этом случае для исследования суммы (2.2) в окрестности рационального числа ξ требуются различные методы в зависимости от того, „большой“ или „малый“ в определенном смысле знаменатель имеет величина ξ.

§ 3. Формулы приближения (дроби с малыми знаменателями)

Полагаем теперь для действительного α

$$e^{2\pi i\alpha} = e(\alpha). \tag{3.1}$$

Не упоминая об этом каждый раз особо, считаем в этой главе N достаточно большим натуральным числом.

Пусть

$$S_N(\xi) = \sum_{p \leqslant N} e(p\xi). \tag{3.2}$$

Тогда

$$r(N) = \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=N \\ p_1,\ p_2,\ p_3 \leqslant N}} 1 = \int_0^1 \{S_N(\xi)\}^3\, e(-N\xi)\, d\xi \tag{3.3}$$

[1]) См. Харди и Рамануджан [2].

и при целом $q \geqslant 1$, $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$, очевидно,

$$S_N\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{p \leqslant N} e\left(p \frac{a}{q}\right). \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Рассмотрим натуральное число q, удовлетворяющее условию $1 \leqslant q \leqslant \ln^u N$, где u — сколь угодно большое не зависящее от N положительное число. Пусть a — целое число и $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$* [1]*. Тогда*

$$S_n\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \operatorname{li} N + O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right) \tag{3.5}$$

при $N \to \infty$, причем константы могут зависеть от u.

Доказательство. Действительно, согласно (3.4),

$$S_N\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{\substack{0 \leqslant m < q \\ (m, q)=1}} e\left(m \frac{a}{q}\right) \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv m \, (\mathrm{mod}\, q)}} \cdot 1 + \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p|q}} e\left(p \frac{a}{q}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{0 \leqslant m < q \\ (m, q)=1}} e\left(m \frac{a}{q}\right) \pi(N, q, m) + O(\ln q),$$

поскольку $|e(ap/q)| = 1$ и $\sum_{p|q} 1 \leqslant [\ln q/\ln 2]$. Ввиду того что $q \leqslant \ln^u N$, применима теорема 4.8.3. Следовательно,

$$S_N\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{\substack{0 \leqslant m < q \\ (m, q)=1}} e\left(m \frac{a}{q}\right) \left\{\frac{1}{\varphi(q)} \operatorname{li} N + O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right)\right\} + O(\ln_2 N) =$$

$$= \frac{S_{aq}}{\varphi(q)} \operatorname{li} N + O\left(Nqe^{-c\sqrt{\ln N}}\right) =$$

$$= \frac{S_{aq}}{\varphi(q)} \operatorname{li} N + O\left(Ne^{-c_1\sqrt{\ln N}}\right) \quad (0 < c_1 < c);$$

при этом

$$S_{aq} = \sum_{\substack{0 \leqslant m < q \\ (m, q)=1}} e\left(m \frac{a}{q}\right) = \sum_{0 \leqslant n < q} e\left(n \frac{a}{q}\right) \sum_{d|(n, q)} \mu(d) =$$

$$= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{\substack{0 \leqslant n < q \\ d|n}} e\left(n \frac{a}{q}\right) = \mu(q),$$

потому что для $d \mid q$, $d < q$, $(a, q) = 1$

$$\sum_{\substack{0 \leqslant n < q \\ d|n}} e\left(n \frac{a}{q}\right) = \frac{e(a) - 1}{e(ad/q) - 1} = 0.$$

Тем самым теорема доказана.

---

[1]) Следовательно, $a = 0$ для $q = 1$ и $1 \leqslant a < q$, $(a\ q) = 1$ для $q > 1$.

Во всей гл. VI q обозначает натуральное число и a пробегает те целые числа, для которых $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$.

Теорема 3.2. *Если $q \leqslant \ln^u N$ и действительное число β удовлетворяет условию $0 \leqslant |\beta| \leqslant 1/2$, то при $N \to \infty$ справедливо соотношение*

$$S_N\left(\frac{a}{q}+\beta\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\frac{e(n\beta)}{\ln n}+O\left\{N(N|\beta|+1)e^{-c\sqrt{\ln N}}\right\}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Из равенства $S_1(\xi)=0$ при помощи частного суммирования получаем

$$S_N\left(\frac{a}{q}+\beta\right)=\sum_{p\leqslant N}e\left(p\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right)=$$
$$=\sum_{2\leqslant n\leqslant N}e(n\beta)\left\{S_n\left(\frac{a}{q}\right)-S_{n-1}\left(\frac{a}{q}\right)\right\}=$$
$$=\sum_{2\leqslant n\leqslant N}S_n\left(\frac{a}{q}\right)\{e(n\beta)-e((n+1)\beta)\}+S_N\left(\frac{a}{q}\right)e((N+1)\beta).$$

При $\sqrt{N}<n\leqslant N$ из условия $q\leqslant \ln^u N$ для $u'>u$ и достаточно большого N следует также, что

$$q<2^u\ln^u n\leqslant \ln^{u'} n.$$

Поэтому по теореме 3.1 при $\sqrt{N}<n\leqslant N$ имеем

$$S_n\left(\frac{a}{q}\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\operatorname{li} n+O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right).$$

Так как $\left|S_n\left(\frac{a}{q}\right)\right|\leqslant n$, $\operatorname{li} n\leqslant n$, то это соотношение справедливо также тривиальным образом и для $2\leqslant n\leqslant \sqrt{N}$. Если подставим его в верхнее соотношение, то получим

$$S_N\left(\frac{a}{q}+\beta\right)=S^{(1)}+S^{(2)}, \tag{3.7}$$

где [1])

$$S^{(1)}=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\left(\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\{e(n\beta)-e((n+1)\beta)\}\int_2^n\frac{d\xi}{\ln\xi}+\right.$$
$$\left.+e((N+1)\beta)\int_2^N\frac{d\xi}{\ln\xi}\right),$$

$$S^{(2)}=O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\left\{\sum_{2\leqslant n\leqslant N}|e(n\beta)-e((n+1)\beta)|+1\right\}\right).$$

---

[1]) $\operatorname{li} n=\int_2^n\frac{d\xi}{\ln\xi}+O(1).$

Далее

$$S^{(1)}=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{3\leqslant n\leqslant N}e(n\beta)\int\limits_{n-1}^{n}\frac{d\xi}{\ln\xi}.$$

По теореме Тейлора[1]) при $n\geqslant 3$

$$\int\limits_{n-1}^{n}\frac{d\xi}{\ln\xi}=\frac{1}{\ln n}+O\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right).$$

Следовательно,

$$S^{(1)}=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{3\leqslant n\leqslant N}\frac{e(n\beta)}{\ln n}+O(1). \tag{3.8}$$

Так как

$$|e(n\beta)-e((n+1)\beta)|=|1-e(\beta)|=2\sin\pi|\beta|=O(|\beta|)$$
$$\left(0\leqslant|\beta|\leqslant\frac{1}{2}\right), \tag{3.9}$$

то для $S^{(2)}$ сразу же получаем оценку

$$S^{(2)}=O\left\{N(N|\beta|+s)e^{-c\sqrt{\ln N}}\right\},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.3. *Пусть u и t — любые положительные числа. Для*

$$q\leqslant\ln^u N,\quad |\beta|\leqslant N^{-1}\ln^t N \tag{3.10}$$

при $N\to\infty$ справедливо равенство

$$S_N\left(\frac{a}{q}+\beta\right)=\tilde{S}_N(q,\ \beta)+O\left(Ne^{-c_2\sqrt{\ln N}}\right), \tag{3.11}$$

где

$$\tilde{S}_N(q,\ \beta)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\frac{e(n\beta)}{\ln n}. \tag{3.12}$$

Константы могут зависеть от u и t.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 3.2.

Соотношение (3.11) — объявленная формула приближения. Оно справедливо, конечно, только для дробей со знаменателями, не большими чем $\ln^u N$, для окрестностей $|\beta|\leqslant N^{-1}\ln^t N$. Очевидно, что для любого действительного ξ

$$S_N(\xi)=S_N(\xi-[\xi]). \tag{3.13}$$

Поэтому (3.11) дает также при $q=1$, $a=0$ приближенную формулу для $S_N(\xi)$ в области $0\leqslant\xi\leqslant N^{-1}\ln^t N$, $1-N^{-1}\ln^t N\leqslant\xi\leqslant 1$.

---

[1]) Теорема Тейлора применяется к функции $\int\limits_{x}^{n}\frac{d\xi}{\ln\xi}$ в точке $x_0=n$.

§ 4. Разбиение области интегрирования

Выберем теперь в теореме 3.3 $t=u$, и для каждой дроби a/q, удовлетворяющей условиям

$$1\leqslant q\leqslant \ln^u N,\quad 0\leqslant a<q,\quad (a,\ q)=1, \tag{4.1}$$

рассмотрим окрестность J_{aq} из тех ξ, для которых

$$\left|\xi-\frac{a}{q}\right|\leqslant N^{-1}\ln^u N. \tag{4.2}$$

Таким образом, если мы положим

$$\tau=N\ln^{-u}N, \tag{4.3}$$

то J_{aq} определяется неравенством

$$\left|\xi-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{\tau}. \tag{4.4}$$

При $q_1\neq q_2$ окрестности $J_{a_1q_1}$ и $j_{a_2q_2}$ не имеют общих точек, если только N достаточно велико. Действительно, для достаточно большого $N>N(u)$ и любого постоянного $u>0$

$$\left|\frac{a_1}{q_1}-\frac{a_2}{q_2}\right|\geqslant\frac{1}{q_1q_2}\geqslant\ln^{-2u}N>2N^{-1}\ln^u N.$$

Для достаточно большого N все J_{aq} содержатся в интервале

$$-\frac{1}{\tau}\leqslant\xi<1-\frac{1}{\tau}. \tag{4.5}$$

В самом деле,

$$\xi\geqslant\frac{a}{q}-\frac{1}{\tau}\geqslant-\frac{1}{\tau}\quad(\xi\in J_{aq}),$$

так как $a/q\geqslant 0$, и $\xi<1-1/\tau$ $(\xi\in J_{aq})$, так как

$$1-\frac{a}{q}\geqslant\frac{1}{q}\geqslant\ln^{-u}N>\frac{2}{\tau}=2N^{-1}\ln^u N.$$

В силу периодичности $S_N(\xi)$ и $e(-N\xi)$ из (3.3) следует также, что

$$r(N)=\int\limits_{-1/\tau}^{1-1/\tau}S_N^3(\xi)\,e(-N\xi)\,d\xi. \tag{4.6}$$

Эту формулу мы будем употреблять в дальнейшем вместо (3.3).

Интервалы J_{aq} не покрывают интервал $[-1/\tau,\ 1-1/\tau)$. Так как для каждого q имеется точно $\varphi(q)$ значений a, то сумма длин всех J_{aq}

$$\sum_{q\leqslant\ln^u N}\varphi(q)\,2N^{-1}\ln^u N\leqslant 2N^{-1}\ln^{3u}N\to 0\quad(N\to\infty).$$

Таким образом, оказывается необходимо, кроме дробей a/q, удовлетворяющих условию (4.1), рассматривать еще дроби, окрестности которых должны покрывать весь интервал $[1/\tau,\ 1-1/\tau)$.

По теореме Дирихле (теореме П. 10.1), примененной в случае $A=1$, $N=1$, $q\to\tau$, $t\to q$, для каждого действительного числа ξ существует дробь a/q, для которой

$$1\leqslant q\leqslant\tau,\quad (a,\ q)=1,\quad \left|\xi-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q\tau}. \tag{4.7}$$

Мы утверждаем, что для каждого $\xi\in[-1/\tau,\ 1-1/\tau)$ имеется даже такая дробь a/q, для которой $0\leqslant a<q$. А именно для $\xi\in[-1/\tau,\ 1/\tau]$ такой дробью является $a/q=0/1=0$. Но для $1/\tau<\xi<1-1/\tau$ из (4.7) и из того, что $q\geqslant 1$, получаем

$$0\leqslant\frac{1}{\tau}-\frac{1}{q\tau}<\frac{a}{q}<1-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{q\tau}\leqslant 1.$$

Следовательно, $0<a<q$. Пусть теперь для

$$\ln^u N<q\leqslant\tau=N\ln^{-u}N,\quad 0\leqslant a<q,\quad (a,\ q)=1, \tag{4.8}$$

M_{aq} обозначает множество ξ, для которых

$$\left|\xi-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q\tau}. \tag{4.9}$$

Тогда из предыдущих рассуждений следует, что для любого $\xi\in[-1/\tau,\ 1-1/\tau)$ выполнено точно одно из следующих условий:

1) ξ принадлежит строго к одному J_{aq}, причем для a и q выполнено (4.1);

2) если ξ не принадлежит ни одному J_{aq}, то оно принадлежит по крайней мере одному M_{aq}, причем теперь q и a удовлетворяют (4.8).

Обозначим через M_1 и M_2 множества тех $\xi\in[-1/\tau,\ 1-1/\tau)$, для которых выполнены соответственно условия 1 и 2. Из (4.6) следует равенство

$$r(N)=\left(\int\limits_{M_1}+\int\limits_{M_2}\right)S_N^3(\xi)\,e(-N\xi)\,d\xi=J_1(N)+J_2(N). \tag{4.10}$$

В § 5 мы будем заниматься прежде всего величиной $J_1(N)$. Более трудная оценка $J_2(N)$ проводится в § 6, где показано, что $J_2(N)=o(J_1(N))$ при $N\to\infty$; таким образом, $J_1(N)$ представляет собой главную часть $r(N)$.

§ 5. Главный член проблемы

В тех же обозначениях, что и раньше,

$$J_1(N)=\int\limits_{M_1}S_N^3(\xi)\,e(-N\xi)\,d\xi=\int\limits_{\Sigma J_{aq}}S_N^3(\xi)\,e(-N\xi)\,d\xi. \tag{5.1}$$

Суммирование в $\sum J_{aq}$ проводится по интервалам J_{aq}, удовлетворяющим условиям (4.1) и (4.2), причем u — постоянное положительное число, которое будет выбрано позднее. Нам понадобится

Лемма 5.1. *Для любого действительного числа* β *имеют место соотношения*

$$\tilde{S}_N(q, \beta) = O\left(q^{-1+\varepsilon}\frac{N}{\ln N}\right), \tag{5.2}$$

$$\tilde{S}_N(q, \beta) = O\left(q^{-1+\varepsilon}|\beta|^{-1}\right), \quad 0 < |\beta| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{5.3}$$

где $\tilde{S}_N$ — *функция, определенная формулой* (3.12)[1].

Доказательство соотношения (5.2) получается при помощи (П.1.8) из неравенства

$$\left|\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\frac{e(n\beta)}{\ln n}\right| \leqslant \sum_{2\leqslant n\leqslant N}\frac{1}{\ln n} = \int_2^N \frac{d\xi}{\ln\xi} + O(1) \sim \frac{N}{\ln N},$$

формулы (4.7.22) и теоремы 1.5.1.

Далее для $n \geqslant 2$, $0 < |\beta| \leqslant \frac{1}{2}$ имеем

$$\left|\sum_{2\leqslant m\leqslant n} e(m\beta)\right| \leqslant \frac{2}{|e(\beta)-1|} = \frac{1}{\sin\pi|\beta|} < |\beta|^{-1},$$

поскольку очевидно, что $\sin\alpha \geqslant 2\alpha/\pi$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Отсюда с помощью частного суммирования (теорема П.1.4) следует

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\frac{e(n\beta)}{\ln n} = \frac{1}{\ln N}O\left(|\beta|^{-1}\right) - \int_2^N O\left(|\beta|^{-1}\right)d\frac{1}{\ln\xi} = O\left(|\beta|^{-1}\right).$$

Из этого соотношения получаем (5.3).

Теорема 5.1. *Имеет место равенство*

$$J_1(N) = \int_{M_1} S_N^3(\xi)\, e(-N\xi)\, d\xi = T(N)\, A(N) + O(N^2 \ln^{-2u} N), \tag{5.4}$$

в котором

$$\begin{gathered} T(N) = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N \\ 2\leqslant n_1,\, n_2,\, n_3\leqslant N}} (\ln n_1 \ln n_2 \ln n_3)^{-1}, \\ A(N) = \sum_{q\leqslant \ln^u N}\frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{0\leqslant a<q,\,(a,q)=1} e\left(-N\frac{a}{q}\right). \end{gathered} \tag{5.5}$$

[1]) Константы в (5.2) и (5.3) могут, естественно, зависеть от ε (но не от q, β и N).

Доказательство. Положим для краткости $\delta = 1/\tau = N^{-1}\ln^u N$, и пусть $\sum\limits_q{}' \sum\limits_a$ означает сумму, распространенную на числа q, a, удовлетворяющие условиям $1 \leqslant q \leqslant \ln^u N$, $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$. Тогда

$$J_1(N) = \sum_q{}' \sum_a \int_{-\delta}^{\delta} S_N^3\left(\frac{a}{q}+\beta\right) e\left(-N\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right) d\beta. \tag{5.6}$$

Далее из теоремы 3.3 получаем

$$S_N^3\left(\frac{a}{q}+\beta\right) = \{\widetilde{S}_N(q, \beta) + O\left(Ne^{-c\sqrt{\ln N}}\right)\}^3 =$$
$$= \widetilde{S}_N^3(q, \beta) + O\left(N^3 e^{-c\sqrt{\ln N}}\right) \quad (N \to \infty),$$

так как оценка $|\widetilde{S}_N(q, \beta)| < N$ тривиальна (в силу равенства (3.12) и $|e(n\beta)| = 1$). Подставляя это в (5.6), получаем

$$J_1(N) = \sum_q{}' \sum_a e\left(-N\frac{a}{q}\right) \int_{-\delta}^{\delta} \widetilde{S}_N^3(q, \beta)\, e(-N\beta)\, d\beta +$$
$$+ O\left(\sum_q{}' \sum_q N^3 e^{-c\sqrt{\ln N}}\, 2\delta\right). \tag{5.7}$$

Так как $q \leqslant \ln^u N$, $a < q$, то последний член есть величина порядка

$$O\left(N^2 e^{-c\sqrt{\ln N}} \ln^{3u} N\right) = O\left(N^2 e^{-c_3\sqrt{\ln N}}\right).$$

Далее по лемме 5.1, используя определение (3.12) величины $\widetilde{S}_N(q, \beta)$, при достаточно малом ε получаем

$$\int_{-\delta}^{\delta} \widetilde{S}_N^3(q, \beta)\, e(-N\beta)\, d\beta =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{S}_N^3(q, \beta)\, e(-N\beta)\, d\beta + O\left(q^{-3(1-\varepsilon)} \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \beta^{-3}\, d\beta\right) =$$
$$= \frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)} T(N) + O\left(q^{-3(1-\varepsilon)}\delta^{-2}\right) =$$
$$= \frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)} T(N) + O\left(q^{-5/2} N^2 \ln^{-2u} N\right).$$

Из равенства (5.7) следует

$$J_1(N) = \sum_q{}' \frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)} \sum_a e\left(-N\frac{a}{q}\right) T(N) +$$
$$+ O\left(N^2 \ln^{-2u} N \sum_{1 \leqslant q < \infty} \varphi(q)\, q^{-5/2} + N^2 e^{-c_3\sqrt{\ln N}}\right),$$

и отсюда уже получаем (5.4), так как неравенства

$$\varphi(q)\,q^{-5/2} \leqslant q^{-3/2} \quad \text{и} \quad \sum q^{-3/2} < \infty$$

очевидны.

Лемма 5.2. *Для величины $T(N)$, определенной формулой* (5.5), *имеют место оценки*

$$c_4 \frac{N^2}{\ln^3 N} < T(N) < c_5 \frac{N^2}{\ln^3 N} \quad (N \geqslant 6). \tag{5.8}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=N} 1 = \sum_{n_1 \leqslant N} \sum_{n_2+n_3=N-n_1} \cdot 1 = \frac{1}{2} N^2 + O(N). \tag{5.9}$$

Из неравенства $(\ln n_1 \ln n_2 \ln n_3)^{-1} \geqslant \ln^{-3} N$ при $n_1+n_2+n_3=N$ следует левая часть (5.8). С другой стороны, при $N \geqslant 4$ имеем

$$T(N) = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N \\ \sqrt{N} < n_1,\, n_2,\, n_3 \leqslant N}} (\ln n_1 \ln n_2 \ln n_3)^{-1} + O\left(3 \cdot \sum_{\substack{n_1 \leqslant \sqrt{N},\ 2 \leqslant n_2,\ n_3 \leqslant N \\ n_2+n_3=N-n_1}} 1\right) =$$

$$= O\left(\ln^{-3}\sqrt{N} \sum_{n_1+n_2+n_3=N} 1 + N^{\frac{3}{2}}\right)$$

и, пользуясь равенством (5.9), получаем правую часть неравенства (5.8). Легко доказать, что

$$T(N) \sim \frac{1}{2} N^2 \ln^{-3} N \qquad (N \to \infty), \tag{5.10}$$

однако в дальнейшем это соотношение нам не понадобится.

Лемма 5.3. *Для величины $A(N)$, определенной формулой* (5.5), *имеет место равенство*

$$A(N) = \mathfrak{S}(N) + O\left\{(\ln N)^{-u(1-\varepsilon)}\right\}, \tag{5.11}$$

где

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right), \tag{5.12}$$

причем

$$\mathfrak{S}(N) \begin{cases} = 0 & \text{для четных} \quad N, \\ > c_6 = 6/\pi^2 & \text{для нечетных} \quad N. \end{cases} \tag{5.13}$$

Доказательство. Положим

$$G(q) = \sum_{0 \leqslant a < q,\ (a,\, q)=1} e\left(-N \frac{a}{q}\right).$$

Так как $|G(q)| \leqslant \varphi(q)$, $\varphi(q) \geqslant c(\varepsilon) q^{1-\varepsilon}$, $\mu^3(q) = \mu(q)$, то

$$A(N) = \sum_{1 \leqslant q \leqslant \ln^u N} \frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)} G(q) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} G(q) + O\left\{(\ln N)^{-u(1-2\varepsilon)}\right\}. \quad (5.14)$$

Здесь функция $G(q)$ мультипликативна. Действительно, если $(q_1, q_2) = 1$, то

$$G(q_1) G(q_2) = \sum e\left(-N \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1}{q_1 q_2}\right),$$

причем суммирование проводится по всем таким парам a_1, a_2, для которых

$$0 \leqslant a_1 < q_1, \quad 0 \leqslant a_2 < q_2, \quad (a_1, q_1) = (a_2, q_2) = 1.$$

Когда a_1 и a_2 пробегают приведенную систему вычетов по $\bmod q_1$ и по $\bmod q_2$ соответственно, то величина $a_1 q_2 + a_2 q_1$ пробегает приведенную систему вычетов по $\bmod q_1 q_2$. Отсюда следует равенство $G(q_1) G(q_2) = G(q_1 q_2)$, т. е. что $G(q)$ — мультипликативная функция. Поэтому функция $\mu(q) G(q)/\varphi^3(q)$ также мультипликативна, и по теореме 2.3 получаем

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} G(q) = \prod_p \left\{1 + \frac{\mu(p)}{\varphi^3(p)} G(p) + \frac{\mu(p^2)}{\varphi^3(p^2)} G(p^2) + \ldots\right\} =$$

$$= \prod_p \left\{1 + \frac{\mu(p)}{\varphi^3(p)} G(p)\right\} = \prod_p \left\{1 - \frac{G(p)}{(p-1)^3}\right\},$$

где

$$G(p) = \sum_{1 \leqslant a < p} e\left(-N \frac{a}{p}\right) = \begin{cases} p-1, & p \mid N, \\ -1, & p \nmid N. \end{cases}$$

Отсюда следует равенство

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} G(q) = \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = \mathfrak{S}(N).$$

Если число N — четное, то очевидно, что $\mathfrak{S}(N) = 0$. Если N — нечетное, то все его простые делители не меньше трех. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{S}(N) > \prod_{2 \leqslant p < \infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Действительно, $\prod\limits_{2<p<\infty}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\geqslant\prod\limits_{2\leqslant p<\infty}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$, так как $p_n\leqslant p_{n+1}-1$, если p_n есть n-е простое число. Тем самым лемма 5.3 полностью доказана. Из теоремы 5.1 и лемм 5.2 и 5.3 делаем следующее заключение.

Теорема 5.2. *Для $u\geqslant 2$ и достаточно большого нечетного N $(N>N(u))$ справедлива оценка*

$$J_1(N)=\int\limits_{M_1}S_N^3(\xi)\,e(-N\xi)\,d\xi>c_7\frac{N^2}{\ln^3 N}.$$

§ 6. Остаточный член проблемы

Рассмотрим теперь величину

$$J_2(N)=\int\limits_{M_2}S_N^3(\xi)\,e(-N\xi)\,d\xi.$$

Для каждого $\xi\in M_2$, согласно § 4, выполняется по меньшей мере неравенство вида

$$\left|\xi-\frac{a}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q\tau},\tag{6.1}$$

где

$$\ln^u N<q\leqslant\tau,\ 0\leqslant a<q,\ (a,\ q)=1.\tag{6.2}$$

В этом параграфе мы докажем следующую теорему, из которой уже легко следует утверждение 1 из § 1.

Теорема 6.1 [1]. *Пусть $1<q<N$ и $(a,\ q)=1$,*

$$\xi=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\ |\theta|\leqslant 1.\tag{6.3}$$

Тогда имеет место оценка

$$S_N(\xi)=O\left(N\ln^{\frac{9}{2}}N\left\{\left(q^{-1}+qN^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}+\exp\left(-\ln^{\frac{1}{2}}N\right)\right\}\right).$$

Для доказательства этой теоремы необходимы некоторые вспомогательные леммы, которые представляют самостоятельный интерес.

Для каждого действительного числа α через $\|\alpha\|$ мы будем обозначать расстояние от α до ближайшего целого числа. Следовательно,

$$\|\alpha\|=\min(\alpha-[\alpha],\ 1-\alpha+[\alpha]).$$

---

[1]) Виноградов [3], [5].

Лемма 6.1. *Пусть M и N — натуральные числа, $M < N$. Тогда для действительного $\xi \neq 0$ имеет место неравенство*

$$\left| \sum_{M < n \leqslant N} e(n\xi) \right| \leqslant \min\left(N - M, \frac{1}{2\|\xi\|}\right). \tag{6.4}$$

Лемма следует из равенства $|e(n\xi)| = 1$ и из оценок

$$\left| \sum_{M < n \leqslant N} e(n\xi) \right| = \left| \frac{e(N\xi) - e(M\xi)}{e(\xi) - 1} \right| \leqslant \frac{2}{2|\sin \pi\xi|} \leqslant \frac{1}{2\|\xi\|}.$$

Лемма 6.2. *Рассмотрим целые числа q, q' и g, причем $0 < q' \leqslant q$. Пусть на числах $z = g, g+1, \ldots, g+q'-1$ определена действительная функция $\rho(z)$. Обозначим*

$$\lambda = \max_{g \leqslant z < g+q'} \rho(z) - \min_{g \leqslant z < g+q'} \rho(z). \tag{6.5}$$

Пусть далее

$$\psi(z) = \frac{1}{q}(az + \rho(z)) \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при $A > 0$ имеет место оценка[1])

$$\sum_{g \leqslant z < g+q'} \min\left(A, \frac{1}{2\|\psi(z)\|}\right) \leqslant (\lambda + 3)A + 2q \ln q. \tag{6.6}$$

При этом полагают $\min(A, 1/0) = A$.

Доказательство. Положим

$$z = g + z', \quad z' = 0, 1, \ldots, q' - 1.$$

Тогда

$$\|\psi(z)\| = \left\| \frac{1}{q} \{az' + \rho_1(z')\} \right\|,$$

$$\rho_1(z') = ag + \rho(g + z').$$

В силу (6.5) при некотором действительном B выполнены неравенства

$$B \leqslant \rho_1(z') \leqslant B + \lambda \quad (0 \leqslant z' < q').$$

Положим $B_1 = B - [B]$ и обозначим через $z'' = z''(z)$ наименьший положительный вычет величины $az' + [B]$ по модулю q. Тогда получим

$$az' + \rho_1(z') = az' + [B] + (B - [B]) + \rho_1(z') - B =$$
$$= z'' + b(z')q + \rho_2(z''),$$

1\) Тривиальная оценка для суммы $\leqslant q'A \leqslant qA$.

где $b(z')$ — целое число и $\rho_2(z'') = B_1 + (\rho_1(z') - B)$. Отсюда следуют неравенства

$$B_1 \leqslant \rho_2(z'') \leqslant B_1 + \lambda. \tag{6.7}$$

Пока мы получили соотношение

$$\|\psi(z)\| = \left\| \frac{1}{q} \{z'' + \rho_2(z'')\} \right\|.$$

Если $q \leqslant \lambda + 3$, то (6.6) выполняется тривиальным образом, даже без члена $q \ln q$. Пусть теперь $q - 3 > \lambda$, в частности $q > 3$. Величина z'' пробегает часть чисел интервала $0, 1, \ldots, q-1$, и, так как $q' \leqslant q$, $(a, q) = 1$, каждое такое число принимается величиной z не более одного раза. Если мы положим $q_1 = [B_1 + \lambda + 1]$, то поскольку $\lambda < q - 3$, для q_1 получаем неравенства $0 < q_1 < q$. Кроме того, очевидно, что $0 \leqslant \rho_2(z'') < q_1$. Для тех z, для которых $z'' = z''(z) = 0$, $q - q_1$, $q - q_1 + 1, \ldots, q - 1$, имеем тривиальную оценку

$$\min\left(A, \frac{1}{2\|\psi(z)\|}\right) \leqslant A.$$

Число таких членов не превосходит $q_1 + 1 \leqslant \lambda + 3$. Следовательно,

$$\sum_{z''(z)=0,\ q-q_1,\ \ldots,\ q-1} \min\left(A, \frac{1}{2\|\psi(z)\|}\right) \leqslant (\lambda + 3) A.$$

Так как $0 \leqslant \rho_2(z'') < q_1$ для $1 \leqslant z'' = z''(z) < q - q_1$, имеем

$$1 \leqslant z'' + \rho_2(z'') < (q - q_1) + q_1 = q.$$

Поэтому

$$\|\psi(z)\| = \left\| \frac{1}{q} \{z'' + \rho_2(z'')\} \right\| \geqslant \frac{z_1}{q}, \tag{6.8}$$

причем введено обозначение

$$z_1 = z_1(z) = \begin{cases} z'', & \text{если } z'' + \rho_2(z'') < \frac{1}{2} q, \\ q - q_1 - z'', & \text{если } z'' + \rho_2(z'') \geqslant \frac{1}{2} q. \end{cases}$$

Тогда в первом случае

$$\|\{z'' + \rho_2(z'')\}/q\| = \{z'' + \rho_2(z'')\}/q \geqslant \frac{z''}{q}$$

и соответственно во втором случае

$$\|\{z'' + \rho_2(z'')\}/q\| = (q - \{z'' + \rho_2(z'')\})/q \geqslant (q - q_1 - z'')/q.$$

Всегда $z_1 < \frac{1}{2} q$, и величина $z_1 = z_1(z)$ принимает одно и то же значение не больше чем для двух значений z, так как z'' принимает каждое значение не больше чем при одном значении z. Из (6.8) следует оценка

$$\sum_{1 \leqslant z''(z) < q-q_1} \left(\min A,\ \frac{1}{2\|\psi(z)\|}\right) \leqslant 2 \sum_{1 \leqslant z_1 < \frac{1}{2}q} \frac{q}{2z_1} \leqslant 2q \ln q$$

при $q > 3$. Этим неравенство (6.6) полностью доказано.

При $\rho(z) = 0$ соотношение (6.6) переходит в неравенство

$$\sum_{g \leqslant z < g+q'} \min\left(A,\ \frac{1}{2\|az/q\|}\right) \leqslant 3A + 2q \ln q,$$

которое лучше, чем тривиальная оценка qA для $q > 6$, $\ln q < \frac{1}{4}A$.

Введем теперь новый символ. Запись

$$A \ll B \quad (B > 0) \tag{6.9}$$

означает то же самое, что и запись $A = O(B)$. Таким образом, $A \ll B$ равносильно $|A| < cB$[1]). Так же, как в символе O, константа c здесь может зависеть от некоторых параметров (например, от ε). От каких параметров зависит константа, чаще всего видно из контекста. Так, например, имеет место соотношение $\ln x \ll x^{\varepsilon}$ при $x \to \infty$; здесь константа, входящая в символ $\ll$, зависит от ε.

Лемма 6.3. *Пусть*

$$2 \leqslant W_0 \leqslant W, \quad 1 < q \leqslant W,$$

где q — целое и ξ — действительное число, причем

$$\xi = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,\ q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Пусть далее

$$S = \sum_{0 < z \leqslant W_0} \min\left(\frac{W}{z},\ \frac{1}{2\|\xi z\|}\right). \tag{6.10}$$

Тогда имеет место оценка

$$S \ll (W_0 + q + Wq^{-1}) \ln W. \tag{6.11}$$

Доказательство. Разложим S следующим образом:

$$S = \sum_{0 < z \leqslant W_0} = \sum_{0 < z \leqslant \frac{1}{2}q} + \sum_{\frac{1}{2}q < z \leqslant \frac{3}{2}q} + \ldots + \sum_{\left(j-\frac{1}{2}\right)q < z \leqslant W_0} \tag{6.11'}$$

в случае, когда $\left(j - \frac{1}{2}\right)q < W_0 \leqslant \left(j + \frac{1}{2}\right)q$. При $W_0 < \frac{1}{2}q$, естественно, нужно записать только часть первой суммы.

---

[1]) Этот знак, введенный И. М. Виноградовым, сберегает скобки для $O(B)$. Для выражений вида $A + O(B)$, однако, символ O необходим.

Обозначим через $z' = z'(z)$ наименьший неотрицательный вычет az по mod q. Очевидно, что $0 < z' < q$ при $0 < z \leqslant \frac{1}{2}q$. Так как

$$\xi z = \frac{1}{q}\left(az + \frac{\theta z}{q}\right) \tag{6.12}$$

и $|\theta| \leqslant 1$, при $0 < z \leqslant \frac{1}{2}q$ имеем

$$\|\xi z\| \geqslant \frac{1}{q}\left(z_1 - \frac{1}{2}\right),$$

где

$$z_1 = \begin{cases} z' & \text{при } z' \leqslant \frac{1}{2}q, \\ q - z' & \text{при } z' > \frac{1}{2}q. \end{cases}$$

Следовательно, для первой из сумм (6.11′) получим

$$\sum_{0 < z \leqslant \frac{1}{2}q} \leqslant 2q \sum_{0 < z_1 \leqslant \frac{1}{2}q} \frac{1}{z_1 - \frac{1}{2}} \ll q \ln q \quad (q > 1).$$

Для остальных сумм применим лемму 6.2. Мы можем положить в каждой сумме $\lambda = 1$, так как величина $\rho(z) = \theta z/q$ остается в интервале единичной длины, когда z пробегает последовательно числа, не превосходящие q. Далее положим в лемме 6.2 $A = W \Big/ \left(i - \frac{1}{2}\right)q$ для $i = 1, 2, \ldots, j$. Тогда получим

$$S \ll q \ln q + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} \left\{\frac{4W}{\left(i - \frac{1}{2}\right)q} + q \ln q\right\} \ll (q + jq) \ln q + Wq^{-1} \ln 2j.$$

Так как $j \leqslant W_0 q^{-1} + 1$ и $\ln q \leqslant \ln W$, то этим доказано утверждение леммы.

Тривиальная оценка величины S следующая:

$$S \leqslant \sum_{z \leqslant W_0} \frac{W}{z} \ll W \ln W_0 \leqslant W \ln W.$$

Чтобы оценка (6.11) была лучше тривиальной, величина W_0 должна быть мала по сравнению с W, а также с q и Wq^{-1}.

Лемма 6.4. *Рассмотрим какие-нибудь три последовательности натуральных чисел. Будем предполагать, что u_1, u_2, v независимо друг от друга пробегают соответственно числа первой, второй и третьей последовательностей. Пусть n пробегает все значения $u_1 \cdot u_2$ и принимает одно и то же значение столько* *раз, сколькими способами оно может быть записано в виде $u_1 \cdot u_2$. Потребуем, чтобы*

$$1 < U < N, \quad U < U' \leqslant KU, \tag{6.13}$$

где $K > 1$ — константа. Пусть, наконец, ξ — действительное число

$$\xi = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad 1 < q < N, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Если

$$S = \sum_{U < n \leqslant U'} \sum_{v \leqslant N/n} e(nv\xi) \quad (N \geqslant 2,\ \text{целое}), \tag{6.14}$$

то имеет место оценка

$$S \ll N \ln^2 N \left(q^{-1} + qN^{-1} + U^{-1} + UN^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.15}$$

Доказательство. Обозначим

$$d_1(z) = \sum_{z = u_1 u_2} 1. \tag{6.16}$$

Во всяком случае выполняются неравенства $0 \leqslant d_1(z) \leqslant d(z)$. Имеем

$$S = \sum_{U < z \leqslant U'} d_1(z) \sum_{v \leqslant N/z} e(zv\xi).$$

Из (1.5.15) в силу (6.16) следует, что

$$\sum_{U < z \leqslant U'} d_1^2(z) \leqslant \sum_{z \leqslant KU} d^2(z) \ll U \ln^3 N.$$

Применяя неравенства Шварца, получаем

$$S^2 \ll U \ln^3 N \sum_{U < z \leqslant U'} \Big| \sum_{v \leqslant N/z} e(zv\xi) \Big|^2 =$$
$$= U \ln^3 N \sum_{U < z \leqslant U'} \sum_{v \leqslant N/z} \sum_{v' \leqslant N/z} e(z(v - v')\xi). \tag{6.17}$$

При этом z пробегает при постоянных v, v' все числа интервала длины не более $(K-1)U$. Применив лемму 6.1 с $M = U$, $N = U'$, получим, что [1])

$$S^2 \ll U \ln^3 N \sum_{v, v' < N/U} \min\left(U, \frac{1}{\|\xi(v - v')\|}\right), \tag{6.18}$$

так как всегда $N/z < N/U$, и возможное расширение области суммирования может только увеличить сумму в правой части неравенства. При фиксированном v' разложим область суммирования по v на интервалы, длина которых не превосходит q. Очевидно, что

[1]) Имеет место оценка $\Big| \sum\limits_{v, v'} \sum\limits_{z} e(z(v - v')\xi) \Big| \leqslant \sum\limits_{v, v'} \Big| \sum\limits_{z} e(z(v - v')\xi) \Big|$.

получится не более $NU^{-1}q^{-1}+1$ таких интервалов. К каждой из полученных сумм применим лемму 6.2, причем мы полагаем в этой лемме

$$v-v'=z,\ \psi(z)=\xi z=\frac{1}{q}\left(az+\frac{\theta z}{q}\right).$$

Так как $\ln q \leqslant \ln N$, то

$$S^2 \ll U\ln^3 N \sum_{v'<N/U}\left(\frac{N}{Uq}+1\right)(U+q\ln q) \ll$$
$$\ll U\ln^3 N\frac{N}{U}\left(\frac{N}{Uq}+1\right)(U+q\ln q) \ll$$
$$\ll N^2\ln^4 N\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{U}+\frac{U}{N}+\frac{q}{N}\right).$$

Таким образом, неравенство 6.15 доказано.

Из (1.5.20) вытекает тривиальная оценка для S:

$$|S| \leqslant \sum_{U<z\leqslant U'} d_1(z)\sum_{v\leqslant N/z}1 \leqslant \sum_{z\leqslant KU} d(z)\frac{N}{z} \ll N\ln^2 2U \ll N\ln^2 N.$$

Чтобы оценка (6.15) была лучше тривиальной, q и N/q, а также U и N/U должны быть велики.

Доказательство теоремы 6.1. Пусть $P=\prod_{p\leqslant N^{\frac{1}{2}}} p$. Тогда

$$\sum_{d\mid P}\mu(d)\sum_{m\leqslant N/d}e(dm\xi)=\sum_{1\leqslant n\leqslant N}e(n\xi)\sum_{\substack{d\mid n\\ d\mid P}}\mu(d)=$$
$$=\sum_{1\leqslant n\leqslant N}e(n\xi)\sum_{d\mid(n,P)}\mu(d)=e(\xi)+\sum_{N^{\frac{1}{2}}<p\leqslant N}e(p\xi),$$

так как

$$\sum_{d\mid(n,P)}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad (n,\ P)=1,\\ 0, & \text{если}\quad (n,\ P)>1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$S_N(\xi)=\sum_{d\mid P}\mu(d)\sum_{m\leqslant N/d}e(dm\xi)+O\left(N^{\frac{1}{2}}\right). \tag{6.19}$$

Разделим теперь интервал $0<m\leqslant N$ на подинтервалы вида $M<m\leqslant M'$, $M<M'\leqslant 2M$; число таких подинтервалов не более чем $\ll \ln N$[1]). Положим

$$S(M)=\sum_{d\mid P}\mu(d)\sum_{\substack{M<m\leqslant M'\\ m\leqslant N/d}}e(dm\xi),$$

[1]) В качестве начального интервала можно взять интервал $(M,\ M']=\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$.

причем суммирование по d ведется для d, не превосходящих N/M, так как в противном случае внутренняя сумма будет пустой. Следовательно,

$$S_N(\xi) = \sum_M S(M) + O\left(N^{\frac{1}{2}}\right), \tag{6.20}$$

где

$$\sum_M 1 \ll \ln N. \tag{6.21}$$

По лемме 6.1

$$S(M) \ll \sum_{d \leqslant N/M} \min\left(\frac{N}{d},\ \frac{1}{2\|d\xi\|}\right).$$

Вообще говоря, здесь d пробегает некоторые делители числа P, но выражение в правой части неравенства может только увеличиться, если проводить суммирование по всем d, не превосходящим N/M. По лемме 6.3, примененной к $W = N$, $W_0 = N/M$, получим

$$S(M) \ll \left(NM^{-1} + q + Nq^{-1}\right)\ln N. \tag{6.22}$$

Обозначим теперь $H = \exp\left(\ln^{\frac{1}{2}} N\right)$. Для величины $S(M)$ при $M \geqslant H$ из (6.22) и (6.21) сразу же следует оценка

$$\sum_{M \geqslant H} S(M) \ll N \ln^2 N \left(H^{-1} + qN^{-1} + q^{-1}\right) \ll$$
$$\ll N \ln^2 N \left\{\left(q^{-1} + qN^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} + H^{-1}\right\}, \tag{6.23}$$

так как $1 < q < N$, $q^{-1} + qN^{-1} < 2$ и $A \ll A^{\frac{1}{2}}$ при $A < 2$.

Пусть далее $M < H$. Положим

$$S_1(M) = \sum_{\substack{d \leqslant N/M \\ d \mid P}}{}' \mu(d) \sum_{\substack{M < m \leqslant M' \\ m \leqslant N/d}} e(dm\xi), \tag{6.24}$$

где штрих обозначает, что суммирование ведется по тем d, которые не содержат простых делителей, больших чем H^2. Согласно лемме 5.5.2,

$$\sum_{d \leqslant N/M}{}' 1 \ll NM^{-1}H^{-1},$$

так как $\ln(N/M) \sim \ln N$ $(N \to \infty)$ при $M < H = \exp\left(\ln^{\frac{1}{2}} N\right)$. Отсюда в силу (6.21) и неравенства $M' \ll M$ получаем

$$S_1(M) \ll M \cdot NM^{-1}H^{-1} = NH^{-1},$$
$$\sum_{M < H} S_1(M) \ll NH^{-1} \sum_M 1 \ll N \ln NH^{-1}. \tag{6.25}$$

Остается оценить сумму

$$\sum_{M<H} \{S(M) - S_1(M)\}.$$

Имеет место равенство

$$S(M) - S_1(M) = \sum_{M<m\leqslant M'} \sum_{d\leqslant N/m} \mu(d)\, e(md\xi),$$

где суммирование ведется только по тем делителям d числа P, которые имеют по крайней мере один простой делитель, больший чем H^2. Запишем это равенство так:

$$S(M) - S_1(M) = \sum_{k\geqslant 1} \{S_k'(M) - S_k''(M)\}. \tag{6.26}$$

Здесь сумма $S_k'(M)$ определяется равенством

$$S_k'(M) = \sum_{M<m\leqslant M'} \sum_{d_k\leqslant N/m,\ \mu(d_k)=1} e(d_k m\xi), \tag{6.27}$$

в котором d_k пробегает все числа d, $d\,|\,P$, которые содержат ровно k простых множителей, больших H^2. Число d_k как делитель P, очевидно, свободно от квадратов. Сумма $S_k''(M)$ определяется аналогично, только во внутренней сумме суммирование проводится по тем d_k, для которых $\mu(d_k) = -1$. Достаточно оценить $S_k'(M)$, потому что оценка для $S_k''(M)$ получается так же.

Так как каждое $d\leqslant N/m \leqslant N$ имеет $\ll \ln N$ простых делителей, то, очевидно,

$$1\leqslant k \ll \ln N. \tag{6.28}$$

Сравним $S_k'(M)$ с суммой

$$T_k(M) = \sum_{M<m\leqslant M'} \sum_{pd_{k-1}\leqslant N/m,\ \mu(d_{k-1})=-1} e(pd_{k-1}m\xi), \tag{6.29}$$

где в двойной сумме суммирование проводится по всем p из интервала $H^2 < p \leqslant N^{\frac{1}{2}}$ и по d_{k-1}[1]). Каждое произведение pd_{k-1}, $(p, d_{k-1}) = 1$, встречающееся во внутренней сумме, равно d_k из внутренней суммы (6.27), и каждое такое d_k встречается в (6.29) ровно k раз, так как в качестве p можно взять любой из k различных простых делителей d_k, больших чем H^2. Число членов в $T_k(M)$,

---

[1]) Так как $p\,|\,P$, то $p\leqslant N^{\frac{1}{2}}$.

удовлетворяющих условию $(p,\ d_{k-1}) = p > 1$, в силу соотношений $M' \ll M$ и $N/m \leqslant N/M$ [1])

$$\ll M \sum_{\substack{p^2 n \leqslant N/M \\ p > H^2}} \sum 1 \ll M \sum_{p > H^2} N M^{-1} p^{-2} \ll N H^{-2}.$$

Следовательно,

$$S_k'(M) = \frac{1}{k} T_k(M) + O\left(N H^{-2}\right). \tag{6.30}$$

Оценим теперь величину $T_k(M)$. Во внутренней сумме в (6.29) разделим интервал $H^2 < p \leqslant N^{\frac{1}{2}}$ на $\ll \ln N$ интервалов вида

$$Q < p \leqslant Q', \quad Q' \leqslant 2Q \ll Q$$

и положим

$$T_k(M) = \sum_Q T_k(M,\ Q), \tag{6.31}$$

где

$$T_k(M,\ Q) = \sum_{M < m \leqslant M'} \sum_{Q < p \leqslant Q'} \sum_{d_{k-1} pm \leqslant N,\ \mu(d_{k-1}) = -1} e(d_{k-1} pm\xi),$$
$$\sum_Q 1 \ll \ln N. \tag{6.32}$$

Применим теперь лемму 6.4 при $n = mp$, $v = d_{k-1}$ $(\mu(d_{k-1}) = -1)$, $U = MQ$, $U' = M'Q'$ [2]). Мы видим, что

$$T_k(M,\ Q) \ll N \ln^2 N \left(q^{-1} + qN^{-1} + M^{-1}Q^{-1} + MQN^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $H^2 \leqslant Q < N^{\frac{1}{2}}$, то $M^{-1}Q^{-1} \leqslant H^{-2}$, и ввиду того, что $M < H$, имеем оценку $MQN^{-1} < HN^{-\frac{1}{2}} \ll H^{-2}$. Отсюда следует неравенство

$$T_k(M,\ Q) \ll N \ln^2 N \left\{\left(q^{-1} + qN^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} + H^{-1}\right\}, \tag{6.33}$$

так как, если α и β неотрицательны, то $(\alpha + \beta)^{\frac{1}{2}} \leqslant \alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}$. Из (6.31) — (6.33)

$$|T_k(M)| \leqslant \sum_Q |T_k(M,\ Q)| \ll N \ln^3 N \left\{\left(q^{-1} + qN^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} + H^{-1}\right\}.$$

---

[1]) Используется очевидное неравенство $\sum_{p > y} p^{-2} < \sum_{n > y} n^{-2} \ll y^{-1}$.

[2]) Условие $1 < U < N$ возможно выполнено лишь для $N > N_0$, но при постоянном N_0 теорема 6.1 для $N \leqslant N_0$ тривиальна.

Подставляя все это в (6.30) и используя соответствующую формулу для $S_k''(M)$, из (6.26) получаем

$$S(M) - S_1(M) \ll \sum_k \left\{\frac{1}{k}\,|\,T_k(M)\,| + O\left(NH^{-2}\right)\right\} \ll$$

$$\ll N \ln^{\frac{7}{2}} N \left\{\left(q^{-1} + qN^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} + H^{-1}\right\},$$

так как ввиду (6.28) справедлива оценка

$$\sum_k 1/k \ll \ln_2 N \ll \ln^{\frac{1}{2}} N.$$

Наконец из (6.21) выводим соотношение

$$\sum_{M<H} \{S(M) - S_1(M)\} \ll N \ln^{\frac{9}{2}} N \left\{\left(q^{-1} + qN^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} + H^{-1}\right\}.$$

Отсюда и из (6.23), (6.25) получается утверждение теоремы 6.1.

Можно заметить, что доказательство теоремы 6.1 так сложно главным образом потому, что различные тригонометрические суммы сначала нужно разложить на подходящие части, к которым уже можно применить леммы 6.2, 6.3 и 6.4.

Теорема 6.2. *Каждое достаточно большое нечетное число N представимо в виде суммы трех нечетных простых чисел.*

Доказательство. Пусть $\xi \in M_2$ и a/q — дробь, для которой выполнены соотношения (6.1) и (6.2). Тогда выполнены условия (6.3). Принимая во внимание (6.2), из теоремы 6.1 получаем

$$S_N(\xi) \ll N (\ln N)^{\frac{1}{2}(9-u)} \quad (\xi \in M_2). \tag{6.34}$$

Выберем теперь u, которое до сих пор было произвольным, равным числу 15. Тогда

$$S_N(\xi) \ll N \ln^{-3} N \qquad (\xi \in M_2). \tag{6.35}$$

Для величины $J_2(N)$ находим

$$J_2(N) = \int_{M_2} S_N^3(\xi)\, e(-N\xi)\, d\xi \ll \max_{\xi \in M_2} |\, S_N(\xi)\,| \int_{M_2} |\, S_N(\xi)\,|^2\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\xi \in M_2} |\, S_N(\xi)\,| \int_0^1 |\, S_N(\xi)\,|^2\, d\xi \ll N^2 \ln^{-4} N,$$

что следует из (6.35) и соотношения

$$\int_0^1 |\, S_N(\xi)\,|^2\, d\xi = \int_0^1 \sum_{p_1,\, p_2 \leqslant N} \sum e\left((p_1 - p_2)\,\xi\right) d\xi = \pi(N).$$

Из (3.3), (4.10) и теоремы 5.2 следует неравенство

$$r(N) > cN^2 \ln^{-3} N. \tag{6.36}$$

Величина $r(N)$ — число представлений числа N в виде суммы трех не обязательно нечетных простых чисел. Так как N — нечетное число, то в таком представлении или все три простых числа нечетные, или два простых числа равны 2. Но имеется не более трех представлений числа N в последней форме [1]); следовательно, число представлений числа в виде суммы трех нечетных простых чисел больше чем $cN^2 \ln^{-3} N$ для достаточно большого N. Теорема 6.2 тем самым доказана.

Если считать в этих рассуждениях N четным числом, то для числа представлений $N-2$ в виде суммы двух простых чисел получается оценка $O(N^2 \ln^{-A} N)$ при сколь угодно большом A. Эта оценка не нова, так как с помощью метода решета мы уже показали, что это число представлений есть величина порядка

$$O(N \ln_2 N/\ln^2 N)$$

(теорема 2.4.8). С помощью (5.10), кроме теоремы 6.2, нетрудно получить асимптотическую формулу для величины $r(N)$ вида

$$r(N) \sim \frac{1}{2} \mathfrak{S}(N)(1+o(1)) N^2/\ln^3 N.$$

Для числа $r'(N)$ представлений числа N в виде суммы двух простых чисел имеет место формула, аналогичная (3.3):

$$r'(N) = \int_0^1 S_N^2(\xi) e(-N\xi)\, d\xi. \tag{6.37}$$

Теперь можно опять разложить область интегрирования (интервал $[-1/\tau, 1-1/\tau)$) на области M_1 и M_2. Несколько изменяя M_1 и M_2 найдем, рассуждая, как при доказательстве теоремы 5.1, соотношение

$$J_1(N) \sim T'(N) A'(N),$$

где

$$T'(N) \sim cN/\ln^2 N,$$

$$A'(N) = \sum_{q \leqslant \ln^B N} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_q e\left(-N\frac{a}{q}\right) \ll \sum_{q \leqslant \ln^B N} \frac{1}{\varphi(q)} \ll \ln_2 N.$$

причем B — положительная константа. Следовательно, величина $J_1(N) \ll \ll N \ln_2 N/\ln^2 N$. Кроме того что оценка снизу величины $A'(N)$ трудна, в этой проблеме до сих пор не удалось дать нужную оценку сверху величины

$$J_2(N) = \int_{M_2} S_N^2(\xi) e(-N\xi)\, d\xi.$$

[1]) Например, $9 = 2+2+5 = 2+5+2 = 5+2+2$.

Грубая оценка

$$|J_2(N)| \leqslant \int\limits_{M_2} |S_N(\xi)|^2 \, d\xi$$

недостаточна, так как правая часть неравенства есть величина порядка $N/\ln N$ (см. задачу 1).

§ 7. О представлении четных чисел в виде суммы двух простых чисел

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение:

Теорема 7.1. *Число не превосходящих x четных чисел, которые не представимы в виде суммы двух нечетных простых чисел, есть величина порядка $O(x/\ln^A x)$, где A — сколь угодно большая константа.*

Рассмотрим достаточно большое натуральное число N и определим величины S_N и $\widetilde{S}_N$ формулами (3.2) и (3.12). Пусть u — произвольное положительное число, а знак $\sum\limits_{q}{}' \sum\limits_{a}$ указывает на то, что суммирование ведется по q и a, удовлетворяющим условиям

$$1 \leqslant q \leqslant \ln^u N, \quad 0 \leqslant a < q, \quad (a, q) = 1.$$

Через $r'(n)$ обозначим число представлений числа n в виде суммы двух простых чисел, не превосходящих N. Следовательно, $r'(n) = 0$ при $n > 2N$. Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 7.1. *Пусть*

$$Q(N) = \int\limits_0^1 \left| S_N^2(\xi) - \sum_q{}' \sum_a \widetilde{S}_N^2\left(q, \xi - \frac{a}{q}\right) \right|^2 d\xi. \tag{7.1}$$

Тогда имеет место оценка

$$\sum_{n \leqslant N} \{r'(n) - T'(n) A'(n)\}^2 \leqslant Q(N), \tag{7.2}$$

где

$$\begin{gathered} T'(n) = \sum_{\substack{n_1 + n_2 = n \\ 2 \leqslant n_1, \, n_2 \leqslant N}} (\ln n_1 \ln n_2)^{-1}, \\ A'(n) = \sum_q{}' \sum_a \frac{\mu^2(a)}{\varphi^2(q)} e\left(-n \frac{a}{q}\right). \end{gathered} \tag{7.3}$$

Доказательство. Величина $A'(n)$ — действительное число, так как a вместе с $-a$ пробегает приведенную систему вычетов по $\mathrm{mod}\, q$. Очевидно, справедливо равенство

$$S_N^2(\xi) = \sum_{n \leqslant 2N} r'(n) e(n\xi).$$

С другой стороны, согласно (3.12),

$$\tilde{S}_N^2\left(q,\ \xi-\frac{a}{q}\right)=\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{n\leqslant 2N} e\left(-n\,\frac{a}{q}\right)T'(n)\,e(n\xi).$$

Из двух последних равенств следует [1]), что

$$Q(N)=\sum_{n\leqslant 2N}\{r'(n)-T'(n)\,A'(n)\}^2.$$

Опуская члены с $N<n\leqslant 2N$, получаем (7.2).

Лемма 7.2. *Имеют место неравенства*

$$c_1\,\frac{n}{\ln^2 n}<T'(n)<c_2\,\frac{n}{\ln^2 n}\qquad(4\leqslant n\leqslant N). \tag{7.4}$$

Доказательство. При $n\to\infty$

$$\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,\ n_2\geqslant 2}} 1=n+O(1).$$

Так как

$$T'(n)\geqslant\frac{1}{\ln^2 n}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,\ n_2\geqslant 2}}\cdot 1,$$

то отсюда следует левая часть неравенства (7.4). Правая часть неравенства получается при помощи следующих вычислений ($n\geqslant 4$):

$$T'(n)=\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1,\ n_2\geqslant\sqrt{n}}}(\ln n_1\ln n_2)^{-1}+O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\ln n\right)^{-2}\sum_{n_1+n_2=n}\cdot 1+O\left(n^{\frac{1}{2}}\right).$$

Лемма 7.3. *Пусть $b>0$—произвольное положительное число, $N>N(b)$ и $u>b+1$. Тогда при подходящем значении c_3 имеет место неравенство*

$$A'(n)>c_3. \tag{7.5}$$

Это неравенство справедливо для $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$, $0<n\leqslant N$, за исключением $O(N\ln^{-b}N)$ значений числа n.

Доказательство. Положим

$$B(q,\ n)=\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\sum_a e\left(-n\,\frac{a}{q}\right).$$

---

[1]) Заметим, что для действительных a_n

$$\int_0^1\left|\sum_{n\leqslant N}a_n e(n\xi)\right|^2 d\xi=\sum_{n\leqslant N}a_n^2.$$

Как при доказательстве леммы 5.3, можно показать, что $B(q, n)$ — мультипликативная функция от q. Поэтому для свободных от квадратов чисел q имеет место равенство

$$B(q, n) = \prod_{p \mid q} B(p, n),$$

где

$$B(p, n) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & p \nmid n, \\ \dfrac{1}{p-1}, & p \mid n. \end{cases}$$

Для чисел q, содержащих квадраты, значение $B(q, n)$ равно нулю. Далее

$$A'(n) = \sum_{1 \leqslant q \leqslant \ln^u N} B(q, n) = \sum_{q=1}^{\infty} B(q, n) - \sum_{q > \ln^u N} B(q, n). \quad (7.6)$$

Бесконечные ряды абсолютно сходятся по теореме 1.5.1, так как

$$|B(q, n)| = \prod_{p \mid q} \frac{1}{(p-1)^2} \prod_{p \mid (q, n)} (p-1) \leqslant \frac{1}{\varphi^2(q)} \prod_{p \mid (q, n)} p \leqslant \frac{(q, n)}{\varphi^2(q)} \leqslant \frac{n}{q^{2-\varepsilon}}$$

при $q > q(\varepsilon)$, $\mu^2(q) = 1$. По теореме 3.2.3 отсюда следует равенство

$$\sum_{q=1}^{\infty} B(q, n) = \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) = \mathfrak{S}'(n). \quad (7.7)$$

Для нечетных n функция $\mathfrak{S}'(n)$, определенная равенством (7.7), равна нулю. Для четных n

$$\mathfrak{S}'(n) \geqslant \prod_{p \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \quad (n \equiv 0 \pmod 2). \quad (7.8)$$

Далее, согласно (7.6) при $N > N(\varepsilon)$ и при $\varepsilon < \frac{1}{2}$, имеем оценку

$$\left| \sum_{q > \ln^u N} B(q, n) \right| \leqslant \sum_{q > \ln^u N}{}' (q, n) q^{-2+\varepsilon} \leqslant \sum_{d \mid n}{}' d \sum_{m > (\ln^u N)/d} (dm)^{-2+\varepsilon} =$$

$$= \sum_{d \mid n}{}' d^{-1+\varepsilon} \sum_{m > (\ln^u N)/d}{}' m^{-2+\varepsilon} < c_4 \sum_{d \mid n}{}' d^{-1+\varepsilon} \left(\frac{d}{\ln^u N}\right)^{1-\varepsilon} =$$

$$= c_4 (\ln N)^{-u(1-\varepsilon)} \sum_{d \mid n}{}' \cdot 1. \quad (7.9)$$

(Через $\sum'$ обозначена сумма по свободным от квадратов числам.)

Пусть теперь $n \equiv 0 \pmod 2$, $n \leqslant N$, $v(n) \leqslant c_5 \ln_2 N$, причем $v(n)$ — число различных простых делителей числа n, а $c_5 > 0$ будет более точно определено позже. Тогда

$$\sum_{d \mid n}{}' 1 \leqslant 2^{c_5 \ln_2 N} = (\ln N)^{c_5 \ln 2}. \tag{7.10}$$

Для не превосходящих N чисел n, у которых число разных простых делителей $v(n)$ не удовлетворяет этому неравенству, выполняется оценка

$$d(n) > (\ln N)^{c_5 \ln 2},$$

и их число по теореме 1.5.11

$$\ll N \ln N / (\ln N)^{c_5 \ln 2} = N (\ln N)^{1 - c_5 \ln 2}.$$

Если для некоторого n выполнено (7.10), то, согласно (7.9), при $N > N(\varepsilon)$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{q > \ln^u N} B(q, n) \right| < c_4 (\ln N)^{-\{u(1-\varepsilon) - c_5 \ln 2\}}. \tag{7.11}$$

Следовательно, она имеет место и для любого четного n, не превосходящего N, такого, что $v(n) \leqslant c_5 \ln_2 N$.

Если теперь мы выберем c_5 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $u > c_5 \ln 2 > b + 1$, а ε настолько малым, чтобы $u(1 - \varepsilon) > c_5 \ln 2$, то из формул (7.6) — (7.9) и (7.11) для всех четных n, за исключением

$$\ll N (\ln N)^{1 - c_5 \ln 2} \ll N \ln^{-b} N$$

таких n, следует неравенство $A'(n) > 0$.

Лемма 7.4. *Пусть n_1 пробегает такие числа $n_1 \leqslant N$, для которых $r'(n_1) = 0$, $n_1 \equiv 0 \pmod 2$, $A'(n_1) > c_3$, т. е. числа, не представимые в виде суммы двух простых чисел. Для числа $R(N)$ этих чисел имеет место оценка*

$$R(N) \ll Q^{\frac{1}{3}}(N) \ln^{\frac{4}{3}} N. \tag{7.12}$$

Доказательство. Так как $r'(n_1) = 0$, по лемме 7.1

$$\sum_{n_1} \{T'(n_1) A'(n_1)\}^2 \leqslant Q(N).$$

Отсюда в силу леммы 7.2 и предположения $A'(n_1) > c_3$ следует оценка

$$\sum_{n_1} n_1^2 \ln^{-4} n_1 \ll Q(N).$$

Следовательно,

$$\sum_{n_1} n_1^2 \ll Q(N) \ln^4 N.$$

Теперь имеем

$$\sum_{n_1} n_1^2 \geqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant R(N)} n^2 \geqslant c_6 R^3(N).$$

Подставляя все это в предыдущее неравенство, получаем

$$R^3(N) \ll Q(N) \ln^4 N.$$

Лемма 7.5. *Пусть $R'(N)$—число всех n, не превосходящих N, $n \equiv 0 \pmod 2$, для которых $r'(n) = 0$. Тогда имеет место оценка*

$$R'(N) \ll Q^{\frac{1}{3}}(N) \ln^{\frac{4}{3}} N + N \ln^{-b} N. \tag{7.13}$$

Это следует сразу же из леммы 7.3 и 7.4.

Теперь нужно оценить $Q(N)$ методами § 3—6. В последующем N всегда предполагается достаточно большим; насколько большим оно должно быть, зависит от параметров ε, u, b, t. Пусть $\tau = N \ln^{-t} N$, причем сначала предположим только, что $t \geqslant u$, а позже определим t более точно. Каждой дроби a/q с $1 \leqslant q \leqslant \ln^u N$, $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$, мы сопоставим интервал J'_{aq}, состоящий из тех ξ, для которых выполняется неравенство

$$\left| \xi - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{\tau} = N^{-1} \ln^t N. \tag{7.14}$$

Можно доказать, что интервалы J'_{aq} для достаточно больших N не пересекаются, аналогично тому, как это было доказано в § 4 для J_{aq}. Пусть $M'_1 = \sum_q{}' \sum_a J'_{aq}$ и M'_2—множество тех ξ, $\xi \in [-1/\tau, 1 - 1/\tau)$, которые не принадлежат M'_1. Для каждого $\xi \in [-1/\tau, 1 - 1/\tau)$ по теореме Дирихле имеется некоторая дробь a/q со знаменателем $1 \leqslant q \leqslant N \ln^{-u} N$, такая, что

$$\left| \xi - \frac{a}{q} \right| \leqslant q^{-1} N^{-1} \ln^u N. \tag{7.15}$$

Если для $\xi \in M'_2$ выполнено (7.15), то должно быть $0 < a/q < 1$, так как для каждого $\xi \in M'_2$ имеет место неравенство $1/\tau < \xi < 1 - 1/\tau$ (потому что $J'_{01} = [-1/\tau, 1/\tau]$) и, кроме того, $q^{-1} N^{-1} \ln^u N \leqslant N^{-1} \ln^u N \leqslant N^{-1} \ln^t N = 1/\tau$. Если выполняется (7.15), то для $\xi \in M'_2$, кроме того, должно выполняться соотношение $\ln^u N < q \leqslant N \ln^{-u} N$, так как в противном случае ввиду неравенства $t \geqslant u$ было бы $\xi \in J'_{aq} \subset M'_1$. Следовательно, для каждого $\xi \in M'_2$ существует такое a/q, что

$$\left| \xi - \frac{a}{q} \right| \leqslant q^{-1} N^{-1} \ln^u N \leqslant q^{-2}, \qquad \ln^u N < q \leqslant N \ln^{-u} N, \quad 0 < a < q, \quad (a, q) = 1. \tag{7.16}$$

Так как $S_N(\xi)$ и $\tilde{S}_N(q,\ \xi-a/q)$ — периодические функции с периодом единица, то

$$Q(N)=\int\limits_{-1/\tau}^{1-1/\tau}\left|S_N^2(\xi)-\sum_q{}'\sum_a\tilde{S}_N^2(q,\ \xi-a/q)\right|^2 d\xi=$$
$$=\int\limits_{M_1'}+\int\limits_{M_2'}=Q_1(N)+Q_2(N). \quad (7.17)$$

Далее получаем

$$Q_1(N)=\int\limits_{M_1'}\left|S_N^2(\xi)-\sum_q{}'\sum_a\tilde{S}_N^2\left(q,\ \xi-\frac{a}{q}\right)\right|^2 d\xi=$$
$$=\sum_q{}'\sum_a\int\limits_{J_{aq}'}\left|S_N^2(\xi)-\tilde{S}_N^2\left(q,\ \xi-\frac{a}{q}\right)-\sum_{\bar{q},\ \bar{a}\neq q,\ a}{}'\sum\tilde{S}_N^2\left(\bar{q},\ \xi-\frac{\bar{a}}{\bar{q}}\right)\right|^2 d\xi,$$

где $\sum\limits_{\bar{q},\ \bar{a}\neq q,\ a}{}'\sum$ обозначает суммирование по $\bar{a}$ и $\bar{q}$, удовлетворяющим условиям $1\leqslant\bar{q}\leqslant\ln^u N$, $0\leqslant\bar{a}<\bar{q}$, $(\bar{a},\ \bar{q})=1$, $\bar{a}/\bar{q}\neq a/q$. Из неравенства $|A-B|^2\leqslant 2(|A|^2+|B|^2)$, которое справедливо для всех A и B, следует

$$Q_1(N)\ll\sum_q{}'\sum_a\int\limits_{J_{aq}'}\left|S_N^2(\xi)-\tilde{S}_N^2\left(q,\ \xi-\frac{a}{q}\right)\right|^2 d\xi+$$
$$+\sum_q{}'\sum_a\int\limits_{J_{aq}'}\left|\sum_{\bar{q},\ \bar{a}\neq q,\ a}{}'\sum\tilde{S}_N^2\left(\bar{q},\ \xi-\frac{\bar{a}}{\bar{q}}\right)\right|^2 d\xi=Q_1'(N)+Q_1''(N) \quad (7.18)$$

при $N\to\infty$. $Q_2(N)$ при $N\to\infty$ можно оценить так:

$$Q_2(N)=\int\limits_{M_2'}\left|S_N^2(\xi)-\sum_q{}'\sum_a\tilde{S}_N^2\left(q,\ \xi-\frac{a}{q}\right)\right|^2 d\xi\ll$$
$$\ll\int\limits_{M_2'}|S_N(\xi)|^4 d\xi+\int\limits_{M_2'}\left|\sum_q{}'\sum_a\tilde{S}_N^2\left(q,\ \xi-\frac{a}{q}\right)\right|^2 d\xi=Q_2'(N)+Q_2''(N).$$
$$(7.19)$$

Теперь займемся последовательно оценкой всех Q_1', ..., Q_2''.

Лемма 7.6. *Величина Q_1', определенная в (7.18), при $N\to\infty$ удовлетворяет соотношению*

$$Q_1'(N)\ll N^3e^{-c\sqrt{\ln N}}. \quad (7.20)$$

Поскольку $|\tilde{S}_N| \ll N$, в силу теоремы 3.3 для $\xi \in J'_{aq}$

$$S_N^2(\xi) = \tilde{S}_N^2\left(q, \xi - \frac{a}{q}\right) + O\left(N^2 e^{-c\sqrt{\ln N}}\right).$$

Если теперь положим $\delta = 1/\tau = N^{-1} \ln^t N$, то ввиду того, что

$$\sum_q{}' \sum_a 1 \ll \ln^{2u} N, \tag{7.21}$$

получим соотношение

$$Q'_1(N) \ll \sum_q{}' \sum_a \delta\left(N^2 e^{-c\sqrt{\ln N}}\right)^2 \ll N^3 e^{-c\sqrt{\ln N}},$$

причем константы могут зависеть от u и t.

Лемма 7.7 *Для величины Q''_1, определенной формулой* (7.18), *имеет место оценка*

$$Q''_1(N) \ll N^3 (\ln N)^{-3t+4u} \quad (N \to \infty). \tag{7.22}$$

Применим неравенство Шварца

$$\left|\sum_{\bar{q},\ \bar{a} \neq q,\ a}{}' \sum \tilde{S}_N^2\left(\bar{q}, \xi - \frac{\bar{a}}{\bar{q}}\right)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{\bar{q},\ \bar{a} \neq q,\ a} \sum 1\right) \sum_{\bar{q},\ \bar{a} \neq q,\ a}{}' \sum \left|\tilde{S}_N\left(\bar{q}, \xi - \frac{\bar{a}}{\bar{q}}\right)\right|^4. \tag{7.23}$$

Для $\xi \in J'_{aq}$ и $\bar{a}/\bar{q} \neq a/q$ имеем $|\xi - \bar{a}/\bar{q}| > \delta = 1/\tau$, так как интервалы J'_{aq} не пересекаются. Поэтому из леммы 5.1 следует, что

$$\tilde{S}_N\left(\bar{q}, \xi - \frac{\bar{a}}{\bar{q}}\right) \ll q^{-1+\varepsilon} \delta^{-1} \quad \left(\xi \in J'_{aq},\ \bar{a}/\bar{q} \neq a/q\right).$$

Подставляя это в (7.23) и принимая во внимание (7.21) и определение $Q''_1(N)$, получаем [1])

$$Q''_1(N) \ll \sum_q{}' \sum_a \delta \ln^{2u} N \cdot \ln^{2u} N \cdot \left(q^{-1+\varepsilon} \delta^{-1}\right)^4.$$

Отсюда при достаточно малом ε, поскольку

$$\sum_q{}' \sum_a q^{-4+4\varepsilon} < \sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q)\, q^{-4+4\varepsilon} < \infty,$$

следует утверждение леммы.

---

[1]) $\sum_{\bar{q}}{}' \sum_{\bar{a}} \ll \ln^{2u} N$. Каждая из сумм в (7.23) оценивается через $\ln^{2u} N$, а суммы из (7.18) сохраняются.

Лемма 7.8. *Для величины Q_2', определенной формулой* (7.19), *имеет место оценка*

$$Q_2'(N) \ll N^3 (\ln N)^{-(u-8)} \quad (N \to \infty). \tag{7.24}$$

Доказательство. Для каждого $\xi \in M_2'$ существует некоторая дробь a/q, удовлетворяющая (7.16). Следовательно, применима теорема 6.1. Для $\ln^u N < q \leqslant N \ln^{-u} N$ это дает

$$S_N(\xi) \ll N (\ln N)^{-\frac{1}{2}(u-9)} \quad (\xi \in M_2').$$

Отсюда следует неравенство

$$Q_2'(N) = \int\limits_{M_2'} |S_N(\xi)|^4 \, d\xi \ll N^2 (\ln N)^{-(u-9)} \int\limits_0^1 |S_N(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Так как последний интеграл равен $\pi(N)$, получаем (7.24).

Лемма 7.9. *Для величины Q_2'', определенной в* (7.19), *имеет место оценка*

$$Q_2''(N) \ll N^3 (\ln N)^{-3t+2u} \quad (N \to \infty). \tag{7.25}$$

Доказательство. При $\xi \in M_2'$ для всех a и q, удовлетворяющих условию $1 \leqslant q \leqslant \ln^u N$, $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$, имеем $|\xi - a/q| > \delta = N^{-1} \ln^t N$. Так же как при доказательстве леммы (7.7), находим

$$\int\limits_{M_2'} \left| \sum_q{}' \sum_a \widetilde{S}_N^2 \left(q, \xi - \frac{a}{q}\right) \right|^2 d\xi \ll$$

$$\ll \int\limits_{M_2'} \left(\sum_q{}' \sum_a \cdot 1 \right) \sum_q{}' \sum_a \left| \widetilde{S}_N \left(q, \xi - \frac{a}{q}\right) \right|^4 d\xi \ll$$

$$\ll \ln^{2u} N \sum_q{}' \sum_a q^{-4(1-\varepsilon)} \int\limits_\delta^{\frac{1}{2}} \beta^{-4} \, d\beta \ll \delta^{-3} \ln^{2u} N = N^3 (\ln N)^{-3t+2u}.$$

Доказательство теоремы 7.1. Положим в наших рассуждениях $t = 5u/3$. Тогда из формул (7.17) — (7.19), а также (7.22) — (7.25) следует

$$Q(N) \ll Q_1'(N) + Q_1''(N) + Q_2'(N) + Q_2''(N) \ll N^3 (\ln N)^{-(u-8)}.$$

Подставляя это в (7.13) и полагая $u = 3b + 12$, получаем

$$R'(N) \ll N \left\{ (\ln N)^{-\frac{1}{3}(u-8)+\frac{4}{3}} + \ln^{-b} N \right\} \ll N \ln^{-b} N.$$

При $n \leqslant N$ величина $r'(n)$ есть число представлений n в виде суммы двух простых чисел. Для четного $n > 4$ оба простых числа должны быть нечетными. Так как b было произвольным, теорема 7.1 тем самым доказана.

Изложенный в этой главе метод имел много других применений. Так например, И. М. Виноградов [4] показал, что

$$\sum_{p \leqslant N} e(p^k \xi) \ll N \ln^{-A} N, \quad k \geqslant 1,$$

для $\xi \in M_2$ (при некотором определении $M_2 = M_2(A)$ и сколь угодно большом A), и сделал возможным решение аддитивных проблем, в которых вместо простых чисел появляются степени простых чисел. См. монографию Хуа [1].

Задачи к главе VI

1. Докажите соотношение

$$\int\limits_{M_2} |S_N(\xi)|^2 d\xi \sim N/\ln N,$$

в котором M_2 обозначает подмножество $[-1/\tau,\ 1-1/\tau)$, введенное в § 4. Из этого соотношения следует, что существует такое $\xi \in M_2$, что

$$|S_N(\xi)| > cN^{\frac{1}{2}} \Big/ \ln^{\frac{1}{2}} N.$$

2. Пусть $f(N)$ — число решений уравнения

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

с простыми числами $p_1, p_2, p_3, p_4 \leqslant N$. Докажите, что

$$f(N) \sim c(N) N^3/\ln^4 N,$$

где $c(N) > c > 0$ для достаточно большого N.

3. Найдите асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = N \quad (m > 3).$$

4. Выведите асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p'_m \leqslant N$, аналогичную формуле задачи 2.

5. Докажите, что почти все четные числа могут быть представлены в виде разности двух нечетных простых чисел.

6. Докажите, что каждое достаточно большое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех неравных простых чисел и что почти все четные числа могут быть представлены в виде суммы двух неравных простых чисел. (См. Рихерт [1].)

Глава VII

ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА L-ФУНКЦИЙ. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Функциональное уравнение

Рассмотрим целое число $k \geqslant 1$, характер χ по $\operatorname{mod} k$ и соответствующую L-функцию $L(s, \chi)$. В гл. IV было показано, что функции $L(s, \chi)$ аналитически продолжаются на область $\sigma > 0$ и регулярны там, за исключением функции $L(s, \chi_0)$, которая имеет при $s = 1$ простой полюс с вычетом $\varphi(k)/k$. Покажем, что $L(s, \chi)$ продолжаются на всю плоскость и удовлетворяют там некоторому функциональному уравнению. Будем употреблять обозначения гл. IV. Если χ_0^*, так же как в гл. IV, — единственный характер по $\operatorname{mod} 1$, то $\zeta(s) = L\left(s, \chi_0^*\right)$, и в этом частном случае мы получаем функциональное уравнение для ζ-функции.

Теорема 1.1. *Пусть χ — примитивный характер по* $\operatorname{mod} k$. *Положим*[1])

$$a = a(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \chi(-1) = 1, \\ 1 & \text{при} \quad \chi(-1) = -1, \end{cases} \tag{1.1}$$

т. е. $a = \frac{1}{2}(1 - \chi(-1))$. *Тогда $L(s, \chi)$ регулярна по всей плоскости, за исключением случая $k = 1$, $\chi = \chi_0^*$. В этом случае $L\left(s, \chi_0^*\right) = \zeta(s)$ имеет при $s = 1$ простой полюс с вычетом* 1. *Для всех* χ

$$L(1 - s, \overline{\chi}) = \varepsilon_\chi 2 (2\pi)^{-s} k^{s - \frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}(s - a)\pi \cdot \Gamma(s) L(s, \chi), \tag{1.2}$$

причем ε_χ обозначает константу с $|\varepsilon_\chi| = 1$, зависящую только от χ. Функция

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+a)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(s + a)\right) L(s, \chi), \tag{1.3}$$

удовлетворяет уравнению

$$\xi(1 - s, \overline{\chi}) = \varepsilon_\chi \xi(s, \chi) \tag{1.4}$$

---

[1]) Так как $\{\chi(-1)\}^2 = \chi((-1)^2) = \chi(1) = 1$, то $\chi(-1) = \pm 1$ для любого χ. Поэтому теперь мы считаем характеры определенными для всех целых чисел (гл. IV, § 2).

и является целой функцией, кроме случая $k=1$, $\chi=\chi_0^*$, *когда она при* $s=1$ *и* $s=0$ *имеет простой полюс. Если в этом случае положить*

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\xi(s, \chi_0^*)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s), \tag{1.5}$$

то имеет место равенство

$$\xi(s)=\xi(1-s) \tag{1.6}$$

и $\xi(s)$ — *целая функция.*

Для доказательства теоремы 1.1 мы используем формулу, следующую из (П.6.1),

$$\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-un}u^{s-1}\,du \quad (\sigma>0).$$

При $\sigma>1$ имеем

$$\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}=\sum_n \frac{\chi(n)}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-un}u^{s-1}\,du=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \sum_n \{\chi(n)e^{-un}u^{s-1}\}\,du. \tag{1.7}$$

Перемена местами суммирования и интегрирования здесь возможна. Действительно, $e^{-un}<e^{-n\delta}$ при $u>\delta$, и ряд под знаком интеграла в (1.7) сходится равномерно в области $0<\delta<u<\omega$ ($\sigma>1$ — постоянное). Отсюда следует, что

$$\sum_n \int_\delta^\omega \chi(n)e^{-un}u^{s-1}\,du=\int_\delta^\omega \sum_n \chi(n)e^{-un}u^{s-1}\,du,$$

где ряд в левой части сходится равномерно по δ и ω в области $0<\delta<\omega<\infty$, так как

$$\left|\sum_{M<n\leqslant N}\chi(n)\int_\delta^\omega e^{-nu}u^{s-1}\,du\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{M<n\leqslant N}\int_0^\infty e^{-nu}u^{\sigma-1}\,du=\Gamma(\sigma)\sum_{M<n\leqslant N}n^{-\sigma}.$$

Если $u=0$, то при $\sigma>1$ имеем $\sum\limits_n \chi(n)e^{-nu}u^{s-1}=0$ и из (1.7) следует, что

$$L(s, \chi)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty F(u)u^{s-1}\,du, \tag{1.8}$$

где при $u > 0$ функция $F(u)$ определяется равенством

$$F(u) = \sum_n \chi(n) e^{-nu}.$$

Будем считать теперь u комплексной переменной и вместо интегрирования по положительной действительной оси будем интегрировать по пути $C = C_1 + C_2 + C_3$, где C_1 — прямолинейный кусок от ∞ до произвольного положительного числа δ, C_2 — круг $|u| = \delta$, пробегаемый в положительном направлении, и C_3 — прямолинейный кусок (δ, ∞). На C_1

$$u^{s-1} = e^{(s-1)\ln u},$$

причем $\ln u$ принимает действительные значения. После обхода C_2 значение $F(u)$ не изменяется, а u^{s-1} приобретает сомножитель $e^{2\pi i(s-1)} = e^{2\pi i s}$. При $u > 0$ имеет место равенство

$$F(u) = \sum_n \chi(n) e^{-nu} = \sum_{0 < l \leqslant k} \chi(l) \sum_{n \equiv l \, (\mathrm{mod}\, k)} e^{-nu} =$$
$$= \sum_{0 < l \leqslant k} \chi(l) \frac{e^{-lu}}{1 - e^{-ku}}, \tag{1.9}$$

и с помощью аналитического продолжения получаем, что это равенство верно также для любого u. Следовательно, $F(u)$ имеет особенности самое большее в точках $u = 0$ и $u = 2\pi i m/k$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Выберем теперь δ настолько малым, чтобы последние названные точки лежали вне C_2, и положим $(C = C_1 + C_2 + C_3)$

$$J(s) = J_C(s) = \int_C F(u) u^{s-1} \, du. \tag{1.10}$$

Этот интеграл равномерно сходится не только при $\sigma > 1$, но и в каждой ограниченной области плоскости переменной s. Так как на C нет особенностей $F(u)$, и для действительного $u > 0$

$$|F(u)| \leqslant \sum_n e^{-nu} \sim e^{-u} \quad (u \to \infty), \tag{1.11}$$

то функция $J(s)$ регулярна во всей плоскости и, следовательно, является целой функцией. Чтобы восстановить связь между $J(s)$ и $L(s, \chi)$, предположим сначала, что $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Согласно (1.9), в окрестности точки $u = 0$

$$F(u) = \sum_{0 < l \leqslant k} \chi(l) e^{(k-l)u} (e^{ku} - 1)^{-1} = E_0 \frac{\varphi(k)}{ku} + O(1) \quad (u \to 0), \tag{1.12}$$

где E_0 определено так же, как в (4.5.11), а константы в $O(\quad)$ могут зависеть от k. Таким образом, $F(u)=O(1/u)$ $(u\to 0)$ и

$$\left|\int\limits_{C_2} F(u)\, u^{s-1}\, du\right| \leqslant 2\pi\delta \frac{c}{\delta}\delta^{\sigma-1}\to 0$$

при $\delta\to 0$ $(\sigma>1)$. Отсюда при $\sigma>1$ получаем

$$J(s)=\int\limits_{\infty}^{0} F(u)\, u^{s-1}\, du+\int\limits_{0}^{\infty} F(u)\, e^{2\pi i s}u^{s-1}\, du=$$

$$=(e^{2\pi i s}-1)\int\limits_{0}^{\infty} F(u)\, u^{s-1}\, du.$$

Согласно (1.8), из этой формулы следует, что

$$L(s,\ \chi)=\frac{J(s)}{(e^{2\pi i s}-1)\,\Gamma(s)}\qquad(\sigma>1). \tag{1.13}$$

Так как функция $J(s)$ регулярна во всей плоскости, то формула (1.13) показывает, что $L(s,\chi)$ можно аналитически продолжить на всю плоскость. Из (1.13) следует также, что $L(s,\chi)$ может иметь особенности только в нулях функции $(e^{2\pi i s}-1)\,\Gamma(s)$. Множитель $(e^{2\pi i s}-1)$ обращается в 0 при $s=0,\ \pm 1,\ \ldots;$ $\Gamma(s)$ в нуль не обращается, так как $1/\Gamma(s)$ — целая функция. Из гл. IV известно, что $s=1,2,\ldots$ — регулярные точки $L(s,\chi)$, кроме $s=1$ при $\chi=\chi_0^*$ (характер χ предполагался примитивным). При $s=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ функция $(e^{2\pi i s}-1)\times\Gamma(s)\neq 0$, так как нули первого сомножителя совпадают с полюсами $\Gamma(s)$. Поэтому $L(s,\chi)$ для любого примитивного $\chi\neq\chi_0^*$ регулярна во всей плоскости и $\zeta(s)=L(s,\chi_0^*)$ регулярна во всей плоскости, кроме простого полюса при $s=1$.

Теперь можно оценить $J(s)$ с помощью подходящего выбора C еще другим способом. Положим $R=2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)\Big/k$, где $N\geqslant 1$ — целое, и обозначим через $C'=C'(R)$ путь $C'=C_1'+C_2+C_3'+C_4'$, а отдельные пути определены так: $C_1'=(R,\ \delta)$, C_2 — так же, как выше, $C_3'=(\delta,\ R)$, C_4' — квадрат с вершинами $\pm R\pm iR$, пробегаемый в отрицательном направлении. Покажем, что $F(u)$ на C_4' остается меньше некоторой константы K, не зависящей от N. Согласно (1.12), $F(u)$ равна сумме членов

$$\chi(l)\,\frac{e^{(k-l)\,u}}{e^{ku}-1},$$

и так как $Rk = 2\pi\left(N + \frac{1}{2}\right)$, то, например, при $u = \alpha + iR$, $-R < \alpha < R$, имеет место равенство

$$\left| \frac{e^{(k-l)\,u}}{e^{ku} - 1} \right| = \frac{e^{(k-l)\,\alpha}}{e^{k\alpha} + 1}.$$

Это выражение остается ограниченным, так как $k > k - l \geqslant 0$.

Аналогично доказывается ограниченность $F(u)$ и для остальных частей C_4'.

Пусть теперь $\sigma = \operatorname{Re} s < 0$. Имеем

$$|u^{s-1}| = |\exp\{(s-1)(\ln|u| + i\arg u)\}| =$$
$$= \exp\{(\sigma - 1)\ln|u| - t\arg u\} \qquad (s = \sigma + it).$$

Если $u \in C_4'$, то $0 \leqslant \arg u \leqslant 2\pi$, $|u| \geqslant R$; следовательно, $|u^{s-1}| < cR^{\sigma-1}$, $c = c(s)$. Отсюда следует, что

$$\left| \int\limits_{C_4'} F(u)\, u^{s-1}\, du \right| < 8R \cdot K \cdot cR^{\sigma-1} = O\left(R^{\sigma}\right) \quad (N \to \infty),$$

причем константы могут зависеть от k и s. Поэтому при $\sigma < 0$

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C'(R)} F(u)\, u^{s-1}\, du = \int\limits_{C} F(u)\, u^{s-1}\, du = J(s). \tag{1.14}$$

Но, с другой стороны,

$$\int\limits_{C'} F(u)\, u^{s-1}\, du = -2\pi i \sum \operatorname{Res}\{F(u)\, u^{s-1}\},$$

где суммирование распространяется на вычеты в особых точках, лежащих внутри C'. Внутри C' u^{s-1} определяется как $\exp\{(s-1)\ln u\}$, где $\ln u$ — продолжение внутрь C' (т. е. без пересечения действительной положительной оси) ветви логарифма, действительной на C_1'. Внутри C' полюсы $F(u)$ находятся самое большее в точках $u = 2\pi i m/k$, $m = \pm 1, \ldots, \pm N$. Следовательно, принимая во внимание (1.9), из написанного выше выражения получим[1])

$$\int_{C'} F(u)\,u^{s-1}\,du =$$

$$= -2\pi i \left\{ \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{2\pi m}{k}\right)^{s-1} e^{\frac{1}{2}(s-1)\pi i} \sum_{l \bmod k} \chi(l)\,k^{-1} e\left((k-l)\frac{m}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{2\pi m}{k}\right)^{s-1} e^{\frac{3}{2}(s-1)\pi i} \sum_{l \bmod k} \chi(l)\,k^{-1} e\left(-(k-l)\frac{m}{k}\right) \right\} =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{s} e^{s\pi i} \sum_{m=1}^{N} m^{s-1} \left\{ e^{\frac{1}{2}s\pi i} \sum_{l \bmod k} \chi(l)\,e\left(\frac{m}{k}\,l\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{1}{2}s\pi i} \sum_{l \bmod k} \chi(l)\,e\left(-\frac{m}{k}\,l\right) \right\}, \qquad (1.15)$$

где (так же как в гл. VI) $e(\xi) = e^{2\pi i \xi}$. Положим теперь

$$S_{k,m} = S_{k,m}(\chi) = \sum_{l \bmod k} \chi(l)\,e\left(\frac{m}{k}\,l\right), \qquad (1.16)$$

и будем различать два случая: 1) $\chi(-1) = 1$ и 2) $\chi(-1) = -1$.

В первом случае $\chi(l) = \chi(-1)\,\chi(-l) = \chi(-l)$ и

$$\sum_{l \bmod k} \chi(l)\,e\left(-\frac{m}{k}\,l\right) = \sum_{l \bmod k} \chi(-l)\,e\left(-\frac{m}{k}\,l\right) =$$

$$= \sum_{l \bmod k} \chi(l)\,e\left(\frac{m}{k}\,l\right) = S_{k,m},$$

так как l вместе с $-l$ пробегает полную систему вычетов по $\bmod k$.

Во втором случае $\chi(l) = -\chi(-l)$, и также получаем

$$\sum_{l \bmod k} \chi(l)\,e\left(-\frac{m}{k}\,l\right) = -S_{k,m}.$$

Таким образом, в обоих случаях

$$\int_{C'} F(u)\,u^{s-1}\,du = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{s} e^{s\pi i} \left\{ \begin{matrix} 2i \sin \frac{1}{2}\,s\pi \\ 2\cos \frac{1}{2}\,s\pi \end{matrix} \right\} \sum_{m=1}^{N} S_{k,m}\,m^{s-1}. \qquad (1.17)$$

Для вычисления $S_{k,m}$ нам потребуется следующая лемма.

---

[1]) Заметим, что, согласно сделанному замечанию, внутри C' нужно положить $(2\pi i m/k)$ равным $\frac{1}{2}\pi$ или $\frac{3}{2}\pi$, смотря по тому, $m > 0$ или < 0.

Лемма 1.1. *Пусть* χ — *примитивный характер по* $\bmod k$, $k \geqslant 1$. *Тогда для* $S_{k,m}$ *из* (1.16) *следует, что*

$$S_{k,m} = 0 \quad \textit{при} \quad (m, k) > 1. \tag{1.18}$$

Если $(m, k) = 1$, *то* $S_{k,m} \neq 0$, *точнее*

$$S_{k,m} = \bar{\chi}(m) S_{k,1}, \quad |S_{k,1}| = k^{\frac{1}{2}} \quad \textit{для} \quad (m, k) = 1. \tag{1.19}$$

Доказательство. Пусть сначала

$$(m, k) = d > 1, \quad m = m_1 d, \quad k = k_1 d, \quad (m_1, k_1) = 1,$$

следовательно, в частности, $k > 1$. Тогда

$$S_{k,m} = \sum_{0 < l \leqslant k} \chi(l) e\left(\frac{m_1}{k_1} l\right) = \sum_{0 < l_1 \leqslant k_1} e\left(\frac{m_1}{k_1} l_1\right) \sum_{0 < l \leqslant k,\ l \equiv l_1 \pmod{k_1}} \chi(l). \tag{1.20}$$

Покажем теперь, что если χ — примитивный характер по $\bmod k$, то

$$\sum\nolimits_{l_1} = \sum_{0 < l \leqslant k,\ l \equiv l_1 \pmod{k}} \chi(l) = 0.$$

Очевидно, достаточно рассмотреть $(l_1, k_1) = 1$. Так как χ — примитивный характер по $\bmod k$, то существует r, такое, что $r < k$, $(r, k) = 1$, $r \equiv 1 \pmod{k_1}$ и $\chi(r) \neq 1$. Затем, если l пробегает точно по одному разу все вычеты по $\bmod k$, причем $l \equiv l_1 \pmod{k_1}$, то rl также пробегает эти вычеты и каждый вычет ровно один раз, так как $(r, k) = 1$ и из $rl' \equiv rl'' \pmod{k}$ следует $l' \equiv l'' \pmod{k}$. Отсюда и из $\chi(rl) = \chi(r)\chi(l)$ можно заключить, что

$$\sum\nolimits_{l_1} = \sum_{0 < l \leqslant k,\ l \equiv l_1 \pmod{k_1}} \chi(lr) = \chi(r) \sum\nolimits_{l_1}.$$

Так как $\chi(r) \neq 1$, то $\sum_{l_1} = 0$, а отсюда и из (1.20) следует (1.18).

Пусть теперь $(m, k) = 1$. Тогда ml вместе с l пробегает все вычеты по $\bmod k$ точно по одному разу и

$$\chi(l) = \chi(ml)\chi^{-1}(m) = \chi(ml)\bar{\chi}(m).$$

Следовательно,

$$S_{k,m} = \bar{\chi}(m) \sum_{0 < l \leqslant k} \chi(ml) e\left(\frac{ml}{k}\right) =$$
$$= \bar{\chi}(m) \sum_{l \bmod k} \chi(l) e\left(\frac{l}{k}\right) = \bar{\chi}(m) S_{k,1}. \tag{1.21}$$

Так как (1.18) уже доказано и $\overline{\chi}(m)=0$ при $(m, k)>1$, то (1.21) имеет место также при $(m, k)>1$. Отсюда следует, что

$$\sum_{m=1}^{k} |S_{k,m}|^2 = |S_{k,1}|^2 \sum_{m=1}^{k} \chi(m)\overline{\chi}(m) = \varphi(k)|S_{k,1}|^2.$$

С другой стороны, по определению $S_{k,m}$

$$\sum_{m=1}^{k} S_{k,m}\overline{S}_{k,m} = \sum_{m=1}^{k} \sum_{l\leqslant k} \sum_{l'\leqslant k} \chi(l)\overline{\chi}(l')\, e\left(\frac{m}{k}(l-l')\right) =$$

$$= \sum_{l\leqslant k} \sum_{l'\leqslant k} \chi(l)\overline{\chi}(l') \sum_{m=1}^{k} e\left(\frac{m}{k}(l-l')\right) = k\varphi(k),$$

так как

$$\sum_{m=1}^{k} e\left(\frac{m}{k}(l-l')\right) = \begin{cases} 0, & l-l' \not\equiv 0 \pmod k, \\ k, & l-l' \equiv 0 \pmod k. \end{cases}$$

Сравнивая две последние формулы, получаем $|S_{k,1}| = k^{\frac{1}{2}}$, и принимая во внимание (1.21), получаем (1.19). Лемма 1.1 полностью доказана.

Доведем теперь до конца доказательство теоремы 1.1. Устремим в (1.17) N к ∞. Так как предполагалось, что $\sigma = \operatorname{Re} s$ меньше нуля, то ряд в правой части (1.17) сходится. Из (1.17), (1.14) и леммы 1.1 при $N\to\infty$ (а следовательно, при $R\to\infty$) в случаях $\chi(-1)=1$ и $\chi(-1)=-1$ следует соответственно

$$J(s) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^s e^{s\pi i} \left\{\begin{matrix} 2i\sin\frac{1}{2}s\pi \\ 2\cos\frac{1}{2}s\pi \end{matrix}\right\} S_{k,1} L(1-s, \overline{\chi}) =$$

$$= \theta_\chi 2^{s+1}\pi^s k^{-s+\frac{1}{2}} e^{s\pi i} \left\{\begin{matrix} \sin\frac{1}{2}s\pi \\ \cos\frac{1}{2}s\pi \end{matrix}\right\} L(1-s, \overline{\chi}). \qquad (1.22)$$

Мы можем утверждать, что $|\theta_\chi|=1$ сначала при $\sigma<0$, а после аналитического продолжения и для всех s. Отсюда и из (1.13) получается при $\chi(-1)=1$

$$L(1-s, \overline{\chi}) = \varepsilon_\chi 2(2\pi)^{-s} k^{s-\frac{1}{2}} \cos\frac{1}{2}s\pi\cdot\Gamma(s)L(s, \chi), \qquad (1.23)$$

и при $\chi(-1)=-1$

$$L(1-s, \overline{\chi}) = \varepsilon_\chi 2(2\pi)^{-s} k^{s-\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{2}s\pi\cdot\Gamma(s)L(s, \chi), \qquad (1.24)$$

где $|\varepsilon_\chi| = 1$. Обе формулы вместе дают (1.2). В частности, при $k = 1$, $\chi = \chi_0^*$ получаем

$$\zeta(1-s) = \varepsilon_{\chi_0^*} 2 (2\pi)^{-s} \cos \frac{1}{2} \pi s \cdot \Gamma(s) \zeta(s). \tag{1.25}$$

При $s = \frac{1}{2}$ отсюда следует

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \varepsilon_{\chi_0^*} 2 (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2}\right),$$

и так как $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$, а $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ (см. гл. IV, § 7), то $\varepsilon_{\chi_0^*} = 1$. (Это следует также непосредственно из $S_{1,m} = 1$.) Применяя (П.6.4), (П.6.3) и заменяя в (1.23) $\Gamma(s)$ на $\pi^{-\frac{1}{2}} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} s + \frac{1}{2}\right)$, получим

$$L(1-s, \bar\chi) = \varepsilon_\chi \pi^{-s-\frac{1}{2}} k^{s-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} (s+1) \pi \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} s + \frac{1}{2}\right) L(s, \chi) =$$
$$= \varepsilon_\chi \pi^{-s+\frac{1}{2}} k^{s-\frac{1}{2}} \left\{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} s\right)\right\}^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) L(s, \chi).$$

Следовательно, при $\chi(-1) = 1$ имеет место равенство

$$\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(1-s)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right) L(1-s, \bar\chi) = \varepsilon_\chi \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2} s} \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) L(s, \chi), \tag{1.26}$$

и если $\chi(-1) = 1$, $a = 0$, получаем (1.4). Аналогично в случае $\chi(-1) = -1$ из (1.24) получаем

$$L(1-s, \bar\chi) = \varepsilon_\chi \pi^{-s-\frac{1}{2}} k^{s-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} s\pi \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} s + \frac{1}{2}\right) L(s, \chi) =$$
$$= \varepsilon_\chi \pi^{-s+\frac{1}{2}} k^{s-\frac{1}{2}} \left\{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2} s\right)\right\}^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} s + \frac{1}{2}\right) L(s, \chi).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{k}{\pi}\right)^{1-\frac{1}{2} s} \Gamma\left(1 - \frac{1}{2} s\right) L(1-s, \bar\chi) = \varepsilon_\chi \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)\right) L(s, \chi), \tag{1.27}$$

а это и есть формула (1.4) для случая $\chi(-1) = -1$, $a = 1$.

Точки s и $1-s$ лежат симметрично относительно точки $s = \frac{1}{2}$. Так как $\xi(1-s, \bar\chi) = \varepsilon_\chi \xi(s, \chi)$, то для того, чтобы показать, что при $\chi \neq \chi_0^*$ функция $\xi(s, \chi)$, определенная с помощью (1.3), является целой функцией, достаточно показать, что при $\chi \neq \chi_0^*$ функция $\xi(s, \chi)$

регулярна в полуплоскости $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$. Но это следует из (1.3), поскольку $L(s, \chi)$ и $\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a)\right)$ там регулярны при $\chi \neq \chi_0^*$. Так как $\varepsilon_{\chi_0^*} = 1$, то при $k=1$, $a=0$, $\chi=\chi_0^*$, будет $\xi\left(1-s, \chi_0^*\right)=\xi\left(s, \chi_0^*\right)$. Так же как и выше, отсюда и из (1.3) следует, что функция $\xi\left(s, \chi_0^*\right)$ в точках $s=1$ и $s=0$ имеет полюсы первого порядка и всюду, кроме этих точек, регулярна, потому что $L\left(s, \chi_0^*\right)=\zeta(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ везде, кроме полюса первого порядка при $s=1$. Вычет при $s=1$ равен $\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1$, а при $s=0$ равен -1. Поэтому функция

$$\xi(s)=\frac{1}{2} s(s-1) \xi\left(s, \chi_0^*\right)=\frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{1}{2} s} \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) \zeta(s) \tag{1.28}$$

является целой, удовлетворяет равенству 1.6. Кроме того, $\xi(0)= =\xi(1)=\frac{1}{2}$, так как $\lim\limits_{s \to 1}(s-1) \zeta(s)=1$. Теперь теорема 1.1 полностью доказана.

Можно явно вычислить ε_χ (см., например, Чудаков [2]), однако нам это впоследствии не понадобится. Приведенный метод доказательства принадлежит Риману [1], который естественно рассматривал только случай ζ-функции. Другие методы вывода функционального уравнения см. Титчмарш [3].

Теорема 1.2. *Пусть χ — примитивный характер. Тогда $\xi(s, \chi) \neq 0$ в областях $\sigma \geqslant 1$ и $\sigma \leqslant 0$. При $\chi \neq \chi_0^*$ функция $L(s, \chi)$ имеет нули в области $\sigma \leqslant 0$ только в точках $s=-a$, $-a-2, \ldots$. При $\chi(-1)=1$ это нули в точках $s=0, -2, \ldots$, а при $\chi(-1)=-1$ — в точках $s=-1, -3, \ldots$. Функция $L\left(s, \chi_0^*\right)=\zeta(s)$ в области $\sigma \leqslant 0$ имеет нули только при $s=-2$, $-4, \ldots$.*

Мы уже доказали в гл. IV, § 4, что $L(s, \chi) \neq 0$ в области $\sigma \geqslant 1$ для любого χ. Так как $\Gamma(s) \neq 0$, из (1.3) следует, что $\xi(s, \chi)$ также не равно нулю в области $\sigma \geqslant 1$ [1]). Так как χ — примитивный характер, то имеет место равенство (1.4) и отсюда следует, что $\xi(s, \chi) \neq 0$ в области $\sigma \leqslant 0$, которая из области $\sigma \geqslant 1$ получается зеркальным отражением относительно прямой $s=\frac{1}{2}$. Поэтому из равенства (1.3) получаем, что $L(s, \chi)$ может иметь нуль только там, где $\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a)\right)$ имеет полюс, т. е. в точках $s=-a$, $-a-2, \ldots$.

---

[1]) И также $\xi(s, \overline{\chi}) \neq 0$.

Согласно (1.3), при $\chi \neq \chi_0^*$ эти точки действительно являются нулями $L(s, \chi)$, так как $\xi(s, \chi) \neq \infty$ при $\sigma \leqslant 0$. При $\chi = \chi_0^*$ точка $s = 0$ не является нулем функции $L(s, \chi_0^*) = \zeta(s)$, так как $\xi(s, \chi_0^*)$ при $s = 0$ имеет полюс первого порядка, который взаимно уничтожается с нулем $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}$. Согласно (1.28), имеет место равенство

$$\zeta(0) = -2\xi(0)\lim_{s\to 0}\frac{1}{s\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)} = -\xi(0) = -\frac{1}{2}. \tag{1.29}$$

Напротив, в точках $s = -2, -4, \ldots$ функция $\xi(s, \chi_0^*) \neq \infty$; следовательно, это нули $\zeta(s)$ и эти нули — простые. Теорема 1.2 полностью доказана.

Нули, указанные в теореме 1.2, называются „тривиальными нулями“ функции $L(s, \chi)$. Если исключить эти нули из рассмотрения, то все нули $L(s, \chi)$ при примитивном χ лежат в полосе $0 < \sigma < 1$. Функция $\xi(s, \chi)$ может вообще не обращаться в нуль вне области $0 < \sigma < 1$. Из (1.3) следует, что в области $0 < \sigma < 1$ функции $\xi(s, \chi)$ и $L(s, \chi)$, имеют одни и те же нули, если только они там имеются. Достаточно заметить, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a)\right) \neq 0, \infty$ и $(k/\pi)^{\frac{1}{2}(s+a)} \neq 0, \infty$ в области $0 < \sigma < 1$. Полоса $0 < \sigma < 1$ называется критической. Мы докажем, что $\xi(s, \chi)$, а следовательно, и $L(s, \chi)$ имеют там бесконечно много нулей. Для этого используем теорию целых функций конечного порядка (П., § 5).

Рассмотрим непримитивный характер χ, и пусть χ^* — соответствующий примитивный характер. Так как функция $L(s, \chi^*)$ продолжается на всю плоскость, то из (4.6.11) следует, что $L(s, \chi)$ также продолжается на всю плоскость. Заметим только, что в функции

$$L(s, \chi) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

при $\sigma > 1$ всегда $n^{-s} = \exp(-s\ln n)$, $p^{-s} = \exp(-s\ln p)$, причем $\ln n$ и $\ln p$ берутся с действительными значениями, и поэтому функция p^{-s} во всей плоскости однозначна и регулярна. Согласно (4.6.11), $L(s, \chi)$ имеет нули только там, где

$$L(s, \chi^*)\prod_{p\mid k}\left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right) = 0.$$

Это произведение всегда конечно и обращается в 0 в точках, для которых $p^{-s} = \chi^*(p)$ при некотором p, $p \mid k$, $p \nmid k^*$, т. е. в точках $s = -\ln\chi^*(p)/\ln p$. При этом $\ln p$ имеет действительное значение, а $\ln \chi^*(p)$ имеет бесконечно много значений, которые отличаются друг от друга на $2m\pi i$. Так как $|\chi^*(p)| = 1$, то $\operatorname{Re} \ln \chi^*(p) = 0$, и поэтому все нули лежат на мнимой оси в точках

$$i(\arg \chi^*(p) + 2m\pi)/\ln p, \quad m = 0, \pm 1, \ldots,$$

причем значение $\arg \chi^*(p)$ — действительное. Таким образом, нули симметричны относительно действительной оси.

§ 2. Разложение частного $\frac{L'}{L}(s, \chi)$

Пусть χ — примитивный характер. В § 1 мы доказали, что функция $\xi(s, \chi)$, определенная с помощью (1.3), при $\chi \neq \chi_0^*$ — целая и что то же самое верно для функции $\xi(s)$, определенной равенством (1.5). Покажем теперь, что эти функции — целые функции конечного порядка, и определим порядок этих функций (П., § 5).

Теорема 2.1. *Пусть χ — примитивный характер по* $\operatorname{mod} k$, $k \geqslant 1$. *Тогда $\xi(s, \chi)$ при $\chi \neq \chi_0^*$ — целая функция порядка* 1. *Если $\rho = \rho(\chi)$ пробегает нули этой функции*[1]), *то*

$$\sum_\rho |\rho|^{-1} = \infty, \quad \sum_\rho |\rho|^{-\alpha} < \infty \quad (\alpha > 1). \tag{2.1}$$

То же самое верно для функции $\xi(s)$ и ее нулей. В частности, эти функции имеют бесконечно много нулей в области $0 < \sigma < 1$.

Так как $|\xi(1-s, \bar\chi)| = |\xi(s, \bar\chi)|$, то при $\sigma = \operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$ достаточно доказать соотношение

$$\xi(s, \chi) \ll \exp|s|^{1+\varepsilon} \quad \left(|s| \to \infty, \ \sigma \geqslant \frac{1}{2}\right) \tag{2.2}$$

(см. (П.5.2))[2]) и показать, что оно уже не имеет места, если 1 заменить на меньшее число (см. (П.5.3)). Из (4.5.12) следует (даже для любого χ), что

$$L(s, \chi) \ll k^{\frac{1}{2}} |s|^{\frac{1}{2}} \quad (|s| \to \infty), \tag{2.3}$$

где константа в $\ll$ не зависит от k. Используя теорему П.6.1, отсюда при $|s| \to \infty$ получим

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+a)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a)\right) L(s, \chi) \ll$$
$$\ll k^{\frac{1}{2}(|s|+a+1)} \exp\left\{\frac{1}{2}|s| \ln|s| + O(|s|)\right\} \tag{2.4}$$

[1]) Порядок следования при этом безразличен.

[2]) Так же, как в гл. VI, мы заменяем $A = O(B)$ на $A \ll B$, если это удобно.

(где константа опять не зависит от k). Этим соотношение (2.2) доказано. С другой стороны, для действительного $\sigma > 2$

$$|L(\sigma, \chi)| = \left| \sum_n \mu(n) \chi(n) n^{-\sigma} \right|^{-1} \geqslant (1 + 2^{-\sigma} + 3^{-\sigma} + \ldots)^{-1} > \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

и, согласно (П.6.7), при $\sigma \to \infty$ имеет место равенство

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}(\sigma + a)\right) = \exp\left\{\frac{1}{2} \sigma \ln \sigma + O(\sigma)\right\}.$$

Отсюда при достаточно большом σ следует, что

$$|\xi(\sigma, x)| > \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(\sigma + a)} \exp\left\{\frac{1}{2} \sigma \ln \sigma + O(\sigma)\right\}. \tag{2.6}$$

Поэтому (2.2) не выполняется, если 1 заменить на меньшее число. Следовательно, $\xi(s, \chi)$ при $\chi \neq \chi_0^*$ — целая функция порядка 1 и, как это видно из (2.6), ни для какого $c > 0$ не выполняется оценка

$$\xi(s, \chi) \ll \exp(c|s|) \quad (|s| \to \infty).$$

Из теоремы П.5.8 следует, что показатель сходимости последовательности ρ равен 1 и что $\sum |\rho|^{-1}$ расходится. Для $\xi(s)$ имеет место то же, что для $\xi(s, \chi)$, $\chi \neq \chi_0^*$, потому что множитель $\frac{1}{2} s(s-1)$ здесь не играет никакой роли. Так как по теореме 1.2 все нули $\xi(s, \chi)$ и $\xi(s)$ должны лежать в области $0 < \sigma < 1$, то теорема 2.1 доказана.

Другое доказательство того, что, например, $\xi(s)$ имеет бесконечно много нулей, следующее. Так как $\xi(s) = \xi(1-s)$, то $\xi\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{s}\right)$ — однозначная целая функция от s порядка $\frac{1}{2}$. Поэтому, согласно теореме П.5.8, она имеет бесконечно много нулей и показатель сходимости последовательности нулей равен $\frac{1}{2}$.

Из теоремы П.5.8 следует, что для примитивного характера $\chi \neq \chi_0^*$ должно существовать разложение вида

$$\xi(s, \chi) = e^{a_1 s + a_0} \prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \quad (\chi \neq \chi_0^*), \tag{2.7}$$

где $\rho = \rho(\chi)$ опять пробегает все нули $\xi(s, \chi)$. А из § 1 известно, что это нули функции $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$. Отсюда и из (1.3) следует

Теорема 2.2. *Пусть* χ — *примитивный характер по* $\bmod k$ *и* $\chi \neq \chi_0^*$. *Тогда*

$$L(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2}(s+a)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a)\right)^{-1} e^{a_1 s + a_0} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \tag{2.8}$$

причем $\rho = \rho(\chi)$ *пробегает нули* $L(s, \chi)$ *в полосе* $0 < \sigma < 1$. *Далее*

$$\zeta(s) = 2\{s(s-1)\}^{-1} \pi^{\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)^{-1} e^{b_1 s + b_0} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \tag{2.9}$$

где ρ *пробегает все нули* $\zeta(s)$ *в области* $0 < \sigma < 1$. *В* (2.8) *и* (2.9) a_0, a_1, b_0, b_1 — *константы, и в произведении каждый нуль встречается столько раз, какова его кратность; константы* a_0 *и* a_1 *зависят от* χ.

Доказательство 2.9 аналогично доказательству 2.8.

При $s = 0$ получаем $b_0 = -\ln 2$ и можно показать, что $b_1 = \frac{1}{2}\ln 4\pi - 1 - \frac{1}{2}\gamma$ (γ — постоянная Эйлера) [1]), но нам это впоследствии не понадобится. Из-за абсолютной сходимости произведения в (2.9) безразлична последовательность, в которой берутся сомножители, и можно считать ρ, например, упорядоченными по возрастанию абсолютной величины (а при одинаковой абсолютной величине в любой последовательности).

Если продифференцировать логарифм от выражения (2.8) из теоремы 2.2, то получим следующую теорему [2]).

Теорема 2.3. *Для примитивного* $\chi \neq \chi_0^*$ *справедливы равенства*

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{k} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}(s+a)\right) + a_1 + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right), \tag{2.10}$$

и

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}s\right) + b_1 + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right). \tag{2.11}$$

При этом $\rho = \rho(\chi)$ *пробегает в* (2.10) *все нули функции* $L(s, \chi)$, *лежащие в области* $0 < \sigma < 1$, *а в* (2.11) — *все нули* $\zeta(s)$ *в этой же области;* a_1 *и* b_1 — *константы, первая из них зависит от* χ.

---

[1]) Например, Ландау [5].

[2]) Как известно, можно дифференцировать почленно логарифм произведения Вейерштрасса.

§ 3. Дальнейшие сведения о нулях функции $L(s, \chi)$

Установим теперь верхнюю границу для числа нулей $L(s, \chi)$ в областях вида

$$0<\sigma<1, \quad |t| \leqslant T \quad (T>0).$$

Сначала нам потребуется оценка $L(s, \chi)$ при $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$.

Теорема 3.1. *Пусть k — натуральное число. Для каждого характера χ по $\bmod k$ при любом $\sigma_0 \geqslant \frac{1}{2}$*

$$L(s, \chi) \ll k^{\sigma_0+1}(|t|+2)^{\sigma_0+1} \quad \left(-\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\right), \tag{3.1}$$

причем константа в $\ll$ может зависеть от σ_0, но не зависит от k и t.

Пусть сначала χ — примитивный характер. Тогда, согласно (1.2), имеет место равенство

$$|L(1-s, \overline{\chi})| = 2(2\pi)^{-\sigma} k^{\sigma-\frac{1}{2}} \left|\cos \frac{1}{2}(s-a)\pi \cdot \Gamma(s) L(s, \chi)\right|. \tag{3.2}$$

Затем пусть $\chi \neq \chi_0^*$. При $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0+1$ будет $-\sigma_0 \leqslant \operatorname{Re}(1-s) \leqslant \frac{1}{2}$ и по теореме 4.5.4, в области $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0+1$ получаем

$$L(s, \chi) \ll k^{\frac{1}{2}}(|t|+2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

В той же области, согласно теореме П. 6.2,

$$\Gamma(s) \ll (|t|+2)^{\sigma_0+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}, \tag{3.4}$$

причем константа в $\ll$ может зависеть от σ_0. Для любого s

$$\left|\cos \frac{1}{2}(s-a)\pi\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}\right) \leqslant e^{\frac{1}{2}\pi|t|}. \tag{3.5}$$

Подставляя все это в (3.2), получаем при $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0+1$, т. е. при $-\sigma_0 \leqslant \operatorname{Re}(1-s) \leqslant \frac{1}{2}$,

$$L(1-s, \overline{\chi}) \ll k^{\sigma_0+1}(|t|+2)^{\sigma_0+1}.$$

Так как $\overline{\chi}$ вместе с χ является примитивным характером, не равным χ_0^*, то отсюда при $\overline{\chi} \rightarrow \chi$, $1-s \rightarrow s$ получаем (3.1). Тем самым утверждение доказано для примитивного $\chi \neq \chi_0^*$.

Для $L(s, \chi_0^*) = \zeta(s)$ имеет место $a = a(\chi_0^*) = 0$, и из равенства (3.5) и теоремы 4.5.4 при $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 + 1$ следует, что

$$\cos\frac{1}{2}(s-a)\pi \cdot L(s, \chi_0^*) = \cos\frac{1}{2}\pi s \cdot \zeta(s) \ll (|t|+2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\pi|t|}, \tag{3.6}$$

так как функция $\cos\frac{1}{2}\pi s \cdot \zeta(s)$ регулярна при $s=1$. Подставляя это вместе с (3.4) в (3.2), при $k=1$ получим утверждение также для $\chi = \chi_0^*$. Если характер χ не примитивный, то рассмотрим соответствующий примитивный характер χ^* по $\operatorname{mod} k^*$ (следовательно, $k^* \mid k$). Тогда в области $-\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}$ получим

$$\left| \prod_{p \mid k,\ p \nmid k^*} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s}\right) \right| \leqslant \prod_{p \mid k,\ p \nmid k^*} (1 + p^{\sigma_0}) \leqslant \left(\frac{k}{k^*}\right)^{\sigma_0+1}, \tag{3.7}$$

так как

$$\prod_{p \mid k,\ p \nmid k^*} (1 + p^{\sigma_0}) \leqslant \prod_{p \mid (k/k^*)} (1 + p^{\sigma_0}). \tag{3.8}$$

Если $\sigma_0 \geqslant 0$, то $1 + p^{\sigma_0} \leqslant 2p^{\sigma_0} \leqslant p^{\sigma_0+1}$, тогда как при $-\frac{1}{2} \leqslant \sigma_0 < 0$ для любого целого $m \geqslant 2$

$$\prod_{p \mid m} (1 + p^{\sigma_0}) \leqslant \prod_{p \leqslant \ln m/\ln 2} (1 + p^{\sigma_0}) \leqslant \exp \sum_{p \leqslant 2\ln m} p^{\sigma_0} \leqslant$$

$$\leqslant \exp \sum_{n \leqslant 2\ln m} n^{\sigma_0} \leqslant \exp(c \ln^{1+\sigma_0} m) \ll m^{1+\sigma_0}, \tag{3.9}$$

причем константы зависят от σ_0 [1]). Теперь уже доказано, что

$$L(s, \chi^*) \ll k^{*(\sigma_0+1)} (|t|+2)^{\sigma_0+1}$$

при $-\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}$, и вместе с (4.6.11) это дает (3.1) для любого характера χ по $\operatorname{mod} k$.

Теорема 3.2. *Пусть $k \geqslant 1$, а α — любое действительное число. Для любого характера χ по $\operatorname{mod} k$ в области $\sigma \geqslant \alpha$ имеет место равенство*

$$L(s, \chi) = E_0 \frac{\varphi(k)/k}{s-1} + O\{k^c (|t|+2)^c\}, \tag{3.10}$$

где $c = c(\alpha)$ и константа в $O(\ \ )$ также зависит от α.

---

[1]) $\exp(c \ln^{1+\sigma_0} m) \ll \exp\{(1+\sigma_0)\ln m\}$ для $-\frac{1}{2} \leqslant \sigma_0 < 0$.

Эта теорема следует из теорем 3.1 и 4.5.4, так как первый член в правой части (3.10) ограничен, например при $|s-1|>\frac{1}{2}$.

Обозначим теперь через $N_\chi(T)$ число нулей $L(s, \chi)$ в области $0 \leqslant \sigma < 1$, $|t| \leqslant T$.

Мы знаем уже, что $L(s, \chi)$ для примитивного χ имеет на прямой $\sigma=0$ не больше одного нуля, а именно в точке $s=0$ (при $\chi(-1)=1$, $a=0$, $\chi \neq \chi_0^*$). Для непримитивного χ функция $L(s, \chi)$ имеет еще нули s, для которых $1-\chi^*(p)p^{-s}=0$ для некоторого p, $p \mid k$; все эти нули лежат на прямой $\sigma=0$. На прямой $\sigma=1$ функция $L(s, \chi)$ отлична от нуля для любого характера χ. Следовательно, для примитивного характера χ число нулей функции $L(s, \chi)$ в области $0<\sigma<1$ может быть только на 1 меньше, чем в области $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Теорема 3.3. *При $k \geqslant 1$, $T \geqslant 0$ для любого χ имеет место оценка*

$$N_\chi(T+1)-N_\chi(T) \ll \ln k(T+2), \tag{3.11}$$

где константа в $\ll$ не зависит от k и T.

Пусть сначала $\chi \neq \chi_0$. Применим теорему П. 5.2. Положим $f(s)=L(s, \chi)$, $s_0=2+iT$, $r=\frac{1}{2}R$ и выберем R настолько большим, чтобы область $0 \leqslant \sigma < 1$, $T<t \leqslant T+1$ содержалась целиком в области $|s-s_0| \leqslant \frac{1}{2}R$ (например, $R=6$). При $|s-s_0| \leqslant R$ по теореме 3.2 выполняется оценка

$$L(s, \chi) \ll k^c(|t|+2)^c.$$

Кроме того,

$$|f(s_0)|=|L(s_0, \chi)| \geqslant \left|\sum_n \mu(n)\frac{\chi(n)}{n^{s_0}}\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{\zeta(2)}. \tag{3.12}$$

Если в теореме П. 5.2 взять в качестве чисел $s_1, s_2, \ldots, s_m$ нули функции $L(s, \chi)$, лежащие в области $0 \leqslant \sigma < 1$, $T<t \leqslant T+1$, то, поскольку нули $L(s, \chi)$ в области $-T-1 \leqslant t < -T$ являются сопряженными нулям $L(s, \overline{\chi})$, лежащим в области $T<t \leqslant T+1$, из П. 5.10 получим (3.11). Если мы применим теорему П. 5.2, так же как и выше, к функции $f(s)=(s-1)L(s, \chi)$, то получим (3.11) для $\chi=\chi_0$. Это можно сделать потому, что в каждой полосе $A \leqslant \sigma \leqslant B$ имеет место $s-1 \ll |t|+2$ (константа в $\ll$ зависит от A, B). Следовательно, согласно теореме 3.2,

$$(s-1)L(s, \chi_0) \ll k^{c_1}(|t|+2)^{c_1}$$

в каждой такой полосе. Оценку, более точную, чем в теореме 3.3, дает следующая теорема.

Теорема 3.4[1]). *Для любого* χ *по* $\mathrm{mod}\, k$ *при* $T \geqslant 2$, $k \geqslant 1$ *имеет место соотношение*

$$N_\chi(T) = \frac{1}{\pi} T \ln T + A(k) T + O(\ln kT). \tag{3.13}$$

При этом $A(k)$ — *действительная константа, зависящая от* k (*соответствующая* T), *и* $A(k) \ll \ln 2k$.

Рассмотрим сначала χ — примитивный характер, не равный χ_0^*. Тогда все нули $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$ являются также нулями функции $\xi(s, \chi)$, определенной в (1.3). Обозначим через C границу прямоугольника с вершинами $\frac{5}{2} \pm iT$, $-\frac{3}{2} \pm iT$, $T \geqslant 2$, пробегаемую в положительном направлении, и пусть сначала на $\sigma \pm iT$, $0 \leqslant \sigma < T$, нет нулей $L(s, \chi)$. Тогда на C нет нулей функции $L(s, \chi)$, а внутри C лежат $N_\chi(T)$ таких нулей или соответственно $N_\chi(T) + 1$ (для $\chi(-1) = -1$).

По принципу аргумента имеем

$$2\pi N_\chi(T) = \Delta_C \arg \xi(s, \chi) + O(1), \tag{3.14}$$

причем в $O(1)$ учтена также точка $s = 0$ (которая, быть может, является нулем функции $L(s, \chi)$, но не является нулем $\xi(s, \chi)$), и $\Delta_C f(s)$ обозначает изменение $f(s)$, когда s пробегает путь C. Согласно (1.3), имеет место равенство

$$\Delta_C \arg \xi(s, \chi) = \Delta_C \arg \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+a)} + \\ + \Delta_C \arg \Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a)\right) + \Delta_C \arg L(s, \chi). \tag{3.15}$$

Рассмотрим сначала изменение $\arg \xi(s, \chi)$ только на пути C_1, который состоит из двух отрезков: $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} + iT\right)$ и $\left(\frac{5}{2} + iT, \frac{1}{2} + iT\right)$. Выделим первое слагаемое в (3.15)

$$\Delta_{C_1} \arg \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}(s+a)} = \Delta_{C_1}\left(\frac{1}{2} t \ln \frac{k}{\pi}\right) = \frac{1}{2} T \ln \frac{k}{\pi}. \tag{3.16}$$

---

[1]) Для ζ-функции ($k = 1$) это утверждение сформулировано Риманом и доказано Мангольдтом [1]. Метод доказательства см. Бэклунд [1].

Из теоремы П. 6.1 $\left(\text{в ней надо положить } b=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a\right)$ следует для второго слагаемого при $T\geqslant 2$

$$\Delta_{C_1}\arg\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a)\right)=\Delta_{C_1}\ \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+a)\right)=$$
$$=\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}iT\right)-\operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}a\right)=$$
$$=\operatorname{Im}\left\{\left(\frac{1}{2}iT-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a\right)\ln\left(\frac{1}{2}iT\right)-\frac{1}{2}iT+\frac{1}{2}\ln 2\pi\right\}+O(1)=$$
$$=\frac{1}{2}T\ln\frac{1}{2}T-\frac{1}{2}T+O(1) \qquad (3.17)$$

Исследуем теперь $\Delta_{C_1}\arg L(s, \chi)$. Пусть m — число нулей $\operatorname{Re}L(s, \chi)$ на C_1 (конечная точка исключается). Когда s пробегает один из $m+1$ кусков, на которые C_1 разбивается нулями $\operatorname{Re}L(s, \chi)$, то $\arg L(s, \chi)$ изменяется не больше, чем на π, так как $\operatorname{Re}L(s, \chi)$ при этом не меняет знак[1]). Следовательно,

$$\Delta_{C_1}\arg L(s, \chi)\leqslant(m+1)\pi. \qquad (3.18)$$

Так как

$$\operatorname{Re}L\left(\frac{5}{2}+it, \chi\right)\geqslant 1-\sum_{n\geqslant 2}n^{-\frac{5}{2}}>0, \qquad (3.19)$$

то функция $\operatorname{Re}L(s, \chi)$ не имеет нулей на прямой $\sigma=\frac{5}{2}$. Поэтому m равно числу нулей $\operatorname{Re}L(s, \chi)$ на отрезке $\frac{1}{2}<\sigma<\frac{5}{2}$, $t=T$ и, так как из $L(\bar{s}, \chi)=\overline{L(s, \bar{\chi})}$ следует $\overline{L(\sigma+it, \chi)}=L(\sigma-it, \bar{\chi})$[2]), то m также равно числу нулей функции

$$f(s)=f(s, T)=\frac{1}{2}\{L(s+iT, \chi)+L(s-iT, \bar{\chi})\}$$

на отрезке $\frac{1}{2}<\sigma<\frac{5}{2}$, $t=0$. Пусть $n(T)$ — число нулей $f(s, T)$ в области $\left|s-\frac{5}{2}\right|\leqslant 2$. Тогда $m\leqslant n(T)$. Применим теперь теорему П. 5.2 в случае $s_0=\frac{5}{2}$, $r=2$, $R=4$.

По теореме 3.2 при $\left|s-\frac{5}{2}\right|\leqslant 4$ имеем оценку $L(s+iT, \chi)\ll\ll k^c(T+6)^c$. Та же оценка справедлива для $L(s-iT, \bar{\chi})$, а

---

[1]) На таком куске $L(s, \chi)$ должна лежать всегда или в правой, или в левой полуплоскости.

[2]) При $\sigma>1$ это следует сразу из разложения в ряд $L(s, \chi)$, а для остальных s получается с помощью аналитического продолжения.

следовательно, и для $f(s)$. Далее, согласно (3.19), $f\left(\frac{5}{2}\right) = \operatorname{Re} L\left(\frac{5}{2} + iT, \chi\right) > c > 0$. Отсюда и из (П. 5.10) при $k \geqslant 1$, $T \geqslant 2$ получаем, что

$$m \leqslant n(T) \ll \ln\{k^c (T+6)^c\} \ll \ln kT. \tag{3.20}$$

Из (3.18) следует, что $\Delta_{C_1} \arg L(s, \chi) \ll \ln kT$. Подставляя это и (3.16), (3.17) в (3.15) (с C_1 вместо C), при $k \geqslant 1$, $T \geqslant 2$ получим

$$\Delta_{C_1} \arg \xi(s, \chi) = \frac{1}{2} T \ln T + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{k}{2\pi} - \frac{1}{2}\right) T + O(\ln kT). \tag{3.21}$$

Так как $\xi(\bar{s}, \chi) = \overline{\xi(s, \bar{\chi})}$ и $\bar{\chi}$ вместе с χ является примитивным характером, отличным от χ_0^*, то же соотношение справедливо для изменения $\arg \xi(s, \chi)$ на отрезках $\left(\frac{1}{2} - iT, \frac{5}{2} - iT\right)$ и $\left(\frac{5}{2} - iT, \frac{5}{2}\right)$. Так как $\xi(1-s, \chi) = \varepsilon_{\bar{\chi}} \xi(s, \bar{\chi})$ (см. (1.4)), то рассуждения, касающиеся изменения для оставшейся левой половины пути C, таковы же, как для правой половины. Следовательно, $\Delta_C \arg \xi(s, \chi)$ в четыре раза больше выражения в правой части (3.21). Если T или $-T$ — ордината нуля функции $L(s, \chi)$, то соотношение 3.13 получается следующим образом: так как $A(k) \ll \ln 2k$ и $T \geqslant 2$, то существует $\varepsilon < 1$, при котором $N(T+\varepsilon) = N(T)$ и $\pi^{-1}(T+\varepsilon)\ln(T+\varepsilon) + A(k)(T+\varepsilon) + O(\ln k(T+\varepsilon)) = \pi^{-1} T \ln T + A(k) T + O(\ln kT)$. Поэтому, согласно (3.14), утверждение доказано для примитивного характера $\chi \neq \chi_0^*$.

Для $\chi = \chi_0^*$, $L(s, \chi_0^*) = \zeta(s)$ доказательство протекает аналогично, только нужно вместо функции $\xi(s, \chi_0^*)$ рассмотреть функцию $\xi(s)$ (см. (1.5)). Функция $\xi(s)$ — целая, и нужно в прежних рассуждениях вместо $\Delta_{C_1} \arg L(s, \chi)$ взять $\Delta_{C_1} \arg (s-1)\zeta(s)$. В любой полосе $A \leqslant \sigma \leqslant B$ по теореме 3.2 для $k = 1$ имеет место оценка $(s-1)\zeta(s) \ll (|t|+2)^c$, $c = c(A, B)$, доказательство протекает так же, как и раньше, и мы не будем останавливаться на подробностях Если характер χ не примитивный, то рассмотрим соответствующий примитивный характер χ^* по $\operatorname{mod} k^*$. Согласно (4.6.11), функция $L(s, \chi)$, кроме нулей функции $L(s, \chi^*)$, имеет нули еще только в тех точках s, для которых $1 - \chi^*(p) p^{-s} = 0$ при некотором p, $p \mid k$, $p \nmid k^*$, т. е.

$$s = \ln \chi^*(p)/\ln p = i\{\arg \chi^*(p) + 2n\pi\}/\ln p \qquad (n \text{ — целое}).$$

Число всех таких точек в области $|t| \leqslant T$ равно

$$\sum_{p \mid k,\ p \nmid k^*} \left\{\frac{1}{2\pi} T \ln p + O(1)\right\} = \frac{1}{2\pi} T \ln \prod_{p \mid k,\ p \nmid k^*} p + O(\ln 2k). \tag{3.22}$$

так как число делителей p числа k, не делящих k^*, во всяком случае равно $O(\ln 2k)$. Поскольку $\prod\limits_{p|k,\ p\nmid k^*} p \leqslant k/k^*$, тем самым теорема 3.4 полностью доказана.

В частности, получаем

$$N_\chi(T) \ll T \ln kT \quad (T \geqslant 2). \tag{3.23}$$

Пусть теперь $N(T)$ — число нулей в области $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ всех функций $L(s, \chi)$, образованных с характерами по $\mathrm{mod}\, k$. Тогда

$$N(T) \ll \varphi(k) T \ln kT \ll kT \ln kT \quad (T \geqslant 2). \tag{3.24}$$

Записывая (3.11) для $0, 1, \ldots, [T]$ и суммируя, можно вывести (3.23) уже из теоремы 3.3.

§ 4. Явные формулы

В (4.7.15) мы представляли сумму $\sum\limits_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n)$ $\left(x = N + \frac{1}{2}\right)$ через интеграл функции $\frac{L'}{L}$ и остаточный член. Теперь, применяя (2.10), установим связь между этой суммой и нулями $\rho = \rho(\chi)$ функции $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$.

Будем пока через $\rho = \beta + i\gamma = \rho(\chi)$, $\beta = \beta(\chi)$, $\gamma = \gamma(x)$, обозначать нули функции $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$. Через $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0 = \rho_0(\chi)$ будем обозначать нули $L(s, \chi)$ в области $0 \leqslant \sigma < 1$, исключая точку $s = 0$. Следовательно, множество ρ_0 включает множество ρ. Для примитивного характера χ множества ρ и ρ_0 совпадают. Для непримитивного χ множество ρ_0 состоит из множества ρ и отличных от $s = 0$ нулей произведения $\prod (1 - \chi^*(p) p^{-s})$, распространенного на все p, для которых $p \mid k$, $p \nmid k^*$ (при этом χ^* по $\mathrm{mod}\, k^*$ — опять примитивный характер, соответствующий χ по $\mathrm{mod}\, k$). Для любого χ точки $\rho(\chi)$ являются также нулями $\xi(s, \chi^*)$. Так как [1] $\xi(\bar{s}, \chi^*) = \overline{\xi(s, \bar{\chi}^*)}$, точки $\rho(\bar{\chi})$ получаются из $\rho(\chi)$ с помощью отражения относительно действительной оси, и так как $L(\bar{s}, \chi) = \overline{L(s, \bar{\chi})}$, то то же самое имеет место для $\rho_0(\chi)$ и $\rho_0(\bar{\chi})$. В частности, для действительного χ точки ρ, как и точки ρ_0, расположены симметрично по отношению к действительной оси, и то же самое справедливо для любого характера χ относительно нулей функции $L(s, \chi) \cdot L(s, \bar{\chi})$. Из $\xi(\rho, \chi^*) = 0$ следует $\xi(1 - \rho, \bar{\chi}^*) = 0$, так как $\xi(1 - s, \bar{\chi}^*) = \varepsilon_{\chi^*} \xi(s, \chi^*)$. Отсюда, поскольку $\xi(\bar{s}, \chi^*) = \overline{\xi(s, \bar{\chi}^*)}$, следует

[1] Легко видеть, что $\overline{(\chi^*)} = \bar{\chi}^*$.

$\xi(1-\bar{\rho}, \chi^*)=0$. Таким образом, нули ρ всегда лежат симметрично относительно прямой $\sigma=\frac{1}{2}$.

Наконец пусть $\nu_0=\nu_0(\chi)$ обозначает кратность нуля $s=0$ функции $L(s, \chi)$. Для примитивного характера χ, $\chi \neq \chi_0^*$, по теореме 1.2 имеем $\nu_0(\chi)=1$ при $\chi(-1)=1$ и $\nu_0(\chi)=0$ при $\chi(-1)=-1$. Кроме того, имеем $\nu_0(\chi_0^*)=0$. Если χ — не примитивный, то ν_0 увеличивается на число тех p, для которых $p \mid k$, $p \nmid k^*$, $\chi^*(p)=1$. Следовательно,

$$\nu_0 \leqslant 1+\sum_{p \mid k} 1 \ll \ln 2k. \tag{4.1}$$

Нам нужна теперь приближенная формула для L'/L.

Теорема 4.1. *Для любого характера* χ *по* $\operatorname{mod} k$, $k \geqslant 1$,

$$\frac{L'}{L}(s, \chi)=\sum_{|\gamma_0-t| \leqslant 1} \frac{1}{s-\rho_0}-\frac{E_0}{s-1}+\frac{\nu_0}{s}+\frac{a}{s+1}+O\{\ln k(|t|+2)\}$$
$$(-1 \leqslant \sigma \leqslant 2) \tag{4.2}$$

При этом суммирование производится по всем $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$, *мнимые части которых отстоят от* t *на расстояние* $\leqslant 1$, *а величина* $a=a(\chi)$ *определена формулой* (1.1).

Пусть сначала $\chi \neq \chi_0$ и $\sigma+it$ — точка из области $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$. Применим теорему П. 4.2 и положим $s_0=2+it$, $r=3$, $R=6$. Если ω пробегает все нули функции $L(s, \chi)$ в области $|s-s_0| \leqslant 6$, то

$$f(s)=\ln\left\{\frac{L(s, \chi)}{L(s_0, \chi)} \prod_{\omega} \frac{s_0-\omega}{s-\omega}\right\}=\ln g(s), \tag{4.3}$$

(при этом выбирается ветвь логарифма, для которой $f(s_0)=0$). Так как $g(s) \neq 0, \infty$ при $|s-s_0| \leqslant 6$, то функция $f(s)$ там однозначна и регулярна. Если $|s-s_0|=12$, то $|(s_0-\omega)/(s-\omega)| \leqslant 1$, и поэтому в силу теоремы 3.2

$$g(s) \ll k^c(|t|+2)^c \qquad (|s-s_0|=12). \tag{4.4}$$

Так как $g(s)$ регулярна в области $|s-s_0| \leqslant 12$, то (4.4) имеет место, в частности, также в области $|s-s_0| \leqslant 6$. Следовательно, при $|s-s_0| \leqslant 6$ $\operatorname{Re} f(s)=\ln|g(s)| \leqslant c \ln k(|t|+2)$. Поэтому при $|s-s_0| \leqslant 3$ теорема П. 4.2 дает

$$f'(s)=\frac{L'}{L}(s, \chi)-\sum_{\omega} \frac{1}{s-\omega} \ll \ln k(|t|+2). \tag{4.5}$$

Следовательно, это соотношение верно, в частности, при $s=\sigma+it$, $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$. Но для такого s

$$\sum_{|\operatorname{Im}\omega-t|>1}\frac{1}{s-\omega}\ll\ln k(|t|+2). \tag{4.6}$$

Так как в области $\sigma<0$ рассматриваются только нули $s=-1$, $-2, \ldots$, то, используя теорему 3.3 и неравенство $|\operatorname{Im}\omega-t|\leqslant 6$ [1]), получим

$$\sum_{|\operatorname{Im}\omega-t|>1}\frac{1}{s-\omega}\ll\sum_{|\operatorname{Im}\omega-t|>1}1\ll\ln k(|t|+2).$$

С другой стороны, при $|t|>1$, $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$ справедливо равенство

$$\sum_{|\operatorname{Im}\omega-t|\leqslant 1}\frac{1}{s-\omega}=\sum_{|\gamma_0-t|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho_0},$$

а при $|t|\leqslant 1$, $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$ справа добавляется еще член $\nu_0/s+$ $+a/(s+1)+O(1)$. Но так как при $|t|>1$ и $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$ из (4.1) следует, что $\nu_0/s+a/(s+1)\ll\ln 2k$, то для всех t имеет место равенство

$$\sum_{|\operatorname{Im}\omega-t|\leqslant 1}\frac{1}{s-\omega}=\sum_{|\gamma_0-t|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho_0}+\frac{\nu_0}{s}+\frac{a}{s+1}+O(\ln 2k). \tag{4.7}$$

Подставляя это выражение вместе с (4.6) в (4.5), получаем формулу (4.2) в случае $\chi\neq\chi_0$.

При $\chi=\chi_0$ доказательство совершенно аналогично, только если $s=1$ лежит в области $|s-s_0|\leqslant 12$, нужно вместо $g(s)$ рассматривать функцию $g(s)(s-1)/(s_0-1)$. Тогда $|(s-1)/(s_0-1)|\leqslant\mathrm{const}$ при $|s-s_0|=12$, и все остальное протекает так же, как в случае $\chi\neq\chi_0$, только в правой части (4.2) появляется член $-1/(s-1)$, если $s=1$ лежит в области $|s-s_0|\leqslant 6$. Если это не так, то всегда $|t|>1$ и, следовательно, $E_0/(s-1)=O(1)$. Таким образом, в любом случае в (4.2) можно добавить член $-E_0/(s-1)$. Тем самым теорема полностью доказана.

При $|t|\geqslant 2$, согласно (4.1), имеет место оценка $-E_0/(s-1)+$ $+\nu_0/s+a/(s+1)\ll\ln 2k$. Поэтому для любого характера χ по $\operatorname{mod} k$ из 4.2 следует равенство

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{|\gamma_0-t|\leqslant 1}\frac{1}{s-\rho_0}+O(\ln k|t|)\quad\left(\begin{matrix}k\geqslant 1\\ |t|\geqslant 2\end{matrix}\right). \tag{4.8}$$

[1]) Область $|\operatorname{Im}\omega-t|\leqslant 6$ содержится в двенадцати параллельных полосах вида $T<\operatorname{Im}\omega\leqslant T+1$ и при $|\operatorname{Im}\omega-t|>1$ имеет место $|s-\omega|^{-1}<1$.

Покажем теперь, что можно найти сколь угодно большую ординату t, для которой при $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$ (в частности, в критической полосе) $\frac{L'}{L}(\sigma+it, \chi)$ не становится слишком большим.

Теорема 4.2. *Рассмотрим целое число $m \geqslant 2$. Существует последовательность чисел $T_m = T_m(\chi)$, $m < T_m < m+1$, для которой при любом характере χ по $\bmod k$ $(k \geqslant 1)$ выполняется оценка*

$$\left|\frac{L'}{L}(\sigma \pm iT_m, \chi)\right| < c \ln^2 kT_m \quad (-1 \leqslant \sigma \leqslant 2). \tag{4.9}$$

Здесь константа c не зависит от k, m.

Доказательство. Пусть $\gamma_{01} \leqslant \gamma_{02} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{0j}$ — ординаты $\rho_0(\chi)$ и $\rho_0(\overline{\chi})$ в полосе $m < t < m+1$, т. е. ординаты нулей функции $L(s, \chi) \cdot L(s, \overline{\chi})$ в области $0 \leqslant \sigma < 1$, $m < t < m+1$. По теореме 3.3 $j = j(m) \ll \ln km$ $(k \geqslant 1,\ m \geqslant 2)$. Если разделим теперь интервал $(m, m+1)$ на $(j+1)$ равных частей, то имеется по крайней мере один подинтервал, который не содержит никакого γ_{0i} $(i = 1, 2, \ldots, j)$. Пусть T_m — середина такого подинтервала. Длина каждого подинтервала $> c/\ln km$, и поэтому для $i = 1, 2, \ldots, j$ имеет место оценка $|T_m - \gamma_{0i}| > c/\ln km$. Отсюда следует, что $|T_m - \gamma_0| > c/\ln km$, если γ_0 — ордината какого-нибудь нуля функции $L(s, \chi) \cdot L(s, \overline{\chi})$. Но так как эти нули лежат симметрично относительно действительной оси, то одновременно имеет место оценка $|-T_m - \gamma_0| > c/\ln km$.

Если через γ_0 обозначить ординату ρ_0, то при $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$ из (4.8) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{L'}{L}(\sigma+iT_m, \chi) &= \sum_{|\gamma_0 - T_m| \leqslant 1} \frac{1}{\sigma + iT_m - \rho_0} + O(\ln kT_m) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{|\gamma_0 - T_m| \leqslant 1} \frac{1}{|\gamma_0 - T_m|} + O(\ln kT_m) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{|\gamma_0 - T_m| \leqslant 1} c^{-1} \ln km + O(\ln kT_m).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Аналогичное соотношение получается и для $\frac{L'}{L}(\sigma - iT_m, \chi)$. Отсюда и из теоремы 3.3 следует (4.9). Напомним, что $L(s, \chi)$, кроме $\rho_0 = \rho_0(\chi)$, может иметь нули только в точках $s = 0$ и $s = -(a+2q)$, $q = 0, 1, 2, \ldots$. При $\chi = \chi_0^*$ нуль $s = 0$ отсутствует, в то время как для главного характера χ_0 по модулю $\geqslant 2$ всегда $L(0, \chi_0) = 0$.

Теорема 4.3. *Пусть* χ — *любой характер по* $\operatorname{mod} k$ *и* $k \geqslant 1$. *Из полуплоскости* $\sigma \leqslant -\frac{1}{2}$ *исключим точки, лежащие в кругах вида*

$$|s+a+2q| \leqslant \frac{1}{4}, \quad q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4.11}$$

где $a=\frac{1}{2}\{1-\chi(-1)\}$. *В оставшейся области* G *имеет место оценка*

$$\frac{L'}{L}(s,\ \chi) \ll \ln k\,(|s|+2). \tag{4.12}$$

Пусть сначала χ — примитивный характер. Из функционального уравнения (1.2) следует, что

$$L(s,\ \chi)=\varepsilon_\chi^{-1} 2^{-1}(2\pi)^s k^{-s+\frac{1}{2}} \left\{\cos\frac{1}{2}(s-a)\pi\cdot\Gamma(s)\right\}^{-1} L(1-s,\ \bar{\chi})=$$

$$=\varepsilon_\chi^{-1}\pi^{-1}(2\pi)^s k^{-s+\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{2}(s+a)\pi\cdot\Gamma(1-s)\,L(1-s,\ \bar{\chi}), \tag{4.13}$$

так как $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin\pi s$, и $\sin\pi s/\cos\frac{1}{2}(s-a)\pi=2\sin\frac{1}{2}(s+a)\pi$. Отсюда получается, что

$$\frac{L'}{L}(s,\ \chi)=\ln\frac{2\pi}{k}+\frac{1}{2}\pi\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(s+a)\pi-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s)-\frac{L'}{L}(1-s,\ \bar{\chi}). \tag{4.14}$$

Если s лежит в G, то $\operatorname{Re}(1-s) \geqslant \frac{3}{2}$. Отсюда для $s \in G$ следует

$$\left|\frac{L'}{L}(1-s,\ \bar{\chi})\right| \leqslant \sum_n \Lambda(n)\,n^{-\frac{3}{2}}=O(1) \tag{4.15}$$

и, согласно (П. 6.12),

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) \ll \ln|1-s| \ll \ln(|s|+2). \tag{4.16}$$

Наконец, для $s \in G$ получаем

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(s+a)\pi=i+\frac{2i}{e^{i\pi(s+a)}-1}=O(1),$$

так как $e^{i\pi(s+a)}-1$ — периодическая функция с периодом 2 и в любой полосе $-(a+2q)-1<\sigma\leqslant-(a+2q)+1$ удовлетворяет условию $|e^{i\pi(s+a)}-1|>c>0$, если исключить точки $|s+a+2q|\leqslant\frac{1}{4}$. Подставляя это вместе с формулами (4.15) и (4.16) в (4.14), получим оценку (4.12) для примитивного характера χ.

Если характер χ не примитивный и χ^* по $\bmod k^*$ — соответствующий примитивный характер, то из (4.6.11) следует, что

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{L'}{L}(s, \chi^*) + \sum_{p \mid k,\ p \nmid k^*} \ln p \cdot (\overline{\chi}^*(p) p^s - 1)^{-1}. \tag{4.17}$$

При $\sigma \leqslant -\frac{1}{2}$ имеет место неравенство $|\overline{\chi}^*(p) p^s - 1| \geqslant 1 - 2^\sigma \geqslant$ $\geqslant 1 - 2^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому сумма в правой части (4.17) во всяком случае имеет порядок $\ll \sum_{p \mid k} \ln p < \ln 2k$, чем утверждение полностью доказано.

Положим теперь для любого характера χ по $\bmod k$

$$\psi_0(x, \chi) = \frac{1}{2}\{\psi(x+0, \chi) + \psi(x-0, \chi)\} = {\sum_{n \leqslant x}}' \chi(n) \Lambda(n)\ ^{1)}. \tag{4.18}$$

Здесь штрих обозначает, что для целого x член, соответствующий $n = x$, умножается на $\frac{1}{2}$. Выведем явную формулу, выражающую $\psi_0(x, \chi)$ через x и нули $L(s, \chi)$.

Теорема 4.4. *Для каждого примитивного характера χ по $\bmod k$ $(k \geqslant 1)$ при $x \geqslant 2$, $T \geqslant 2$ имеет место равенство*

$$\psi_0(x, \chi) = E_0 x - \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho} - \nu_0 \ln x - d_0 + B(x, \chi) + R(x, T), \tag{4.19}$$

$$B(x, \chi) = \sum_{\substack{q=0 \\ a+2q>0}}^{\infty} \frac{x^{-(a+2q)}}{a+2q}; \tag{4.20}$$

при этом величины $\nu_0 = \nu_0(\chi)$ и $d_0 = d_0(\chi)$ задаются с помощью разложения

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{\nu_0}{s} + d_0 + d_1 s + \ldots \tag{4.21}$$

в точке $s = 0$ [2]*), ρ пробегает все нули $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$ и*

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T}(\ln^2 x + \ln^2 kT) + \frac{\ln x}{|x - N|} \quad \textit{для нецелого } x, \tag{4.22}$$

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T}(\ln^2 x + \ln^2 kT) \quad \textit{для целого } x, \tag{4.23}$$

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T}(\ln^2 x + \ln^2 kT) + \ln x \quad \textit{для всех } x \geqslant 2. \tag{4.24}$$

---

1) Функция $\psi(x, \chi)$ определена формулой (4.7.9).

2) Следовательно, $\nu_0 = 1$ при $\chi(-1) = 1$, $\chi \neq \chi_0^*$ и $\nu_0 = 0$ в противном случае.

Здесь N обозначает целое число, ближайшее к x. Далее имеет место равенство

$$\psi_0(x, \chi) = E_0 x - S(x) - \nu_0 \ln x - d_0 + \sum_{\substack{q=0 \\ a+2q>0}}^{\infty} \frac{x^{-(a+2q)}}{a+2q}, \tag{4.25}$$

причем a определяется формулой (1.1), *а*

$$S(x) = S(x, \chi) = \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} = \lim_{T\to\infty} \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\rho}}{\rho}. \tag{4.26}$$

Доказательство. Пусть χ — примитивный характер по $\operatorname{mod} k$. Положим в теореме П.3.1 $a_n = \chi(n)\Lambda(n) = O(\ln n)$, $w = 0$, $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$ ($\alpha = 1$ в силу (4.5.26)). Тогда, согласно формуле (4.3.4), при $x \geqslant 2$ получаем, что

$$\psi_0(x, \chi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s}\, ds + R_1(x, T), \tag{4.27}$$

где порядок величины $R_1(x, T)$ не выше указанного в формулах (4.22) — (4.24). Пусть теперь T_m — одно из чисел, определенных в теореме 4.2 ($T_m \geqslant 2$). Положим $U = U(q) = a + 2q + 1$, $q \geqslant 2$ — целое, и обозначим через C_1, C_2 и C_3 отрезки $(b + iT_m, -U + iT_m)$, $(-U + iT_m, -U - iT_m)$ и $(-U - iT_m, b - iT_m)$. По теоремам 4.2 и 4.3 на $C_1 + C_2 + C_3$ нет особых точек $\frac{L'}{L}$. Если обозначить через $R = R(q)$ внутренние точки прямоугольника, образованного отрезками C_1, C_2, C_3 и отрезком $(b - iT_m, b + iT_m)$, то по теореме о вычетах получим

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_2+C_3} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s}\, ds + \\ + \sum_{s\in R} \operatorname{Res} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} \right\}. \tag{4.28}$$

Чтобы оценить подинтегральное выражение, применим к подинтегральной функции в области $-\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant b = 1 + \frac{1}{\ln x}$ теорему 4.2, или оценку $\frac{L'}{L} = O(1)$ в случае $\sigma > 2$ (см. 4.15), а в оставшейся области применим теорему 4.3. Так как $\ln(\sigma + T_m) \leqslant \ln 2T_m$ при $\sigma \leqslant T_m$ и $\ln(\sigma + T_m) < \ln 2\sigma$ при $\sigma > T_m \geqslant 2$, а также

$$\int_2^U \ln 2\sigma \cdot x^{-\sigma}\, d\sigma \leqslant \int_2^{\infty} \ln 2\sigma \cdot 2^{-\sigma}\, d\sigma < \infty,$$

то при $q > T_m \geqslant 2$ равномерно по q имеем

$$\int\limits_{C_1} \left| \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} \right| |ds| \ll \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1+1/\ln x} \ln^2 kT_m \frac{x^\sigma}{T_m} d\sigma + \\ + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{U} \ln k(\sigma + T_m) \frac{x^{-\sigma}}{T_m} d\sigma \ll \frac{x}{T_m} \ln^2 kT_m. \quad (4.29)$$

Далее получим, что при $q \to \infty$ и постоянном T_m существует предельное значение интеграла, взятого по C_1, и

$$\lim_{q\to\infty} \int\limits_{C_1} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds = \int\limits_{-\infty+iT_m}^{b+iT_m} \ll \frac{x}{T_m} \ln^2 kT_m. \quad (4.30)$$

То же самое справедливо и для интеграла по C_3. Далее по теореме 4.3 при $q > T_m \geqslant 2$ получаем

$$\int\limits_{C_2} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds \ll \int\limits_{-T_m}^{T_m} \ln 2kq \frac{x^{-(a+2q+1)}}{T_m} dt,$$

и это выражение стремится к нулю при $q \to \infty$. Отсюда и из (4.30) получается, что при $q \to \infty$ первый член в правой части (4.28) имеет предел и поэтому то же самое верно для второго члена. Следовательно,

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{s \in R} \operatorname{Res} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} \right\} = \\ = \sum_{\sigma \leqslant 1,\ |t| < T_m} \operatorname{Res} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} \right\}^{1)}. \quad (4.31)$$

Определим теперь отдельные вычеты в области $\sigma \leqslant 1$, $|t| < T_m$. Пусть $s = \rho_1$ — нуль кратности ν_1 функции $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{s=\rho_1} \left\{ -\frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} \right\} = -\nu_1 \frac{x^{\rho_1}}{\rho_1} = -\sum_{\rho=\rho_1} \frac{x^\rho}{\rho}. \quad (4.32)$$

---

[1]) Мы предполагаем, что члены суммы, соответствующие точкам из области $\sigma < 0$, упорядочены по убыванию действительной части.

Так как характер χ предполагался примитивным, то $L(s, \chi)$ имеет на прямой $\sigma=0$ не больше одного простого нуля в точке $s=0$, и из (4.21) следует, что

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left\{-\frac{L'}{L}(s, \chi)\frac{x^s}{s}\right\}=-\nu_0\ln x-d_0, \tag{4.33}$$

где ν_0 равно 0 или 1. Вычеты, соответствующие простым нулям $L(s, \chi)$, в точках $s=-(a+2q)$, $q=0, 1, \ldots$, отличных от $s=0$, равны $x^{-(a+2q)}/(a+2q)$. Таким образом, при $\chi\neq\chi_0^*$ все особенности $\frac{L'}{L}$ исчерпаны. При $\chi=\chi_0^*$ имеется еще полюс при $s=1$ с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left\{-\frac{L'}{L}(s, \chi_0^*)\frac{x^s}{s}\right\}=\operatorname*{Res}_{s=1}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\right\}=x. \tag{4.34}$$

Следовательно, если $\rho=\beta+i\gamma$, то

$$\sum_{\sigma\leqslant 1,\ |t|<T_m}\operatorname{Res}\left\{-\frac{L'}{L}(s, \chi)\frac{x^s}{s}\right\}=$$

$$=E_0x-\sum_{|\gamma|<T_m}\frac{x^\rho}{\rho}-\nu_0\ln x-d_0+\sum_{\substack{q=0\\ a+2q>0}}^{\infty}\frac{x^{-(a+2q)}}{a+2q}. \tag{4.35}$$

Устремим в (4.28) q к бесконечности. Тогда

$$\psi_0(x, \chi)=E_0x-\sum_{|\gamma|\leqslant T_m}\frac{x^\rho}{\rho}-\nu_0\ln x-d_0+B(x, \chi)+R_2(x, T_m) \tag{4.36}$$

и порядок величины

$$R_2=R_1+O\left(xT^{-1}\ln^2 kT\right)$$

не больше порядков величин правых частей в формулах (4.22)—(4.24). Возьмем теперь любое $T\geqslant 2$. Обязательно найдется такое T_m, что $T\leqslant T_m<T+2$. Тогда $R_2(x, T_m)\ll R_2(x, T)$ и по теореме 3.3

$$\sum_{T<|\gamma|\leqslant T_m}\frac{x^\rho}{\rho}\ll\sum_{T<|\gamma|\leqslant T+2}\left|\frac{x^\rho}{\rho}\right|\ll\frac{x}{T}\sum_{T<\gamma\leqslant T+2}1\ll$$

$$\ll\frac{x}{T}\ln kT\quad(T\geqslant 2),$$

так как $|x^\rho|=x^\beta<x$, $1/|\rho|<1/T\leqslant\frac{1}{2}$ $(|\gamma|>T)$. Поэтому в равенстве (4.36) можно заменить T_m на любое $T\geqslant 2$. Если положим теперь $R=R_2(x, T)$, то справедливы оценки (4.22)—(4.24), и тем самым равенство (4.19) доказано. Отсюда следует (4.25), так как в силу (4.22) и (4.23) $R(x, T) \to 0$ при $T \to \infty$ и постоянном x. В частности, при $k = 1$ получаем следующую теорему.

Теорема 4.5. *Пусть* $\psi_0(x) = \frac{1}{2}\{\psi(x+0) + \psi(x-0)\}$. *Тогда при* $x \geqslant 2$ *имеет место равенство*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \tag{4.37}$$

где

$$\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} = \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho} + R(x, T) \tag{4.38}$$

при $T \geqslant 2$ *и*

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T}\left(\ln^2 xT + \frac{\ln x}{|x - N|}\right) \quad \textit{для нецелого } x, \tag{4.39}$$

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T}\ln^2 xT \quad \textit{для целого } x, \tag{4.40}$$

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T}\ln^2 xT + \ln x \quad \textit{для всех } x\ (\geqslant 2). \tag{4.41}$$

Здесь ρ *пробегает нули функции* $\zeta(s)$ *в области* $0 < \sigma < 1$.

Это утверждение следует из того, что здесь $\nu_0 = 0$, так как $\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Кроме того, $d_0 = \zeta'(0)/\zeta(0)$, $a = 0$ и

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{x^{-2q}}{2q} = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Вообще говоря, в (4.22) и (4.39) $|x - N|$ можно заменить на наименьшее расстояние, на которое x отстоит от целого числа вида p^m, и эти формулы останутся верными, если x не есть целое число такого вида. Равенства (4.19) и (4.37) справедливы также при $1 < x \leqslant 2$; оценки остатков для этого случая выполняются в несколько измененном виде. Можно показать, что ряд $\sum x^\rho/\rho$ из формулы (4.38), в котором ρ упорядочены по возрастанию модуля ординаты, равномерно сходится в каждом замкнутом x-интервале, не содержащем целых вида p^m. В интервале, который содержит p^m, ряд может не сходится равномерно, так как $\psi_0(x)$ в точке $x = p^m$ разрывна. По этому вопросу см., например, Ландау [5], [8]. Вообще $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi \neq 0$, но нам это равенство в дальнейшем не потребуется. Соотношение (4.37) представляет собой формулу, выражающую $\psi_0(x)$ через нули ζ-функции. Риман впервые открыл формулы такого рода для несколько более сложных функций

$$\Pi_0(x) = \frac{1}{2}\{\Pi(x+0) + \Pi(x-0)\},$$

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \sum \frac{1}{m} = \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n}.$$

Открытые Риманом формулы были впервые доказаны Мангольдтом [1] (см., например, Ландау [5]).

Для различных применений нам нужна еще

Теорема 4.6. *Пусть* $x = N + \frac{1}{2}$, $N \geqslant 2$ — *целое*, $k \geqslant 1$ *и* χ — *любой характер по* $\bmod k$. *По теореме* 4.6.9 *в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_0}{\ln k(|t|+2)} \geqslant \frac{3}{4} \tag{4.42}$$

может находиться действительный исключительный нуль функции $L(s, \chi)$. *Обозначим его через* β_1. *Тогда при* $x \geqslant T \geqslant 2$ *имеет место равенство*

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n)\Lambda(n) = E_0 x - E_1 \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{|\gamma| \leqslant T}' \frac{x^\rho}{\rho} + \\ + O\left(\frac{x}{T}\ln^2 kx + E_1 x^{\frac{1}{4}} \ln kx\right), \tag{4.43}$$

где $\sum'$ *обозначает суммирование по нулям* $\rho = \rho(\chi)$ *функции* $L(s, \chi)$ *в области* $0 < \sigma < 1$, *за исключением* β_1 *и* $1 - \beta_1$ [1]).

Пусть сначала χ — примитивный характер, не равный $\overset{*}{\chi}_0$. Так как для примитивного характера χ множества нулей ρ_0 и ρ совпадают, то из (4.2) [2]) при $s = 0$ мы получаем следующее выражение для d_0, определенного в теореме 4.4:

$$d_0 = d_0(\chi) = -\sum_{|\gamma| \leqslant 1} \frac{1}{\rho} + O(\ln 2k). \tag{4.44}$$

Так как нули ρ лежат симметрично относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, то по теореме 4.6.9 функция $L(s, \chi)$ не обращается в нуль в области $\sigma \leqslant 1 - c_0/\ln k(|t|+2)$, $s \neq 1 - \beta_1$ и поэтому при $\rho \neq 1 - \beta_1$ всегда $1/|\rho| \leqslant c \ln k(|\gamma|+2)$. Отсюда и из теоремы 3.3 получается

$$\sum_{|\gamma| \leqslant 1} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1-\beta_1} + O\Bigg(\sum_{\substack{|\gamma| \leqslant 1 \\ \rho \neq 1-\beta_1}} \ln 2k\Bigg) = \frac{1}{1-\beta_1} + O(\ln^2 2k), \tag{4.45}$$

(здесь и ниже члены, в которых встречается β_1, опускаются, если нет исключительного нуля.)

Следовательно,

$$d_0 = -\frac{1}{1-\beta_1} + O(\ln^2 2k), \tag{4.46}$$

---

[1]) Так как ρ лежат симметрично относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ (см. начало § 4), число $1 - \beta_1$ вместе с β_1 является нулем $L(s, \chi)$. Функция E_1 определена в (4.7.12).

[2]) Имеет место соотношение $a/(s+1) = O(1)$ при $s \to 0$.

и поэтому имеет место равенство

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\rho}}{\rho}+d_0=\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}+\frac{x^{1-\beta_1}-1}{1-\beta_1}+\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}'\frac{x^{\rho}}{\rho}+O(\ln^2 2k). \qquad (4.47)$$

По теореме о среднем для некоторого σ_1 из интервала $0<\sigma_1<1-\beta_1$

$$\frac{x^{1-\beta_1}-1}{1-\beta_1}=x^{\sigma_1}\ln x\ll x^{1-\beta_1}\ln x. \qquad (4.48)$$

Подставляя это и (4.47) в (4.19) при $x=N+\frac{1}{2}$, $x\geqslant T\geqslant 2$, получим

$$\psi_0(x,\ \chi)=\psi(x,\ \chi)=E_0x-E_1\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}-\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}'\frac{x^{\rho}}{\rho}+$$
$$+R(x,\ T)+O(\ln^2 2k+E_1x^{1-\beta_1}\ln x), \qquad (4.49)$$

так как $\nu_0=0$ или 1 и $\nu_0\ln x=O(\ln x)$, кроме того, получим

$$\sum_{\substack{q=0\\ a+2q>0}}^{\infty}\frac{x^{-(a+2q)}}{a+2q}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n}=O(x^{-1}).$$

Согласно (4.42), $1-\beta_1\leqslant 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. Поэтому, если $\chi\neq\chi_0^*$ — примитивный характер, то при $x\geqslant T\geqslant 2$ из соотношения (4.22), написанного для $|x-N|=\frac{1}{2}$, получаем утверждение теоремы.

При $\chi=\chi_0^*$ утверждение теоремы содержится в теореме 4.5, так как в этом случае $k=1$ и нет ни одного исключительного нуля.

Если характер χ не примитивный и χ^* по $\operatorname{mod} k^*$ — соответствующий примитивный характер, то по определению (см. 4.7.9) имеем

$$\psi(x,\ \chi)=\psi(x,\ \chi^*)-\sum_{p^m\leqslant x,\ p\mid k,\ p\nmid k^*}\chi^*(p^m)\ln p=$$
$$=\psi(x,\ \chi^*)+O\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\sum_{p\mid k}\ln p\right)=\psi(x,\ \chi^*)+O(\ln x\ln 2k). \qquad (4.50)$$

При $x\geqslant T\geqslant 2$ имеет место оценка $\ln x\ln 2k\ll\ln^2 kx\ll xT^{-1}\ln^2 kx$. Тем самым равенство (4.43) по существу доказано. Может, правда, случиться, что хотя β_1 и лежит в области $\sigma\geqslant 1-c_0/\ln 2k^*$, но не лежит в области $\sigma\geqslant 1-c_0/\ln 2k$, и тогда $E_1(\chi_0^*)=1$, но $E_1(\chi)=0$.

В этом случае (4.43) следует непосредственно из теоремы 4.4 с помощью (4.50). Действительно, согласно (4.1), $\nu_0\ln x\ll\ln x\ln 2k$, и в этом случае член $1/(1-\beta_1)$ в правой части (4.45) также равен $O(\ln 2k)$, поскольку $1-\beta_1\geqslant c_0/\ln 2k$ и, согласно (4.44), $d_0\ll\ln^2 2k$.

§ 5. Гипотеза Римана и ее следствия

Если применить теорему 4.6.9, то из теоремы 4.6 можно вывести теорему 4.7.3. По теореме 4.6.9 при $x \geqslant T \geqslant 2$ мы имеем

$$\sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho} \leqslant x^{1-c_0/\ln k(T+2)} \sum_{|\gamma| \leqslant T}{}' \frac{1}{|\rho|} \tag{5.1}$$

и

$$\sum_{|\gamma| \leqslant T}{}' |\rho|^{-1} = \sum_{|\gamma| \leqslant 1}{}' |\rho|^{-1} + \sum_{1 < |\gamma| \leqslant T}{}' |\rho|^{-1}. \tag{5.2}$$

Поскольку в первой сумме справа всегда $\rho \neq 1 - \beta_1$, так же как в (4.45), убеждаемся, что первая сумма есть $O(\ln^2 2k)$. Для второй суммы правой части из теоремы 3.3 при $T \geqslant 2$ получаем

$$\sum_{1 < |\gamma| \leqslant T} |\rho|^{-1} \leqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant [T]} \sum_{n < |\gamma| \leqslant n+1} |\rho|^{-1} \ll$$

$$\ll \sum_{1 \leqslant n \leqslant [T]} \frac{1}{n} \ln kT \ll \ln^2 kT. \tag{5.3}$$

Подставим все это в (5,1)

$$\sum_{|\gamma| \leqslant T}{}' \frac{x^\rho}{\rho} \ll x^{1-c_0/\ln k(T+2)} \ln^2 kT. \tag{5.4}$$

Пусть теперь x достаточно велико, и $k \leqslant \exp \ln^{\frac{1}{2}} x$. Для $T = \exp \ln^{\frac{1}{2}} x$ имеем $\ln^{\frac{1}{2}} x \leqslant \ln kT \leqslant 2 \ln^{\frac{1}{2}} x$. Поскольку нас интересуют большие x, можно предполагать, что $x \geqslant T \geqslant 2$. Поэтому из (4.43) и (5.4) следует (4.7.13), откуда, так же как в гл, IV, получаем (4.7.20).

Если мы получаем какие-нибудь сведения о положении нулей $\rho = \rho(x)$ функции $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$, то из (4.43) видно, как это отразится на функции $\psi(x, \chi)$. Чем меньше $\operatorname{Re} \rho$, тем меньше $|x^\rho|$.

Риман [1] высказал гипотезу о том, что все нули $\zeta(s)$, кроме тривиальных $s = -2, -4, \ldots,$ лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Вообще можно предположить, что нули всех функций $L(s, \chi)$, образованных с характерами по всем модулям $\geqslant 1$, в области $0 < \sigma < 1$ лежат только на критической прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ [1]. Ни обобщенное, ни перво-

[1]) Это предположение называется также «гипотезой Пильца».

начальное предположения Римана до сих пор не доказаны. Положим

$$\theta(\chi) = \sup \operatorname{Re} \rho(\chi) = \sup \beta(\chi), \tag{5.5}$$

$$\theta_k = \max_{\chi \bmod k} \theta(\chi). \tag{5.6}$$

Так как мы уже знаем из § 2, что каждая функция $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$ имеет бесконечно много нулей $\rho = \rho(\chi)$, эти нули лежат симметрично относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ (см. начало § 4), то $\frac{1}{2} \leqslant \theta(\chi) \leqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant \theta_k \leqslant 1$. Обобщенная гипотеза Римана давала бы, что $\theta_k = \frac{1}{2}$ для всех $k \geqslant 1$. Но до сих пор никто не смог даже показать ни для какого k, что $\theta_k < 1$. Это означало бы улучшение теорем 4.7.3 и 4.7.4, которое вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5.1[1]). *Пусть $x \geqslant 2$. Для всех $k \leqslant x$ справедливы равенства*

$$\psi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\left(x^{\theta_k} \ln^2(x)\right), \tag{5.7}$$

$$\pi(x, k, l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)} + O\left(x^{\theta_k} \ln x\right), \tag{5.8}$$

где константы в $O(\quad)$ не зависят от k и l.

Доказательство. По лемме 4.7.1 достаточно доказать равенство (5.7). Применим теорему 4.6. Из $\beta_1 \leqslant \theta_k$ и $\operatorname{Re} \rho \leqslant \theta_k$ (поскольку по нашему определению β_1 в теореме 4.6.9 β_1 может существовать только при $\theta_k \geqslant \frac{3}{4}$) следует, что

$$E_1 \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + \sum_{|\gamma| \leqslant T}' \frac{x^{\rho}}{\rho} \ll x^{\theta_k} \sum_{|\gamma| \leqslant T} |\rho|^{-1} \ll x^{\theta_k} \ln^2 kT \qquad (x \geqslant T \geqslant 2). \tag{5.9}$$

Здесь сумма оценивается так же, как в (5.2), (5.3), и правая часть не зависит от χ. Отсюда, так как $\theta_k \geqslant \frac{1}{2}$, согласно равенству (4.43), написанному для $T = 2x^{1+\theta_k}$, следует $\Big($сначала при $x = N + \frac{1}{2}$, а затем также для всех $x \geqslant 2\Big)$, что при $k \leqslant x$

$$\psi(x, \chi) = E_0 x + O\left(x^{\theta_k} \ln^2 x\right). \tag{5.10}$$

[1]) Кох [1], Титчмарш [2].

Из (4.7.11) получаем (5.7); равенство (5.8) следует из леммы 4.7.1. В частности, если обобщенную гипотезу Римана считать правильной, то при $k \leqslant x$ имеют место формулы

$$\psi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x\right), \tag{5.11}$$

$$\pi(x, k, l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)} + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln x\right). \tag{5.12}$$

Естественно, эти формулы имеют значение только тогда, когда $x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x \leqslant \leqslant cx/\varphi(k)$, где c достаточно мало, т. е. когда $\varphi(k) \leqslant cx^{\frac{1}{2}} \ln^2 x$. Это, в частности, имеет место при $k \leqslant cx^{\frac{1}{2}} / \ln^2 x$. Если обобщенная гипотеза Римана считается верной, то, в частности, при всех $k \leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ получаем

$$\pi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k) \ln x} \{1 + o(1)\}, \tag{5.13}$$

где $o(1)$ зависит только от ε. При $x \geqslant k > cx^{\frac{1}{2}} / \ln^2 x$ имеет место тривиальная оценка $\pi(x, k, l) \leqslant x/k \leqslant x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x$. При $x^{\alpha} < k \leqslant \frac{1}{2} x$, $\alpha > \frac{1}{2}$, оценка из теоремы 2.4.1 лучше, чем (5.12). Если $\theta_k = 1$, то соотношения (5.7) и (5.8) становятся тривиальными.

§ 6. Другая явная формула

Если вместо интеграла в (4.27) напишем интеграл, подинтегральное выражение которого имеет вид $(L'/L) F(x, s)$, где $F(x, s)$ не обязательно равняется $\frac{x^s}{s}$, то получим явные формулы для некоторых сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) a(n, x)$, где при $\chi(n) \Lambda(n)$ появляются некоторые, зависящие от $F(x, s)$ сомножители $a(n, x)$. Эти сомножители (при подходящем $F(x, s)$) обеспечивают сходимость ряда. Такая формула потребуется нам позднее.

Пусть χ — любой характер по $\operatorname{mod} k$. Для действительного $y > 0$ и любого действительного b определим функцию $S(y, \chi, b)$ следующим образом:

$$S(y, \chi, b) = \sum_{n=2}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^b e^{-\ln^2 n/4y}. \tag{6.1}$$

Так как $\exp(-\ln^2 n/4y) \ll n^{-B}$ для любого постоянного B, то этот ряд сходится для всех b. Из теоремы П.3.3 при $a_n = \chi(n)\Lambda(n)$[1])

$$\sigma_0 = 1, \quad w = -b, \quad f(s) = -\frac{L'}{L}(s, \chi)$$

получаем

$$S(y, \chi, b) = i\sqrt{\frac{y}{\pi}} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{L'}{L}(s, \chi)\, e^{(s+b)^2 y}\, ds \qquad (y > 0). \tag{6.2}$$

Теперь, если не оговорено противное, мы будем в отличие от прежнего обозначать через $\rho = \rho(\chi) = \beta + i\gamma$ все нули $s = \rho$ функции $L(s, \chi)$ в области $0 \leqslant \sigma < 1$.

Теорема 6.1. *Пусть $y \geqslant 1$ — действительное число, $k \geqslant 1$ и χ — любой характер по* $\operatorname{mod} k$. *Если b — действительное число, $\frac{1}{2} \leqslant b < \frac{3}{4}$, то имеет место равенство*

$$S(y, \chi, b) = 2\sqrt{\pi y}\left\{e^{(1+b)^2 y} E_0 - \sum_{\rho} e^{(\rho+b)^2 y}\right\} + O(\ln 2k). \tag{6.3}$$

При этом $\rho = \rho(\chi)$ пробегает все нули функции $L(s, \chi)$ в области $0 \leqslant \sigma < 1$ (каждый нуль столько раз, какова его кратность).

Положим $F(s) = \frac{L'}{L} \cdot e^{(s+b)^2 y}$. Пусть $m \geqslant 2$ и T_m — одно из чисел, введенных в теореме 4.2. Тогда из этой теоремы следует, что при $\frac{1}{2} \leqslant b < \frac{3}{4}$ и $T_m \to \infty$ выполняется оценка

$$\int_{-b+iT_m}^{2+iT_m} F(s)\, ds \ll \ln^2 kT_m \cdot \exp\left\{-y\left(T_m^2 + O(1)\right)\right\}.$$

Поэтому из теоремы о вычетах, примененной к прямоугольнику с вершинами $2 \pm iT_m$, $-b \pm iT_m$, при $T_m \to \infty$ получаем

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} F(s)\, ds = \int_{-b-i\infty}^{-b+i\infty} F(s)\, ds + 2\pi i \sum_{-b<\sigma<2} \operatorname{Res} F(s). \tag{6.4}$$

Здесь интеграл в правой части существует. Поскольку $-\frac{3}{4} < -b \leqslant -\frac{1}{2}$ и при $y \geqslant 1$ имеет место оценка

$$\int_0^\infty \ln(t+2)\, e^{-t^2 y}\, dt = y^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \ln\left(\xi y^{-\frac{1}{2}} + 2\right) e^{-\xi^2}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant y^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \ln(\xi + 2)\, e^{-\xi^2}\, d\xi \ll y^{-\frac{1}{2}},$$

[1]) Так как $\Lambda(1) = 0$, то $a_1 = 0$.

то по теореме 4.3

$$\int_{-b-i\infty}^{-b+i\infty} F(s)\,ds = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L'}{L}(-b+it,\ \chi)\,e^{-t^2y}\,dt \ll$$

$$\ll \int_{0}^{\infty} \ln k\,(t+2)\,e^{-t^2y}\,dt \ll y^{-\frac{1}{2}}\ln 2k.$$

Остается еще вычислить вычеты в равенстве (6.4). В области $-b<\sigma<2$ можно рассматривать как особые точки функции L'/L только точки $s=1$, $s=\rho$. Имеем

$$\operatorname*{Res}_{s=1} F(s) = -\,e^{(1+b)^2y}E_0,$$

$$\operatorname*{Res}_{s=\rho} F(s) = \nu_\rho e^{(\rho+b)^2y},$$

где ν_ρ обозначает кратность нуля $s=\rho$ функции $L(s,\ \chi)$. Тем самым равенство 6.3 доказано.

Заметим, что ряд в (6.3) сходится абсолютно и равномерно в каждой области $1\leqslant y\leqslant A<\infty$. Пусть $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n$ — нули функции $L(s,\ \chi)$ в области $0\leqslant\sigma<1$, $t\geqslant 0$, упорядоченные по возрастанию ординат. Иначе говоря, если $\rho_n=\rho_n(\chi)=\beta_n+i\gamma_n$, то $0\leqslant\gamma_1\leqslant\gamma_2<\ldots$ (ρ с равными мнимыми частями располагаются в любом порядке). Тогда, согласно (3.23), при $\gamma_n\to\infty$ имеет место $n\leqslant N_\chi(\gamma_n)\ll\gamma_n\ln k\gamma_n$. Отсюда, например, следует, что $(k\gamma_n)^2>c_1n$ или $\gamma_n^2>c_2n$, $c_2=c_2(k)$.

Поэтому при $1\leqslant y\leqslant A$ получаем

$$\exp\left\{(\rho_n+b)^2y\right\}\ll\exp\left(-\gamma_n^2y\right)\ll\exp\left(-c_2n\right),$$

где константа в $\ll$ зависит только от A, и равномерная сходимость ряда из (6.3) доказана.

§ 7. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии

Пусть k — целое натуральное число и $(l,\ k)=1$. В гл. IV мы показали, что всегда существует бесчисленное множество простых чисел $\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k)$. Можно спросить, насколько велико первое простое число при данном k. Положим

$$p_1(k,\ l)=\min_{p\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k)} p. \qquad (7.1)$$

Теорема 7.1. *Пусть* $k\geqslant 1$, $(l,\ k)=1$. *Для любого* $\varepsilon>0$

$$p_1(k,\ l)<c(\varepsilon)\,e^{k^\varepsilon}, \qquad (7.2)$$

причем $c(\varepsilon)$ *не зависит от* k.

Доказательство. Из теоремы 4.8.3 следует, что $\pi(x, k, l) > 0$ при $\ln^A x \geqslant k$, $k > k_0(A)$ для сколь угодно большого A. Это значит, что при $x \geqslant \exp k^{1/A}$, $k > k_0(A)$, существует простое число p, такое, что $p \equiv l \pmod k$, $p \leqslant x$. Так как величина $1/A$ при достаточно большом A может быть сделана сколь угодно малой, то теорема доказана.

Теорема 7.2 [1]). *Пусть* θ_k, *так же как в* § 5, *является верхней гранью действительных частей нулей всех функций* $L(s, \chi)$, *образованных с характерами по* $\bmod k$. *Тогда, если гипотеза о том, что* $\theta_k < 1$, *правильна, имеет место оценка*

$$p_1(k, l) < c\varphi(k)^{1/(1-\theta_k)} (\ln k)^{2/(1-\theta_k)} \quad (k \geqslant 2, \ (l, k) = 1). \tag{7.3}$$

Доказательство. Из (5.7) следует, что $\psi(x, k, l) > 0$, если $x/\varphi(k) > c_1 x^{\theta_k} \ln^2 x$, т. е. если при некотором c_1 $x^{1-\theta_k}/\ln^2 x > c_1\varphi(k)$. Это выполняется, если при достаточно большом c_2 положим

$$x = c_2\varphi(k)^{1/(1-\theta_k)} (\ln k)^{2/(1-\theta_k)}, \tag{7.4}$$

так как всегда $\ln\varphi(k) \leqslant \ln k$. Этим неравенство (7.3) доказано.

Если, в частности, верна обобщенная гипотеза Римана $\left(\theta_k = \frac{1}{2}\right)$, то

$$p_1(k, l) < c\varphi(k)^2 \ln^4 k < c(\varepsilon) k^{2+\varepsilon}. \tag{7.5}$$

Если бы для всех k было доказано, что $\theta_k \leqslant \theta < 1$, то из теоремы 7.2 получили бы, что существует абсолютная константа C, такая, что

$$p_1(k, l) < k^C \quad (k \geqslant 2). \tag{7.6}$$

Туран [2] впервые показал, что неравенство (7.6) выполняется, если для всех χ по $\bmod k$

$$L(s, \chi) \neq 0, \quad \text{если} \quad \sigma \geqslant 1 - \alpha, \quad |t| \leqslant A, \tag{7.7}$$

причем α, A положительны и не зависят от k. Это мы сейчас докажем.

Утверждение (7.7) до сих пор не доказано. Однако Linнику [3] удалось получить (7.6) без всяких недоказанных предположений (см. гл. X).

Теорема 7.3 [2]). *Пусть* α *и* A — *положительные действительные числа, и пусть утверждение* (7.7) *верно для всех* $k \geqslant 2$ *и любого характера* χ *по* $\bmod k$ [3]). *Тогда имеет место оценка* (7.6).

[1]) См. Човла [1].
[2]) Туран [2] (другой метод доказательства).
[3]) Очевидно, это верно тогда также при $k \geqslant 1$.

Доказательство. Будем предполагать, что $k \geqslant 2$. Если при $y \geqslant 1$ положим

$$S(y,\ k,\ l) = \sum_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\ k)} \Lambda(n)\, n^{\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 n/4y}, \tag{7.8}$$

то из (6.1), (6.3) и (4.2.11) следует, что[1])

$$S(y,\ k,\ l) = \varphi(k)^{-1} \sum_{\chi \bmod k} S\left(y,\ \chi,\ \frac{1}{2}\right) \bar{\chi}(l) =$$

$$= 2\varphi(k)^{-1} \sqrt{\pi y}\left(e^{\frac{9}{4}y} - \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{\rho} e^{\left(\rho + \frac{1}{2}\right)^2 y}\right) + O(\ln k); \tag{7.9}$$

где $\sum\limits_{\chi}\sum\limits_{\rho}$ обозначает суммирование по нулям всех L-функций, соответствующих характерам по $\mathrm{mod}\, k$, в области $0 \leqslant \sigma < 1$. Введем величины $\gamma(\chi)$ при помощи равенства

$$\rho = \beta + i\gamma = 1 - \delta + i\gamma. \tag{7.10}$$

Тогда $0 < \delta \leqslant 1$ и, согласно (7.9),

$$S(y,\ k,\ l) = c_1 \varphi(k)^{-1} y^{\frac{1}{2}} e^{\frac{9}{4}y}\left(1 - \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{\rho} \exp\{-yA(\delta,\ \gamma)\}\right) + $$
$$+ O(\ln k), \tag{7.11}$$

где

$$A(\delta,\ \gamma) = \delta(3 - \delta) + \gamma^2 - i\gamma(3 - 2\delta),$$

причем $\sum\limits_{\chi}\sum\limits_{\rho}$ обозначает суммирование по всем нулям $1 - \delta + i\gamma$ всех функций $L(s,\ \chi)$ (χ по $\mathrm{mod}\, k$). Так как $0 < \delta \leqslant 1$, то

$$\mathrm{Re}\, A(\delta,\ \gamma) > \delta + \gamma^2.$$

Отсюда следует, что

$$S(y,\ k,\ l) > c_1 \varphi(k)^{-1} y^{\frac{1}{2}} e^{\frac{9}{4}y}\left(1 - \sum_{\chi}\sum_{\rho} \exp\{-y(\delta + \gamma^2)\}\right) + O(\ln k). \tag{7.12}$$

Если условие (7.7) выполнено, то, используя (3.11) или (3.24) при $y \geqslant 1$, получим

$$\sum_{\chi} \sum_{\rho,\, |\gamma| \leqslant A} \exp\{-y(\delta + \gamma^2)\} \leqslant \sum_{\chi} \sum_{\rho,\, |\gamma| \leqslant A} e^{-\delta y} \ll$$
$$\ll \varphi(k)\, e^{-\alpha y}(A + 1) \ln k\,(A + 2). \tag{7.13}$$

---

[1]) Имеет место равенство $\varphi(k)^{-1} \sum\limits_{\chi \bmod k} \ln k = \ln k$.

Пусть m — ближайшее к A целое число, $m > A$, $m \geqslant 1$. Тогда, согласно (3.11), имеет место оценка

$$\sum_{\rho,\ |\gamma| > A} \exp\{-y(\delta+\gamma^2)\} \leqslant \sum_{\rho,\ |\gamma| > A} e^{-\gamma^2 y} =$$
$$= \Bigl(\sum_{A < |\gamma| \leqslant m} + \sum_{m < |\gamma| \leqslant m+1} + \ldots\Bigr) e^{-\gamma^2 y} \ll$$
$$\ll \ln k(m+2)\, e^{-A^2 y} + \sum_{m \leqslant \gamma < \infty} \ln k(\gamma+2) \cdot e^{-\gamma^2 y} \ll \ln k \cdot e^{A+1} e^{-A^2 y}, \tag{7.14}$$

так как

$$\sum_{m < \nu < \infty} \ln \nu \cdot e^{-\nu^2 y} \leqslant e^{-(m+1)^2 y}\{(m+1) + (m+2)\, e^{-y} + \ldots\} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-m^2 y}\{(m+1) + (m+2)\, e^{-1} + \ldots\} < e^m e^{-m^2 y} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, e^{-n},$$

$A < m \leqslant A+1$; такое же неравенство имеет место также для $\sum e^{-\nu^2 y}$. Отсюда получается

$$\sum_{\chi} \sum_{\rho,\ |\gamma| > A} \exp\{-y(\delta+\gamma^2)\} \ll \varphi(k) \ln k \cdot e^{A+1} e^{-A^2 y}. \tag{7.15}$$

Из последнего соотношения и из (7.13) следует, что

$$\sum_{\chi} \sum_{\rho} \exp\{-y(\delta+\gamma^2)\} \ll \varphi(k) \ln k \cdot e^{A+1}\{e^{-\alpha y} + e^{-A^2 y}\}. \tag{7.16}$$

Подставляя это в (7.12), получаем

$$S(y, k, l) > c_1 \varphi(k)^{-1} y^{\frac{1}{2}} e^{\frac{9}{4} y} - R(y, k, \alpha, A), \tag{7.17}$$

$$R(y, k, \alpha, A) \ll \ln k \cdot \left\{1 + e^{\frac{9}{4} y} y^{\frac{1}{2}} e^{A+1}(e^{-\alpha y} + e^{-A^2 y})\right\} \tag{7.18}$$
$$(y \geqslant 1,\ k \geqslant 2).$$

Для доказательства теоремы 7.3 нам нужны еще два вспомогательных утверждения, которые мы сейчас докажем.

Лемма 7.1. *Если* $\ln z \geqslant 4 \max(\ln k, y)$, $k \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, *то*

$$S_1 = S_1(y, z, k, l) = \sum_{\substack{n > z \\ n \equiv l \pmod{k}}} \Lambda(n)\, n^{\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 n/4y} <$$
$$< c_2 \varphi(k)^{-1} \exp\left(\frac{3}{2} \ln z - \frac{\ln^2 z}{4y}\right). \tag{7.19}$$

Доказательство. Так как $\psi(x, k, l) \leqslant \psi(x) \leqslant x$, то по теореме П.1.4 (полагая в ней $\lambda_n = n$, $a_n = 0$ при $n \leqslant z$ и $a_n = \Lambda(n)$ при

$z < n \leqslant x$, а кроме того, устремляя $x \to \infty$) имеем при $z \geqslant 2$

$$S_1 = -\int\limits_z^\infty \{\psi(\xi, k, l) - \psi(z, k, l)\} \left(\xi^{\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 \xi/4y}\right)' d\xi =$$

$$= -\int\limits_z^\infty \psi(\xi, k, l) \left(\xi^{\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 \xi/4y}\right)' d\xi - \psi(z, k, l)\, z^{\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 z/4y}. \quad (7.20)$$

По теореме 5.2.1 при $k \leqslant x^{1/4}$ и $x \geqslant 2$

$$\psi(x, k, l) = \sum_{p \leqslant x,\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \ln p + O\left(\sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p\right) \leqslant$$

$$\leqslant \pi(x, k, l) \ln x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \ll \frac{x}{\varphi(k)}. \quad (7.21)$$

Поэтому для $z \geqslant k^4$ интеграл в правой части (7.20) становится равным

$$\int\limits_z^\infty \psi(\xi, k, l)\, \xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 \xi/4y} \left(\frac{\ln \xi}{2y} - \frac{1}{2}\right) d\xi \ll$$

$$\ll \varphi(k)^{-1} \int\limits_{\ln z}^\infty \left(\frac{\eta}{2y} - \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^2}{4y}\right) d\eta =$$

$$= \varphi(k)^{-1} \left\{ \exp\left(\frac{3}{2} \ln z - \frac{1}{4y} \ln^2 z\right) + \int\limits_{\ln z}^\infty \exp\left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^2}{4y}\right) d\eta \right\} \ll$$

$$\ll \varphi(k)^{-1} \exp\left(\frac{3}{2} \ln z - \frac{\ln^2 z}{4y}\right).$$

Обозначим $\eta = u + \ln z$. Тогда последняя оценка справедлива в силу того, что

$$\int\limits_{\ln z}^\infty \exp\left(\frac{3}{2}\eta - \frac{\eta^2}{4y}\right) d\eta =$$

$$= \exp\left(\frac{3}{2} \ln z - \frac{\ln^2 z}{4y}\right) \int\limits_0^\infty \exp\left\{\frac{3}{2} u - \frac{1}{4y} u (u + 2 \ln z)\right\} du \quad (7.22)$$

и $(u + 2 \ln z)/4y \geqslant \ln z/2y \geqslant 2$, так как здесь мы предполагали, что $\ln z \geqslant 4y$. Второй член в правой части (7.20) не превосходит нуля, и тем самым лемма доказана.

Лемма 7.2. *Если* $y \geqslant 1$, $\ln z \geqslant 3y$, *то*

$$S_2 = S_2(y, z) = \sum_{n \leqslant z,\ n=p^m,\ m \geqslant 2} \Lambda(n) n^{\frac{1}{2}} l^{-\ln^2 n/4y} <$$

$$< c_3 \ln z \left\{ \exp \frac{7}{4} y + \exp\left(\ln z - \frac{\ln^2 z}{4y}\right)\right\}. \quad (7.23)$$

Доказательство. При фиксированном $m \geqslant 2$ по теореме П. 1.4 справедливо равенство

$$\sum_{p^m \leqslant z} \ln p \cdot p^{\frac{1}{2}m} \exp\left(-\frac{m^2}{4y} \ln^2 p\right) =$$

$$= \theta(z^{1/m}) z^{\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 z/4y} - \int_2^{z^{1/m}} \theta(\xi) \left\{ \xi^{\frac{1}{2}m} \exp\left(-\frac{m^2}{4y} \ln^2 \xi\right)\right\}' d\xi. \quad (7.24)$$

Так как $m \geqslant 2$, то $\theta(z^{1/m}) \ll z^{\frac{1}{2}}$ и первый член справа остается меньше величины, указанной в (7.23). Остается еще оценить второй член в правой части (7.24). Имеем

$$\int_2^{z^{1/m}} \theta(\xi) \left(\frac{m^2}{2y} \ln \xi - \frac{1}{2} m\right) \xi^{\frac{1}{2}m-1} \exp\left(-\frac{m^2}{4y} \ln^2 \xi\right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int_{m^{-1}y}^{m^{-1}\ln z} \theta(e^t) \left(\frac{m^2}{2y} t - \frac{1}{2} m\right) \exp\left(\frac{1}{2} mt - \frac{m^2}{4y} t^2\right) dt,$$

поскольку величина $\frac{m^2}{2y} t - \frac{1}{2} m$ не превосходит нуля для $\ln 2 \leqslant \leqslant t \leqslant m^{-1}y$ и больше нуля для $t > m^{-1}y$. Так как $\theta(x) \ll x$, предыдущее соотношение можно продолжить

$$\ll \int_{m^{-1}y}^{m^{-1}\ln z} \left(\frac{m^2}{2y} t - \frac{1}{2} m\right) \exp\left\{\left(\frac{1}{2} m + 1\right) t - \frac{m^2}{4y} t^2\right\} dt =$$

$$= \int_{m^{-1}y}^{(m^{-1}+4m^{-2})y} + \int_{(m^{-1}+4m^{-2})y}^{m^{-1}\ln z}. \quad (7.25)$$

Очевидно, что $(m^{-1}+4m^{-2})\,y\leqslant m^{-1}\ln z$ в силу того, что $\ln z\geqslant$ $\geqslant 3y\geqslant y(1+4m^{-1})$ для $m\geqslant 2$. Для первого интеграла получим оценку

$$\int\limits_{m^{-1}y}^{(m^{-1}+4m^{-2})\,y}\leqslant\exp\{(m^{-1}+4m^{-2})\,y\}\times$$

$$\times\int\limits_{m^{-1}y}^{(m^{-1}+4m^{-2})\,y}\left(\frac{m^2}{2y}\,t-\frac{1}{2}\,m\right)\exp\left(\frac{1}{2}\,mt-\frac{m^2}{4y}\,t^2\right)dt=$$

$$=-\exp\{(m^{-1}+4m^{-2})\,y\}\exp\left(\frac{1}{2}mt-\frac{m^2}{4y}\,t^2\right)\Big|_{m^{-1}y}^{(m^{-1}+4m^{-2})\,y}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{(m^{-1}+4m^{-2})y+\frac{1}{4}\,y\right\}\leqslant e^{\frac{7}{4}\,y}\qquad(m\geqslant 2).\qquad(7.26)$$

Если $t\geqslant(m^{-1}+4m^{-2})\,y$, то

$$\frac{m^2}{2y}\,t-\frac{1}{2}\,m\geqslant 2.$$

Поэтому

$$\int\limits_{(m^{-1}+4m^{-2})\,y}^{m^{-1}\ln z}\leqslant\int\limits_{(m^{-1}+4m^{-2})\,y}^{m^{-1}\ln z}2\left(\frac{m^2}{2y}\,t-\frac{1}{2}\,m-1\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\left(\frac{1}{2}\,m+1\right)t-\frac{m^2}{4y}\,t^2\right\}dt=$$

$$=-2\exp\left\{\left(\frac{1}{2}\,m+1\right)t-\frac{m^2}{4y}\,t^2\right\}\Big|_{(m^{-1}+4m^{-2})\,y}^{m^{-1}\ln z}\leqslant 2e^{\frac{3}{4}\,y},$$

так как для $m\geqslant 2$ значение в фигурных скобках на нижней границе $\leqslant\frac{3}{4}\,y$. Таким образом, мы установили, что интеграл в (7.24) $\ll\exp\frac{7}{4}\,y$. Так как сумма S_2 состоит из $\ll\ln z$ членов вида (7.24), то лемма доказана.

Теперь мы можем довести до конца доказательство теоремы 7.3. Если опустить из $S(y,\,k,\,l)$ члены с $n>z$ и $n=p^m$, $m\geqslant 2$, то из (7.8), (7.17) и обеих только что доказанных лемм следует, что

$$\theta(z)=\sum_{p\leqslant z,\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\ln p\cdot p^{\frac{1}{2}}e^{-\ln^2 p/4y}>c_1\varphi(k)^{-1}\,y^{\frac{1}{2}}e^{\frac{9}{4}\,y}-R-R_1.\tag{7.27}$$

Здесь R то же самое, что и в (7.17), (7.18), а

$$R_1\ll\varphi(k)^{-1}\exp\left(\frac{3}{2}\ln z-\frac{\ln^2 z}{4y}\right)+$$

$$+\ln z\cdot\left\{\exp\frac{7}{4}\,y+\exp\left(\ln z-\frac{\ln^2 z}{4y}\right)\right\}$$

для $\ln z\geqslant 4\max(\ln k,\ y)$, $y\geqslant 1$.

Теперь положим $y=B\ln k$, где $B>1$ будет выбрано позднее, и $\ln z=4y=4B\ln k$. Тогда условие $\ln z\geqslant 4\max(\ln k, y)$ выполнено. Отсюда получим при $k\geqslant 2$

$$\varphi(k)^{-1}y^{\frac{1}{2}}e^{\frac{9}{4}y}>k^{\left(\frac{9}{4}B-1\right)}B^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}k, \tag{7.28}$$

$$R\ll\ln k\cdot\left\{1+k^{\frac{9}{4}B}\ln^{\frac{1}{2}}k\cdot B^{\frac{1}{2}}e^{A+1}\left(k^{-\alpha B}+k^{-A^2B}\right)\right\}, \tag{7.29}$$

$$R_1\ll k^{-1+\varepsilon}k^{2B}+4B\ln k\cdot\left(k^{\frac{7}{4}B}+1\right). \tag{7.30}$$

Для $B>\max(1/\alpha, 1/A^2, 2)$ функции R и R_1 при большом k имеют меньший порядок, чем (7.28). Оценка (7.27) дает поэтому $\theta(k^{4B})>0$ для большого k.

Отсюда следует, что должно существовать такое простое число p, что

$$p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k),\quad p\leqslant k^{4B}.$$

Таким образом, теорема 7.3 доказана для достаточно больших k при $C=4B$.

§ 8. Нерегулярность в распределении простых чисел

В гл. IV мы видели, что функция $\pi(x, k, l)$ приближается функцией $\varphi(k)^{-1}\operatorname{li}x$ с точностью до $O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right)$, по крайней мере если k остается по отношению к x достаточно малым. Покажем теперь, что остаточный член в этом приближении нельзя сделать меньше величины определенного порядка. Однако мы ограничимся ради простоты случаем $k=1$, $\pi(x, k, l)=\pi(x)$.

Введем, следуя Харди и Литлвуду, такое обозначение. Пусть $g(x)$ — функция, при $x\to\infty$ монотонно стремящаяся к ∞. Тогда, если $f(x)$ — действительная функция, равенство

$$f(x)=\Omega_+(g(x))\quad\text{или}\quad f(x)=\Omega_-(g(x))\quad(x\to\infty) \tag{8.1}$$

означает, что существует сколь угодно большое значение x, для которого при подходящей константе $c>0$ выполнено соответственно неравенство

$$f(x)>cg(x)\quad\text{или}\quad f(x)<-cg(x). \tag{8.2}$$

Запись

$$f(x)=\Omega_\pm(g(x))\quad(x\to\infty) \tag{8.3}$$

означает, что существует сколь угодно большое значение x, для которого выполняются оба неравенства 8.2. Для действительной или комплексной функции $f(x)$ равенство

$$f(x)=\Omega(g(x))\quad(x\to\infty) \tag{8.4}$$

означает то же самое, что и равенство $|f(x)| = \Omega_+(g(x))$, $x \to \infty$. Этот символ можно варьировать так же, как мы делали это с символами $O(\ )$ и $o(\ )$. Например, при $x \to \infty$ имеем

$$xe^{ix} = \Omega(x), \quad x\cos x = \Omega_\pm(x), \quad x + x\cos(x) = \Omega_+(x).$$

Однако равенство $x + x\ln x = \Omega_-(x)$ неверно.

Пусть сначала θ' — нижняя граница тех α, для которых выполнено соотношение

$$\psi(x) = x + O(x^\alpha). \tag{8.5}$$

Тогда для $\alpha < \theta'$

$$\psi(x) = x + \Omega(x^\alpha). \tag{8.6}$$

Из (3.3.8) следует не больше чем тривиальный результат $\theta' \leqslant 1$. Положим теперь $\theta = \theta_1$, где θ_1 (как в § 5) — верхняя граница действительных частей всех нулей $\zeta(s)$. (Напомним, что для $k=1$ $\zeta(s)$ — единственная L-функция.) Из теоремы 5.1 при $k=1$ тогда следует, что $\theta' \leqslant \theta$.

Теорема 8.1. *Имеет место равенство* $\theta' = \theta$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\theta \leqslant \theta'$. Согласно формуле (П. 1.6), написанной для $\lambda_n = n$, $a_n = \Lambda(n)$, $g(\xi) = \xi^{-s}$, из (3.2.12) при $\sigma > 1$ следует

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = s\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx \tag{8.7}$$

и поэтому

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{s}{s-1} = s\int_1^\infty \frac{\psi(x)-x}{x^{s+1}}\,ds \quad (\sigma > 1). \tag{8.8}$$

Для каждого положительного ε по определению θ' имеет место соотношение $\psi(x) - x = O(x^{\theta'+\varepsilon})$. Отсюда следует

$$|\{\psi(x) - x\}\,x^{-s-1}| < c(\varepsilon)\,x^{\theta'-\sigma-1+\varepsilon} \quad (x \geqslant 1),$$

и, таким образом, при $\sigma \geqslant \theta' + 2\varepsilon$ интеграл из (8.8) равномерно сходится. Более того, функция в левой части (8.8) регулярна в области $\sigma > \theta'$. Следовательно, $\zeta(s)$ в этой области не имеет нулей, т. е. $\theta \geqslant \theta'$, что и требовалось доказать.

Мы видели уже раньше, что $\theta \geqslant 1/2$. Теперь отсюда следует, что никакое соотношение вида $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$ с $\alpha < 1/2$ не может существовать. Поэтому

$$\psi(x) = x + \Omega(x^\alpha), \quad \alpha < \frac{1}{2}. \tag{8.9}$$

Труднее сделать заключение о знаке остаточного члена. Мы покажем, что в формуле (8.9) можно заменить символ Ω на символ $\Omega_{\pm}$. Для доказательства нам нужны свойства функций, представимых интегралом Дирихле, т. е. имеющих вид

$$\int_1^{\infty} \frac{a(x)}{x^s}\, dx. \tag{8.10}$$

Для этих функций имеют место теоремы, аналогичные теоремам для рядов Дирихле (см. П., § 2); существует абсцисса сходимости σ_0, $-\infty \leqslant \sigma_0 \leqslant \infty$, такая, что интеграл (8.10) расходится при $\sigma < \sigma_0$, а в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ представляет аналитическую функцию. Если $a(x)$ действительна и имеет постоянный знак, то (аналогично теореме П. 2.4) $s = \sigma_0$ — особая точка аналитической функции, представленной в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ интегралом (8.10). Доказательство этих фактов проходит аналогично доказательствам в П., § 2, и мы не будем их здесь приводить.

Положим для $x > 0$

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \sum \frac{1}{m} = \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n}.$$

Тогда по теореме о простых числах при $x \geqslant 2$ и $M = [\ln x / \ln 2]$ имеем

$$\Pi(x) - \pi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \sum_{m \geqslant 2} \frac{1}{m} = \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{M}\pi(x^{1/M}) = \frac{x^{1/2}}{\ln x}(1 + o(1)) + O(Mx^{1/3}) = \frac{x^{1/2}}{\ln x}(1 + o(1)). \tag{8.11}$$

Теорема 8.2. *Для каждого* α *в интервале* $0 < \alpha < \theta\ (\leqslant 1)$ *имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x + \Omega_{\pm}(x^{\alpha}), \\ \Pi(x) &= \operatorname{li} x + \Omega_{\pm}(x^{\alpha}) \quad (x \to \infty). \end{aligned} \tag{8.12}$$

Доказательство. Докажем сначала, что $\psi(x) - x = \Omega_{+}(x^{\alpha})$. Предположим, что для некоторого $A > 0$ $\psi(x) - x \leqslant Ax^{\alpha}$, $\alpha < \theta$, $x \geqslant 1$, и покажем, что это ведет к противоречию. Согласно (8.8), при $\sigma > 1$

$$g(s) = \int_1^{\infty} \frac{\psi(x) - x - Ax^{\alpha}}{x^{s+1}}\, dx = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} - \frac{A}{s-\alpha}. \tag{8.13}$$

Этот интеграл есть интеграл Дирихле с $a(x) = \{\psi(x) - x - Ax^{\alpha}\}/x \leqslant 0$. По аналогии с теоремой П. 2.4 σ_0 должна быть особой точкой $g(s)$, следовательно, σ_0 является абсциссой сходимости интеграла. Теперь $\zeta(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \geqslant 0$, согласно (4.7.1), и функция

$$-\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1}$$

в точке $s=1$ регулярна. Поэтому $s=\alpha$ — единственная особенность на положительной действительной оси у функции, стоящей в правой части (8.13), и $\alpha=\sigma_0$. Но тогда функция $g(s)$ должна быть регулярной даже во всей полуплоскости $\sigma > \sigma_0 = \alpha$, что невозможно, так как в области $\sigma > \alpha$ обязательно лежат нули $\zeta(s)$, следовательно, особые точки функции ζ'/ζ, а также и функции $g(s)$. Для доказательства соотношения $\psi(x) - x = \Omega_-(x^\alpha)$, $0 < \alpha < \theta$, показывают аналогично, что предположение $\psi(x) - x \geqslant -Ax^\alpha$ $(x \geqslant 1)$ ведет к противоречию. Тем самым первая часть (8.12) доказана.

Чтобы доказать вторую часть (8.12), мы исходим из формулы

$$\ln \zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\Pi(x)}{x^{s+1}}\,dx \qquad (\sigma > 1),$$

которая получается из теоремы П.1.4 и соотношения

$$\ln \zeta(s) = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-s} \qquad (\sigma > 1),$$

следующего из разложения $\zeta(s)$ в произведение. При этом под $\ln\zeta(s)$ понимают ветвь, которая действительна для действительного $s > 1$. Так же, как в (8.13), рассматриваем функцию

$$G(s) = \int_1^\infty \frac{b(x)}{x^s}\,dx \qquad (\sigma > 1), \tag{8.14}$$

где

$$b(x) = \begin{cases} (\Pi(x) - \operatorname{li} x - Ax^\alpha)\,x^{-1}, & x \geqslant 2, \\ (\Pi(x) - Ax^\alpha)\,x^{-1}, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Так как при $x \geqslant 2$

$$\operatorname{li} x = \operatorname{li} 2 + \int_2^x \frac{d\xi}{\ln \xi},$$

то для действительного $s > 1$ имеем

$$s\int_2^\infty \frac{\operatorname{li} x}{x^{s+1}}\,dx + \frac{\operatorname{li} x}{x^s}\Bigg|_2^\infty = \int_2^\infty \frac{dx}{x^s \ln x},$$

и после подстановки $u=(s-1)\ln x$

$$\int\limits_{(s-1)\ln 2}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{u}=\int\limits_{(s-1)\ln 2}^{1} e^{-u}\frac{du}{u}+c=$$

$$=\int\limits_{(s-1)\ln 2}^{1}\frac{du}{u}+\int\limits_{(s-1)\ln 2}^{1}(e^{-u}-1)\frac{du}{u}+c=-\ln(s-1)+R(s), \quad (8.15)$$

причем $R(s)$ — целая функция (которую можно продолжить на всю плоскость). В итоге получаем

$$G(s)=\frac{1}{s}\ln\{(s-1)\zeta(s)\}-\frac{A}{s-\alpha}-\frac{R(s)}{s}-\frac{\mathrm{li}\,2}{s2^s}.$$

Отсюда видно, что в полуплоскости $\sigma>\theta$ функция $G(s)$ однозначна и регулярна, так как там функция $(s-1)\zeta(s)$ не нуль и не бесконечность. Пусть теперь σ_0 — абсцисса сходимости интеграла в (8.14). Если бы для постоянного $A>0$ всегда было $b(x)\geqslant 0$, то функция $G(s)$ в точке $s=\sigma_0$ должна была бы иметь особенность (аналогия с теоремой П.2.4), а в полуплоскости $\sigma>\sigma_0$ должна быть регулярной. Так как $\zeta(s)\neq 0$ при $s\geqslant 0$, то никакая ветвь $G(s)$ не может иметь на положительной действительной оси особенности, отличной от $s=\alpha$. Следовательно, должно быть $\sigma_0=\alpha$. Но так как $\alpha<\theta$ по определению θ, то функция $G(s)$ не может быть регулярной в полуплоскости $\sigma>\sigma_0=\alpha$, потому что $\zeta(s)$ имеет там нули. Таким образом, $\Pi(x)-\mathrm{li}\,x=\Omega_+(x^\alpha)$.

Аналогично доказывают, что эта разность равняется $\Omega_-(x^\alpha)$.

Так как $\theta\geqslant {}^1/_2$, то из теоремы 8.2 следует, в частности, что $\psi(x)=x+\Omega_+(x^\alpha)$ для каждого $\alpha<{}^1/_2$.

Теорема 8.2 принадлежит Шмидту [1], который также показал, что утверждение теоремы

$$\psi(x)=x+\Omega_+(x^{1/2})\quad (x\to\infty) \quad (8.16)$$

может быть улучшено. Литлвуд [2] доказал [1]), что имеет место соотношение

$$\psi(x)=x+\Omega_\pm(x^{1/2}\ln_3 x)\quad (x\to\infty). \quad (8.17)$$

Мы это в последующем докажем.

С помощью (8.17) мы получим результат, лучший чем (8.12):

$$\Pi(x)-\mathrm{li}\,x=\Omega_\pm\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\ln_3 x\right)\quad (x\to\infty). \quad (8.18)$$

Численные расчеты вели к предположению, что всегда имеет место неравенство $\pi(x)<\mathrm{li}\,x$. Например, это верно при всех

[1]) См. также Ландау [12].

$x < 10^9$. Литлвуд, доказав соотношение (8.18), тем самым показал, что это не всегда так. А именно из (8.11) следует, что

$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x = \Pi(x) - \mathrm{li}\, x - \frac{x^{1/2}}{\ln x}(1 + o(1)) \quad (x \to \infty). \tag{8.19}$$

Отсюда и из (8.12) еще не следует, что разность $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$ должна принимать положительные значения, так как x^{α} $(\alpha < 1/2)$ имеет меньший порядок, чем $x^{1/2}/\ln x$. Однако с учетом (8.18) это получается сейчас же, так как из (8.18) и (8.19) следует, что

$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x = \Omega_{\pm}\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\ln_3 x\right) \quad (x \to \infty). \tag{8.20}$$

Основная идея доказательства формулы (8.17) такова. Рассмотрим формулу из теоремы 4.5

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}) + R(x, T). \tag{8.21}$$

Здесь $x \geqslant 2$ и для $R(x, T)$ выполнены оценки (4.39)—(4.41). Чтобы доказать (8.17), нужно сделать как можно больше сумму

$$\sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\rho}}{\rho}. \tag{8.22}$$

Если $\theta > 1/2$ и, следовательно, гипотеза Римана неверна, то (8.17) следует уже из теоремы 8.2, так как тогда (8.12) справедливо для некоторого $\alpha > 1/2$. Таким образом, нужно доказать (8.17) при предположении правильности гипотезы Римана. Если все ρ имеют вид $\rho = 1/2 + i\gamma$, то в сумме (8.22) можно заменить ρ приближенно на $i\gamma$. Так как нули $\zeta(s)$ лежат симметрично относительно действительной оси, то можно объединить сопряженные члены

$$\frac{x^{\rho}}{\rho} + \frac{x^{\bar\rho}}{\bar\rho} \sim \frac{x^{1/2 + i\gamma}}{i\gamma} + \frac{x^{1/2 - i\gamma}}{-i\gamma} = 2x^{1/2}\frac{\sin(\gamma \ln x)}{\gamma}, \tag{8.23}$$

и сумма (8.22) приближенно представляется суммой

$$2x^{1/2}\sum_{0 < \gamma \leqslant T} \frac{\sin(\gamma \ln x)}{\gamma} = 2x^{1/2}\sum_{0 < \gamma_n \leqslant T} \frac{\sin(\gamma_n \ln x)}{\gamma_n}, \tag{8.24}$$

причем мы теперь расположим $\gamma > 0$ в последовательность

$$0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n \leqslant \ldots. \tag{8.25}$$

Оказывается целесообразно сначала исследовать функцию

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n s}}{\gamma_n}, \tag{8.26}$$

для которой имеет место формула

$$-\operatorname{Im} f(i \ln x) = \sum_{0<\gamma_n<\infty} \frac{\sin(\gamma_n \ln x)}{\gamma_n}.$$

Сначала будут доказаны некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для исследования функции $f(s)$.

Лемма 8.1. *Функция $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 0$.*

Доказательство. В теореме 2.1 было показано, что ряд $\sum |\rho|^{-b}$ при $b>1$ сходится. Теперь для $\rho = {}^1/_2 + i\gamma$, $\gamma > c > 0$, имеем $\gamma \geqslant c_1 |\rho|$. Если $\sigma \geqslant \delta > 0$, то

$$\left| \frac{e^{-\gamma_n s}}{\gamma_n} \right| \leqslant \frac{e^{-\gamma_n \delta}}{\gamma_n} < \frac{1}{\gamma_n^2 \delta} < \frac{c_1^{-2}}{|\rho_n|^2 \delta}, \tag{8.27}$$

поэтому ряд (8.26) для таких σ сходится равномерно и функция $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 0$.

Лемма 8.2. *Пусть $s = \sigma + it = re^{i\alpha}$, $r > 0$. При постоянном α в области $-{}^1/_2\pi < \alpha < {}^1/_2\pi$ для $r \to 0$ имеет место равенство*

$$\operatorname{Im} f(s) = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{1}{\sigma} + O(1). \tag{8.28}$$

Константа в $O(1)$ может зависеть от α.

Доказательство. Положим

$$N_+(T) = \sum_{0<\gamma\leqslant T} \cdot 1. \tag{8.29}$$

Теперь нули ρ функции $\zeta(s)$ лежат симметрично относительно действительной оси и $\zeta(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \geqslant 0$. Поэтому из теоремы 3.4 при $k=1$ следует, что

$$N_+(T) = \frac{1}{2\pi} T \ln T + BT + O(\ln T), \tag{8.30}$$

где $T \geqslant 2$ и B — вещественная константа. Теорема П.1.4 теперь дает

$$A(x) = \sum_{0<\gamma_n\leqslant x} \frac{1}{\gamma_n} = \frac{N_+(x)}{x} + \int_{\gamma_1}^{x} \frac{N_+(\xi)}{\xi^2}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \ln^2 x + B_1 \ln x + O(1) \quad (x \to \infty). \tag{8.31}$$

Здесь B_1, согласно (8.30), — вещественная константа. По теореме П.1.6 в случае $\lambda_n = \gamma_n$, $a_n = 1/\gamma_n$, $g(\xi) = e^{-\xi s}$ получаем

$$f(s) = s \int_{\gamma_1}^{\infty} A(\xi)\, e^{-\xi s}\, ds \quad (\sigma > 0), \tag{8.32}$$

так как $A(x)\, e^{-xs} \to 0$ при $x \to \infty$, $\sigma > 0$. Если подставить сюда (8.31), то при $\sigma > 0$ получится

$$f(s) = s \int_{\gamma_1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4\pi} \ln^2 \xi + B_1 \ln \xi \right\} e^{-\xi s}\, d\xi + O(1), \tag{8.33}$$

поскольку

$$|s| \int_0^{\infty} e^{-\xi\sigma}\, d\xi = \frac{|s|}{\sigma} = O(1) \tag{8.34}$$

для $s = re^{i\alpha}$ и постоянного α в области $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Теперь для каждого натурального m и $\sigma > 0$

$$\left| s \left(\int_0^{\infty} - \int_{\gamma_1}^{\infty} \right) \ln^m \xi\, e^{-\xi s}\, d\xi \right| \leqslant |s| \int_0^{\gamma_1} |\ln \xi|^m\, d\xi = O(|s|)$$

и

$$s \int_0^{\infty} \ln^m \xi e^{-\xi s}\, d\xi = \int_0^{\infty} \left(\ln \frac{1}{s} + \ln u \right)^m e^{-u}\, du.$$

Эти соотношения получают подстановкой $\xi s = u$ и применением интегральной теоремы Коши[1]). Полагая $m = 1, 2$, получаем, согласно (8.33),

$$f(s) = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^2 + B_2 \ln \frac{1}{s} + O(1),$$

причем B_2 — вещественная константа, если s указанным образом стремится к нулю. Так как

$$\ln \frac{1}{s} = \ln \frac{1}{r} - i\alpha = \ln \frac{1}{\sigma} + \ln \cos \alpha - i\alpha,$$

то при $r \to 0$ получается равенство

$$\operatorname{Im} f(s) = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - B_2\alpha + O(1) = -\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{1}{\sigma} + O(1).$$

Таким образом, лемма доказана.

---

[1]) Так как $\sigma > 0$, то положительной действительной оси в полуплоскости $\operatorname{Re} u > 0$ соответствует полупрямая. При этом нулевую точку из-за логарифмической особенности нужно обходить с помощью дуги окружности, радиус которой затем устремляют к 0.

Лемма 8.3. *При* $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{2}$ *имеет место оценка*

$$f(s) \ll \ln^2 \frac{1}{\sigma}. \tag{8.35}$$

Причем теперь константа в $\ll$ *не зависит от* σ.

Доказательство. Для $\sigma > 0$ и $X \geqslant 2$ имеем

$$|f(s)| \leqslant \sum_{\gamma > 0} \frac{e^{-\gamma\sigma}}{\gamma} \leqslant \sum_{0 < \gamma \leqslant X} \frac{1}{\gamma} + \sum_{\gamma > X} \frac{1}{\sigma\gamma^2}.$$

Согласно (8.31), первая сумма $\ll \ln^2 X$. С другой стороны, если $m > 2$ — ближайшее целое число, большее X, то по теореме 3.3 и (П.1.13) имеем

$$\sum_{\gamma > X} \frac{1}{\gamma^2} = \left(\sum_{X < \gamma \leqslant m} + \sum_{m < \gamma \leqslant m+1} + \ldots \right) \frac{1}{\gamma^2} \ll$$

$$\ll \frac{1}{X^2} \ln(X+2) + \sum_{m > X} \frac{1}{m^2} \ln(m+2) \ll \frac{\ln X}{X^2} + \frac{\ln X}{X} \ll \frac{\ln X}{X}. \tag{8.36}$$

В итоге при $\sigma > 0$, $X \geqslant 2$

$$f(s) \ll \ln^2 X + \frac{\ln X}{\sigma X}.$$

Пусть $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{2}$. Положим $X = 1/\sigma$, $X \geqslant 2$, тогда получим (8.35).

Лемма 8.4. *Для каждого положительного* ε *существует некоторое* $\sigma' = \sigma'(\varepsilon) > 0$ *со следующим свойством. Для* $0 < \sigma < \sigma'(\varepsilon)$ *и каждого* $T_0 > 0$ *имеется* $T = T(\sigma, T_0, \varepsilon)$, *такое, что*

$$T_0 \leqslant T < T_0 \exp\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}, \tag{8.37}$$

и для любого действительного t

$$|f(\sigma + it + iT) - f(\sigma + it)| < \varepsilon. \tag{8.38}$$

Доказательство. Для $\sigma > 0$ и действительных t и T при любом $X \geqslant 2$ имеем

$$|f(\sigma + it + iT) - f(\sigma + it)| =$$

$$= \left| \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\sigma - i\gamma t - \frac{1}{2} i\gamma T} \left(e^{-\frac{1}{2} i\gamma T} - e^{\frac{1}{2} i\gamma T} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{\gamma > 0} \frac{e^{-\gamma\sigma}}{\gamma} \left| \sin \frac{1}{2} \gamma T \right| \leqslant 2 \sum_{\gamma > X} \frac{e^{-\gamma\sigma}}{\gamma} + 2 \sum_{n=1}^{N_+(X)} \frac{\left| \sin\left(\frac{1}{2} \gamma_n T\right) \right|}{\gamma_n}.$$

Из (8.36) и неравенства $e^{-\gamma\sigma} < 1/\gamma\sigma$ следует, что первая сумма $\ll \ln X/\sigma X$. Остается еще исследовать вторую сумму. Если в теореме П.10.1 возьмем в качестве θ_n числа $\gamma_n/2\pi$, $n = 1, 2, \ldots, N_+(X)$, то для любого целого $q \geqslant 2$ найдем такое T, что

$$T_0 \leqslant T \leqslant T_0 q^{N_+(X)}, \tag{8.39}$$

и

$$\frac{T\gamma_n}{2\pi} = l_n + \lambda_n, \quad |\lambda_n| \leqslant \frac{1}{q}$$

с целыми l_n для каждого $n = 1, 2, \ldots, N_+(X)$. Для этого T имеет место оценка

$$\sum_{n=1}^{N_+(X)} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\gamma_n T\right)\right|}{\gamma_n} \leqslant \sum_{0<\gamma_n\leqslant X} \frac{|\pi\lambda_n|}{\gamma_n} \leqslant \frac{\pi}{q} \sum_{0<\gamma\leqslant X} \frac{1}{\gamma} \ll \frac{\ln^2 X}{q}.$$

В итоге получаем для $\sigma > 0$ и всех действительных t ($q \geqslant 2$, $T = T(q)$) неравенство

$$|f(\sigma + it + iT) - f(\sigma + it)| < c_1\left(\frac{\ln X}{\sigma X} + \frac{\ln^2 X}{q}\right). \tag{8.40}$$

Полагая $X = \frac{A}{\varepsilon\sigma}\ln\frac{1}{\sigma}$ с константой $A > 0$, которую мы потом определим точнее, можно добиться того, чтобы для всех достаточно малых σ выполнялось неравенство $c_1 \ln X/\sigma X < \frac{1}{2}\varepsilon$. Тогда

$$c_1\frac{\ln X}{\sigma X} = \frac{c_1\varepsilon}{A\ln(1/\sigma)}\left(\ln\frac{1}{\sigma} + \ln_2\frac{1}{\sigma} + \ln A + \ln\frac{1}{\varepsilon}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для $A > 2c_1$, $0 < \sigma \leqslant \sigma_1(\varepsilon, A)$, причем мы, если необходимо, уменьшаем σ_1 настолько, чтобы X было не меньше 2.

Если положим теперь $q = \left[\frac{A}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\sigma}\right] + 1$, то получим для рассмотренного уже X неравенство

$$c_1\frac{\ln^2 X}{q} < \frac{c_1\varepsilon}{A\ln^2(1/\sigma)}\left(\ln\frac{1}{\sigma} + \ln_2\frac{1}{\sigma} + \ln A + \ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $A > 2c_1$ и $0 < \sigma \leqslant \sigma_2(\varepsilon, A)$. Выберем теперь $A = 3c_1$. Тогда для

$$0 < \sigma \leqslant \sigma_3(\varepsilon) = \min\{\sigma_1(\varepsilon, A), \sigma_2(\varepsilon, A)\},$$

согласно (8.40), имеет место неравенство (8.38), которое требуется доказать. Число T лежит в интервале (8.39). Если подставить вместо q его значение и принять во внимание, что

$$N_+(X) < c_2 X\ln X \quad (X \geqslant 2),$$

то при подходящем значении $\sigma'(\varepsilon)$ получим оценку

$$N_+(X)\ln q < \frac{c_2 A}{\varepsilon\sigma}\ln\frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{1}{\sigma}+\ln_2\frac{1}{\sigma}+\ln A+\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\ln\left(\frac{A}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\sigma}+1\right)<\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}\quad (0<\sigma\leqslant\sigma'(\varepsilon)\leqslant\sigma_3(\varepsilon)).$$

Следовательно, T лежит в интервале вида (8.37) и утверждение доказано.

Лемма 8.4 устанавливает, что функция $f(\sigma+it)$ почти периодична относительно t. Эта лемма применяется также в теории Бора почти периодических функций.

Лемма 8.5. *Для каждого* a, $0<a<\frac{1}{4}$, *и каждого* σ, $0<\sigma\leqslant\sigma_0(a)$ (*при подходящем* $\sigma_0(a)$) *всегда имеется такое* $t'=t'(a,\sigma)$ *и такое* $t''=t''(a,\sigma)$, *что*

$$t'>e^{1/\sigma},\quad \operatorname{Im} f(\sigma+it')>a\ln_2 t', \tag{8.41}$$
$$t''>e^{1/\sigma},\quad \operatorname{Im} f(\sigma+it'')<-a\ln_2 t''. \tag{8.42}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon<\frac{1}{4}$, а $\sigma'=\sigma'(\varepsilon)$ определяется как в лемме 8.4. Положим $T_0=\exp\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}$. По лемме 8.4 для каждого σ, $0<\sigma\leqslant\sigma'$, найдем такое T_σ, что для каждого действительного t

$$\exp\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}\leqslant T_\sigma<\exp 2\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}, \tag{8.43}$$
$$|f(\sigma+it+iT_\sigma)-f(\sigma+it)|<\varepsilon. \tag{8.44}$$

По лемме 8.2 при $\alpha=\pm\frac{1}{2}\pi(1-\varepsilon)$ мы имеем

$$c\lambda=\operatorname{tg}\left\{\frac{1}{2}\pi(1-\varepsilon)\right\},$$
$$\mp\operatorname{Im} f(\sigma\pm i\lambda\sigma)\sim\frac{1}{4}(1-\varepsilon)\ln\frac{1}{\sigma}\quad(\sigma\to+0).$$

Отсюда, например для $0<\sigma\leqslant\sigma_1(\varepsilon)<\frac{1}{2}$, следует, что

$$\mp\operatorname{Im} f(\sigma\pm i\lambda\sigma)>\frac{1}{4}(1-2\varepsilon)\ln\frac{1}{\sigma}.$$

Это и (8.44) при $0<\sigma\leqslant\sigma_2(\varepsilon)\leqslant\sigma_1(\varepsilon)$ дает для $t=\pm\lambda\sigma$

$$\mp\operatorname{Im} f(\sigma\pm i\lambda\sigma+iT_\sigma)>\frac{1}{4}(1-2\varepsilon)\ln\frac{1}{\sigma}-\varepsilon>\frac{1}{4}(1-3\varepsilon)\ln\frac{1}{\sigma}.$$

Из (8.43) следует, что для $0 < \sigma \leqslant \sigma_3(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$e^{1/\sigma} < \pm \lambda\sigma + T_\sigma < \exp\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+2\varepsilon}. \tag{8.45}$$

Нужно только выбрать σ настолько малым, чтобы было $T_\sigma + \lambda\sigma < \exp\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+2\varepsilon}$ и $T_\sigma - \lambda\sigma > \exp\frac{1}{\sigma}$, а это можно сделать согласно (8.43).

Если положим $t' = -\lambda\sigma + T_\sigma$ и $t'' = \lambda\sigma + T_\sigma$, то $t' > e^{1/\sigma}$ и $t'' > e^{1/\sigma}$ для $0 < \sigma \leqslant \sigma_4 = \min(\sigma_2, \sigma_3)$, и так как, согласно (8.45), $\ln_2 t' < (1 + 2\varepsilon)\ln(1/\sigma)$, имеем

$$\operatorname{Im} f(\sigma + it') > \frac{1}{4}(1 - 3\varepsilon)\ln\frac{1}{\sigma} > \frac{1-3\varepsilon}{4(1+2\varepsilon)}\ln_2 t' > 0.$$

Такое же неравенство получается для $-\operatorname{Im} f(\sigma + it'')$. Тем самым лемма 8.5 доказана, так как, поскольку $0 < a < \frac{1}{4}$, для достаточно малого $\varepsilon = \varepsilon(a)$ имеет место $(1 - 3\varepsilon)/4(1 + 2\varepsilon) > a$.

До сих пор мы доказали, грубо говоря, что $\operatorname{Im} f(\sigma + it)$ для достаточно малого σ становится достаточно большим (положительным или отрицательным), если для t берутся определенные значения, большие, чем граница зависящая от σ. Для этого сначала доказывают, что $\operatorname{Im} \check{f}(s)$ при $s = 0$ становится большим (лемма 8.2), а затем с помощью „почти периодичности" (лемма 8.4) делают заключения о поведении $\operatorname{Im} f(s)$ для больших ординат.

Теорема 8.3. *Имеет место соотношение*

$$\psi(x) - x = \Omega_\pm(x^{1/2}\ln_3 x) \quad (x \to \infty). \tag{8.46}$$

Доказательство. Если гипотеза Римана неверна, то это следует из теоремы 8.2, так как тогда $\theta > \frac{1}{2}$. Следовательно, можно предположить, что гипотеза Римана верна. Тогда, согласно (4.41) и (8.21),

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\frac{1}{2}+i\gamma}}{\frac{1}{2}+i\gamma} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}) + R(x, T),$$

$$R(x, T) \ll x\frac{\ln^2 xT}{T} + \ln x \quad (x \geqslant 2,\ T \geqslant 2).$$

В частности, для $T \geqslant x$, так как $\ln^2 T/T$ для $T > e^2$ монотонно убывает, получаем

$$R(x, T) \ll x\frac{\ln^2 x}{x} + \ln x \ll \ln^2 x \quad (x \geqslant 2,\ T \geqslant x).$$

Далее имеем

$$\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\frac{1}{2}+i\gamma}}{\frac{1}{2}+i\gamma}-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\frac{1}{2}+i\gamma}}{i\gamma}\right|=\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}+i\gamma}}{\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)i\gamma}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2}\ll x^{\frac{1}{2}},$$

поскольку ряд $\sum\gamma^{-2}$ сходится. Таким образом, из равенства $\psi(x)=\psi_0(x)+O(\ln x)$ и (8.24) следует

$$\psi(x)-x=-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\frac{1}{2}+i\gamma}}{i\gamma}+R_1(x,\ T)=$$

$$=-2x^{\frac{1}{2}}\sum_{0<\gamma\leqslant T}\frac{\sin(\gamma\ln x)}{\gamma}+R_1(x,\ T),$$

$$R_1(x,\ T)\ll x^{\frac{1}{2}}\quad(x\geqslant 2,\ T\geqslant x),\tag{8.47}$$

так как при $x\geqslant 2$ имеет место оценка $\ln(1-x^{-2})=O(x^{-2})$. Положим теперь $x=e^t$,

$$F(t)=\frac{\psi(x)-x}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{\psi(e^t)-e^t}{2\exp\frac{1}{2}t}$$

и

$$S_T(t)=-\sum_{0<\gamma\leqslant T}\frac{\sin\gamma t}{\gamma}.$$

В этих обозначениях из (8.47) следует

$$F(t)-S_T(t)=O(1)\quad(t\geqslant 1,\ T\geqslant e^t).\tag{8.48}$$

Отсюда, в частности, получается, что

$$S_{T_1}(t)-S_{T_2}(t)=O(1)\quad(t\geqslant 1,\ T_1\geqslant T_2\geqslant e^t).\tag{8.49}$$

Теперь если $f(s)$ — функция, определенная в (8.26), то для $\sigma>0$ можно получить равенство

$$\operatorname{Im}f(\sigma+it)-S_T(t)=\sum_{0<\gamma\leqslant T}\frac{1-e^{-\gamma\sigma}}{\gamma}\sin\gamma t-\sum_{\gamma>T}e^{-\gamma\sigma}\frac{\sin\gamma t}{\gamma}.\tag{8.50}$$

Так как $0 < 1 - e^{-u} < u$, то для $T \geqslant e^t$, $t \geqslant 1$ первая сумма по абсолютной величине меньше чем

$$\sum_{0<\gamma\leqslant T} \frac{\gamma\sigma}{\gamma} = N_+(T)\,\sigma \ll T\sigma \ln T.$$

Если в теореме П. 1.4 положим $\lambda_n = \gamma_n$, $a_n = (\sin \gamma_n t)/\gamma_n$ при $\gamma_n > T$ и $a_n = 0$ при $\gamma_n \leqslant T$, $g(\xi) = e^{-\xi\sigma}$, то для второй суммы из (8.50) при $T \geqslant e^t$, $t \geqslant 1$, $\sigma > 0$ получим

$$-\int_T^\infty \sigma e^{-\xi\sigma} \{S_\xi(t) - S_T(t)\}\, d\xi \ll \int_T^\infty \sigma e^{-\xi\sigma}\, d\xi = O(1),$$

так как $g(\xi)\, A(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$ (согласно (8.31)) и выполнено равенство (8.49). Таким образом, при $T \geqslant e^t$, $t \geqslant 1$, $\sigma > 0$

$$\operatorname{Im} f(\sigma + it) - S_T(t) \ll \sigma T \ln T + O(1).$$

Отсюда и из (8.48) для $T = e^t$ получается

$$F(t) - \operatorname{Im} f(\sigma + it) = O(1) \quad (t \geqslant 1,\ 0 < \sigma \leqslant e^{-2t}). \tag{8.51}$$

Предположим теперь, что

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{\frac{1}{2}} \ln_3 x} < \frac{1}{2}, \tag{8.52}$$

и приведем это к противоречию. Это будет означать, что

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{\frac{1}{2}} \ln_3 x} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{8.53}$$

Из (8.52) следует сначала

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{F(t)}{\ln_2 t} < \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$F(t) < a \ln_2 t \quad (t \geqslant t_1) \tag{8.54}$$

для некоторого a, $0 < a < \frac{1}{4}$, и некоторого $t_1 > 3$ [1]). Мы выберем a_1, a_2 так, чтобы $0 < a_1 < a_2 < \frac{1}{4}$. В последующем $t_1, t_2, \ldots$ зависят от a, a_1, a_2. Из (8.54) и (8.51) для $t \geqslant t_2$ и некоторого $t_2 \geqslant t_1$ следует, что

$$\operatorname{Im} f(\sigma + it) < a \ln_2 t + O(1) < a_1 \ln_2 t \quad (0 < \sigma \leqslant e^{-2t}). \tag{8.55}$$

[1]) При этом $\ln_2 t > 0$ для $t \geqslant t_1$.

Применим теперь теорему П. 7.1 (принцип Фрагмена — Линделёфа) к функции

$$f_1(s) = \frac{\exp\{-if(s)/a_1\}}{\ln s}, \tag{8.56}$$

где $\ln s$ означает ветвь логарифма, действительную для $s=\sigma>0$, и возьмем в качестве области B область $t \geqslant t_2$, $e^{-2t} \leqslant \sigma \leqslant 1$. Для $\sigma = e^{-2t}$, согласно (8.55), имеет место оценка

$$|f_1(s)| = \frac{\exp\{\operatorname{Im} f(s)/a_1\}}{|\ln s|} < \frac{\exp \ln_2 t}{\ln t} = 1.$$

На отрезке $t=t_2$, $e^{-2t_2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ и на прямой $\sigma=1$ функция $f_1(s)$ ограничена, так как там мы имеем $|f(s)| \leqslant f(\sigma) \leqslant f(e^{-2t_2})$. Следовательно, на границе B справедлива оценка

$$|f_1(s)| \leqslant C, \tag{8.57}$$

причем $C = C(t_2, a_1) = C(a, a_1)$. Во всей области B, согласно лемме 8.3, имеет место неравенство

$$|f_1(s)| < c_1 \exp\frac{|f(s)|}{a_1} < c_1 \exp(c_2 t^2),$$

так как $0 < \sigma \leqslant e^{-2t} < \frac{1}{2}$ и $\ln(1/\sigma) \leqslant 2t$. Поэтому условия теоремы П. 7.1 выполнены и оценка (8.57) должна быть справедлива во всей области B. Отсюда для некоторого $t_3 \geqslant t_2$ получаем

$$\exp\{\operatorname{Im} f(s)/a_1\} = |f_1(s)\ln s| \leqslant C|\ln s| < 2C\ln t$$
$$(e^{-2t} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad t \geqslant t_3).$$

Из последнего соотношения следует, что при подходящем $t_4 \geqslant t_3$ для $e^{-2t} \leqslant \sigma \leqslant 1$ и $t \geqslant t_4$ будет

$$\operatorname{Im} f(s) < a_1 \ln(2C\ln t) < a_2 \ln_2 t.$$

Это неравенство и неравенство (8.55) дают

$$\operatorname{Im} f(s) < a_2 \ln_2 t \quad (0 < \sigma \leqslant 1, \ t \geqslant t_4), \tag{8.58}$$

что противоречит лемме 8.5, так как $a_2 < \frac{1}{4}$. Следовательно, формула (8.53) доказана. Вторая часть (8.46) получается совершенно аналогично, если исходить из неравенства

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{\frac{1}{2}} \ln_3 x} > -\frac{1}{2}.$$

Вместо (8.58) получаем неравенство $-\operatorname{Im} f(s) < a_2 \ln_2 t$ в полосе $0 < \sigma \leqslant 1$ для достаточно большого t. Это также противоречит лемме 8.5. Теорема 8.3 тем самым доказана.

Для доказательства (8.18) нам нужна еще

Лемма 8.6. *Если гипотеза Римана верна, то*

$$\int_2^x \psi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right). \tag{8.59}$$

Доказательство. Интегрированием равенства (8.47) получим

$$\int_2^x \{\psi(\xi) - \xi\}\,d\xi = i \sum_{0<|\gamma|\leqslant T} \frac{x^{\frac{3}{2}+i\gamma}}{\gamma\left(\frac{3}{2}+i\gamma\right)} + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \ll x^{\frac{3}{2}},$$

так как $|x^{3/2+i\gamma}| = x^{3/2}$, и ряд $\sum 1/\gamma\,(3/2+i\gamma)$ абсолютно сходится в силу оценки $\left|1/\gamma\left(\frac{3}{2}+i\gamma\right)\right| \leqslant \gamma^{-2}$. Тем самым лемма доказана.

Теорема 8.4. *Пусть для* $x > 0$

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leqslant x}\sum \frac{1}{m} = \sum_{2\leqslant n\leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n}. \tag{8.60}$$

Тогда при $x \to \infty$ *имеют место соотношения*

$$\Pi(x) = \mathrm{li}\,x + \Omega_{\pm}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\ln_3 x\right), \tag{8.61}$$

$$\pi(x) = \mathrm{li}\,x + \Omega_{\pm}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\ln_3 x\right). \tag{8.62}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Pi(x) - \mathrm{li}\,x = P(x), \quad \psi(x) - x = R(x). \tag{8.63}$$

Из теоремы П. 1.4, если положить $a_n = \Lambda(n)$, $g(\xi) = 1/\ln\xi$, при $x \geqslant 2$ следует, что

$$\Pi(x) = \int_2^x \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\xi\ln^2\xi} + \frac{\psi(x)}{\ln x}.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{li}\,x = \int_2^x \frac{d\xi}{\ln\xi} + O(1) = \int_2^x \frac{d\xi}{\ln^2\xi} + \frac{x}{\ln x} + O(1)$$

и, следовательно,

$$P(x) = \frac{R(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{R(\xi)\,d\xi}{\xi\ln^2\xi} + O(1). \tag{8.64}$$

Если гипотеза Римана не верна, т. е. $\theta > \frac{1}{2}$, то (8.61) следует уже из (8.12). Предположим теперь, что гипотеза Римана верна. Положим

$$\overline{R}(x) = \int_2^x R(\xi)\, d\xi \quad (x \geqslant 2).$$

Применяя лемму 8.6, получаем для $x \geqslant 2$

$$P(x) - \frac{R(x)}{\ln x} = \frac{\overline{R}(x)}{x \ln^2 x} - \int_2^x \overline{R}(\xi)\, d\frac{1}{\xi \ln^2 \xi} + O(1) \ll$$

$$\ll \frac{x^{3/2}}{x \ln^2 x} + \int_2^x \xi^{3/2} \left| \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi \ln^2 \xi}\right)\right| d\xi \ll$$

$$\ll \frac{x^{1/2}}{\ln^2 x} + \int_2^x \frac{d\xi}{\xi^{1/2} \ln^2 \xi} \ll \frac{x^{1/2}}{\ln^2 x}, \tag{8.65}$$

так как $\xi^{1/4}/\ln^2 \xi$ монотонно растет и для $\xi > \xi_0 = e^s$ справедлива оценка

$$\int_2^x \frac{d\xi}{\xi^{1/2} \ln^2 \xi} = \int_2^x \frac{\xi^{1/4}}{\ln^2 \xi} \frac{d\xi}{\xi^{3/4}} \ll \frac{x^{1/4}}{\ln^2 x} \int_2^x \frac{d\xi}{\xi^{3/4}}.$$

Равенство (8.61) следует из (8.65) и теоремы 8.3, поскольку по последней теореме $R(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \ln_3 x)$, $x \to \infty$. Утверждение (8.62) получается из (8.61) и (8.19), чем теорема 8.4 доказана.

Приведенное здесь доказательство не позволяет указать x, для которого $\pi(x) > \operatorname{li} x$. Скьюз [1] указал x_0 со следующим свойством: в интервале $1 < x \leqslant x_0$ разность $\pi(x) - \operatorname{li} x$ изменяет знак не меньше одного раза. Он нашел, что $x_0 = \exp\exp\exp\exp(7{,}705)$.

Доказательство теоремы 8.3 (при использовании явной формулы для $\psi_0(x)$) без теоремы Фрагмена — Линделёфа можно найти у Ингама [3].

Можно показать, что неравенство $\pi(x) < \operatorname{li} x$ верно в среднем, а именно для достаточно большого x из гипотезы Римана вытекает оценка

$$\int_2^x \{\pi(\xi) - \operatorname{li} \xi\}\, d\xi < 0$$

(дальнейшая литература см. Бор и Крамер [1]).

Из (8.59) следует

$$\frac{1}{x}\int_2^x \{\psi(\xi) - \xi\}\, d\xi \ll x^{1/2},$$

если гипотеза Римана верна, так что $\psi(x) - x$ иногда больше $cx^{1/2} \ln_3 x$, иногда меньше $-cx^{1/2} \ln_3 x$, но в среднем эти неравномерности до некоторой степени взаимно уничтожаются. Крамер [3] показал, что при предположении правильности гипотезы Римана имеет место оценка

$$\int_2^x \{\psi(\xi)-\xi\}^2 \frac{d\xi}{\xi} \ll x.$$

С помощью неравенства Шварца отсюда следует

$$\frac{1}{x}\int_2^x |\psi(\xi)-\xi|\,d\xi \ll x^{1/2}.$$

Таким образом, $|\psi(\xi)-\xi|$ в среднем $\ll x^{1/2}$.

Теми же методами, что применялись в теореме 8.3, можно показать, что

$$\pi_1(x)-\pi_3(x)=\Omega_\pm\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\ \ln_3 x\right),$$

где $\pi_1(x)$ и $\pi_3(x)$ — числа простых чисел $\leqslant x$, сравнимых соответственно с 1 или 3 по $\bmod 4$. Долгое время, основываясь на численных расчетах, пробовали показать, что всегда $\pi_1(x)<\pi_3(x)$. Если гипотеза Римана верна для L-рядов, образованных обоими характерами по $\bmod 4$, то можно показать, что в некотором смысле чаще всего $\pi_1(x)<\pi_3(x)$. (См. Харди и Литлвуд [1], а также литературу, цитируемую у Бора и Крамера [1].) Мы не можем остановиться на этом более подробно.

Задачи к главе VII

1. Укажите явные формулы для функций, рассмотренных в задачах 13 и 17 к гл. III.
2. Пусть N_k обозначает число тех l, $0<l<k$, $(l, k)=1$, для которых $p_1(k\ \ l)<\varphi(k)\ln^{1-\varepsilon}\varphi(k)$. Докажите с помощью теоремы о простых числах, что $\lim\limits_{k\to\infty}\{N_k/\varphi(k)\}=0$.
3. Докажите, что

$$\pi(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant M}\mu(n)\,\Pi(x^{1/n}),\quad M=\left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right],$$

и

$$\pi(x)-L(x)=\Omega_\pm\left(\frac{x^{1/2}}{\ln x}\ln_3 x\right),$$

где

$$L(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant M}\operatorname{li} x^{1/n}.$$

4. Какие явные формулы получатся, если исходить из интеграла вида [1])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\delta^{-s}\Gamma(s)\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds.$$

[1]) Харди и Литлвуд [1].

Глава VIII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ

§ 1. Введение

В гл. III при исследовании нулей функции $\zeta(s)$ мы получили оценку для $|\zeta(s)|$ в области $\sigma \geqslant 1 - A/\ln|t|$, $|t| \geqslant 2$; аналогичную оценку мы вывели в гл. IV для функции $\zeta(s, w) - w^{-s}$. При этом мы применяли, например при доказательстве теоремы 3.4.3, также и грубую оценку

$$\Big|\sum_{n \leqslant N} n^{-s}\Big| \leqslant \sum_{n \leqslant N} n^{-\sigma}.$$

В частности, при $s = 1 + it$

$$\Big|\sum_{n \leqslant N} n^{-1-it}\Big| \leqslant \sum_{n \leqslant N} n^{-1} \ll \ln N \quad (N \to \infty). \tag{1.1}$$

Если положить

$$S(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi} n^{-it} \quad (\xi \geqslant 1), \tag{1.2}$$

то по теореме П.1.4 получаем равенство

$$\sum_{n \leqslant N} n^{-1-it} = S(N)\, N^{-1} + \int_1^N S(\xi)\, \xi^{-2}\, d\xi. \tag{1.3}$$

Оценка суммы $|S(\xi)| \leqslant \xi$ дает грубую оценку (1.1). Если мы сможем доказать несколько лучшую оценку, чем $|S(\xi)| \leqslant \xi$, то из (1.3) мы получим улучшение (1.1). Оценка $S(\xi) = o(\xi)$ дала бы, например, для суммы в (1.1) оценку $o(\ln N)$. Можно ожидать, что в сумме (1.2) многие члены компенсируются, так как $\arg n^{-it} = -t \ln n$ при переменном n „до некоторой степени равномерно“ распределяется по всем направлениям. Рассмотрим частную сумму $S(\xi)$ вида

$$S_1 = S_1(Q, P) = \sum_{Q < n \leqslant Q+P} e^{-it \ln n}. \tag{1.4}$$

Тогда

$$|S_1| = \Big|\sum_{0 < n \leqslant P} \exp\Big(-it\Big\{\ln Q + \frac{n}{Q} - \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{Q}\Big)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big(\frac{n}{Q}\Big)^k + R\Big\}\Big| = \Big|\sum_{0 < n \leqslant P} \exp\Big(-it\,\Big\{\frac{n}{Q} - \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{Q}\Big)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big(\frac{n}{Q}\Big)^k + R\Big\}\Big)\Big|, \quad R \ll \frac{1}{k+1}\Big(\frac{n}{Q}\Big)^{k+1},$$

если мы предположим, например, что $P/Q \leqslant 1/2$ и, таким образом, $n/Q \leqslant 1/2$ при $0 < n \leqslant P$. С помощью разбиения $S(\xi)$ на частные суммы вида $S_1(Q, P)$ с $P/Q \leqslant 1/2$ можно свести оценку $S(\xi)$ к оценке сумм

$$\sum_{0 < n \leqslant P} e^{if_k(n)},$$

где $f_k(n)$ — полином степени k от n. Такие суммы называются суммами Вейля, и мы будем теперь заниматься методами оценок таких сумм, которые были развиты Г. Вейлем, Харди и Литлвудом и И. М. Виноградовым [1]).

§ 2. Метод Вейля [2])

Теорема 2.1. *Пусть* $k \geqslant 1$, $P \geqslant 1$, P *и* Q — *целые числа, а*

$$f(x) = \alpha x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k$$

— *полином с действительными коэффициентами. Положим*

$$S = S(Q, P, f) = \sum_{Q < n \leqslant Q+P} e(f(n)) \tag{2.1}$$

(*через* $e(\xi)$ *обозначено* $e^{2\pi i\xi}$). *Тогда имеет место оценка* $\left(K = 2^{k-1}\right)$

$$|S|^K < 4^K \left\{ P^{K-1} + P^{K-k} \sum_{1 \leqslant n_1, \ldots, n_{k-1} \leqslant P} \!\!\!\ldots\!\!\! \sum \min\left(P, \|\alpha k!\, n_1 \ldots n_{k-1}\|^{-1}\right) \right\}. \tag{2.2}$$

При этом (как в гл. VI) *обозначено* $\|\lambda\| = \min(\lambda - [\lambda],\ 1 - \lambda + [\lambda])$ *и* $\min\left(P, 0^{-1}\right) = P$. *Для* $k = 1$ *вместо суммы должен стоять только один член* $\min\left(P, \|\alpha\|^{-1}\right)$.

Доказательство. При $\alpha = 0$ оценка (2.2) тривиально верна, так как в этом случае $\sum \min = P^{k-1} \cdot P$ и $|S|^K \leqslant P^K$. Пусть $\alpha \neq 0$. Докажем (2.2) индукцией по k. При $k = 1$ имеем $K = 1$ и по (6.6.4)

$$|S| = \Big|\sum_{Q < n \leqslant Q+P} e(\alpha n + \alpha_1)\Big| = \Big|\sum_{Q < n \leqslant Q+P} e(\alpha n)\Big| \leqslant \min\left(P, \|\alpha\|^{-1}\right).$$

Таким образом, оценка (2.2) при $k = 1$ доказана. Пусть $k \geqslant 2$. Предположим, что теорема уже доказана для $k - 1$. Без ограничения общности можно принять $Q = 0$, так как в противном случае можно $f(x)$ заменить на $f(x + Q)$, и последний полином опять имеет α старшим коэффициентом. При $Q = 0$

$$|S|^2 = S\overline{S} = \sum_{0 < m,\, n \leqslant P} e(f(m) - f(n)) = \sum_{h=-(P-1)}^{P-1} \sum_n e(f(n+h) - f(n)), \tag{2.3}$$

---

[1]) Позднее (гл. IX) нам нужны будут также методы ван дер Корпута.
[2]) Вейль [1], [2], Харди и Литлвуд (Литлвуд [2], Ландау [12]).

причем n пробегает не более P последовательных целых чисел. Теперь полином

$$f(x+h)-f(x)=\alpha khx^{k-1}+b_1(h)\,x^{k-2}+\ldots+b_{k-1}(h)$$

есть полином $(k-1)$-й степени. Так как утверждение по предположению индукции верно для $k-1$, то

$$\Big|\sum_n e(f(n+h)-f(n))\Big|^{1/2K}<4^{1/2K}\Big\{P^{1/2K-1}+$$
$$+P^{1/2K-k+1}\sum_{1\leqslant n_1,\ldots,n_{k-2}\leqslant P}\!\!\ldots\sum\min\big(P,\|\alpha kh(k-1)!\,n_1\ldots n_{k-2}\|^{-1}\big)\Big\}. \qquad (2.4)$$

Здесь в сумме при $k=2$ опять остается только член $\min(P,\|\alpha 2h\|^{-1})$. При этом то обстоятельство, что n пробегает не более чем P последовательных целых чисел, не играет никакой роли, так как стоящая справа оценка не убывает с ростом P. Из неравенства Гёльдера (П.12.2) и из формул (2.3) и (2.4) ($h\to n_{k-1}$) следует оценка

$$|S|^K=\{|S|^2\}^{1/2K}<(2P)^{1/2K-1}\sum_{h=-(P-1)}^{P-1}4^{1/2K}\times$$
$$\times\Big\{P^{1/2K-1}+P^{1/2K-k+1}\sum_{1\leqslant n_1,\ldots,n_{k-2}\leqslant P}\!\!\ldots\sum\min\big(P,\|\alpha k!\,n_1\ldots n_{k-2}h\|^{-1}\big)\Big\}<$$
$$<4^KP^{K-1}+4^KP^{K-k}\sum_{1\leqslant n_1,\ldots,n_{k-1}\leqslant P}\!\!\ldots\sum\min\big(P,\|\alpha k!\,n_1\ldots n_{k-1}\|^{-1}\big),$$

так как $\|\alpha k!\,n_1,\ldots,n_{k-2}h\|=\|\alpha k!\,n_1\ldots n_{k-2}(-h)\|$, и при $h\neq 0$ имеем

$$\sum_{1\leqslant n_1,\ldots,n_{k-2}\leqslant P}\!\!\ldots\sum\min\big(P,\|\alpha k!\,n_1\ldots n_{k-1}h\|^{-1}\big)=P^{k-2}P=P^{k-1}.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано для любого $k\geqslant 1$.

Теорема 2.1 будет теперь применяться к оценке сумм вида

$$\sum_{Q<n\leqslant Q+P}(n+w)^{-it}\qquad(0<w\leqslant 1).$$

Лемма 2.1. *Пусть $k\geqslant 1$, $P\geqslant 1$, $Q\geqslant 1$ — целые числа и $t\geqslant 1$, $0<w\leqslant 1$. Тогда при*

$$P\leqslant\frac{3}{4}Qt^{-1/(k+1)} \qquad (2.5)$$

и при подходящем $c_1>0$ справедлива оценка

$$\Big|\sum_{Q<n\leqslant Q+P}(n+w)^{-it}\Big|\leqslant c_1\max_{1\leqslant P'\leqslant P}\Big|\sum_{0<m\leqslant P'}e(f(m))\Big|, \qquad (2.6)$$

где

$$f(m)=-\frac{t}{2\pi}\Big\{\frac{m}{Q+w}-\frac{1}{2}\Big(\frac{m}{Q+w}\Big)^2+\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big(\frac{m}{Q+w}\Big)^k\Big\}.$$

Доказательство. Положим $n = Q + m$. Тогда m пробегает значения $0 < m \leqslant P$. Далее

$$(n+w)^{-it} = \exp\{-it\ln(Q+m+w)\} = \\ = \exp\{-it\ln(Q+w)\}\exp\left\{-it\ln\left(1+\frac{m}{Q+w}\right)\right\}.$$

Если обозначить $Q + w = Q_0$, то $Q_0 > Q \geqslant 1$. Для $m/Q_0 < 1$ получаем

$$(n+w)^{-it} = \exp(-it\ln Q_0)\times \\ \times\exp\left(-it\left\{\frac{m}{Q_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{Q_0}\right)^2+\ldots+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{m}{Q_0}\right)^k\right\}\right)\sum\nolimits_m, \quad (2.7)$$

где

$$\sum\nolimits_m = \exp\left(-it\left\{\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}\left(\frac{m}{Q_0}\right)^{k+1}+\ldots\right\}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu(t)\left(\frac{m}{Q_0}\right)^\nu.$$

Если положить

$$\exp\left(t\left\{\left(\frac{m}{Q_0}\right)^{k+1}+\left(\frac{m}{Q_0}\right)^{k+2}+\ldots\right\}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{e}_\nu(t)\left(\frac{m}{Q_0}\right)^\nu,$$

то имеет место оценка $|e_\nu(t)| \leqslant \bar{e}_\nu(t)$. Из (2.5) для $0 < m \leqslant P$ следует

$$\frac{m}{Q_0} \leqslant \frac{3}{4}t^{-1/(k+1)}, \quad t\left(\frac{m}{Q_0}\right)^{k+1} \leqslant \frac{3}{4}, \quad (2.8)$$

в частности $m/Q_0 < 1$. Теперь, принимая во внимание (2.5), при $k \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|e_\nu(t)|\left(\frac{P}{Q_0}\right)^\nu \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\bar{e}_\nu(t)\left(\frac{3}{4}t^{-1/(k+1)}\right)^\nu = \\ = \exp\left\{t\left(\left(\frac{3}{4}t^{-1/(k+1)}\right)^{k+1}+\ldots\right)\right\} \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{k+2}+\ldots\right\} = \exp\left(\frac{3^{k+1}}{4^k}\right) < c, \quad (2.9)$$

причем c не зависит от k. Далее

$$\left|\sum_{Q<n\leqslant Q+P}(n+w)^{-it}\right| = \left|\sum_{0<m\leqslant P}e(f(m))\sum_{\nu=0}^{\infty}e_\nu(t)\left(\frac{m}{Q_0}\right)^\nu\right| = \\ = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{e_\nu(t)}{Q_0^\nu}\sum_{0<m\leqslant P}m^\nu e(f(m))\right|. \quad (2.10)$$

Отсюда с помощью частного суммирования (П. 1.4) получаем

$$\Bigl|\sum_{0<m\leqslant P} m^{\nu} e(f(m))\Bigr| \leqslant 2P^{\nu} \max_{1\leqslant P'\leqslant P} \Bigl|\sum_{0<m\leqslant P'} e(f(m))\Bigr|.$$

Подставляя эту оценку в (2.10) и принимая во внимание (2.9), получаем утверждение леммы.

Как легко видеть, ограничение $P/Q<1$ необходимо, потому что при $Q<m\leqslant Q+P$ всегда $m/Q_0<1$ и ряд для $\ln(1+m/Q_0)$ сходится. Ограничение (2.5) оказывается необходимым для (2.9). Ниже довольно часто будет необходимо разлагать сумму вида $\sum (n+w)^{-it}$ на отдельные отрезки, для которых применима лемма 2.1.

Лемма 2.2. *При предположениях леммы* 2.1 *имеет место оценка*

$$\sum_{Q<n\leqslant Q+P} (n+w)^{-it} \ll P^{1-1/K} + P^{1-k/K} \Bigl\{\sum_{H} \min\bigl(P, \|\psi_H(Q)\|^{-1}\bigr)\Bigr\}^{1/K}, \tag{2.11}$$

где константа в $\ll$ *не зависит от* Q, P, t, k, w. *При этом*

$$\begin{gathered} H = n_1 n_2 \ldots n_{k-1}, \\ \psi_H(Q) = \psi_H(Q, t, k) = t(2\pi)^{-1}(Q+w)^{-k}(k-1)!\,H \end{gathered} \tag{2.12}$$

и $\sum\limits_H$ *обозначает суммирование по* $1\leqslant n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}\leqslant P$, *где фиксированное* H *засчитывается столько раз, сколько имеется представлений* H *в виде* (2.12) *с* $1\leqslant n_1, \ldots, n_{k-1}\leqslant P$ [1]).

Доказательство получается из теоремы 2.1 и леммы 2.1, если принять во внимание, что при $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$ всегда

$$(A+B)^{1/K} \leqslant A^{1/K} + B^{1/K}.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $t\geqslant 3$, $0<w\leqslant 1$ *и* N, N' — *натуральные числа, причем* $N<N'\leqslant 2N$. *Тогда для каждого целого* $k\geqslant 1$ *имеет место оценка*

$$\sum_{N<n\leqslant N'} (n+w)^{-it} \ll \bigl(N^{1-1/K} t^{1/K(k+1)} + N t^{-1/K(k+1)} \ln^{(k-1)/K} N\bigr) \ln^{1/K} t, \tag{2.13}$$

где $K=2^{k-1}$; *постоянная в* $\ll$ *не зависит от* k, N *и* t.

Доказательство. Мы разобьем $\sum\limits_{N<n\leqslant N'}$ на частичные суммы вида $\sum\limits_{Q<n\leqslant Q+P}$, где для Q и P выполнено равенство (2.5), и с по-

---

[1]) $1\leqslant H\leqslant p^{k-1}$ в силу (2.12)

мощью (2.11) оценим отдельные частичные суммы. Неравенство (2.5) будет выполнено, если мы возьмем $Q \geqslant N$ и положим

$$P = \left[\frac{1}{2} N t^{-1/(k+1)}\right].$$

Предположим сначала, что $P \geqslant 2$. Тогда выполнены условия леммы 2.2, в частности $N > 2$, так как $t \geqslant 3$. Теперь произведем разбиение

$$\sum_{N < n \leqslant N'} = \sum_{N < n \leqslant N+P} + \sum_{N+P < n \leqslant N+2P} + \ldots + \sum_{N+jP < n \leqslant N'}, \quad (2.14)$$

причем

$$j = \left[\frac{N'-N}{P}\right] \leqslant \frac{N}{P} \ll t^{1/(k+1)} \quad (P \geqslant 2,\ t \geqslant 3). \quad (2.15)$$

Рассмотрим сначала случай $j \geqslant 2$. Запишем (2.14) в виде

$$\sum_{N < n \leqslant N'} = \sum_{i} \sum_{Q_i < n \leqslant Q_i+P} + \sum_{N+jP < n \leqslant N'}, \quad (2.16)$$

где $Q_i = N + (i-1)P$ и (как и в последующем) $\sum\limits_{i}$ обозначает суммирование по $i = 1, 2, \ldots, j$. Очевидно, что

$$\left| \sum_{N+jP < n \leqslant N'} \right| \leqslant 2P \leqslant 2Nt^{-1/(k+1)} \leqslant 2Nt^{-1/K(k+1)},$$

т. е. имеет порядок не больше порядка величины оценки в (2.13). Из леммы 2.2 и из (2.15) для двойной суммы имеем

$$\sum_{i} \sum_{Q_i < n \leqslant Q_i+P} \ll$$
$$\ll jP^{1-1/K} + P^{1-k/K} \sum_{i} \left\{ \sum_{H} \min\left(P, \|\psi_H(Q_i)\|^{-1}\right)\right\}^{1/K} \ll$$
$$\ll t^{1/(k+1)} P^{1-1/K} + P^{1-k/K} \sum_{i} \left\{ \sum_{H} \min \right\}^{1/K}, \quad (2.17)$$

где $\sum\limits_{H}$ означает то же, что и в лемме 2.2. Из неравенства Гёльдера (П. 12.1) в силу (2.15) и неравенства $P \leqslant Nt^{-1(k+1)}$ получаем

$$P^{1-k/K} \sum_{i} \left\{ \sum_{H} \min \right\}^{1/K} \leqslant P^{1-k/K} j^{1-1/K} \left\{ \sum_{i} \sum_{H} \min \right\}^{1/K} \ll$$
$$\ll N^{1-k/K} t^{(k-1)/K(k+1)} \left\{ \sum_{i} \sum_{H} \min \right\}^{1/K}. \quad (2.18)$$

(Для t получается показатель $\{-(1-k/K)+(1-1/K)\}/(k+1)=$ $=(k-1)/K(k+1)$.) По теореме о среднем для $i=1, \ldots, j-1$ отсюда следует оценка

$$\psi_H(Q_i)-\psi_H(Q_{i+1})=\frac{k!\,tH}{3\pi k}\left(\frac{1}{(Q_i+w)^k}-\frac{1}{(Q_{i+1}+w)^k}\right)>$$

$$>\frac{k!\,tH}{2\pi k}\cdot\frac{k(Q_{i+1}-Q_i)}{(Q_{i+1}+w)^{k+1}}\geqslant c_2k!\,2^{-k}t^{k/(k+1)}N^{-k}H=\delta, \quad (2.19)$$

так как $Q_{i+1}+w\leqslant N'\leqslant 2N$ и $Q_{i+1}-Q_i=P>\frac{1}{2}Nt^{-1/(k+1)}-1\geqslant$ $\geqslant\frac{1}{4}Nt^{-1/(k+1)}$. Из определения (2.12) функции $\psi_H(Q)$ и равенства $Q_1=N$ при фиксированном H имеем

$$0<\psi_H(Q_j)<\ \ldots\ <\psi_H(Q_1)\leqslant k!\,tN^{-k}H.$$

Запишем

$$\sum_i\sum_H\min=\sum_H\sum_g\sum_{g-\frac{1}{2}<\psi_H(Q_i)\leqslant g+\frac{1}{2}}\min\left(P,\ \|\psi_H(Q_i)\|^{-1}\right), \quad (2.20)$$

где g при фиксированном H пробегает $\ll k!\,tN^{-k}H+1$ целых чисел. Теперь для каждого g

$$\sum_{g-\frac{1}{2}<\psi_H(Q_i)\leqslant g+\frac{1}{2}}\min\left(P,\ \|\psi_H(Q_i)\|^{-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2P+2\sum_{1\leqslant m\leqslant j}(m\delta)^{-1}\ll P+\delta^{-1}\ln j$$

($j\geqslant 2$), причем δ определено формулой (2.19). Действительно, разность $|\psi_H(Q_i)-g|$ при фиксированном g

$\geqslant\delta$, за исключением не более чем двух значений i,
$\geqslant 2\delta$, » » » » четырех » i,
$\geqslant 3\delta$ » » » » шести » i,

и т. д. [1]), а число членов в сумме $\leqslant j$. Далее в силу (2.15) и $k\geqslant 1$

$$\sum_H 1\leqslant P^{k-1}, \quad \ln j\ll\ln t \quad (2.21)$$

и, согласно (2.19),

$$\delta^{-1}\ll t^{-k/(k+1)}N^kH^{-1}.$$

[1]) Таким образом, члены, которые соответствуют обоим значениям $\psi_H(Q_i)$, соседним с g (слева и справа), можно оценить сверху величиной $2P$, члены с обоими (справа и слева от g соответственно) следующими значениями $\psi_H(Q_i)$ — через $2\delta^{-1}$ и т. д.

Подставляя в (2.20), получаем

$$\sum_i \sum_H \min \ll \sum_H \left(k!\,tN^{-k}H+1\right)\left(P+t^{-k/(k+1)}\ln t\cdot N^kH^{-1}\right). \qquad (2.22)$$

Мы оценим теперь различные части этой суммы. Из (2.21), поскольку $P\leqslant Nt^{-1/(k+1)}$ и $H\leqslant P^{k-1}$, следует

$$k!\,tN^{-k}P\sum_H H \ll k!\,tN^{-k}P\cdot P^{2(k-1)} \ll$$
$$\ll k!\,tN^{-k}N^{2k-1}t^{-(2k-1)/(k+1)} = k!\,t^{-(k-2)/(k+1)}N^{k-1}.$$

Далее ввиду (2.21) и $P\leqslant Nt^{-1/(k+1)}$ имеем

$$\sum_H P\leqslant P^k \ll N^kt^{-k/(k+1)},$$

$$\sum_H k!\,t^{1/(k+1)}\ln t \ll k!\,t^{1/(k+1)}\ln t\cdot N^{k-1}t^{-(k-1)/(k+1)} =$$
$$= k!t^{-(k-2)/(k+1)}\ln t\cdot N^{k-1}.$$

Наконец,

$$t^{-k/(k+1)}\ln t\cdot N^k\sum_H H^{-1}\leqslant t^{-k/(k+1)}\ln t\cdot N^k\Big(\sum_{1\leqslant n\leqslant P} n^{-1}\Big)^{k-1}\leqslant$$
$$\leqslant t^{-k/(k+1)}\ln t\cdot N^k4^{k-1}\ln^{k-1}P \ll t^{-k/(k+1)}\ln t\cdot N^k4^{k-1}\ln^{k-1}N,$$

так как $\sum_{1\leqslant n\leqslant P} n^{-1}\leqslant 4\ln P<4\ln N$ $\big(P\geqslant 2,\ P\leqslant Nt^{-1/(k+1)}<N$ при $t\geqslant 3\big)$. Подставляя в (2.22), получаем

$$\sum_i\sum_H \min \ll 2^{2k}t^{-k/(k+1)}\ln t\cdot N^k\ln^{k-1}N + k!\,t^{-(k-2)/(k+1)}\ln t\cdot N^{k-1} \ll$$
$$\ll 2^K\left(t^{-k/(k+1)}\ln t\cdot N^k\ln^{k-1}N+t^{-(k-2)/(k+1)}\ln t\cdot N^{k-1}\right),$$

так как $2^{2k}\ll 2^K$ и $k!\ll 2^K$. Если мы подставим все это в (2.18), то получим (пользуясь неравенством $(A+B)^{1/K}\leqslant A^{1/K}+B^{1/K}$ для $A,\ B\geqslant 0$)

$$P^{1-k/K}\sum_i\Big\{\sum_H \min\Big\}^{1/K} \ll \big(t^{-1/K(k+1)}N\ln^{(k-1)/K}N +$$
$$+ t^{1/K(k+1)}N^{1-1/K}\big)\ln^{1/K}t.$$

Используя (2.17) и оценку

$$t^{1/(k+1)}P^{1-1/K}\ll N^{1-1/K}t^{1/K(k+1)}$$

$\big(P\leqslant Nt^{-1/(k+1)}\big)$, получим утверждение теоремы.

Остается еще рассмотреть случаи $P \leqslant 1$ при произвольном j и $P \geqslant 2$, $j \leqslant 1$. В первом случае

$$\Big|\sum_{N<n\leqslant N'}\Big| \leqslant N = N^{1-1/K} t^{1/K(k+1)} \left(Nt^{-1/(k+1)}\right)^{1/K},$$

а это $\ll N^{1-1/K} t^{1/K(k+1)}$, так как $0 < Nt^{-1/(k+1)} < 4$ при $P \leqslant 1$. Во втором случае $N' - N < 2P$ и

$$\Big|\sum_{N<n\leqslant N'}\Big| \leqslant 2P \ll Nt^{-1/(k+1)} \ll Nt^{-1/K(k+1)},$$

так как $t \geqslant 3$, $k \geqslant 1$. Тем самым теорема 2.2 полностью доказана.

С точностью до степеней $\ln t$ и $\ln N$ оба слагаемых в правой части (2.13) при фиксированном t равны, если $N = t^{2/(k+1)}$.

§ 3. Применение к оценке $\zeta(s, w)$

Лемма 3.1. *Пусть* $t \geqslant 3$, $0 < w \leqslant 1$, $k \geqslant 1$ — *целое*, $K = 2^{k-1}$ *и* N, N' — *натуральные числа, причем* $N < N' \leqslant 2N$. *Тогда для* $\sigma > 0$ *имеет место оценка*

$$\sum_{N<n\leqslant N'} (n+w)^{-s} \ll N^{1-\sigma}\big(N^{-1/K} t^{1/K(k+1)} + \\ + t^{-1/K(k+1)} \ln^{(k-1)/K} N\big) \ln^{1/K} t. \qquad (3.1)$$

Доказательство. С помощью частного суммирования (П. 1.3) для $\sigma > 0$ получаем

$$\Big|\sum_{N<n\leqslant N'} (n+w)^{-\sigma-it}\Big| < N^{-\sigma} \max_{N<N''\leqslant N'} \Big|\sum_{N<n\leqslant N''} (n+w)^{-it}\Big|,$$

что вместе с теоремой 2.2 дает (3.1).

Лемма 3.2. *Если* $k \geqslant 3$, $1 - 1/4K \leqslant \sigma \leqslant 1$, $t \geqslant 3$, *то имеет место оценка*

$$\sum_{t^{2/(k+2)} < n \leqslant t^{2/(k+1)}} (n+w)^{-s} \ll t^{-1/8Kk} \ln^2 t. \qquad (3.2)$$

Доказательство. Если сумма не пустая, то мы разделим ее на $\ll \ln t$ частичных сумм вида, рассмотренного в лемме 3.1, и применим к этим частичным суммам лемму 3.1. В каждой частичной сумме $t^{2/(k+2)} \leqslant N < t^{2(k+1)}$ и $\ln N \leqslant \ln t$ $(k \geqslant 3)$. Если учесть неравенство $1 - \sigma \leqslant 1/4K$ и неравенства

$$-3/2(k+2) + 1/(k+1) \leqslant -1/8k,\ 1/2(k+1) - 1/(k+1) \leqslant \\ \leqslant -1/8k \quad (k \geqslant 3),$$

то получим, что частичная сумма

$$\ll \left(N^{-3/4K} t^{1/K(k+1)} + N^{1/4K} t^{-1/K(k+1)}\right) \ln t \ll \left(t^{-3/2K(k+2)+1/K(k+1)} + \right.$$
$$\left. + t^{1/2K(k+1)-1/K(k+1)}\right) \ln t \ll t^{-1/8Kk} \ln t.$$

Замечая, что число таких сумм $\ll \ln t$, получаем (3.2).

Лемма 3.3. *Если* $31/32 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $t \geqslant 3$, *то*

$$\sum_{t^{1/2} < n \leqslant t^2} (n+w)^{-s} = O(1). \tag{3.3}$$

Доказательство. Разделим сумму (3.3) на частичные суммы, рассмотренные в лемме 3.1, и применим эту лемму с $k=2$ к каждой частичной сумме. Тогда $t^{\frac{1}{2}} \leqslant N < t^2$, $\ln N \leqslant 2 \ln t$, и ввиду того, что $1 - c \leqslant \frac{1}{32}$, каждая такая частичная сумма будет

$$\ll \left(N^{-15/32} t^{1/6} + N^{1/32} t^{-1/6}\right) \ln t \ll \left(t^{-15/64+1/6} + t^{1/16-1/6}\right) \ln t \ll \ln^{-1} t.$$

Так как число частичных сумм $\ll \ln t$, получаем (3.3).

Лемма 3.4. *Пусть* g — *целое*, $G = 2^{g-1}$ *и* $6 \leqslant g \leqslant \ln_2 t$. *Тогда*

$$\sum_{t^{2/g} < n \leqslant t^2} (n+w)^{-s} = O(1) \quad (1 - 1/G \leqslant \sigma \leqslant 1). \tag{3.4}$$

Доказательство. Сумму по n из интервала $t^{2/g} < n \leqslant t^{\frac{1}{2}}$ разобьем на частичные суммы по интервалам $t^{2/(k+2)} < n \leqslant t^{2/(k+1)}$, где $3 \leqslant k \leqslant g-2$. К каждой частичной сумме применима лемма 3.2, так как $G = 2^{g-1} \geqslant 2^{k+1} = 4K$ и, значит, $1 - 1/G \geqslant 1 - 1/4K$. Таким образом,

$$\sum_{t^{2/(k+2)} < n \leqslant t^{2/(k+1)}} (n+w)^{-s} \ll t^{-1/8Kk} \ln^2 t \ll \ln_2^{-1} t,$$

поскольку для каждого фиксированного β, $0 < \beta < 1 - \ln 2$,

$$t^{-1/8Kk} \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8} \ln t / 2^{\ln_2 t} \ln_2 t\right) \ll \exp\left(-\ln^{\beta} t\right) \quad (t \geqslant 3).$$

Проводя суммирование по $k = 3, 4, \ldots, g-2$, убеждаемся в ограниченности суммы, распространенной на $t^{2/g} < n \leqslant t^{\frac{1}{2}}$. Так как $1 - 1/G \geqslant 1 - 1/2^5 = 31/32$, то к оставшейся сумме по $t^{\frac{1}{2}} < n \leqslant t^2$ применима лемма 3.3. Тем самым утверждение леммы полностью доказано.

Как видно, при доказательстве леммы 3.4 было необходимо разложить сумму (3.4) на части и к каждой части применить лемму 3.2 с оптимальным k. Дело в том, что правая часть в (3.1) становится наименьшей, если N приблизительно равно $t^{2/(k+1)}$.

Лемма 3.5. *Если* $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t \geqslant 3$, *то*

$$\zeta(s, w) - w^{-s} = \sum_{n \leqslant t^2} (n+w)^{-s} + O(1), \tag{3.5}$$

где $\zeta(s, w)$ — *функция, определенная в гл.* IV.

Доказательство. Для $\sigma > 1$, $m = [t^2]$ из теоремы П. 1.5 следует, как в (4.5.8),

$$\zeta(s, w) - w^{-s} = \sum_{n \leqslant m} (n+w)^{-s} + \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} - \\ - s \int_m^\infty \frac{\xi - [\xi]}{(\xi+w)^{s+1}}\, d\xi,$$

причем это равенство имеет место также в области $0 < \sigma < 1$, так как интеграл там абсолютно и равномерно сходится. Для $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t \geqslant 3$ имеем $1/(s-1) \ll t^{-1}$, $(m+w)^{1-s} \ll t^{2(1-\sigma)}$ и

$$\left| s \int_{[t^2]}^\infty \frac{\xi - [\xi]}{(\xi+w)^{s+1}}\, d\xi \right| \ll t^{1-2\sigma} = O(1),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.1. *Для постоянного* $a > 0$ *имеем*

$$\zeta(s, w) - w^{-s} \ll \frac{\ln t}{\ln_2 t}, \qquad 1 - a\frac{\ln_2 t}{\ln t} \leqslant \sigma \leqslant 2, \ t \geqslant c_3(a), \tag{3.6}$$

где константы в $\ll$ *могут зависеть от* a[1]).

Доказательство. В силу леммы 3.5 достаточно доказать, что в указанной области

$$\sum_{n \leqslant t^2} (n+w)^{-s} \ll \frac{\ln t}{\ln_2 t}.$$

Положим в лемме 3.4 $g = [\delta \ln_2 t]$, $0 < \delta < 1$. Тогда

$$G = 2^{g-1} < 2^g \leqslant (\ln t)^{\delta \ln 2}$$

[1]) Естественно, функция $\zeta(s, w) - w^{-s}$ в полуплоскости $\sigma > 2$ ограничена.

и для $\delta \leqslant 1/\ln 2$ имеем $1 - 1/G \leqslant 1 - a \ln_2 t/\ln t$ при $t \geqslant c_3(a)$, так что лемма 3.4 применима. Мы получаем

$$\sum_{n \leqslant t^2} = \sum_{n \leqslant t^{2/g}} + O(1).$$

Теперь для $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant 1$

$$\sum_{n \leqslant t^{2/g}} (n+w)^{-s} \ll \sum_{n \leqslant t^{2/g}} n^{-\sigma_1} \leqslant 1 + \int_1^{t^{2/g}} \xi^{-\sigma_1}\, d\xi \leqslant t^{2(1-\sigma_1)/g}(1-\sigma_1)^{-1}.$$

Если $\sigma_1 = 1 - a \ln_2 t/\ln t$, то

$$t^{2(1-\sigma_1)/g}(1-\sigma_1)^{-1} = \frac{1}{a}\frac{\ln t}{\ln_2 t}\exp\left(2a\frac{\ln_2 t}{[\delta \ln_2 t]}\right) \ll \frac{\ln t}{\ln_2 t}$$

с константой в $\ll$, зависящей от a. Это дает (3.6).

Теорема 3.1 является улучшением теоремы 4.5.2 и дает также улучшение теоремы 4.7.4. В частности, в теореме о простых числах вместо остаточного члена $O(x \exp(-c\sqrt{\ln x}))$ можно получить остаточный член $O(x \exp(-c\sqrt{\ln x \ln_2 x}))$ (см. Литлвуд [2], Ландау [12]), но мы этого делать не будем. Напротив, мы применим метод И. М. Виноградова, представляющий самостоятельный интерес, и значительно улучшим этот остаток.

Для суммы по $n < \exp(c \ln t/\ln_2 t)$ $[= t^{2/g},\ g = 2c^{-1}\ln_2 t]$ и достаточно малого c метод не дает никакого существенного улучшения тривиальной оценки. Например, в (2.13) для $k = [\ln_2 t/\ln 2] + 1$ получаем

$$Nt^{-1/K(k+1)} > N \exp(-2^{-(k-1)} \ln t) > cN,$$

а сумма в (2.13) тривиально не превосходит N.

§ 4. Метод И. М. Виноградова

Нашей целью является доказательство следующей теоремы, связь которой с оценкой сумм Вейля станет ясной позднее.

Теорема 4.1[1]. *Рассмотрим целые числа B и $P \geqslant 2$ и полином*

$$f(x) = \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x, \quad k \geqslant 2,$$

с действительными коэффициентами. Положим

$$C_k = C_k(P) = \sum_{B < x \leqslant B+P} e(f(x)), \tag{4.1}$$

где x принимает целые значения. Пусть l — любое натуральное число, $\delta_l = \frac{1}{2}k(k+1)(1-1/k)^l$, а b — такое натуральное число, что

$$b > \frac{1}{4}k(k+1) + lk. \tag{4.2}$$

[1]) И. М. Виноградов [2], [5], Хуа [2].

Тогда

$$J(b, P)=\int_0^1 \ldots \int_0^1 |C_k(P)|^{2b}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant$$

$$\leqslant (7b)^{5bl} \ln^l P \cdot P^{2b-\frac{1}{2}k(k+1)+\delta_l}. \quad (4.3)$$

Доказательству этой теоремы мы предпошлем ряд вспомогательных рассуждений.

Сначала заметим, что тривиально $J(b, P) \leqslant P^{2b}$, так как $|C_k(P)| \leqslant P$. Далее имеем

$$J(b, P)=\sum_{\substack{x_1, \ldots, x_b \\ y_1, \ldots, y_b}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 e\left(\alpha_k\left(x_1^k+\ldots+x_b^k-y_1^k-\ldots-y_b^k\right)\right)+\ldots$$

$$\ldots+\alpha_1(x_1+\ldots x_b-y_1-\ldots y_b)\, d\alpha_1\, d\alpha_2, \ldots d\alpha_k, \quad (4.4)$$

причем при суммировании x_i и y_i ($i=1, 2, \ldots, b$) пробегают независимо друг от друга значения $B+1, B+2, \ldots, B+P$. В формуле (4.4) те интегралы, для которых одновременно выполнены все равенства

$$\begin{gathered} x_1^k+\ldots+x_b^k=y_1^k+\ldots+y_b^k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+\ldots+x_b=y_1+\ldots+y_b, \end{gathered} \quad (4.5)$$

равны единице; все другие интегралы равны нулю. Следовательно, $J(b, P)$ равно числу решений системы диофантовых уравнений (4.5), причем x_i, y_i независимо друг от друга пробегают множество

$$B < x_i, y_i \leqslant B+P \quad (i=1, 2, \ldots, b). \quad (4.6)$$

Простую оценку числа $J(b, P)$ получаем следующим образом. При $b=k$ система (4.5) переходит в систему

$$\begin{gathered} x_1^k+\ldots+x_k^k=y_1^k+\ldots+y_k^k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+\ldots+x_k=y_1+\ldots+y_k. \end{gathered} \quad (4.7)$$

k чисел определяются суммами своих степеней, от первой до k-й с точностью до порядка. Поэтому из (4.7) следует, что $y_1, \ldots, y_k$ — некоторая перестановка чисел $x_1, \ldots, x_k$. Последние можно выбрать P^k различными способами. Следовательно, $J(k, P) \leqslant k!\, P^k$, и отсюда

$$J(b, P) \leqslant P^{2(b-k)} J(k, P) \leqslant k!\, P^{2b-k} \quad (4.8)$$

(первое неравенство получается после того, как будет вынесено из-под интеграла $C_k(P)$ в степени $2(b-k)$). Показатель P в (4.3) меньше чем $2b-k$, если выбирать l достаточно большим. Например, если $l > k\ln k$, то этот показатель равен $2b-\frac{1}{2}k(k+1)+O(k)$. Положим в (4.5) $x_i = X_i + B$, $y_i = Y_i + B$ и получим, что $J(b, P)$ равно числу решений системы

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant b}(X_i+B)^r = \sum_{1\leqslant i\leqslant b}(Y_i+B)^r \quad (1\leqslant r\leqslant k), \tag{4.9}$$

$$0 < X_i, Y_i \leqslant P \quad (1\leqslant i\leqslant b). \tag{4.10}$$

При $r = 1, 2, 3, \ldots$ последовательно получаем, что

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant b} X_i^r = \sum_{1\leqslant i\leqslant b} Y_i^r \quad (1\leqslant r\leqslant k). \tag{4.11}$$

Наоборот, из (4.11) следует (4.9), так что $J(b, P)$ равно также числу решений системы (4.11) в области (4.10). Отсюда видно, что $J(b, P)$ не зависит от B. Кроме того, получаем, что $J(b, P)$ не убывает с ростом P.

Лемма 4.1. *Пусть $Q = RH$, $R > 1$, $H > 1$, H — целое. Пусть также $k\geqslant 1$ и $g_1, \ldots, g_k$ — такие целые числа, что*

$$\begin{gathered} 1\leqslant g_1 < g_2 < \ldots < g_k \leqslant H, \\ g_\nu - g_{\nu-1}\geqslant 2 \quad (\nu = 2, \ldots, k). \end{gathered} \tag{4.12}$$

Для каждого значения ν $(1\leqslant\nu\leqslant k)$ обозначим через x_ν целое число из интервала

$$-\omega + (g_\nu - 1)R < x_\nu \leqslant -\omega + g_\nu R, \tag{4.13}$$

где $\omega\in[0, Q]$ — некоторое действительное число, не зависящее от ν. Наконец, пусть $J_1, J_2, \ldots, J_k$ — какие-нибудь (слева открытые, справа замкнутые) интервалы, длины которых не превосходят соответственно $1, Q, \ldots, Q^{k-1}$. Тогда число различных систем $x_1, \ldots, x_k$, для которых

$$x_1^h + x_2^h + \ldots + x_k^h \in J_h \quad \text{для всех} \quad h = 1, 2, \ldots, k, \tag{4.14}$$

не превосходит

$$(2kH)^{\frac{1}{2}k(k-1)}. \tag{4.15}$$

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_k$ — две системы рассмотренного вида, и пусть

$$s_h = \sum_{1\leqslant\nu\leqslant k} x_\nu^h, \quad s_h' = \sum_{1\leqslant\nu\leqslant k} y_\nu^h$$

для $h=1, 2, \ldots, k$. Обозначим через σ_h и σ'_h элементарные симметрические многочлены степени h от x_ν и от y_ν соответственно. Из (4.13) и неравенства $g_\nu R \leqslant HR = Q$ следует $|x_\nu| \leqslant Q$, $|y_\nu| \leqslant Q$ $(1 \leqslant \nu \leqslant k)$. Поэтому

$$\begin{gathered} |s_h| \leqslant kQ^h, \quad |s'_h| \leqslant kQ^h, \\ |\sigma_h| \leqslant C_k^h Q^h, \quad |\sigma'_h| \leqslant C_k^h Q^h \quad (1 \leqslant h \leqslant k). \end{gathered} \tag{4.16}$$

По предположению должно быть

$$|s_h - s'_h| \leqslant Q^{h-1} \quad (1 \leqslant h \leqslant k). \tag{4.17}$$

Пусть теперь $k \geqslant 2$. Покажем с помощью индукции, что отсюда следует

$$|\sigma_h - \sigma'_h| \leqslant \frac{3}{4}(2kQ)^{h-1} \quad (2 \leqslant h \leqslant k). \tag{4.18}$$

Так как $\sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2^2)$, то при помощи (4.17) $(h=1, 2)$ и (4.16) это утверждение получается для $h=2$

$$\begin{aligned} |\sigma_2 - \sigma'_2| &\leqslant \frac{1}{2}\{|s_1 - s'_1|(|s_1| + |s'_1|) + |s_2 - s'_2|\} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}(2k+1)Q \leqslant \frac{3}{4}2kQ \quad (k \geqslant 2,\ Q > 1). \end{aligned}$$

Пусть $3 \leqslant h \leqslant k$ и (4.18) уже доказано для всех чисел, меньших h. Тогда, используя (4.16), при $1 \leqslant \nu \leqslant h-1$ получаем (по (4.17) имеем $|\sigma_1 - \sigma'_1| \leqslant 1$)

$$\begin{aligned} |\sigma_\nu s_{h-\nu} - \sigma'_\nu s'_{h-\nu}| &\leqslant |\sigma_\nu - \sigma'_\nu||s_{h-\nu}| + |\sigma'_\nu||s_{h-\nu} - s'_{h-\nu}| \leqslant \\ &\leqslant \{(2k)^{\nu-1}k + C_k^\nu\}Q^{h-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{\nu!}\right)(2k)^{\nu-1}kQ^{h-1}. \end{aligned}$$

Из формул Ньютона следует

$$\begin{gathered} s_h - \sigma_1 s_{h-1} + \ldots + (-1)^h h\sigma_h = 0, \\ s'_h - \sigma'_1 s'_{h-1} + \ldots + (-1)^h h\sigma'_h = 0. \end{gathered}$$

Отсюда при $k \geqslant 3$, $h \geqslant 3$ следует

$$\begin{aligned} |\sigma_h - \sigma'_h| &\leqslant h^{-1}\Bigl(1 + 2k + \frac{3}{2}k \sum_{2 \leqslant \nu \leqslant h-1} (2k)^{\nu-1}\Bigr)Q^{h-1} < \\ &< \frac{1}{2}\Bigl(1 + 2k + \frac{3}{2}k\{(2k)^{h-1} - 2k\}/(2k-1)\Bigr)Q^{h-1} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\Bigl\{1 + \frac{1}{2}k + \frac{3}{2}k(2k)^{h-1}/(2k-1)\Bigr\}Q^{h-1} \leqslant \frac{3}{4}(2kQ)^{h-1}, \end{aligned}$$

чем (4.18) доказано. Из (4.18), в частности, следует, что

$$|\sigma_h - \sigma_h'| \leqslant (2kQ)^{h-1}, \quad 1 \leqslant h \leqslant k \tag{4.19}$$

(для $k=1$ по (4.17)). Теперь для $|X| \leqslant Q$, $k \geqslant 2$ имеем

$$|(X-x_1)\ldots(X-x_k)-(X-y_1)\ldots(X-y_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1 \leqslant h \leqslant k} |\sigma_h - \sigma_h'|\,|X|^{k-h} \leqslant \left\{1 + \frac{3}{4}\sum_{2 \leqslant h \leqslant k}(2k)^{h-1}\right\} Q^{k-1} =$$
$$= \left(1 + \frac{3\cdot 2k}{4(2k-1)}\left\{(2k)^{k-1}-1\right\}\right) Q^{k-1} \leqslant (2kQ)^{k-1}, \tag{4.20}$$

так как $2k/(2k-1) \leqslant {}^4/_3$ при $k \geqslant 2$. Таким образом, по предположению (4.13) для $1 \leqslant \nu \leqslant k-1$ имеет место оценка $|y_k - x_\nu| > R$, и, следовательно, если мы положим в (4.20) $X = y_k$, то получим

$$R^{k-1}|y_k - x_k| < (2kQ)^{k-1}.$$

Поэтому число возможных различных x_k не превосходит $(2kH)^{k-1}$. При фиксированном x_k, $k \geqslant 2$, по предположению, каждое из чисел

$$x_1^h + \ldots + x_{k-1}^h \quad (1 \leqslant h \leqslant k-1) \tag{4.21}$$

лежит в интервалах длины не более Q^{h-1}. Пусть $k \geqslant 2$. Предположим, что утверждение справедливо для $k-1$, т. е. что число различных систем $x_1, \ldots, x_{k-1}$, для которых суммы (4.21) лежат в интервалах длины $1, Q, \ldots, Q^{k-2}$, не больше чем

$$\{2(k-1)H\}^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}.$$

Тогда число соответствующих систем $x_1, \ldots, x_k$ будет не больше чем

$$\{2(k-1)H\}^{\frac{1}{2}(k-1)(k-2)}(2kH)^{k-1} \leqslant (2kH)^{\frac{1}{2}k(k-1)}.$$

Тем самым утверждение доказано для k, если оно верно для $k-1$; для $k=1$ оно очевидно, и, следовательно, лемма 4.1 доказана.

Ввиду условия (4.13) число, оцененное в лемме 4.1, тривиально не больше $(R+1)^k$.

Лемма 4.2. *Пусть $c \geqslant 1$, а в остальном пусть выполняются предположения леммы 4.1. Тогда число различных систем, для которых каждое из чисел*

$$x_1^h + \ldots + x_k^h \quad (1 \leqslant h \leqslant k)$$

лежит в фиксированном интервале длины не более $cQ^{h\left(1-\frac{1}{k}\right)}$ *не превосходит величины*

$$(2c)^k (2kH)^{\frac{1}{2}k(k-1)} Q^{\frac{1}{2}(k-1)}. \qquad (4.22)$$

Доказательство. Разделим h-й интервал не более чем на

$$c\frac{Q^{h(1-1/k)}}{Q^{h-1}} + 1 \leqslant 2cQ^{1-h/k}$$

подинтервалов длины, не превосходящей Q^{h-1}. Так как

$$\prod_{1 \leqslant h \leqslant k} \left(2cQ^{1-h/k}\right) = (2c)^k Q^{\frac{1}{2}(k-1)},$$

мы имеем не более $(2c)^k Q^{\frac{1}{2}(k-1)}$ систем подинтервалов, длины которых не более чем $1, Q, \ldots, Q^{k-1}$. К каждой такой системе применима лемма 4.1. Для каждой системы имеется не более $(2kH)^{\frac{1}{2}k(k-1)}$ возможностей. Отсюда следует утверждение леммы 4.2.

Число, оцениваемое леммой 4.2, тривиальным образом не превосходит $(R+1)^k$.

Лемма 4.3. *Пусть* $b \geqslant k \geqslant 2$, H — *целое. Система целых чисел* $g_1, \ldots, g_b$ *(среди которых могут быть равные),* $1 \leqslant g_\nu \leqslant H$ $(\nu = 1, 2, \ldots, b)$, *называется правильной, если в системе встречаются по крайней мере* k *чисел, например* $g_{j_1}, \ldots, g_{j_k}$, *такие, что*

$$g_{j_{\nu+1}} - g_{j_\nu} > 1 \quad (1 \leqslant \nu \leqslant k-1); \qquad (4.23)$$

в противном случае система неправильная.

Тогда число неправильных систем не более чем

$$b!\,3^b H^{k-1}. \qquad (4.24)$$

Доказательство. Расположим числа $g_1, \ldots, g_b$ в порядке возрастания:

$$1 \leqslant g_1' \leqslant g_2' \leqslant \ldots \leqslant g_b' \leqslant H, \qquad (4.25)$$

и положим $f_\nu = g_{\nu+1}' - g_\nu'$ $(1 \leqslant \nu \leqslant b-1)$. Если система неправильная, то имеется не более чем $k-1$ значений $f_\nu > 1$. Рассмотрим систему, для которой $f_{\nu_1} > 1, \ldots, f_{\nu_m} > 1$ $(0 \leqslant m \leqslant k-2)$, а остальные $f_\nu \leqslant 2$. Для выбора индексов $\nu_1, \ldots, \nu_m$ при фиксированном m имеется ровно C_{b-1}^m возможностей. При фиксированных

$\nu_1, \ldots, \nu_m$ имеется не больше чем $H^{m+1}2^{b-1-m}$ возможностей, так как для g_1' имеется не более H возможностей, а для $f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_m}$ — не более H^m возможностей, в то время как при фиксированных g_1', $f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_m}$ каждая из остальных $b-1-m$ разностей f_ν может принимать самое большее значение 0, 1, что дает 2^{b-1-m} возможностей. В итоге число систем $g_1', \ldots, g_b'$, которые соответствуют неправильной системе $g_1, \ldots, g_b$, не больше чем

$$\sum_{m=0}^{k-2} C_{b-1}^m H^{m+1}2^{b-1-m} \leqslant H^{k-1} \sum_{m=0}^{k-2} C_{b-1}^m 2^{b-1-m} \leqslant$$
$$\leqslant H^{k-1}(1+2)^{b-1} < H^{k-1}3^b.$$

Отсюда, так как $b!$ системам $g_1, \ldots, g_b$ соответствует одна и та же система $g_1', \ldots, g_b'$, получаем утверждение леммы.

Для сравнения заметим, что число всех систем тривиально не больше чем H^b.

Теперь докажем следующую рекуррентную формулу, из которой легко получится доказательство теоремы 4.1.

Лемма 4.4. *Пусть $k \geqslant 2$ — целое, а b — натуральное число,*

$$b > \frac{1}{4}k(k+1)+k = \frac{1}{4}k^2 + \frac{5}{4}k \tag{4.26}$$

(в частности, $b > 3$). Если

$$\eta = \left[\frac{\ln Q}{k \ln 2}\right], \quad Q \geqslant 2,$$

то

$$J(b, Q) \leqslant (7b)^{5b} \max(1, \eta)\, Q^{2k-\frac{1}{2}(k+1)+2(b-k)/k} J\left(b-k, Q^{1-1/k}\right). \tag{4.27}$$

Доказательство. Мы разобьем довольно сложное доказательство на пять частей.

а) Имеем

$$J(b, Q) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |C_k(Q)|^{2b}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_k,$$

причем C_k определено в (4.1). Разобьем $\{C_k(Q)\}^b$ определенным образом на частичные суммы. Согласно замеченному после формулы (4.11), достаточно рассмотреть случай $B=0$.

В пунктах а), б), в), г) предположим, что $\eta \geqslant 2$ и, следовательно, $Q \geqslant 2^{2k}$.

Пусть m — какое-нибудь целое число, $1 \leqslant m \leqslant \eta - 1$. Разделим область суммирования $C_k(Q)$ на 2^m частей длины $R_m = Q2^{-m}$:

$$C_k(Q) = \sum_{g=1}^{2^m} \sum_{(g-1) R_m < x \leqslant gR_m} e(f(x)) = \sum_{g=1}^{2^m} Z_{mg},$$

где Z_{mg} — внутренняя сумма. Положим $Z = \{C_k(Q)\}^b$. После почленного перемножения получаем

$$Z = \sum^{2^{mb}} Z_{mg_1} \ldots Z_{mg_b}, \tag{4.28}$$

причем мы здесь и в последующем будем обозначать через

$$\sum^{M} G$$

сумму не более M членов определенного типа G. Строение членов G будет ясно из текста. Для краткости обозначим еще

$$Z_m = Z_m(g_1, \ldots, g_b) = Z_{mg_1} \ldots Z_{mg_b}, \tag{4.29}$$

и всегда будем оговаривать, с какими $g_1, \ldots, g_b$ нужно брать Z_m.

Те Z_m, для которых $g_1, \ldots, g_b$ образуют правильную систему, мы назовем правильными суммами (мы считаем при этом, что члены произведения $Z_{mg_1} \ldots Z_{mg_b}$ в правой части (4.29) почленно перемножены) и обозначим их через Z'_m; остальные Z_m мы назовем неправильными суммами. По лемме 4.3 при $H = 2^m$ число неправильных сумм Z_m не больше чем $b!3^b 2^{m(k-1)}$. Эти неправильные Z_m теперь разобьем еще раз, разбивая в каждом сомножителе произведения (4.29) область суммирования на две равные части; тем самым каждая неправильная сумма Z_m разбивается на 2^b сумм типа Z_{m+1}. Число правильных Z_{m+1}, которые получаются таким образом из неправильных Z_m, не более

$$b!3^b 2^{m(k-1)} 2^b = b!6^b 2^{m(k-1)}.$$

Эта оценка имеет место даже для числа всех Z_{m+1}, получающихся из неправильных Z_m. Правильные Z_{m+1} мы обозначим через Z'_{m+1}, а неправильные Z_{m+1} мы разобьем далее так же, как были разбиты неправильные Z_m. Весь процесс начинается с Z_1. Z_1 — всегда неправильные, так как соответствующие $g_1, \ldots, g_b$ равны 1 или 2, поэтому можно начинать с них. Процесс мы повторяем для $m = 1, 2, \ldots, \eta - 1$ и через Z'_η обозначаем на этот раз все Z_η, которые получаются из неправильных $Z_{\eta-1}$ (а не только правильные Z_η). Таким образом, мы находим

$$Z = \sum_{m=1}^{\eta} \sum^{U_m} Z'_m, \tag{4.30}$$

где $U_m = b!\,6^b 2^{m(k-1)}$. (Внутренняя сумма становится пустой, если m настолько мало, что не существует ни одной правильной системы $g_1, \ldots, g_b$, для которой $1 \leqslant g_\nu \leqslant 2^m$ $(1 \leqslant \nu \leqslant b)$, например если $2^m < k$.)

б) В этой части доказательства с помощью подходящего преобразования $Z'_m(g_1, \ldots, g_b)$, так сказать, „извлекаются правильные индексы".

С помощью неравенства Шварца (П.12.3) из (4.30) получим

$$|C_k(Q)|^{2b} = |Z|^2 \leqslant \eta \sum_{m=1}^{\eta} \left| \sum^{U_m} Z'_m \right|^2 \leqslant \eta \sum_{m=1}^{\eta} U_m \sum^{U_m} |Z'_m|^2. \tag{4.31}$$

Рассмотрим теперь некоторое $Z'_m(g_1, \ldots, g_b)$, $1 \leqslant m \leqslant \eta - 1$, и предположим, что $g_1, \ldots, g_b$ — правильный набор индексов (т. е. выполнено условие (4.23) при $j_\nu = \nu$); если это не так, то можно так перенумеровать индексы $g_1, \ldots, g_b$, что получится именно этот случай. Так как среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит среднего арифметического (П.12.4), то

$$|Z_{mg_{k+1}} \ldots Z_{mg_b}|^2 \leqslant \frac{1}{b-k} \sum_{i=k+1}^{b} |Z_{mg_i}|^{2(b-k)}. \tag{4.32}$$

Область суммирования в Z_{mg_i} $(k+1 \leqslant i \leqslant b)$ мы разделим не более чем на

$$\left[\frac{Q2^{-m}}{Q^{1-1/k}-1}\right] + 1 \leqslant Q2^{-m}\left(Q^{1-1/k}-1\right)^{-1} + Q^{1/k}2^{-\eta} \leqslant$$
$$\leqslant Q2^{-m}\left(\frac{3}{4}Q^{1-1/k}\right)^{-1} + Q^{1/k}2^{-m-1} \leqslant Q^{1/k}2^{-(m-1)} \tag{4.33}$$

частей. Неравенство (4.33) имеет место, так как $\eta = [\ln Q/k \ln 2] \geqslant 2$, $Q \geqslant 2^{2k}$, $k \geqslant 2$, и, следовательно, $4 \leqslant 2^\eta \leqslant Q^{1/k} \leqslant Q^{1-1/k}$. В каждой из получившихся частичных сумм

$$C^* = \sum_y e(f(y)) \tag{4.34}$$

y должно пробегать значения из интервала, длина которого не более чем $Q^{1-1/k} - 1$, точнее, для подходящего целого ω индекс y пробегает все целые числа интервала

$$\omega < y \leqslant \omega + Q', \quad 0 < Q' \leqslant Q^{1-1/k}, \tag{4.35}$$

причем $0 \leqslant \omega \leqslant g_i R_m \leqslant Q$, так как область суммирования C^* должна содержаться в области суммирования Z_{mg_i} (последняя состоит из таких целых x, что $(g_i - 1) R_m < x \leqslant g_i R_m$, $R_m = Q2^{-m}$, $1 \leqslant g_i \leqslant 2^m$).

Из неравенства Гёльдера (П.12.2) следует $(k+1\leqslant i\leqslant b)$

$$|Z_{mg_i}|^{2(b-k)}\leqslant\left(\sum^{Q^{1/k}2^{-(m-1)}}|C^*|\right)^{2(b-k)}\leqslant$$
$$\leqslant\left(Q^{1/k}2^{-(m-1)}\right)^{2(b-k)-1}\sum^{Q^{1/k}2^{-(m-1)}}|C^*|^{2(b-k)}. \quad (4.36)$$

Отсюда и из (4.32) следует, что[1])

$$|Z_m(g_{k+1},\ \ldots,\ g_b)|^2\leqslant(b-k)^{-1}\left(Q^{1/k}2^{-(m-1)}\right)^{2(b-k)-1}\sum^{G_m}|C^*|^{2(b-k)},$$
$$G_m=(b-k)\,Q^{1/k}2^{-(m-1)}.$$

Из (4.31) вытекает теперь неравенство

$$|Z|^2=|C_k(Q)|^{2b}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\eta}{b-k}\sum_{m=1}^{\eta}U_m\left(Q^{1/k}2^{-(m-1)}\right)^{2(b-k)-1}\sum^{N_m}|Z_{mg_1}\ \ldots\ Z_{mg_k}|^2|C^*|^{2(b-k)}, \quad (4.37)$$

где

$$N_m=U_m(b-k)\,Q^{1/k}2^{-(m-1)} \quad (4.38)$$

(при этом нужно заменить суммы в (4.31), возможно пустые для малого m, пустыми суммами). При $m=\eta$ может получиться так, что $g_1,\ \ldots,\ g_k$ образуют неправильную систему, однако с разбиением $Z_{\eta g_i}$ $(k+i\leqslant i\leqslant b)$ поступают так же, только $g_1, \ldots, g_k$ в $|Z_{\eta g_1}\ldots Z_{\eta g_k}|^2$ не обязательно образуют правильную систему.

Интегрирование (4.37) по области $\{0\leqslant\alpha_1\leqslant 1,\ \ldots,\ 0\leqslant\alpha_k\leqslant 1\}$ дает

$$\int_0^1\ldots\int_0^1|C_k(Q)|^{2b}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k=\int_0^1\ldots\int_0^1|Z|^2\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\eta}{b-k}\sum_{m=1}^{\eta}U_m\left(Q^{1/k}2^{-(m-1)}\right)^{2(b-k)-1}\times$$
$$\times\sum^{N_m}\int_0^1\ldots\int_0^1|Z_{mg_1}\ \ldots\ Z_{mg_k}|^2|C^*|^{2(b-k)}\,d\alpha_1\ldots d\alpha_k. \quad (4.39)$$

[1]) При этом последняя сумма есть сумма не более G_m членов $|C^*|^{2(b-k)}$, где C^* — не рассмотренная подробно сумма вида (4.34).

в) Теперь устраним из интеграла в правой части (4.39) правильные для $m \leqslant \eta - 1$ индексы, рассматривая интеграл как число решений системы диофантовых уравнений и используя леммы 4.1 и 4.2.

Выражение

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |Z_{mg_1} \ldots Z_{mg_k}|^2 |C^*|^{2(b-k)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \tag{4.40}$$

равно числу решений системы диофантовых уравнений

$$x_1^h + \ldots + x_k^h + y_1^h + \ldots + y_{b-k}^h = \\ = x_1'^h + \ldots + x_k'^h + y_1'^h + \ldots + y_{b-k}'^h \quad (1 \leqslant h \leqslant k), \tag{4.41}$$

причем переменные лежат в областях

$$\omega < y_j, y_j' \leqslant \omega + Q' \quad \left(0 < Q' \leqslant Q^{1-1/k},\ 0 \leqslant \omega \leqslant Q\right), \tag{4.42}$$

$j = 1, 2, \ldots, b-k$, где ω — целое число из (4.35), зависящее от C^*, но не зависящее от j,

$$\begin{gathered}(g_i - 1) R_m < x_i, x_i' \leqslant g_i R_m \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \\ \left(1 \leqslant g_i \leqslant 2^m,\ R_m = Q2^{-m}\right).\end{gathered} \tag{4.43}$$

Здесь при $m \leqslant \eta - 1$ наборы $g_1, \ldots, g_k$ образуют правильные системы. В (4.9) и (4.11) мы показали, что это число равно числу решений системы (4.41), если переменные лежат в областях

$$0 < y_j, y_j' \leqslant Q' \left(\leqslant Q^{1-1/k}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, b-k), \tag{4.44}$$

$$-\omega + (g_i - 1) R_m < x_i, x_i' \leqslant -\omega + g_i R_m \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{4.45}$$

Пусть теперь $1 \leqslant m \leqslant \eta - 1$. Если x_i' фиксируется, а y_i и y_i' пробегают область (4.44), то уравнения (4.41) накладывают на x_i ограничения типа ограничений, предположенных в леммах 4.1 и 4.2, если положить в этих леммах $R = R_m$, $H = 2^m$, $c = 2(b-k)$. В самом деле, из (4.44) следует

$$\left|y_1'^h + \ldots + y_{b-k}'^h - y_1^h - \ldots - y_{b-k}^h\right| < (b-k) Q^{(1-1/k)h} \quad (1 \leqslant h \leqslant k).$$

По лемме 4.2 число различных систем x_i и x_i' $(1 \leqslant i \leqslant k)$ из (4.45), которые удовлетворяют системе уравнений (4.41), если y_j, y_j' лежат в области (4.44), не превосходит величины

$$(R_m + 1)^k \{4(b-k)\}^k \left(2k2^m\right)^{{}^1\!/_2 k(k-1)} Q^{{}^1\!/_2 (k-1)}.$$

Мы имели $1 \leqslant m \leqslant \eta - 1 < \eta \leqslant \ln Q / k \ln 2$ и, следовательно, $Q2^{-m} > Q2^{-\eta} \geqslant Q^{1-1/k} \geqslant 2^{2k-2}$, потому что $Q \geqslant 2^{2k}$. Следовательно,

$R_m + 1 = Q2^{-m} + 1 \leqslant 2 \cdot Q2^{-m}$ и рассматриваемая величина не превосходит

$$\{4(b-k)\}^k (2k)^{1/2k(k-1)} 2^{1/2mk(k-1)-(m-1)k} Q^{2k-1/2(k+1)}. \qquad (4.46)$$

Каждое выражение вида (4.40) можно написать в виде

$$\sum_{N_1, \ldots, N_k} \psi(N_1, \ldots, N_k) \times$$
$$\times \int_0^1 \ldots \int_0^1 e(-N_k\alpha_k - \ldots - N_1\alpha_1) |C^*|^{2(b-k)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k, \quad (4.47)$$

где $\psi(N_1, \ldots, N_k)$ — число решений системы

$$N_h = x_1^h + \ldots + x_k^h - x_1'^h - \ldots - x_k'^h \quad (1 \leqslant h \leqslant k) \quad (4.48)$$

в области (4.45), а $N_1, \ldots, N_k$ пробегает систему чисел, которые представимы в виде

$$N_h = y_1^h + \ldots + y_{b-k}^h - y_1'^h - \ldots - y_{b-k}'^h \quad (1 \leqslant h \leqslant k) \quad (4.49)$$

с y_j, y_j' из области (4.44). Абсолютная величина интеграла из (4.47) не больше чем

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |C^*|^{2(b-k)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left|C_k\left(Q^{1-1/k}\right)\right|^{2(b-k)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k,$$

поскольку переменная суммирования y в C^* пробегает интервал (4.44), и $J(b, P)$ с ростом P не убывает, как уже было установлено в (4.41). Кроме того, $\sum\limits_{N_1, \ldots, N_k} \psi(N_1, \ldots, N_k)$ ограничено величиной (4.46), так как эта сумма равна числу различных систем x_i, x_i' из области (4.45), которые могут появиться в качестве решений (4.41), если y_j и y_j' лежат в (4.44). Следовательно, для $1 \leqslant m \leqslant \eta - 1$ получим

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |Z_{mg_1} \ldots Z_{mg_k}|^2 |C^*|^{2(b-k)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant$$
$$\leqslant \{4(b-k)\}^k (2k)^{1/2k(k-1)} 2^{1/2mk(k+1)-(2m-1)k} Q^{2k-1/2(k+1)} \times$$
$$\times \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left|C_k\left(Q^{1-1/k}\right)\right|^{2(b-k)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k =$$
$$= \{4(b-k)\}^k k^{1/2k(k-1)} 2^{1/2k(k+1)} 2^{1/2mk(k-1)} Q^{2k-1/2(k+1)} J\left(b-k, Q^{1-1/k}\right). \quad (4.50)$$

При $m=\eta$ справедлива грубая оценка

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |Z_{\eta g_1} \ldots Z_{\eta g_k}|^2 |C^*|^{2(b-k)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant$$

$$\leqslant (2R_\eta)^{2k} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left|C_k\left(Q^{1-1/k}\right)\right|^{2(b-k)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k, \quad (4.51)$$

поскольку $Q2^{-\eta} \geqslant 2^{2k-2} \geqslant 4 > 1$, $k \geqslant 2$, и, значит, $|Z_{\eta g_i}| \leqslant R_\eta + 1 = Q2^{-\eta} + 1 \leqslant 2R_\eta$. Теперь, так как $\eta > \ln Q/k \ln 2 - 1$, имеем

$$(2R_\eta)^{2k} = Q^{2k} 2^{2k-2\eta k} = Q^{2k-{}^1\!/_2(k+1)} \left(Q2^{-\eta k}\right)^{{}^1\!/_2(k+1)} 2^{2k-\eta\{2k-{}^1\!/_2 k(k+1)\}} \leqslant$$

$$\leqslant Q^{2k-{}^1\!/_2(k+1)} 2^{{}^1\!/_2 k(k+1)} 2^{2k-\eta\{2k-{}^1\!/_2 k(k+1)\}} =$$

$$= 2^{{}^1\!/_2 k(k+5)} 2^{{}^1\!/_2 \eta k(k-3)} Q^{2k-{}^1\!/_2(k+1)}. \quad (4.52)$$

Из (4.26) следует $\{4(b-k)\}^k > \{k(k+1)\}^k > 2^{2k}$ $(k \geqslant 2)$, а отсюда получаем, что (4.50) имеет место также для $m=\eta$.

В этом месте становится ясно, почему разбиение проводится как раз до $m=\eta$. Это делается потому, что вплоть до этого значения m (4.50) дает улучшение по сравнению с тривиальной оценкой в (4.51).

г) Если мы сопоставим теперь результаты а), б) и в), то, согласно (4.39) и (4.50), получим

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |C_k(Q)|^{2b} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{b-k} \sum_{m=1}^{\eta} U_m \left(Q^{1/k} 2^{1-m}\right)^{2(b-k)-1} N_m \{4(b-k)\}^k k^{{}^1\!/_2 k(k-1)} \times$$

$$\times 2^{{}^1\!/_2 k(k+1) + {}^1\!/_2 mk(k-3)} Q^{2k-{}^1\!/_2(k-1)} J\left(b-k,\ Q^{1-1/k}\right). \quad (4.53)$$

Если положим

$$c(k, b) = (b!\,6^b)^2\, 2^{2(b-k)+{}^1\!/_2 k(k+1)} (4b)^k k^{{}^1\!/_2 k(k-1)}, \quad (4.54)$$

то, так как $U_m = b!\,6^b 2^{m(k-1)}$ (см. (4.30)) и

$$N_m = U_m (b-k) Q^{1/k} 2^{-(m-1)} = b!\,6^b (b-k)\, 2^{mk-2m+1} Q^{1/k}$$

(см. (4.38)), наконец, получим

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |C_k(Q)|^{2b} d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \leqslant$$

$$\leqslant c(k, b)\, \eta \sum_{m=1}^{\eta} 2^{-m\{2b-{}^1\!/_2 k(k+5)\}} Q^{2k-{}^1\!/_2(k+1)+2(b-k)/k} J\left(b-k,\ Q^{1/k}\right). \quad (4.55)$$

Действительно, $\{4(b-k)\}^k < (4b)^k$ и показатели степени двойки, не встречающиеся в $c(k, b)$, дают в совокупности

$$m(k-1)-m2(b-k)+(m-1)+mk-2m+1+\frac{1}{2}mk(k-3)=$$
$$=m\left\{-2b+\frac{1}{2}k(k+5)-2\right\}<m\left\{-2b+\frac{1}{2}k(k+5)\right\},$$

в то время как показатель степени Q равен $2k-{}^1/_2(k+1)+$ $+2(b-k)/k$. В силу (4.26) имеем $2b-{}^1/_2k(k+5)\geqslant 1$, поэтому из (4.55) следует

$$J(b, Q)\leqslant c(k, b)\,\eta Q^{2k-{}^1/_2(k+1)+2(b-k)/k}J\left(b-k, Q^{1-1/k}\right). \tag{4.56}$$

Теперь из-за того, что $k\leqslant b$ и ${}^1/_2k(k-1)<{}^1/_2k(k+1)<2b$, имеем

$$c(k, b)<(6b)^{2b}(4b)^b(2b)^{2b}=(6^2\cdot 4\cdot 2^2\cdot b^5)^b<(7b)^{5b},$$

и тем самым (4.27) доказано для $\eta\geqslant 2$.

д) Пусть $\eta<2$, следовательно,

$$\frac{\ln Q}{k\ln 2}<2,\quad Q<2^{2k},\quad \max(1, \eta)=1. \tag{4.57}$$

Разобьем $C_k(Q)$ на четыре части вида

$$C^*=\sum_{A<x\leqslant A+Q'}e(f(x)),\quad 0<Q'\leqslant\frac{1}{4}Q<Q^{1-1/k}. \tag{4.58}$$

Неравенство Гёльдера дает

$$|C_k(Q)|^{2b}\leqslant 4^{2b-1}\sum^4|C^*|^{2b}\leqslant 4^{2b-1}Q^{2k\,(1-1/k)}\sum^4|C^*|^{2(b-}$$

С помощью интегрирования отсюда следует

$$J(b, Q)\leqslant 4^{2b-1}Q^{2k\,(1-1/k)}\sum^4\int_0^1\ldots\int_0^1|C^*|^{2(b-k)}d\alpha_1\ldots d\alpha_k\leqslant$$
$$\leqslant 4^{2b}Q^{2k\,(1-1/k)}\int_0^1\ldots\int_0^1\left|C_k\left(Q^{1-1/k}\right)\right|^{2(b-k)}d\alpha_1\ldots d\alpha_k, \tag{4.59}$$

так как $J(b-k, Q')\leqslant J\left(b-k, Q^{1-1/k}\right)$ (см. (4.58)). Поскольку $2(b-k)/k>{}^1/_2(k+1)$ (по (4.26)) и $2k(1-1/k)<2b$, то правая часть (4.59) не превосходит величины

$$4^{2b}Q^{2k-{}^1/_2(k+1)+2(b-k)/k}J\left(b-k, Q^{1-1/k}\right).$$

Этим лемма 4.4 полностью доказана.

Пусть, например, x пробегает множество натуральных чисел, и пусть $X = \sum_{x \leqslant Q} e(\alpha x)$. Пусть далее $Q = RH$, $H > 1$ — целое, $R > 1$. Тогда $X = X^{(1)} + \ldots + X^{(H)}$, где $X^{(i)}$ обозначает сумму, распространенную на область

$$B_i: \quad (i-1)R < x \leqslant iR \qquad (1 \leqslant i \leqslant H).$$

Пусть $q > 1$ — целое. Неравенство

$$\int_0^1 |X|^{2q} \, d\alpha \leqslant H^{2q-1} \left\{ \int_0^1 |X^{(1)}|^{2q} \, d\alpha + \ldots + \int_0^1 |X^{(H)}|^{2q} \, d\alpha \right\}$$

означает, что число решений системы

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_q = x_1' + x_2' + \ldots + x_q'$$

в области $0 < x_j, \ x_j' \leqslant Q \ (1 \leqslant j \leqslant q)$ не больше чем H^{2q-1}-кратная сумма чисел решений систем

$$x_1^{(i)} + \ldots + x_q^{(i)} = x_1'^{(i)} + \ldots + x_q'^{(i)}$$

$$(i-1)R < x_j^{(i)}, x_j'^{(i)} \leqslant iR \qquad (1 \leqslant j \leqslant g)$$

для $i = 1, 2, \ldots, H$. Вероятно, трудно доказать такие теоремы (кроме специальных случаев, например $q = 2$) без помощи показательной функции.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть теперь мы имеем $b > \frac{1}{4} k(k+1) + kl$. Если $P^{1-1/k} \leqslant 3$, то $P \leqslant 9$ при $k \geqslant 2$ и теорема тривиальна, так как $J(b, P) \leqslant 9^{2b} < (7b)^{5b}$ и

$$\ln^l P \cdot P^{2b - \frac{1}{2} k(k+1) + \delta_l} > \ln^l P \cdot P^{2kl} > 1$$

$$(2 \leqslant P \leqslant 9, \ k \geqslant 2, \ l \geqslant 1).$$

Предположим теперь, что $P^{1-1/k} > 3$ и, следовательно, $P > 3$. Теорема 4.1 теперь имеет место для $l = 0$, так как $J(b, P) \leqslant P^{2b}$. Пусть $l \geqslant 1$, и теорема для $(l-1)$ уже доказана. Тогда из леммы 4.4 при $Q = P$ и неравенства $\max(1, \eta) \leqslant \ln P \ (P > 3)$ следует

$$J(b, P) \leqslant (7b)^{5b} P^{2k - \frac{1}{2}(k+1) + 2(b-k)/k} \ln P \cdot J\left(b-k, \ P^{1-1/k}\right). \tag{4.60}$$

По предположению индукции (нужно положить $l-1$, $b-k$, $P^{1-1/k}$ вместо l, b, P) имеем

$$J\left(b-k, \ P^{1-1/k}\right) \leqslant (7b)^{5b(l-1)} \ln^{l-1} P \cdot P^{(1-1/k)\{2(b-k) - \frac{1}{2}k(k+1) + \delta_{l-1}\}}.$$

Подставляя это в (4.60), получаем утверждение теоремы для l, так как показатель степени P равен

$$2k - \frac{1}{2}(k+1) + 2(b-k)/k + 2(b-k) - 2(b-k)/k -$$
$$- \frac{1}{2} k(k+1) + \frac{1}{2}(k+1) + \delta_l = 2b - \frac{1}{2} k(k+1) + \delta_l.$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 4.1 в этом виде принадлежит Хуа [2]. Теорема и доказательство несколько проще, чем в первоначальном изложении И. М. Виноградова. Кроме того, имеется небольшое улучшение результата.

Применим теперь теорему 4.1 для оценки тригонометрических сумм.

Теорема 4.2. *Пусть P и Q — целые числа, $P \geqslant 1$, и*

$$S = \sum_{Q < x \leqslant Q+P} e(\alpha x^{k+1} + \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0), \tag{4.61}$$

где α, α_k, ..., α_0 — действительные числа. Если

$$0 < 2(k+1)|\alpha| P \leqslant 1, \tag{4.62}$$

то при подходящем c_1, не зависящем от k, P, α, ..., α_0, имеет место оценка

$$|S| \leqslant 2e^{15k \ln^2 k} P^{1-1/6k^2 \ln k} \ln P + 2|\alpha|^{-1/k}. \tag{4.63}$$

Доказательство. Для $P = 1$, 2 теорема тривиальна. Пусть $P \geqslant 3$. В последующем доказательстве k предполагается достаточно большим, однако насколько большим нужно взять k — не зависит от P, Q или α, ..., α_0. Достаточно (как в доказательстве теоремы 2.1) принять $Q = 0$. Положим

$$F(x) = \alpha x^{k+1} + \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_0,$$
$$S(y) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant M} e(F(x+y)),$$

причем натуральное число M будет определено позднее. Имеем

$$S = M^{-1} \sum_{x=1}^{M} \sum_{z=1}^{P} e(F(z)) = M^{-1} \sum_{x=1}^{M} \sum_{y=1-x}^{P-x} e(F(x+y)) =$$
$$= M^{-1} \sum_{x=1}^{M} \left\{ \sum_{y=1}^{P} e(F(x+y)) + R(x) \right\} = \qquad (|R(x)| \leqslant 2x \leqslant 2M)$$
$$= M^{-1} \sum_{x=1}^{M} \sum_{y=1}^{P} e(F(x+y)) + KM = M^{-1} \sum_{y=1}^{P} S(y) + KM, \tag{4.64}$$

$|K| \leqslant 2$. Пусть $u \geqslant 1$ — целое. В силу неравенства Гёльдера (П.12.2)

$$\left| \sum_{y=1}^{P} S(y) \right|^{2u} \leqslant P^{2u-1} \sum_{y=1}^{P} |S(y)|^{2u}. \tag{4.65}$$

Теперь

$$\sum_{y=1}^{P} |S(y)|^{2u} = \sum_{y=1}^{P} \{S(y)\}^u \{\overline{S(y)}\}^u =$$
$$= \sum_{y=1}^{P} \left\{ \sum_{x_1=1}^{M} \ldots \sum_{x_u=1}^{M} \sum_{x_1'=1}^{M} \ldots \sum_{x_u'=1}^{M} e(\Phi) \right\}, \tag{4.66}$$

где

$$\Phi = F(x_1+y) + \ldots + F(x_u+y) - F(x'_1+y) - \ldots - F(x'_u+y) =$$
$$= A\left(\sum_{i=1}^{u} x_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{u} x_i'^{k+1}\right) + A_k\left(\sum_{i=1}^{u} x_i^k - \sum_{i=1}^{u} x_i'^k\right) + \ldots, \quad (4.67)$$
$$A = \alpha, \quad A_k = A_k(y) = \alpha_k + (k+1)\alpha y, \ldots$$

Обозначим через $\psi(N_1, \ldots, N_k)$ число решений системы

$$x_1^h + \ldots + x_u^h - x_1'^h - \ldots - x_u'^h = N_h \quad (1 \leqslant h \leqslant k)$$

в области $0 < x_i, x'_i \leqslant M$. Тогда [1])

$$\sum_{y=1}^{P} |S(y)|^{2u} \leqslant \sum_{x_1=1}^{M} \ldots \sum_{x_u=1}^{M} \sum_{x'_1=1}^{M} \ldots \sum_{x'_u=1}^{M} \left| \sum_{y=1}^{P} e(\Phi) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|N_1| < uM} \ldots \sum_{|N_k| < uM^k} \psi(N_1, \ldots, N_k) \left| \sum_{y=1}^{P} e(A_k N_k + \ldots + A_1 N_1) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \sum_{N_1} \ldots \sum_{N_k} \psi^2(N_1, \ldots, N_k) \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{N_1} \ldots \sum_{N_k} \left| \sum_{y=1}^{P} e(A_k N_k + \ldots + A_1 N_1) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.68)$$

Рассмотрим сначала первый сомножитель в правой части (4.68). Сумма

$$\sum_{N_1} \ldots \sum_{N_k} \psi^2(N_1, \ldots, N_k) \quad (4.69)$$

равна числу решений системы

$$x_1^h + \ldots + x_u^h - x_1'^h - \ldots - x_u'^h = y_1^h + \ldots + y_u^h - y_1'^h - \ldots - y_u'^h,$$

причем все переменные лежат в интервале $[1, M]$. Если перенести здесь все отрицательные члены в другую часть, то получится система типа (4.5), число решений которой оценивалось в теореме 4.1. Из этой теоремы, если положить $b = 2u$, $P = H$, для суммы (4.69) следует оценка

$$(14u)^{10ul} \ln^l M \cdot M^{4u - \frac{1}{2}k(k+1)\{1-(1-1/k)^l\}} \quad (4.70)$$

---

[1]) Очевидно, что $\sum_{y=1}^{P} e(\Phi) = e\left(A\left(\sum x_i^{k+1} - \sum x_i'^{k+1}\right)\right) \sum_{y=1}^{P} \ldots$, так как A не зависит от y.

при $2u > \frac{1}{4}k(k+1)+lk$. Будем теперь предполагать, что $2u > \frac{1}{4}k(k+1)+lk$ и положим

$$l = [k\ln\{k(k+1)\}+k]+1. \tag{4.71}$$

Очевидно, что $l \sim 2k\ln k$ при $k\to\infty$. Далее при $k \geqslant 1$ имеем

$$\frac{1}{2}k(k+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^{l} \leqslant \frac{1}{5}, \tag{4.72}$$

так как $(1-1/k)^k < e^{-1}$ и

$$\frac{1}{2}k(k+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k\ln k(k+1)+k} < \frac{1}{2}k(k+1)\{k(k+1)e\}^{-1}.$$

Для второго множителя в правой части (4.68), так как $A_k = \alpha_k + (k+1)\alpha y$, в силу (6.6.4) получаем

$$\begin{gathered}\sum_{N_1}\ldots\sum_{N_k}\left|\sum_{y=1}^{P} e(A_kN_k+\ldots+A_1N_1)\right|^2 \leqslant \\ \leqslant \sum_{N_1}\ldots\sum_{N_{k-1}}\sum_{y_1=1}^{P}\sum_{y_2=1}^{P}\left|\sum_{N_k} e((k+1)\alpha(y_1-y_2)N_k)\right| \leqslant \\ \leqslant 2^{k-1}u^{k-1}M^{\frac{1}{2}k(k-1)}\sum_{y_1=1}^{P}\sum_{y_2=1}^{P}\left|\sum_{|N_k|<uM^k} e((k+1)\alpha(y_1-y_2)N_k)\right| \leqslant \\ \leqslant 2^{k-1}u^{k-1}M^{\frac{1}{2}k(k-1)}\sum_{y_1=1}^{P}\sum_{y_2=1}^{P}\min\left\{2uM^k, \frac{1}{2}\|(k+1)\alpha(y_1-y_2)\|^{-1}\right\}.\end{gathered} \tag{4.73}$$

Из (4.62) следует

$$\|(k+1)\alpha(y_1-y_2)\| = (k+1)|\alpha||y_1-y_2|,$$

и, так как каждое из чисел $1, 2, \ldots, P-1$ можно представить в виде $|y_1-y_2|$ $(1\leqslant y_1, y_2 \leqslant P)$ не более чем $2P$ способами, получаем

$$\begin{gathered}\sum_{y_1}\sum_{y_2}\min\{\quad\} = \\ = \sum_{\substack{1\leqslant y_1,\ y_2\leqslant P\\ y_1=y_2}} 2uM^k + \sum_{\substack{1\leqslant y_1,\ y_2\leqslant P\\ y_1\neq y_2}}\{2(k+1)|\alpha||y_1-y_2|\}^{-1} \leqslant \\ \leqslant 2uM^kP + \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{P-1}\right)P|\alpha|^{-1}.\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\sum_{y_1}\sum_{y_2}\min\{\quad\}\leqslant 2uM^kP+P(1+\ln P)|\alpha|^{-1}\leqslant 4uP\ln P\cdot|\alpha|^{-1} \tag{4.74}$$

$(P\geqslant 3)$, если мы предположим, что

$$M\leqslant|\alpha|^{-1/k}. \tag{4.75}$$

В итоге для суммы из (4.65) получаем

$$\left|\sum_{y=1}^{P}S(y)\right|^{2u}\leqslant P^{2u-1}\{(14u)^{10ul}\ln^l M\cdot M^{4u-{}^1\!/_2k(k+1)+1/5}\}^{1/2}\times$$
$$\times\{2^{k-1}u^{k-1}M^{{}^1\!/_2k(k-1)}4uP\ln P\cdot|\alpha|^{-1}\}^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\lambda^{1/2}P^{2u-1/2}\ln^{1/2}P\cdot M^{2u+1/10}\ln^{{}^1\!/_2l}M, \tag{4.76}$$

$$\lambda=2^{k+1}u^k(14u)^{10ul}M^{-k}|\alpha|^{-1}. \tag{4.77}$$

Подставим это в (4.64). Тогда

$$|S|\leqslant\lambda^{1/4u}P^{1-1/4u}\ln^{1/4u}P\cdot M^{1/20u}\ln^{l/4u}M+2M. \tag{4.78}$$

Сначала следует предположить, что $P\geqslant 3^k$, и взять $M=[|\alpha|^{-1/k}]$. (При этом (4.75) выполнено.) Тогда в силу (4.62) $|\alpha|^{-1}\geqslant 2(k+1)P$ и, следовательно, $M\geqslant 3$. Поэтому имеем ${}^1\!/_2|\alpha|^{-1/k}\leqslant M\leqslant|\alpha|^{-1/k}$ и $|\alpha|M^k>2^{-k}$, т. е. $\lambda\leqslant 2^{2k+1}u^k(14u)^{10ul}$. Далее предположим, что $M\leqslant P$. Тогда $M^{1/20u}\leqslant P^{1/20u}$, $\ln M\leqslant\ln P$ и из (4.78) следует, что

$$|S|\leqslant\lambda^{1/4u}P^{1-1/5u}(\ln P)^{(1+l)/4u}+2|\alpha|^{-1/k}.$$

Так как $4u>{}^1\!/_2k(k+1)+2lk$, то $(1+l)/4u<1$, и

$$|S|\leqslant\{2^{2k+1}u^k(14u)^{10ul}\}^{1/4u}P^{1-1/5u}\ln P+2|\alpha|^{-1/k}.$$

Из неравенства $4u>{}^1\!/_2k(k+1)+2lk=4k^2\ln k+O(k^2)$ вытекает, что $(2^{2k+1}u^k)^{1/4u}\to 1$ при $k\to\infty$. Следовательно, для достаточно большого k имеем $(2^{2k+1}u^k)^{1/4u}\leqslant 2$. Итак, для достаточно большого k

$$|S|\leqslant 2(14u)^{{}^5\!/_2l}P^{1-1/5u}\ln P+2|\alpha|^{-1/k}. \tag{4.79}$$

Эта формула справедлива также в случаях, которые не рассматривались, т. е. для $P<M$, $P\geqslant 3^k$ и $P<3^k$. Для достаточно большого k

$$|S|\leqslant P<\begin{cases} M\leqslant|\alpha|^{-1/k} & (P<M,\ P\geqslant 3^k),\\ 3^k<u^l & (P<3^k).\end{cases}$$

Положим теперь

$$u=\left[\frac{1}{8}k(k+1)+\frac{1}{2}lk\right]+1\sim k^2\ln k\quad (k\to\infty). \tag{4.80}$$

Тогда обязательно $2u>{}^1/_4k(k+1)+lk$, как мы до сих пор предполагали. При этом для достаточно большого k ${}^5/_2l<6k\ln k$, $14u<15k^2\ln k$ и следовательно,

$$(14u)^{5/2l}<(15k^2\ln k)^{6k\ln k}<\exp(15k\ln^2 k).$$

Так как $5u<6k^2\ln k$, то для достаточно большого k получаем

$$|S|\leqslant 2\exp(15k\ln^2 k)P^{1-1/6k^2\ln k}\ln P+2|\alpha|^{-1/k}. \tag{4.81}$$

Таким образом, теорема 4.2 доказана.

Теорема 4.3 [1]). *Пусть $P\geqslant 1$, Q — целые числа и*

$$S=\sum_{Q<n\leqslant Q+P'} e(f(n)),\quad 0<P'\leqslant P, \tag{4.82}$$

причем

$$f(x)=\alpha x^k+\alpha_k x^{k-1}+\ldots+\alpha_1 \tag{4.83}$$

— полином с действительными коэффициентами. Тогда при подходящей положительной константе A имеет место оценка

$$S\ll\exp\left(A\ln^3 k\right)P^{1-1/k^3}\ln P+|\alpha|^{-1/(k-1)} \tag{4.84}$$

для

$$k\geqslant c_2,\quad 0<2k|\alpha|P\leqslant 1. \tag{4.85}$$

Здесь константы не зависят от Q, P, k и $\alpha,\ldots,\alpha_1$.

Доказательство. Из теоремы 4.2 с заменой $k+1$ на k для достаточно большого k следует

$$|S|\leqslant 2\exp\left(15k\ln^2 k\right)P^{1-1/6k^2\ln k}\ln P+2|\alpha|^{-1/(k-1)},$$

так как первый член в правой части (4.63) не убывает с возрастанием k. Для достаточно большого k имеем $6\ln k\leqslant k$, и предполагая сначала, что $P\geqslant\exp(90k^3\ln^3 k)$, получим

$$\exp\left(15k\ln^2 k\right)P^{1-1/6k^2\ln k}=\left\{\exp(90k^3\ln^3 k)\right\}^{1/6k^2\ln k}P^{1-1/6k^2\ln k}\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\exp\left(90k^3\ln^3 k\right)\right\}^{1/k^3}P^{1-1/k^3}=\exp(90\ln^3 k)P^{1-1/k}$$

1) Татудзава [2].

(так как для $0 < c_1 \leqslant c_2$, $0 < \delta_2 \leqslant \delta_1 < 1$ имеем $c_1^{\delta_1} c_2^{1-\delta_1} \leqslant c_1^{\delta_2} c_2^{1-\delta_2}$). Тем самым (4.84) доказано для $P \geqslant \exp(90k^3 \ln^3 k)$. В противном случае

$$|S| \leqslant P \leqslant P^{1-1/k^3} \left\{\exp\left(90k^3 \ln^3 k\right)\right\}^{1/k^3} = \exp\left(90 \ln^3 k\right) P^{1-1/k^3}$$

и, следовательно, (4.84) справедливо для любого $P \geqslant 1$ (для $P = 1$ имеем $|S| \leqslant |\alpha|^{-1/k-1}$). Теорема полностью доказана.

§ 5. Применение к оценке $\zeta(s, w)$

Теорема 5.1. *Пусть $0 < w \leqslant 1$, $t \geqslant 3$ и N, N' — такие натуральные числа, что*

$$2t^{k/(k^2-1)} \leqslant N < N' \leqslant 2N. \tag{5.1}$$

Тогда при подходящем $c_1 > 0$ для $k \geqslant c_1$ имеет место оценка

$$\sum_{N < n \leqslant N'} (n + w)^{-it} \ll \exp\left(A \ln^3 k\right) N^{1-1/k^8} \times \\ \times t^{1/k^3(k+1)} \ln\left(Nt^{-1/(k+1)}\right) + N^{k/(k-1)} t^{-2/(k^2-1)}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Разложим сумму $\sum\limits_{N<n\leqslant N'}$ на частичные суммы вида, рассмотренного в лемме 2.1:

$$\sum_{Q < n \leqslant Q+P} (n + w)^{-it} \ll \max_{0 < P' \leqslant P} \left| \sum_{0 < n \leqslant P'} e(f(n)) \right|, \tag{5.3}$$

где Q — целое, а $f(x)$ — такой же полином, как в теореме 4.3, и

$$|\alpha| = t/\left(2\pi k Q_0^k\right), \quad Q_0 = Q + w.$$

В каждой такой сумме Q и Q_0 удовлетворяют неравенствам $N \leqslant Q < Q_0 \leqslant 2N$; таких сумм имеется не более чем $N/P + 1$, причем в последней сумме суммирование, возможно, проводится по интервалу длины меньше P. Если мы положим

$$P = \left[\frac{1}{2} N t^{-1/(k+1)}\right], \tag{5.4}$$

то непременно будет $P \leqslant \frac{1}{2} Q t^{-1/(k+1)}$ и, следовательно, будет выполнено (2.5). В силу (5.1) имеем

$$P \leqslant \frac{1}{2} N t^{-1/(k+1)} \leqslant \frac{1}{2} N^k \left\{2t^{k/(k^2-1)}\right\}^{-(k-1)} t^{-1/(k+1)} \leqslant N^k t^{-1}. \tag{5.5}$$

Отсюда следует, что

$$2k|\alpha| P < N^k Q_0^{-k} < 1,$$

так как $Q_0 \leqslant 2N$, так что условие (4.85) теоремы 4.3 выполнено. Из (5.1) получаем

$$\frac{1}{2} N t^{-1/(k+1)} \geqslant t^{1/(k^2-1)} > 1,$$

и, значит, $P \geqslant 1$. Применим теорему 4.3 для достаточно большого k. Тогда, так как $Q_0 \leqslant 2N$, из 5.3 следует

$$\sum_{Q < n \leqslant Q+P} \ll \exp\left(A \ln^3 k\right) P^{1-1/k^3} \ln P + \left(2\pi k Q_0^k t^{-1}\right)^{1/(k-1)} \ll$$
$$\ll \exp\left(A \ln^3 k\right) N^{1-1/k^3} t^{-(1-1/k^3)/(k+1)} \ln\left(N t^{-1/(k+1)}\right) + N^{k/(k-1)} t^{-1/(k-1)}.$$

Сумма в (5.2) разложена на не более чем $N/P + 1 \leqslant t^{1/(k+1)} + 1 \leqslant \leqslant 2t^{1/(k+1)}$ $(t \geqslant 3)$ частичных сумм этого вида. Таким образом, оценка (5.2) выполняется и теорема 5.1 доказана.

Заметим, что

$$N^{1-1/k^3} t^{1/k^3 (k+1)} = N^{k/(k-1)} t^{-2/(k^2-1)}$$

для $N = t^\beta$,

$$\beta = \frac{2}{k+1}\left(1 - \frac{k-1}{2(k^3+k-1)}\right) \sim \frac{2}{k+1} \quad (k \to \infty).$$

Следовательно, для постоянного t формула (5.2) при $N = t^\beta$ дает наилучшую оценку.

Теорема 5.2. *Пусть N, N' — натуральные числа, $N < N' \leqslant \leqslant 2N$ и*

$$t^{1,2/(k+1)} < N \leqslant t^{1,6/(k+1)}. \tag{5.6}$$

При подходящих константах $c_2 \geqslant 3$, $c_3 \geqslant 3$ и

$$k \geqslant c_2, \quad t \geqslant c_3 \tag{5.7}$$

имеет место оценка $(0 < w \leqslant 1)$

$$\sum_{N < n \leqslant N'} (n+w)^{-s} \ll \exp\left(A \ln^3 k + c_4 \ln_2^3 t\right) \tag{5.8}$$

в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\ln_2^{9/4} t}{\ln^{3/4} t}, \quad t \geqslant c_3. \tag{5.9}$$

Доказательство. Если N удовлетворяет условию (5.6), то теорема 5.1 применима, если только

$$t^{1,2/(k+1)} \geqslant 2t^{k/(k^2-1)},$$

что выполняется при достаточно больших k и t. Следовательно, для достаточно больших k и t

$$\sum_{N<n\leqslant N'}(n+w)^{-it}\ll$$
$$\ll N\left\{\exp\left(A\ln^3 k\right)t^{-0,2/k^3(k+1)}\ln t^{0,6/(k+1)}+t^{-0,4/(k^2-1)}\right\}\ll$$
$$\ll N\exp\left(A\ln^3 k\right)t^{-0,2/k^3(k+1)}\ln t,$$

так как $0,4/(k^2-1)>0,2/k^3(k+1)$. Как в лемме 3.1, с помощью частного суммирования, согласно 5.6, получаем

$$\sum_{N<n\leqslant N'}(n+w)^{-s}\ll N^{1-\sigma}\exp\left(A\ln^3 k-\frac{0,2}{k^3(k+1)}\ln t\right)\cdot\ln t\ll$$
$$\ll\exp\left\{A\ln^3 k+1,6\ln t\left(\frac{1-\sigma}{k+1}-\frac{1}{8(k+1)^4}\right)+\ln_2 t\right\}.$$

Функция $(1-\sigma)x-{}^1/_8x^4$ имеет при $x=2^{1/3}(1-\sigma)^{1/3}$ максимальное значение, равное ${}^3/_4\,2^{1/3}(1-\sigma)^{4/3}$. Следовательно,

$$\sum_{N<n\leqslant N'}(n+w)^{-s}\ll\exp\left\{A\ln^3 k+\ln_2 t+2(1-\sigma)^{4/3}\ln t\right\}.$$

Отсюда, если выполнено (5.9), следует (5.8).

Теорема 5.3 [1]). *В области*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{\ln_2^{9/4}t}{\ln^{3/4}t},\qquad t\geqslant 3,\tag{5.10}$$

имеет место оценка $(0<w\leqslant 1)$

$$\zeta(s, w)-w^{-s}\ll\exp\left(c_5\ln_2^3 t\right).\tag{5.11}$$

Доказательство. По теореме 3.1 можно считать, что $\sigma<1$; согласно лемме 3.5, достаточно доказать, что начиная с некоторого t сумма $\sum\limits_{n\leqslant t^2}(n+w)^{-s}$ остается меньше правой части (5.11). Пусть t уже настолько велико, что область (5.10) лежит в полуплоскости $\sigma\geqslant 1/2$. Разделим эту сумму на три суммы

$$\sum_{n\leqslant t^2}=\sum_{n\leqslant N_0}+\sum_{N_0<n\leqslant N_1}+\sum_{N_1<n\leqslant t^2},$$

причем положим $N_0=\exp\ln^{3/4}t$, $N_t=t^{2/g}$; натуральное число g будет определено позднее. Для $0<\sigma_1\leqslant\sigma<1$ имеем

$$\left|\sum_{n\leqslant N_0}\right|\leqslant\sum_{n\leqslant N_0}n^{-\sigma_1}\leqslant 1+\frac{N_0^{1-\sigma_1}}{1-\sigma_1}.$$

[1]) Татудзава [2]. (См. также добавление II. — *Перев.*)

Если положить $\sigma_1 = 1 - \ln_2^{9/4} t/\ln^{3/4} t$, то

$$\sum_{n \leqslant N_0} \ll \frac{\ln^{3/4} t}{\ln_2^{9/4} t} \exp \ln_2^{9/4} t \ll \exp \ln_2^3 t.$$

Вторую сумму мы разделим на частичные суммы $\sum\limits_{N < n \leqslant N'}$, $N < N' \leqslant 2N$, вида, рассмотренного в теореме 5.2; таких частичных сумм будет, очевидно, не более чем $\ll \ln t^{2/g} \ll \ln t$. Для каждого N определим k так, чтобы выполнялось условие (5.6)[1]. Если g выбрано достаточно большим, то в каждой частичной сумме $k \geqslant c_2$, так как из неравенства (5.6) для $N \leqslant t^{2/g}$ следует $1{,}2/(k+1) \leqslant 2/g$.

Выберем теперь постоянное g так, чтобы $1{,}2g \leqslant 2(c_2 + 1)$, $g \geqslant 6$. Для любой частичной суммы N должно во всяком случае удовлетворять условию $N \geqslant \exp \ln^{3/4} t$. Так как, кроме того, должна выполняться оценка (5.6), то, в частности, имеет место неравенство $\ln^{3/4} t \leqslant 1{,}6\ (\ln t)/(k+1)$ и, следовательно, $k < 1{,}6 \ln^{1/4} t$. Отсюда и из теоремы 5.2 (увеличивая, если это необходимо, t настолько, чтобы оно стало не меньше c_3) получим

$$\sum_{N_0 < n \leqslant N_1} \ll \ln t \cdot \exp\left\{A \ln^3\left(1{,}6 \ln^{3/4} t\right) + c_4 \ln_2^3 t\right\} \ll \exp\left(c \ln_2^3 t\right).$$

Наконец, из леммы 3.4 следует

$$\sum_{N_1 < n \leqslant t^2} = O(1) \quad \left(\sigma \geqslant 1 - 2^{-(g-1)}\right).$$

Для каждого фиксированного g и для достаточно большого t $\ln_2^{\frac{9}{4}} t/\ln^{\frac{3}{4}} t < 2^{-(g-1)}$. Тем самым для достаточно большого t, и поэтому (после возможного увеличения c_5) для $t \geqslant 3$, оценка (5.11) доказана.

§ 6. Следствия для нулей $L(s, \chi)$

Оценка, полученная для $\zeta(s, w)$, позволяет расширить область, свободную от нулей L-функций. Сначала нам потребуются соответствующие оценки для $L(s, \chi)$.

Теорема 6.1. *В области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t}{\ln^{\frac{3}{4}} t}, \quad t \geqslant 8, \tag{6.1}$$

[1]) Это всегда можно сделать, так как для достаточно большого k имеют место неравенства: $1{,}2/(k+2) < 1{,}2/(k+1) < 1{,}6/(k+2) < 1{,}6/(k+1)$.

имеет место оценка

$$|L(s, \chi)| \leqslant \exp\left\{c_1\left(\ln k\,\frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t}{\ln^{\frac{3}{4}} t} + \ln_2^3 t\right)\right\} \tag{6.2}$$

для каждого характера χ *по* $\mathrm{mod}\, k \geqslant 1$.

Доказательство. Для $k=1$ теорема уже содержится в теореме 5.3, так как $\zeta(s)=\zeta(s, 1)$. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда

$$L(s, \chi) = k^{-s}\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\left\{\zeta\left(s, \frac{l}{k}\right) - \left(\frac{l}{k}\right)^{-s}\right\} + \sum_{l=1}^{k}\chi(l)\, l^{-s}.$$

Из теоремы 5.3 для

$$\sigma \geqslant \sigma_1 = 1 - \ln_2^{\frac{9}{4}} t/\ln^{\frac{3}{4}} t, \quad t \geqslant 3,$$

следует

$$L(s, \chi) \ll k^{1-\sigma_1}\exp\left(c\ln_2^3 t\right) + \frac{k^{1-\sigma_1}}{1-\sigma_1} \ll \exp\left\{\ln k\frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t}{\ln^{\frac{3}{4}} t} + c\ln_2^3 t\right\},$$

а отсюда вытекает 6.2.

Заметим, что в правой части 6.2 первое слагаемое в скобках равно второму слагаемому при $k = \exp\left(c\ln^{\frac{3}{4}} t\,\ln_2^{\frac{3}{4}} t\right)$.

Методом, применявшимся в гл. IV, может быть доказана следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть* $k \geqslant 1$ — *целое. При подходящем* $c_2 > 0$ *функция* $L(s, \chi)$ *не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_2}{M(k, t)}, \tag{6.3}$$

$$M(k, t) = \max\left\{\ln k,\ \ln^{\frac{3}{4}}(|t|+3)\ln_2^{\frac{3}{4}}(|t|+3)\right\} \tag{6.4}$$

для всех характеров χ *по* $\mathrm{mod}\, k$, *за исключением, быть может, простого действительного нуля* β_1 *у* L*-функции, определенной исключительным характером* χ_1.

Доказательство. По теореме 4.6.9 достаточно доказать утверждение для $|t| \geqslant 4$, и, так как нули функций $L(s, \chi)$ и $L(s, \overline{\chi})$ симметричны относительно действительной оси, достаточно рассмотреть случай $t \geqslant 4$.

Можно предположить, что $k \geqslant 3$, так как нули L-рядов по $\mathrm{mod}\, 1$ и $\mathrm{mod}\, 2$ при $0 < \sigma < 1$ совпадают с нулями функции $L(s, \chi_0)$, соответствующей модулю, большему двух. Пусть $\rho = \beta + it_1$ — нуль функции $L(s, \chi)$ и $t_1 \geqslant 4$. Положим $R = R(k, t_1) = \max\{\ln k, (\ln t_1 \ln_2 t_1)^{\frac{3}{4}}\}$ и $\beta = 1 - b/R$. Нам нужно показать, что b больше, чем независимая от χ и t_1 константа. Положим $\sigma_0 = 1 + a/R$, $0 < a < \frac{1}{2}$ (причем a ниже будет определено более точно), и

$$r = c_3 \frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t_1}{\ln^{\frac{3}{4}} t_1}, \tag{6.5}$$

константа c_3 также будет определена позднее. Применим теорему П. 4.5 к функции $F(s) = L(s, \chi)$ с областями $|s - s_0'| \leqslant r$, $s_0' = \sigma_0 + it_1$ и $|s - s_0''| \leqslant r$, $s_0'' = \sigma_0 + i2t_1$. Выберем c_3 настолько малым, чтобы эти круги для каждого $a > 0$ и каждого $t_1 \geqslant 4$ лежали в области (6.1). Это всегда можно сделать, так как при $t_1 \to \infty$ и постоянном c

$$\frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t_1}{\ln^{\frac{3}{4}} t_1} = O\left(\frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} (2t_1 + c)}{\ln^{\frac{3}{4}} (2t_1 + c)}\right).$$

Теперь в обоих кругах можно применять теорему 6.1. Для круга $|s - s_0'| \leqslant r$, принимая во внимание (4.5.19), находим

$$\begin{gathered} \frac{L(s, \chi)}{L(s_0', \chi)} \ll \frac{1}{a} R \exp\left\{c_1\left(\ln k \frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t}{\ln^{\frac{3}{4}} t} + \ln_2^3 t\right)\right\} \ll \overline{M}, \\ \overline{M} = \frac{1}{a} R \exp\left\{c\left(\ln k \frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t_1}{\ln^{\frac{3}{4}} t_1} + \ln_2^3 t_1\right)\right\}. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Аналогичная оценка получается для абсолютной величины дроби $L(s, \chi)/L(s_0'', \chi)$ в круге $|s - s_0''| \leqslant r$. При замене t_1 на $2t_1$ порядок величины последнего экспоненциального сомножителя по существу остается таким же. Отсюда следует, что

$$\ln \overline{M} \ll \ln \frac{1}{a} + \ln_2 k + \ln_2 t_1 + \ln k \frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t_1}{\ln^{\frac{3}{4}} t_1} + \ln_2^3 t_1 \ll \frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t_1}{\ln^{\frac{3}{4}} t_1} R \ln \frac{1}{a}. \tag{6.7}$$

Последняя оценка справедлива потому, что $a < \frac{1}{2}$, $\ln(1/a) > \ln 2$ и порядок $\ln_2 k$ не больше порядка величины в правой части (6.7), так как имеет место оценка

$$\ln_2 k \ll \max\left(\ln k \frac{\ln_2^{\frac{9}{4}} t_1}{\ln^{\frac{3}{4}} t_1},\ \ln_2^3 t_1\right) \quad (k \geqslant 3,\ t_1 \geqslant 4),$$

которая очевидна, если рассматривать отдельно случаи $t_1 \geqslant k$ и $t_1 < k$.

Пусть теперь δ выбрано настолько малым, чтобы при $0 < a \leqslant \delta$ и $0 < b \leqslant \delta$ нуль $\rho_1 = \beta + it_1$ лежал в круге $|s - s_0'| \leqslant \frac{1}{2} r$; кроме того, δ выбирается одним и тем же для любого $k \geqslant 3$ и $t_1 = 4$. Например, можно выбрать δ так, чтобы

$$\frac{a+b}{R} \leqslant \frac{2\delta}{R} \leqslant \frac{1}{2} r,$$

для $k \geqslant 3$, $t_1 \geqslant 4$. Это всегда можно сделать независимо от k, t_1, так как $1/R = o(r)$ $(t_1 \to \infty)$ [1]) и так как $1/R$ не возрастает с ростом k. Достаточно доказать, что существует удовлетворяющая условиям теоремы константа c_2, такая, что $0 < c_2 < b \leqslant \delta$. Из (П. 4.10) и (П. 4.9) получаем тогда

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(\sigma_0 + it_1, \chi) > -cR \ln \frac{1}{a} + \frac{1}{\sigma_0 - \beta} \tag{6.8}$$

и

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(\sigma_0 + i2t_1, \chi^2) > -cR \ln \frac{1}{a}. \tag{6.9}$$

Так как

$$-\frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_0) \ll -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) \sim \frac{1}{\sigma_0 - 1} \quad (\sigma_0 \to 1 + 0),$$

то для $0 < a \leqslant \delta_1(\varepsilon) \leqslant \delta$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(\sigma_0, \chi_0) > -\frac{1+\varepsilon}{\sigma_0 - 1}. \tag{6.10}$$

Отсюда и из (6.8), (6.9), согласно (4.4.4), следует, что

$$-cR \ln \frac{1}{a} + \frac{4}{\sigma_0 - \beta} - \frac{3(1+\varepsilon)}{\sigma_0 - 1} \leqslant 0. \tag{6.11}$$

---

[1]) Имеет место неравенство $1/R \leqslant 1/(\ln t_1 \ln_2 t_1)^{3/4}$. Следовательно, для достаточно большого t_1, например $t_1 > t'$, обязательно будет $1/R < \frac{1}{2} r$ и можно взять $\delta < \frac{1}{2}$ настолько малым, чтобы неравенство $2\delta/R < \frac{1}{2} r$ имело место для $4 \leqslant t_1 \leqslant t'$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $3(1+\varepsilon) = 15/4$, $4 - 3(1+\varepsilon) = \frac{1}{4}$. Тогда, так как $\sigma_0 = 1 + a/R$, для $0 < a \leqslant \delta_1 = \delta_1\left(\frac{1}{4}\right)$, $0 < b \leqslant \delta$, получается

$$R\left(-c\ln\frac{1}{a} + \frac{4}{a+b} - \frac{15}{4a}\right) \leqslant 0. \tag{6.12}$$

Для подходящего δ_2, $0 < \delta_2 \leqslant \delta_1$, и для $0 < a \leqslant \delta_2$ имеем

$$-c\ln\frac{1}{a} + \frac{1}{4a} > 0.$$

Если теперь зафиксировать a, то получим противоречие с (6.12), например, для $0 < b \leqslant c_2 < \delta$. Следовательно, область

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_2}{R}, \quad t \geqslant 4$$

не содержит нулей ни одной L-функции, отвечающей характерам по $\operatorname{mod} k$. Это нам и требовалось доказать.

Пусть вообще в области вида $\sigma \geqslant 1 - \delta(t)$, $t \geqslant 3$, выполняется оценка $L(s, \chi) \ll \exp\{\lambda(t)\ln k + m(t)\}$. Тогда аналогично можно показать, что $L(s, \chi) \neq 0$ в области

$$\sigma \geqslant 1 - c/R, \quad t \geqslant 4,$$
$$R = \max\left\{\ln k\,\frac{\lambda(t)}{\delta(t)},\ \frac{m(t)}{\delta(t)}\right\},$$

если только $\delta(t)$, $\lambda(t)$ и $m(t)$ удовлетворяют определенным условиям. В качестве таких условий можно выбрать, например, следующие: $\delta(t)$, $\lambda(t)$, $1/m(t)$ не возрастают; $m(t) \to \infty$ при $t \to \infty$; $\delta(t) \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\delta(t) \ll \delta(2t + c) \quad (t \to \infty)$$

при фиксированном c и то же самое имеет место для $\lambda(t)$ и $1/m(t)$; наконец

$$\frac{1}{\delta(t)} \ll \exp m(t).$$

При $\lambda(t) = \delta(t) = \ln_2^{\frac{9}{4}} t/\ln^{\frac{3}{4}} t$, $m(t) = \ln_2^3 t$ получаем теорему 6.2, а при $\delta(t) = \frac{1}{2}$, $\lambda(t) = \text{const}$, $m(t) = \ln t$ — теорему 4.5.6.

Теорема 6.2 дает наилучший [1]) на сегодняшний день известный результат по областям „слева от $\sigma = 1$“ (с большим t), в которых $L(s, \chi) \neq 0$ или $\zeta(s) \neq 0$ $(k = 1)$. Уже из гл. IV для $a = 1$ следует, что в области вида $\sigma \geqslant 1 - c/\max(\ln k, \ln^a t)$ нет нулей никакой функции $L(s, \chi)$. Для $a < 1$ это впервые доказал Чудаков с помощью более старой формы метода Виноградова.

Наше доказательство примыкает к работе Татудзавы [2]. Несколько другое изложение (в случае $k = 1$) см. Титчмарш [3].

[1]) В настоящее время известны более сильные результаты (см. Вальфиш [3*]). — *Прим. ред.*

Уже здесь с помощью теоремы 6.2 мы сумели существенно улучшить порядок величины остаточного члена в теореме 4.7.2. По примеру того доказательства находим в остаточном члене формулы (4.7.13) $\ln^{\frac{4}{7}} x/\ln_2^{\frac{3}{7}} x$ вместо $\sqrt{\ln x}$, правда, только для $k \leqslant \exp\left(c \ln^{\frac{3}{7}} x \ln^{\frac{3}{4}} x\right)$ эта область меньше, чем область $k \leqslant \exp\left(c\sqrt{\ln x}\right)$, в которой была доказана оценка (4.7.13). С точностью до малых сомножителей приходят, так же как в (4.7.15) и (4.7.18), к остаточным членам вида x/T и

$$x^{1-c/M(k,\,T)} = x \exp\left\{-c \ln x/\max\left(\ln k,\ \ln^{\frac{3}{4}} T \ln_2^{\frac{3}{4}} T\right)\right\},$$

которые для $\ln T = \ln^{\frac{4}{7}} x/\ln_2^{\frac{3}{7}} x$ оба приблизительно одинакового порядка. Правда, тогда $\ln k$ не может быть больше чем $c \ln^{\frac{3}{4}} T \ln_2^{\frac{3}{4}} T \ll \ll \ln^{\frac{3}{7}} x \ln_2^{\frac{3}{7}} x$, иначе $\exp(-c \ln x/\ln k)$ больше не будет величиной $\ll \exp\left(-c \ln^{\frac{4}{7}} x/\ln_2^{\frac{3}{7}} x\right)$.

Для $\ln k > \sqrt{\ln x}$ можно доказать формулу, аналогичную (4.7.13), с остаточным членом $O(x \exp\{-c \ln x/\ln k\} \cdot \ln^2 kx)$. Однако при переходе к теореме 4.7.3 это бесполезно, так как в (4.7.20) получаем тогда тот же остаточный член для $\ln k > A\sqrt{\ln x}$ (A достаточно большое) и этот остаточный член больше, чем главный член $x/\varphi(k)$.

В следующей главе мы познакомимся с теоремами о „плотности“ нулей $L(s, \chi)$ в критической полосе, которые позволяют улучшить теорему 4.7.3. Эти теоремы нужны также для исследования порядка величины $p_{n+1} - p_n$ (где p_n обозначает n-е простое число) и очень интересны сами по себе.

Глава IX

ТЕОРЕМЫ О ПЛОТНОСТИ НУЛЕЙ L-ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Вертикальное распределение нулей

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\rho}}{\rho} \qquad (T \geqslant 2),$$

где $\rho = \rho(\chi)$ пробегает нули $L(s, \chi)$ в полосе $0 < \sigma < 1$. Эта сумма появляется в качестве главного члена разности $\psi(x, k, l) - x/\varphi(k)$ в теореме 7.4.6 и формуле (4.7.11). Так как $|x^{\rho}| = x^{\beta}$ (где $\rho = \beta + i\gamma$), то эта сумма будет тем меньше, чем меньше нулей имеют действительную часть вблизи единицы. Обозначим через $N(\alpha, T) = N(\alpha, T, k)$ общее число нулей всех $\varphi(k)$ L-функций с характерами по $\operatorname{mod} k$ $(k \geqslant 1)$ в области

$$\alpha < \sigma < 1, \quad |t| \leqslant T, \tag{1.1}$$

причем каждый нуль считается столько раз, какова его кратность. В силу формулы (7.3.24) при $T \geqslant 2$ тривиально вытекает, что

$$N(\alpha, T) \leqslant N(T) \ll kT \ln kT$$

(определение $N(T)$ см. в гл. VII). С ростом α величина $N(\alpha, T)$ не возрастает.

Наша цель — доказательство следующей теоремы, которая дает оценку для $N(\alpha, T)$, убывающую при возрастании α.

Теорема 1.1. *Пусть C_0 — положительная константа, при которой оценка*

$$L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \ll k^{\frac{1}{2}} (|t| + 2)^{C_0} \tag{1.2}$$

выполняется равномерно для всех χ по $\operatorname{mod} k$, $k \geqslant 1$, и всех t (по теореме 7.3.1 такая константа существует и не превосходит $^1/_2$). Тогда для $0 \leqslant \alpha < 1$, $T \geqslant 2$ имеет место неравенство

$$N(\alpha, T) \ll \{k^4 T^{4C_0} (T + k)^2\}^{1-\alpha} \ln^8 kT \tag{1.3}$$

с константой в $\ll$, не зависящей от α, T, k.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем шестнадцать лемм.

Общая идея доказательства состоит в том, чтобы применить теорему Литлвуда (теорема П. 8.1). Наиболее просто было бы применить ее к функции $\prod\limits_{\chi} L(s, \chi)$ (где произведение образовано по всем характерам по $\operatorname{mod} k$), так как число нулей этой функции в области (1.1) равно $N(\alpha, T)$. Однако оказывается, что вместо этой функции лучше рассматривать некоторую вспомогательную функцию (с теми же нулями), для которой, грубо говоря, правая часть формулы (П. 8.3) может быть меньше некоторой ниже определенной функции $\prod\limits_{\chi} h_z(s, \chi)$.

Рассмотрим действительное число z, большее единицы. Положим

$$\begin{aligned}
&Q_z(s, \chi) = \sum_{n<z} \mu(n)\chi(n)n^{-s},\\
&f_z(s, \chi) = L(s, \chi)Q_z(s, \chi) - 1,\\
&h_z(s, \chi) = 1 - f_z^2(s, \chi),\\
&K_z(\sigma, T) = \max_{|t-T| \leqslant 3/2} \sum_{\chi} |f_z(\sigma+it, \chi)|^2,\\
&J_z(\sigma, T) = \int_{-T}^{T} \sum_{\chi} |f_z(\sigma+it, \chi)|^2 dt,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

причем знаки $\sum\limits_{\chi}$ и $\prod\limits_{\chi}$ обозначают суммирование и произведение по всем характерам $\chi \operatorname{mod} k$. В частности, для $1 < z \leqslant 2$

$$f_z(s, \chi) = L(s, \chi) - 1, \quad h_z(s, \chi) = L(s, \chi)\{2 - L(s, \chi)\}.$$

Все нули функции $L(s, \chi)$ являются также нулями $h_z(s, \chi)$. Обозначим через $N_1(\alpha, T)$ число нулей всех (образованных характерами по $\operatorname{mod} k$) функций $h_z(s, \chi)$ в области (1.1) или, что то же самое, число нулей функции

$$H_z(s) = \prod_{\chi} h_z(s, \chi)$$

в этой области. Тогда достаточно доказать, что $N_1(\alpha, T)$ остается меньше границы из оценки (1.3). Величина z позднее устанавливается в зависимости от k и T.

Перемножением рядов для функций $Q_z(s, \chi)$ и $L(s, \chi)$ в полуплоскости $\sigma > 1$ получаем

$$f_z(s, \chi) = \sum_{n} n^{-s} \sum_{d\,|\,n,\ d<z} \mu(d)\chi(d)\chi\left(\frac{n}{d}\right) - 1 =$$

$$= \sum_{n \geqslant z} \chi(n) n^{-s} \sum_{d\,|\,n,\ d<z} \mu(d) = \sum_{n \geqslant z} a_n \chi(n) n^{-s}, \quad |a_n| \leqslant d(n), \tag{1.5}$$

так как $\sum_{d\mid n}\mu(d)=0$ или 1 для $n>1$ или $n=1$ соответственно ($d(n)$ — число положительных делителей n). Теперь достаточно доказать теорему 1.1 для достаточно большого k, например для $k\geqslant k_0$, так как для $k<k_0$, $T\geqslant 2$ можно заменить оценку в (1.3) величиной

$$c\,(T^{4C_0+2})^{1-\alpha}\ln^8 T \tag{1.6}$$

и для каждой L-функции, отвечающей модулю $k_1\leqslant k_0$, имеется другая, соответствующая модулю k_1k_0 (вообще с непримитивным характером), которая имеет в полуплоскости $\sigma>0$ те же нули. Поскольку $k_0\leqslant\leqslant k_1k_0\leqslant k_0^2=\mathrm{const}$, то для последней L-функции выполняется оценка (1.3), и это дает оценку вида (1.6), чем (1.3) доказано для $k<k_0$.

Наконец, можно предположить, что на прямой $t=\pm T$ нет нулей никакой функции $h_z(s,\chi)$ (χ по $\operatorname{mod} k$). Если это не так, возьмем $T_1>T$ и такое, что в полосе $T<|t|\leqslant T_1$ нет ни одного такого нуля. Тогда $N(\alpha, T_1)=N(\alpha, T)$, и если (1.3) уже доказано для $N(\alpha, T_1)$, то оно получается при $T_1\to T$ также для $N(\alpha, T)$. Таким образом, мы предположим, что

$$H_z(\sigma\pm iT)\neq 0\quad(\sigma>0).$$

Следующие две леммы дают связь между $N(\alpha, T)\;(\leqslant N_1(\alpha, T))$ и функциями $K_z(\sigma, T)$ и $J_z(\sigma, T)$, а последующие леммы служат для оценки этих функций.

Лемма 1.1. *Функция $H_z(s)$ действительна для действительного s. Пусть $z>k^2$, $T\geqslant 2$ и $n_z(\alpha, T)$ — число нулей функции*

$$R_z(s, T)=H_z(s+iT)+H_z(s-iT)$$

в области $|s-2|\leqslant 2-\alpha$, $1/2\leqslant\alpha<2$. Тогда[1]) *для достаточно большого k*

$$\arg H_z(\alpha\pm iT)\ll n_z(\alpha, T)+1. \tag{1.7}$$

При этом берется то значение аргумента, которое получается с помощью непрерывного продолжения $\arg H_z(s)$ вдоль отрезков, идущих от $s=2$ к $s=2\pm iT$ и оттуда прямолинейно к $\alpha\pm iT$.

Доказательство. Чтобы доказать, что функция $H_z(s)$ действительна для действительного s, достаточно показать, что при $\sigma>1$ имеет место равенство

$$H_z(s)=\prod_{\chi}h_z(s,\chi)=\sum_n d_n n^{-s},$$

[1]) Слагаемое $+1$ присутствует только тогда, когда $n_z(\alpha, T)=0$.

где d_n — действительные. По принципу симметрии это равенство достаточно доказать для достаточно большого σ. Имеем

$$\prod_{\chi} h_z(s, \chi) = \prod_{\chi} \left\{1 - f_z^2(s, \chi)\right\} = \exp \sum_{\chi} \ln \left\{1 - f_z^2(s, \chi)\right\}. \quad (1.8)$$

Так как ряд (1.5) начинается с индекса $n \geqslant z > 1$, то для достаточно большого σ справедлива оценка $|f_z(s, \chi)|^2 \leqslant 1/2$. Тогда

$$\ln\left(1 - f_z^2\right) = -f_z^2 - \frac{1}{2} f_z^4 - \ldots$$

и вместо f_z^2, f_z^4, ... можно подставить соответствующие ряды Дирихле. Из (1.5) получаем для $\sigma > 1$

$$f_z^2 = \sum_{n \geqslant z^2} n^{-s} \sum_{d \mid n,\ d \geqslant z,\ \frac{n}{d} \geqslant z} a_d \chi(d)\, a_{\frac{n}{d}}\, \chi\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= \sum_{n \geqslant z^2} a_n' \chi(n)\, n^{-s} \quad \left(a_n' \text{ — целые}\right),$$

так как a_n — целые. Аналогично получается

$$f_z^4 = \sum_{n \geqslant z^4} a_n'' \chi(n)\, n^{-s}$$

с целыми a_n'', и т. д. Поэтому

$$\ln\left(1 - f_z^2\right) = \sum_{n \geqslant z^2} A_n \chi(n)\, n^{-s} \quad \left(A_n \text{ — действительные}\right),$$

и отсюда, согласно (4.27), следует, что

$$\sum_{\chi} \ln\left\{1 - f_z^2(s, \chi)\right\} = \varphi(k) \sum_{n \geqslant z^2,\ n \equiv 1 \pmod{k}} A_n n^{-s}.$$

Если мы подставим это в (1.8) и соответственно изменим порядок суммирования (что для достаточно большого σ можно сделать), то для $H_z(s)$ получается ряд Дирихле с действительными коэффициентами. Следовательно, функция $H_z(s)$ действительна для действительного s.

При доказательстве (1.7) мы можем ограничиться знаком „плюс". Пусть m — число перемен знака $\operatorname{Re} H_z(s)$ (очевидно, конечное) на отрезках от 2 до $2 + iT$ и от $2 + iT$ до $\alpha + iT$. Тогда имеем (см. доказательство теоремы 7.3.4)

$$|\arg H_z(\alpha + iT)| \leqslant (m + 1)\pi, \quad (1.9)$$

так как $\arg H_z(s)$ между двумя переменами знака $\operatorname{Re} H_z(s)$ может меняться не больше, чем на $\pm\pi$. Покажем сначала, что для достаточно большого k справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} H_z(s) > 0$$

и что, следовательно, m равно числу перемен знака $\operatorname{Re} H_z(s)$ на отрезке $t=T$, $\alpha<\sigma<2$. Действительно, согласно (1.5),

$$|f_z(2+it,\ \chi)| \leqslant \sum_{n \geqslant z} d(n)\,n^{-2} \leqslant \sum_{n > k^2} d(n)\,n^{-2} \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sum_{n > k^2} n^{-3/2} < 2 \int_{k^2}^{\infty} \xi^{-3/2} d\xi = 4k^{-1} \quad (k \geqslant 1),$$

так как $z > k^2$ и $d(n) \leqslant 2\sqrt{n}$. Отсюда следует, что [1])

$$\operatorname{Re} H_z(2+it) = \operatorname{Re} \prod_{\chi} \left\{1 - f_z^2(2+it,\ \chi)\right\} =$$
$$= 1 + \operatorname{Re}\left\{\prod_{\chi}\left(1-f_z^2\right)-1\right\} \geqslant 1 - \left|\prod_{\chi}\left(1-f_z^2\right)-1\right| \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \left\{\prod_{\chi}\left(1+|f_z|^2\right)-1\right\} >$$
$$> 1 - \left\{\prod_{\chi}\left(1+16k^{-2}\right)-1\right\} \geqslant 2-\left(1+16k^{-2}\right)^k > 0 \qquad (1.10)$$

для достаточно большого k. Теперь по принципу симметрии имеем

$$2\operatorname{Re} H_z(\sigma+iT) = H_z(\sigma+iT) + H_z(\sigma-iT) = R_z(s,\ T)\big|_{s=\sigma}. \qquad (1.11)$$

Поэтому число m перемен знака $\operatorname{Re} H_z(s)$ на отрезке $t=T$, $\alpha < \sigma < 2$ не больше, чем число нулей функции $R_z(s,\ T)$ на отрезке $t=0$, $\alpha<\sigma<2$, а последнее не превосходит $n_z(\alpha,\ T)$. Отсюда, согласно (1.9), получаем утверждение леммы.

Заметим, что $\prod_{\chi} L(s,\ \chi)$ — по существу дзета-функция Дедекинда поля деления круга корней k-й степени из единицы (см. Хассе [1]).

Будем предполагать до конца доказательства теоремы 1.1, что k — достаточно большое число, не оговаривая этого каждый раз.

Лемма 1.2. *Если* $1/2+2\delta \leqslant \alpha < 1$, $\delta > 0$, $T \geqslant 2$, *то для* $z > k^2$ *справедлива оценка*

$$N(\alpha,\ T) \ll \frac{1}{\delta}\left\{J_z(\alpha-\delta,\ T) + J_z(2,\ T)\right\} +$$
$$+ \frac{1}{\delta^2}\left(\max_{\alpha-2\delta \leqslant \sigma \leqslant 4} K_z(\sigma,\ T) - \ln\left\{2-\exp K_z(2,\ T)\right\}\right) \qquad (1.12)$$

(*причем константа в* $\ll$ *не зависит от* α, δ, k, T, z) [2]).

---

[1]) Это очевидно, если представить себе, что умножение выполнено.

[2]) Так как $|f_z(2+it,\ \chi)| \leqslant 4k^{-1}$ $(z > k^2)$, то $K_z(2,\ T) \leqslant 16k^{-1}$ следовательно выражение, заключенное в скобках, для достаточно большого k положительно и меньше, например, чем $1/2$.

Доказательство. Применим теорему П.8.1 с $f(s)=H_z(s)$, $\sigma_2=2$ и оценим члены $\arg H_z$ и $\ln|H_z|$, появляющиеся в правой части (П.8.3). Согласно теореме П.5.2, в обозначениях леммы 1.1 получаем

$$\left(\frac{2-\alpha+\frac{3}{2}\delta}{2-\alpha+\delta}\right)^{n_z(\alpha-\delta,\,T)} \leqslant \frac{1}{|R_z(2,\,T)|} \max_{|s-2|=2-\alpha+\frac{3}{2}\delta} |R_z(s,\,T)| \tag{1.13}$$

(как уже было показано при доказательстве леммы 1.1, $R_z(2,\,T)\neq 0$ для достаточно большого k)[1]). Так же, как в (1.10), из неравенства $1+|f_z|^2\leqslant\exp|f_z|^2$ заключаем, что

$$R_z(2,\,T)=2\operatorname{Re}H_z(2+iT)\geqslant 2\left(1-\left\{\prod_\chi(1+|f_z|^2)-1\right\}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 4-2\exp\sum_\chi|f_z(2+iT,\,\chi)|^2. \tag{1.14}$$

Далее, в силу оценки

$$|H_z(s)|\leqslant\prod_\chi(1+|f_z(s,\,\chi)|^2)\leqslant\exp\sum_\chi|f_z(s,\,\chi)|^2$$

имеет место неравенство

$$\max_{|s-2|=2-\alpha+\frac{3}{2}\delta}|R_z(s,\,T)|\leqslant\exp\max_{|s-2|=2-\alpha+\frac{3}{2}\delta}\sum_\chi|f_z(s+iT,\,\chi)|^2+$$
$$+\exp\max_{|s-2|=2-\alpha+\frac{3}{2}\delta}\sum_\chi|f_z(s+iT,\,\chi)|^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\exp\max_{\alpha-\frac{3}{2}\delta\leqslant\sigma\leqslant 4-\alpha+\frac{3}{2}\delta}K_z(\sigma,\,T), \tag{1.15}$$

так как $2-\alpha+\frac{3}{2}\delta<\frac{3}{2}$. Подставляя (1.14) и (1.15) в (1.13) и используя соотношения

$$\ln\frac{2-\alpha+\frac{3}{2}\delta}{2-\alpha+\delta}=\ln\left(1+\frac{\frac{1}{2}\delta}{2-\alpha+\delta}\right)>c\delta,$$

получаем оценку $\left(\alpha-2\delta<\alpha-\frac{3}{2}\delta,\ 4-\alpha+\frac{3}{2}\delta<4\right)$,

$$n_z(\alpha-\delta,\,T)\ll\delta^{-1}\left(\max_{\alpha-2\delta\leqslant\sigma\leqslant 4}K_z(\sigma,T)+\ln 2-\ln\{4-2\exp K_z(2,\,T)\}\right). \tag{1.16}$$

---

[1]) Так как $T\geqslant 2$ и функция $R_z(s,\,T)$ регулярна в круге $|s-2|\leqslant 2-\alpha+\frac{3}{2}\delta$.

Отсюда и из леммы 1.1 для $\alpha-\delta\leqslant\sigma\leqslant 2$ следует

$$\arg H_z(\sigma+iT)\ll n_z(\sigma,\ T)+1\ll n_z(\alpha-\delta,\ T)+1\ll$$
$$\ll\delta^{-1}\left(\max_{\alpha-2\delta\leqslant\sigma\leqslant 4} K_z(\sigma,\ T)-\ln\{2-\exp K_z(2,\ T)\}\right), \qquad (1.17)$$

так как $n_z(\sigma,\ T)$ не возрастает с ростом σ, и то же самое неравенство получается для $|\arg H_z(\sigma-iT)|$. Далее, для $\alpha-\delta\leqslant\sigma\leqslant 2$, $\sigma+it\neq 1$

$$\max(0,\ \ln|H_z(\sigma+it)|)\leqslant\ln\prod_\chi(1+|f_z(\sigma+it,\ \chi)|^2)^{1)}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_\chi|f_z(\sigma+it,\ \chi)|^2. \qquad (1.18)$$

Из теоремы П.8.1 следует, что при $f(s)\to H_z(s)$

$$\alpha\to\alpha-\delta,\quad \sigma_2\to 2,\quad \nu(\sigma)\to N_1(\sigma,\ T)-1\ ^{2)},$$

причем $N_1(\sigma,\ T)$ — число нулей функции $H_z(s)$ в области $\operatorname{Re}s>\sigma$, $|t|\leqslant T$, в силу (1.17), (1.18)[3]), получаем

$$2\pi\int_{\alpha-\delta}^{2}N_1(\sigma,\ T)\,d\sigma=\int_{-T}^{T}\{\ln|H_z(\alpha-\delta+it)|-\ln|H_z(2+it)|\}\,dt+$$
$$+\int_{\alpha-\delta}^{2}\{\arg H_z(\sigma+iT)-\arg H_z(\sigma-iT)\}\,d\sigma+O(1)\ll$$
$$\ll J_z(\alpha-\delta,\ T)+J_z(2,\ T)+$$
$$+\delta^{-1}\left(\max_{\alpha-2\delta\leqslant\sigma\leqslant 4}K_z(\sigma,\ T)-\ln\{2-\exp K_z(2,\ T)\}\right).$$

При этом мы пользуемся определением величины J_z (см. 1.4) и тем, что левая часть неотрицательна.

Теперь, так как $N_1(\sigma,\ T)$ не убывает с ростом σ, имеем

$$N_1(\alpha,\ T)\leqslant\delta^{-1}\int_{\alpha-\delta}^{\alpha}N_1(\sigma,\ T)\,d\sigma\leqslant\delta^{-1}\int_{\alpha-\delta}^{2}N_1(\sigma,\ T)\,d\sigma.$$

Из неравенства $N(\alpha,\ T)\leqslant N_1(\alpha,\ T)$ следует соотношение (1.12), которое требовалось доказать.

---

[1]) Естественно может оказаться $\ln|H_z(\sigma+it)|=-\infty$, если $\sigma+it$ — нуль $H_z(s)$.

[2]) Здесь $H_z(s)$ при $s=1$ имеет полюс.

[3]) При $s=2+it$ имеет место также оценка

$$-\ln|H_z(s)|\leqslant-\ln\prod_\chi(1-|f_z|^2)\leqslant 2\sum|f_z|^2,\ k\geqslant 8,$$

так как $|f_z(s,\ \chi)|\leqslant 4k^{-1}\leqslant\frac{1}{2}$ $(k\geqslant 8)$.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти как можно лучшие верхние оценки для $K_z(\sigma, T)$ и $J_z(\sigma, T)$ в полосе $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$. Для этого используются теоремы П.9.3 и П.9.5, которые позволяют по $K_z\left(\frac{1}{2}, T\right)$ и, например, $K_z(1+\delta, T)$ делать выводы о $K_z(\sigma, T)$ для $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ или по $J_z\left(\frac{1}{2}, T\right)$ и $J_z(1+\delta, T)$ делать выводы о $J_z(\sigma, T)$ для $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$. Величины $K_z\left(\frac{1}{2}, T\right)$ и $J_z\left(\frac{1}{2}, T\right)$ оцениваются согласно (1.2). Величины $K_z(1+\delta, T)$ и $J_z(1+\delta, T)$ мы непосредственно оценим, раскладывая $K_z(\sigma, T)$ и $J_z(\sigma, T)$ в сходящиеся ряды Дирихле в области $\sigma > 1$. Нам потребуются сначала некоторые вспомогательные теоремы о суммах коэффициентов этих рядов.

Из разложения (1.5) для $\sigma = 1+\delta$ следует

$$|f_z(1+\delta+it, \chi)|^2 = \sum_{m,\, n \geqslant z} \frac{\bar{\chi}(m)\chi(n)}{(mn)^{1+\delta}} \sum_{\substack{d \mid n \\ d < z}} \mu(d) \sum_{\substack{d \mid n \\ d < z}} \mu(d) \left(\frac{m}{n}\right)^{it},$$

и отсюда, согласно (4.2.11),

$$\sum_{\chi} |f_z(1+\delta+it, \chi)|^2 = \sum_{\substack{m,\ n \geqslant r \\ n \equiv m \,(\mathrm{mod}\ k)}} \sum_{(m,\ k)=1} \frac{\varphi(k)}{(mn)^{1+\delta}} \times \\ \times \sum_{\substack{d \mid m \\ d < z}} \mu(d) \sum_{\substack{d \mid n \\ d < z}} \mu(d) \left(\frac{m}{n}\right)^{it}. \qquad (1.19)$$

При $n > 1$, так как $\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0$, имеем

$$\Big|\sum_{d \mid n,\, d < z} \mu(d)\Big| = \Big|\sum_{d \mid n,\, d \geqslant z} \mu(d)\Big| \leqslant \sum_{d \mid n,\ d \geqslant z} \cdot 1 = \sum_{d \mid n,\ d \leqslant n/z} \cdot 1. \quad (1.20)$$

Положим

$$b(n) = b_z(n) = \begin{cases} \sum\limits_{d \mid n,\ d \leqslant n/z} \cdot 1, & (n,\ k) = 1, \\ 0 & (n,\ k) > 1. \end{cases}$$

Лемма 1.3. *Пусть* $z > k^2$ *и*

$$B(x) = B_z(x,\ m) = \sum_{n \leqslant x,\ n \equiv m \,(\mathrm{mod}\ k)} b_z(n).$$

Тогда

$$B(x) \ll \frac{1}{k} x \ln x \qquad (x \geqslant 2). \qquad (1.21)$$

Доказательство. Для того чтобы $b_z(n)$ было отлично от нуля, необходимо $n \geqslant z$, следовательно, для $z > k^2$ должно быть $n > k^2$. Таким образом, для $x \leqslant k^2$ соотношение (1.21) тривиально.

Если $(m, k) > 1$, то $B_z(x, m) = 0$. В случае $(m, k) = 1$ имеем

$$B_z(x, m) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv m \pmod k}} \sum_{d \mid n,\ d \leqslant n/z} 1 = \sum_{d \leqslant x/z} \sum_{\substack{n \leqslant x,\ n \equiv 0 \pmod d \\ n \equiv m \pmod k}} \cdot 1.$$

Внутренняя сумма обращается в нуль для $(d, k) > 1$, так как $(m, k) = 1$. Для $(d, k) = 1$ сравнения $n \equiv 0 \pmod d$ и $n \equiv m \pmod k$ имеют точно по одному решению по модулю kd, следовательно, так как $z > k^2$,

$$B_z(x, m) \leqslant \sum_{d \leqslant x/z} \left(\frac{x}{kd} + 1\right) \ll \frac{x}{k} \ln x + \frac{x}{z} \ll \frac{x}{k} \ln x \quad (x \geqslant 2).$$

Если бы мы оценили $\sum_{d \mid n,\ d < z} \mu(d)$ с помощью суммы $\sum_{d \mid n,\ d < z} \cdot 1$ вместо $b(n)$, то здесь в правой части добавился бы еще член $O(z)$.

Лемма 1.4. *Для $z > k^2$, $0 < \delta \leqslant 3$ справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{n \geqslant z \\ n \equiv m \pmod k}} \frac{b(n)}{n^{1+\delta}} \ll \frac{1}{k} \frac{\ln z}{\delta^2 z^\delta}.$$

Доказательство. Поскольку $\sum_{z \leqslant n \leqslant \xi} b(n) \leqslant B(\xi)$ и $B(\xi) \xi^{-(1+\delta)} \to 0$ при $\xi \to \infty$ (в силу (1.21)), по теореме П.1.4 мы имеем

$$\sum_{\substack{n \geqslant z \\ n \equiv m \pmod k}} \frac{b(n)}{n^{1+\delta}} \leqslant (1+\delta) \int_z^\infty \frac{B(\xi)}{\xi^{2+\delta}} d\xi \ll \frac{1}{k} \int_z^\infty \frac{\ln \xi}{\xi^{1+\delta}} d\xi.$$

Если положить $\xi = z u^{1/\delta}$, то для последнего интеграла получится оценка

$$\int_1^\infty \frac{\ln z}{\delta z^\delta u^2} du + \int_1^\infty \frac{\ln u}{\delta^2 z^\delta u^2} du \ll \frac{\ln z}{\delta^2 z^\delta}.$$

Лемма 1.5. *Для $z > k^2$, $0 < \delta \leqslant 3$ имеем*

$$\sum_{\substack{m, n \geqslant z \\ n \equiv m \pmod k}}\sum \frac{b(m)\, b(n)}{(mn)^{1+\delta}} \ll \frac{1}{k} \frac{\ln z}{\delta^4 z^\delta}.$$

Доказательство. Так как $b(m) \leqslant d(m)$ и

$$\sum_{m \geqslant z} \frac{b(m)}{m^{1+\delta}} \leqslant \sum_{m \geqslant 1} \frac{d(m)}{m^{1+\delta}} = \zeta^2(1+\delta) \ll \delta^{-2},$$

то рассматриваемая сумма оценивается по лемме 1.4 так:

$$\sum_{m \geqslant z} \frac{b(m)}{m^{1+\delta}} \sum_{\substack{n \geqslant z \\ n \equiv m \pmod k}} \frac{b(n)}{n^{1+\delta}} \ll \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\ln z}{k \delta^2 z^\delta}.$$

Лемма 1.6. *Для $z > k^2$ имеем*

$$\sum_{\substack{m<n\leqslant x\\ n\equiv m \pmod k}}\sum \frac{b(m)\,b(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} \ll \frac{1}{k}\,x\ln^2 x \quad (x \geqslant 2).$$

Доказательство. Из теоремы П.1.4, согласно лемме 1.3, следует

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv m \pmod k}} \frac{b(n)}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{B(x)}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{B(\xi)}{\xi^{\frac{3}{2}}}\,d\xi \ll \frac{1}{k}\,x^{\frac{1}{2}}\ln x. \tag{1.22}$$

Отсюда, применяя (1.22) к внутренней сумме и затем ту же самую формулу применяя еще раз с $k=1$, получаем

$$\sum_{\substack{m<n\leqslant x\\ n\equiv m \pmod k}}\sum \frac{b(m)\,b(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{m\leqslant x}\frac{b(m)}{m^{\frac{1}{2}}}\sum_{\substack{m<n\leqslant x\\ n\equiv m \pmod k}}\frac{b(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \ll \frac{1}{k}\,x\ln^2 x.$$

Лемма 1.7. *Для $z > k^2$ имеем*

$$\sum_{\substack{m<n\leqslant x\\ n\equiv m \pmod k}}\sum \frac{b(m)\,b(n)}{n-m} \ll \frac{1}{k}\,x\ln^4 x.$$

Доказательство. Если мы положим $n-m=kl$ и примем во внимание соотношение $b(m)\leqslant d(m)$, то, согласно неравенству Шварца и оценке (1.5.15), получаем

$$\sum_{lk\leqslant x}\frac{1}{lk}\sum_{1\leqslant m\leqslant x-lk} b(m)\,b(m+lk) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\sum_{l\leqslant x}\frac{1}{l}\left\{\sum_{m\leqslant x-lk} d^2(m)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{r\leqslant x} d^2(r)\right\}^{\frac{1}{2}} \ll \frac{1}{k}\,x\ln^4 x.$$

Лемма 1.8. *Для $z > k^2$ имеем*

$$\sum_{\substack{m<n\leqslant x\\ n\equiv m \pmod k}}\sum \frac{b(m)\,b(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}\ln(n/m)} \ll \frac{1}{k}\,x\ln^4 x. \tag{1.23}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}\ln(n/m)} < \frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{n-m},$$

так как при $n > m$

$$\ln\frac{n}{m} = \ln\left(1 - \frac{n-m}{n}\right)^{-1} > \frac{n-m}{n} >$$

$$> \frac{n-m}{n + \sqrt{mn} - m} = \left(1 + \frac{\sqrt{nm}}{n-m}\right)^{-1}.$$

Отсюда и из двух предыдущих лемм следует утверждение леммы 1.8.

Лемма 1.9. *Для* $0 < \delta \leqslant 3$, $z \geqslant 2$ *справедлива оценка*

$$\sum_{n \geqslant z} \frac{b^2(n)}{n^{2+\delta}} \ll \frac{1}{\delta^3 z}. \tag{1.24}$$

Доказательство. Из теоремы П.1.4 и оценки (1.5.15) для $\lambda = 1 + \delta$ $(\lambda > 0)$ следует

$$\sum_{n \geqslant z} \frac{d^2(n)}{n^{1+\lambda}} \leqslant (1+\lambda) \int_z^\infty \sum_{n \leqslant \xi} d^2(n)\, \xi^{-(2+\lambda)}\, d\xi \ll \int_z^\infty \frac{\ln^3 \xi}{\xi^{1+\lambda}}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\lambda z^\lambda} \int_1^\infty \frac{\ln^3(z u^{1/\lambda})}{u^2}\, du \ll \frac{1}{\lambda z^\lambda}\left(\ln z + \frac{1}{\lambda}\right)^3 \ll \frac{\ln^3 z}{z^{1+\delta}},$$

отсюда получается (1.24), так как всегда выполняется неравенство

$$\frac{1}{3}\delta \ln z \leqslant \exp\left(\frac{1}{3}\delta \ln z\right) = z^{\delta/3}.$$

Лемма 1.10. *Для* $z > k^2$, $0 < \delta \leqslant 3$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{n > m \geqslant z \\ n \equiv m \pmod k}}\sum \frac{b(m)\, b(n)}{(mn)^{1+\delta} \ln(n/m)} \ll \frac{1}{k\delta^5}. \tag{1.25}$$

Доказательство. Если $a = n/m > 1$, то

$$1 < \ln a + a^{-1} < \ln a + a^{-\frac{1}{2}},$$

так как функция $\ln a + a^{-1} - 1$ при $a > 1$ монотонно растет, а при $a = 1$ обращается в нуль. Поэтому $1/\ln a < 1 + 1/a^{\frac{1}{2}} \ln a$, и исследуемая сумма становится не больше, чем

$$\sum_{\substack{n > m \geqslant z \\ n \equiv m \pmod k}}\sum \left\{ \frac{b(m)\, b(n)}{(mn)^{1+\delta}} + \frac{b(m)\, b(n)}{m^\delta n^{1+\delta} (mn)^{\frac{1}{2}} \ln(n/m)} \right\} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

В силу леммы 1.5 и неравенства $\delta \ln z \leqslant \exp(\delta \ln z) = z^\delta$ имеем $\sum_1 \ll k^{-1}\delta^{-5}$. Далее, согласно лемме 1.8 и очевидному неравенству $1/m^\delta n^{1+\delta} \leqslant 1/n^{1+\delta}$,

$$\sum\nolimits_2 < \sum_{\substack{n > m \geqslant 1 \\ n \equiv m \,(\mathrm{mod}\, k)}}\sum \frac{b(m)\,b(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}} \ln(n/m)} \int\limits_n^\infty \frac{1+\delta}{\xi^{2+\delta}}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_1^\infty \frac{1+\delta}{\xi^{2+\delta}} \left(\sum_{m < n \leqslant \xi}\sum \frac{b(m)\,b(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}} \ln(n/m)} \right) d\xi \ll \frac{1}{k} \int\limits_1^\infty \frac{\ln^4 \xi}{\xi^{1+\delta}}\, d\xi \ll \frac{1}{k\delta^5},$$

причем последнее неравенство опять получается с помощью подстановки $\xi = u^{1/\delta}$.

Теперь, наконец, мы можем оценить $K_z(\sigma, T)$ и $J_z(\sigma, T)$.

Лемма 1.11. *Для* $z > k^2$, $0 < \delta \leqslant 3$ *имеем*

$$\sum_\chi |f_z(1+\delta+it, \chi)|^2 \ll \frac{1}{\delta^5},$$

в частности

$$K_z(1+\delta, T) \ll \frac{1}{\delta^5}.$$

Доказательство. Из (1.19) и (1.20) по лемме 1.5 следует

$$\sum_\chi |f_z(1+\delta+it, \chi)|^2 \leqslant k \sum_{\substack{m,\, n \geqslant z \\ n \equiv m \,(\mathrm{mod}\, k)}}\sum \frac{b(m)\,b(n)}{(mn)^{1+\delta}} \ll \frac{\ln z}{\delta^4 z^\delta}.$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение, так как $\ln z \ll \delta^{-1} z^\delta$.

Лемма 1.12. *Для* $z > k^2$, $T \geqslant 2$ *имеем*

$$K_z\left(\frac{1}{2}, T\right) \ll kT^{2C_0} z,$$

где C_0 *обозначает константу из формулы* (1.2).

Доказательство. По определению (1.4) функции f справедлива оценка

$$\left| f_z\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^2 \leqslant 2\left\{ \left| L\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^2 \left| Q_z\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^2 + 1 \right\}. \quad (1.26)$$

Согласно предположению (1.2) теоремы 1.1 для $T \geqslant 2$,

$$\max_{T-\frac{3}{2} \leqslant t \leqslant T+\frac{3}{2}} \left| L\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right| \ll k^{\frac{1}{2}} T^{C_0},$$

С другой стороны,

$$\left|Q_z\left(\frac{1}{2}+it,\,\chi\right)\right|^2=\sum_{m<z,\;n<z}\sum\mu(m)\,\mu(n)\,\frac{\overline{\chi}(m)\,\chi(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}$$

по определению (1.4) функции Q и

$$\sum_{\chi}\left|Q_z\left(\frac{1}{2}+it,\,\chi\right)\right|^2=\varphi(k)\sum_{\substack{m,n<z,\;(m,\,k)=1\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}\sum\frac{\mu(m)\,\mu(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}. \qquad (1.27)$$

Поэтому, согласно (1.26), для $z>k^2$ имеем

$$K_z\left(\frac{1}{2},\,T\right)\ll kT^{2C_0}\max_{T-\frac{3}{2}\leqslant|t|\leqslant T+\frac{3}{2}}\sum_{\chi}\left|Q_z\left(\frac{1}{2}+it,\,\chi\right)\right|^2\ll$$

$$\ll kT^{2C_0}k\sum_{\substack{m,\,n<z,\;(m,\,k)=1\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}\sum(mn)^{-\frac{1}{2}}\ll k^2T^{2C_0}\sum_{m<z}m^{-\frac{1}{2}}\sum_{n<z,\;n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}n^{-\frac{1}{2}}\ll$$

$$\ll k^2T^{2C_0}\sum_{m<z}m^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}k^{-1}\ll kT^{2C_0}z,$$

так как если, например, $m\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)$, $k\geqslant 1$, $0<l\leqslant k$, то

$$\sum_{n<z,\;n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}n^{-\frac{1}{2}}=k^{-\frac{1}{2}}\sum_{0\leqslant r<(z-l)/k}\left(r+\frac{l}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}\ll k^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

для $z>k^2$. $\left(\text{В случае } r=0 \text{ получается } (l/k)^{-\frac{1}{2}}\leqslant k^{\frac{1}{2}}<(z/k)^{\frac{1}{2}}.\right)$ Таким образом, лемма доказана.

Прямо к $f_z(s,\,\chi)$ теорема П.9.5 не применима, так как при $|t|\to\infty$ мы можем вывести лишь, что $|f_z(s,\,\chi)|<A|t|^c$ $(A=A(k))$ и, кроме того, функция $f_z(s,\,\chi_0)$ при $s=1$ не регулярна. Чтобы можно было применить эту теорему, мы введем следующую вспомогательную функцию:

$$g_z(s,\,\chi)=\frac{s-1}{s\cos(s/2T)}f_z(s,\,\chi).$$

При $|t|\to\infty$ в области $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1+\delta$, $0<\delta\leqslant 3$ имеем

$$\left|\frac{s-1}{s\cos(s/2T)}\right|\sim\left|\cos\frac{s}{2T}\right|^{-1}\sim 2e^{-|t|/2T},$$

поэтому в той же самой области

$$e^{-|t|/T}|f_z(s,\,\chi)|^2\left|\frac{s-1}{s}\right|^2\ll|g_z(s,\,\chi)|^2\ll e^{-|t|/T}|f_z(s,\,\chi)|^2 \qquad (1.28)$$

с константами, не зависящими от k, z, t и T $(T \geqslant 2)$. Из теоремы 4.5.4 при постоянных k, z, T следует, что $g_z(s, \chi) \to 0$ при $|t| \to \infty$, так что теорема П.9.3 также применима.

Лемма 1.13. *Пусть* $z = k(T+k)$, $T \geqslant 2$ *(следовательно, $z > k^2$). Тогда справедлива оценка*

$$K_z(\sigma, T) \ll \begin{cases} \{k^4 T^{4C_0}(T+k)^2\}^{1-\sigma} \ln^5 kT & \left(\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1\right), \\ \ln^5 kT & (1 \leqslant \sigma \leqslant 4) \end{cases} \tag{1.29}$$

и $K_z(2, T) \leqslant \frac{1}{2}$ *для достаточно большого* k.

Доказательство. Положим $G_z(s) = \sum_\chi |g_z(s, \chi)|^2$ и $M_z(\sigma) = \sup_{\operatorname{Re} s = \sigma} |G_z(s)|$. Из леммы 1.11 и правой оценки (1.28) для $z = k(T+k)$ получаем $M_z(1+\delta) \ll \delta^{-5}$. Из правой оценки (1.28) для всех t так же, как при доказательстве леммы 1.12, следует, что

$$G_z\left(\frac{1}{2}+it\right) \ll e^{-|t|/T} \sum_\chi \left| f\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^2 \ll$$
$$\ll k(|t|+2)^{2C_0} e^{-|t|/T} z \ll kT^{2C_0} z \quad (T \geqslant 2),$$

если принять во внимание допущение (1.2) и ограниченность функции $(|t|/T)^{2C_0} \exp(-|t|/T)$. Следовательно

$$M_z\left(\frac{1}{2}\right) \ll kT^{2C_0} z = k^2 T^{2C_0}(T+k).$$

Теорема П.9.3 при $\sigma_1 = \frac{1}{2}$, $\sigma_2 = 1+\delta$ для $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$ дает

$$M_z(\sigma) \ll \{k^2 T^{2C_0}(T+k)\}^{(1+\delta-\sigma)/\left(\frac{1}{2}+\delta\right)} \delta^{-5\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}. \tag{1.30}$$

Теперь положим $\delta = a/\ln kT$; при этом будем считать a положительным и настолько малым, что $\delta \leqslant 1$ для $k \geqslant 1$, $T \geqslant 2$. Тогда для $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$

$$\frac{1+\delta-\sigma}{\frac{1}{2}+\delta} = 2(1-\sigma) + 2a\frac{2\sigma-1}{\ln kT + 2a} \leqslant 2(1-\sigma) + \frac{6a}{\ln kT}$$

и $\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)/\left(\frac{1}{2}+\delta\right) \leqslant 1$. Следовательно,

$$M_z(\sigma) \ll \{k^2 T^{2C_0}(T+k)\}^{2(1-\sigma)} \ln^5 kT$$

для $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$. Для $\sigma > 1+\delta = 1 + a/\ln kT$ из леммы 1.11 следует $K_z(\sigma, T) \ll \ln^5 kT$. Левая оценка (1.28) дает вместе с этим формулу (1.29), так как множитель $e^{|t|/T} |s/(s-1)|^2$ для $T \geqslant 2$, $|t-T| \leqslant \frac{3}{2}$ ограничен. Последняя часть утверждения (для достаточно большого k) следует из неравенства $|f_z(2+it, \chi)| \leqslant 4/k$, полученного при доказательстве леммы 1.1, так как это неравенство дает оценку

$$\sum_{\chi} |f_z(2+it, \chi)|^2 \leqslant k(4/k)^2.$$

Лемма 1.14. *Для $z \geqslant kT$, $T \geqslant 2$, $0 < \delta \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$J_z(1+\delta, T) \ll \delta^{-5}. \tag{1.31}$$

Доказательство. Интегрируя (1.19) по отрезку $-T \leqslant t \leqslant T$ и учитывая (1.20), получим, если произведем суммирование отдельно по $m=n$ и по $m \lessgtr n$:

$$J_z(1+\delta, T) \ll kT \sum_{n \geqslant z} \frac{b^2(n)}{n^{2+2\delta}} + 2k \sum_{\substack{n > m \geqslant z \\ n \equiv m \,(\mathrm{mod}\, k)}} \sum \frac{b(m)\, b(n)}{(mn)^{1+\delta} \ln(n/m)}, \tag{1.32}$$

так как

$$\left| \int_{-T}^{T} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \right| \begin{cases} = 2T & (n=m), \\ \leqslant 2\Big/\left|\ln \frac{n}{m}\right| & (n \neq m). \end{cases} \tag{1.33}$$

Утверждение следует теперь из леммы 1.9 (если положить в ней $z = kT$) и леммы 1.10.

Лемма 1.15. *Для $z > k^2$, $T \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$J_z\left(\frac{1}{2}, T\right) \ll \begin{cases} kT^{2C_0}(kT+z)\ln z & (T \geqslant 2), \\ k(k+z)\ln z & (0 < T \leqslant 2). \end{cases}$$

Доказательство. Из (1.26) и (1.2) для $T \geqslant 2$ с помощью интегрирования по отрезку $-T \leqslant t \leqslant T$ следует, что

$$\int_{T}^{T} \left| f_z\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^2 dt \ll kT^{2C_0} \int_{-T}^{T} \left| Q_z\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right)\right|^2 dt + T. \tag{1.34}$$

Далее, опять разделяя суммирование на случаи $n=m$ и $n\neq m$, согласно (1.27), имеем

$$\sum_{\chi}\int_{-T}^{T}\left|Q_z\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2 dt=$$

$$=\varphi(k)\int_{-T}^{T}\sum_{\substack{m,\,n<z,\,(m,\,k)=1\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}\sum\frac{\mu(m)\mu(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}dt\ll$$

$$\ll kT\sum_{n<z}\frac{1}{n}+k\sum_{\substack{m<n<z\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}\sum\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}\ln(n/m)}\ll$$

$$\ll kT\ln z+k\sum_{\substack{m<n<z\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}\sum\left(\frac{1}{(m/n)^{1/2}}+\frac{1}{n-m}\right)\ll$$

$$\ll kT\ln z+k(zk^{-1}+zk^{-1}\ln z)\ll(kT+z)\ln z;$$

при этом первая часть двойной суммы оценивается, как в лемме 1.12, а для второй части имеет место оценка

$$\sum_{\substack{m<n<z\\ n\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}\sum\frac{1}{n-m}=\sum_{m<z}\ \sum_{r<(z-m)/k}\frac{1}{kr}\ll\frac{1}{k}\sum_{m<z}\ln z.$$

Если просуммируем (1.34) по всем χ, то получим утверждение для $T\geqslant 2$. Для $0<T\leqslant 2$ в предыдущем доказательстве вместо оценки (1.2) нужно использовать оценку (4.5.14).

Применим теперь теорему П.9.5 к оценке функции $J_z(\sigma, T)$ при $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1+\delta$. Чтобы обеспечить равномерную сходимость интеграла, мы перейдем опять к функциям $g_z(s,\chi)$ и положим

$$I_z(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\chi}|g_z(\sigma+it,\chi)|^2 dt.$$

Этот интеграл сходится равномерно в области $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 2$, так как там, согласно (1.28), (1.4) и (4.5.12), при $t\to\infty$ справедлива оценка

$$\sum_{\chi}|g_z(s,\chi)|^2\ll e^{-t/T}\sum_{\chi}|f_z(s,\chi)|^2\ll$$

$$\ll e^{-t/T}\sum_{\chi}\{|L(s,\chi)|^2|Q_z(s,\chi)|^2+1\}\ll$$

$$\ll c(k)e^{-t/T}\left(t\sum_{\chi}|Q_z(s,\chi)|^2+1\right)\ll c(k,z)e^{-t/T}t.$$

Здесь $c(k)$ и $c(k, z)$ — константы, зависящие от k и от k, z, $|Q_z(s, \chi)|$ при $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$ остается меньше константы, зависящей только от z. С этого момента до конца доказательства будем предполагать, что $\sigma \neq 1$. С помощью интегрирования по частям для $X > 0$ получаем

$$\int_0^X e^{-t/T} \sum_\chi |f_z(\sigma+it, \chi)|^2 dt = e^{-X/T} \int_0^X \sum_\chi |f_z(\sigma+it, \chi)|^2 dt + \\ + \frac{1}{T} \int_0^X e^{-\xi/T} \left\{ \int_0^\xi \sum_\chi |f_z(\sigma+it, \chi)|^2 dt \right\} d\xi.$$

Для $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$ и $X \to \infty$ первый член правой части стремится к нулю, так как тогда подинтегральная функция $\ll c(k)t$ и, следовательно, интеграл $\ll c(k) X^2$ $(X \to \infty)$. Если обозначим еще $\xi/T = u$, то при $X \to \infty$ из (1.28)[1]) следует, что

$$I_z(\sigma) \ll \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \int_0^{Tu} \sum_\chi |f_z(\sigma+it, \chi)|^2 dt \right\} du. \tag{1.35}$$

Лемма 1.16. *Для $z = k(T+k)$ в области $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1 - a/\ln kT$ ($a > 0$, постоянное), $T \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$J_z(\sigma, T) \ll \left\{k^4 T^{4C_0} (T+k)^2\right\}^{1-\sigma} \ln^7 kT. \tag{1.36}$$

Доказательство. Из (1.35) и (1.32) получаем[2])

$$I_z(1+\delta) \ll \int_0^\infty e^{-u} \left(kTu \sum_{n \geqslant z} + k \sum\sum_{n > m \geqslant z} \right) du.$$

Здесь $\sum\limits_{n \geqslant z} \ll 1/\delta^3 z$ по лемме 1.9, и $\sum\sum\limits_{n > m \geqslant z} \ll 1/k\delta^5$ по лемме 1.10 (для $z > k^2$). Следовательно, при $0 < \delta \leqslant 3$

$$I_z(1+\delta) \ll \delta^{-5}. \tag{1.37}$$

[1]) Часть интеграла $I_z(\sigma)$ от $-\infty$ до 0 оценивается так же, как часть от 0 до $+\infty$.

[2]) (1.32) имеет место также и для $0 < T \leqslant 2$, что проверяется непосредственно.

Из (1.35) и леммы 1.15 вытекает, что

$$I_z\left(\frac{1}{2}\right) \ll \int_0^\infty e^{-u}\left\{k(Tu)^{2C_0}(kTu+z)\ln z\right\}du + \\ + \int_0^1 k(k+z)\ln z\cdot du \ll kT^{2C_0}(kT+z)\ln z \quad (T\geqslant 2) \qquad (1.38)$$

для $z \geqslant k^2$, следовательно, во всяком случае, для $z=k(T+k)$. Применим теорему П.9.5, взяв в качестве $g_n(s)$ функции $g_z(s,\chi)$. Тогда из (1.37), (1.38) для $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1+\delta$, $z=k(T+k)$ вытекает

$$I_z(\sigma) \ll \left\{k^2T^{2C_0}(T+k)\ln kT\right\}^{(1+\delta-\sigma)/\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\delta^{-5\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}.$$

Положим, например, $\delta = 1/2\ln kT$ $(\delta<1)$. Тогда для $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1+\delta$ следует так же, как при доказательстве (1.30),

$$I_z(\sigma) \ll \left\{k^2T^{2C_0}(T+k)\ln kT\right\}^{2(1-\sigma)}\ln^5 kT \ll \\ \ll \left\{k^4T^{4C_0}(T+k)^2\ln^2 kT\right\}^{(1-\sigma)}\ln^5 kT$$

для $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$. Левая часть (1.28) дает в области $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1-$ $-a/\ln kT$

$$\int_{-T}^{T}\sum_\chi |f_z(\sigma+it,\chi)|^2dt \ll \\ \ll \int_{-T}^{T} e^{|t|/T}\left|\frac{s}{s-1}\right|^2\sum_\chi |g_z(\sigma+it,\chi)|^2dt \ll \ln^2 kT\cdot I_z(\sigma),$$

так как $|s-1|^{-2}\ll\ln^2 kT$ в этой области. Таким образом, лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $T\geqslant 2$ и $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$. Положим $\delta=a/\ln kT$, где a положительно и настолько мало, что $\delta<1/4$, т. е. $0<a<1/4\ln 2$. Так как $\delta<\frac{1}{4}$, то применима лемма 1.2. Если результаты из леммы 1.16, леммы 1.14 (нужно взять там $\delta=1$) и леммы 1.13 подставить в лемму 1.2, то для $\frac{1}{2}+2a/\ln kT\leqslant\alpha<1$

получим

$$N(\alpha, T) \ll \ln kT \cdot \left(\left\{k^4 T^{4C_0}(T+k)^2\right\}^{1-\alpha+\delta} \ln^7 kT + 1\right) + \\ + \ln^2 kT \cdot \left\{\max_{\alpha-2\delta \leqslant \sigma \leqslant 1} K_z(\sigma, T) + \max_{1 \leqslant \sigma \leqslant 4} K_z(\sigma, T) + 1\right\} \ll \\ \ll \ln^8 kT \cdot \left\{k^4 T^{4C_0}(T+k)^2\right\}^{1-\alpha+\delta} + \\ + \ln^2 kT \cdot \left(\left\{k^4 T^{4C_0}(T+k)^2\right\}^{1-\alpha+2\delta} + 1\right) \ln^5 kT.$$

Так как $\left\{k^4 T^{4C_0}(T+k)^2\right\}^{\delta} = O(1)$, то отсюда следует, что оценка (1.3) справедлива в области $\frac{1}{2} + 2a/\ln kT \leqslant \alpha < 1$. Для $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2} + 2a/\ln kT$ оценка (1.3) следует из грубой оценки $N(\alpha, T) \leqslant N(T) \ll kT \ln kT$ (7.3.24). Тем самым теорема 1.1 полностью доказана.

О методе, примененном для доказательства теоремы 1.1 (в случае $k=1$, для ζ-функции), см. Карлсон [1], Ландау [11], Титчмарш [1], Ингам [4]. Распространение доказательства на любое k, которое влечет за собой новые трудности, принадлежит Татудзаве [1]. Родосский [2] доказал еще раньше другим методом, восходящим к Linnику [1, 2], в некотором смысле эквивалентную теорему, которая достаточна для применений к распределению простых чисел в арифметических прогрессиях. Именно, он рассмотрел функции $L(s, \chi)$, χ по $\mathrm{mod}\, k$, которые в прямоугольнике

$$1 - \lambda(k)/\ln kT \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t - T_1| \leqslant A \ln^2 kT,$$

$\frac{1}{4} \ln k \geqslant \lambda(k) \geqslant \ln_2 k$, T_1 — любое, A — любое положительное, $T = |T_1| + 2$, имеют по крайней мере один нуль. Он доказал, что число таких функций $\ll \exp\{B\lambda(k) + 5 \ln_2 kT\}$, $B = B(A)$. Это получается по существу также из теоремы 1.1 Татудзавы при $\alpha = 1 - \lambda(k)/\ln kT$. Если мы положим $T_2 = |T_1| + A \ln^2 kT$, $T = |T_1| + 2 \geqslant 2$, то отсюда следует

$$N(\alpha, T_2) \ll \left\{k^4 T_2^{4C_0}(T_2 + k)^2\right\}^{\lambda(k)/\ln kT} \ln^8 kT_2 \ll \exp\{B\lambda(k) + 8 \ln_2 kT\}.$$

В частности, для $T_1 = 0$, $T = 2$ получаем, что число всех нулей всех функций $L(s, \chi)$, χ по $\mathrm{mod}\, k$ в области $\sigma \geqslant 1 - \lambda(k)/\ln k$, $|t| < A \ln^2 k$ будет $\ll \exp\{B\lambda(k) + 8 \ln_2 k\}$ $(k \geqslant 3)$. Исходным пунктом этих теорем были результаты Линника, который вообще впервые исследовал распределение нулей L-функций при переменном k (о „статистике" нулей см. Линник [1, 2], а также, независимо от этого, Туран [3], Зигель [2]).

§ 2. Распределение простых чисел в „коротких" арифметических прогрессиях

Применим теперь результаты § 1 и гл. VIII для того, чтобы улучшить теоремы, найденные в гл. IV.

Теорема 2.1[1]). *Пусть $k \geqslant 1$ — целое, $(l, k) = 1$ и функция $\psi(x, k, l)$ определена как в гл.* IV. *Тогда при*

$$\Delta = \max\left\{\ln k, (\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}}\right\}$$

[1]) Родосский [1, 2], Татудзава [2].

имеет место равенство

$$\psi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} - \frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)} \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O\left(\frac{x}{\varphi(k)} \exp\left\{-c_1 \frac{\ln x}{\Delta}\right\}\right) \quad (x \to \infty) \tag{2.1}$$

равномерно в области

$$1 \leqslant k \leqslant \exp\left(c_2 \frac{\ln x}{\ln_2 x}\right), \tag{2.2}$$

причем β_1 — *возможно существующий действительный исключительный нуль функции* $L(s, \chi_1)$ (χ_1 — *исключительный характер*) *в области*

$$1 - \frac{c_0}{\ln 2k} \leqslant \sigma \leqslant 1. \tag{2.3}$$

При этом c_0 — *константа из теоремы* 4.6.9, *и члены, в которых встречается* β_1, *нужно опускать в случае, если не существует исключительных нулей.*

Доказательство. Предположим сначала, что $k \geqslant 3$. Чтобы доказать равенство (2.1), достаточно принять, что x имеет вид $x = N + \frac{1}{2}$, где $N \geqslant 2$ — целое. По теореме 7.4.6 для $x \geqslant T \geqslant 2$

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n) =$$

$$= E_0 x - E_1 \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{|\gamma| \leqslant T}{}' \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{T} \ln^2 kx + E_1 x^{\frac{1}{4}} \ln kx\right). \tag{2.4}$$

Отсюда в силу (4.7.11) для $k \leqslant x$ следует, что

$$\psi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k)} - \frac{\chi_1(l)}{\varphi(k)} \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \frac{S}{\varphi(k)} + O\left(\frac{x}{T} \ln^2 x + \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\varphi(k)} \ln x\right), \tag{2.5}$$

$$S = \sum_{\chi} \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T \\ \rho = \rho(\chi)}}{}' \bar{\chi}(l) \frac{x^\rho}{\rho},$$

причем $\rho = \rho(\chi)$ пробегает нули $L(s, \chi)$ в области $0 < \sigma < 1$, а штрих обозначает, что β_1 и $1 - \beta_1$ должны быть исключены из суммирования.

Доказательство мы проведем в три этапа, смотря по тому, какой области принадлежит k.

а) Пусть $\ln k \leqslant (\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}}$, т. е.

$$\frac{\ln x}{\Delta} = \frac{\ln^{\frac{4}{7}} x}{\ln_2^{\frac{3}{7}} x}. \tag{2.6}$$

Благодаря соотношению (7.3.24) и теореме 8.6.2 имеем

$$S \ll kT \ln kT \cdot \ln k \cdot x \exp\left(-c_3 \frac{\ln x}{\max\left\{\ln k, (\ln T \ln_2 T)^{\frac{3}{4}}\right\}}\right) \tag{2.7}$$

для $T \geqslant 3$ и подходящего c_3, так как всегда $|1/\rho| \ll \ln k$ для $\alpha \neq \beta_1$, $1-\beta_1$. Положим теперь

$$T = \exp\left\{\frac{1}{2} c_3 \frac{\ln^{\frac{4}{7}} x}{\ln_2^{\frac{3}{7}} x}\right\}. \tag{2.8}$$

Для достаточно большого x обязательно $T \geqslant 3$ и

$$(\ln T \ln_2 T)^{\frac{3}{4}} \leqslant (\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}}, \tag{2.9}$$

если c_3 берется меньше двух, что всегда может быть достигнуто, поскольку теорема 8.6.2 справедлива также с меньшей константой.

Следовательно,

$$\max\{\ln k, (\ln T \ln_2 T)^{\frac{3}{4}}\} \leqslant (\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}},$$

и имеем

$$S \ll x \ln x \cdot \exp M,$$

$$M = (\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}} + \frac{1}{2} c_3 \frac{\ln^{\frac{4}{7}} x}{\ln_2^{\frac{3}{7}} x} - c_3 \frac{\ln x}{(\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}}}, \tag{2.10}$$

т. е.

$$S \ll x \exp\left(-c \frac{\ln^{\frac{4}{7}} x}{\ln_2^{\frac{3}{7}} x}\right). \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что порядок величины $S/\varphi(k)$ не больше порядка величины остаточного члена в (2.1). С другой стороны, так как $\varphi(k) < k < \exp(\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}}$, то

$$\frac{x}{T} \ln^2 x \ll \frac{x}{\varphi(k)} \ln^2 x \cdot \exp\left\{(\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}} - \frac{1}{2} c_3 \frac{\ln^{\frac{4}{7}} x}{\ln_2^{\frac{3}{7}} x}\right\}$$

и, следовательно, $\frac{x}{T} \ln^2 x$ в крайнем случае величина такого же порядка. То же самое, очевидно, имеет место для последнего члена в (2.5) $x^{\frac{1}{4}} \ln x/\varphi(k)$. Тем самым утверждение в случае а) доказано.

б) Пусть

$$(\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}} < \ln k \leqslant \ln^{\frac{1}{2}} x, \quad \frac{\ln x}{\Delta} = \frac{\ln x}{\ln k} \tag{2.12}$$

и x достаточно велико. Положим

$$T = \max\left\{\exp\left(2\frac{\ln^{\frac{3}{4}} k}{\ln_2 k}\right),\ 3\right\}. \tag{2.13}$$

Тогда

$$(\ln T \ln_2 T)^{\frac{3}{4}} \leqslant c \ln k \quad (k \geqslant 3) \tag{2.14}$$

и из теоремы 8.6.2 при некотором $c_4 > 0$ следует, что

$$L(s, \chi) \neq 0, \quad 1 - \frac{c_4}{\ln k} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T, \qquad s \neq \beta_1. \tag{2.15}$$

Если $\rho = \beta + i\gamma$, то имеет место оценка

$$S \ll \ln k \sum_{\chi} \sum_{|\gamma| \leqslant T}' x^{\beta} = x \ln k \sum_{\chi} \sum_{|\gamma| \leqslant T}' x^{\beta - 1}. \tag{2.16}$$

Величину $N(\alpha, T)$ определим так же, как в теореме 1.1 („частное суммирование" относительно σ). Тогда отсюда получаем

$$\sum_{\chi} \sum_{|\gamma| \leqslant T}' x^{\beta-1} = \sum_{\chi} \sum_{|\gamma| \leqslant T}' \left(x^{-1} + \int_0^{\beta} x^{\sigma-1} \ln x \, d\sigma\right) =$$

$$= x^{-1} \sum_{\chi} \sum_{|\gamma| \leqslant T}' \cdot 1 + \int_0^1 \left(\sum_{\chi} \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T \\ \beta > \sigma}}' \cdot 1\right) x^{\sigma-1} \ln x \, d\sigma \ll{}^{1)}$$

$$\ll x^{-1} kT \ln kT + \int_0^{1 - c_4/\ln k} N(\sigma, T) x^{\sigma-1} \ln x \, d\sigma. \tag{2.17}$$

Здесь для σ, удовлетворяющего (2.15), сумма под знаком интеграла — пустая. Теперь теорема 1.1 дает

$$S \ll x \ln k \left(x^{-1} kT \ln kT + \right.$$

$$\left. + \int_0^{1 - c_4/\ln k} \{k^4 T^{4C_0} (T + k)^2 x^{-1}\}^{1-\sigma} \ln^8 kT \ln x \, d\sigma \right). \tag{2.18}$$

Так как $\ln k \leqslant \ln^{\frac{1}{2}} x$, то при $k > k_0$ получаем

$$\ln x \geqslant \ln^2 k \geqslant \ln\{k^4 T^{4C_0} (T + k)^2\},$$

[1]) Сумма в первом члене равна $N(0, T)$ или $N(0, T) - 2$, смотря по тому, существует исключительный нуль или нет.

потому что правая часть есть $\ll \ln^{\frac{3}{4}} k$. Отсюда при $k > k_0$ следует

$$x \geqslant k^4 T^{4C_0} (T+k)^2,$$

и если x достаточно велико, то же самое справедливо при $k \leqslant k_0$ (T определяется равенством (2.13)). Следовательно, в (2.18) подинтегральное выражение при достаточно большом x монотонно возрастает с ростом σ. Поскольку

$$\ln kT \ll \ln^{\frac{4}{3}} k \ll \ln^{\frac{2}{3}} x \quad \left(\ln k \leqslant \ln^{\frac{1}{2}} x\right), \quad \ln_2 x \ll \ln x / \ln k,$$

мы получаем

$$\int_0^{1-c_4/\ln k} \{k^4 T^{4C_0} (T+k)^2 x^{-1}\}^{1-\sigma} \ln^8 kT \ln x \, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \{k^4 T^{4C_0} (T+k)^2 x^{-1}\}^{c_4/\ln k} \ln^8 kT \ln x \ll (T^{c_5} x^{-1})^{c_4/\ln k} \ln^8 kT \ln x \ll$$

$$\ll \exp\left(c_4 c_5 \frac{\ln T}{\ln k} - c_4 \frac{\ln x}{\ln k}\right) \ln^9 x \ll \exp\left(-c \frac{\ln x}{\ln k}\right). \qquad (2.19)$$

Для первого слагаемого из (2.18) имеет место оценка

$$x^{-1} kT \ln kT = \exp\{-\ln x + \ln kT\} \cdot \ln kT \ll$$

$$\ll \exp\left\{-\ln x + c \ln^{\frac{2}{3}} x\right\} \cdot \ln x \ll \exp\left(-c \frac{\ln x}{\ln k}\right).$$

Подставим это и (2.19) в (2.18). Тогда $S \ll x \exp(-c \ln x / \ln k)$ [1]. Так как предполагалось, что $\ln k > (\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}}$ и, следовательно, $\ln x / \ln k \ll \ln^{\frac{4}{3}} k / \ln_2 k$, а, кроме того, $\ln_2 x \ll \ln x / \ln k$, то получаем наконец

$$\varphi(k) \frac{x}{T} \ln^2 x \ll x \exp\left(\ln k - c \frac{\ln^{\frac{4}{3}} k}{\ln_2 k}\right) \cdot \ln^2 x \ll \exp\left(-c \frac{\ln x}{\ln k}\right).$$

Затем, поскольку $\ln k > (\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}}$, имеем

$$x^{\frac{1}{4}} \ln x \ll x \exp(-c \ln x / \ln k);$$

подставляя все это в (2.5), получаем утверждение теоремы в случае б).

---

[1]) Так как $\ln k \leqslant \ln^{\frac{1}{2}} x$, то для любого $\delta > 0$ имеет место также $\ln k \ll \ll \exp(\delta \ln x / \ln k)$.

в) Пусть теперь

$$\ln k > \ln^{\frac{1}{2}} x, \quad \frac{\ln x}{\Delta} = \frac{\ln x}{\ln k}. \tag{2.20}$$

Положим

$$T = k^2. \tag{2.21}$$

Тогда имеет место оценка

$$(\ln T \ln_2 T)^{\frac{3}{4}} = c \ln k,$$

и по теореме 8.6.2 получаем также, как в случае б), свободную от нулей область $1 - c_6/\ln k \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$. Далее

$$k^4 T^{4C_0} (T + k)^2 \leqslant k^{c_7} \qquad (k \geqslant 3). \tag{2.22}$$

При $\ln k \ll \ln x/\ln_2 x$ имеет место оценка $\ln x \geqslant c \ln k \ln_2 k$, следовательно, $x > k^{c_7}$ при $k > k_0$. Нам нужно рассмотреть только случай $k > k_0$, так как при $k \leqslant k_0$ и достаточно большом x случай в) невозможен. Так же, как в случае б), в (2.18) имеем

$$S \ll x \ln k \left(x^{-1} kT \ln kT + \int\limits_0^{1-c_6/\ln k} \left\{ k^4 T^{4C_0} (T+k)^2 x^{-1} \right\}^{1-\sigma} \ln^8 kT \ln x \, d\sigma \right). \tag{2.23}$$

Далее, так же, как в (2.19), получается оценка для интеграла

$$\ll \left(k^{c_7} x^{-1}\right)^{c_6/\ln k} \ln^8 kT \ln x \ll \exp\left\{ c_6 c_7 - c_6 \frac{\ln x}{\ln k} \right\} \cdot \ln^9 x =$$
$$= \exp\left\{ c_6 c_7 - c_6 \frac{\ln x}{\ln k} + 9 \ln_2 x \right\}.$$

С другой стороны, при $\ln k \ll \ln x/\ln_2 x$ имеем

$$x^{-1} kT \ln kT \ll \exp(3 \ln k - \ln x + \ln_2 x) \ll \exp(-c \ln x) \ll$$
$$\ll \exp\left(-c \frac{\ln x}{\ln k}\right).$$

Подставляя все это в (2.23), получаем

$$S \ll x \exp\left(-c_8 \frac{\ln x}{\ln k} + 10 \ln_2 x\right). \tag{2.24}$$

Положим теперь $c_2 = (1/20)\, c_8$. Тогда при $\ln k \leqslant c_2 \ln x/\ln_2 x$ получим неравенство $10 \ln_2 x \leqslant \frac{1}{2} c_8 \ln x/\ln k$, и, следовательно, $S \ll \ll x \exp(-c \ln x/\ln k)$. Наконец, так как $\ln^2 k \geqslant \ln x$, имеем

$$\varphi(k)\, x T^{-1} \ln^2 x \ll x \exp(\ln k - 2 \ln k + 4 \ln_2 k) \ll x \exp(-c \ln k) \ll$$
$$\ll x \exp\left(-c \frac{\ln x}{\ln k}\right).$$

Эта же оценка получается также для члена $x^{\frac{1}{4}} \ln x/\varphi(k)$. Таким образом, утверждение в случае в) доказано, и теорема 2.1 для $k \geqslant 3$ полностью доказана. При $k < 3$ утверждение теоремы 2.1 следует непосредственно, так как, например, $\psi(x) = \psi(x, 1, 0) = \psi(x, 3, 1) + \psi(x, 3, 2) + R$, где

$$R = \sum_{m \leqslant \ln x/\ln 3} \Lambda(3^m) \ll \ln x.$$

По образцу этого доказательства можно доказать, что если $L(s, \chi) \neq 0$ в области $\sigma \geqslant 1 - c/\max(\ln k, \ln^a T)$, $s \neq \beta_1$, $0 < a \leqslant 1$, $T \geqslant 3$, то имеет место теорема 2.1 с $\Delta = \max\{\ln k, (\ln x)^{a/(a+1)}\}$. При $a = \frac{3}{4}$ получается $a(1+a) = 3/7$.

Приведенное выше доказательство теоремы 2.1 см. у Татудзавы [2]. Первое доказательство принадлежит Родосскому [2] (см. также Хазельгров [1]).

Теорема 2.2. *Для $k \leqslant 1$, $(l, k) = 1$ при $x \to \infty$ равномерно по $k \ll \exp(c_{10} \ln x/\ln_2 x)$ имеет место равенство*[1])

$$\pi(x, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{\varphi(k)} + \frac{x}{\varphi(k)} \exp\left\{-c_9 \frac{\ln x}{\Delta}\right\}\right), \quad (2.25)$$

где $\Delta = \max\left\{\ln k, (\ln x \ln_2 x)^{\frac{3}{7}}\right\}$.

Принимая во внимание, что $1/\beta_1 = O(1)$ (в теореме 4.6.9 было $\beta_1 \geqslant \frac{3}{4}$), получаем доказательство этой теоремы из теоремы 2.1 и леммы 4.7.1.

Теорема 2.3. *При $x \to \infty$ имеет место равенство*

$$\pi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k) \ln x}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\} \quad (2.26)$$

равномерно по $k \leqslant \exp(c_{11} \ln x/\ln_2 x)$, причем исключаются лишь те k, которые кратны одному единственному $k^* = k^*(x) > \ln^A x$ (A — любая положительная постоянная); константа в $O(\ )$ может зависеть от A.

Доказательство. Мы используем часть б) теоремы 4.6.9 и положим $z = \exp(c_{12} \ln x/\ln_2 x)$, где c_{12} будет определено ниже. По теореме 4.6.9а при постоянном k исключительный нуль β_1, если он существует, лежит в области $\sigma \geqslant 1 - c_0/\ln 2k$. По теореме 4.6.9б в области $\sigma \geqslant 1 - c_0/\ln 2z$ ($\geqslant 1 - c_0/\ln 2k$) может лежать не больше одной такой точки β_1, в которой обращается в нуль какая-нибудь из L-функций, образованных с модулем $k \leqslant z$. Тогда имеются

[1]) Здесь так же, как и дальше, члены с β_1 нужно опускать, если не существует исключительного (в смысле теоремы 4.6.9а) нуля по модулю k.

одно $k^* = k^*(x) \leqslant z$ и один характер χ^* по $\mathrm{mod}\, k^*$, такие, что $L(\beta_1, \chi)$ обращается в нуль только тогда, когда χ эквивалентен χ^*. Тогда при $k \not\equiv 0 \pmod{k^*}$ имеет место оценка $1 - c_0/\ln 2k \leqslant \beta_1 < < 1 - c_0/\ln 2z$, если существует β_1-нуль L-функции, соответствующей модулю k. Отсюда при $x \to \infty$ следует, что

$$x^{\beta_1} \leqslant x^{1 - c_0/\ln 2z} \ll x \exp\left(-\frac{c_0}{c_{12}} \ln_2 x\right).$$

Кроме того, согласно теореме 2.2, при $\ln k \leqslant \ln z$ имеем

$$\exp\left(-c_9 \frac{\ln x}{\Delta}\right) \ll \exp\left(-\frac{c_9}{c_{12}} \ln_2 x\right) \qquad (x \to \infty).$$

Если выбрать $c_{12} = \frac{1}{2} \min(c_0, c_9)$, то при $k \not\equiv 0 \pmod{k^*}$ получим (2.26). По теореме Зигеля (теорема 4.8.2) при каждом $\varepsilon > 0$ для β_1, соответствующего k^*, имеет место оценка

$$\beta_1 < 1 - c(\varepsilon)/k^{*\varepsilon}.$$

Так как должно быть $\beta_1 \geqslant 1 - c_0/\ln 2z$, то получается $k^* > c_1(\varepsilon) \ln^{1/2\varepsilon} x$, и при $1/2\varepsilon > A$ получаем утверждение теоремы.

§ 3. О разности между последовательными простыми числами

Тот факт, что между x и $x + \varepsilon x$ для любого $\varepsilon > 0$ и $x > x_0(\varepsilon)$ всегда лежит простое число, есть непосредственное следствие теоремы о простых числах, так как

$$\frac{(1+\varepsilon)x}{\ln(1+\varepsilon)x} - \frac{x}{\ln x} = \frac{\varepsilon x}{\ln x}(1 + o(1)).$$

Предполагают, что между n^2, $(n+1)^2$ для целого положительного n всегда лежит простое число. Чтобы это доказать (для достаточно большого n), достаточно показать, что между x и $x + x^{\frac{1}{2}}$ всегда лежит простое число. Это до сих пор не доказано. Но можно показать, что существует такое $\alpha < 1$, что между x и $x + x^\alpha$ всегда лежит простое число. Мы покажем, что это имеет место для всякого $\alpha > (1 + 4C_0)/(2 + 4C_0)$, где C_0 — константа из теоремы 1.1. Существование такого $\alpha < 1$ сначала доказал Хохайзель [1], который вообще первый применил теоремы типа теоремы 1.1 к теории простых чисел. Мы рассмотрим сейчас более общий случай простых чисел в арифметической прогрессии (Татудзава [1])[1]).

Теорема 3.1. *Пусть* $k \geqslant 1$, $(l, k) = 1$ *и* $b = (1 + 4C_0)/(2 + 4C_0)$, *где для* C_0 *выполнено соотношение* (1.2). *Пусть также* $\varepsilon > 0$ — *любое постоянное*,

$$x^{b+\varepsilon} \leqslant y < x \tag{3.1}$$

---

[1]) См. также Чудаков [4].

и a — *такая константа*, $0 < a < 1$, *что в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \omega(T), \quad |t| \leqslant T, \quad T \geqslant 2,$$
$$\omega(T) = \omega(T, k) = \frac{1}{\max(\ln k, \ln^a T)}, \tag{3.2}$$

кроме, быть может, исключительного нуля β_1, *нет нулей никакой функции* $L(s, \chi)$, χ *по* $\operatorname{mod} k$.

Тогда при $x \to \infty$ *имеет место равенство*

$$\psi(x+y, k, l) - \psi(x, k, l) =$$
$$= \frac{y}{\varphi(k)}\left\{1 + O\left(x^{\beta_1 - 1}\right) + O\left(\exp\left\{-c_1 \frac{\ln x}{\Delta}\right\}\right)\right\}, \tag{3.3}$$
$$\Delta = \max(\ln k, \ln^a x), \quad k \leqslant \exp(c_2 \ln x / \ln_2 x),$$
$$c_1 = c_1(\varepsilon, a), \quad c_2 = c_2(\varepsilon, a)$$

(*если* β_1 *не существует, то соответствующий член опускается*).

Доказательство. Для каждого нуля ρ какой-нибудь функции $L(s, \chi)$ имеем

$$\left|\frac{(x+y)^\rho - x^\rho}{\rho}\right| = \left|\int_x^{x+y} \xi^{\rho-1}\, d\xi\right| \leqslant \int_x^{x+y} \xi^{\beta-1}\, d\xi \leqslant yx^{\beta-1}.$$

Поэтому при $x \geqslant T \geqslant 2$, $k \leqslant x$ ($y \leqslant x$), согласно (2.5),

$$\varphi(k)\{\psi(x+y, k, l) - \psi(x, k, l)\} =$$
$$= y\left\{1 + O\left(x^{\beta_1 - 1} + \sum_\chi \sideset{}{'}\sum_{|\gamma| \leqslant T} x^{\beta-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{x}{yT}\varphi(k)\ln^2 x + \frac{x^{\frac{1}{4}} \ln x}{y}\right)\right\}. \tag{3.4}$$

Так же как в формулах (2.16) — (2.19), при

$$k^4 T^{4C_0} (T+k)^2 \leqslant x \tag{3.5}$$

для $x \geqslant T \geqslant 2$ получим соотношение

$$\sum_\chi \sideset{}{'}\sum_{|\gamma| \leqslant T} x^{\beta-1} \ll x^{-1} kT \ln kT +$$
$$+ \int_0^{1-\omega(T)} \left\{k^4 T^{4C_0} (T+k)^2 x^{-1}\right\}^{1-\sigma} \ln^8 kT \ln x\, d\sigma \ll$$
$$\ll x^{-1} kT \ln kT + \left\{k^4 T^{4C_0} (T+k)^2 x^{-1}\right\}^{\omega(T)} \ln^8 kT \ln x. \tag{3.6}$$

Пусть теперь

$$\ln k < \frac{1}{20}\,\varepsilon\,\frac{\ln x}{\ln_2 x} \qquad (0 < \varepsilon < 1). \tag{3.7}$$

Положим

$$T = x^{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{1-\varepsilon}{2+4C_0} < \frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Тогда для достаточно большого $x > x(\varepsilon)$ имеет место оценка

$$k^4 T^{4C_0} (T+k)^2 \leqslant 2k^6 T^{2+4C_0} \leqslant x^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} \tag{3.9}$$

и, следовательно, выполнено (3.5). Теперь, согласно (3.9), при $x \to \infty$

$$x^{-1} kT \ln kT \ll \exp\left\{-(1-\lambda)\ln x + \frac{\varepsilon \ln x}{20 \ln_2 x} + \ln_2 x\right\} \ll$$

$$\ll \exp\left\{-\left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)\ln x\right\},$$

$$\left\{k^4 T^{4C_0} (T+k)^2 x^{-1}\right\}^{\omega(T)} \ln^8 kT \ln x \ll \exp\left\{9 \ln_2 x - \frac{1}{2}\varepsilon\omega(T)\ln x\right\}.$$

Так как $y \geqslant x^{b+\varepsilon} \geqslant x^{1-\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon}$, то

$$\frac{x}{yT}\varphi(k)\ln^2 x \ll \exp\left\{(1-\lambda)\ln x - \ln y + \frac{\varepsilon \ln x}{20 \ln_2 x} + 2\ln_2 x\right\} \ll$$

$$\ll \exp\left(-\frac{1}{4}\varepsilon \ln x\right),$$

и эта же оценка остается верной для $x^{\frac{1}{4}} \ln x/y$. Подставляя все это в (3.4), получаем

$$\varphi(k)\{\psi(x+y,\ k,\ l) - \psi(x,\ k,\ l)\} =$$

$$= y\left\{1 + O\left(x^{\beta_1 - 1} + \exp\left(9\ln_2 x - \frac{1}{2}\varepsilon\omega(T)\ln x\right) + \exp(-c(\varepsilon)\ln x)\right)\right\}. \tag{3.10}$$

Теперь при $\ln k > \ln^a T = \lambda^a \ln^a x$ выполняется оценка

$$9\ln_2 x - \frac{1}{2}\varepsilon\omega(T)\ln x = 9\ln_2 x - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\ln x}{\ln k} \leqslant -\frac{\varepsilon \ln x}{20 \ln k},$$

(так как из (3.7) следует $9\ln_2 x \leqslant 9\varepsilon \ln x/20 \ln k$), а при $\ln k \leqslant \lambda^a \ln^a x$ и для достаточно большого x

$$9\ln_2 x - \frac{1}{2}\varepsilon\omega(T)\ln x = 9\ln_2 x - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\ln x}{\lambda^a \ln^a x} \leqslant -c(\varepsilon)(\ln x)^{1-a}.$$

Подставляя это в (3.10), получаем утверждение (3.3).

По теореме Зигеля для $k \ll \ln^A x$ ($A > 0$, постоянное) при любом малом η имеют место неравенства

$$\beta_1 < 1 - \frac{c(\eta)}{k^\eta} < 1 - \frac{c(\eta)}{\ln^{A\eta} x},$$

и поэтому (для $\eta = a/A$)

$$x^{\beta_1 - 1} \ll \exp\{-c(\ln x)^{1-a}\}.$$

Далее, так как $\ln k \ll A \ln_2 x$, то $\Delta \ll \ln^a x$. Отсюда следует

Теорема 3.2. *Если при предположениях теоремы* 3.1

$$k \ll \ln^A x \quad (A > 0,\ \textit{любое}), \tag{3.11}$$

то при $x \to \infty$ *имеет место соотношение*

$$\psi(x+y,\ k,\ l) - \psi(x,\ k,\ l) = \frac{y}{\varphi(k)}\left\{1 + O\left(\exp\{-c(\ln x)^{1-a}\}\right)\right\}. \tag{3.12}$$

Отсюда, в частности, следует, что между x и $x+y$ всегда имеются простые числа, сравнимые с l по $\bmod k$. При $k = 1$ получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Если* $\alpha > (1+4C_0)/(2+4C_0)$, *то для достаточно большого* x *между* x *и* $x + x^\alpha$ *всегда лежит простое число*[1]).

Согласно 7.3.1, можно взять $C_0 = 1/2$ и тогда $(1+4C_0)/(2+4C_0) = 3/4$. Мы покажем в следующем параграфе, что в качестве C_0 можно взять любое число, большее чем $1/6$, и, следовательно, за α можно взять любое число, большее чем $5/8$. Это результат Ингама [4]. Из него, в частности, следует, что для достаточно большого целого n между n^3 и $(n+1)^3$ всегда лежит простое число. Различными методами удалось еще уменьшить значение C_0 (см. Титчмарш [3] и указанную там литературу). Лучшее указанное до сих пор значение $C_0 = 15/92$, следовательно, $(1+C_0)/(2+4C_0) = 38/61$.

Существует до сих пор недоказанное предположение (гипотеза Линделёфа), что в соотношении (1.2) в качестве C_0 можно взять сколь угодно малое положительное число. Это означало бы, что в теореме 3.3 за α можно брать любое число, большее $1/2$. Впрочем, правильность гипотезы Линделёфа следует из гипотезы Римана. Если последнюю считать верной, то при достаточно большом $A > 0$ между x и $x + Ax^{1/2}\ln x$ ($x > x_0$) всегда лежит по крайней

---

[1]) Чтобы формулировка этой теоремы была корректной, нужно обеспечить существование некоторого $a \in (0, 1)$ в смысле теоремы 3.1. Существование такого a следует из теоремы 8.2.6, но только в том случае, когда теорема 3.1 доказана при более слабом предположении ($\sigma \geqslant 1 - \lambda\omega(T)$ вместо $\sigma \geqslant 1 - \omega(T)$). Однако доказательство теоремы 3.1 проходит при этом предположении так же.

мере одно простое число (Крамер [2], [4]). Сельберг [1] доказал следующее утверждение. Пусть $\Phi(x)$ монотонно возрастает к ∞ и $\Phi(x)/x$ монотонно убывает к 0. Тогда при

$$\underline{\lim}\,\frac{\ln \Phi(x)}{\ln x} > \frac{19}{77} \quad (x \to \infty) \tag{3.13}$$

имеет место асимптотическое равенство

$$\pi(x + \Phi(x)) - \pi(x) \sim \frac{\Phi(x)}{\ln x} \quad (x \to \infty),$$

где исключается множество X действительных чисел асимптотической меры 0 $\left(\text{т. е. если } m(N) \text{ — мера множества } x,\ x \leqslant N,\ x \in X, \text{ то } \lim\limits_{N\to\infty} \frac{m(N)}{N} = 0\right)$.

Если гипотеза Римана верна, то можно заменить (3.13) на $\lim \frac{\Phi(x)}{\ln^2 x} = \infty$ (Сельберг [1]). Крамер [4] предположил, что при достаточно большом x и подходящем $A > 0$ между x и $x + A\ln^2 x$ всегда лежат простые числа. Следовательно, $p_{n+1} - p_n < A \ln^2 p_n$ (см. теорему 5.5.1).

§ 4. Более точные оценки для $\zeta(^1/_2 + it,\ w)$

Рассмотрим функцию $\zeta(s, w)$, определенную в гл. IV. Мы покажем, что для $w \in (0, 1]$

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it,\ w\right) \ll t^{1/6} \ln^{3/2} t. \tag{4.1}$$

Нам нужно сначала несколько лемм.

Лемма 4.1. *Для целого $M > 0$ и любого действительного ξ имеет место оценка*

$$\left|\sum_{m=M}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m\xi}{m}\right| < c_1 \min\left\{1,\ (M\|\xi\|)^{-1}\right\}. \tag{4.2}$$

Мы можем считать, что $0 \leqslant \xi \leqslant {}^1/_2$, так как обе части (4.2) имеют период 1 и являются четными функциями ξ. Для $\xi = 0$ оценка (4.2) очевидна, поэтому пусть $0 < \xi \leqslant {}^1/_2$.

Согласно (6.6.4), при $n > M$ имеем

$$\left|\sum_{M < m \leqslant n} \sin 2\pi m\xi\right| = \left|\operatorname{Im} \sum_{M < m \leqslant n} e(m\xi)\right| \leqslant \frac{1}{2\xi}.$$

С помощью частного суммирования (теорема П.1.2) получим

$$\left|\sum_{M < m \leqslant n} \frac{1}{m} \sin 2\pi m\xi\right| \leqslant \frac{1}{2M\xi}$$

и, следовательно,

$$\left|\sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{m} \sin 2\pi m\xi\right| \leqslant \frac{1}{M} + \frac{1}{2M\xi} \leqslant \frac{1}{M\xi}.$$

При $M \geqslant 1/\xi$ это уже дает утверждение теоремы с константой $c_1 > 1$. При $M < 1/\xi$ можно записать

$$\sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{m} \sin 2\pi m\xi = \left(\sum_{m=1}^{\infty} - \sum_{m<M} \right) \frac{1}{m} \sin 2\pi m\xi.$$

Как известно, для нецелого ξ имеет место разложение в ряд Фурье

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin 2\pi m\xi = -\pi \left(\xi - [\xi] - \frac{1}{2} \right), \tag{4.3}$$

и поэтому $\left| \sum_{m=1}^{\infty} \right| < {}^1/_2\pi$. Далее для $M < 1/\xi$, $0 < \xi \leqslant {}^1/_2$ имеем

$$\left| \sum_{m<M} \right| \leqslant \sum_{m<M} \frac{2\pi m\xi}{m} < 2\pi M\xi < 2\pi.$$

Отсюда следует утверждение теоремы с $c_1 = 3\pi$ в случае $M < 1/\xi$.

Лемма 4.2 [1]). *Пусть $F(\xi)$ — действительная дважды непрерывно дифференцируемая функция в области $a \leqslant \xi \leqslant b$. Если в этой области*

$$F''(\xi) \geqslant \lambda > 0 \tag{4.4}$$

при λ, не зависящем от ξ, то имеет место оценка

$$\left| \int_a^b e^{iF(\xi)}\, d\xi \right| < c_2 \lambda^{-1/2}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Так как, согласно (4.4), функция $F'(\xi)$ монотонно возрастает, то интервал $[a, b]$ распадается на 2 подинтервала $[a, u]$ и $[u, b]$, в которых $F'(\xi) \leqslant 0$ и $F'(\xi) \geqslant 0$ (естественно, один из интервалов может отсутствовать). Рассмотрим сначала интервал $[u, b]$. Для $b - u \leqslant 2\lambda^{-1/2}$ имеет место очевидная оценка

$$\left| \int_a^b e^{iF(\xi)}\, d\xi \right| \leqslant 2\lambda^{-1/2}.$$

При $b - u > 2\lambda^{-1/2}$ имеем сначала

$$\left| \int_u^{u+2\lambda^{-1/2}} e^{iF(\xi)}\, d\xi \right| \leqslant 2\lambda^{-1/2}.$$

[1]) См. ван дер Корпут [3].

По второй теореме о среднем (примененной к действительной и мнимой части отдельно) получим

$$\int\limits_{u+2\lambda^{-1/2}}^{b} e^{iF(\xi)}\,d\xi = \int\limits_{u+2\lambda^{-1/2}}^{b} \frac{de^{iF(\xi)}}{iF'(\xi)} =$$

$$= \frac{1}{F'(u+2\lambda^{-1/2})}\left\{-i\int\limits_{u+2\lambda^{-1/2}}^{\xi_1} d\cos F(\xi) + \int\limits_{u+2\lambda^{-1/2}}^{\xi_2} d\sin F(\xi)\right\}$$

$\left(u+2\lambda^{-1/2}\leqslant \xi_1, \xi_2 \leqslant b\right)$. Так как $F'(u)\geqslant 0$, из (4.4) и теоремы о среднем следует

$$F'\left(u+2\lambda^{-1/2}\right)\geqslant F'\left(u+2\lambda^{-1/2}\right)-F'(u)=2\lambda^{-1/2}F''(\xi_0)\geqslant 2\lambda^{1/2}$$
$$\left(u\leqslant \xi_0\leqslant u+2\lambda^{-1/2}\right).$$

Подставляя это в предыдущее соотношение, получаем

$$\left|\int\limits_{u+2\lambda^{-1/2}}^{b} e^{iF(\xi)}\,d\xi\right| \leqslant \frac{4}{2\lambda^{1/2}} = \frac{2}{\lambda^{1/2}}.$$

Для интеграла по отрезку $[a, u]$ получается та же оценка, потому что, полагая $\xi=-\eta$, $F(-\eta)=F_1(\eta)$, получаем в области $-u\leqslant\eta\leqslant -a$ $F_1'(\eta)\geqslant 0$, $F_1''(\eta)\geqslant\lambda$. Таким образом, утверждение теоремы доказано, $c_2=8$.

Теорема 4.1. *При* $N_1=\left[t^{2/3}/\ln t\right]$, $0<w\leqslant 1$ *имеет место оценка*

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N_1}(n+w)^{-(1/2+it)}\ll t^{1/6}\ln^{3/2} t \quad (t\to\infty). \tag{4.6}$$

Доказательство. Разделим сумму на $\ll \ln N_1$ частичных сумм типа, указанного в лемме 8.3.1. Положим в этой лемме $k=2$, $K=2$, $\sigma=1/2$, тогда $1\leqslant N\leqslant N_1$, $\ln N_1\leqslant \ln t$ и

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N_1}\ll \ln t\left(t^{1/6}+N_1^{1/2}\ln^{1/2}N_1 t^{-1/6}\right)\ln^{1/2} t.$$

Подставляя в эту оценку значение для N_1, получаем (4.6).

Теорема 4.2. *При* $t\to\infty$ *для* $0<w\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it, w\right)-w^{-s}\ll t^{1/6}\ln^{3/2} t, \tag{4.7}$$

причем константа в $\ll$ *не зависит от* w.

Доказательство. Пусть $t\geqslant 3$ и настолько велико, что $N_1=\left[t^{2/3}/\ln t\right]\geqslant 2$. Согласно (4.5.8), при $\sigma>0$ имеет место равенство

$$\zeta(s,w)-w^{-s}=\sum_{n\leqslant N_1}(n+w)^{-s}+\frac{(N_1+w)^{1-s}}{s-1}-s\int_{N_1}^{\infty}(\xi-[\xi])\,\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}.$$

По теореме 4.1 при $\sigma=1/2$ и $t\to\infty$ первое слагаемое в правой части имеет порядок $\ll t^{1/6}\ln^{3/2}t$, а второе слагаемое имеет еще меньший порядок $\ll N_1^{1/2}t^{-1}$ $(t\to\infty)$.

Далее имеем

$$s\int_{N_1}^{\infty}(\xi-[\xi])\,\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}=s\int_{N_1}^{\infty}\left(\xi-[\xi]-\frac{1}{2}\right)\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}+\frac{1}{2}(N_1+w)^{-s},$$

и так как $(N_1+w)^{-s}\ll N_1^{-1/2}$ при $\sigma=1/2$, то при $t\to\infty$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\,w\right)-w^{-s}=s\int_{N_1}^{\infty}\left(\xi-[\xi]-\frac{1}{2}\right)\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}+O\left(t^{1/6}\ln^{3/2}t\right). \tag{4.8}$$

Для оценки интеграла применим леммы 4.1 и 4.2. Согласно (4.3), при $M>1$ выполняется равенство

$$-\pi s\int_{N_1}^{\infty}\left(\xi-[\xi]-\frac{1}{2}\right)\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}=$$
$$=s\int_{N_1}^{\infty}\left\{\sum_{m=1}^{M-1}\frac{1}{m}\sin 2\pi m\xi+R_M(\xi)\right\}\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}. \tag{4.9}$$

Положим теперь $M=[t]+1$. По лемме 4.1 при $\sigma=1/2$

$$\int_{N_1}^{\infty}R_M(\xi)\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}\ll\int_{N_1}^{\infty}\min\left(1,\,\frac{1}{t\|\xi\|}\right)\frac{d\xi}{\xi^{3/2}}\ll$$
$$\ll\sum_{m=N_1}^{\infty}m^{-3/2}\int_{m}^{m+1}\min\left(1,\,\frac{1}{t\|\xi\|}\right)d\xi;$$

$$\int_{m}^{m+1}\min\left(1,\,\frac{1}{t\|\xi\|}\right)d\xi\ll\int_{0}^{1/2}\min\left(1,\,\frac{1}{t\xi}\right)d\xi<\int_{0}^{1/t}d\xi+\int_{1/t}^{1}\frac{d\xi}{t\xi}\ll\frac{\ln t}{t}.$$

Следовательно, применяя (П.1.12), получаем

$$s\int_{N_1}^{\infty}R_M(\xi)\frac{d\xi}{(\xi+w)^{s+1}}\ll t\sum_{m=N_1}^{\infty}m^{-3/2}\frac{\ln t}{t}\ll\frac{\ln t}{N_1^{1/2}}\ll t^{-1/3}\ln^{3/2}t\quad(t\to\infty). \tag{4.10}$$

Положим теперь

$$F(\xi) = -t\ln(\xi + w) \pm 2\pi m\xi.$$

Тогда

$$F''(\xi) = \frac{t}{(\xi + w)^2} \geqslant \frac{t}{4\xi^2} \quad (\xi \geqslant 1)$$

и лемма 4.2 при $X > N_1$ дает

$$\int_{N_1}^{X} \exp(-i\{t\ln(\xi + w) \pm 2\pi m\xi\})\, d\xi \ll \left(\frac{4X^2}{t}\right)^{1/2} \ll \frac{X}{t^{1/2}}.$$

Записывая это отдельно для знака „плюс“ и для знака „минус“ и вычитая, получаем

$$G(X) = \int_{N_1}^{X} \frac{\sin 2\pi m\xi}{(\xi + w)^{it}}\, d\xi \ll \frac{X}{t^{1/2}} \quad (X > N_1). \tag{4.11}$$

Интегрируя по частям, при $\sigma = 1/2$ получаем

$$\int_{N_1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m\xi}{(\xi + w)^{s+1}}\, d\xi = \int_{N_1}^{\infty} \frac{G'(\xi)\, d\xi}{(\xi + w)^{\sigma+1}} = \frac{G(\xi)}{(\xi + w)^{\sigma+1}}\Bigg|_{N_1}^{\infty} +$$

$$+ \frac{3}{2}\int_{N_1}^{\infty} \frac{G(\xi)\, d\xi}{(\xi + w)^{\sigma+2}} \ll \int_{N_1}^{\infty} \frac{|G(\xi)|\, d\xi}{(\xi + w)^{5/2}};$$

здесь, согласно (4.11), $G(X)\, X^{-3/2} \to 0$ при $X \to \infty$ и $G(N_1) = 0$. Отсюда и из (4.11) следует

$$\int_{N_1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m\xi}{(\xi + w)^{s+1}}\, d\xi \ll t^{-1/2}\int_{N_1}^{\infty} \frac{\xi}{\xi^{5/2}}\, d\xi \ll t^{-5/6}\ln^{1/2} t,$$

так как $N_1 = [t^{2/3}/\ln t]$. Наконец, отсюда следует при $M = [t] + 1$

$$s\sum_{1 \leqslant m < M} \frac{1}{m}\int_{N_1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m\xi}{(\xi + w)^{s+1}}\, d\xi \ll t^{1/6}\ln^{1/2} t \sum_{m \leqslant [t]} \frac{1}{m} \ll t^{1/6}\ln^{3/2} t.$$

Подставляя эту оценку и оценку (4.10) в (4.9) и (4.8), получаем утверждение теоремы.

Так как

$$L(s, \chi) = k^{-s}\sum_{0 < l \leqslant k} \chi(l)\,\zeta\!\left(s, \frac{l}{k}\right),$$

то при $s = 1/2 + it$ из доказанной теоремы непосредственно следует, что

$$L\left(\frac{1}{2}+it, \chi\right) \ll k^{-1/2} \sum_{0<l\leqslant k} \left\{\left(\frac{l}{k}\right)^{-1/2} + O\left(t^{1/6}\ln^{3/2} t\right)\right\} \ll$$

$$\ll \sum_{0<l\leqslant k} l^{-1/2} + k^{1/2}t^{1/6}\ln^{3/2} t \ll k^{1/2}t^{1/6}\ln^{3/2} t. \qquad (4.12)$$

Отсюда видно, что в оценке (1.2) в качестве C_0 можно взять любую константу $> 1/6$.

Улучшение этого результата возможно получить методами ван дер Корпута (см. Титчмарш [3], гл. V). Кроме теорем, изложенных в этой главе, имеется другое важное применение теоремы 1.1, для которого достаточна, вообще говоря, более слабая форма этой теоремы. Это — изложение проблемы Гольдбаха, данное Линником [4] и Чудаковым [3]. При этом исходят из первоначальной идеи Харди и Литлвуда. Харди и Литлвуд [2] рассматривают функцию

$$f(z) = \sum_p \ln p \cdot z^p \qquad (|z| < 1),$$

которая заменяет сумму $S_N(\xi)$, рассмотренную в гл. VI. Если положить $R(N) = \sum\limits_{p_1+p_2+p_3=N} \ln p_1 \ln p_2 \ln p_3$, то из интегральной теоремы Коши следует, что

$$R(N) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f^3(z)\, z^{-(N+1)}\, dz,$$

где C — окружность $|z| = R$, $R < 1$. Для $R(N)$ можно вывести асимптотические формулы, аналогичные формулам, доказанным в гл. VI для $r(N) = \sum\limits_{p_1+p_2+p_3=N} \cdot 1$.

Вместо разложения интервала $[0, 1)$ или $[-1/\tau, 1-1/\tau)$ в обозначениях гл. VI здесь разлагается окружность $|z| = R$ на окрестности точек $\arg z = a/q$, $0 < a \leqslant q$, $(a, q) = 1$. При этом R в зависимости от N выбирается достаточно близким к 1. Исследование $f(z)$ по существу равнозначно исследованию функции $f^*(z) = \sum\limits_n \Lambda(n) z^n$. Для $z = \operatorname{Re}(a/q+\xi) = z'e(a/q)$ имеем

$$f^*(z) =$$

$$= \sum_n \Lambda(n)\, e\left(n\frac{a}{q}\right) z'^n = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \sum_{l=1}^{q} e\left(\frac{l}{q}\right) \overline{\chi}(la^{-1}) \sum_{m=2}^{\infty} \chi(m)\Lambda(m)\, z'^m,$$

где a^{-1} должно лежать в классе вычетов по $\operatorname{mod} q$, обратном к классу a. С помощью преобразования Меллина (лемма П.3.1) получаем

$$\psi^*(z', \chi) =$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \chi(m)\Lambda(m)\, z'^m = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\ln\frac{1}{z'}\right)^{-s} \Gamma(s) \sum_m \frac{\chi(m)\Lambda(m)}{m^s}\, ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\ln\frac{1}{z'}\right)^{-s} \Gamma(s) \frac{L'}{L}(s, \chi)\, ds. \qquad (4.13)$$

Поэтому для изучения функции $f^*(z)$ можно использовать теорию L-функций. Харди и Литлвуд сумели таким путем доказать теоремы из гл. VI при предположении правильности гипотезы Римана для $L(s, \chi)$. Линник и Чудаков избежали этого недоказанного предположения с помощью доказанной к тому времени теоремы Зигеля (теорема 4.8.2). С помощью этой теоремы можно оценить интеграл в правой части (4.13) для малого q (при этом сначала сдвигается влево путь интегрирования). Для большого q (которое в гл. VI доставило наибольшие трудности) можно использовать явную формулу и теорему 1.1. А именно при $x = \ln(1/z')$ имеем

$$\psi^*(z', \chi) = E_0 x^{-1} - \sum_{\rho} \Gamma(\rho)\, x^{-\rho} + R(x, \chi),$$

где для остаточного члена $R(x, \chi)$ существует простая оценка. Доказательство аналогично доказательствам теорем из гл. VII. Затем так же, как в § 2 и 3 применяется теорема 1.1. О связи между тригонометрическими суммами и нулями ζ-функции см. также Туран [4].

Задачи к главе IX

1. Покажите, что при целом $m \geqslant 1$

$$\sum_{p \leqslant x} v^m(p-1) = \frac{x}{\ln x} \ln_2^m x\,(1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),$$

где $v(n)$ — число различных простых делителей n. Например, в случае $m = 1$ эта сумма равна $\sum_{q \leqslant x} \pi(x, q, 1)$, q — простое. Для оценки $\pi(x, q, 1)$ при малых q примените теорему 2.3 для исключительных q_1, которые могут появиться, и для больших q нужно использовать соответственно теоремы 2.4.1 и 2.4.6 [1]).

2. С помощью задачи 1 докажите теорему 5.7.2.

3. Докажите, что существует бесконечно много чисел n, которые имеют больше, чем $\exp\left(c \ln n / \ln_2^2 n\right)$ делителей вида $p - 1$. Рассмотрите решение сравнения $(p-1)\, m \equiv 0 \pmod{A}$

$$A = \prod_{\substack{p < c \ln x / \ln_2 x \\ p \neq p_0}} p,$$

где $p \leqslant x$, $m \leqslant x$, p_0 — простое число, входящее в исключительный модуль. Проведите рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 5.3.2.

4. Имеется бесконечно много чисел n, которые больше, чем $\exp\left(c \ln n / \ln_2^2 n\right)$ способами представимы в виде $n = (p-1)(q-1)$ (p, q — простые).

5. Укажите асимптотические формулы для количества членов арифметической прогрессии, свободных от квадратов.

[1]) Доказательство без подробностей у Хазельгрова [1].

Глава X

НАИМЕНЬШЕЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

§ 1. Введение

В гл. IV было доказано, что в любой арифметической прогрессии $l, l+k, l+2k, \ldots$, если $(k, l)=1$, $l<k$, то существует бесконечно много простых чисел. Обозначим через $p_1(k, l)$ наименьшее простое число этой прогрессии. В этой главе мы докажем, что существует такая не зависящая от k константа C, что

$$p_1(k, l) < k^C \tag{1.1}$$

для всех $k \geqslant 2$ и любого l, $(l, k)=1$, $l<k$. В гл. VII, § 7, мы доказали это при недоказанном предположении о том, что имеется прямоугольник $1-\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant A$ (с положительными, не зависящими от k константами α, A), в котором нет ни одного нуля ни одной функции $L(s, \chi)$, χ по $\bmod k$. Ю. В. Линнику [3] удалось доказать оценку (1.1) без этого, до сих пор недоказанного предположения. Доказательство Линника очень сложно. Мы приводим здесь более простое доказательство К. А. Родосского [3] (однако все еще довольно сложное). Это доказательство использует явную формулу из § 6 гл. VII. Уже в § 7 гл. VII мы видели, что для наименьшего простого числа в арифметической прогрессии особенно важны нули L-функций в окрестности точки $s=1$.

Оказывается, что исследования „частоты“ нулей $L(s, \chi)$ вблизи точки $s=1$ особенно трудно. В теореме 9.1.1 оценка в правой части (9.1.3) уже не убывает достаточно быстро, если α подходит близко к единице.

Также для $T=2$, $\alpha=1$ эта оценка не меньше чем $c \ln^8 k$, хотя в области $\sigma \geqslant 1$, $|t| \leqslant 2$ вообще нет нулей $L(s, \chi)$. Если бы мы имели в распоряжении вместо (9.1.3) оценку вида $N(\alpha, T) \ll \ll \{(kT)^C\}^{1-\alpha}$, то для $T=2$ было бы $N(\alpha, T) \ll k^{C(1-\alpha)}$, что при $\alpha > 1 - c \ln_2 k / \ln k$ $(k > k_0)$ лучше чем (9.1.3).

Доказательство оценки (1.1) основано на двух основных теоремах (см. ниже теоремы 2.1 и 3.1). Первая из этих теорем позволяет высказать довольно точное утверждение о распределении частоты нулей всех функций $L(s, \chi)$ в области $\sigma > \alpha > 1 - c \ln_2 k / \ln k$. Оказывается, что здесь для оценки некоторых сумм нужен метод решета из гл. II, в то время как для оценки сумм, появляющихся в леммах 9.1.4 — 9.1.10, он был не нужен. Поэтому Линник называет область

$\sigma > 1 - c \ln_2 k/\ln k$ „областью Вигго Бруна“. Вторая основная теорема дает точное утверждение о положении исключительного нуля, который может появиться. Согласно этой теореме, чем ближе к точке $s=1$ лежит исключительный нуль, тем большую окрестность точки $s=1$, в которой нет никаких других нулей L-функций, образованных с характерами по $\bmod k$, можно указать.

Доказательство требует многочисленных лемм, и примененные при этом методы интересны также сами по себе.

§ 2. Плотность нулей L-функций в окрестности точки $s=1$

Цель этого параграфа — доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть $k \geqslant e^{20}$ и $\lambda = \lambda(k)$ — действительная функция от k, удовлетворяющая неравенствам*[1]

$$2 \leqslant \lambda(k) \leqslant \frac{1}{10} \ln k. \tag{2.1}$$

Обозначим через $Q = Q(\lambda(k))$ число L-функций, образованных характерами χ по $\bmod k$, которые в прямоугольнике R

$$1 - \frac{\lambda(k)}{\ln k} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant \frac{e^{\lambda(k)}}{\ln k} \tag{R}$$

имеют по крайней мере один нуль. Тогда имеет место оценка

$$Q(\lambda(k)) < e^{c\lambda(k)} \tag{2.2}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от k.

Прежде чем мы выведем леммы, необходимые для доказательства, заметим, что при достаточно большом c для $\lambda(k) > c \ln_2 k$ теорема 2.1 следует из теоремы 9.1.1. Действительно, при достаточно большом c имеем неравенства $1 - \lambda(k)/\ln k < 1 - c \ln_2 k/\ln k$, $e^{\lambda(k)}/\ln k \geqslant 2$ и

$$\left\{ k^4 \left(\frac{e^{\lambda(k)}}{\ln k}\right)^{4C_0} \left(\frac{e^{\lambda(k)}}{\ln k} + k\right)^2 \right\}^{\lambda(k)/\ln k} \ln^8 \left(k \frac{e^{\lambda(k)}}{\ln k}\right) < e^{c\lambda(k)}.$$

В последующем всегда предполагается, что $k \geqslant e^{20}$ и $\rho = \rho(\chi)$ пробегает (как в § 6 гл. VII) все нули $L(s, \chi)$ в области $0 \leqslant \sigma < 1$ (а не только нули в области $0 < \sigma < 1$).

Лемма 2.1. *Обозначим через $G(t, r)$ круг*

$$|s - (1 + it)| \leqslant r, \tag{2.3}$$

---

[1] Мы предполагаем $k \geqslant e^{20}$ для того, чтобы это соотношение было возможным.

а через $Q(t, r) = Q(t, r, \chi)$ — число нулей какой-нибудь функции $L(s, \chi)$ в этом круге. Для

$$\frac{1}{\ln k} \leqslant r \leqslant 2 \tag{2.4}$$

при подходящем c_1 имеем

$$Q(t, r) < c_1 r \ln k(|t| + 2). \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть сначала $r \leqslant 1$. Из теоремы 7.4.1 для $\sigma > 0$ следует

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{E_0}{s-1} + \sum_{|\gamma - t| \leqslant 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln k(|t| + 2)), \tag{2.6}$$

так как при $\sigma > 0$ член $a/(s+1)$ содержится в остаточном члене (здесь $\rho = \rho(\chi) = \beta + i\gamma$ пробегает нули $L(s, \chi)$ в области $0 \leqslant \sigma < 1$ и сумма содержит, в частности, член ν_0/s).

Положим $s = 1 + r + it$ и рассмотрим действительную часть этой формулы. Для $\sigma > 1$ имеем

$$\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(s, \chi) \leqslant \left|\frac{L'}{L}(s, \chi)\right| \leqslant \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma - 1} \quad (\sigma > 1). \tag{2.7}$$

Если $s = 1 + r + it$, то $\operatorname{Re}\{1/(s - \rho)\} > 0$. Следовательно, для $r \leqslant 1$

$$\operatorname{Re}\sum_{|\gamma - t| \leqslant 1} \frac{1}{s-\rho} \geqslant \operatorname{Re}\sum_{\rho \in G(t, r)} \frac{1}{s-\rho} \geqslant \frac{Q(t, r)}{4r}. \tag{2.8}$$

В силу $r \leqslant 1$ для каждого $\rho = \beta + i\gamma \in G(t, r)$ имеем $|\gamma - t| \leqslant 1$. Поэтому

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho} = \frac{\operatorname{Re}(s-\rho)}{|s-\rho|^2} \geqslant \frac{r}{(2r)^2} = \frac{1}{4r}. \tag{2.9}$$

Если подставить это в (2.6), то вместе с (2.7) получим

$$\frac{Q(t, r)}{4r} \ll \frac{1}{r} + O(\ln k(|t| + 2)),$$

так как $E_0/(s-1) \ll 1/(\sigma - 1)$, $\sigma = 1 + r$. Для $r \geqslant 1/\ln k$ правая часть имеет порядок $\ll \ln k(|t| + 2)$, следовательно (2.5) доказано для $r \leqslant 1$. Для $1 < r \leqslant 2$ оценка (2.5) следует из теоремы 7.3.3.

Если бы утверждение леммы 2.1 можно было доказать для нулей всех $L(s, \chi)$ вместе, а не только для нулей одной-единственной $L(s, \chi)$, то теорему 2.1 можно было бы получить непосредственно, так как область (R) можно покрыть кругами радиуса $\ll \lambda(k)/\ln k$ в количестве

$$\ll \frac{e^{\lambda(k)}/\ln k}{\lambda(k)/\ln k} \ll e^{\lambda(k)}.$$

Отсюда следовало бы

$$Q(\lambda(k)) \ll e^{\lambda(k)}\left(\frac{\lambda(k)}{\ln k}\ln\frac{e^{\lambda(k)}}{\ln k}\right) \ll e^{2\lambda(k)}.$$

Обозначим теперь для краткости

$$\delta = \delta(k) = \frac{\lambda(k)}{\ln k}, \quad \tau = \tau(k) = \frac{e^{\lambda(k)}}{\ln k}, \tag{2.10}$$

где

$$\frac{2}{\ln k} \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{10}, \ \frac{e^2}{\ln k} \leqslant \tau \leqslant \frac{k^{1/10}}{\ln k}.$$

Предположим, что некоторая L-функция $L(s, \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, образованная характером по $\operatorname{mod} k$, имеет нуль

$$\rho_0 = \rho_0(\chi) = \beta_0 + i\gamma_0, \quad \beta_0 = \beta_0(\chi), \quad \gamma_0 = \gamma_0(\chi) \tag{2.11}$$

в прямоугольнике R

$$1 - \delta \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant \tau.$$

Следующие леммы, вплоть до леммы 2.9 включительно, излагают следствия из этого предположения.

Лемма 2.2. *Пусть $K > 2$ — произвольная константа, тогда для каждого $\rho_0 \in R$ существует нуль*

$$\rho' = \rho'(\chi) = \beta' + i\gamma' \tag{2.12}$$

со следующими свойствами:

$$\beta' \geqslant \beta_0, \quad |\gamma_0 - \gamma'| \leqslant 5K\lambda\tau \quad (\lambda = \lambda(k)), \tag{2.13}$$

$L(s, \chi) \neq 0$ *в каждом прямоугольнике* $R_0 = R_0(\chi)$, (2.14)

$$\beta' + \frac{1}{K\ln k} \leqslant \sigma \leqslant 2, \quad |t - \gamma'| \leqslant 5\tau \tag{R_0}$$

(*может случиться, что* $\rho' = \rho_0$).

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник $\beta_0 + 1/K\ln k \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|t - \gamma_0| \leqslant 5\tau$. Если там $L(s, \chi) \neq 0$, то утверждение доказано и $\rho' = \rho_0$. Но если $L(s, \chi)$ в этом прямоугольнике имеет нуль $\rho_0' = \beta_0' + i\gamma_0'$, то мы рассмотрим прямоугольник $\beta_0' + 1/K\ln k \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|t - \gamma_0'| \leqslant 5\tau$. Если в новом прямоугольнике нет нулей $L(s, \chi)$, то утверждение доказано и $\rho' = \rho_0'$. Но если там лежит нуль $\rho_0'' = \beta_0'' + i\gamma_0''$, то мы рассмотрим прямоугольник $\beta_0'' + 1/K\ln k \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|t - \gamma_0''| \leqslant 5\tau$. При этом обязательно имеют место неравенства

$$\beta_0'' \geqslant \beta_0' + 1/K\ln k \geqslant \beta_0 + 2/K\ln k$$

$$|\gamma_0'' - \gamma_0| \leqslant |\gamma_0'' - \gamma_0'| + |\gamma_0' - \gamma_0| \leqslant 2\cdot 5\tau.$$

Если в третьем прямоугольнике $L(s, \chi) \neq 0$, мы положим $\rho' = \rho_0''$, а если это не так, то продолжим этот процесс. После m шагов получим $\beta_0^{(m)} \geqslant \beta_0 + m/K \ln k$, и поэтому процесс закончится, если $\beta_0 + (m-1)/K \ln k < 1 \leqslant \beta_0 + m/K \ln k$, поскольку $K > 2$, $k \geqslant e^{20}$ имеем $\beta_0 + m/K \ln k \leqslant 2$. Следовательно, из-за того, что $\beta_0 \geqslant 1 - \delta$, процесс оборвется самое большее после

$$\left[\frac{\delta}{1/K \ln k}\right] < \delta K \ln k = K\lambda$$

шагов. После m шагов выполняется неравенство $|\gamma_0^{(m)} - \gamma_0| \leqslant m 5\tau$. Поэтому во всяком случае $|\gamma' - \gamma_0| \leqslant K\lambda \cdot 5\tau$, чем лемма 2.2 доказана.

Нуль вида ρ' назван Линником „благоприятным“ (т. е. благоприятно расположенным) нулем, так как условие (2.14) делает возможным рассуждения, которые нужно провести в следующей лемме.

Лемма 2.3. *Пусть*

$$\sigma_1 = \sigma_1(\chi) = \beta' + \frac{2}{K \ln k} \tag{2.15}$$

и прямоугольник $R_1 = R_1(\chi)$ задан неравенствами

$$\sigma_1 - \frac{1}{2K \ln k} \leqslant \sigma \leqslant 2, \quad |t - \gamma'| \leqslant 4\tau. \tag{R_1}$$

Тогда для $s \in R_1$ имеет место оценка[1])

$$\left|\frac{L'}{L}(s, \chi)\right| < c_2 K\lambda \ln Kk. \tag{2.16}$$

Доказательство. Для $\sigma \geqslant 1 + 1/\ln k$ утверждение леммы следует из (2.7), так как $K \geqslant 2$, $\lambda \geqslant 2$. Рассмотрим случай $\sigma < 1 + 1/\ln k$. Пусть $s' = 1 + \delta + it$, причем $\delta = \delta(k)$ задано с помощью (2.10). Из (2.6) для $s \in R_1$ получим

$$\left|\frac{L'}{L}(s, \chi) - \frac{L'}{L}(s', \chi)\right| \leqslant \sum_{|\gamma - t| \leqslant 1} \left|\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{s'-\rho}\right| + O(K \ln k), \tag{2.17}$$

так как из $\chi \neq \chi_0$, $E_0 = 0$ и из $|\gamma_0| \leqslant \tau$, $|\gamma' - \gamma_0| \leqslant 5K\lambda\tau$, $|t - \gamma'| \leqslant 4\tau$ для $s \in R_1$ следует оценка

$$\ln k(|t| + 2) \ll \ln\{k(\tau + 5K\lambda\tau + 4\tau + 2)\} \ll K \ln k$$
$$(K > 2, \ k \geqslant e^{20}).$$

Положим еще $s_0 = 1 + it$. Тогда для $s \in R_1$, $\sigma < 1 + 1/\ln k$ имеем

$$\left|\frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{s'-\rho}\right| = \frac{|s' - s|}{|s-\rho|\,|s'-\rho|} \leqslant \frac{2\delta}{|s-\rho|\,|s'-\rho|}, \tag{2.18}$$

---

[1]) Естественно, константы $c_1, c_2, \ldots$ и константы в $O(\ )$ и в $\ll$ теперь не зависят от K, k, $\lambda(k)$, $\tau(k)$, ...

так как $s'-s=1+\delta-\sigma$ и $0<1+\delta-\sigma\leqslant 2\delta$. (Из $\sigma<1+1/\ln k$ и $\sigma\geqslant\sigma_1-1/2K\ln k=\beta'+3/2K\ln k>\beta_0\geqslant 1-\delta$ следует $1-\sigma>-1/\ln k>-\delta$ и $1-\sigma<\delta$ для $s\in R_1$.)

Пусть теперь $\rho=\beta+i\gamma$ — нуль, для которого $|\rho-s_0|\leqslant 2\delta$.

Если $|\rho-s_0|\leqslant 2\delta$, то для мнимой части γ нуля ρ справедливо неравенство $|\gamma-t|\leqslant 2\delta$, а следовательно, для $s\in R_1$

$$|\gamma-\gamma'|\leqslant|\gamma-t|+|t-\gamma'|\leqslant 2\delta+4\tau\leqslant 5\tau,$$

так как из $\lambda(k)\geqslant 2$ вытекает $2\lambda(k)\leqslant e^{\lambda(k)}$ и поэтому $2\delta\leqslant\tau$. В прямоугольнике

$$\beta'+1/K\ln k\leqslant\sigma\leqslant 2,\quad |t-\gamma'|\leqslant 5\tau$$

по лемме 2.2 нет нулей ρ и значит $\operatorname{Re}\rho<\beta'+1/K\ln k$ для $|\rho-s_0|\leqslant 2\delta$. Таким образом, для $s\in R_1$ получаем

$$|s-\rho|\geqslant\operatorname{Re}(s-\rho)>\sigma_1-\frac{1}{2K\ln k}-\left(\beta'+\frac{1}{K\ln k}\right)=\frac{1}{2K\ln k}.$$

Аналогично из $\operatorname{Re}\rho<1$ вытекает

$$|s'-\rho|\geqslant\operatorname{Re}(s'-\rho)>\delta.$$

По лемме 2.1 имеет место оценка

$$\sum_{\rho,\ |\rho-s_0|\leqslant 2\delta}\cdot 1\leqslant c_1 2\delta\ln k(|t|+2)\ll\delta\ln Kk,$$

поэтому из (2.18) следует

$$\sum_{\rho,\ |\rho-s_0|\leqslant 2\delta}\left|\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{s'-\rho}\right|\ll\delta\ln k\,\frac{2\delta}{(1/2K\ln k)\,\delta}\ll K\lambda\ln Kk. \tag{2.19}$$

Исследуем теперь суммы по таким нулям $\rho=\beta+i\gamma$, для которых $|\rho-s_0|>2\delta$, $|\gamma-t|\leqslant 1$ (так как $2\delta\leqslant{}^2/_{10}<1$, то для $|\rho-s_0|\leqslant 2\delta$ всегда $|\gamma-t|\leqslant 1$). В этом случае

$$|s'-\rho|\geqslant|\rho-s_0|-|s_0-s'|>\frac{1}{2}|s_0-\rho|,$$

поскольку $|s_0-s'|=\delta<\frac{1}{2}|\rho-s_0|$. Далее для $s\in R_1$, $\sigma<1+1/\ln k$ имеем $|s-\rho|\geqslant|\rho-s_0|-|s-s_0|>\frac{1}{2}|s_0-\rho|$, так как $|s-s_0|=|\sigma-1|<\delta$. Это неравенство в свою очередь следует из того, что $\sigma\geqslant\sigma_1-1/2K\ln k=\beta'+3/2K\ln k>\beta_0\geqslant 1-\delta$ и $\sigma<1+1/\ln k<1+\delta$. Следовательно, согласно (2.18), получаем

$$\sum_{\substack{|\rho-s_0|>2\delta\\|\gamma-t|\leqslant 1}}\left|\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{s'-\rho}\right|<\sum_{2\delta\leqslant|\rho-s_0|\leqslant 1\,2}\frac{2\delta}{\frac{1}{4}|s_0-\rho|^2}, \tag{2.20}$$

так как $|\gamma-1|\leqslant 1$ и, следовательно, $|\rho-s_0|\leqslant\sqrt{2}$. Последнюю сумму преобразуем с помощью частного суммирования и применим затем лемму 2.1. Для этого возьмем в теореме П. 1.4 за $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ числа $|\rho-s_0|$, удовлетворяющие условию $2\delta\leqslant|\rho-s_0|\leqslant\sqrt{2}$ и упорядоченные по величине, и получим в обозначениях леммы 2.1

$$\sum_{2\delta\leqslant|s_0-\rho|\leqslant\sqrt{2}}\frac{1}{|s_0-\rho|^2}=\frac{Q(t,\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^2}-\int_{2\delta}^{\sqrt{2}}Q(t,\ \xi)\,d\,\frac{1}{\xi^2}.$$

Для $s\in R_1$, следовательно, при $|t|\leqslant\tau+5K\lambda\tau+4\tau\leqslant 10Kk$ по лемме 2.1 это последнее выражение имеет порядок

$$\ll\ln(10Kk^2)+\int_{2\delta}^{\sqrt{2}}\xi\ln(10Kk^2)\left|d\,\frac{1}{\xi^2}\right|\ll K\ln k\cdot\left(1+\int_{2\delta}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi^2}\right)\ll$$
$$\ll K\ln k\cdot(1+\delta^{-1})\ll\delta^{-1}K\ln k,$$

так как $\delta\leqslant{}^1/_{10}$. Если теперь подставить это в (2.20), то вместе с (2.19) получаем

$$\sum_{|\gamma-t|\leqslant 1}\left|\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{s'-\rho}\right|\ll K\lambda\ln Kk.$$

Из (2.7) следует $\frac{L'}{L}(s',\ \chi)\ll\delta^{-1}$,

$$\delta^{-1}=\lambda^{-1}\ln k\ll K\lambda\ln Kk\qquad(\lambda\geqslant 2,\ K>2),$$

и если подставить все это в (2.17), то получим утверждение (2.16).

Рассмотрим теперь функцию

$$f(s,\ y)=f(s,\ y,\ \chi)=-\sum_n\chi(n)\,\Lambda(n)\,n^{-s}e^{-\ln^2 n/4y},\tag{2.21}$$

которую мы уже рассматривали в частном случае в § 6 гл. VII. Функция $f(s,\ y)$ регулярна для всех s. Согласно теореме П. 3.3 для $y>0$, имеем

$$f(s,\ y)=-i\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{L'}{L}(w,\ \chi)\,e^{(s-w)^2y}\,dw.\tag{2.22}$$

Доказательство дальше основано на том, что из существования „благоприятных“ нулей ρ' функции $L(s,\chi)$ (т. е. $L'(\rho',\chi)/L(\rho',\chi)=\infty$) следует, что определенные частичные суммы ряда для $f(s,y,\chi)$ по абсолютной величине становятся „большими“. Наконец оказывается, что это невозможно для „слишком многих“ χ.

Предположим теперь, что s лежит в прямоугольнике $R_2=R_2(\chi)$, который определен неравенствами

$$\sigma_1-\frac{1}{2K\ln k}\leqslant\sigma\leqslant\min(2,\ 1+\tau),\quad |t-\gamma'|\leqslant\tau, \tag{R_2}$$

или иначе

$$\beta'+\frac{3}{2K\ln k}\leqslant\sigma\leqslant\min(2,\ 1+\tau),\quad |t-\gamma'|\leqslant\tau. \tag{R_2}$$

Очевидно, $R_2\subset R_1\subset R_0$. Каждому $s=\sigma+it\in R_2$ мы сопоставим путь $C=C(s)$, который состоит из следующих отрезков:

$$\begin{aligned}
C_{\pm 1}&=(\min(2,\ 1+\tau)+it\pm i2\tau,\quad \min(2,\ 1+\tau)\pm i\infty),\\
C_{\pm 2}&=(\min(2,\ 1+\tau)+it\pm i2\tau,\quad \sigma+it\pm i2\tau),\\
C_0&=(\sigma+it-i2\tau,\quad \sigma+it+i2\tau).
\end{aligned}$$

Мы проходим путь C в направлении от $(2,\ 1+\tau)-i\infty$ до $(2,\ 1+\tau)+i\infty$. Путь $(2-i\infty,\ 2+i\infty)$ можно деформировать в путь $C(s)$, не меняя значения интеграла в (2.22), так как при постоянном τ функция $\frac{L'}{L}$ в области $\operatorname{Re} w\geqslant\min(2,\ 1+\tau)$ ограничена, $\exp(s-w)^2\ll\exp\{-(\operatorname{Im} w)^2\}$ для $|\operatorname{Im} w|\to\infty$ и между $C(s)$ и $(2-i\infty,\ 2+i\infty)$ нет нулей $L(w,\ \chi)$ (по определению $C(s)$). Для $s\in R_2$ отрезки C_0 и $C_{\pm 2}$ лежат целиком в R_1 и даже в прямоугольнике

$$\beta'+3/2K\ln k\leqslant\sigma\leqslant\min(2,\ 1+\tau),\quad |t-\gamma'|\leqslant 3\tau.$$

Лемма 2.4. *Пусть* $y>1$ *и*[1])

$$\sigma_0=\sigma_0(\chi)=\beta'+\frac{1}{K\ln k}. \tag{2.23}$$

Тогда для $s=\sigma+it\in R_2$

$$\operatorname{Re} f(s,\ y)=P(s)+R(s),$$

где

$$P(s)=P(s,\ y,\ \chi)=\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-2\tau}^{2\tau}\sum_{\substack{\beta,\ \gamma\\ \beta\leqslant\sigma_0\ |\gamma-u-t|\leqslant 1}}\frac{(\sigma-\beta)\,e^{-u^2y}}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\gamma)^2}\,du, \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
R(s)=R(s,\ y,\ \chi)&=\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-2\tau}^{2\tau}\sum_{\substack{\beta,\ \gamma\\ \beta>\sigma_0,\ |\gamma-u-t|\leqslant 1}}\frac{(\sigma-\beta)\,e^{-u^2y}}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\gamma)^2}\,du+\\
&+O\left(y^{\frac{1}{2}}\left|\int\limits_{C_{\pm 1},\ C_{\pm 2}}\frac{L'}{L}(w,\ \chi)\,e^{(s-w)^2y}\,dw\right|+\ln Kk\right).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

---

[1]) Естественно, σ_0 не является действительной частью s_0 из доказательства леммы 2.3.

Доказательство. Преобразуем путь $(2-i\infty,\ 2+i\infty)$ в путь $C(s)$. Интегралы по $C_{\pm 1}$, $C_{\pm 2}$ содержатся в остаточном члене формулы (2.25). Остается еще рассмотреть интеграл по C_0. На C_0 мы положим $w=s+iu$, $-2\tau\leqslant u\leqslant 2\tau$. Согласно формуле (2.6) со значением $E_0=0$ и соотношению $\ln k(|t+u|+2)\ll \ln Kk$ $(|t+u|\leqslant|t|+|u|\leqslant 10Kk+2\tau<12Kk)$, имеем

$$\operatorname{Re}\left\{-i\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{C_0}\right\}=\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-2\tau}^{2\tau}\operatorname{Re}\sum_{\gamma,\ |\gamma-u-t|\leqslant 1}\frac{e^{-u^2y}}{\sigma-\beta+i(t+u-\gamma)}\,du+$$
$$+O\left(y^{\frac{1}{2}}\ln Kk\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2y}\,du\right). \qquad (2.26)$$

Теперь

$$\operatorname{Re}\{\sigma-\beta+i(t+u-\gamma)\}^{-1}=\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\gamma)^2}.$$

Если в сумме в (2.26) провести отдельно суммирование по нулям, для которых $\beta\leqslant\sigma_0$ и $\beta>\sigma_0$, то получим утверждение леммы.

Лемма 2.5. *Если*

$$s_1=s_1(\chi)=\sigma_1+i\gamma'=\beta'+\frac{2}{K\ln k}+i\gamma' \qquad (2.27)$$

и

$$y\geqslant(K\ln k)^2, \qquad (2.28)$$

то

$$P(s_1)>c_3K\ln k. \qquad (2.29)$$

Доказательство. Для доказательства мы используем формулу (2.24). При $\sigma=\sigma_1$ в сумме под знаком интеграла $\sigma-\beta>0$, так как суммирование проводится только по нулям, для которых $\beta\leqslant\sigma_0\ (<\sigma_1)$. Следовательно, функция $P(s)$ действительна и положительна и сумма в (2.24) не увеличится, если мы вместо того, чтобы суммировать по всем нулям $\beta+i\gamma$, сохраним только член, соответствующий нулям $\beta'+i\gamma'$.

Для $s=s_1=\sigma_1+i\gamma'$ этот нуль содержится в области суммирования суммы, если $|\gamma'-u-\gamma'|=|u|\leqslant 1$. Следовательно, согласно (2.28), имеем

$$P(s_1)\geqslant\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\min(1,\,2\tau)}^{\min(1,\,2\tau)}\frac{(\sigma_1-\beta')\,e^{-u^2y}}{(\sigma_1-\beta')^2+u^2}\,du=$$
$$=\pi^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{|\xi|\leqslant y^{1/2}\min(1,\,2\tau)}\frac{(2/K\ln k)\,e^{-\xi^2}}{(2/K\ln k)^2+y^{-1}\xi^2}\,d\xi\geqslant$$
$$\geqslant 2\pi^{-\frac{1}{2}}K\ln k\int\limits_{|\xi|\leqslant K\ln k\cdot\min(1,\,2\tau)}\frac{e^{-\xi^2}}{4+\xi^2}\,d\xi.$$

Отсюда следует (2.29), так как $K\ln k\cdot\tau=Ke^{\lambda}>e^2$ и $K\ln k>1$.

Положим теперь

$$y=(K\ln k)^2=(\ln k^K)^2. \tag{2.30}$$

Лемма 2.6. *Существует $K_0>2$, для которого при любом $s\in R_2$ справедлива оценка*

$$|R(s)|<\frac{1}{4}c_3K\ln k, \quad K\geqslant K_0, \tag{2.31}$$

причем c_3 — константа из неравенства (2.29). *K_0 может быть выбрано независимо от k и χ.*

Доказательство. Покажем, что даже для каждого $\varepsilon>0$ существует $K(\varepsilon)$, для которого $|R(s)|<\varepsilon K\ln k$ при $K>K(\varepsilon)$. Для этого оценим отдельно слагаемые в правой части (2.25). При $\tau\geqslant\frac{1}{2}$ первое слагаемое правой части в (2.25) обращается в нуль, так как сумма под интегралом пуста. Так как $|t-\gamma'|<\tau$ для $s=\sigma+it\in R_2$ и $-2\tau\leqslant u\leqslant 2\tau$, из $|\gamma-u-t|\leqslant 1$ для $\tau\geqslant\frac{1}{2}$ следует оценка $|\gamma-\gamma'|\leqslant 5\tau$. Поэтому для тех $\beta+i\gamma$, по которым проводится суммирование, всегда $\beta>\sigma_0=\beta'+1/K\ln k$ и $|\gamma-\gamma'|\leqslant 5\tau$, а в этой области, согласно лемме 2.2, нет нулей.

Пусть теперь $\tau<\frac{1}{2}$, N — наибольшее натуральное число, для которого $2^N\tau\leqslant 1$ и $2^n\tau=\tau_n$, $n=0, 1, \ldots, N+1$. Для первого слагаемого в (2.25) запишем [1])

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{-2\tau}^{2\tau}\sum_{0\leqslant n\leqslant N}\ \sum_{\substack{\tau_n\leqslant|\gamma-u-t|\leqslant\tau_{n+1}\\ \beta>\sigma_0}}\frac{(\sigma-\beta)\,e^{-u^2y}}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\gamma)^2}\,du\ll$$

$$\ll y^{\frac{1}{2}}\tau\sum_{0\leqslant n\leqslant N}\ \int\limits_{-2\tau}^{2\tau}\ \sum_{\substack{\tau_n\leqslant|\gamma-u-t|\leqslant\tau_{n+1}\\ \beta>\sigma_0}}\frac{e^{-u^2y}}{(\gamma-u-t)^2}\,du. \tag{2.32}$$

Действительно, из $s\in R_2$ следует $1-\delta<\beta'+3/2K\ln k\leqslant\sigma\leqslant\leqslant\min(2,\ 1+\tau)\leqslant 1+\tau$ и, кроме того, $1-\delta<\sigma_0<\beta<1$. Таким образом, всегда $(1-\delta)-1<\sigma-\beta<1+\tau-(1-\delta)$, т. е. $|\sigma-\beta|<<\tau+\delta<2\tau$. Теперь нули $\beta+i\gamma$, для которых $\beta>\sigma_0\,(>1-\delta)$ и $\tau_n\leqslant|\gamma-u-t|\leqslant\tau_{n+1}$, обязательно лежат в круге с центром $1+$ $+i(u+t\pm\tau_m)$ и радиусом $\left\{\delta^2+\left(\tau_{n+1}-\tau_n\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\delta^2+\tau_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}$. Поэтому из леммы 2.1 и соотношения

$$\ln k\,(|u+t\pm\tau_n|+2)\leqslant\ln k\,(2\tau+5K\lambda\tau+2\tau+4)\ll\ln Kk$$
$$(\tau_n\leqslant 2,\ |t|\leqslant\tau+5K\lambda\tau+\tau \text{ для } s\in R_2)$$

[1]) Сумма по $|\gamma-u-t|\leqslant\tau_0=\tau$, $\beta>\sigma_0$ пуста, так как там $|\gamma-\gamma'|$ не превосходит $|\gamma-u-t|+|t-\gamma'|+|u|\leqslant\tau+\tau+2s<5\tau$.

следует неравенство

$$\sum_{\substack{\tau_n \leqslant |\gamma - u - t| \leqslant \tau_{n+1} \\ \beta > \sigma_0}} (\gamma - u + t)^2 \ll \tau_n^{-2} \left(\delta^2 + \tau_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \ln Kk \ll 2^{-n} \tau^{-1} \ln Kk,$$

так как $\delta < \tau_n$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$.

Таким образом, для правой части в (2.32) выполняется оценка

$$\ll y^{\frac{1}{2}} \ln Kk \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 y}\, du \ll \ln Kk,$$

и, следовательно, такая же оценка справедлива для первого слагаемого в правой части (2.25).

Каждое $w \in C_{\pm 2}$ лежит в R_1, так как $s \in R_2$ и $w = s \pm i2\tau + \omega$, $0 \leqslant \omega \leqslant \min(2, 1 + \tau) - \sigma < \tau + \delta$. Следовательно, для $w \in C_2$

$$\left| e^{(s-w)^2 y} \right| = e^{(\omega^2 - 4\tau^2) y} \leqslant e^{\{(\tau+\delta)^2 - 4\tau^2\} y}.$$

Из $\delta - \tau = (\lambda - e^\lambda)/\ln k < -\frac{2}{3} e^\lambda/\ln k$ $(\lambda \geqslant 2)$ и $\delta + 3\tau > 3\tau$ получаем

$$(\tau + \delta)^2 - 4\tau^2 = (\delta + 3\tau)(\delta - \tau) < -2\tau^2.$$

Отсюда в силу леммы 2.3 следует, что

$$y^{\frac{1}{2}} \int\limits_{C_{\pm 2}} \frac{L'}{L}(w, \chi)\, e^{(s-w)^2 y}\, dw \ll y^{\frac{1}{2}} (\tau + \delta) K\lambda \ln Kk \cdot e^{-2\tau^2 y} \ll$$

$$\ll \lambda e^\lambda K^2 \ln Kk \cdot \exp(-2K^2 e^{2\lambda}),$$

так как $\tau + \delta < 2\tau = 2e^\lambda/\ln k$, $y = (K \ln k)^2$. Наконец для $w \in C_{\pm 1}$, согласно (2.7),

$$\frac{L'}{L}(w, \chi) \ll \frac{1}{\tau}$$

и

$$w = s \pm i2\tau + \{\min(2, 1 + \tau) - \sigma\} + i\omega, \qquad 0 \leqslant |\omega| < \infty.$$

Следовательно, из неравенства $\min(2, 1 + \tau) - \sigma < \tau + \delta$ для $y = (K \ln k)^2$ вытекает

$$y^{\frac{1}{2}} \int\limits_{C_{\pm 1}} \frac{L'}{L}(w, \chi)\, e^{(s-w)^2 y}\, dw \ll y^{\frac{1}{2}} \tau^{-1} \int\limits_0^{\infty} e^{\{(\tau+\delta)^2 - (\omega + 2\tau)^2\} y}\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant y^{\frac{1}{2}} \tau^{-1} e^{\{(\tau+\delta)^2 - 4\tau^2\} y} \int\limits_0^{\infty} e^{-\omega^2 y}\, d\omega \ll \tau^{-1} e^{-2\tau^2 y} =$$

$$= e^{-\lambda} \ln k \cdot \exp(-2K^2 e^{2\lambda}).$$

Подставляя полученные оценки в (2.25), находим

$$R(s) \ll \ln Kk + (\lambda e^{\lambda}K^2 + e^{-\lambda}) \ln Kk \cdot \exp(-2K^2e^{2\lambda}) + \ln Kk,$$

а это меньше, чем $\varepsilon K \ln k$ для $K > K(\varepsilon)$, причем $K(\varepsilon)$ можно выбрать независимым от $\lambda(\geqslant 2)$. Таким образом, лемма 2.6 полностью доказана.

Лемма 2.7. *Пусть G^* — круг с центром s^* и радиусом $1/2K \ln k$, который целиком лежит в R_2. Тогда для $s \in G^*$*

$$P(s) < 6P(s^*) + c_4 \ln Kk. \tag{2.33}$$

Доказательство. Так как $K > 2$, то $1/2K \ln k < \frac{1}{2}$.

Для $s \in G^* \subset R_2$ имеем $s^* = \sigma^* + it^*$ и для каждого нуля $\rho = \beta + i\gamma$, удовлетворяющего условиям $|\gamma - u - t| \leqslant 1$, $-2\tau \leqslant u \leqslant 2\tau$, $\beta \leqslant \beta' + 1/K \ln k$, имеем $\sigma - \beta > 1/2K \ln k$. Следовательно, $\sigma - \beta \leqslant \sigma^* - \beta + 1/2K \ln k < \frac{3}{2}(\sigma^* - \beta)$ и $|s + iu - (\beta + i\gamma)| \geqslant |s^* + iu - (\beta + i\gamma)| - 1/2K \ln k \geqslant \frac{1}{2}|s^* + iu - (\beta + i\gamma)|$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t + u - \gamma)^2} = \frac{\sigma - \beta}{|s + iu - (\beta + i\gamma)|^2} < 6 \frac{\sigma^* - \beta}{(\sigma^* - \beta)^2 + (t^* + u - \gamma)^2}.$$

Если для некоторого такого нуля выполняются неравенства $|\gamma - u - t^*| \leqslant 1$, $|\gamma - u - t| > 1$, то из $|t^* - t| \leqslant 1/2K \ln k < \frac{1}{2}$ следует

$$|s^* + iu - (\beta + i\gamma)| \geqslant |\gamma - u - t^*| \geqslant |\gamma - u - t| - |t^* - t| > \frac{1}{2}.$$

Число таких нулей по теореме 7.3.3 (при постоянных s^*, s и u) имеет порядок

$$\ll \ln\{k(\tau + 5K\lambda\tau + \tau + 2\tau + 1/2K \ln k + 2)\} \ll \ln Kk.$$

Таким образом, если следующие суммы распространяются на нули $\beta + i\gamma$, для которых $|\gamma - u - t^*| \leqslant 1$, $|\gamma - u - t| > 1$, $\beta < \sigma_0$, то имеет место оценка

$$\sum \frac{\sigma^* - \beta}{(\sigma^* - \beta)^2 + (t^* + u - \gamma)^2} = \operatorname{Re} \sum \frac{1}{s^* + iu - (\beta + i\gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum \frac{1}{|s^* + iu - (\beta + i\gamma)|} \ll \ln Kk,$$

и та же оценка имеет место, если суммы распространяются на нули $\beta + i\gamma$, для которых $|\gamma - u - t| \leqslant 1$, $|\gamma - u - t^*| > 1$. В итоге для постоянных s, s^* и u получаем

$$\sum_{\substack{|\gamma-u-t|\leqslant 1\\ \beta\leqslant\sigma_0}} \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t+u-\gamma)^2} <$$

$$< 6 \sum_{\substack{|\gamma-u-t^*|\leqslant 1\\ \beta\leqslant\sigma_0}} \frac{\sigma^*-\beta}{(\sigma^*-\beta)^2+(t^*+u-\gamma)^2} + O(\ln Kk).$$

Умножение на $(y/\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-u^2y}$ и интегрирование по отрезку $-2\tau\leqslant u\leqslant 2\tau$ дает

$$P(s) < 6P(s^*) + O\left(y^{\frac{1}{2}}\ln Kk \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2y}\,du\right).$$

Отсюда следует оценка (2.33).

Пусть теперь $K > K_0 > 2$. Из равенства $\operatorname{Re} f(s, y) = P(s) + R(s)$, используя леммы 2.5 и 2.6, получаем

$$\operatorname{Re} f(s_1, y) > \frac{3}{4} c_3 K \ln k, \tag{2.34}$$

причем s_1 определено соотношением (2.27), а $f(s, y)$ — соотношением (2.21). Положим теперь

$$Z = \exp\left(\ln k\,\frac{\ln\lambda}{2\lambda}\right). \tag{2.35}$$

Лемма 2.8. *Если* $\sigma\geqslant 1-\delta$, *то*

$$\sum_{n=p^m,\ m\geqslant 2} \chi(n)\,\Lambda(n)\,n^{-s}e^{-\ln^2 n/4y} = O(1), \tag{2.36}$$

$$\sum_{p\leqslant Z} \chi(p)\ln p\cdot p^{-s}e^{-\ln^2 p/4y} \ll \ln k, \tag{2.37}$$

причем y *определено соотношением* (2.30) (*в котором* $K > K_0 > 2$) *и константы не зависят от* K.

Доказательство. Поскольку $\delta\leqslant {}^1/_{10}$, первая сумма не превосходит величины

$$\sum_{n=p^m,}\ \sum_{m\geqslant 2} \frac{\Lambda(n)}{n^{9/10}} = \sum_{p} \frac{\ln p}{p^{9/10}(p^{9/10}-1)} = O(1).$$

Так как $\delta = \lambda/\ln k$, $2\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{10}\ln k$, то сумма из (2.37) по абсолютной величине не превосходит [1])

$$\sum_{p\leqslant Z} \frac{\ln p}{p^{1-\delta}} = \frac{\psi(Z)}{Z^{1-\delta}} + (1-\delta)\int_2^Z \frac{\psi(\xi)}{\xi^{2-\delta}}\,d\xi \ll \frac{1}{\delta}Z^{\delta} = \frac{\ln k}{\lambda}\lambda^{\frac{1}{2}} \ll \ln k.$$

[1]) При применении теоремы П. 1.4 ψ — чебышевская функция из гл. III.

Этим доказана оценка (2.37). Положим теперь

$$f_1(s) = f_1(s, y, \chi) = \sum_{Z < p \leqslant k^2} \chi(p) \ln p \cdot p^{-s} e^{-\ln^2 p/4y} \tag{2.38}$$

и

$$f_2(s) = f_2(s, y, \chi) = \sum_{p > k^2} \chi(p) \ln p \cdot p^{-s} e^{-\ln^2 p/4y}. \tag{2.39}$$

Выберем $K > K_0$, $K > 4$ и, если нужно, настолько большим, чтобы было

$$|f_1(s_1)| + |f_2(s_1)| > 2 \ln k. \tag{2.40}$$

Это можно сделать, согласно (2.34) и лемме 2.8, и при этом K может быть определено независимо от k и χ. Тем самым K зафиксировано и в дальнейшем больше не будет изменяться. Теперь или $|f_1(s_1)| > \ln k$, или $|f_2(s_1)| > \ln k$. Обозначим

$$r_1 = r_1(\chi) = 1 + \delta - \sigma_1, \tag{2.41}$$

$$z_0 = z_0(\chi) = 1 + \delta + i\gamma', \tag{2.42}$$

и пусть $D = D(\chi)$ — круговое кольцо

$$r_1 - \frac{1}{2K \ln k} \leqslant |s - z_0| \leqslant r_1 + \frac{1}{2K \ln k}, \tag{Д}$$

а $\Gamma = \Gamma(\chi)$ — окружность

$$|s - z_0| = \frac{1}{2}\delta. \tag{Г}$$

Так как $r_1 < 2\delta$, $1 + \delta + r_1 + 1/2K \ln k < 1 + 3\delta + 1/2 \ln k < \min(2, 1 + \tau)$ $(k \geqslant e^{20}$, $\delta \leqslant {}^1/_{10})$ и $r_1 + 1/2K \ln k < \tau$, то $D \subset R_2$.

Лемма 2.9. *Или по крайней мере для одного $s_2 = s_2(\chi) \in D$ имеет место оценка*

$$|f_1(s_2)| > \ln k, \tag{2.43}$$

или для некоторого $s_3 = s_3(\chi) \in \Gamma$

$$|f_2(s_3)| > \ln k e^{-c_5 K^2 \lambda} \text{ [1]}. \tag{2.44}$$

Доказательство. Предположим, что $|f_1(s)| \leqslant \ln k$ для всех $s \in D$. Обозначим через Γ_1 окружность

$$|s - z_0| = r_1. \tag{Γ_1}$$

Из неравенств $|f_2(s_1)| > \ln k$ и (2.40) ($|f_1(s_1)| \leqslant \ln k$; $s_1 \in \Gamma_1 \subset D$) следует, что

$$M_1 = \max_{\Gamma_1} |f_2(s)| > \ln k. \tag{2.45}$$

[1]) После того, как K выбрано, можно было бы не выделять повсюду зависимость от K отдельно, а включить K в константы. Мы все же выделяем его ради наглядности.

Пусть максимум достигается в точке s^*, т. е. $M_1 = |f_2(s^*)|$. Пусть далее $r_0 = 1/2K \ln k$ и G_0 — область

$$|s - s^*| \leqslant r_0. \qquad (G_0)$$

G_0 лежит в $D \subset R_2$, и из леммы 2.7 следует

$$P(s) \leqslant 6P(s^*) + c_4 \ln Kk \quad (s \in G_0). \qquad (2.46)$$

Заметим еще, что по предположению

$$|f_1(s)| \leqslant \ln k \quad (s \in D). \qquad (2.47)$$

Оценим теперь сверху $|\operatorname{Re} f_2(s)|$ для $s \in G_0$ и покажем с помощью теоремы Бореля — Каратеодори (теорема П. 4.2), что в малом круге, целиком лежащем в G_0, модуль функции $f_2(s)$ „велик". Так как по лемме 2.8

$$f(s, y) = f_1(s) + f_2(s) + O(\ln k) \quad (\sigma \geqslant 1 - \delta), \qquad (2.48)$$

то из (2.47) следует, что

$$|\operatorname{Re} f_2(s)| \leqslant |\operatorname{Re} f(s, y)| + O(\ln k) \quad (\sigma \geqslant 1 - \delta). \qquad (2.49)$$

Далее из $\operatorname{Re} f(s, y) = P(s) + R(s)$ $(s \in R_2)$ и (2.31) следует

$$|\operatorname{Re} f(s, y)| \leqslant P(s) + \frac{1}{4} c_3 K \ln k \quad (s \in R_2). \qquad (2.50)$$

Так как $P(s) = \operatorname{Re} f(s, y) - R(s)$, $s \in R_2$, то, согласно лемме 2.7 и формулам (2.48), (2.47), мы получаем $P(s) < 6P(s^*) + c_4 \ln Kk \leqslant \leqslant 6\{|f(s^*, y)| + |R(s^*)|\} + c_4 \ln Kk < 6\left\{|f_2(s^*)| + O(\ln k) + \frac{1}{4} c_3 K \ln k\right\} + + c_4 \ln Kk < 6M_1 + O(K \ln k)$, $s \in G_0$. Отсюда и из (2.49), (2.50), так как $M_1 = |f_2(s^*)| > \ln k$, следует

$$|\operatorname{Re} f_2(s)| < c_6 K M_1 \quad (s \in G_0). \qquad (2.51)$$

Пусть теперь $r_0' = c_7/K^2 \ln k$, где $c_7 < \frac{1}{2}$ и G_0' — область

$$|s - s^*| \leqslant r_0'. \qquad (G_0')$$

Из теоремы П. 4.2 и неравенства (2.51), если выбрать c_7 достаточно малым, следует, что

$$|f_2(s) - f_2(s^*)| \leqslant \frac{2r_0'}{r_0 - r_0'}(c_6 K + 1) M_1 < \frac{1}{2} M_1 \quad (s \in G_0'). \qquad (2.52)$$

Пусть теперь Γ_2 — окружность

$$|s - z_0| = r_1 - r_0' = r_2. \qquad (\Gamma_2)$$

Так как G_0' имеет общие точки с Γ_2, то, согласно (2.52) и $|f_2(s^*)| = M_1$, имеет место оценка

$$M_2 = \max_{\Gamma_2} |f_2(s)| > \frac{1}{2} M_1. \tag{2.53}$$

Применим теперь к окружностям Γ, Γ_2, Γ_1 теорему П. 9.2 и положим $M = \max_{\Gamma} |f_2(s)|$, $r_3 = \frac{1}{2}\delta$. Тогда $r_3 < r_2 < r_1$, так как из того, что $1 + \frac{1}{2}\delta - \sigma_1 - c_7/K^2 \ln k > \frac{1}{2}\delta - 2/K \ln k - c_7/K^2 \ln k > c/K \ln k$, следует $\frac{1}{2}\delta < 1 + \delta - \sigma_1 - c_7/K^2 \ln k$ $\left(\delta \geqslant 2/\ln k, \quad K > 4, \quad c_7 < \frac{1}{2}\right)$. Теорема П. 9.2 теперь дает нам

$$\ln M_2 \leqslant \ln M \frac{\ln (r_1/r_2)}{\ln (r_1/r_3)} + \ln M_1 \frac{\ln (r_2/r_3)}{\ln (r_1/r_3)} \tag{2.54}$$

и, следовательно,

$$M \geqslant M_1^{\frac{\ln (r_3/r_2)}{\ln (r_1/r_2)}} M_2^{\frac{\ln (r_1/r_3)}{\ln (r_1/r_2)}} > \ln k \cdot 2^{-\frac{\ln (r_1/r_3)}{\ln (r_1/r_2)}}, \tag{2.55}$$

так как $M_2 > {}^1/_2 M_1$, $M_1 > \ln k$, $M_2 > \frac{1}{2} \ln k$ и

$$\frac{\ln (r_3/r_2)}{\ln (r_1/r_2)} + \frac{\ln (r_1/r_3)}{\ln (r_1/r_2)} = 1.$$

Это означает, что

$$\ln \frac{r_1}{r_2} = \ln \frac{1 + \delta - \sigma_1}{1 + \delta - \sigma_1 - c_7/K^2 \ln k} > \frac{c_7}{(1 + \delta - \sigma_1) K^2 \ln k} >$$

$$> \frac{c_7}{2\delta K^2 \ln k} = \frac{c_7}{2K^2\lambda},$$

поскольку $c_7/\{(1 + \delta - \sigma_1) K^2 \ln k\} < c_7/\{(\delta - 2/K \ln k) K^2 \ln k\} < < c_7\Big/\left(\frac{1}{2}\delta K^2 \ln k\right) < \frac{1}{2}$ $\left(\delta \geqslant 2/\ln k,\ K > 4,\ c_7 < \frac{1}{2}\right)$ и

$$\ln \frac{r_1}{r_3} = \ln \frac{1 + \delta - \sigma_1}{\frac{1}{2}\delta} < \ln 4, \quad 1 - \sigma_1 < \delta.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получаем $M \geqslant \ln k \exp(-cK^2\lambda)$. Но $M = \max_{\Gamma} |f_2(s)|$, и, следовательно, существует некоторое $s_3 \in \Gamma$, для которого выполнено (2.44).

Доказательство теоремы 2.1. Мы можем теперь доказать теорему 2.1 и проведем доказательство в два шага а) и б), в зависимости от того, какое из двух утверждений леммы 2.9 имеет место.

a) Пусть при подходящем $s_2 = s_2(\chi)$ из $D = D(\chi)$ для Q_1 различных характеров χ по $\operatorname{mod} k$ будет

$$|f_1(s_2)| = |f_1(s_2(\chi), \chi)| > \ln k, \tag{2.56}$$

причем

$$Q_1 > \frac{1}{2} Q, \tag{2.57}$$

где $Q = Q(\lambda(k))$ — число, определенное в теореме 2.1. Все области $D(\chi)$ лежат в прямоугольнике $\bar{R}$

$$1 - \delta \leqslant \sigma \leqslant 1 + 3\delta, \quad |t| \leqslant 6K\lambda\tau, \tag{$\bar{R}$}$$

и поэтому точки $s_2(\chi)$ также лежат в $\bar{R}$. Покроем $\bar{R}$ квадратами с длиной стороны

$$\eta = \frac{c_8}{e^{2\lambda} \ln k}, \tag{2.58}$$

причем $c_8 < \frac{1}{2}$ сейчас будет определено точнее. Будем предполагать, что стороны квадратов параллельны осям. Некоторые из этих квадратов пересекаются с $\bar{R}$ по прямоугольнику, стороны которого, однако, также не превосходят η. Число таких квадратов (и прямоугольников) меньше $c_9 K\lambda^2 e^{5\lambda}$. По крайней мере в одном из них лежит Q_2 точек $s_2 = s_2(\chi)$, для которых выполнено (2.56), и

$$Q_2 > \frac{Q_1}{c_9 K\lambda^2 e^{5\lambda}} > \frac{Q}{2c_9 K\lambda^2 e^{5\lambda}}. \tag{2.59}$$

Пусть $R^{(0)}$ — такой квадрат (или прямоугольник) и $s^{(0)}$ — его центр.

Для каждого $s_2(\chi) \in R^{(0)}$ имеем тогда

$$|f_1(s_2(\chi), \chi) - f_1(s^{(0)}, \chi)| \leqslant \int\limits_{s^{(0)}}^{s_2(\chi)} |f_1'(s, \chi)|\,|ds|.$$

Для $s \in \bar{R}$ так же, как при доказательстве (2.37), получим

$$|f_1'(s)| \leqslant \sum_{p \leqslant k^2} \frac{\ln^2 p}{p^{1-\delta}} \leqslant 2 \ln k \sum_{p \leqslant k^2} \frac{\ln p}{p^{1-\delta}} \ll \ln k \frac{1}{\delta} k^{2\delta}.$$

Отсюда следует, что

$$|f_1(s_2(\chi), \chi) - f_1(s^{(0)}, \chi)| < c\eta\delta^{-1} k^{2\delta} \ln k =$$
$$= c \frac{c_8}{e^{2\lambda} \ln k} \frac{\ln k}{\lambda} e^{2\lambda} \ln k < \frac{1}{2} \ln k,$$

если только c_8 выбирается достаточно малым, и, следовательно, согласно (2.56),

$$|f_1(s^{(0)}, \chi)| > \frac{1}{2} \ln k.$$

Поэтому для Q_2 характеров имеет место оценка

$$\left|\sum_{Z < p \leqslant k^2} \chi(p) \ln p \cdot p^{-s^{(0)}} e^{-\ln^2 p/4y}\right| > \frac{1}{2} \ln k. \tag{2.60}$$

Разобьем теперь интервал $Z < p \leqslant k^2$ на части вида

$$k^{2^{1-n}} < p \leqslant k^{2^{2-n}}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{2.61}$$

и одну часть $Z < p \leqslant k^{2^{2-N}}$, причем N — наименьшее целое число, для которого

$$2^{1-N} \ln k \leqslant \ln Z = \ln k \cdot \frac{\ln \lambda}{2\lambda}.$$

Очевидно, $N < c \ln \lambda$. Среди этих интервалов имеется один такой, что

$$\left|\sum_{2^{1-n} \ln k < \ln p \leqslant 2^{2-n} \ln k} \chi(p) \ln p \cdot p^{-s^{(0)}} e^{-\ln^2 p/4y}\right| > c_{10} \frac{\ln k}{\ln \lambda} \tag{2.62}$$

для Q_3 характеров χ по $\operatorname{mod} k$, причем

$$Q_3 \geqslant \frac{Q_2}{N+1} > c_{11} \frac{Q_2}{\ln \lambda} > c_{12} \frac{Q}{K\lambda^2 e^{5\lambda} \ln \lambda}. \tag{2.63}$$

Здесь область суммирования нужно заменить на $Z < p \leqslant \exp\left(2^{2-N} \ln k\right)$, если (2.62) выполняется для последнего интервала. Возведем неравенство (2.62) в степень 2^{n+1}. Тогда мы получим

$$\left|\sum_{k^2 < m \leqslant k^4} \chi(m) a_m m^{-s^{(0)}}\right|^2 > \left(c_{10} \frac{\ln k}{\ln \lambda}\right)^{2^{n+1}} > (\ln k)^{2^{n+1}} e^{-c_{13}\lambda}, \tag{2.64}$$

так как по определению N $2^{2-N} > \ln \lambda / 2\lambda$ и, следовательно, $2^{n+1} \leqslant 2^{N+1} < 16\lambda/\ln \lambda$. Из неравенств

$$(2^n)! < \exp(n 2^n \ln 2) \leqslant \exp(N 2^N \ln 2) \leqslant \exp\{c \ln \lambda (8\lambda/\ln \lambda) \ln 2\}$$

вытекает оценка

$$0 \leqslant a_m \leqslant \sum_{m = p_1 \cdots p_{2^n}} \ln p_1 \ldots \ln p_{2^n} < (\ln k^2)^{2^n} (2^n)! < (\ln k)^{2^n} e^{c_{14}\lambda}. \tag{2.65}$$

В сумме (2.64) каждое m, для которого $a_m \neq 0$, имеет простые делители, только большие чем Z в силу способа, каким была получена эта сумма. После суммирования по всем характерам χ по $\operatorname{mod} k$, включая $\chi = \chi_0$, принимая во внимание оценку

$$\left|m^{-s^{(0)}}\right| \leqslant m^{-1+\delta} \leqslant m^{-1} k^{4\delta} = m^{-1} e^{4\lambda}$$

и такую же оценку для u вместо m, получим

$$\sum_{\chi}\Big|\sum_{k^2<m\leqslant k^4}\chi(m)\,a_m m^{-s^{(0)}}\Big|^2=$$

$$=\varphi(k)\sum_{k^2<m\leqslant k^4}a_m m^{-s^{(0)}}\sum_{\substack{k^2<u\leqslant k^4\\ u\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}a_u u^{-\bar{s}^{(0)}}<$$

$$<(\ln k)^{2^{n+1}}\varphi(k)\,e^{(2c_{14}+8)\lambda}\sum_{k^2<m\leqslant k^4}m^{-1}\sum_{\substack{k^2<u\leqslant k^4\\ u\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}u^{-1}. \qquad (2.66)$$

Здесь в обеих последних суммах m и u пробегают только числа с простыми делителями, большими чем Z. Применим теоремы П. 1.4 и 2.4.9 $\Big($последняя применима, так как $\ln Z=\alpha\ln k$, $\alpha=(\ln\lambda)/2\lambda<\frac{1}{2}$ $(\lambda\geqslant 2)\Big)$. Тогда

$$\sum_{\substack{k^2<u\leqslant k^4\\ u\equiv m\,(\mathrm{mod}\,k)}}u^{-1}\ll k^{-4}\frac{k^4}{\varphi(k)\ln Z}+\int_{k^2}^{k^4}\frac{\xi}{\varphi(k)\ln Z}\left|d\,\frac{1}{\xi}\right|\ll$$

$$\ll\frac{\ln k}{\varphi(k)\ln Z}=\frac{2\lambda}{\varphi(k)\ln\lambda}.$$

Теперь можно применить теорему 2.4.10, так как $k^2>Z^a$, причем за a можно взять любое постоянное число, меньшее $4\lambda/\ln\lambda$, а $4\lambda/\ln\lambda>2$ для $\lambda\geqslant 2$. В силу этой теоремы

$$\sum_{k^2<m\leqslant k^4}m^{-1}\ll k^{-4}\frac{k^4}{\ln Z}+\int_{k^2}^{k^4}\frac{\xi}{\ln Z}\left|d\,\frac{1}{\xi}\right|\ll\frac{\ln k}{\ln Z}=\frac{2\lambda}{\ln\lambda}.$$

Подставляя это в (2.66), получаем

$$\sum_{\chi}\Big|\sum_{k^2<m\leqslant k^4}\chi(m)\,a_m m^{-s^{(0)}}\Big|^2<c_{15}\frac{\lambda^2}{\ln^2\lambda}e^{(2c_{14}+8)\lambda}(\ln k)^{2^{n+1}}.$$

Так как (2.64) действительно для Q_3 характеров, то

$$Q_3(\ln k)^{2^{n+1}}e^{-c_{13}\lambda}<c_{15}\frac{\lambda^2}{\ln^2\lambda}e^{(2c_{14}+8)\lambda}(\ln k)^{2^{n+1}},$$

и из (2.63) вытекает

$$c_{12}\frac{Q}{K\lambda^2e^{5\lambda}\ln\lambda}e^{-c_{13}\lambda}<c_{15}\frac{\lambda^2}{\ln^2\lambda}e^{c_{16}\lambda},$$

откуда, если правильно а), следует утверждение (2.2) теоремы 2.1.

б) Пусть теперь а) не выполнено. Тогда, согласно лемме 2.9, существуют точки $s_3=s_3(\chi)\in\Gamma=\Gamma(\chi)$, в которых

$$|f_2(s_3)|=|f_2(s_3(\chi),\chi)|>\ln k\cdot e^{-c_5K^2\lambda} \qquad (2.67)$$

для Q_1' различных характеров χ по $\bmod k$, причем

$$Q_1' > \frac{1}{2} Q. \tag{2.68}$$

Докажем теорему 2.1 при этом предположении. Все окружности $\Gamma(\chi)$ лежат в области

$$1 + \frac{1}{2}\delta \leqslant \sigma \leqslant 1 + \frac{3}{2}\delta, \quad |t| \leqslant 6K\lambda\tau. \tag{$\overline{\overline{R}}$}$$

Покроем эту область квадратами с длиной стороны

$$\eta = \frac{c_{17}}{e^{c_5 K^2 \lambda} \ln k}, \tag{2.69}$$

причем $c_{17} < \frac{1}{2}$ позднее будет определено. Некоторые из квадратов будут пересекаться с $\overline{\overline{R}}$ только по прямоугольникам с длинами сторон, не превосходящими η. Число квадратов (и прямоугольников), необходимых для покрытия, меньше, чем

$$c_{18} K\lambda^2 e^{(2c_5 K^2 + 1)\lambda}, \quad c_{18} = c_{18}(c_{17}). \tag{2.70}$$

В некотором таком квадрате (или прямоугольнике), например в $R^{(0)}$, лежат Q_2' точек $s_3(\chi)$, где

$$Q_2' > \frac{Q_1'}{c_{18} K\lambda^2 e^{(2c_5 K^2 + 1)\lambda}} > \frac{Q}{2c_{18} K\lambda^2 e^{(2c_5 K^2 + 1)\lambda}} \tag{2.71}$$

и для каждой из этих точек $s_3(\chi)$ выполнено (2.67). Центр $R^{(0)}$ обозначим опять через $s^{(0)}$. Теперь для $\sigma \geqslant 1 + \frac{1}{2}\delta$ имеет место оценка

$$|f_2'(s)| \leqslant \sum_{p > k^2} \frac{\ln^2 p}{p^{1 + \frac{1}{2}\delta}} \leqslant \frac{d}{ds} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \Big|_{s = 1 + \frac{1}{2}\delta} \ll \delta^{-2},$$

так как $\zeta'/\zeta = 1/(1-s) + \ldots$. Следовательно, если выбрать c_{17} достаточно малым, то для каждого $s_3(\chi) \in R^{(0)}$ получим

$$f_2(s_3(\chi), \chi) - f_2(s^{(0)}, \chi) | \leqslant$$

$$\leqslant \int_{s^{(0)}}^{s_3(\chi)} |f_2'(s, \chi)| \, |ds| \leqslant c\eta\delta^{-2} < \frac{1}{2} \ln k \cdot e^{-c_5 K^2 \lambda}.$$

Отсюда и из (2.67) для Q_2' характеров χ по $\bmod k$ следует оценка

$$\left| \sum_{p > k^2} \chi(p) \ln p \cdot p^{-s^{(0)}} e^{-\ln^2 p/4y} \right| > \frac{1}{2} \ln k \cdot e^{-c_5 K^2 \lambda}. \tag{2.72}$$

С другой стороны, суммируя по всем характерам по $\operatorname{mod} k$, мы получаем

$$\sum_{\chi}\Big|\sum_{p>k^2}\chi(p)\ln p\cdot p^{-s^{(0)}}e^{-\ln^2 p/4y}\Big|^2=$$
$$=\varphi(k)\sum_{p>k^2}\ln p\cdot p^{-s^{(0)}}e^{-\ln^2 p/4y}\sum_{\substack{q>k^2\\ q\equiv p\,(\operatorname{mod} k)}}\ln q\cdot q^{-\bar{s}^{(0)}}e^{-\ln^2 q/4y}\ll$$
$$\ll\varphi(k)\sum_{p>k^2}\frac{\ln p}{p^{1+\frac{1}{2}\delta}}\sum_{q>k^2,\ q\equiv p\,(\operatorname{mod} k)}\frac{\ln q}{q^{1+\frac{1}{2}\delta}},$$

где q пробегает простые числа. Теперь имеем

$$\sum_{p\geqslant 2}\frac{\ln p}{p^{1+\frac{1}{2}\delta}}<-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)\ll\delta^{-1},$$

и из теорем 2.4.1 и П. 1.4 [1]) следует, что

$$\sum_{q>k^2,\ q\equiv p\,(\operatorname{mod} k)}\frac{\ln q}{q^{1+\frac{1}{2}\delta}}\ll\int_2^\infty\left(\frac{\xi}{\varphi(k)\ln\xi}\right)\left|d\,\frac{\ln\xi}{\xi^{1+\frac{1}{2}\delta}}\right|\ll\delta^{-1}\varphi(k)^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{\chi}\Big|\sum_{p>k^2}\chi(p)\ln p\cdot p^{-s^{(0)}}e^{-\ln^2 p/4y}\Big|^2<c_{19}\frac{\ln^2 k}{\lambda^2}.$$

Но неравенство (2.72) имеет место для Q_2' характеров χ по $\operatorname{mod} k$. Следовательно,

$$Q_2'\cdot\frac{1}{4}\ln^2 k\cdot e^{-2c_5K^2\lambda}<c_{19}\frac{\ln^2 k}{\lambda^2},$$

и из (2.71) для Q вытекает оценка (2.2) также в случае б), чем теорема 2.1 полностью доказана.

Естественно, теорема 2.1 имеет место также тогда, когда за Q принимается число всех $L(s,\chi)$, χ по $\operatorname{mod} k$ (включая χ_0), которые имеют в прямоугольнике R по крайней мере один нуль.

Пусть $N(\alpha, T)=N(\alpha, T, k)$ так же, как в гл. IX — число нулей всех L-функций $\operatorname{mod} k$ в прямоугольнике $\sigma<\alpha$, $|t|\leqslant T$.

---

[1]) Применяя теорему П. 1.4, получаем $A(\xi)=\sum\limits_{\substack{k^2<q\leqslant\xi\\ q\equiv p\,(\operatorname{mod} k)}}\cdot 1\leqslant\pi(\xi, k, p)$, следовательно, теорема 2.4.1 применима, так как $\xi>k^2$. Формулу (П. 1.6) можно применить, так как $\lim A(\xi)\ln\xi\cdot\xi^{-\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)}=0$ при $\xi\to 0$. Неравенство тем более верно, если интеграл берется от $\xi=2$.

Теорема 2.2. *Для* $0 \leqslant \lambda \leqslant \ln k$ *имеет место оценка*

$$N(1-\lambda/\ln k,\ e^{\lambda}/\ln k) < e^{A\lambda} \quad (k \geqslant 3) \tag{2.72$'$}$$

с положительной константой A, *не зависящей от* k.

Доказательство. Для $2 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{10} \ln k$ из теоремы 2.1 и леммы 2.1 следует, что

$$N(1-\lambda/\ln k,\ e^{\lambda}/\ln k) \ll e^{c\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda}/\ln k}{\lambda/\ln k} \cdot \lambda = e^{(c+1)\lambda}.$$

Действительно, прямоугольник $1-\lambda/\ln k < \sigma < 1$, $|t| \leqslant e^{\lambda}/\ln k$ можно покрыть кругами радиуса $\ll \lambda/\ln k$, и некоторая L-функция по лемме 2.1 имеет в каждом таком круге $\ll (\lambda/\ln k)\ln k = \lambda$ нулей; число таких кругов $\ll (e^{\lambda}/\ln k)(\lambda/\ln k)^{-1}$.

Для $\frac{1}{10}\ln k < \lambda \leqslant \ln k$ утверждение следует из грубой оценки (7.3.24)

$$N(0,\ T) \ll k(T+2)\ln k(T+2).$$

Для $0 \leqslant \lambda < 2$, после того как (2.72′) уже доказано для $\lambda = 2$, сначала может быть указана оценка

$$N(1-\lambda/\ln k,\ e^{\lambda}/\ln k) < e^{2A} = e^{(2/\lambda)A\lambda}. \tag{2.73}$$

Но по теореме 4.6.9 при достаточно малом $\lambda < \lambda_0$ в области $\sigma \geqslant 1-\lambda/\ln k$, $|t| \leqslant e^{\lambda}/\ln k$ находится самое большое один нуль всех функций $L(s,\chi)$ (а именно исключительный нуль). Поэтому для $\lambda < \lambda_0$ в (2.73) можно заменить множитель $(2/\lambda)$ на 1. Тем самым утверждение полностью доказано.

§ 3. Влияние исключительного нуля на остальные нули

Пусть $k \geqslant 3$ и β_1 — простой исключительный нуль функции $L(s,\chi_1)$, соответствующей характеру по $\mathrm{mod}\, k$, в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_0}{\ln 2k}, \quad t = 0. \tag{3.1}$$

Тогда, кроме β_1, в области $\sigma \geqslant 1-c_0/\ln 2k$ нет действительных нулей ни одной L-функции по $\mathrm{mod}\, k$. В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть* $k \geqslant 3$. *Рассмотрим исключительный нуль* β_1 *функции* $L(s,\chi_1)$, *образованной с характером* χ_1 *по* $\mathrm{mod}\, k$. *Существуют положительные константы* A_1 *и* A_2 *со следующим свойством. Если* β_1 *лежит в области*

$$1 - \frac{A_1}{\ln k} \leqslant \sigma < 1, \quad t = 0 \tag{3.2}$$

и

$$\delta_1 = 1 - \beta_1, \tag{3.3}$$

то в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A_2}{\ln k(|t|+1)} \ln \frac{eA_1}{\delta_1 \ln k(|t|+1)}, \tag{3.4}$$

$$\delta_1 \ln k(|t|+1) \leqslant A_1 \tag{3.5}$$

нет не равных β_1 *нулей никакой функции* $L(s, \chi)$, *образованной с характерами* χ *по* $\operatorname{mod} k$, $\chi \neq \chi_0$.

Для доказательства потребуется двенадцать лемм. Прежде чем начинать доказательство этих лемм, заметим, что область (3.4), (3.5) тем больше, чем меньше δ_1, т. е. чем ближе к 1 лежит исключительный нуль. При $\delta_1 = A_1/\ln k$ эта область задается неравенствами

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A_2}{\ln k(|t|+1)} \ln \frac{e \ln k}{\ln k(|t|+1)},$$

$$\ln k(|t|+1) \leqslant \ln k, \quad \text{т. е.} \quad t = 0,$$

и является куском действительной оси $\sigma \geqslant 1 - A_2/\ln k$. В этом случае теорема при достаточно малых A_1 и A_2 уже содержится в теореме 4.6.9 [1]). Если положить $\delta_1 = c(\varepsilon)/k^{\varepsilon}$ (до сих пор по теореме Зигеля мы знаем о δ_1 только то, что $\delta_1 \geqslant c(\varepsilon)/k^{\varepsilon}$), то область (3.4), (3.5) определится неравенствами

$$\left.\begin{aligned} \sigma &\geqslant 1 - \frac{A_2}{\ln k(|t|+1)} \left(\varepsilon \ln k - \ln \frac{c(\varepsilon) \ln k(|t|+1)}{eA_1} \right), \\ \ln k(|t|+1) &\leqslant \frac{A_1}{c(\varepsilon)} k^{\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Эта область содержит кусок действительной оси $\sigma \geqslant 1 - c$, c положительно и не зависит от k.

Если теорема 3.1 уже доказана для двух констант A_1 и A_2, то утверждение остается верным, если уменьшить A_1, или A_2, или обе константы.

Предположим, что β_1 — исключительный нуль (в смысле теоремы 4.6.9а) какой-нибудь функции $L(s, \chi_1)$, χ_1 по $\operatorname{mod} k$ и $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ — отличный от β_1 нуль некоторой функции $L(s, \chi)$, χ по $\operatorname{mod} k$. Положим

$$|\gamma_0| + 1 = U, \tag{3.7}$$

$$1 - \beta_0 = \delta, \tag{3.8}$$

$$\delta = \frac{\lambda}{\ln kU}. \tag{3.9}$$

Мы должны в дальнейшем оценить λ снизу. Можно предполагать, что

$$\delta < \frac{1}{10}. \tag{3.10}$$

---

[1]) Так как $k \geqslant 3$, то $\ln k(|t|+2)$ можно заменить на $\ln k(|t|+1)$.

Тогда если бы в области $\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{10}$ не было нулей $\beta_0 + i\gamma_0$, то теорема 3.1 при достаточно малых A_1, A_2 следовала бы уже из теоремы Зигеля, как это показывает рассуждение, проведенное в (3.6). Рассмотрим функцию

$$f(s) = f(s, \chi) = L(s, \chi) L(s + \delta_1, \chi\chi_1), \tag{3.11}$$

причем χ — тот характер, для которого $L(\rho_0, \chi) = 0$. Предположим пока, что

$$\chi \neq \chi_0. \tag{3.12}$$

Тогда $f(s)$ — целая функция, так как $L(s, \chi)$ — целая и $L(s, \chi\chi_1)$ — целая функция, за исключением случая $\chi = \chi_1$. В этом же случае $\chi_1\chi_1 = \chi_0$ и $f(s) = L(s, \chi_1) L(s + \delta_1, \chi_0)$. Поэтому полюс $s = 1 - \delta_1$ функции $L(s + \delta_1, \chi_0)$ компенсируется нулем $s = 1 - \delta_1 = \beta_1$ функции $L(s, \chi_1)$. Далее имеет место равенство

$$\frac{f'}{f}(s) = -\sum_n b_n \Lambda(n) n^{-s} \quad (\sigma > 1), \tag{3.13}$$

где

$$b_n = \begin{cases} \chi(p^m)(1 + \chi_1(p^m) p^{-m\delta_1}), & n = p^m \\ 0, & n \neq p^m \end{cases} \quad (m \geqslant 1), \tag{3.14}$$

и, следовательно, $b_n \overline{\chi}(n) \geqslant 0$. Нули $L(s + \delta_1, \chi\chi_1)$ по отношению к нулям $L(s, \chi\chi_1)$ сдвинуты влево на δ_1.

Лемма 3.1. *При $\sigma > \frac{1}{2}$ имеет место равенство*

$$\frac{f'}{f}(s) = \frac{f'}{f}(s, \chi) = \sum_{|\gamma - t| \leqslant 1}{}' \frac{1}{s - \rho} + O(\ln k(|t| + 1)), \tag{3.15}$$

причем ρ пробегает нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$, если $0 \leqslant \beta < 1$, и нули $L(s + \delta_1, \chi\chi_1)$, если $-\delta_1 \leqslant \beta < 1 - \delta_1$. Штрих обозначает, что при $\chi = \chi_1$ суммирование проводится только по $\rho \neq \beta_1 (= 1 - \delta_1)$.

Доказательство. Утверждение следует из (2.6), причем $\ln k(|t| + 2)$ можно заменить через $\ln k(|t| + 1)$, так как $k \geqslant 3$. Если применить (2.6) к $L(s, \chi)$, а затем к $L(s, \chi\chi_1)$ и сложить, то получится (3.15). При этом в случае $\chi = \chi_1$ взаимно уничтожаются член $1/(s - \beta_1)$, происходящий от $L(s, \chi_1)$, и член $-E_0/(s + \delta_1 - 1) = -1/(s - \beta_1)$, происходящий от $L(s + \delta_1, \chi_1\chi_1) = L(s, \chi_0)$.

Далее применяется метод § 2 к функции $f(s)$ (вместо $L(s, \chi)$ [1]). По теореме 4.6.9 для λ, определенного равенством (3.9), во всяком случае имеет место неравенство

$$\lambda > c_1 \tag{3.16}$$

при подходящем c_1. Мы сейчас предположим, что

$$0 < c_1 < \frac{1}{10}\ln 3 \quad \left(\lambda \leqslant \frac{1}{10}\ln kU\right).$$

Пусть $K > 2$ — константа, от которой пока зависят все оценки и которая позднее будет определена.

Лемма 3.2. *Для нуля $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\neq \beta_1)$ функции $L(s, \chi)$ $(\chi \neq \chi_0)$ найдется некоторый нуль $\rho' = \beta' + i\gamma'$ функции $f(s)$, для которого*

$$\beta' \geqslant \beta_0, \quad |\gamma' - \gamma_0| \leqslant 5K\lambda \tag{3.17}$$

и

$$f(s) \neq 0 \tag{3.18}$$

в области

$$\beta' + \frac{1}{K\ln kU} \leqslant \sigma \leqslant 2, \quad |t - \gamma'| \leqslant 5. \tag{R_0}$$

При этом возможно, что $\rho' = \rho_0$.

Доказательство получается совершенно аналогично доказательству леммы 2.2. Отступая вправо на $1/K\ln kU$, после $m \leqslant [\delta/(1/K\ln kU)]$ шагов достигают прямой $\sigma = 1$. Если ордината при каждом шаге меняется не больше чем на 5, то изменение ординаты в совокупности по абсолютной величине будет не больше чем $5\delta/(1/K\ln kU) = 5K\lambda$ (согласно (3.9)).

Рассмотрим прямоугольник R_1

$$\beta' + \frac{3}{2K\ln kU} \leqslant \sigma \leqslant 2, \quad |t - \gamma'| \leqslant 1. \tag{R_1}$$

Имеет место включение $R_1 \subset R_0$.

Лемма 3.3. *Для каждого $s = \sigma + it \in R_1$ существует такое действительное $\tau = \tau(s)$, $2 \leqslant \tau \leqslant 3$, что*

$$\left|\frac{f'}{f}(w)\right| \leqslant c_2 \ln^2(KkU) \quad \left(\frac{1}{2} < \operatorname{Re} w \leqslant 2,\ \operatorname{Im} w = t \pm \tau\right). \tag{3.19}$$

Доказательство. По теореме 7.3.3 число нулей ρ функции $f(w)$ в области $2 \leqslant |\operatorname{Im} w - t| \leqslant 3$ равно $O(\ln(k|t| + 5))$, а так как $s \in R_1$ и

$$|t| \leqslant |t - \gamma'| + |\gamma' - \gamma_0| + |\gamma_0| \leqslant 1 + 5K\lambda + U, \quad \lambda \leqslant \frac{1}{10}\ln kU,$$

[1]) Конечно, вычисления оказываются здесь несколько проще.

то число указанных нулей равно $O(\ln(KkU))$. Следовательно, так же как при доказательстве теоремы 7.4.2, существует некоторое τ, $2\leqslant\tau\leqslant 3$, которое обладает тем свойством, что при подходящем c_3 в области

$$\tau-\frac{c_3}{\ln(KkU)}<|\operatorname{Im}w-t|<\tau+\frac{c_3}{\ln(KkU)},\quad \operatorname{Re}w>0$$

нет нулей ρ функции $f(w)$.

Согласно теореме 7.3.3, лемма 3.1 дает теперь для $\operatorname{Re}w>\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im}w=t\pm\tau$ оценку

$$\left|\frac{f'}{f}(w)\right|\leqslant\sum_{|\gamma-t\pm\tau|\leqslant 1}\left(\frac{c_3}{\ln(KkU)}\right)^{-1}+O(\ln(KkU))\ll\ln^2(KkU).$$

Этим утверждение леммы доказано.

Рассмотрим теперь для каждого $s\in R_1$ путь $C=C(s)$, который состоит из следующих отрезков:

$$\begin{aligned}C_{\pm 1}&=(2+i(t\pm\tau),\ 2\pm i\infty),\\ C_{\pm 2}&=(2+i(t\pm\tau),\ \sigma+i(t\pm\tau)),\\ C_0&=(\sigma+i(t-\tau),\ \sigma+i(t+\tau)),\end{aligned}$$

причем $\tau=\tau(s)$ $(2\leqslant\tau\leqslant 3)$ — число, указанное в лемме 3.3. Мы будем проходить путь $C(s)$ в направлении от $2-i\infty$ к $2+i\infty$. Докажем теперь для $y>0$ равенство

$$f(s,y)=-i\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{f'}{f}(w)\,e^{(s-w)^2y}\,dw\qquad(s\in R_1).\tag{3.20}$$

По теореме П.3.3 имеем

$$f(s,y)=-\sum_n b_n\Lambda(n)\,n^{-s}e^{-\ln^2 n/4y}\qquad(s\in R_1).\tag{3.21}$$

Не меняя значения интеграла в (3.20), мы можем заменить путь $(2-i\infty,\ 2+i\infty)$ на путь $C(s)$, так как для $s\in R_1$ между обоими путями нет нулей функции $f(w)$. Ведь для $s\in R_1$ путь $C(s)$ проходит целиком в области R_0, а также в области $\operatorname{Re}w>1$. Так как предполагалось, что $\chi\neq\chi_0$, то $f(w)$ не имеет полюсов.

Лемма 3.4. *При $y>1$ и $s\in R_1$ имеет место соотношение*

$$\operatorname{Re}f(s,y)=P(s)+R(s),\tag{3.22}$$

$$P(s)=-\operatorname{Re}i\left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{C_0}\sum_{|\gamma-\operatorname{Im}w|\leqslant 1}{}'\frac{e^{(s-w)^2y}}{w-\rho}\,dw\tag{3.23}$$

($\sum'$ *имеет то же значение, что в лемме* 3.1) *и*

$$|R(s)| < c_4 y^{\frac{1}{2}} \left(\left| \int\limits_{C_0} O\{\ln k(|\operatorname{Im} w| + 1)\} e^{(s-w)^2 y}\, dw \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \int\limits_{C_{\pm 1} C_{\pm 2}} \frac{f'}{f}(w)\, e^{(s-w)^2 y}\, dw \right| \right). \qquad (3.24)$$

Доказательство получается, если заменить путь $(2 - i\infty, 2 + i\infty)$ через $C(s)$, а в интеграле по C_0 преобразовать подинтегральное выражение согласно (3.15).

Лемма 3.5. *Если*

$$\sigma_1 = \beta' + \frac{2}{K \ln kU}, \quad s_1 = \sigma_1 + i\gamma', \qquad (3.25)$$

то при $y \geqslant (K \ln kU)^2$ *имеет место оценка*

$$P(s_1) > c_5 K \ln kU. \qquad (3.26)$$

Доказательство. В сумме из (3.23) при $\sigma = \sigma_1$, $w \in C_0$ имеем $\operatorname{Re} w = \sigma_1 > \operatorname{Re} \rho$ и, следовательно, $\operatorname{Re} 1/(w - \rho) > 0$. Кроме того, для $w \in C_0$ всегда $w = s + iu$, $-\tau \leqslant u \leqslant \tau$, и поэтому $\exp\{(s-w)^2\} > 0$. Если в интеграле (3.23) положить $w = s_1 + iu$, то сумма под интегралом при $|u| \leqslant 1$ содержит член с $\rho = \rho' = \beta' + i\gamma'$. Следовательно, интеграл не увеличится, если интегрировать только по $-1 \leqslant u \leqslant 1$ вместо $-\tau \leqslant u \leqslant \tau$ и оставить один этот член. Так как $y \geqslant (K \ln kU)^2$, то получаем

$$P(s_1) > \left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(\sigma_1 - \beta')\, e^{-u^2 y}}{(\sigma_1 - \beta')^2 + u^2}\, du =$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{|\xi| \leqslant y^{1/2}} \frac{(2/K \ln kU)\, e^{-\xi^2}}{(2/K \ln kU)^2 + y^{-1}\xi^2}\, d\xi \geqslant$$

$$\geqslant 2\pi^{-\frac{1}{2}} K \ln kU \int\limits_{|\xi| \leqslant K \ln kU} \frac{e^{-\xi^2}}{4 + \xi^2}\, d\xi.$$

Наконец,

$$K \ln kU > \ln 3 \quad (K > 2,\ k \geqslant 3,\ U = |\gamma_0| + 1 \geqslant 1),$$

откуда следует (3.26).

Положим теперь

$$y = (K \ln kU)^2. \qquad (3.27)$$

Лемма 3.6. *Для* $s \in R_1$ *имеет место оценка*

$$|R(s)| < c_6 \ln(KkU). \qquad (3.28)$$

Доказательство. Рассмотрим отдельные члены в правой части (3.24). Для $s \in R_1$, $w \in C_0$ $(\tau \leqslant 3)$ имеет место оценка

$$|\operatorname{Im} w| \leqslant |\operatorname{Im} w - t| + |t - \gamma'| + |\gamma' - \gamma_0| + |\gamma_0| \leqslant \leqslant 3 + 1 + 5K\lambda + |\gamma_0|,$$

и, следовательно, при $\lambda \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{10}$

$$\ln k(|\operatorname{Im} w| + 1) \ll \ln(KkU).$$

Если мы положим $w = s + iu$, $-\tau \leqslant u \leqslant \tau$ $(\tau \geqslant 3)$, то первое слагаемое справа в (3.24) будет иметь порядок

$$\ll y^{\frac{1}{2}} \ln(KkU) \int_{-\tau}^{\tau} e^{-u^2 y}\, du \ll \ln(KkU).$$

На $C_{\pm 1}$ функция $|f'(w)/f(w)|$ ограничена (см. (2.7)). Кроме того, там $w = 2 + i(t \pm \tau \pm \xi)$, $0 \leqslant \xi < \infty$, и так как для $s \in R_1$, $\delta < \frac{1}{10}$, $\sigma \geqslant \beta' + 3/2K \ln kU > 1 - \delta$, то

$$\operatorname{Re}(s - w)^2 = (2 - \sigma)^2 - (\tau + \xi)^2 \leqslant (1 + \delta)^2 - (\tau + \xi)^2 < -\xi^2 \quad (\tau \geqslant 2).$$

Таким образом,

$$y^{\frac{1}{2}} \int_{C_{\pm 1}} \left| \frac{f'}{f}(w)\, e^{(s-w)^2 y} \right| |dw| \ll y^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 y}\, d\xi = O(1).$$

На $C_{\pm 2}$ имеем $w = s \pm i\tau \pm \omega$, $0 \leqslant \omega \leqslant 2 - \sigma$ и $\operatorname{Re}(s - w)^2 = \omega^2 - \tau^2$. Так как $\omega^2 \leqslant (2 - \sigma)^2 < (1 + \delta)^2 < 3$, $\delta < \frac{1}{10}$, и $\tau^2 \geqslant 4$, то из (3.19) следует

$$y^{\frac{1}{2}} \int_{C_{\pm 2}} \left| \frac{f'}{f}(w)\, e^{(s-w)^2 y} \right| |dw| \ll y^{\frac{1}{2}} \int_0^{2-\sigma} \ln^2(KkU) \cdot e^{(\omega^2 - \tau^2) y}\, d\omega \ll \ll y^{\frac{1}{2}} \ln^2(KkU) \cdot e^{-y}.$$

Из (3.27) вытекает

$$y^{\frac{1}{2}} e^{-y} = (K \ln kU)\, e^{-(K \ln kU)^2} \ll \{\ln(KkU)\}^{-1}$$

$(K > 2,\ \ln kU > \ln 3 > 1)$. Тем самым (3.28) полностью доказано.

Лемма 3.7. *Пусть G^* — круг с центром в точке s^* и радиусом $1/2K \ln kU$, целиком лежащий в R_1. Тогда*

$$P(s) < 6P(s^*) + c_7 \ln(KkU) \qquad (s \in G^*). \tag{3.29}$$

Доказательство. Поскольку $K > 2$, $1/2K \ln kU < \frac{1}{2}$. Пусть $s^* = \sigma^* + it^*$. Пусть далее $s \in G^* \subset R_1$ и $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль, для которого при некотором $w = s + iu$ $(-\tau \leqslant u \leqslant \tau)$ выполняется неравенство $|\operatorname{Im} w - \gamma| \leqslant 1$. Тогда, так как

$$\sigma^* - \beta > 1/K \ln kU \quad \text{и} \quad |s^* + iu - (\beta + i\gamma)| > 1/K \ln kU,$$

имеем соответственно

$$\sigma - \beta \leqslant \sigma^* - \beta + 1/2K \ln kU < \frac{3}{2}(\sigma^* - \beta)$$

и

$$|w - \rho| \geqslant |s^* + iu - (\beta + i\gamma)| - 1/2K \ln kU > \frac{1}{2}|s^* + iu - (\beta + i\gamma)|.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \frac{1}{w - \rho} = \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t + u - \gamma)^2} < 6 \frac{\sigma^* - \beta}{(\sigma^* - \beta)^2 + (t^* + u - \gamma)^2},$$

если $s \in G^*$, $w = s + iu$, $-\tau \leqslant u \leqslant \tau$. Пусть для некоторого нуля $\beta + i\gamma$ $|\gamma - u - t^*| \leqslant 1$, но $|\gamma - u - t| > 1$, тогда, так как $|t^* - t| \leqslant \leqslant 1/2K \ln kU < \frac{1}{2}$, имеет место неравенство $|s^* + iu - (\beta + i\gamma)| \geqslant \geqslant |\gamma - u - t^*| \geqslant |\gamma - u - t| - |t^* - t| > \frac{1}{2}$. Число таких нулей при постоянных s^*, s, u по теореме 7.3.3

$$\ll \ln k\,(|\gamma_0| + 5K\lambda + 1 + \tau + 1/2K \ln kU + 2) \ll \ln(KkU).$$

Следовательно, если суммировать по нулям $\beta + i\gamma$, для которых $|\gamma - u - t^*| \leqslant 1$, $|\gamma - u - t| > 1$, то получим

$$\sum \frac{\sigma^* - \beta}{(\sigma^* - \beta)^2 + (t^* + u - \gamma)^2} = \sum \operatorname{Re} \frac{1}{s^* + iu - (\beta + i\gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum \frac{1}{|s^* + iu - (\beta + i\gamma)|} \ll \ln(KkU).$$

То же самое справедливо для сумм по нулям $\beta + i\gamma$, для которых $|\gamma - u - t| \leqslant 1$, $|\gamma - u - t^*| > 1$. В итоге получаем

$$\sum_{|\gamma - u - t| \leqslant 1} \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t + u - \gamma)^2} <$$
$$< 6 \sum_{|\gamma - u - t^*| \leqslant 1} \frac{\sigma^* - \beta}{(\sigma^* - \beta)^2 + (t^* + u - \gamma)^2} + O(\ln(KkU)).$$

Подставляя это в (3.23), видим, что

$$P(s) < 6P(s^*) + O\left\{ y^{\frac{1}{2}} \ln(KkU) \int_{-\tau}^{\tau} e^{-u^2 y}\, du \right\},$$

а отсюда следует (3.29).

В силу лемм 3.4—3.6 существует такое $K_0 > 2$, что для $K > K_0$

$$\operatorname{Re} f(s_1, y) > c_8 K \ln kU, \tag{3.30}$$

где s_1 определяется формулой (3.25). Пусть теперь $K > K_0$. Положим

$$Z = \exp\left\{ c_1 \frac{\ln\left(\lambda e c_1^{-1}\right)}{2\lambda} \ln kU \right\}, \tag{3.31}$$

где c_1 задается с помощью (3.16) [1]). Тогда имеем $1 < Z \leqslant (kU)^{\frac{1}{2}}$.

Лемма 3.8. *Если* $\sigma \geqslant 1 - \delta$, *то*

$$\sum_{n = p^m,\ m \geqslant 2} b_n \Lambda(n) n^{-s} e^{-\ln^2 p/4y} = O(1), \tag{3.32}$$

$$\sum_{p \leqslant Z} b_p \ln p \cdot p^{-s} e^{-\ln^2 p/4y} \ll \ln kU, \tag{3.33}$$

где y *задается равенством* (3.27).

Доказательство. По определению (3.14) коэффициентов b_n имеем $|b_n| \leqslant 2$. Поэтому доказательство равенств (3.32) и (3.33) протекает точно так же, как доказательство формул (2.36) и (2.37). При доказательстве последней формулы нужно заменить $\delta = \lambda/\ln k$ на $\delta = \lambda/\ln kU$ и принять во внимание, что $\lambda > c_1$ согласно (3.16) и $c_1 < \frac{1}{2}\left(c_1 < \frac{1}{10} \ln 3\right)$.

Положим теперь

$$f_1(s) = \sum_{Z < p \leqslant (kU)^6} b_p \ln p \cdot p^{-s} e^{-\ln^2 p/4y}, \tag{3.34}$$

$$f_2(s) = \sum_{p > (kU)^6} b_p \ln p \cdot p^{-s} e^{-\ln^2 p/4y}. \tag{3.35}$$

Если взять K достаточно большим, например $K > K_1 > K_0$, то из формул (3.32), (3.33) и (3.30) следует, что

$$|f_1(s_1)| + |f_2(s_1)| > 2 \ln kU. \tag{3.36}$$

[1]) Заметим, что может быть $\ln \lambda < 0$, но благодаря (3.16) всегда $\ln\left(\lambda e c_1^{-1}\right) > 1$.

Будем предполагать, что условие $K > K_1$ выполнено. Пусть теперь $r_1 = 1 + \delta - \sigma_1$, $z_0 = 1 + \delta + i\gamma'$ и D — круговое кольцо

$$r_1 - \frac{1}{2K \ln kU} \leqslant |s - z_0| \leqslant r_1 + \frac{1}{2K \ln kU}. \qquad (D)$$

Рассмотрим окружность Γ

$$|s - z_0| = \frac{1}{2}\delta. \qquad (\Gamma)$$

Так как $r_1 < 2\delta$, $1 + \delta + r_1 + 1/2K \ln kU < 1 + 3\delta + 1/2 \ln kU < 2$ и $r_1 + 1/2K \ln kU < 2\delta + 1/2K \ln kU < 1$, то $D \subset R_1$.

Лемма 3.9. *При подходящем K или по крайней мере для одного $s_2 \in D$ выполняется неравенство*

$$|f_1(s_2)| > \ln kU, \qquad (3.37)$$

или для некоторого $s_3 \in \Gamma$

$$|f_2(s_3)| > \ln kU \cdot e^{-c_9 K\lambda}. \qquad (3.38)$$

Доказательство. Предположим, что

$$|f_1(s)| \leqslant \ln kU \qquad (3.39)$$

для всех $s \in D$. Рассмотрим окружность Γ_1

$$|s - z_0| = r_1. \qquad (\Gamma_1)$$

Из (3.36), (3.39) и включения $s_1 \in \Gamma_1 \subset D$ следует

$$M_1 = \max_{\Gamma_1} |f_2(s)| > \ln kU. \qquad (3.40)$$

Пусть максимум достигается в точке s^*, т. е. $M_1 = |f_2(s^*)|$. Пусть далее $r_0 = 1/2K \ln kU$ и через G_0 обозначен круг

$$|s - s^*| \leqslant r_0. \qquad (G_0)$$

Имеет место включение $G_0 \subset D \subset R_1$ и, согласно лемме 3.7,

$$P(s) < 6P(s^*) + c_7 \ln(KkU), \qquad s \in G_0. \qquad (3.41)$$

Оценим теперь $|\operatorname{Re} f_2(s)|$ для $s \in G_0$. Так как по лемме 3.8

$$f(s, y) = f_1(s) + f_2(s) + O(\ln kU), \qquad \sigma \geqslant 1 - \delta, \qquad (3.42)$$

то из (3.39) следует, что

$$|\operatorname{Re} f_2(s)| \leqslant |\operatorname{Re} f(s, y)| + O(\ln kU), \qquad s \in D. \qquad (3.43)$$

Из (3.28) и $\operatorname{Re} f(s, y) = P(s) + R(s)$ $(s \in R_1)$ получаем

$$|\operatorname{Re} f(s, y)| \leqslant P(s) + c_6 \ln(KkU), \qquad s \in R_1. \qquad (3.44)$$

Из (3.42), (3.39), леммы 3.7 и равенства $P(s) = \operatorname{Re} f(s, y) - R(s)$ следует

$$P(s) < 6P(s^*) + c_7 \ln(KkU) < 6\{|f(s^*, y)| + |R(s^*)|\} + \\ + c_7 \ln(KkU) < 6\{|f_2(s^*)| + O(\ln kU) + c_6 \ln(KkU)\} + \\ + c_7 \ln(KkU) < 6M_1 + O(K \ln kU), \quad S \in G_0.$$

Отсюда, из (3.43), (3.44) и того, что $M_1 = |f_2(s^*)| > \ln kU$, вытекает

$$|\operatorname{Re} f_2(s)| < c_{10} K M_1. \tag{3.45}$$

Пусть теперь $r_0' = c_{11}/K \ln kU$, где $c_{11} < 1/2$ будет дальше определено точнее, а G_0' — область

$$|s - s^*| \leqslant r_0'. \tag{G_0'}$$

Из теоремы П. 4.2, согласно (3.45), получаем

$$|f_2(s) - f_2(s^*)| \leqslant \frac{2r_0'}{r_0 - r_0'}(c_{11}K + 1) M_1 < \frac{1}{2} M_1, \quad s \in G_0', \tag{3.46}$$

где c_{11} выбирается достаточно малым. Обозначим через Γ_2 окружность

$$|s - z_0| = r_1 - r_0' = r_2. \tag{Γ_2}$$

Так как G_0' имеет общую точку с Γ_2, то, принимая во внимание (3.46) и равенство $|f_2(s^*)| = M_1$, имеем

$$M_2 = \max_{\Gamma_2} |f_2(s)| > \frac{1}{2} M_1. \tag{3.47}$$

Применим теперь к окружностям Γ, Γ_2, Γ_1 теорему о трех кругах (теорема П. 9.2) и положим $M = \max\limits_{\Gamma} |f_2(s)|$, $r_3 = \delta/2$. Если c_{11} еще уменьшить, а K увеличить, то будут выполнены неравенства $r_3 < r_2 < r_1$. В самом деле, если взять $\frac{2}{K} < \frac{1}{4} c_1$, $c_{11} < \frac{1}{4} c_1$, то $\delta/2 < 1 + \delta - \sigma_1 - c_{11}/K \ln kU$, так как

$$1 + \delta/2 - \sigma_1 - c_{11}/K \ln kU > \delta/2 - 2/K \ln kU - c_{11}/K \ln kU = \\ = (\lambda/2 - 2/K - c_{11}/K)/\ln kU > 0.$$

Будем считать теперь K фиксированным. Теорема П. 9.2 дает тогда

$$\ln M_2 \leqslant \ln M \frac{\ln(r_1/r_2)}{\ln(r_1/r_3)} + \ln M_1 \frac{\ln(r_2/r_3)}{\ln(r_1/r_3)},$$

$$M \geqslant M_1^{\frac{\ln(r_3/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}} M_2^{\frac{\ln(r_1/r_3)}{\ln(r_1/r_2)}} > \ln kU \cdot 2^{-\frac{\ln(r_1/r_3)}{\ln(r_1/r_2)}}, \tag{3.48}$$

так как $M_2 > \frac{1}{2} M_1$, $M_1 > \ln kU$ и

$$\frac{\ln (r_3/r_2)}{\ln (r_1/r_2)} + \frac{\ln (r_1/r_3)}{\ln (r_1/r_2)} = 1.$$

Поскольку в силу (3.16) и (3.9)

$$c_{11}/\{(1+\delta-\sigma_1) K \ln kU\} < c_{11}/\{(\delta - 2/K \ln kU) K \ln kU\} <$$
$$< c_{11} \Big/ \left(\frac{1}{2} \delta K \ln kU\right) < 1/K,$$
$$\left(2/K < c_1/4 < \frac{1}{2} \delta \ln kU, \ c_{11} < c_1/4 < \frac{1}{2} \delta \ln kU\right),$$

имеем

$$\ln \frac{r_1}{r_2} = \ln \frac{1+\delta-\sigma_1}{1+\delta-\sigma_1-c_{11}/K \ln kU} >$$
$$> \frac{c_{11}}{(1+\delta-\sigma_1) K \ln kU} > \frac{c_{11}}{2\delta K \ln kU} = \frac{c_{11}}{2K\lambda}.$$

Учитывая, что $1-\sigma_1 < \delta$, мы получаем

$$\ln \frac{r_1}{r_3} = \ln \frac{1+\delta-\sigma_1}{\delta/2} < \ln 4. \tag{3.49}$$

Подставляя все это в (3.48) и принимая во внимание равенство $M = \max\limits_{\Gamma} | f_2(s) |$, получаем утверждение леммы.

Лемма 3.10. *Существуют константы* B, B_1 $(B > 12)$, *для которых выполнены следующие неравенства*:

$$\sum_{p > (kU)^B} \frac{\ln p}{p^{1+\delta/2}} < \frac{1}{8} \ln kU \cdot e^{-c_7 K\lambda}, \tag{3.50}$$

$$e^{-B_1\lambda} \sum_{Z < p \leqslant (kU)^6} \frac{1}{p^{1-\delta}} < \frac{1}{12}, \tag{3.51}$$

$$e^{-B_1\lambda} \sum_{(kU)^6 < p \leqslant (kU)^B} \frac{\ln p}{p^{1+\delta/2}} < \frac{1}{4} \ln kU \cdot e^{-c_9 K\lambda}. \tag{3.52}$$

Доказательство. Так как $\psi(x) \ll x$, то по теореме П. 1.4

$$\sum_{p > (kU)^B} \frac{\ln p}{p^{1+\delta/2}} \ll \int\limits_{(kU)^B}^{\infty} \xi \left| d\, \frac{1}{\xi^{1+\delta/2}} \right| \ll \frac{1}{\delta} (kU)^{-B\delta/2} = \frac{\ln kU}{\lambda} e^{-B\lambda/2}$$

и для достаточно большого $B = B(K) > 12$ (это необходимо для дальнейшего) получаем (3.50). Далее имеем

$$\sum_{Z < p \leqslant (kU)^6} \frac{1}{p^{1-\delta}} \leqslant (kU)^{6\delta} \sum_{Z < p \leqslant (kU)^6} \frac{1}{p} =$$

$$= e^{6\lambda}\left\{\ln 6 - \ln\left(c_1 \frac{\ln(\lambda e/c_1)}{2\lambda}\right\} + O(1)\right\},$$

так как $\sum\limits_{p \leqslant x} 1/p = \ln_2 x + O(1)$ и $Z = \exp\left\{c_1 \dfrac{\ln\left(\lambda e c_1^{-1}\right)}{2\lambda} \ln kU\right\}$.

Отсюда следует (3.51). Наконец,

$$\sum_p \frac{\ln p}{p^{1+\delta/2}} \leqslant -\frac{\zeta'}{\zeta}\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) \ll \frac{1}{\delta} = \frac{\ln kU}{\lambda},$$

и так как $\lambda > c_1$, отсюда для достаточно большого B_1 получается (3.52). Выбор B_1 зависит от величины K, но K уже выбрано, и эту зависимость можно особо не отмечать. Поэтому лемма 3.10 полностью доказана.

С этого момента будем считать, что константы B, B_1 определены так, как выше. Если для некоторого $p \leqslant (kU)^B$

$$1 - \frac{1}{p^{\delta_1}} > e^{-B_1\lambda}, \tag{3.53}$$

то отсюда уже следует утверждение теоремы 3.1. В самом деле, тогда

$$1 - (kU)^{-B\delta_1} > e^{-B_1\lambda}$$

и, следовательно,

$$e^{B_1\lambda} > \frac{1}{1 - (kU)^{-B\delta_1}} > \frac{1}{B\delta_1 \ln kU},$$

так как $(kU)^{-B\delta_1} < 1$ и $1/(1-\xi) > \{\ln(1/\xi)\}^{-1}$ для $0 < \xi < 1$. Отсюда вытекает, что

$$\lambda > \frac{1}{B_1} \ln \frac{1}{B\delta_1 \ln kU},$$

и при $A_1 e = 1/B$, $A_2 = 1/B_1$ получаем утверждение теоремы 3.1.

Теперь мы будем предполагать, что

$$1 - \frac{1}{p^{\delta_1}} \leqslant e^{-B_1\lambda} \quad (p \leqslant (kU)^B). \tag{3.54}$$

Обозначим через $M(Z)$ количество натуральных чисел, которые состоят только из тех простых делителей $p \geqslant Z$, для которых $\chi_1(p) = 1$.

Лемма 3.11. *Если* $L(s, \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, *имеет нуль* $\rho_0 = 1 - \delta + i\gamma_0 \neq \beta_1$ *рассмотренного выше вида, то справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{(kU)^6 < m \leqslant (kU)^B \\ m \in M(Z)}} \frac{1}{m} > e^{-c_{12}\lambda}. \tag{3.55}$$

Доказательство. Предположим сначала, что в лемме 3.9 верно первое утверждение. Из (3.37) в силу (3.34) и (3.14) следует

$$\sum_{Z < p \leqslant (kU)^6} \frac{1 + \chi_1(p)\, p^{-\delta_1}}{p^{1-\delta}} \ln p > \ln kU,$$

так как $s_2 \in D$, $\operatorname{Re} s_2 > 1 - \delta$, $|b_p| = 1 + \chi_1(p)\, p^{-\delta_1}$. Мы предполагаем, что $p \nmid k$. Если $p \mid k$, то $|b_p| = 0$. В этой сумме всегда $\ln p \leqslant 6 \ln kU$, следовательно,

$$\sum_{Z < p \leqslant (kU)^6} \frac{1 + \chi_1(p)\, p^{-\delta_1}}{p^{1-\delta}} > \frac{1}{6}.$$

Опять предполагается, что $p \nmid k$. Слагаемые, соответствующие тем p, для которых $\chi_1(p) = -1$, согласно (3.54) и (3.51), меньше в сумме, чем $1/12$. Поэтому

$$\sum_{Z < p \leqslant (kU)^6,\ \chi_1(p) = 1} \frac{1}{p^{1-\delta}} > \frac{1}{24}, \tag{3.56}$$

так как $1 + p^{-\delta_1} < 2$. Разобьем теперь интервал $Z < p \leqslant (kU)^6$ на подинтервалы (S_n), $(kU)^{6 \cdot 2^{-n}} < p \leqslant (kU)^{6 \cdot 2^{1-n}}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, причем $6 \cdot 2^{-N} \ln kU \leqslant \ln Z < 6 \cdot 2^{1-N} \ln kU$. Так как $\ln Z = \left(c_1 \ln \frac{\lambda e}{c_1} \Big/ 2\lambda\right) \times \ln kU$, то

$$N \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{24\lambda}{c_1 \ln(\lambda e / c_1)} < c_{13} \ln \frac{\lambda e}{c_1}$$

(для S_N нижняя оценка заменяется на Z). Согласно (3.56), существует такой подинтервал S_n, что

$$\sum_{p \in S_n,\ \chi_1(p) = 1} \frac{1}{p^{1-\delta}} > \frac{c_{14}}{\ln(\lambda e / c_1)} \qquad (0 < c_{14} < 1).$$

Возводя обе части этого неравенства в степень 2^n, получаем

$$(2^n)! \sum_{\substack{(kU)^6 < m \leqslant (kU)^{12} \\ m \in M(Z)}} \frac{1}{m} (kU)^{12\delta} > \left(\frac{c_{14}}{\ln(\lambda e / c_1)}\right)^{2^n} \geqslant \left(\frac{c_{14}}{\ln(\lambda e / c_1)}\right)^{\frac{24\lambda}{c_1 \ln(\lambda e / c_1)}},$$

так как $c_{14} < 1$, $\ln(\lambda e / c_1) > 1$, $n \leqslant N$ и каждое $m \in M(Z)$ можно представить в виде произведения 2^n простых чисел $p \in S_n$ самое

самое большее $(2^n)!$ способами. Деля это неравенство на $(2^n)!(kU)^{12\delta}$, получаем (3.55), поскольку

$$\left(2^n\right)!(kU)^{12\delta} < 2^{N\cdot 2^N}(kU)^{12\delta} < e^{c\lambda}$$

и мы предполагали $B > 12$.

Теперь допустим, что в лемме 3.9 верно второе утверждение. Тогда из (3.38) и неравенства $\operatorname{Re} s_3 \geqslant 1 + \delta/2$ следует

$$\sum_{p > (kU)^6} \frac{1 + \chi_1(p)\, p^{-\delta_1}}{p^{1+\delta/2}} \ln p > \ln kU \cdot e^{-c_9 K\lambda}.$$

Из $0 < 1 + \chi_1(p)\, p^{-\delta_1} < 2$ и (3.54), мы, принимая во внимание (3.50) и (3.52), получаем

$$2 \sum_{\substack{(kU)^6 < p \leqslant (kU)^B \\ \chi_1(p) = 1}} \frac{\ln p}{p^{1+\delta/2}} > \ln kU \cdot e^{-c_9 K\lambda} - 2 \sum_{p > (kU)^B} \frac{\ln p}{p^{1+\delta/2}} -$$

$$- e^{-B_1\lambda} \sum_{(kU)^6 < p \leqslant (kU)^B} \frac{\ln p}{p^{1+\delta/2}} > \frac{1}{2} \ln kU \cdot e^{-c_9 K\lambda}.$$

Отсюда снова следует неравенство (3.55), так как $Z < (kU)^6$ и для $(kU)^6 < p \leqslant (kU)^B$, $\chi_1(p) = 1$ имеем $p \in M(Z)$.

Положим теперь

$$a_n = \sum_{d \mid n} \chi_1(d) = \prod_{p^m \mid n,\ p^{m+1} \nmid n} \{1 + \chi_1(p) + \ldots + \chi_1(p^m)\}, \tag{3.57}$$

$$S = S(k, U) = S(k, \gamma_0) = \sum_{n \leqslant (kU)^2} \frac{a_n}{n}. \tag{3.58}$$

В гл. IV (лемма 4.4.1) было доказано, что $a_n \geqslant 0$, $a_{n^2} \geqslant 1$, и что a_n представляет собой мультипликативную функцию n.

Лемма 3.12. *Если некоторая функция $L(s, \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, имеет нуль $\rho_0 = 1 - \delta + i\gamma_0 \neq \beta_1$ рассматриваемого вида, то*

$$L(1, \chi_1) > \frac{S}{\ln kU} e^{-c_{15}\lambda}. \tag{3.59}$$

Доказательство. Пусть $H(Z)$ — множество натуральных чисел, не больших, чем $(kU)^2$, которые содержат только простые делители, не превосходящие Z. Пусть, далее, $F(Z)$—множество натуральных чисел, которые содержат только простые делители p, $Z < p \leqslant$ $\leqslant (kU)^2$. Рассмотрим произведение [1])

$$\sum_{n \in H(Z)} \frac{a_n}{n} \prod_{Z < p \leqslant (kU)^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} = \sum_{n \in H(Z)} \frac{a_n}{n} \sum_{m \in F(Z)} \frac{d(m)}{m}. \tag{3.60}$$

[1]) Это произведение равно квадрату $\sum_{m \in F(Z)} 1/m$.

В последней сумме всегда $(n, m) = 1$, $a_m \leqslant d(m)$, следовательно, $a_n d(m) \geqslant a_n a_m = a_{nm}$. Поэтому

$$\sum_{n \in H(Z)} \frac{a_n}{n} \sum_{m \in F(Z)} \frac{d(m)}{m} \geqslant \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant (kU)^2} \frac{a_\nu}{\nu} = S. \tag{3.61}$$

Согласно (1.4.1), имеем при подходящем c

$$\prod_{Z < p \leqslant (kU)^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} = \left(\frac{c \ln (kU)^2 + O(1)}{c \ln Z + O(1)}\right)^2 < c_{16} \lambda^2.$$

Подставляя это в (3.60) и принимая во внимание (3.61), получаем

$$\sum_{n \in H(Z)} \frac{a_n}{n} > \frac{S}{c_{16} \lambda^2}. \tag{3.62}$$

Если $M(Z)$ — величина, определенная перед леммой 3.11, то имеем

$$\sum_{n \in H(Z)} \frac{a_n}{n} \sum_{\substack{(kU)^6 < m \leqslant (kU)^B \\ m \in M(Z)}} \frac{1}{m} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n \in H(Z)} \frac{a_n}{n} \sum_{\substack{(kU)^6 < m \leqslant (kU)^B \\ (m, [Z]!) = 1}} \frac{a_m}{m} \leqslant \sum_{(kU)^6 < \nu \leqslant (kU)^{B+2}} \frac{a_\nu}{\nu}, \tag{3.63}$$

так как $\chi_1(p) = 1$ для каждого p, $p \mid m$, и поэтому для каждого $m \in M(Z)$ имеем $(m, [Z]!) = 1$ и $a_m \geqslant 1$. Теперь нужно оценить правую часть (3.63) с помощью функции $L(1, \chi_1)$. Если $x \geqslant 2$, то

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} = \sum \sum_{dm \leqslant x} \frac{\chi_1(d)}{dm}. \tag{3.64}$$

С помощью частного суммирования (теорема П. 1.4) при $\chi \neq \chi_0$ получаем

$$\left| \sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{n} \right| \leqslant \int_x^\infty \left| \sum_{x < n \leqslant \xi} \chi(n) \right| \left| d \frac{1}{\xi} \right| < \frac{k}{x}.$$

Здесь сумма под интегралом по абсолютной величине меньше k. Точно так же получается

$$\left| \sum_{n > x} \frac{\chi(n)}{n} \ln n \right| \leqslant \int_x^\infty \left| \sum_{x < n \leqslant \xi} \chi(n) \right| \left| d \frac{\ln \xi}{\xi} \right| < k \frac{\ln x}{x}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_1(n)}{n} = L(1, \chi_1) + O\left(\frac{k}{x}\right) \quad (x \geqslant 1),$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi_1(n)}{n} \ln n = -L'(1, \chi_1) + O\left(k \frac{\ln x}{x}\right) \quad (x \geqslant 2).$$

Поскольку $\sum\limits_{n \leqslant x} 1/n = \ln x + c + O(1/x)$ $(x \geqslant 1)$, где c — константа Эйлера, то из (3.64) вытекает

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} = \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \frac{\chi_1(d)}{d} \sum_{m \leqslant x/d} \frac{1}{m} + \sum_{m < \sqrt{x}} \frac{1}{m} \sum_{\sqrt{x} < d \leqslant x/m} \frac{\chi_1(d)}{d} =$$

$$= \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \frac{\chi_1(d)}{d} \left\{\ln \frac{x}{d} + c + O\left(\frac{d}{x}\right)\right\} + \sum_{m < \sqrt{x}} \frac{1}{m} O\left(\frac{k}{x^{1/2}} + \frac{km}{x}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} = L(1, \chi_1)(\ln x + c) + L'(1, \chi_1) + O\left(k \frac{\ln x}{x^{1/2}}\right). \quad (3.65)$$

Если в этом выражении положить сначала $x = (kU)^{B+2}$, а потом $x = (kU)^6$ и вычесть одно из другого, то получим

$$\sum_{(kU)^6 < n \leqslant (kU)^{B+2}} \frac{a_n}{n} = L(1, \chi_1)(B - 4) \ln kU + O\left(\frac{6 \ln kU}{(kU)^3}\right) <$$

$$< c_{17} L(1, \chi_1) \ln kU, \quad (3.66)$$

так как по теореме Зигеля (4.2.19) $L(1, \chi_1) > c(\varepsilon) k^{-\varepsilon}$. Отсюда и из (3.63) с помощью леммы 3.11 получаем

$$\sum_{n \in H(Z)} \frac{a_n}{n} \cdot e^{-c_{12}\lambda} < c_{17} L(1, \chi_1) \ln kU.$$

Если подставить это в (3.62), то получится утверждение (3.59).

Доказательство теоремы 3.1. Для $\sigma > 1$ имеем

$$\zeta(s) L(s, \chi_1) = \sum_n a_n n^{-s}. \quad (3.67)$$

С помощью формулы Меллина (теорема П. 3.2) при $X > 0$ получаем

$$\sum_n a_n n^{-\beta_1} e^{-Xn} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2 - i\infty}^{2 + i\infty} X^{\beta_1 - s} \Gamma(s - \beta_1) \zeta(s) L(s, \chi_1)\, ds.$$

Заменим путь $(2-i\infty,\ 2+i\infty)$ на путь $(-1/2-i\infty,\ -1/2+i\infty)$. Между обоими путями подинтегральная функция имеет только полюс в точке $s=1$ [1]) и замена возможна, так как (по теоремам П. 6.2, 7.3.1 и 4.5.4) при $T\to\infty$

$$\int\limits_{-1/2\pm iT}^{2\pm iT} \ll X^{\beta_1+1/2} T e^{-1/2\pi T} (kT)^{c_{18}} \to 0.$$

Положим $X=(kU)^{-3/2}$. Тогда из теорем П. 6.2, 7.3.1 и неравенств $\beta_1 \geqslant 1-1/10$, $\beta_2+1/2>4/3$ следует

$$\int\limits_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} X^{\beta_1-s}\Gamma(s-\beta_1)\zeta(s)L(s,\ \chi_1)\,ds \ll$$

$$\ll \int\limits_0^\infty (kU)^{-3/2(\beta_1+1/2)} \min\left(1,\ t^{-1-\beta_1}\right) e^{-1/2\pi t}(t+2)^{3/2}\left\{k(t+2)\right\}^{3/2} dt \ll (kU)^{-1/2}.$$

В итоге при $X=(kU)^{-3/2}$ получаем

$$\sum_n a_n n^{-\beta_1} e^{-Xn} = X^{-\delta_1}\Gamma(\delta_1)L(1,\ \chi_1)+O\left\{(kU)^{-1/2}\right\}.$$

Теперь с помощью (П. 1.12) и неравенства $a_n \leqslant d(n) \leqslant n$ получим

$$\sum_{n>(kU)^2} a_n n^{-\beta_1} e^{-Xn} \leqslant \sum_{n>(kU)^2} n e^{-Xn} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n>(kU)^2} n\, 10!\,(Xn)^{-10} \ll X^{-10}(kU)^{-16} = (kU)^{-1},$$

$$\sum_{n\leqslant(kU)^2} a_n n^{-\beta_1} e^{-Xn} = X^{-\delta_1}\Gamma(\delta_1)L(1,\ \chi_1)+O\left\{(kU)^{-1/2}\right\}. \qquad (3.68)$$

Далее если потребовать, чтобы было

$$\delta_1 \ln kU \leqslant c_1, \qquad (3.69)$$

где c_1 было определено так, что для любого нуля $\beta_0+i\gamma_0 \neq \beta_1$, $1-\beta_0=\lambda/\ln kU$ всегда $\lambda>c_1$ [2]), то получим оценку

$$\sum_{n\leqslant(kU)^2} a_n n^{-\beta_1} e^{-Xn} = \sum_{n\leqslant(kU)^2} \frac{a_n}{n} n^{\delta_1} e^{-Xn} \leqslant (kU)^{2\delta_1} S \leqslant c_{19} S, \qquad (3.70)$$

---

[1]) Правда, $\Gamma(s-\beta_1)$ имеет полюс при $-1+\beta_1$. Но вычет в этом полюсе есть $O\left[(kU)^{-0,4}\right]$ и на дальнейшем не сказывается.

[2]) Это означает ограничение на β_1. А именно, так как $U=|\gamma_0|+1 \geqslant 1$, то разрешаются только те β_1, для которых $\delta_1 \ln k \leqslant c_1$, т. е. $\beta_1 \geqslant 1-c_1/\ln k$. При постоянном β_1 это означает ограничение на γ_0.

в которой S — сумма из леммы 3.12. Кроме того,

$$S > 1,$$

так как $a_1 = 1$. Поэтому из (3.70), (3.68), неравенства $L(1, \chi_1) > c(\varepsilon) k^{-\varepsilon}$ и того, что $X^{-\delta_1} > 1$ и $\Gamma(\delta_1) \sim \frac{1}{\delta_1}$ при $\delta_1 \to 0$, получаем

$$S > c_{20} X^{-\delta_1} \Gamma(\delta_1) L(1, \chi_1) > c_{21} \delta_1^{-1} L(1, \chi_1)\ ^{1)}. \tag{3.71}$$

Теперь (3.71) вместе с (3.59) дает

$$1 > \frac{c_{21}}{\delta_1 \ln kU} e^{-c_{15}\lambda}$$

и мы будем предполагать, что $c_{21} < c_1 e$ (этого всегда можно добиться). Отсюда следует, что

$$\lambda > c_{15}^{-1} \ln \frac{c_{21}}{\delta_1 \ln kU}.$$

Тем самым утверждение теоремы 3.1 доказано также при предположении (3.54) для констант $A_1 = c_{21}/e$ и $A_2 = 1/c_{15}$.

При противоположном предположении, по ранее сказанному, можно получить утверждение теоремы с $A_1 = 1/Be$ и $A_2 = 1/B_1$. Таким образом, теорема 3.1 верна также при

$$A_1 = \min(1/Be,\ c_{21}/e), \quad A_2 = \min(1/B_1,\ 1/c_{15}).$$

§ 4. Доказательство теоремы Линника

Теорема 4.1. *Пусть* $k \geqslant 2$, $(l, k) = 1$, $l < k$ *и* $p_1(k, l)$ — *наименьшее простое число в арифметической прогрессии* $mk + l$, $m = 1, 2, \ldots$ *Тогда имеется такая константа* C, *не зависящая от* k, *что*

$$p(k, l) < k^C. \tag{4.1}$$

Доказательство. Мы можем предполагать, что $k \geqslant 3$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(y, k, l) = \varphi(k) \sum_{n \equiv l \pmod k} \Lambda(n)\, n^{\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 n/4y}. \tag{4.2}$$

Положив в теореме 7.6.1 $b = {}^1/_2$ при $y \geqslant 1$, получаем

$$\Phi(y, k, l) = 2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y} \Big[1 - (\chi_1)(l)\, e^{-\delta_1(3-\delta_1)y} - \\ - \sum_{\chi} \overline{\chi}(l) \sum_{\rho(\chi)}{}' \exp(-\{\delta(3-\delta) + \gamma^2 - i\gamma(3-2\delta)\} y) \Big] + \\ + O(\varphi(k) \ln k), \tag{4.3}$$

[1]) Мы взяли $c_1 < {}^1/_{10} \ln 3$, поэтому из (3.69) следует, что $\delta_1 < c_1/\ln kU < {}^1/_{10}$.

где двойная сумма распространяется на все нули $\rho=\beta+i\gamma$ всех функций $L(s,\chi)$ в области $0\leqslant\sigma<1$, кроме исключительного нуля $\beta_1=1-\delta_1$, и обозначено $1-\beta=\delta$. Пусть теперь

$$y=\ln k^{\eta}=\eta\ln k, \tag{4.4}$$

где $\eta\geqslant\eta_0>0$ и η_0 будет выбрано позднее. Разделим (4.3) на $2\sqrt{\pi y}\,e^{\frac{9}{4}y}$ и проинтегрируем N раз по η $(N\geqslant 2)$. Положим

$$J(\eta_0)=J(\eta_0,k,l,N)=$$

$$=\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0+1}\int\limits_{\eta_{N-1}}^{\eta_{N-1}+1}\ldots\int\limits_{\eta_1}^{\eta_1+1}\Phi(y,k,l)\left(2\sqrt{\pi y}\,e^{\frac{9}{4}y}\right)^{-1}d\eta\,d\eta_1\ldots d\eta_{N-1}=$$

$$=\int\limits_{(\eta_0)}\Phi(y,k,l)\left(2\sqrt{\pi y}\,e^{\frac{9}{4}y}\right)^{-1}d(\eta), \tag{4.5}$$

причем интегрирование ряда проводится сначала по η, потом по η_1 и т. д. и до конца доказательства $\int\limits_{(\eta_0)}d(\eta)$ используется как сокращенное обозначение N-кратного интеграла в формуле (4.5). Так как $\varphi(k)<k$, $y=\ln k\geqslant\eta_0\ln k$, то

$$\left(2\sqrt{\pi y}\,e^{\frac{9}{4}y}\right)^{-1}\ll\eta_0^{-\frac{1}{2}}\ln^{-\frac{1}{2}}k e^{-\frac{9}{4}\eta_0},$$

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0+1}\int\limits_{\eta_{N-1}}^{\eta_{N-1}+1}\ldots\int\limits_{\eta_1}^{\eta_1+1}d\eta\,d\eta_1\ldots d\eta_{N-1}=1,$$

и из (4.3) следует

$$J(\eta_0)=1-\chi_1(l)\int\limits_{(\eta_0)}e^{-\delta_1(3-\delta_1)\eta\ln k}\,d(\eta)-$$

$$-\sum_{\chi}\bar\chi(l)\sum_{\rho(\chi)}{}'\int\limits_{(\eta_0)}\exp\left(-\{\delta(3-\delta)+\gamma^2-i\gamma(3-2\delta)\}\eta\ln k\right)d(\eta)+$$

$$+O\left(\ln^{\frac{1}{2}}k\cdot\eta_0^{-\frac{1}{2}}k^{1-\frac{9}{4}\eta_0}\right). \tag{4.6}$$

Для двойной суммы из (4.6) получаем

$$\left|\sum_{\chi}\bar\chi(l)\sum_{\rho(\chi)}{}'\int\limits_{(\eta_0)}\exp(\quad)\,d(\eta)\right|<$$

$$<\left(\frac{2}{\ln k}\right)^{N}\sum_{\chi}\sum_{\rho}{}'\exp\{-(2\delta+\gamma^2)\eta_0\ln k\}\,|2\delta+\gamma^2+i\gamma|^{-N}. \tag{4.7}$$

Действительно,

$$\int\limits_{(\eta_0)} \exp\{-A(\delta,\gamma)\eta\ln k\}\,d\eta =$$
$$=\{A(\delta,\gamma)\ln k\}^{-N}\exp\{-A(\delta,\gamma)\eta_0\ln k\}\,(1-\exp\{-A(\delta,\gamma)\ln k\})^N,$$

где

$$A(\delta,\gamma)=\delta(3-\delta)+\gamma^2-i\gamma(3-2\delta),$$
$$\delta(3-\delta)\geqslant 2\delta>0\quad(0<\delta\leqslant 1),\quad |\gamma(3-2\delta)|\geqslant|\gamma|,$$

следовательно, $|A(\delta,\gamma)|\geqslant|2\delta+\gamma^2+i\gamma|$, а также $|1-$ $-\exp\{-A(\delta,\gamma)\ln k\}|<2$, поскольку $\operatorname{Re} A(\delta,\gamma)>0$. Суммирование в двойной сумме в правой части (4.7) проводится по всем нулям всех функций $L(s,\chi)$ в области $0\leqslant\sigma<1$. Для оценки этой суммы применим теперь теоремы из § 2 и 3. Обозначим $\beta_1=1-\delta_1$ исключительный нуль из теоремы 4.6.9. Положим

$$\lambda_0=A_3\ln\frac{eA_3}{\delta_0\ln k}, \tag{4.8}$$

где A_1, A_2 — константы из теоремы 3.1, а A_3 удовлетворяет условию $0<A_3\leqslant\frac{1}{5}\min\left(A_1, A_2, \frac{1}{2}\right)$ и настолько мало, что в области $1-A_3/\ln k\leqslant\sigma<1$, $|t|\leqslant k^4$, кроме β_1, нет нулей ни одной функции $L(s,\chi)$ (такой выбор A_3 возможен по теореме 4.6.9) и

$$\delta_0=\begin{cases}\delta_1 & \text{при}\quad \delta_1\leqslant\dfrac{A_3}{\ln k},\\[2mm] \dfrac{A_3}{\ln k} & \text{при}\quad \delta_1>\dfrac{A_3}{\ln k},\\[2mm] \dfrac{A_3}{\ln k}, & \text{если нет исключительного нуля.}\end{cases} \tag{4.9}$$

Очевидно, что $\lambda_0\geqslant A_3$. В области

$$1-\frac{\lambda_0}{\ln k}\leqslant\sigma\leqslant 1,\qquad |t|\leqslant k^4-1 \tag{4.10}$$

нет нулей никакой функции $L(s,\chi)$, образованной с характером χ по $\operatorname{mod} k$, $\chi\neq\chi_0$, кроме быть может $\rho=\beta_1$. Если $\delta_1\leqslant A_2/\ln k$, это следует из теоремы 3.1, так как при $|t|\leqslant k^4-1$

$$\frac{A_2}{\ln k(|t|+1)}\ln\frac{eA_1}{\delta_1\ln k(|t|+1)}\geqslant\frac{A_2}{5\ln k}\ln\frac{eA_1}{5\delta_1\ln k}\geqslant\lambda_0$$

и

$$\delta_1\ln k(|t|+1)\leqslant 5\delta_1\ln k\leqslant 5A_3\leqslant A_1.$$

Если же $\delta_1>A_3/\ln k$, то $\lambda_0/\ln k=A_3/\ln k$, и в области $\sigma\geqslant 1-A_3/\ln k$, $|t|\leqslant k^4$ по определению A_3 нет нулей. По теореме Зигеля

$\lambda_0 = o(\ln k)$, следовательно, для достаточно большого $k > k_0$ будем иметь $\lambda_0 \leqslant \frac{1}{2}\ln k$.

Разделим теперь нули всех функций $L(s, \chi) \bmod k$, по которым производится суммирование в правой части (4.7), на четыре группы. К каждой группе отнесем нули, которые лежат в области одного из следующих четырех типов $G^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$: (области различных типов могут пересекаться)

$$0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad n \leqslant |t| \leqslant n+1 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{$G_n^{(1)}$}$$

$$\frac{\lambda_0 + n}{\ln k} \leqslant 1 - \sigma \leqslant \frac{\lambda_0 + n + 1}{\ln k}, \quad |t| \leqslant \frac{e^{\lambda_0 + n + 1}}{\ln k}, \tag{$G_n^{(2)}$}$$

$$(n = 0, 1, \ldots, n_0 = [\ln_2 k]),$$

$$\frac{\lambda_0}{\ln k} \leqslant 1 - \sigma \leqslant \frac{\lambda_0 + n + k}{\ln k}, \quad \frac{e^{\lambda_0 + n}}{\ln k} \leqslant |t| \leqslant \frac{e^{\lambda_0 + n + 1}}{\ln k} -, \tag{$G_n^{(3)}$}$$

$$(n = 0, 1, \ldots, n_0),$$

$$\frac{\ln_2 k + n}{\ln k} \leqslant 1 - \sigma \leqslant \frac{\ln_2 k + n + 1}{\ln k}, \quad |t| \leqslant 1, \tag{$G_n^{(4)}$}$$

$$(n = 0, 1, \ldots, n_1 = [\ln k]).$$

Число нулей в области $G_n^{(i)}$ обозначим через $N_n^{(i)}$. Из теоремы 7.3.3, теоремы 2.2 и того, что в области $-1 < \sigma < 0$ нет нулей, следует

$$\begin{aligned} N_n^{(1)} &< c_1 \varphi(k) \ln kn && (n = 1, 2, \ldots), \\ N_n^{(2)},\ N_n^{(3)} &< e^{A(\lambda_0 + n + 1)} && (0 \leqslant n \leqslant n_0), \\ N_n^{(4)} &< e^{A(\ln_2 k + n + 1)} && (0 \leqslant n \leqslant n_1). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Последнее неравенство получается из теоремы 2.2 вследствие того, что $e^{\ln_2 k + n + 1}/\ln k > 1$. Оценим теперь сумму в правой части (4.7), причем оценим отдельно суммы по нулям из разных областей $G_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. В зависимости от того, какой из областей $G_n^{(1)}$, $G_n^{(2)}$, $G_n^{(3)}$, $G_n^{(4)}$ принадлежат нули $\beta + i\gamma = 1 - \delta + i\gamma$, имеют место неравенства

$$\begin{gathered} \exp\{-(2\delta + \gamma^2)\eta_0 \ln k\} \leqslant e^{-n^2\eta_0 \ln k}, \quad e^{-2(\lambda_0 + n) n_0}, \\ e^{-2\lambda_0 n_0}, \quad e^{-2(\ln_2 k + n)\eta_0}, \end{gathered} \tag{4.12}$$

и

$$\begin{gathered} |2\delta + \gamma^2 + i\gamma|^{-N} \leqslant n^{-2N}, \quad \left(\frac{2(\lambda_0 + n)}{\ln k}\right)^{-N}, \\ \left(\frac{e^{\lambda_0 + n}}{\ln k}\right)^{-N}, \quad \left(2\,\frac{\ln_2 k + n}{\ln k}\right)^{-N}. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Предположив, что $\eta_0 \geqslant A + 3$, выберем $N = [A] + 3$ и найдем

$$\left(\frac{2}{\ln k}\right)^N \sum_{\chi} \sum_{\rho}{}' \exp\{-(2\delta + \gamma^2)\,\eta_0 \ln k\}\,|\,2\delta + \gamma^2 + i\gamma\,|^{-N} \leqslant$$

$$\leqslant \sum{}^{(1)} + \sum{}^{(2)} + \sum{}^{(3)} + \sum{}^{(4)}, \qquad (4.14)$$

где суммирование производится по нулям из

$$\sum G_n^{(1)}, \quad \sum G_n^{(2)}, \quad \sum G_n^{(3)}, \quad \sum G_n^{(4)}.$$

Тогда для $k > k_0$ получаем из формул (4.11)—(4.13)

$$\sum{}^{(1)} < c_1 \left(\frac{2}{\ln k}\right)^N k \sum_n e^{-n^2 \eta_0 \ln k} n^{-2N} \ln kn < c_2 2^N (\ln k)^{1-N} k^{1-\eta_0} <$$

$$< c_3 k^{1-\eta_0} < c_3 e^{-\lambda_0 \eta_0},$$

так как $N = [A] + 3$, $\eta_0 \geqslant A + 3$, $1 - \eta_0 < -\frac{1}{2}\eta_0$ и $\frac{1}{2}\ln k \geqslant \lambda_0$. Из $\lambda_0 \geqslant A_3$ следует, что

$$-2\lambda_0\eta_0 + A\lambda_0 = -\lambda_0\eta_0 - \lambda_0(\eta_0 - A), \qquad \eta_0 - A \geqslant 3$$

и

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant n_0} (\lambda_0 + n)^{-N} = \lambda_0^{-N} + O(1) = O(1), \qquad (N \geqslant 3).$$

Поэтому для второй суммы имеет место оценка

$$\sum{}^{(2)} < \sum_{0 \leqslant n \leqslant n_0} e^{-2(\lambda_0 + n)\,\eta_0} (\lambda_0 + n)^{-N} e^{A(\lambda_0 + n + 1)} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{-2\lambda_0\eta_0 + A(\lambda_0 + 1)\} \sum_{0 \leqslant n \leqslant n_0} e^{-n(\eta_0 - A)} (\lambda_0 + n)^{-N} < c_4 e^{-\lambda_0\eta_0}.$$

Далее, так как $N - A \geqslant 2$, то имеем

$$\sum{}^{(3)} < 2^N \sum_{0 \leqslant n \leqslant n_0} e^{-2\lambda_0\eta_0} e^{-N(\lambda_0 + n)} e^{A(\lambda_0 + n + 1)} =$$

$$= 2^N e^{-2\lambda_0\eta_0} e^{(A-N)\lambda_0} e^A \sum_{0 \leqslant n \leqslant n_0} e^{-n(N-A)} < c_5 e^{-\lambda_0\eta_0}.$$

Наконец, $-2\eta_0 + A < -\eta_0$, $(\ln_2 k)^{-N} = O(1)$ $(k > k_0 \geqslant 3)$, $N = [A] + 3$. Поэтому для четвертой суммы справедлива оценка

$$\sum{}^{(4)} < \sum_{0 \leqslant n \leqslant n_0} e^{-2(\ln_2 k + n)\,\eta_0} (\ln_2 k + n)^{-N} e^{A(\ln_2 k + n + 1)} <$$

$$< c_6 e^{-(2\eta_0 - A)\ln_2 k} < c_6 e^{-\eta_0 \ln_2 k},$$

Отсюда для $\lambda_0 \leqslant \ln_2 k$ получим $\sum^{(4)} < c_6 e^{-\lambda_0 \eta_0}$. Так как в области $\sigma \geqslant 1 - \lambda_0/\ln k$, $|t| \leqslant k^4 - 1$ нет нулей (кроме β_1), то для $\lambda_0 > \ln_2 k$ в области G_n^4, $n \leqslant \lambda_0 - \ln_2 k - 1$ нет нулей (кроме быть может β_1). Следовательно, при $\lambda_0 > \ln_2 k$ имеет место оценка

$$\sum^{(4)} < \sum_{n > \lambda_0 - \ln_2 k - 1,\ n \geqslant 0} e^{-2(\ln_2 k + n)\eta_0} (\ln_2 k + n)^{-N} e^{A(\ln_2 k + n + 1)} + \sum^* =$$
$$= \sum_{n > \lambda_0 - \ln_2 k - 1,\ n \geqslant 0} \exp\{-(2\eta_0 - A)(\ln_2 k + n) + A\} (\ln_2 k + n)^{-N} +$$
$$+ \sum^* c_7 e^{-\lambda_0 \eta_0} + \left|\sum^*\right|,$$

где предполагается, что $\eta_0 < \ln_2 k$. Это предположение согласуется с $\eta_0 \geqslant A + 3$, например при $k > k_1 = k_1(A) > k_0$. Действительно, тогда

$$-(2\eta_0 - A)(\ln_2 k + n) < -(2\eta_0 - A)(\lambda_0 - 1) =$$
$$= -\eta_0\lambda_0 - (\eta_0 - 2 - A)\lambda_0 + 2(\eta_0 - \lambda_0) - A$$

и

$$\eta_0 - 2 - A > 0, \quad \eta_0 - \lambda_0 < \eta_0 - \ln_2 k < 0 \quad (\eta_0 < \ln_2 k).$$

При этом через $\sum^*$ обозначена сумма по $0 \leqslant n \leqslant \lambda_0 - \ln_2 k - 1$ тех членов (4.14), которые соответствуют нулям $L(s, \chi_0)$ в области $G_n^{(4)}$, т. е. при $\lambda_0 > \ln_2 k$. В этой области $1 - \sigma \leqslant \frac{\lambda_0}{\ln k} = o(1)$, следовательно, $\sigma > 0$ при достаточно большом k. Следовательно, речь идет о нулях $\zeta(s)$, причем $|t| \leqslant 1$. Поэтому имеем

$$\left|\sum^*\right| \leqslant \left(\frac{2}{\ln k}\right)^N c_{100} e^{-c_{101}\eta_0 \ln k} c_{102}^{-N} < c_{100} e^{-c_{101}\eta_0 \ln k} \quad \text{для } \frac{2}{c_{102}\ln k} < 1;$$

так как $\lambda_0 = o(\ln k)$, то при достаточно большом k получаем

$$\left|\sum^*\right| < c_{100} e^{-\eta_0 \lambda_0}.$$

Подставляя все это в (4.14), получаем

$$\left(\frac{2}{\ln k}\right)^N \sum_{\chi} \sum_{\rho}{}' \exp\{-(2\delta + \gamma^2)\eta_0 \ln k\} |2\delta + \gamma^2 + i\gamma|^{-N} < c_8 e^{-\lambda_0 \eta_0} \tag{4.15}$$

при $k > k_1$, $A + 3 \leqslant \eta_0 < \ln_2 k$ $(c_8 = c_8(N))$. Теперь оценим остальные члены в формуле (4.6). Так как $\lambda_0 \leqslant \frac{1}{2} \ln k$, $\eta_0 > 3$, то

$$\left| O\left(\ln^{\frac{1}{2}} k \cdot \eta_0^{-\frac{1}{2}} k^{1 - \frac{9}{4}\eta_0}\right)\right| < c_9 e^{-\lambda_0 \eta_0}. \tag{4.16}$$

Из определения δ_0 и неравенства

$$\xi^{-1}(1 - e^{-\xi}) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \xi > 0 \quad (\xi = 2\delta_1 \ln k)$$

следует далее

$$\int\limits_{(\eta_0)} e^{-\delta_1(3-\delta_1)\eta\ln k} d(\eta) \leqslant \int\limits_{(\eta_0)} e^{-2\delta_1\eta\ln k} d(\eta) \doteq$$
$$= (2\delta_1 \ln k)^{-N} e^{-2\delta_1\eta_0\ln k} (1-e^{-2\delta_1\ln k})^N \leqslant e^{-2\delta_1\eta_0\ln k} \leqslant e^{-2\delta_0\ln k/A_3}, \quad (4.17)$$

где $\eta_0 \geqslant 1/A_3$ и $k > k_2 > k_1$.

Выберем теперь значение величины η_0, которая ранее не фиксировалась:

$$\eta_0 = \max\left\{A+3,\ A_3^{-1},\ A_3^{-1}\ln 4(c_8+c_9)\right\}. \quad (4.18)$$

Из формул (4.6), (4.7) и (4.15)—(4.17) получаем

$$J(\eta_0) > 1 - e^{-\delta_0\ln k/A_3} - (c_8+c_9)\, e^{-\lambda_0\eta_0} \qquad (k > k_3 > k_2). \quad (4.19)$$

Из (4.18), определения λ_0 и неравенств $\delta_0 \ln k \leqslant A_3$, $A_3\eta_0 \geqslant 1$ следует, что

$$(c_8+c_9)\, e^{-\lambda_0\eta_0} = (c_8+c_9)\, e^{-A_3\eta_0}\left(\frac{\delta_0\ln k}{A_3}\right)^{A_3\eta_0} \leqslant \frac{\delta_0\ln k}{4A_3}.$$

Поэтому из (4.19) вытекает

$$J(\eta_0) > \frac{\delta_0\ln k}{4A_3}, \quad (4.20)$$

поскольку при $0 < \xi \leqslant 1$ справедливо неравенство $1 - e^{-\xi} - \frac{1}{4}\xi > \frac{1}{4}\xi$. По лемме 7.7.1 и лемме 7.7.2 при $z = e^{5y} = \exp(5\eta \ln k)$ имеем

$$\varphi(k) \sum_{p \leqslant z,\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \ln p \cdot p^{\frac{1}{2}} e^{-\ln^2 p/4y} \geqslant \Phi(y, k, l) - c_{10}\varphi(k)\, y^{\frac{7}{4}y}. \quad (4.21)$$

Умножим это выражение на $\left(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y}\right)^{-1}$ и проинтегрируем. Тогда в силу (4.5) и (4.20) [1])

$$\int\limits_{(\eta_0)} \varphi(k) \sum_{p \leqslant z,\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\, k)} \ln p \cdot p^{1/2} e^{-\ln^2 p/4y} \left(2\sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4}y}\right)^{-1} d\eta >$$
$$> \frac{\delta_0\ln k}{4A_3} - c_{10}\varphi(k) \int\limits_{(\eta_0)} y^{1/2} e^{-\frac{1}{2}y} d(\eta). \quad (4.22)$$

[1]) Следует обратить внимание на то, что переменная интегрирования входит также в z.

Так как в области $\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_1 + 1, \ldots, \eta_0 \leqslant \eta_{N-1} \leqslant \eta_0 + 1$ всегда $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0 + N$, то

$$\int\limits_{(\eta_0)} y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} y}\, d\eta = \ln^{\frac{1}{2}} k \int\limits_{(\eta_0)} \eta^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \eta \ln k}\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \ln^{\frac{1}{2}} k \cdot (\eta_0 + N)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{(\eta_0)} e^{-\frac{1}{2} \eta \ln k}\, d\eta =$$

$$= \ln^{\frac{1}{2}} k \cdot (\eta_0 + N)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\ln k}\right)^N e^{-\frac{1}{2} \eta_0 \ln k} \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \ln k}\right)^N. \qquad (4.23)$$

Но $\eta_0 > 3$, и по теореме Зигеля (теорема 4.8.2 в случае $\varepsilon = {}^1/_2$) имеет место оценка

$$\frac{\delta_0 \ln k}{20 A_3} > \frac{c_{11} \ln k}{20 k^{\frac{1}{2}} A_3}.$$

Таким образом, для достаточно большого k, например $k > k_4 > k_3$ из (4.23), и оценок $e^{-\frac{1}{2} \eta_0 \ln k} = o\left(k^{-\frac{3}{2}}\right)$ и $\xi^{-1}\left(1 - e^{-\xi}\right) \leqslant 1$ при $\xi \geqslant 0$ следует, что

$$c_{10} \varphi(k) \int\limits_{(\eta_0)} y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} y}\, d(\eta) < \frac{\delta_0 \ln k}{20 A_3}$$

(η_0 и N уже зафиксированы, причем $\eta_0 > 3$, $N \geqslant 3$). Следовательно, при $k > k_4$ левая часть неравенства (4.22) больше, чем $\delta_0 \ln k / 5A_3$. Наибольшее значение, которое может принимать z в интеграле из (4.22), равно $\exp\{5(\eta_0 + N) \ln k\} = k^{5(\eta_0 + N)}$. Отсюда следует, что

$$\varphi(k) \int\limits_{(\eta_0)} \sum_{\substack{p \leqslant k^{5(\eta_0 + N)} \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \ln p \cdot p^{\frac{1}{2}} \left(2 \sqrt{\pi y}\, e^{\frac{9}{4} y}\right)^{-1} d(\eta) > \frac{\delta_0 \ln k}{5 A_3}. \qquad (4.24)$$

При $k \geqslant 3$ величина $\left(\sqrt{y}\, e^{\frac{9}{4} y}\right)^{-1}$ убывает с возрастанием η. Следовательно, при $k > k_5 (> k_4)$ в области интегрирования из (4.24) имеет место оценка

$$\left(\sqrt{y}\, e^{\frac{9}{4} y}\right)^{-1} \leqslant (\eta_0 \ln k)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{9}{4} \eta_0 \ln k} = (\eta_0 \ln k)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{9}{4} \eta_0}.$$

Отсюда, из (4.24) и неравенств $\delta_0 > c_{11} k^{-\frac{1}{2}}$, $k > k_6 > k_5$ следует

$$\sum_{\substack{p \leqslant k^{5(\eta_0 + N)} \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \ln p \cdot p^{\frac{1}{2}} > \frac{\delta_0 \ln k}{5 A_3 \varphi(k)} (\eta_0 \ln k)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{9}{4} \eta_0} > c_{12} k^{\frac{9}{4} \eta_0 - 2}. \qquad (4.25)$$

Так как $\eta_0 > 3$, то $\frac{9}{4}\eta_0 - 2 > 0$, и отсюда, в частности, вытекает, что

$$\pi\left(k^{5(\eta_0+N)},\ k,\ l\right) \geqslant 1, \quad p_1(k,\ l) \leqslant k^{5(\eta_0+N)}. \tag{4.26}$$

Таким образом, утверждение теоремы 4.1 доказано при $k > k_6$ и $C = 5(\eta_0 + N)$. Так как для нашего утверждения конечное множество чисел k не существенно, то теорема 4.1 доказана для всех $k \geqslant 2$.

Задачи к главе X

1. Покажите, что для достаточно большого k и постоянного $\alpha < 1$ оценка

$$p_1(k,\ l) < \alpha\varphi(k)\ln k$$

может не выполняться для всех $l < k$, $(l,\ k) = 1$.

2. Для некоторого $c > 0$ имеется бесконечно много чисел p, для которых

$$d(p-1) > \exp\left(c\frac{\ln p}{\ln_2 p}\right),$$

($d(n)$ обозначает число делителей n).

Приложение

§ 1. Частное суммирование и аналогичные преобразования

Теорема 1.1. *Пусть a_n и b_n — комплексные числа, определенные для всех целых индексов. Тогда для целого M и целого $N > M$ имеют место формулы*

$$\sum_{M < n \leqslant N} a_n b_n = A_N b_N - \sum_{M < n \leqslant N-1} A_n (b_{n+1} - b_n), \tag{1.1}$$

$$\sum_{M < n \leqslant N} a_n b_n = A_N b_{N+1} - \sum_{M < n \leqslant N} A_n (b_{n+1} - b_n), \tag{1.2}$$

где

$$A_n = \sum_{M < m \leqslant n} a_m.$$

Доказательство. Так как $A_M = 0$, то мы имеем

$$\sum_{M < n \leqslant N} a_n b_n = \sum_{M < n \leqslant N} (A_n - A_{n-1}) b_n =$$

$$= A_N b_N + \sum_{M < n \leqslant N-1} A_n (b_n - b_{n+1}),$$

а это и есть (1.1). Равенство (1.2) следует отсюда непосредственно.

Теорема 1.2. *Если, кроме предположений теоремы* 1.1, *выполнены неравенства* $M \geqslant 0$, $b_0 \geqslant b_1 \geqslant \ldots b_n \geqslant \ldots \geqslant 0$, *то*

$$\left| \sum_{M < n \leqslant N} a_n b_n \right| \leqslant b_M \max_{M < m \leqslant N} \left| \sum_{M < m \leqslant n} a_m \right|. \tag{1.3}$$

Доказательство. Из (1.1) и неравенства $b_n - b_{n+1} \geqslant 0$ следует

$$\left| \sum_{M < n \leqslant N} a_n b_n \right| \leqslant |A_N| b_N + \sum_{M < n \leqslant N-1} |A_n| (b_n - b_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ b_N + \sum_{M < n \leqslant N-1} (b_n - b_{n+1}) \right\} \max_{M < n \leqslant N} |A_n| =$$

$$= b_{M+1} \max_{M < n \leqslant N} |A_n| \leqslant b_M \max_{M < n \leqslant N} |A_n|.$$

Теорема 1.3. *Если, кроме предположений теоремы* 1.1, *выполнены неравенства* $M \geqslant 0$, $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots$, *то*

$$\left| \sum_{M < n \leqslant N} a_n b_n \right| \leqslant 2b_N \max_{M < n \leqslant N} \left| \sum_{M < m \leqslant n} a_m \right|. \tag{1.4}$$

Доказательство. Из (1.1) и неравенства $b_{n+1} - b_n \geqslant 0$ следует

$$\left| \sum_{M < n \leqslant N} a_n b_n \right| \leqslant |A_N| b_N + \sum_{M < n \leqslant N-1} |A_n| (b_{n+1} - b_n) \leqslant$$
$$\leqslant \left(b_N + \sum_{M < n \leqslant N-1} (b_{n+1} - b_n) \right) \max_{M < n \leqslant N} |A_n| \leqslant 2b_N \max_{M < n \leqslant N} |A_n|.$$

Теорема 1.4. *Пусть* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ — *последовательность действительных чисел,* $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ *и* $g(\xi)$ — *непрерывно дифференцируемая на отрезке* $\lambda_1 \leqslant \xi \leqslant x$ (*действительная или комплексная*) *функция. Тогда*

$$\sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_n \leqslant x} a_n g(\lambda_n) = A(x) g(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(\xi) g'(\xi) \, d\xi, \tag{1.5}$$

где

$$A(\xi) = \sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_n \leqslant \xi} a_n$$

и a_n — *любые комплексные числа. Если в* (1.5) $\lim\limits_{x \to \infty} A(x) g(x) = 0$ *и или ряд, или интеграл сходятся, то*

$$\sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_n < \infty} a_n g(\lambda_n) = - \int_{\lambda_1}^{\infty} A(\xi) g'(\xi) \, d\xi. \tag{1.6}$$

Доказательство. Имеем

$$A(x) g(x) - \sum_{\lambda_1 \leqslant \lambda_n \leqslant x} a_n g(\lambda_n) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} a_n \{ g(x) - g(\lambda_n) \} =$$
$$= \sum_{\lambda_n \leqslant x} \int_{\lambda_n}^{x} a_n g'(\xi) \, d\xi = \int_{\lambda_1}^{x} \left(\sum_{\lambda_n \leqslant \xi} a_n \right) g'(\xi) \, d\xi,$$

так как в качестве сомножителя при $g'(\xi)$ в сумме слева как раз появляется $\sum\limits_{\lambda_n \leqslant \xi} a_n$. Тем самым равенство (1.5) доказано, а остальные утверждения следуют из него сейчас же.

Теорема 1.5. *Пусть a — целое положительное число, а $g(\xi)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $a \leqslant \xi \leqslant x$ (действительная или комплексная) функция. Тогда*

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant x} g(n) = \int_a^x g(\xi)\,d\xi + \int_a^x (\xi - [\xi])\,g'(\xi)\,d\xi + \\ + g(a) - (x - [x])\,g(x)\text{[1]}. \qquad (1.7)$$

Если на отрезке $a \leqslant \xi \leqslant x$ выполнено неравенство $g'(\xi) \geqslant 0$ или $g'(\xi) \leqslant 0$, то[2]

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant x} g(n) = \int_a^x g(\xi)\,d\xi + O(|g(a)| + |g(x)|). \qquad (1.8)$$

Доказательство. Положим в теореме 1.4 $a_n = 1$ для всех n и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, = a, a+1, \ldots$. Тогда $A(x) = [x] - a + 1$ и

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant x} g(n) = ([x] - a + 1)\,g(x) - \int_a^x ([\xi] - a + 1)\,g'(\xi)\,d\xi = \\ = [x]\,g(x) - (a-1)\,g(a) - \int_a^x [\xi]\,g'(\xi)\,d\xi. \qquad (1.9)$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$\int_a^x g(\xi)\,d\xi = xg(x) - ag(a) - \int_a^x \xi g'(\xi)\,d\xi.$$

Если вычтем это из (1.9), то получим соотношение (1.7). Равенство (1.8) следует отсюда, если воспользоваться тем, что, например, при $g'(\xi) \geqslant 0$

$$\left| \int_a^x (\xi - [\xi])\,g'(\xi)\,d\xi \right| \leqslant \int_a^x g'(\xi)\,d\xi \leqslant |g(a)| + |g(x)|.$$

Мы приведем еще некоторые простые формулы, которые получаются отчасти из теоремы 1.5, отчасти непосредственно.

---

[1]) Для целого x, в частности,

$$\sum_{a < n \leqslant x} g(n) = \int_a^x g(\xi)\,d\xi + \int_a^x (\xi - [\xi])\,g'(\xi)\,d\xi.$$

[2]) О значении символа $O(\ )$ см. гл. I § 2.

При $0<\alpha<1$, $x\geqslant 1$ имеем

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{n^{\alpha}}=\int_1^x\frac{d\xi}{\xi^{\alpha}}-\alpha\int_1^x(\xi-[\xi])\frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}}+1-(x-[x])\,x^{-\alpha}=$$
$$=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}-\alpha\int_1^{\infty}(\xi-[\xi])\frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}}+O(x^{-\alpha}),\qquad(1.10)$$

так как [1])

$$\left|\alpha\int_x^{\infty}(\xi-[\xi])\frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}}\right|\leqslant\alpha\int_x^{\infty}\frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}}=x^{-\alpha}.$$

Если $0<\alpha<1$, $\beta>0$, $x\geqslant 2$, то

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\ln^{\beta}n}{n^{\alpha}}\leqslant\ln^{\beta}x\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{n^{\alpha}}=O(x^{1-\alpha}\ln^{\beta}x).\qquad(1.11)$$

Пусть $\alpha>1$, $x\geqslant 3$. Тогда

$$\sum_{n>x}\frac{1}{n^{\alpha}}<\frac{1}{x^{\alpha}}+\int_x^{\infty}\frac{d\xi}{\xi^{\alpha}}=O(x^{1-\alpha}),\qquad(1.12)$$

$$\sum_{n>x}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}<\frac{\ln x}{x^{\alpha}}+\int_x^{\infty}\frac{\ln\xi}{\xi^{\alpha}}\,d\xi=$$
$$=\frac{\ln x}{x^{\alpha}}-\frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\ln\xi+\frac{1}{\alpha-1}\right)\Bigg|_x^{\infty}=O(x^{1-\alpha}\ln x).\qquad(1.13)$$

§ 2. Некоторые свойства рядов Дирихле

Рядами Дирихле называются ряды вида [2])

$$\sum_n a_n n^{-s},$$

причем s — комплексная переменная и a_n не зависят от s.

---

[1]) Если $g'(\xi)$ в теореме 1.5 имеет постоянный знак и $g(x)$ стремится к 0 при $x\to\infty$, то вообще имеет место соотношение

$$\sum_{a<n\leqslant x}g(n)=\int_a^x g(\xi)\,d\xi+c+O(|g(x)|),$$

$$c=\int_a^{\infty}(\xi-[\xi])\,g'(\xi)\,d\xi.$$

[2]) $\sum\limits_n$ означает всегда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$.

При действительном положительном ν под ν^s понимаем всегда $e^{s \ln \nu}$, причем $\ln \nu$ обозначает действительный натуральный логарифм от ν. Мы всегда полагаем $\operatorname{Re} s = \sigma$, $\operatorname{Im} s = t$, т. е. $s = \sigma + it$.

Теорема 2.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_n a_n n^{-s_0}$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_n a_n n^{-s}$ *сходится равномерно в каждой замкнутой области, которая лежит целиком в области*

$$|\arg(s - s_0)| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \delta, \tag{2.1}$$

где $\delta > 0$ *постоянное. Функция* $F(s) = \sum\limits_n a_n n^{-s}$ *регулярна при* $\sigma > \sigma_0$.

Доказательство. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots = M, M+1, \ldots, g(\xi) = \xi^{s_0 - s}$, $x = N$, $N \geqslant M \geqslant 1$, N, M — целые, то из теоремы 1.4 следует

$$\sum_{M \leqslant n \leqslant N} a_n n^{-s} = \sum_{M \leqslant n \leqslant N} a_n n^{-s_0} n^{s_0 - s} =$$
$$= N^{s_0 - s} \sum_{M \leqslant n \leqslant N} a_n n^{-s_0} - \int_M^N \Bigl(\sum_{M \leqslant n \leqslant \xi} a_n n^{-s_0}\Bigr)(s_0 - s)\, \xi^{s_0 - s - 1}\, d\xi. \tag{2.2}$$

В силу сходимости ряда $\sum a_n n^{-s_0}$ имеем

$$\Bigl|\sum_{M \leqslant n \leqslant \xi} a_n n^{-s_0}\Bigr| < \varepsilon \quad \text{для} \quad M > M_0(\varepsilon).$$

Для каждого такого M, согласно (2.2), имеет место оценка

$$\Bigl|\sum_{M \leqslant n \leqslant N} a_n n^{-s}\Bigr| \leqslant \varepsilon \Bigl\{ |N^{s_0 - s}| + |s_0 - s| \int_N^M |\xi^{s_0 - s - 1}|\, d\xi \Bigr\} =$$
$$= \varepsilon \Bigl\{ N^{\sigma_0 - \sigma} + |s_0 - s| \int_M^N \xi^{\sigma_0 - \sigma - 1}\, d\xi \Bigr\} =$$
$$= \varepsilon \Bigl\{ N^{\sigma_0 - \sigma} + \frac{|s_0 - s|}{\sigma_0 - \sigma}(N^{\sigma_0 - \sigma} - M^{\sigma_0 - \sigma}) \Bigr\} \leqslant \varepsilon \Bigl(1 + \frac{2}{\sin \delta}\Bigr),$$

так как если s удовлетворяет (2.1), то выполняются неравенства $\sigma_0 - \sigma \leqslant 0$ и $|s_0 - s|/(\sigma - \sigma_0) \leqslant 1/\sin \delta$. Отсюда при постоянном δ следует равномерная сходимость ряда. Регулярность $F(s)$ в области $\sigma > \sigma_0$ получается по теореме Вейерштрасса из того, что каждая точка s области $\sigma > \sigma_0$ при достаточно малом δ является внутренней точкой области (2.1).

Из теоремы 2.1 следует, что существует такое действительное α, что ряд $\sum a_n n^{-s}$ сходятся при $\sigma > \alpha$ и расходится при $\sigma < \alpha$. При этом α может быть равно $\pm\infty$. Число α называется абсциссой сходимости ряда $\sum a_n n^{-s}$. Ряды $\sum a_n n^{-s}$ и $\sum |a_n| n^{-s}$ могут иметь различные абсциссы сходимости. Например, при $a_n = (-1)^n$ эти абсциссы равны соответственно 0 и 1.

Из теоремы 2.1 можно получить теорему, аналогичную теореме Абеля о предельном значении: из сходимости ряда $\sum a_n n^{-s_0}$ следует, что $\lim\limits_{s\to s_0} F(s) = \sum a_n n^{-s_0}$, если s остается в области (2.1). Тогда в силу равномерной сходимости можно поменять местами знаки lim и $\sum$. Не каждая точка абсциссы сходимости $\sigma = \alpha$ обязана быть особой точкой $F(s)$; например, для ряда $a_n = (-1)^{n-1}$ абсцисса сходимости $\alpha = 0$ и $F(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s)$, а эта функция регулярна во всей плоскости (см. также теорему 2.4).

Теорема 2.2. *Пусть для каждого* σ *в области* $\sigma_0 < \sigma < \infty$

$$F(s) = \sum_n a_n n^{-s}, \quad G(s) = \sum_n b_n n^{-s} \quad \text{и} \quad F(\sigma) = G(\sigma).$$

Тогда $a_n = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. По теореме 2.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-\sigma}, \tag{2.3}$$

и оба ряда в области $\sigma > \sigma_0 + \varepsilon$ равномерно сходятся. Следовательно,

$$\lim_{\sigma\to\infty} \sum_n a_n n^{-\sigma} = \sum_n \lim_{\sigma\to\infty} a_n n^{-\sigma} = a_1.$$

Из (2.3) следует также равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty} \sum_n b_n n^{-\sigma} = \sum_n \lim_{\sigma\to\infty} b_n n^{-\sigma} = b_1.$$

Если уже доказано, что $a_n = b_n$ при всех $n < m$, то из (2.3) вытекает, что

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n n^{-\sigma} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n n^{-\sigma}. \tag{2.4}$$

Умножая обе части на m^{σ} и устремляя σ к ∞, получаем $a_m = b_m$.

Теорема 2.3. *Пусть ряды* $\sum |a_n| n^{-\sigma}$ *и* $\sum |b_n| n^{-\sigma}$ *при* $\sigma_0 < \sigma < \infty$ *сходятся. Тогда в этой области имеет место равенство*

$$\left(\sum a_n n^{-\sigma}\right)\left(\sum b_n n^{-\sigma}\right) = \sum c_n n^{-\sigma} \tag{2.5}$$

где

$$c_n = \sum_{d \mid n} a_d b_{\frac{n}{d}}, \tag{2.6}$$

причем последний ряд абсолютно сходится в области $\sigma_0 < \sigma < \infty$.

Доказательство. Ряды в (2.5) абсолютно сходятся, и их можно произвольно перемножать. Это при $\sigma > \sigma_0$ дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-\sigma} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} a_d a_m (dm)^{-\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d \mid n} a_d b_{\frac{n}{d}}\right) n^{-\sigma}.$$

Теорема 2.4[1]. *Пусть число* α — *абсцисса сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = F(s), \tag{2.7}$$

α *конечно,* $a_n \geqslant 0$ *для всех* n. *Тогда* $s = \alpha$ *есть особая точка* $F(s)$.

Доказательство. По теореме 2.1 функция $F(s)$ регулярна в области $\sigma > \alpha$, и по теореме Вейерштрасса ряд (2.7) в этой области можно дифференцировать. Следовательно, при $\sigma > \alpha$

$$F^{(k)}(s) = \sum_n (-1)^k a_n n^{-s} \ln^k n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поэтому для $\sigma_0 > \alpha$ имеет место разложение

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (s - \sigma_0)^k \sum_n a_n n^{-\sigma_0} \ln^k n.$$

Если бы функция $F(s)$ была при $s = \alpha$ регулярной, то это разложение должно было бы сходиться также при $s = \sigma$, $\sigma < \alpha$. Следовательно, при подходящем $\sigma < \alpha$ должен сходиться ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_0 - \sigma)^k \sum_n a_n n^{-\sigma_0} \ln^k n.$$

Члены этого двойного ряда положительны, следовательно, их можно произвольно переставлять. Поэтому

$$\sum_n a_n n^{-\sigma_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_0 - \sigma)^k \ln^k n = \sum_n a_n n^{-\sigma},$$

[1] Ландау [3].

и ряд справа должен сходиться вопреки предположению $\sigma < \alpha$. Таким образом, $F(s)$ при $s = \alpha$ не может быть регулярной.

При предположениях теоремы 2.4 может все же оказаться, что $\lim\limits_{\sigma \to \alpha + 0} F(\sigma) < \infty$. Например, при $a_n = 1/\ln^2 n \ (n \geqslant 2)$ имеем $\alpha = 1$, $\sum\limits_{n > 1} 1/n \ln^2 n < \infty$.

§ 3. Некоторые формулы обращения

Следующая теорема позволяет по свойствам функции, заданной рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_n a_n n^{-s},$$

судить о величине суммы коэффициентов $\sum\limits_{n \leqslant x} a_n$.

Теорема 3.1. *Пусть ряд*

$$f(s) = \sum_n a_n n^{-s} \tag{3.1}$$

при $\sigma > 1$ *абсолютно сходится и*

$$|a_n| < c\Phi(n) \quad (c > 0),$$

где $\Phi(x)$ *при большом* x — *положительная монотонно возрастающая функция,*

$$\sum_n |a_n| n^{-\sigma} = O\left((\sigma - 1)^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \tag{3.2}$$

при $\sigma \to 1 + 0$. *Пусть далее* $w = u + iv$ *произвольно,* $b > 0$, $u + b > 1$, $T > 0$. *Тогда для нецелого* $x > 1$ *имеет место соотношение*

$$\sum_{n < x} a_n n^{-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(w+s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(u+b-1)^\alpha}\right) + \\ + O\left(\frac{\Phi(2x)\, x^{1-u} \ln 2x}{T}\right) + O\left(\frac{\Phi(2x)\, x^{1-u}}{T\,|x - N|}\right), \tag{3.3}$$

причем N — *ближайшее к* x *натуральное число. Для целого* $x \geqslant 1$ *имеем*

$$\sum_{n < x} a_n n^{-w} + \frac{1}{2} a_x x^{-w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(w+s) \frac{x^s}{s} ds + \\ + O\left(\frac{x^b}{T(u+b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{\Phi(2x)\, x^{1-u} \ln 2x}{T}\right). \tag{3.4}$$

Для всех $x \geqslant 1$ *остаточные члены в формулах* (3.3) *и* (3.4) *можно записать так*:

$$O\left(\frac{x^b}{T(u+b-1)^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{\Phi(2x)\,x^{1-u}\ln 2x}{T}\right)+O(\Phi(2x)\,x^{-u}). \qquad (3.5)$$

Константы в $O(\ )$ *не зависят от* x, T, b, u, *пока* b *и* u *остаются меньше некоторой постоянной.*

Доказательство. Рассмотрим сначала нецелое число x и $n < x$. По теореме о вычетах при $U > 0$ получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-U-iT}^{b-iT}+\int\limits_{b-iT}^{b+iT}+\int\limits_{b+iT}^{-U+iT}+\int\limits_{-U+iT}^{-U-iT}\right)\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=1,$$

если интегрирование проводится по прямолинейным отрезкам, так как единственный полюс $s=0$ подинтегральной функции лежит внутри пути интегрирования. Теперь, так как $x > n$, при $U\to\infty$ имеет место оценка

$$\left|\int\limits_{-U+iT}^{-U-iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right|\leqslant 2T\left(\frac{x}{n}\right)^{-U}\frac{1}{U}\to 0.$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_{-\infty-iT}^{b-iT}+\int\limits_{b-iT}^{b+iT}+\int\limits_{b+iT}^{-\infty+iT}\right)\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=1.$$

Очевидно, что отдельные интегралы существуют. Далее справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{-\infty-iT}^{b-iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{b}\left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma}\frac{d\sigma}{T}=\frac{(x/n)^b}{T\ln(x/n)},$$

и аналогично оцениваются интегралы по прямой $(b+iT,\ -\infty+iT)$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=1+O\left(\frac{(x/n)^b}{T\ln(x/n)}\right). \qquad (3.6)$$

В случае $n > x$ эта же формула получается без единицы и с $|\ln(x/n)|$ вместо $\ln(x/n)$, если заменить $-U$ на U и опять устремить U к ∞, так как внутри соответствующего пути интегрирования подинтегральная функция регулярна. Таким образом,

$$\sum_n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT}\frac{a_n}{n^w}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^w}+O\left(\frac{x^b}{T}\sum_n\frac{|a_n|}{n^{u+b}\,|\ln(x/n)|}\right). \qquad (3.7)$$

На пути интегрирования $\operatorname{Re}(w+s)=u+b>1$ и по предположению ряд $\sum a_n n^{-(w+s)}$ сходится там равномерно. Почленное интегрирование ряда дает

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(w+s)\frac{x^s}{s}\,ds=\sum_{n<x}\frac{a_n}{n^w}+O\left(\frac{x^b}{T}\sum\right),$$

причем мы полагаем

$$\sum=\sum_n\frac{|a_n|}{n^{u+b}\,|\ln(x/n)|}.$$

Разобьем теперь последнюю сумму на две части:

$$\sum=\left(\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2\right)\frac{|a_n|}{n^{u+b}\,|\ln(x/n)|},$$

где в $\sum_1$ суммирование проводится по значениям n, удовлетворяющим условиям $n<x/2$ и $n>2x$, а в $\sum_2$ — по остальным n. Для первых n очевидно неравенство $|\ln(x/n)|>\ln 2$, и поэтому, согласно (3.2),

$$\sum\nolimits_1=O\left(\sum_n|a_n|\,n^{-(u+b)}\right)=O\left((u+b-1)^{-\alpha}\right).$$

Для $N<n\leqslant 2x$ положим $r=n-N$. Тогда получим[1])

$$\ln\frac{n}{x}\geqslant\ln\frac{N+r}{N+1/2}=\ln\left(1+\frac{r-1/2}{N+1/2}\right)>A\,\frac{r-1/2}{N+1/2}>c_1\frac{r}{N}>c_2\frac{r}{x}$$
$$(x>1,\ N\geqslant 1,\ r\geqslant 1),$$

так как $\ln(1+\xi)>A\xi$ при $0<\xi\leqslant 1$ $(A>0)$ и

$$1<\frac{N+r}{N+1/2}\leqslant\frac{n}{x}\leqslant 2,\qquad r\geqslant 1,\ N\geqslant 1.$$

Следовательно, часть суммы $\sum_2$, распространенная на эти n, есть

$$O\left(\Phi(2x)\,x^{1-u-b}\sum_{1\leqslant r\leqslant x}\frac{1}{r}\right)=O\left(\Phi(2x)\,x^{1-u-b}\ln 2x\right),\tag{3.8}$$

так как для этой суммы $|a_n|<c\Phi(2x)$, $n>x/2$. Эта же оценка справедлива для части суммы $\sum_2$, распространенной на интервал

[1]) Напомним о том, что константа c не всегда имеет одно и то же значение.

$x/2 \leqslant n < N$. Для $n = N$ из неравенства $u + b > 1$ следует соотношение

$$\frac{|a_N|}{N^{u+b}\,|\ln(x/N)|} = O\left(\frac{\Phi(N)}{N^{u+b}\,|\ln(1+(x-N)/N)|}\right) =$$
$$= O\left(\frac{\Phi(N)\,x^{1-u-b}}{|x-N|}\right). \qquad (3.9)$$

Таким образом, равенство (3.3) доказано.

Если x — целое, то в (3.7) появится дополнительно член

$$\frac{a_x}{2\pi i x^w}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{ds}{s} = \frac{a_x}{2\pi i x^w}\ln\frac{b+iT}{b-iT} =$$
$$= \frac{a_x}{2\pi x^w}\{\arg(b+iT)-\arg(b-iT)\} = \frac{a_x}{2\pi x^w}\left\{\pi + O\left(\frac{1}{T}\right)\right\} \qquad (3.10)$$

и $|x - n| \geqslant 1$ при $n \neq x$. Отсюда и из соотношений $a_x x^{-w} T^{-1} = O(\Phi(x)\,x^{-u}T^{-1})$, $\Phi(x) \leqslant \Phi(2x)$ и $x^{-u} \leqslant x^{1-u}$ следует (3.4).

Для доказательства (3.5) предположим сначала, что n — целое число, меньшее x. Пусть C — дуга окружности $|s| = R = (b^2 + T^2)^{1/2}$, $\sigma \leqslant b$. Тогда по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s} = 1 + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^b\int_C\frac{d|s|}{R}\right) = 1 + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^b\right). \qquad (3.11)$$

При $n > x$ с помощью интегрирования по контуру $|s| = R$, $\sigma \geqslant b$ и $(b - iT,\ b + iT)$ получаем эту же формулу, только без члена 1. Для $n = x$, как и при выводе (3.10), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{ds}{s} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\{\arg(b+iT)-\arg(b-iT)\} = \frac{1}{2} + \Delta, \qquad (3.12)$$

где $|\Delta| \leqslant 1/2$. Пусть теперь N — ближайшее к x целое число. Если изменим доказательство (3.3) и (3.4), употребив для $n = N$ формулы (3.11) и (3.12), то получим остаточный член

$$O\left(\frac{|a_N|}{N^u}\left(\frac{x}{N}\right)^b\right) = O(\Phi(2x)\,x^{-u}), \qquad (3.13)$$

чем доказывается последняя часть утверждения теоремы.

Остаточный член в (3.5) имеет то преимущество, что при $x \to N$ он не обращается в бесконечность, как остаточный член в (3.3). Зато при $T \to \infty$ он не стремится к 0.

При $x \geqslant 2$ во всех остаточных членах можно, очевидно, заменить $\ln 2x$ на $\ln x$. В частности, при $w = 0$ с помощью (3.3) сумма $\sum\limits_{n<x} a_n$ выражается через $f(s)$. Это часто дает возможность представлять функцию $f(s)$ не непосредственно через $\sum\limits_{n<x} a_n$, а через сумму вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n(x)$, где $\alpha_n(x)$ — множители, обеспечивающие сходимость ряда, которые просто построить. Теоремы 3.2 и 3.3 дают формулы этого типа.

Лемма 3.1. *Пусть при* $x > 0$ *функция* $g(x)$ *действительна и непрерывно дифференцируема; при* $\alpha < \sigma < \beta$, *где* α, β — *произвольные действительные числа,*

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma-1} |g(x)|\, dx < \infty. \tag{3.14}$$

Если для $s = \sigma + it$, $\alpha < \sigma < \beta$, *положим*

$$f(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x)\, dx, \tag{3.15}$$

то для каждого $\sigma \in (\alpha, \beta)$ *имеет место формула*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} x^{-s} f(s)\, ds \quad (x > 0). \tag{3.16}$$

Это известное соотношение Меллина. Доказательство см., например, в книге Куранта и Гильберта [1]. Нам нужен специальный случай.

Лемма 3.2. *Если* $y > 0$, *то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b - i\infty}^{b + i\infty} \frac{\Gamma(s)}{y^s}\, ds = e^{-y}, \tag{3.17}$$

где $b > 0$ *и* $\Gamma(s)$ — *гамма-функция Эйлера.*

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из леммы 3.1 и равенства

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx \quad (\sigma = \operatorname{Re} s > 0)$$

(см. ниже (6.1)).

Теорема 3.2. *Пусть ряд*

$$f(s)=\sum_n a_n n^{-s}$$

абсолютно сходится в области $\sigma>\sigma_0>-\infty$. *Тогда при положительном* y *для каждого* $w=u+iv$ *имеет место равенство*

$$\sum_n \frac{a_n}{n^w} e^{-ny}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\Gamma(s-w)}{y^{s-w}} f(s)\,ds, \tag{3.18}$$

где $b>\sigma_0$ *и* $b>u$.

Доказательство. Правая часть (3.18) равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\Gamma(s-w)}{y^{s-w}}\sum_n\frac{a_n}{n^s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{y^s}\sum_n\frac{a_n}{n^{w+s}}\,ds=$$

$$=\sum_n\frac{a_n}{n^w}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{(ny)^s}\,ds.$$

Почленное интегрирование ряда допустимо согласно теореме 11.1, потому что по предположению при $\operatorname{Re} s=b-u$ имеем

$$\sum_n\left|\frac{a_n}{n^{w+s}}\right|=\sum_n\frac{|a_n|}{n^b}<\infty.$$

В силу теоремы 6.2 и неравенства $b-u>0$ имеем

$$\int_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty}\left|\frac{\Gamma(s)}{y^s}\right||ds|=\frac{1}{y^{b-u}}\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma(b-u+it)|\,dt<\infty.$$

Утверждение теоремы следует теперь из равенства (3.17).

Лемма 3.3. *Для* $y>0$ *и любого действительного* a *имеет место равенство*

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} n^{-s}e^{s^2y}\,ds=i\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,e^{-\frac{1}{4y}\ln^2 n}, \tag{3.19}$$

где n — *натуральное число.*

Доказательство. Очевидно, что при $s=a+it$, $\beta=2ay-\ln n$ имеет место соотношение

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} n^{-s}e^{s^2y}\,ds = in^{-a}e^{a^2y}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-yt^2+i\beta t}\,dt = in^{-a}e^{a^2y}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,e^{-\frac{1}{4y}\beta^2},$$

из чего следует (3.19)[1]).

Теорема 3.3. *В обозначениях теоремы* 3.2 *для* $y>0$, $b>\sigma_0$ *справедлива формула*

$$\sum_n \frac{a_n}{n^w}\, l^{-\frac{1}{4y}\ln^2 n} = \frac{1}{i\sqrt{\pi}}\sqrt{y}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} f(s)\,e^{(s-w)^2y}\,ds. \qquad (3.20)$$

Доказательство. Правая часть равенства с точностью до множителя $\sqrt{y}/i\sqrt{\pi}$ равна

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{(s-w)^2y}\sum_n \frac{a_n}{n^s}\,ds = \int_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty} e^{s^2y}\sum_n \frac{a_n}{n^{w+s}}\,ds =$$

$$= \sum_n \frac{a_n}{n^w}\int_{b-u-i\infty}^{b-u+i\infty} n^{-s}e^{s^2y}\,ds.$$

При этом можно по теореме 11.1 поменять местами суммирование и интегрирование, так как при $s=b-u+it$

$$\sum_n\left|\frac{a_n}{n^{w+s}}\right| = \sum_n \frac{|a_n|}{n^b} < \infty$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{s^2y}|\,dt < \infty.$$

Из (3.19) получаем теперь утверждение теоремы.

§ 4. Некоторые вспомогательные теоретико-функциональные теоремы

Здесь будут доказаны некоторые теоремы, которые необходимы для доказательства теоремы о простых числах в гл. III.

Теорема 4.1. *Пусть* $R>0$ *и функция*

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-s_0)^n$$

[1]) О значении последнего интеграла см., например, Курант и Гильберт [1].

регулярна в круге $|s-s_0|\leqslant R$. *Пусть далее*

$$\operatorname{Re} f(s)\leqslant M \quad \textit{при} \quad |s-s_0|=R. \tag{4.1}$$

Тогда

$$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(s_0)|=|a_n|\leqslant 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}R^{-n}, \quad n\geqslant 1. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть сначала $s_0=0$, $a_0=f(s_0)=0$. Тогда согласно (4.1), будем иметь $M\geqslant 0$, так как (4.1) имеет место в круге $|s-s_0|<R$, а значит, также при $s=s_0$ ($\operatorname{Re} f$ достигает максимума на границе круга $|s-s_0|<R$).

Если $a_n=|a_n|e^{i\varphi_n}$, то

$$\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})=\sum_n|a_n|R^n\cos(\varphi_n+n\varphi).$$

Ввиду того что ряд $\sum\limits_n|a_n|R^n$ сходится, предыдущий ряд равномерно сходится в области $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. С помощью почленного интегрирования получим

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})\,d\varphi=0,$$

так как $a_0=0$ и

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})\cos(\varphi_n+n\varphi)\,d\varphi=\pi|a_n|R^n, \quad n\geqslant 1.$$

Отсюда, так как $M\geqslant 0$, $1+\cos(\varphi_n+n\varphi)\geqslant 0$, имеем

$$\pi|a_n|R^n=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})\{1+\cos(\varphi_n+n\varphi)\}\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}M\{1+\cos(\varphi_n+n\varphi)\}\,d\varphi=2\pi M.$$

Следовательно,

$$|a_n|\leqslant 2MR^{-n},$$

и тем самым доказано утверждение теоремы для случая $s_0=0$, $a_0=0$. В общем случае положим $s'=s-s_0$ и

$$F(s')=f(s)-a_0=a_1s'+a_2s'^2+\ \ldots.$$

Тогда

$$F(0)=0, \quad \operatorname{Re} F(s')\leqslant M-\operatorname{Re} f(s_0), \quad |s'|\leqslant R,$$

и из ранее доказанного следует (4.2).

Теорема 4.2. *При предположениях теоремы* 4.1 *в круге* $|s-s_0|\leqslant r<R$ *имеют место неравенства*

$$|f(s)-f(s_0)|\leqslant 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\frac{r}{R-r}, \tag{4.3}$$

$$\left|f^{(k)}(s)\right|\leqslant 2k!\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\frac{R}{(R-r)^{k+1}}, \quad k\geqslant 1. \tag{4.4}$$

Доказательство. По теореме 4.1 в круге $|s-s_0|\leqslant r$

$$|f(s)-f(s_0)|\leqslant 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\sum_n R^{-n}r^n,$$

и отсюда следует (4.3).

Далее при $k\geqslant 1$ с помощью дифференцирования ряда для $f(s)$ получаем

$$\left|f^{(k)}(s)\right|\leqslant \sum_{k\leqslant n<\infty}|a_n|n(n-1)\ldots(n-k+1)|s-s_0|^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant 2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\sum_{k\leqslant n<\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)R^{-n}r^{n-k}=$$

$$=2\{M-\operatorname{Re} f(s_0)\}\left(\frac{d}{dr}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

а это и есть правая часть неравенства (4.4).

Ниже в этом параграфе r будет обозначать действительное положительное число.

Теорема 4.3. *Пусть* $g(s)$ — *регулярная функция в круге* $|s-s_0|\leqslant r$, *удовлетворяющая в нем соотношениям*

$$g(s)\neq 0, \quad \left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|\leqslant M. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\left|\frac{g'}{g}(s_0)\right|\leqslant\frac{2}{r}\ln M. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пусть $f(s)=\ln\{g(s)/g(s_0)\}$, причем мы выбираем любую ветвь логарифма. Поскольку $g(s)\neq 0$, функция $f(s)$ регулярна и однозначна в круге $|s-s_0|\leqslant r$. Далее в этом же круге $\operatorname{Re} f(s)=\ln|g(s)/g(s_0)|\leqslant\ln M$ ($M\geqslant 1$ по принципу максимума) и $\operatorname{Re} f(s_0)=0$. Теорема 4.1 дает оценку

$$|f'(s_0)|=\left|\frac{g'}{g}(s_0)\right|\leqslant\frac{2}{r}\ln M.$$

Теорема 4.4. *Пусть* F *регулярна в круге* $|s-s_0|\leqslant r$ *и удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\right|\leqslant M. \tag{4.7}$$

Если ρ пробегает нули функции F в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r$ и каждый нуль считается столько раз, какова его кратность, то

$$\operatorname{Re}\frac{F'}{F}(s_0)\geqslant-\frac{4}{r}\ln M+\operatorname{Re}\sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Образуем функцию $g(s)=F(s)\prod\limits_{\rho}(s-\rho)^{-1}$ и применим к $g(s)$ теорему 4.3. Тогда для $|s-s_0|=r$, а потому и в круге $|s-s_0|\leqslant r$ получим

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|=\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\prod_{\rho}\frac{s_0-\rho}{s-\rho}\right|\leqslant M.$$

Очевидно, что $|s_0-\rho|\leqslant\frac{1}{2}r$ и $|s-\rho|\geqslant\frac{1}{2}r$ при $|s-s_0|=r$. Далее $g(s)\neq 0$ в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r$. Положив в теореме 4.3 $\frac{1}{2}r$ вместо r, имеем

$$\left|\frac{g'}{g}(s_0)\right|=\left|\frac{F'}{F}(s_0)-\sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}\right|\leqslant\frac{4}{r}\ln M.$$

Отсюда, в частности,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F'}{F}(s_0)-\sum_{\rho}\frac{1}{s_0-\rho}\right\}\geqslant-\frac{4}{r}\ln M,$$

а это и есть (4.8).

Теорема 4.5. *Пусть функция $F(s)$ регулярна в круге $|s-s_0|\leqslant r$ и там удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{F(s)}{F(s_0)}\right|\leqslant M.$$

Если $F(s)\neq 0$ в области $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r$, $\operatorname{Re}(s-s_0)>0$, то

$$\operatorname{Re}\frac{F'}{F}(s_0)\geqslant-\frac{4}{r}\ln M, \tag{4.9}$$

$$\operatorname{Re}\frac{F'}{F}(s_0)\geqslant-\frac{4}{r}\ln M\pm\operatorname{Re}\frac{h}{s_0-\rho_1}, \tag{4.10}$$

где ρ_1 — любой h-кратный нуль $F(s)$ в области $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r$, $\operatorname{Re}(s-s_0)\leqslant 0$, а также

$$\operatorname{Re}\frac{F'}{F}(s_0)\geqslant-\frac{4}{r}\ln M+\operatorname{Re}\frac{1}{s_0-\rho_1}+\operatorname{Re}\frac{1}{s_0-\rho_2}, \tag{4.11}$$

где ρ_1 и ρ_2 — два любые нуля $F(s)$ в области $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r$, $\operatorname{Re}(s-s_0)\leqslant 0$.

Доказательство. По предположению (в соответствии с теоремой 4.4) всегда $\operatorname{Re}(s_0-\rho)^{-1}\geqslant 0$. Неравенство (4.9) очевидно, если опустить в (4.8) справа все члены $\operatorname{Re}(s_0-\rho)^{-1}$. Аналогично (4.10) будет доказано, если опустить только h слагаемых с $\rho=\rho_1$, и наконец получим (4.11), если оставим только слагаемые с $\rho=\rho_1$ и $\rho=\rho_2$.

Теорема 4.6. *Пусть имеют место обозначения и предположения* 4.4 *и, кроме того,*

$$\left|\frac{F'}{F}(s_0)\right|\leqslant\frac{A}{r}\ln M\quad(A>0), \tag{4.12}$$

$$F(s)\neq 0 \text{ в области } |s-s_0|\leqslant r,\ \operatorname{Re}(s-s_0)>-2r_1, \tag{4.13}$$

причем $0<r_1<\frac{1}{4}r$. *Тогда*

$$\left|\frac{F'}{F}(s)\right|\leqslant\frac{B}{r}\ln M,\quad |s-s_0|\leqslant r_1, \tag{4.14}$$

где B зависит только от A, но не зависит от F, r, r_1, M.

Доказательство. Применим теорему 4.2 к функции

$$f(s)=\ln\frac{g(s)}{g(s_0)},\quad g(s)=F(s)\prod_\rho(s-\rho)^{-1}$$

(где ветвь логарифма — любая) и заменим R, r на $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{4}r$. Функция $f(s)$ регулярна в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r$, так как $g(s)\neq 0$ и $\operatorname{Re}f(s_0)=0$. Как при доказательстве теоремы 4.4, видим, что неравенство

$$\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|\leqslant M$$

справедливо при $|s-s_0|\leqslant r$ и, в частности, при $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r$. Отсюда, независимо от того, какую ветвь логарифма мы брали, получается оценка

$$\operatorname{Re}f(s)=\ln\left|\frac{g(s)}{g(s_0)}\right|\leqslant\ln M,\quad |s-s_0|\leqslant\frac{1}{2}r.$$

Теперь теорема 4.2 (при $k=1$) в круге $|s-s_0|\leqslant\frac{1}{4}r$ дает оценку

$$\left|\frac{F'}{F}(s)-\sum_\rho\frac{1}{s-\rho}\right|\leqslant 2\ln M\cdot\frac{\frac{1}{2}r}{\left(\frac{1}{4}r\right)^2}\leqslant\frac{B}{r}\ln M. \tag{4.15}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{F'}{F}(s_0)-\sum_\rho\frac{1}{s_0-\rho}\right|\leqslant\frac{B}{r}\ln M,$$

и, согласно (4.12), отсюда следует неравенство

$$\left|\sum_{\rho} \frac{1}{s_0 - \rho}\right| \leqslant \frac{B}{r} \ln M,$$

где B — константа (не всегда одна и та же).

Из условий (4.13) для всех ρ получаем $|s_0 - \rho| \geqslant 2r_1$. Отсюда для каждого s из круга $|s - s_0| \leqslant r_1$ следует неравенство

$$|s - \rho| \geqslant \frac{1}{2} |s_0 - \rho|,$$

так как точка ρ, удаленная от центра круга s_0 не меньше чем на двойной радиус, удалена от каждой точки s, лежащей внутри или на границе круга, не менее чем на $\frac{1}{2}|s_0 - \rho|$. Таким образом, так как, согласно (4.13), $\operatorname{Re}(s_0 - \rho) \geqslant 2r_1$ для $|s - s_0| \leqslant r_1$ и всех ρ, имеем

$$\left|\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{s_0 - \rho}\right| = \frac{|s - s_0|}{|s-\rho||s_0-\rho|} \leqslant \frac{r_1}{\frac{1}{2}|s_0 - \rho|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\operatorname{Re}(s_0 - \rho)}{|s_0 - \rho|^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{s_0 - \rho}.$$

Отсюда при $|s - s_0| \leqslant r_1$ следует неравенство

$$\left|\sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho} - \sum_{\rho} \frac{1}{s_0 - \rho}\right| \leqslant \operatorname{Re} \sum_{\rho} \frac{1}{s_0 - \rho} \leqslant \left|\sum_{\rho} \frac{1}{s_0 - \rho}\right| \leqslant \frac{B}{r} \ln M.$$

Из этого неравенства и из (4.15) вытекает (4.14).

§ 5. Целые функции конечного порядка

Пусть $f(s)$ — целая функция, отличная от константы, т. е. функция, регулярная в любой конечной части s-плоскости. Пусть

$$M(r) = M_f(r) = \max_{|s|=r} |f(s)|.$$

Из принципа максимума следует, что при $r \to \infty$ $M(r)$ монотонно стремится к бесконечности. Функция $f(s)$ называется функцией конечного порядка, если существует такое $a > 0$, что

$$M(r) < e^{r^a} \quad \text{при} \quad r > r_0(a); \tag{5.1}$$

$\alpha = \inf a$ по всем таким a называется порядком f. Порядок можно определить еще так. Для каждого $\varepsilon > 0$ и для всех $r > 0$ имеет место неравенство

$$M(r) < c(\varepsilon) e^{r^{\alpha+\varepsilon}} \tag{5.2}$$

и существует последовательность $0 < r_1 < r_2 < \ldots, r_n \to \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой

$$M(r_n) > c'(\varepsilon)\, e^{r_n^{\alpha-\varepsilon}}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5.3}$$

Константы здесь не зависят от r, но, вообще говоря, зависят от ε (и $f(s)$). В случае $\alpha = 0$ условие (5.3) нужно опустить. Так, например, $\alpha = 0$, если $f(s)$ — полином, а для $f(s) = \sin s, \cos s, e^s$ $\alpha = 1$. Для $f(s) = e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}$ $\alpha = \frac{1}{2}$. Для $f(s) = \exp(a_0 s^k + a_1 s^{k-1} + \ldots \ldots + a_k)$ $\alpha = k$, и здесь, кроме (5.2), имеет место более точное неравенство

$$M(r) < c_1 e^{c_2 r^\alpha} \quad (c_1 > |a_0|).$$

Следовательно, в этом случае в (5.2) ε не нужно, если $|a_0| < 1$. Функция $\exp e^s$ не будет функцией конечного порядка.

В последующем будем предполагать, если не оговорено противное, что $f(0) \neq 0$. Обозначим через $s_1, s_2, \ldots$ все нули $f(s)$ в случае, если они существуют, и предположим, что

$$0 < |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant \ldots. \tag{5.4}$$

При этом каждый нуль должен быть записан столько раз, какова его кратность. Далее обозначим через $N(r) = N_f(r)$ количество нулей $f(s)$ в круге $|s| \leqslant r$, т. е.

$$N(r) = \sum_{|s_n| \leqslant r} 1. \tag{5.5}$$

С $N(r)$ связан показатель сходимости последовательности $s_1, s_2, \ldots$. Так называется нижняя граница β тех $b > 0$, для которых

$$\sum_n |s_n|^{-b} < \infty. \tag{5.6}$$

Если имеется только конечное число нулей, то $\beta = 0$. Если нулей нет, то β также будем считать равным нулю. Если (5.6) не выполнено ни для какого $b > 0$, то β полагается равным ∞. Для $s_n = n^n$, например, имеем $\beta = 0$, для $s_n = n$ имеем $\beta = 1$. Грубо говоря, β будет тем больше, чем быстрее растет $N(r)$. Мы будем предполагать в дальнейшем, если не будет оговорено противное, что $f(s)$ — отличная от константы целая функция конечного порядка и что

$$0 < |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant \ldots,$$

$M(r)$, α, $N(r)$, β — только что определенные величины.

Большинство следующих теорем содержит соотношения между $N(r)$, β и ростом величины $M(r)$. Без доказательства приведем следующую хорошо известную теорему Вейерштрасса.

Теорема 5.1. *Для каждой целой функции $f(s)$ ($f(0) \neq 0$) имеет место разложение*

$$f(s) = e^{g(s)} \prod_n E\left(\frac{s}{s_n}, p_n\right), \tag{5.7}$$

где

$$E\left(\frac{s}{s_n}, p_n\right) = \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) \exp\left\{\frac{s}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{s}{s_n}\right)^{p_n}\right\},$$

p_n — неотрицательные целые числа, а $g(s)$ — целая функция. За p_n можно взять любую последовательность натуральных чисел, для которых ряд

$$\sum_n \left|\frac{s}{s_n}\right|^{p_n+1} \tag{5.8}$$

сходится при всех s.

Разложение (5.7) не однозначно. Если $s = 0$ — нуль кратности точно k, то справа в (5.7) появляется еще множитель s^k.

Для дальнейшего нам нужна связь между ростом величины модуля аналитической функции и количеством ее нулей.

Теорема 5.2. *Пусть $0 < r < R$, функция $f(s)$ регулярна в круге $|s - s_0| \leqslant R$ и $f(s_0) \neq 0$. Если $s_1, \ldots, s_m$ — какие-нибудь нули $f(s)$ в круге $|s - s_0| \leqslant r$ (кратные нули записываются столько раз, какова их кратность), то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{R}{r}\right)^m \leqslant \frac{M(R)}{|f(s_0)|}, \quad M(R) = \max_{|s-s_0|=R} |f(s)|. \tag{5.9}$$

В частности, при $r = R/2$ имеем

$$m \leqslant A \ln \frac{M(R)}{|f(s_0)|}, \qquad A = \frac{1}{\ln 2}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для $s_0 = 0$. Функция

$$F(s) = f(s)\left\{\prod_{n=1}^{m} \frac{R(s - s_n)}{R^2 - s\bar{s}_n}\right\}^{-1}$$

регулярна в круге $|s| \leqslant R$ и при $|s| = R$ удовлетворяет равенству $|F(s)| = |f(s)|$, так как при $s\bar{s} = R^2$

$$\left|\frac{R(s - s_n)}{R^2 - s\bar{s}_n}\right| = \left|\frac{R(R^2 - \bar{s}s_n)}{\bar{s}(R^2 - s\bar{s}_n)}\right| = 1.$$

Следовательно, по принципу максимума получаем

$$|F(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{R}{|s_n|} \leqslant \max_{|s-s_0|=R} |F(s)| = M(R).$$

Отсюда ввиду того, что $|s_n| \leqslant r$, $n = 1, 2, \ldots, m$, следует (5.9).

Если рассмотреть вместо $F(s)$ более простую функцию

$$\frac{f(s)}{(s-s_1)\ldots(s-s_m)},$$

то в левой части неравенства (5.9) получается меньшая величина, а именно $(R/r-1)^m$.

Теорема 5.3. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *имеем* $\beta \leqslant \alpha$ *и*

$$N(r) < c(\varepsilon)\, r^{\alpha+\varepsilon}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Если $f(s)$ не имеет нулей, то утверждение тривиально. Пусть $s_1, \ldots, s_N$ — все нули $f(s)$ в круге $|s| \leqslant r$. Применим теорему 5.2 при $m = N$, $R = 2r$, $s_0 = 0$. Так как $f(0) \neq 0$, то при $r \geqslant 0$ по определению α из (5.10) следует, что

$$N = N(r) \leqslant A \ln \frac{M(2r)}{|f(0)|} < c(\varepsilon)\, r^{\alpha+\varepsilon}.$$

Это и есть неравенство (5.11).

Пусть $b > \alpha$. Чтобы доказать, что $\beta \leqslant \alpha$, достаточно доказать для любого такого b сходимость ряда

$$\sum_n |s_n|^{-b}. \tag{5.12}$$

Согласно (5.11), при $r = |s_n|$ имеем

$$n < c(\varepsilon)\, |s_n|^{\alpha+\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\sum_{n \leqslant N} |s_n|^{-b} < c_1(\varepsilon) \sum_{n \leqslant N} n^{-\frac{b}{\alpha+\varepsilon}}.$$

Отсюда следует (5.12), если ε настолько мало, что $\alpha + \varepsilon < b$.

Из теоремы 5.3 вытекает, что числа p_n в теореме 5.1 могут быть взяты равными некоторому целому числу $p \geqslant 0$. Действительно, при $p + 1 > \alpha$ по теореме 5.3 имеем

$$\sum_n |s_n|^{-(p+1)} < \infty, \tag{5.13}$$

и тем самым (5.8) выполнено. Может случиться, что $\beta < \alpha$. Например, для $f(s) = e^s$ имеем $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Для полинома всегда $\alpha = \beta = 0$.

Пусть теперь p — наименьшее целое неотрицательное число, для которого выполняется (5.13), и пусть

$$P(s)=\prod_n E\left(\frac{s}{s_n},\ p\right). \tag{5.14}$$

Для $p=0$ при этом нужно положить $E\left(\frac{s}{s_n},\ p\right)=1-\frac{s}{s_n}$.

$P(s)$ называется каноническим произведением для последовательности $s_1, s_2, \ldots$. По теореме 5.1 имеем

$$f(s)=e^{g(s)}P(s)=e^{g(s)}\prod_s\left(1-\frac{s}{s_n}\right)\exp\left\{\frac{s}{s_n}+\ \ldots\ +\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p\right\}, \tag{5.15}$$

где $g(s)$ — определенная целая функция. Формула (5.15) называется каноническим разложением функции $f(s)$. Это разложение однозначно с точностью до аддитивной постоянной $2\pi in$ в $g(s)$.

Теорема 5.4. *Функция $g(s)$ представляет собой полином степени $g\leqslant\alpha$.*

Доказательство. Положим $k=[\alpha]$. Тогда $p\leqslant k$. Действительно, ряд

$$\sum|s_n|^{-([\alpha]+1)}$$

сходится, потому что $[\alpha]+1>\alpha$ и $\beta\leqslant\alpha$ (по теореме 5.3). Достаточно доказать, что

$$g^{(k+1)}(s)=0 \text{ при любом } s. \tag{5.16}$$

Ввиду того что $p\leqslant k$, а произведение Вейерштрасса можно почленно прологарифмировать и затем продифференцировать, из (5.15) следует

$$g^{(k+1)}(s)=\left(\frac{d}{ds}\right)^k\frac{f'}{f}(s)+k!\sum_n\frac{1}{(s_n-s)^{k+1}}.$$

Запишем это иначе:

$$g^{(k+1)}(s)=\left(\frac{d}{ds}\right)^k\left(\frac{f'}{f}(s)+\sum_{|s_n|\leqslant R}\frac{1}{s_n-s}\right)+k!\sum_{|s_n|>R}\frac{1}{(s_n-s)^{k+1}}. \tag{5.17}$$

Здесь R удовлетворяет условию $R\geqslant 2|s|$. Тогда для $|s_n|>R$ выполняется неравенство $|s_n-s|>\frac{1}{2}|s_n|$, и, следовательно, при $R\to\infty$ в силу сходимости ряда $\sum|s_n|^{-(k+1)}$, получим

$$k!\sum_{|s_n|>R}\frac{1}{|s_n-s|^{k+1}}<k!2^{k+1}\sum_{|s_n|>R}|s_n|^{-(k+1)}\to 0. \tag{5.18}$$

Первый член в правой части (5.17) представляет собой $(k+1)$-ю производную от

$$g_R(s)=\ln\left\{\frac{f(s)}{f(0)}\prod_{|s_n|\leqslant R}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)^{-1}\right\}.$$

В круге $|s|\leqslant R$ мы можем взять какую-нибудь регулярную ветвь логарифма, так как там функция под знаком логарифма не обращается в нуль и в бесконечность. Далее имеем $\operatorname{Re} g_R(0)=0$. При $|s|=2R$

$$\left|\frac{f(s)}{f(0)}\prod_{|s_n|\leqslant R}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)^{-1}\right|<c(\varepsilon)\,e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}},$$

так как $f(s)$ имеет порядок α и так как

$$\left|1-\frac{s}{s_n}\right|\geqslant\left|\frac{s}{s_n}\right|-1\geqslant 1 \text{ для } |s_n|\leqslant R,\ |s|=2R.$$

По принципу максимума это имеет место также при $|s|\leqslant R$, и, следовательно, там выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} g_R(s)=\ln\left|\frac{f(s)}{f(0)}\prod_{|s_n|\leqslant R}\left(1-\frac{s}{s_n}\right)^{-1}\right|<c(\varepsilon)\,R^{\alpha+\varepsilon}$$

(например при $R\geqslant 1$). Применим теперь теорему 4.2 к функции $g_R(s)$ и кругам с радиусами R и $R/2$. Оценка (4.4) при $|s|\leqslant R/2$ дает

$$|g_R^{(k+1)}(s)|<2(k+1)!\,c(\varepsilon)\,R^{\alpha+\varepsilon}\frac{R}{(R/2)^{k+2}}<c_1(\varepsilon)\,R^{\alpha-(k+1)+\varepsilon}. \quad (5.19)$$

При $R\to\infty$ это выражение стремится к нулю, если взять ε настолько малым, чтобы $\alpha-(k+1)+\varepsilon$ было отрицательно (что всегда возможно, поскольку $k=[\alpha]$).

Равенство (5.17) можно записать еще в виде

$$g^{(k+1)}(s)=g_R^{(k+1)}(s)+k!\sum_{|s_n|>R}\frac{1}{(s_n-s)^{k+1}}.$$

По ранее доказанному при постоянном s правая часть этого равенства стремится к нулю при $R\to\infty$, т. е. $g^{(k+1)}(s)=0$ для всех s.

Аналогично, но проще можно доказать, что $g(s)$ — полином степени не более α, если $|g(s)|\leqslant cR^{\alpha}$ при $|s|\leqslant R$. Действительно, из равенства

$$g^{(k+1)}(s)=\frac{1}{2\pi i}(k+1)!\int_{|z|=R}\frac{g(z)}{(z-s)^{k+2}}\,dz$$

при $|s|<R/2$ и неравенства $|z-s|>R/2$ на окружности $|z|=R$ следует

$$|g^{(k+1)}(s)|\leqslant cR^{\alpha-(k+1)}.$$

Отсюда при $R\to\infty$ опять получаем $g^{(k+1)}(s)=0$ при $k=[\alpha]$. Выше теорема 4.2 необходима, так как функция $g(s)$ встречается в показателе и по

$|e^{g(s)}| = e^{\mathrm{Re}\, g(s)}$ нужно судить о $g^{(k+1)}(s)$, т. е. по действительной части функции нужно судить о производных.

Теорема 5.5. *Рассмотрим последовательность s_n, $0 < |s_1| \leqslant \leqslant |s_2| \leqslant \ldots$, с конечным показателем сходимости. Пусть*

$$P(s) = \prod_n \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) \exp\left\{\frac{s}{s_n} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p\right\}, \tag{5.20}$$

где p — наименьшее целое неотрицательное число, удовлетворяющее условию $\sum |s_n|^{-(p+1)} < \infty$. Тогда $P(s)$ — целая функция и порядок P равен показателю сходимости β последовательности s_n.

Доказательство. По теореме 5.3 порядок P, если он конечен, не меньше β. Следовательно, достаточно доказать, что

$$|P(s)| < c(\varepsilon)\, e^{r^{\beta+\varepsilon}} \quad (|s| \leqslant r) \tag{5.21}$$

или что

$$\ln |P(s)| < c(\varepsilon) |s|^{\beta+\varepsilon}$$

для достаточно большого $|s|$. Мы имеем

$$\ln |P(s)| = \sum_n \ln \left| E\left(\frac{s}{s_n},\ p\right)\right|.$$

Пусть теперь a — константа, $0 < a < 1$. При $|s/s_n| \leqslant a$ справедлива оценка

$$\ln \left| E\left(\frac{s}{s_n},\ p\right)\right| \leqslant \frac{1}{p+1}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1} + \frac{1}{p+2}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+2} + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1}(1 + a + a^2 + \ldots) = \frac{1}{1-a}\left|\frac{s}{s_n}\right|^{p+1}.$$

При $|s/s_n| > a$, во всяком случае, имеет место неравенство

$$\ln \left| E\left(\frac{s}{s_n},\ p\right)\right| \leqslant \ln\left(1 + \left|\frac{s}{s_n}\right|\right) + \left|\frac{s}{s_n}\right| + \ldots + \frac{1}{p}\left|\frac{s}{s_n}\right|^p \leqslant c \left|\frac{s}{s_n}\right|^p,$$

где $c = c(a)$ при $p \geqslant 1$, и левая часть не превосходит $c(\varepsilon) |s/s_n|^{\varepsilon}$ при $p = 0$.

Отсюда при $p \geqslant 1$ получаем

$$\ln |P(s)| = \left(\sum_{|s/s_n| \leqslant a} + \sum_{|s/s_n| > a}\right) \ln \left| E\left(\frac{s}{s_n},\ p\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c|s|^{p+1} \sum_{|s_n| \geqslant a^{-1}|s|} |s_n|^{-(p+1)} + c|s|^p \sum_{|s_n| < a^{-1}|s|} |s_n|^{-p} =$$
$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{5.22}$$

где константы $c = c(a)$ не зависят от $|s|$. Согласно определению p и β, всегда $p + 1 \geqslant \beta$. Если $\beta = p + 1$, то $\sum_1 < c|s|^{\beta}$ в силу сходимости ряда $\sum |s_n|^{-(p+1)}$. В противном случае допустим, что ε настолько мало, что $\beta+\varepsilon < p+1$. Тогда [1])

$$\sum\nolimits_1 = c|s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s_n| \geqslant a^{-1}|s|} |s_n|^{-(p+1)} |s|^{(p+1)-(\beta+\varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant c'|s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s_n| \geqslant a^{-1}|s|} |s_n|^{-(\beta+\varepsilon)} < c(\varepsilon)|s|^{\beta+\varepsilon}$$

ввиду сходимости последнего ряда. Далее, во всяком случае, $p \leqslant \beta$ и

$$\sum\nolimits_2 = c|s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s_n| < a^{-1}|s|} |s_n|^{-p} |s|^{-\{(\beta+\varepsilon)-p\}} <$$

$$< c'|s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s_n| < a^{-1}|s|} |s_n|^{-(\beta+\varepsilon)} < c(\varepsilon)|s|^{\beta+\varepsilon},$$

так как последний ряд сходится. Из (5.22) следует, таким образом, (5.21), и тем самым получается утверждение теоремы при $p \geqslant 1$.

Для $p=0$ получаем так же, как в (5.22),

$$\ln|P(s)| \leqslant \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2',$$

где

$$\sum\nolimits_2' < c|s|^{\varepsilon} \sum_{|s_n| < a^{-1}|s|} |s_n|^{-\varepsilon}.$$

Сумма $\sum_1$ оценивается, как и раньше. Для $\sum_2'$ получаем оценку

$$\sum\nolimits_2' < c|s|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|s_n| < a^{-1}|s|} |s_n|^{-\varepsilon} |s|^{-\beta} <$$

$$< c'|s|^{\beta+\varepsilon} \sum_n |s_n|^{-(\beta+\varepsilon)} < c(\varepsilon)|s|^{\beta+\varepsilon},$$

и тем самым теорема 5.5 полностью доказана.

Из этого доказательства сейчас же следует еще одно утверждение.

Теорема 5.6. *Если выполнены предположения теоремы* 5.5 *и сходится ряд*

$$\sum_n |s_n|^{-\beta}, \tag{5.23}$$

причем $|s_n| \to \infty$, *то помимо* (5.21) *верно следующее неравенство*:

$$|P(s)| \leqslant e^{c_1 r^{\beta}}, \quad |s| = r. \tag{5.24}$$

[1]) Напомним здесь о том, что c не обязательно обозначает всегда одну и ту же положительную константу. Данное неравенство получается, так как здесь $|s| \leqslant a|s_n|$.

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, нужно в прежнее доказательство при оценке $\sum_1$ и $\sum_2$ подставить $\beta+\varepsilon$ вместо β. Чтобы показать, что $\sum_2' < cr^\beta$, поступают аналогично:

$$\sum_2' < c|s|^\varepsilon \sum_{|s_n|<a^{-1}|s|} |s_n|^{-\varepsilon} < c|s|^\beta \sum_{|s_n|<a^{-1}|s|} |s_n|^{-\varepsilon}|s|^{-(\beta-\varepsilon)} <$$

$$< c'|s|^\beta \sum_{|s_n|<a^{-1}|s|} |s_n|^{-\beta} < c''|s|^\beta.$$

Эта оценка выполняется, если выбрать ε настолько маленьким, чтобы $\beta-\varepsilon>0$. Последнее всегда возможно, так как из предположения $|s_n|\to\infty$ и сходимости ряда $\sum|s_n|^{-\beta}$ следует, что $\beta>0$.

Теорема 5.7. *Пусть $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — две целые функции конечных порядков α_1 и α_2. Тогда $f_1(s)\cdot f_2(s)$ — целая функция порядка $\leqslant \max(\alpha_1, \alpha_2)$.*

Доказательство. По предположению

$$|f_1(s)| < c_1(\varepsilon)\, e^{r^{\alpha_1+\varepsilon}}, \quad |f_2(s)| < c_2(\varepsilon)\, e^{r^{\alpha_2+\varepsilon}}.$$

Отсюда при $|s|\leqslant r$ следует, что

$$|f_1(s) f_2(s)| < c_1(\varepsilon)\, c_2(\varepsilon) \exp(r^{\alpha_1+\varepsilon}+r^{\alpha_2+\varepsilon}) < c(\varepsilon) \exp r^{\max(\alpha_1,\, \alpha_2)+2\varepsilon},$$

чем все доказано.

Строгое неравенство в теореме 5.7 имеет место, например, для

$$f_1=e^s, \quad f_2=e^{-s}.$$

Если мы опустим теперь условие $f(0)\neq 0$, то сможем доказать такую теорему:

Теорема 5.8. *Каждая целая функция $f(s)$ конечного порядка α представима в виде*

$$f(s)=s^m e^{g(s)} P(s), \tag{5.25}$$

где

$$P(s)=\prod_n\left(1-\frac{s}{s_n}\right)\exp\left\{\frac{s}{s_n}+\ \dots\ +\frac{1}{p}\left(\frac{s}{s_n}\right)^p\right\}.$$

При этом s_n пробегает все нули функции f, кроме $s=0$, упорядоченные по модулю, p — наименьшее неотрицательное целое число, удовлетворяющее условию $\sum|s_n|^{-(p+1)}<\infty$, m — кратность нуля $s=0$ и $g(s)$ — полином степени $g\leqslant\alpha$.

Если β — показатель сходимости последовательности $|s_n|$, то $\alpha=\max(g, \beta)$.

Если помимо 5.2 ни для одного $c>0$ и достаточно большого r не выполнено неравенство

$$|f(s)|<e^{cr^{\alpha}}, \quad |s|\leqslant r, \tag{5.26}$$

то $\alpha=\beta$, и при $\alpha>0$ ряд $\sum |s_n|^{-\beta}$ расходится.

Доказательство. Докажем сначала, что $\alpha=\max(g, \beta)$. Так как g — порядок $e^{g(s)}$ и β — порядок $P(s)$, то по теореме 5.7 $\alpha\leqslant \leqslant\max(g, \beta)$. С другой стороны, $g\leqslant\alpha$ по теореме 5.4 и $\beta\leqslant\alpha$ по теореме 5.3 (обе теоремы применены к $f(s)/s^m$), следовательно, $\alpha=\max(g, \beta)$.

Остается доказать последнюю часть утверждения. Допустим, что $\beta<\alpha$. Тогда $\alpha=\max(g, \beta)=g$, и, так как $P(s)$ имеет порядок β (теорема 5.5), мы имеем

$$|f(s)|\leqslant r^m e^{cr^g} c(\varepsilon)\, e^{r^{\beta+\varepsilon}}, \quad |s|\leqslant r.$$

Отсюда неравенство вида (5.26) следует для $\beta+\varepsilon<g$, что невозможно. Расходимость ряда $\sum |s_n|^{-\beta}$ следует из теоремы 5.6.

Легко видеть, что целая функция нецелого порядка должна иметь бесконечно много нулей. Действительно, в этом случае в силу того, что $\alpha=\beta$, в $P(s)$ должно появиться бесконечно много нулей.

§ 6. Г-функция

Мы предполагаем в основном известными свойства этой функции и приведем их здесь (часто без доказательства) в той мере, в какой нам это необходимо. Функцию $\Gamma(s)$ можно определить при $\sigma= =\operatorname{Re} s>0$ интегралом Эйлера

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt. \tag{6.1}$$

$\Gamma(s)$ можно продолжить на всю плоскость. Она будет регулярна всюду, за исключением точек $s=0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$. Эти точки — простые полюсы с вычетами $(-1)^n/n!$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Функция $\Gamma(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \tag{6.2}$$

и формуле дополнения

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin \pi s}. \tag{6.3}$$

Имеет место также формула удвоения

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\pi}\, 2^{-2s}\cdot\Gamma(2s). \tag{6.4}$$

Функция $1/\Gamma(s)$ — целая функция порядка 1 и представляется в виде произведения

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_n \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}, \tag{6.5}$$

где γ — константа Эйлера. Следовательно, в обозначениях § 5 мы имеем $\alpha = \beta = p = g = 1$. Из (6.5) сейчас же следует, что

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \equiv \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right). \tag{6.6}$$

О поведении $\Gamma(s)$ при большом $|s|$ дает представление следующая теорема (формула Стирлинга):

Теорема 6.1 [1]). *При постоянном b имеет место формула*

$$\ln \Gamma(s+b) = \left(s + b - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(|s|^{-1}\right) \tag{6.7}$$

равномерно в каждой области

$$|\arg s| \leqslant \pi - \delta, \quad \delta > 0, \tag{6.8}$$

из которой должны быть исключены точка $s = 0$ и полюсы $\Gamma(s+b)$ с окрестностями.

Для $\ln \Gamma(s)$ и $\ln s$ нужно взять те регулярные ветви, которые действительны для действительного положительного s.

Заметим, что константа в $O(\ )$ зависит от δ. Функция $\Gamma(s)$ не имеет нулей, потому что $1/\Gamma(s)$ — целая функция.

Из теоремы 6.1 получается следующая теорема.

Теорема 6.2. *Для постоянных A и B, $A \leqslant B$ в полосе*

$$A \leqslant \sigma \leqslant B \tag{6.9}$$

имеет место асимптотическая формула

$$|\Gamma(s)| = (2\pi)^{1/2} |t|^{\sigma - 1/2} e^{-1/2\pi |t|} \left\{1 + O\left(|t|^{-1}\right)\right\} \tag{6.10}$$

при $|t| \to \infty$. Константа в $O(\ )$ зависит от A и B.

Доказательство. Из (6.7) следует при $|t| \to \infty$

$$\Gamma(\sigma + it) = \exp\left\{\left(\sigma + it - \frac{1}{2}\right) \ln(\sigma + it) - \right.$$
$$\left. - \sigma - it + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(|t|^{-1}\right)\right\} \tag{6.11}$$

[1]) Доказательство см., например, у Титчмарша [3].

для всех σ из полосы (6.9), причем константы в $O(\ )$ во всем этом доказательстве зависят от A и B. Далее имеем

$$\operatorname{Re}\left\{\left(\sigma+it-\frac{1}{2}\right)\ln(\sigma+it)\right\}=\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\ln(\sigma^2+t^2)^{1/2}-t\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sigma},$$

причем очевидно, что

$$\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\ln(\sigma^2+t^2)^{1/2}=\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\ln|t|+O\left(|t|^{-2}\right)$$

при $|t|\to\infty$, и $\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sigma}=\pm\frac{1}{2}\pi-\frac{\sigma}{t}+O\left(|t|^{-2}\right)$ при $t\to\pm\infty$. Подставляя все это в (6.11), получаем

$$|\Gamma(\sigma+it)|=C\exp\left\{\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\ln|t|-\frac{1}{2}\pi|t|+O\left(|t|^{-1}\right)\right\}$$

с $C=(2\pi)^{1/2}$. Отсюда следует (6.10).

Теорема 6.3. *В области* $|\arg s|\leqslant\pi-\delta$, $|s|\geqslant\delta$, *при постоянном* $\delta>0$ *имеет место соотношение*

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)=\ln s-\frac{1}{2s}+O\left(\frac{1}{|s|^2}\right). \tag{6.12}$$

Константа в $O(\ )$ *зависит от* δ.

Доказательство. Равенство 6.12 получается с помощью (6.7), если применить формулу Коши

$$f'(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-s)^2}\,d\zeta$$

к функции $f(s)=\ln\Gamma(s)-\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s+s-\frac{1}{2}\ln 2\pi$, причем путь интегрирования C — окружность с центром в точке $\zeta=s$ и радиусом $|s|\sin\frac{1}{2}\delta$.

§ 7. Теорема Фрагмена — Линделёфа

Теорема 7.1. *Рассмотрим область B, состоящую из тех точек* $s=\sigma+it$, *для которых*

$$\sigma_1(t)<\sigma<\sigma_2(t),\quad t>t_0, \tag{7.1}$$

где $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ — *непрерывные функции, удовлетворяющие условию*

$$\beta_1\leqslant\sigma_1(t)<\sigma_2(t)\leqslant\beta_2\quad(t>t_0), \tag{7.2}$$

а β_1, β_2, t_0 — *любые действительные числа. Пусть* $f(s)$ *регулярна в области* B *и непрерывна в замыкании* B' *области* B. *Далее,* *пусть для всех* $s \in B'$ *имеет место неравенство*

$$|f(s)| < A \exp\{e^{ct}\}, \quad 0 < c < \frac{\pi}{\beta_2 - \beta_1}. \tag{7.3}$$

Если теперь на границе B *имеет место неравенство*

$$|f(s)| \leqslant C, \tag{7.4}$$

то оно выполняется при всех $s \in B'$.

Доказательство. Предположим, что $\beta_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $\beta_2 = \frac{1}{2}\pi$ $\Big($этого всегда можно добиться с помощью линейного преобразования $s' = \pi\left\{s - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)\right\}\Big/(\beta_2 - \beta_1)\Big)$. Тогда условие на c примет вид $0 < c < 1$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(s) = f(s)\, e^{-\varepsilon \cos bs}, \tag{7.5}$$

где $c < b < 1$ и $\varepsilon > 0$ будет позднее определено. Для $s \in B'$ из $0 < b < 1$ следует

$$|g(s)| = |f(s)| \exp\{-\varepsilon \cos b\sigma \cdot \operatorname{ch} bt\} \leqslant$$
$$\leqslant |f(s)| \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon \cos\frac{1}{2} b\pi \cdot e^{b|t|}\right\} \leqslant |f(s)|.$$

Поэтому $|g(s)| \leqslant C$ на границе B и

$$|g(s)| < A \exp\left\{e^{ct} - \frac{1}{2}\varepsilon \cos\frac{1}{2} b\pi \cdot e^{b|t|}\right\}$$

внутри B. Поскольку $b > C$, можно найти такое $t_1 > t_0$, что для $\sigma_1(t) < \sigma < \sigma_2(t)$, $t \geqslant t_1$,

$$|g(s)| \leqslant C.$$

Но тогда по принципу максимума

$$|g(s)| \leqslant C$$

в любой области

$$\sigma_1(t) \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad T \geqslant t_1 \tag{7.6}$$

и, следовательно, $|g(s)| \leqslant C$ во всей области B. Отсюда следует то же самое для $|f(s)|$. Действительно, для каждого $s \in B$ имеем

$$|f(s)| = |g(s)| \exp\{\varepsilon \cos b\sigma \operatorname{ch} bt\} \leqslant C \exp\{\varepsilon \cos b\sigma \operatorname{ch} bt\}$$

и, так как это верно для любого $\varepsilon > 0$, получаем $|f(s)| \leqslant C$.

Теорема 7.1 — это обобщение принципа максимума на бесконечную область B. Правда, здесь еще требуется дополнительное условие (7.3). Согласно принципу максимума, если неравенство $|f(s)| \leqslant C$ выполнено на границе области, то это же неравенство имеет место внутри области. Доказанный здесь принцип Фрагмена — Линделёфа формулируется так: если $|f(s)| \leqslant C$ на границе области, то это же неравенство имеет место внутри области, или $|f(s)|$ растет быстрее, чем правая часть (7.3). Впрочем пример функции $f(s) = \exp \cos s$, $\sigma_1(t) = \beta_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $\sigma_2(t) = \beta_2 = \frac{1}{2}\pi$, показывает, что теорема уже не верна, если в 7.3 допустить равенство $c = \pi/(\beta_2 - \beta_1)$.

Теоремы, подобные теореме Фрагмена — Линделёфа, можно доказать также для других типов бесконечных областей (см., например, Титчмарш [3]).

Теорема 7.1 справедлива также при $t_0 \to -\infty$. Нам нужен только частный случай.

Теорема 7.2. *Если функция $f(s)$ регулярна в области*

$$\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2, \quad -\infty < t < +\infty \tag{7.7}$$

и там имеет место оценка

$$|f(s)| < A \exp\{e^{c|t|}\}, \quad 0 < c < \frac{\pi}{\sigma_2 - \sigma_1}, \tag{7.8}$$

то из неравенства

$$|f(s)| \leqslant C \quad \text{для} \quad \sigma = \sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma = \sigma_2$$

следует это же неравенство во всей области (7.7).

Для доказательства, как и в теореме 7.1, нужно рассмотреть функцию $g(s)$ и показать, что $|g(s)| \leqslant C$ в области, аналогичной (7.6), для всех достаточно больших T

$$\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2, \quad -T \leqslant t \leqslant T. \tag{7.9}$$

Отсюда, как и раньше, будет следовать утверждение теоремы.

§ 8. Теорема Литлвуда

Нам нужна следующая теорема о среднем числе нулей аналитической функции:

Теорема 8.1. *Пусть $f(s)$ однозначна и регулярна во всех точках области*

$$\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2, \quad |t| \leqslant T, \tag{8.1}$$

за исключением некоторого числа полюсов, и не имеет ни нулей, ни полюсов на прямой $\sigma = \sigma_2$. Обозначим через $\nu(\alpha)$ разность между количеством нулей и количеством полюсов функции $f(s)$ (каждая точка считается со своей кратностью) в прямоугольнике

$$\alpha < \sigma < \sigma_2, \quad |t| < T, \tag{8.2}$$

где $\sigma_1 \leqslant \alpha < \sigma_2$. *Тогда имеет место равенство*

$$2\pi \int_{\alpha}^{\sigma_2} \nu(\sigma)\, d\sigma = \int_{-T}^{T} \{\ln|f(\alpha+it)| - \ln|f(\sigma_2+it)|\}\, dt + \\ + \int_{\alpha}^{\sigma_2} \{\arg f(\sigma+iT) - \arg f(\sigma-iT)\}\, d\sigma. \qquad (8.3)$$

При этом $\arg f(\sigma+iT)$ *определяется следующим образом. Выберем в точке* $s=\sigma_2-iT$ *любое значение* $\arg f(s)$, *продолжим это значение непрерывно вдоль пути* $\sigma=\sigma_2$ *к точке* σ_2+iT *и продолжим затем вдоль пути* $t=T$, *увеличивая* $\arg f(s)$ *на* $-n\pi$ *при прохождении через n-кратный нуль и на* $n\pi$ *при прохождении через n-кратный полюс. Величину* $\arg f(\sigma-iT)$ *определяем, продолжая вдоль* $t=-T$ *уже полученное значение* $\arg f(\sigma_2-iT)$, *причем при прохождении n-кратного нуля или полюса* $\arg f(s)$ *увеличивается на* $n\pi$ *или соответственно на* $-n\pi$.

Доказательство. Обозначим через R прямоугольник (8.2), а через C — границу R, проходимую в положительном направлении. Мы предположим сначала, что на C функция $f(s)$ не обращается в 0 и ∞, т. е. что все нули и полюсы $f(s)$ лежат в R. Эти точки будут лежать на некоторых прямых $t=\text{const}$, например на прямых $t=t_1$, $t=t_2$, ..., $t=t_m$, причем предположим, что $-T<t_m<$ $<t_{m-1}< \ldots <t_2<t_1<T$.

Пусть $\alpha_k^{(1)}+it_k, \ldots, \alpha_k^{(n_k)}+it_k$ — нули и полюсы $f(s)$ на прямой $t=t_k$, и пусть $\alpha<\alpha_k^{(1)} \leqslant \alpha_k^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k^{(n_k)} < \sigma_2$, $k=1, 2, \ldots, m$. Разрежем прямоугольник вдоль отрезков

$$\alpha \leqslant \sigma \leqslant \alpha_k^{(n_k)}, \quad t=t_k, \quad k=1, 2, \ldots, m. \qquad (8.4)$$

В разрезанной области B рассмотрим функцию

$$F(s)=\ln f(s), \qquad (8.5)$$

причем мы возьмем любое значение логарифма в точке $s=\sigma_2-iT$ и продолжим на всю область. Так получится однозначная и регулярная в B функция $F(s)$. Каждому разрезу (8.4) мы сопоставим путь C_k, который идет из точки $\alpha+it_k$ по верхнему краю разреза, обходит сверху точки $\alpha_k^{(1)}+it_k, \ldots, \alpha_k^{(n_k-1)}+it_k$ по маленьким полуокружностям, обходит точку $\alpha_k^{(n_k)}+it_k$ по маленькой окружности в отрицательном направлении и возвращается вдоль нижнего края разреза $\alpha+it_k$, снова обходя точки $\alpha_k^{(1)}+it_k, \ldots, \alpha_k^{(n_k-1)}+it_k$ по маленьким полуокружностям снизу. Граница прямоугольника C образует совместно с этим путем замкнутый путь $\overline{C}$: от $\sigma_2 - iT$ к $\sigma_2 + iT$, $\alpha + iT$, $\alpha + it_1$, назад вдоль C_1 к $\alpha + it_1$, $\alpha + it_2$, затем вдоль C_2 опять назад к $\alpha + it_2$ и т. д. к $\alpha - iT$ и назад к начальной точке $\sigma_2 - iT$.

Внутри $\overline{C}$ функция $F(s)$ регулярна, следовательно,

$$\int_{\overline{C}} F(s)\,ds = 0. \tag{8.6}$$

Теперь имеем

$$\int_{\overline{C}} F(s)\,ds = \left(\int_{C} + \int_{C_1} + \ldots + \int_{C_m}\right) F(s)\,ds,$$

причем нужно принять во внимание, что $F(s)$ на C, вообще говоря, не непрерывна, но в точках $\alpha + it_1, \ldots, \alpha + it_m$ можно указать скачки. Если мы обозначим через $F_k'(\sigma)$ и $F_k''(\sigma)$ значение $F(s)$ на верхнем и соответственно нижнем крае (8.4), то на прямолинейном куске пути C_k имеет место равенство

$$F_k''(\sigma) = F_k'(\sigma) - \nu_k(\sigma) \cdot 2\pi i,$$

причем через $\nu_k(\beta)$ обозначается разность между числом нулей и числом полюсов функции $f(s)$ (каждая точка считается со своей кратностью) на отрезке $t = t_k$, $\sigma_1 \leqslant \beta \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$.

Если устремить теперь радиусы кругов и полукругов к нулю, то легко видеть, что интегралы, взятые по ним, также стремятся к нулю. Интеграл

$$\int \ln s\,ds,$$

взятый по дуге $s = \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varepsilon > 0$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю, и в окрестности нуля или полюса s_0 кратности n

$$\ln f(s) = n \ln(s - s_0) + f^*,$$

где f^* — функция, ограниченная в точке s_0. Таким образом, так как $\nu_k(\sigma) = 0$ при $\alpha_n^{(n_k)} < \sigma \leqslant \sigma_2$, имеет место соотношение

$$\int_{C_k} F(s)\,ds \to \int_{\alpha}^{\alpha_n^{(n_k)}} \left\{F_k'(\sigma) - F_k''(\sigma)\right\} d\sigma =$$

$$= 2\pi i \int_{\alpha}^{\alpha_k^{(n_k)}} \nu_k(\sigma)\,d\sigma = 2\pi i \int_{\alpha}^{\sigma_2} \nu_k(\sigma)\,d\sigma.$$

Это дает далее

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} F(s)\, ds \to 2\pi i \int_{\alpha}^{\sigma_2} \nu(\sigma)\, d\sigma,$$

поскольку очевидно, что $\sum_{k=1}^{m} \nu_k(\sigma) = \nu(\sigma)$. Если устремить радиусы кругов и полукругов к нулю, то из (8.6) следует

$$\int_{C} F(s)\, ds = -2\pi i \int_{\alpha}^{\sigma_2} \nu(\sigma)\, d\sigma. \tag{8.7}$$

В частности, интеграл, стоящий слева, чисто мнимый. Теперь имеем

$$-i \int_{C} F(s)\, ds = \operatorname{Im} \int_{C} F(s)\, ds = \int_{-T}^{T} \{\ln|f(\sigma_2 + it)| -$$

$$- \ln|f(\alpha + it)|\}\, dt + \int_{\alpha}^{\sigma_2} \{\arg f(\sigma - iT) - \arg f(\sigma + iT)\}\, d\sigma. \tag{8.8}$$

При этом значение $\arg f(\sigma + iT)$, $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, получается продолжением уже ранее установленного значения $\arg f(\sigma_2 - iT)$ вдоль $\sigma = \sigma_2$ к $\sigma_2 + iT$ и оттуда вдоль $t = T$ к $\sigma + iT$. При обходе $\overline{C}$ значение $\arg f(s)$ не изменяется, так как внутри $\overline{C}$ всегда $f(s)$ не имеет нулей и полюсов. Следовательно, $\arg f(\sigma - iT)$ на $\overline{C}$ является непрерывным продолжением $\arg f(\sigma_2 - iT)$ вдоль пути $t = -T$. Равенство (8.8) вместе с (8.7) дает утверждение теоремы, если $f(s)$ не имеет нулей и полюсов на C.

Если на C лежат нули или полюсы $f(s)$, мы изменим $\overline{C}$ так, чтобы обойти эти точки по маленьким полуокружностям (или в случае угловой точки C по маленькой четверти окружности) внутри $\overline{C}$; соответственно, если $\alpha + it_k$ — нуль или полюс, начинаем путь C_k с четверти круга $\alpha + it_k + \varepsilon e^{i\theta}$, $\frac{1}{2}\pi \geqslant \theta \geqslant 0$, и заканчиваем четвертью круга $\alpha + it_k + \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \geqslant \theta \geqslant -\frac{1}{2}\pi$. Если теперь устремим радиусы всех кругов к нулю, то получим ту же формулу (8.8), только нужно принять во внимание, что $\arg f(\sigma \pm iT)$ для $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ должен определяться так, как было указано в утверждении теоремы 8.1.

Равенство (8.3) — интегральная форма теоремы о вычетах

$$\int_{C} \frac{f'}{f}(s)\, ds = \int_{C} d \ln f(s) = 2\pi i \nu(\alpha), \tag{8.9}$$

например для $f(s) \neq 0, \infty$ на C. Из $d \ln f(s)$ получается при этом $F(s)\,ds = \ln f(s)\,ds$ и из $2\pi i\nu(\alpha)$ — левая часть (8.3). Непосредственное интегрирование (8.9) с σ вместо α по интервалу $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ недопустимо, так как $f'(s)/f(s)$ имеет полюс, если s — нуль или полюс $f(s)$. В этом случае интеграл (8.9) существует только в смысле главного значения Коши.

§ 9. Некоторые теоремы выпуклости

Теорема 9.1[1]). *Рассмотрим функцию* $f(s)$, *однозначную и регулярную в области*

$$\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2. \tag{9.1}$$

Пусть во всей области (9.1)

$$|f(s)| \leqslant B, \tag{9.2}$$

где B — константа, не зависящая от s. Если $L(\alpha)$ — верхняя грань $|f(s)|$ на прямой $\sigma = \alpha$ $(\sigma_1 < \alpha \leqslant \sigma_2)$, *то имеет место неравенство*

$$L(\sigma) \leqslant L(\sigma_2)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} L(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}. \tag{9.3}$$

Доказательство. Мы можем предполагать, что $f(s)$ не равна тождественно нулю в области $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ и, следовательно, $L(\sigma) > 0$ для всех σ из $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$. Действительно, из равенства $L(\sigma) = 0$ для некоторого σ следовало бы, что $f(\sigma + it) = 0$ для всех t, и поэтому $f(s)$ равнялось бы нулю для всех регулярных точек s. Пусть θ — действительное число, которое позднее будет определено. Функция

$$g(s) = e^{\theta s} f(s)$$

в области $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ регулярна, ограничена и удовлетворяет условиям

$$|g(s)| \leqslant \begin{cases} e^{\theta\sigma_1} L(\sigma_1), & \sigma = \sigma_1, \\ e^{\theta\sigma_2} L(\sigma_2), & \sigma = \sigma_2. \end{cases}$$

Применим теперь к функции $g(s)$ теорему 7.2, положив в ней $C = \max\{e^{\theta\sigma_1} L(\sigma_1),\ e^{\theta\sigma_2} L(\sigma_2)\}$. Тогда для верхней грани $e^{\theta\sigma} L(\sigma)$ функции $|g(s)|$ на прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$ получим оценку

$$e^{\theta\sigma} L(\sigma) \leqslant \max\{e^{\theta\sigma_1} L(\sigma_1),\ e^{\theta\sigma_2} L(\sigma_2)\},$$

т. е.

$$L(\sigma) \leqslant \max\{e^{\theta(\sigma_1-\sigma)} L(\sigma_1),\ e^{\theta(\sigma_2-\sigma)} L(\sigma_2)\}. \tag{9.4}$$

Положим теперь

$$\theta = \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \ln \frac{L(\sigma_1)}{L(\sigma_2)}.$$

---

[1]) См. Дойч [1].

Это всегда конечное число, так как по предположению $L(\sigma_1) \neq 0, \infty$ и $L(\sigma_2) \neq 0, \infty$. Следовательно,

$$e^{\theta(\sigma_1-\sigma)} L(\sigma_1) = \left(\frac{L(\sigma_1)}{L(\sigma_2)}\right)^{\frac{\sigma_1-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} L(\sigma_1) = L(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} L(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}$$

и то же самое значение получается для $e^{\theta(\sigma_2-\sigma)} L(\sigma_2)$. Подставляя это в (9.4), получаем утверждение теоремы.

Из теоремы 9.1 сразу же следует теорема Адамара о трех кругах.

Теорема 9.2. *Пусть* $0 < r_1 < r_2$ *и функция* $f(\zeta)$ *однозначна и регулярна для* $r_1 \leqslant |\zeta| \leqslant r_2$. *Если*

$$M(r) = \max_{|\zeta|=r} |f(\zeta)|, \tag{9.5}$$

то при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ *имеет место оценка*

$$M(r) \leqslant M(r_1)^{\frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}} M(r_2)^{\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}}. \tag{9.6}$$

Доказательство. С помощью бесконечнозначной функции $s = \ln \zeta$ отобразим круговое кольцо $0 < r_1 \leqslant |\zeta| \leqslant r_2$ на полосу $\ln r_1 \leqslant \sigma \leqslant \ln r_2$. Применим теперь к функции $f(\zeta) = f(e^s)$ теорему 9.1 при $\sigma_1 = \ln r_1$, $\sigma_2 = \ln r_2$. Тогда

$$L(\alpha) = \max_{\operatorname{Re} s = \alpha} |f(e^s)| = \max_{\zeta = e^\alpha} |f(\zeta)| = M(e^\alpha).$$

Следовательно, $L(\sigma_1) = M(r_1)$, $L(\sigma_2) = M(r_2)$ и (9.3) переходит в (9.6).

Теорема 9.3. *Пусть функции* $g_1(s), \ldots, g_h(s)$ *в полосе* $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ *регулярны и ограничены. Положим*

$$G(s) = \sum_{n=1}^{h} |g_n(s)|^2 \tag{9.7}$$

и

$$M(\alpha) = \sup_{\sigma=\alpha} G(s). \tag{9.8}$$

Тогда

$$M(\sigma) \leqslant M(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} M(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}. \tag{9.9}$$

Доказательство. По определению верхнего предела для каждого $\varepsilon > 0$ имеется такое $s_0 = \sigma + it_0$, что

$$G(s_0) > M(\sigma) - \varepsilon. \tag{9.10}$$

Можно так определить числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$ с абсолютной величиной, равной единице, что

$$G(s_0) = \sum_n |g_n(s_0)|^2 = \sum_n \varepsilon_n g_n^2(s_0). \tag{9.11}$$

Пусть теперь n принимает значения 1, 2, ..., h. Применяя теорему 9.1 к функции $f(s) = \sum\limits_n \varepsilon_n g_n^2(s)$, получаем

$$L(\sigma_1) = \sup_{\sigma=\sigma_1} |f(s)| \leqslant \sup_{\sigma=\sigma_1} \sum_n |g_n(s)|^2 = M(\sigma_1)$$

и также $L(\sigma_2) \leqslant M(\sigma_2)$. С другой стороны, согласно (9.10),

$$L(\sigma) \geqslant |f(s_0)| = f(s_0) = G(\sigma_0) > M(\sigma) - \varepsilon.$$

Таким образом, из (9.3) следует

$$M(\sigma) - \varepsilon \leqslant M(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} M(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}.$$

Так как это неравенство выполняется для каждого $\varepsilon > 0$, получаем (9.9).

Теоремы типа теоремы 9.1 называются теоремами выпуклости, потому что вытекающее из (9.3) неравенство

$$\ln L(\sigma) \leqslant \frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1} \ln L(\sigma_1) + \frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} \ln L(\sigma_2)$$

позволяет видеть, что $\ln L(\sigma)$ есть выпуклая функция σ. Нам нужна еще другая теорема выпуклости, которая относится не к верхней грани $L(\sigma)$, а к квадратичному среднему значению $|f(s)|$ вдоль прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$.

Теорема 9.4[1]). *Пусть функция $f(s)$ однозначна, регулярна и ограничена в полосе $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ и существует интеграл*

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)|^2 \, dt. \tag{9.12}$$

Будем предполагать, что он равномерно сходится в полосе $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$. Если равномерно в указанной полосе имеет место соотношение

$$\lim_{|t|\to\infty} |f(s)| = 0, \tag{9.13}$$

то

$$I(\sigma) \leqslant I(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} I(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}. \tag{9.14}$$

Доказательство. Докажем теорему сначала при

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

---

[1]) См. Харди, Ингам и Пойа [1]; Габриэль [1].

В каждом прямоугольнике

$$\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2, \quad -T \leqslant t \leqslant T, \qquad \sigma_1 < \sigma_2 \tag{9.15}$$

функция $f(s)$ регулярна, и по известным теоремам функция $f^*(s) = \overline{f(2\sigma_0 - \bar{s})}$ (отражение в $\sigma = \sigma_0$) также регулярна[1]). Пусть пути C_1 и C_2 начинаются в точке $s = \sigma_0 - iT$ и состоят соответственно из левой и правой половин границы прямоугольника. (Следовательно, C_2 берется в положительном, а C_1 в отрицательном направлении.) Так как $f^*(s) = \overline{f(s)}$ при $\operatorname{Re} s = \sigma_0$, то интегральная теорема Коши дает

$$\int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} f(s) f^*(s)\, ds = i \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} |f(s)|^2\, dt = \int_C f(s) f^*(s)\, ds. \tag{9.16}$$

Теперь по неравенству Шварца (см. ниже (12.6)) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} f(s) f^*(s)\, ds \right| &\leqslant \int_{C_2} |f(s)|\,|f^*(s)|\,|ds| \leqslant \\ &\leqslant \left\{ \int_{C_2} |f(s)|^2 |ds| \int_{C_2} |f^*(s)|^2 |ds| \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \int_{C_2} |f(s)|^2 |ds| \right\}^{1/2} \left\{ \int_{C_1} |f(s)|^2 |ds| \right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{9.17}$$

так как $2\sigma_0 - \bar{s} \in C_1$ для $s \in C_2$. Учитывая (9.13), получаем

$$\lim_{T \to \pm\infty} \int_{\sigma_0 + iT}^{\sigma_2 + iT} |f(s)|^2 |ds| = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{T \to \infty} \int_{C_2} |f(s)|^2 |ds| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma_2 + it)|^2\, dt = I(\sigma_2),$$

и также

$$\lim_{T \to \infty} \int_{C_1} |f(s)|^2 |ds| = I(\sigma_1).$$

Таким образом, в случае $\sigma = \sigma_0 = {}^1/_2(\sigma_1 + \sigma_2)$ при $T \to \infty$ из (9.16) и (9.17) следует утверждение (9.14).

Теперь докажем, что неравенство (9.14) справедливо для $\sigma = \sigma_0' = {}^1/_2(\sigma_1' + \sigma_2')$, если оно справедливо при $\sigma = \sigma_1'$ и при $\sigma = \sigma_2'$.

---

[1]) Пусть $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Немедленно проверяется, что из условий Коши — Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ эти уравнения следуют также для функций u^*, v^*, определяемых равенствами

$$g(x + iy) = u^*(x, y) + iv^*(x, y) = u(2\sigma_0 - x, y) - iv(2\sigma_0 - x, y),$$

а эти уравнения достаточны для регулярности в области.

Запишем (9.14) для $\sigma=\sigma_1'$ и $\sigma=\sigma_2'$ и подставим это в неравенство

$$I(\sigma_0')\leqslant I(\sigma_1')^{\frac{\sigma_2'-\sigma_0'}{\sigma_2'-\sigma_1'}}\, I(\sigma_2')^{\frac{\sigma_0'-\sigma_1'}{\sigma_2'-\sigma_1'}},$$

следующее из уже доказанного. Отсюда сейчас же получится (9.14) с $\sigma=\sigma_0'$. В самом деле, например, показателем степени у $I(\sigma_1)$ в правой части неравенства будет число

$$\frac{\sigma_2-\sigma_1'}{\sigma_2-\sigma_1}\,\frac{\sigma_2'-\sigma_0'}{\sigma_2'-\sigma_1'}+\frac{\sigma_2-\sigma_2'}{\sigma_2-\sigma_1}\,\frac{\sigma_0'-\sigma_1'}{\sigma_2'-\sigma_1'}=\frac{\sigma_2-\sigma_0'}{\sigma_2-\sigma_1}.$$

Следовательно, неравенство (9.14) имеет место для $\sigma={}^1/_2(\sigma_1'+\sigma_2')$, если оно верно для $\sigma=\sigma_1'$ и $\sigma=\sigma_2'$. Но так как (9.14) для $\sigma=\sigma_1$ и $\sigma=\sigma_2$ тривиальным образом выполнено, то оно имеет место также для всех σ вида $\sigma=\sigma_1+(\sigma_2-\sigma_1)\,l2^{-n}$, $0\leqslant l\leqslant 2^n$; $n=1, 2, \ldots$.

Из соображений непрерывности можно получить (9.14) для всех σ из области $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$, так как мы предполагали, что интеграл (9.12) равномерно сходится и, следовательно, $I(\sigma)$ — непрерывная функция от σ.

Предположения теоремы 9.4 отнюдь не нужны в полном объеме для справедливости (9.14) (см. Харди, Ингам и Пойа [1]). Однако для рассматриваемых здесь применений они достаточны и доказательство получается несколько проще.

Теорема 9.5. *Пусть функции* $g_1(s), \ldots, g_h(s)$ *регулярны в области* $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$, *интегралы*

$$I_n(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g_n(\sigma+it)|^2\,dt,\qquad n=1, 2, \ldots, h, \tag{9.18}$$

равномерно сходятся в области $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$, *и при* $|t|\to\infty$ *каждая функция* g_n *равномерно стремится к нулю. Обозначим* $G(s)=\sum\limits_{n=1}^{h}|g_n(s)|^2$ *и*

$$I(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\sigma+it)\,dt. \tag{9.19}$$

Тогда для $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$

$$I(\sigma)\leqslant I(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\,I(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}. \tag{9.20}$$

Доказательство. Используя доказательство теоремы 9.4, имеем

$$I(\sigma)=\sum_n I_n(\sigma), \tag{9.21}$$

причем пусть теперь суммирование проводится по $n=1, 2, \ldots, h$. Из теоремы 9.4 следует, что

$$I(\sigma)\leqslant \sum_n I_n(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} I_n(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}.$$

Теперь по неравенству Гёльдера (см. ниже (12.1)), примененному к $\alpha=(\sigma_2-\sigma_1)/(\sigma_2-\sigma)$ и $\beta=(\sigma_2-\sigma_1)/(\sigma-\sigma_1)$, и из формулы (9.21) получаем

$$I(\sigma)\leqslant\Big\{\sum_n I_n(\sigma_1)\Big\}^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\Big\{\sum_n I_n(\sigma_2)\Big\}^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}=I(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} I(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}},$$

а это и есть оценка (9.20).

§ 10. Аппроксимационная теорема Дирихле

Теорема 10.1. *Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ — действительные числа и $q>0$ — целое. Тогда в каждом интервале*

$$A\leqslant t\leqslant Aq^N \quad (A>0) \tag{10.1}$$

существует некоторое t, которое является целым кратным A и для которого имеет место соотношение

$$\|t\theta_i\|\leqslant\frac{1}{q}, \quad i=1, 2, \ldots, N, \tag{10.2}$$

причем через $\|\alpha\|$ обозначается расстояние от α до ближайшего целого числа.

Доказательство. Для доказательства мы используем геометрию N-мерного пространства. Разделим N-мерный единичный куб

$$0\leqslant\xi_1<1, \ldots, \quad 0\leqslant\xi_N<1$$

на q^N кубиков вида

$$\begin{gathered}\frac{m_1-1}{q}\leqslant\xi_1<\frac{m_1}{q}, \ldots, \frac{m_N-1}{q}\leqslant\xi_N<\frac{m_N}{q}, \\ 0<m_i\leqslant q, \quad i=1, 2, \ldots, N.\end{gathered} \tag{10.3}$$

Рассмотрим точки

$$P_n=\{(nA\theta_1-[nA\theta_1]), \ldots, (nA\theta_N-[nA\theta_N])\}$$

при $n=0, 1, 2, \ldots, q^N$. Из этих q^N+1 точек по крайней мере две точки, например P_r и P_s, $0\leqslant s<r\leqslant q^N$, лежат в одном и

том же кубике (10.3). Очевидно, что тогда имеет место неравенство

$$|rA\theta_i - [rA\theta_i] - (sA\theta_i - [sA\theta_i])| < \frac{1}{q}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

следовательно,

$$\|(r-s)A\theta_i\| < \frac{1}{q}.$$

Таким образом, утверждение (10.2) выполнено при $t=(r-s)A$. Условие (10.1) выполнено, поскольку $0 < r-s \leqslant q^N$.

Теорема 10.1 чаще всего формулируется для $A=1$ и принадлежит Дирихле.

§ 11. Почленное интегрирование рядов

Теорема 11.1. *Пусть для* $\xi \geqslant 0$, $n=1, 2, \ldots$, *функции* $f_n(\xi)$, $g_n(\xi)$, $F(\xi)$ *непрерывны и*

$$|f_n(\xi)| \leqslant F(\xi), \quad |g_n(\xi)| \leqslant b_n, \tag{11.1}$$

причем

$$\int_0^\infty F(\xi)\,d\xi \quad \text{и} \quad \sum_n b_n \tag{11.2}$$

сходятся. Тогда

$$\sum_n \int_0^\infty f_n(\xi)\,g_n(\xi)\,d\xi = \int_0^\infty \sum_n f_n(\xi)\,g_n(\xi)\,d\xi. \tag{11.3}$$

Доказательство. Из (11.1) следует

$$\left| \int_M^N f_n(\xi)\,g_n(\xi)\,d\xi \right| \leqslant b_n \int_M^N F(\xi)\,d\xi,$$

и из сходимости интеграла (11.2) вытекает сходимость интегралов

$$\int_0^\infty f_n(\xi)\,g_n(\xi)\,d\xi$$

при $n=1, 2, \ldots$. Ряд в левой части (11.3) сходится, так как у него есть сходящаяся мажоранта

$$\sum_n \left(b_n \int_0^\infty F(\xi)\,d\xi \right).$$

Ряд $\sum\limits_n f_n(\xi)\,g_n(\xi)$ сходится равномерно в каждом интервале вида $0 \leqslant \xi \leqslant X$, так как он там имеет сходящуюся мажоранту

$$\sum_n F(\xi)\,b_n$$

и $F(\xi)$ равномерно ограничена в $0 \leqslant \xi \leqslant X$. Следовательно,

$$\sum_n \int_0^X f_n(\xi)\, g_n(\xi)\, d\xi = \int_0^X \sum_n f_n(\xi)\, g_n(\xi)\, d\xi,$$

и отсюда при $X \to \infty$ следует

$$\left| \int_0^X \sum_n f_n(\xi)\, g_n(\xi)\, d\xi - \sum_n \int_0^\infty f_n(\xi)\, g_n(\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \sum_n \int_X^\infty f_n(\xi)\, g_n(\xi)\, d\xi \right| \leqslant \sum_n b_n \int_X^\infty F(\xi)\, d\xi \to 0,$$

чем все доказано.

§ 12. Некоторые неравенства

Без доказательства здесь приводятся некоторые известные неравенства.

Неравенство Гёльдера. Для любых комплексных чисел $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N$ имеет место неравенство

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N| \leqslant \left(|x_1|^\alpha + \ldots + |x_N|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \times$$

$$\times \left(|y_1|^\beta + \ldots + |y_N|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (12.1)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Для натурального $\alpha = m$ и $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_N \geqslant 0$, $y_1 = \ldots = y_N = 1$, отсюда следует

$$\left(x_1 + \ldots + x_N\right)^m \leqslant N^{m-1} \left(x_1^m + \ldots + x_N^m\right). \quad (12.2)$$

Неравенство Шварца

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N| \leqslant$$

$$\leqslant \left(|x_1|^2 + \ldots + |x_N|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(|y_1|^2 + \ldots + |y_N|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (12.3)$$

получается при $\alpha = \beta = 2$ из неравенства Гёльдера.

Часто употребляется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим N чисел. Именно для $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_N \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$(x_1 \ldots x_N)^{1/N} \leqslant \frac{1}{N}(x_1 + \ldots + x_N), \tag{12.4}$$

или

$$N^N x_1 \ldots x_N \leqslant (x_1 + \ldots + x_N)^N. \tag{12.5}$$

Интегральное неравенство Шварца имеет вид

$$\left| \int\limits_C f(s) g(s)\, ds \right| \leqslant \left\{ \int\limits_C |f(s)|^2 |ds| \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_C |g(s)|^2 |ds| \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{12.6}$$

причем предполагается существование обоих интегралов по пути C в комплексной плоскости.

Добавление I

БОЛЬШОЕ РЕШЕТО

М. Б. Барбан, А. И. Виноградов

Метод большого решета Ю. В. Линника зарекомендовал себя мощным аналитическим средством еще в сороковые годы. Этим методом А. Реньи [1] доказал, что всякое число представимо в виде суммы простого и почти простого чисел. В последнее время развитием и приложениями этого метода занимались Х. М. Андрухаев, М. Б. Барбан, Э. Бомбьери, А. И. Виноградов, Давенпорт, Пань Чень-Дунь, Ригер, Рот, В. Р. Фридлендер, Халберстам, Р. Эрдёш. Самые сильные результаты здесь принадлежат А. И. Виноградову [1*] и Э. Бомбьери [1*] [1]), работы которых практически подвели итог целому направлению исследований по замене расширенной гипотезы Римана теоремами типа большого решета.

Здесь мы изложим большое решето в его современном виде, докажем теорему А. И. Виноградова — Э. Бомбьери о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем [2]) и дадим с ее помощью новое решение известной проблемы делителей Титчмарша (см. гл. V, § 7). Эта проблема была решена впервые Ю. В. Линником [8] применением дисперсионного метода, использующего оценки А. Вейля для сумм Клостермана. Читатель, когда-либо изучавший работу Ю. В. Линника, безусловно оценит простоту предлагаемого доказательства, фактически просто повторяющего работу Е. К. Титчмарша [2] с заменой расширенной гипотезы Римана на теорему А. И. Виноградова — Э. Бомбьери.

Основным соотношением в методе большого решета является равенство Парсеваля. Пусть $S(\alpha) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi i \alpha n}$, где a_n — произвольные комплексные числа. Тогда равенство Парсеваля утверждает, что

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2.$$

---

1) Звездочкой отмечены работы, включенные в список литературы авторами добавлений. — *Прим. ред.*

2) Здесь мы будем следовать изложению Э. Бомбьери.

Это тождество, тривиальное с точки зрения его доказательства, весьма глубоко в том смысле, что оно дает точную оценку $|S(\alpha)|$ для почти всех α из сегмента $[0, 1]$. Иными словами, для всех α, за исключением множества, мера Лебега которого мала, при не очень быстро растущих коэффициентах a_n величина $|S(\alpha)|$ не превосходит квадратного корня из длины интервала суммирования. Чисто арифметическая информация отсюда извлекается следующим образом. Значение $S(\alpha)$ в рациональной точке $\alpha = a/D$, очевидно, связано с арифметикой, ибо функция $f(n) = e^{2\pi i \frac{a}{D} n}$ представляет собой характер аддитивной группы вычетов по $\operatorname{mod} D$ (подобно тому как введенные в гл. IV, § 2, функции $\chi_D(n)$ являются характерами мультипликативной группы классов вычетов по $\operatorname{mod} D$, взаимно простых с модулем). С помощью набора таких функций, соответствующих $a = \overline{0, \ D-1}$, выделяются числа, принадлежащие любой прогрессии $\operatorname{mod} D$, точно так же, как с помощью $\chi_D(n)$ выделяются числа, принадлежащие любой примитивной прогрессии (начальный член которой взаимно прост с модулем). Таким образом, наличие хороших оценок величины $\left|S\left(\frac{a}{D}\right)\right|$ для всех $a = \overline{1, \ D-1}$ влечет за собой равнораспределенность сумм a_n по всем арифметическим прогрессиям $\operatorname{mod} D$. С другой стороны, функция $S(\alpha)$ непрерывна и для всех α, близких к a/D, значение $S(\alpha)$ близко к $S\left(\frac{a}{D}\right)$. Поэтому $\left|S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2$ близко к

$$\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \left|S\left(\frac{a}{D} + \beta\right)\right|^2 d\beta$$

при достаточно малом δ.

Рассмотрим теперь совокупность рациональных точек

$$\left\{\frac{a}{D}\right\}, \text{ где } (a, D) = 1, \ 1 \leqslant a \leqslant D, \ 1 < D \leqslant M$$

(дроби Фарея). Расстояние между двумя любыми такими дробями не меньше $1/M^2$. В самом деле,

$$\left|\frac{a_1}{D_1} - \frac{a_2}{D_2}\right| = \frac{|a_1 D_2 - a_2 D_1|}{D_1 D_2} \geqslant \frac{1}{D_1 D_2},$$

ибо в силу условия $(a_i, D_i) = 1$, $i = \overline{1, \ 2}$, имеем $a_1 D_2 - a_2 D_1 \neq 0$. Значит, при любом $\delta < \frac{1}{2M^2}$ интервалы $\left[\frac{a}{D} - \delta, \ \frac{a}{D} + \delta\right]$, где $(a, D) = 1$, $1 \leqslant a < D$, $1 < D \leqslant M$, не пересекаются.

Но тогда

$$\sum_{1<D\leqslant M}\sum_{\substack{a=1\\(a,\,D)=1}}^{D-1}\int_{-\delta}^{\delta}\left|S\left(\frac{a}{D}+\beta\right)\right|^2 d\beta\leqslant\int_0^1|S(\alpha)|^2\,d\alpha,$$

и мы можем оценить

$$\sum_{1<D\leqslant M}\sum_{\substack{a=1\\(a,\,D)=1}}^{D-1}\left|S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2$$

через δ и $\sum\limits_{n=-N}^{N}|a_n|^2$. В этом и состоит основная идея метода большого решета.

Докажем теперь соответствующую теорему.

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{1<D\leqslant M}\sum_{\substack{a\,(D)\\(a,\,D)=1}}\left|S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2\leqslant C\max(M^2,\,N)\sum_{n=-N}^{N}|a_n|^2,$$

где C — абсолютная постоянная.

Доказательство проведем методом, который недавно был предложен Давенпортом и Халберстамом [1*]. Для любой периодической функции $\psi(\alpha)$ с периодом 1, интегрируемой вместе с квадратом модуля, имеет место тождество

$$S(\alpha)=\int_0^1\psi(\beta)f(\alpha-\beta)\,d\beta\left(=\int_{-1/2}^{1/2}\psi(\beta)f(\alpha-\beta)\,d\beta\right),$$

где $f(\alpha)=\sum\limits_{n=-N}^{N}\frac{a_n}{b_n}e^{2\pi i\alpha n}$, а b_n — коэффициенты Фурье функции $\psi(\alpha)$ предполагается, что $b_n\neq 0$ при $n=\overline{-N,\,N}$). Это известное свойство свертки: при свертывании двух функций их коэффициенты Фурье просто перемножаются.

Наша цель — оценить $S(\alpha)$ при помощи некоторого интеграла по интервалу $[a-\delta,\,a+\delta]$. Тогда сразу можно применить основную идею метода большого решета. Но для этого достаточно потребовать, чтобы функция $\psi(\alpha)$ обращалась в нуль вне интервала $[-\delta,\,\delta]$. При этом условии

$$S(\alpha)=\int_{-\delta}^{\delta}\psi(\beta)f(\alpha-\beta)\,d\beta,$$

и, пользуясь неравенством Шварца, получаем

$$|S(\alpha)|^2 \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} |\psi(\beta)|^2 d\beta \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |f(\alpha-\beta)|^2 d\beta =$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} |\psi(\beta)|^2 d\beta \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} |f(\beta)| d\beta.$$

Таким образом,

$$\sum_{1<D\leqslant M} \sum_{\substack{a(D)\\(a,\ D)=1}} \left|S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1/2}^{+1/2} |\psi(\beta)|^2 d\beta \sum_{1\leqslant D\leqslant M} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant D-1\\(a,\ D)=1}} \int_{a/D-\delta}^{a/D+\delta} |f(\beta)|^2 d\beta.$$

Но мы уже выяснили, что при $\delta < \frac{1}{2M^2}$ все интервалы $\left[\frac{a}{D}-\delta, \frac{a}{D}+\delta\right]$ не имеют общих точек. Следовательно, при этом условии имеет место неравенство

$$\sum_{1<D\leqslant M} \sum_{\substack{a(D)\\(a,\ D)=1}} \left|S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2 \leqslant \int_{-1/2}^{+1/2} |\psi(\beta)|^2 d\beta \cdot \int_0^1 |f(\beta)|^2 d\beta =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} |\psi(\beta)|^2 d\beta \cdot \sum_{n=-N}^{N} \frac{|a_n|^2}{|b_n|^2}.$$

Чтобы завершить доказательство, теперь достаточно выбрать в качестве $\psi(\alpha)$ любую подходящую конкретную функцию и оценить сверху интеграл от квадрата ее модуля и снизу модуль ее коэффициентов Фурье. Возьмем

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} |\alpha|, & |\alpha| \leqslant \delta, \\ 0, & \delta \leqslant |\alpha| \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\psi(\alpha)|^2 d\alpha = \frac{2}{3}\delta^3,$$

а

$$b_n = \int_0^1 \psi(\beta) e^{-2\pi i\beta n} d\beta = \int_{-\delta}^{\delta} |\beta| e^{-2\pi i\beta n} d\beta = \delta^2 \{1 + O(\delta n)\},$$

или $|b_n| \geqslant \frac{\delta^2}{2}$ при условии $\delta n < c_0$, где c_0 — достаточно мало, но фиксировано. Таким образом, если выполнены оба условия $\delta < \frac{1}{2M^2}$ и $\delta < \frac{c_0}{N}$, то

$$\sum_{1 < D \leqslant M} \sum_{\substack{a\,(D) \\ (a,\ D)=1}} \left| S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2 \leqslant \frac{3}{\delta} \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2,$$

откуда непосредственно следует теорема 1.

Для приложений к теории простых чисел, однако, более полезно иметь аналог теоремы 1 для мультипликативных характеров, что нетрудно получить с помощью известной связи между аддитивными и мультипликативными характерами.

Рассмотрим линейное пространство комплекснозначных функций, заданных на классах вычетов $\operatorname{mod} D$. Если ввести скалярное умножение двух таких функций f и g по формуле $\frac{1}{D} \sum\limits_{a\,(D)} f(a)\overline{g(a)}$, то мы получаем D-мерное гильбертово пространство, причем аддитивные характеры образуют ортонормированный базис этого пространства. Тогда, в частности, для мультипликативного характера имеем

$$\chi(n) = \sum_{a\,(D)} f_\chi(a)\, e^{2\pi i \frac{an}{D}},$$

где

$$f_\chi(a) = \frac{1}{D} \sum_{n\,(D)} \chi(n)\, e^{-2\pi i \frac{an}{D}}.$$

Таким образом, координаты мультипликативного характера в базисе, составленном из аддитивных характеров, лишь на множитель $1/D$ отличаются от известных сумм Гаусса и, согласно лемме 7.1.1, для первообразного характера $\chi(n)$ обладают следующими важными для дальнейшего свойствами:

$$f_\chi(a) = \overline{\chi(a)}\, f_\chi(1), \quad |f_\chi(1)| = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Окончательно для первообразных мультипликативных характеров получаем следующее выражение через аддитивные характеры:

$$\chi(n) = f_\chi(1) \sum_{a\,(D)} \overline{\chi}(a)\, e^{2\pi i \frac{a}{D} n}.$$

Пусть далее всюду χ_D^* обозначает первообразный характер по $\bmod D$, а $\sum\limits_{\chi_D^*}$ — сумму по всем первообразным характерам по $\bmod D$. Тогда

$$\sum_{\chi_D^*}\left|\sum_{n=-N}^{N} a_n\chi_D^*(n)\right|^2 = \sum_{\chi_D^*}\frac{\left|\tau_{\chi_D^*}(1)\right|^2}{D^2}\cdot\left|\sum_{a\,(D)}\overline{\chi_D^*(a)}\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi i\frac{a}{D}n}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{\chi_D^*}\left|\sum_{a\,(D)}\overline{\chi_D^*(a)}\,S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2 \leqslant \frac{1}{D}\sum_{\chi_D}\left|\sum_{a\,(D)}\chi_D(a)\,S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2,$$

так как по всем первообразным характерам суммируется неотрицательная величина. Теперь уже просто в силу ортогональности мультипликативных характеров (см. формулу (4.2.11)) имеем

$$\sum_{\chi_D^*}\left|\sum_{n=-N}^{N} a_n\chi_D^*(n)\right|^2 \leqslant \sum_{\substack{a\,(D)\\(a,\ D)=1}}\left|S\left(\frac{a}{D}\right)\right|^2,$$

и получаем такое следствие из теоремы 1.

Теорема 2. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{1<D\leqslant M}\ \sum_{\chi_D^*}\left|\sum_{n=-N}^{N} a_n\chi_D^*(n)\right|^2 \leqslant c\max(M^2,\ N)\sum_{n=-N}^{N}|a_n|^2.$$

Чтобы оценить силу теоремы 2, рассмотрим один ее частный случай. Пусть $a_n=0$ при отрицательных n, и $a_n=\Lambda(n)$ при положительных n. Тогда

$$\sum_{1<D\leqslant M}\ \sum_{\chi_D^*}\left|\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)\,\chi_D^*(n)\right|^2 \ll \max(M^2,\ N)\,N\ln N. \tag{1}$$

Но если для любого $\varepsilon>0$ и любого $x\geqslant 1$ имеет место оценка

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\,\chi_D(n)\right| \leqslant c(\varepsilon)\,x^{1/2+\varepsilon}, \tag{2}$$

то для соответствующей L-функции имеет место гипотеза Римана $\Bigl($ряд для логарифмической производной равномерно сходится при $\operatorname{Re} s\geqslant\frac{1}{2}+\varepsilon\Bigr)$. Таким образом, неравенство (1) показывает, что оценка (2) имеет место при $x\leqslant D^2$ в среднем. Именно тот факт, что хорошая оценка (2) в среднем имеет место лишь при $x\leqslant D^2$, и препятствует доказательству гипотезы Римана для почти всех L-функций. Вместе с тем из теоремы 2 можно вывести весьма сильные утверждения о нулях L-функций почти всех модулей, во всяком случае достаточные для доказательства закона распределения простых чисел в коротких арифметических прогрессиях.

Прежде всего мы докажем лемму, показывающую, в какой мере закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях зависит от положения границы нулей L-функций и от их плотности. Здесь в первую очередь бросается в глаза, что зависимость от T в оценке $N(\alpha, T, k)$ (обозначение см. § 1 гл. IX) практически не влияет на закон распределения простых чисел в коротких арифметических прогрессиях.

Лемма. *Пусть все* $\varphi(k)$ *L-функций* $\mathrm{mod}\ k$ *не имеют нулей в области* $\sigma \geqslant 1-\alpha_0$, $|t| \leqslant T_0$ $(\alpha_0 = \alpha_0(k),\ T_0 = T_0(k),\ T_0 \geqslant 2)$. *Если*

$$N(\alpha, T, k) \leqslant T^{c_1} k^{a(1-\sigma)} \ln^{c_2} k \quad (T \geqslant 2),$$

то

$$\pi(x, k, l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)} \left\{ 1 + O\left(\left[\left(\frac{D^a}{x} \right)^{\frac{d_0}{c}} + \frac{1}{T_0^{1/c}} \right] \ln^c x + x^{-\frac{1}{c}} \right) \right\}, \tag{3}$$

где $c = c(c_1, c_2)$.

Доказательство начнем с известной явной формулы, выражающей $\psi(x, k, l)$ через нули L-функций Дирихле. Нашей информации о нулях L-функций недостаточно для непосредственного изучения $\psi(x, k, l)$, однако, как мы увидим в дальнейшем, вполне достаточно для вывода асимптотического закона при $m = [c_1] + 2$ для $\psi_m(x, k, l)$, m раз проинтегрированной по x функции $\psi(x, k, l)$. Теперь, пользуясь m раз классическим приемом асимптотического дифференцирования, мы можем перейти от закона для $\psi_m(x, k, l)$ к закону для функции $\psi(x, k, l)$. При каждом асимптотическом дифференцировании из достигнутого понижения в соответствующей асимптотической формуле извлекается квадратный корень, но, так как нам требуется всего конечное число повторений этого приема, мы и получаем формулу (3), достаточную для большинства приложений. Таким образом, пользуясь формулой (9.2.5), получаем

$$\psi_m(x, k, l) = \frac{x^{m+1}}{\varphi(k)(m+1)!} - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho = \rho(\chi) = \beta + i\gamma \\ |\gamma| \leqslant T_1}} \overline{\chi(l)} \frac{x^{\rho+m}}{\rho(\rho+1)\ldots(\rho+m)} + \\ + O\left(\frac{x^{m+1}}{T_1} \ln^2 x + \frac{x^{1/4+m}}{\varphi(k)} \ln x \right),$$

где T_1 — любое число, $2 \leqslant T_1 \leqslant x$, $k \leqslant x$, или в силу условий леммы при $T_1 > T_0$

$$\psi_m(x, k, l) = \frac{x^{m+1}}{\varphi(k)(m+1)!} + O\left(\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma| \leqslant 1}} x^{\beta+m} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{1<n \leqslant T_1} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ n \leqslant |\gamma| \leqslant n+1}} x^{\beta+m}\right) +$$
$$+ O\left(\frac{x^{m+1}}{T_1} \ln^2 x + \frac{x^{m+1/4}}{\varphi(k)} \ln x\right). \qquad (4)$$

Теперь уже можно стандартным образом применять оценки $N(\alpha, T, k)$ (ср. вывод формулы (9.2.17)):

$$\sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ n \leqslant |\gamma| \leqslant n+1}} x^{\beta+m} \ll x^m kn \ln kn + x^{m+1} \int_0^1 N(\sigma, T, k)\, x^{\sigma-1} \ln x\, d\sigma.$$

Отсюда при $0 \leqslant n \leqslant T_0 - 1$ имеем

$$\sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ n \leqslant |\gamma| \leqslant n+1}} x^{\beta+m} \ll x^m k(n+1) \ln k(n+1) +$$
$$+ x^{m+1}(n+1)^{c_1} \left(\frac{D^a}{x}\right)^{\alpha_0} \ln^{c_3} x,$$

а при $n > T_0 - 1$

$$\sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ n \leqslant |\gamma| \leqslant n+1}} x^{\beta+m} \ll x^m kn \ln kn + x^{m+1} n^{c_1} \ln^{c_3} x.$$

Подставляя эти оценки в (4), получаем

$$\psi_m(x, k, l) = \frac{x^{m+1}}{\varphi(k)(m+1)!} + O\left(\frac{x^{m+1}}{\varphi(k)} \left(\frac{D^a}{x}\right)^{\alpha_0} \ln^{c_3} x\right) +$$
$$+ O\left(\frac{x^{m+1}}{\varphi(k) T_0} \ln^{c_3} x\right) + O(x^m \ln kT_1) + O\left(\frac{x^{m+1}}{T_1} \ln^2 x + \frac{x^{m+1/4}}{\varphi(k)} \ln x\right),$$

или, выбрав $T_1 = \min(\varphi(k), T_0, x)$,

$$\psi_m(x, k, l) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!\,\varphi(k)} + O\left(\frac{x^{m+1}}{\varphi(k)} \left(\frac{D^a}{x}\right)^{\alpha_0} \ln^{c_3} x\right) +$$
$$+ O\left(\frac{x^{m+1}}{\varphi(k) T_0} \ln^{c_3} x\right) + O(x^m \ln^2 x) + O\left(\frac{x^{m+1/4}}{\varphi(k)} \ln x\right). \qquad (5)$$

Здесь мы пользовались тем, что при нашем выборе m ($m = [c_1] + 2$) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{c_1}}{n^{m+1}}$ сходится, причем быстрее ряда обратных квадратов.

Проиллюстрируем теперь метод асимптотического дифференцирования. В силу монотонности и неотрицательности функции $\psi_m(x, k, l)$ при любом $h>0$ имеем

$$\psi_m(x, k, l) \leqslant \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} \psi_{m-1}(u, k, l)\,du =$$
$$= \frac{1}{h}\{\psi_m(x+h, k, l) - \psi_m(x, k, l)\}.$$

Пусть известно, что

$$\psi_m(x, k, l) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!\,\varphi(k)}\{1 + O(\Pi_m(x, k))\},$$

где $\Pi_m(x, k)$ монотонно убывающая функция x. Тогда при $h \leqslant x$

$$\psi_{m-1}(x, k, l) \leqslant \frac{x^m}{m!\,\varphi(k)} + O\left(\frac{x^{m+1}\Pi_m(x, k)}{h\varphi(k)}\right) + O\left(\frac{hx^{m-1}}{\varphi(k)}\right).$$

Выбирая h оптимальным образом, получаем

$$\psi_{m-1}(x, k, l) \leqslant \frac{x^m}{m!\,\varphi(k)}\left\{1 + O\left(\Pi_m^{1/2}(x, k)\right)\right\}.$$

Объединяя это с аналогично доказываемой оценкой снизу, имеем

$$\psi_{m-1}(x, k, l) = \frac{x^m}{m!\,\varphi(k)}\left\{1 + O\left\{\Pi_m^{1/2}(x, k)\right)\right\}.$$

Это как раз и означает, что при каждом асимптотическом дифференцировании из понижения извлекается квадратный корень. Применяя этот метод m раз к формуле (5), получаем

$$\psi(x, k, l) = \frac{x}{\varphi(k)}\left\{1 + O\left(\left(\frac{D^a}{x}\right)^{\frac{\alpha_0}{c_4}} \ln^{c_5} x + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{T_0^{1/c_4}} \ln^{c_5} x + \left(\frac{D}{x}\right)^{\frac{1}{c_4}} \ln^{\frac{2}{c_4}} x + x^{-\frac{3}{4c_4}} \ln^{\frac{1}{c_4}} x\right)\right\},$$

где $c_4 = 2^m$, $c_5 = \frac{c_3}{c_4}$. Переход к функции $\pi(x, k, l)$ осуществляем с помощью леммы 4.7.1. Этим заканчивается доказательство леммы.

Цель дальнейшего — развить теорию L-функций Дирихле для почти всех модулей k. Мы покажем, что для почти всех модулей условия леммы выполнены с $\alpha_0 = c_0$, $T_0 = k^{c_0}$, где c_0 — абсолютная постоянная (квазиримановa гипотеза) и $a = 2$ (плотностная гипотеза).

Базируясь на теореме 2, доказательство можно было бы провести методом выпуклости средних от аналитических функций, изложенным в гл. IX, однако здесь мы воспользуемся методом нагруженных сумм, идея которого принадлежит Ю. В. Линнику. Если каждому нулю L-функций сопоставить сумму значений характера с одними и теми же коэффициентами для всех L-функций, про которую известно, что она велика, то количество нулей всех L-функций оценится с помощью суммирования таких сумм. Но для последнего суммирования уже можно применять теорему 2. В теории наименьшего простого числа в прогрессиях такое сопоставление производится очень тонко и сложно. Для наших целей достаточно следующего простого приема. Пусть $\rho=\beta+i\gamma$ — нуль функции $L(s, \chi)$. Тогда равно нулю и произведение $L(\rho, \chi)\sum\limits_{n\leqslant N_1}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^\rho}$. Теперь будем аппроксимировать $L(\rho, \chi)$ как можно более коротким отрезком его ряда Дирихле (чем короче отрезок удается взять, тем меньше коэффициент при $(1-\alpha)$ в оценке числа нулей). В частности, если обращать внимание только на зависимость от k, но не от γ, то с помощью преобразования Абеля и тривиальной оценки $\left|\sum\limits_{n\leqslant x}\chi(n)\right|\leqslant k$ можно доказать, что годится отрезок длины k, а с помощью оценки $\left|\sum\limits_{n\leqslant x}\chi(n)\right|\ll\sqrt{k}\ln k$ Виноградова — Пойа (см. например, Човла [1]) можно доказать, что годится отрезок длины $\sqrt{k}\ln k$.

Заметим, что еще лучшие результаты получаются применением оценок Берджесса [1*], которому удалось использовать аналог гипотезы Римана для специальных ζ-функций; доказательство этого аналога было дано А. Вейлем [1*].

Таким образом, пользуясь преобразованием Абеля и оценкой Виноградова — Пойа (читатель может доказать ее самостоятельно, см. задачи 1 и 2 к гл. IV вместе с леммой 7.1.1), получаем

$$\left|\sum_{n\geqslant N_2}\frac{\chi(n)}{n^\rho}\right|\ll(|\gamma|+1)\sqrt{k}\ln kN_2^{-\beta}\leqslant(|\gamma|+1)\sqrt{k}\ln k\cdot N_2^{-\frac{1}{2}}$$

при $\beta\geqslant\frac{1}{2}$.

Теперь равенство

$$L(\rho, \chi)\sum_{n<N_1}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^\rho}=0$$

вместе с тривиальной оценкой

$$\sum_{n \leqslant N_1} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^\rho} \ll N_1^{\frac{1}{2}}$$

при $\beta \geqslant \frac{1}{2}$ приводит к соотношению

$$1 + \sum_{N_1 \leqslant m \leqslant N_1 N_2} \frac{\chi(m)}{m^\rho} \sum_{\substack{d \mid m \\ \frac{m}{N_2} \leqslant d \leqslant N_1}} \mu(d) = O\left(|\gamma| \sqrt{k} \ln k \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}\right).$$

Если ввести обозначение

$$a_m = \sum_{\substack{d \mid m \\ \frac{m}{N_2} \leqslant d \leqslant N_1}} \mu(d),$$

то при условии

$$\sqrt{\frac{N_2}{N_1}} > (|\gamma| + 1) \sqrt{k} \ln^2 k$$

для всех достаточно больших k имеем

$$\left| \sum_{N_1 \leqslant m \leqslant N_1 N_2} \frac{\chi(m) a_m}{m^\rho} \right| > \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Это почти нужная нагруженная сумма. В первую очередь с помощью преобразования Абеля перейдем к нагруженным суммам, несущественно зависящим от ρ. Введем обозначение $S_\chi(n) = \sum_{m \leqslant n} a_m \chi(m)$. Тогда из неравенства (6) следует

$$2(|t| + 2) \sum_{N_1 \leqslant n \leqslant N_1 N_2} \frac{|S_\chi(n)|}{n^{\beta+1}} > \frac{1}{2}, \tag{7}$$

поскольку

$$\left| \frac{1}{(n+1)^\rho} - \frac{1}{n^\rho} \right| = \left| (\rho + 1) \int_n^{n+1} u^{-\rho-1}\, du \right| \leqslant \frac{|\rho + 1|}{n^{1+\beta}}.$$

Теперь мы можем оценить количество нулей всех L-функций, соответствующих первообразным характерам по $\operatorname{mod} k$ для всех $k \leqslant M$. Для этого возведем обе части неравенства (7) в квадрат и просуммируем по всем нулям. Получим $\left(\text{при } \alpha \geqslant \frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{k \leqslant M} N^*(\alpha, T, k) \leqslant$$

$$\leqslant 16(T+2)^2 \sum_{k \leqslant NL} \sum_{\chi^*} \sum_{\substack{\rho_{\chi^*} = \beta + i\gamma \\ \beta \geqslant \alpha,\ |\gamma| \leqslant T}} \left(\sum_{N_1 < n \leqslant N_1 N_2} \frac{|S_{\chi^*}(n)|}{n^{\beta+1}} \right)^2,$$

где $N^*(\alpha, T, k)$ означает количество нулей L-функций с первообразными характерами по $\bmod k$ в соответствующем прямоугольнике.

Предварительное возведение в квадрат неравенства (7) необходимо потому, что теорема 2 дает хорошую оценку только квадрата модуля суммы значений характеров. Но у каждой L-функции $\bmod k$ количество нулей в критической полосе до высоты T есть $\ll T \ln kT$ (см. теорему 7.3.4), поэтому

$$\sum_{k \leqslant M} N^*(\alpha, T, k) \ll T^3 \ln kT \sum_{k < M} \sum_{\chi^*} \left(\sum_{N_1 \leqslant n \leqslant N_1 N_2} \frac{|S_{\chi^*}(n)|}{n^{\alpha+1}} \right)^2.$$

Отсюда, применяя неравенство Шварца, получаем основное соотношение

$$\sum_{k \leqslant M} N^*(\alpha, T, k) \ll T^3 \ln MT \cdot \ln N_2 \cdot \sum_{k < M} \sum_{\chi^*} \sum_{N_1 \leqslant n \leqslant N_1 N_2} \frac{|S_{\chi^*}(n)|^2}{n^{2\alpha+1}}$$

при любых N_1 и N_2, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{\frac{N_2}{N_1}} > 2T \sqrt{M} \ln^2 M.$$

Теперь применим теорему 2. Пусть сначала $N_1 = M^2$ с тем, чтобы мы могли пользоваться вторым из двух неравенств, содержащихся в теореме 2. Тогда

$$\sum_{k \leqslant M} \sum_{\chi^*} |S_{\chi^*}(n)|^2 \ll n \sum_{m \leqslant n} |a_n|^2 \ll n^2 \ln^3 n$$

ибо $|a_n| \leqslant \tau(n)$. Таким образом,

$$\sum_{k \leqslant M} N^*(\alpha, T, k) \ll T^3 \ln MT \cdot \ln^2 N_2 (N_1 N_2)^{2(1-\alpha)}.$$

Выбирая теперь минимально возможное N_2, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Имеет место оценка*

$$\sum_{k \leqslant M} N^*(\alpha, T, k) \ll T^{\sigma} M^{10(1-\alpha)} \ln^8 M.$$

Отметим важное следствие этой теоремы.

Теорема 4 (квазириманова гипотеза). *Для модулей k из интервала* $[M, 2M]$, *за исключением не более* $M^{0,9}$ *модулей, все L-функции* $\bmod k$ *не имеют нулей в области* $\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{20}$, $|t| \leqslant k^{0,01}$, Пусть теперь $N_1N_2=M^2$. Здесь вступает в силу первое неравенство теоремы 2, и мы получаем плотностную гипотезу в среднем.

Теорема 5. *Имеет место оценка*

$$\sum_{k\leqslant M} N^*(\alpha,\ T,\ k) \ll T^{\sigma} M M^{2(1-\alpha)} \ln^{100} M.$$

Доказательство. Можно считать, что $T\leqslant M^{1/3}$, так как в противном случае теорема следует из тривиальной оценки

$$\sum_{k\leqslant M} N^*(\alpha,\ T,\ k) \ll TM^2 \ln TM.$$

Тогда N_1 можно выбрать равным $M^{1/7}$. Теперь для $n\in[M,\ M^2]$ применяем теорему 2. Получаем

$$\sum_{M\leqslant n\leqslant M^2}\ \sum_{k<M}\ \sum_{\chi^*} \frac{|S_{\chi^*}(n)|^2}{n^{2\alpha+1}} \leqslant M^2 \sum_{M\leqslant n\leqslant M^2} \frac{\ln^3 n}{n^{2\alpha}} \leqslant MM^{2(1-\alpha)} \ln^3 M.$$

При $n<M$ понижение, даваемое суммой $\sum\limits_{n<m<M} \dfrac{1}{m^{2\alpha}}$, не достаточно для доказательства теоремы. Поэтому применим вспомогательный прием.

Пусть l — целое положительное число. Тогда, неравенство Гёльдера дает

$$\sum_{M^{1/l}\leqslant n\leqslant M^{\frac{1}{l-1}}} \frac{|S_\chi(n)|^2}{n^{2\alpha+1}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{M^{\frac{1}{l}}\leqslant n\leqslant M^{\frac{1}{l-1}}} \frac{1}{n}\right)^{\frac{l-1}{l}} \sum_{M^{\frac{1}{l}}\leqslant n\leqslant M^{\frac{1}{l-1}}} \frac{|S_\chi(n)|^{2l}}{n^{2l\alpha+1}}.$$

Но $S_\chi^l(n)=\sum\limits_{m\leqslant n^l} \chi(m)\,b_m$, где

$$b_m=\sum_{\substack{m_1\ldots m_l=m\\ m_i\leqslant n}} a_{m_1}\ldots a_{m_l}=O(\tau^l(m)\,\tau_l(m)).$$

Теперь, введя обозначение

$$\sum_{m\leqslant\nu} \chi(m)\,b_m=S'_\chi(\nu),$$

заметим, что мы свели оценку суммы $S_\chi(n)$ к оценке другой суммы $S'_\chi(n)$, распространенной опять на интервал $[M,\ M^2]$. К ней можно также применить теорему 2. В качестве следствия получаем теорему:

Теорема 6. *Для k из интервала $[M, 2M]$, за исключением не более $M/\ln^A M$ модулей, имеет место оценка*

$$N(a, T, k) \leqslant T^6 M^{2(1-\alpha)} \ln^{A+200} M.$$

Теперь из леммы и теорем 4 и 6 следует

Теорема 7. *Закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях*

$$\pi(x, k, l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)} \left\{ 1 + O\left(\frac{\ln^c x}{\ln^A k} \right) \right\}$$

для всех $(l, k) = 1$ имеет место для k из интервала $[M, 2M]$ за исключением не более $\dfrac{M}{\ln^{cA} M}$ модулей, при условии $M \leqslant \dfrac{x^{1/2}}{\ln^{cA} x}$,

Так как для всех модулей $k \leqslant \ln^A x$ закон простых чисел в прогрессиях справедлив (теорема 4.8.3), то отсюда выводим следующую теорему.

Теорема 8. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{k \leqslant \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln^A x}} \max_{\substack{l(k) \\ (l, k)=1}} \left| \pi(x, k, l) - \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(k)} \right| = O\left(\frac{x}{\ln^{cA} x} \right).$$

Выведем с помощью этой теоремы асимптотическую формулу для проблемы делителей Е. К. Титчмарша.

Теорема 9. *При $x \to \infty$ имеет место*

$$\sum_{p \leqslant x} \tau(p-1) = \frac{315\,\zeta(3)}{2\pi^4} x + O\left(\frac{x}{\ln x} \ln \ln x \right).$$

В самом деле,

$$\sum_{p \leqslant x} \tau(p-1) \leqslant 2 \sum_{p \leqslant x} \sum_{\substack{m \mid (p-1) \\ m \leqslant \sqrt{x}}} 1 = 2 \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \pi(x, m, 1).$$

Но часть суммы по всем $m \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{\ln^A x}$ рассчитывается с помощью теоремы 8. Здесь надо только вычислить $\sum\limits_{m \leqslant y} \dfrac{1}{\varphi(m)}$, что легко делается аналитическим методом (см. гл. III) или элементарно (ср. гл. V, § 7).

Часть суммы по всем m, $\frac{\sqrt{x}}{\ln^A x} \leqslant m \leqslant \sqrt{x}$, оценивается величиной $O\left(\frac{x}{\ln x} \ln \ln x\right)$ с помощью леммы Бруна — Титчмарша (теорема 5.2.1). Для доказательства оценки снизу воспользуемся неравенством

$$\sum_{p \leqslant x} \tau(p-1) \geqslant 2 \sum_{p \leqslant x} \sum_{\substack{m \mid (p-1) \\ m \leqslant \frac{\sqrt{x}}{\ln^A x}}} 1 + O\left(\sum_{\substack{p=1+m^2 \\ p \leqslant x}} 1\right) + O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

и теорема становится очевидной.

Добавление II

О МЕТОДЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Н. М. Коробов

После выхода в свет книги Прахара в теории дзета-функции были получены новые результаты (Коробов [1*], [2*], Виноградов [6*], [7*], Коробов [3*], [4*]), позволившие усилить ряд оценок в теории распределения простых чисел. Подробное изложение этих результатов можно найти в книге Вальфиша [3*]. Ниже доказаны некоторые из теорем, полученных в этих работах, и приведено новое доказательство (Карацуба и Коробов [1*]) теоремы о среднем И. М. Виноградова.

§ 1. Свойства величин $N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — фиксированные целые числа. Обозначим через $N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ число целочисленных решений системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k + \lambda_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^n + \ldots + x_k^n = y_1^n + \ldots + y_k^n + \lambda_n, \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant x_j, y_j \leqslant P.$$

Если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, то вместо $N_k^{(P)}(0, \ldots, 0)$ будем пользоваться обозначением $N_k(P)$. Пусть, далее, $S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — тригонометрическая сумма,

$$S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (\alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)}.$$

Лемма 1. *При любом целом $k \geqslant 1$ справедливы равенства*

$$N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =$$
$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{2k} e^{-2\pi i (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \qquad (1)$$

$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{2k} = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{2\pi i (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)}, \qquad (2)$$

где суммирование проводится по $|\lambda_\nu| < kP^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости равенства (2). Очевидно,

$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{2k} = \sum_{x_1, \ldots, y_k=1}^{P} e^{2\pi i \left[\alpha_1 (x_1 + \ldots - y_k) + \ldots + \alpha_n \left(x_1^n + \ldots - y_k^n\right)\right]}. \quad (3)$$

Пусть величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определены равенствами

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + \ldots - y_k = \lambda_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^n + \ldots - y_k^n = \lambda_n. \end{array}\right\}$$

Так как $1 \leqslant x_j, y_j \leqslant P$, то $|\lambda_\nu| < kP^\nu$. В равенстве (3) соберем вместе слагаемые с фиксированными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда, пользуясь определением величин $N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, получаем (2):

$$|S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{2k} = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, e^{2\pi i (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)}.$$

Для доказательства равенства (1) перепишем соотношение (2) в виде

$$\sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} N_k^{(P)}(\mu_1, \ldots, \mu_n)\, e^{2\pi i (\alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_n\mu_n)} = |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{2k},$$

где суммирование проводится по области $|\mu_1| < kP, \ldots, |\mu_n| < kP^n$. Домножая это равенство на $e^{-2\pi i (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)}$ и интегрируя по единичному n-мерному кубу, получаем

$$\sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} N_k^{(P)}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \int_0^1 \ldots \int_0^1 e^{2\pi i [\alpha_1(\mu_1 - \lambda_1) + \ldots + \alpha_n(\mu_n - \lambda_n)]} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{2k} e^{-2\pi i (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Отсюда в силу равенства

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha(\mu - \lambda)}\, d\alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu = \lambda, \\ 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \end{cases}$$

следует равенство (1):

$$N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|^{2k} e^{-2\pi i (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Следствие. *Справедливы соотношения*

$$N_k(P) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 | S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$
$$N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant N_k(P). \tag{4}$$

Действительно, первое из этих соотношений представляет собой частный случай равенства (1), получающийся при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$:

$$N_k(P) = N_k^{(P)}(0, \ldots, 0) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 | S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Оценка (4) также непосредственно следует из (1):

$$N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =$$
$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 | S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^{2k} e^{-2\pi i (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \ldots \int_0^1 | S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) |^{2k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n = N_k(P).$$

Отметим еще два соотношения, следующие из определения величин $N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

$$N_k(P) \leqslant P^{2k}, \tag{5}$$
$$\sum_{|\lambda_n| < kP^n} N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}). \tag{6}$$

Оценка (5) тривиальна: в ней число решений системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots - y_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + \ldots - y_k^n = 0, \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant x_j, y_j \leqslant P,$$

оценивается числом всевозможных систем $x_1, \ldots, y_k$, равным, очевидно, P^{2k}.

Для вывода равенства (6) рассмотрим систему

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \quad + \ldots - y_k \quad = \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{n-1} + \ldots - y_k^{n-1} = \lambda_{n-1}, \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant x_j, y_j \leqslant P, \tag{7}$$

и присоединим к ней дополнительное уравнение

$$x_1^n + \ldots - y_k^n = \lambda_n.$$

Очевидно, число решений системы (7), равное $N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$, представляет собой сумму числа решений дополненной системы уравнений, распространенную на всевозможные значения λ_n. Но эта сумма равна

$$\sum_{|\lambda_n| < kP^n} N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

и, следовательно,

$$N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = \sum_{|\lambda_n| < kP^n} N_k^{(P)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

что совпадает с равенством (6).

Лемма 2. *Пусть a — произвольное фиксированное целое. Число решений системы уравнений*

$$\left.\begin{array}{l} (a+x_1)+\ldots-(a+y_k)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a+x_1)^n+\ldots-(a+y_k)^n=0, \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant x_j, y_j \leqslant P, \tag{8}$$

не зависит от a и равно $N_k(P)$.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, y_k$ — произвольное решение системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1+\ldots-y_k=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1^n+\ldots-y_k^n=0, \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant x_j, y_j \leqslant P. \tag{9}$$

Тогда при любом $s = 1, 2, \ldots, n$ получим

$$\sum_{j=1}^{k} [(a+x_j)^s-(a+y_j)^s] = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu a^{s-\nu}\left(x_j^\nu - y_j^\nu\right) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu a^{s-\nu} \sum_{j=1}^{k}\left(x_j^\nu - y_j^\nu\right) = 0.$$

Следовательно, каждое решение системы (9) является решением системы (8). Так же легко проверить, что в свою очередь каждое решение системы (8) будет решением системы (9). Но тогда число решений этих систем уравнений одинаково, что совпадает с утверждением леммы.

§ 2. Теорема о среднем

Докажем прежде всего одну лемму о сравнениях, указанную Ю. В. Линником в работе [9*].

Лемма 3. *Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — произвольные фиксированные целые числа, $p > n$ — простое и T — число решений системы* *сравнений*

$$\left.\begin{array}{l} x_1+\ldots+x_n\equiv\mu_1 \pmod p, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^n+\ldots+x_n^n\equiv\mu_n \pmod{p^n}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0\leqslant x_j\leqslant p^n-1 \\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{array} \tag{10}$$

где при $i\neq j$ *выполняется условие* $x_i\not\equiv x_j \pmod p$.

Тогда справедлива оценка

$$T\leqslant n!\,p^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Доказательство. Запишем величины x_j в виде

$$x_j=x_{j1}+x_{j2}p+\ldots+x_{jn}p^{n-1} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $0\leqslant x_{j\nu}\leqslant p-1$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Заметим, что, согласно дополнительному условию, указанному в лемме, при $i\neq j$ будет $x_{i1}\neq x_{j1}$. Легко видеть, что величины $x_{11},\ \ldots,\ x_{n1}$ удовлетворяют системе сравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+\ldots+x_{n1}\equiv\mu_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{11}^n+\ldots+x_{n1}^n\equiv\mu_n \end{array}\right\} \pmod p. \tag{11}$$

Обозначим через T_1 число решений этой системы. Очевидно для каждого решения системы (11) элементарные симметрические функции величин $x_{11},\ \ldots,\ x_{n1}$ сохраняют фиксированные значения по модулю p. Следовательно, величины $x_{11},\ \ldots,\ x_{n1}$ являются перестановками корней некоторого сравнения степени n по простому модулю p, где $p>n$. Так как число различных корней сравнения не превосходит n, то для T_1 получаем оценку $T_1\leqslant n!$.

Пусть $x_{11},\ \ldots,\ x_{n1}$ — какое-нибудь фиксированное решение системы (11). Перейдем от основной системы сравнений к сравнениям по модулю p^2. Тогда получим

$$\left.\begin{array}{l} (x_{11}+x_{12}p)^2+\ldots+(x_{n1}+x_{n2}p)^2\equiv\mu_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (x_{11}+x_{12}p)^n+\ldots+(x_{n1}+x_{n2}p)^n\equiv\mu_n \end{array}\right\} \pmod{p^2}.$$

Отсюда после очевидных преобразований получим систему из $n-1$ линейных сравнений относительно $x_{12},\ \ldots\ x_{n2}$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}x_{12}\ \ +\ldots+\ x_{n1}x_{n2}\equiv\mu_2', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{11}^{n-1}x_{12}+\ldots+x_{n1}^{n-1}x_{n2}\equiv\mu_n' \end{array}\right\} \pmod p. \tag{12}$$

Так как величины $x_{11},\ \ldots,\ x_{n1}$ различны, то по меньшей мере $n-1$ из них отличны от нуля. Будем для определенности считать, что отличны от нуля величины $x_{11}, \ldots, x_{n-1\,1}$. Но тогда при $j=1, 2, \ldots, n-1$ будет $1 \leqslant x_{j1} \leqslant p-1$ и, очевидно,

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{n-1\,1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{11}^{n-1} & \ldots & x_{n-1\,1}^{n-1} \end{vmatrix} = x_{11} \ldots x_{n-1\,1} \prod_{1 \leqslant l < j \leqslant n-1} (x_{j1} - x_{l1}) \not\equiv 0 \pmod p.$$

Следовательно, при любом фиксированном значении x_{n2} величины $x_{12}, \ldots, x_{n-1\,2}$ определяются из системы (12) однозначно. Таким образом, обозначая через T_2 число решений этой системы сравнений, получим $T_2 = p$.

Далее, рассматривая сравнения по модулю p^3, получим систему из $n-2$ линейных сравнений относительно $x_{13}, \ldots, x_{n3}$; число решений такой системы сравнений $T_3 = p^2$. Аналогично получим $T_4 = p^3, \ldots, T_n = p^{n-1}$. Отсюда, так как $T = T_1 \ldots T_n$, следует утверждение леммы

$$T \leqslant n!\, p^{1+2+\ldots+n-1} = n!\, p^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Следствие. *Если $m \geqslant 1$ и Q — произвольные целые, $p > n$ — простое и T' — число решений системы сравнений*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots + x_n \equiv y_1 + \ldots + y_n \pmod p, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^n + \ldots + x_n^n \equiv y_1^n + \ldots + y_n^n \pmod{p^n}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} Q \leqslant x_j, y_j < Q + mp^n \\ (j = 1, 2, \ldots, n), \end{array}$$

где при $i \neq j$ выполняется условие $x_i \not\equiv x_j \pmod p$, то справедлива оценка

$$T' \leqslant n!\, m^{2n} p^{2n^2 - \frac{n(n+1)}{2}}. \tag{13}$$

Действительно, выберем величины $y_1, \ldots, y_n$ произвольно. Это можно сделать $m^n p^{n^2}$ способами. Тогда, обозначая через T'' число решений системы сравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots + x_n \equiv \mu_1 \pmod p, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^n + \ldots + x_n^n \equiv \mu_n \pmod{p^n}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} Q \leqslant x_j < Q + mp^n, \\ x_i \not\equiv x_j \pmod p \quad (i \neq j), \end{array}$$

получаем

$$T' \leqslant m^n p^{n^2} T''.$$

В этой системе сравнений каждая из переменных x_j пробегает m полных систем вычетов по модулю p^n. Поэтому $T'' \leqslant m^n T$, где $T \leqslant n!\, p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ — число решений системы (10). Отсюда следует оценка (13):

$$T' \leqslant n!\, m^{2n} p^{n^2 + \frac{n(n-1)}{2}} = n!\, m^{2n} p^{2n^2 - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

В следующей лемме вводится ряд величин, нужных для доказательства теоремы о среднем, и устанавливаются некоторые оценки, связывающие эти величины.

Лемма 4. *Пусть* $\tau \geqslant 1$, $n \geqslant 2$, $P \geqslant (2n)^{2n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\tau}}$ — *произвольные целые. Определим целые* $P_0, \ldots, P_\tau$ *и простые* $p_1, \ldots, p_\tau$ *с помощью соотношений*

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} P_{\nu-1}^{\frac{1}{n}} \leqslant p_\nu \leqslant P_{\nu-1}^{\frac{1}{n}}, \\ P_0 = P, \quad &P_\nu = \left[P_{\nu-1} p_\nu^{-1}\right] + 1, \end{aligned}\right\} \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Тогда выполняются оценки

$$P_{\nu-1} < p_\nu P_\nu, \quad P_1 \ldots P_\tau \leqslant p_2 p_3^2 \ldots p_\tau^{\tau-1} P_\tau^\tau, \tag{14}$$

$$p_\nu \geqslant 2n^2, \quad P_\nu < 3^n P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu}, \quad p_1 \ldots p_\tau < 3^\tau P^{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau}. \tag{15}$$

Доказательство. Первая из оценок (14) непосредственно следует из определения P_ν:

$$p_\nu P_\nu = p_\nu\left(\left[P_{\nu-1} p_\nu^{-1}\right] + 1\right) > P_{\nu-1}.$$

Далее, перемножая оценки

$$\begin{gathered} P_\nu < p_{\nu+1} P_{\nu+1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_{\tau-1} < p_\tau P_\tau, \end{gathered}$$

получаем

$$P_\nu < p_{\nu+1} \ldots p_\tau P_\tau.$$

Отсюда следует вторая из оценок (14):

$$P_1 \ldots P_\tau \leqslant \left(p_2 \ldots p_\tau P_\tau\right) \ldots \left(p_\tau P_\tau\right) P_\tau = p_2 p_3^2 \ldots p_\tau^{\tau-1} P_\tau^\tau.$$

Перейдем теперь к доказательству оценок (15). Из определения p_ν следует, что $p_\nu^{-1} \geqslant P_{\nu-1}^{-\frac{1}{n}}$. Объединяя эту оценку с первой из оценок (14), получаем

$$P_\nu > P_{\nu-1} p_\nu^{-1} \geqslant P_{\nu-1}^{1-\frac{1}{n}}.$$

Следовательно,

$$P_\nu \geqslant P_{\nu-1}^{1-\frac{1}{n}} \geqslant P_{\nu-2}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \geqslant \ldots \geqslant P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu},$$

Отсюда, так как $P \geqslant (2n)^{2n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\tau}}$, получаем первую из оценок (15):

$$P_\nu \geqslant P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau}} \geqslant (2n)^{2n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\tau}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau}} = (2n)^{2n},$$

$$p_\nu \geqslant \frac{1}{2} P_{\nu-1}^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{2}(2n)^2 = 2n^2.$$

Далее, так как $p_\nu^{-1} \leqslant 2P_{\nu-1}^{-\frac{1}{n}}$, то из определения P_ν следует, что

$$P_\nu \leqslant P_{\nu-1}p_\nu^{-1} + 1 \leqslant 2P_{\nu-1}^{1-\frac{1}{n}} + 1 \leqslant 3P_{\nu-1}^{1-\frac{1}{n}}.$$

Последовательное применение этого неравенства приводит ко второй из оценок (15):

$$P_\nu \leqslant 3P_{\nu-1}^{1-\frac{1}{n}} \leqslant 3^{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)} P_{\nu-2}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant 3^{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\nu-1}} P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\nu}} < 3^n P^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\nu}}.$$

Наконец, применяя эту оценку к $P_{\nu-1}$, получаем

$$p_\nu \leqslant P_{\nu-1}^{\frac{1}{n}} < 3P^{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\nu-1}},$$

$$p_1 \ldots p_\tau < 3^\tau P^{\frac{1}{n}\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau-1}\right]} = 3^\tau P^{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\tau}},$$

чем лемма доказана полностью.

Теорема 1. *Пусть* $n \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $P \geqslant (2n)^{2n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\tau}}$ *и* $k \geqslant n^2 + n\tau$. *Тогда для числа решений системы уравнений*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots - y_k = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^n + \ldots - y_k^n = 0, \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant x_j, y_j < P,$$

выполняется оценка

$$N_k(P) \leqslant (2k)^{2n\tau} 3^{2k(n+\tau)} P^{2k - \frac{n(n+1)}{2} + \delta(n, \tau)},$$

где величина $\delta(n, \tau)$ *определяется равенством*

$$\delta(n, \tau) = \frac{n(n+1)}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}.$$

Доказательство. Согласно обозначениям, введенным в лемме 4, $P=P_0 \leqslant p_1P_1$ и, следовательно, $N_k(P) \leqslant N_k(p_1P_1)$, где $N_k(p_1P_1)$ — число решений системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \ldots - y_k = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^n + \ldots - y_k^n = 0, \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant x_j, y_j < p_1P_1.$$

Заменив здесь x_j на $x_j+p_1z_j$ и y_j на $y_j+p_1t_j$, перепишем эту систему уравнений в виде

$$\left.\begin{array}{l} (x_1+p_1z_1) + \ldots - (y_k+p_1t_k) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (x_1+p_1z_1)^n + \ldots - (y_k+p_1t_k)^n = 0, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \leqslant x_j, y_j < p_1, \\ \\ 0 \leqslant z_j, t_j < P_1. \end{array} \tag{16}$$

Будем относить систему $x_1, \ldots, x_k$ к первому классу, если в ней можно найти n различных величин x_j. Все остальные системы $x_1, \ldots, x_k$ отнесем ко второму классу. Пусть N'_k — число решений системы уравнений (16) при $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$, принадлежащих первому классу, а N''_k — число решений этой системы при $x_1, \ldots, x_k$ или $y_1, \ldots, y_k$, принадлежащих второму классу. Тогда, очевидно,

$$N_k(p_1P_1) = N'_k + N''_k.$$

Для систем с различными $x_1, \ldots, x_n$ и произвольными $x_{n+1}, \ldots, x_k$ введем обозначение $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_{n+1}, \ldots, x_k$. Будем называть перестановками систем $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_{n+1}, \ldots, x_k$ такие системы, в которых различные x_j стоят уже не обязательно на первых n местах, а на произвольных местах.

Легко видеть, что каждая система первого класса найдется среди различных перестановок систем $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_{n+1}, \ldots, x_k$. Следовательно, величина N'_k не превосходит числа решений системы уравнений (16) с переменными вида $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_{n+1}, \ldots, x_k$, $(y_1, \ldots, y_n)$, $y_{n+1}, \ldots, y_k$, умноженного на $(C_k^n)^2$. Но тогда, пользуясь обозначениями

$$f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n, \quad S(x) = \sum_{z=0}^{P_1-1} e^{2\pi i f(x+p_1z)}$$

и замечая, что

$$\left| \sum_{x_{n+1}, \ldots, x_k=0}^{p_1-1} S(x_{n+1}) \ldots S(x_k) \right|^2 =$$

$$= \left| \sum_{x=0}^{p_1-1} S(x) \right|^{2(k-n)} \leqslant p_1^{2(k-n)-1} \sum_{x=0}^{p_1-1} |S(x)|^{2(k-n)},$$

получаем

$$N'_k \leqslant (C_k^n)^2 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Bigl| \sum_{(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}, \ldots, x_k} S(x_1) \ldots S(x_k) \Bigr|^2 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \leqslant$$

$$\leqslant (C_k^n)^2 p_1^{2k-2n-1} \times$$

$$\times \int_0^1 \ldots \int_0^1 \Bigl| \sum_{(x_1, \ldots, x_n)} S(x_1) \ldots S(x_n) \Bigr|^2 \sum_{x=0}^{p_1-1} | S(x) |^{2(k-n)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

С помощью таких же рассуждений, как и при доказательстве леммы 1, легко убедиться, что интеграл, стоящий в правой части этого неравенства, равен числу решений системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(x_1 + p_1 z_1) + \ldots - (y_n + p_1 t_n) = (x + p_1 z_{n+1}) + \ldots - (x + p_1 t_k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(x_1 + p_1 z_1)^n + \ldots - (y_n + p_1 t_n)^n = (x + p_1 z_{n+1})^n + \ldots - (x + p_1 t_k)^n, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $0 \leqslant x, x_j, y_j < p_1$, $0 \leqslant z_j, t_j < P_1$ и при $i \neq j$ выполняются условия $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$.

Далее, так же как и в лемме 2, получим, что число решений системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(x_1 - x + p_1 z_1) + \ldots - (y_n - x + p_1 t_n) = p_1 (z_{n+1} + \ldots - t_k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(x_1 - x + p_1 z_1)^n + \ldots - (y_n - x + p_1 t_n)^n = p_1^n \left(z_{n+1}^n + \ldots - t_k^n\right) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

равно числу решений системы (17). Рассмотрим еще систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(x_1 - x + p_1 z_1) + \ldots - (y_n - x + p_1 t_n) = \lambda_1 p_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(x_1 - x + p_1 z_1)^n + \ldots - (y_n - x + p_1 t_n)^n = \lambda_n p_1^n, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольные фиксированные целые, и систему сравнений

$$\left.\begin{aligned} &(x_1 - x + p_1 z_1) + \ldots - (y_n - x + p_1 t_n) \equiv 0 \pmod{p_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(x_1 - x + p_1 z_1)^n + \ldots - (y_n - x + p_1 t_n)^n \equiv 0 \pmod{p_1^n}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Обозначим соответственно через N_k^*, $N_n^*(\lambda_1 p_1, \ldots, \lambda_n p_1^n)$ и T^* число решений систем (18), (19) и (20). Область изменения неизвестных в этих системах будем предполагать такой же, как и в системе (17). Из (18) и (19) видно, что величины $z_{n+1}, \ldots, t_k$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} z_{n+1} + \ldots - t_k = \lambda_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{n+1}^n + \ldots - t_k^n = \lambda_n, \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant z_j, t_j < P_1.$$

Так как число решений этой системы равно $N_{k-n}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то, очевидно,

$$N_k^* = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_n^*(\lambda_1 p_1, \ldots, \lambda_n p_1^n) N_{k-n}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

где суммирование распространено на область $|\lambda_\nu| < (k-n) P_1^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда, пользуясь оценкой (4), получаем

$$N_k^* \leqslant N_{k-n}(P_1) \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_n^*(\lambda_1 p_1, \ldots, \lambda_n p_1^n) = N_{k-n}(P_1) T^*.$$

Но, как было показано выше,

$$N_k' \leqslant (C_k^n)^2 p_1^{2k-2n-1} N_k^*$$

и, следовательно,

$$N_k' \leqslant (C_k^n)^2 p_1^{2k-2n-1} T^* N_{k-n}(P_1).$$

Наконец, выбирая $m = [P_1 p_1^{-n+1}] + 1$, согласно следствию леммы 3, получаем

$$T^* \leqslant p_1 T' \leqslant n!\, m^{2n} p_1^{2n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + 1} \leqslant n!\, 2^{2n} P_1^{2n} p_1^{-\frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1},$$

$$N_k' \leqslant n!\, (C_k^n)^2\, 2^{2n} P_1^{2n} p_1^{2k - \frac{n(n+1)}{2}} N_{k-n}(P_1) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(2k)^{2n}}{n!} P_1^{2n} p_1^{2k - \frac{n(n+1)}{2}} N_{k-n}(P_1).$$

Оценим теперь величину N_k''. Очевидно,

$$N_k'' = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left[\sum_{x_1, \ldots, y_k} S(x_1) \ldots S(x_k) \overline{S(y_1)} \ldots \overline{S(y_k)} \right] d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

где величины $x_1, \ldots, y_k$ меняются так, что хотя бы одна из систем $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ принадлежит второму классу. Замечая, что число систем второго класса не превосходит $(n-1)^k\,p_1^{n-1}$, получаем

$$\left|\sum_{x_1,\,\ldots,\,y_k} S(x_1)\,\ldots\,\overline{S(y_k)}\right| \leqslant n^k p_1^{k+n-1} \sum_{x=0}^{p_1-1} |\,S(x)\,|^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant n^k P_1^{2n} p_1^{k+n-1} \sum_{x=0}^{p_1-1} |\,S(x)\,|^{2k-2n},$$

$$N_k'' \leqslant n^k P_1^{2n} p_1^{k+n-1} \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{x=0}^{p_1-1} |\,S(x)\,|^{2k-2n}\,d\alpha_1\,\ldots\,d\alpha_n =$$

$$= n^k P_1^{2n} p_1^{k+n} N_{k-n}(P_1).$$

Так как $k \geqslant n^2+n$ и, согласно (15), $n < p_1^{\frac{1}{2}}$, то, очевидно,

$$n^k p_1^{k+n} = n^{2n} n^{k-2n} p_1^{k+n} \leqslant n^{2n} p_1^{\frac{3}{2}k} \leqslant n^{2n} p_1^{2k-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Но тогда

$$N_k'' \leqslant n^{2n} P_1^{2n} p_1^{2k-\frac{n(n+1)}{2}} N_{k-n}(P_1)$$

и следовательно, так как $n! \geqslant 3\left(\frac{n}{3}\right)^n$, получим

$$N_k(P) \leqslant N_k' + N_k'' \leqslant \left(\frac{(2k)^{2n}}{n!} + n^{2n}\right) P_1^{2n} p_1^{2k-\frac{n(n+1)}{2}} N_{k-n}(P_1) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{12k^2}{n}\right)^n P_1^{2n} p_1^{2k-\frac{n(n+1)}{2}} N_{k-n}(P_1).$$

Применяя это неравенство τ раз и пользуясь оценкой (14), получаем

$$N_k(P) \leqslant \left(\frac{12k^2}{n}\right)^{n\tau} (P_1\,\ldots\,P_\tau)^{2n} (p_1\,\ldots\,p_\tau)^{2k-\frac{n(n+1)}{2}} \times$$

$$\times (p_2 p_3^2\,\ldots\,p_\tau^{\tau-1})^{-2n} N_{k-n\tau}(P_\tau) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{12k^2}{n}\right)^{n\tau} (p_1\,\ldots\,p_\tau)^{2k-\frac{n(n+1)}{2}} P_\tau^{2n\tau} N_{k-n\tau}(P_\tau).$$

Отсюда в силу (5) и (15) следует утверждение теоремы:

$$N_k(P) \leqslant \left(\frac{12k^2}{n}\right)^{n\tau} 3^{\tau\left(2k-\frac{n(n+1)}{2}\right)} P^{\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau\right)\left(2k-\frac{n(n+1)}{2}\right)} P_\tau^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant (2k)^{2n\tau}\, 3^{2k(n+\tau)} P^{2k-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^\tau}$$

Следствие. *При любом $m \geqslant 4$ для $n \geqslant 6$, $k = mn^2$ и $P > n^{n3^m}$ выполняется оценка*

$$N_k(P) \leqslant (2k)^{2mn^2}\, 3^{2m^2n^3}\, P^{2k - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2}{2^{m+1}}}.$$

Действительно, эта оценка непосредственно следует из утверждения теоремы, если выбрать $\tau = (m-1)n$ и воспользоваться соотношениями

$$2k(n+\tau) = 2m^2n^3, \quad 2n\tau < 2mn^2,$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n(m-1)} \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{m-1} \leqslant \frac{7n^2}{12e^{m-1}} < \frac{n^2}{2^{m+1}},$$

$$(2n)^{2n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n(m-1)}} \leqslant (2n)^{2n\cdot 3^{m-1}} < n^{n\cdot 3^m},$$

справедливыми при $n \geqslant 6$ и $m \geqslant 4$.

§ 3. Оценка $\zeta(1+it)$

Уточнение оценки $\zeta(1+it)$ основано на возможности получения оценок вида

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n)}\right| \leqslant CP^{1-\frac{\gamma}{n^2}},$$

где C и γ — абсолютные константы. Такие оценки удается получить благодаря двойному применению теоремы о среднем. В следующей лемме показано, как оценка двойных тригонометрических сумм сводится к двойному применению теоремы о среднем. Обозначим через $f(x, y)$ многочлен от двух переменных с произвольными действительными коэффициентами

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} \alpha_{rs} x^r y^s$$

и через $S(P_1, P_2)$ двойную тригонометрическую сумму

$$S(P_1, P_2) = \sum_{x=1}^{P_1}\sum_{y=1}^{P_2} e^{2\pi i f(x, y)}.$$

Лемма 5. *Пусть целые λ_r и μ_s меняются в пределах $|\lambda_r| < k_1 P_1^r$, $|\mu_s| < k_2 P_2^s$ $(0 \leqslant r \leqslant n,\ 0 \leqslant s \leqslant m)$. Тогда при любых натуральных k_1 и k_2 справедлива оценка*

$$|S(P_1, P_2)|^{4k_1k_2} \leqslant P_1^{2k_1(2k_2-1)} P_2^{2k_2(2k_1-1)} V_{k_1, k_2},$$

где

$$V_{k_1, k_2} = \sum_{\lambda_1, \ldots, \mu_m} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) N_{k_2}^{(P_2)}(\mu_1, \ldots, \mu_m) e^{2\pi i(\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_m\mu_m)}$$

и величины β_s *определены равенствами*

$$\beta_s = \alpha_{1s}\lambda_1 + \ldots + \alpha_{ns}\lambda_n. \tag{21}$$

Доказательство. Расположим полином $f(x, y)$ по степеням x:

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{n} \varphi_r(y)\, x^r,$$

где

$$\varphi_r(y) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_{rs} y^s.$$

Тогда, пользуясь леммой 1, получаем

$$|S(P_1, P_2)| \leqslant \sum_{y=1}^{P_2} \left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i [\varphi_1(y)x + \ldots + \varphi_n(y)x^n]} \right|,$$

$$|S(P_1, P_2)|^{2k_1} \leqslant P_2^{2k_1-1} \sum_{y=1}^{P_2} \left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i [\varphi_1(y)x + \ldots + \varphi_n(y)x^n]} \right|^{2k_1} =$$

$$= P_2^{2k_1-1} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \sum_{y=1}^{P_2} e^{2\pi i [\varphi_1(y)\lambda_1 + \ldots + \varphi_n(y)\lambda_n]}.$$

Далее, замечая, что имеет место равенство

$$\varphi_1(y)\lambda_1 + \ldots + \varphi_n(y)\lambda_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=0}^{m} \alpha_{rs}\lambda_r y^s = \beta_0 + \beta_1 y + \ldots + \beta_m y^m,$$

где величины β_s определены формулой (21), получаем

$$|S(P_1, P_2)|^{2k_1} \leqslant$$

$$\leqslant P_2^{2k_1-1} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \left| \sum_{y=1}^{P_2} e^{2\pi i (\beta_1 y + \ldots + \beta_m y^m)} \right|,$$

$$|S(P_1, P_2)|^{4k_1k_2} \leqslant P_2^{2k_2(2k_1-1)} \left[\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \right]^{2k_2-1} \times$$

$$\times \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \left| \sum_{y=1}^{P_2} e^{2\pi i (\beta_1 y + \ldots + \beta_m y^m)} \right|^{2k_2}.$$

Но согласно (6),

$$\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = \ldots = P_1^{2k_1}$$

и, следовательно,

$$|S(P_1, P_2)|^{4k_1k_2} \leqslant P_1^{2k_1(2k_2-1)} P_2^{2k_2(2k_1-1)} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times$$
$$\times \left| \sum_{y=1}^{P_2} e^{2\pi i(\beta_1 y + \ldots + \beta_m y^m)} \right|^{2k_2}.$$

Отсюда, так как в силу леммы 1

$$\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \left| \sum_{y=1}^{P_2} e^{2\pi i(\beta_1 y + \ldots + \beta_m y^m)} \right|^{2k_2} =$$
$$= \sum_{\lambda_1, \ldots, \mu_m} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) N_{k_2}^{(P_2)}(\mu_1, \ldots, \mu_m) e^{2\pi i(\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_m\mu_m)} = V_{k_1, k_2},$$

получаем утверждение леммы 5:

$$|S(P_1, P_2)|^{4k_1k_2} \leqslant P_1^{2k_1(2k_2-1)} P_2^{2k_2(2k_1-1)} V_{k_1, k_2}.$$

Следствие 1. *При обозначениях леммы* 5 *для двойной суммы* $S(P_1, P_2)$ *справедлива оценка*

$$|S(P_1, P_2)|^{4k_1k_2} \leqslant P_1^{2k_1(2k_2-1)} P_2^{2k_2(2k_1-1)} V_{k_1, k_2},$$

где [1])

$$V_{k_1, k_2} \leqslant N_{k_1}(P_1) N_{k_2}(P_2) \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \min\left(2k_2P_2, \frac{1}{2\|\beta_1\|}\right) \ldots$$
$$\ldots \min\left(2k_2P_2^m, \frac{1}{2\|\beta_m\|}\right).$$

Доказательство. Определим величины β_r' равенствами

$$\beta_r' = \alpha_{r1}\mu_1 + \ldots + \alpha_{rm}\mu_m \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда в силу (21) получаем

$$\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_m\mu_m = \beta_1'\lambda_1 + \ldots + \beta_n'\lambda_n.$$

Следовательно, согласно лемме 1,

$$\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{2\pi i(\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_m\mu_m)} =$$
$$= \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{2\pi i(\beta_1'\lambda_1 + \ldots + \beta_n'\lambda_n)} =$$
$$= \left| \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i(\beta_1' x + \ldots + \beta_n' x^n)} \right|^{2k_1} \geqslant 0.$$

[1]) Через $\|\beta\|$ обозначено расстояние от β до ближайшего целого.

Но тогда, очевидно,

$$V_{k_1, k_2} = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_m} N_{k_2}^{(P_2)}(\mu_1, \ldots, \mu_m) \times$$
$$\times \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{2\pi i (\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_m\mu_m)} \leqslant$$
$$\leqslant N_{k_2}(P_2) \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_m} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{2\pi i (\beta_1\mu_1 + \ldots + \beta_m\mu_m)}.$$

Отсюда, пользуясь оценкой

$$\left| \sum_{|\mu_s| < k_2 P_2^s} e^{2\pi i \beta_s \mu_s} \right| \leqslant \min\left(2k_2 P_2^s, \frac{1}{2\|\beta_s\|}\right),$$

получаем утверждение следствия:

$$V_{k_1, k_2} \leqslant N_{k_2}(P_2) \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} N_{k_1}^{(P_1)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \prod_{\nu=1}^{m} \min\left(2k_2 P_2^\nu, \frac{1}{2\|\beta_\nu\|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant N_{k_1}(P_1) N_{k_2}(P_2) \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \prod_{\nu=1}^{m} \min\left(2k_2 P_2^\nu, \frac{1}{2\|\beta_\nu\|}\right).$$

Особо отметим частный случай леммы 5, получающийся для полиномов $f(x, y)$, у которых коэффициенты α_{rs} обращаются в нуль при $r \neq s$. В этом случае $m = n$ и полином можно записать в виде

$$f(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 xy + \ldots + \alpha_n x^n y^n. \tag{22}$$

Будем предполагать, что известны рациональные приближения величин α_ν

$$\alpha_\nu = \frac{a_\nu}{q_\nu} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu^2}, \quad (a_\nu, q_\nu) = 1, \quad |\theta_\nu| \leqslant 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Следствие 2. *Если выполняются условия* (22) *и* (23), *то при обозначениях леммы* 5 *имеем*

$$|S(P_1, P_2)| \leqslant P_1^{2k_1(2k_2-1)} P_2^{2k_2(2k_1-1)} V_{k_1, k_2},$$

где

$$V_{k_1, k_2} \leqslant$$
$$\leqslant (16k_1k_2)^n N_{k_1}(P_1) N_{k_2}(P_2) \prod_{\nu=1}^{n} \min\left[P_1^\nu P_2^\nu, \left(P_1^\nu q_\nu^{-1} + 1\right)\left(P_2^\nu + q_\nu \ln q_\nu\right)\right].$$

Доказательство. Так как по условию

$$\alpha_{rs}=\begin{cases}\alpha_s & \text{при} \quad r=s,\\ 0 & \text{при} \quad r\neq s,\end{cases}$$

то из (21) получим

$$\beta_s=\alpha_{1s}\lambda_1+\ldots+\alpha_{ns}\lambda_n=\alpha_s\lambda_s \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Но тогда, согласно следствию 1,

$$V_{k_1,\,k_2}\leqslant N_{k_1}(P_1)\,N_{k_2}(P_2)\sum_{\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n}\min\left(2k_2P_2,\ \frac{1}{2\,\|\alpha_1\lambda_1\|}\right)\ldots$$

$$\ldots\min\left(2k_2P_2^n,\ \frac{1}{2\,\|\alpha_n\lambda_n\|}\right).$$

Отсюда, пользуясь оценкой

$$\sum_{|\lambda_\nu|<k_1P_1^\nu}\min\left(2k_2P_2^\nu,\ \frac{1}{2\,\|\alpha_\nu\lambda_\nu\|}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\min\left[4k_1k_2P_1^\nu P_2^\nu,\ 4\left(\frac{2k_1P_1^\nu}{q_\nu}+1\right)\left(2k_2P_2^\nu+q_\nu\ln q_\nu\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant 16k_1k_2\min\left[P_1^\nu P_2^\nu,\ \left(P_1^\nu q_\nu^{-1}+1\right)\left(P_2^\nu+q_\nu\ln q_\nu\right)\right],$$

получаем утверждение следствия:

$$V_{k_1,\,k_2}\leqslant$$

$$\leqslant(16k_1k_2)^n\,N_{k_1}(P_1)\,N_{k_2}(P_2)\prod_{\nu=1}^{n}\min\left[P_1^\nu P_2^\nu,\ \left(P_1^\nu q_\nu^{-1}+1\right)\left(P_2^\nu+q_\nu\ln q_\nu\right)\right].$$

Теорема 2. *Пусть* $t\geqslant e^{64\cdot10^6}$ *и* Q — *произвольное целое из интервала* $\left[e^{130\,(\ln t)^{\frac{2}{3}}},\ t^{\frac{1}{3}}\right]$. *Тогда при любом натуральном* $P\leqslant Q$ *справедлива оценка*

$$\left|\sum_{z=Q+1}^{Q+P}z^{it}\right|\leqslant 2Q^{1-\left(\frac{\beta}{1400}\right)^2}, \tag{24}$$

где величина β *определена равенством* $Q=t^\beta$.

Доказательство. Определим целые P_1, P_2, s и n с помощью равенств

$$P_1=\left[Q^{\frac{1}{25}}\right],\qquad P_2=\left[Q^{\frac{16}{25}}\right]+1,\qquad s=\left[\frac{25}{24\beta}\right]+1,\qquad n=3s.$$

Легко показать, что тогда $s\geqslant 4$ и при $s\leqslant\nu\leqslant 2s$ выполняется оценка

$$P_1^\nu\leqslant Q^\nu t^{-1}\leqslant P_2^\nu. \tag{25}$$

Действительно, согласно условиям теоремы, $\beta \leqslant \frac{1}{3}$ и, следовательно, $s = \left[\frac{25}{24\beta}\right] + 1 \geqslant 4$. Далее, так как $s > \frac{25}{24\beta}$, то при $\nu \geqslant s$ будет $\frac{24}{25}\nu > \frac{1}{\beta}$ и, очевидно,

$$Q^{\nu} t^{-1} = \left(Q^{\frac{1}{25}}\right)^{\nu} Q^{\frac{24}{25}\nu - \frac{1}{\beta}} \geqslant P_1^{\nu}.$$

Наконец, так как $s \leqslant \frac{25}{24\beta} + 1$, то при $\nu \leqslant 2s$ будет $\frac{9}{25}\nu \leqslant \frac{1}{\beta}$ и, следовательно,

$$Q^{\nu} t^{-1} = \left(Q^{\frac{16}{25}\nu}\right) Q^{\frac{9}{25}\nu - \frac{1}{\beta}} \leqslant P_2^{\nu}.$$

Покажем теперь, что оценка суммы (24) легко сводится к оценке двойной тригонометрической суммы

$$S(P_1, P_2) = \sum_{x=1}^{P_1} \sum_{y=1}^{P_2} e^{2\pi i f(x, y)},$$

где полином $f(x, y)$ определен равенством

$$f(x, y) = \alpha_1 xy - \alpha_2 x^2 y^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n x^n y^n, \quad \alpha_{\nu} = \frac{1}{2\pi\nu q^{\nu} t^{-1}}, \tag{26}$$

и q — некоторое целое из интервала $Q < q \leqslant 2Q$.

Действительно, так как при любых натуральных x и y

$$\sum_{z=Q+1}^{Q+P} z^{it} = \sum_{z=1}^{P} (Q + z + xy)^{it} + 2\theta xy, \qquad |\theta| \leqslant 1,$$

то, очевидно,

$$\left|\sum_{z=Q+1}^{Q+P} z^{it}\right| \leqslant \frac{1}{P_1 P_2} \sum_{z=1}^{P} \left|\sum_{x=1}^{P_1} \sum_{y=1}^{P_2} (Q + z + xy)^{it}\right| + 2P_1 P_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{P}{P_1 P_2} \max_{1 \leqslant z \leqslant P} \left|\sum_{x=1}^{P_1} \sum_{y=1}^{P_2} e^{it \ln\left(1 + \frac{xy}{Q+z}\right)}\right| + 2P_1 P_2.$$

Пусть наибольшее значение правой части достигается при $z = z_0$. Тогда, полагая $q = Q + z_0$ и пользуясь равенством

$$\frac{t}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{xy}{q}\right) = \frac{xy}{2\pi q t^{-1}} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n y^n}{2\pi n q^n t^{-1}} + \frac{\theta_1 t}{2\pi} \left(\frac{P_1 P_2}{q}\right)^{n+1},$$

$$|\theta_1| \leqslant 1,$$

в силу (26) получаем

$$\left|\sum_{z=Q+1}^{Q+P} z^{it}\right| \leqslant \frac{P}{P_1P_2}\left|\sum_{x=1}^{P_1}\sum_{y=1}^{P_2} e^{2\pi i f(x,\,y)}\right| + 2P_1P_2 + Pt\left(\frac{P_1P_2}{q}\right)^{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q}{P_1P_2}\,|S(P_1,\,P_2)| + 2P_1P_2 + Qt\left(\frac{P_1P_2}{Q}\right)^{n+1}. \qquad (27)$$

Для того чтобы оценить сумму $S(P_1,\,P_2)$, запишем величины α_ν в виде

$$\alpha_\nu = \frac{a_\nu}{q_\nu} + \frac{\theta_\nu}{q_\nu^2}, \quad (a_\nu,\,q_\nu) = 1, \quad |\theta_\nu| \leqslant 1,$$

и заметим, что при $s \leqslant \nu \leqslant 2s$ будет $a_\nu = 1$ и $q_\nu = \left[2\pi\nu q^\nu t^{-1}\right]$. Так как, согласно (25),

$$P_1^\nu \leqslant Q^\nu t^{-1} \leqslant P_2^\nu,$$

то, очевидно, при $s \leqslant \nu \leqslant 2s$ выполняются оценки

$$P_1^\nu < \left[2\pi\nu Q^\nu t^{-1}\right] \leqslant q_\nu \leqslant \left[2\pi\nu (2Q)^\nu t^{-1}\right] \leqslant 2\pi\nu (2P_2)^\nu. \qquad (28)$$

Но тогда, пользуясь вторым следствием леммы 5, при $k_1 = k_2 = k$ получаем

$$|S(P_1,\,P_2)|^{4k^2} \leqslant (P_1P_2)^{2k(2k-1)}V_{k,\,k}, \qquad (29)$$

где

$$V_{k,\,k} \leqslant$$

$$\leqslant (4k)^{2n} N_k(P_1) N_k(P_2) \prod_{\nu=1}^{n} \min\left[P_1^\nu P_2^\nu,\ \left(P_1^\nu q_\nu^{-1} + 1\right)\left(P_2^\nu + q_\nu \ln q_\nu\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant (4k)^{2n} N_k(P_1) N_k(P_2) (P_1P_2)^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{3s(s+1)}{2}} \times$$

$$\times \prod_{\nu=s}^{2s}\left(P_1^\nu q_\nu^{-1} + 1\right)\left(P_2^\nu + q_\nu \ln q_\nu\right).$$

Так как в силу (28)

$$\left(P_1^\nu q_\nu^{-1} + 1\right)\left(P_2^\nu + q_\nu \ln q_\nu\right) \leqslant 16n^2 2^\nu P_2^\nu \ln Q,$$

то, очевидно,

$$\prod_{\nu=s}^{2s}\left(P_1^\nu q_\nu^{-1} + 1\right)\left(P_2^\nu + q_\nu \ln q_\nu\right) < 2^{n^2} P_2^{\frac{3s(s+1)}{2}} (\ln Q)^{s+1}.$$

Следовательно,

$$V_{k,k} \leqslant (4k)^{2n} 2^{n^2} N_k(P_1) N_k(P_2) P_1^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{3s(s+1)}{2}} P_2^{\frac{n(n+1)}{2}} (\ln Q)^{s+1} \leqslant$$
$$\leqslant (4k)^{2n} 2^{n^2} N_k(P_1) N_k(P_2) P_1^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{6}} P_2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Выберем $k = 6n^2$ и применим следствие теоремы 1 с $m = 6$; тогда

$$N_k(P_1) \leqslant (2k)^{12n^2} 3^{72n^3} P_1^{2k - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2}{128}}.$$

Аналогичная оценка справедлива, очевидно, и для величины $N_k(P_2)$. Следовательно, замечая, что $P_1 P_2 \leqslant 2P_1^{17}$ и $P_1 > \frac{1}{2} Q^{\frac{1}{25}}$, получаем

$$V_{k,k} \leqslant (2k)^{25n^2} 3^{144n^3} (P_1 P_2)^{2k + \frac{n^2}{128}} P_1^{-\frac{n^2}{6}} \leqslant 3^{288n^3} (P_1 P_2)^{2k} Q^{-\frac{n^2}{768}}.$$

Наконец, подставляя эту оценку в (29), находим оценку суммы $S(P_1, P_2)$:

$$|S(P_1, P_2)|^{4k^2} \leqslant 3^{288n^3} (P_1 P_2)^{4k^2} Q^{-\frac{n^2}{768}},$$
$$|S(P_1, P_2)| \leqslant 3^{\frac{2}{n}} P_1 P_2 Q^{-\frac{1}{768 \cdot 144 n^2}} \leqslant \frac{3}{2} P_1 P_2 Q^{-\left(\frac{\beta}{1400}\right)^2}. \qquad (30)$$

Так как, очевидно,

$$2P_1 P_2 + Qt \left(\frac{P_1 P_2}{Q}\right)^{n+1} \leqslant 4Q^{\frac{17}{25}} + Q^{1 + \frac{1}{\beta} - (n+1)\frac{5}{8}} \leqslant 5Q^{\frac{17}{25}},$$

то из (27) и (30) получаем утверждение теоремы:

$$\left| \sum_{z=Q+1}^{Q+P} z^{it} \right| \leqslant \frac{3}{2} Q^{1 - \left(\frac{\beta}{1400}\right)^2} + 5Q^{\frac{17}{25}} \leqslant 2Q^{1 - \left(\frac{\beta}{1400}\right)^2}.$$

Теорема 3. *При $|t| \to \infty$ справедлива оценка*

$$\zeta(1 + it) = O\left(\ln^{\frac{2}{3}} |t|\right).$$

Доказательство. Определим величины Q_ν с помощью условий

$$Q_0 = \left[e^{130 \ln^{\frac{2}{3}} t}\right] + 1, \quad Q_\nu = 2^\nu Q_0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r),$$

где $Q_{r-1} \leqslant t^{\frac{1}{3}} < Q_r$ и $t > e^{64 \cdot 10^6}$.

Тогда, согласно леммам 8.3.4 и 8.3.5 (стр. 305, 306), получим

$$\sum_{m > Q_r} \frac{1}{m^{1+it}} = O(1)$$

и, следовательно,

$$\zeta(1+it)=\sum_{m=1}^{Q_r}\frac{1}{m^{1+it}}+O(1)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\sum_{m=Q_\nu+1}^{2Q_\nu}\frac{1}{m^{1+it}}+O\left(\ln^{\frac{2}{3}}t\right). \quad (31)$$

Далее, пользуясь преобразованием Абеля, в силу теоремы 2 получаем

$$\sum_{m=Q_\nu+1}^{2Q_\nu}\frac{1}{m^{1+it}}=\frac{1}{2Q_\nu+1}\sum_{z=Q_\nu+1}^{2Q_\nu}z^{-it}+\sum_{m=Q_\nu+1}^{2Q_\nu}\frac{1}{m(m+1)}\sum_{z=Q_\nu+1}^{m}z^{-it},$$

$$\left|\sum_{m=Q_\nu+1}^{2Q_\nu}\frac{1}{m^{1+it}}\right|\leqslant 2\left(\frac{1}{2Q_\nu+1}+\sum_{m=Q_\nu+1}^{2Q_\nu}\frac{1}{m(m+1)}\right)Q_\nu^{1-\gamma\beta_\nu^2}\leqslant 2Q_\nu^{-\gamma\beta_\nu^2},$$

где γ — абсолютная константа и β_ν определяется равенством $Q_\nu=t^{\beta_\nu}$.

Так как, очевидно, $\beta_\nu\geqslant\beta_0$, то, замечая, что $\beta_0\geqslant\frac{130}{(\ln t)^{\frac{1}{3}}}$, получаем

$$\left|\sum_{\nu=0}^{r-1}\sum_{m=Q_\nu+1}^{2Q_\nu}\frac{1}{m^{1+it}}\right|\leqslant 2\sum_{\nu=0}^{r-1}Q_\nu^{-\gamma\beta_\nu^2}\leqslant 2\sum_{\nu=0}^{\infty}Q_\nu^{-\gamma\beta_0^2}=$$

$$=2\,\frac{Q_0^{-\gamma\beta_0^2}}{1-2^{-\gamma\beta_0^2}}=O\left(\ln^{\frac{2}{3}}t\right).$$

Отсюда в силу (31) следует утверждение теоремы.

Из оценки, полученной в теореме 3, следует, что в соотношениях

$$\zeta(\sigma+it)\neq 0 \quad \text{при} \quad \sigma>1-\frac{A}{\ln^{\alpha}(|t|+2)},$$

$$\pi(x)-\operatorname{li}x=O\left(xe^{-B\ln^{\beta}x}\right)$$

значения $\alpha>\frac{3}{4}$ и $\beta<\frac{4}{7}$, указанные Н. Г. Чудаковым ([5*] — [8*]), можно заменить соответственно на $\alpha>\frac{2}{3}$ и $\beta<\frac{3}{5}$. Аналогичное усиление результатов получается также для границы нулей L-функций Дирихле и в вопросе об оценке разности $\pi(x;\,q,\,l)-\frac{1}{\varphi(q)}\operatorname{li}x$.

ЛИТЕРАТУРА

Адамар (Hadamard J.)

[1] Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bull. soc. math. France*, **24** (1896), 199—220.

Андрухаев Х. М.

[1*] Задача сложения простых и „почти" простых чисел в алгебраических числовых полях, *ДАН СССР*, **159**, № 6 (1964), 1207—1209.

Барбан М. Б.

[1*] Метод „большого решета" и его применения в теории чисел, *УМН*, **XXI**, вып. 1 (127) (1966), 51—102.

[2*] Плотность нулей L-рядов Дирихле и задача о сложении простых и „почти простых" чисел, *Мат. сб.*, **61** (103) : 4 (1963), 418—425.

[3*] Новые применения „большого решета" Ю. В. Линника, Тр. Ин-та матем. им. В. И. Романовского АН УзССР, Теория вероятностей и матем. стат., вып. 22, Ташкент, 1961.

[4*] Об аналогах проблемы делителей Титчмарша, *Вестн. ЛГУ*, № 19 (1963), 5—13.

[5*] „Большое решето" Ю. В. Линника и предельная теорема для числа классов идеалов мнимого квадратического поля, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **26**, 4 (1962), 573—580.

[6*] Замечание к работе автора „Новые применения „большого решета" " Ю. В. Линника, Теория вероятн. и матем. статист., вып. 1, Ташкент, 1964.

Бaтеман, Човла, Эрдёш (Bateman P. T., Chowla S., Erdös P.)

[1*] Remarks on the size of $L(1,\chi)$, *Publikationes Math. Debrecen*, **1** (1949—1950), 165—182.

Берджесс (Burgess D. A.)

[1*] On character sums and L-series, II, *Proc. London Math. Soc.*, **13**, № **51** (1963), 524—530.

Бомбьери (Bombieri E.)

[1*] On the large sieve, *Mathematika*, **12** (1965), 201—225.

Бор, Крамер (Bohr H., Cramér H.)

[1] Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, Enzyklopädie der math. Wiss., II C 8, 1922, 722—849.

де Брейн (de Bruijn N. G.)

[1] On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $\geq y$, *Indagationes math.*, **13** (1951), 50—60.

Бройш (Breusch R.)

[1] Another proof of the prime number theorem, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 49—53.

Брун (Brun V.)

[1] Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, mat. naturvid. Kl.* $(1920)_1$: 3.

Бухштаб А. А.

[1*] Новые результаты в исследовании проблемы Гольдбаха — Эйлера и проблемы простых чисел близнецов, *ДАН*, **162**, № 4 (1965), 735—738.

Бэклунд (Backlund R. J.)

[1] Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, *C. R.*, **158** (1914), 1979—1981.

Валле-Пуссен (de la Vallée Poussin Ch.)
[1] Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, *Ann. soc. Sci. Bruxelles*, **20**$_2$ (1896), 183—256, 281—297.
[2] Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers, inférieurs à une limite donnée, *Mem. couronnés et autres mém. Acad. Belgique*, **59**, № 1 (1899—1900).
Вальфиш А. З.
[1] Zur additiven Zahlentheorie II, *Math. Z.*, **40** (1936), 592—607.
[2] Изолированные простые числа, *ДАН*, **90** (1953), 711—713.
[3*] Weilsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, Berlin, 1963.
Ван Юан (Wang Juan)
[1*] On the representations of large integer as a sum of a prime and an almost prime, *Sci. sinica*, **11**, № 8 (1962), 1033—1054.
Вейль А. (Weil A.)
[1*] On some exponential sums, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34**, № 5 (1948), 204—207.
Вейль Г. (Weyl H.)
[1] Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, *Math. Ann.*, **77** (1916), 313—352.
[2] Zur Abschätzung von $\zeta(1+it)$, *Math. Z.*, **10** (1921), 88—101.
Вильсон (Wilson B. M.)
[1] Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **21** (1922), 235—255.
Виман (Wiman A.)
[1] Sur l'ordre de grandeur du nombre dediviseurs d'un entier, *Arkiv Mat. Astr. och Fys.*, **3**, № 18 (1907), 1—9.
Винер (Wiener N.)
[1] A new method in Tauberian theorems, *J. of Math. Phys. Mass. Inst. of Techn.*, **7** (1927—1928), 161—184.
[2] Tauberian theorems, *Ann. of Math.* (2), **33** (1932), 1—100.
Винер, Геллерт (Wiener N., Gellert L.)
[1] Some prime number consequences of the Ikehara-Theorem, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12** B (1950), 25—28.
Виноградов А. И.
[1*] О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле, *Изв. АН*, сер. матем., **29** (1965), 903—934.
Виноградов И. М.
[1] Sur la distribution des résidus et des nonrésidus des puissances, *Ж. физ.-мат. о-ва*, Пермь, **1** (1918), 94—98.
[2] On Weyl's sums, *Матем. сб.*, **42** (1935), 521—530.
[3] Представление нечетного числа суммой трех простых чисел, *ДАН*, **15** (1937), 291.
[4] Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел, *Труды матем. ин-та Гр. фил. АН*, **3** (1938), 1—68.
[5] Метод тригонометрических сумм в теории чисел, *Труды матем. ин-та АН*, **23** (1947), 1—111.
[6*] О функции $\zeta(s)$, *ДАН*, **118**, 4 (1958), 631.
[7*] Новая оценка функции $\zeta(1+it)$, *ИАН*, сер. матем., **22**, 2 (1958), 161—164.
Габриэль (Gabriel R. M.)
[1] Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves, *J. Lond. Math. Soc.*, **2** (1927), 112—117.
Гронваль (Gronwall T. H.)
[1] Sur les séries de Dirichlet correspondant à des charactères complexes, *Rend. Palermo*, **35** (1931), 145—159.

Давенпорт, Хальберстам (Davenport H., Halberstam H.)
[1*] The values of a trigonometrical polynomial at well spaced points, *Mathematika,* **13** (1966), 91—96.
Дирихле (Dirichlet P. G. L.)
[1] Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, *Abh. Akad. Berlin* (1837, 1839 math. Abh. 45—71).
[2] Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie, *Abh. Akad. Berlin* (1849), 69—83.
Дойринг (Deuring M.)
[1] Imaginär quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl (1), *Math. Z.,* **37** (1933), 405—415.
Дойч (Doetsch G.)
[1] Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden, *Math. Z.,* **8** (1920), 237—240.
Зигель (Siegel C. L.)
[1] Über die Classenzahl quadratischer Körper, *Acta Arithmetica,* **1** (1936), 83—86.
[2] On the zeros of Dirichlet's *L*-functions, *Ann. of Math.,* **46** (1945), 409—422.
Ингам (Ingham A. E.)
[1] Hote on Riemann's ζ-function and Dirichlet's *L*-functions, *J. Lond. Math. Soc.,* **5** (1930), 107—112.
[2] Распределение простых чисел, М. — Л., 1936.
[3] Note on the distribution of primes, *Acta Arithmetica,* **1** (1936), 201—211.
[4] On the difference between consecutive primes, *Quart. J. Oxford,* **8** (1937), 255—266.
Исеки, Татудзава (Iseki K., Tatuzawa T.)
[1] On Selberg's elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Jap. Acad.,* **27** (1951), 340—342.
Карацуба А. А., Коробов Н. М.
[1*] О теореме о среднем, *ДАН,* **149,** 2 (1963), 245—248.
Карлсон (Carlson F.)
[1] Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion, *Arkiv f. Mat., Astr. och Fys.,* **15,** № 20 (1920).
Кнёдель (Knödel W.)
[1] Sätze über Primzahlen I, II, *Mh. f. Math.,* **55** (1951), 62—75; **56** (1952), 137—143.
Коробов Н. М.
[1*] О нулях функции ζ(*s*), *ДАН,* **118,** 3 (1958), 231—232.
[2*] О границе нулей функции Римана ζ(*s*), Сообщение на заседании Моск. матем. об-ва, *УМН,* **13,** 2 (80), (1958), 243—245.
[3*] Оценки тригонометрических сумм и их приложения, *УМН,* **13,** № 4 (82) (1958), 185—192.
[4*] Оценки сумм Вейля и распределение простых чисел, *ДАН,* **123, 1** (1958), 28—31.
Корпут (van der Corput J. G.)
[1] Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombers pairs, *Acta Arithmetica,* **2** (1937), 266—290.
[2] On de Polignac's conjecture, *Simon Stevin,* **27** (1950), 99—105.
[3] Zahlentheoretische Abschätzungen, *Math. Ann.,* **84** (1921), 53—79.
Кох (von Koch H.)
[1] Sur la distribution des nombres premiers, *Acta Math.,* **24** (1901), 159—182.

Крамер (Cramér H.)
[1] Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, *Math. Z.*, **4** (1919), 104—130.
[2] Some theorems concerning prime numbers, *Arkiv Mat., Astr. och Fys.*, **15**, № 5 (1920).
[3] Ein Mittelwertsatz der Primzahltheorie, *Math. Z.*, **12** (1922), 147—153.
[4] On the order of magnitude of the difference between consecutive primes, *Acta Arithmetica*, **2** (1937), 23—46.
Курант, Гильберт (Courant R., Hilbert D.)
[1] Методы математической физики, т. 1, М — Л., Гостехиздат, 1951.
Ландау (Landau E.)
[1] Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{1}^{\infty}\mu(k)/k=0$, Diss., Berlin, 1899.
[2] Über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(x)$, *Arch. d. Math. u. Phys.* (3), **5** (1903), 86—91.
[3] Über einen Satz von Tschebyscheff, *Math. Ann.*, **61** (1905), 527—550.
[4] Über das Nichtverschwinden einer Dirichletschen Reihe, *Sitzungsber. Berlin* (1906), 314—320.
[5] Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 2 Bde, Leipzig, Teubner, 1909.
[6] Über die Äquivalenz zweier Hauptsätze der analytischen Zahlentheorie, *Sitzungsber. Wien*, **120**, 2a (1911), 973—988.
[7] Bedingt konvergente Integrale in der Primzahltheorie, *Math. Ann.*, **71** (1912), 368—379.
[8] Über die Nullstellen der Zetafunktion, *Math. Ann.*, **71** (1912), 548—564.
[9] Über imaginär quadratische Zahlkörper mit gleicher Klassenzahl, *Göttinger Nachr.* (1918), 277—284.
[10] Über die Klassenzahl imaginär quadratischer Zahlkörper, *Göttinger Nachr.* (1918), 285—295.
[11] Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion, *Arkiv Mat., Astr. och Fys.*, **16**, № 7 (1922).
[12] Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen, *Math. Z.*, **20** (1924), 105—125.
Лежандр (Legendre A. M.)
[1] Essai sur la théorie des nombres, Paris, Duprat, 1798.
Линник Ю. В.
[1] Связь расширенной Riemann'овой гипотезы с методом И. М. Виноградова в теории простых чисел, *ДАН*, **41** (1943), 152—154.
[2] On Dirichlet's L-series and prime-number sums, *Матем. сб.*, **15** (57) (1944), 3—12.
[3] On the least prime in an arithmetic progression, I. The basic theorem, *Матем. сб.*, **15** (57) (1944), 139—178; II. The Deuring — Heilbronn's phenomenon, *Матем. сб.*, **15** (57) (1944), 347—368.
[4] О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории простых чисел, *ДАН*, **49** (1945), 3—7.
[5] Элементарное доказательство теоремы Зигеля на основе способа И. М Виноградова, *ИАН*, сер. матем., **14** (1950), 327—342.
[6*] „Большое решето", *ДАН*, **30**, № 4 (1941), 290—292.
[7*] Замечание о наименьшем квадратичном невычете, *ДАН*, **36**, № 4—5 (1942), 131—132.
[8*] Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, изд. ЛГУ, 1961.
[9*] О суммах Weyl'я, *ДАН*, **34**, 7 (1942), 201—203.
Литлвуд (Littlewood J. E.)
[1] Researches in the theory of the Riemann ζ-function, *Proc. Lond. math. Soc.* (2), **20** (1922), 22—28.

[2] Sur la distribution des nombres premiers, *C. R.*, **158** (1914), 1869—1872.

Мангольдт (von Mangoldt H)

[1] Zu Riemann's Abhandlung, „Über die Anzahl...", *Crelles J.*, **114** (1895), 255—305.

[2] Beweis der Gleichung $\sum_{1}^{\infty} \mu(k)/k = 0$, *Sitzungsber. Berlin* (1897), 835—852.

Мёбиус (Möbius A. F.)

[1] Über eine besondere Art der Umkehrung von Reihen, *J. reine angew. Math.*, **9** (1832), 105—123.

Мертенс (Mertens F.)

[1] Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, *J. reine angew. Math.*, **78** (1874), 46—62.

[2] Über das Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen mit reellen Gliedern, *Sitzungsber. Wien*, **104** (1895), 1158—1166.

Морделл (Mordell L. J.)

[1] On the Riemann hypothesis and imaginary quadratic fields with a given class number, *J. Lond. math. Soc.*, **9** (1934), 289—298.

Остман (Ostmann H.)

[1] Additive Zahlentheorie, 1. und 2. Teil, Springer, 1956.

Пань Чень-дунь (Pan Cheng-dong)

[1*] On the representation of an even integer as the sum of a prime and an almost prime, *Chinese Math.*, **3**, № 1 (1963), 101—112.

Пейдж (Page A.)

[4] On the number of primes in an arithmetic progression, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **39** (1935), 116—141.

Пойа (Pólya G.)

[1] Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, *Göttinger Nachr.* (1918), 21—29.

Пойа, Сегё (Pólya G., Szegö G.)

[1] Задачи и теоремы из анализа, ч. 2, М., 1956.

Постников А. Г., Романов Н. П.

[1] Упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел, *УМН*, **10 : 4** (66) (1955), 75—87.

Прахар (Prachar K.)

[1] Über Primzahldifferenzen, *Mh. Math. Phys.*, **56** (1952), 304—306.

[2] On integers having many reprensentations as a sum of two primes, *J. Lond. math. Soc.*, **29** (1954), 347—350.

[3] Über ein Resultat von A. Walfisz, *Mh. f. Math.*, **58** (1954), 114—116.

Райт (Wright E.)

[1] The elementary proof of the prime number theorem. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, A, **63** (1952), 257—267.

Рамануджан (Ramanujan S.)

[1] Highly composite numbers, Collected papers, 85—86.

[2] Some formulae in the analytic theory of numbers, *Messenger of Math.*, **45** (1935), 253—261.

Ранкин (Rankin R. A.)

[1] The difference between consecutive prime numbers, *J. Lond. math. Soc.*, **13** (1938), 242—247.

[2] The difference between consecutive prime numbers II, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **36** (1940), 255—256.

Реньи (Rényi A.)

[1] О представлении четного числа в виде суммы простого и почти простого числа, *ИАН, сер. мат.*, **12** (1948), 57—78.

[2*] Generalization of the „large sieve" of Ju. V. Linnik, *Math. Centrum* (1948), 1—5.

[3*] Probability methods in number theory, *Publicationes math. collectae,* **1** (1949), 1—9.

[4*] Un nouveau théorème concernant les functions independantes et ses applications a la théorie des nombres, *J. math. pures et appl.* (N. S.), **28** (1949), 137—149.

[5*] On the large sieve of Ju. V. Linnik, *Compos. Math*, **8** (1950), 68—75.

[6*] Об одной общей теореме теории вероятностей и о ее применении в теории чисел, Zprary o spolecnem' 3 sjezdu matematiku Ceskoslovensych a 7 sjezdu matematiku Polskych, Praha, 1950, 167—174.

[7*] On the probabilistic generalization of the large sieve of Linnik, *Труды математ. инстит. АН Венгрии,* **2**, вып. 3—4 (1958), 199—206.

[8*] New version of the probabilistic generalization of the large sieve, *Acta Math. Hungary,* **10,** 1—2 (1959), 217—226.

Риман (Riemann B.)

[1] Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, *Monatsber. Akad. Berlin*, (1859), 671—680.

Рихерт (Richert H. E.)

[1] Über Zerfällungen in ungleiche Primzahlem, *Math. Z.*, **52** (1941), 342—343.

Риччи (Ricci G.)

[1] Sul pennelo di quasi asintoticità della differenza dei interi primi consecutivi I, II, *Atti Accad. naz. Lincei Rend.* (8), **17** (1954), 192—196; (1955), 347—351.

Родосский К. А.

[1] О распределении простых чисел в коротких арифметических прогрессиях, *ИАН*, сер. матем, **12** (1948), 123—128.

[2] О нулях *L*-функций Дирихле, *ИАН*, сер. матем., **13** (1949), 315—328.

[3] О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, *Матем. сб.*, **34** (76) (1954), 331—356.

Романов Н. П.

[1] Über einige Satze der additiven Zahlentheorie, *Math. Ann.,* **109** (1934), 668—678.

Рот (Roth K.)

[1*] On the large sieve of Linnik and Rényi, *Mathematika*, **12** (1965), 1—9.

Сельберг А. (Selberg A.)

[1] On the normal density of primes in small intervalls and the difference between consecutive primes, *Arch. Math. Naturvid.,* **47,** № 6 (1943), 87—105.

[2] On an elementary method in the theory of primes, *Norske Vid. Selsk. Forh. Trondhjem*, **19,** № 18, (1947), 64—67.

[3] An elementary proof of the prime number theorem, *Ann. of Math.* (2), **50** (1949), 305—313.

[4] An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression, *Ann. of Math.* (2), **50** (1949), 297—304.

[5] An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progressions, *Canad. J. Math.,* **2** (1950), 66—78

Сельберг С. (Selberg S.)

[1] Note on the distribution of the integers $ax^2+by^2+cz^2$, *Arch. Math. Naturvid.,* **50,** № 2 (1949), 65—69.

Серпинский (Sierpinski W.)

[1] Über die Summation der Reihe..., *Prace mat. fis.,* **18** (1907), 1—60.

[2] Remarque sur la repartition des nombres premiers, *Colloquium Math.*, **1** (1948), 193—194.

[3] Sur une formule donnant tous les nombres premiers, *C. R.,* **235** (1952), 1078—1079.

Скьюз (Skewes S.)
[1] On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$, *Proc. Lond. math. Soc.* (3), **5** (1955), 48—69.
Степанов Б. В.
[1*] О среднем значении k-й степени числа классов для мнимого квадратического поля, *ДАН*, **124**, № 5 (1959), 984—986.
Татудзава (Tatuzawa T.)
[1] On the zeros of Dirichlet's L-functions, *Proc. Jap. Acad.*, **26**, № 9, (1950), 1—13.
[2] On the number of primes in an arithmetic progression, *Jap. J. Math.*, **21** (1951), 93—111.
Титчмарш (Titchmarsh E. C.)
[1] On the zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Lond. math. Soc.* (2), **30** (1929), 319—321.
[2] A divisor problem, *Rendiconti Palermo,* **54** (1930), 414—429; **57** (1933), 478—479.
[3] Теория функций, М., 1951.
[4] Теория ζ-функций Римана, ИЛ, М., 1953.
Туран (Turán P.)
[1] On a theorem of Hardy and Ramanujan, *J. Lond. Math. Soc.,* **9** (1934), 276—284.
[2] Über die Primzahlen der arithmetischen Progression (II), *Acta Sci. Math. Szeged,* **9** (1938—1940), 87—192.
[3] Über die Wurzeln der Dirichletschen L-Funktionen, *Acta Sci. Math. Szeged,* **10** (1941—1943), 188—201.
[4] Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1953.
Фридлендер В. Р.
[1*] О наименьших степенных невычетах по простым модулям, *Учен. зап. Елабужск. гос. пед. института,* **1** (1956), 5—55.
Харди (Hardy G. H.)
[1] Note on a theorem of Mertens, *J. Lond. Math. Soc.,* **2** (1927), 70—72.
Харди, Литлвуд (Hardy G. H., Littlewood J. E.).
[1] Contributions to the theory of Riemann Zeta-Function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math.*, **41** (1918), 119—196.
[2] Some problems of partitio numerorum III, On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.,* **44** (1923), 1—70.
Харди, Рамануджан (Hardy G. H., Ramanujan S.)
[1] The normal number of prime factors of a number n, *Quart. J. of Math.*, **48** (1917), 76—92.
[2] Asymptotic formulae in combinatorial analysis, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **17** (1918), 75—115.
Харди, Ингам, Пойа (Hardy G. H., Ingham A. E., Pólya G.)
[1] Theorems concerning mean values of analytic functions, *Proc. Royal Soc.* (A), **113** (1936), 542—569.
Хасельгров (Haselgrove C. B.)
[1] Some theorems in the analytic theory of numbers, *J. Lond. Math. Soc.,* **26** (1951), 273—277.
Хассе (Hasse H.)
[1] Введение в теорию чисел, М., 1953.
Хейльбронн (Heilbronn H.)
[1] On the class number in imaginary quadratic fields, *Quart. J. Oxford,* **5** (1934), 150—160.
Хохайзель (Hoheisel G.)
[1] Primazahlprobleme in der Analysis, *Sitzungsber. Berlin* (1930), 580—588.

Хуа Ло-ген (Hua L. K.)
[1] Аддитивная теория простых чисел, *Труды мат. ин-та АН,* 22 (1947), 179.
[2] An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications, *Quart. J. Oxford*, **20** (1949), 48—61.
[3*] Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, «Мир», М., 1964.

Цассенхаус (Zassenhaus H.)
[1] Über die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen, *Comment. math. Helvetici,* **22** (1949), 232—259.

Чанг (Chang T. H.)
[1] Über aufeinanderfolgende Zahlen, von denen jede mindestens einer von n linearen Kongruenzen genügt, deren Moduln die ersten n Primzahlen sind, *Schriften des math. Seminars Berlin* (1938), 35—55.

Чебышев П. Л.
[1] Теория сравнений, СПб, 1849.
[2] Memoires présentés a l'Académie Impériale des sciences de St. Petersbourg par divers savants, **7** (1850—1854), 15—33; *J. Math.* (1), **17** (1852), 366—390.

Човла (Chowla S.)
[1] On the least prime in the arithmetical progression, *J. Ind. Math. Soc.* (2), **1** (1934), 1—3.

Чудаков Н. Г.
[1] О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых, *ИАН,* сер. матем., (1938), 25—40.
[2] Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., 1947.
[3] On Goldbach — Vinogradoff's theorem, *Ann. Math.*, **48** (1947), 515—545.
[4] О конечной разности для функции $\psi(x, k, l)$, *ИАН*, сер. мат., **12** (1948),
[5*] О нулях функции $\zeta(s)$, *ДАН*, **1**, 5 (1936), 197—200.
[6*] On zeros of Dirichlet's L-functions, *Матем. сб.*, **1** (43) (1936), 591—602.
[7*] О суммах Weyl'я, *Матем. сб.,* **2** (44) (1937), 17—35.
[8*] О функциях $\zeta(s)$ и $\pi(x)$, *ДАН,* **21** (1938), 425—426.

Чулановский И. В.
[1] Некоторые оценки, связанные с новым методом Selberg'а в элементарной теории чисел, *ДАН*, **63** (1948), 491—494.

Шапиро (Shapiro H. N.)
[1] On the number of primes less than or equal x, *Proc. Amer. math. Soc.,* **1** (1950), 346—348.
[2] On primes in arithmetic progressions II, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 231—243.

Шмидт (Schmidt E.)
[1] Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze, *Math. Ann.,* **57** (1903), 195—204.

Шнирельман Л. Г.
[1] Об аддитивных свойствах чисел, *Изв. Донского Политехн. ин-та* (Новочеркасск), **14** (1930), 3—28; *Math. Ann.*, **107** (1933), 649—690.

Эйлер (Euler L.)
[1] Varia observationes circa series infinitas, *Comment. Acad. Sci. Imp. Petropol.,* **9**, (1737, 1744), 160—188.

Эрдёш (Erdös P.)
[1] On the difference of consecutive primes, *Quart. J. Oxford,* **6** (1935), 124—128.
[2] On the normal number of prime factors of p—1 and some related problems concerning Euler's φ-function, *Quart. J. Oxford,* **6** (1935), 205—213.

[3] On the easier Waring problem for powers of primes I, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, **33** (1937), 6—12.
[4] On the sum and the difference of squares of primes, *J. Lond. Math. Soc.*, **12** (1937), 133—136, 168—171.
[5] The difference of consecutive primes, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 438—441.
[6] On some applications of Brun's method, *Acta Sci. Math. Szeged,* **13** (1949), 57—63.
[7] On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **35** (1949), 374—384.
[8] Problems and results on the difference of consecutive primes, *Publ. Math. Debrecen,* **1** (1949—1950), 33—37.
[9] On integers of the form 2^k+p, *Summa Brasil. Math.*, **2** (1950), 113—123.
[10*] Szameimeleti megjegyzesek I, *Math. Lapok*, **12**, № 1—2 (1961), 10—17.

Эрдёш, Реньи (Erdös P., Rényi A.)
[1] Some problems and results on consecutive primes, *Simon Stevin,* **27** (1950), 115—125.

Эрдёш, Туран (Erdös P., Turán P.)
[1] Ein zahlentheoretischer Satz, *Mitt. Forsch. Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk,* **1** (1935), 101—103.

Эстерман (Estermann Th.)
[1] On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **44** (1938), 307—314.
[2] On Dirichlet's *L*-Functions, *J. Lond. Math. Soc.,* **23** (1948), 275—279.

ОГЛАВЛЕНИЕ

К. Прахар

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Редакторы *Д. В. Беклемишев*
и *Г. М. Ильичева*
Художник *Б. И. Астафьев*
Художественный редактор
В. И. Шаповалов
Технический редактор *А. Д. Хомяков*

Сдано в производство 6/VI 1967 г.
Подписано к печати 23/XI 1967 г.
Бумага тип. № 3 $60 \times 90^1/_{16} = 16$ бум. л.
Усл. печ. л. 32. Уч.-изд. л. 29,76.
Изд. № 1/3143. Цена 2 р. 25 к. Зак. 752.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени
Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29