МАТЕМАТИКА
НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ
РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ
7

К. ПРЕСТОН

ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ НА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА

CAMBRIDGE TRACTS IN MATHEMATICS
68

CHRISTOPHER J. PRESTON
Fellow of Lincoln College, Oxford

GIBBS STATES ON COUNTABLE SETS

Cambridge University Press, 1974

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А. Н. КОЛМОГОРОВ, С. П. НОВИКОВ

7

К. ПРЕСТОН

ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ НА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Перевод с английского
А. М. КУРБАТОВА

Под редакцией
Н. Н. БОГОЛЮБОВА (мл.)

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР" МОСКВА 1977

УДК 519.2; 530.145

Книга представляет собой первую попытку создания систематического введения в теорию случайных полей — новое направление теории вероятностей Это направление чрезвычайно эффективно при строгих исследованиях в области равновесной классической статистической физики. Основное внимание автор уделяет развитию теории гиббсовских состояний и изучению проблемы фазовых переходов. Исследован вопрос существования фазовых переходов для систем с парными потенциалами типа «притяжение», а также получены общие условия отсутствия фазовых переходов.

Книга будет полезна как математикам, так и физикам-теоретикам, желающим познакомиться с развитием этого нового направления науки или интересующимся его приложениями.

Редакция литературы по математическим наукам

П $\frac{20203\text{-}020}{041\ (01)\text{-}77}$ 20-77

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей монография Кристофера Престона является введением в новую, интенсивно развивающуюся область теории вероятностей, которая изучает случайные поля. Более точно, она посвящена вероятностной интерпретации проблем, возникающих в статистической механике классических решетчатых систем, и отражает характерную тенденцию в создании современных физических теорий, когда изучение реальных систем заменяется изучением моделей таких систем. В таком подходе вопрос о построении моделей и их достаточной адекватности реальным системам относится главным образом к компетенции физика, в то время как исследование поведения моделей представляет собой чисто математическую задачу. При этом от математика все же требуется понимание идеологии, которая привела к построению соответствующей модели, а от физика — владение надлежащим математическим аппаратом, позволяющим получать строгие результаты.

Отметим здесь, что теория гиббсовских состояний основана, с одной стороны, на многих математических идеях, выработанных в процессе создания математической статистической физики, т. е. при получении строгих (в математическом смысле) результатов в статистической механике. С другой стороны, эта теория широко использует идеи теории вероятностей и случайных процессов.

Свою основную задачу К. Престон видит (отмечая это и в своем предисловии) в том, чтобы ввести читателя-математика, не имеющего специальной подготовки в области физики, в круг результатов статистической механики классических решетчатых систем и заинтересовать его проблематикой и методами.

Тщательный отбор материала, небольшой объем, простота изложения и его относительная замкнутость делают книгу Престона хорошим пособием для студентов и аспирантов,

---

[1]) См. список дополнительной литературы в конце книги.

специализирующихся в области теории вероятностей и статистической механики. Вместе с тем эту книгу с большим удовольствием прочтут и специалисты, поскольку она является первой монографией, содержащей последовательное изложение многих результатов, которые ранее можно было найти лишь в журнальной литературе.

Н. Н. Боголюбов (мл.)

Посвящается Сесилии

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние несколько лет резко усилился интерес к проблемам, которые возникают в статистической механике классических решетчатых систем. Цель настоящей книги состоит в том, чтобы ввести читателя-математика, не имеющего специальной подготовки в области физики, в круг результатов, полученных в этой области. Так как „массовый“ математик, по-видимому, испытывает затруднения в понимании языка математической физики, то мы будем рассматривать наш предмет как ветвь теории вероятностей. Таким образом, предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории вероятностей (σ-алгебры, вероятностные меры, цепи Маркова с конечным числом состояний), но в остальном изложение материала является замкнутым.

Основными объектами нашего изучения будут некоторые классы вероятностных мер на $\mathscr{P}(S)$, где S — конечное или счетное множество, а $\mathscr{P}(S)$ — множество подмножеств множества S. Точки из S можно интерпретировать как узлы, каждый из которых может быть либо свободным, либо занятым частицей, а подмножество из $A \in \mathscr{P}(S)$ можно рассматривать как обозначение того факта, что частицами заняты те и только те узлы, которые принадлежат A. Таким образом, вероятностные меры на $\mathscr{P}(S)$ описывают распределение конфигураций частиц; обычно эти меры представляют собой равновесные распределения для каких-нибудь физических моделей.

Книга состоит из трех частей. В первой части, охватывающей главы 1—3, точки S являются вершинами конечного графа. Во второй части (глава 4) точки S — вершины счетного графа. Оставшиеся главы составляют третью часть, в которой не предполагается, что множество S имеет какую-либо дополнительную структуру.

В первых двух частях рассматриваются модели, в которых взаимодействие между частицами имеет связь со структурой графа, именно, взаимодействие имеет место лишь между частицами, занимающими вершины графа, которые являются ближайшими соседями. Это ограничение приводит к классу мер на $\mathscr{P}(S)$, которые называются марковскими случайными полями. В первых двух частях книги показывается, что этот класс совпадает с классом мер, возникающим в статистической механике, — классом гиббсовских состояний, порождаемых потенциалами ближайшего соседа.

В третьей части также изучаются гиббсовские состояния, однако структура графа на S не предполагается. Здесь рассматриваются модели, обладающие следующим свойством: если Λ — конечное подмножество S, $A \subset \Lambda$ и $X \subset S \setminus \Lambda$, то определена условная вероятность того, что частицы на Λ занимают в точности множество A, при условии, что частицы на $S \setminus \Lambda$ занимают в точности множество X. (Это означает, что если нам известна ситуация вне конечного подмножества S, то мы можем вычислить распределение частиц внутри этого конечного множества.) Обозначим эту условную вероятность через $f^{\Lambda}(A, X)$. Соотношения, которым должны удовлетворять функции $f^{\Lambda}(A, X)$, устанавливаются в гл. 5. В последующих главах сделана попытка найти, при каких условиях $f^{\Lambda}(A, X)$ определяет единственную вероятностную меру на $\mathcal{P}(S)$. Возможная неединственность на языке статистической механики соответствует явлению фазового перехода.

В третьей части имеется некоторое дублирование второй, чтобы сделать третью часть книги независимой от остального материала (поэтому чтение можно начать с гл. 5). В конце большинства глав имеются замечания, представляющие собой ссылки на библиографию, помещенную в конце книги. Эта библиография ни в коей мере не является полной, однако должна послужить неофиту введением в предмет. Чтобы найти дальнейшие новые результаты, читатель должен обратиться к текущим выпускам таких журналов, как „Communications in Mathematical Physics" и „The Journal of Mathematical Physics"[1]).

Эта книга выросла из лекционных заметок, написанных летом 1972 г. Я многим обязан Фрэнку Спитцеру, который познакомил меня со статистической механикой, сообщил мне многие идеи и научил методам, которые используются в книге, и Адриано Гарсиа, который обучил меня теории вероятностей. Я благодарен им обоим за советы и поддержку. Я благодарю также Джона Кингмана и Джеффри Гриметта за чтение рукописи и полезные комментарии. Работа над материалом книги велась с июля 1971 г. по январь 1973 г., и автор благодарит фонд Военно-воздушных сил AF-AFOSR-2088 в Калифорнийском университете, Сан-Диего, за финансовую поддержку, а также Совет по научным исследованиям и Исследовательскую группу IBM при математическом институте Оксфордского университета за стипендии.

Линкольн-колледж, Оксфорд
Май, 1973

Кристофер Дж. Престон

[1]) А также „Теоретическая и математическая физика", „Теория вероятностей и ее применения", „Функциональный анализ и его приложения". — *Прим. ред.*

1. ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ И МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Пусть Λ — конечное множество, $\mathscr{P}(\Lambda)$ — множество подмножеств в Λ. В этой главе мы будем рассматривать различные классы вероятностных мер на $\mathscr{P}(\Lambda)$, которые возникают в простых физических и биологических моделях. Точки Λ могут интерпретироваться как узлы, каждый из которых может быть свободным либо занятым частицей (или какимнибудь другим объектом). Будем считать, что подмножество $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$ описывает состояние модели, когда точки множества A заняты, а точки множества $\Lambda \setminus A$ свободны. Элементы множества $\mathscr{P}(\Lambda)$ иногда будут называться *конфигурациями*. Большинство даже самых простых физических моделей, использующих понятие конфигурации, по своей природе являются динамическими. Вероятностные меры, которые мы будем рассматривать, соответствуют распределениям конфигураций, когда модель находится в состоянии некоторого динамического равновесия.

Можно ожидать, что иногда множество Λ в модели имеет дополнительную структуру, например, между узлами определено расстояние или же между некоторыми из узлов есть связи. Мы будем рассматривать на Λ структуры последнего типа, т. е. считать, что точки множества Λ являются вершинами некоторого конечного графа $\mathscr{G} = (\Lambda, e)$, где e — множество ребер графа $\mathscr{G}$. Будем предполагать, что $\mathscr{G}$ не имеет кратных ребер или петель, и используем следующие определения и обозначения. Если $x, y \in \Lambda$ и существует ребро графа, соединяющее x и y, то x и y называются *соседями*. Пусть отображение $c: \Lambda \times \Lambda \to \{0, 1\}$ определено формулой

$$c(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ соседи,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Заметим, что $c(x, x) = 0$ для всех $x \in \Lambda$, поскольку мы предположили, что $\mathscr{G}$ не имеет петель.) Если $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$, то *граница* A есть множество $\partial A \in \mathscr{P}(\Lambda)$, определяемое равенством

$$\partial A = \{y \in \Lambda \setminus A\colon\ c(x, y) = 1 \text{ для некоторого } x \in A\}.$$

Для $x \in \Lambda$ мы будем писать ∂x вместо $\partial\{x\}$ (и вообще будем стремиться по возможности писать x вместо $\{x\}$, например, если $A \subset \Lambda$, то запись $A \cup x$ предпочтительнее, чем $A \cup \{x\}$). Для любого $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$ через $|A|$ обозначим число точек в A. Непустое подмножество $B \in \mathscr{P}(\Lambda)$ будем называть *симплексом* графа, если для любой пары точек $x, y \in B$, $x \neq y$, $c(x, y) \doteq 1$. Будем говорить, что B является *n-симплексом* (при $n \geqslant 0$), если B — симплекс и $|B| = n + 1$. Заметим, что для всех $x \in \Lambda$ множество $\{x\}$ является симплексом графа.

Пусть $\mathscr{S}(\Lambda)$ обозначает множество всех вероятностных мер на $\mathscr{P}(\Lambda)$ (при условии, что на $\mathscr{P}(\Lambda)$ задана σ-алгебра $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\Lambda))$, т. е. измеримыми являются все подмножества из $\mathscr{P}(\Lambda)$). Элемент $\mu \in \mathscr{S}(\Lambda)$ обозначает распределение конфигураций, когда система находится в состоянии динамического равновесия. Поэтому мы будем называть $\mathscr{S}(\Lambda)$ множеством *состояний* на Λ. Поскольку $\mathscr{P}(\Lambda)$ — конечное множество, мы отождествим вероятность $\mu \in \mathscr{S}(\Lambda)$ с ее плотностью вероятности [1]), т. е. мы рассматриваем μ как функцию из $\mathscr{P}(\Lambda)$ в $\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, обладающую свойствами:

1) $\mu(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$;
2) $\sum_{A \subset \Lambda} \mu(A) = 1$.

Рассмотрим прежде всего класс гиббсовских состояний, возникающих в моделях статистической физики. Функция

$$V\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$$

называется *потенциалом* на Λ, если $V(\varnothing) = 0$. Для любого потенциала V на Λ мы определим *гиббсовское состояние с потенциалом* V как состояние π:

$$\pi(A) = Z^{-1} \exp V(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathscr{P}(\Lambda),$$

где Z — нормирующая константа (обеспечивающая свойство 2)), т. е.

$$Z = \sum_{B \subset \Lambda} \exp V(B).$$

Пусть V — потенциал на Λ, тогда функция $J_V\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$, определяемая соотношением

$$J_V A = \sum_{X \subset A} (-1)^{|A \setminus X|} V(X),$$

обладает следующим свойством: для любого $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$

$$V(A) = \sum_{B \subset A} J_V(B).$$

[1]) Относительно равномерного распределения на $\mathscr{P}(\Lambda)$. — *Прим. перев.*

(Этот факт немедленно вытекает из того, что раньше называлось принцип включения — исключения, а теперь известно под названием формулы обращения Мебиуса, во всяком случае проверить непосредственно его справедливость несложно.) Мы будем называть J_V *потенциалом взаимодействия*, соответствующим V. Наоборот, пусть задан потенциал Φ; обозначим через U_Φ потенциал, определяемый равенством

$$U_\Phi(A) = \sum_{B \subset A} \Phi(B).$$

Тогда Φ есть потенциал взаимодействия, соответствующий U_Φ.

Необходимо отметить, что если μ — произвольное состояние на Λ, обладающее положительной плотностью (т. е. $\mu(A) > 0$ для всех $A \subset \Lambda$), то μ является гиббсовским состоянием с потенциалом V, определяемым по формуле

$$V(A) = \log\left[\frac{\mu(A)}{\mu(\varnothing)}\right] \quad \text{для любого} \quad A \subset \Lambda.$$

Таким образом, класс гиббсовских состояний состоит из всех состояний на Λ, обладающих положительной плотностью, и, следовательно, использование потенциалов следует рассматривать как удобный способ описания состояний с положительной плотностью. В этой главе мы будем интересоваться главным образом потенциалами, которые имеют некоторую связь со структурой графа на множестве Λ, что отражено в следующем определении.

Потенциал V называется *потенциалом ближайшего соседа*, если $J_V(A) \neq 0$, лишь когда A есть симплекс графа.

Вторым классом состояний на Λ, который мы рассмотрим, являются марковские случайные поля. Для $\mu \in \mathscr{S}(\Lambda)$ будем говорить, что μ — *марковское случайное поле*, если

1) μ имеет положительную плотность, т. е. $\mu(A) > 0$ для всех $A \subset \Lambda$.

2) Пусть $x \notin A \subset \Lambda$, тогда условная вероятность (по отношению к μ) того, что конфигурация содержит x, при условии, что конфигурация на $\Lambda \setminus x$ равна A, совпадает с условной вероятностью того, что конфигурация содержит x, при условии, что конфигурация на ∂x есть $A \cap \partial x$, т. е.

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A \cup x) + \mu(A)} =$$

$$= \sum_{B \subset \Lambda - (\partial x \cup x)} \mu((A \cap \partial x) \cup x \cup B) \Big/ \sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial x \cup x)} [\mu((A \cap \partial x) \cup x \cup B) + \mu((A \cap \partial x) \cup B)].$$

Это означает, что вероятность нахождения частицы в точке x, если известна конфигурация частиц на $\Lambda \setminus x$, зависит только от того, что происходит с соседями x. Таким образом, в некотором смысле частицы не взаимодействуют, если они не занимают соседних узлов.

Из приведенного описания марковских случайных полей ясно, что можно ожидать существования связи между ними и гиббсовскими состояниями, потенциалы которых аналогичным образом учитывают структуру графа. Действительно, марковские случайные поля и гиббсовские состояния с потенциалом ближайшего соседа — это одно и то же. Доказательство этого факта и является главной задачей настоящей главы.

Приведенное выше определение марковского случайного поля является весьма громоздким, чтобы им пользоваться, поэтому мы определим новый класс состояний, называемых состояниями ближайшего соседа, который имеет более простое определение, и покажем, что этот класс совпадает с классом марковских случайных полей. Пусть $\mu \in \mathcal{P}(\Lambda)$, назовем μ *состоянием ближайшего соседа*, если:

1) $\mu(A) > 0$ для всех $A \subset \Lambda$.

2) Если $x \notin A \subset \Lambda$, то

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A)} = \frac{\mu((A \cap \partial x) \cup x)}{\mu(A \cap \partial x)}.$$

Заметим, что 2) эквивалентно равенству

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A \cup x) + \mu(A)} = \frac{\mu((A \cap \partial x) \cup x)}{\mu((A \cap \partial x) \cup x) + \mu(A \cap \partial x)} \quad \text{для всех } x \notin A \subset \Lambda,$$

которое означает, что условная вероятность того, что конфигурация содержит x, при условии, что на $\Lambda \setminus x$ конфигурация равна A, совпадает с условной вероятностью того, что конфигурация содержит x, при условии, что на $\Lambda \setminus x$ конфигурация равна $A \cap \partial x$.

Предложение 1.1. *Если $\mu \in \mathcal{P}(\Lambda)$, то μ — марковское случайное поле тогда и только тогда, когда μ является состоянием ближайшего соседа.*

Доказательство. Пусть μ — марковское случайное поле и $x \notin A \subset \Lambda$. Тогда

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A \cup x) + \mu(A)} = \sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial x \cup x)} \mu((A \cap \partial x) \cup x \cup B) \times$$

$$\times \left[\sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial x \cup x)} [\mu((A \cap \partial x) \cup x \cup B) + \mu((A \cap \partial x) \cup B)] \right]^{-1} =$$

$$= \frac{\mu((A \cap \partial x) \cup x)}{\mu((A \cap \partial x) \cup x) + \mu(A \cap \partial x)},$$

поскольку выражение в квадратных скобках не меняется при замене A на $A \cap \partial x$. Таким образом, μ — состояние ближайшего соседа. Обратно, пусть μ является состоянием ближайшего соседа и $x \notin A \subset \Lambda$. Если $B \subset \Lambda \setminus (\partial x \cup x)$, то

$$\frac{\mu(((A \cap \partial x) \cup B) \cup x)}{\mu((A \cap \partial x) \cup B)} = \frac{\mu((((A \cap \partial x) \cup B) \cap \partial x) \cup x)}{\mu(((A \cap \partial x) \cup B) \cap \partial x)} = \frac{\mu((A \cap \partial x) \cup x)}{\mu(A \cap \partial x)} = \frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A)}.$$

То есть

$$\mu(A)\,\mu(((A \cap \partial x) \cup B) \cup x) = \mu(A \cup x)\,\mu((A \cap \partial x) \cup B)$$

и, следовательно,

$$\mu(A) \sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial x \cup x)} \mu(((A \cap \partial x) \cup B) \cup x) = \mu(A \cup x) \sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial x \cup x)} \mu((A \cap \partial x) \cup B).$$

Отсюда легко видеть, что μ — марковское случайное поле. ■

Теперь мы покажем, что марковские случайные поля и гиббсовские состояния с потенциалами ближайшего соседа — это одно и то же. Начнем с того, что докажем

Предложение 1.2. *Пусть π — гиббсовское состояние с потенциалом ближайшего соседа V. Тогда π — марковское случайное поле.*

Доказательство. В силу предложения 1.1 достаточно показать, что π — состояние ближайшего соседа. Ясно, что π имеет положительную плотность. Если $x \notin A \subset \Lambda$, то

$$\frac{\pi\, A \cup x)}{\pi(A)} = \exp[V(A \cup x) - V(A)].$$

Но

$$V(A \cup x) - V(A) = \sum_{B \subset A \cup x} J_V(B) - \sum_{B \subset A} J_V(B) = \sum_{B \subset A} J_V(B \cup x) = \sum_{B \subset A} J_V((B \cap \partial x) \cup x) = V((A \cap \partial x) \cup x) - V(A \cap \partial x).$$

Поэтому

$$\frac{\pi(A \cap x)}{\pi(A)} = \frac{\pi((A \cap \partial x) \cup x)}{\pi(A \cap \partial x)}$$

и, значит, π — состояние ближайшего соседа. ■

Доказательство обратного результата столь же просто.

Предложение 1.3. *Пусть μ — марковское случайное поле. Тогда существует единственный потенциал ближайшего соседа V, такой, что μ является гиббсовским состоянием с потенциалом V.*

Доказательство. Очевидно, что V единствен, так как мы вынуждены определять V формулой

$$V(A) = \log\left[\frac{\mu(A)}{\mu(\varnothing)}\right] \text{ для всех } A \in \mathscr{P}(\Lambda).$$

Таким образом, мы видим, что μ — гиббсовское состояние с потенциалом V, и остается лишь проверить, что V — потенциал ближайшего соседа.

Пусть $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$ и A не является симплексом графа. Тогда найдутся такие точки $x, y \in A$, $x \neq y$, что $c(x, y) = 0$. Положим $B = A \setminus x \setminus y$. Если $X \subset B$, то

$$\frac{\mu(X \cup x \cup y)}{\mu(X \cup x)} = \frac{\mu(((X \cup x) \cap \partial y) \cup y)}{\mu((X \cup x) \cap \partial y)} = \frac{\mu((X \cap \partial y) \cup y)}{\mu(X \cap \partial y)} = \frac{\mu(X \cup y)}{\mu(X)}$$

и, следовательно,

$$V(X \cup x \cup y) - V(X \cup x) - V(X \cup y) + V(X) = 0.$$

Откуда, после очевидных преобразований,

$$\begin{aligned} J_V(A) &= \sum_{E \subset A} (-1)^{|A \setminus E|} V(E) = \\ &= \sum_{x \subset B} [(-1)^{|A \setminus X \cup x \cup y|} V(X \cup x \cup y) + (-1)^{|A \setminus X \cup x|} V(X \cup x) + \\ &\quad + (-1)^{|A \setminus X \cup y|} V(X \cup y) + (-1)^{|A \setminus X|} V(X)] = \\ &= \sum_{x \subset B} (-1)^{|A \setminus X|} [V(X \cup x \cup y) - V(X \cup x) - \\ &\qquad\qquad - V(X \cup y) + V(X)] = 0 \end{aligned}$$

и, значит, V — потенциал ближайшего соседа. ■

Для удобства ссылок объединим полученные нами результаты и назовем эту сводку теоремой.

Теорема 1.1. *Следующие утверждения для $\mu \in \mathscr{P}(\Lambda)$ эквивалентны:*

i) μ — *марковское случайное поле,*

ii) μ — *состояние ближайшего соседа,*

iii) μ — *гиббсовское состояние с потенциалом V, где V — потенциал ближайшего соседа.*

Исследование доказательства предложения 1.3 позволяет дать следующую характеризацию потенциалов ближайшего соседа.

Предложение 1.4. *Потенциал V на Λ является потенциалом ближайшего соседа тогда и только тогда, когда для любой пары $x, y \in \Lambda$, для которой $c(x, y) = 0$, и любого множества $X \subset \Lambda \setminus x \setminus y$ имеет место равенство*

$$V(X \cup x \cup y) - V(X \cup x) - V(X \cup y) + V(X) = 0.$$

Доказательство. Если это условие имеет место, то из доказательства предложения 1.3 следует, что V является потенциалом ближайшего соседа. Наоборот, предположим, что V — потенциал ближайшего соседа, а V, x, y удовлетворяют нашим предположениям. Если $B \subset X$, то с помощью вычислений, аналогичных тем, что были проделаны в доказательстве предложения 1.3, получаем, что

$$J_V(B \cup x \cup y) = \sum_{Y \subset B} (-1)^{|B \setminus Y|} [V(Y \cup x \cup y) - \\ - V(Y \cup x) - V(Y \cup y) + V(Y)].$$

Но $B \cup x \cup y$ не является симплексом графа, поскольку $c(x, y) = 0$. Следовательно, $J_V(B \cup x \cup y) = 0$. Таким образом, для всех $B \subset X$ имеем, что

$$\sum_{Y \subset B} (-1)^{|B \setminus Y|} [V(Y \cup x \cup y) - V(Y \cup y) - V(Y \cup x) + V(Y)] = 0.$$

Поэтому

$$V(X \cup x \cup y) - V(X \cup x) - V(X \cup y) + V(X) = \\ = \sum_{B \subset X} \sum_{Y \subset B} (-1)^{|B \setminus Y|} [V(Y \cup x \cup y) - V(Y \cup x) - V(Y \cup y) + V(Y)] = \\ = 0. \ \blacksquare$$

Мы будем пользоваться (несколько неупорядоченной) терминологией физиков и говорить, что граф $\mathcal{G}$ есть *кубическая решетка*, если $\mathcal{G}$ не содержит 2-симплексов (и, значит, не имеет и n-симплексов при $n \geqslant 2$).

Наиболее распространенными примерами кубических решеток являются конечные подмножества $\mathbb{Z}^\nu$ (где $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geqslant 1$, есть множество всех точек $\mathbb{R}^\nu$ с целочисленными координатами, рассматриваемое как граф, точки которого — соседи, лишь если расстояние между ними в точности равно единице). Пусть $\mathcal{G} = (\Lambda, e)$ — кубическая решетка и V — потенциал ближайшего соседа на Λ. Тогда необходимо $J_V(A) = 0$, когда $|A| \geqslant 3$. Поэтому, если определить функцию H: $\Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}$ формулой

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} V(\{x, y\}), & \text{если } x \neq y, \\ V(\{x\}), & \text{если } x = y, \end{cases}$$

то легко видеть, что

$$V(A) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in A} H(x, y) \text{ для всех } A \in \mathcal{P}(\Lambda).$$

Ясно также, что $H(x, y) = 0$, если $x \neq y$ и $c(x, y) = 0$. Это показывает, что для кубической решетки мы можем записывать потенциалы ближайшего соседа через парные потенциалы ближайшего соседа, как они обычно и определяются в физике.

Замечания. Определение гиббсовского состояния (на конечном подмножестве $\mathbb{Z}^\nu$) восходит к классической работе Гиббса (1902). Марковские случайные поля (на $\mathbb{Z}^\nu$) были впервые введены Добрушиным (1968a). Спитцер (1971) и Аверинцев (1970) показали, что для конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$ класс марковских случайных полей совпадает с классом гиббсовских состояний с потенциалами ближайшего соседа (в работе Спитцера предполагалась трансляционная инвариантность). Эквивалентность марковских случайных полей и гиббсовских состояний с потенциалом ближайшего соседа впервые была получена Хаммерсли и Клиффордом (1971). Их доказательство было весьма длинным и запутанным, значительно более простое доказательство дано Престоном (1973); еще проще доказательство у Гримметта (1973). Имеется также доказательство Шермана (1973). В нашей книге приведено обработанное доказательство Гримметта. Другой подход к этой проблематике предложил Суомела (1972).

2. СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Цель этой главы состоит в исследовании простых динамических моделей, чьи равновесные состояния являются вероятностными мерами типа изученных в предыдущей главе. Мы будем рассматривать модели, динамическое поведение которых случайно, а именно цепи Маркова. Как и раньше, $\mathcal{G} = (\Lambda, e)$ — произвольный конечный граф. Для удобства $\mathcal{P}(\Lambda)$ обозначается через Γ.

Пусть $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ — полугруппа на Γ, т. е. для каждого $t \geqslant 0$ имеется отображение $P_t\colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$, обладающее свойствами:

(i) $0 \leqslant P_t(A, B)$ для всех $A, B \in \Gamma$, $t \geqslant 0$;

(ii) $\sum_{B \in \Gamma} P_t(A, B) = 1$ для всех $A \in \Gamma$, $t \geqslant 0$;

(iii) $\sum_{X \in \Gamma} P_t(A, X) P_s(X, B) = P_{t+s}(A, B)$ для всех $A, B \in \Gamma$, $s, t \geqslant 0$;

(iv) $\lim\limits_{t\to 0} P_t(A, B) = I(A, B)$ для всех $A, B \in \Gamma$, где

$$I(A, B) = \begin{cases} 1, \text{ если } A = B, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Полугруппа $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ описывает модель, обладающую следующим свойством: если в момент s система имела конфигурацию $A \in \Gamma$, то вероятность того, что в момент $t+s$ она будет иметь конфигурацию $B \in \Gamma$, равна $P_t(A, B)$.

Хорошо известно, что существует единственная функция G: $\Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим требованиям:

(i) $G(A, B) \geqslant 0$, если $A, B \in \Gamma$, $A \neq B$;
(ii) $\sum\limits_{B \in \Gamma} G(A, B) = 0$ для всех $A \in \Gamma$;
(iii) $P_t = \exp(tG)$.

(Здесь мы полагаем, что P_t и G являются матрицами порядка $|\Gamma| \times |\Gamma|$, и определим

$$\exp(tG) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G^n,$$

где G^n — произведение матрицы G саму на себя n раз, $G^0 = I$.) Функция G называется *генератором* полугруппы [1]). Верно и обращение сформулированного результата. Именно если G: $\Gamma \times \times \Gamma \to \mathbb{R}$ удовлетворяет (i) и (ii), то, полагая $P_t = \exp(tG)$, мы получим полугруппу $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$.

Генератор G полугруппы $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ имеет следующее свойство: если $A, B \in \Gamma$ и $A \neq B$, то условная вероятность того, что система изменит конфигурацию A на конфигурацию B в промежутке времени от t до $t+dt$ при условии, что в момент t она имела конфигурацию A, равна $G(A, B)\,dt + O(dt^2)$. Этот факт позволяет интерпретировать различные модели, которые мы будем строить при помощи генераторов.

Состояние $\pi \in \mathcal{G}(\Lambda)$ называется *равновесным состоянием* [2]) для полугруппы $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$, если

$$\sum_{A \in \Gamma} \pi(A) P_t(A, B) = \pi(B) \text{ для всех } P \in \Gamma,\ t \geqslant 0.$$

Нетрудно проверить, что π является равновесным состоянием тогда и только тогда, когда

$$\sum_{A \in \Gamma} \pi(A) G(A, B) = 0 \text{ для всех } B \in \Gamma.$$

---

[1]) Для G используется также термин „производящий оператор полугруппы“. — *Прим. перев.*

[2]) В теории цепей Маркова π принято называть инвариантной мерой или стационарным распределением. — *Прим. перев*

Говорят, что генератор G *неприводим*, если для данных A и B из Γ, $A \neq B$, найдутся $E_1, \ldots, E_n \in \Gamma$, такие, что $E_1 = A$, $E_n = B$ и $G(E_1, E_2)\,G(E_2, E_3)\ldots G(E_{n-1}, E_n) > 0$. Хорошо известный результат (часть эргодической теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний) состоит в том, что если генератор G неприводим, то существует, и притом единственное, равновесное состояние π; при этом π обладает положительной плотностью и для любого $\mu \in \mathscr{P}(\Lambda)$

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{A \in \Gamma} \mu(A)\,P_t(A, B) = \pi(B) \quad \text{для всех } B \in \Gamma.$$

И последнее определение из теории цепей Маркова: будем говорить, что полугруппа с неприводимым генератором G и равновесным состоянием π называется *обратимой* [1]), если

$$\pi(A)\,G(A, B) = \pi(B)\,G(B, A) \quad \text{для всех } A, B \in \Gamma.$$

(Заметим, что произвольное состояние π, удовлетворяющее этому требованию, обязано быть некоторым *равновесным состоянием*, а в данном случае равновесное состояние единственно.) Условие обратимости времени означает, что если сделать фильм об эволюции во времени системы, описываемой обратимой полугруппой и имеющей начальное равновесное состояние, то невозможно будет определить „направление просмотра“ этого фильма.

Опишем теперь модель, которую можно назвать процессом рождения и уничтожения на Λ. Конфигурация $A \in \Gamma$ описывает случай, когда модель имеет частицы в каждой точке множества A и не имеет частиц в точках множества $\Lambda \setminus A$. Эволюция модели происходит путем рождения или уничтожения частиц. Определим две функции $\beta\colon \Lambda \times \Gamma \to \mathbb{R}$, $\delta\colon \Lambda \times \Gamma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям $\beta(x, A) > 0$, $\delta(x, A) > 0$, и предположим, что вероятность рождения частицы в точке x за промежуток времени от t до $t + dt$, при условии, что конфигурация в момент t есть A (с $x \notin A \in \Gamma$), равна $\beta(x, A)\,dt + O(dt^2)$. Аналогично предположим, что вероятность уничтожения частицы в точке x за промежуток времени от t до $t + dt$, при условии, что в момент t задана конфигурация $A \cup x$ (с $x \notin A \in \Gamma$), равна $\delta(x, A)\,dt + O(dt^2)$. Предположим, наконец, что вероятность более чем одного рождения или уничтожения в течение интервала времени от t до $t + dt$ есть $O(dt^2)$. Мы будем называть β *интенсивностью процесса рождения*, а δ *интенсивностью процесса уничтожения*. Приведенные выше предположения показывают, что генератор G полугруппы $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$, описывающей

---

[1]) Time reversible; имеется в виду обратимость во времени. — *Прим. перев.*

данную модель, должен определяться следующим образом:

$$G(A,\ A\cup x)=\beta(x,\ A),\ \text{если}\ x\notin A\in\Gamma,$$
$$G(A\cup x,\ A)=\delta(x,\ A),\ \text{если}\ x\notin A\in\Gamma,$$

$G(A,\ B)=0$ для всех других пар $A,\ B\in\Gamma$; $A\neq B$. Осталось выяснить, чему равняется $G(A,\ A)$, но так как G является генератором, то $G(A,\ A)$ определяется из условия

$$\sum_{B\in\Gamma}G(A,\ B)=0.$$

Будем называть полугруппу, отвечающую такому генератору, *полугруппой рождения и уничтожения* [1]) с интенсивностью рождения β и интенсивностью уничтожения δ. Очевидно, что генератор G неприводим и, стало быть, эта полугруппа имеет единственное состояние равновесия π. Мы скажем, что полугруппа является полугруппой рождения — уничтожения *ближайшего соседа*, если

$$\beta(x,\ A)=\beta(x,\ A\cap\partial x),\ \delta(x,\ A)=\delta(x,\ A\cap\partial x)\ \text{для всех}\ x\notin A\in\Gamma.$$

Предложение 2.1. *Пусть* $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ — *обратимая полугруппа рождения — уничтожения ближайшего соседа,* π — *ее равновесное состояние. Тогда* π — *марковское случайное поле.*

Доказательство. По теореме 1.1 нам достаточно показать, что π является состоянием ближайшего соседа. Поскольку π — равновесное состояние полугруппы с неприводимым генератором, то $\pi(A)>0$ для всех $A\in\Gamma$. Условие обратимости полугруппы в нашем случае сводится к равенству

$$\pi(A)\,G(A,\ A\cup x)=\pi(A\cup x)\,G(A\cup x,\ A)\ \text{для всех}\ x\notin A\in\Gamma,$$

или, что то же самое, к равенству

$$\frac{\pi(A\cup x)}{\pi(A)}=\frac{\beta(x,\ A)}{\delta(x,\ A)}\ \text{для всех}\ x\notin A\in\Gamma.$$

Но по предположению

$$\frac{\beta(x,\ A)}{\delta(x,\ A)}=\frac{\beta(x,\ A\cap\partial x)}{\delta(x,\ A\cap\partial x)}\ \text{для всех}\ x\notin A\in\Gamma,$$

откуда следует, что π — состояние ближайшего соседа. ∎

Легко видеть, что обращение предложения 2.1 также справедливо; именно любое марковское случайное поле является равновесным состоянием для некоторой обратимой полугруппы рождения — уничтожения ближайшего соседа. Действительно,

---

[1]) В теории вероятностей G называется также полугруппой размножения и гибели. — *Прим. перев.*

если μ — состояние ближайшего соседа, то полугруппа рождения — уничтожения с интенсивностью рождения $\beta(x, A) = \mu(A \cup x)/\mu(A)$ и интенсивностью уничтожения $\delta(x, A) = 1$ является обратимой и имеет μ своим равновесным состоянием. Справедливость предложения 2.1 в значительной степени обусловлена тем, что полугруппа предполагается обратимой. Это условие накладывает серьезное ограничение на вид интенсивностей рождения и уничтожения. Чтобы подчеркнуть этот факт, забудем на некоторое время, что на Λ есть структура графа, и докажем следующее

Предложение 2.2. *Пусть $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ — полугруппа рождения — уничтожения на Λ с интенсивностью рождения β и интенсивностью уничтожения δ. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Полугруппа $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ обратима.*

(ii) *Если функция $\gamma\colon \Lambda \times \Gamma \to \mathbb{R}$ определена равенством $\gamma(x, A) = \beta(x, A)/\delta(x, A)$, то для $A \in \Gamma$, $x, y \in \Lambda \setminus A$ при $x \neq y$ имеет место соотношение*

$$\gamma(x, A \cup y)\,\gamma(y, A) = \gamma(y, A \cup x)\,\gamma(x, A).$$

(iii) *Существует потенциал $V\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$, такой, что*

$$\gamma(x, A) = \exp\{V(A \cup x) - V(A)\} \text{ для всех } x \notin A \in \Gamma.$$

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Предположим, что полугруппа $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ имеет генератор G и состояние равновесия π. Пусть $A \in \Gamma$, $x, y \in \Lambda \setminus A$ с $x \neq y$. Поскольку полугруппа $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ обратима, то

$$\gamma(x, A \cup y) = \frac{\pi(A \cup y \cup x)}{\pi(A \cup y)}, \qquad \gamma(y, A) = \frac{\pi(A \cup y)}{\pi(A)},$$

$$\gamma(y, A \cup x) = \frac{\pi(A \cup x \cup y)}{\pi(A \cup x)}, \qquad \gamma(x, A) = \frac{\pi(A \cup x)}{\pi(A)},$$

откуда вытекает, что $\gamma(x, A \cup y)\ \gamma(y, A) = \gamma(y, A \cup x), \gamma(x, A)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Определим $V(A)$ индукцией по $|A|$. Так как V—потенциал, то необходимо $V(\varnothing) = 0$. Пусть теперь $A \in \Gamma$ и $|A| > 0$, выберем $x \in A$ и положим

$$V(A) = V(A \setminus x) + \log \gamma(x, A \setminus x).$$

Условие (ii) обеспечивает корректность определения потенциала $V(A)$, т. е. выбор $x \in A$ произволен. Ясно по построению, что

$$\gamma(x, A) = \exp\{V(A \cup x) - V(A)\} \text{ для всех } x \notin A \in \Gamma.$$

(iii)$\Rightarrow$(i). Пусть μ — гиббсовское состояние с потенциалом V.

Нетрудно проверить, что

$$\mu(A)\ G(A,\ B)=\mu(B)\ G(B,\ A) \text{ для всех } A,\ B\in\Gamma.$$

Таким образом, $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ — обратимая полугруппа и $\mu=\pi$. ■

Рассмотрим теперь другую модель—модель системы m взаимодействующих неразличимых частиц, которые перемещаются по множеству Λ (число $m<|\Lambda|$ фиксировано). Мы исключаем тот случай, когда в какой-то точке множества Λ может оказаться больше одной частицы. Пусть $\Gamma_m=\{A\in\Gamma : |A|=m\}$. Определим полугруппу $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ (считая на этот раз, что P_t: $\Gamma_m\times\times\Gamma_m\to\mathbb{R}$) с помощью генератора

$$G\colon\ \Gamma_m\times\Gamma_m\to\mathbb{R}.$$

Пусть заданы функция d: $\Lambda\times\Gamma\to\mathbb{R}$ с $d(x,\ A)>0$ для всех $x\notin A\in\Gamma$ и неприводимая симметричная функция P: $\Lambda\times\Lambda\to\to[0,\ 1]$ с $P(x,\ x)=0$ для всех $x\in\Lambda$. Предположим, что если $x\notin A\in\Gamma$, то вероятность того, что частица, находящаяся в точке x, совершит в промежутке времени от t до $t+dt$ переход в какую-либо другую точку, при условии того, что в момент t частицы занимали в точности множество $A\cup x$, равна $d(x,\ A)\,dt+ +O(dt^2)$. Если частица совершит переход куда-нибудь, то $P(x,\ y)$ — вероятность того, что она попадет в точку y. Предположим также, что вероятность того, что за время от t до $t+dt$ произойдет более одного перехода, есть $O(dt^2)$. Эти предположения приводят нас к определению генератора G: $\Gamma_m\times\Gamma_m\to\mathbb{R}$ соотношениями вида

$$G(A\cup x,\ A\cup y)=d(x,\ A)\,P(x,\ y), \text{ если}$$
$$A\in\Gamma_{m-1},\ x,\ y\in\Lambda\setminus A,\ x\neq y,$$
$$G(A,\ B)=0 \text{ для всех других пар } A,\ B\in\Gamma_m,\ A\neq B.$$

Снова определим $G(A,\ A)$ так, чтобы

$$\sum_{B\in\Gamma_m} G(A,\ B)=0.$$

Будем называть полугруппу, соответствующую генератору G, *m-частичной* полугруппой; d называется *функцией скорости*, а P — *матрицей переходов* полугруппы. Заметим, что G неприводим (на Γ_m) и, следовательно, существует единственное равновесное состояние π (где π — вероятностная мера на Γ_m). Назовем полугруппу такого типа *m-частичной* полугруппой *ближайшего соседа*, если $d(x,\ A)=d(x,\ A\cap\partial x)$ для всех $x\notin A\in\Gamma$.

Предложение 2.3. *Пусть* $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ — *m-частичная полугруппа с функцией скорости d. Предположим, что если* $A \in \Gamma$, x, $y \in \Lambda \setminus A$ *с* $x \neq y$, *то*

$$d(x, A \cup y)\, d(y, A) = d(y, A \cup x)\, d(x, A).$$

Тогда:

(i) *Существует единственный потенциал* $V\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$, *такой, что*

$$d(x, A) = \exp[V(A \cup x) - V(A)] \text{ для всех } x \notin A \in \Gamma.$$

(ii) *Если* π — *равновесное состояние полугруппы* $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$, *то*

$$\pi(A) = Z^{-1} \exp\{-V(A)\} \text{ для всех } A \in \Gamma_m,$$

где $Z = \sum\limits_{B \in \Gamma_m} \exp\{-V(B)\}$.

(iii) *Полугруппа* $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ *обратима.*

(iv) *Если* $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ — *m-частичная полугруппа ближайшего соседа, то* V — *потенциал ближайшего соседа.*

Доказательство. Пункт (i) доказывается точно так же, как предложение 2.2, (ii) и (iii) устанавливаются непосредственными вычислениями, (iv) следует из предложения 1.4. ■

Частичным обращением предложения 2.3 является

Предложение 2.4. *Предположим, что если* $x, y \in \Lambda$ *с* $(x, y) = 1$, *то* $|\partial x \cup \partial y| \leqslant m$, $|\Lambda| - |\partial x \cup \partial y| \geqslant m - 1$. *Пусть* π — *равновесное состояние для обратимой m-частичной полугруппы ближайшего соседа. Тогда существует такой потенциал ближайшего соседа* V, *что*

$$\pi(A) = Z^{-1} \exp\{-V(A)\} \text{ для всех } A \in \Gamma_m,$$

где $Z = \sum\limits_{B \in \Gamma_m} \exp\{-V(B)\}$.

(*Таким образом,* π — *гиббсовское состояние с потенциалом* V, *сосредоточенным на подмножестве* Γ_m *из* Γ.)

Доказательство. В силу предложения 2.3 достаточно показать, что если d — функция скорости полугруппы и если $A \in \Gamma$, x, $y \in \Lambda \setminus A$ с $x \neq y$, то

$$d(x, A \cup y)\, d(y, A) = d(y, A \cup x)\, d(x, A).$$

Чтобы установить это равенство, достаточно ограничиться тем случаем, когда $c(x, y) = 1$ и $A \subset (\partial x \cup \partial y)$

(поскольку

$$d(z, B) = d(z, B \cap \partial z)$$

для всех $z \notin B \in \Gamma$). По предположению

$$|A| \leqslant m - 2 \text{ и } |\Lambda| - |\partial x \cup \partial y| \geqslant m - 1,$$

поэтому можно выбрать $E \subset \Lambda \setminus (\partial x \cup \partial y)$, где $E = m - 1 - |A| > 0$. Пусть $B = A \cup E$, тогда $|B| = m - 1$. Выберем $z \in E$. Имеем:

$$\frac{d(x, A \cup y)}{d(y, A \cup x)} = \frac{d(x, B \cup y \setminus z)}{d(y, B \cup x \setminus z)} =$$

$$= \frac{d(x, B \cup y \setminus z)}{d(z, B \cup y \setminus z)} \frac{d(z, B \cup y \setminus z)}{d(z, B \cup x \setminus z)} \frac{d(z, B \cup x \setminus z)}{d(y, B \cup x \setminus z)} =$$

(в силу условия обратимости, поскольку $|B \cup y \setminus z| = m - 1$)

$$= \frac{\pi((B \cup y \setminus z) \cup z)}{\pi((B \cup y \setminus z) \cup x)} \frac{d(z, B \cup y \setminus z)}{d(z, B \cup x \setminus z)} \frac{\pi((B \cup x \setminus z) \cup y)}{\pi((B \cup x \setminus z) \cup z)} =$$

$$= \frac{\pi(B \cup y)}{\pi(B \cup x)} \frac{d(z, B \cup y \setminus z)}{d(z, B \cup x \setminus z)} =$$

(так как $(B \cup y \setminus z) \cap \partial z = (B \cup x \setminus z) \cap dz$)

$$= \frac{\pi(B \cup y)}{\pi(B \cup x)} = \frac{d(x, B)}{d(y, B)} = \frac{d(x, A)}{d(y, A)}$$

(из-за условия обратимости, так как $|B| = m - 1$, а также потому, что

$$B \cap \partial x = A \cap \partial x, \ B \cap \partial y = A \cap \partial y).$$

Следовательно, мы имеем требуемое равенство

$$d(x, A \cup y)\, d(y, A) = d(y, A \cup x)\, d(x, A). \ \blacksquare$$

Необходимо дать другую интерпретацию этого результата. Фактически он сводится к утверждению, что m-частичная полугруппа может быть обратимой m-частичной полугруппой ближайшего соседа только в случае, когда функция скорости d имеет очень специальный вид, а именно требуется, чтобы выполнялось равенство

$$d(x, A) = \exp[V(A \cup x) - V(A)] \text{ для всех } x \notin A \in \Gamma,$$

где V — некоторый потенциал ближайшего соседа.

Замечания. Тот факт, что марковские случайные поля — это не что иное, как равновесные состояния цепей Маркова, введенных в этой главе, впервые был доказан Спитцером (1971 b) для случая конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$ и в предположении трансляционной инвариантности. Этот же результат для общего конечного графа дан у Престона (1973). Относительно обобщений на счетные графы см. замечания к гл. 4. Стандартный материал, относящийся к цепям Маркова и к эргодической теории, читатель сможет найти, например, в книгах Дуба (1953) и Биллингслея (1965).

3. СПАРЕННЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Цель этой главы состоит в доказательстве теоремы Холли о спаренных цепях Маркова (хотя ее формулировка, казалось бы, не имеет ничего общего с теорией цепей Маркова). Мы рассмотрим здесь также некоторые ее следствия. Итак,

Теорема 3.1. *Пусть* Λ — *конечное множество,* μ_1 *и* μ_2 — *положительные элементы* $\mathscr{P}(\Lambda)$ (*т. е.* $\mu_1(A) > 0$, $\mu_2(A) > 0$ *для всех* $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$). *Предположим, что для всех* A, $B \in \mathscr{P}(\Lambda)$

$$\mu_1(A \cup B)\,\mu_2(A \cap B) \geqslant \mu_1(A)\,\mu_2(B).$$

Тогда найдется вероятностная мера ν *на* $\mathscr{P}(\Lambda) \times \mathscr{P}\Lambda$, *такая, что*

(i) $\sum\limits_{B \subset \Lambda} \nu(A, B) = \mu_1(A)$ *для всех* $A \subset \Lambda$,

(ii) $\sum\limits_{A \subset \Lambda} \nu(A, B) = \mu_2(B)$ *для всех* $B \subset \Lambda$,

(iii) $\nu(A, B) = 0$, *если нет включения* $A \supset B$.

Предположим на время, что это утверждение справедливо, тогда верна и

Теорема 3.2. *Пусть* Λ — *конечное множество,* μ_1 *и* μ_2 — *положительные элементы множества* $\mathscr{P}(\Lambda)$, *такие, что для всех* A, $B \in \mathscr{P}(\Lambda)$ *имеет место неравенство*

$$\mu_1(A \cup B)\,\mu_2(A \cap B) \geqslant \mu_1(A)\,\mu_2(B).$$

Пусть $f\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ — *возрастающая функция* (*т. е. если* $A \supset B$, *то* $f(A) \geqslant f(B)$). *Тогда*

$$\sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,\mu_1(A) \geqslant \sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,\mu_2(A).$$

Доказательство. Пусть ν — вероятностная мера на $\mathscr{P}(\Lambda) \times \times \mathscr{P}(\Lambda)$, существование которой утверждается в теореме 3.1. Тогда

$$\sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,\mu_1(A) = \sum_{A \subset \Lambda} \sum_{B \subset \Lambda} f(A)\,\nu(A, B) =$$

$$= \sum_{A \subset \Lambda} \sum_{B \subset \Lambda} f(A)\,\nu(A, B) \geqslant \sum_{A \subset \Lambda} \sum_{B \subset A} f(B)\,\nu(A, B) =$$

$$= \sum_{A \subset \Lambda} \sum_{B \subset \Lambda} f(B)\,\nu(A, B) = \sum_{B \subset \Lambda} f(B)\,\mu_2(B). \blacksquare$$

Мы будем называть неравенство, полученное в теореме 3.2, *неравенством Холли.* Оно играет фундаментальную роль при получении многих результатов гл. 8. Из неравенства Холли вытекает другое неравенство, открытое Фортюэном, Кастеляйном и Жинибром (и называемое поэтому ФКЖ-*неравенством*). Это неравенство доказывается в следующем предложении.

Предложение 3.1. *Пусть* Λ — *конечное множество,* μ — *положительный элемент* $\mathscr{P}(\Lambda)$, *такой, что для всех* A, $B \in \mathscr{P}(\Lambda)$

$$\mu(A \cup B)\,\mu(A \cap B) \geqslant \mu(A)\,\mu(B).$$

Пусть функции f, g: $\mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ — *возрастающие. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,g(A)\,\mu(A) \geqslant \sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,\mu(A) \sum_{B \subset \Lambda} g(B)\,\mu(B).$$

Доказательство. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то очевидно, что обе части неравенства изменятся на одну и ту же величину при замене g на $g+\alpha$. Таким образом, без потери общности можно считать, что $g(A) > 0$ для всех $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$. Определим μ_1, $\mu_2 \in \mathscr{P}(\Lambda)$, считая $\mu_2 = \mu$ и

$$\mu_1 = Z^{-1} g(A)\,\mu(A) \quad \text{для всех } A \in \mathscr{P}(\Lambda),$$

где

$$Z = \sum_{B \subset \Lambda} g(B)\,\mu(B).$$

Тогда при A, $B \in \mathscr{P}(\Lambda)$ имеем

$$\mu_1(A \cup B)\,\mu_2(A \cap B) = Z^{-1} g(A \cup B)\,\mu(A \cup B)\,\mu(A \cap B) \geqslant$$
$$\geqslant Z^{-1} g(A)\,\mu(A)\,\mu(B) = \mu_1(A)\,\mu_2(B).$$

Значит, в силу неравенства Холли

$$\sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,g(A)\,\mu(A) = Z \sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,\mu_1(A) \geqslant Z \sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,\mu_2(A) =$$
$$= \sum_{A \subset \Lambda} f(A)\,\mu(A) \sum_{B \subset \Lambda} g(B)\,\mu(B). \quad \blacksquare$$

Приступим теперь к доказательству теоремы 3.1. Пусть μ — положительный элемент $\mathscr{P}(\Lambda)$. Определим функцию d: $\Lambda \times \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ равенством

$$d(x, A) = \frac{\mu(A \setminus x)}{\mu(A)}.$$

Введем функцию G: $\mathscr{P}(\Lambda) \times \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ при помощи следующих соотношений:

$$G(A, A \setminus x) = d(x, A), \quad \text{если } x \in A \subset \Lambda;$$
$$G(A, A \cup x) = 1, \quad \text{если } x \notin A \subset \Lambda;$$
$$G(A, B) = 0 \quad \text{для всех других пар } A, B, \text{ где } A \neq B;$$
$$G(A, A) = -\sum_{B \neq A} G(A, B).$$

Очевидно, что G — неприводимый генератор полугруппы $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$. Легко проверить, что для всех $B\subset\Lambda$

$$\sum_{A\subset\Lambda}\mu(A)\,G(A,\ B)=0,$$

и, значит, μ — единственное равновесное состояние полугруппы $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$. Пусть теперь μ_1, μ_2 — два положительных элемента $\mathcal{G}(\Lambda)$, и пусть d_1, G_1 (соответственно d_2, G_2) определены через μ_1 (соответственно μ_2) точно так же, как d и G через μ.

Лемма 3.1. *Пусть* μ_1, μ_2, d_1, d_2, G_1, G_2 *определены, как указано выше. Предположим, что существует генератор*

$$\Omega\colon\ (\mathcal{P}(\Lambda)\times\mathcal{P}(\Lambda))\times(\mathcal{P}(\Lambda)\times\mathcal{P}(\Lambda))\to\mathbb{R},$$

удовлетворяющий следующим условиям:

(i) $\sum\limits_{B_2\subset\Lambda}\Omega(A_1,\ A_2;\ B_1,\ B_2)=G_1(A_1,\ B_1)$ *для всех* A_1, A_2, $B_1\subset\Lambda$.

(ii) $\sum\limits_{B_1\subset\Lambda}\Omega(A_1,A_2;\ B_1,B_2)=G_2(A_2,\ B_2)$ *для всех* A_1, A_2, $A_3\subset\Lambda$.

(iii) *Если* $A_1\supset A_2$, *то* $\Omega(A_1,\ A_2;\ B_1,\ B_2)=0$, *когда нет включения* $B_1\supset B_2$.

Тогда существует вероятностная мера ν *на* $\mathcal{P}(\Lambda)\times\mathcal{P}(\Lambda)$, *удовлетворяющая условиям теоремы* 3.1.

Доказательство. Нетрудно проверить (индукцией по n), что из (i) — (iii) при всех $n\geqslant 1$ вытекают следующие равенства:

(iv) $\sum\limits_{B_2\subset\Lambda}\Omega^n(A_1,A_2;B_1,\ B_2)=G_1^n(A_1,\ B_1)$ для всех A_1, A_2, $B_1\subset\Lambda$.

(v) $\sum\limits_{B_1\subset\Lambda}\Omega^n(A_1,\ A_2;\ B_1,\ B_2)=G_2^n(A_2,\ B_2)$ для всех A_1, A_2, $B_2\subset\Lambda$.

(vi) Если $A_1\supset A_2$, то $\Omega^n(A_1,\ A_2;\ B_1,\ B_2)=0$ когда нет включения $B_1\supset B_2$.

(Конечно, здесь Ω^n, G_1^n и G_2^n суть матрицы Ω, G_1 и G_2, возведенные в степень n.) Пусть $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ — полугруппа на $\mathcal{P}(\Lambda)\times\mathcal{P}(\Lambda)$, которая имеет Ω своим генератором, т. е. $P_t=\exp(t\Omega)$. Определим ν: $\mathcal{P}(\Lambda)\times\mathcal{P}(\Lambda)\to\mathbb{R}$ следующим равенством:

$$\nu(A,\ B)=\lim_{t\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Omega^n(\Lambda,\ \varnothing;\ A,\ B).$$

(Этот предел существует в силу эргодической теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний.) Поскольку $\Lambda\supset\varnothing$, то из (vi) следует, что $\nu(A,\ B)=0$, если нет включения $\Lambda\supset B$.

Кроме того,

$$\sum_{B \subset \Lambda} \nu(A, B) = \lim_{t \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{B \subset \Lambda} \Omega^n(\Lambda, \varnothing; A, B) =$$
$$= \lim_{t \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} G_1^n(\Lambda, A).$$

Стало быть, если мы положим

$$\tilde{\mu}_1(A) = \sum_{B \subset \Lambda} \nu(A, B), \quad \text{то} \quad \tilde{\mu}_1 \in \mathscr{P}(\Lambda),$$

и по эргодической теореме $\tilde{\mu}_1$ является равновесным состоянием полугруппы с генератором G_1. Но поскольку G_1 неприводим, то равновесное состояние единственно и $\tilde{\mu}_1 = \mu_1$. Аналогично доказывается равенство

$$\mu_2(B) = \sum_{A \subset \Lambda} \nu(A, B) \quad \text{для всех} \quad B \subset \Lambda.$$

Таким образом, ν обладает требуемыми свойствами. ■

Сейчас читатель справедливо предполагает, что мы закончим доказательство теоремы 3.1, показав, что если μ_1 и μ_2 удовлетворяют ее предположениям, то можно построить генератор Ω, удовлетворяющий предположениям леммы 3.1. Однако, прежде чем сделать это, мы обсудим, что представляет собой генератор Ω в лемме 3.1. Пусть Λ_1 и Λ_2 — два непересекающихся экземпляра Λ, тогда очевидным образом можно отождествить $\mathscr{P}(\Lambda) \times \mathscr{P}(\Lambda)$ с $\mathscr{P}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ и рассматривать Ω как генератор полугруппы $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$. Марковская цепь, соответствующая полугруппе $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$, обладает следующими свойствами:

(i) Если мы смотрим только на то, что происходит на Λ_1, то на $\mathscr{P}(\Lambda_1)$ имеется цепь Маркова, задаваемая полугруппой с генератором G_1.

(ii) Аналогично на Λ_2 мы имеем цепь Маркова, задаваемую полугруппой с генератором G_2.

(iii) Если мы рассматриваем Λ_1 и Λ_2 и в момент t конфигурацией на Λ_1 является A_1, а конфигурацией на Λ_2 — множество A_2, и $A_1 \supset A_2$, то в любой момент времени после t конфигурация на Λ_2 по-прежнему является подмножеством конфигурации на Λ_1. Иными словами, если $s \geqslant t$ и в момент s B_1 — конфигурация на Λ_1, B_2 — конфигурация на Λ_2, то $B_1 \supset B_2$.

Таким образом, Ω задает цепь Маркова, которая является весьма специальным спариванием цепей Маркова, задаваемых G_1 и G_2.

Теперь мы завершим доказательство теоремы 3.1 тем способом, о котором уже говорилось. Итак, пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{P}(\Lambda)$

и удовлетворяют предложениям теоремы 3.1. Определение Ω дается ниже. Непосредственно проверяется, что Ω удовлетворяет предположениям леммы 3.1. Эта проверка предоставляется читателю.

Итак Ω: $(\mathscr{P}(\Lambda)\times\mathscr{P}(\Lambda))\times(\mathscr{P}(\Lambda)\times\mathscr{P}(\Lambda))\to\mathbb{R}$ определяется следующими равенствами:

$$\Omega(A_1, A_2; A_1\setminus x, A_2\setminus x) = \min[d_2(x, A_1), d_2(X, A_2)], \quad \text{если } x\in A_1\cap A_2;$$

$$\Omega(A_1, A_2; A_1\cup x, A_2\cup x) = 1, \quad \text{если } x\in(\Lambda\setminus A_1)\cap(\Lambda\setminus A_2);$$

$$\Omega(A_1, A_2; A_1\setminus x, A_2) = d_1(x, A_1) - \min[d_1(x, A_1), d_2(x, A_2)], \quad \text{если } x\in A_1\cap A_2;$$

$$\Omega(A_1, A_2; A_1, A_2\setminus x) = d_2(x, A_2) - \min[d_1(x, A_1), d_2(x, A_2)], \quad \text{если } x\in A_1\cap A_2;$$

$$\Omega(A_1, A_2; A_1\setminus x, A_2) = d_1(x, A_1), \quad \text{если } x\in A_1,\ x\notin A_2;$$

$$\Omega(A_1, A_2; A_1\cup x, A_2) = 1, \quad \text{если } x\notin A_1,\ x\in A_2;$$

$$\Omega(A_1, A_2; A_1, A_2\setminus x) = d_2(x, A_2), \quad \text{если } x\in A_2,\ x\notin A_1;$$

$$\Omega(A_1, A_2; A_1, A_2\cup x) = 1, \quad \text{если } x\notin A_2,\ x\in A_1;$$

$\Omega(A_1, A_2; B_1, B_2)$ для всех других A_1, A_2, B_1, B_2, когда или $A_1\neq B_1$, или $A_2\neq B_2$. Наконец, определим $\Omega(A_1, A_2; A_1, A_2)$ так, чтобы $\sum\limits_{B_1\subset\Lambda}\sum\limits_{B_2\subset\Lambda}\Omega(A_1, A_2; B_1, B_2)=0$. ■

Замечания. Доказательство теоремы 3.1 заимствовано у Холли (1973 с). Первоначальное доказательство ФКЖ-неравенства было дано в работе Фортюэна, Кастеляйна и Жинибра (1971). Доказательство эргодической теоремы можно найти, например, у Дуба (1953) или Биллингслея (1965).

4. ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ И МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА СЧЕТНЫХ ГРАФАХ

В этой главе мы обобщим состояния, рассмотренные в гл. 1, на случай, когда граф имеет счетное число вершин, а затем докажем аналог теоремы 1.1. Оказывается, что некоторые интересные свойства определяемых нами гиббсовских состояний не зависят от структуры графа. Поэтому здесь мы докажем лишь несколько фактов, и настоящая глава может рассматриваться как введение в следующие главы, где мы изучим гиббсовские состояния на произвольных счетных множествах.

Пусть $\mathscr{G}=(S, e)$ — граф с множеством вершин S и множеством ребер e, причем S является счетным, и пусть по-прежнему через $\mathscr{P}(S)$ обозначается множество подмножеств из S. Как и в предыдущих главах, объектом изучения являются некоторые классы вероятностных мер на $\mathscr{P}(S)$. Поскольку сейчас $\mathscr{P}(S)$ — несчетное множество, то мы, чтобы определить на нем меры, должны снабдить его некоторой дополнительной структурой. Мы будем рассматривать $\mathscr{P}(S)$ как компактное хаусдорфово пространство, являющееся произведением $|S|$ экземпляров дискретного пространства $\{0, 1\}$. Пусть $\mathscr{C}(S)$ обозначает множество конечных подмножеств из S; если $A \subset B \subset S$, то положим

$$[A, B] = \{E \in \mathscr{P}(S):\ E \cap B = A\};$$

если $B \in \mathscr{C}(S)$, то будем называть $[A, B]$ *конечномерным цилиндром*. Конечномерные цилиндры образуют базис открытых множеств для топологии в $\mathscr{P}(S)$. Обозначим через $\mathscr{F}(S)$ совокупность борелевских подмножеств из $\mathscr{P}(S)$, тогда $\mathscr{F}(S)$ является σ-алгеброй, порожденной конечномерными цилиндрами. Множество неотрицательных мер на $(\mathscr{P}(S), \mathscr{F}(S))$ будет обозначаться через $\mathscr{M}(S)$, а $\mathscr{S}(S)$ будет обозначать множество состояний на S, т. е. вероятностных мер на $(\mathscr{P}(S), \mathscr{F}(S))$.

Мы определим функцию c: $S \times S \to \{0, 1\}$ и множество ∂A (для любого $A \in \mathscr{P}(S)$) точно так же, как в случае конечного графа. С этого места мы будем предполагать, что ∂x — конечное множество для всех $x \in S$. Из этого предположения следует, что $\partial A \in \mathscr{C}(S)$ для всех $A \in \mathscr{C}(S)$. Функция V: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ снова будет называться *потенциалом*, если $V(\varnothing) = 0$. Определим J_V: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ равенством

$$J_V(A) = \sum_{X \subset A} |-1|^{|A \setminus X|} V(X) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathscr{C}(S);$$

в точности, как в конечном случае, имеем, что

$$V(A) = \sum_{B \subset A} J_V(B) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathscr{C}(S).$$

Потенциал ближайшего соседа определяется, как в гл. 1, и предложение 1.4 остается в силе (при ограничении, что X принадлежит $\mathscr{C}(S)$). Пусть V — потенциал на S, $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $B \subset \partial\Lambda$; определим *гиббсовское состояние на Λ с граничными условиями B и потенциалом V* как состояние $\pi_\Lambda^B \in \mathscr{S}(\Lambda)$, задаваемое формулой

$$\pi_\Lambda^B(A) = Z^{-1} \exp V(A \cup B) \quad \text{для всех} \quad A \subset \Lambda,$$

где $Z = \sum_{E \subset \Lambda} \exp V(E \cup B)$.

(Как и в гл. 1, мы отождествляем меру π_Λ^B на конечном множестве $\mathscr{P}(\Lambda)$ с ее плотностью.) Заметим, что π_Λ^B зависит, конечно, от V, однако потенциал V обычно будет фиксирован, и поэтому такое обозначение не может привести к путанице. Теперь мы готовы к тому, чтобы определить гиббсовские состояния и марковские случайные поля на $\mathcal{G}$. Пусть V — потенциал ближайшего соседа на S, состояние $\mu \in \mathcal{P}(S)$ будет называться *гиббсовским состоянием с потенциалом* V, если оно обладает следующими свойствами:

(i) Для всех конечномерных цилиндров $[A, \Lambda]$

$$\mu([A, \Lambda]) > 0.$$

(ii) Если $\Lambda, \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda \cup \partial\Lambda \subset \Lambda'$ и $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$, то

$$\frac{\mu([A \cup B, \Lambda'])}{\mu([B, \Lambda' \setminus \Lambda])} = \pi_{\Lambda}^{B \cap \partial\Lambda}(A).$$

Заметим, что $[A \cup B, \Lambda'] = [A, \Lambda] \cap [B, \Lambda' \setminus \Lambda]$. Поэтому (ii) означает, что условная вероятность того, что конфигурация на Λ есть A, при условии, что конфигурация на $\Lambda' \setminus \Lambda$ есть B, равна $\pi_{\Lambda}^{B \cap \partial\Lambda}(A)$.

Состояние $\mu \in \mathcal{P}(S)$ будет называться *марковским случайным полем*, если:

(i) $\mu([A, \Lambda]) > 0$ для всех конечномерных цилиндров $[A, \Lambda]$.
(ii) Если $\Lambda, \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda \cup \partial\Lambda \subset \Lambda'$ и $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$, то

$$\frac{\mu([A \cup B, \Lambda'])}{\mu([B, \Lambda' \setminus \Lambda])} = \frac{\mu([A \cup (B \cap \partial\Lambda), \Lambda'])}{\mu([B \cap \partial\Lambda, \Lambda' \setminus \Lambda])},$$

т. е. условная вероятность того, что конфигурация на Λ есть A, при условии, что конфигурация на $\Lambda' \setminus \Lambda$ есть B, совпадает с условной вероятностью того, что конфигурация на Λ есть A, при условии, что конфигурация на $\Lambda' \setminus \Lambda$ есть $B \cap \partial\Lambda$.

Мы предоставляем читателю проверить, что для конечных графов приведенные выше определения совпадают с определениями гл. 1; однако пока совсем не очевидно, что гиббсовские состояния и марковские случайные поля действительно существуют, когда граф не является конечным. Мы будем в настоящий момент игнорировать вопрос существования, а вместо этого докажем аналог теоремы 1.1.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mu \in \mathcal{P}(S)$ *с* $\mu([A, \Lambda]) > 0$ *для всех конечномерных цилиндров* $[A, \Lambda]$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *Состояние* μ *является марковским случайным полем.*
(ii) *Если* $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, $x \notin A \subset \Lambda$ *и* $x \cup \partial x \subset \Lambda$, *то*

$$\frac{\mu([A \cup x, \Lambda])}{\mu([A, \Lambda])} = \frac{\mu([(A \cap \partial x) \cup x, \Lambda])}{\mu([(A \cap \partial x), \Lambda])}.$$

(iii) *Существует потенциал ближайшего соседа* $V\colon \mathscr{C}(S)\to\mathbb{R}$, *такой, что* μ *является гиббсовским состоянием с потенциалом* V. *Более того, потенциал* V *в* (iii) *однозначно определяется по* μ.

Доказательство. Ясно, что (iii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(ii), таким образом, осталось доказать лишь, что (ii)$\Rightarrow$(iii).

Нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 4.1. *Предположим, что утверждение* (ii) *теоремы* 4.1 *имеет место.*

Пусть $\Lambda, \Lambda'\in\mathscr{C}(S)$ *с* $x\notin A\subset\Lambda$, $x\cup\partial x\subset\Lambda$ *и* $\Lambda\subset\Lambda'$. *Тогда*

$$\frac{\mu([A\cup x, \Lambda])}{\mu([A, \Lambda])}=\frac{\mu([A\cup x, \Lambda'])}{\mu([A, \Lambda'])}.$$

Предположим на время справедливость леммы. Из этой леммы легко следует, что если $B\in\mathscr{C}(S)$ и $\Lambda, \Lambda'\in\mathscr{C}(S)$ с $B\cup\partial B\subset\Lambda$, $B\cup\partial B\subset\Lambda'$, то

$$\frac{\mu([B, \Lambda])}{\mu([\varnothing, \Lambda])}=\frac{\mu([B, \Lambda'])}{\mu([\varnothing, \Lambda'])}.$$

Поэтому мы можем определить $V\colon \mathscr{C}(S)\to\mathbb{R}$, полагая

$$V(B)=\log\left[\frac{\mu([B, \Lambda])}{\mu([\varnothing, \Lambda])}\right] \quad \text{для любого} \quad \Lambda\in\mathscr{C}(S)$$

с $\Lambda\supset B\cup\partial B$.

Из предложения 1.4 легко получить, что V — потенциал ближайшего соседа. (Мы предоставляем это сделать читателю.) Пусть теперь $\Lambda, \Lambda'\in\mathscr{C}(S)$ с $\Lambda\cup\partial\Lambda\subset\Lambda'$, пусть $A\subset\Lambda$ и $B\subset\Lambda'\setminus\Lambda$. Возьмем любое множество $\Lambda''\in\mathscr{C}(S)$ с $\Lambda'\cup\partial\Lambda'\subset\Lambda''$. Тогда, если $E\subset\Lambda$, то по лемме 4.1 мы имеем, что

$$\frac{\mu([E\cup B, \Lambda'])}{\mu([B, \Lambda'])}=\frac{\mu([E\cup B, \Lambda''])}{\mu([B, \Lambda''])}=$$
$$=\frac{\mu([E\cup B, \Lambda''])}{\mu([\varnothing, \Lambda''])}\,\frac{\mu([\varnothing, \Lambda''])}{\mu([B, \Lambda''])}=\exp[V(E\cup B)-V(B)].$$

Следовательно,

$$\frac{\mu([A\cup B, \Lambda'])}{\mu([B, \Lambda'\setminus\Lambda])}=\frac{\mu([A\cup B, \Lambda'])}{\mu([B, \Lambda'])}\,\frac{\mu([B, \Lambda'])}{\sum\limits_{E\subset\Lambda}\mu([E\cup B, \Lambda'])}=$$
$$=\frac{\exp[V(A\cup B)-V(B)]}{\sum\limits_{E\subset\Lambda}\exp[V(E\cup B)-V(B)]}=\pi_\Lambda^B(A)=\pi_\Lambda^{B\cap\partial\Lambda}(A).$$

Поэтому μ является гиббсовским состоянием с потенциалом V; ясно также, что V определяется по μ однозначно. Наконец, мы должны дать доказательство леммы 4.1. Пусть $\Lambda, \Lambda'\in\mathscr{C}(S)$,

$x \notin A \subset \Lambda$ с $x \cup \partial x \subset \Lambda$ и $\Lambda \subset \Lambda'$. Тогда

$$\mu([A \cup x, \Lambda]) = \sum_{E \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \mu([E \cup A \cup x, \Lambda']) =$$
$$= \sum_{E \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \frac{\mu([E \cup A \cup x, \Lambda'])}{\mu([E \cup A, \Lambda'])} \mu([E \cup A, \Lambda']) =$$
$$= \sum_{E \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \frac{\mu([A \cup x, \Lambda'])}{\mu([A, \Lambda'])} \mu([E \cup A, \Lambda']) =$$
$$= \frac{\mu([A \cup x, \Lambda'])}{\mu([A, \Lambda'])} \mu([A, \Lambda])$$

и, значит, $\dfrac{\mu([A \cup x, \Lambda])}{\mu([A, \Lambda])} = \dfrac{\mu([A \cup x, \Lambda'])}{\mu([A, \Lambda'])}$. ■

Приведенная выше теорема, конечно, была бы бессмысленной, если бы гиббсовские состояния не существовали, однако если V — потенциал ближайшего соседа на S, то всегда существует гиббсовское состояние с потенциалом V. Доказательство этого факта отложим до гл. 5 (чтобы избежать повторения почти одного и того же).

В случае конечного графа для заданного потенциала V имеется в точности одно гиббсовское состояние с потенциалом V, но когда граф бесконечен, может оказаться, что такой единственности нет, т. е. для некоторого потенциала V может существовать более одного гиббсовского состояния с потенциалом V. В таких случаях говорят, что для V имеет место *фазовый переход*. В дальнейшем мы главным образом будем заниматься вопросом, когда именно фазовый переход имеет место.

В определении гиббсовского состояния мы предполагали, что мера каждого конечномерного цилиндра положительна. На самом деле это предположение излишне, поскольку оно автоматически следует из оставшейся части определения.

Предложение 4.1. *Пусть V — потенциал ближайшего соседа на S. Если $\mu \in \mathscr{C}(S)$, то следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *μ — гиббсовское состояние с потенциалом V.*

(ii) *Если $\Lambda, \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda \cup \partial\Lambda \subset \Lambda'$, $A \subset \Lambda$ и $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$, то*

$$\mu([A \cup B, \Lambda']) = \mu([B, \Lambda' \setminus \Lambda]) \pi_\Lambda^{B \cap \partial\Lambda}(A).$$

Доказательство. Очевидно, (i)$\Rightarrow$(ii), а для того, чтобы доказать импликацию (ii)$\Rightarrow$(i), необходимо только проверить, что (ii) влечет $\mu([A, \Lambda]) > 0$ для каждого конечномерного цилиндра $[A, \Lambda]$. Таким образом, предположим, что (ii) имеет место, и пусть $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $A \subset \Lambda$. Тогда, если $\Lambda' = \Lambda \cup \partial\Lambda$, то

$$\mu([A, \Lambda]) = \sum_{B \subset \partial\Lambda} \mu([A \cup B, \Lambda']) = \sum_{B \subset \partial\Lambda} \mu([B, \partial\Lambda])\, \pi_\Lambda^B(A) \geqslant$$
$$\geqslant \left[\min_{B \subset \partial\Lambda} \pi_\Lambda^B(A)\right] \sum_{B \subset \partial\Lambda} \mu([B, \partial\Lambda]) = \min_{B \subset \partial\Lambda} \pi_\Lambda^B(A) > 0. \blacksquare$$

Определение марковского случайного поля, данное в этой главе, на самом деле, является аналогом определения состояния ближайшего соседа, данного в гл. 1. Однако мы можем ввести понятие марковского случайного поля на S определением, которое ближе к определению гл. 1, поскольку справедливо

Предложение 4.2. *Пусть $\mu \in \mathscr{S}(S)$ с $\mu([A, \Lambda]) > 0$ для всех конечномерных цилиндров $[A, \Lambda]$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Состояние μ является марковским случайным полем.*

(ii) *Если $\Lambda, \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda \cup \partial\Lambda \subset \Lambda'$ и $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$, то*

$$\frac{\mu([A \cup B, \Lambda'])}{\mu([B, \Lambda' \setminus \Lambda])} = \frac{\mu([A \cup (B \cap \partial\Lambda), \Lambda \cup \partial\Lambda])}{\mu([B \cap \partial\Lambda, \partial\Lambda])},$$

т. е. условная вероятность того, что конфигурация на Λ есть A при условии, что конфигурация на $\Lambda' \setminus \Lambda$ есть B, равна условной вероятности того, что конфигурация на Λ есть A, при условии, что конфигурация на $\partial\Lambda$ есть $B \cap \partial\Lambda$.

Доказательство. Предоставляется читателю. ■

Мы дадим сейчас характеризацию гиббсовских состояний, которая послужит некоторым основанием для подхода, развиваемого в следующей главе. Для любого $A \in \mathscr{P}(S)$ пусть проекция $r_A\colon \mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(A)$ определяется равенством

$$r_A(X) = X \cap A \quad \text{для} \quad X \in \mathscr{P}(S).$$

Тогда r_A индуцирует отображение (также обозначаемое через r_A) из $\mathscr{M}(S)$ в $\mathscr{M}(A)$, такое, что

$$r_A(\mu)(\Omega) = \mu\left(r_A^{-1}(\Omega)\right) \quad \text{для} \quad \Omega \in \mathscr{F}(A), \qquad \mu \in \mathscr{M}(S).$$

Для любого $A \in \mathscr{P}(S)$ и $B \subset S \setminus A$ определим отображение $r_A^B\colon \mathscr{M}(S) \to \mathscr{M}(A)$, полагая

$$r_A^B(\mu)(\Omega) = \mu(\{X \in \mathscr{P}(S)\colon\ X \cap A \in \Omega,\ X \cap (S \setminus A) = B\})$$
$$\text{для всех} \quad \Omega \in \mathscr{F}(A), \qquad \mu \in \mathscr{M}(S).$$

Пусть теперь V — потенциал ближайшего соседа на S. Для $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ определим функцию $f^\Lambda\colon \mathscr{P}(\Lambda) \times \mathscr{P}(S \setminus \Lambda) \to \mathbb{R}$ равенством

$$f^\Lambda(A, X) = \pi_\Lambda^{X \cap \partial\Lambda}(A).$$

Нетрудно показать, что $f^\Lambda \in C(\mathscr{P}(\Lambda) \times \mathscr{P}(S \setminus \Lambda))$ (где для любого топологического пространства Y $C(Y)$ обозначает векторное пространство непрерывных функций из Y в $\mathbb{R}$). Используя приведенные выше определения, мы можем теперь доказать следующее

Предложение 4.3. *Состояние μ является гиббсовским с потенциалом V тогда и только тогда, когда для всех $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $A \subset \Lambda$ имеет место равенство*[1])

$$r^A_{S\setminus\Lambda}(\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S\setminus\Lambda}(\mu).$$

Доказательство. Предположим, что для всех $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и и $A \subset \Lambda$ справедливо равенство $r^A_{S\setminus\Lambda}(\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S\setminus\Lambda}(\mu)$. Пусть $\Lambda, \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda \cup \partial\Lambda \subset \Lambda'$ и $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$. Тогда

$$r^A_{S\setminus\Lambda}(\mu)([B, \Lambda'\setminus\Lambda]) = \int\limits_{[B,\, \Lambda'\setminus\Lambda]} f^\Lambda(A, X)\, dr_{S\setminus\Lambda}(\mu)(X) =$$

$$= f^\Lambda(A, B) \int\limits_{[B,\, \Lambda'\setminus\Lambda]} dr_{S\setminus\Lambda}(\mu)(X) = f^\Lambda(A, B)\, r_{S\setminus\Lambda}(\mu)([B, \Lambda'\setminus\Lambda])$$

(поскольку $f^\Lambda(A, X) = f^\Lambda(A, B)$ для всех $X \in [B, \Lambda' \setminus \Lambda]$). Но

$$r^A_{S\setminus\Lambda}(\mu)([B, \Lambda'\setminus\Lambda]) = \mu([A \cup B, \Lambda'])$$

и

$$r_{S\setminus\Lambda}(\mu)([B, \Lambda'\setminus\Lambda]) = \mu([B, \Lambda'\setminus\Lambda]);$$

кроме того,

$$f^\Lambda(A, B) = \pi_\Lambda^{B\cap\partial\Lambda}(A).$$

Следовательно,

$$\mu([A \cup B, \Lambda']) = \mu([B, \Lambda'\setminus\Lambda])\, \pi_\Lambda^{B\cap\partial\Lambda}(A),$$

и, значит, в силу предложения 4.1 μ является гиббсовским состоянием с потенциалом V. Обратно, если μ — гиббсовское состояние с потенциалом V, то меры $r^A_{S\setminus\Lambda}(\mu)$ и $f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S\setminus\Lambda}(\mu)$ совпадают на всех конечномерных цилиндрах вида $[B, \Lambda'\setminus\Lambda]$ с $\Lambda' \supset \Lambda \cup \partial\Lambda$ и $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$. Таким образом, $r^A_{S\setminus\Lambda}(\mu)$ и $f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S\setminus\Lambda}(\mu)$ совпадают на всех конечномерных цилиндрах из $\mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$ и, следовательно, совпадают тождественно. ■

[1]) То есть когда $f^\Lambda(A, \cdot)$ является производной Радона — Никодима $\dfrac{dr^A_{S\setminus\Lambda}(\mu)}{dr_{S\setminus\Lambda}(\mu)}$. — *Прим. перев.*

Мы закончим эту главу замечанием, что функции $\{f^{\Lambda}\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ обладают следующими свойствами:

(i) $f^{\Lambda}(A, X) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$, $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$.

(ii) $\sum\limits_{A \subset \Lambda} f^{\Lambda}(A, X) = 1$ для всех $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$.

(iii) Если $\Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$, $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$ и $X \subset S \setminus \Lambda'$, то

$$f^{\Lambda}(A \cup B, X) = f^{\Lambda}(A, B \cup X) \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda'}(C \cup B, X).$$

(Очевидно, (i) и (ii) имеют место, и легко видеть, что (iii) также справедливо.) В следующей главе мы будем рассматривать функции $\{f^{\Lambda}\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$, обладающие этими свойствами.

Замечания. Как упомянуто в гл. 1, марковские случайные поля на $\mathbb{Z}^{\nu}$ были введены Добрушиным (1968a), и это определение в сущности годится и для произвольных счетных графов. Традиционно гиббсовские состояния рассматривались только на конечных подмножествах $\mathbb{Z}^{\nu}$, вычислялись различные термодинамические величины и изучалось их предельное поведение. Идея определения гиббсовского состояния как меры на $\mathscr{P}(\mathbb{Z}^{\nu})$ была введена Добрушиным, Минлосом и Рюэлем. (Их определения появились приблизительно в одно время.) Здесь используется определение гиббсовского состояния на $\mathbb{Z}^{\nu}$, принадлежащее Добрушину (1968b, 1968c, 1969) (для трансляционно-инвариантных парных потенциалов на $\mathbb{Z}^{\nu}$). Минлос (1967a, 1967b) определил гиббсовское состояние на $\mathbb{Z}^{\nu}$ как состояние, полученное предельным переходом от гиббсовских состояний с граничными условиями на конечных подмножествах из $\mathbb{Z}^{\nu}$. Добрушин (1968b) показал, что его определение совпадает с определением Минлоса. У Рюэля (1967a, 1967b) гиббсовское состояние на $\mathbb{Z}^{\nu}$ определялось как трансляционно-инвариантное состояние с максимумом энтропии среди всех трансляционно-инвариантных состояний с данной плотностью и энергией. Лэнфорд и Рюэль (1969) показали, что это определение совпадает с тем, которое дается предложением 4.3 и, значит, эквивалентно определению Добрушина.

Эквивалентность марковских случайных полей и гиббсовских состояний с потенциалом ближайшего соседа на $\mathbb{Z}^{\nu}$ в предположении трансляционной инвариантности была показана Спитцером (1971b).

Одновременно было проведено много исследований по проблеме построения марковского процесса, равновесные состояния которого являются гиббсовскими состояниями с заданным потенциалом. (Частные случаи этой задачи рассмотрены в гл. 2.) Читателям, интересующимся этой тематикой, можно рекомендовать обратиться к работам Спитцера (1970), Холли (1970, 1971, 1973a, 1973b), Лиггета (1972, 1973), Харриса (1972), Добрушина (1971) и Васильева, Добрушина и Пятецкого-Шапиро (1969).

5. ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ НА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В этой главе мы будем изучать некоторые вероятностные меры на $\mathscr{P}(S)$, множестве всех подмножеств из S, где S — счетное множество. Нас будут интересовать существование и единственность мер, обладающих определенными свойствами. Как и раньше, мы будем рассматривать точки из S как узлы, каждый из которых может быть либо пустым, либо быть занятым частицей (или каким-нибудь другим объектом), при этом подмножество $A \in \mathscr{P}(S)$ будет использоваться для описания ситуации, когда все точки множества A заняты, а точки из $S \setminus A$ свободны. Элементы $\mathscr{P}(S)$ будут иногда называться конфигурациями, а изучаемые нами вероятностные меры на $\mathscr{P}(S)$ будут описывать равновесные распределения конфигураций в некоторой модели.

Основное предположение, касающееся моделей, которые мы будем рассматривать, заключается в следующем: пусть Λ — конечное подмножество в S, $A \subset \Lambda$ и $X \subset S \setminus \Lambda$; мы считаем, что в модели задана условная вероятность заполнения частицами на Λ в точности множества A, при условии, что на $S \setminus \Lambda$ частицы заполняют в точности множество X. (Это означает, что если нам известно, что происходит вне конечного множества из S, то мы можем вычислить распределение частиц внутри этого конечного множества.) Обозначим упомянутую условную вероятность через $f^{\Lambda}(A, X)$; наша цель в этой главе состоит, во-первых, в том, чтобы определить, каким соотношениям должны удовлетворять функции $f^{\Lambda}(A, X)$, и, во-вторых, найти, определяют ли $f^{\Lambda}(A, X)$ единственным образом вероятностную меру на $\mathscr{P}(S)$.

Основные примеры моделей описанного выше типа возникают в статистической механике классических решетчатых систем, поэтому подход, который мы будем использовать, в значительной степени привлекает терминологию и методы статистической механики.

Нам потребуются следующие обозначения и определения; некоторые из них уже появились в гл. 4. Пытаясь сделать материал настоящей главы замкнутым, мы выпишем их вновь (и извинимся перед теми читателями, которые уже изучили гл. 4). Обозначим через S счетное множество, через $\mathscr{P}(S)$ — множество всех подмножеств из S. Мы будем рассматривать $\mathscr{P}(S)$ как компактное хаусдорфово пространство, являющееся произведением $|S|$ экземпляров дискретного пространства $\{0, 1\}$. Обозначим множество конечных подмножеств из S через $\mathscr{C}(S)$. Если $A \subset B \in \mathscr{P}(S)$, то

$$[A, B] = \{X \in \mathscr{P}(S):\ X \cap B = A\}.$$

Когда $B \in \mathscr{C}(S)$, то $[A, B]$ называется *конечномерным цилиндром.* Конечномерные цилиндры образуют базис открытых множеств топологии в $\mathscr{P}(S)$. Пусть $\mathscr{F}(S)$ обозначает множество борелевских подмножеств из $\mathscr{P}(S)$; таким образом, $\mathscr{F}(S)$ является σ-алгеброй, порожденной конечномерными цилиндрами. Мы обозначим через $\mathscr{M}(S)$ множество неотрицательных мер на $(\mathscr{P}(S), \mathscr{F}(S))$, которое рассматривается как топологическое пространство со слабой топологией (т. е. индуцированной топологией, которая возникает, если считать $\mathscr{M}(S)$ подмножеством пространства, сопряженного к $C(\mathscr{P}(S))$). Через $\mathscr{S}(S)$ будет обозначаться множество состояний на S (т. е. множество вероятностных мер на $(\mathscr{P}(S), \mathscr{F}(S))$). Элементы из $\mathscr{S}(S)$ часто будут называться *случайными полями.* Напомним, что $\mathscr{S}(S)$ является компактным подмножеством в $\mathscr{M}(S)$ и что если $\mu_n, \mu \in \mathscr{S}(S)$, то $\mu_n \to \mu$ в слабой топологии тогда и только тогда, когда

$$\mu_n([A, \Lambda]) \to \mu([A, \Lambda])$$

при $n \to \infty$ для любого конечномерного цилиндра $[A, \Lambda]$.

Пусть для $A \in \mathscr{P}(S)$ проекция r_A: $\mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(A)$ определена равенством

$$r_A(X) = X \cap A \quad \text{для всех} \quad X \in \mathscr{P}(S).$$

Ясно, что функция r_A непрерывна. Проекция r_A индуцирует отображение (также обозначаемое через r_A) из $\mathscr{M}(S)$ в $\mathscr{M}(A)$, определенное формулой

$$r_A(\mu)(\Omega) = \mu\left(r_A^{-1}(\Omega)\right) \quad \text{для всех} \quad \Omega \in \mathscr{F}(A), \quad \mu \in \mathscr{M}(S).$$

Заметим, что r_A отображает $\mathscr{S}(S)$ в $\mathscr{S}(A)$. Для $A \in \mathscr{P}(S)$ и $B \subset S \setminus A$ определим отображение r_A^B: $\mathscr{M}(S) \to \mathscr{M}(A)$ при помощи равенства

$$r_A^B(\mu)(\Omega) = \mu(\{X \in \mathscr{P}(S):\ X \cap A \in \Omega,\ X \cap (S \setminus A) = B\})$$

$$\text{для всех} \quad \Omega \in \mathscr{F}(A), \quad \mu \in \mathscr{M}(S).$$

Если $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, то справедливо соотношение

$$r_{S \setminus \Lambda}(\mu) = \sum_{A \subset \Lambda} r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu).$$

Наконец, если Y — топологическое пространство, то $C(Y)$ будет обозначать векторное пространство непрерывных функций из Y в $\mathbb{R}$.

Перейдем теперь к определению гиббсовского состояния на S. Для каждого $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ пусть $f^\Lambda \in C(\mathscr{P}(\Lambda) \times \mathscr{P}(S \setminus \Lambda))$; мы будем говорить, что $\{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ является *локальной спецификацией*, если

(i) $f^\Lambda(A, X) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$, $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$.

(ii) $\sum\limits_{A \subset \Lambda} f^\Lambda(A, X) = 1$ для всех $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$.

(iii) Если $\Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$, $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$ и $X \subset S \setminus \Lambda'$, то

$$f^{\Lambda'}(A \cup B, X) = f^\Lambda(A, B \cup X) \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda'}(C \cup B, X).$$

Пусть $\mathscr{V} = \{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ — локальная спецификация; мы будем говорить, что $\mu \in \mathscr{P}(S)$ — *гиббсовское состояние со спецификацией* $\mathscr{V}$, если для всех $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, $A \subset \Lambda$

$$r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(\mu).$$

Пусть $\mathscr{G}(\mathscr{V}) = \{\mu \in \mathscr{P}(S)$: μ является гиббсовским состоянием со спецификацией $\mathscr{V}\}$. Таким образом, μ принадлежит $\mathscr{G}(\mathscr{V})$, если для любых $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $A \subset \Lambda$ производная Радона — Никодима меры $r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu)$ по отношению к $r_{S \setminus \Lambda}(\mu)$ является функцией $f^\Lambda(A, \cdot)$ из локальной спецификации $\mathscr{V}$.

Функции f^Λ, задаваемые локальной спецификацией, в действительности есть не что иное, как условные вероятности, упомянутые в начале этой главы. Чтобы увидеть это, нам понадобятся следующие определения.

Если $A \in \mathscr{P}(S)$, то, согласно нашим предыдущим обозначениям, $\mathscr{F}(A)$ — борелевские подмножества компактного хаусдорфова пространства $\mathscr{P}(A)$; пусть $\bar{\mathscr{F}}(A)$ обозначает под-σ-алгебру в $\mathscr{F}(S)$, порожденную семейством

$$\{[B, \Lambda]\colon B \subset \Lambda \in \mathscr{C}(A)\}.$$

Ясно, что $\bar{\mathscr{F}}(A)$ состоит из тех элементов $\mathscr{F}(S)$ алгебры, которые имеют вид $\{X \cup B\colon X \in \Omega,\ B \subset S \setminus A\}$ для некоторого $\Omega \in \mathscr{F}(A)$. Легко видеть, что функция $g\colon \mathscr{P}(S) \to \mathbb{R}$ является $\bar{\mathscr{F}}(A)$-измеримой тогда и только тогда, когда существует измеримая функция $g'\colon \mathscr{P}(A) \to \mathbb{R}$, такая, что

$$g(x) = g'(X \cap A) \quad \text{для всех} \quad X \in \mathscr{P}(S)$$

Для $\mu \in \mathscr{P}(S)$, $\Omega \in \mathscr{F}(S)$ и $B \in \mathscr{P}(S)$ обозначим через $P_\mu[\Omega \mid \bar{\mathscr{F}}(B)]$ условную вероятность Ω (по отношению к μ) при условии $\bar{\mathscr{F}}(B)$, т. е. $P_\mu[\Omega \mid \bar{\mathscr{F}}(B)]$: $\mathscr{P}(S) \to \mathbb{R}$ является $\bar{\mathscr{F}}(B)$-измеримой функцией и для всех $\Omega' \in \bar{\mathscr{F}}(B)$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega'} P_\mu[\Omega \mid \bar{\mathscr{F}}(B)]\, d_\mu = \mu(\Omega' \cap \Omega).$$

Пусть теперь $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, $A \subset \Lambda$, а $g^\Lambda(A, \cdot)$: $\mathscr{P}(S \setminus \Lambda) \to \mathbb{R}$ является такой $\mathscr{F}(S \setminus \Lambda)$-измеримой функцией, что

$$P_\mu[[A, \Lambda] \mid \bar{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)] = g^\Lambda(A, (S \setminus \Lambda) \cap X) \quad \text{для всех} \quad X \in \mathscr{P}(S).$$

(Поскольку функция $P_\mu[[A, \Lambda] \mid \bar{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)]$ определена μ-п. в., то отсюда следует, что $g^\Lambda(A, \cdot)$ определена $r_{S \setminus \Lambda}(\mu)$-п. в.) Тогда если $B \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$, то

$$r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu)([B, \Lambda']) = \mu([A, \Lambda] \cap [B, \Lambda']) =$$

$$= \int_{[B, \Lambda']} P_\mu[[A, \Lambda] \mid \bar{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)]\, d\mu = \int_{[B, \Lambda']} g^\Lambda(A, X)\, dr_{S \setminus \Lambda}(\mu)(X).$$

(Заметим, что мы использовали $[B, \Lambda']$ для обозначения как элемента из $\mathscr{F}(S)$, так и элемента из $\mathscr{F}(S \setminus \Lambda)$.) Поэтому

$$r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu) = g^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(\mu);$$

следовательно, можно считать, что локальная спецификация определяет, какой должна быть условная вероятность

$$P_\mu[[A, \Lambda] \mid \bar{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)] \quad \text{для всех} \quad A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S).$$

Условия (i), (ii) и (iii), которые определяют локальную спецификацию, возникают естественным образом, поскольку имеет место

Предложение 5.1. *Пусть* $\mu \in \mathscr{P}(S)$ *с* $\mu([A, \Lambda]) > 0$ *для всех конечномерных цилиндров* $[A, \Lambda]$. *Для* $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ *пусть* $g^\Lambda(A, \cdot)$ *является производной Радона — Никодима меры* $r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu)$ *по отношению к* $r_{S \setminus \Lambda}(\mu)$. *Предположим, что мы можем выбрать* g^Λ *непрерывной, т. е.*

$$g^\Lambda \in C(\mathscr{P}(\Lambda) \times \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)).$$

Тогда $\{g^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ — *локальная спецификация.*

Доказательство. Пусть $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, а $u_1, u_2 \in C(\mathscr{P}(S \setminus \Lambda))$. Поскольку $\mu([A, B]) > 0$ для любого конечномерного цилиндра $[A, B]$, мы имеем, что $u_1 = u_2$ $r_{S \setminus \Lambda}(\mu)$-п. в. тогда и только тогда, когда $u_1(X) = u_2(X)$ для всех $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$. Таким образом, мы немедленно получаем, что

$$g^{\Lambda}(A, X) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad A \subset \Lambda, \ X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$$

и

$$\sum_{A \subset \Lambda} g^{\Lambda}(A, X) = 1 \quad \text{для всех} \quad X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda).$$

Пусть теперь $\Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$, $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$ и $E \subset F \subset \subset \mathscr{C}(S \setminus \Lambda')$. Тогда

$$\int\limits_{[E,F]} g^{\Lambda'}(A \cup B, X)\, dr_{S \setminus \Lambda'}(\mu)(X) = \int\limits_{[E,F]} dr^{A \cup B}_{S \setminus \Lambda'}(\mu)(X) =$$

$$= \mu([A \cup B \cup E, \Lambda' \cup F]) = \int\limits_{[E \cup B, F \cup (\Lambda' \setminus \Lambda)]} dr^{A}_{S \setminus \Lambda}(\mu)(Y) =$$

$$= \int\limits_{[E \cup B, F \cup (\Lambda' \setminus \Lambda)]} g^{\Lambda}(A, Y)\, dr_{S \setminus \Lambda}(\mu)(Y) =$$

$$= \int\limits_{[E \cup B, F \cup (\Lambda' \setminus \Lambda)]} g^{\Lambda}(A, Y) \sum_{C \subset \Lambda} dr^{C}_{S \setminus \Lambda}(\mu)(Y) =$$

$$= \int\limits_{[E,F]} g^{\Lambda}(A, B \cup X) \sum_{C \subset \Lambda} dr^{B \cup C}_{S \setminus \Lambda'}(\mu) X =$$

$$= \int\limits_{[E,F]} g^{\Lambda}(A, B \cup X) \sum_{C \subset \Lambda} g^{\Lambda'}(B \cup C, X)\, dr_{S \setminus \Lambda'}(\mu)(X).$$

Поэтому

$$g^{\Lambda'}(A \cup B, X) = g^{\Lambda}(A, B \cup X) \sum_{C \subset \Lambda} g^{\Lambda'}(B \cup C, X)$$

для $r_{S \setminus \Lambda'}(\mu)$-п. в. $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda')$ и, таким образом,

$$g^{\Lambda'}(A \cup B, X) = g^{\Lambda}(A, B \cup X) \sum_{C \subset \Lambda} g^{\Lambda'}(B \cup C, X)$$

для всех $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda')$. Следовательно, $\{g^{\Lambda}\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ — локальная спецификация. ■

Теперь мы покажем, что гиббсовское состояние с заданной спецификацией всегда существует (и значит, в частности, разрешим проблему единственности, которая была поставлена в гл. 4).

Предложение 5.2. *Пусть* $\mathscr{V} = \{f^{\Lambda}\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ — *локальная спецификация. Тогда* $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ *является непустым выпуклым компактным подмножеством в* $\mathscr{P}(S)$.

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ — выпуклое компактное множество (поскольку в нашем случае компактность совпадает с замкнутостью), поэтому нам надо только показать, что $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ не пусто. Пусть $\Lambda_n \in \mathscr{C}(S)$, где $\Lambda_n \uparrow S$, и пусть меры $\mu_n \in$

$\in \mathscr{P}(S)$ определены равенствами

$$\mu_n([A, \Lambda_n]) = f^{\Lambda_n}(A, \varnothing) \quad \text{для всех} \quad A \subset \Lambda_n,$$
$$\mu_n([\varnothing, x]) = 1 \quad \text{для всех} \quad X \not\subseteq \Lambda_n.$$

Выбирая подпоследовательность, мы можем предполагать, что существует мера $\mu \in \mathscr{P}(S)$, такая, что $\mu_n \to \mu$ (в слабой топологии) при $n \to \infty$. Пусть теперь $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $E \subset F \in \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$.

Тогда, если n таково, что $\Lambda_n \supset \Lambda \cup F$, имеем

$$r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu_n)([E, F]) = \sum_{B \subset \Lambda_n \setminus (\Lambda \cup F)} \mu_n([A \cup E \cup B, \Lambda_n]) =$$
$$= \sum_{B \subset \Lambda_n \setminus (\Lambda \cup F)} f^{\Lambda_n}(A \cup E \cup B, \varnothing).$$

Имеем также, что

$$\int_{[E, F]} f^\Lambda(A, X) dr_{S \setminus \Lambda}(\mu_n)(X) = \sum_{C \subset \Lambda} \int_{[E, F]} f^\Lambda(A, X) dr^C_{S \setminus \Lambda}(\mu_n)(X) =$$
$$= \sum_{C \subset \Lambda} \sum_{B \subset \Lambda_n \setminus (\Lambda \cup F)} f^\Lambda(A, E \cup B) \mu_n([C \cup E \cup B, \Lambda_n]) =$$
$$= \sum_{C \subset \Lambda} \sum_{B \subset \Lambda_n \setminus (\Lambda \cup F)} f^\Lambda(A, E \cup B) f^{\Lambda_n}(C \cup E \cup B, \varnothing).$$

Но

$$\sum_{C \subset \Lambda} f^\Lambda(A, E \cup B) f^{\Lambda_n}(C \cup E \cup B, \varnothing) f^{\Lambda_n}(A \cup E \cup B, \varnothing)$$

и, значит,

$$\int_{[E, F]} f^\Lambda(A, X) dr_{S \setminus \Lambda}(\mu_n)(X) = \sum_{B \subset \Lambda_n \setminus (\Lambda \cup F)} f^{\Lambda_n}(A \cup E \cup B, \varnothing) =$$
$$= r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu_n)([E, F]).$$

Устремляя n к ∞, получаем

$$r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu)([E, F]) = \int_{[E, F]} f^\Lambda(A, X) dr_{S \setminus \Lambda}(\mu)(X)$$

и, следовательно, $r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu) = f^\Lambda(A, \cdot) r_{S \setminus \Lambda}(\mu)$. Таким образом, $\mu \in \mathscr{G}(\mathscr{V})$, т. е. $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ — непусто. ∎

Будем говорить, что локальная спецификация $\mathscr{V} = \{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ *положительна*, если $f^\Lambda(A, X) > 0$ для всех $A \subset \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$. Заметим, что поскольку $\mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$ и $\mathscr{P}(\Lambda)$ компактны, то из положительности $\mathscr{V}$ вытекает для каждого $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ существование такого $\delta_\Lambda > 0$, что $f^\Lambda(A, X) \geqslant \delta_\Lambda$ для всех $A \subset \Lambda$ и $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$. Функции f^Λ, которые встречаются в статистической механике, обычно имеют вид экспоненты от потенциальной функции. Покажем, что любая положительная локальная спецификация может быть представлена в таком виде. Функция

$$V: \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$$

будет называться *потенциалом* на S, если $V(\varnothing) = 0$.

Предложение 5.3. *Пусть* $\mathscr{V} = \{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ — *положительная локальная спецификация. Тогда существует единственный потенциал* V *на* S, *такой, что если* $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, $A \subset \Lambda$ *и* $B \subset \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$, *то*

$$f^\Lambda(A, B) = Z_{\Lambda, B}^{-1} \exp V(A \cup B),$$

где

$$Z_{\Lambda, B} = \sum_{E \subset \Lambda} \exp V(E \cup B).$$

Доказательство. Легко видеть, что если потенциал V существует, то он единствен. Если $\Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ и $A \subset \Lambda$, то

$$f^{\Lambda'}(A, \varnothing) = f^\Lambda(A, \varnothing) \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda'}(C, \varnothing)$$

и, значит,

$$\frac{f^{\Lambda'}(A, \varnothing)}{f^{\Lambda'}(\varnothing, \varnothing)} = \frac{f^\Lambda(A, \varnothing)}{f^\Lambda(\varnothing, \varnothing)}.$$

Следовательно, мы можем определить функцию $W: \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$, полагая

$$W(A) = \frac{f^\Lambda(A, \varnothing)}{f^\Lambda(\varnothing, \varnothing)}$$

для любого $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda \supset A$. Поскольку $W(A) > 0$, мы можем определить $V: \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$, считая

$$V(A) = \log W(A) \quad \text{для} \quad A \in \mathscr{C}(S).$$

Функция V является потенциалом, так как $W(\varnothing) = 1$. Теперь для

$$\Lambda \in \mathscr{C}(S), \quad B \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$$

пусть

$$Z_{\Lambda, B} = \sum_{A \subset \Lambda} W(A \cup B).$$

Пусть $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, $A \subset \Lambda$, $B \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$; выберем $\Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda \cup B \subset \Lambda'$. Тогда

$$\frac{f^\Lambda(A, B) Z_{\Lambda, B}}{W(A \cup B)} = \frac{f^\Lambda(A, B)}{W(A \cup B)} \sum_{E \subset \Lambda} W(E \cup B) =$$

$$= \frac{f^\Lambda(A, B)}{f^{\Lambda'}(A \cup B, \varnothing)} \sum_{E \subset \Lambda} f^{\Lambda'}(E \cup B, \varnothing) = \frac{f^{\Lambda'}(A \cup B, \varnothing)}{f^{\Lambda'}(A \cup B, \varnothing)} = 1.$$

Поэтому

$$f^\Lambda(A, B) = Z_{\Lambda, B}^{-1} W(A \cup B) = Z_{\Lambda, B}^{-1} \exp V(A \cup B),$$

$$Z_{\Lambda, B} = \sum_{E \subset \Lambda} \exp V(E \cup B). \ \blacksquare$$

Если $\mathscr{V} = \{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ — положительная локальная спецификация, а V — потенциал, задаваемый предложением 5.3, то будем называть V *потенциалом, ассоциированным с* $\mathscr{V}$. Будем также писать $\mathscr{G}_V$ вместо $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ и называть $\mathscr{G}_V$ *множеством гиббсовских состояний с потенциалом* V. Потенциал V на S будет называться *непрерывным*, если при любом данном $A \in \mathscr{C}(S)$ и $\varepsilon > 0$ существует множество $\Lambda \in \mathscr{C}(S \setminus A)$, такое, что если B_1, $B_2 \in \mathscr{C}(S \setminus A)$ с $B_1 \supset \Lambda$, $B_2 \supset \Lambda$, то

$$|(V(A \cup B_1) - V(B_1) - (V(A \cup B_2) - V(B_2))| < \varepsilon.$$

Конечно, это означает только, что для данного $A \in \mathscr{C}(S)$ найдется функция $g \in C(\mathscr{P}(S \setminus A))$, для которой

$$V(A \cup B) - V(B) = g(B) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathscr{C}(S \setminus A).$$

(Функция g определена однозначно, поскольку $\mathscr{C}(S \setminus A)$ плотно в $\mathscr{P}(S \setminus A)$.) Если V — потенциал, ассоциированный с $\mathscr{V}$, то V — непрерывный потенциал, поскольку

$$V(A \cup B) - V(B) = \log \left[\frac{f^A(A, B)}{f^A(\varnothing, B)}\right] \quad \text{для всех} \quad B \in \mathscr{C}(S \setminus A)..$$

Обращение этого утверждения также верно.

Предложение 5.4. *Пусть V — непрерывный потенциал на S. Тогда существует единственная положительная локальная спецификация*

$$\mathscr{V} = \{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)},$$

такая, что V является потенциалом, ассоциированным с $\mathscr{V}$

Доказательство. Если $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $B \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$, то мы должны определить

$$f^{\Lambda}(A, B) = Z_{\Lambda, B}^{-1} \exp V(A \cup B)$$

с

$$Z_{\Lambda, B} = \sum_{E \subset \Lambda} \exp V(E \cup B).$$

Теперь можно записать

$$f^{\Lambda}(A, B) = \frac{\exp [V(A \cup B) - V(B)]}{\sum\limits_{E \subset \Lambda} \exp [V(E \cup B) - V(B)]},$$

где V является непрерывным потенциалом; стало быть, $f^{\Lambda}(A, \cdot)$ продолжается единственным образом до непрерывной функции на $\mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$. Несложно проверить, что $\{f^{\Lambda}\}_{\Lambda \subset \mathscr{C}(S)}$ является положительной локальной спецификацией. ■

Если V — потенциал на S, то можно определить функцию J_V: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ равенством

$$J_V(A) = \sum_{X \subset A} (-1)^{|A \setminus X|} V(X).$$

Очевидно, что J_V является потенциалом на S, который будем называть *потенциалом взаимодействия*, соответствующим V. Легко проверяется, что

$$V(A) = \sum_{B \subset A} J_V(B) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathscr{C}(S).$$

Обратно, для данного потенциала Φ на S обозначим через U_Φ потенциал, определяемый равенством

$$U_\Phi(A) = \sum_{B \subset A} \Phi(B).$$

Тогда Φ — потенциал взаимодействия, соответствующий U_Φ, и

$$\Phi(A) = \sum_{X \subset A} (-1)^{|A \setminus X|} U_\Phi(X).$$

Пусть $D(S)$ обозначает множество локальных спецификаций на S, а $D_+(S)$ — множество положительных локальных спецификаций. Обозначим через $H(S)$ множество непрерывных потенциалов на S. Мы можем рассматривать $H(S)$ как вещественное векторное пространство и в силу предложений 5.3 и 5.4 отождествлять $H(S)$ и $D_+(S)$.

Пусть $\mathscr{V} \in D(S)$ (соответственно $V \in H(S)$); если $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ (соответственно $\mathscr{G}_V$) содержит более чем одно состояние, то будем говорить, что для $\mathscr{V}$ (соответственно V) имеет место фазовый переход. Оставшаяся часть книги в основном посвящена нахождению условий, при которых может или не может иметь места фазовый переход.

Если $\mu \in \mathcal{P}(S)$, то *корреляционная функция* для μ есть функция ρ: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$\rho(A) = \mu([A, A]) \quad \text{для} \quad A \in \mathscr{C}(S).$$

Таким образом, $\rho(A) = \mu(\{X \in \mathcal{P}(S): X \supset A\})$. Если $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$, то [1])

$$\mu([A, \Lambda]) = \sum_{E \subset \Lambda \setminus A} (-1)^{|E|} \rho(A \cup E)$$

(где $|E|$ обозначает число точек в E). Следовательно, ρ определяет $\mu([A, \Lambda])$ для каждого конечномерного цилиндра $[A, \Lambda]$, и, следовательно, ρ определяет μ. Обычно оказывается, что работать с ρ удобнее, нежели с μ.

Пусть $\mathscr{V} \in D(S)$ с $\mathscr{V} = \{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$; будем считать отныне, что $\mathscr{V}$ фиксировано, и определять объекты, зависящие от $\mathscr{V}$, используя обозначения, в которых $\mathscr{V}$ не фиксируется (надеемся, что это не приведет к недоразумениям). Например, если $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $X \in \mathcal{P}(S \setminus \Lambda)$, то мы определяем $\pi_\Lambda^X \in \mathcal{P}(\Lambda)$ равенством

$$\pi_\Lambda^X([A, \Lambda]) = f^\Lambda(A, X) \quad \text{для} \quad A \subset \Lambda.$$

Будем называть π_Λ^X *гиббсовским состоянием на* Λ (*со спецификацией* $\mathscr{V}$) *с граничными условиями* X. Пусть ρ_Λ^X обозначает корреляционную функцию для π_Λ^X, тогда ρ_Λ^X: $\mathscr{C}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\rho_\Lambda^X(A) = \sum_{A \subset B \subset \Lambda} f^\Lambda(B, X) \quad \text{для} \quad A \subset \Lambda.$$

Предложение 5.5. *Пусть* $\mu \in \mathcal{G}(\mathscr{V})$ *и имеет корреляционную функцию* ρ. *Имеем*:

(i) *Если* $A \subset B \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$, *то*

$$\mu([A, B]) = \int \pi_\Lambda^X([A, B])\, dr_{S \setminus \Lambda}(\mu)(X).$$

(ii) *Если* $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$, *то*

$$\rho(A) = \int \rho_\Lambda^X(A)\, dr_{S \setminus \Lambda}(\mu)(X).$$

(iii) *Если* $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$, *то*

$$\min_{X \in \mathcal{P}(S \setminus \Lambda)} \rho_\Lambda^X(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \min_{X \in \mathcal{P}(S \setminus \Lambda)} \rho_\Lambda^X(A).$$

---

[1]) Эту формулу нетрудно доказать индукцией по числу точек в $\Lambda \setminus A$.— *Прим. перев.*

Доказательство. Очевидно, что (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii), а (i) проверяется несложным вычислением. ■

Часть (iii) будет использована для получения оценок для корреляционных функций гиббсовских состояний. Для $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ определим функции $\rho_\Lambda^+ \colon \mathscr{C}(\Lambda) \to \mathbb{R}$, $\rho_\Lambda^- \colon \mathscr{C}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ с

$$\rho_\Lambda^+(A) = \max_{X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)} \rho_\Lambda^X(A),$$

$$\rho_\Lambda^-(A) = \min_{X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)} \rho_\Lambda^X(A).$$

(Заметим, что в общем случае ρ_Λ^+ и ρ_Λ^- не являются корреляционными функциями, поскольку конфигурация $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$, на которой достигается максимум или минимум, зависит от A.)

Предложение 5.6. *Функция $\rho_\Lambda^+(A)$ — возрастающая по Λ, т. е. если $A \subset \Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$, то $\rho_{\Lambda'}^+(A) \leqslant \rho_\Lambda^+(A)$. Аналогично, $\rho_\Lambda^-(A)$ — убывающая по Λ функция.*

Доказательство. Пусть $A \subset \Lambda \subset \mathscr{C}(S)$ и $X \notin \Lambda$. Ясно, что достаточно проверить неравенства: $\rho_{\Lambda \cup x}^+(A) \leqslant \rho_\Lambda^+(A)$ и $\rho_{\Lambda \cup x}^-(A) \geqslant \rho_\Lambda^-(A)$. Если

$$X \in \mathscr{C}(S - (\Lambda \cup x)),$$

то

$$\begin{aligned}
\rho_{\Lambda \cup x}^X(A) &= \sum_{A \subset B \subset \Lambda \cup x} f^{\Lambda \cup x}(B, X) = \\
&= \sum_{A \subset B \subset \Lambda} [f^{\Lambda \cup x}(B, X) + f^{\Lambda \cup x}(B \cup x, X)] = \\
&= \sum_{A \subset B \subset \Lambda} \Big[f^\Lambda(B, X) \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda \cup x}(C, X) + \\
&\quad + f^\Lambda(B, X \cup x) \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda \cup x}(C \cup x, X) \Big] = \\
&= \rho_\Lambda^X(A) \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda \cup x}(C, X) + \rho_\Lambda^{X \cup x}(A) \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda \cup x}(C \cup x, X).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\rho_{\Lambda \cup x}^X(A) \leqslant \rho_\Lambda^+(A) \Big[\sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda \cup x}(C, X) + \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda \cup x}(C \cup x, X) \Big] =$$

$$= \rho_\Lambda^+(A) \sum_{C \subset \Lambda \cup x} f^{\Lambda \cup x}(C, X) = \rho_\Lambda^+(A)$$

и, значит, $\rho_{\Lambda \cup x}^+(A) \leqslant \rho_\Lambda^+(A)$. В точности таким же образом получаем, что $\rho_{\Lambda \cup x}^-(A) \geqslant \rho_\Lambda^-(A)$. ■

Определим теперь функции $\rho^+ \colon \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$, $\rho^- \colon \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$:

$$\rho^+(A) = \lim_{\Lambda \uparrow S} \rho_\Lambda^+(A),$$

$$\rho^-(A) = \lim_{\Lambda \uparrow S} \rho_\Lambda^-(A),$$

конечно, в силу предложения 5.6 эти пределы существуют. Если ρ — корреляционная функция для $\mu \in \mathcal{G}(\mathcal{V})$, то из предложения 5.5 имеем, что

$$\rho^-(A) \leqslant \rho(A) \leqslant \rho^+(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{C}(S).$$

Поэтому если $\rho^- = \rho^+$, то фазовый переход для $\mathcal{V}$ происходить не может. Обращение этого результата также справедливо, и, чтобы его доказать, нам потребуется

Лемма 5.1. *Пусть* $\Lambda_n \in \mathcal{C}(S)$, *где* $\Lambda_n \uparrow S$ *и* $X_n \in \mathcal{P}(S \setminus \Lambda_n)$. *Определим* $\mu_n \in \mathcal{P}(S)$ *равенствами*

$$\begin{aligned} \mu_n([A, \Lambda_n]) = f^{\Lambda_n}(A, X_n) &\quad \textit{для всех} \quad A \subset \Lambda_n, \\ \mu_n([x, x]) = 1 &\quad \textit{для всех} \quad x \in X_n, \\ \mu_n([\varnothing, x]) = 1 &\quad \textit{для всех} \quad x \notin \Lambda_n \cup X_n. \end{aligned}$$

Предположим, что $\mu_n \to \mu$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $\mu \in \mathcal{G}(\mathcal{V})$.

Доказательство. Доказательство почти такое же, как и в предложении 5.2, и поэтому предоставляется читателю. ■

Предложение 5.7. *Если* $A \in \mathcal{C}(S)$, *то существуют* μ_1, $\mu_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{V})$, *такие, что если* ρ_1 (*соответственно* ρ_2) *является корреляционной функцией для* μ_1 (*соответственно для* μ_2), *то* $\rho_1(A) = \rho^+(A)$ *и* $\rho_2(A) = \rho^-(A)$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{C}(S)$, выберем $\Lambda_n \in \mathcal{C}(S)$ с $\Lambda_n \supset A$ и $\Lambda_n \uparrow S$. Пусть $X_n \in \mathcal{P}(S \setminus \Lambda_n)$ таково, что $\rho_{\Lambda_n}^{X_n}(A) = \rho_{\Lambda_n}^{+}(A)$, а $\mu_n \in \mathcal{P}(S)$ определены, как в лемме 5.1. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что существует такое $\mu \in \mathcal{P}(S)$, что $\mu_n \to \mu$ при $n \to \infty$. В силу леммы 5.1, имеем, что $\mu \in \mathcal{G}(\mathcal{V})$. Пусть ρ — корреляционная функция для μ, тогда

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n([A, A]) = \lim_{n\to\infty} \rho_{\Lambda_n}^{X_n}(A) = \lim_{n\to\infty} \rho_{\Lambda_n}^{+}(A) = \rho^+(A).$$

Вторая часть предложения получается таким же образом. ■

Объединяя предложения 5.5 и 5.7, немедленно получаем следующий результат.

Теорема 5.1. *Если* $\mathcal{V} \in D(S)$, *то фазовый переход для* $\mathcal{V}$ *происходит тогда и только тогда, когда* $\rho^+ = \rho^-$.

Замечания. Как указывалось в гл. 4, определение гиббсовского состояния, которое здесь используется, было дано Добрушиным (1968b, 1968c, 1969).

6. УРАВНЕНИЯ КИРКВУДА — ЗАЛЬЦБУРГА

Пусть $V \in H(S)$ и $\mu \in \mathcal{G}_V$ с корреляционной функцией ρ. Мы покажем, что ρ удовлетворяет системе уравнений, которые называются уравнениями Кирквуда — Зальцбурга. Для некоторых потенциалов V нам удастся показать, что уравнения Кирквуда — Зальцбурга имеют по крайней мере одно решение, и, таким образом, фазовый переход для этих потенциалов не имеет места. Вывод уравнений Кирквуда — Зальцбурга основан на следующей формуле частичного суммирования.

Лемма 6.1. *Пусть* $\Lambda \in \mathcal{C}(S)$ *и* f, g: $\mathcal{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\sum_{A \subset \Lambda} f(A) g(A) = \sum_{A \subset \Lambda} \Big[\sum_{X \subset A} (-1)^{|A \setminus X|} f(X)\Big]\Big[\sum_{A \subset Y \subset \Lambda} g(Y)\Big].$$

Доказательство. Определим функцию

$$\tau_{X,Y}(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } X \subset A \subset Y, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{A \subset \Lambda} \Big[\sum_{X \subset A} (-1)^{|A \setminus X|} f(X)\Big]\Big[\sum_{A \subset Y \subset A} g(Y)\Big] =$$

$$= \sum_{A \subset \Lambda} \sum_{X \subset \Lambda} \sum_{Y \subset \Lambda} (-1)^{|A \setminus X|} f(X) g(Y) \tau_{X,Y}(A) =$$

$$= \sum_{X \subset \Lambda} \sum_{Y \subset \Lambda} f(X) g(Y) \sum_{X \subset A \subset Y} (-1)^{|A \setminus X|} = \sum_{X \subset \Lambda} f(X) g(X),$$

так как $\sum_{X \subset A \subset Y} (-1)^{|A \setminus X|} = 1$, если $X = Y$, и 0 в противном случае. ■

Пусть $\mathcal{V} \in D_+(S)$ с $\mathcal{V} = \{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{C}(S)}$, и $V \in H(S)$ — потенциал, связанный с $\mathcal{V}$. В этом случае имеет место следующая

Теорема 6.1. *Пусть* $x \in \Lambda \in \mathcal{C}(S)$, *а* $\mu \in \mathcal{G}(\mathcal{V})$ *с корреляционной функцией* ρ. *Тогда*

$$\rho(\Lambda) = \lim_{\Lambda' \to S} \sum_{B \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \Big[\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp h(X)\Big] \times$$

$$\times [\rho((\Lambda \setminus x) \cup B) - \rho(\Lambda \cup B)],$$

где функция $h \in C(\mathcal{P}(S \setminus \Lambda))$ *определена соотношением* $h(X) = V(\Lambda \cup X) - V((\Lambda \setminus x) \cup X)$ *для* $X \in \mathcal{C}(S \setminus \Lambda)$.

Доказательство. Имеют место равенства

$$\rho(\Lambda)=\int dr^{\Lambda}_{S\setminus\Lambda}(\mu)=\int f^{\Lambda}(\Lambda,\ X)\,dr_{S\setminus\Lambda}(\mu)(X)=$$
$$=\int \exp h(X)\,f^{\Lambda}(\Lambda\setminus x,\ X)\,dr_{S\setminus\Lambda}(\mu)(X)=$$
$$=\int \exp h(X)\,dr^{\Lambda\setminus x}_{S\setminus\Lambda}(\mu)(X).$$

Но $h\in C(\mathscr{P}(S\setminus\Lambda))$, поэтому

$$\rho(\Lambda)=\lim_{\Lambda'\to S}\sum_{B\subset\Lambda'\setminus\Lambda}\exp h(B)\,r^{\Lambda\setminus x}_{S\setminus\Lambda}(\mu)([B,\ \Lambda'\setminus\Lambda])=$$
$$=\lim_{\Lambda'\to S}\sum_{B\subset\Lambda'\setminus\Lambda}\exp h(B)\,\mu([(\Lambda\setminus x)\cup B,\ \Lambda']).$$

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{B\subset Y\subset\Lambda'\setminus\Lambda}\mu([(\Lambda\setminus x)\cup Y,\ \Lambda'])=\rho((\Lambda\setminus x)\cup B)-\rho(\Lambda\cup B).$$

Следовательно, по лемме 6.1, справедливо соотношение

$$\rho(\Lambda)=\lim_{\Lambda'\to S}\sum_{B\subset\Lambda'\setminus\Lambda}\Big[\sum_{X\subset B}(-1)^{|B\setminus X|}\exp h(X)\Big]\times$$
$$\times[\rho((\Lambda\setminus x)\cup B)-\rho(\Lambda\cup B)]. \blacksquare$$

Для $x\in\Lambda\in\mathscr{C}(S)$ определим отображение $K_x(\Lambda,\ \cdot)$: $\mathscr{C}(S\setminus(\Lambda\setminus x))\to\mathbb{R}$ равенством

$$K_x(\Lambda,B)=\sum_{X\subset B\setminus x}(-1)^{|B\setminus X|}\exp[V(\Lambda\cup X)-V((\Lambda\setminus x)\cup X)].$$

Тогда из теоремы 6.1 следует, что

$$\rho(\Lambda)=\lim_{\Lambda'\to S}\sum_{B\subset\Lambda'\setminus(\Lambda\setminus x)}K_x(\Lambda,\ B)\,\rho((\Lambda\setminus x)\cup B).$$

Эти уравнения (для любых $x\in\Lambda\in\mathscr{C}(S)$) называются *уравнениями Кирквуда — Зальцбурга.*

Предложение 6.1. *Предположим, что существует $\alpha<1$, такое, что для любых $x\in\Lambda\in\mathscr{C}(S)$ справедливо неравенство*

$$\lim_{\Lambda'\to S}\sum_{B\subset\Lambda'\setminus(\Lambda\setminus x)}|K_x(\Lambda,\ B)|\leqslant\alpha.$$

Тогда для потенциала V фазового перехода не происходит.

Доказательство. Пусть $\mu_1,\ \mu_2\in\mathscr{G}_V$ с корреляционными функциями $\rho_1,\ \rho_2$, и пусть

$$m=\sup_{A\in\mathscr{C}(S)}|\rho_1(A)-\rho_2(A)|.$$

(Таким образом, $0 \leqslant m \leqslant 1$.) Возьмем такое $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, что $\Lambda \neq \varnothing$, и пусть $x \in \Lambda$. Тогда

$$\rho_1(\Lambda) - \rho_2(\Lambda) = \lim_{\Lambda' \to S} \sum_{B \subset \Lambda' \setminus (\Lambda \setminus x)} K_x(\Lambda, B)\left(\rho_1((\Lambda \setminus x) \cup B) - \rho_2((\Lambda \setminus x) \cup B)\right)$$

и, таким образом,

$$|\rho_1(\Lambda) - \rho_2(\Lambda)| \leqslant \lim_{\Lambda' \to S} \sum_{B \subset \Lambda' \setminus (\Lambda \setminus x)} |K_x(\Lambda, B)|\, m \leqslant \alpha m.$$

Следовательно, $\sup\limits_{\Lambda \in \mathscr{C}(S),\, \Lambda \neq \varnothing} |\rho_1(\Lambda) - \rho_2(\Lambda)| \leqslant \alpha m$. Но $\rho_1(\varnothing) = \rho_2(\varnothing) = 1$ и, таким образом,

$$m = \sup_{\Lambda \in \mathscr{C}(S),\, \Lambda \neq \varnothing} |\rho_1(\Lambda) - \rho_2(\Lambda)| \leqslant \alpha m.$$

Отсюда следует, что $m = 0$, т. е. $\rho_1 = \rho_2$, и, следовательно, для потенциала V фазового перехода не происходит. ■

Теперь, конечно, мы должны найти условия на потенциал V, при которых выполняются требования предложения 6.1. Для этой цели весьма полезной оказывается следующая простая лемма.

Лемма 6.2. *Пусть* $J\colon \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$. *Определим функцию* $W\colon \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ *равенством*

$$W(A) = \sum_{X \subset A} J(X) \quad \text{для} \quad A \in \mathscr{C}(S).$$

Тогда для любого $B \in \mathscr{C}(S)$ *с* $B \neq \varnothing$

$$\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp W(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{\substack{Y_1, \ldots, Y_n \subset B \\ Y_1 \cup \ldots \cup Y_n = B}} J(Y_1) \ldots J(Y_n) \right].$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp W(X) = \sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\left[\sum_{Y \subset X} J(Y)\right] =$$

$$= \sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{Y_1 \subset X} \ldots \sum_{Y_n \subset X} J(Y_1) \ldots J(Y_n)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{Y_1 \subset B} \ldots \sum_{Y_n \subset B} J(Y_1) \ldots J(Y_n) \sum_{Y_1 \cup \ldots \cup Y_n \subset X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{\substack{Y_1, \ldots, Y_n \subset B \\ Y_1 \cup \ldots \cup Y_n = B}} J(Y_1) \ldots J(Y_n) \right]. \quad ■$$

Немедленными следствиями этой леммы являются два факта: во-первых, если $J(X) \geqslant 0$ для любых $X \in \mathscr{C}(S)$, то $\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\left[\sum_{Y \subset X} J(Y)\right] \geqslant 0$ для всех $B \in \mathscr{C}(S)$; и, во-вторых, для любого $J\colon \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\left[\sum_{Y \subset X} J(Y)\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\left[\sum_{Y \subset X} |J(Y)|\right].$$

Теорема 6.2. *Предположим, что существует* $\alpha < 1$, *такое, что*

$$J_V(\{x\}) + \sum_{\substack{\varnothing \neq A \in \mathscr{C}(S),\\ x \notin A}} |J_V(A \cup x)| \leqslant \log\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

для всех $x \in S$. *Тогда для потенциала* V *фазового перехода не происходит.*

Доказательство. Пусть $x \in \Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ и $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$. Если $X \subset B$, то

$$V(\Lambda \cup X) - V((\Lambda \setminus x) \cup X) = \sum_{Y \subset \Lambda \cup X} J_V(Y) - \sum_{Y \subset (\Lambda \setminus x) \cup X} J_V(Y) =$$
$$= \sum_{Y \subset (\Lambda \setminus x) \cup X} J_V(Y \cup x) = \sum_{Y \subset X} \sum_{E \subset (\Lambda \setminus x)} J_V(E \cup x \cup Y) =$$
$$= \sum_{E \subset (\Lambda \setminus x)} J_V(E \cup x) + \sum_{Y \subset X} J(Y),$$

где

$$J(Y) = \begin{cases} \sum\limits_{E \subset (\Lambda \setminus x)} J_V(E \cup x \cup Y), & \text{если} \quad Y \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если} \quad Y = \varnothing. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\left[V(\Lambda \cup X) - V((\Lambda \setminus x) \cup X)\right]\right| =$$
$$= \exp\left[\sum_{E \subset (\Lambda \setminus x)} J_V(E \cup x)\right] \left|\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\left(\sum_{Y \subset X} J(Y)\right)\right|,$$

и по лемме 6.2 имеем, что

$$\left|\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\left(\sum_{Y \subset X} J(Y)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\left(\sum_{Y \subset X} |J|(Y)\right),$$

где

$$|J|(Y) = \begin{cases} \sum\limits_{E \subset (\Lambda \setminus x)} |J_V(E \cup x \cup Y)|, & \text{если} \quad Y \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если} \quad Y = \varnothing. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|K_x(\Lambda, B)| \leqslant$$
$$\leqslant \exp\Big[\sum_{E \subset (\Lambda \setminus x)} J_V(E \cup x)\Big] \sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\Big(\sum_{Y \subset X} |J|(Y)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{X \subsetneq B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp\Big[\sum_{\varnothing \neq Y \subset (\Lambda \setminus x) \cup X} |J_V(Y \cup x)| + J_V(\{x\})\Big].$$

Заметим, что если W: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ является произвольной функцией, то

$$\sum_{B \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp W(X) =$$
$$= \sum_{X \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \exp W(X) \sum_{X \subset B \subset \Lambda' \setminus \Lambda} (-1)^{|B \setminus X|} = \exp W(\Lambda' \setminus \Lambda).$$

Следовательно, имеют место оценки

$$\sum_{B \subset \Lambda' \setminus \Lambda} |K_x(\Lambda, B)| \leqslant \exp\Big[J_V(\{x\}) + \sum_{\varnothing \neq Y \subset \Lambda' \setminus x} |J_V(Y \cup x)|\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \exp\Big[J_V(\{x\}) + \sum_{\substack{\varnothing \neq A \in \mathscr{C}(S), \\ x \notin A}} |J_V(A \cup x)|\Big].$$

Таким образом,

$$\sum_{B \subset \Lambda' \setminus (\Lambda \setminus x)} |K_x(\Lambda, B)| = 2 \sum_{B \subset \Lambda' \setminus \Lambda} |K_x(\Lambda, B)| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \exp\Big[J_V(\{x\}) + \sum_{\substack{\varnothing \neq A \in \mathscr{C}(S), \\ x \notin A}} |J_V(A \cup x)|\Big] \leqslant \alpha,$$

откуда следует, в силу предложения 6.1, что для потенциала V фазовый переход не может иметь места. ■

Заметим, что применение теоремы 6.2 требует отрицательности $J_V(\{x\})$ для всех $x \in S$ (фактически должно выполняться неравенство $J_V(\{x\}) < -\log 2$ для любых $x \in S$). В следующей главе мы покажем, что эта теорема может быть приспособлена к случаю положительных $J_V(\{x\})$. Случаи применимости теоремы 6.2 соответствуют тем ситуациям в классической статистической механике, в которых фазовый переход не имеет места. Так, например, условие малости величины

$$\sum_{\substack{\varnothing \neq A \in \mathscr{C}(S), \\ x \notin A}} |J_V(A \cup x)|$$

для всех $x \in S$ означает, что взаимодействия в соответствующей физической системе являются слабыми. Случай отрицательных $J_V(\{x\})$, когда значение $|J_V(\{x\})|$ велико для всех $x \in S$, соответствует системе, находящейся в сильном внешнем поле. В заключение отметим, что при замене V на $t^{-1}V$ (для $t > 0$) параметр t имеет смысл температуры системы и, следовательно, теорема 6.2 утверждает, что при высоких температурах фазовые переходы отсутствуют.

Замечания. Тот факт, что корреляционная функция гиббсовского состояния должна удовлетворять уравнениям типа Кирквуда — Зальцбурга, был впервые отмечен Майером (1947). Использованный здесь метод заимствован из работы Лэнфорда и Рюэля (1969), посвященной парным потенциалам.

7. ИНВОЛЮЦИИ НА $\mathscr{P}(S)$

В предыдущих двух главах объектом изучения были некоторые вероятностные меры на $\mathscr{P}(S)$. Очевидна следующая интерпретация: $X \in \mathscr{P}(S)$ описывает тот случай, когда частицы (или некоторые другие объекты) расположены во всех точках множества X, а в точках множества $S \setminus X$ нет частиц. Выбрав топологию в $\mathscr{P}(S)$, мы рассматриваем $\mathscr{P}(S)$ как пространство $\{0, 1\}^S$, при этом в $\{0, 1\}^S$ нет существенного различия между 0 и 1, поскольку в данном случае — это просто обозначения. Выясним, что же произойдет, если поменять местами 0 и 1 для определенных точек S.

Пусть $R \subset S$; мы поменяем местами 0 и 1 для всех $x \in R$ и, таким образом, рассмотрим преобразование τ_R: $\mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(S)$, определяемое как

$$\tau_R(A) = (A \cap (S \setminus R)) \cup (R \setminus A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathscr{P}(S).$$

Очевидно, что τ_R является инволюцией (т. е. $\tau_R(\tau_R(A)) = A$ для всех $A \in \mathscr{P}(S)$), что и обусловило название главы. Нас будет в основном интересовать случай, когда $R = S$, т. е. когда 0 и 1 поменялись местами. Отметим, что

$$\tau_R([A, \Lambda]) = [\tau_R(A) \cap \Lambda, \Lambda]$$

и, таким образом, τ_R является гомеоморфизмом. Пусть τ_R индуцирует отображение

$$\tau_R\colon \mathscr{M}(S) \to \mathscr{M}(S)$$

следующим образом: $\tau_R(\mu)(\Omega) = \mu(\tau_R(\Omega))$ для всех $\Omega \in \mathscr{F}(S)$, $\mu \in \mathscr{M}(S)$.

Легко видеть, что τ_R является гомеоморфизмом из $\mathscr{M}(S)$ в $\mathscr{M}(S)$ и отображает $\mathscr{S}(S)$ на $\mathscr{S}(S)$; как и раньше, τ_R — инволюция.

Для $A \in \mathscr{P}(S)$ определим отображение τ_R^A: $\mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A)$ с

$$\tau_R^A(B) = \tau_R(B) \cap A \quad \text{для любых} \quad B \in \mathscr{P}(A).$$

Тогда τ_R^A является гомеоморфизмом из $\mathscr{P}(A)$ в $\mathscr{P}(A)$, и если $A_1, A_2 \in \mathscr{P}(S)$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$, то

$$\tau_R^{A_1 \cup A_2}(B_1 \cup B_2) = \tau_R^{A_1}(B_1) \cup \tau_R^{A_2}(B_2).$$

Предложение 7.1. *Пусть* $\mathscr{V} \in D(S)$ *с* $\mathscr{V} = \{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$, $R \in \mathscr{P}(S)$; *определим* $\mathscr{V}_R = \{g^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ *следующим образом:* $g^\Lambda(A, X) = f^\Lambda(\tau_R^\Lambda(A), \tau_R^{S\setminus\Lambda}(X))$ *для* $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$, $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$. *Тогда* $\mathscr{V}_R \in D(S)$, *и если* $\mu \in \mathscr{G}(\mathscr{V})$, *то* $\tau_R(\mu) \in \mathscr{G}(\mathscr{V}_R)$.

Доказательство. Легко проверить, что

$$g^\Lambda \in C(\mathscr{P}(\Lambda) \times \mathscr{P}(S \setminus \Lambda))$$

и, конечно же, $g^\Lambda(A, X) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{P}(\Lambda)$, $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$. Имеем также

$$\sum_{A \subset \Lambda} g^\Lambda(A, X) = 1 \quad \text{для всех} \quad X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda),$$

так как τ_R^Λ является просто перестановкой множества $\mathscr{P}(\Lambda)$. Пусть теперь $\Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$, $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$ и $X \subset S \setminus \Lambda'$. Тогда

$$\begin{aligned} g^{\Lambda'}(A \cup B, X) &= f^{\Lambda'}(\tau_R^{\Lambda'}(A \cup B), \tau_R^{S\setminus\Lambda'}(X)) = \\ &= f^{\Lambda'}(\tau_R^\Lambda(A) \cup \tau_R^{\Lambda'\setminus\Lambda}(B), \tau_R^{S\setminus\Lambda'}(X)) = \\ &= f^\Lambda(\tau_R^\Lambda(A), \tau_R^{\Lambda'\setminus\Lambda}(B) \cup \tau_R^{S\setminus\Lambda'}(X)) \times \\ &\times \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda'}(C \cup \tau_R^{\Lambda'\setminus\Lambda}(B), \tau_R^{S\setminus\Lambda'}(X)) = \end{aligned}$$

$$= f^\Lambda(\tau_R^\Lambda(A), \tau_R^{S\setminus\Lambda}(B \cup X)) \sum_{C \subset \Lambda} f^{\Lambda'}(\tau_R^\Lambda(C) \cup \tau_R^{\Lambda'\setminus\Lambda}(B), \tau_R^{S\setminus\Lambda'}(X)) =$$

$$= g^\Lambda(A, B \cup X) \sum_{C \subset \Lambda} g^{\Lambda'}(C \cup B, X).$$

Следовательно, $\mathscr{V}_R \in D(S)$. Пусть $\mu \in \mathscr{G}(\mathscr{V})$ и $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$, $E \subset F \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$. Тогда

$$\begin{aligned} & r_{S\setminus\Lambda}^A(\tau_R(\mu))([E, F])\, \tau_R(\mu)([A \cup E, \Lambda \cup F]) = \\ &= \mu([\tau_R^\Lambda(A) \cup \tau_R^F(E), \Lambda \cup F]) = \\ &= r_{S\setminus\Lambda}^{\tau_R^\Lambda(A)}(\mu)([\tau_R^F(E), F]) = \\ &= \int\limits_{[\tau_R^F(E), F]} f^\Lambda(\tau_R^\Lambda(A), X)\, dr_{S\setminus\Lambda}(\mu)(X) = \\ &= \int\limits_{[E, F]} f^\Lambda(\tau_R^\Lambda(A), \tau_R^{S\setminus\Lambda}(Y))\, dr_{S\setminus\Lambda}(\mu)(\tau_R^{S\setminus\Lambda}(Y)) = \\ &= \int\limits_{[E, F]} f^\Lambda(\tau_R^\Lambda(A), \tau_R^{S\setminus\Lambda}(Y))\, dr_{S\setminus\Lambda}(\tau_R(\mu))(Y) = \\ &= \int\limits_{[E, F]} g^\Lambda(A, Y)\, dr_{S\setminus\Lambda}(\tau_R(\mu))(Y). \end{aligned}$$

Таким образом, $r^A_{S\setminus\Lambda}(\tau_R(\mu)) = g^\Lambda(A, \cdot) r_{S\setminus\Lambda}(\tau_R(\mu))$, и, следовательно,

$$\tau_R(\mu) \in \mathscr{G}(\mathscr{V}_R). \ \blacksquare$$

Поскольку τ_R: $\mathscr{M}(S) \to \mathscr{M}(S)$ является гомеоморфизмом, из предложения 7.1 немедленно следует, что τ_R гомеоморфно отображает $\mathscr{G}(\mathscr{V})$ на $\mathscr{G}(\mathscr{V}_R)$. В частности, для $\mathscr{V}$ фазовый переход имеет место тогда и только тогда, когда он имеет место для $\mathscr{V}_R$. Если $\mathscr{V} \in D_+(S)$, то, очевидно, и $\mathscr{V}_R \in D_+(S)$. Предположим, что $\mathscr{V} \in D_+(S)$ и V — потенциал, связанный с $\mathscr{V}$; пусть V_R — потенциал, связанный с $\mathscr{V}_R$. Установим вид $\mathscr{V}_R$ в терминах V.

Предложение 7.2. *Потенциал* V_R: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ *определяется равенством*

$$V_R(A) = A((A \setminus R) \cup (R \setminus A)) - V(R)$$

для любых $A \in \mathscr{C}(S)$. (*Заметим, что выражение* $V((A \setminus R) \cup$ $\cup (R \setminus A)) - V(R)$ *имеет смысл, так как* V — *непрерывный потенциал.*)

Доказательство. Пусть $\mathscr{V}_R = \{g^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$, как определено выше. Тогда для любых $A \in \mathscr{C}(S)$ необходимо

$$V_R(A) = \log\left[\frac{g^A(A, \varnothing)}{g^A(\varnothing, \varnothing)}\right] =$$

$$= \log\left[\frac{f^A\left(\tau^A_R(A), \tau^{S\setminus A}_R(\varnothing)\right)}{f^A\left(\tau^A_R(\varnothing), \tau^{S\setminus A}_R(\varnothing)\right)}\right] = \log\left[\frac{f^A(A \setminus R, R \setminus A)}{f^A(A, R \setminus A)}\right],$$

и, как нетрудно проверить,

$$\log\left[\frac{f^A(A \setminus R, R \setminus A)}{f^A(A, R \setminus A)}\right] = V((A \setminus R) \cup (R \setminus A)) - V(R).$$

Значит, $V_R(A) = V((A \setminus R) \cup (R \setminus A)) - V(R)$. $\blacksquare$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь случай $R = S$. Для удобства будем писать $\overline{V}$ вместо V_S. В соответствии с предложением 7.2 имеем, что

$$\overline{V}(A) = V(S \setminus A) - V(S) \text{ для всех } A \in \mathscr{C}(S).$$

Предложение 7.3. *Если* $V \in H(S)$, *то*

$$J_{\overline{V}}(A) = (-1)^{|A|} \sum_{Y \in \mathscr{C}(S),\ Y \supset A} J_V(Y) \text{ для всех } A \in \mathscr{C}(S),\ A \neq \varnothing.$$

(*Для* $A = \varnothing$, *конечно,* $J_{\overline{V}}(A) = 0$.)

Доказательство. Под $\sum_{Y \in \mathscr{C}(S),\, Y \supset A} J_V(Y)$ мы подразумеваем $\lim_{\Lambda \uparrow S}\left[\sum_{A \subset X \subset \Lambda} J_V(X)\right]$, в предположении, что этот предел существует. Пусть $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $\Lambda \supset A$. Тогда

$$\sum_{B \subset A}(-1)^{|B|}\sum_{B \subset Y \subset \Lambda} J_V(Y) = \sum_{Y \subset \Lambda} J_V(Y)\sum_{B \subset Y \cap A}(-1)^{|B|} = \sum_{Y \subset \Lambda \setminus A} J_V(Y).$$

Следовательно,

$$\sum_{B \subset \Lambda \setminus A} J_V(B) - \sum_{B \subset \Lambda} J_V(B) =$$
$$= \sum_{B \subset A}(-1)^{|B|}\sum_{B \subset Y \subset \Lambda} J_V(Y) - \sum_{X \subset \Lambda} J_V(Y) =$$
$$= \sum_{\varnothing \neq B \subset A}(-1)^{|B|}\sum_{B \subset Y \subset \Lambda} J_V(Y)$$

и, стало быть,

$$\bar{V}(A) = V(S \setminus A) - V(S) = \lim_{\Lambda \uparrow S}(V(\Lambda \setminus A) - V(\Lambda)) =$$
$$= \lim_{\Lambda \uparrow S}\Bigl(\sum_{B \subset \Lambda \setminus A} J_V(B) - \sum_{B \subset \Lambda} J_V(B)\Bigr) =$$
$$= \lim_{\Lambda \uparrow S}\sum_{\varnothing \neq B \subset A}(-1)^{|B|}\sum_{B \subset Y \subset \Lambda} J_V(Y).$$

Легко видеть, что предел

$$\lim_{\Lambda \uparrow S}\Bigl(\sum_{B \subset Y \subset \Lambda} J_V(Y)\Bigr)$$

существует, если $B \neq \varnothing$, а также, что

$$\bar{V}(A) = \sum_{\varnothing \neq B \subset A}(-1)^{|B|}\lim_{\Lambda \uparrow S}\sum_{B \subset Y \subset \Lambda} J_V(Y).$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$J_V(A) = (-1)^{|A|}\lim_{\Lambda \uparrow S}\sum_{B \subset Y \subset \Lambda} J_V(Y), \text{ если } A \neq \varnothing. \ \blacksquare$$

Объединяя теорему 6.2 и предложение 7.3, немедленно получаем

Предложение 7.4. *Пусть* $V \in H(S)$, *и предположим, что существует* $\alpha < 1$, *такое, что*

$$\sum_{Y \in \mathscr{C}(S),\ x \notin Y} J_V(Y \cup x) - \sum_{\varnothing \neq A \in \mathscr{C}(S),\ x \notin A}\Bigl|\sum_{Y \supset \Lambda \cup x,\ Y \notin \mathscr{C}(S)} J_V(Y)\Bigr| \geqslant$$
$$\geqslant \log\left(\frac{2}{\alpha}\right)$$

для всех $x \in S$. Тогда для таких потенциалов V фазовый переход не может иметь места.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $\bar{V}$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2 и, значит, для $\bar{V}$ фазовый переход не имеет места. Следовательно, фазового перехода нет и для V. ■

Обратимся на некоторое время к сравнительно простому случаю парных потенциалов. Будем говорить, что $V \in H(S)$ является *парным потенциалом*, если $J_V(A) = 0$ при $|A| > 2$. Если V — парный потенциал, то можно определить симметричную билинейную форму U: $S \times S \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$U(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} J_V(\{x, y\}), & \text{если } x \neq y, \\ J_V(\{x\}), & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Тогда для всех $A \in \mathscr{C}(S)$ имеем $V(A) = U(A, A)$, где используется обозначение: для произвольных $A, B \in \mathscr{C}(S)$

$$U(A, B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} U(x, y).$$

Обратно, если U: $S \times S \to \mathbb{R}$—симметричная билинейная форма, то соотношение $V(A) = U(A, A)$ задает парный потенциал V. Будем называть U билинейной формой, ассоциированной с V. Если U (соответственно $\bar{U}$) является билинейной формой, ассоциированной с V (соответственно $\bar{V}$), то

$$\bar{U}(x, y) = \begin{cases} U(x, y), & \text{если } x \neq y, \\ U(x, x) - 2U(x, S), & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Следовательно, для $A \in \mathscr{C}(S)$ имеем

$$\bar{U}(A, A) = U(A, A) - 2U(A, S).$$

Для парных потенциалов из теоремы 6.2 и предложения 7.4 вытекает

Предложение 7.5. *Пусть $V \in H(S)$ — парный потенциал, U — билинейная форма, ассоциированная с V, $\alpha < 1$. Тогда для V фазовый переход не может иметь места, если*

(i) $U(x, x) + 2 \sum_{y \neq x} |U(x, y)| \leqslant \log\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *для всех $x \in S$,*

или

(ii) $-U(x, x) + 2 \sum_{y \neq x} (|U(x, y)| - U(x, y)) \leqslant \log\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *для всех $x \in S$.*

Доказательство. Очевидно, что (i) — это просто теорема 6.2, а (ii) — теорема 6.2, примененная к $\bar{V}$. ■

Будем называть $V \in H(S)$ *потенциалом Изинга*, если $\bar{V} = V$. Если V — парный потенциал с ассоциированной билинейной формой U, то, очевидно, V — потенциал Изинга тогда и только тогда, когда

$$U(x, S) = 0 \text{ для любых } x \in S.$$

Более общо, из предложения 7.3 следует, что $V \in H(S)$ является потенциалом Изинга тогда и только тогда, когда для всех $A \in \mathscr{C}(S)$ с $A \neq \varnothing$ справедливо равенство

$$J_V(A) = (-1)^{|A|} \sum_{Y \in \mathscr{C}(S),\ Y \supset A} J_V(Y).$$

Для некоторых приложений удобно выразить потенциал $V \in H(S)$ способом, несколько отличным от используемого нами до сих пор. Для этого нам понадобится еще несколько определений. Для $A \in \mathscr{C}(S)$ определим σ_A: $\mathscr{C}(S) \to \{-1, 1\}$ следующим образом:

$$\sigma_A(B) = (-1)^{|A \cap B|} \text{ для } B \in \mathscr{C}(S).$$

Пусть $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$; тогда, как легко проверить,

$$\sum_{B \subset \Lambda} \sigma_A(B) = \begin{cases} 2^{|\Lambda|}, & \text{если } A \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в любом другом случае.} \end{cases}$$

Чтобы избежать всех проблем, связанных со сходимостью, предположим в дальнейшем, что для потенциала $V \in H(S)$ справедливо неравенство

$$\sum_{\substack{Y \in \mathscr{C}(S), \\ Y \supset A}} |J_V(Y)| 2^{-|Y|} < \infty \text{ для всех } A \in \mathscr{C}(S),\ A \neq \varnothing.$$

Мы предоставляем читателю проверить, является ли это предположение необходимым для дальнейшего. Заметим, что из этого предположения вытекает соотношение

$$\lim_{\Lambda \to S} \sum_{\varnothing \neq X \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)} |J_V(X \cup A)| 2^{-|X|} = 0 \text{ для всех } A \in \mathscr{C}(S),$$
$$A \neq \varnothing.$$

Определим I_V: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$I_V(E) = (-1)^{|E|} \sum_{\substack{A \in \mathscr{C}(S), \\ A \supset E}} 2^{-|A|} J_V(A) \text{ для } E \neq \varnothing,$$

$$I_V(\varnothing) = 0.$$

Предложение 7.6. *Пусть $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$. Тогда*

$$\sum_{B\subset\Lambda}[\sigma_A(B)-\sigma_\varnothing(B)]\,I_V(B)=V(A)+\sum_{\substack{\varnothing\neq E\cap\Lambda\subset A,\\ E\cap(S\setminus\Lambda)\neq\varnothing}}2^{-|E\setminus\Lambda|}\,J_V(E)$$

и, в частности,

$$V(A)=\sum_{B\in\mathscr{C}(S)}[\sigma_A(B)-\sigma_\varnothing(B)]\,I_V(B).$$

Доказательство. Имеем:

$$\sum_{B\subset\Lambda}\sigma_A(B)\,I_V(B)=\sum_{\varnothing\neq B\subset\Lambda}\sigma_A(B)(-1)^{|B|}\sum_{\substack{E\in\mathscr{C}(S),\\ E\supset B}}2^{-|E|}J_V(E)=$$

$$=\sum_{\substack{E\in\mathscr{C}(S),\\ E\cap\Lambda\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E|}\sum_{\varnothing\neq B\subset E\cap\Lambda}\sigma_A(B)(-1)^{|B|}=$$

$$=\sum_{\substack{E\in\mathscr{C}(S),\\ E\cap\Lambda\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E|}\sum_{B\subset E\cap\Lambda}\sigma_A(B)(-1)^{|B|}-\sum_{\substack{E\in\mathscr{C}(S),\\ E\cap\Lambda\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E|}.$$

Итак,

$$\sum_{B\subset E\cap\Lambda}\sigma_A(B)(-1)^{|B|}=\sum_{B\subset\Lambda\cap E}(-1)^{|B\cap A|}(-1)^{|B|}=$$

$$=\sum_{B\subset\Lambda\cap E}(-1)^{|B\cap(A\cap E)|}(-1)^{|B|}=\sum_{B\subset\Lambda\cap E}(-1)^{|B\cap(\Lambda\setminus A)\cap E|}=$$

$$=\sum_{B\subset\Lambda\cap E}\sigma_B((\Lambda\setminus A)\cap E)=\begin{cases}2^{|\Lambda\cap E|}, & \text{если } E\cap\Lambda\subset A,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{B\subset\Lambda}\sigma_A(B)\,I_V(B)=$$

$$=\sum_{\substack{E\in\mathscr{C}(S),\\ \varnothing\neq E\cap\Lambda\subset A}}J_V(E)\,2^{|\Lambda\cap E|-|E|}-\sum_{\substack{E\subset\mathscr{C}(S),\\ E\cap\Lambda\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E|}=$$

$$=\sum_{E\subset A}J_V(E)+\sum_{\substack{\varnothing\neq E\cap\Lambda\subset A,\\ E\cap(S\setminus\Lambda)\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E\setminus\Lambda|}-\sum_{\substack{E\in\mathscr{C}(S),\\ E\cap\Lambda\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E}=$$

$$=V(A)+\sum_{\substack{\varnothing\neq E\cap\Lambda\subset A,\\ E\cap(S\setminus\Lambda)\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E\setminus\Lambda|}-\sum_{\substack{E\in\mathscr{C}(S),\\ E\cap\Lambda\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E|}.$$

В частности, имеет место равенство

$$\sum_{B\subset\Lambda}\sigma_\varnothing(B)\,I_V(B)=-\sum_{\substack{E\in\mathscr{C}(S),\\ E\cap\Lambda\neq\varnothing}}J_V(E)\,2^{-|E|},$$

и, значит, требуемый результат получен. ■

Отметим, что нетрудно выразить J_V в терминах I_V.

Предложение 7.7. *Если $E \in \mathscr{C}(S)$ и $E \neq \varnothing$, то*

$$J_V(E) = (-1)^{|E|} 2^{|E|} \sum_{\substack{B \in \mathscr{C}(S), \\ B \supset E}} I_V(B).$$

Доказательство. Пусть $\varnothing \neq E \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$; тогда

$$\sum_{E \subset B \subset \Lambda} I_V(B) = \sum_{E \subset B \subset \Lambda} (-1)^{|B|} \sum_{\substack{A \in \mathscr{C}(S), \\ A \supset B}} 2^{-|A|} J_V(A) =$$
$$= \sum_{\substack{A \in \mathscr{C}(S), \\ A \supset E}} 2^{-|A|} J_V(A) \sum_{E \subset B \subset A \cap \Lambda}' (-1)^{|B|} =$$
$$= \sum_{\substack{A \in \mathscr{C}(S), \\ A \cap \Lambda = E}} (-1)^{|E|} 2^{-|A|} J_V(A) = (-1)^{|E|} 2^{-|E|} J_V(E) +$$
$$+ (-1)^{|E|} \sum_{\substack{A \cap \Lambda = E, \\ A \cap (S \setminus \Lambda) \neq \varnothing}} 2^{-|A|} J_V(A).$$

Стало быть,

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} \sum_{E \subset B \subset \Lambda} I_V(B) = (-1)^{|E|} 2^{-|E|} J_V(E). \blacksquare$$

Отметим, что из предложения 7.7 и из определения I_V следует, что если $n \geqslant 1$, то $J_V(A) = 0$ для всех $A \in \mathscr{C}(S)$ при $|A| \geqslant n$ тогда и только тогда, когда $I_V(A) = 0$ для всех $A \in \mathscr{C}(S)$ при $|A| \geqslant n$. В частности, если V является парным потенциалом, то $I_V(A) = 0$ для всех $A \in \mathscr{C}(S)$ при $|A| > 2$.

Предложение 7.8. *Справедливы следующие утверждения:*
(i) $I_{\overline{V}}(E) = \sum_{A \supset E} 2^{-|A|} J_V(A)$ *для* $E \in \mathscr{C}(S)$ *при* $E \neq \varnothing$.

(ii) $I_{\overline{V}}(E) = (-1)^{|E|} I_V(E)$ *для всех* $E \in \mathscr{C}(S)$.

(iii) *V является потенциалом Изинга тогда и только тогда, когда $I_V(E) = 0$ для всех $E \in \mathscr{C}(S)$ с нечетным $|E|$.*

Доказательство. Очевидно, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Если $E \in \mathscr{C}(S)$ при $E \neq \varnothing$, то

$$I_{\overline{V}}(E) = (-1)^{|E|} \sum_{\substack{A \in \mathscr{C}(S), \\ A \supset E}} 2^{-|A|} J_{\overline{V}}(A) =$$
$$= (-1)^{|E|} \sum_{\substack{A \in \mathscr{C}(S), \\ A \supset E}} 2^{-|A|} (-1)^{|A|} \sum_{\substack{B \in \mathscr{C}(S), \\ B \supset A}} J_V(B) =$$
$$= (-1)^{|E|} \sum_{\substack{B \in \mathscr{C}(S), \\ B \supset E}} J_V(B) \sum_{E \subset A \subset B} (-1)^{|A|} 2^{-|A|} =$$
$$= (-1)^{|E|} \sum_{\substack{B \in \mathscr{C}(S), \\ B \supset B}} J_V(B) (-1)^{|E|} 2^{-|B|} = \sum_{\substack{B \in \mathscr{C}(S), \\ B \supset E}} 2^{-|B|} J_V(B). \blacksquare$$

8. ПРИТЯГИВАЮЩИЕ И СУПЕРМОДУЛЯРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

В этой главе мы рассмотрим потенциалы с некоторыми дополнительными свойствами; для таких потенциалов будет легче определить, когда имеет место фазовый переход.

Потенциал $V \in H(S)$ называется *супермодулярным*, если для всех A, $B \in \mathscr{C}(S)$ мы имеем

$$V(A \cup B) + V(A \cap B) \geqslant V(A) + V(B).$$

Потенциал V называется *притягивающим*, если $J_V(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{C}(S)$ с $|A| \geqslant 2$. (Термин супермодулярный происходит от свойства, лежащего в определении; термин притягивающий отражает тип взаимодействия, отвечающий модели с таким видом потенциала.) Сначала заметим, что условие притягиваемости сильнее условия супермодулярности.

Предложение 8.1. *Если потенциал $V \in H(S)$ является притягивающим, то он является и супермодулярным.*

Доказательство. Пусть A, $B \in \mathscr{C}(S)$. Тогда

$$V(A \cup B) + V(A \cap B) - V(A) - V(B) =$$
$$= \sum_{X \subset A \cup B} J_V(X) + \sum_{X \subset A \cap B} J_V(X) - \sum_{X \subset A} J_V(X) - \sum_{X \subset B} J_V(X) =$$
$$= \sum_{X \in \Omega} J_V(X),$$

где $\Omega = \{X \subset A \cup B\colon\ X \cap (A \setminus B) \neq \varnothing,\ X \cap (B \setminus A) \neq \varnothing\}$.

Если $X \in \Omega$, то $|X| \geqslant 2$ и $J_V(X) \geqslant 0$. Следовательно,

$$V(A \cup B) + V(A \cap B) \geqslant V(A) + V(B). \ \blacksquare$$

Хотя в общем случае утверждение, обратное предложению 8.1, очевидно, неверно, для парных потенциалов оно справедливо.

Предложение 8.2. *Пусть $V \in H(S)$ — парный потенциал. Тогда V является притягивающим тогда и только тогда, когда он супермодулярен.*

Доказательство. Пусть V супермодулярен, и возьмем $x, y \in S$ с $x \neq y$. Тогда

$$J_V(\{x, y\}) = V(\{x\} \cup \{y\}) - V(\{x\}) - V(\{y\}) + V(\{x\} \cap \{y\}) \geqslant 0,$$

и, таким образом, V является притягивающим. Вторая часть предложения 8.2 доказана ранее. $\blacksquare$

Наиболее важным инструментом для исследования супермодулярных потенциалов является неравенство Холли (теорема 3.2), которое мы сейчас напомним: если Λ является конечным множеством и μ_1, μ_2 являются строго положительными вероятностными плотностями на $\mathscr{P}(\Lambda)$ (т. е. для $i=1, 2$ мы имеем μ_i: $\mathscr{P}\to\mathbb{R}$ с $\mu_i(A)>0$ для всех $A\in\mathscr{P}(\Lambda)$ и $\sum\limits_{A\in\mathscr{P}(\Lambda)}\mu_i(A)=1\Big)$ и если для всех A, $B\in\mathscr{P}(\Lambda)$ справедливо неравенство

$$\mu_1(A\cup B)\,\mu_2(A\cap B)\geqslant\mu_1(A)\,\mu_2(B),$$

то для любой возрастающей функции f: $\mathscr{P}(\Lambda)\to\mathbb{R}$ (т. е. такой, что $f(A)\geqslant f(B)$, когда $A\supset B$)

$$\sum_{A\subset\Lambda}f(A)\,\mu_1(A)\geqslant\sum_{A\subset\Lambda}f(A)\,\mu_2(A).$$

Пусть $\mathscr{K}\in D_+(S)$ с $\mathscr{V}=\{f^{\Lambda}\}_{\Lambda\in\mathscr{C}(S)}$, и пусть $V\in H(S)$ — потенциал, ассоциированный с $\mathscr{V}$. Напомним следующие определения из гл. 5. Если $\Lambda\in\mathscr{C}(S)$ и $X\in\mathscr{P}(S\setminus\Lambda)$, то мера $\pi_\Lambda^X\in\mathscr{S}(\Lambda)$ задавалась соотношением

$$\pi_\Lambda^X([A,\Lambda])=f^{\Lambda}(A,X)\quad\text{для}\quad A\subset\Lambda.$$

Корреляционная функция для π_Λ^X обозначалась ρ_Δ^X, т. е. отображение

$$\rho_\Lambda^X\colon\ \mathscr{C}(\Lambda)\to\mathbb{R}$$

определено равенством

$$\rho_\Lambda^X(A)=\sum_{A\subset B\subset\Lambda}f^{\Lambda}(B,X)\quad\text{для}\quad A\subset\Lambda.$$

Мы также определили ρ_Λ^+: $\mathscr{C}(\Lambda)\to\mathbb{R}$, ρ_Λ^-: $\mathscr{C}(\Lambda)\to\mathbb{R}$ следующими соотношениями:

$$\rho_\Lambda^+(A)=\max_{X\in\mathscr{P}(S\setminus\Lambda)}\rho_\Lambda^X(A),$$

$$\rho_\Lambda^-(A)=\min_{X\in\mathscr{P}(S\setminus\Lambda)}\rho_\Lambda^X(A),$$

и заметили, что в общем случае ρ_Λ^+ и ρ_Λ^- не являются корреляционными функциями. Однако если потенциал V супермодулярен, то ρ_Λ^+ и ρ_Λ^- будут корреляционными функциями, поскольку справедливо

Предложение 8.3. *Пусть V супермодулярен и $A\subset\Lambda\in\mathscr{C}(S)$, тогда $\rho_\Lambda^X(A)$ является возрастающей функцией X, т. е. если X, $Y\in\mathscr{P}(S\setminus\Lambda)$ с $X\subset Y$, то $\rho_\Lambda^X(A)\leqslant\rho_\Lambda^Y(A)$.*

Доказательство. Так как π_Λ^X является мерой на конечном множестве, мы можем идентифицировать эту меру с ее плотностью, т. е. мы будем писать $\pi_\Lambda^X(B)$ вместо $\pi_\Lambda^X([B, \Lambda])$. Вследствие непрерывности мы можем предположить, что X, $Y \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$. Если E, $F \in \mathscr{C}(\Lambda)$, то, поскольку V супермодулярен, мы имеем

$$V(E \cup F \cup Y) + V((E \cap F) \cup X) = V((E \cup Y) \cup (F \cup X)) + \\ + V((E \cup Y) \cap (F \cup X)) \geqslant V(E \cup Y) + V(F \cup X)$$

и, таким образом,

$$\exp V(E \cup F \cup Y) \exp V((E \cap F) \cup X) \geqslant \exp V(E \cup Y) \exp V(F \cup X).$$

Следовательно,

$$\pi_\Lambda^Y(E \cup F)\, \pi_\Lambda^X(E \cap F) \geqslant \pi_\Lambda^Y(E)\, \pi_\Lambda^X(F),$$

т. е. π_Λ^Y и π_Λ^X удовлетворяют условиям неравенства Холли. Определим теперь f: $\mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ с помощью соотношения

$$f(B) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A \subset B \subset \Lambda, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что f — возрастающая функция, и мы имеем

$$\rho_\Lambda^X(A) = \sum_{B \subset \Lambda} f(B)\, \pi_\Lambda^X(B),$$

$$\rho_\Lambda^Y(A) = \sum_{B \subset \Lambda} f(B)\, \pi_\Lambda^Y(B).$$

Следовательно, по неравенству Холли имеем $\rho_\Lambda^Y(A) \geqslant \rho_\Lambda^X(A)$. ■

Из предложения 8.3 немедленно следует, что

$$\rho_\Lambda^+(A) = \rho_\Lambda^{S \setminus \Lambda}(A) \quad \text{и} \quad \rho_\Lambda^-(A) = \rho_\Lambda^{\varnothing}(A).$$

Таким образом, ρ_Λ^+ совпадает с корреляционной функцией $\rho_\Lambda^{S\setminus\Lambda}$, ρ_Λ^- с корреляционной функцией $\rho_\Lambda^{\varnothing}$. Напомним, что в предложении 5.6 установлено, что $\rho_\Lambda^+(A)$ — убывающая по Λ функция, ρ_Λ^- — возрастающая по Λ функция. Таким образом, мы можем определить ρ^+: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$, ρ^-: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$, как

$$\rho^+(A) = \lim_{\Lambda \uparrow S} \rho_\Lambda^+(A),$$

$$\rho^-(A) = \lim_{\Lambda \uparrow S} \rho_\Lambda^-(A).$$

Для супермодулярных потенциалов V функции ρ^+ и ρ^- являются корреляционными функциями гиббсовских состояний.

Предложение 8.4. *Если V супермодулярен, то существует такое состояние $\mu^+ \in \mathscr{G}_V$ (соответственно $\mu^- \in \mathscr{G}_V$), что ρ^+*

(соответственно ρ^-*) является корреляционной функцией* μ^+ *(соответственно* μ^-*). Далее, если для любого* $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ *определить* μ_Λ^+, $\mu_\Lambda^- \in \mathscr{P}(S)$ *соотношениями*

$$\mu_\Lambda^+([A, \Lambda]) = \pi_\Lambda^{S\setminus\Lambda}(A) \quad \text{для} \quad A \subset \Lambda,$$
$$\mu_\Lambda^+([x, x]) = 1 \quad \text{для} \quad x \in S \setminus \Lambda$$
$$\text{и} \quad \mu_\Lambda^-([A, \Lambda]) = \pi_\Lambda^{\varnothing}(A) \quad \text{для} \quad A \subset \Lambda,$$
$$\mu_\Lambda^-([\varnothing, x]) = 1 \quad \text{для} \quad x \in S \setminus \Lambda,$$

то $\mu_\Lambda^+ \to \mu^+$, $\mu_\Lambda^- \to \mu^-$ *(в слабой топологии) при* $\Lambda \uparrow S$.

Доказательство. Для любых $A \subset B \in \mathscr{C}(S)$ ясно, что $\mu_\Lambda^+([A, B])$ сходится при $\Lambda \uparrow S$. Таким образом, существует такая мера μ^+, что $\mu_\Lambda^+ \to \mu^+$ при $\Lambda \uparrow S$, и легко проверить, что ρ^+ должна быть корреляционной функцией для μ^+. По лемме 5.1 $\mu^+ \in \mathscr{G}_V$. Точно такое же доказательство работает для ρ^-.

Если V супермодулярен, то мы будем называть μ^+ (соответственно μ^-), заданное, как в предложении 8.4, *гиббсовским состоянием с высокой* (соответственно *низкой*) *плотностью* с потенциалом V. По теореме 5.1 получаем, что фазовый переход имеет место тогда и только тогда, когда $\mu^+ \neq \mu^-$. Мы можем сделать дальнейшее упрощение проблемы фазовых переходов для супермодулярных потенциалов, показав, что функция $\rho^+ - \rho^-$ является субаддитивной.

Предложение 8.5. *Если V супермодулярен, то для всех A, $B \in \mathscr{C}(S)$ имеет место неравенство*

$$(\rho^+(A \cup B) - \rho^-(A \cup B)) \leqslant (\rho^+(A) - \rho^-(A)) + (\rho^+(B) - \rho^-(B)).$$

Доказательство. Пусть A, $B \in \mathscr{C}(S)$, возьмем $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda \supset A \cup B$. Тогда

$$\rho_\Lambda^+(A) + \rho_\Lambda^+(B) - \rho_\Lambda^+(A \cup B) = \sum_{E \in \Omega} \pi_\Lambda^{S\setminus\Lambda}(E),$$

где $\Omega = \{E \subset \Lambda\colon \text{либо } E \supset A, \text{ либо } E \supset B\}$. Определим функцию $f\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } E \supset A \text{ или } E \supset B, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что f — возрастающая функция, и мы имеем

$$\rho_\Lambda^+(A) + \rho_\Lambda^+(B) - \rho_\Lambda^+(A \cup B) = \sum_{E \subset \Lambda} f(E)\, \pi_\Lambda^{S\setminus\Lambda}(E).$$

Аналогично мы имеем также

$$\rho_\Lambda^-(A) + \rho_\Lambda^-(B) - \rho_\Lambda^-(A \cup B) = \sum_{E \subset \Lambda} f(E)\, \pi_\Lambda^{\varnothing}(E).$$

Но из доказательства предложения 8.3 нам известно, что $\pi_\Lambda^{S \setminus \Lambda}$ и $\pi_\Lambda^{\varnothing}$ удовлетворяют условиям неравенства Холли, использование которого приводит к неравенству

$$\sum_{E \subset \Lambda} f(E)\, \pi_\Lambda^{S \setminus \Lambda}(E) \geqslant \sum_{E \subset \Lambda} f(E)\, \pi_\Lambda^{\varnothing}(E).$$

Следовательно,

$$\rho_\Lambda^+(A) + \rho_\Lambda^+(B) - \rho_\Lambda^+(A \cup B) \geqslant \rho_\Lambda^-(A) + \rho_\Lambda^-(B) - \rho_\Lambda^-(A \cup B),$$

откуда получаем результат, полагая $\Lambda \uparrow S$. ■

Немедленным применением этого утверждения является то, что для всех $A \in \mathscr{C}(S)$ имеет место оценка

$$\rho^+(A) - \rho^-(A) \leqslant \sum_{x \in A} [\rho^+(\{x\}) - \rho^-(\{x\})] \leqslant$$
$$\leqslant |A| \max_{x \in A} [\rho^+(\{x\}) - \rho^-(\{x\})].$$

Следовательно, $\rho^+ = \rho^-$ тогда и только тогда, когда $\rho^+(\{x\}) = \rho^-(\{x\})$ для всех $x \in S$, и, таким образом, доказана

Теорема 8.1. *Если V супермодулярен, то фазовый переход имеет место тогда и только тогда, когда $\rho^+(\{x\}) \neq \rho^-(\{x\})$ для некоторого $x \in S$.*

Обратимся опять к уравнениям Кирквуда — Зальцбурга. Из доказательства теоремы 6.2 ясно, что все было бы гораздо проще, если бы при данных $x \in \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $B \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$ выполнялось неравенство

$$\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp [V(\Lambda \cup X) - V((\Lambda \setminus x) \cup X)] \geqslant 0.$$

Достаточное условие справедливости этого неравенства дает

Предложение 8.6. *Предположим, что потенциал V — притягивающий. Тогда для любых $x \in \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $B \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$*

$$\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus x|} \exp [V(\Lambda \cup X) - V((\Lambda \setminus x) \cup X)] \geqslant 0.$$

Доказательство. Так же как в доказательстве теоремы 6.2, мы имеем

$$V(\Lambda \cup X) - V((\Lambda \setminus x) \cup X) = \sum_{Y \subset X} \sum_{E \subset (\Lambda \setminus x)} J_V(E \cup x \cup Y)$$

и, по предположению, если $Y \neq \varnothing$, то

$$\sum_{E \subset (\Lambda \setminus x)} J_V(E \cup x \cup Y) \geqslant 0.$$

Результат теперь следует из леммы 6.2 точно так же, как в доказательстве теоремы 6.2. ■

Используя это утверждение, мы можем улучшить теорему 6.2 в случае притягивающего потенциала V.

Предложение 8.7. *Пусть потенциал V—притягивающий, и пусть*

$$\alpha = \sup_{A \in \mathscr{C}(S)} (\rho^+(A) - \rho^-(A)).$$

Тогда для данного $x \in \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ имеет место оценка

$$\rho^+(\Lambda) - \rho^-(\Lambda) \leqslant \alpha [1 + \exp(V(\Lambda) - V(\Lambda \setminus x))]^{-1} \exp(-\bar{V}(\{x\})).$$

Доказательство. По теореме 6.1 мы имеем

$$\rho^+(\Lambda) - \rho^-(\Lambda) = \lim_{\Lambda' \to S} \sum_{B \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \Big[\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp(V(\Lambda \cup X) -$$
$$- V((\Lambda \setminus x) \cup X))\Big] (\rho^+((\Lambda \setminus x) \cup B) - \rho^-((\Lambda \setminus x) \cup B) -$$
$$- \rho^+(\Lambda \cup B) + \rho^-(\Lambda \cup B)) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{\Lambda' \to S} \sum_{B \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \Big[\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp(V(\Lambda \cup X) -$$
$$- V((\Lambda \setminus x) \cup X))\Big] (\rho^+((\Lambda \setminus x) \cup B) - \rho^-((\Lambda \setminus x) \cup B)) -$$
$$- \exp(V(\Lambda) - V(\Lambda \setminus x)) (\rho^+(\Lambda) - \rho^-(\Lambda)) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \lim_{\Lambda' \to S} \sum_{B \subset \Lambda' \setminus \Lambda} \Big[\sum_{X \subset B} (-1)^{|B \setminus X|} \exp(V(\Lambda \cup X) -$$
$$- V((\Lambda \setminus x) \cup X))\Big] - (\rho^+(\Lambda) - \rho^-(\Lambda)) \exp(V(\Lambda) - V(\Lambda \setminus x)) =$$
$$= \alpha \lim_{\Lambda' \to S} \exp(V(\Lambda') - V(\Lambda' \setminus x)) -$$
$$- (\rho^+(\Lambda) - \rho^-(\Lambda)) \exp(V(\Lambda) - V(\Lambda \setminus x)).$$

Но

$$\lim_{\Lambda' \to S} (V(\Lambda') - V(\Lambda' \setminus x)) = \bar{V}(\{x\})$$

и, таким образом,

$$(\rho^+(\Lambda) - \rho^-(\Lambda))(1 + \exp(V(\Lambda) - V(\Lambda \setminus x))) \leqslant \alpha \exp(-\bar{V}(\{x\})). \blacksquare$$

Теорема 8.2. *Если потенциал V — притягивающий и*

$$\inf_{x\in S}[\exp\bar{V}(\{x\})(1+\exp V(\{x\}))]>1,$$

то для этого потенциала V фазовый переход не имеет места.

Доказательство. Пусть

$$\alpha=\sup_{A\in\mathscr{C}(S)}(\rho^+(A)-\rho^-(A)).$$

Если $x\in\Lambda\in\mathscr{C}(S)$, тогда, поскольку потенциал V притягивающий, мы имеем

$$V(\Lambda)-V(\Lambda\setminus x)\geqslant V(\{x\})$$

и, таким образом, согласно предложению 8.7,

$$\rho^+(\Lambda)-\rho^-(\Lambda)\leqslant\alpha[1+\exp V(\{x\})]^{-1}\exp(-\bar{V}(\{x\})).$$

Следовательно, $\rho^+=\rho^-$, если

$$\sup_{x\in S}[1+\exp V(\{x\})]^{-1}\exp(-\bar{V}(\{x\}))<1,$$

т. е. если $\inf_{x\in S}[\exp\bar{V}(\{x\})(1+\exp V(\{x\}))]>1$. ■

Затем, если V — притягивающий потенциал Изинга, то (так как $V(\{x\})=\bar{V}(\{x\})$) фазовый переход для V невозможен, если

$$\inf_{x\in S}V(\{x\})>\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Рассмотрим теперь еще некоторые результаты для супермодулярных потенциалов. Если V супермодулярен, то, как легко проверить, $\bar{V}$ тоже супермодулярен (заметим, что в общем случае подобное утверждение неверно, так как супермодулярный потенциал заменили на притягивающий). Пусть π_Λ^X, ρ_Λ^X, ρ_Λ^+, ρ_Λ^-, ρ^+, ρ^- определяются, как прежде, в терминах V, и пусть $\bar{\pi}_\Lambda^X$, $\bar{\rho}_\Lambda^X$, $\bar{\rho}_\Lambda^+$, $\bar{\rho}_\Lambda^-$, $\bar{\rho}^+$, $\bar{\rho}^-$ — соответствующие выражения, определенные в терминах $\bar{V}$. Следующий факт, который мы назовем предложением, легко проверяется.

Предложение 8.8. (i) *Если $A\subset\Lambda\in\mathscr{C}(S)$ и $X\in\mathscr{P}(S\setminus\Lambda)$, то*

$$\pi_\Lambda^X(\Lambda)=\bar{\pi}_\Lambda^{S\setminus X}(\Lambda\setminus A).$$

(ii) *Если V супермодулярен и $x\in\Lambda\in\mathscr{C}(S)$, то*

$$\bar{\rho}_\Lambda^+(\{x\})=1-\rho_\Lambda^-(\{x\}).$$

(iii) *Если V супермодулярен и $x \in S$, то $\bar{\rho}^+(\{x\}) = 1 - \rho^-(\{x\})$.*

Доказательство. (i) следует из определения $\bar{V}$; (ii) очевидно подразумевает (iii) и (ii) справедливо вследствие

$$\bar{\rho}_\Lambda^+(\{x\}) = \sum_{x \in A \subset \Lambda} \bar{\pi}_\Lambda^{S \setminus \Lambda}(A) = \sum_{x \in A \subset \Lambda} \pi_\Lambda^\varnothing(\Lambda \setminus A) =$$
$$= \sum_{x \notin B \subset \Lambda} \pi_\Lambda^\varnothing(B) = 1 - \sum_{x \in B \subset \Lambda} \pi_\Lambda^\varnothing(B) = 1 - \rho_\Lambda^-(\{x\}). \blacksquare$$

Применяя это утверждение к потенциалам Изинга, мы имеем

Предложение 8.9. *Пусть V — супермодулярный потенциал Изинга. Тогда для любого $x \in S$ мы имеем*

$$\rho^+(\{x\}) = 1 - \rho^-(\{x\}).$$

Следовательно, поскольку $\rho^-(\{x\}) \leqslant \rho^+(\{x\})$, выполняются неравенства

$$\rho^-(\{x\}) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \rho^+(\{x\})$$

и фазовый переход имеет место тогда и только тогда, когда $\rho^-(\{x\}) < 1/2$ для некоторого $x \in S$.

Доказательство. Утверждение очевидно. ■

Пусть теперь V — такой потенциал, что

$$\sum_{\substack{Y \in \mathscr{C}(S) \\ Y \supset A}} |J_V(Y)| 2^{-|Y|} < \infty \quad \text{для всех} \quad A \in \mathscr{C}(S), \text{ где } A \neq \varnothing.$$

Так же как в гл. 7, мы можем определить I_V: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$, как

$$I_V(E) = (-1)^{|E|} \sum_{\substack{A \in \mathscr{C}(S) \\ A \supset E}} 2^{-|A|} J_V(A), \; E \neq \varnothing,$$
$$I_V(\varnothing) = 0.$$

Для того чтобы исследовать потенциалы в терминах функции J_V, будет удобно иметь некоторый вариант неравенств Гриффитса, которые мы сейчас опишем. Сначала напомним, что если $A, B \in \mathscr{C}(S)$, то AB означает симметризованную разность A и B, т. е.

$$AB = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Легко проверить, что задание произведения таким образом делает $\mathscr{C}(S)$ коммутативной группой, так как $AB = BA$, $(AB)C = A(BC)$, $A\varnothing = A$ и $AA = \varnothing$. Таким образом, $\varnothing$ — единичный элемент в группе, и каждый элемент имеет свой обратный. Заметим, что для любого $X \in \mathscr{P}(S)$ имеем $\mathscr{C}(X)$ в качестве подгруппы $\mathscr{C}(S)$; в частности, если $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $f\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$, то

$$\sum_{A \subset \Lambda} f(A) = \sum_{A \subset \Lambda} f(AE) \quad \text{для любого} \quad E \subset \Lambda.$$

Напомним также, что для $A \in \mathscr{C}(S)$ мы определили $\sigma_A\colon \mathscr{C}(S) \to \{-1, 1\}$ посредством

$$\sigma_A(B) = (-1)^{|A \cap B|} \quad \text{для} \quad B \in \mathscr{C}(S).$$

Ясно, что $\sigma_A(B) = \sigma_B(A)$, и довольно просто проверить, что если A, B, $E \in \mathscr{C}(S)$, то

$$\sigma_A(E)\,\sigma_B(F) = \sigma_{AB}(E).$$

Наконец, если $A \in \mathscr{C}(S)$ и $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, то

$$\sum_{B \subset \Lambda} \sigma_A(B) = \begin{cases} 2^{|\Lambda|}, & \text{если} \quad A \cap \Lambda = \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $I\colon \mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ с $I(\varnothing) = 0$, и пусть $\Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S)$. Определим элемент $\mathscr{P}(\Lambda)$, задавая его плотность $\pi\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ соотношением

$$\pi(A) = Z^{-1} \exp\Big[\sum_{B \subset \Lambda'} \sigma_A(B)\,I(B)\Big], \quad A \subset \Lambda,$$

где, конечно, $Z = \sum_{A \subset \Lambda} \exp\Big[\sum_{B \subset \Lambda'} \sigma_A(B)\,I(B)\Big]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 8.3. *Предположим, что* $I(A) \geqslant 0$ *для всех* $A \in \mathscr{C}(S)$. *Тогда*

(i) $\sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\,\pi(A) \geqslant 0$ *для всех* $E \in \mathscr{C}(S)$.

(ii) $\sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\,\sigma_F(A)\,\pi(A) - \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\,\pi(A) \sum_{B \subset \Lambda} \sigma_F(B)\,\pi(B) \geqslant 0$ *для всех* E, $F \in \mathscr{C}(S)$.

((i) и (ii) называются *неравенствами Гриффитса.*)

Доказательство. Мы имеем

(i) $$Z\sum_{A\subset\Lambda}\sigma_E(A)\pi(A)=\sum_{A\subset\Lambda}\sigma_E(A)\exp\Big[\sum_{B\subset\Lambda'}\sigma_A(B)I(B)\Big]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{A\subset\Lambda}\sigma_E(A)\Big[\sum_{B_1\subset\Lambda'}\cdots\sum_{B_n\subset\Lambda'}\sigma_A(B_1)\ldots$$

$$\ldots\sigma_A(B_n)I(B_1)\ldots I(B_n)\Big]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big[\sum_{B_1\subset\Lambda'}\cdots\sum_{B_n\subset\Lambda'}I(B_1)\ldots$$

$$\ldots I(B_n)\sum_{A\subset\Lambda}\sigma_E(A)\sigma_A(B_1)\ldots\sigma_A(B_n)\Big]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big[\sum_{B_1\subset\Lambda'}\cdots\sum_{B_n\subset\Lambda'}I(B_1)\ldots I(B_n)\sum_{A\subset\Lambda}\sigma_{EB_1\ldots B_n}(A)\Big]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big[\sum_{\substack{B_1\subset\Lambda'\\(EB_1\ldots B_n)\cap\Lambda=\varnothing}}\cdots\sum_{B_n\subset\Lambda'}I(B_1)\ldots I(B_n)2^{|\Lambda|}\Big]\geqslant 0.$$

Следовательно, $\sum\limits_{A\subset\Lambda}\sigma_E(A)\pi(A)\geqslant 0$.

(ii) $$Z^2\Big\{\sum_{A\subset\Lambda}\sigma_E(A)\sigma_F(A)\pi(A)-\sum_{A\subset\Lambda}\sigma_E(A)\pi(A)\sum_{B\subset\Lambda}\sigma_F(A)\pi(B)\Big\}=$$

$$=\sum_{A\subset\Lambda}\sum_{B\subset\Lambda}(\sigma_E(A)\sigma_F(A)-\sigma_E(A)\sigma_F(B))\times$$

$$\times\exp\Big[\sum_{X\subset\Lambda'}\sigma_A(X)I(X)\Big]\exp\Big[\sum_{Y\subset\Lambda'}\sigma_B(Y)I(Y)\Big]=$$

$$=\sum_{A\subset\Lambda}\sum_{B\subset\Lambda}(\sigma_E(A)\sigma_F(A)-\sigma_E(A)\sigma_F(B))\times$$

$$\times\exp\Big[\sum_{X\subset\Lambda'}(\sigma_A(X)+\sigma_B(X))I(X)\Big]=$$

$$=\sum_{A\subset\Lambda}\sum_{B\subset\Lambda}(\sigma_E(A)\sigma_F(A)-\sigma_E(A)\sigma_F(AB))\times$$

$$\times\exp\Big[\sum_{X\subset\Lambda'}(\sigma_A(X)+\sigma_{AB}(X))I(X)\Big]=$$

$$=\sum_{B\subset\Lambda}(1-\sigma_F(B))\sum_{A\subset\Lambda}\sigma_E(A)\sigma_F(A)\times$$

$$\times\exp\Big[\sum_{X\subset\Lambda'}\sigma_A(X)(1+\sigma_B(X))I(X)\Big].$$

Теперь для фиксированного $B \subset \Lambda$ мы имеем из (i), что

$$\sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\, \sigma_F(A) \exp\Big[\sum_{X \subset \Lambda'} \sigma_A(X)(1+\sigma_B(X))\, I(X)\Big] \geqslant 0,$$

так как $\sigma_E(A)\,\sigma_F(A) = \sigma_{EF}(A)$ и $(1+\sigma_B(X))\, I(X) \geqslant 0$ для всех $X \in \mathscr{C}(S)$. Аналогично, $(1-\sigma_F(B)) \geqslant 0$, и результат получен. ■

Мы используем неравенства Гриффитса для доказательства следующего утверждения:

пусть I: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$, I': $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ с $I(\varnothing) = I'(\varnothing) = 0$,

$$\Lambda \subset \Lambda' \in \mathscr{C}(S),$$

плотность π будет та же, что и прежде, и π' — аналогичная плотность, определенная в терминах I'.

Предложение 8.10. *Если $I'(A) \geqslant I(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{C}(S)$, то для любого $E \in \mathscr{C}(S)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\, \pi(A) \leqslant \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\, \pi'(A).$$

Доказательство. Нам только нужно рассмотреть I, I' такие, что существует $F \subset \Lambda'$ с $I(B) = I'(B)$, если $B \neq F$ (так как π и π' определены величинами I и I' на конечном множестве $\mathscr{P}(\Lambda')$). Для $0 \leqslant t \leqslant 1$ пусть I_t: $\mathscr{C}(S) \to \mathbb{R}$ задается соотношением $I_t(A) = (1-t)\, I(A) + tI'(A)$. Таким образом, фактически

$$I_t(A) = \begin{cases} I(A), & \text{если} \quad A \neq F, \\ I(F) + (I'(F) - I(F))\, t, & \text{если} \quad A = F. \end{cases}$$

Пусть π_t — плотность, соответствующая I_t, и пусть

$$h(t) = \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\, \pi_t(A).$$

Тогда нетрудно вычислить, что

$$\frac{d}{dt}(h(t)) = (I'(F) - I(F)) \Big\{ \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\, \sigma_F(A)\, \pi_t(A) - \\ - \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\, \pi_t(A) \sum_{B \subset \Lambda} \sigma_t(B)\, \pi_t(B) \Big\},$$

и, таким образом, из неравенств Гриффитса мы имеем

$$\frac{d}{dt}(h(t)) \geqslant 0.$$

В частности, мы имеем $h(0) \leqslant h(1)$, т. е.

$$\sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\, \pi(A) \leqslant \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A)\, \pi'(A). \quad ■$$

Пусть V, $\tilde{V} \in H(S)$, т. е.

$$\sum_{\substack{Y \in \mathscr{C}(S),\\ Y \supset A}} |J_V(Y)| 2^{-|Y|} < \infty \quad \text{для всех} \quad A \in \mathscr{C}(S) \text{ с } A \neq \varnothing,$$

$$\sum_{\substack{Y \in \mathscr{C}(S),\\ Y \supset A}} |J_{\tilde{V}}(V)| 2^{-|Y|} < \infty \quad \text{для всех} \quad A \in \mathscr{C}(S) \text{ с } A \neq \varnothing.$$

Таким образом, мы можем определить I_V и $I_{\tilde{V}}$; как и прежде, для удобства обозначений мы будем писать I (соответственно $\tilde{I}$) вместо I_V (соответственно $I_{\tilde{V}}$).

Предложение 8.11. *Предположим, что* $\tilde{I}(A) \geqslant I(A) \geqslant 0$ *для всех* $A \in \mathscr{C}(S)$, *пусть* $x \in \Lambda \in \mathscr{C}(S)$. *Тогда*

$$\rho_\Lambda^\varnothing(\{x\}) \geqslant \tilde{\rho}_\Lambda^\varnothing(\{x\}).$$

Доказательство. Пусть $\Lambda' \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda' \supset \Lambda$, и пусть π, $\tilde{\pi}$ определяются как в предложении 8.10. Заметим, что если $A \subset \Lambda$, то

$$\pi(A) = Z^{-1} \exp\Big[\sum_{B \subset \Lambda'} (\sigma_A(B) - \sigma_\varnothing(B)) I(B)\Big]$$

с $Z = \sum_{A \subset \Lambda} \exp\Big[\sum_{B \subset \Lambda'} (\sigma_A(B) - \sigma_\varnothing(B)) I(B)\Big]$ (так как член $\exp\Big[-\sum_{B \subset \Lambda'} \sigma_\varnothing(B) I(B)\Big]$ сокращается).

Таким образом, полагая

$$\tilde{Z} = \sum_{A \subset \Lambda'} \exp\Big[\sum_{B \subset \Lambda'} (\sigma_A(B) - \sigma_\varnothing(B)) \tilde{I}(B)\Big],$$

мы имеем из предложения 8.10, что если $E \subset \Lambda$, тогда

$$Z^{-1} \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A) \exp\Big[\sum_{B \subset \Lambda'} (\sigma_A(B) - \sigma_\varnothing(B)) I(B)\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{Z}^{-1} \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A) \exp\Big[\sum_{B \subset \Lambda'} (\sigma_A(B) - \sigma_\varnothing(B)) \tilde{I}(B)\Big].$$

Но из предложения 7.6 мы имеем

$$V(A) = \lim_{\Lambda' \to S} \sum_{B \subset \Lambda'} (\sigma_A(B) - \sigma_\varnothing(B)) I(B)$$

и, следовательно, $\sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A) \pi_\Lambda^\varnothing(A) \leqslant \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_E(A) \tilde{\pi}_\Lambda^\varnothing(A)$.

Теперь легко увидеть, что

$$\sum_{A \subset \Lambda} \sigma_{\{x\}}(A) \pi_\Lambda^\varnothing(A) = 1 - 2 \sum_{x \in A \subset \Lambda} \pi_\Lambda^\varnothing(A) = 1 - 2\rho_\Lambda^\varnothing(\{x\}).$$

Следовательно,

$$1-2\rho_\Lambda^\varnothing(\{x\}) \leqslant 1-2\tilde{\rho}_\Lambda^\varnothing(\{x\}),$$

т. е.

$$\rho_\Lambda^\varnothing(\{x\}) \geqslant \tilde{\rho}_\Lambda^\varnothing(\{x\}). \blacksquare$$

Мы теперь применим этот последний результат к потенциалам Изинга. Напомним, что, в силу предложения 7.8, V является потенциалом Изинга тогда и только тогда, когда $I_V(E)=0$ для всех $E \in \mathscr{C}(S)$ с $|E|$ нечетным.

Теорема 8.4. *Пусть V, $\tilde{V}$ — супермодулярные потенциалы Изинга с $I_{\tilde{V}}(A) \geqslant I_V(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{C}(S)$; предположим, что фазовый переход имеет место для V. Тогда фазовый переход имеет место и для $\tilde{V}$.*

Доказательство. Из предложения 8.12 следует, что

$$\rho^-(\{x\}) \geqslant \tilde{\rho}^-(\{x\}) \quad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Но в силу предложения 8.9 существует такое $x \in S$, что $\rho^-(\{x\}) < \frac{1}{2}$; таким образом, $\tilde{\rho}^-(\{x\}) < \frac{1}{2}$ и фазовый переход имеет место для $\tilde{V}$. $\blacksquare$

Замечания. Метод сведения проблемы фазового перехода для супермодулярных потенциалов к исследованию $\rho^+(\{x\})$ и $\rho^-(\{x\})$ принадлежит Лебовитцу и Мартин-Лёфу (1972). Развитие различных форм неравенств Гриффитса можно проследить, ознакомившись с работами Гриффитса (1967), Келли и Шермана (1968), Шермана (1969) и Жинибра (1970); использованное здесь доказательство принадлежит Жинибру.

9. ПРИТЯГИВАЮЩИЕ ПАРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Сейчас мы исследуем еще более специальный случай и изучим притягивающие парные потенциалы. Итак, рассмотрим потенциал $V \in H(S)$, такой, что $J_V(B)=0$ для всех $B \in \mathscr{C}(S)$ с $|B| \geqslant 3$ и $J_V(A) \geqslant 0$ для всех $A \in \mathscr{C}(S)$ при $|A|=2$. Как и в гл. 7, пусть U: $S \times S \to \mathbb{R}$ — билинейная форма, ассоциированная с V, т. е. U определяется равенством

$$U(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{2} J_V(\{x, y\}), & \text{если} \quad x \neq y, \\ J_V(\{x\}), & \text{если} \quad x=y. \end{cases}$$

Тогда для любого $A \in \mathscr{C}(S)$ имеем $V(A) = U(A, A)$, где для любых A, $B \in \mathscr{C}(S)$

$$U(A, B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} U(x, y).$$

Легко проверить, что для всех $x \in S$

$$\sum_{y \in S} J_V(\{x, y\}) < \infty,$$

и, стало быть, если $A \in \mathscr{C}(S)$, $X \in \mathscr{P}(S)$, то $U(A, X)$ корректно определяется приведенной выше формулой. Напомним, что $\overline{V}$ также является парным потенциалом, и если $\overline{U}$ — билинейная форма, ассоциированная с $\overline{V}$, то

$$\overline{U}(x, y) = \begin{cases} U(x, y), & \text{если} \quad x \neq y, \\ U(x, x) - 2U(x, S), & \text{если} \quad x = y. \end{cases}$$

В частности, U — потенциал Изинга тогда и только тогда, когда $U(x, S) = 0$ для всех $x \in S$. Заметим, что в настоящем случае функция I_V определена, конечна и задается равенствами

$$I_V(A) = 0, \quad \text{если} \quad A \in \mathscr{C}(S) \text{ с } |A| \geqslant 3,$$

$$I_V(\{x, y\}) = \begin{cases} U(x, y), & \text{если} \quad x \neq y, \\ -U(x, S), & \text{если} \quad x = y, \end{cases}$$

$$I_V(\varnothing) = 0.$$

Основной метод, который мы будем использовать в этой главе, — это применение следующей формы *теоремы Ли — Янга*

Теорема 9.1. *Пусть* $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ *и* $(B_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ — *симметрическая матрица размера* $n \times n$ *с* $0 < B_{ij} \leqslant 1$ *для всех* i, j. *Определим полином* $p(z_1, \ldots, z_n)$ *от* n *комплексных переменных* $z_1, \ldots, z_n$ *равенством*

$$p(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{A \subset \Lambda} z^A C(A),$$

где $z^A = \prod_{i \in A} z^i$, *если* $A \neq \varnothing$, $z^{\varnothing} = 1$,

$$C(A) = \prod_{i \in A} \prod_{j \in \Lambda \setminus A} B_{ij}, \quad \text{если} \quad A \subset \Lambda \text{ с } \varnothing \neq A \neq \Lambda$$

и

$$C(\varnothing) = C(\Lambda) = 1.$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ *с* $|\xi_i| \geqslant 1$ *для* $i = 1, \ldots, n-1$ *и*

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0,$$

Тогда $|\xi_n| \leqslant 1$.

Доказательство[1]). Из соображений непрерывности можно предположить, что $B_{ij} < 1$ для всех i, j. Мы будем проводить индукцию по n; поэтому, чтобы показать зависимость от n, будем писать Λ_n вместо Λ, p_n вместо p и C_n вместо C. Если $n = 1$, то теорема, очевидно, справедлива, поскольку $p_1(z_1) = 1 + z_1$. Пусть $n \geqslant 2$, предположим, что утверждение теоремы верно для всех $m < n$. Доказательство разобьем на несколько лемм (Во всех леммах мы, безусловно, предполагаем истинность нашей теоремы для всех $m < n$).

Лемма 9.1. *Пусть* $s_1, \ldots, s_{n-1} \in \mathbb{C}$ *с* $|s_i| = 1$ *для* $i = 1, \ldots, n-1$. *Пусть* $\xi \in \mathbb{C}$; *предположим, что* $p_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, \xi) = 0$. *Тогда* $|\xi| = 1$.

Доказательство. Поскольку $|s_i| = 1$, то $s_i^{-1} = \bar{s}_i$ (где $\bar{z}$ обозначает число, комплексно сопряженное с z), а поскольку $B_{ij} = B_{ji}$, то для всех ненулевых $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ имеем, что

$$p_n(z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}) = z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1} p_n(z_1, \ldots, z_n).$$

Таким образом, если $\xi \neq 0$, то

$$\begin{aligned} p_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, (\bar{\xi})^{-1}) &= p_n((\bar{s}_1)^{-1}, \ldots, (\bar{s}_{n-1})^{-1}, (\bar{\xi})^{-1}) = \\ &= (\bar{s}_1)^{-1} \ldots (\bar{s}_{n-1})^{-1} (\bar{\xi})^{-1} p_n(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{n-1}, \bar{\xi}) = \\ &= (\bar{s}_1)^{-1} \ldots (\bar{s}_{n-1})^{-1} (\bar{\xi})^{-1} \overline{p_n(s_1, \ldots, s_n, \xi)} = 0. \end{aligned}$$

(Равенство $p_n(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) = \overline{p_n(z_1, \ldots, z_n)}$ справедливо, поскольку p_n имеет вещественные коэффициенты.)

В соответствии с определением мы можем написать равенство

$$p_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, z) = a + bz$$

с некоторыми a, $b \in \mathbb{C}$. Если $a \neq 0$, то $\xi \neq 0$, а если при этом и $b \neq 0$, то из доказанного нами будет вытекать, что

$$\xi = -\frac{a}{b} = (\bar{\xi})^{-1}$$

и, следовательно, $|\xi| = 1$. Поэтому доказательство леммы будет завершено, когда мы покажем, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

---

[1]) Другое доказательство этой теоремы приведено в приложении.

Имеем:

$$a = \sum_{A \subset \Lambda_{n-1}} s^A \Big(\prod_{i \in A} \prod_{j \in \Lambda_n \setminus A} B_{ij} \Big) =$$
$$= \sum_{A \subset \Lambda_{n-1}} s^A \Big(\prod_{i \in A} B_{in} \Big) \Big(\prod_{i \in A} \prod_{j \in \Lambda_{n-1} \setminus A} B_{ij} \Big) =$$
$$= p_{n-1}(B_{1n}s_1, \ldots, B_{n-1, n}s_{n-1}) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n-1} B_{in}s_i p_{n-1}\big(B_{1n}^{-1}s_1^{-1}, \ldots, B_{n-1, n}^{-1}s_{n-1}^{-1}\big) \neq 0$$

в силу предположения индукции, поскольку для $i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$ мы имеем, что

$$|B_{1n}^{-1}s_1^{-1}| = |B_{1n}^{-1}| > 1.$$

Аналогично,

$$b = \sum_{A \subset \Lambda_{n-1}} s^A \Big(\prod_{i \in A \cup \{n\}} \prod_{j \in \Lambda_{n-1} \setminus A} B_{ij} \Big) =$$
$$= \sum_{A \subset \Lambda_{n-1}} s^A \Big(\prod_{i \in A} \prod_{j \in \Lambda_{n-1} \setminus A} B_{ij} \Big) \Big(\prod_{i=1}^{n-1} B_{ni} \Big) \Big(\prod_{i \in A} B_{ni}^{-1} \Big) =$$
$$= \Big(\prod_{i=1}^{n-1} B_{ni} \Big) p_{n-1}(B_{n1}^{-1}s_1, \ldots, B_{n, n-1}^{-1}s_{n-1}) \neq 0,$$

так как

$$|B_{ni}^{-1}s_i| > 1 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-1. \ \blacksquare$$

Лемма 9.2. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_{n-2} \in \mathbb{C}$ *с* $|\xi_i| \geqslant 1$ *для* $i = 1, \ldots, n-2$. *Запишем* $p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w, z)$ *в следующем виде*:

$$p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w, z) = \alpha + \beta z + \gamma w + \delta z w.$$

Тогда $\delta \neq 0$.

Доказательство. Имеем:

$$\delta = \sum_{A \in \Lambda_{n-2}} \xi^A \Big(\prod_{i \in A \cup \{n-1, n\}} \prod_{j \in \Lambda_{n-2} \setminus A} B_{ij} \Big) =$$
$$= \Big(\prod_{j=1}^{n-2} B_{n-1, j} B_{n, j} \Big) p_{n-2}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}),$$

где $\eta_i = (B_{n-1, j}B_{n, j})^{-1}\xi_i$ для $i = 1, \ldots, n-2$. Но

$$|\eta_i| > |\xi_i| \geqslant 1 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n-2$$

и, следовательно, по предположению индукции $\delta \neq 0$. $\blacksquare$

Лемма 9.3. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_{n-2} \in \mathbb{C}$ *с* $|\xi_i| \geqslant 1$ *для* $i = 1, \ldots, n-2$; *снова напишем равенство*

$$p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w, z) = \alpha + \beta z + \gamma w + \delta z w.$$

Тогда

$$\left|\frac{\beta}{\delta}\right| < 1.$$

Доказательство. Пусть $\xi_{n-1} = -\frac{\beta}{\delta}$; тогда

$$0 = \beta + \xi_{n-1}\delta = \left(\prod_{i=1}^{n-1} B_{ni}\right) p_{n-1}\left(B_{n1}^{-1}\xi_1, \ldots, B_{n,\,n-1}^{-1}\xi_{n-1}\right).$$

Но $\left|B_{ni}^{-1}\xi_i\right| > 1$ для $i = 1, \ldots, n-2$, и, стало быть, по предположению индукции мы имеем $\left|B_{n,\,n-1}^{-1}\xi_{n-1}\right| \leqslant 1$. Следовательно, $|\xi_{n-1}| < 1$, т. е. $\left|\frac{\beta}{\delta}\right| < 1$. ■

Лемма 9.4. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_{n-2} \in \mathbb{C}$ *с* $|\xi_i| \geqslant 1$ *для* $i = 1, \ldots, n-2$, $w', z' \in \mathbb{C}$ *с* $|w'| > 1$, $|z'| > 1$, *и предположим, что*

$$p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w', z') = 0.$$

Тогда существуют $w'', z'' \in \mathbb{C}$ *с* $|w''| = 1$, $|z''| > 1$ *и*

$$p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w'', z'') = 0.$$

Доказательство. Как и раньше, запишем равенство

$$p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w, z) = \alpha + \beta z + \gamma w + \delta z w.$$

Тогда уравнение

$$p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w, z) = 0$$

определяет дробно-линейное преобразование

$$w = T(z) = -\frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}.$$

Преобразование T переводит $z = \infty$ в $w = -\beta/\delta$, и по лемме 9.3 мы имеем, что $|-\beta/\delta| < 1$. Очевидно также, что T отображает z' в w'. Поэтому, в силу непрерывности, найдется $z'' \in \mathbb{C}$ с $|z''| > 1$ и $|T(z'')| = 1$. (Действительно, мы можем взять z'' в виде tz' для некоторого $t > 1$.) Пусть $w'' = T(z'')$, тогда $p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w'', z'') = 0$. ■

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы. Предположим, что ее утверждение для n несправедливо; тогда существуют

$$\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w', z' \in \mathbb{C}$$

с $|\xi_i| \geqslant 1$ для $i = 1, \ldots, n-2$, $|w'| > 1$, $|z'| > 1$ и

$$p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w', z') = 0.$$

Поэтому предположения леммы 9.4 удовлетворяются, и, стало быть, найдутся $s_1, w_1 \in \mathbb{C}$ с $|s_1| = 1$, $|w_1| > 1$ и

$$p_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w_1, z_1) = 0.$$

Так как многочлен p_n симметричен по своим аргументам, то

$$p_n(s_1, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, w_1) = 0.$$

Если $|\xi_{n-2}| = 1$, то положим $s_2 = \xi_{n-2}$, если $|\xi_{n-2}| > 1$, то мы можем снова применить лемму 9.4, чтобы получить $s_2, w_2 \in \mathbb{C}$ с $|s_2| = 1$, $|w_2| > 1$ и

$$p_n(s_1, s_2, \xi_1, \ldots, \xi_{n-3}, w_2) = 0.$$

Итак, в любом случае мы имеем

$$p_n(s_1, s_2, \xi_1, \ldots, \xi_{n-3}, w_2) = 0$$

для некоторых $s_2, w_2 \in \mathbb{C}$ с $|s_2| = 1$, $|w_2| > 1$. Ясно, что мы можем повторять эту процедуру, пока не получим окончательно $s_1, \ldots, s_{n-1}, \xi \in \mathbb{C}$, $|s_i| = 1$ для $i = 1, \ldots, n-1$, $|\xi| > 1$ и $p_n(s_1, \ldots, s_{n-1}, \xi) = 0$. Но это противоречит лемме 9.1, и, значит, доказательство теоремы завершено. ■

Мы будем исследовать свойства парного потенциала V, рассматривая семейство парных потенциалов, параметризованных переменной λ, и наблюдая, как ведут себя корреляционные функции в зависимости от λ. Пусть задана функция $W: S \to \mathbb{R}$ с $W(x) \geqslant 0$ для всех $x \in S$; для $\lambda \in \mathbb{R}$ определим V_λ — парный потенциал с ассоциированной билинейной формой U_λ, где

$$U_\lambda(x, y) = \begin{cases} U(x, y), & \text{если} \quad x \neq y, \\ U(x, x) + \lambda W(x), & \text{если} \quad x = y. \end{cases}$$

Поскольку мы предполагаем, что потенциал V — притягивающий, т. е. $U(x, y) \geqslant 0$, если $x \neq y$, то, очевидно, и V_λ — притягивающий потенциал. Если $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$, то пусть $\pi^X_{\Lambda, \lambda}$ обозначает гиббсовское состояние на Λ с потенциалом V_λ и граничными условиями X. Пусть $\rho^X_{\Lambda, \lambda}: \mathscr{C}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ является корреляционной функцией для $\pi^X_{\Lambda, \lambda}$. Заметим, что можно записать

$$\rho^X_{\Lambda, \lambda}(A) = (Z^X_{\Lambda, \lambda})^{-1} \sum_{A \subset B \subset \Lambda} \exp[\lambda W(B) + U(B, B) + 2U(B, X)],$$

где $Z^X_{\Lambda, \lambda} = \sum_{B \subset \Lambda} \exp[\lambda W(B) + U(B, B) + 2U(B, X)]$, и, следовательно, рассматривать $\rho^X_{\Lambda, \lambda}(A)$ как мероморфную функцию комплексного переменного λ.

Предложение 9.1. *Пусть* $\lambda \in \mathscr{C}(S)$, $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$ *и* $x \in \Lambda$. *Предположим, что для некоторого* $\varepsilon > 0$ *имеется неравенство*

$$U(y, \Lambda) + 2U(y, X) - W(y) \geqslant \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad y \in \Lambda.$$

Пусть $f(\lambda) = \rho^X_{\Lambda, \lambda}(\{x\})$; *тогда* f *голоморфна в области* $\{z\colon \operatorname{Re} z > -1\}$ *и имеет место оценка*

$$|f(z)| \leqslant [1 - \exp(-\varepsilon)]^{-1}, \quad \textit{если} \quad \operatorname{Re} z > -1.$$

Доказательство. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, предположим, что $f(\lambda) = z_0$ для некоторого λ с $\operatorname{Re}\lambda > -1$ и λ не является нулем функции $Z^X_{\Lambda, \lambda}$. Тогда

$$z_0^{-1} \sum_{x \in A \subset \Lambda} \exp[\lambda W(A) + U(A, A) + 2U(A, X)] =$$
$$= \sum_{B \subset \Lambda} \exp[\lambda W(B) + U(B, B) + 2U(B, X)]$$

и, значит,

$$\sum_{A \subset \Lambda} \gamma(A) \exp[\lambda W(A) + U(A, A) + 2U(A, X)] = 0,$$

где

$$\gamma(A) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \notin A, \\ \left(1 - \dfrac{1}{z_0}\right), & \text{если} \quad x \in A. \end{cases}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \lambda W(A) + U(A, A) + 2U(A, X) &= \\ = \lambda W(A) + U(A, \Lambda) + 2U(A, X) - U(A, \Lambda \setminus A) &= \\ = \sum_{y \in A} [\lambda W(y) + U(y, \Lambda) + 2U(y, X)] - \sum_{i \in A} \sum_{j \in \Lambda \setminus A} U(i, j). \end{aligned}$$

Определим функцию $h(\cdot, \lambda)\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ равенством

$$h(y, \lambda) = \lambda W(y) + U(y, \Lambda) + 2U(y, X)$$

и функцию $\bar{\gamma}\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ равенством

$$\bar{\gamma}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y \neq x, \\ \left(1 - \dfrac{1}{z_0}\right), & \text{если} \quad y = x. \end{cases}$$

Тогда

$$0 = \sum_{A \subset \Lambda} \gamma(A) \exp[\lambda W(A) + U(A, A) + 2U(A, X)] =$$
$$= \sum_{A \subset \Lambda} \left(\prod_{y \in A} \bar{\gamma}(y) \exp h(y, \lambda)\right) \left(\prod_{i \in A} \prod_{j \in \Lambda \setminus A} \exp(-U(i, j))\right).$$

Заметим, что (для $i \neq j$) $0 < \exp(-U(i, j)) \leqslant 1$, и, следовательно, по теореме 9.1 равенство $f(\lambda) = z_0$ невозможно, если $|\bar{\gamma}(y) \exp h(y, \lambda)| > 1$ для всех $y \in \Lambda$. Но если $|z_0| > [1 - \exp(-\varepsilon)]^{-1}$, то легко проверить, что $|\bar{\gamma}(y) \exp h(y, \lambda)| > 1$ для всех $y \in \Lambda$. Поэтому

$$|f(z)| \leqslant [1 - \exp(-\varepsilon)]^{-1},$$

если $\operatorname{Re} z > -1$ и z не является нулем функции $Z^X_{\Lambda, \lambda}$. Но, очевидно, это неравенство должно сохраниться, даже если z — нуль функции $Z^X_{\Lambda, \lambda}$ (с $\operatorname{Re} z > -1$), следовательно, f голоморфна в области $\{z\colon \operatorname{Re} z > -1\}$ и

$$|f(z)| \leqslant [1 - \exp(-\varepsilon)]^{-1}, \quad \text{если } \operatorname{Re} z > -1. \blacksquare$$

Для $\lambda \in \mathbb{R}$ пусть $\rho^+_{\Lambda, \lambda} = \rho^{S \setminus \Lambda}_{\Lambda, \lambda}$, $\rho^-_{\Lambda, \lambda} = \rho^{\varnothing}_{\Lambda, \lambda}$ и

$$\rho^+_\lambda = \lim_{\Lambda \uparrow S} \rho^+_{\Lambda, \lambda}, \quad \rho^-_\lambda = \lim_{\Lambda \uparrow S} \rho^-_{\Lambda, \lambda}.$$

Имеет место

Предложение 9.2. *Предположим, что существуют* $\varepsilon > 0$ *и* $\Lambda_n \uparrow S$, *такие, что*

$$U(y, \Lambda_n) - W(y) \geqslant \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad y \in \Lambda_n \quad \textit{и всех} \quad n.$$

Пусть $x \in S$, *тогда существуют функции* f^+, f^-, *голоморфные в области* $\{z\colon \operatorname{Re} z > -1\}$, *такие, что для всех* $\lambda \in \mathbb{R}$ *с* $\lambda > -1$ *имеют место равенства* $f^+(\lambda) = \rho^+_\lambda(\{x\})$ *и* $f^-(\lambda) = \rho^-_\lambda(\{x\})$.

Доказательство. Пусть $f^+_n(\lambda) = \rho^{S \setminus \Lambda_n}_{\Lambda_n, \lambda}(\{x\})$, тогда в силу предложения 9.1 функция f^+_n голоморфна в области $\{z\colon \operatorname{Re} z > -1\}$ и

$$\left|f^+_n(z)\right| \leqslant [1 - \exp(-\varepsilon)]^{-1}, \quad \text{если} \quad \operatorname{Re} z > -1.$$

Таким образом, последовательность $\left\{f^+_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует нормальное семейство, и, значит, существует функция f^+, голоморфная в области $\{z\colon \operatorname{Re} z > -1\}$, и подпоследовательность $\{n_j\}$, такая, что $f^+_{n_j} \to f^+$ при $j \to \infty$ (причем сходимость равномерная на компактных подмножествах в $\{z\colon \operatorname{Re} z > -1\}$). Но для всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f^+_n(\lambda) \to \rho^+_\lambda(\{x\}) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и, значит, $f^+(\lambda) = \rho^+_\lambda(\{x\})$ для $\lambda > -1$. Очевидно, что это же доказательство работает и для $\rho^-_\lambda(\{x\})$. $\blacksquare$

Для $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ пусть $m(\Lambda, U) = \max\limits_{y \in \Lambda} U(y, S \setminus \Lambda)$ и

$$m^*(U) = \liminf_{\Lambda \uparrow S} m(\Lambda, U).$$

Теорема 9.2. *Предположим, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что имеет место либо*

(i) $U(x, S) \geqslant m^*(U) + \varepsilon(1 + |U(x, x)|)$ *для всех* $x \in S$,

либо

(ii) $-U(x, S) \geqslant m^*(U) + \varepsilon(1 + |U(x, x)|)$ *для всех* $x \in S$.

Тогда фазовый переход для V происходить не может.

Доказательство. Предположим, что имеет место (i). Определим $W: S \to \mathbb{R}$ равенством

$$W(y) = \varepsilon\left(\frac{1}{3} + |U(y, y)|\right).$$

Тогда по теореме 8.2 (примененной к $\bar{V}_\lambda$) фазовый переход для V_λ не может иметь места, если

$$\inf_{x \in S} [\exp V_\lambda(\{x\})(1 + \exp \bar{V}_\lambda(\{x\}))] > 1,$$

откуда несложным вычислением получаем, что фазовый переход для V_λ не может иметь места, если $\lambda \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Поскольку справедливо (i), то существуют $\Lambda_n \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda_n \uparrow S$, такие, что

$$U(x, S) \geqslant m(\Lambda_n, U) - \frac{1}{3}\varepsilon + \varepsilon(1 + |U(x, x)|) \text{ для всех } x \in S$$

и, следовательно,

$$U(y, S) \geqslant U(y, S \setminus \Lambda_n) + \frac{1}{3}\varepsilon + W(y) \text{ для всех } y \in \Lambda_n,$$

и, значит,

$$U(y, \Lambda_n) - W(y) \geqslant \frac{1}{3}\varepsilon \text{ для всех } y \in \Lambda_n.$$

По предложению 9.2, если $x \in S$, найдутся функции f^+, f^-, голоморфные в области $\{z\colon \operatorname{Re} z > -1\}$, такие, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ с $\lambda > -1$ имеют место равенства $f^+(\lambda) = \rho_\lambda^+(\{x\})$ и $f^-(\lambda) = \rho_\lambda^-(\{x\})$. Но если $\lambda \in \mathbb{R}$ с $\lambda \geqslant 1/\varepsilon$, то, поскольку фазовый переход не происходит для V_λ, необходимо, чтобы $\rho_\lambda^+(\{x\}) = \rho_\lambda^-(\{x\})$. Таким образом, $f^+(\lambda) = f^-(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda \geqslant 1/\varepsilon$, и, следовательно, по теореме единственности для голоморфных функций $f^+(z)=f^-(z)$ для всех z с $\operatorname{Re} z > -1$. В частности, $f^+(0)=f^-(0)$, т. е.

$$\rho_0^+(\{x\}) = \rho_0^-(\{x\}).$$

Это равенство верно для всех $x \in S$, и, значит, по теореме 8.1 фазовый переход для V не может иметь места. Вторая часть теоремы доказывается таким же образом с использованием $\bar{V}$ вместо V. ■

Напомним, что V — потенциал Изинга тогда и только тогда, когда $U(x, S)=0$ для всех $x \in S$. Таким образом, теорема 9.2 означает, грубо говоря, что фазовый переход не имеет места для потенциалов, которые в каком-то смысле далеки от потенциалов Изинга. Если мы наложим больше условий на потенциал V, то можно улучшить теорему 9.2. Пусть V_λ определено, как и прежде (с произвольной функцией W, для которой $W(x) \geqslant 0$ для всех $x \in S$); для $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ определим $\pi^0_{\Lambda,\lambda}$, как элемент из $\mathscr{S}(\Lambda)$ с плотностью, задаваемой равенством

$$\pi^0_{\Lambda,\lambda}(A) = \left(Z^0_{\Lambda,\lambda}\right)^{-1} \exp\left[\lambda W(A) + U(A, A) + U(A, S \setminus \Lambda)\right],$$

где

$$Z^0_{\Lambda,\lambda} = \sum_{B \subset \Lambda} \exp\left[\lambda W(B) + U(B, B) + U(B, S \setminus \Lambda)\right].$$

Пусть $\rho^0_{\Lambda,\lambda}$ обозначает корреляционную функцию для $\pi^0_{\Lambda,\lambda}$; мы будем писать ρ^0_Λ вместо $\rho^0_{\Lambda,0}$. Легко видеть, используя неравенство Холли, что

$$\rho^-_\Lambda \leqslant \rho^0_\Lambda \leqslant \rho^+_\Lambda.$$

Предложение 9.3. *Предположим, что для любого* $x \in S$ *существуют* α *с* $0 \leqslant \alpha < 1$ *и* $\Lambda_n \uparrow S$, *такие, что для всех* n *имеют место неравенства*

$$(1-\alpha)\rho^+_{\Lambda_n}(\{x\}) + \alpha\rho^-_{\Lambda_n}(\{x\}) \leqslant \rho^0_{\Lambda_n}(\{x\}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\rho^+_{\Lambda_n}(\{x\}) + (1-\alpha)\rho^-_{\Lambda_n}(\{x\}).$$

Если $\varepsilon > 0$, *то фазовый переход для* V *не может произойти в тех случаях, когда либо*

(i) $U(x, S) \geqslant \varepsilon(1 + |U(x, x)|)$ *для всех* $x \in S$,

либо

(ii) $-U(x, S) \geqslant \varepsilon(1 + |U(x, x)|)$ *для всех* $x \in S$.

Доказательство почти совпадает с доказательством теоремы 9.2. Рассматривая $\rho^0_{\Lambda,\lambda}(\{x\})$ как мероморфную функцию от λ, мы можем показать, что если выполняется (i), то, как и в предложениях 9.1, 9.2 и теореме 9.2, имеет место равенство $\rho^0(\{x\}) = \rho^+(\{x\})$. Но, очевидно,

$$(1-\alpha)\rho^+(\{x\}) + \alpha\rho^-(\{x\}) \leqslant \rho^0(\{x\}) \leqslant \alpha\rho^+(\{x\}) + (1-\alpha)\rho^-(\{x\})$$

и, значит, мы получаем, что $\rho^+(\{x\}) = \rho^-(\{x\})$. Поэтому фазовый переход для V не может иметь места. ■

К сожалению, проверить, когда выполняются условия предложения 9.3, не очень легко. Однако есть один случай, когда это можно сделать. Для $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ положим

$$Z_\Lambda^+ = \sum_{A \subset \Lambda} \exp[U(A, A) + 2U(A, S \setminus \Lambda)],$$

$$Z_\Lambda^- = \sum_{A \subset \Lambda} \exp U(A, A).$$

Предложение 9.4. *Пусть* $x \in \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 < \alpha < 1.$$

Тогда:

(i) *Если* $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} \geqslant \dfrac{Z_\Lambda^+}{Z_\Lambda^-}$,

то $\rho_\Lambda^0(\{x\}) \leqslant \alpha\rho_\Lambda^+(\{x\}) + (1-\alpha)(\rho_\Lambda^-(\{x\}))$.

(ii) *Если* $\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \geqslant \dfrac{[Z_\Lambda^- \exp 2U(\Lambda, S \setminus \Lambda)]}{Z_\Lambda^+}$,

то $\alpha\rho_\Lambda^+(\{x\}) + (1-\alpha)\rho_\Lambda^-(\{x\}) \leqslant \rho_\Lambda^0(\{x\})$.

Доказательство. Пусть состояния μ_1, $\mu_2 \in \mathscr{P}(\Lambda)$ задаются формулами:

$$\mu_1(A) = \frac{\alpha}{Z_\Lambda^+} \exp[U(A, A) + 2U(A, S \setminus \Lambda)] + \frac{(1-\alpha)}{Z_\Lambda^-} \exp U(A, A).$$

$$\mu_2(A) = \frac{1}{Z_\Lambda^0} \exp[U(A, A) + U(A, S \setminus \Lambda] \text{ для } A \subset \Lambda.$$

Тогда

$$\sum_{x \in A \subset \Lambda} \mu_1(A) = \alpha\rho_\Lambda^+(\{x\}) + (1-\alpha)\rho_\Lambda^-(\{x\}),$$

$$\sum_{x \in A \subset \Lambda} \mu_2(A) = \rho_\Lambda^0(\{x\}).$$

Если

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \geqslant \frac{Z_\Lambda^+}{Z_\Lambda^-},$$

то для всех A, $B \subset \Lambda$ справедливо неравенство

$$\mu_1(A \cup B)\,\mu_2(A \cap B) \geqslant \mu_1(A)\,\mu_2(B)$$

(это предоставляется проверить читателю). Поэтому, в силу неравенства Холли,

$$\rho^0_\Lambda(\{x\}) \leqslant \alpha\rho^+_\Lambda(\{x\}) + (1-\alpha)\,\rho^-_\Lambda(\{x\}).$$

Доказательство (ii) проводится таким же способом. ■

Из предположения 9.4 вытекает, что V удовлетворяет условиям предложения 9.3, если

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} U(\Lambda, S \setminus \Lambda) < \infty.$$

Мы сейчас используем еще один подход, чтобы улучшить для некоторых потенциалов теорему 9.2. Опять пусть задана функция W: $S \to \mathbb{R}$ с $W(x) \geqslant 0$ для всех $x \in S$; предположим, что $W(y) > 0$ для некоторого $y \in S$. Мы продолжаем использовать запись, что для $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$,

$$W(\Lambda) = \sum_{x \in \Lambda} W(x);$$

если $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, $X \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$, то пусть $Z^X_{\Lambda,\lambda}$ и $\rho^X_{\Lambda,\lambda}$ обозначают то же, что и выше. Определим функцию P^X_Λ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенством

$$P^X_\Lambda(\lambda) = \frac{1}{W(\Lambda)} \log Z^X_{\Lambda,\lambda}$$

(поскольку нас будет интересовать лишь предельное поведение $P^X_\Lambda(\lambda)$ при $\Lambda \uparrow S$, случай $W(\Lambda) = 0$ нас не беспокоит).

Нетрудно проверить следующие свойства P^X_Λ:

Предложение 9.5.

(i) $\dfrac{d}{d\lambda}\left(P^X_\Lambda(\lambda)\right) = \dfrac{1}{W(\Lambda)} \sum\limits_{x \in \Lambda} W(x)\,\rho^X_{\Lambda,\lambda}(\{x\})$.

(ii) P^X_Λ — *выпуклая по* λ.

(iii) *Если* $X, Y \in \mathscr{P}(S \setminus \Lambda)$, *то*

$$\left| P^X_\Lambda(\lambda) - P^Y_\Lambda(\lambda) \right| \leqslant \frac{2U(\Lambda, S \setminus \Lambda)}{W(\Lambda)}.$$

Доказательство (i) Имеем:

$$\frac{d}{d\lambda}(P_\Lambda^X(\lambda)) = \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{A\subset\Lambda} W(A)\,\pi_{\Lambda,\lambda}^X(A) =$$

$$= \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{A\subset\Lambda} \sum_{x\in A} W(x)\,\pi_{\Lambda,\lambda}^X(A) =$$

$$= \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{x\in\Lambda} \sum_{x\in A\subset\Lambda} W(x)\,\pi_{\Lambda,\lambda}^X(A) =$$

$$= \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{x\in\Lambda} W(x)\,\rho_{\Lambda,\lambda}^X(\{x\}).$$

(ii) Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ с $\lambda_1 < \lambda_2$ и $0 < t < 1$. Тогда

$$P_\Lambda^X(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) =$$

$$= \frac{1}{W(\Lambda)} \log\Big\{ \sum_{B\subset\Lambda} \exp[(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) W(B) + U(B, B) + 2U(B, X)] \Big\} =$$

$$= \frac{1}{W(\Lambda)} \log\Big\{ \sum_{B\subset\Lambda} [\exp[\lambda_1 W(B) + U(B, B) + 2U(B, X)]]^t [\exp[\lambda_2 W(B) + U(B, B) + 2U(B, X)]]^{(1-t)} \Big\} \leqslant$$

(в силу неравенства Гельдера)

$$\leqslant \frac{1}{W(\Lambda)} \log\Big\{ \Big[\sum_{B\subset\Lambda} \exp[\lambda_1 W(B) + U(B, B) + 2U(B, X)] \Big]^t \times$$

$$\times \Big[\sum_{B\subset\Lambda} \exp[\lambda_2 W(B) + U(B, B) + 2U(B, X)] \Big]^{(1-t)} \Big\} =$$

$$= tP_\Lambda^X(\lambda_1) + (1-t)P_\Lambda^X(t_2).$$

Следовательно, P_Λ^X выпуклая функция от λ.

(iii) Проверяется простым вычислением. ■

Чтобы доказать нашу следующую теорему, нам потребуется один результат из вещественного анализа.

Лемма 9.5. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал и для $n = 1, 2, \ldots$, пусть $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, дифференцируемая в некоторой точке $x_0 \in I$. Предположим, что $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всех $x \in I$ и функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ также дифференцируема в точке x_0. Тогда*

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0).$$

Доказательство. Определим $g_n\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ равенством

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0},$$

и аналогично $g\colon I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ — равенством

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Таким образом, $g_n(x) \to g(x)$ при $n \to \infty$, если $x \neq x_0$. Поскольку f_n — выпуклая функция, то с необходимостью

$$f_n'(x_0) = \inf_{x > x_0} g_n(x) = \sup_{x < x_0} g_n(x);$$

а так как f также выпукла, то и

$$f'(x_0) = \inf_{x > x_0} g(x) = \sup_{x < x_0} g(x).$$

Поэтому $f_n'(x_0) \leqslant g_n(x)$ для всех $x > x_0$ и, значит,

$$\limsup_{n \to \infty} f_n'(x_0) \leqslant \lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x) \text{ для всех } x > x_0.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n \to \infty} f_n'(x_0) \leqslant \inf_{x > x_0} g(x) = f'(x_0).$$

С другой стороны, поскольку $f_n'(x_0) \geqslant g_n(x)$ для всех $x < x_0$, то справедливо неравенство

$$\liminf_{n \to \infty} f_n'(x_0) \geqslant f'(x_0).$$

Таким образом, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x_0)$ существует и равен $f'(x_0)$. ■

Теорема 9.3. *Предположим, что пределы*

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{x \in \Lambda} W(x)\, \rho^+(\{x\})$$

и

$$\lim_{\Lambda \uparrow S} \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{x \in \Lambda} W(x)\, \rho^-(\{x\})$$

существуют, обозначим эти пределы через W^+ и W^- соответственно. Предположим также, что

$$\liminf_{\Lambda \uparrow S} \frac{U(\Lambda, S \setminus \Lambda)}{W(\Lambda)} = 0$$

и для некоторого $\varepsilon > 0$ либо

(i) $U(x, S) \geqslant \varepsilon(1 + W(x))$ *для всех* $x \in S$, *либо*

(ii) $-U(x, S) \geqslant \varepsilon(1+W(x))$ *для всех* $x \in S$.

Тогда $W^+ = W^-$.

Доказательство. Для $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ будем писать P_Λ^+ (соответственно P_Λ^-) вместо $P_\Lambda^{S \setminus \Lambda}$ (соответственно $P_\Lambda^{\varnothing}$). Определим f_Λ^+, f_Λ^- равенствами

$$f_\Lambda^+(\lambda) = \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{x \in \Lambda} W(x) \rho_{\Lambda, \lambda}^{S \setminus \Lambda}(\{x\});$$

$$f_\Lambda^-(\lambda) = \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{x \in \Lambda} W(x) \rho_{\Lambda, \lambda}^{\varnothing}(\{x\}).$$

Предположим, что выполняется (i), тогда

$$U(y, \Lambda) + U(y, S \setminus \Lambda) \geqslant \varepsilon + \varepsilon W(y) \text{ для всех } y \in \Lambda$$

и, значит,

$$U(y, \Lambda) + 2U(y, S \setminus \Lambda) - \varepsilon W(y) \geqslant \varepsilon \text{ для всех } y \in \Lambda.$$

Поэтому из предложения 9.1 вытекает, что если $x \in \Lambda$, то $\rho_{\Lambda, \lambda}^{S \setminus \Lambda}(\{x\})$ — голоморфная функция в области $\{\lambda\colon \operatorname{Re} \lambda > -\varepsilon\}$ и имеет место оценка

$$|\rho_{\Lambda, \lambda}^{S \setminus \Lambda}(\{x\})| \leqslant [1 - \exp(-\varepsilon)]^{-1}, \text{ если } \operatorname{Re} \lambda > -\varepsilon.$$

Таким образом, мы можем рассматривать f_Λ^+ как голоморфную функцию в области $\{z\colon \operatorname{Re} z > -\varepsilon\}$, для которой справедливо неравенство

$$[f_\Lambda^+(z)] \leqslant [1 - \exp(-\varepsilon)]^{-1}, \text{ если } \operatorname{Re} z > -\varepsilon.$$

Стало быть, семейство $\{f_\Lambda^+\}_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)}$ является нормальным; следовательно, существуют функция f^+, голоморфная в области $\{z\colon \operatorname{Re} z > -\varepsilon\}$, и множества $\Lambda_n \uparrow S$, такие, что

(a) $$\lim_{n \to \infty} \frac{U(\Lambda_n, S \setminus \Lambda_n)}{W(\Lambda_n)} = 0$$

и

(b) $f_{\Lambda_n}^+ \to f^+$ равномерно на компактных подмножествах области $\{z\colon \operatorname{Re} z > -\varepsilon\}$.

Определим теперь функции g_n^+, g_n^-, g: $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ равенствами

$$g_n^+(\lambda) = \int_0^\lambda f_{\Lambda_n}^+(t)\,dt,$$

$$g_n^-(\lambda) = \int_0^\lambda f_{\Lambda_n}^-(t)\,dt,$$

$$g(\lambda) = \int_0^\lambda f^+(t)\,dt.$$

Тогда, в силу предложения 9.5,

$$g_n^+(\lambda) = P_\Lambda^+(\lambda) - P_\Lambda^+(0),$$

$$g_n^-(\lambda) = P_\Lambda^-(\lambda) - P_\Lambda^-(0)$$

и, значит, g_n^+, g_n^- — выпуклые функции. Ясно, что $g_n^+(\lambda) \to g(\lambda)$ для всех $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, но, кроме того, и $g_n^-(\lambda) \to g(\lambda)$ для всех $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; действительно, из предложения 9.5 мы имеем оценку

$$|g_n^+(\lambda) - g_n^-(\lambda)| \leqslant |\lambda| 4 \frac{U(\Lambda_n, S \setminus \Lambda_n)}{W(\Lambda_n)}$$

и, следовательно, $g_n^+(\lambda) - g_n^-(\lambda) \to 0$. Поэтому, в силу леммы 9.5,

$$\lim_{n\to\infty} f_{\Lambda_n}^+(0) = f^+(0) = \lim_{n\to\infty} f_{\Lambda_n}^-(0).$$

Но для любого $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и $x \in \Lambda$

$$\rho_\Lambda^-(\{x\}) \leqslant \rho^-(\{x\}) \leqslant \rho^+(\{x\}) \leqslant \rho_\Lambda^+(\{x\})$$

и, значит,

$$f_\Lambda^-(0) \leqslant \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{x\in\Lambda} W(x)\rho^-(\{x\}) \leqslant \frac{1}{W(\Lambda)} \sum_{x\in\Lambda} W(x)\rho^+(\{x\}) \leqslant f_\Lambda^+(0).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\Lambda_n}^-(0) \leqslant W^- \leqslant W^+ \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_{\Lambda_n}^+(0)$,

т. е. $W^+ = W^-$. Наконец, если выполняется (ii), а не (i), то (i) справедливо для $\bar{V}$, и прежнее доказательство вновь работает, поскольку

$$\bar{\rho}^+(\{x\}) = 1 - \rho^-(\{x\}) \quad \text{и} \quad \bar{\rho}^-(\{x\}) = 1 - \rho^+(\{x\}). \ \blacksquare$$

Если

$$\liminf_{\Lambda \uparrow S} U(\Lambda, S \setminus \Lambda) = 0,$$

то, полагая

$$W(y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y = x, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

имеем, что $W^+ = \rho^+(\{x\})$, $W^- = \rho^-(\{x\})$. Таким образом, фазовый переход не может происходить в рассматриваемом случае, если для некоторого $\varepsilon > 0$ либо (i) $U(y, S) \geqslant 0$ для всех $y \in S$, либо (ii) $-U(y, S) \geqslant 0$ для всех $y \in S$. Однако этот результат хуже, чем тот, который был получен использованием предложений 9.3 и 9.4. Наиболее эффективно теорема 9.3 используется, когда априори известно, что $U(x, S)$, $\rho^+(\{x\})$ и $\rho^-(\{x\})$ не зависят от $x \in S$. (Это произойдет, если на S есть некоторая дополнительная структура, относительно которой U обладает достаточной симметричностью или однородностью.) Мы можем в этом случае положить $W(y) = 1$ для всех $y \in S$, тогда по теореме 9.3 при выполнении условия

$$\liminf_{\Lambda \uparrow S} \frac{U(\Lambda, S \setminus \Lambda)}{|\Lambda|} = 0$$

фазовый переход не может иметь места, если V не потенциал Изинга.

В качестве примера такой ситуации возьмем $S = Z^\nu$ (для некоторого $\nu \geqslant 1$), где Z^ν обозначает множество точек R^ν с целочисленными координатами. Пусть V — парный потенциал на Z^ν с ассоциированной билинейной формой U; мы будем говорить, что V *трансляционно-инвариантен*, если для любых $x, y, z \in Z^\nu$

$$U(x, y) = U(x + z, y + z).$$

Теорема 9.4. *Пусть $V \in H(Z^\nu)$ — притягивающий трансляционно-инвариантный парный потенциал. Тогда фазовый переход происходить не может, если только V не потенциал Изинга.*

Доказательство. Пусть U — билинейная форма, ассоциированная с V. Очевидно, что $U(x, Z^\nu)$, $\rho^+(\{x\})$ и $\rho^-(\{x\})$ не зависят от $x \in Z^\nu$, стало быть, по теореме 9.3 нам необходимо проверить только, что

$$\liminf_{\Lambda \uparrow Z^\nu} \frac{U(\Lambda, Z^\nu \setminus \Lambda)}{|\Lambda|} = 0.$$

Для $n \geqslant 1$ пусть $a(n) = \sum_{\substack{x \in Z^\nu \\ n-1 < \|x\| \leqslant n}} U(0, x)$. Тогда $a(n) \geqslant 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a(n) = \sum_{y \neq 0} U(0, y) < \infty$. Пусть $\Lambda_n \in \mathscr{C}(Z^\nu)$ является

„кубом“:

$$\Lambda_n = \{(x_1, \ldots, x_\nu) \in Z^\nu\colon |x_i| \leqslant n,\ i = 1, \ldots, \nu\}$$

(полагаем $\Lambda_{-1} = \varnothing$). Тогда

$$U(\Lambda_n, Z^\nu \setminus \Lambda_n) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{y \in \Lambda_r \setminus \Lambda_{r-1}} U(y, Z^\nu \setminus \Lambda_n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{n} |\Lambda_r \setminus \Lambda_{r-1}| \sum_{s=n-r}^{\infty} a(s+1) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} a(s+1) \sum_{r=\max\{n-s,\,0\}}^{n} |\Lambda_r \setminus \Lambda_{r-1}| =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} a(s+1)\,(|\Lambda_n| - |\Lambda_{m(n,\,s)}|),$$

где $m(n, s) = \max\{n-s, 0\} - 1$. Таким образом,

$$\frac{U(\Lambda_n, Z^\nu \setminus \Lambda_n)}{|\Lambda_n|} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} a(s+1)\left[1 - \frac{|\Lambda_{m(n,\,s)}|}{|\Lambda_n|}\right].$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что

$$\sum_{s=n_0}^{\infty} a(s+1) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Поэтому если $n > n_0$, то

$$\sum_{s=0}^{\infty} a(s+1)\left[1 - \frac{|\Lambda_{m(n,\,s)}|}{|\Lambda_n|}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{s=0}^{n_0-1} a(s+1)\left[1 - \frac{|\Lambda_{m(n,\,s)}|}{|\Lambda_n|}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \left[1 - \frac{|\Lambda_{n-n_0}|}{|\Lambda_n|}\right] \sum_{s=0}^{n_0-1} a(s+1).$$

Но

$$\frac{|\Lambda_{n-n_0}|}{|\Lambda_n|} = \left[\frac{2(n-n_0)+1}{2n+1}\right]^\nu,$$

и, значит, если n достаточно велико, то

$$\left[1 - \frac{|\Lambda_{n-n_0}|}{|\Lambda_n|}\right] \sum_{s=0}^{n_0-1} a(s+1) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

следовательно, $\frac{U(\Lambda_n, Z^\nu \setminus \Lambda_n)}{|\Lambda_n|} < \varepsilon$.

Поэтому $\liminf\limits_{\Lambda \uparrow Z^\nu} \frac{U(\Lambda, Z^\nu \setminus \Lambda)}{|\Lambda|} = 0$. ■

Замечания. Доказательство теоремы 9.1, приведенное здесь, заимствовано у Рюэля (1969); теорема 9.1 является обобщением теоремы Янга и Ли (1952). Техника, используемая для доказательства теоремы 9.3 принадлежит Лебовицу и Мартин-Лёфу (1972), которые использовали эту теорему для доказательства теоремы 9.4; последний результат был получен также Рюэлем (1971 в).

10. ПРИМЕРЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

К настоящему моменту читатель, весьма возможно, сомневается, происходит ли вообще когда-нибудь фазовый переход. В этой главе мы полностью устраним у читателя все сомнения такого сорта, приведя примеры потенциалов, для которых действительно имеет место фазовый переход. Из результатов предыдущих глав кажется правдоподобным, что если фазовый переход происходит, то его наличие наиболее вероятно для потенциалов Изинга. Поэтому в большей части этой главы мы будем иметь дело с потенциалами Изинга.

Предложение 10.1. *Пусть V — супермодулярный потенциал Изинга. В таком случае фазовый переход для V имеет место тогда и только тогда, когда существуют $x \in S$ и $\alpha > 1$, такие, что для всех $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ с $x \in \Lambda$ справедливо неравенство*

$$\Big[\sum_{x \notin B \subset \Lambda} \exp V(B)\Big] \Big/ \Big[\sum_{x \in A \subset \Lambda} \exp V(A)\Big] \geqslant \alpha.$$

Доказательство. Имеем:

$$\Big[\sum_{x \notin B \subset \Lambda} \exp V(B)\Big] \Big/ \Big[\sum_{x \in A \subset \Lambda} \exp V(A)\Big] =$$

$$= [1 - \rho_\Lambda^-(\{x\})]/\rho_\Lambda^-(\{x\}) = \rho_\Lambda^+(\{x\})/\rho_\Lambda^-(\{x\})$$

(в силу предложения 8.9). Заметим, что

$$\rho_\Lambda^+(\{x\})/\rho_\Lambda^-(\{x\}) \downarrow \rho^+(\{x\})/\rho^-(\{x\}) \quad \text{при} \quad \Lambda \uparrow S.$$

Таким образом, искомый результат следует из теоремы 8.1. ■

Теперь будет удобно предположить, что S имеет дополнительную структуру, а именно мы будем считать точки множества S вершинами графа $\mathscr{G} = (S, e)$, где e — множество ребер $\mathscr{G}$. Как и в гл. 4, мы рассматриваем лишь графы $\mathscr{G}$, не имеющие кратных ребер или петель. Будем говорить, что $x, y \in S$ являются *соседями*, если между ними есть ребро графа (будем обозначать это ребро через $\langle x, y\rangle$); предположим, что каждая точка $x \in S$ имеет лишь конечное число соседей. Если $A \subset S$ и $z_1, \ldots, z_n \in A$, то $z_1, \ldots, z_n$ называется *путем из x к y в A*, если $x = z_1$, $y = z_n$, а z_i и z_{i+1} — соседи для $i = 1, \ldots, n-1$; подмножество $A \subset S$ называется *связным*, если для любых $x \neq y \in A$ существует путь из x к y в A. С настоящего момента мы будем предполагать S связным. Если α — конечное подмножество в e и $x \in S$, то мы определим $I(x, \alpha) \subset S$ равенством

$$I(x, \alpha) = \{x\} \cup \{y \in S\colon \text{существует путь } x = z_1, \ldots, z_n = y \text{ в } S, \text{ такой, что } \langle z_i, z_{i+1}\rangle \notin \alpha,\ i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Пусть $x \in \Lambda \in \mathscr{C}(S)$, а α — конечное подмножество в e; мы будем говорить, что α *блокирует x в Λ*, если $I(x, \alpha) \subset \Lambda$. Если α блокирует x в Λ, но никакое собственное подмножество в α не блокирует x в Λ, то будем называть α *бордюром, окружающим x в Λ*[1]; $|\alpha|$ называется *длиной* бордюра.

Элемент Λ из $\mathscr{C}(S)$ называется *симплексом*, если каковы бы ни были $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$, то x и y соседи. Потенциал $V \in H(S)$ называется потенциалом *ближайшего соседа*, если $J_V(A) = 0$ и если только A не симплекс. Мы будем рассматривать только парные потенциалы; таким образом, пусть V — супермодулярный парный потенциал Изинга ближайшего соседа, U — ассоциированная с ним билинейная форма. Стало быть, мы имеем, $U(x, y) \geqslant 0$, если $x \neq y$, и $U(x, y) = 0$, если x и y не являются соседями; кроме того, $U(x, S) = 0$ для $x \in S$.

Предложение 10.2. *Предположим, что $U(x, y) \geqslant b > 0$, когда x и y соседи. Пусть $x \in \Lambda \in \mathscr{C}(S)$, тогда*

$$\rho_\Lambda^-(\{x\}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} r_n(x, \Lambda) \exp(-nb),$$

где $r_n(x, \Lambda)$ — число бордюров, окружающих x в Λ и имеющих длину n.

Доказательство. Заметим, что если α — бордюр, окружающий x в Λ, и $a \in \alpha$ с $a = \langle z_1, z_2\rangle$, то, по крайней мере, одна точка из z_1, z_2 принадлежит Λ. Если $A \subset \Lambda$ и α — бордюр, окружающий x в Λ, то будем говорить, что Λ *содержит* α, когда для любого $a \in \alpha$ с $a = \langle z_1, z_2\rangle$ в точности одна из точек z_1, z_2 принадлежит A. У нас есть следующая оценка.

---

[1]) В оригинале: a border round x in Λ. — *Прим. перев.*

Лемма 10.1. *Пусть* α — *бордюр, окружающий* x *в* Λ, *и пусть* $B_\alpha = \{A \subset \Lambda$: A *содержит* $\alpha\}$. *Тогда*

$$\sum_{A \in B_\alpha} \pi_\Lambda^-(A) \leqslant \exp(-|\alpha| b).$$

Доказательство. Пусть W: $e \to \mathbb{R}$ задается равенством

$$W(\langle z_1, z_2\rangle) = -U(z_1, z_2).$$

Тогда если $A \in \mathscr{C}(S)$, то

$$V(A) = U(A, A) = U(A, S) - U(A, S \setminus A) = -U(A, S \setminus A) = \\ = \sum_{a \in e} A(a) W(a),$$

где $A(\langle z_1, z_2\rangle) = 1$, если в точности одна из точек z_1, z_2 принадлежит A, 0 — в противном случае.

Определим функцию g: $\mathscr{P}(\Lambda) \to \mathscr{P}(\Lambda)$ с

$$g(A) = [A \cap (\Lambda \setminus I(x, \alpha))] \cup [I(x, \alpha) \setminus A]$$

(т. е. нули и единицы на $I(x, \alpha)$ меняются местами; таким образом, в обозначениях гл. 7 $g = \tau_R$ с $R = I(x, \alpha)$); очевидно, g является биекцией из $\mathscr{P}(\Lambda)$ в $\mathscr{P}(\Lambda)$. Если $A \in B_\alpha$, то

$$V(g(A)) = \sum_{a \in e} [g(A)](a) W(a) = \\ = \sum_{a \in e \setminus \alpha} [g(A)](a) W(a) = \sum_{a \in e \setminus \alpha} A(a) W(a) = \\ = V(a) - \sum_{a \in \alpha} W(a) \geqslant V(a) + |\alpha| b,$$

т. е.

$$V(A) \leqslant V(g(A)) - |\alpha| b.$$

Поэтому

$$\sum_{A \in B_\alpha} \pi_\Lambda^-(A) = \Big[\sum_{A \in B_\alpha} \exp V(A)\Big] \Big/ \Big[\sum_{A \subset \Lambda} \exp V(A)\Big] \leqslant \\ \leqslant \Big[\sum_{A \in B_\alpha} \exp V(A)\Big] \Big/ \Big[\sum_{A \in B_\alpha} \exp V(g(A))\Big] \leqslant \\ \leqslant \exp(-|\alpha| b). \quad \blacksquare$$

Продолжим доказательство предложения 10.2, установив, что имеет место

Лемма 10.2. *Пусть* $A \subset \Lambda$ *с* $x \in A$. *Тогда существует бордюр* α, *окружающий* x *в* Λ, *такой, что* A *содержит* α.

Доказательство. Пусть $\beta = \{a \in e : A(a) = 1\}$; тогда, очевидно, β блокирует x в Λ. Таким образом, существует бордюр α, окружающий x в Λ, с $\alpha \subset \beta$ и, по построению, A содержит α. ■

Доказательство предложения 10.2 теперь легко завершается. Пусть $D(n)$ обозначает множество бордюров, окружающих x в Λ и имеющих длину n, пусть $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(n)$. Тогда, в силу леммы 10.2, имеет место оценка

$$\rho_\Lambda^-(\{x\}) \leqslant \sum_{\alpha \in D} \left[\sum_{A \in B_\alpha} \pi_\Lambda^-(A)\right]$$

и поэтому, используя лемму 10.1, получаем, что

$$\rho_\Lambda^-(\{x\}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in D(n)} \sum_{A \in B_\alpha} \pi_\Lambda^-(A) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in D(n)} \exp(-nb) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r_n(x, \Lambda) \exp(-nb). \blacksquare$$

Заметим, что если α — бордюр, окружающий x в Λ, и $\Lambda' \supset \Lambda$, то α является бордюром, окружающим x в Λ'; назовем α бордюром вокруг x, если α является бордюром, окружающим x в Λ для некоторого $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, и обозначим через $r_n(x)$ число бордюров вокруг x, имеющих длину n. Ясно, что $r_n(x, \Lambda) \leqslant r_n(x)$ для всех $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$. Таким образом, из предложения 10.2 немедленно вытекает

Теорема 10.1 *Пусть V — супермодулярный парный потенциал Изинга ближайшего соседа с ассоциированной билинейной формой U; предположим, что $U(x, y) \geqslant b > 0$, когда x и y соседи. Предположим также, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(x) \exp(-nb) < \frac{1}{2}$$

для некоторого $x \in S$. Тогда для V имеет место фазовый переход.

Пусть $V \in H(S)$ — супермодулярный парный потенциал Изинга ближайшего соседа, U — ассоциированная с ним билинейная форма и $U(x, y) \geqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, когда x и y соседи. Назовем граф $\mathscr{G} = (S, e)$ *графом фазового перехода*, если для любого потенциала с указанными свойствами найдется $t > 0$, такое, что для потенциала tV будет иметь место фазовый переход. (Заметим, что по теореме 8.4 если фазовый переход происходит для tV, то он будет происходить также и для sV при всех $s > t$.)

Предложение 10.3. *Пусть $\mathscr{G} = (S, e)$, и предположим, что существуют $x \in S$ и $K > 0$, такие, что $r_n(x) \leqslant exp(Kn)$ для всех $n \geqslant 1$. Тогда $\mathscr{G}$ — граф фазового перехода.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 10.1, поскольку если t достаточно велико, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp((K - \varepsilon t)n) < \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Для $\nu \in \mathbb{N}$ пусть $\mathbb{Z}^\nu$ обозначает множество точек в $\mathbb{R}^\nu$, имеющих целочисленные координаты, наделенное обычной структурой графа: x, $y \in \mathbb{Z}^\nu$ являются соседями, если $\|x - y\| = 1$. Ясно, что $\mathbb{Z}^1$ не удовлетворяет условиям предложения 10.3 (поскольку $r_2(x) = \infty$), но для $\nu \geqslant 2$ можно проверить, что $\mathbb{Z}^\nu$ удовлетворяет условиям этого предложения. Однако проделать это для $\nu > 2$ весьма сложно; итак, чтобы показать, что $\mathbb{Z}^\nu$ для $\nu \geqslant 2$ является графом фазового перехода, мы поступим следующим образом: Если $\mathscr{G} = \{S, e\}$ и $\mathscr{G}' = \{S', e'\}$ — два графа, то $\mathscr{G}'$ будет называться подграфом $\mathscr{G}$, если $S' \subset S$ и $e' \subset e$ (т. е. если x, $y \in S'$ и в $\mathscr{G}'$ есть ребро, соединяющее x и y, то и в $\mathscr{G}$ есть ребро между x и y).

Предложение 10.4. *Если $\mathscr{G}'$ является подграфом в $\mathscr{G}$ и $\mathscr{G}'$ — граф фазового перехода, то $\mathscr{G}$ — также граф фазового перехода.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{G} = (S, e)$, $\mathscr{G}' = (S', e')$; $V \in H(S)$ — супермодулярный парный потенциал Изинга ближайшего соседа с ассоциированной билинейной формой U; предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $U(x, y) \geqslant \varepsilon$, когда x и y соседи в $\mathscr{G}$. Определим потенциал $V' \in H(S')$, полагая, что его ассоциированная билинейная форма U' задается равенствами

$$U'(x, y) = \begin{cases} U(x, y), \text{ если } x,\ y \in S' \text{ — соседи в } \mathscr{G}', \\ 0 \text{ для всех других } x,\ y \in S' \text{ с } x \neq y, \end{cases}$$

$$U'(x, x) = -\sum_{x \neq y \in S'} U'(x, y).$$

Таким образом, если $U'(x, y) \geqslant \varepsilon$, когда x и y — соседи в $\mathscr{G}'$, а также поскольку V' — супермодулярный парный потенциал Изинга ближайшего соседа на S, то существует $t_0 > 0$, такое, что для $t_0 V'$ имеет место фазовый переход. Определим теперь потенциал $V^* \in H(S)$, полагая, что его ассоциированная билинейная форма U^* задается формулой

$$U^*(x, y) = \begin{cases} U'(x, y), \text{ если } x, y \in S', \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда V^* — супермодулярный парный потенциал Изинга ближайшего соседа на S; мы предоставляем читателю проверить, что если $t > 0$, то фазовый переход для tV^* имеет место тогда и только тогда, когда он имеет место для tV'. Таким образом, для t_0V^* фазовый переход происходит. Но легко проверить, что $I_{t_0V}(A) \geqslant I_{t_0V^*}(A)$ для всех $A \in \mathscr{E}(S)$ и, стало быть, по теореме 8.4 фазовый переход для t_0V имеет место. Следовательно, $\mathscr{G}$ — граф фазового перехода. ■

Очевидно, что $\mathbb{Z}^2$ можно рассматривать как подграф $\mathbb{Z}^\nu$ для любого $\nu \geqslant 2$. Итак, чтобы показать, что $\mathbb{Z}^\nu$ — граф фазового перехода для $\nu \geqslant 2$, достаточно доказать это для $\nu = 2$.

Предложение 10.5. *Граф $\mathbb{Z}^2$ является графом фазового перехода.*

Доказательство. Покажем, что $\mathbb{Z}^2$ удовлетворяет условиям предложения 10.3. Сначала мы определим граф $\mathscr{E}$, вершины которого суть ребра $\mathbb{Z}^2$, поэтому естественно рассматривать вершины $\mathscr{E}$ как средние точки ребер $\mathbb{Z}^2$, т. е. точки $\mathbb{R}^2$, которые имеют вид $\left(n, m+\frac{1}{2}\right)$ или $\left(n+\frac{1}{2}, m\right)$ с $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. По определению назовем соседями точки (x, y) из $\mathscr{E}$ точки $\left(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right)$, $\left(x-\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}\right)$, $\left(x+\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right)$ и $\left(x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}\right)$, таким образом, граф $\mathscr{E}$ изоморфен $\mathbb{Z}^2$ (см. рис. 1). Мы оставляем читателю проверку того, что бордюры вокруг 0 в $\mathbb{Z}^2$ в точности соответствуют контурам вокруг 0 в $\mathscr{E}$ (где контур в $\mathscr{E}$ — это путь $z_0, z_1, \ldots, z_n$ с $z_0 = z_n$ и различными $z_1, \ldots, z_n$). Число контуров в $\mathscr{E}$ длины n, которые включают данную точку $w \in \mathscr{E}$, меньше, чем 3^n (поскольку при заданном отрезке контура с $w = z_0, z_1, \ldots, z_k$ имеется не более трех возможностей для выбора z_{k+1}). Если контур имеет длину n и обходит вокруг 0, то каждая точка этого контура находится на расстоянии, не большем $\frac{1}{2}n$ шагов от 0, поэтому число контуров длины n, содержащих внутри себя 0, заведомо не превосходит $n^2 3^n$. Стало быть, в силу предложения 10.3 $\mathbb{Z}^2$ — граф фазового перехода. ■

Чтобы завершить исследование для $\mathbb{Z}^\nu$, мы должны показать теперь, что $\mathbb{Z}(=\mathbb{Z}^1)$ не является графом фазового перехода. Мы, однако, в настоящий момент оставим это в качестве упражнения для читателя, хотя доказательство все-таки будет дано в конце этой главы. А сейчас мы обратим наше внимание на очень простой класс графов, для которых можно произвести точные вычисления. Граф $\mathcal{G}=(S, e)$ называется *деревом*, если он является связным и не содержит замкнутых контуров. Таким образом, $\mathcal{G}$ — дерево тогда и только тогда, когда для любых $x \neq y \in S$ существует единственный путь $x=z_1, \ldots$ $\ldots, z_n=y$ из x к y с различными $z_1, \ldots, z_n$. Для $n \geqslant 2$ пусть $\mathcal{T}^n$ обозначает дерево, у которого каждая вершина имеет в точности n соседей, в частности $\mathcal{T}^2=\mathbb{Z}$.

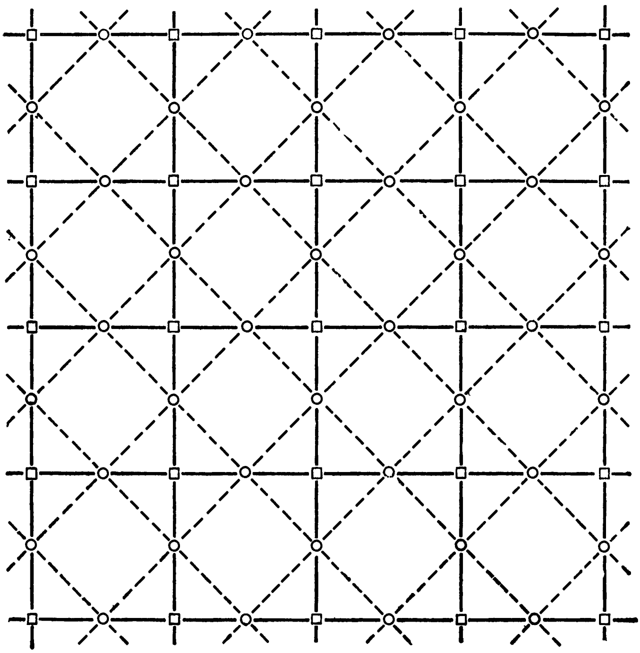

Рис. 1

Пусть $\mathcal{G}=(S, e)$ — дерево, простота структуры $\mathcal{G}$ позволяет нам определить элементы $\mathcal{S}(S)$, явно указав вероятность каждого конечномерного цилиндра. Нам потребуются следующие определения: пусть $x \in S$, а $y_1, y_2 \in S$ — соседи; мы будем говорить, что y_1 ближе к x, чем y_2, если любой путь из x к y_2 содержит y_1; поскольку $\mathcal{G}$ — дерево, осуществляется одна из следующих возможностей: либо y_1 ближе к x, чем y_2, либо y_2 ближе к x, чем y_1. Если $\Lambda \in \mathscr{E}(S)$ и Λ связно, то пусть

$$e_\Lambda = \{\langle z_1, z_2\rangle \in e\colon z_1, z_2 \text{ — соседи и } z_1, z_2 \in \Lambda\}.$$

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$

где $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, — стохастическая матрица размера 2×2; $r(0)$, $r(1) \geqslant 0$ с $r(0) + r(1) = 1$, и пусть $\Lambda \in \mathscr{E}(S)$ связно и $A \subset \Lambda$. Для любого $x \in \Lambda$ определим $h_x\colon e_\Lambda \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$h_x(\langle z_1, z_2\rangle) = \begin{cases} p, & \text{если } z_1 \notin A,\ z_2 \notin A, \\ q, & \text{если } z_1 \in A,\ z_2 \in A, \\ 1-p, & \text{если } z_1 \notin A,\ z_2 \in A \\ & \text{и } z_1 \text{ ближе к } x, \text{ чем } z_2, \\ 1-q, & \text{если } z_1 \in A,\ z_2 \notin A \\ & \text{и } z_1 \text{ ближе к } x, \text{ чем } z_2. \end{cases}$$

и пусть $g\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ задается равенством

$$g(x) = \begin{cases} r(1) \prod\limits_{a \in e_\Lambda} h_x(a), & \text{если } x \in A, \\ r(0) \prod\limits_{a \in e_\Lambda} h_x(a), & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Лемма 10.3. *Функция $g(x)$ не зависит от $x \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда*

$$r(0)(1-p) = r(1)(1-q).$$

Доказательство. Это утверждение легко проверяется. ■

Теперь мы предположим, что действительно справедливо равенство $r(0)(1-p) = r(1)(1-q)$, и мы можем, таким образом, определить $\mu([A, \Lambda]) = g(x)$ (для любого $x \in \Lambda$), когда $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ и Λ связно. Нетрудно видеть, что так единственным образом определяется элемент $\mu \in \mathscr{P}(S)$; и, конечно, для любого $A \subset \Lambda \in \mathscr{C}(S)$ мы можем точно вычислить значение $\mu([A, \Lambda])$. Приведенная выше конструкция может показаться несколько вычурной, но можно проверить, что мера μ определена таким образом, что она действует как цепь Маркова вдоль любого пути в S.

Предложение 10.6. *Мера $\mu \in \mathscr{G}_V$, где $V \in H(S)$, является парным потенциалом ближайшего соседа с ассоциированной* *билинейной формой U, задаваемой формулой*

$$U(x, y) = \begin{cases} \log\left[\left(\frac{1-q}{p}\right)^{m(x)}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)\right], & \text{если } x = y, \\ \frac{1}{2}\log\left[\frac{pq}{(1-p)(1-q)}\right], & \text{если } x \text{ и } y \text{ соседи}, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях}, \end{cases}$$

где $m(x)$ — число соседей точки x.

Доказательство. Мы оставляем его в качестве упражнения для читателя. ■

Мы ограничимся теперь случаем, когда $\mathscr{G} = \mathscr{T}^m$ для некоторого $m \geqslant 2$ (и, стало быть, $m(x) = m$ для всех $x \in S$), и рассмотрим обращение приведенной выше конструкции. То есть пусть даны $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$, а парный потенциал $V \in H(S)$ задается своей ассоциированной билинейной формой U с

$$U(x, y) = \begin{cases} v_0, & \text{если } x = y, \\ v_1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ соседи}, \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Спрашивается, можно ли в этом случае так выбрать p, q и r, чтобы указанная конструкция привела нас к элементу из $\mathscr{G}_V$? Поскольку у нас $r(0) + r(1) = 1$ и $r(0)(1-p) = r(1)(1-q)$, то очевидно, что r определяется значениями p и q. В силу предложения 10.6 мы должны выбирать p и q так, чтобы

$$\left(\frac{1-q}{p}\right)^m\left(\frac{1-p}{1-q}\right) = \exp v_0$$

и

$$\frac{pq}{(1-p)(1-q)} = \exp 2v_1.$$

Поэтому, полагая $a = \exp v_0$, $b = \exp 2v_1$ (таким образом, $a > 0$, $b > 0$) и делая замену

$$\alpha = \frac{p}{1-p}, \quad \beta = \frac{q}{1-q},$$

сводим задачу к следующей: существуют ли $\alpha > 0$, $\beta > 0$, такие, что $\alpha\beta = b$ и

$$\left(\frac{1+\alpha}{1+\beta}\right)^{m-1}\frac{1}{\alpha^m} = a?$$

Для решения последней задачи достаточно ответить на вопрос: существует ли $\alpha > 0$, такое, что

$$\left(\frac{1+\alpha}{b+\alpha}\right)^{m-1}\frac{1}{\alpha} = a?$$

Как легко видеть, ответ на этот вопрос положительный, поскольку если определить функцию f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ с

$$f(x) = \left(\frac{1+x}{b+x}\right)^{m-1},$$

то f ограничена и, стало быть, кривая $y = f(x)$ должна пересечь прямую $y = ax$. Таким образом, наша конструкция дает элемент из $\mathscr{G}_V$ для любых v_0, $v_1 \in \mathbb{R}$. Заметим, что если уравнение

$$\left(\frac{1+x}{b+x}\right)^{m-1} = ax$$

имеет более одного решения, то эта конструкция дает более одного элемента из $\mathscr{G}_V$ для соответствующих $v_0 = \log a$, $v_1 = \frac{1}{2}\log b$; и, следовательно, мы будем иметь пример фазового перехода, допускающего точное исследование. (Поэтому стоит исследовать вопрос, как много решений имеет уравнение $f(x) = ax$.)

Предложение 10.7. *Уравнение*

$$\left(\frac{1+x}{b+x}\right)^{m-1} = ax$$

(*с* $x \geqslant 0$, $m \geqslant 2$, $a > 0$, $b > 0$) *имеет одно решение, если или* $m = 2$, *или* $b \leqslant \left(\frac{m}{m-2}\right)^2$. *Если* $m > 2$ *и* $b > \left(\frac{m}{m-2}\right)^2$, *то существуют числа* $\eta_1(b, m)$, $\eta_2(b, m)$ *с* $0 < \eta_1(b, m) < \eta_2(b, m)$, *такие, что уравнение имеет три решения, если* $\eta_1(b, m) < a < \eta_2(b, m)$, *и имеет два решения, если либо* $a = \eta_1(b, m)$, *либо* $a = \eta_2(b, m)$. *Числа* η_i *находятся из формулы*

$$\eta_i(b, m) = \frac{1}{x_i}\left(\frac{1+x_i}{b+x_i}\right)^{m-1},$$

где x_1, x_2 *являются решениями уравнения*

$$x^2 + [2 - (b-1)(m-2)]\,x + b = 0.$$

Доказательство. Как и прежде, пусть

$$f(x) = \left(\frac{1+x}{b+x}\right)^{m-1};$$

тогда

$$f'(x) = (m-1)(b-1)\frac{(1+x)^{m-2}}{(b+x)^m},$$

$$f''(x) = (m-1)(b-1)(b(m-2) - m - 2x)\frac{(1+x)^{m-3}}{(b+x)^{m+1}}.$$

В частности, если $b \leqslant 1$, то f — убывающая функция и уравнение $f(x) = ax$ имеет только одно решение; таким образом, можно ограничиться рассмотрением случая, когда $b > 1$. Если $m = 2$, то $f'' \leqslant 0$ и, стало быть, f — вогнутая возрастающая функция; следовательно, существует только одно решение, когда $m = 2$. Для $m > 2$ функция f — выпуклая при $x < \frac{1}{2}[b(m-2) - m]$ и вогнутая при $x > \frac{1}{2}[b(m-2) - m]$, стало быть, существует не более трех решений уравнения $f(x) = ax$. На самом деле легко проверить, что более одного решения у этого уравнения имеется тогда и только тогда, когда уравнение $xf'(x) = f(x)$ имеет более одного решения. Это уравнение — не что иное, как уравнение

$$x^2 + [2 - (b-1)(m-2)]\,x + b = 0.$$

При помощи небольшого рассуждения из элементарного анализа доказательство полностью завершается. ■

Заметим, что мы можем построить точный пример фазового перехода только тогда, когда $b > 1$, а это означает, что $v_1 > 0$, т. е. потенциал супермодулярен. Но для супермодулярных потенциалов, как мы сейчас покажем, наша конструкция явно указывает фазовый переход во всех случаях, когда он только может произойти.

Пусть V — парный потенциал на $\mathscr{T}^m$, определенный, как и прежде, в терминах v_0, v_1; предположим, что $v_1 > 0$. Проверим, имеет ли место фазовый переход для V, изучая для V состояния с максимальной и минимальной плотностью. Нам будет удобно представить $\mathscr{T}^m = (S, e)$ в следующем виде:

$$S = \{\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n\colon\ \varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0, 1, \ldots, m-1 \text{ и }$$
$$\varepsilon_\nu = 0, 1, \ldots, m-2 \text{ для } \nu \geqslant 3;\ n = 1, 2, \ldots\};$$

e определяется так, что соседями $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ являются точки $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n 0, \ldots, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n (m-2)$ и $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$, если $n \geqslant 2$, а соседями 0 являются 00, 01, ..., $0(m-1)$. (См. рис. 2 для случая $m = 3$.) Пусть $\mathscr{T}_0^m(S_0, e)$ — подграф с $\mathscr{T}^m$ и с $S_0 = \{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n\colon \varepsilon_2 \neq m-1\}$. (См. рис. 3, опять для случая $m = 3$.) Для $N \geqslant 1$ положим

$$\Lambda_N = \{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n\colon\ n \leqslant N\}$$

и $\Lambda'_N = \Lambda_N \cap S_0$. Пусть π_n^+ (соответственно π_n^-) обозначает гиббсовское состояние на Λ_n с потенциалом V и граничными условиями $S \setminus \Lambda_n$ (соответственно $\varnothing$); пусть ρ_n^+ (соответственно ρ_n^-) — корреляционная функция для π_n^+ (соответственно π_n^-); π^+ (соответственно π^-) обозначает состояние

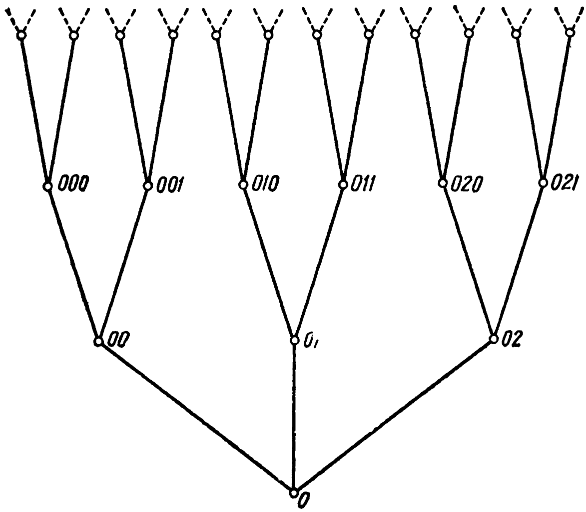

Рис. 2

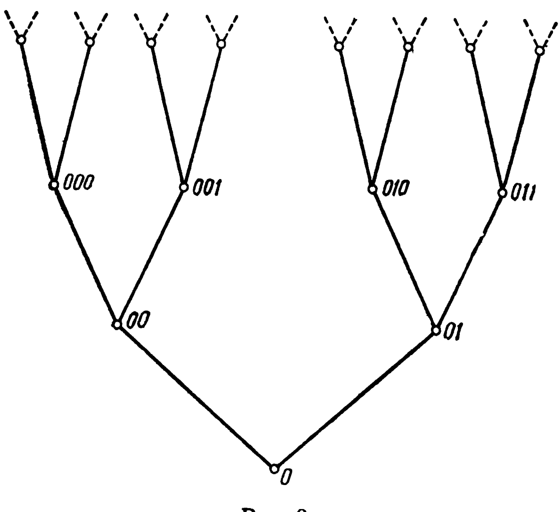

Рис. 3

для V с максимальной (соответственно с минимальной) плотностью, а ρ^+ (соответственно ρ^-) — корреляционная функция для π^+ (соответственно π^-). Тогда, поскольку $\rho^+(\{0\}) = \rho^+(\{x\})$, $\rho^-(\{0\}) = \rho^-(\{x\})$ для всех $x \in S$, фазовый переход для V имеет место тогда и только тогда, когда $\rho^+(\{0\}) \neq \rho^-(\{0\})$. Мы знаем также, что

$$\rho_n^+(\{0\}) \downarrow \rho^+(\{0\}), \quad \rho_n^-(\{0\}) \uparrow \rho^-(\{0\}).$$

Определим $r_n^-(\{0\})$, $r_n^-(\varnothing)$, $r_n^+(\{0\})$, $r_n^+(\varnothing)$ равенствами

$$r_n^-(\{0\}) = \sum_{0 \in A \subset \Lambda_n'} \exp V(A), \quad r_n^-(\varnothing) = \sum_{0 \notin A \subset \Lambda_n'} \exp V(A),$$

$$r_n^+(\{0\}) = \sum_{0 \in A \subset \Lambda_n'} \exp[V(A) + 2U(A, S_0 \setminus \Lambda_n')],$$

$$r_n^+(\varnothing) = \sum_{0 \notin A \subset \Lambda_n'} \exp[V(A) + 2U(A, S_0 \setminus \Lambda_n')]$$

и положим

$$a_n^- = \frac{r_n^-(\varnothing)}{r_n^-(\{0\})}, \quad a_n^+ = \frac{r_n^+(\varnothing)}{r_n^+(\{0\})}.$$

Лемма 10.4. *Функция a_n^+ возрастает по n; функция a_n^- убывает по n.*

Доказательство. Пусть $\bar\rho_n$ — корреляционная функция гиббсовского состояния на Λ_n' с потенциалом V и граничными условиями $\varnothing$. Тогда $\bar\rho_n(\{0\})$ — возрастающая функции по n:

$$\bar\rho_n(\{0\}) = \frac{r_n^-(\{0\})}{r_n^-(\{0\}) + r_n^-(\varnothing)} = \frac{1}{1 + a_n^-}.$$

Таким образом, a_n^- — возрастающая по n функция. Доказательство для a_n^+ то же самое. ■

Пусть $a^+ = \lim_{n\to\infty} a_n^+$, $a^- = \lim_{n\to\infty} a_n^-$, положим $a = \exp v_0$, $b = \exp 2v_1$.

Предложение 10.8. *Справедливы следующие равенства и утверждения:*

(i) $$\rho_n^+(\{0\}) = \left[1 + \frac{1}{a}\left(\frac{1 + a_{n-1}^+}{b + a_{n-1}^+}\right)^m\right]^{-1},$$

$$\rho_n^-(\{0\}) = \left[1 + \frac{1}{a}\left(\frac{1 + a_{n-1}^-}{b + a_{n-1}^-}\right)^m\right]^{-1},$$

(ii) *фазовый переход для V происходит тогда и только тогда, когда $a^+ \neq a^-$;*

(iii) $a_n^+ = \frac{1}{a}\left(\frac{1+a_{n-1}^+}{b+a_{n-1}^+}\right)^{m-1}; \quad a_n^- = \frac{1}{a}\left(\frac{1+a_{n-1}^-}{b+a_{n-1}^-}\right)^{m-1}.$

Доказательство. Осуществляется прямой проверкой и предоставляется читателю. ■

Из предложения 10.8 следует, что a^+ и a^- являются неотрицательными решениями уравнения

$$x = \frac{1}{a}\left(\frac{1+x}{b+x}\right)^{m-1},$$

причем a^+ (соответственно a^-) должно быть наименьшим (соответственно наибольшим) решением. Таким образом мы доказали

Предложение 10.9. *Фазовый переход происходит для V $(v_1 > 0)$ тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\left(\frac{1+x}{b+x}\right)^{m-1} = ax$$

имеет более одного неотрицательного решения.

Очевидно, это то же самое уравнение, которое появилось ранее. Как отмечено в предложении 10.7, это уравнение имеет только одно решение, если $m=2$ и, следовательно, имеет место

Предложение 10.10. *Граф $\mathbb{Z} (= \mathcal{T}^2)$ не является графом фазового перехода.*

Используя предложение 10.9 и теорему 8.4, нетрудно видеть, что для $m \geqslant 3$ $\mathcal{T}^m$ — граф фазового перехода. Стоит также указать, что если $m \geqslant 3$, V не обязан быть потенциалом Изинга на $\mathcal{T}^m$, чтобы фазовый переход имел место. Это показывает необходимость некоторого условия наподобие

$$\liminf_{\Lambda \uparrow S} \frac{U(\Lambda, S \setminus \Lambda)}{W(\Lambda)} = 0$$

в формулировке теоремы 9.3.

Замечания. Основная идея, используемая при доказательстве предложения 10.2 и предложения 10.5, принадлежит Пайерлсу (1936). Метод Пайерлса был сделан строгим для $\mathbb{Z}^2$ и $\mathbb{Z}^3$ Гриффитсом (1964) и Добрушиным (1965). Идею использовать графы, которые рассматривались во второй половине этой главы, предложил автору Фрэнк Спитцер.

11. КРАЙНИЕ ТОЧКИ В $\mathscr{G}_V$

Пусть S — счетное множество (в этой главе мы не будем предполагать, что S имеет какую-либо дополнительную структуру), и пусть $V \in H(S)$. Из предложения 5.2 нам известно, что $\mathscr{G}_V$ — множество гиббсовских состояний с потенциалом V, является непустым компактным выпуклым подмножеством в $\mathscr{P}(S)$. В этой главе мы охарактеризуем крайние точки $\mathscr{G}_V$ $\Big($где $\mu \in \mathscr{G}_V$ — крайняя точка в $\mathscr{G}_V$, если не существуют ν_1, $\nu_2 \in \mathscr{G}_V$ с $\nu_1 \neq \nu_2$ и $\mu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)\Big)$.

Нам понадобятся следующие обозначения и определения: если $A \in \mathscr{P}(S)$, то, как и прежде, $\mathscr{F}(A)$ обозначает борелевские подмножества компактного хаусдорфова пространства $\mathscr{P}(A)$; пусть $\bar{\mathscr{F}}(A)$ обозначает под-σ-алгебру в $\mathscr{F}(S)$, порожденную множествами

$$\{[B, \Lambda]:\ B \subset \Lambda \in \mathscr{C}(A)\}.$$

Таким образом, $\bar{\mathscr{F}}(A)$ состоит из тех элементов $\mathscr{F}(S)$, которые имеют вид $\{X \cup B:\ X \in \Omega,\ B \subset S \setminus A\}$ для некоторого $\Omega \in \mathscr{F}(A)$. Если Y — некоторое множество, а $\mathscr{B}$ — какая-то σ-алгебра его подмножеств, то через $M(Y, \mathscr{B})$ мы будем обозначать вещественное векторное пространство функций из Y в $\mathbb{R}$, являющихся $\mathscr{B}$-измеримыми; если μ-мера на $(Y, \mathscr{B})$, то через $M(Y, \mathscr{B}, \mu)$ будет обозначаться факторпространство $M(Y, \mathscr{B})$ относительно подпространства функций, которые равны нулю μ-п.в. Пусть $\mathscr{B}'$—под-σ-алгебра $\mathscr{B}$, тогда пусть $\mathscr{B}'_\mu$ обозначает наименьшую σ-алгебру, содержащую $\mathscr{B}'$ и $\{B \in \mathscr{B}:\ \mu(B) = 0\}$. Хорошо известно, что $\mathscr{B}'_\mu$ состоит в точности из тех подмножеств Y, которые имеют вид BN, где $B \in \mathscr{B}'$ и $N \in \mathscr{B}$ с $\mu(N) = 0$ (как и прежде, BN обозначает симметрическую разность B и N, т. е. $BN = (B - N) \cup (N - B)$). Заметим, что если

$$f \in M(Y, \mathscr{B}'_\mu),$$

то существует функция $f' \in M(Y, \mathscr{B}')$ с $f' = f$ μ-п. в. Мы будем рассматривать $M(Y, \mathscr{B}')$ как подпространство в $M(Y, \mathscr{B})$, а $M(Y, \mathscr{B}'_\mu, \mu)$ как подпространство в $M(Y, \mathscr{B}, \mu)$. Для $1 \leqslant p < \infty$ пусть $L^p(Y, \mathscr{B}, \mu)$ — векторное подпространство в $M(Y, \mathscr{B}, \mu)$, состоящее из функций, интегрируемых в степени p (или ограниченных, когда $p = \infty$), рассматриваемое как банахово пространство в общепринятом смысле. Если $\mathscr{B}'$ под-σ-алгебра в $\mathscr{B}$, то $L^p(Y, \mathscr{B}'_\mu, \mu)$ является замкнутым подпространством в $L^p(Y, \mathscr{B}, \mu)$.

Пусть $\mu \in \mathscr{P}(S)$ и $A \in \mathscr{P}(S)$; мы будем писать $\bar{\mathscr{F}}_\mu(A)$ вместо $(\bar{\mathscr{F}}(A))_\mu$. Для $1 \leqslant p < \infty$, $\mu \in \mathscr{P}(S)$ и $A \in \mathscr{P}(S)$

пусть

$$L_\mu^p(A) = L^p(\mathcal{P}(S), \bar{\mathcal{F}}_\mu(A), \mu);$$

мы будем писать L_μ^p вместо $L_\mu^p(S)$.

Предложение 11.1. *Пусть* $\mu \in \mathcal{P}(S)$ *и* $A \in \mathcal{P}(S)$. *Тогда имеется изометрия*

$$i_A\colon L^p(\mathcal{P}(A), \mathcal{F}(A), r_A(\mu)) \to L_\mu^p(A),$$

определяемая равенством

$$i_A(f)(X) = f(X \cap A) \quad \text{для} \quad X \in \mathcal{P}(S)$$

и

$$f \in L^p(\mathcal{P}(A), \mathcal{F}(A), r_A(\mu)).$$

Доказательство. Легко проверить, что отображение i_A определено корректно и обладает нужными свойствами. ∎

Для $1 \leqslant p < \infty$ пусть $I_\mu^p = \bigcap\limits_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)} L_\mu^p(S \setminus \Lambda)$; таким образом, I_μ^p — замкнутое подпространство в L_μ^p, которое содержит, по крайней мере, константы. Пусть

$$\bar{\mathcal{F}}_\mu^0 = \bigcap_{\Lambda \in \mathscr{C}(S)} \bar{\mathcal{F}}_\mu(S \setminus \Lambda);$$

тогда

$$\bar{\mathcal{F}}_\mu^0 \supset \mathcal{F}_\mu^0 = \{\Omega \in \mathcal{F}(S)\colon \mu(\Omega) = 0 \text{ или } 1\}$$

и в силу причин, которые станут ясными позднее, будем говорить, что μ имеет *короткодействующие корреляции*, если $\bar{\mathcal{F}}_\mu^0 = \mathcal{F}_\mu^0$. Мы покажем, что если $V \in H(S)$ и $\mu \in \mathcal{G}_V$, то μ — крайняя точка $\mathcal{G}_V$ тогда и только тогда, когда μ имеет короткодействующие корреляции. Легко проверить следующие результаты (это предоставляется читателю):

Предложение 11.2. *Если* $\mu \in \mathcal{P}(S)$, *то* μ *имеет короткодействующие корреляции тогда и только тогда, когда для некоторого (и значит, для всех)* p *с* $1 \leqslant p < \infty$ *множество* I_μ^p *содержит только постоянные функции.*

Лемма 11.1. *Пусть* D — *непустое выпуклое подмножество в* $\mathcal{P}(S)$ *и* $\mu \in D$. *Тогда* μ *не является крайней точкой в* D *в том и только том случае, если существует функция* $h \in L_\mu^\infty$, *не равная константе, такая, что* $h\mu \in D$.

Теперь нам понадобится следующее определение: если $f \in M(\mathcal{P}(S), \mathcal{F}(S))$ и $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, то f_Λ задается равенством

$$f_\Lambda(A, X) = f(A \cup X) \quad \text{для} \quad A \subset \Lambda,\ X \in \mathcal{P}(S \setminus \Lambda),$$

Таким образом, для $A \subset \Lambda$ мы имеем, что $f_\Lambda(A, \cdot) \in M(\mathcal{P}(S \setminus \Lambda), \mathcal{F}(S \setminus \Lambda))$. Если $\mu \in \mathcal{P}(S)$ и $h \in M(\mathcal{P}(S), \mathcal{F}(S), \mu)$, то тем же самым способом можно определить $h_\Lambda(A, X)$ и легко проверить, что $h_\Lambda(A, \cdot)$ — корректно определенный элемент из $M\big(\mathcal{P}(S \setminus \Lambda), \mathcal{F}(S \setminus \Lambda), r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu)\big)$ (т. е. если

$$f,\ g \in M(\mathcal{P}(S), \mathcal{F}(S))$$

с $f = g$ μ-п. в., то $f_\Lambda(A, \cdot) = g_\Lambda(A, \cdot)$ $r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu)$-п. в.) Пусть $h \in L^1_\mu$ с $\mu \in \mathcal{P}(S)$, тогда, очевидно, что

$$r^A_{S \setminus \Lambda}(h\mu) = h_\Lambda(A, \cdot)\, r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu).$$

Предложение 11.3. *Пусть $V \in H(S)$ и $\mu \in \mathcal{G}_V$; пусть $h \in L^\infty_\mu$ с $h \geqslant 0$ и $\int h\, d\mu = 1$. В таком случае $h\mu \in \mathcal{G}_V$ тогда и только тогда, когда $h \in I^\infty_\mu$.*

Доказательство. Пусть $\{f^\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{C}(S)}$ — локальная спецификация, соответствующая потенциалу V; пусть $A \subset \Lambda \in \mathcal{C}(S)$. Тогда, поскольку f^Λ — строго положительная функция и $r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(\mu)$, то множества нулевой меры для $r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu)$ и $r_{S \setminus \Lambda}(\mu)$ одни и те же. Таким образом, если $g \in M(\mathcal{P}(S), \mathcal{F}(S), \mu)$, то мы можем рассматривать $g_\Lambda(A, \cdot)$ как элемент из

$$M\big(\mathcal{P}(S \setminus \Lambda), \mathcal{F}(S \setminus \Lambda), r_{S \setminus \Lambda}(\mu)\big).$$

Пусть $h \in L^\infty_\mu$ с $h \geqslant 0$ и $\int h\, d\mu = 1$. (Предположение, что $h \geqslant 0$ и $\int h\, d\mu = 1$, нужно только затем, чтобы обеспечить включение $h\mu \in \mathcal{P}(S)$.) Предположим, что $h\mu \in \mathcal{G}_V$; возьмем $A \subset \Lambda \in \mathcal{C}(S)$. Тогда

$$r^A_{S \setminus \Lambda}(h\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(h\mu),$$

т. е.

$$h_\Lambda(A, \cdot)\, r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(h\mu).$$

Но $r^A_{S \setminus \Lambda}(\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(\mu)$ и, значит,

$$f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(h\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, h_\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(\mu).$$

Отсюда, так как $f^\Lambda(A, \cdot)$ — строго положительная функция, вытекает, что

$$r_{S \setminus \Lambda}(h\mu) = h_\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(\mu).$$

Это равенство имеет место для любого $A \subset \Lambda$, и, стало быть,

$$h_\Lambda(A, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(\mu) = h_\Lambda(B, \cdot)\, r_{S \setminus \Lambda}(\mu) \quad \text{для всех} \quad A, B \subset \Lambda.$$

Поэтому $h_\Lambda(A, \cdot) = h_\Lambda(B, \cdot)$ для всех $A, B \subset \Lambda$ (функции здесь рассматриваются как элементы из $L^\infty(\mathscr{P}(S \setminus \Lambda), \mathscr{F}(S \setminus \Lambda), r_{S\setminus\Lambda}(\mu))$. Легко проверить, что тогда $h \in L^\infty_\mu(S \setminus \Lambda)$, а поскольку это включение справедливо для всех $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, то необходимо $h \in I^\infty_\mu$.

Обратно, если $h \in I^\infty_\mu$, то $h_\Lambda(A, \cdot) = h_\Lambda(\varnothing, \cdot)$ для всех $A \subset \Lambda$ и, значит,

$$f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S\setminus\Lambda}(h\mu) = f^\Lambda(A, \cdot) \sum_{B \subset \Lambda} r^B_{S\setminus\Lambda}(h\mu) =$$

$$= f^\Lambda(A, \cdot) \sum_{B \subset \Lambda} h_\Lambda(B, \cdot)\, r^B_{S\setminus\Lambda}(\mu) =$$

$$= f^\Lambda(A, \cdot) \sum_{B \subset \Lambda} h_\Lambda(\varnothing, \cdot)\, r^B_{S\setminus\Lambda}(\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, h_\Lambda(\varnothing, \cdot)\, r_{S\setminus\Lambda}(\mu) =$$

$$= h_\Lambda(\varnothing, \cdot)\, r^A_{S\setminus\Lambda}(\mu) = h_\Lambda(A, \cdot)\, r^A_{S\setminus\Lambda}(\mu) = r^A_{S\setminus\Lambda}(h\mu).$$

Поэтому $r^A_{S\setminus\Lambda}(h\mu) = f^\Lambda(A, \cdot)\, r_{S\setminus\Lambda}(h\mu)$, и, следовательно,

$$h\mu \in \mathscr{G}_V. \blacksquare$$

Из предложений 11.2, 11.3 и леммы 11.1 немедленно вытекает

Теорема 11.1. *Пусть $V \in H(S)$ и $\mu \in \mathscr{G}_V$. В таком случае μ является крайней точкой $\mathscr{G}_V$ тогда и только тогда, когда μ имеет короткодействующие корреляции.*

Изучим свойства состояний, обладающих короткодействующими корреляциями.

Предложение 11.4. *Следующие утверждения для $\mu \in \mathscr{P}(S)$ эквивалентны:*

(i) *мера μ имеет короткодействующие корреляции;*

(ii) *для любого $A \subset B \in \mathscr{C}(S)$ и $\varepsilon > 0$ существует множество $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ такое, что каким бы ни было $\Omega \in \overline{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)$,*

$$|\mu(\Omega \cap [A, B]) - \mu(\Omega)\,\mu([A, B])| \leqslant \varepsilon;$$

(iii) *для любого $f \in L^1_\mu$ существует $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$ такое, что*

$$\left| \int fg\, d\mu - \int f\, d\mu \int g\, d\mu \right| \leqslant \| g \|_\infty$$

для любой функции $g \in L^\infty_\mu(S \setminus \Lambda)$;

(iv) *если p и q таковы, что $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$, то для любого $f \in L^q_\mu$ найдется $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, такое, что*

$$\left| \int fg\, d\mu - \int f\, d\mu \int g\, d\mu \right| \leqslant \| g \|_p$$

для любой $g \in L^p_\mu(S \setminus \Lambda)$.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(iii). Предположим, что (iii) не выполняется. Тогда существуют $f \in L'_\mu$, $\Lambda_n \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda_n \uparrow S$ и существуют

$$g_n \in L^\infty_\mu(S \setminus \Lambda_n) \text{ с } \|g_n\|_\infty \leqslant 1,$$

такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int fg\,d\mu - \int f\,d\mu \int g_n\,d\mu\right\} \neq 0.$$

Пространство L^1_μ в нашем случае сепарабельно и $(L^1_\mu)^* = L^\infty_\mu$; таким образом, выбирая подпоследовательность, мы можем считать, что существует $g \in L^\infty_\mu$, такая, что $g_n \to g$ (в слабой* топологии) при $n \to \infty$. Но очевидно, что $g \in I^\infty_\mu$ и

$$\int fg\,d\mu - \int f\,d\mu \int g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\left\{\int fg_n\,d\mu - \int f\,d\mu \int g_n\,d\mu\right\};$$

следовательно,

$$\int fg\,d\mu \neq \int f\,d\mu \int g\,d\mu.$$

Значит, g не является константой, и поэтому μ не имеет короткодействующих корреляций.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Эта импликация очевидна.

(ii)$\Rightarrow$(i). Предположим, что (ii) имеет место, и пусть $\Omega \in \bar{\mathscr{F}}^0_\mu$. Заметим, что если $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, то существует $\Omega' \in \bar{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)$, для которого $\mu(\Omega \triangle \Omega') = 0$. Таким образом, если $A \subset B \in \mathscr{C}(S)$, то необходимо

$$|\mu(\Omega \cap [A, B]) - \mu(\Omega)\mu([A, B])| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \varepsilon > 0$$

и, следовательно,

$$\mu(\Omega \cap [A, B]) = \mu(\Omega)\mu([A, B]).$$

Поскольку это равенство справедливо для всех конечномерных цилиндров $[A, B]$, то необходимо чтобы или $\mu(\Omega) = 0$, или $\mu(\Omega) = 1$ и, значит, $\bar{\mathscr{F}}^0_\mu = \mathscr{F}^0_\mu$.

(i)$\Rightarrow$(iv). Эта импликация доказывается в точности так же, как (i)$\Rightarrow$(iii) с использованием того факта, что если $1 < p \leqslant \infty$, то L^q_μ сепарабельно и $(L^q_\mu)^* = L^p_\mu$.

(iv)$\Rightarrow$(ii). Очевидно. ■

Если μ имеет короткодействующие корреляции, то (ii) утверждает, что $[A, B]$ почти не зависит от любого события из $\bar{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)$. (Точнее, является почти некоррелированным с любым событием из $\bar{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)$. Именно это свойство оправдывает термин „короткодействующие корреляции“.

Мы продолжим изучение состояний, имеющих короткодействующие корреляции, введя понятие δ-тривиальной σ-алгебры. Пусть $\mathscr{B}$—под-σ-алгебра в $\mathscr{F}(S)$; $\mu\in\mathscr{S}(S)$, и $0<\delta\leqslant 1$. Мы будем говорить, что $\mathscr{B}$ *δ-тривиальна* по отношению к μ, если для любого $\Omega\in\mathscr{B}$ либо $\mu(\Omega)=0$, либо $\mu(\Omega)\geqslant\delta$. (Это означает, что с точностью до множеств μ-меры нуль, $\mathscr{B}$ состоит только из атомов, μ-мера которых не меньше, чем δ.) Мы будем писать просто слово *тривиальная* вместо 1-тривиальная, таким образом, $\mathscr{B}$ является тривиальной σ-алгеброй по отношению к μ тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}\subset\mathscr{F}^0_\mu$. Заметим, что если $\mathscr{B}$ δ-тривиальна с $\delta>{}^1/_2$, то в действительности σ-алгебра $\mathscr{B}$ тривиальна, так как если $\Omega\in\mathscr{B}$ с $\mu(\Omega)>0$, то $\mu(\Omega)>{}^1/_2$, значит $\mu(\mathscr{P}(S)\setminus\Omega)<{}^1/_2$ и поэтому $\mu(\mathscr{P}(S)\setminus\Omega)=0$, т. е. $\mu(\Omega)=1$. Нам понадобится следующий стандартный факт:

Лемма 11.2. *Пусть* $\mu\in\mathscr{S}(S)$, $\Lambda\in\mathscr{C}(S)$ *и* $\Omega\in\bar{\mathscr{F}}_\mu(S\setminus\Lambda)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существуют* $B\in\mathscr{C}(S\setminus\Lambda)$ и $A_1,\ldots,A_n\subset B$, *такие, что*

$$\mu\left(\Omega\,\dot{\bigcup_{j=1}^{n}}[A_j,\ B]\right)<\varepsilon,$$

т. е.

$$\mu\left(\left(\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^{n}[A_j,\ B]\right)-\left(\bigcup_{j=1}^{n}[A_j,\ B]\setminus\Omega\right)\right)<\varepsilon.$$

Доказательство предоставляем читателю. (Оно легко вытекает из того, что $\{[A,\ B]\colon A\subset B\in\mathscr{C}(S\setminus\Lambda)\}$ является базисом открытых множеств для топологии на $\mathscr{P}(S\setminus\Lambda)$, а $r_{S\setminus\Lambda}(\mu)$ является регулярной мерой на $\mathscr{P}(S\setminus\Lambda)$.) ■

Предложение 11.5. *Пусть* $\mu\in\mathscr{S}(S)$ *и* $0<\delta\leqslant 1$. *Предположим, что для любого* $\varepsilon>(1-\delta)$ *и* $A\subset B\in\mathscr{C}(S)$ *существует* $\Lambda\in\mathscr{C}(S)$, *такое, что*

$$|\,\mu([A,\ B]\cap\Omega)-\mu([A,\ B]\,\mu(\Omega)\,|\leqslant\varepsilon\mu([A,\ B])$$

для любого множества $\Omega\in\bar{\mathscr{F}}(S\setminus\Lambda)$. *Тогда* $\bar{\mathscr{F}}^0_\mu$ *δ-тривиальна по отношению к* μ.

Доказательство. Пусть $\Omega\in\bar{\mathscr{F}}^0_\mu$; тогда для любого $\Lambda\in\mathscr{C}(S)$ существует $\Omega'\in\bar{\mathscr{F}}(S\setminus\Lambda)$, такое, что $\mu(\Omega\Omega')=0$. Поэтому для любого $A\subset B\in\mathscr{C}(S)$ должно выполняться неравенство

$$|\,\mu([A,\ B]\cap\Omega)-\mu([A,\ B])\,\mu(\Omega)\,|\leqslant(1-\delta)\,\mu([A,\ B]).$$

Из леммы 11.2 имеем, что для любого $\eta > 0$ существуют $B \in \mathscr{C}(S)$ и $A_1, \ldots, A_n \subset B$, для которых

$$\mu\left(\Omega \bigcup_{j=1}^{n} [A_j, B]\right) < \eta;$$

очевидно, мы можем считать, что все A_j различны. Таким образом,

$$\mu(\Omega)(1 - \mu(\Omega)) = \mu(\Omega) - \mu(\Omega)\mu(\Omega) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(\Omega \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} [A_j, B]\right)\right) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} [A_j, B]\right)\mu(\Omega) + 2\eta =$$

$$= 2\eta + \sum_{j=1}^{n} |\mu(\Omega \cap [A_j, B]) - \mu([A_j, B])\mu(\Omega)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\eta + \sum_{j=1}^{n} |\mu(\Omega \cap [A_j, B]) - \mu([A_j, B])\mu(\Omega)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\eta + (1 - \delta)\sum_{j=1}^{n} \mu[A_j, B]\Big) =$$

$$= 2\eta + (1 - \delta)\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} [A_j, B]\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\eta + (1 - \delta)(\mu(\Omega) + \eta).$$

Но поскольку $\eta > 0$ было взято произвольным, то

$$\mu(\Omega)(1 - \mu(\Omega)) \leqslant \mu(\Omega)(1 - \delta).$$

Следовательно, либо $\mu(\Omega) = 0$, либо $\mu(\Omega) \geqslant \delta$; таким образом, $\bar{\mathscr{F}}_\mu^0$ — δ-тривиальная σ-алгебра. ■

Комбинируя предложение 11.4 и предложение 11.5, получаем

Предложение 11.6. *Если* $\mu \in \mathscr{S}(S)$, *то* μ *имеет короткодействующие корреляции тогда и только тогда, когда существует* $\alpha < 1/2$, *такое, что для любого* $A \subset B \in \mathscr{C}(S)$ *найдется* $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, *для которого*

$$|\mu(\Omega \cap [A, B]) - \mu(\Omega)\mu([A, B])| \leqslant \alpha\mu([A, B]),$$

каким бы ни было $\Omega \in \bar{\mathscr{F}}(S \setminus \Lambda)$.

Доказательство. Если условие выполняется, то из предложения 11.5 мы имеем, что $\bar{\mathscr{F}}_\mu^0$ $(1-\alpha)$-тривиальна и, значит, тривиальна по отношению к μ. Следовательно, $\bar{\mathscr{F}}_\mu^0 = \mathscr{F}_\mu^0$, т. е. μ имеет короткодействующие корреляции. Обратное непосредственно вытекает из предложения 11.4. ■

Если снова вернуться к доказательству предложения 11.5 и использовать в нем лемму 11.2, то довольно легко увидеть, что имеет место следующий вариант предложения 11.6. Пусть $\Lambda_n \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda_n \uparrow S$ и $\mu \in \mathscr{P}(S)$. В таком случае μ имеет короткодействующие корреляции тогда и только тогда, когда существует $\alpha < 1/2$, такое, что для любых n и $A \subset \Lambda_n$ найдется $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, для которого

$$\left|\sum_{j=1}^{m} (\mu([E_j \cup A, F \cup \Lambda_n]) - \mu([E_j, F])\,\mu([A, \Lambda_n]))\right| \leqslant \alpha\mu([A, \Lambda_n])$$

для любых $F \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$, $E_1, \ldots, E_m \subset F$, где $E_i \neq E_j$ при $i \neq j$. Отсюда мы немедленно получаем

Предложение 11.7. *Пусть $\Lambda_n \in \mathscr{C}(S)$ с $\Lambda_n \uparrow S$, $\alpha < 1/2$ и $\mu \in \mathscr{P}(S)$. Предположим, что для любого n и $A \subset \Lambda_n$ существует $\Lambda \in \mathscr{C}(S)$, для которого*

$$|\mu([E \cup A, F \cup \Lambda_n]) - \mu([E, F])\,\mu([A, \Lambda_n])| \leqslant \\ \leqslant \alpha\mu([E, F])\,\mu([A, \Lambda_n])$$

с любыми $E \subset F \in \mathscr{C}(S \setminus \Lambda)$. Тогда μ имеет короткодействующие корреляции.

Пусть $V \in H(S)$, и предположим, что мы могли бы показать, что все $\mu \in \mathscr{G}_V$ имеют короткодействующие корреляции (например, проверяя, что любая мера $\mu \in \mathscr{G}_V$ удовлетворяет условиям предложения 11.7). Тогда по теореме 11.1 $\mathscr{G}_V$ может состоять только из одного элемента, т. е. фазовый переход для V не имеет места. Как пример, пусть $S = \mathbb{Z}$ и V — парный потенциал ближайшего соседа на $\mathbb{Z}$ с ассоциированной билинейной формой U. Пусть

$$\beta_1 = \sup_{|x-y|=1} U(x, y), \quad \beta_2 = \inf_{|x-y|=1} U(x, y),$$

и предположим, что $\beta_1 - \beta_2 < \frac{1}{6}\log\frac{3}{2}$. Мы предоставляем читателю в качестве упражнения показать (используя предложение 5.5), что условия предложения 11.7 выполняются для любого $\mu \in \mathscr{G}_V$ и, значит, фазовый переход для V происходить не может.

Замечания. Характеристики крайних точек в $\mathscr{G}_V$ и свойства состояний с короткодействующими корреляциями заимствованы с необходимыми изменениями у Лэнфорда и Рюэля (1969). Результаты по δ-тривиальным σ-алгебрам можно найти у Иосифеску (1972).

ПРИЛОЖЕНИЕ: ТЕОРЕМА ЛИ—ЯНГА

Здесь мы дадим другое доказательство теоремы Ли—Янга, принадлежащее Азано, которое является в некотором смысле более естественным, нежели доказательство, приведенное в гл. 9. Сформулируем теорему снова, чтобы освежить ее в памяти читателя.

Теорема П. 1. (Теорема Ли — Янга). *Пусть* $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$, *и пусть* $(B_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ — *симметрическая матрица размера* $n \times n$ *с* $0 < B_{ij} \leqslant 1$ *для всех* i, j. *Определим полином* $p(z_1, \ldots, z_n)$ *от* n *комплексных переменных равенством*

$$p(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{A \subset \Lambda} z^A C(A),$$

где $z^A = \prod_{i \in A} z_i$, *если* $A \neq \varnothing$, $z^{\varnothing} = 1$, $C(A) = \prod_{i \in A} \prod_{j \in \Lambda \setminus A} B_{ij}$, *если* $A \subset \Lambda$ *с* $\varnothing \neq A \neq \Lambda$ *и* $C(\varnothing) = C(\Lambda) = 1$. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ *с* $|\xi_i| \geqslant 1$ *для* $i = 1, \ldots, n-1$ *и*

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Тогда $|\xi_n| \leqslant 1$.

Заметим, что поскольку

$$p\left(z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}\right) = z_1^{-1} \ldots z_n^{-1} p\left(z_1, \ldots, z_n\right),$$

то мы можем изменить теорему: пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ с $|\xi_i| \leqslant 1$ для $i = 1, \ldots, n-1$ и $p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, тогда $|\xi_n| \geqslant 1$.

Напомним из гл. 7, что для $A \subset \Lambda$ мы определили функцию

$$\sigma_A \colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \{-1, 1\}$$

равенством

$$\sigma_A(B) = (-1)^{|A \cap B|}.$$

Введем функцию $J \colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ с

$$J(\{i, j\}) = -\log B_{ij}, \quad \text{если} \quad i \neq j,$$
$$J(B) = 0, \quad \text{если} \quad |B| \neq 2.$$

Тогда для всех $B \subset \Lambda$ справедливо неравенство $J(B) \geqslant 0$ и легко проверить, что

$$\sum_{B \subset \Lambda} \sigma_B(A) J(B) = 2 \sum_{i \in A} \sum_{j \in \Lambda \setminus A} \log B_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda} \log B_{ij}.$$

Таким образом, теорема Ли — Янга имеет следующую эквивалентную формулировку.

Теорема П.2. *Пусть* $\Lambda=\{1, \ldots, n\}$, *и пусть функция* J: $\mathscr{P}(\Lambda)\to\mathbb{R}$ *такова, что* $J(A)\geqslant 0$ *для всех* $A\subset\Lambda$ *и* $J(A)=0$, *если* $|A|=2$. *Определим полином* $p(z_1, \ldots, z_n)$ *от* n *комплексных переменных равенством*

$$p(z_1, \ldots, z_n)=\sum_{A\subset\Lambda} z^A \exp\left\{\sum_{B\subset\Lambda}\sigma_B(A)\,J(B)\right\}.$$

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n\in\mathbb{C}$ *и* $p(\xi_1, \ldots, \xi_n)=0$. *Тогда для некоторого* i *обязательно выполняется неравенство* $|\xi_i|\geqslant 1$.

Для $i\in\Lambda$ пусть

$$b_i(J)=\text{числу } j\in\Lambda, \text{ таких, что } J(\{i, j\})>0,$$

и пусть

$$b(J)=\sum_{i\in\Lambda}\max\{b_i(J)-1, 0\}.$$

Число $b(J)$ является мерой сложности взаимодействия J; мы будем доказывать теорему индукцией по $b(J)$. Сначала предположим, что $b(J)=0$; тогда существует разбиение $\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\ldots\cup\Lambda_r$ множества Λ, такое, что $|\Lambda_s|=1$ или 2, и если $J(\{i, j\})>0$, то $\{i, j\}=\Lambda_s$ для некоторого s.

Несложное вычисление дает, что

$$p(z_1, \ldots, z_n)=\prod_{s=1}^{r} p_s(z_1, \ldots, z_n),$$

где

$$p_s(z_1, \ldots, z_n)=\sum_{A\subset\Lambda_s} z^A \exp\left\{\sum_{B\subset\Lambda_s}\sigma_B(A)\,J(B)\right\}.$$

Теперь если $\Lambda_s=\{i\}$, то $p_s(z_1, \ldots, z_n)=1+z_i$, $\Lambda_s=\{i, j\}$; тогда

$$p_s(z_1, \ldots, z_n)=\beta(1+\alpha z_i+\alpha z_j+z_i z_j)$$

с

$$\alpha=\exp[-2J(\{i, j\})], \qquad \beta=\exp J(\{i, j\}).$$

Итак, для любого s из равенства $p_s(\xi_1, \ldots, \xi_n)=0$ вытекает, что $|\xi_i|\geqslant 1$ при некотором i. Но если $p(\xi_1, \ldots, \xi_n)=0$, то для некоторого s обязательно будем иметь $p_s(\xi_1, \ldots, \xi_n)=0$, следовательно, теорема справедлива для случая, когда $b(J)=0$.

Решающим результатом, позволяющим провести индукцию, является следующий.

Лемма П.1. *Пусть* F_1, F_2 — *замкнутые подмножества в* $\mathbb{C}$, *не содержащие нуля. Предположим, что комплексный многочлен*

$$a+bz_1+cz_2+dz_1z_2$$

может обращаться в нуль, только когда либо $z_1 \in F_1$, *либо* $z_2 \in F_2$. *Тогда* $a + dz$ *может обращаться в нуль лишь тогда, когда* $z \in -F_1F_2$ (*где*

$$-F_1F_2 = \{-\xi_1\xi_2 : \xi_1 \in F_1,\ \xi_2 \in F_2\}).$$

Опустим на время доказательство леммы и завершим доказательство теоремы. Предположим, что $b(J) = m \geqslant 1$ и что теорема верна для $b(J) < m$. Возьмем двухточечное множество $\{i, j\} \subset \Lambda$, такое, что $J(\{i, j\}) > 0$ и $b_i(J) \geqslant 2$. (Это можно сделать, поскольку $b(J) \geqslant 1$.) Пусть $i' \notin \Lambda$, положим $\Lambda' = \Lambda \cup \{i'\}$, $\Lambda'' = \Lambda \setminus \{i\}$; определим J': $\mathscr{P}(\Lambda') \to \mathbb{R}$ равенствами

$$J'(B) = J(B), \quad \text{если} \quad B \subset \Lambda \quad \text{и} \quad B \neq \{i, j\},$$

$$J'(\{i', j\}) = J(\{i, j\}),$$

$$J'(B) = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}$$

Тогда $b(J') = b(J) - 1$. Пусть $\xi_k \in \mathbb{C}$ с $|\xi_k| < 1$ для $k \in \Lambda''$; запишем

$$\sum_{A \subset \Lambda'} \xi^A \exp\Big\{\sum_{B \subset \Lambda'} \sigma_B(A) J'(B)\Big\} = a + b\xi_i + c\xi_{i'} + d\xi_i\xi_{i'}.$$

Поскольку $b(J') < m$, то по предположению индукции мы имеем, что $a + bz_1 + cz_2 + dz_1z_2$ может обращаться в нуль только тогда, когда либо $|z_1| \geqslant 1$, либо $|z_2| \geqslant 1$. Поэтому в силу леммы $a + dz$ может обращаться в нуль лишь тогда, когда $|z| \geqslant 1$. Но

$$a = \sum_{A \subset \Lambda''} \xi^A \exp\Big\{\sum_{B \subset \Lambda'} \sigma_B(A) J'(B)\Big\} = \sum_{A \subset \Lambda''} \xi^A \exp\Big\{\sum_{B \subset \Lambda} \sigma_B(A) J(B)\Big\}$$

и

$$d = \sum_{A \subset \Lambda''} \xi^A \exp\Big\{\sum_{B \subset \Lambda'} \sigma_B(A \cup i \cup i') J'(B)\Big\} = \sum_{A \subset \Lambda''} \xi^A \exp\Big\{\sum_{B \subset \Lambda} \sigma_B(A \cup i) J(B)\Big\}.$$

Таким образом,

$$a + d\xi_i = \sum_{A \subset \Lambda} \xi^A \exp\Big\{\sum_{B \subset \Lambda} \sigma_B(A) J(B)\Big\},$$

и, следовательно, шаг индукции завершен.

Теперь осталось только дать доказательство леммы. Очевидно, что $a \neq 0$ (поскольку $0 \notin F_1$, $0 \notin F_2$), и, значит, мы можем считать, что $d \neq 0$. Если $ad - bc = 0$, то

$$a + bz_1 + cz_2 + dz_1z_2 = d(z_1 + c/d)(z_2 + a/c),$$

стало быть, $-c/d \in F_1$, $-a/c \in F_2$, и ясно, что $a+zd$ может обращаться в нуль лишь тогда, когда $z=-a/d \in -F_1F_2$. Поэтому нам остается случай, когда $ad-bc \neq 0$. Определим дробно-линейные преобразования формулами

$$T_1z = -\frac{a+bz}{c+dz},$$

$$T_2z = \frac{a}{dz}.$$

Мы рассматриваем T_1 и T_2 как отображения римановой сферы в себя. Так как $ad-bc \neq 0$, то T_1 несингулярно, очевидно, что T_2 также несингулярно; таким образом T_1 и T_2 — биекции римановой сферы на себя. Заметим, что $T_2^{-1}=T_2$. Определим $T=T_1T_2$, тогда

$$Tz = -\frac{adz+ab}{cdz+ad};$$

и, значит,

$$ab+adz+ad\,(Tz)+cdz\,(Tz)=0.$$

Поскольку T — биекция, отсюда следует, что отображение T является инволюцией, т. е. $T^2z=z$ для всех z. Если мы положим $F_1'=F_1 \cup \{\infty\}$, $F_2'=F_2 \cup \{\infty\}$, то включение

$$T\,(F_2') \subsetneqq F_2'$$

невозможно (поскольку тогда бы

$$F_2'=T^2\,(F_2') \subset T\,(F_2') \subsetneqq F_2').$$

Таким образом, $T\,(F_2') \cap \overline{\mathbb{C} \setminus F_2} \neq \varnothing$. Возьмем $z \in \mathbb{C}-F_2$ и w, такие, что $z=T_1w$. Тогда

$$a+bw+cz+dzw=0,$$

а поскольку $z \notin F_2$, то по предположению $w \in F_1$. Следовательно,

$$\mathbb{C} \setminus F_2 \subset T_1\,(F_1)$$

и, стало быть,

$$\overline{\mathbb{C} \setminus F_2} \subset \overline{T_1\,(F_1)} \subset T_1\,(F_1').$$

Поэтому

$$T\,(F_2') \cap T_1\,(F_1') \neq \varnothing,$$

т. е.

$$T_1T_2\,(F_2') \cap T_1\,(F_1') \neq \varnothing,$$

и, значит,

$$T_2\,(F_2') \cap F_1' \neq \varnothing.$$

Пусть $w \in T_2(F_2') \cap F_1'$, тогда $w \in \mathbb{C}$ (т. е. $w \neq \infty$), $w \in F_1$, $a/dw \in F_2$ и, следовательно,

$$-\frac{a}{d} = -w \frac{a}{dw} \in -F_1F_2,$$

что завершает доказательство леммы. ■

Используя эту лемму, тем же способом, что и выше, мы можем получить следующее обобщение теоремы Ли — Янга.

Теорема П.3. *Пусть* Λ — *конечное множество, и пусть* $J\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$. *Предположим, что для каждого* $A \subset \Lambda$ *и* $x \in A$ *задано замкнутое подмножество* $M(x, A)$ *в* $\mathbb{C}$ *с* $0 \notin M(x, A)$, *такое, что полином*

$$\sum_{X \subset A} z^X \exp[\sigma_X(A) J(A)]$$

не обращается в нуль, если $z_x \notin M(x, A)$ *для всех* $x \in A$. *Тогда полином*

$$\sum_{A \subset \Lambda} z^A \exp\Big\{\sum_{B \subset \Lambda} \sigma_A(B) J(B)\Big\}$$

не обращается в нуль, если

$$z_x \notin -\prod_{x \in A \subset \Lambda} (-M(x, A)) \quad \text{для всех} \quad x \in \Lambda.$$

Доказательство. Мы оставляем его для читателя. Чтобы использовать обобщенную теорему Ли — Янга, мы должны, конечно, определить местонахождение нулей полинома

$$\sum_{X \subset A} z^X \exp[\sigma_X(A) J(A)].$$

Легко проверить, что

$$\sum_{X \subset A} z^X \exp[\sigma_X(A) J(A)] =$$
$$= \operatorname{ch} J(A) \prod_{x \in A} (1 + z_x) + \operatorname{sh} J(A) \prod_{x \in A} (1 - z_x)$$

и, следовательно,

$$\sum_{X \subset A} z^X \exp[\sigma_X(A) J(A)] = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\prod_{x \in A} \left(\frac{1 + z_x}{1 - z_x}\right) = -\operatorname{th} J(A).$$

Таким образом, мы могли бы взять

$$M(x, A) = \left\{ z \in \mathbb{C}: \left| \frac{1+z}{1-z} \right| \leqslant r(x, A) \right\},$$

где $0 \leqslant r(x, A) < 1$ и

$$\prod_{x \in A} r(x, A) \geqslant |\operatorname{th} J(A)|.$$

Заметим, что если $z \in -M(x, A)$, то

$$|\arg z| \leqslant \arcsin\left[\frac{1}{2} r(x, A)\right]$$

(поскольку уравнение $|(1-z)/(1+z)| = r$ есть уравнение окружности, которая симметрична относительно вещественной оси и пересекает ее в точках $(1-r)/(1+r)$ и $(1+r)/(1-r)$). Поэтому имеет место следующий результат.

Предложение П.1. *Пусть Λ — конечное множество, и имеется отображение J: $\mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$. Предположим, что для каждого $A \subset \Lambda$ и $x \in A$ мы имеем $r(x, A)$ с*

$$0 \leqslant r(x, A) < 1$$

и

$$\prod_{x \in A} r(x, A) \geqslant |\operatorname{th} J(A)|.$$

Предположим также, что существует $\alpha > 0$, такое, что

$$\sum_{x \in A \subset \Lambda} \arcsin\left[\frac{r(x, A)}{2}\right] \leqslant \pi - \alpha \quad \text{для всех} \quad x \in \Lambda.$$

Тогда полином

$$\sum_{A \subset \Lambda} z^A \exp\left\{ \sum_{B \subset \Lambda} \sigma_A(B) J(B) \right\}$$

не обращается в нуль, если $|\arg z_x| < \alpha$ для всех $x \in \Lambda$.

Если $J(A) \geqslant 0$ для всех $A \subset \Lambda$, то можно использовать другой подход. Поскольку

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1 - |z|^2 + i(2 \operatorname{Im} z)}{|1-z|^2},$$

то отсюда вытекает, что для $|z| < 1$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) > 0,$$

кроме того, мы имеем, что

$$\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2 \operatorname{Im} z}{1 - |z|^2}\right).$$

Таким образом, в этом случае мы можем взять

$$M(x, A) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{если} \quad J(A) = 0, \\ \{z\colon |z| \geqslant 1\}, & \text{если} \quad J(A) > 0 \quad \text{и} \quad |A| = 1 \quad \text{или} \quad 2, \\ \{z\colon |z| \geqslant 1\} \cup \left\{ z\colon \left| \dfrac{2\,\mathrm{Im}\,z}{1 - |z|^2} \right| \geqslant \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{|A|} \right\}, & \text{если } J(A) > 0 \\ & \text{и } |A| \geqslant 3. \end{cases}$$

Элементарное вычисление показывает, что если $J(A) > 0$ и $|A| \geqslant 3$, то

$$M(x, A) \cap \left\{ z\colon |z| < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2|A|}\right) \right\} = \varnothing.$$

Поэтому имеет место

Предложение П.2. *Пусть* Λ — *конечное множество, и задана функция* $J\colon \mathscr{P}(\Lambda) \to \mathbb{R}$ *с* $J(A) \geqslant 0$ *для всех* $A \subset \Lambda$.

Для $x \in \Lambda$, $m \geqslant 1$ *пусть*

$$n(x, m) = \textit{числу } A \subset \Lambda \quad \textit{с} \quad x \in A, \quad |A| = m \quad \textit{и} \quad J(A) > 0,$$

и пусть

$$\alpha = \min_{x \in \Lambda} \prod_{m=1}^{|\Lambda|} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2m}\right) \right)^{n(x, m)}.$$

Тогда полином

$$\sum_{A \subset \Lambda} z^A \exp\left\{ \sum_{B \subset \Lambda} \sigma_A(B)\, J(B) \right\}$$

не обращается в нуль, если $|z_x| < \alpha$ *для всех* $x \in \Lambda$. (Заметим, что α зависит только от множества, где функция J отлична от нуля, и не зависит от величины значений J.)

Замечания. Материал приложения взят из работы Рюэля (1971a), которая основывается на идее Азано (1970).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аверинцев М. Б.

(1970) О способе описания случайных полей с дискретным параметром, *Проблемы передачи информации*, **2**, 100—108.

Азано (Asano T.)

(1970) The rigorous theorems for the Heisenberg ferromagnets, *J. Phys. Soc., Japan*, **29**, 350—359.

Биллингслей (Billingsley P.)

(1965) Ergodic Theory and Information, John Wiley & Sons, New York. Русск. перевод: Эргодическая теория и информация, «Мир», М., 1969.

Васильев Н. Б., Добрушин Р. Л., Пятецкий-Шапиро И. И.

(1969) Марковские процессы на бесконечном произведении дискретных пространств, Советско-японский симпозиум по теории вероятностей, Хабаровск.

Гиббс (Gibbs W.)

(1902) Elementary Principles of Statistical Mechanics, Yale University Press. Русск. перевод: Основные принципы статистической механики, М., 1946.

Гриффитс (Griffiths R. B.)

(1964) Peierls'proof of spontaneous magnetization in two-dimensional Ising ferromagnets, *Phys. Rev.*, **A136**, 437—438.
(1967) Correlations in Ising ferromagnets, *J. Math. Phys.*, **8**, 478—489.

Гримметт (Grimmett G. R.)

(1973) A theorem about random fields, *Bull. London Math. Soc.*, **5**, 81—84.

Добрушин Р. Л.

(1965) Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга, *Теория вероятностей и ее применения*, **10**, 209—230.
(1968a) Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности, *Теория вероятностей и ее применения*, **2**, 201—229.
(1968b) Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарными взаимодействиями, *Функциональный анализ и его приложения*, **4**, 31—43.
(1968c) Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов, *Функциональный анализ и его приложения*, **4**, 44—57.
(1969) Гиббсовские поля. Общий случай, *Функциональный анализ и его приложения*, **1**, 27—35.

(1971) Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент — существование предельного процесса и его эргодичность, *Проблемы передачи информации*, **7**, 70—87.

Дуб (Doob J. L.)

(1953) Stochastic Processes, John Wiley & Sons, New York. Русск. перевод: Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.

Жинибр (Ginibre, J.)

(1970) General formulation of Griffiths inequalities, *Comm. Math. Phys.*, **16**, 310—328.

Иосифеску (Iosifescu M.)

(1972) An infinite tail σ-algebras, *Z. Wahrs. Verw. Gebiete*, **24**, 159—166.

Келли и Шерман (Kelly D. G., Sherman S.)

(1968) General Griffiths inequalities on correlations in Ising ferromagnets, *J. Math. Phys.*, **9**, 466—484.

Лебовиц и Мартин-Лёф (Lebowitz J. L., Martin-Löf A.)

(1972) On the uniqueness of the equilibrium state for Ising spin systems, *Comm. Math. Phys.*, **25**, 276—282.

Лиггет (Liggett T. M.)

(1972) Existence theorems for infinite particle systems, *Trans. Am. Math. Soc.*, **165**, 471—481.
(1973) An infinite particle system with zero range interactions, *Ann. Probab.*, **1**, 240—253.

Лэнфорд и Рюэль (Lanford O. E., Ruelle D.)

(1969) Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics, *Comm. Math. Phys.*, **13**, 194—215.

Майер (Mayer J. E.)

(1947) Integral equations between distribution functions of molecules, *J. Chem. Phys.*, **15**, 187—201.

Минлос Р. А.

(1967a) Предельное распределение Гиббса, *Функциональный анализ и его приложения*, **2**, 60—73.
(1967b) Регулярность предельного распределения Гиббса, *Функциональный анализ и его приложения*, **3**, 40—54.

Пайерлс (Peierls R. E.)

(1936) On Ising's ferromagnet model, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32**, 477—481.

Престон (Preston C. J.)

(1973) Generalized Gibbs states and Markov random fields, *Advan. Appl. Probab.*, **5**, 242—261.

Рюэль (Ruelle D.)

(1967a) States of classical statistical mechanics, *J. Math. Phys.*, **8**, 1657—1668.
(1967b) A variational formulation of equilibrium satistical mechanics and the Gibbs phase rule, *Comm. Math. Phys.*, **5**, 324—329.
(1969) Statistical Mechanics, Benjamin, New York. Русский перевод: Статистическая механика, «Мир», М., 1971.

(1971a) Extension of the Lee — Yang circle theorem, *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 303—304.
(1971b) On the use of «small external fields» in the problem of symmetry breakdown in statistical mechanics, *Ann. Phys.*, **69**, 364—374.

Спитцер (Spitzer F.)

(1970) Interaction of Markov processes, *Advan. Math.*, **5**, 246—290.
(1971a) Markov random fields and Gibbs ensembles, *Ann. Math. Monthly*, **78**, 142—154.
(1971b) Random fields and interacting particle systems, Lectures given to the 1971 M. A. A. Summer Seminar, Math. Assoc. Am.

Суомела (Suomela P.)

(1972) Factorings of finite dimensional distributions, *Commentationes Physico-Mathematicae*, **42**, 1—13.

Фортюэн, Кастеляйн, Жинибр (Fortuin C. M., Kastelyn P. W., Ginibre J.)

(1971) Correlation inequalities on some partially ordered sets, *Comm. Math. Phys.*, **22**, 89—103.

Хаммерсли и Клиффорд (Hammersley J. M., Clifford P.)

(1971) Markov fields on finite graphs and lattices, unpublished.

Харрис (Harris T. E.)

(1972) Nearest neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices, *Advan. Math.*, **9**, 66—89.

Холли (Holley, R.)

(1970) A class of interactions in an infinite particle system, *Advan. Math.*, **5**, 291—309.
(1971) Free energy in a Markovian model of a lattice spin system, *Comm. Math. Phys.*, **23**, 87—99.
(1973a) Pressure and Helmholtz free energy in a dynamic model of a lattice gas, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Probability and Mathematical Statistics, **3**, 565—578.
(1973b) Markovian interaction processes with finite range interactions, *Ann. Math. Statist.*, **43**, 1961—1967.
(1973c) Some remarks on the FKG inequalities, to appear.

Шерман (Sherman S.)

(1969) Cosets and ferromagnetic correlation inequalities, *Comm. Math. Phys.*, **14**, 1—4.
(1973) Markov random fields and Gibbs random fields, *Israel J. Math.*, **14**, 92—103.

Янг и Ли (Yang C. N., Lee T. D.)

(1952) Statistical theory of equations of state and phase transitions, *Phys. Rev.*, **87**, 404—409.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ *)

А. Фундаментальные работы по математической статистической физике

1. Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике. Киев, Изд. АН УССР, 1945.
2. Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике. М. — Л., ГТТИ, 1946.
3. Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И., О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия, *ДАН ССР*, **66** : 3 (1949), 321—324.
4. Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И. Математическое описание равновесного состояния классических систем, основанное на каноническом формализме, *Теоретическая и математическая физика*, **1** : 2 (1969), 251—274.
5. Van Hove L., Quelques proprietés générales de l'intégrale de configuration d'un système de particules avec interaction, *Physica*, **15** (1949), 951—961.
6. Van Hove L. Sur l'intégrale de configuration pour les systèmes de particules à une dimension, *Physica*, **16** (1950), 137—143.
7. Bogolubov N. N. Jr. On analitical properties of a configuration integral, *Physica*, **41** (1967), 601.
8. Минлос Р. А., Лекции по статистической физике, *Успехи математических наук*, **1** (1968), 133—190.

В. Монографии и обзоры в области математической статистической физики

1. Хинчин А. Я., Математические основания статистической механики. М. — Л., Гостехиздат, 1943.
2. Боголюбов Н. Н., Избранные труды. т. I, 1968; т. II, 1970; т. III, 1971; «Наукова Думка», Киев.
3. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М., «Мир», 1971.
4. Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов. М., «Наука», 1974.

---

*) При составлении данного списка мы руководствовались стремлением назвать ключевые работы по теме данной книги (и смежных с ней). Ситуационно обусловленная лаконичность списка сделала необходимым назвать лишь последние работы из каждого цикла: в них же можно найти ссылки на предшествующие работы. Это хоть в какой-то степени компенсирует ограниченность списка. — *Прим. ред.*

5. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М., «Мир», 1976.
6. Robinson D. V. The thermodynamic pressure in quantum statistical mechanics. 1971, Lecture notes in physics, vol. 9.
7. Statistical mecanics and mathematical problems. Edited by A. Lenard. 1973, Lecture notes in physics, vol. 20.
8. International symposium on mathematical problems in theoretical physics. 1975, Lecture notes in physics, vol. 39.

С. Монографии по теории вероятностей и теории случайных процессов

1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей (2 изд.). М., «Наука», 1974.
2. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей (2 изд.), М., «Наука», 1973.
3. Лоэв М. Теория вероятностей. М., «Мир», 1962.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. т. I, М., «Наука», 1971; т. II. М., «Наука», 1973.

D. Работы по гиббсовским случайным полям и проблеме фазовых переходов

1. Preston Ch., Random fields. 1976, Lecture notes in mathematics, vol. 534, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York.
2. Герцик В. М., Добрушин Р. Л. Гиббсовские состояния в решетчатой модели с взаимодействием на два шага, *Функциональный анализ и его приложения*, **8** : 3 (1974), 12—25.
3. Gurevich B. M., Suhov Y. M., Stationary Solutions of the Bogolubov Hierarchy Equations in Classical Statistical Mechanics, I, *Comm. Math. Phys.*, **49** (1976), 63.
4. Dobrushin R. L. Analycity of Correlation Functions in One-Dimensional Classical Systems with Slowly Decreasing Potentials, *Comm. Math. Phys.*, 32 (1973), 269—289.
5. Dobrushin R. L., Pirogov S. A., Theory of Random Fields. Proceedings od the 1975 IEEE — USSR Joint Workshop on Information Theory. IEEE Service Center Publication, 1975.
6. Dobrushin R. L., Shlosman S. B., Absence of Breakdawn of Continuous Symmetry in Two-Dimentional Models of Statistical Physics, *Comm. Math. Phys.*, **42** (1975), 31—40.
7. Добрушин Р. Л., Нахапетян Б. С. Сильная выпуклость давления для решетчатых систем классической статистической физики. *Теоретическая и математическая физика*, **20** : 2 (1974), 223—234.
8. Dyson F. J., Existence of a Phase Transition in a One-Dimensional Ising Ferromagnet, *Comm. Math. Phys.*, **12** (1969), 91. Non-Existance of Spontaneous Magnetization in One-Dimensional Ising Ferromagnet, *Comm. Math. Phys.*, **12** (1969), 212.
9. Frölich J., Simon B., Spencer T., Infrared Bounds, Phase Transitions and Continuous Symmetry Breaking, *Comm. Math. Phys.*
10. Минлос Р. А., Натапов Г. М., Единственность предельного распределения Гиббса в одномерных классических системах, *Теоретическая и математическая физика*, **24** : 1 (1975), 100—108.
11. Пирогов С. А., Синай Я. Г., Фазовые переходы первого рода для малых возмущений модели Изинга, *Функциональный анализ и его приложения*, **8** : 1 (1974), 25—31.
12. Пирогов С. А., Синай Я. Г. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем, I, *Теоретическая и математическая физика*, **25** : 3 (1975), 358—369; II, **26** : 1 (1976), 61—76.

13. Пирогов С. А. Фазовые переходы первого рода для спиновых моделей со спином, принимающим значения — 1, 0, 1, *ДАН СССР*, **214** : 6 (1974), 1273—1275.
14. Пирогов С. А. Сосуществование фаз для решетчатых моделей с несколькими типами частиц, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **39** : 6 (1975), 1404—1433.
15. Sylvester G. S. Representations and Inequalities for Izing Model Ursell Functions, *Comm. Math. Phys.*, **42** (1975), 209.
16. Skrypnik W. I. Construction of a transfer matrix for onedimensional continuous Gibbs many component systems with regular pair interaction potential, Preprint ITP 75—140 E, Kiev, 1975.
17. Vidybida O. K. On Solutions of the Bogolubov Hierarchy in the space of translationally invariant functions, Preprint ITP — 75—117E, Kiev, 1976.

Е. Исследования по марковским случайным полям с непрерывным аргументом. Конструктивная квантовая теория поля

1. Constructiv Quantum Field Theory. The 1973 «Ettore Majorana» International School of Mathematical Physics. Edited by G. Velo and A. Wightman. 1973, Lecture Notes in Physics, vol. 25.
2. Nelson E. Construction of Quantum Fields from Markoff Fields, *J. Func. Anal.*, **12** (1973), 97—112.
3. Nelson E. The Free Markoff Fields, *J. Func. Anal.*, **12** (1973), 211—227.
4. Саймон Б. Модель $P(\Phi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. М., «Мир», 1976.
5. Добрушин Р. Л., Минлос Р. А. Исследование свойств обобщенных гауссовских случайных полей. В сб. «Задачи механики и математической физики», посвященном памяти И. Г. Петровского, М., «Наука», 1976.
6. Иванов С. С., Петрина Д. Я., Ребенко А. А. S-матрица в конструктивной квантовой теории поля. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1976, том 7, вып. 3, 647—686.
7. Золотарюк А. В. Дискретная аппроксимация многокомпонентной модели, Препринт ИТФ-76-138Р, Киев, 1976.

СОДЕРЖАНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

ИБ № 646

К. Престон

ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ НА СЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Редактор А. Бряндинская
Художник Н. Вовк
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Н. Толстякова
Корректор А. Шехтер

Сдано в набор 24/IX 1976 г.
Подписано к печати 1/III 1977 г.
Бум. № 3 $60\times90^1/_{16}$=4,00 бум. л.
8,00 печ. л.
Уч.-изд. л. 6,95, Изд. № 1/9131
Цена 68 коп. Зак. 332

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский пр., 29