МАТЕМАТИКА В МОНОГРАФИЯХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

акад. С. Н. БЕРНШТЕЙНА, акад. И. М. ВИНОГРАДОВА,
проф. А. Н. КОЛМОГОРОВА, проф. Л. А. ЛЮСТЕРНИКА,
проф. А. И. ПЛЕСНЕРА, проф. В. А. ТАРТАКОВСКОГО,
проф. Н. Г. ЧЕБОТАРЕВА

ОСНОВНАЯ СЕРИЯ

КНИГА II

И. И. ПРИВАЛОВ

# СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР

# СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цена 5 р. 50 к., перепл. 1 р. 25 к.

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

Т-23-5-4
ТКК № 93

Редакция *Б. М. Юновича.* Корректура *А. Н. Крутова.* Оформление *Н. Я. Костиной.*

Сдано в набор 19/II 1937 г. Подписано к печати 7/V 1937 г. Печ. л. 12,5. Уч.-авт. л. 15. Тираж 3000. Формат 62×94 1/16. Кол. тип. зн. в 1 бум. л. 50000. Гл. ред. технико-теоретич. лит. № 70. Уч. № 4584. Уполномоченный Главлита № Б-13823. Бум. л. 6,25. Заказ № 1672.

2-я типогр. ОНТИ имени Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография „Субгармонические функции“ содержит лекции, читанные мною в Московском государственном университете в 1934/35 учебном году.

Книга дает изложение новой теории субгармонических функций в связи с их приложениями к аналитическим функциям комплексного переменного и разделяется на две части сообразно методу исследования.

Первая часть монографии посвящена изучению свойств субгармонических функций, пользуясь в основном методом максимума и гармонической мажоранты; при этих исследованиях мы не пользуемся аналитическим аппаратом, при помощи которого представляется субгармоническая функция. В основу же второй части положена формула для изображения субгармонической функции и изучаются свойства таких функций, отправляясь от их аналитического представления.

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность проф. А. И. Плесснеру за ценные указания, внесенные им при редактировании этой книги.

*И. Привалов*

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие . . . . . 5

Часть I

МЕТОД МАКСИМУМА И ГАРМОНИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТЫ

Введение . . . . . 9

§ 1. Связь между функциями гармоническими и аналитическими . 9
§ 2. Функция Грина . . . . . 11
§ 3. Свойства функции Грина . . . . . 11
§ 4. Формула Грина . . . . . 12
§ 5. Интеграл Пуассона . . . . . 13

Глава I. **Обобщенный параметр Лапласа** . . . . . 17

§ 1. Определение обобщенного параметра Лапласа . . . . . 17
§ 2. Новое определение гармонической функции . . . . . 18
§ 3. Теорема Гарнака . . . . . 21

Глава II. **Выпуклые функции** . . . . . 22

§ 1. Определение выпуклой функции . . . . . 22
§ 2. Принцип максимума . . . . . 22
§ 3. Критерии и основные свойства выпуклых функций . . . . . 23
§ 4. Примеры . . . . . 28

Глава III. **Субгармонические функции** . . . . . 29

§ 1. Определение непрерывной субгармонической функции . . . 29
§ 2. Критерий непрерывной субгармонической функции . . . . 29
§ 3. Общее определение субгармонической функции . . . . . 31
§ 4. Наилучшая гармоническая мажоранта . . . . . 33
§ 5. Второе определение субгармонической функции . . . . . 35
§ 6. Простейшие свойства субгармонических функций . . . . . 37
§ 7. Примеры . . . . . 39
§ 8. Теорема о среднем значении . . . . . 40
§ 9. Различные определения субгармонической функции . . . . 51
§ 10. Простейший критерий субгармонической функции . . . . . 54
§ 11. Классификация субгармонических функций . . . . . 55
§ 12. Логарифмически-субгармонические функции . . . . . 59
§ 13. Теорема о логарифмически-субгармонических функциях . . 63
§ 14. Обобщение теоремы Гарди . . . . . 66
§ 15. Среднее значение порядка $\alpha$ как функция от $\alpha$ . . . . . 67
§ 16. Обобщение теоремы Адамара . . . . . 69
§ 17. Теорема о трех плоскостях . . . . . 71
§ 18. Теорема о трех цилиндрах . . . . . 72
§ 19. Теорема о трех полуплоскостях . . . . . 74
§ 20. Теорема о трех конусах . . . . . 76

Глава IV. **Принцип максимума и его приложения** . . . . . 78

§ 1. Принцип максимума в его простейшей форме . . . . . 78
§ 2. Лемма Шварца . . . . . 78
§ 3. Принцип максимума в обобщенном виде . . . . . 79



Стр.

§ 4. Второе расширение принципа максимума . . . . . 80
§ 5. Случай счетного множества исключительных точек . . . . . 82
§ 6. Приложения к угловым областям (плоский случай) . . . . . 85
§ 7. Пространственный случай . . . . . 86
§ 8. Приложения к угловым областям — продолжение (плоский случай) . . . . . 87
§ 9. Пространственный случай . . . . . 88
§ 10. Приложения к угловым областям — окончание (плоский случай) 88
§ 11. Резюме . . . . . 89
§ 12. Субгармонические функции во всей плоскости . . . . . 90
§ 13. Субгармонические функции во всем пространстве . . . . . 91

Глава V. **Принцип гармонической мажоранты и его приложения** . . 93

§ 1. Принцип гармонической мажоранты . . . . . 93
§ 2. Неравенство Неванлинны и Островского . . . . . 93
§ 3. Лемма Карлемана . . . . . 95
§ 4. Лемма Карлемана в пространстве . . . . . 98
§ 5. Понятие наилучшей гармонической мажоранты в полной области . . . . . 99
§ 6. Критерий разложимости субгармонической функции на сумму двух слагаемых . . . . . 100
§ 7. Некоторые экстремальные задачи теории субгармонических функций . . . . . 104

Глава VI. **Подчиненные субгармонические функции** . . . . . 109

§ 1. Определение . . . . . 109
§ 2. Принцип средних значений . . . . . 110
§ 3. Принцип максимума и минимума . . . . . 111
§ 4. Подчиненные аналитические функции комплексного переменного . . . . . 112
§ 5. Пример . . . . . 114
§ 6. Метод Линделефа для круга . . . . . 116
§ 7. Приложения . . . . . 120
§ 8. Модулярная функция . . . . . 121
§ 9. Неравенство Шоттки . . . . . 125
§ 10. Теорема Ландау . . . . . 126
§ 11. Метод Линделефа для односвязной области . . . . . 127
§ 12. Теорема Пикара . . . . . 127

Глава VII. **Подчиненные субгармонические функции в обобщенном смысле** . . . . . 130

§ 1. Неевклидова метрика . . . . . 130
§ 2. Лемма Шварца-Пика . . . . . 133
§ 3. Определение . . . . . 133
§ 4. Принцип максимума и минимума . . . . . 133
§ 5. Принцип средних значений . . . . . 134
§ 6. Случай односвязной области . . . . . 136

ЧАСТЬ II

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Глава I. **Аналитический аппарат для представления субгармонических функций** . . . . . 139

§ 1. Основная формула для представления субгармонической функции в классическом случае . . . . . 139
§ 2. Функции множества . . . . . 144
§ 3. Интеграл Стильтьеса . . . . . 147
§ 4. Потенциал . . . . . 148

Стр.

§ 5. Аппроксимация субгармонической функции . . . . . 150
§ 6. Принцип компактности функций множества . . . . . 154
§ 7. Основная формула для представления субгармонической функции внутри области . . . . . 157
§ 8. Основная формула для представления субгармонической функции во всей области . . . . . 160
§ 9. Приложения к аналитическим функциям . . . . . 163
§ 10. Обобщение формулы Иенсена-Неванлинны . . . . . 165

Глава II. **Приложения аналитического аппарата к изучению субгармонической функции внутри области** . . . . . 171

§ 1. Свойства характеристической функции . . . . . 171
§ 2. Функция $N(\rho)$ . . . . . 174
§ 3. Критерий для суммы субгармонической отрицательной и супергармонической положительной функций . . . . . 176
§ 4. Обобщение теоремы Лиувилля . . . . . 179
§ 5. Логарифмический потенциал конечной массы . . . . . 181

Глава III. **Граничная задача** . . . . . 185

§ 1. Случай круга . . . . . 185
§ 2. Случай произвольной области . . . . . 193
§ 3. Общая задача . . . . . 194

**Библиографический указатель** . . . . . 198

---

ЧАСТЬ I

# МЕТОД МАКСИМУМА И ГАРМОНИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТЫ

## ВВЕДЕНИЕ

Субгармонические функции были введены в анализ Гартогсом (Hartogs) [4] [1]) и Ф. Риссом (F. Riesz) [27], однако их идея уже заложена в методе „выметания" Пуанкаре (Poincaré). Они представляют собою распространение на случай многих переменных выпуклых функций одного переменного. После того как теория субгармонических функций достаточно развилась, естественно возник вопрос о приложении их как более общего класса функций к теории аналитических функций одного комплексного переменного. Этот новый методологический подход к проблемам теории функций комплексного переменного, в основании которого лежат свойства субгармонических функций, с одной стороны, дает упрощение доказательств и объясняет ряд положений, на первый взгляд не связанных друг с другом; с другой стороны, позволяет формулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций. В целях дальнейших приложений теории субгармонических функций к аналитическим функциям одного комплексного переменного мы изложим предварительно некоторые вопросы гармонических функций от двух независимых переменных.

### § 1. Связь между функциями гармоническими и аналитическими

n° 1. *Функция $P(x, y)$ двух действительных переменных $x$ и $y$ называется гармонической в области $D$, если она однозначна, имеет непрерывные частные производные первых двух порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа* (Laplace)

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

в области $D$.

Рассматривая плоскость $(x, y)$ как плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, всякую функцию $f(z)$, аналитическую в области $D$, мы можем представить в виде

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках указывают ссылки на список литературы, помещенный в конце книги.

где $P$ и $Q$ удовлетворяют *уравнениям Коши-Римана* (Cauchy-Riemann):

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad (\mathrm{C-R}).$$

Диференцируя первое из этих уравнений относительно $x$, а второе — относительно $y$ и складывая результаты, получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0.$$

Следовательно, действительная часть $P(x, y)$ функции $f(z)$, аналитической в области $D$, есть гармоническая функция в этой области.

Обратно, пусть $P(x, y)$ данная гармоническая функция в односвязной области; из уравнений (C — R) Коши-Римана можно найти сопряженную гармоническую функцию $Q(x, y)$, которая определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого, и тем самым построить функцию $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$, аналитическую в области $D$.

Таким образом, чтобы $P(x, y)$ была гармонической функцией в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы она была действительной частью аналитической функции в этой области.

n° 2. Пусть теперь $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области $D$, нигде в этой области не равная нулю. Тогда $\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$ можно рассматривать как функцию аналитическую в области $D$. Следовательно, по предыдущему, $\ln|f(z)|$ есть гармоническая функция в области $D$.

Обратно, *всякую гармоническую функцию $P(x, y)$ в односвязной области $D$ можно представить в виде* $\ln|f(z)|$, *где $f(z)$ аналитическая функция в этой области, не обращающаяся в нуль.* Действительно, по данной гармонической функции $P(x, y)$ находим сопряженную с ней гармоническую функцию $Q(x, y)$ и, полагая $f(z)=e^{P+iQ}$, получаем

$$|f(z)|=e^{P(x, y)},$$

откуда

$$P(x, y)=\ln|f(z)|.$$

n° 3. Это предложение, связывающее аналитические функции с гармоническими, позволяет, зная принцип максимума для модуля аналитической функции, установить принцип экстремума для гармонической функции, формулируемый таким образом:

*Гармоническая функция, отличная от постоянного, не может достигать максимума или минимума во внутренней точке области.* В самом деле, $P(x, y)=\ln|f(z)|$ достигает экстремума одновременно с $|f(z)|$, а модуль функции, аналитической в области, не обращающейся в нуль нигде в этой области, не может достигать максимума или минимума во внутренней точке области.

Из этого экстремального принципа гармонических функций немедленно вытекает единственность решения так называемой задачи Дирихле (Dirichlet), состоящей в следующем. На границе некоторой области $D$ задана непрерывная последовательность значений. Требуется найти функцию, гармоническую в области $D$, непрерывную в замкнутой



области $\overline{D}$ и принимающую заданные значения на границе. Предположим, что существуют две гармонические функции в области $D$, — обозначим их $P_1$ и $P_2$, — непрерывные, включая границу, и принимающие заданные значения на границе. Тогда $P=P_1-P_2$ будет гармонической функцией в области $D$, непрерывной в $\overline{D}$ и равной нулю на границе. В силу экстремального принципа функция $P$ не может принимать в области $D$ ни положительных, ни отрицательных значений, а потому $P\equiv 0$ всюду в $D$, т. е. $P_1\equiv P_2$.

## § 2. Функция Грина (Green)

Переход от функций аналитических к гармоническим осуществляется с помощью так называемой функции Грина.

Пусть мы имеем произвольную односвязную область $D$ в плоскости $z$, отличную от полной плоскости или плоскости с выключенной точкой. Допустим, что мы построили функцию, реализующую конформное взаимно однозначное отображение нашей области на единичный круг: $w=f(z)$, $f(\zeta)=0$, где $\zeta$ фиксированная точка области $D$. Полагая $G(z;\zeta)=-\ln|f(z)|$ [1]), мы получим действительную положительную функцию от переменного $z$, где $\zeta$ рассматривается как параметр, которая называется *функцией Грина области $D$ с полюсом $\zeta$*. Чтобы изучить ее свойства, заметим, что

$$w=f(z)=(z-\zeta)f_1(z), \tag{1}$$

где $f_1(z)$ не обращается в нуль нигде в области $D$, так как $f(z)$ — функция Римана, дающая взаимно однозначное отображение, обращается в нуль только один раз при $z=\zeta$. Заменяя $f(z)$ по формуле (1), найдем для $G(z;\zeta)$ выражение

$$G(z;\zeta)=-\ln|z-\zeta|-\ln|f_1(z)|$$

или

$$G(z;\zeta)+\ln|z-\zeta|=-\ln|f_1(z)|. \tag{2}$$

Правая часть равенства (2) есть гармоническая функция в области $D$, потому что $f_1(z)$ не обращается в нуль. Следовательно, $G(z;\zeta)$ будет гармонической функцией в области $D$, за исключением точки $z=\zeta$, где она имеет логарифмический полюс. Ясно, что на границе области функция Грина $G(z;\zeta)$ равна нулю, так как на границе области $D$ имеем: $|f(z)|=1$.

## § 3. Свойства функции Грина

n° 1. Пусть $W=F(z)$ функция, реализующая конформное отображение области $D$ на единичный круг, причем точке $\zeta$ области $D$ соответствует точка $W_0$ единичного круга, т. е. $W_0=F(\zeta)$. Выполним над функцией $F(z)$ линейное преобразование

$$f(z)=\frac{W-W_0}{1-W\overline{W}_0}=\frac{F(z)-F(\zeta)}{1-F(z)\cdot\overline{F(\zeta)}},$$

[1]) При данном $\zeta$ функция $G(z, \zeta)$ определяется однозначно.

в силу которого точке $z=\zeta$ соответствует начало координат. Согласно § 2 функция Грина для области $D$ будет

$$G(z;\zeta)=-\ln\left|\frac{F(z)-F(\zeta)}{1-F(z)\overline{F(\zeta)}}\right|. \tag{3}$$

Из формулы (3) усматриваем, что функция Грина симметрична относительно $z$ и $\zeta$, т. е. $G(z;\zeta)=G(\zeta;z)$. Как мы видели, на границе области $D$ функция Грина исчезает, внутри области она положительна, в точке $z=\zeta$ она имеет логарифмический полюс. Приравняв $G(z;\zeta)$ положительному числу $\lambda$, получим уравнение $G(z;\zeta)=\lambda$ замкнутой кривой, окружающей точку $z=\zeta$ и переходящей при конформном отображении области $D$ на единичный круг в окружность с центром в начале координат, уравнение которой есть

$$|w|=|f(z)|=e^{-G(z;\zeta)}=e^{-\lambda}.$$

Кривые $G(z;\zeta)=\lambda$ называются *линиями уровня* или *линиями Грина*. Для всех точек, внутренних к линии Грина, будет $G(z;\zeta)>\lambda$.

Аналогично плоскому случаю вводится понятие функции Грина для пространственных областей $p$ измерений. Так же как и в плоском случае, при $p\geqslant 3$ функция Грина равняется нулю на границе области и гармонична везде внутри области за исключением особой точки, в которой она имеет полюс порядка $p-2$.

## § 4. Формула Грина

n° 1. Рассмотрим односвязную область $D$ со спрямляемой границей $C$ и функцию $\varphi(z)$, голоморфную внутри $D$, непрерывную в области $\overline{D}$. Согласно интегральной формуле Коши, имеем

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(u)\,du}{u-z}. \tag{4}$$

Вместо ядра Коши $\frac{1}{u-z}$ введем функцию Грина. Пусть $f(u)$ отображает конформно область $D$ на единичный круг, причем $f(z)=0$; тогда $f(u)=(u-z)f_1(u)$, где $f_1(u)$ не обращается в нуль нигде в области $D$.

Найдем логарифмическую производную

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u-z}+\frac{f_1'(u)}{f_1(u)},$$

откуда

$$\frac{1}{u-z}=\frac{f'(u)}{f(u)}-\frac{f_1'(u)}{f_1(u)}.$$

Подставляя $\frac{1}{u-z}$ в формулу Коши (4), получим

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(u)\frac{f'(u)}{f(u)}\,du-\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(u)\frac{f_1'(u)}{f_1(u)}\,du. \tag{5}$$



Второй интеграл равенства (5) в силу теоремы Коши равен нулю, потому что его подинтегральная функция аналитическая в области $D$[1]); следовательно, формула (5) примет вид:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(u)\frac{f'(u)}{f(u)}\,du. \tag{6}$$

Заметив, что

$$-\ln f(u)=G(u;z)+iH(u;z),$$

где $H$ — функция, сопряженная с $G$, получим, что на контуре области

$$\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=\frac{d\ln f(u)}{ds}\,ds=-\left[\frac{\partial G}{\partial s}+i\frac{\partial H}{\partial s}\right]ds=-i\frac{\partial H}{\partial s}\,ds, \tag{a}$$

так как $G=0$ на контуре и, следовательно, $\frac{\partial G}{\partial s}=0$. Из условий Коши-Римана следует

$$\frac{\partial H}{\partial s}=-\frac{\partial G}{\partial n},$$

где $n$ — направление внутренней нормали, а $s$ — направление касательной. Таким образом на контуре

$$\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=i\frac{\partial G}{\partial n}\,ds \tag{b}$$

и окончательно формула (6) примет вид:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C\varphi(u)\frac{\partial G(u;z)}{\partial n}\,ds. \tag{7}$$

Обозначая действительную часть функции $\varphi(z)$ через $P(z)$, получаем

$$P(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C P(u)\frac{\partial G(u;z)}{\partial n}\,ds. \tag{8}$$

Последнее соотношение носит название *формулы Грина*.

## § 5. Интеграл Пуассона (Poisson)

n° 1. В дальнейшем нас будет интересовать частный случай последней формулы (8), когда $C$ есть окружность с центром в начале координат радиуса $R$. Построив функцию $f(u)=\frac{(u-z)R}{R^2-u\bar{z}}$, мы видим, что функция Грина в этом случае будет

$$G(u;z)=-\ln\left|\frac{(u-z)R}{R^2-u\bar{z}}\right|=\ln\left|\frac{R^2-u\bar{z}}{R(u-z)}\right|. \tag{9}$$

Так как $\ln f(u)=\ln R+\ln(u-z)-\ln(R^2-u\bar{z})$, то в силу формулы (b)

$$\frac{\partial G}{\partial n}\,ds=\frac{1}{i}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du=\frac{1}{i}\frac{du}{u-z}+\frac{1}{i}\frac{\bar{z}\,du}{R^2-u\bar{z}}.$$

---

[1]) При этом выводе предполагается, что $f_1'(u)$ непрерывна в области $\overline{D}$, что выполняется для гладких кривых $C$.

Полагая $u = Re^{i\theta}$, $z = \rho e^{i\varphi}$, $du = Rie^{i\theta}d\theta$, найдем

$$\frac{\partial G}{\partial n}ds = \frac{Rd\theta}{R - \rho e^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{\rho e^{i(\theta-\varphi)}d\theta}{R - \rho e^{i(\theta-\varphi)}} = \frac{(R^2-\rho^2)\,d\theta}{R^2 - 2R\rho\cos(\theta-\varphi) + \rho^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу Грина (8), получим

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(Re^{i\theta})\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\,d\theta. \qquad (10)$$

Эта формула носит название *интеграла Пуассона*. Она получена в предположении, что $P(z)$ есть гармоническая функция в круге $|z| \leqslant R$.

В частном случае при $z = 0$ интеграл Пуассона примет вид:

$$P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(Re^{i\theta})\,d\theta, \qquad (11)$$

т. е. *значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности*. Это свойство установлено впервые Гауссом (Gauss).

n° 2. Функция $U(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$, $p \geqslant 2$, называется гармонической в области $D$ пространства $p$-измерений, если она однозначна, имеет непрерывные частные производные первых двух порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} = 0$$

в области $D$.

Считая шар $\overline{OP} \leqslant R$ принадлежащим области $D$, выведем формулу Пуассона для представления гармонической функции во всякой точке $P$, внутренней к шару, в зависимости от значений функции на поверхности шара. С этой целью будем отправляться от известной из анализа формулы Грина

$$\int_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = 0, \qquad (12)$$

где интегрирование распространяется по поверхности $S$ области, в которой функции $U$ и $V$ гармонические.

Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ любая точка, внутренняя шару $\overline{OP} < R$, и $r = \overline{AP}$ расстояние от точки $A$ до переменной точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$; будем предполагать $p > 2$. Обозначим через $\sigma$ поверхность сферы $\overline{OP} = R$, а через $s$ — поверхность достаточно малой сферы с центром в точке $A$, целиком расположенной внутри шара $\overline{OP} < R$. Применяя соотношение (12) к функциям $U$ и $V = \frac{1}{r^{p-2}}$, гармоническим в двухсвязной области, ограниченной поверхностями $\sigma$ и $s$, получим

$$\int_s \left(U\frac{\partial \frac{1}{r^{p-2}}}{\partial n} - \frac{1}{r^{p-2}}\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds = -\int_\sigma \left(U\frac{\partial \frac{1}{r^{p-2}}}{\partial n} - \frac{1}{r^{p-2}}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma, \qquad (13)$$



где $n$ есть нормаль, внешняя для $s$ и внутренняя для $\sigma$. Заметив, что $\int_s \frac{\partial U}{\partial n}ds = 0$ вследствие гармоничности функции $U$ и, что $r$ — величина, постоянная на сфере $s$, перепишем левую часть последнего соотношения в виде

$$-\frac{p-2}{h^{p-1}}\int_s U\,ds,$$

где $h$ — радиус сферы $s$.

Так как площадь поверхности $s$ шара есть $p\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}h^{p-1}$, то в пределе, при $h \to 0$, левая часть равенства (13) будет равна

$$-(p-2)\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}pU_A.$$

После этих замечаний соотношение (13) примет вид:

$$(p-2)\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}pU_A = \int_\sigma \left(U\frac{\partial \frac{1}{r^{p-2}}}{\partial n} - \frac{1}{r^{p-2}}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma. \qquad (14)$$

Чтобы исключить из формулы (14) производную $\frac{\partial U}{\partial n}$, напомним элементарное свойство сферы. Точка $A_1$ называется сопряженной с точкой $A$ относительно сферы $\sigma$, если она лежит на диаметре $\overline{OA}$ и $\overline{OA}\cdot\overline{OA_1} = R^2$.

Отношение расстояний любой точки $P$ сферы $\sigma$ от двух сопряженных точек $A$ и $A_1$ есть величина постоянная, причем имеем

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA_1}} = \frac{\overline{OA}}{R}.$$

Обозначим через $r_1 = \overline{A_1P}$ расстояние переменной точки $P$ от точки $A_1$ и применим соотношение (12) к функциям $U$ и $\frac{1}{r_1^{p-2}}$ гармоническим в шаре $\overline{OP} \leqslant R$. Тогда получим

$$0 = \int_\sigma \left(U\frac{\partial \frac{1}{r_1^{p-2}}}{\partial n} - \frac{1}{r_1^{p-2}}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Положим $\overline{OA} = l$ и $\overline{OA_1} = l_1$; затем умножим последнее равенство на $\left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}$ и вычтем из (14). Так как на сфере

$$\frac{1}{r^{p-2}} = \left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}\frac{1}{r_1^{p-2}},$$

то в результате найдем

$$(p-2)\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}pU_A=\int\limits_{\sigma}U\left[\frac{\partial\frac{1}{r^{p-2}}}{\partial n}-\left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}\frac{\partial\frac{1}{r_1^{p-2}}}{\partial n}\right]d\sigma. \quad (15)$$

Предыдущий искусственный прием нам позволил исключить $\frac{\partial U}{\partial n}$ и выразить $U_A$ с помощью значений функций $U$ на сфере $\sigma$.

Произведем теперь вычисление предыдущего выражения. Количество, стоящее между скобками под знаком интеграла, может быть представлено в виде

$$(p-2)\left[\frac{1}{r^{p-1}}\cos(r,n)-\left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}\frac{1}{r_1^{p-1}}\cos(r_1,n)\right].$$

Пусть $\varphi=(r,n)=\widehat{OPA}$, $\varphi_1=(r_1,n)=\widehat{OPA_1}$.

Из треугольников $OPA$ и $OPA_1$ находим

$$l^2=R^2+r^2-2Rr\cos\varphi,\quad l_1^2=R^2+r_1^2-2Rr_1\cos\varphi_1.$$

Наконец образуем выражение

$$\frac{\cos\varphi}{r^{p-1}}-\left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}\frac{\cos\varphi_1}{r_1^{p-1}}=\frac{R^2-l^2}{Rr^p},$$

вспомнив, что $ll_1=R^2$ и $\frac{r}{r_1}=\frac{l}{R}$.

Таким образом формула (15) по сокращении на $p-2$ примет вид:

$$\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}pU_A=\int\limits_{\sigma}U\frac{R^2-l^2}{Rr^p}d\sigma;$$

полагая $\sigma=\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}pR^{p-1}$, получим

$$U_A=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma}U(P)\frac{R^{p-2}(R^2-\overline{OA}^2)}{\overline{AP}^p}d\sigma. \quad (16)$$

Формула (16) носит название *интеграла Пуассона*. Она была выведена в предположении $p>2$. В случае $p=2$ мы имеем формулу (10), которую возможно переписать в виде:

$$U_A=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\sigma}U(P)\frac{(R^2-\overline{OA}^2)}{\overline{AP}^2}d\sigma.$$

Сравнивая последнее соотношение с (16), мы видим, что формула (16) справедлива и при $p=2$.

В частном случае при $A=O$ интеграл Пуассона (16) примет вид:

$$U(O)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma}U(P)\,d\sigma, \quad (17)$$

т. е. *значение гармонической функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере.*

Это свойство установлено Гауссом.

ГЛАВА I

# ОБОБЩЕННЫЙ ПАРАМЕТР ЛАПЛАСА

## § 1. Определение обобщенного параметра Лапласа [19]

n° 1. Во введении мы определили гармоническую функцию с помощью обыкновенного диференциального параметра Лапласа $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2}$, предполагая a priori существование непрерывных частных производных до второго порядка включительно у функции $u$. От этого предварительного условия мы можем освободиться, введя новое определение гармонической функции. С этой целью мы введем в рассмотрение понятие обобщенного параметра Лапласа, причем ради общности будем отправляться от функции $u(P)=u(x_1,x_2,\ldots,x_p)$, определенной в области $D$ пространства $p$-измерений[1]). Пусть $u(P)=u(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ есть функция, однозначная в некоторой области $D$ пространства $p$-измерений, интегрируемая в смысле Лебега (Lebesgue) во всяком шаре, лежащем внутри $D$.

Обозначая через $\omega$ объем шара радиуса $h$, имеющего центр в точке $P$, рассмотрим выражение

$$\Delta_h u(P)=\frac{1}{\omega}\int u(M)\,d\omega-u(P),$$

где интегрирование распространено на область этого шара. Выражения

$$\underline{\Delta}^* u(P)=\varliminf_{h\to 0}\Delta_h u(P):\frac{h^2}{2(p+2)},$$

$$\overline{\Delta}^* u(P)=\varlimsup_{h\to 0}\Delta_h u(P):\frac{h^2}{2(p+2)}$$

*называются обобщенными параметрами Лапласа, соответственно нижним и верхним от функции $u(P)$ в точке $P$.*

Мы скажем, что *функция $u(P)$ имеет обобщенный параметр Лапласа $\Delta^* u(P)$* в точке $P$, если $\underline{\Delta}^*$ и $\overline{\Delta}^*$ совпадают, и, по определению, мы положим в этом случае

$$\Delta^* u(P)=\underline{\Delta}^* u(P)=\overline{\Delta}^* u(P)=\lim_{h\to 0}\Delta_h u(P):\frac{h^2}{2(p+2)}.$$

n° 2. Чтобы оправдать это определение, мы докажем следующую теорему:

[1]) Во всем дальнейшем под областью $D$ будем понимать произвольную область, не содержащую внутри бесконечно удаленной точки.

*Если функция $u(P)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка в точке $P$, то она в этой точке допускает обобщенный параметр Лапласа, равный обыкновенному диференциальному параметру Лапласа, т. е.*

$$\Delta^* u(P) = \Delta u(P) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2}.$$

Принимая точку $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ за полюс и обозначая через $(\rho, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ полярные координаты точки $M(x_1', x_2', \ldots, x_p')$, принадлежащей шару радиуса $\leqslant h$, мы имеем

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + \xi_1 = x_1 + \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-1},\\
x_2' &= x_2 + \xi_2 = x_2 + \rho \cos\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{p-1},\\
x_3' &= x_3 + \xi_3 = x_3 + \rho \cos\theta_2 \sin\theta_3 \ldots \sin\theta_{p-1},\\
x_4' &= x_4 + \xi_4 = x_4 + \rho \cos\theta_3 \sin\theta_4 \ldots \sin\theta_{p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_p' &= x_p + \xi_p = x_p + \rho \cos\theta_{p-1},
\end{aligned}$$

где

$$0 \leqslant \rho \leqslant h, \quad 0 \leqslant \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi \quad (k = 2, 3, \ldots, p-1),$$

откуда легко вычисляется элемент объема шара

$$d\omega = \rho^{p-1} \sin\theta_2 \sin^2\theta_3 \ldots \sin^{p-2}\theta_{p-1}\, d\rho\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{p-1}$$

и его полный объем

$$\omega = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} h^p.$$

По формуле Тейлора (Taylor) мы имеем

$$u(M) = u(P) + (u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \ldots + u_p\xi_p) + \\ + \frac{1}{2}(u_{11}\xi_1^2 + u_{22}\xi_2^2 + \ldots + u_{pp}\xi_p^2 + 2u_{12}\xi_1\xi_2 + \ldots) + o(\rho^2),$$

где $u_i$ обозначает частную производную функции $u$ по отношению к $x_i$, а $u_{ik}$ — ее частную производную второго порядка относительно $x_i$, $x_k$.

В силу легко получаемых формул

$$\int_\omega \xi_i \cdot d\omega = 0, \quad \int_\omega \xi_i\xi_k \cdot d\omega = 0 \qquad (i \neq k),$$

$$\int_\omega \xi_i^2 \cdot d\omega = \frac{1}{p}\int_\omega \rho^2\, d\omega = \frac{h^2}{p+2}\,\omega$$

мы находим

$$\Delta_h u(P) = \frac{h^2}{2(p+2)}(u_{11} + u_{22} + \ldots + u_{pp}) + o(h^2),$$

откуда следует

$$\Delta^* u(P) = \lim_{h\to 0} \Delta_h u(P) : \frac{h^2}{2(p+2)} = u_{11} + u_{22} + \ldots + u_{pp} = \Delta u(P),$$

ч. т. д.

## § 2. Новое определение гармонической функции [19]

n° 1. Согласно свойства Гаусса, гармоническая функция $u(P)$ в области $D$ в каждой точке $P$ этой области удовлетворяет условию

$$u(P) = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(M)\, d\sigma,$$



где $\sigma$ есть площадь поверхности сферы с центром в точке $P$ радиуса $\rho$, причем равенство имеет место для всех достаточно малых значений $\rho$.

Умножая равенство $u(P)\sigma = \int_\sigma u(M)\, d\sigma$ на $d\rho$ и интегрируя по $\rho$ в пределах от 0 до $h$, получим

$$u(P)\,\omega = \int_\omega u(M)\, d\omega$$

или

$$u(P) = \frac{1}{\omega}\int_\omega u(M)\, d\omega,$$

где $\omega$ есть объем шара с центром в точке $P$ достаточно малого радиуса $h$. Итак, в случае гармонической функции $\Delta_h u(P) = 0$, начиная с достаточно малого $h$. Таким образом *гармоническая функция $u(P)$ в области $D$ обладает свойствами*: а) *она непрерывна в области $D$*; б) $\Delta^* u(P) = 0$ *в каждой точке области $D$.*

Докажем теперь обратную теорему:

*Если функция $u(P)$, непрерывная в области $D$, удовлетворяет в каждой точке $P$ этой области условию $\Delta^* u(P) = 0$* или, более обще, $\underline{\Delta}^* u(P) \leqslant 0 \leqslant \overline{\Delta}^* u(P)$, *то эта функция будет гармонической в области $D$.*

Для доказательства достаточно обнаружить, что $u$ есть гармоническая функция внутри любого шара, лежащего вместе с своей поверхностью в области $D$. Итак, можем предполагать, что $u(P)$ непрерывна в шаре с центром $P_0$ радиуса $R$, $\overline{P_0P} \leqslant R$, и что в каждой точке внутри этого шара она удовлетворяет условию $\underline{\Delta}^* u(P) \leqslant 0 \leqslant \overline{\Delta}^* u(P)$. Построим функцию $U(P)$, гармоническую внутри шара $\overline{P_0P} < R$, принимающую на его поверхности, $\overline{P_0P} = R$, те же значения, что и $u(P)$.

Образуем разность $f(P) = u(P) - U(P)$; $f(P)$ есть функция, непрерывная для $\overline{P_0P} \leqslant R$, равная нулю при $\overline{P_0P} = R$.

Теорема будет доказана, если мы установим тождество $f(P) \equiv 0$.

Предполагая противное, допустим, что существует внутри шара точка $P_1$, в которой $f$ принимает положительное значение $q$. Рассмотрим тогда вспомогательную функцию

$$F(P) = f(P) + \frac{q}{2}\left(\frac{\overline{P_0P}^2 - R^2}{R^2}\right).$$

Эта функция $F(P)$ непрерывна для $\overline{P_0P} \leqslant R$, равна нулю на сфере $\overline{P_0P} = R$ и положительна в точке $P_1$. Следовательно, существует внутри шара точка $P_2$, в которой функция $F$ достигает максимального значения. Очевидно, имеем

$$0 \geqslant \Delta_h F(P_2) = \Delta_h u(P_2) + \frac{q}{2}\Delta_h\left(\frac{\overline{P_0P_2}^2 - R^2}{R^2}\right).$$

Разделим обе части этого неравенства на $\frac{h^2}{2(p+2)}$ и заставим $h$ стремиться к нулю так, чтобы $\Delta_h u(P_2) : \frac{h^2}{2(p+2)}$ имело пределом

$\overline{\Delta}^* u(P_2)$. Замечая, с другой стороны, что $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_h(\overline{P_0P_2}^2 - R^2) : \frac{h^2}{2(p+2)} = \Delta(\overline{P_0P_2}^2 - R^2) = 2p$, мы получим $0 \geqslant \overline{\Delta}^* u(P_2) + \frac{qp}{R^2}$, что противоречит условию теоремы. Аналогично мы докажем, что $f(P)$ не может иметь отрицательных значений.

Следствие. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $u(P)$, непрерывная в области $D$, была гармонической в этой области, состоит в том, чтобы во всякой точке удовлетворялось условие $\Delta_h u(P) = 0$, начиная с достаточно малого $h$.*

n° 2. Итак, мы имеем такое определение гармонической функции: *Функция $u(P)$ называется гармонической в области $D$, пространства $p \geqslant 2$ измерений, если она удовлетворяет условиям:* а) *$u(P)$ непрерывна в области $D$,* б) во всякой точке $P$ области $u(P) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} u(M)\,d\omega$, начиная с некоторого достаточно малого $h$, где $h$ есть радиус шара с центром в точке $P$ объема $\omega$. Известно, что условие б) для гармонической функции, согласно свойства Гаусса, может быть заменено следующим: $u(P) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} u(M)\,d\sigma$, где $\sigma$ — площадь поверхности, ограничивающей шар $\omega$. С другой стороны, мы видели, что и, обратно, из последнего равенства вытекает условие б). Следовательно, мы можем сказать, что *функция $u(P)$ называется гармонической в области $D$, если она удовлетворяет условиям:* а) *$u(P)$ непрерывна в области $D$,* б′) *во всякой точке $P$ области $u(P) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} u(M)\,d\sigma$,* начиная с некоторого достаточно малого $h$ радиуса сферы $\sigma$ с центром в точке $P$.

Любопытно отметить, что в обоих определениях гармонической функции условие а) может быть отброшено, так как оно автоматически выполняется в силу б) или б′)[1]. В самом деле, мы уже видели, что из условия б′) вытекает условие б). Поэтому достаточно убедиться, что выполнение условия б) влечет непрерывность функции в области $D$. Для этого возьмем точку $P'$, бесконечно близкую с точкой $P$, и заметим, что разность $u(P') - u(P)$ будет бесконечно малой, так как она изображается интегралом, распространенным на бесконечно малую область. Итак, по определению, *функция $u(P)$, конечная в каждой точке области $D$, называется гармонической в области $D$, если она удовлетворяет условию:* б) *во всякой точке $P$ области $u(P) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} u(M)\,d\omega$, начиная с некоторого достаточно малого $h$ радиуса шара объема $\omega$ с центром в точке $P$, или условию б′) во всякой точке $P$ области $u(P) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} u(M)\,d\sigma$, начиная с некоторого достаточно малого $h$ радиуса сферы площади $\sigma$ с центром в точке $P$.*

[1]) Предполагая, само собой, что рассматриваемые интегралы имеют смысл по Лебегу.



## § 3. Теорема Гарнака (Harnack)

В дальнейшем нам придется пользоваться одним предложением из общей теории гармонических функций, принадлежащим Гарнаку и состоящим в следующем:

*Если последовательность функций $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P), \ldots$, гармонических в области $D$, монотонно возрастает, то ее предельная функция либо тождественно равна бесконечности, либо есть гармоническая в области $D$.*

Доказательство этой теоремы становится особенно простым, если воспользоваться новым определением гармонической функции, разобранным в предыдущем параграфе. Действительно, согласно условию,

$$u_n(P) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} u_n(M)\,d\omega$$

в каждой точке $P$ области $D$, где шар объема $\omega$ с центром в точке $P$ лежит внутри $D$. Так как при неограниченном возрастании $n$ функции $u_n$ возрастают и имеют предельную функцию $u$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$u(P) = \frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} u(M)\,d\omega. \tag{1}$$

Если предположить, что $u(P)$ конечна в каждой точке $P$ области $D$, то последнее соотношение показывает, что она есть гармоническая в области $D$ (§ 2). Остается предположить, что найдется хотя бы одна точка $P_0$, в которой $u$ равно $+\infty$. Покажем, что в этом случае $u(P)$ тождественно равно $+\infty$. В самом деле, соединим точку $P_0$ с произвольной точкой $P$ области непрерывной линией $L$, целиком лежащей в области $D$, и обозначим через $d > 0$ расстояние этой линии от границы области $D$. Примем в равенстве (1) $P = P_0$ и за $\omega$ шар с центром в точке $P_0$ радиуса $\frac{d}{4}$; тогда в каждой точке $P$ этого шара $u(P) = +\infty$, потому что такая точка $P$ служит центром шара радиуса $\frac{d}{2}$, содержащего вышеупомянутый шар радиуса $\frac{d}{4}$, и, следовательно, интеграл по области этого шара с центром $P$ равен $+\infty$. Обозначим через $P_1$ первую точку пересечения линии $L$ с поверхностью вышеупомянутого шара радиуса $\frac{d}{4}$, которую мы встретим, идя по линии $L$ от $P_0$ к $P$. Так как, по доказанному, в точке $P_1$ функция $u$ равна $+\infty$, то мы вправе повторить наше рассуждение с заменой $P_0$ на $P_1$. Таким образом в каждой точке шара с центром в точке $P_1$ радиуса $\frac{d}{4}$ наша функция $u$ равна $+\infty$. Продолжая этот процесс далее, получим цепочку шаров радиуса $\frac{d}{4}$ с центрами на линии $L$, попарно перекрывающихся, внутри которых наша функция $u$ все время равна $+\infty$. Конечный элемент этой цепочки будет содержать точку $P$, и, значит, функция $u$ равна $+\infty$ в точке $P$. Так как $P$ есть произвольная точка области $D$, то тем самым показано, что $u(P)$ тождественно равна бесконечности.

ГЛАВА II

# ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Гармонические функции, будучи решениями уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, являются аналогом линейных функций, которые удовлетворяют уравнению $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$. Желая обобщить понятие гармонической функции, естественно рассмотреть сначала обобщение линейной функции.

Таким образом мы приходим к понятию выпуклой функции (соответственно вогнутой функции).

## § 1. Определение выпуклой функции

n° 1. *Непрерывная функция $u(x)$ называется выпуклой в интервале $a < x < b$, если в каждой точке любого сегмента $[\alpha, \beta]$, принадлежащего к $(a, b)$, ее значение не больше, чем соответствующее значение линейной функции, совпадающей на концах сегмента со значениями $u(x)$.*

Другими словами, если $l(x)$ есть линейная функция, определенная условиями $l(\alpha) = u(\alpha)$, $l(\beta) = u(\beta)$, то $u(x) \leqslant l(x)$, где $x \subset [\alpha, \beta]$, каков бы ни был сегмент $[\alpha, \beta]$, принадлежащий интервалу $a < x < b$.

Если положим $x = (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, и заметим, что линейная функция $l(x)$, принимающая при $x = \alpha$ и $x = \beta$ соответственно значения $u(\alpha)$ и $u(\beta)$, переходит в линейную функцию относительно $\lambda$, принимающую при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответственно значения $u(\alpha)$ и $u(\beta)$, то наше определение выпуклой функции выразится таким образом:

*Непрерывная функция $u(x)$ называется выпуклой в интервале $a < x < b$, если при любых $\alpha$ и $\beta$, $a < \alpha < \beta < b$, она удовлетворяет неравенству*

$$u[(1-\lambda)\alpha + \lambda\beta] \leqslant (1-\lambda)\, u(\alpha) + \lambda u(\beta), \tag{1}$$

где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Геометрически график выпуклой функции характеризуется тем, что всякая хорда лежит не ниже стягиваемой ею дуги.

Примечание. Можно не предполагать a priori непрерывности функции $u(x)$, так как легко доказать, что непрерывность вытекает из вышеупомянутого определения.

## § 2. Принцип максимума

n° 1. Из определения сразу вытекает, что *выпуклая функция, отличная от константы в интервале $a < x < b$, не может достигать максимума внутри интервала.*



В самом деле, допустим, противно утверждению, что в некоторой точке $x_0$ выпуклая функция принимает максимальное значение. Тогда, если $u(x)$ не равно тождественно постоянному, найдется некоторое $h$, такое, что по крайней мере, одна из разностей $u(x_0+h) - u(x_0)$ или $u(x_0-h) - u(x_0)$ будет отрицательной, и, значит, заведомо

$$u(x_0+h) + u(x_0-h) - 2u(x_0) < 0,$$

т. е.

$$u(x_0) > \frac{u(x_0-h) + u(x_0+h)}{2}. \tag{1'}$$

С другой стороны, согласно неравенству (1), полагая в нем $\alpha = x_0 - h$, $\beta = x_0 + h$, $\lambda = \frac{1}{2}$, имеем

$$u(x_0) \leqslant \frac{u(x_0-h) + u(x_0+h)}{2}. \tag{2}$$

Неравенства (1′) и (2) противоречивы, что и доказывает наше утверждение.

## § 3. Критерии и основные свойства выпуклых функций

n° 1. Необходимый и достаточный признак выпуклости функции может быть выражен с помощью определителя следующим образом:

*Каковы бы ни были три числа $x_1 < x_2 < x_3$, принадлежащие основному интервалу $(a, b)$, имеет место соотношение*

$$\begin{vmatrix} x_1, & u(x_1), & 1 \\ x_2, & u(x_2), & 1 \\ x_3, & u(x_3), & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{3}$$

Этот критерий выпуклости функции $u(x)$ становится очевидным, если вспомнить, что входящий в него определитель выражает удвоенную площадь треугольника с вершинами $(x_1, u(x_1))$, $(x_2, u(x_2))$, $(x_3, u(x_3))$, причем периметр треугольника проходится против часовой стрелки.

Из критерия (3), в частности, следует, что сумма *двух выпуклых функций есть снова выпуклая функция.*

n° 2. Возвращаясь к определению выпуклой функции $u(x)$ (§ 1), заметим, что линейная функция $l(x)$, совпадающая в концах сегмента $[\alpha, \beta]$ с данной выпуклой функцией, внутри сегмента либо все время больше $u(x)$, либо все время $u(x) = l(x)$. В самом деле, разность $v(x) = u(x) - l(x)$ как сумма двух выпуклых функций есть функция выпуклая. С другой стороны, $v(x)$ равна нулю на концах сегмента $[\alpha, \beta]$ и не имеет положительных значений внутри этого сегмента. Таким образом либо $v(x) \equiv 0$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ и тогда $u(x) \equiv l(x)$, либо $v(x)$ как выпуклая функция отличная от константы, не может достигать максимума внутри $[\alpha, \beta]$, т. е. $v(x) < 0$ внутри $[\alpha, \beta]$ и, значит, $u(x) < l(x)$.

n° 3. Из определения выпуклой функции $u(x)$ (§ 1) непосредственно вытекает как *необходимое условие выпуклости соотношение*

$$u(x) \leqslant \frac{1}{2}[u(x-h) + u(x+h)], \tag{A}$$

которое должно выполняться для всякой точки $x$, начиная с достаточно малого $h$. Это соотношение (А) мы немедленно получим из основного определения выпуклой функции (§ 1), если сегмент $[\alpha, \beta]$ обозначим $[x-h, x+h]$ и применим основное неравенство в центре сегмента — точке $x$. Замечательным является то обстоятельство, что, обратно, *условие* (А) *влечет выпуклость функции* $u(x)$, *если a priori предполагать ее непрерывной.*

В самом деле, выбрав произвольный сегмент $[\alpha, \beta]$, строим линейную функцию $l(x)$ по условиям: $l(\alpha)=u(\alpha)$, $l(\beta)=u(\beta)$ и доказываем, что $u(x)\leqslant l(x)$, где $x\subset[\alpha, \beta]$. Для этого образуем разность $f(x)=u(x)-l(x)$ и покажем, что $f(x)\leqslant 0$ на сегменте $[\alpha, \beta]$. Допустив противное и замечая, что $f(\alpha)=f(\beta)=0$, мы видим, что непрерывная функция $f(x)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ должна иметь положительный максимум во внутренней точке сегмента; обозначим эту точку $x_1$. Применяя условие (А) в точке $x_1$, получим

$$u(x_1)\leqslant\frac{1}{2}[u(x_1-h)+u(x_1+h)]. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$l(x_1)=\frac{1}{2}[l(x_1-h)+l(x_1+h)]. \tag{5}$$

Вычитая из (4) равенство (5), найдем

$$f(x_1)\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1-h)+f(x_1+h)]. \tag{6}$$

Соотношение (6) противоречиво, так как $f(x)$ в точке $x_1$ имеет положительный максимум, а на концах сегмента $[\alpha, \beta]$ обращается в нуль. Итак, мы пришли к противоречию, приняв, что хотя бы в одной точке сегмента $[\alpha, \beta]$ функция $f(x)>0$. Следовательно, все время $f(x)\leqslant 0$ и функция $u(x)$ есть выпуклая.

Это предложение принадлежит Иенсену (Iensen) [3]. Итак, необходимое и достаточное условие, для того чтобы непрерывная функция $u(x)$ была выпуклой в интервале $(a, b)$, заключается в выполнении соотношения (А), какова бы ни была точка $x$ этого интервала, начиная с достаточно малого $h$.

n° 4. Из доказательства мы усматриваем, что предположение непрерывности функции $u(x)$ понадобилось нам в связи с необходимостью применить теорему о существовании максимума для функции непрерывной в замкнутой области. Эта теорема имеет место для функций полунепрерывных сверху, а потому при нашем доказательстве можно было бы ограничиться вместо непрерывности требованием полунепрерывности сверху для $u(x)$.

Известно, что функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x$, если при любом $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$, так чтобы для $|h|<\delta$ имели $-\varepsilon<f(x+h)-f(x)<+\varepsilon$. Более обще, функция $f(x)$ называется полунепрерывной сверху в точке $x$, если при любом $\varepsilon>0$ можно найти $\delta$, так чтобы для $|h|<\delta$ имели $f(x+h)-f(x)<\varepsilon$.

Докажем, что если функция $f(x)$ полунепрерывна сверху в каждой точке сегмента $[\alpha, \beta]$, то она имеет максимальное значение на этом



сегменте. В самом деле, во-первых, верхняя граница $M$ функции $f(x)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ конечна, так как в противном случае существовала бы последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, имеющая пределом $x^*$, такая, что $f(x_n)\to\infty$ и, значит, начиная с некоторого $n$, $f(x_n)-f(x^*)>1$, что невозможно в силу определения полунепрерывности в точке $x^*$. Во-вторых, покажем, что $M$ является максимальным значением. Так как $M$ есть верхняя граница функции $f(x)$, то существует последовательность точек сегмента $[\alpha, \beta]$ — $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, такая, что $f(x_n)\to M$. Обозначая через $x^*$ предельную точку этой последовательности, которая должна принадлежать нашему сегменту, мы можем предполагать, что $x_n\to x^*$. Покажем, что $f(x^*)=M$. В противном случае имели бы $f(x^*)=M-\eta$, $\eta>0$, и, значит, $f(x_n)-f(x^*)\to\eta$, что противоречиво с полунепрерывностью сверху в точке $x^*$.

Итак, функция $u(x)$, полунепрерывная сверху в интервале $a<x<b$ и удовлетворяющая условию (А), есть выпуклая.

Замечание. Замена в предложении Иенсена непрерывности полунепрерывностью сверху не дает расширения класса функций, так как условие (А) и полунепрерывность сверху влекут за собой выпуклость, а следовательно, и непрерывность функции.

n° 5. Критерий (1) выпуклости функции $u(x)$ легко может быть преобразован в следующий:

*Для выпуклости функции* $u(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы отношение*

$$\frac{u(x')-u(x)}{x'-x} \tag{7}$$

*было не убывающей функцией* $x'$ *для всякого фиксированного* $x$.

В частности, *если* $u(x)$ *имеет производную первого порядка, то для ее выпуклости необходимо и достаточно, чтобы* $u'(x)$ *была неубывающая функция.*

Далее, *если* $u(x)$ *в интервале* $(a, b)$ *имеет вторую производную, то для того чтобы функция* $u(x)$ *была выпуклой в этом интервале необходимо и достаточно условие* $u''(x)\geqslant 0$ *для всякого* $x\subset(a, b)$.

Из критерия (7) также следует существование левой и правой производных у выпуклой функции $u(x)$ в каждой точке ее области определения.

Отсюда же, в свою очередь, вследствие известной общей теоремы теории функций действительного переменного заключаем: *выпуклая функция имеет производную всюду за исключением, быть может, счетного множества точек (угловых), в которых существуют различные между собой правые и левые производные.*

n° 6. Наконец отметим ряд следующих свойств выпуклых функций:

а) *Сумма двух выпуклых функций есть снова выпуклая* (см. n° 1).

б) *При умножении выпуклой функции на положительное постоянное она остается выпуклой, так как из соотношения*

$$u[(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta]\leqslant(1-\lambda)u(\alpha)+\lambda u(\beta)$$

при $c > 0$ вытекает

$$w[(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta] \leqslant (1-\lambda)w(\alpha)+\lambda w(\beta),$$

где $w = cu$.

Из этих двух свойств заключаем:

в) *Линейная комбинация с положительными коэфициентами выпуклых функций есть функция выпуклая.*

г) *Если $y(u)$ неубывающая и выпуклая функция и $u(x)$ выпуклая, то $y[u(x)]$ тоже выпуклая функция от $x$.*

Сначала, ради простоты доказательства, будем считать наши функции $y(u)$ и $u(x)$ дважды диференцируемыми. Тогда имеем

$$y'_x = y'_u\, u'_x, \quad y''_{xx} = y'_u \cdot u''_{xx} + y''_{uu} \cdot (u'_x)^2.$$

По условию $u''_{xx} \geqslant 0$, $y'_u \geqslant 0$, $y''_{uu} \geqslant 0$.

Следовательно, $y''_{xx} \geqslant 0$, чем доказывается выпуклость функции $y[u(x)]$.

Обращаясь теперь к общему случаю, заметим, что из соотношения

$$u[(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta] \leqslant (1-\lambda)u(\alpha)+\lambda u(\beta)$$

вследствие возрастания функции $y(u)$ следует

$$y\{u[(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta]\} \leqslant y[(1-\lambda)u(\alpha)+\lambda u(\beta)].$$

Вторая же часть последнего неравенства не больше

$$(1-\lambda)y[u(\alpha)]+\lambda y[u(\beta)],$$

так как $y(u)$ есть функция выпуклая.

Окончательно, следовательно, находим

$$y\{u[(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta]\} \leqslant (1-\lambda)y[u(\alpha)]+\lambda y[u(\beta)].$$

Здесь $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Это доказывает выпуклость $y[u(x)]$ как функции от $x$.

В частности, *если* $\ln u(x) = U(x)$ *есть функция выпуклая, то $u(x)$ и подавно выпуклая функция.* Действительно, $u(x) = e^{U(x)}$; $e^U$ есть возрастающая выпуклая функция, а $U(x)$, по условию, выпуклая; значит, $u(x)$ выпуклая.

Таким образом мы получаем весьма важный подкласс выпуклых функций, а именно *функции логарифмически выпуклые.*

Обратная теорема не справедлива, т. е. $u(x)$ может быть выпуклой положительной функцией, а $\ln u(x)$ нет. Представляется весьма ценным для приложений поставить вопрос о том, как усилить формулировку теоремы, чтобы и обратное предложение было справедливо.

д) *Если $e^{u(x)+\alpha x} = v(x)$, где $u(x)$ непрерывная функция в интервале $a < x < b$, есть выпуклая в этом интервале, каково бы ни было постоянное $\alpha$, то $u(x)$ тоже выпуклая.*

Прежде всего заметим, что при умножении на $e^\beta$ выпуклость функции сохраняется, а потому мы можем предполагать, что $e^{u(x)+\alpha x+\beta}$ при любых постоянных $\alpha$ и $\beta$ есть выпуклая функция. Допустив, что $u(x)$ не есть выпуклая функция, найдем точку $x_0$, где

$$u(x_0) > \frac{1}{2}[u(x_0-h)+u(x_0+h)]$$



для бесконечно многих $h$, стремящихся к нулю. Построим линейную функцию $l(x)$, совпадающую на концах сегмента $[x_0-h, x_0+h]$ с значениями функции $u(x)$, и положим $u(x)-l(x) = d(x)$. Очевидно, на концах нашего сегмента $d = 0$, в центре же

$$d(x_0) = u(x_0) - l(x_0) > \frac{1}{2}[u(x_0-h)+u(x_0+h)] - \\ -\frac{1}{2}[u(x_0-h)+u(x_0+h)] = 0.$$

Согласно условию теоремы, $e^{d(x)}$ есть выпуклая функция; с другой стороны, так как $d(x_0+h) = d(x_0-h) = 0$, то

$$e^{d(x_0)} > 1 = \frac{1}{2}[e^{d(x_0-h)}+e^{d(x_0+h)}],$$

что противоречит выпуклости. Теорема доказана. [6]

е) *Функция, обратная возрастающей выпуклой, есть вогнутая.* Проверяется из чертежа.

ж) *Функция, обратная убывающей выпуклой, есть выпуклая.* Проверяется из чертежа.

Пусть имеем две линейные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Составим функцию $U(x)$, принимающую в каждой точке $x$ максимальное значение из $u_1(x)$ и $u_2(x)$:

$$U(x) = \max[u_1(x), u_2(x)].$$

Очевидно, что функция $U(x)$, которая называется *верхней огибающей функцией* $u_1(x)$ и $u_2(x)$, есть выпуклая и вообще *верхняя огибающая любого конечного числа линейных функций есть функция выпуклая.*

Столь же геометрически очевидным является более общее предложение: *верхняя огибающая конечного числа выпуклых функций есть снова выпуклая функция.*

n° 7. Мы видели, что сумма двух выпуклых функций есть выпуклая функция. Что касается произведения выпуклых функций, то оно, вообще говоря, не дает выпуклой функции: например при $x > 0$ функция $u(x) = -x^\alpha$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, есть выпуклая, в то время как $u^2(x) = x^{2\alpha}$ будет вогнутой, потому что $2\alpha < 1$.

Таким образом *свойство выпуклости сохраняется при сложении и вообще нарушается при умножении.* В связи с этим весьма важно доказать, что *свойство логарифмической выпуклости сохраняется как при сложении, так и при умножении.*

Действительно, очевидным является инвариантность логарифмической выпуклости при умножении, так как, если $\ln u(x)$ и $\ln v(x)$ выпуклые, то $\ln u(x) \cdot v(x) = \ln u(x) + \ln v(x)$ есть выпуклая функция.

Остается доказать, что при сложении двух логарифмически выпуклых функций всегда получается функция логарифмически выпуклая [1]). С этой целью перепишем критерий логарифмической выпуклости

$$\ln u(x) \leqslant \frac{1}{2}[\ln u(x+h)+\ln u(x-h)]$$

[1]) Это предложение было устно мне сообщено проф. А. И. Плеснером.

в виде:

$$u(x+h)\,u(x-h)-u^2(x)\geqslant 0. \qquad \text{(a)}$$

Последнее неравенство, выполняемое во всякой точке $x$, начиная с достаточно малого $h$, представляет необходимое и достаточное условие, для того чтобы положительная непрерывная функция $u(x)$ была логарифмически выпуклой.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ две логарифмически выпуклые функции, т. е. каждая из них положительна, непрерывна и удовлетворяет условию (a).

Покажем, что их сумма $w(x)=u(x)+v(x)$, которая, очевидно, изображает положительную непрерывную функцию, удовлетворяет условию (a).

В самом деле, квадратичные формы

$$u(x+h)\,\xi^2+2u(x)\,\xi\eta+u(x-h)\,\eta^2$$

и

$$v(x+h)\,\xi^2+2v(x)\,\xi\eta+v(x-h)\,\eta^2$$

будут положительными определенными в силу условия (a). Следовательно, их сумма

$$w(x+h)\,\xi^2+2w(x)\,\xi\eta+w(x-h)\,\eta^2$$

должна быть положительной определенной формой, а, значит, ее дискриминант

$$w(x+h)\,w(x-h)-w^2(x)$$

неотрицателен. Итак, мы доказали, что положительная непрерывная функция $w(x)$ во всякой точке $x$ удовлетворяет условию

$$w(x+h)\,w(x-h)-w^2(x)\geqslant 0,$$

начиная с достаточно малого $h$. Следовательно, $w(x)$ есть функция логарифмически выпуклая, что и требовалось доказать.

## § 4. Примеры

В заключение рассмотрим несколько примеров выпуклых функций:

1) $y=a^x$ при $a>1$ возрастающая и выпуклая функция, потому что

$$y'=a^x\ln a>0 \quad \text{и} \quad y''=a^x(\ln a)^2>0.$$

Если $a<1$, то $a^x$ выпуклая убывающая функция.

2) $y=x^\alpha$ в интервале $x>0$ выпуклая функция при $\alpha\geqslant 1$ и $\alpha\leqslant 0$ и вогнутая при $0<\alpha<1$, потому что $y''=\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}$.

Параллельно свойствам выпуклых функций путем изменения знаков функций можно получить соответствующие свойства вогнутых функций.

---

ГЛАВА III

# СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## § 1. Определение непрерывной субгармонической функции [27]

n° 1. Пусть дана область $D$ в пространстве $p\geqslant 2$ измерений и в ней задана непрерывная функция $u(P)=u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Выберем произвольную замкнутую область $\overline{G}$, границу которой обозначим через $\Gamma$, принадлежащую области $D$.

На область $\overline{G}$ мы накладываем единственное ограничение: мы предполагаем, что для области $\overline{G}$ возможно решить задачу Дирихле, т. е. возможно построить гармоническую функцию внутри $G$, непрерывную в $\overline{G}$, значения которой на границе $\Gamma$ совпадают с данной на $\Gamma$ непрерывной функцией. Построим функцию $U(P)$ гармоническую внутри $G$, непрерывную в $\overline{G}$, значения которой на границе $\Gamma$ совпадают со значениями $u(P)$, т. е. $U_\Gamma(P)=u(P)$.

Считая область $\overline{G}$ произвольной, предположим, что внутри ее всегда выполнено неравенство $u(P)\leqslant U(P)$.

В таком случае данную непрерывную функцию $u(P)$ мы назовем субгармонической функцией в области $D$.

Иначе говоря, *субгармонической функцией в области $D$ называется непрерывная в $D$ функция, обладающая свойством: какова бы ни была замкнутая область $\overline{G}$, принадлежащая области $D$, гармоническая функция внутри $\overline{G}$, на границе совпадающая с данной функцией, является мажорантой данной функции внутри области $\overline{G}$.*

Мы видим, что это определение совершенно аналогично определению выпуклой функции. Таким образом понятие субгармонической функции является распространением понятия выпуклой функции на случай многих независимых переменных. Понятию вогнутой функции здесь будет соответствовать понятие супергармонической функции. Все свойства супергармонических функций немедленно получаются из соответствующих свойств субгармонических функций путем изменения знака у функции, подобно тому как всякому предложению о выпуклых функциях отвечает предложение о вогнутых функциях. Поэтому нет никакой надобности рассматривать отдельно супергармонические функции.

## § 2. Критерий непрерывной субгармонической функции [27]

n° 1. Ближайшая наша цель будет заключаться в преобразовании данного определения субгармонической функции в другое, ему эквивалентное, но более простое. Для этого, предполагая непрерывную

функцию $u(P)$ субгармонической в области $D$, выберем за область $\overline{G}$ шар радиуса $\rho$ с центром $P_0$, принадлежащий области $D$. Определим гармоническую функцию $U(P)$ внутри этого шара, совпадающую на его поверхности $\Gamma$ с данной функцией $u(P)$, т. е. $U_\Gamma(P)=u(P)$. Короче говоря, мы решим задачу Дирихле для выбранного шара, приняв граничные значения совпадающими со значениями $u(P)$. По теореме Гаусса, для гармонической функции $U(P)$ имеем

$$U(P_0)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma U(P)\,d\sigma, \tag{1}$$

где $\sigma=\dfrac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}p\rho^{p-1}$ есть площадь поверхности нашего шара. Согласно условию, на сфере $\sigma$ имеем $U(P)=u(P)$ и, значит,

$$U(P_0)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma u(P)\,d\sigma. \tag{1'}$$

С другой стороны, вследствие субгармоничности $u(P)$ внутри шара $u(P)$ не превосходит $U(P)$, а значит, в частности, в его центре

$$u(P_0)\leqslant U(P_0). \tag{2}$$

Из соотношений (1′) и (2) вытекает

$$u(P_0)\leqslant\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma u(P)\,d\sigma. \tag{A}$$

Следовательно, необходимым условием субгармонической непрерывной функции $u(P)$ является выполнение неравенства (A) в каждой точке $P_0$ области $D$, начиная с достаточно малого радиуса $\rho$ сферы.

Замечательным является то обстоятельство, что соотношение (A) одновременно представляет и достаточное условие, для того чтобы непрерывная функция была субгармонической. Итак, предполагая непрерывность функции $u(P)$, докажем, что условие (A) является одновременно и достаточным для субгармоничности функции. Возьмем произвольную область $\overline{G}$, принадлежащую $D$, и построим гармоническую функцию $U(P)$ внутри $\overline{G}$, непрерывную в $\overline{G}$, удовлетворяющую на границе $\Gamma$ области $\overline{G}$ условию $U_\Gamma(P)=u(P)$. Покажем, что при соблюдении условия (A) всюду внутри $\overline{G}$ имеем $u(P)\leqslant U(P)$. Допуская противное, предположим, что $u(P)>U(P)$ в некоторой точке $P$ области $G$. Тогда разность

$$d(P)=u(P)-U(P)$$

в этой точке будет положительной. Так как на границе $\Gamma$ — функция $d(P)$ исчезает, будучи непрерывной в замкнутой области $\overline{G}$, то она достигает максимального значения $M>0$ внутри области $\overline{G}$. Множество $F$ всех точек, внутренних к области $G$, в которых $d=M$, есть замкнутое.

Обозначим через $P_1$ любую граничную точку этого множества $F$, $d(P_1)=M$.



Легко видеть, что

$$d(P_1)>\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma d(P)\,d\sigma \tag{3}$$

для бесконечно многих $\rho$, стремящихся к нулю, потому что если бы имели, начиная с достаточно малого $\rho$, радиуса сферы $\sigma$, равенство $d(P_1)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma d(P)\,d\sigma$, то $d$ была бы постоянным, равным $M$ в окрестности точки $P_1$, что невозможно, так как $P_1$ — граничная точка множества $F$.

Заметив, что

$$U(P_1)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma U(P)\,d\sigma, \tag{4}$$

и складывая равенство (4) с неравенством (3), получим

$$u(P_1)>\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma u(P)\,d\sigma.$$

Последнее неравенство, выполняемое для сколь угодно малых $\rho$, противоречиво с условием (A).

Итак, *необходимое и достаточное условие, для того чтобы непрерывная в области $D$ функция $u(P)$ была субгармонической в этой области, состоит в выполнении неравенства*

$$u(P)\leqslant\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma u(M)\,d\sigma \tag{A}$$

*для каждой точки $P$ области $D$, начиная с достаточно малого радиуса $\rho$ сферы $\sigma$.*

## § 3. Общее определение субгармонической функции [27]

n° 1. До сих пор мы рассматривали субгармонические непрерывные функции. Однако в теории функций комплексного переменного, а также в теории потенциала приходится иметь дело также с разрывными субгармоническими функциями.

Так, например, если $f(z)$ есть аналитическая функция в области $D$, не обращающаяся в нуль, то $\ln|f(z)|$ будет гармонической в этой области. В общем случае, когда $f(z)$ имеет нули в области $D$, функция $\ln|f(z)|$ удовлетворяет в каждой точке условию (A), но перестает быть непрерывной в нулях функции $f(z)$, обращаясь в этих точках в $-\infty$.

Эта функция не будет субгармонической в прежнем смысле, однако она будет субгармонической в обобщенном смысле. Также простейший логарифмический потенциал $\ln r$ при $r=0$ обращается в $-\infty$ или простейший ньютонианский потенциал $-\frac{1}{r}$ при $r=0$ обращается в $-\infty$; здесь мы также имеем примеры функций, удовлетворяющих всюду условию субгармоничности (A), но разрывных.

Все это заставляет нас обобщить понятие субгармонической функции на класс разрывных функций. При этом обобщении условие непрерывности мы заменим более общим условием полунепрерывности сверху.

n° 2. Предварительно определим тот класс функций, вообще разрывных, с которым мы будем иметь дело.

Пусть имеется убывающая последовательность непрерывных функций $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$ с конечным пределом в каждой точке $P$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(P) = f(P)$, где $f(P)$ — функция, конечная в каждой точке $P$ области $D$.

Эта функция $f(P)$ может оказаться непрерывной; вообще говоря, будет разрывной, но обязательно полунепрерывной сверху. В самом деле, для данной точки $P$ выберем $N$ таким, чтобы $f_N(P) < f(P) + \frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое. В силу непрерывности функции $f_N$ существует окрестность $V$ точки $P$ такая, что для $P' \subset V$ имеем

$$f_N(P') < f_N(P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$f(P') < f_N(P') < f_N(P) + \frac{\varepsilon}{2} < f(P) + \varepsilon,$$

т. е., каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется достаточно малая окрестность $V$ точки $P$ такая, что для $P' \subset V$ будет иметь место неравенство

$$f(P') - f(P) < \varepsilon.$$

Иными словами, $f(P)$ есть функция полунепрерывная сверху в каждой точке $P$ области $D$. Справедлива также обратная теорема: всякая полунепрерывная сверху функция является пределом убывающей последовательности непрерывных функций.

Чтобы иметь возможность рассматривать также функции, обращающиеся в $-\infty$, мы обобщим понятие функции, полунепрерывной сверху.

*Условимся называть функцию $f(P)$ полунепрерывной сверху в области $D$, если она является пределом убывающей последовательности непрерывных функций в этой области; при этом в некоторых точках области $D$ функция $f(P)$ может равняться $-\infty$, однако мы предполагаем, что множество точек, где функция имеет конечные значения, всюду плотно.*

n° 3. Перейдем теперь к определению понятия субгармонической функции в обобщенном смысле. Прежде всего покажем, как возможно видоизменить определение субгармонической непрерывной функции $u(P)$ в области $D$.

Пусть $u(P)$ — непрерывная субгармоническая функция в области $D$, а $\overline{G}$ — произвольная замкнутая область, принадлежащая $D$. Рассмотрим любую гармоническую функцию $U$ внутри $\overline{G}$, непрерывную в $\overline{G}$, удовлетворяющую на границе условию $u(P) \leqslant U(P)$; тогда то же неравенство $u(P) \leqslant U(P)$ имеет место и внутри $\overline{G}$. Действительно, если $U^*(P)$ есть гармоническая функция, решающая задачу Дирихле для области $\overline{G}$ с граничными значениями, равными $u(P)$, то в силу определения (§ 1) внутри $\overline{G}$ имеем $u(P) \leqslant U^*(P)$. Так как на границе области $\overline{G}$ будет



$U^*(P) = u(P) \leqslant U(P)$, то по принципу максимума гармонических функций заключаем, что и внутри области $\overline{G}$ будет $U^*(P) \leqslant U(P)$, а следовательно, $u(P) \leqslant U^*(P) \leqslant U(P)$, ч. т. д.

*Функцию $U(P)$ естественно называть гармонической мажорантой функции $u(P)$ для области $\overline{G}$; функция $U^*(P)$ как наименьшая из мажорант называется наилучшей гармонической мажорантой функции $u(P)$ в области $\overline{G}$.* После этого становится естественным следующее общее определение субгармонической функции в области $D$. *Функция $u(P)$ называется субгармонической в области $D$, если она удовлетворит условиям: а) $u(P)$ полунепрерывна сверху в области $D$, и множество точек, где она конечна, всюду плотное; б) если $\overline{G}$ — произвольная замкнутая область, принадлежащая области $D$, а $U$ — любая гармоническая функция внутри $\overline{G}$, непрерывная в $\overline{G}$, то неравенство $u \leqslant U$ на границе области $\overline{G}$ влечет то же неравенство $u \leqslant U$ внутри $\overline{G}$.*

Иными словами, функция $u(P)$ называется субгармонической в области $D$, если она удовлетворяет условию а) полунепрерывности и б) если, какова бы ни была область $\overline{G} \subset D$, всякая гармоническая функция, мажорирующая ее на границе области $\overline{G}$, будет мажорантой и внутри области $\overline{G}$.

## § 4. Наилучшая гармоническая мажоранта [27]

n° 1. В теории субгармонических функций весьма важное значение имеет понятие наилучшей гармонической мажоранты. Мы уже видели (§ 3), что в случае непрерывной субгармонической функции наилучшей ее гармонической мажорантой для области $\overline{G} \subset D$ будет служить гармоническая функция внутри $\overline{G}$, непрерывная в $\overline{G}$, принимающая на границе области $\overline{G}$ те же значения, что и данная функция.

Теперь мы дадим построение наилучшей гармонической мажоранты в области $\overline{G}$ для субгармонической функции $u(P)$ в общем смысле. Так как $u(P)$ есть функция полунепрерывная сверху в области $D$, то ее можно рассматривать как предел монотонно убывающей последовательности непрерывных функций, именно

$$g_1 > g_2 > \ldots > g_n \ldots \to u. \tag{5}$$

Пусть $U_n$ есть гармоническая функция внутри $\overline{G}$, непрерывная в $\overline{G}$, принимающая на ее границе значения $g_n$. Таким образом мы образовали последовательность функций $U_n$, гармонических внутри $\overline{G}$, непрерывных в $\overline{G}$, причем эта последовательность на границе области $\overline{G}$ есть убывающая. В силу принципа максимума гармонических функций заключаем, что из условия $U_{n+1} < U_n$, выполненного на границе, следует то же неравенство $U_{n+1} < U_n$ и внутри области $\overline{G}$. Следовательно, построенная последовательность $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ монотонно убывает внутри области $\overline{G}$, и мы имеем право написать $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U^*$.

В силу классической теоремы Гарнака (гл. I, § 3), всякая монотонно убывающая последовательность гармонических функций в области, сходящаяся к конечному пределу в одной точке, сходится во всех точках области, причем предельная функция гармоническая. В нашем случае это предложение применимо, потому что $U^*$ не может быть тождественно равным $-\infty$. Действительно, на границе области $\overline{G}$ мы имеем $u(P) < U_n(P)$, следовательно, по определению субгармонической функции, внутри $\overline{G}$ будет $u(P) \leqslant U_n(P)$. Если бы $U_n \to -\infty$ всюду внутри $\overline{G}$, то из последнего неравенства следовало бы, что $u(P) = -\infty$ всюду внутри области $\overline{G}$, что невозможно, так как по условию множество точек, где $u(P)$ конечна, всюду плотное. Итак, $U^*$ есть гармоническая функция внутри области $\overline{G}$.

Из неравенства $u(P) \leqslant U_n(P)$, выполненного внутри области $\overline{G}$, переходом к пределу при $n \to \infty$ получим $u(P) \leqslant U^*(P)$, т. е. $U^*$ есть гармоническая мажоранта для области $G$ субгармонической функции $u$.

n° 2. В приведенном построении гармонической мажоранты $U^*$ содержится элемент произвола в выборе последовательности непрерывных функций $g_n$. Однако нетрудно показать, что выбор функций $g_n$ не влияет на функцию $U^*$. Другими словами, пусть $\overline{g}_n$ есть другая монотонно убывающая последовательность непрерывных функций в области $D$, имеющая пределом $u$.

Тогда порожденная ею последовательность гармонических функций $\overline{U}_n$, имеющих на границе области $\overline{G}$ значения $\overline{g}_n$, сходится к гармонической функции $\overline{U}^*$, причем надо доказать, что $\overline{U}^* \equiv U^*$. Таким образом мы хотим обнаружить, что изложенный процесс построения гармонической мажоранты $U^*$ есть регулярный в том смысле, что элементы произвола, содержащиеся в начале процесса, исчезают по его завершении. В самом деле, выберем из последовательности $g_n$ определенную, но произвольную функцию $g_m$. Тогда $\overline{g}_n < g_m$ в $\overline{G}$, начиная с достаточно большого $n$. В самом деле, в противном случае для каждого из бесконечно многих $n'$ существовала бы точка $P_{n'}$ области $\overline{G}$, в которой $\overline{g}_{n'}(P_{n'}) \geqslant g_m(P_{n'})$. Из неравенства $\overline{g}_{n''}(P_{n'}) > \overline{g}_{n'}(P_{n'}) \geqslant g_m(P_{n'})$, где $n'' < n'$, переходом к пределу при $n' \to \infty$ найдем $\overline{g}_{n''}(P_*) \geqslant g_m(P_*)$, обозначая через $P_*$ точку области $\overline{G}$, предельную для $P_{n'}$.

Последнее неравенство, выполняемое для любого $n''$, дает $u(P_*) \geqslant g_m(P_*)$, что противоречит условию. Поэтому на границе области $\overline{G}$ имеем $\overline{U}_n < U_m$, а значит, и внутри области $\overline{G}$ будет $\overline{U}_n \leqslant U_m$. Заставляя $n$ неограниченно расти, получим в пределе $\overline{U}^* \leqslant U_m$; заставляя теперь $m$ неограниченно возрастать, найдем

$$\overline{U}^* \leqslant U^*. \tag{6}$$

Аналогично, меняя роли функций $g_n$ и $\overline{g}_n$, покажем, что

$$U^* \leqslant \overline{U}^*. \tag{7}$$

Из сопоставления неравенств (6) и (7) следует, что $\overline{U}^* \equiv U^*$, что и требовалось доказать.



Остается обнаружить, что $U^*$ есть наилучшая гармоническая мажоранта, т. е. если $U$ есть произвольная гармоническая функция внутри $\overline{G}$, непрерывная в $\overline{G}$, удовлетворяющая неравенству $u \leqslant U$, то $U^* \leqslant U$ внутри области $\overline{G}$.

При доказательстве ограничимся сперва случаем, когда область $\overline{G}$ есть шар, воспользовавшись интегралом Пуассона [1]). Прежде всего имеем

$$U_n(P) = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U_n(M)\,K(M, P)\,d\sigma, \tag{8}$$

где $K(M, P) = \dfrac{R^{p-2}(R^2 - \overline{OP}^2)}{\overline{MP}^p}$ есть ядро Пуассона; интегрирование распространено по поверхности шара площади $\sigma$. Так как на сфере $\sigma$ функции $U_n$, убывая, стремятся к функции $u$, то из соотношения (8) переходом к пределу при $n \to \infty$ получим

$$U^*(P) = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(M)\,K(M, P)\,d\sigma. \tag{9}$$

С другой стороны, для произвольной гармонической функции $U(P)$ имеем

$$U(P) = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U(M)\,K(M, P)\,d\sigma. \tag{10}$$

Так как на сфере $\sigma$ имеем $u(M) \leqslant U(M)$, то из сравнения формул (9) и (10) найдем $U^*(P) \leqslant U(P)$, ч. т. д.

Тот же прием применяется, если область $\overline{G}$ допускает функцию Грина $G$, так как в этом случае мы можем снова отправляться от формулы (8), в которой ядро $K(M, P) = \dfrac{\partial G(M; P)}{\partial n} k_p$, где

$$k_p = \frac{\sigma\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{\pi^{\frac{p}{2}} p(p-2)}\ (p > 2) \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{\sigma}{2\pi}.$$

## § 5. Второе определение субгармонической функции [27]

n° 1. Теперь мы в состоянии исходное определение субгармонической функции заменить другим, ему эквивалентным, но более простым.

*Функция $u(P)$ называется субгармонической в области $D$, если она удовлетворяет условиям: а) $u(P)$ полунепрерывна сверху в области $D$ и конечна на всюду плотном множестве; б) для каждой точки $P$ области $D$ имеет место неравенство*

$$u(P) \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(M)\,d\sigma, \tag{A}$$

[1]) В случае плоскости отсюда немедленно следует справедливость нашего утверждения для любой односвязной области $\overline{G}$, так как при конформном отображении свойства гармоничности и мажорирования сохраняются.

*начиная с достаточно малого радиуса* $\rho$ *сферы* $\sigma$. Чтобы доказать эквивалентность этого определения с исходным определением субгармонической функции (§ 3), нужно обнаружить необходимость и достаточность условия б) для субгармонической функции.

Итак, приступая к доказательству необходимости условия б), предположим, что $u(P)$ есть субгармоническая функция в области $D$. Выберем за область $\overline{G}$ шар с центром в точке $P$ и обозначим через $U^*$ наилучшую гармоническую мажоранту функции $u$ для этого шара.

Из построения наилучшей гармонической мажоранты (§ 4) следует, что

$$U_n(P) = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U_n(M)\,d\sigma;$$

так как на сфере $\sigma$ функции $U_n$, убывая, стремятся к $u$, то переходом к пределу при $n \to \infty$ получим

$$U^*(P) = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(M)\,d\sigma. \tag{11}$$

Это соотношение (11), в частности, показывает, что субгармоническая функция $u(P)$ интегрируема на всякой сфере, ограничивающей шар, принадлежащий области $D$. Пользуясь исходным определением субгармонической функции, получаем

$$u(P) \leqslant U^*(P). \tag{12}$$

Принимая во внимание соотношение (11), найдем

$$u(P) \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(M)\,d\sigma,$$

чем и доказывается выполнимость условия (А) во всякой точке $P$ области $D$, поскольку любую точку $P$ области $D$ можно принять за центр шара достаточно малого радиуса, лежащего внутри области $D$.

n° 2. На первый взгляд кажется, что мы далеко не полностью использовали свойства, содержащиеся в исходном определении субгармонической функции, когда выводили необходимость условия (А).

В самом деле, вместо произвольной области $\overline{G}$ мы взяли шаровую область и мажорирующее неравенство (12) рассмотрели лишь для центра этого шара. Несмотря на это, условие (А) является одновременно и достаточным для субгармонической функции. Убедимся же в этом.

Пусть $u(P)$ удовлетворяет условиям а) и б), а $U(P)$ произвольная гармоническая функция внутри области $\overline{G} \subset D$, непрерывная в $\overline{G}$, удовлетворяющая на ее границе условию $u(P) \leqslant U(P)$; покажем, что внутри области $\overline{G}$ также будет $u(P) \leqslant U(P)$.

Предполагая противное, допустим, что существует точка внутри области $\overline{G}$, в которой $u > U$. Построив вспомогательную функцию

$$d(P) = u(P) - U(P),$$

мы видим, что она будет полунепрерывной сверху в замкнутой области $\overline{G}$, на границе этой области все время $d \leqslant 0$, а внутри $\overline{G}$ имеется точка, где $d > 0$. Следовательно, $d$ достигает максимального значения $M > 0$ внутри области $\overline{G}$. Множество $F$ точек области $G$, где $d = M$, есть замкнутое. Пусть $P_1$ — одна из граничных точек множества $F$. Очевидно, $d(P_1) = M$, причем в сколь угодно малой окрестности точки $P_1$ найдутся точки, где $d < M$, потому что $P_1$ — граничная точка множества $F$.



Заметив это, имеем

$$d(P_1) = M > \frac{1}{\sigma}\int_\sigma d(P)\,d\sigma \tag{13}$$

для бесконечно многих $\rho$, радиусов сфер $\sigma$, стремящихся к нулю, ибо в противном случае $d$ была бы постоянной, равной $M$ в окрестности точки $P_1$, что невозможно.

С другой стороны, по формуле Гаусса

$$U(P_1) = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U(P)\,d\sigma. \tag{14}$$

Складывая соотношения (13) и (14), получим

$$u(P_1) > \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(P)\,d\sigma.$$

Последнее неравенство имеет место для бесконечно многих сфер $\sigma$ с центром в точке $P_1$, радиусы которых стремятся к нулю. Это является противоречием с условием (А), что и требовалось доказать.

## § 6. Простейшие свойства субгармонических функций [26, 27]

n° 1. Пользуясь только что выведенным критерием субгармонических функций, легко докажем следующие их свойства:

а) *При умножении субгармонической функции на положительное постоянное снова получаем субгармоническую функцию.*

Действительно, при умножении на положительное постоянное как полунепрерывность сверху, так и условие (А) сохраняются.

б) *Сумма двух субгармонических функций есть функция субгармоническая.*

В самом деле, при сложении двух функций полунепрерывность сверху и условие (А) сохраняются.

в) *Всякая линейная комбинация с положительными коэфициентами субгармонических функций есть функция субгармоническая.* Это свойство непосредственно вытекает из свойств а) и б).

г) *Верхняя огибающая конечного числа субгармонических функций есть функция субгармоническая.*

В самом деле, пусть

$$w(P) = \max[u_1(P),\ u_2(P),\ \ldots,\ u_n(P)]$$

есть верхняя огибающая субгармонических функций $u_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, $w(P)$ полунепрерывна сверху, потому что $u_k(P)$

полунепрерывны сверху. Далее легко проверить выполнение условия (А) для $w(P)$.

Действительно, $u_k(P) \leqslant w(P)$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$u_k(P) \leqslant \frac{1}{\sigma} \int u_k(M)\, d\sigma \leqslant \frac{1}{\sigma} \int w(M)\, d\sigma.$$

Так как последнее неравенство справедливо для всех $u_k(P)$, то, в частности,

$$w(P) \leqslant \frac{1}{\sigma} \int w(M)\, d\sigma,$$

что и требовалось доказать.

В частности, из этого свойства вытекает, что верхняя огибающая конечного числа гармонических функций есть функция субгармоническая.

Для приложений весьма ценным является более общая формулировка этого принципа: *верхняя огибающая бесконечного семейства субгармонических функций есть функция субгармоническая, если она полунепрерывна сверху.*

Обозначим через $w(P)$ верхнюю границу значений семейства субгармонических функций $\{u(P)\}$ в точке $P$.

Чтобы доказать субгармоничность функции $w(P)$, которая согласно условию полунепрерывна сверху, достаточно установить неравенство

$$w(P) \leqslant \frac{1}{\sigma} \int w(M)\, d\sigma$$

для любой точки $P$. Предполагая противное, найдем точку $P_0$, для которой будет $w(P_0) > \frac{1}{\sigma} \int w(M)\, d\sigma$, где $\sigma$ — сфера с центром $P_0$ сколь угодно малого радиуса.

Так как $w(P_0)$ есть верхняя граница значений $\{u(P_0)\}$, то из последнего неравенства вытекает, что для некоторой функции семейства будет

$$u(P_0) > \frac{1}{\sigma} \int w(M)\, d\sigma.$$

Заметив, что $w(M) \geqslant u(M)$, получим

$$u(P_0) > \frac{1}{\sigma} \int u(M)\, d\sigma.$$

Это неравенство противоречиво, потому что функция $u(P)$ субгармоническая. Следовательно, положение доказано.

д) *Равномерно сходящаяся последовательность субгармонических функций имеет своей предельной функцией функцию субгармоническую.*

Действительно, во-первых, равномерно сходящаяся последовательность функций, полунепрерывных сверху, в пределе дает функцию, полунепрерывную сверху; во-вторых, для предельной функции условие (А) выполняется, коль скоро оно справедливо для любой функции последовательности, потому что при равномерной сходимости законен переход к пределу под знаком интеграла.



е) *Монотонно убывающая последовательность субгармонических функций сходится к функции субгармонической.* В самом деле, полунепрерывность сверху сохраняется. Условие (А) для предельной функции также соблюдается, потому что возможен переход к пределу под знаком интеграла для монотонно убывающей последовательности функций.

ж) *Субгармоническая функция в области $D$, не равная тождественно постоянному, не может достигать максимума внутри области.*

Действительно, обозначим через $M$ верхнюю границу субгармонической функции $u(P)$ в области $D$. Если $M = +\infty$, то утверждение очевидно, потому что субгармоническая функция ни в какой точке области $D$ не может равняться $+\infty$. Пусть $M$ — конечное число. Предполагая противное нашему утверждению, мы должны допустить, что существует точка $P_0$ в области $D$, в которой $u(P_0) = M$. Обозначим через $F$ множество всех точек области $D$, в которых $u(P) = M$. Это множество $F$ — замкнутое. Следовательно, если $u(P)$ не есть константа, то найдутся граничные точки множества $F$, расположенные внутри области $D$. Пусть $P_1$ — одна из них: очевидно, $u(P_1) = M$. Тогда, с одной стороны, имеем $u(P_1) \leqslant \frac{1}{\sigma} \int_\sigma u(P)\, d\sigma$ вследствие субгармоничности функции $u$. С другой стороны, $u(P_1) \geqslant \frac{1}{\sigma} \int_\sigma u(P)\, d\sigma$, так как $u(P_1) = M$ есть максимальное значение. Оба неравенства справедливы, начиная с достаточно малого $\rho$ — радиуса сферы $\sigma$ с центром в точке $P_1$. Из них вытекает, что

$$u(P_1) = \frac{1}{\sigma} \int_\sigma u(P)\, d\sigma. \qquad \text{(а)}$$

Так как $u(P_1) = M$, а $u(P) \leqslant M$, то последнее равенство (а) возможно лишь в случае, если $u(P) = M$ на $\sigma$, т. е. если $u(P)$ равна постоянному $M$ всюду в окрестности точки $P_1$, что невозможно, ибо $P_1$, есть граничная точка множества $F$.

Полученное противоречие убеждает нас в справедливости высказанного свойства.

## § 7. Примеры

Рассмотрим несколько примеров субгармонических функций.

n° 1. Если $f(z)$ — аналитическая функция в области $D$, то $|f(z)|^\alpha$, $\alpha > 0$, есть функция субгармоническая в той же области.

Действительно, $|f(z)|^\alpha$ есть непрерывная функция всюду в области $D$. Покажем, что она удовлетворяет условию (А) в каждой точке области. Если $f(z_0) = 0$, то неравенство (А) для $|f(z)|^\alpha$ тривиально; если же $f(z_0) \neq 0$, то возможно применить формулу Коши к функции $f^\alpha(z)$, которую можно рассматривать как голоморфную в окрестности точки $z_0$. По формуле Коши будет

$$f^\alpha(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^\alpha(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Взяв модули от обеих частей, получим

$$|f(z_0)|^\alpha \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\theta})|^\alpha d\theta,$$

т. е. условие (A).

n° 2. Если $f(z)$ — функция, аналитическая в области $D$, то $\ln|f(z)|$ есть функция, субгармоническая в той же области.

В самом деле, во-первых, $\ln|f(z)|$ есть функция, полунепрерывная сверху, обращающаяся в $-\infty$ в нулях функции $f(z)$; во-вторых, условие (A) выполняется для каждой точки $z$ области $D$. Если $f(z_0)=0$, то неравенство (A) очевидно, потому что $\ln|f(z_0)|=-\infty$. Если же $f(z_0)\neq 0$, то $\ln|f(z)|$ в окрестности точки $z_0$ можно рассматривать как гармоническую функцию, и, следовательно, неравенство (A) обращается в равенство.

n° 3. Введем условное обозначение: $\ln^+ a=\ln a$, если $a>1$; $\ln^+ a=0$, если $a\leqslant 1$.

Выражение $\ln^+ a$ называется положительным логарифмом числа $a$. Покажем, что $\ln^+|f(z)|$ есть функция, субгармоническая в области $D$, если $f(z)$ есть аналитическая функция в этой области. Действительно, $\ln^+|f(z)|$ есть верхняя огибающая двух субгармонических функций $\ln|f(z)|$ и тождественного нуля.

## § 8. Теорема о среднем значении

n° 1. *Пусть $u(P)$ есть функция, субгармоническая в области $D$. Рассмотрим ее среднее значение*

$$J(\rho)=J(\rho,\ u)=\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(P)\,d\sigma,$$

*где интегрирование распространено на сферу $\sigma$ с центром в точке $P_0$ радиуса $\rho$, $P_0\subset D$, и докажем, что $J(\rho)$ — функция, не убывающая относительно $\rho$, если $\rho$ изменяется так, что соответствующая сфера вместе с внутренностью остается заключенной в области.*

Сверх того, $J(\rho)$ *есть функция, выпуклая относительно* $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p>2)$ *и относительно* $\ln\rho$ $(p=2)$. *Последнее справедливо даже в более общем случае, когда точка $P_0$ принадлежит или не принадлежит области $D$, радиус же $\rho$ изменяется так, чтобы соответствующие сферы образовывали сферическое кольцо, внутреннее к области.*

Что касается первой части этой теоремы, — возрастания $J(\rho)$, — то пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ $(\rho_1<\rho_2)$ — два рассматриваемые радиуса, определяющие две соответствующие им сферы. Обозначим через $U(P)$ наилучшую гармоническую мажоранту функции $u(P)$ для наибольшей из этих двух сфер. Тогда будем иметь на другой сфере $u\leqslant U$ и, следовательно,

$$J(\rho_1,\ u)\leqslant J(\rho_1,\ U)=J(\rho_2,\ U)=J(\rho_2,\ u),$$

ч. т. д.



Чтобы доказать вторую часть теоремы, мы воспользуемся той же идеей, но приложим ее вместо шара к сферическому кольцу $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$, заключенному внутри области $D$. Обозначим через $V(P)$ наилучшую гармоническую мажоранту, соответствующую нашему кольцу. Тогда, как мы это сейчас покажем, среднее значение $J(\rho,\ V)$ для $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$ есть линейная функция относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p>2)$ и относительно $\ln\rho$ $(p=2)$; с другой стороны, очевидно, что для $\rho=\rho_1$ и $\rho=\rho_2$ эта линейная функция $J(\rho,\ V)$ принимает значения, равные соответственно $J(\rho_1,\ u)$ и $J(\rho_2,\ u)$. Так как в кольце $u\leqslant V$, то отсюда следует $J(\rho,\ u)\leqslant J(\rho,\ V)$. Итак, $J(\rho,\ u)$ во всяком сегменте $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$ не превосходит $J(\rho,\ V)$, т. е. линейной функции относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p>2)$ или относительно $\ln\rho$ $(p=2)$, принимающей на концах сегмента те же значения $J(\rho_1,\ u)$ и $J(\rho_2,\ u)$, что и данная функция $J(\rho,\ u)$. Это доказывает выпуклость выражения $J(\rho,\ u)$ как функции $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p>2)$ или как функции $\ln\rho$ $(p=2)$.

n° 2. Остается лишь оправдать, что $J(\rho,\ V)$ линейно зависит от $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p>2)$ или от $\ln\rho$ $(p=2)$.

Будем отправляться от известной формулы Грина, преобразующей объемный интеграл в поверхностный

$$\int(\varphi\,\Delta\psi-\psi\,\Delta\varphi)\,d\omega=\int\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma,$$

где интеграл левой части распространен на область пространства, а интеграл правой части взят по ее поверхности; причем производная берется по внутренней нормали. Приложим эту формулу, приняв за область кольцо $\rho_1\leqslant r\leqslant\rho$, полагая в ней, при $p>2$, $\varphi=\frac{1}{r^{p-2}}$, $\psi=V$, а в случае $p=2$ считаем $\varphi=\ln\frac{1}{r}$, $\psi=V$. Так как внутри рассматриваемой области функции $\varphi$ и $\psi$ гармонические, то объемный интеграл формулы Грина исчезает, и она принимает вид, в случае, если $p=2$,

$$\int\ln\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\,ds=\int V\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\cdot ds, \tag{15}$$

где оба интеграла распространены по окружностям радиусов $\rho_1$ и $\rho$.

В случае $p>2$ наша формула примет вид

$$\int\frac{1}{r^{p-2}}\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma=\int V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{p-2}}\right)d\sigma, \tag{16}$$

где оба интеграла распространены по сферам радиусов $\rho_1$ и $\rho$.

Равенство (15) преобразуется к виду

$$+\ln\rho\int_{r=\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\rho}ds-\ln\rho_1\int_{r=\rho_1}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\rho_1}ds=\frac{1}{\rho}\int_{r=\rho}V\,ds-\frac{1}{\rho_1}\int_{r=\rho_1}V\,ds.$$

где все интегралы, кроме $\int\limits_{r=\rho} V\,ds$, постоянные относительно $\rho$, так как распространены на окружность радиуса $\rho_1$ [1]). Из этой формулы мы усматриваем, что

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{r=\rho} V\,ds=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} V(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

линейно зависит от $\ln\rho$.

Аналогично напишем в развернутом виде равенство (16), воспользовавшись попрежнему инвариантностью $\int \frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma$. Мы будем иметь

$$-\frac{1}{\rho^{p-2}}\int\limits_{r=\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\rho} d\sigma+\frac{1}{\rho_1^{p-2}}\int\limits_{r=\rho_1}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\rho_1} d\sigma=$$
$$=\frac{(p-2)}{\rho^{p-1}}\int\limits_{r=\rho} V\,d\sigma-\frac{(p-2)}{\rho_1^{p-1}}\int\limits_{r=\rho_1} V\,d\sigma,$$

откуда усматриваем, что $\frac{1}{\rho^{p-1}}\int\limits_{r=\rho} V\,d\sigma$ линейно зависит от $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ [1]).

Вспомнив, что площадь $\sigma$ сферы радиуса $\rho$ есть

$$\sigma=\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}p\rho^{p-1},$$

мы убеждаемся в линейной зависимости относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ выражения

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} V\,d\sigma.$$

Итак, доказано, что $J(\rho, V)$ линейно зависит от $\ln\rho$ в случае $p=2$ и линейно зависит от $\frac{1}{\rho^{p-2}}$, если $p>2$. Теорема о среднем значении субгармонической функции полностью доказана [27].

Теорема о среднем значении субгармонической функции может быть дополнена следующим образом. Рассмотрим субгармоническую функцию $u(P)$ в области $D$ и образуем ее среднее значение на сфере $\sigma_r^P$ постоянного радиуса $r$, считая центр $P$ произвольным:

$$S_r u(P)=\frac{1}{\sigma_r}\int\limits_{\sigma_r^P} u(Q)\,d\sigma.$$

Само собой понятно, что последняя функция определена в области $G\subset D$, граница которой отстоит от границы области $D$ на расстояние $>r$.

[1]) $\int\limits_{r=\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\rho} ds=\int\limits_{r=\rho_1}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=\rho_1} ds$ вследствие гармоничности функции $V$.



Докажем, что $S_r u(P)$ *есть функция, субгармоническая относительно точки* $P$. Действительно, заменяя интеграл суммой [1]), мы можем рассматривать $S_r u(P)$ в виде предела последовательности субгармонических функций $s_n(P)$.

Мы полагаем $s_n(P)=\frac{1}{\sigma_r}\sum\limits_{i=1}^{n} u(Q_i^n)\,\Delta\sigma_i^n$, причем предполагается, что вектора $\overrightarrow{PQ_i^n}$ для фиксированных $i$ и $n$ и различных $P$ равны между собою. Тогда функции $s_n(P)$ будут субгармоническими, для которых $S_r u(P)$ является предельной функцией.

Функции $s_1(P), s_2(P), \ldots, s_n(P), \ldots$ очевидно, ограничены в своей совокупности и равностепенно непрерывны. По известной теореме Арцела (Arzela) они сходятся равномерно к своей предельной функции $S_r u(P)$. Следовательно, $S_r u(P)$ есть непрерывная субгармоническая функция.

n° 3. Отметим важные следствия теоремы о среднем значении.

Теорема Гарди (Hardy) [5]. *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция для $|z|<R$, $\alpha$ — любое положительное число и*

$$M_\alpha(r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi\right\}^{\frac{1}{\alpha}}\quad (r<R). \tag{17}$$

*Тогда, во-первых, $M_\alpha(r)$ есть функция, не убывающая относительно $r$ и, во-вторых, логарифмически выпуклая относительно $\ln r$.*

Первая часть теоремы Гарди содержится в общей теореме, потому что $|f(z)|^\alpha$ есть функция, субгармоническая в круге $|z|<R$. Чтобы вывести из общей теоремы вторую часть предложения Гарди, заметим, что функция $|z|^\beta|f(z)|^\alpha$ есть субгармоническая для $0<|z|<R$, каково бы ни было постоянное $\beta$. Это непосредственно следует, из формулы Коши, применением критерия § 2. В самом деле, наша функция $|z|^\beta|f(z)|^\alpha$ в рассматриваемой области непрерывна. Далее, если $f(z_0)=0$, то условие (A) тривиально; если же $f(z_0)\neq 0$, то мы вправе применить к функции $z^\beta f^\alpha(z)$ в окрестности точки $z_0$ формулу Коши, согласно которой будет

$$z_0^\beta f^\alpha(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(z_0+\rho e^{i\theta})^\beta f^\alpha(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

Переходя к модулям, получим неравенство (A) для функции $|z|^\beta|f(z)|^\alpha$.

Применяя теорему о среднем значении $k$ субгармонической функции $u(z)=|z|^\beta|f(z)|^\alpha$, заключаем, что каков бы ни был показатель $\beta$, $r^\beta M_\alpha(r)$ есть функция, выпуклая относительно $\ln r$. Заметив, что

$$r^\beta M_\alpha(r)=e^{\beta\ln r+\ln M_\alpha},$$

[1]) При доказательстве достаточно считать $u(P)$ непрерывной, так как в противном случае она является пределом (см. ч. II, гл. 1, § 5) монотонно убывающей последовательности непрерывных субгармонических функций.

мы воспользуемся свойством выпуклых функций (гл. II, § 3), в силу которого $\ln M_a$ будет выпуклой функцией относительно $\ln r$.

n° 4. Вспомнив, что $\ln|f(z)|$ и $\ln^+|f(z)|$ суть субгармонические функции в круге $|z|<R$, положим $u(z)=\ln|f(z)|$, а затем $u(z)=\ln^+|f(z)|$. Тогда получим следующее предложение: *если $f(z)$ есть функция, аналитическая в круге $|z|<R$, то выражения*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \quad (r<R) \qquad (18)$$

суть функции, не убывающие от $r$ и выпуклые относительно $\ln r$.

n° 5. Возвращаясь к случаю общей субгармонической функции $u(P)$ внутри шара радиуса $R$, $\overline{OP}<R$, построим наилучшую гармоническую мажоранту функции $u$ для шара $\overline{OP}\leqslant r$, $r<R$.

Очевидно, построенная гармоническая функция $G_r(P)$ с возрастанием $r$ не убывает, потому что если $r_2>r_1$, то $G_{r_2}$ есть также гармоническая мажоранта функции $u$ для шара радиуса $r_1$, в то время как $G_{r_1}$ для этой области будет наилучшей гармонической мажорантой.

Следовательно, по теореме Гарнака (гл. I, § 3) либо $G_r(P)$ при $r\to R$ стремится к гармонической функции $G(P)$, либо неограниченно возрастает во всякой точке $P$. В первом случае мы скажем, что данная функция $u(P)$ имеет наилучшую гармоническую мажоранту $G(P)$ в полной области [1]) (т. е. в шаре $\overline{OP}<R$); во втором случае, — что $u(P)$ не имеет гармонической мажоранты во всем шаре. Теорема о среднем значении, доказанная в настоящем параграфе, позволяет дать весьма простой критерий существования гармонической мажоранты для субгармонической функции в шаре $\overline{OP}<R$.

С этой целью заметим, что среднее значение

$$J(r,\ u)=J(r,\ G_r)=G_r(O)$$

по доказанному — неубывающая функция от $r$.

Таким образом либо $J(r,\ u)$ при $r\to R$ стремится к определенному пределу, либо неограниченно возрастает. В первом случае $G_r(O)\to G(O)$ и, по теореме Гарнака, $G(P)$ есть гармоническая функция, во втором случае $G_r(O)\to+\infty$ и $G(P)$ тождественно равна $+\infty$. Таким образом только в первом случае, когда $J(r,\ u)$ стремится при $r\to R$ к конечному пределу, субгармоническая функция $u$ имеет гармоническую мажоранту во всем шаре.

Полученный вывод мы формулируем в виде следующего предложения:

[1]) Если бы $G(P)$ не была наилучшей мажорантой, то существовала бы точка $P_0$, в которой $G(P_0)>U(P_0)$, причем $U(P)$ — гармоническая мажоранта в области $D$. Отсюда вытекает, что при $r$, достаточно близком к $R$, имеем $G_r(P_0)\geqslant U(P_0)$, что невозможно, так как $U(P)$ есть подавно мажоранта для шара $\overline{OP}\leqslant r$.



*Для того чтобы субгармоническая функция $u(P)$ в шаре $\overline{OP}<R$ имела гармоническую мажоранту, необходимо и достаточно, чтобы ее среднее значение на сфере $\overline{OP}=r<R$:*

$$J(r,\ u)=\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(P)\,d\sigma$$

*представляло ограниченную величину при $r\to R$, т. е.*

$$J(r,\ u)=O(1). \qquad (19)$$

n° 6. Допустим теперь, что $u(z)$ есть функция, субгармоническая во всей плоскости комплексного переменного $z$. Тогда, по доказанному в этом параграфе, ее среднее значение на окружности $|z|=r$

$$J(r,\ u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

— неубывающая функция от $r$, выпуклая относительно $\ln r$.

Предположим, что $u(z)$ ограничена сверху во всей плоскости комлексного переменного, или, более обще, допустим, что

$$J(r,\ u^+)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^+(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

ограничено, каково бы ни было $r$, где

$$u^+(z)=\begin{cases}u(z), & \text{если } u(z)\geqslant 0,\\ 0 & \text{„ } u(z)<0.\end{cases}$$

При этом $J(r,\ u)$, будучи неубывающей функцией от $r$ и выпуклой относительно $\ln r$, остается ограниченной, когда $r\to\infty$. Это возможно лишь в случае, когда $J(r,\ u)$ есть константа, т. е. $J(0,\ u)=J(r,\ u)$ или $u(O)=J(r,\ u)$.

Так как за начало координат мы можем принять любую точку $z$ плоскости, то мы установили соотношение

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{i\varphi})\,d\varphi$$

для всякой точки $z$. В силу гл. I, § 2 отсюда следует, что $u(z)$ есть гармоническая функция во всей плоскости и, следовательно, может быть представлена в виде $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция.

Применяя формулу Пуассона

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\varphi})\frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi,$$

где $z=\rho e^{i\theta}$, и, пользуясь, неравенством $J(r,\ u^+)<C$, мы найдем $u(z)<C\dfrac{r+\rho}{r-\rho}$, откуда при $r\to\infty$ получим $u(z)<C$. После этого становится очевидным, что $u(z)$ тождественно равно постоянному, так

как из $u(z)=\ln|f(z)|<C$, где $f(z)$ — целая функция, вытекает, что $|f(z)|<e^C$ и, по теореме Лиувилля (Liouville), $f(z)$ тождественно равно постоянному, а значит, и $u(z)$ — тождественное постоянное.

Итак, мы приходим к следующему обобщению теоремы Лиувилля: *Субгармоническая функция во всей плоскости, отличная от константы, не может быть ограниченной сверху.*

n° 7. Очевидно, наше рассуждение становится не применимым для субгармонической функции во всем пространстве ($p>2$), ограниченной сверху, потому что могут существовать возрастающие вместе с $r$ функции, выпуклые относительно $\frac{1}{r^{p-2}}$ и ограниченные.

На простом примере [1]) легко показать, что существуют субгармонические равномерно непрерывные функции во всем пространстве, отличные от констант. В самом деле, положим

$$v(P)=\frac{1}{\overline{OP}^{p-2}}, \quad \text{если} \quad \overline{OP}>1,$$

$$v(P)=1, \quad \text{если} \quad \overline{OP}\leqslant 1.$$

Эта функция равномерно непрерывна во всем пространстве и в каждой точке $P$ удовлетворяет неравенству

$$v(P)\geqslant\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} v(M)\,d\sigma,$$

начиная с достаточно малого радиуса $\rho$ сферы $\sigma$, имеющей центр в точке $P$. Следовательно, $v(P)$ есть супергармоническая функция (§ 2). Положив $u(P)=-v(P)$, будем иметь субгармоническую функцию с требуемыми свойствами. Итак, *теорема Лиувилля не имеет места для пространственной субгармонической или супергармонической функции*; однако, как мы докажем в дальнейшем, она справедлива для гармонических функций, независимо от числа переменных, т. е. *гармоническая функция во всем пространстве ($p\geqslant 2$), отличная от константы, не может быть ограниченной сверху (а также и снизу).*

n° 8. Мы можем доказать для гармонических функций предложение, более глубокое, чем теорема Лиувилля. *По определению семейство функций $\{u(P)\}$ гармонических внутри шара $\overline{OP}<R$ пространства точек $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $p\geqslant 2$, называется компактным, если из всякой бесконечной части этого семейства возможно выбрать последовательность, равномерно сходящуюся в любом шаре $OP\leqslant\rho<R$ к гармонической функции или к функции, тождественно равной $+\infty$ или $-\infty$.*

Пусть *семейство $\{u(P)\}$ гармонических функций внутри шара $\overline{OP}<R$, удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{\sigma}\int u^+(P)\,d\sigma<C, \tag{I}$$

*какова бы ни была сфера $\sigma$ с центром в начале координат радиуса $\rho<R$ и какова бы ни была функция из данного семейства. При*

[1]) Этот пример указан М. В. Келдышем.



*условии* (I) *мы докажем, что наше семейство $\{u\}$ есть компактное* [19; 7; 22].

Итак, нам нужно доказать, что при условии (I) из семейства гармонических функций можно выбрать последовательность, равномерно сходящуюся в любом шаре $\overline{OP}\leqslant\rho<R$ к гармонической функции или к функции, тождественно равной $-\infty$.

Пусть $\overline{S_r}$ — любой шар с центром в $O$ радиуса $r<R$. Применяя интегральную формулу Пуассона к сфере $\overline{S_\rho}$ радиуса $\rho=\frac{r+R}{2}$, получим

$$u(M)=\frac{1}{\sigma}\int u(P)\frac{\rho^{p-2}(\rho^2-\overline{OM}^2)}{\overline{MP}^p}\,d\sigma.$$

Для любой точки $M$ шара $\overline{S_r}$ из последней формулы вытекает неравенство

$$u(M)<\left(\frac{\rho}{\rho-r}\right)^p\frac{1}{\sigma}\int u^+(P)\,d\sigma=\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^p\frac{1}{\sigma}\int u^+(P)\,d\sigma,$$

т. е.

$$u(M)<C\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^p=K(r).$$

Следовательно, семейство $\{u\}$ ограничено сверху в шаре $\overline{S_r}$.

Обозначим через $d=\frac{R-r}{2}$ расстояние сферы шара $\overline{S_r}$ до сферы шара $\overline{S_\rho}$.

Либо существуют точка $P_0$ области $\overline{S_r}$ и последовательность $\{u_n\}$, так что числа $u_n(P_0)$ ограничены снизу $[u_n(P_0)>c]$, либо, какова бы ни была точка области $\overline{S_r}$, любая последовательность функций нашего семейства имеет в этой точке нижнюю границу, равную $-\infty$. Рассмотрим сначала первую гипотезу. Опишем около точки $P_0$ как центра шар радиуса $\frac{3}{4}d$ и покажем, что для всех его точек справедливо неравенство $|u_n(P)|<K_1$, где $K_1$ — некоторое постоянное, не зависящее ни от $n$, ни от $P$.

С этой целью опишем около $P_0$ как центра шар радиуса $d$, во всех точках которого, очевидно, будет $u_n<K(\rho)=K\left(\frac{R+r}{2}\right)$. Так как, с другой стороны, обозначая через $\sigma_{P_0}$ площадь поверхности этого шара, имеем

$$\frac{1}{\sigma_{P_0}}\int|u_n(P)|\,d\sigma=2\frac{1}{\sigma_{P_0}}\int u_n^+(P)\,d\sigma-\frac{1}{\sigma_{P_0}}\int u_n(P)\,d\sigma=$$
$$=2\frac{1}{\sigma_{P_0}}\int u_n^+(P)\,d\sigma-u_n(P_0)<2K(\rho)-c,$$

то, применяя интегральную формулу Пуассона к сфере $\sigma_{P_0}$ убеждаемся в справедливости неравенства $|u_n(P)|<K_1$, во всех точках шара с центром $P_0$ радиуса $\frac{3}{4}d$. Заметив это, покажем теперь, что функции

$u_n(P)$ равностепенно непрерывны в шаре с центром $P_0$ радиуса $\frac{d}{2}$. В самом деле, для всех точек этого шара имеем

$$u_n(P) = \frac{1}{\omega\left(P, \frac{d}{4}\right)} \int\limits_{\omega\left(P, \frac{d}{4}\right)} u_n(M)\, d\omega, \tag{a}$$

где интегрирование распространено по объему $\omega\left(P, \frac{d}{4}\right)$ шара с центром в точке $P$ радиуса $\frac{d}{4}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Положим $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{d\varepsilon}{8K_1 p}$.

Предположим, что $\overline{PQ} < \delta$, где $P$ и $Q$ — любые точки шара радиуса $\frac{d}{2}$ с центром в $P_0$ и что $\rho_1 = \frac{d}{4} - \delta$.

Мы имеем

$$u_n(Q) = \frac{1}{\omega(Q, \rho_1)} \int\limits_{\omega(Q, \rho_1)} u_n(M)\, d\omega. \tag{b}$$

В интеграле (a) разобьем область интегрирования на две части: одну $\omega(Q, \rho_1)$ и другую остаток $-\omega'$. Тогда мы получаем

$$u_n(Q) - u_n(P) = \frac{1}{\omega(Q, \rho_1)} \int\limits_{\omega(Q, \rho_1)} u_n(M)\, d\omega - \frac{1}{\omega\left(P, \frac{d}{4}\right)} \int\limits_{\omega(Q, \rho_1)} u_n(M)\, d\omega -$$

$$- \frac{1}{\omega\left(P, \frac{d}{4}\right)} \int\limits_{\omega'} u_n(M)\, d\omega =$$

$$= \frac{\omega\left(P, \frac{d}{4}\right) - \omega(Q, \rho_1)}{\omega\left(P, \frac{d}{4}\right) \cdot \omega(Q, \rho_1)} \int\limits_{\omega(Q, \rho_1)} u_n(M)\, d\omega - \frac{1}{\omega\left(P, \frac{d}{4}\right)} \int\limits_{\omega'} u_n(M)\, d\omega,$$

откуда следует

$$|u_n \cdot (Q) - u_n(P)| < K_1 \frac{\left(\frac{d}{4}\right)^p - \rho_1^p}{\left(\frac{d}{4}\right)^p} + K_1 \frac{\left(\frac{d}{4}\right)^p - \rho_1^p}{\left(\frac{d}{4}\right)^p} =$$

$$= 2K_1 \frac{\left(\frac{d}{4}\right)^p - \rho_1^p}{\left(\frac{d}{4}\right)^p} = 2K_1 \frac{\left(\frac{d}{4}\right)^p - \left(\frac{d}{4} - \delta\right)^p}{\left(\frac{d}{4}\right)^p} < \frac{8K_1 p\delta}{d} = \varepsilon.$$

Последнее неравенство имеет место при произвольном положительном $\varepsilon$ для всякой функции $u_n$ данной последовательности с условием, что $\overline{PQ} < \delta = \delta(\varepsilon)$, $P$ и $Q$ — какие угодно точки шара радиуса $\frac{d}{2}$ с центром в точке $P_0$.

Таким образом мы показали, что в этом шаре наши функции $u_n(P)$ равностепенно непрерывны. Вспомнив, что они также ограничены



в своей совокупности, мы на основании принципа Бендиксона-Гильберта (Bendixon-Hilbert) выберем подпоследовательность $u_{n'}(P)$, равномерно сходящуюся в области шара $\overline{P_0P} \leqslant \frac{d}{2}$. Отправляясь от этого шара, покрываем область $\bar{S}_r$ конечной цепочкой шаров радиусов $\frac{d}{2}$ так, чтобы каждый последующий шар имел центр в предыдущем шаре. Переходя ко второму элементу цепи, применяем то же рассуждение, считая за точку $P_0$ его центр, и убеждаемся, что из последовательности $u_{n'}$ можно выбрать подпоследовательность $u_{n''}$, равномерно сходящуюся также на втором элементе, и т. д. В результате конечного числа выборов получим, очевидно, последовательность, равномерно сходящуюся на всех элементах цепи, т. е. в области $\bar{S}_r$.

Рассмотрим теперь последовательность замкнутых областей $\bar{S}_{r_k}$, причем $r_k$, возрастая, стремятся к $R$.

По доказанному мы можем выбрать из данного семейства последовательность $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}, \ldots$, равномерно сходящуюся в $\bar{S}_{r_1}$; из этой последовательности, в свою очередь, мы выберем другую последовательность $u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n}, \ldots$, равномерно сходящуюся в $\bar{S}_{r_2}$, и т. д.

Полагая $u^{(1)} = u_{11}$, $u^{(2)} = u_{22}, \ldots, u^{(n)} = u_{nn}, \ldots$, мы получим последовательность, равномерно сходящуюся во всякой области $\bar{S}_r$, принадлежащей основной области шара $\overline{OP} < R$. Обратимся теперь ко второй гипотезе. В этом случае возьмем любую последовательность $u_n(P)$ нашего семейства.

Эта последовательность в каждой точке области $\bar{S}_r$ стремится к $-\infty$, потому что для каждой точки нижние границы самой последовательности и всех ее частей равны $-\infty$. Очевидно, $u_n(P) \to -\infty$ всюду при $\overline{OP} < R$. Остается обнаружить, что это стремление к $-\infty$ будет равномерное в области $\bar{S}_r$, каково бы ни было $r < R$. В самом деле, $e^{u_n(P)} \to 0$ в области $\bar{S}_{r'}$, где $r' > r$. Следовательно, наилучшие гармонические мажоранты субгармонических функций $e^{u_n}$ — обозначим их $U_n$ — стремятся к нулю на границе области $\bar{S}_{r'}$, причем

$$0 < U_n < e^{K(r')}.$$

Применяя интегральную формулу Пуассона, мы убедимся, что $U_n(P)$ сходятся к нулю во всей области $\bar{S}_{r'}$.

В силу разобранной уже первой гипотезы, последовательность $U_n$ будет равномерно сходиться к нулю в области $\bar{S}_r$.

Заметив, что $e^{u_n} \leqslant U_n$, заключаем о равномерной сходимости к нулю в области $\bar{S}_r$ функций $e^{u_n}$ или, что то же, о равномерной сходимости в области $\bar{S}_r$ функций $u_n$ к $-\infty$.

Замечание 1. Условие (I) доказанной теоремы может быть заменено следующим:

$$\frac{1}{\sigma} \int u_+(P)\, d\sigma < C; \tag{II}$$

какова бы ни была сфера $\sigma$ с центром в начале координат радиуса $\rho < R$ и какова бы ни была функция $u$ данного семейства и где

$$u_+(P) = \begin{cases} 0, & \text{если } u(P) > 0, \\ -u(P), & \text{если } u(P) \leqslant 0. \end{cases}$$

В этом случае предельными функциями нашего семейства будут гармонические функции или тождественно равная $+\infty$. Этот результат вытекает из доказанного предложения путем изменения знака у функций семейства.

Замечание 2. Приведенное доказательство непосредственно переносится на тот общий случай, когда функции семейства определены в некоторой произвольной области $D$, причем условие (I) нужно заменить следующим:

$$\int\limits_{C_\lambda} u^+(P)\,\frac{\partial G(P_0;\,P)}{\partial n}\,d\sigma < C \qquad (\mathrm{I}')$$

или соответственно

$$\int\limits_{C_\lambda} u_+(P)\,\frac{\partial G(P_0;\,P)}{\partial n}\,d\sigma < C, \qquad (\mathrm{II}')$$

где $C_\lambda$ есть любая поверхность уровня $G(P_0;\ P) = \lambda$; $G(P_0;\ P)$ — функция Грина области $D$ с особенностью в фиксированной точке $P = P_0$.

n° 9. Приложим принцип компактности гармонических функций, разобранный в предыдущем пункте, к доказательству предложения Лиувилля.

Гармоническая функция $u(P)$ во всем пространстве точек $P(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)$, $p \geqslant 2$, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{\sigma}\int u^+(P)\,d\sigma < C \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sigma}\int u_+(P)\,d\sigma < C,$$

где интегрирование распространено по любой сфере $\sigma$ с центром в начале координат, есть константа.

Действительно, отправляясь от данной гармонической функции $u(P) = u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)$, рассмотрим семейство $\{u_n(P)\}$ функций, гармонических внутри шара $\overline{OP} < 1$, полагая для всякой точки $P$, $\overline{OP} < 1$,

$$u_n(P) = u_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p) = u(nx_1,\ nx_2,\ \ldots,\ nx_p),$$

где $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$

Функции рассматриваемого семейства будут удовлетворять условию принципа, доказанного в n° 8 и, следовательно, образуют компактное семейство. Таким образом из нашего семейства можно выбрать последовательность гармонических функций, — обозначим их снова через $u_n$, — равномерно сходящуюся во всяком шаре $\overline{S}_r$, $r < 1$, к гармонической функции $U(P)$, причем $U(O) = u(O)$. Пусть $Q$ — любая точка пространства с координатами $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_p$. Согласно условию

$$u(Q) = u(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_p) = u_n\left(\frac{a_1}{n},\ \frac{a_2}{n}, \ldots,\ \frac{a_p}{n}\right).$$



Начиная с достаточно большого $n$, точка

$$Q^{(n)}\left(\frac{a_1}{n},\ \frac{a_2}{n}, \ldots,\ \frac{a_p}{n}\right)$$

находится внутри шара $\overline{OP} < 1$ и при неограниченно возрастающем $n$ стремится к точке $O$. Так как внутри шара $\overline{OP} < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(P) = U(P),$$

причем в окрестности точки $O$ сходимость равномерная, то, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(Q^{(n)}) = U(O).$$

С другой стороны,

$$u_n(Q^{(n)}) = u(Q)$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(Q^{(n)}) = u(Q) = U(O).$$

Таким образом будет

$$u(Q) = U(O) = u(O),$$

т. е. функция $u$ в любой точке $Q$ пространства имеет то же значение, что в начале координат; иными словами, $u = \mathrm{const}$, что и требовалось доказать [22].

## § 9. Различные определения субгармонической функции

n° 1. Покажем, что наряду с вышеустановленными определениями субгармонической функции (§ 3, n° 5) возможно дать три других, им эквивалентных [13].

Будем предполагать, что функция $u(P)$, полунепрерывная сверху в области $D$, имеющая всюду плотное множество конечных значений, удовлетворяет в каждой точке $P$ области $D$ одному из следующих условий:

(A) $u(P) \leqslant \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} u(M)\,d\sigma$, начиная с достаточно малого радиуса $\rho$ сферы $\sigma$,

(B) $u(P) \leqslant \frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} u(M)\,d\omega$, начиная с достаточно малого радиуса $\rho$ объема $\omega$,

(C) $u(P) \leqslant \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} u(M)\,d\sigma$, для дискретной последовательности значений $\rho \to 0$,

(D) $u(P) \leqslant \frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} u(M)\,d\omega$, для дискретной последовательности значений $\rho \to 0$.

Таким образом мы имеем четыре класса функций (A), (B), (C) и (D). Очевидно, класс (A) содержится в классе (C) и класс (B) — в классе (D). Сначала мы легко покажем, что класс (A) содержится в классе (B) и, значит, первый класс будет содержаться в каждом из трех остальных. Затем, чтобы доказать эквивалентность всех этих

классов, нам достаточно будет обнаружить, что классы (B), (C) и (D), в свою очередь, входят в класс (A).

Чтобы оправдать возможность перехода от класса (A) к классу (B), прежде всего заметим, что субгармоническая функция в области, т. е. функция класса (A), интегрируема по всякому шару, который вместе со своей поверхностью принадлежит области $D$. В самом деле, если в центре шара функция $u(P)$ конечна, то это следует из теоремы о среднем значении (§ 8), согласно которой выражение $\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} u(M)\,d\sigma$ представляет неубывающую функцию относительно $\rho$. Если же в центре рассматриваемого шара наша функция $u$ равна $-\infty$, то поместим этот шар внутрь другого шара так, чтобы в его центре функция $u$ имела конечное значение, что всегда возможно сделать, так как согласно условию функция $u$ конечна на всюду плотном множестве точек. По вышеотмеченному функция $u$ должна быть интегрируемой в большем шаре, а следовательно, и подавно в рассматриваемом шаре.

После этого из неравенства (A)

$$u(P)\,\sigma \leqslant \int u(M)\,d\sigma,$$

считая $u(P)$ конечным, получим после умножения обеих частей на $d\rho$ и интегрирования в пределах от 0 до $\rho$

$$u(P)\,\omega \leqslant \int u(M)\,d\omega, \text{ т. е. неравенство (B).}$$

В случае, когда $u(P) = -\infty$, неравенство (B) очевидно. Итак, доказано, что

$$(A) \subset (B) \subset (D) \quad \text{и} \quad (A) \subset (C).$$

n° 2. Остается обнаружить, что классы (B), (C) и (D) содержатся каждый в классе (A). Это будет вытекать из следующей теоремы:

*Если функция $u(P)$, полунепрерывная сверху в области $D$, конечная на всюду плотном множестве точек, удовлетворяет в каждой точке $P$ области одному из условий* (A), (B), (C) или (D), *то она субгармоническая в этой области.*

Для доказательства рассмотрим произвольную замкнутую область $\overline{G}$, принадлежащую области $D$, и функцию $U(P)$ гармоническую внутри $\overline{G}$, непрерывную в $\overline{G}$, удовлетворяющую на ее границе неравенству $u \leqslant U$. Покажем, что $u \leqslant U$ внутри области $\overline{G}$ (§ 3). Предполагая противное, обозначим через $A$ точку внутри $\overline{G}$, для которой $u(A) > U(A)$. Строим разность $d = u - U$, которая будет функцией, полунепрерывной сверху в $\overline{G}$, на границе $d \leqslant 0$ и в точке $A$ внутри $\overline{G}$ имеем $d(A) > 0$.

На основании свойства максимума функции полунепрерывной сверху в замкнутой области убеждаемся, что в некоторой точке $P_1$, внутренней к $\overline{G}$, $d(P)$ имеет максимальное значение, равное $M$, т. е. $d(P_1) = M > 0$.

Обозначим через $F$ множество всех точек области $G$, в которых $d(P) = M$; это множество $F$ есть замкнутое. Рассмотрим наибольшую



область $G^*$, содержащую точку, где $d < M$, и содержащуюся в множестве $G - F$. Найдется хотя бы одна точка границы $G^*$, принадлежащая $F$. Пусть это будет точка $Q$, $d(Q) = M$. Если около точки $Q$ описать сферу произвольного сколь угодно малого радиуса $r$, то на ней найдется точка $R$, принадлежащая области $G^*$, а значит, и подавно множеству $G - F$, где имеем $d(R) < M$ или $d(R) = m < M$. Вследствие полунепрерывности сверху функции $d$ найдется достаточно малый кусок сферы, содержащий точку $R$, на котором $d < m + \varepsilon < M$. Поэтому среднее значение функции $d$ на проведенной сфере радиуса $r$ будет меньше $M$, потому что в одной части сферы $d < M$, а в другой $d \leqslant M$.

Итак, получаем

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} d(P)\,d\sigma < M = d(Q),$$

начиная с достаточно малого радиуса $r$ сферы $\sigma$.

С другой стороны, по формуле Гаусса,

$$\frac{1}{\sigma}\int U(P)\,d\sigma = U(Q).$$

Складывая это равенство с предыдущим неравенством, получим

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} u(P)\,d\sigma < u(Q).$$

Это неравенство справедливо для всех достаточно малых сфер $\sigma$ и противоречит как неравенству (A), так и неравенству (C).

Очевидно, что внутри шара радиуса $r$ найдется точка $\left(\text{например на сфере радиуса } \frac{r}{2}\right)$, где $d < M$; следовательно, имея всюду в этом шаре $d \leqslant M$, а в некоторой его объемной части $d < M$, найдем, что среднее значение функции $d$ по объему шара $\omega$ радиуса $r$ будет меньше $M$, т. е.

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} d(P)\,d\omega < M = d(Q).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} U(P)\,d\omega = U(Q).$$

Складывая, получим

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega} u(P)\,d\omega < u(Q),$$

начиная с достаточно малого $r$ радиуса шара $\omega$. Это является противоречием с каждым из условий (B) и (D).

Таким образом теорема доказана, а вместе с тем обнаружена эквивалентность вышепоставленных четырех определений субгармонической функции.

## § 10. Простейший критерий субгармонической функции

n° 1. Пользуясь результатом, установленным в прошлом параграфе, можно вывести весьма простой критерий субгармоничности функции, если a priori предполагать, что она имеет непрерывные частные производные до второго порядка, а именно:

*Для того чтобы функция $u(P)$, имеющая непрерывные частные производные второго порядка в области $D$, была субгармонической в этой области, необходимо и достаточно*

$$\Delta u \geqslant 0$$

*в каждой точке области $D$.*

В самом деле, мы знаем (гл. I, § 1), что

$$\Delta u(P) = \Delta^* u(P) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h u(P)}{\frac{h^2}{2(p+2)}}, \tag{20}$$

где положено

$$\Delta_h u(P) = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} u(M)\, d\omega - u(P), \tag{21}$$

причем $\omega$ есть шар радиуса $h$ с центром в точке $P$.

Если функция $u$ — субгармоническая, то $\Delta_h u(P) \geqslant 0$ в каждой точке $P$ области $D$, начиная с достаточно малого $h$; следовательно, вследствие формулы (20) $\Delta u(P) \geqslant 0$, что и доказывает необходимость условия. Для доказательства его достаточности, предположим сначала, что $\Delta u(P) > 0$ всюду в области $D$.

Тогда из формулы (20) мы усматриваем, что $\Delta_h u(P) > 0$, начиная с достаточно малого $h$, и, следовательно, согласно условию (B) (§ 9) функция $u$ будет субгармонической в области $D$. Допустив теперь, что $\Delta u(P) \geqslant 0$, введем вспомогательную функцию

$$u_n = u + \frac{x_1^2}{n}.$$

Очевидно, в каждой точке $P$ области $D$ имеем

$$\Delta u_n(P) = \Delta u(P) + \frac{2}{n} > 0.$$

Следовательно, по только что доказанному, $u_n$ — функция, субгармоническая в области $D$, каково бы ни было $n$.

Так как, наконец, $u$ является пределом равномерно сходящейся в области $D$ последовательности субгармонических функций $u_n$, то она будет субгармонической в области $D$.

Этим критерием мы воспользуемся при доказательстве следующего предложения:

*Если функция $u(P) \geqslant 0$ есть субгармоническая в области $D$, то $u^n(P)$, где $n > 1$, будет также субгармонической в той же области.*

В самом деле, рассмотрим произвольную область $\overline{G}$, принадлежащую области $D$, и любую гармоническую функцию $\Gamma(P)$ внутри



области $\overline{G}$, непрерывную в $\overline{G}$, удовлетворяющую на границе соотношению

$$u^n(P) = v(P) \leqslant \Gamma(P).$$

Докажем, что внутри области $\overline{G}$ также имеем $v(P) \leqslant \Gamma(P)$.

Для этого заметим, что на границе области $\overline{G}$ будет

$$u(P) \leqslant \Gamma^{\frac{1}{n}}(P).$$

Легко обнаружить, что $\Gamma^{\frac{1}{n}}(P)$ есть функция, супергармоническая внутри $\overline{G}$, так как

$$\Delta \Gamma^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \Gamma^{\frac{1}{n} - 2} \cdot \Delta(\Gamma; \Gamma) \leqslant 0,$$

где положено

$$\Delta(\Gamma; \Gamma) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)^2.$$

($\Gamma > 0$ внутри $\overline{G}$, потому что неотрицательная гармоническая функция не может обращаться в нуль внутри области.)

Функция $u(P) - \Gamma^{\frac{1}{n}}(P)$ есть субгармоническая внутри области $\overline{G}$ как сумма двух субгармонических функций $u$ и $-\Gamma^{\frac{1}{n}}$; на границе области она не больше нуля. Следовательно, и внутри области $\overline{G}$ эта функция не может иметь положительных значений, ибо тождественный нуль должен служить ее гармонической мажорантой. Итак,

$$u(P) \leqslant \Gamma^{\frac{1}{n}}(P)$$

внутри области $\overline{G}$, а значит,

$$v(P) = u^n(P) \leqslant \Gamma(P),$$

что и требовалось доказать.

## § 11. Классификация субгармонических функций

n° 1. Класс гармонических функций содержит в себе подкласс гармонических полиномов. Ограничиваясь случаем двух действительных переменных, мы можем сказать, что *гармонический многочлен есть действительная часть полинома одного комплексного переменного*, и обратно.

Произвольную гармоническую функцию в области $D$ возможно разложить в ряд по гармоническим полиномам, сходящийся в этой области, причем равномерно во всякой замкнутой области, внутренней к $D$. Действительно, гармоническую функцию в односвязной области $D$ можно рассматривать как действительную часть некоторой функции $f(z)$, аналитической в этой области. Разлагая $f(z)$ в ряд

по полиномам комплексного переменного, сходящийся в области $D$ (равномерно внутри $D$), получим

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z).$$

Взяв действительные части от обеих частей этого разложения, получим представление данной гармонической функции в виде ряда гармонических полиномов.

n° 2. Естественно возникает вопрос: что́ соответствует гармоническим многочленам в классе субгармонических функций? Чтобы установить наиболее целесообразным путем обобщение гармонического полинома, дадим сначала характеристику его с точки зрения средних значений.

Итак, пусть мы имеем гармонический многочлен степени не выше $n-1$ (действительная часть полинома комплексного переменного степени не выше $n-1$). Возьмем круг радиуса $r$ с центром в точке $z_0=x_0+iy_0$ и покажем, что *значение гармонического полинома степени* $\leqslant n-1$ *в точке* $z_0$ *равно средне-арифметическому его значений в вершинах правильного* $n$*-угольника, вписанного в круг радиуса* $r$ *с центром в точке* $z_0$ (независимо от ориентировки этого многоугольника).

Рассмотрим произвольный полином $P(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$ степени $(n-1)$:

$$P(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — любые комплексные числа. Полагая $z-z_0=re^{i\varphi}$, представим его так:

$$P(z_0+re^{i\varphi})=a_0+a_1re^{i\varphi}+a_2r^2e^{2i\varphi}+\ldots+a_{n-1}r^{n-1}e^{(n-1)i\varphi}.$$

Вершины правильного $n$-угольника обозначим через $re^{i\varphi_1}, re^{i\varphi_2}, \ldots, re^{i\varphi_n}$, причем $\varphi_1=\alpha$, $\varphi_2=\alpha+\frac{2\pi}{n}$, $\varphi_3=\alpha+2\frac{2\pi}{n}$, $\ldots$, $\varphi_n=\alpha+(n-1)\frac{2\pi}{n}$. Наконец, обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_n$ значения нашего полинома $P(z)$ в вершинах. Тогда будем иметь

$$\frac{P_1+P_2+\ldots+P_n}{n}=a_0+a_1r\frac{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+\ldots+e^{i\varphi_n}}{n}+$$
$$+a_2r^2\frac{e^{2i\varphi_1}+e^{2i\varphi_2}+\ldots+e^{2i\varphi_n}}{n}+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}r^{n-1}\frac{e^{(n-1)i\varphi_1}+e^{(n-1)i\varphi_2}+\ldots+e^{(n-1)i\varphi_n}}{n}. \qquad (22)$$

Выведем вспомогательные соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ip\varphi_k}=0 \quad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \qquad (23)$$



Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ip\varphi_k}=\sum_{s=0}^{n-1} e^{ip\left(\alpha+s\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{ip\alpha}\frac{e^{ipn\frac{2\pi}{n}}-1}{e^{ip\frac{2\pi}{n}}-1}=0,$$

где $p=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

На основании соотношений (23) формула (22) примет вид:

$$\frac{P_1+P_2+\ldots+P_n}{n}=a_0=P(z_0).$$

Отделив действительные части, докажем наше утверждение.

Теперь обнаружим, что, и, обратно, *если значение непрерывной функции в каждой точке* $z_0$ *области* $D$ *равно средне-арифметическому ее значений в вершинах правильного* $n$*-угольника, вписанного в круг с центром* $z_0$*, начиная с достаточно малого радиуса* $r$ *этого круга, то эта функция в области* $D$ *совпадает с гармоническим полиномом степени не выше* $n-1$.

Итак, пусть в каждой точке $z_0$ области $D$ имеем

$$\frac{U_1+U_2+\ldots+U_n}{n}=U_0, \qquad (24)$$

где $U$ — данная непрерывная функция, $U_0$ — ее значение в точке $z_0$, $U_i\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — ее значения в вершинах правильного $n$-угольника. Сначала покажем, что $U$ будет гармонической функцией в области $D$. В самом деле, при удвоении числа сторон правильного $n$-угольника равенство (24) остается в силе, в чем убеждаемся следующим образом:

$$\frac{U_1+U_{\frac{3}{2}}+U_2+U_{\frac{5}{2}}+U_3+\ldots+U_{n-1}+U_{n-\frac{1}{2}}+U_n+U_{n+\frac{1}{2}}}{2n}=$$
$$=\frac{U_1+U_2+\ldots+U_n}{2n}+\frac{U_{\frac{3}{2}}+U_{\frac{5}{2}}+\ldots+U_{n-\frac{1}{2}}+U_{n+\frac{1}{2}}}{2n}=$$
$$=\frac{nU_0}{2n}+\frac{nU_0}{2n}=U_0,$$

ч. т. д.

Здесь $U$ с дробными индексами обозначали значения функции $U$ в новых вершинах правильного $2n$-угольника; при выводе мы воспользовались тем обстоятельством, что соотношение (24) имеет место для любого правильного $n$-угольника. Заметив это, представим соотношение (24) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{n}(U_1+U_2+\ldots+U_n)=U_0. \qquad (24')$$

Давая здесь $n$ значения $n, 2n, 4n, \ldots$, в пределе, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z_0+re^{i\varphi})\,d\varphi=U_0. \qquad (25)$$

Так как равенство (25) имеет место в любой точке $z_0$ области $D$, начиная с достаточно малого $r$, то доказано, что $U$ есть функция,

гармоническая в области $D$ (гл. I, § 2). Остается показать, что гармоническая функция $U$ в области $D$ совпадает с гармоническим полиномом степени $\leqslant n-1$. Так как функцию $U$ можно рассматривать как действительную часть некоторой аналитической функции $f(z)$ в области $D$[1]), то следует обнаружить, что $f(z)$ в области $D$ совпадает с полиномом комплексного переменного степени $\leqslant n-1$.

Напишем разложение аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$:

$$f(z)=f(z_0)+\sum_{k=1}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \tag{26}$$

где $c_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$.

Положим $z-z_0=re^{i\varphi}$, попрежнему обозначим через $\varphi_1=\alpha$, $\varphi_2=\alpha+\frac{2\pi}{n}$, ..., $\varphi_n=\alpha+(n-1)\frac{2\pi}{n}$ аргументы вершин правильного $n$-угольника.

Соотношение (26) перепишем в виде

$$f(z_0+re^{i\varphi})=f(z_0)+\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k e^{ik\varphi},$$

откуда вытекает

$$\frac{f_1+f_2+\ldots+f_n}{n}=f(z_0)+c_n r^n+c_{2n}r^{2n}+\ldots, \tag{27}$$

где $f_i$ обозначают значения функции $f$ в вершинах $n$-угольника. При выводе равенства (27) мы воспользовались соотношениями (23). Беря действительные части от обеих частей соотношения (27) и замечая, что вследствие (24) $\operatorname{Reel}\frac{f_1+f_2+\ldots+f_n}{n}=\operatorname{Reel} f(z_0)$, мы найдем

$$\operatorname{Reel}(c_n r^n+c_{2n}r^{2n}+\ldots)=0$$

при всяком достаточно малом $r$. Сокращая на $r^n$, будем иметь

$$\operatorname{Reel}(c_n+c_{2n}r^n+\ldots)=0, \quad \text{откуда } \operatorname{Reel} c_n=0.$$

Вспомнив, что $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ и $z_0$ — любая точка области $D$, мы заключаем: действительная часть аналитической функции $f^{(n)}(z)$ в области $D$ всюду равна нулю, т. е. $f^{(n)}(z)\equiv i\gamma$, где $\gamma$ — некоторая действительная константа. Вследствие нормировки функции $f(z)$ в начале координат и условия (24) усматриваем, что $\gamma=0$. Это значит, что $f(z)$ в области $D$ совпадает с полиномом степени не выше $n-1$, что и требовалось доказать.

n° 3. *Гармонические полиномы степени $\leqslant n-1$ условимся называть гармоническими функциями класса $n$.*

[1]) Мы можем предполагать значение мнимой части функции $f(z)$ в начале координат равным нулю.



После этого становится естественным назвать *субгармонической функцией класса $n$ в области $D$ непрерывную функцию в этой области, удовлетворяющую условию*[1]):

*Ее значение в каждой точке $z$ области $D$ не превосходит среднеарифметического ее значений в вершинах правильного $n$-угольника с центром в точке $z$, вписанного в круг, начиная с достаточно малого радиуса*, т. е.

$$u(z)\leqslant\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}.$$

Само собой понятно, что в определении ориентация правильного многоугольника безразлична. Очевидно, совокупность субгармонических функций класса $n$ представляет подкласс субгармонических функций и содержит в себе гармонические функции класса $n$, т. е. гармонические полиномы степени $\leqslant n-1$.

Представляется интересным доказать, что совокупность субгармонических функций класса $n$ содержится в совокупности класса $n+1$, а также, что любая субгармоническая функция может быть рассматриваема как предел последовательности субгармонических функций, каждая из которых принадлежит определенному классу.

## § 12. Логарифмически-субгармонические функции

n° 1. Теорема. *Если $u(P)$ есть функция субгармоническая*, то $e^{u(P)}\triangleq v(P)$ — *тоже субгармоническая.*

Будем сначала предполагать, что функция $u$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка. Тогда, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} v_{x_1x_1}&=e^u u_{x_1x_1}+e^u(u_{x_1})^2,\\ v_{x_2x_2}&=e^u u_{x_2x_2}+e^u(u_{x_2})^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_{x_px_p}&=e^u u_{x_px_p}+e^u(u_{x_p})^2. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Delta(u,\ v)=\sum_{i=1}^{p} u_{x_i}\cdot v_{x_i}.$$

Складывая, получим

$$\Delta v=e^u\Delta u+e^u\Delta(u,\ u)\geqslant 0,$$

потому что $\Delta u\geqslant 0$. Следовательно, $v$ — субгармоническая функция (§ 10).

Переходя к общему случаю, рассмотрим произвольную область $\overline{G}$, принадлежащую основной области $D$, и любую гармоническую функцию $V(P)$ внутри области $\overline{G}$, непрерывную в $\overline{G}$, удовлетворяющую на границе соотношению

$$v(P)\leqslant V(P).$$

[1]) Это определение принадлежит М. А. Крейнесу и было устно мне сообщено.

Докажем, что внутри области $\bar{G}$ также имеем

$$v(P) \leqslant V(P).$$

В самом деле, на границе области $\bar{G}$ будет

$$u(P) \leqslant \ln V(P).$$

Легко обнаружить, что $\ln V$ есть функция, супергармоническая внутри $\bar{G}$, так как

$$\Delta \ln V = \frac{1}{V}\Delta V - \frac{1}{V^2}\Delta(V;\ V) = -\frac{1}{V^2}\Delta(V;\ V) \leqslant 0.$$

Функция $u(P) - \ln V(P)$ есть субгармоническая внутри области $\bar{G}$ как сумма двух субгармонических функций $u$ и $-\ln V$; на границе этой области она не больше нуля. Следовательно, тождественный нуль должен служить ее гармонической мажорантой, и внутри области $\bar{G}$ эта функция не может иметь положительных значений.

Итак, $u \leqslant \ln V$ внутри области $\bar{G}$, а; значит, $v = e^U \leqslant V$, что и требовалось доказать.

Иначе доказанное предложение можно формулировать так: *если $\ln v$ есть функция, субгармоническая в области $D$, то $v$ — и подавно субгармоническая.* Обратная теорема не справедлива, т. е. $v$ может быть субгармонической, а $\ln v$ — нет; например, если $v$ — гармоническая функция, то $\ln v$ будет супергармонической функцией. Таким образом выделяется весьма важный класс логарифмически-субгармонических функций, т. е. субгармонических вместе со своим логарифмом.

Так, например, $|f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая функция в области $D$, будет логарифмически-субгармонической в той же области, так как $\ln|f(z)|$ есть функция субгармоническая.

n° 2. Мы знаем, что сумма двух субгармонических функций есть функция субгармоническая. Что касается произведения субгармонических функций, то оно, вообще говоря, не дает субгармонической функции; например произведение двух гармонических функций $u(P)$ и $v(P)$ может иметь диференциальный параметр Лапласа:

$$\Delta(uv) = 2\Delta(u,\ v)$$

переменного знака в области и, следовательно, не представляет функции субгармонической.

Таким образом свойство субгармоничности сохраняется при сложении и, вообще говоря, нарушается при умножении.

В связи с этим весьма важно доказать, что *свойство логарифмической субгармоничности сохраняется как при сложении, так и при умножении.*

Действительно, очевидным является инвариантность логарифмической субгармоничности при умножении, так как если $\ln u(P)$ и $\ln v(P)$ субгармонические, то и $\ln u(P)v(P) = \ln u(P) + \ln v(P)$ есть субгармоническая функция.

Остается доказать, что при сложении двух логарифмически-субгармонических функций всегда получается логарифмически-субгармоническая функция. С этой целью сначала будем предполагать, что данные функции $u(P)$ и $v(P)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно; тогда необходимый и достаточный признак логарифмической субгармоничности $\Delta \ln u \geqslant 0$ примет вид



$$u\,\Delta u - \Delta(u;\ u) \geqslant 0 \quad (u > 0), \tag{a}$$

где

$$\Delta(u;\ u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)^2.$$

Пусть $u(P)$ и $v(P)$ — две логарифмически-субгармонические функции, т. е. каждая из них удовлетворяет условию (а). Покажем, что их сумма $w(P) = u(P) + v(P)$ также удовлетворит условию (а). В самом деле, квадратичные формы

$$u\xi^2 + 2\sqrt{\Delta(u;\ u)}\,\xi\eta + \Delta u \cdot \eta^2$$

и

$$v\xi^2 + 2\sqrt{\Delta(v;\ v)}\,\xi\eta + \Delta v \cdot \eta^2$$

будут положительными определенными в силу условия (а). Следовательно, их сумма

$$w\xi^2 + 2\left[\sqrt{\Delta(u;\ u)} + \sqrt{\Delta(v;\ v)}\right]\xi\eta + \Delta w \cdot \eta^2$$

должна быть положительной определенной формой, а значит, ее дискриминант

$$w\,\Delta w - \left[\sqrt{\Delta(u;\ u)} + \sqrt{\Delta(v;\ v)}\right]^2$$

не отрицателен, т. е.

$$w\,\Delta w - \left[\Delta(u;\ u) + \Delta(v;\ v) + 2\sqrt{\Delta(u;\ u)\cdot\Delta(v;\ v)}\right] \geqslant 0.$$

Заметив, что $\sqrt{\Delta(u;\ u)\,\Delta(v;\ v)} \geqslant \Delta(u;\ v)$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \geqslant \left[\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]^2,$$

получим из неравенства

$$w\,\Delta w - \left[\Delta(u;\ u) + \Delta(v;\ v) + 2\sqrt{\Delta(u;\ u)\,\Delta(v;\ v)}\right] \geqslant 0$$

следующее соотношение:

$$w\,\Delta w - \left[\Delta(u;\ u) + \Delta(v;\ v) + 2\Delta(u;\ v)\right] \geqslant 0$$

или

$$w\,\Delta w - \Delta(w;\ w) \geqslant 0,$$

потому что

$$\Delta(u;\ u) + \Delta(v;\ v) + 2\Delta(u;\ v) = \Delta(u+v;\ u+v) = \Delta(w;\ w).$$

Итак, функция $w(P) = u(P) + v(P)$ удовлетворяет условию (а) и, следовательно, есть функция логарифмически-субгармоническая.

Теперь мы можем освободиться от предположения диференцируемости функций $u$ и $v$, показав, что наше предложение справедливо для любых двух логарифмически-субгармонических функций.

Для этого мы заметим, что всякую субгармоническую функцию можно рассматривать как предел убывающей последовательности суб-

гармонических функций, имеющих непрерывные частные производные второго порядка (ч. II, гл. I, § 5). Пусть $u(P)$ и $v(P)$ — две логарифмически-субгармонические функции.

Тогда $\ln u(P) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(P)$, $\ln v(P) = \lim\limits_{n\to\infty} q_n(P)$, причем $p_n$ и $q_n$ имеют непрерывные частные производные второго порядка и образуют монотонно убывающие последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ субгармонических функций. Следовательно, имеем

$$u(P) = \lim_{n\to\infty} e^{p_n(P)} = \lim_{n\to\infty} u_n(P),$$

$$v(P) = \lim_{n\to\infty} e^{q_n(P)} = \lim_{n\to\infty} v_n(P),$$

где $u_n(P) = e^{p_n(P)}$ и $v_n(P) = e^{q_n(P)}$ имеют непрерывные частные производные второго порядка и образуют монотонно убывающие последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ логарифмически-субгармонических функций.

По доказанному $w_n(P) = u_n(P) + v_n(P)$ есть функция логарифмически-субгармоническая, каково бы ни было $n$.

С другой стороны,

$$w(P) = u(P) + v(P) = \lim [u_n(P) + v_n(P)] = \lim_{n\to\infty} w_n(P),$$

причем последовательность $\{w_n\}$ есть монотонно убывающая.

Отсюда вытекает, что $\ln w(P) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln w_n(P)$, где $\ln w_n(P)$ образуют монотонно убывающую последовательность субгармонических функций. Так как предел монотонно убывающей последовательности субгармонических функций есть функция субгармоническая, то $\ln w(P)$ должен быть функцией субгармонической, что и требовалось доказать [22].

Приложение 1. *Если $u(P)$ — логарифмически-субгармоническая функция в области $D$, то*

$$W_r u(P) = \frac{1}{\omega(P, r)} \int\limits_{\omega(P, r)} u(Q)\, d\omega,$$

*где $\omega(P, r)$ — объем шара радиуса $r$ с центром $P$ есть функция непрерывная, логарифмически-субгармоническая.* Само собой понятно, что последняя функция определена в области $G \subset D$, граница которой отстоит от границы области $D$ на расстояние $> r$.

Действительно [1]), заменим интеграл суммой

$$w_n(P) = \frac{1}{\omega(P, r)} \sum_{i=1}^{n} u(Q_i^n)\, \Delta\omega_i^n,$$

[1]) При доказательстве, не уменьшая общности, мы можем предполагать функцию $u(P)$ непрерывной, так как в противном случае она является пределом монотонно убывающей последовательности непрерывных логарифмически-субгармонических функций $u_n(P)$ (см. ч. II, гл. I, § 5) и из логарифмической субгармоничности монотонно убывающей последовательности функций $W_r u_n(P)$ будет следовать логарифмическая субгармоничность их предела $W_r u(P)$, который, очевидно, изображает непрерывную функцию.



причем предположим, что вектора $\overrightarrow{PQ_i^n}$ для фиксированных $i$ и $n$ и различных $P$ равны между собой. Тогда функции $w_n(P)$ будут логарифмически-субгармоническими, для которых $W_r u(P)$ является предельной функцией.

Функции $w_1(P), w_2(P), \ldots, w_n(P), \ldots$, очевидно, ограничены в своей совокупности и равностепенно непрерывны. По известной теореме Арцела (Arzelà) они сходятся равномерно к своей предельной функции $W_r u(P)$. Следовательно, $W_r u(P)$ есть непрерывная логарифмически-субгармоническая функция.

Приложение 2. Применяя то же рассуждение (ср. § 8, n° 2), мы при тех же условиях можем доказать, что

$$S_r u(P) = \frac{1}{\sigma_r} \int\limits_{\sigma(P, r)} u(Q)\, d\sigma$$

есть функция логарифмически-субгармоническая относительно точки $P$. Здесь $\sigma(P, r)$ обозначает сферу радиуса $r$ с центром $P$.

## § 13. Теорема о логарифмически-субгармонических функциях

n° 1. Представляется весьма ценным поставить вопрос о том, как усилить формулировку теоремы n° 1 предыдущего параграфа, чтобы было справедливо обратное предложение. В случае одного независимого переменного была установлена (гл. II, § 3) такая теорема: если $v(x) = e^{u(x) + \alpha x}$, где $u(x)$ — непрерывная функция в интервале $a < x < b$, есть выпуклая в этом интервале, каково бы ни было постоянное $\alpha$, то $u(x)$ тоже выпуклая.

Аналогично этому предложению мы установим для субгармонических функций теорему:

*Если $v(P) = e^{u(P) + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p}$, где $u(P)$ — непрерывная функция в области $D$, есть субгармоническая в этой области при любых постоянных $\alpha_i$, то $u(P)$ — тоже субгармоническая* [6; 31].

Предварительно докажем, что, при высказанных условиях, какова бы ни была гармоническая функция $U(P)$ в области $D$, всегда $e^{u(P) + U(P)} = g(P)$ будет субгармонической в этой области.

С этой целью рассмотрим шар, принадлежащий вместе со своей поверхностью области $D$, центр которого обозначим $P_0$ и разложим гармоническую функцию $U(P)$ в ряд по гармоническим полиномам, равномерно сходящийся в этом шаре [1]). Пусть это разложение будет

$$U(P) = U(P_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n(P). \tag{28}$$

В силу условия теоремы, выражение

$$h(P) = e^{u(P) + U(P_0) + \Pi_1(P)}$$

представляет субгармоническую функцию в области $D$.

[1]) См. Picard, Traité d'analyse, I, стр. 373, Paris 1922.

Чтобы доказать субгармоничность функции

$$g(P)=e^{u(P)+U(P)}=h(P)\,e^{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\Pi_n(P)}, \tag{29}$$

рассмотрим соотношение

$$\int\limits_{\sigma}[g(P)-h(P)]\,d\sigma=\int\limits_{\sigma}\{A\sum_{n=2}^{\infty}\Pi_n(P)+r^2\varepsilon_r\}\,d\sigma, \tag{30}$$

где интегрирование совершается по сфере $\sigma$ радиуса $r$ с центром в точке $P_0$, причем положено $A=e^{u(P_0)+U(P_0)}$ и $\varepsilon_r$ стремится к нулю вместе с $r$. Соотношение (30) получается из следующего преобразования:

$$g(P)-h(P)=h(P)\,\{e^{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\Pi_n(P)}-1\}=(A+\varepsilon_r')\left[\sum_{n=2}^{\infty}\Pi_n(P)+\ldots\right]=$$

$$=A\sum_{n=2}^{\infty}\Pi_n(P)+r^2\varepsilon_r\,{}^{1)}.$$

Выполняя интегрирование в правой части равенства (30), найдем

$$\int\limits_{\sigma}[g(P)-h(P)]\,d\sigma=r^2\sigma\eta_r, \tag{31}$$

где $\eta_r$ стремится к нулю вместе с $r$.

При установлении равенства (31) мы воспользовались гармоничностью полиномов $\Pi_n(P)$, обращающихся в нуль в центре $P_0$ сферы $\sigma$, вследствие чего

$$\int\limits_{\sigma}\Pi_n(P)\,d\sigma=\sigma\Pi_n(P_0)=0.$$

Так как $h(P)$ — субгармоническая функция, то

$$\int\limits_{\sigma}[h(P)-h(P_0)]\,d\sigma\geqslant 0. \tag{32}$$

Заметим, что

$$g(P)-g(P_0)=[g(P)-h(P)]+[h(P)-h(P_0)],$$

ибо

$$g(P_0)=e^{u(P_0)+U(P_0)}=h(P_0).$$

Интегрируя последнее соотношение по сфере $\sigma$, получим

$$\int\limits_{\sigma}[g(P)-g(P_0)]\,d\sigma=\int\limits_{\sigma}[g(P)-h(P)]\,d\sigma+\int\limits_{\sigma}[h(P)-h(P_0)]\,d\sigma,$$

откуда в силу (31) и (32) вытекает

$$\int\limits_{\sigma}[g(P)-g(P_0)]\,d\sigma\geqslant r^2\sigma\cdot\eta_r.$$

---

[1]) $e^x$ разложить в ряд и взять два первых члена.



Разделив на $r^2\sigma$ и переходя к пределу при $r\to 0$, получим

$$\varliminf_{r\to 0}\frac{1}{r^2\sigma}\int\limits_{\sigma}[g(P)-g(P_0)]\,d\sigma\geqslant 0. \tag{33}$$

Если нижний предел формулы (33) в каждой точке $P_0$ области $D$ строго больше нуля, тогда для каждой точки $P_0$ существует последовательность значений $r\to 0$, такая, что для нее

$$\int\limits_{\sigma}[g(P)-g(P_0)]\,d\sigma>0,$$

т. е. функция $g(P)$ будет субгармонической в области $D$ согласно определению (C) (§ 9).

В противном случае рассмотрим вспомогательную функцию

$$g_n(P)=g(P)+\frac{\xi_1^2}{n},$$

где $\xi_1$ есть первая координата точки $P$ относительно $P_0$.

Для этой функции предел (33) больше нуля в каждой точке области $D$, и, значит, по только что доказанному, $g_n$ — субгармоническая функция, каково бы ни было $n$.

Заставляя $n$ неограниченно возрастать, найдем $g(P)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(P)$ равномерно в области $D$.

Следовательно, функция $g(P)$ как предел равномерно сходящейся последовательности субгармонических функций есть субгармоническая в области $D$, ч. т. д.

Теперь очень просто получить окончательный результат. Предположим, вопреки доказываемому, что $u(P)$ не есть субгармоническая в области $D$. Тогда существует точка $P_0$ области $D$, для которой будет

$$u(P_0)>\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma}u(P)\,d\sigma \tag{34}$$

для бесконечно многих сфер $\sigma$, радиус которых $r\to 0$. Строим гармоническую функцию $U(P)$ внутри сферы $\sigma$, непрерывную, включая точки сферы, равную $u(P)$ на сфере $\sigma$.

Тогда разность $d(P)=u(P)-U(P)$ представляет непрерывную функцию внутри и на сфере $\sigma$, равную нулю на $\sigma$, в центре же $P_0$ сферы имеющую положительное значение, ибо

$$d(P_0)=u(P_0)-U(P_0)>\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma}u(P)\,d\sigma-\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma}U(P)\,d\sigma=$$

$$=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma}U(P)\,d\sigma-\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma}U(P)\,d\sigma=0.$$

Поэтому можем написать

$$e^{d(P_0)}>1=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma}e^{d(P)}\,d\sigma.$$

Последнее неравенство выполняется, как и (34), для бесконечно многих сфер $\sigma$ радиуса $r \to 0$ и является противоречием с доказанной выше субгармоничностью функции

$$g(P) = e^{d(P)}.$$

Итак, $u(P)$ — функция, субгармоническая в области $D$, что и требовалось доказать.

## § 14. Обобщение теоремы Гарди

n° 1. В § 8 была установлена теорема о среднем значении субгармонической функции, согласно которой среднее значение

$$J(\rho) = J(\rho, u) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} u(P)\, d\sigma,$$

где интегрирование распространено по поверхности сферы с центром в точке $O$ радиуса $\rho$, обладает свойствами:

1) $J(\rho)$ — неубывающая функция от $\rho$, если $u(P)$ — субгармоническая функция внутри шара $\overline{OP} < R$, $\rho < R$;

2) $J(\rho)$ — выпуклая функция относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p > 2)$ или относительно $\ln \rho$ $(p = 2)$ в интервале $R_1 < \rho < R_2$, если $u(P)$ — субгармоническая функция внутри кольца $R_1 < \overline{OP} < R_2$.

Предположим сначала $p = 2$ и допустим, что $u(P)$ есть логарифмически-субгармоническая функция внутри кольца $R_1 < \overline{OP} < R_2$. Тогда $\ln J(\rho)$ будет выпуклой функцией относительно $\ln \rho$. В самом деле, так как $\rho^{\beta}$ — при любом $\beta$ логарифмически-субгармоническая функция, то выражение $\rho^{\beta} u$ как произведение двух логарифмически-субгармонических функций есть функция субгармоническая, каково бы ни было постоянное $\beta$. Следовательно, по теореме о среднем значении, $\rho^{\beta} J(\rho, u) = e^{\beta \ln \rho + \ln J}$ есть выпуклая функция относительно $\ln \rho$. Отсюда вследствие произвола параметра $\beta$ следует, что функция $\ln J(\rho)$ выпукла относительно $\ln \rho$ (гл. II, § 3).

Очевидно, $u^{\alpha}$ при $\alpha > 0$ будет логарифмически-субгармонической функцией, если $u$ — логарифмически-субгармоническая. Заметив это, положим

$$M_{\alpha}(\rho) = M_{\alpha}(\rho, u) = \left[\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} u^{\alpha}(P)\, d\sigma\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

называя $M_{\alpha}(\rho)$ *средним значением порядка* $\alpha$ функции $u$ на сфере $\sigma$ радиуса $\rho$.

По доказанному, $\ln M_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \ln J(\rho, u^{\alpha})$ *есть выпуклая функция относительно* $\ln \rho$.

n° 2. Пусть теперь $p > 2$ и попрежнему $u(P)$ логарифмически-субгармоническая функция внутри кольца $R_1 < \rho < R_2$. Тогда при любом постоянном $\beta$ выражение $e^{\frac{\beta}{\rho^{p-2}}} \cdot u$ представляет субгармоническую



функцию в кольце $R_1 < \rho < R_2$ и, следовательно, согласно предложению о среднем значении

$$e^{\frac{\beta}{\rho^{p-2}}} J(\rho, u) = e^{\frac{\beta}{\rho^{p-2}} + \ln J}$$

есть выпуклая функция относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$.

Так как $\beta$ произвольно, то отсюда заключаем (гл. II, § 3), что $\ln J$ — выпуклая функция относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$. Так как $u^{\alpha}$ есть логарифмически-субгармоническая функция, то $\ln M_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \ln J(\rho, u^{\alpha})$ — функция, выпуклая относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$. Итак, мы установили предложение:

*Если $u(P)$ — функция, логарифмически-субгармоническая внутри шара $\overline{OP} < R$ и*

$$M_{\alpha}(\rho) = M_{\alpha}(\rho, u) = \left[\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} u^{\alpha}(P)\, d\sigma\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

*где интегрирование распространено по сфере $\overline{OP} = \rho < R$,* то

1) *$M_{\alpha}(\rho)$ есть неубывающая функция от $\rho$;*

2) *$\ln M_{\alpha}(\rho)$ есть выпуклая функция относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p > 2)$* или относительно $\ln \rho$ $(p = 2)$.

Замечание. Вторая часть теоремы, как следует из доказательства, справедлива лишь при условии, что $u(P)$ — логарифмически-субгармоническая функция внутри кольца $R_1 < \rho < R_2$.

Доказанная ранее теорема Гарди об аналитических функциях комплексного переменного $z$ (§ 8) является частным случаем этого предложения, когда положим $u(P) = |f(z)|$.

## § 15. Среднее значение порядка $\alpha$ как функция от $\alpha$ [2]

n° 1. Пусть $f(P)$ — функция точки $P$, непрерывная и не имеющая отрицательных значений на сфере $\sigma$. Рассмотрим ее среднее значение порядка $\alpha$, $\alpha > 0$, на сфере $\sigma$:

$$M_{\alpha} = \left[\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} f^{\alpha}(P)\, d\sigma\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

и докажем, что *при неограниченном возрастании $\alpha$ среднее значение порядка $\alpha$ стремится к максимальному значению функции $f$ на сфере $\sigma$*. Пусть $M$ — максимум функции $f(P)$ на $\sigma$; среднее значение $M_{\alpha}$ всегда не больше, чем $M$. Покажем, что, начиная с достаточно большого $\alpha$, $M_{\alpha}$ остается больше $M - \varepsilon$, где $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число.

Так как $f$ непрерывна, то она больше $M-\frac{\varepsilon}{2}$ на некотором куске $\sigma_1$ сферы $\sigma$; заметив, что $f\geqslant 0$, получим

$$M_\alpha \geqslant \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Когда $\alpha$ стремится к бесконечности, правая часть последнего неравенства стремится к $M-\frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, возможно найти положительное число $\alpha_0$ так, чтобы при $\alpha>\alpha_0$ имело место $M_\alpha>M-\varepsilon$. Таким образом утверждение доказано.

n° 2. *Считая $f$ положительной непрерывной функцией, покажем, что при стремлении $\alpha$ к нулю ее среднее значение порядка $\alpha$ стремится к пределу, который мы будем называть средним значением порядка нуль и обозначать через $M_0$, где $M_0$ дается формулой*

$$M_0=e^{\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma \ln f(P)\,d\sigma}.$$

Для доказательства, обозначая через $\theta$ положительное число, меньшее единицы, напишем

$$[f(P)]^\alpha=e^{\alpha\ln f(P)}=1+\frac{\alpha\ln f(P)}{1}+\frac{\alpha^2\ln^2 f(P)}{2}\cdot e^{\theta\alpha\ln f(P)},$$

откуда следует

$$\ln M_\alpha=\frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma\left(1+\frac{\alpha\ln f}{1}+\frac{\alpha^2\ln^2 f}{2}e^{\theta\alpha\ln f}\right)d\sigma\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\ln\left[1+\alpha\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma \ln f\,d\sigma+A\alpha^2\right],$$

где $A$ обозначает функцию от $\alpha$, которая остается ограниченной, когда $\alpha$ стремится к нулю.

Заставляя $\alpha$ стремиться к нулю, получим

$$\ln M_0=\lim_{\alpha\to 0}\ln M_\alpha=\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma \ln f\,d\sigma,$$

ч. т. д.

n° 3. Наконец, легко убедиться, что *среднее значение $M_\alpha$ порядка $\alpha$ есть неубывающая функция от $\alpha$.*

Доказательство основывается на свойстве возрастания функции

$$F(t)=\left(\frac{a^t+\ldots+l^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}},$$

где $a, b, \ldots, l$ суть $n$ положительных чисел.



## § 16. Обобщение теоремы Адамара (Hadamard) [1; 6; 17; 22]

n° 1. В § 14 была установлена теорема о среднем значении порядка $\alpha$, $\alpha>0$, для логарифмически-субгармонической функции.

Считая $u(P)$ непрерывной логарифмически-субгармонической функцией и заставляя $\alpha$ неограниченно возрастать, мы видим в силу § 15, что ее среднее значение порядка $\alpha$ $M_\alpha$ будет стремиться к максимуму этой функции на сфере $\sigma$. Таким образом из вышеупомянутого предложения § 14 переходом к пределу при $\alpha\to\infty$ мы находим *теорему „о трех сферах“:*

*Если $u(P)$ — непрерывная функция, логарифмически-субгармоническая внутри шара $\overline{OP}<R$ и*

$$M(\rho)=\max_{\overline{OP}=\rho} u(P),\quad \rho<R,$$

то

1) *$M(\rho)$ есть неубывающая функция от $\rho$;*

2) *$\ln M(\rho)$ есть выпуклая функция относительно $\ln\rho$ $(p=2)$* или относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p>2)$.

От гипотезы непрерывности функции $u(P)$ легко освобождаемся, если заметим, что всякую логарифмически-субгармоническую функцию можно рассматривать как предел монотонно убывающей последовательности $u_n(P)$ непрерывных логарифмически-субгармонических функций (см. гл. II, ч. I, § 5). С другой стороны, максимум функции $u_n(P)$ на сфере $\sigma$ — обозначим его $M_n(\rho)$ — стремится, убывая, к $M(\rho)$, когда $n$ неограниченно возрастает. Так как по доказанному $M_n(\rho)$ есть функция логарифмически-выпуклая, то и ее предел $M(\rho)$ обладает тем же свойством.

Замечание. Вторая часть теоремы справедлива лишь при условии, что $u(P)$ — логарифмически-субгармоническая функция внутри кольца $R_1<\rho<R_2$.

n° 2. Как следствие этого предложения, полагая $u(P)=|f(z)|$, получим известную *теорему Адамара*:

*Если $f(z)$ — аналитическая функция внутри круга $|z|<R$ и*

$$M(\rho)=\max_{|z|=\rho}|f(z)|,\quad \rho<R,$$

*то*

1) *$M(\rho)$ есть неубывающая функция от $\rho$;*

2) *$\ln M(\rho)$ есть выпуклая функция относительно $\ln\rho$.*

n° 3. Замечая, что $\max\limits_{\overline{OP}=\rho}\ln u(P)=\ln\max\limits_{\overline{OP}=\rho}u(P)$, мы можем высказать доказанную в этом параграфе теорему о трех сферах в другой эквивалентной форме:

*Если функция $u(P)$ — субгармоническая внутри сферического кольца $R_1<\overline{OP}<R_2$, то ее максимальное значение $M(\rho)$ на сфере радиуса $\rho$, $R_1<\rho<R_2$, есть функция, выпуклая в интервале $R_1<\rho<R_2$, относительно $\ln\rho$* (при $p=2$) или *относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$* (*при $p>2$*). Это предложение мы получили выше как предельный

случай теоремы о среднем значении. Теперь мы ему дадим другое доказательство, идея которого весьма плодотворна. В самом деле, наибольшее значение $M(\rho)$ произвольной субгармонической функции $u$ на сферах радиусов $\rho$, $R_1 < \rho < R_2$ можно рассматривать как верхнюю огибающую семейства субгармонических функций, полученных из данной функции $u(P)$ путем всевозможных вращений, переводящих сферы самих в себя.

Эта верхняя огибающая на сфере радиуса $\rho$ сохраняет постоянное значение $M(\rho)$; с другой стороны, она должна быть субгармонической функцией. Чтобы обнаружить последнее, достаточно показать (гл. III, § 6), что $M(\rho)$ внутри кольца есть функция, полунепрерывная сверху, т. е., что при $\rho_n \to \rho$, мы имеем $M(\rho_n) - M(\rho) < \varepsilon$.

Действительно, допуская противное, имели бы $M(\rho_n) - M(\rho) \geqslant \varepsilon$ при $\rho_n \to \rho$. Полагая $M(\rho_n) = u(P_n)$, $M(\rho) = u(P)$, обозначим через $P_*$ предельную точку последовательности $P_n$. Не уменьшая общности, можно считать $P_n \to P_*$. Заметив, что $u(P_*) \leqslant u(P)$ и что $u(P)$ полунепрерывна сверху, получим

$$M(\rho_n) - M(\rho) = u(P_n) - u(P) < u(P_*) + \varepsilon - u(P) < \varepsilon,$$

откуда противоречие, что доказывает полунепрерывность сверху $M(\rho)$ внутри кольца.

Итак, $M(\rho)$ есть субгармоническая функция внутри сферического кольца, имеющая постоянное значение на каждой сфере $\overline{OP} = \rho$.

Следовательно, по теореме о среднем значении, $M(\rho)$ должна быть выпуклой функцией относительно $\ln \rho$ (при $p = 2$) или относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ (в случае $p > 2$), из последнего же следует непрерывность функции $M(\rho)$ относительно $\rho$ при любом $P$.

n° 4. *Если $u(P)$ — субгармоническая функция в области $D$, то $M_r\, u(P)$, равная максимуму $u(Q)$ в шаре с центром $P$ радиуса $r$, есть функция, также субгармоническая.* Само собой понятно, что $M_r\, u(P)$ определена в области $G \subset D$, расстояние границы которой от границы области $D$ больше $r$. Очевидно, это предложение эквивалентно следующему: *если $u(P)$ — логарифмически-субгармоническая в области $D$, то $M_r\, u(P)$ есть функция, также логарифмически-субгармоническая.*

Чтобы доказать это последнее предложение, прежде всего заметим, что в силу теоремы о трех сферах $M_r\, u(P)$ есть функция точки $P$ полунепрерывная сверху. В самом деле, предполагая $\overline{PP_1} < \delta$, опишем из точки $P$ как центра шар радиуса $r + \delta$ и обозначим через $M_{r+\delta}\, u(P)$ максимум функции $u$ в этом шаре.

Очевидно, имеем $M_{r+\delta}\, u(P) \geqslant M_r\, u(P_1)$, и, по теореме о трех сферах,

$$M_{r+\delta}\, u(P) = M_r\, u(P) + \varepsilon(\delta, P),$$

где $\varepsilon(\delta, P) \to 0$ вместе с $\delta$.

Следовательно, начиная с достаточно малого $\delta$, $M_r\, u(P_1) - M_r\, u(P) \leqslant \varepsilon(\delta, P) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Это и доказывает полунепрерывность сверху в точке $P$ функции $M_r\, u(P)$.



С другой стороны, предполагая сначала $u(P)$ непрерывной, имеем

$$M_r\, u(P) = \lim_{n \to \infty} \left[ \frac{1}{\omega_r} \int_{\omega_r} u^n(Q)\, d\omega \right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} u_n(P).$$

Функция $u_n(P) = \left[ \frac{1}{\omega_r} \int_{\omega_r} u^n(Q)\, d\omega \right]^{\frac{1}{n}}$, где интегрирование распространено на область шара $\omega(P, r)$ с центром в точке $P$ радиуса $r$, есть, очевидно, непрерывная и, в силу § 12, n° 2 (приложение), логарифмически-субгармоническая. Таким образом $M_r\, u(P)$, полунепрерывная сверху функция точки $P$, является пределом монотонно возрастающей последовательности $\{u_n\}$ непрерывных логарифмически-субгармонических функций. Согласно принципу о верхней огибающей субгармонических функций, $M_r\, u(P)$ есть логарифмически-субгармоническая функция [1]).

От сделанной при доказательстве гипотезы непрерывности функции $u(P)$ легко освободимся, если заметим, что всякую логарифмически-субгармоническую функцию можно рассматривать как предел монотонно убывающей последовательности непрерывных логарифмически-субгармонических функций (ч. II, гл. I, § 5). С другой стороны, максимум функции $u_n(P)$ в шаре радиуса $r$, т. е. $M_r\, u_n(P)$, стремится, убывая, к $M_r\, u(P)$, когда $n$ неограниченно возрастает.

Так как по доказанному $M_r\, u_n(P)$ есть функция логарифмически-субгармоническая, то и ее предел $M_r\, u(P)$ обладает тем же свойством.

Предложение этого пункта может быть легко доказано непосредственно, не рассматривая $M_r\, u(P)$ в виде предела среднего значения. Действительно, произведем сдвиг точек $P$ в точки $P'$ на вектор длины $r$ произвольного направления и примем $u(P')$ за значение новой функции в точке $P$. Таким образом мы построим семейство субгармонических функций, соответствующих различным направлениям вектора.

Верхняя огибающая этого семейства, очевидно, совпадает с $M_r\, u(P)$. Эта последняя функция, как мы показали, есть полунепрерывная сверху. Следовательно, она субгармоническая, что и требовалось доказать [2]).

## § 17. Теорема о трех плоскостях [22; 32; 6]

n° 1. Доказательство, изложенное в § 16, n° 3, естественно приводит нас к мысли доказать следующее предложение, — назовем его *теоремой о трех плоскостях:*

*Если функция $u(P) = u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — субгармоническая и ограниченная сверху внутри полосы $\alpha < x_1 < \beta$,* то функция $\varphi(\xi_1)$, равная верхней границе $u(P)$ для $x_1 = \xi_1$, *есть выпуклая относительно $\xi_1$, в интервале $\alpha < \xi_1 < \beta$.*

---

[1]) Из доказательства вытекает, что $M_r\, u(P)$ есть непрерывная функция, если $u(P)$ непрерывна.

[2]) Это доказательство было мне сообщено устно проф. В. И. Смирновым.

Будем сначала предполагать, что когда $x_2^2+x_3^2+\ldots+x_p^2\to\infty$, $u(P)$ равномерно стремится к $-\infty$. При этом предположении $\varphi(\xi_1)$ будет максимальным значением функции $u(P)$ на плоскости $x_1=\xi_1$. Применяя метод предыдущего параграфа, будем рассматривать $\varphi(\xi_1)$ как верхнюю огибающую семейства субгармонических функций, полученных из данной функции $u(P)$ путем всевозможных сдвигов, переводящих плоскости $x_1=\xi_1$ самих в себя. Эта верхняя огибающая $w$ на любой плоскости $x_1=\xi_1$ сохраняет постоянное значение $\varphi(\xi_1)$.

Функция $\varphi(\xi_1)$ должна быть субгармонической внутри нашей полосы (гл. III, § 6). Чтобы это обнаружить, достаточно показать, что $\varphi$ внутри полосы есть функция, полунепрерывная сверху, как это сразу видно, применяя рассуждение предыдущего параграфа. После этого становится очевидным, что $\varphi(\xi_1)$ — выпуклая относительно $\xi_1$, в интервале $\alpha<\xi_1<\beta$.

Остается освободиться от ограничения, поставленного вначале.

Положим $u_n(P)=u(P)-\dfrac{x_2^2+x_3^2+\ldots+x_p^2-(p-1)x_1^2}{n}$; функция $u_n(P)$ при любом $n$ есть субгармоническая, так как отличается от $u(P)$ на гармоническую функцию; с другой стороны, она внутри полосы удовлетворяет поставленному ограничению.

Следовательно, функция $\varphi$ для $u_n$ есть выпуклая, откуда переходом к пределу при $n\to\infty$ убедимся, что $\varphi$ для $u$ есть также выпуклая.

Замечание. Очевидно, *из предположения субгармоничности* $\ln u(P)$ *следует выпуклость* $\ln\varphi(\xi_1)$.

n° 2. Как следствие этого предложения, полагая $u(P)=\ln|f(z)|$, получим известную *теорему о трех прямых*:

*Если $f(z)$ — аналитическая ограниченная функция внутри полосы $\alpha<x<\beta$, то верхняя граница $|f(z)|$ на любой прямой $x=\xi$ есть логарифмически-выпуклая функция относительно $\xi$.*

## § 18. Теорема о трех цилиндрах [22; 6]

n° 1. Рассмотрим цилиндрический слой, т. е. область, ограниченную двумя цилиндрическими поверхностями с общей осью вращения, за которую мы примем ось координат $x_p$, радиусов соответственно $R_1$ и $R_2$. Пусть $u(P)=u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ — функция, субгармоническая и ограниченная сверху внутри цилиндрического слоя.

Обозначим через $L(\rho)$ верхнюю границу значений функции $u(P)$ на поверхности цилиндра радиуса $\rho$, $R_1<\rho<R_2$, с осью $x_p$.

Докажем теорему: *функция $L(\rho)$ есть выпуклая в интервале $R_1<\rho<R_2$ относительно $\rho$ (при $p=2$), относительно $\ln\rho$ (при $p=3$) и относительно $\rho^{\frac{1}{p-3}}$ (когда $p\geqslant 4$).* Сначала допустим, что равномерно $u(P)\to-\infty$, когда $|x_p|\to\infty$. Применяя метод предыдущего параграфа, будем рассматривать $L(\rho)$ как верхнюю огибающую семейства субгармонических функций, полученных из данной функции $u(P)$ путем всевозможных движений, переводящих цилиндры радиусов $\rho$ самих в себя. Эта верхняя огибающая $w$ на любой цилиндрической поверхности

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{p-1}^2=\rho^2$$



сохраняет постоянное значение, $L(\rho)$, т. е.

$$L(\rho)=w(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{p-1}^2,\ x_p).$$

С другой стороны, функция $w$ должна быть субгармонической внутри нашего цилиндрического слоя, потому что она полунепрерывна сверху (гл. III, § 6).

Полунепрерывность сверху доказывается, применяя рассуждение предыдущих параграфов. Отсюда легко усматриваем, что $L(\rho)$ будет субгармонической функцией точки $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ внутри сферического кольца $R_1^2<x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{p-1}^2<R_2^2$. После этого, согласно теореме о среднем значении, становится очевидным, что $L(\rho)$ есть выпуклая функция в интервале $(R_1, R_2)$ относительно $\ln\rho$ (при $p=3$) и относительно $\rho^{\frac{1}{p-3}}$ (в случае $p\geqslant 4$).

Что касается случая $p=2$, то здесь непосредственно видно, что $L(\rho)$ как субгармоническая функция точки $x_1$ внутри области $R_1<|x_1|<R_2$ будет выпуклой относительно $|x_1|=\rho$ в интервале $(R_1, R_2)$. От поставленного вначале ограничения освобождаемся, аналогично предыдущему параграфу, путем вспомогательной функции

$$u_n(P)=u(P)-\frac{x_p^2-x_1^2}{n}.$$

Замечание 1. Очевидно, *из предположения логарифмической субгармоничности функции $u(P)$ следует выпуклость* $\ln L(\rho)$.

Замечание 2. Теорему о трех сферах, рассмотренную в § 16, для пространства $p$ измерений можно включить как частный случай доказанной теоремы о цилиндрах в пространстве $p+1$ измерений.

n° 2. В добавление к рассмотренному, обозначим через $L(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ верхнюю границу значений функции $u(P)$ на прямой, параллельной оси $x_p$.

Покажем, что $L(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ *есть субгармоническая функция в области* $R_1^2<x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{p-1}^2<R_2^2$.

Попрежнему сначала допустим, что равномерно $u(P)\to-\infty$, когда $x_p\to\infty$.

Будем рассматривать $L(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ как верхнюю огибающую семейства субгармонических функций, полученных из данной функции $u(P)$ путем всевозможных сдвигов, переводящих прямые, параллельные оси $x_p$, самих в себя.

Эта верхняя огибающая $w$ на любой прямой $x_1=\text{const}$, $x_2=\text{const}$, $\ldots$, $x_{p-1}=\text{const}$, сохраняет постоянное значение $L(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$, т. е. $L(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})=w(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

С другой стороны, $w$ должна быть субгармонической функцией внутри нашего цилиндрического слоя, потому что она полунепрерывна сверху (гл. III, § 6). Отсюда сразу заключаем, что $L(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ будет субгармонической функцией точки $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ внутри сферического кольца

$$R_1^2<x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{p-1}^2<R_2^2$$

ч. т. д.

От ограничения, поставленного в начало доказательства, освободимся обычным способом, вводя вспомогательные субгармонические функции

$$u_n(P) = u(P) - \frac{x_p^2 - x_1^2}{n},$$

которые в пределе дают $u(P)$.

n° 3. Если, в частности, мы предположим, что функция $u(P)$ есть субгармоническая и ограниченная сверху внутри цилиндра $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{p-1}^2 < R^2$, то $L(\rho)$ будет, кроме доказанной выпуклости, обладать свойством: $L(\rho)$ — неубывающая функция в интервале $0 \leqslant \rho < R$.

В самом деле, в этом случае $L(\rho)$ совпадает с верхней границей функции $u(P)$ во всем цилиндрическом теле радиуса $\rho$. Чтобы это обнаружить, допустим противное.

Обозначим через $A$ верхнюю границу функции $u(P)$ в цилиндрическом теле, через $a$ — верхнюю ее границу лишь на поверхности этого цилиндрического тела, причем $A > a$.

Тогда найдется внутри цилиндрического тела прямая, параллельная его оси, такая, что верхняя граница нашей функции на этой прямой будет $> a$, в то время как верхние границы функции на образующих цилиндрической поверхности $\leqslant a$.

По доказанному в предыдущем пункте, верхняя граница на прямой есть субгармоническая функция точки $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ внутри шара $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{p-1}^2 < R^2$; следовательно, эта субгармоническая функция, будучи $\leqslant a$ на границе шара $x_1^2 + x_2^2 + x_{p-1}^2 = \rho^2$, должна быть $\leqslant a$ и внутри его и, значит, ни в какой внутренней точке не может быть $> a$. Полученное противоречие убеждает нас в невозможности гипотезы $A > a$, т. е. остается допустить, что $A = a$, что и требовалось доказать.

n° 4. Как следствие последнего предложения, полагая $u(P) = \ln|f(z)|$, получим следующую *теорему о трех полосах для аналитических функций*:

*Если $f(z)$ — аналитическая, ограниченная функция внутри полосы $-R < x < R$, то верхняя граница $|f(z)|$ в любой полосе $-\rho \leqslant x \leqslant \rho$ есть логарифмически-выпуклая неубывающая функция относительно $\rho$ в интервале $0 < \rho < R$.*

## § 19. Теорема о трех полуплоскостях [22; 6]

n° 1. Пусть $u(P)$ — функция, обладающая свойствами:

1) $u(P)$ — субгармоническая в области угла $D$, определяемого условиями $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, где $0 < r < +\infty$, $0 < \varphi < \alpha$, а $x_3, \ldots, x_p$ произвольны ($x_1, x_2, \ldots, x_p$ — координаты точки $P$);

2) $u(P)$ ограничена сверху в области $D$.

*Обозначим через $L(\beta)$ верхнюю границу значений функции $u(P)$ на полуплоскости $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\beta$ $(0 < \beta < \alpha)$, принадлежащей области $D$, и докажем теорему*:

*$L(\beta)$ есть выпуклая функция в интервале $0 < \beta < \alpha$.*



При доказательстве этого предложения, не уменьшая его общности, мы можем считать угол $\alpha$ достаточно малым, удовлетворяющим неравенству $\operatorname{tg}^2\alpha < \frac{1}{p-1}$, потому что в противном случае мы разбили бы интервал $(0, \alpha)$ на конечное число достаточно малых перекрывающихся интервалов и из выпуклости функции $L(\beta)$ в каждом из этих интервалов заключили бы о ее выпуклости во всем интервале $(0, \alpha)$.

Итак, пусть $\operatorname{tg}^2\alpha < \frac{1}{p-1}$; допустим, что равномерно $u(P) \to -\infty$, когда точка $P$ уходит в бесконечность. При этом ограничении (от этого предположения мы в конце освободимся) функция $u(P)$ на каждой полуплоскости $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\beta$ достигает своего максимального значения $L(\beta)$, так как мы вправе считать функцию $u(P)$ полунепрерывной сверху в области $D$, включая ось $r = 0$, приняв за значения функции в точках этой оси верхние ее пределы, когда точка $P$ приближается изнутри $D$ к точкам $r = 0$.

Рассмотрим теперь группу преобразований, переводящих полуплоскости $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\beta$ самих в себя: $x_1' = kx_1$, $x_2' = kx_2$, $x_3' = kx_3 + h_1, \ldots, x_p' = kx_p + h_{p-2}$, где $k > 0$, $h_1, h_2, \ldots, h_{p-2}$ — произвольные параметры. При помощи этой группы преобразований из данной функции $u(P)$ мы получаем семейство субгармонических функций в области $D$, верхней огибающей которого будет функция $w(P)$, сохраняющая на каждой полуплоскости $x_2 = x_1 \operatorname{tg}\beta$ постоянное значение $L(\beta)$. На основании известного принципа образования субгармонических функций (§ 6) $w(P)$ будет субгармонической функцией в области $D$, если мы установим ее полунепрерывность сверху.

Допустив противное, мы имели бы $L(\beta_n) - L(\beta) \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon$ — некоторое положительное число и $\beta_n \to \beta$. Так как

$$L(\beta_n) - L(\beta) = u(P_n) - u(P) < u(P_*) + \varepsilon - u(P)$$

(предполагая, что точки $P_n$ лежат в достаточно малой окрестности их предельной точки $P_*$).

Заметив, что $u(P_*) \leqslant u(P)$, получим $L(\beta_n) - L(\beta) < \varepsilon$ для бесконечно многих $n$, что противоречит отрицанию полунепрерывности сверху.

Далее, так как $L(\beta) = w(P)$ есть субгармоническая функция в области $D$, то отсюда легко заключить о выпуклости $L(\beta)$ в интервале $0 < \beta < \alpha$. В самом деле, строим линейную функцию $l(\beta)$, принимающую на концах сегмента $[\beta_1, \beta_2] \subset (0, \alpha)$ значения $L(\beta_1)$ и $L(\beta_2)$. Покажем, что внутри этого сегмента $L(\beta) \leqslant l(\beta)$. Для этого заметим, что $l(\beta)$ есть функция, гармоническая в угловой области $\beta_1 < \beta < \beta_2$, и, следовательно, разность $L(\beta) - l(\beta)$ в этой области — субгармоническая функция, принимающая на сторонах угла значение нуль. Отсюда следует, что $L(\beta) - l(\beta) \leqslant 0$, т. е. $L(\beta) \leqslant l(\beta)$, ч. т. д. Остается освободиться от ограничения, наложенного в начале доказательства.

С этой целью введем вспомогательную функцию

$$u_n(P) = u(P) - \frac{x_3^2 + \ldots + x_p^2 + x_1^2 - (p-1)x_2^2}{n},$$

которая при любом целом положительном $n$ будет субгармонической в области $D$, причем $u_n(P) \to -\infty$ равномерно, когда точка $P$ уходит в бесконечность, так как $\operatorname{tg}^2 \alpha < \frac{1}{p-1}$. По доказанному, функция $L(\beta)$ для $u_n(P)$ есть выпуклая; переходя к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся в выпуклости функции $L(\beta)$ для субгармонической функции $u(P)$.

Замечание. Очевидно, *из предположения логарифмической субгармоничности функции $u(P)$ вытекает выпуклость* $\ln L(\beta)$.

n° 2. Как следствие последнего предложения, полагая $u(P) = \ln|f(z)|$, получим следующую теорему о трех лучах для аналитических функций: *если $f(z)$ — аналитическая, ограниченная функция внутри угла $0 < \arg z < \alpha$, то верхняя граница $|f(z)|$ на любом луче $\arg z = \beta < \alpha$ есть логарифмически-выпуклая функция относительно $\beta$ в интервале $0 < \beta < \alpha$.*

## § 20. Теорема о трех конусах [34; 6]

n° 1. Пусть $u(P)$ — функция, обладающая свойствами:

1) $u(P)$ — субгармоническая в области $D$, ограниченной двумя коническими поверхностями $\theta_{p-1} = \alpha$ и $\theta_{p-1} = \beta$ $(0 \leqslant \alpha < \beta < \pi)$, где $x_1 = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2, \ldots, \sin\theta_{p-1}$, $x_2 = \rho\cos\theta_1 \sin\theta_2, \ldots, \sin\theta_{p-1}$, $x_3 = \rho\cos\theta_2 \sin\theta_3, \ldots, \sin\theta_{p-1}, \ldots, x_p = \rho\cos\theta_{p-1}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_p$ — координаты точки $P)$;

2) $u(P)$ ограничена сверху в области $D$.

Обозначим через $L(\gamma)$ верхнюю границу значений функции $u(P)$ на конической поверхности $\theta_{p-1} = \gamma$ $(\alpha < \gamma < \beta)$, принадлежащей области $D$, и докажем теорему:

*$L(\gamma)$ есть функция, выпуклая относительно $\lambda = \int^{\gamma} \frac{d\theta_{p-1}}{\sin^{p-2}\theta_{p-1}}$ в интервале $\alpha < \gamma < \beta$.* В частности, при $p = 3$, $L(\gamma)$ есть функция, выпуклая относительно $\ln \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Допустим сначала, что равномерно $u(P) \to -\infty$, когда точка $P$ уходит в бесконечность. При этом ограничении (от этого предположения мы освободимся в конце доказательства) функция $u(P)$ на каждой конической поверхности $\theta_{p-1} = \gamma$ достигает своего максимального значения $L(\gamma)$, так как мы вправе считать функцию $u(P)$ полунепрерывной сверху в области $D$, включая точку $\rho = 0$, приняв за значение функции в этой точке верхний ее предел, когда точка $P$ приближается изнутри $D$ к точке $\rho = 0$.

Рассмотрим теперь группу преобразований, переводящих конические поверхности $\theta_{p-1} = \gamma$ самих в себя: подобие относительно точки $\rho = 0$ с последующими вращениями около оси $x_p$; в случае $p = 3$ эта группа преобразований аналитически может быть записана так: $x_1' + ix_2' = s(x_1 + ix_2)e^{i\sigma}$, $x_3' = sx_3$, где $s > 0$ и $\sigma$ — произвольные параметры.

При помощи этой группы преобразований из данной функции $u(P)$ мы получим семейство субгармонических функций в области $D$, верхняя огибающая которого будет функция $w(P)$, сохраняющая на каждой конической поверхности $\theta_{p-1} = \gamma$ постоянное значение $L(\gamma)$. На основании известного принципа образования субгармонических функций (§ 6) $w(P)$ будет субгармонической функцией в области $D$, если мы установим ее полунепрерывность сверху. Это последнее свойство устанавливается аналогично §§ 16 — 19.

Далее, так как $L(\gamma) = w(P)$ есть субгармоническая в области $D$, а $\lambda = \int^{\gamma} \frac{d\theta_{p-1}}{\sin^{p-2}\theta_{p-1}}$ — гармоническая с постоянными значениями вдоль конических поверхностей $\theta_{p-1} = \gamma$, то отсюда легко заключить о выпуклости $L(\gamma)$ относительно $\lambda$ в интервале $\alpha < \gamma < \beta$.



В самом деле, строим линейную функцию $l(\lambda)$, принимающую на концах сегмента $[\gamma_1, \gamma_2] \subset (\alpha, \beta)$ значения $L(\gamma_1) = l(\lambda_1)$ и $L(\gamma_2) = l(\lambda_2)$, где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — значения $\lambda$ соответственно при $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$. Покажем, что внутри этого сегмента $L(\gamma) \leqslant l(\lambda)$. Для этого заметим, что $l(\lambda)$ есть функция, гармоническая в области $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, и, следовательно, разность $L(\gamma) - l(\lambda)$ в этой области — субгармоническая функция, принимающая на границе $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = \gamma_2$ значение нуль.

Отсюда следует, что $L(\gamma) - l(\lambda) \leqslant 0$, т. е. $L(\gamma) \leqslant l(\lambda)$, ч. т. д.

Остается освободиться от ограничения, наложенного в начале доказательства. С этой целью введем вспомогательную функцию $v(P)$, положительную, супергармоническую в области $D$ и равномерно стремящуюся к $+\infty$, когда $\rho \to +\infty$. Например для $p = 3$ эта функция $v(P)$ может быть выбрана в виде $\rho^k \left[ C - \int_0^{\theta_2} \frac{\theta_2}{\sin\theta_2} d\theta_2 \right]$, где $C > 0$ постоянное, назначаемое так, чтобы скобка была положительна при любом $\theta_2$, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant \beta < \pi$, а $k > 0$ выбирается достаточно малым, чтобы $v(P)$ была супергармонической.

Положим теперь $u_n(P) = u(P) - \frac{v(P)}{n}$; очевидно, $u_n(P)$ при любом целом положительном $n$ будет субгармонической в области $D$, причем $u_n(P) \to -\infty$ равномерно, когда точка $P$ уходит в бесконечность. По доказанному, функция $L(\gamma)$ для $u_n(P)$ есть выпуклая относительно $\lambda$; переходя к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся в выпуклости функции $L(\gamma)$ относительно $\lambda$ для субгармонической функции $u(P)$.

Замечание. Очевидно, из предположения логарифмической субгармонической функции $u(P)$ вытекает выпуклость относительно $\lambda$ выражения $\ln L(\gamma)$.

ГЛАВА IV

# ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

## § 1. Принцип максимума в его простейшей форме

n° 1. Принцип максимума субгармонических функций в его классической форме, как известно, заключается в следующем:

Субгармоническая функция в области $D$ [1]), не равная тождественно постоянному, не может достигать максимума внутри области. Доказательство этого свойства субгармонических функций было дано в гл. III, § 6.

Следствие. Если субгармоническая функция в области $D$, полунепрерывная сверху в $\overline{D}$, отличная от константы, на границе области не превосходит $C$, то внутри области она меньше $C$.

Частным случаем этого предложения является теорема о максимальном модуле аналитической функции. Действительно, полагая $u(P) = |f(z)|$, мы заключаем: если $f(z)$ — аналитическая функция в области $D$, отличная от константы, то ее модуль не может достигать максимума внутри области. Также его частным случаем является теорема об экстремальных свойствах гармонических функций. В самом деле, считая $u(P)$ гармонической функцией в области $D$ и замечая, что в этом случае $-u(P)$ — тоже гармоническая функция, мы получим из нашей общей теоремы следствие: если $u(P)$ — гармоническая функция в области $D$, отличная от константы, то она не может достигать ни максимума, ни минимума внутри области.

## § 2. Лемма Шварца [2]

n° 1. Применяя принцип максимума субгармонической функции, мы можем установить следующее предложение:

*Если $w(P) = \rho u(P)$, где $\rho = \overline{OP}$, а $u(P)$ — субгармоническая функция внутри шара $\overline{OP} < 1$, причем $w(P) \leqslant 1$, то при этих условиях имеет место неравенство*

$$w(P) \leqslant \rho,$$

[1]) Во всем дальнейшем, как и ранее, под областью $D$ будем понимать произвольную область, не содержащую внутри бесконечно удаленной точки.



причем знак равенства в некоторой точке $P_0$ возможен лишь в случае, когда $w(P) \equiv \rho$. Действительно, на сфере $\overline{OP} = r < 1$ имеем неравенство

$$u(P) = \frac{w(P)}{r} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Вследствие принципа максимума (§ 1) заключаем, что последнее неравенство будет выполняться и внутри сферы радиуса $r$. Считая $P$ постоянной точкой и заставляя $r$ стремиться к единице, в пределе найдем $u(P) \leqslant 1$ или $w(P) \leqslant \rho$. Если в некоторой точке $P_0$ имеем равенство $w(P_0) = \rho_0$, т. е. $u(P_0) = 1$, то вследствие принципа максимума либо $u(P) \equiv 1$, либо найдется такая точка $P$, что $u(P) > 1$. В первом случае $w(P) \equiv \rho$, второго же случая быть не может, потому что неравенство $u(P) = \frac{w(P)}{\rho} > 1$ или $w(P) > \rho$ противоречиво с доказанным в начале этой теоремы.

Следствие. *Пусть $\omega(z)$ есть функция, обладающая свойствами:*

1) *$\omega(z)$ — голоморфная в круге $|z| < 1$;*
2) *$\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$.*

*При этих условиях во всякой точке круга удовлетворяется неравенство $|\omega(z)| \leqslant |z|$, причем знак равенства возможен лишь в случае, когда $\omega(z) \equiv ze^{\alpha i}$, где $\alpha$ постоянное.*

Это предложение, известное под именем *леммы Шварца*, вытекает из доказанной теоремы, если в ней положим $u(z) = \left|\frac{\omega(z)}{z}\right|$ и заметим, что из тождества $|\omega(z)| \equiv |z|$ следует $\omega(z) \equiv ze^{\alpha i}$.

## § 3. Принцип максимума в обобщенном виде

n° 1. Обратимся теперь, после установления принципа максимума субгармонических функций в классической форме, к его обобщениям.

Будем говорить, что *функция $u(P)$ в граничной точке $\overline{P}$ области не превосходит числа $C$, если она удовлетворяет условию:*

*Точке $\overline{P}$ границы и всякому положительному числу $\varepsilon$ соответствует шар с центром $\overline{P}$ такой, что в любой точке области $D$, принадлежащей этому шару, выполняется неравенство $u(P) < C + \varepsilon$.*

*Если упомянутое условие выполнено для всякой граничной точки, то мы скажем, что функция не превосходит числа $C$ на границе.*

Теорема: *Пусть $u(P)$ — функция, обладающая свойствами:*

1) *$u(P)$ — субгармоническая в области $D$;*
2) *на границе области $D$ функция $u(P)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное.*

*При этих условиях во всякой точке области $D$ имеет место неравенство $u(P) \leqslant C$. Если в некоторой точке $P_0$ области $D$ мы имели бы равенство $u(P_0) = C$, то $u(P)$ была бы тождественной с постоянным $C$.*

Доказательство этого предложения состоит в следующем. Во-первых, легко показать, что функция $u(P)$ ограничена сверху. Действи-

тельно, в противном случае существовала бы последовательность точек $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ области $D$ такая, что последовательность чисел $u(P_1), u(P_2), \ldots, u(P_n), \ldots$ неограниченно возрастает. Обозначим через $P^*$ предельную точку последовательности $P_n$. Точка $P^*$ не может лежать внутри области $D$, потому что в достаточно малой окрестности точки $P^*$ полунепрерывная сверху функция $u(P)$ должна была бы быть меньше, чем $u(P^*)+1$; точка $P^*$ не может принадлежать и границе области $D$, так как в достаточно малой окрестности точки $P^*$ наша функция по условию меньше, чем $C+1$. Следовательно, точки $P^*$ не существует, и наша функция ограничена сверху.

Пусть $M$ — верхняя граница функции $u(P)$ в области $D$. Так как субгармоническая функция не может достигать максимума внутри области, то $M$ должно быть также верхним пределом значений $u(P)$ в области $D$, т. е. должна существовать последовательность точек $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ такая, что $u(P_n) \to M$. Если последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ имеет предельную точку $P^*$ внутри области $D$, то вследствие полунепрерывности сверху имеем $u(P^*) = M$; в этом случае $u(P)$ достигала бы наибольшего значения в точке $P^*$, что возможно для субгармонической функции только тогда, если она есть постоянное, равное $M$. Но тогда неравенство $u(P) < C+\varepsilon$, имеющее место в окрестности всякой граничной точки, показывает, что $M < C+\varepsilon$. Так как $M$ и $C$ — постоянные, не зависящие от произвольно малого положительного числа $\varepsilon$, то $M \leqslant C$.

Если же последовательность точек $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ имеет предельную точку $P^*$ на границе области $D$, то всякому положительному числу $\varepsilon$ соответствует целое $N$ такое, что для $n > N$ осуществляется неравенство $u(P_n) < C+\varepsilon$; заставляя $n$ неограниченно возрастать и переходя к пределу, снова получим $M \leqslant C+\varepsilon$, откуда $M \leqslant C$, так как $\varepsilon$ произвольно. Итак, показано, что во всех случаях $M \leqslant C$, т. е. $u(P) \leqslant C$. Если в некоторой точке $P_0$ имеет место равенство $u(P_0) = C$, то субгармоническая функция $u(P)$ достигает наибольшего значения $C$ в точке области $D$, и, следовательно, она тождественно равна постоянному $C$ (§ 1).

n° 2. Полагая в доказанном предложении $u(P) = |f(z)|$, получим, в частности:

*Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области $D$. Предположим, что $|f(z)|$ на границе области $D$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное.*

*При этом условии во всякой точке области $D$ имеет место неравенство $|f(z)| \leqslant C$. Если в некоторой точке $z_0$ области $D$ мы имели бы равенство $|f(z_0)| = C$, то $f(z)$ было бы тождественно равно постоянному модуля $C$* [2].

## § 4. Второе расширение принципа максимума

n° 1. *Пусть $u(P)$ — функция, обладающая свойствами:*

1) *$u(P)$ — субгармоническая в области $D$;*

2) *в граничных точках, не принадлежащих некоторому множеству $E$, функция $u(P)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*



3) *существует функция $\omega(P)$, $\omega(P) \leqslant 1$, логарифмически-субгармоническая в области $D$, обладающая свойством: каково бы ни было положительное число $\sigma$, для всякой точки множества $E$ выражение $e^{u(P)}[\omega(P)]^\sigma$ не превосходит $e^C$.*

*При этих условиях во всякой точке области $D$ имеет место неравенство $u(P) \leqslant C$, причем знак равенства в некоторой точке $P_0$ области $D$ может быть лишь в том случае, когда $u(P)$ равна тождественно постоянному $C$.*

Прежде всего замечаем, что $F_\sigma(P) = e^{u(P)}[\omega(P)]^\sigma$ есть субгармоническая функция в области $D$. В окрестности граничной точки $\overline{P}$, отличной от точек множества $E$, имеем $u(P) < C+\varepsilon$ и $[\omega(P)]^\sigma \leqslant 1$; следовательно, $F_\sigma(P) < e^{C+\varepsilon} < e^C + \eta$, где $\eta$ — сколь угодно малое вместе с $\varepsilon$ положительное число. С другой стороны, по условию, в окрестности всякой точки множества $E$

$$F_\sigma(P) < e^C + \eta.$$

Применяя к функции $F_\sigma(P)$ основной принцип § 3, мы получим во всякой точке области $D$

$$F_\sigma(P) \leqslant e^C,$$

откуда

$$e^{u(P)} \leqslant \frac{e^C}{[\omega(P)]^\sigma}.$$

Считая $P$ постоянной точкой области $D$, заставим $\sigma$ стремиться к нулю; тогда $[\omega(P)]^\sigma$ стремится к единице и в пределе мы получим

$$e^{u(P)} \leqslant e^C,$$

т. е.

$$u(P) \leqslant C.$$

Если в некоторой точке $P_0$ мы имели бы $u(P_0) = C$, то в этой точке субгармоническая функция $u(P)$ имела бы наибольшее значение, что возможно лишь в случае, когда $u(P)$ есть тождественное постоянное, равное $C$.

n° 2. Полагая в доказанном предложении $u(P) = \ln|f(z)|$ и $\varphi(P) = |\Omega(z)|$, где $f(z)$ и $\Omega(z)$ — голоморфные функции в области $D$, в частности, получим: пусть *$f(z)$ — аналитическая функция в области $D$, обладающая свойствами:*

1) *в граничных точках, за исключением точек некоторого множества $E$, $|f(z)|$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

2) *существует функция $\Omega(z)$, $|\Omega(z)| \leqslant 1$, аналитическая в области $D$, обладающая свойством: каково бы ни было положительное число $\sigma$, для всякой точки множества $E$ выражение $|f(z)| \cdot |\Omega(z)|^\sigma$ не превосходит $C$.*

*При этих условиях во всякой точке области $D$ имеет место неравенство $|f(z)| \leqslant C$, причем знак равенства в некоторой точке $z_0$ области $D$ может быть лишь в том случае, когда $f(z)$ равна тождественно постоянному модуля $C$* [2].

## § 5. Случай счетного множества исключительных точек

n° 1. *Пусть $u(P)$ — функция; обладающая свойствами:*

1) *$u(P)$ — субгармоническая в области $D$;*

2) *во всех граничных точках, отличных от точек $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, некоторого счетного множества $E$, функция $u(P)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

3) *$\overline{PP}_n^{\sigma} \cdot e^{u(P)}$ стремится к нулю, когда точка $P$ стремится к $P_n$, т. е. всякой системе положительных чисел $\varepsilon$, $\sigma$ и любой точке $P_n$ множества $E$ соответствует шар с центром $P_n$ такой, что в точках области $D$, общих с этим шаром, удовлетворяется неравенство*

$$\overline{PP}_n^{\sigma} \cdot e^{u(P)} < \varepsilon.$$

*При этих условиях неравенство $u(P) \leqslant C$ выполняется в каждой точке области $D$, причем знак равенства в некоторой точке $P_0$ области $D$ может быть лишь в том случае, когда $u(P)$ есть тождественное постоянное, равное $C$.*

При доказательстве предположим сначала, что имеются точки, внешние к области $D$, и пусть $A$ — одна из них. Построим функцию

$$\omega_n(P) = \lambda_n \frac{\overline{PP}_n}{\overline{PA}^{\alpha_n}},$$

где положительное постоянное $\alpha_n$ выбрано так, чтобы в области $D$ осуществлялось неравенство $\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PP}_n}\right)^2 \geqslant \alpha_n$, а $\lambda_n > 0$ выбрано так, чтобы $\omega_n(P) < 1$. Так построенные функции $\omega_n(P)$ будут логарифмически-субгармоническими в области $D$[1]).

Зададим последовательность положительных чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$, меньших единицы, таких, что произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \rho_n$ сходится, а также возрастающую последовательность областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, принадлежащих *вместе с их границами* области $D$ и стремящихся к области $D$.

Числу $\rho_n$ и области $D_n$ соответствует положительное число $\sigma_n$ такое, что неравенство $[\omega_n(P)]^{\sigma_n} > \rho_n$ оправдывается в области $D_n$. Действительно, нижняя граница $r_n$ функции $\omega_n(P)$ в области $\overline{D}_n$ отлична от нуля, и, следовательно, достаточно взять $\sigma_n$ малым настолько, чтобы $r_n^{\sigma_n} > \rho_n$.

Рассмотрим теперь произведение $\prod_{n=1}^{\infty} [\omega_n(P)]^{\sigma_n}$, которое равномерно сходится внутри области $D$ и, следовательно, изображает функцию $\omega(P)$, логарифмически-субгармоническую в области $D$. В самом деле,

[1]) Так как $\Delta(\ln \omega_n(P)) = (p-2)\left[\frac{1}{\overline{PP}_n^2} - \frac{\alpha_n}{\overline{PA}^2}\right] \geqslant 0.$



пусть $\overline{D}'$ — область, внутренняя к $D$, $n_0$ — целое число, большое настолько чтобы область $\overline{D}'$ находилась в области $D_{n_0}$. Отметив для $N > n_0$ соотношение

$$\prod_{n=1}^{N} [\omega_n(P)]^{\sigma_n} = \prod_{n=1}^{n_0} [\omega_n(P)]^{\sigma_n} \cdot \prod_{n=n_0+1}^{N} [\omega_n(P)]^{\sigma_n},$$

видим, что последнее произведение стремится равномерно в $\overline{D}'$ к пределу, отличному от нуля в каждой точке $P$, когда $N$ неограниченно возрастает, потому что при всяком положительном $\varepsilon$ существует целое $N_0$ такое, что имеем

$$1 - \varepsilon < \prod_{n=N_0}^{N_0+p} \rho_n < 1 \quad (p > 0),$$

и, значит,

$$1 - \varepsilon < \prod_{n=N_0}^{N_0+p} \rho_n < \prod_{n=N_0}^{N_0+p} [\omega_n(P)]^{\sigma_n} < 1.$$

Построенная функция $\omega(P) = \prod_{n=1}^{\infty} [\omega_n(P)]^{\sigma_n}$ обладает свойствами:

1) $\omega(P)$ — логарифмически-субгармоническая в области $D$, $\omega(P) < 1$;

2) всякой системе положительных чисел $\varepsilon$, $\sigma$ соответствует шар с центром $P_n$ такой, что $e^{u(P)} [\omega(P)]^{\sigma} < e^C + \varepsilon$ в любой точке области $D$, общей с этим шаром.

В самом деле, имеем

$$e^{u(P)} [\omega(P)]^{\sigma} < e^{u(P)} [\omega_n(P)]^{\sigma\sigma_n},$$

и последняя часть, согласно условию, стремится к нулю, когда точка $P$ стремится к $P_n$.

Применяя предложение § 4, мы убеждаемся в справедливости теоремы, формулированной в начале этого параграфа.

Остается убедиться, что теорема верна и в тех случаях, когда область $D$ не имеет внешних точек (например когда граница области $D$ состоит из купюр, проведенных в пространстве).

Обозначим через $D'$ область, полученную из области $D$ посредством выкидывания из нее точек, принадлежащих замкнутому шару $\overline{\Gamma}$.

Если $C'$ есть верхняя граница функции $u(P)$ на $\overline{\Gamma}$ и $C''$ наибольшее из двух чисел $C$ и $C'$, то имеем $u(P) \leqslant C''$ во всякой точке области $D$, согласно доказанному. Остается обнаружить, что $C'' = C$, т. е. невозможность неравенства $C' > C$. В самом деле, при $C' > C$ функция $u(P)$ достигала бы наибольшего значения $C'$ во внутренней точке области $D$ (на поверхности шара $\overline{\Gamma}$), что возможно лишь в случае, когда $u(P) \equiv C'$. Последнее же находится в противоречии с неравенством $u(P) < C + \varepsilon$, удовлетворяющимся в окрестности границы.

Примечание. Теорема остается верной, когда бесконечно удаленная точка находится на границе области $D$. В этом случае за внутренность шара с центром в бесконечности следует принимать внешнюю часть всякого шара.

n° 2. Полагая в доказанном предложении $u(P)=\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — голоморфная функция в области, получим, в частности, такое следствие: *пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области $D$, обладающая свойствами:*

1) *во всех граничных точках, отличных от точек $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ некоторого счетного множества $E$, $|f(z)|$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

2) *$|z-\zeta_n|^\sigma\,|f(z)|$ стремится к нулю, когда точка $z$ стремится к $\zeta_n$, т. е. всякой системе положительных чисел $\varepsilon$, $\sigma$ и любой точке $\zeta_n$ множества $E$ соответствует круг с центром $\zeta_n$ такой, что в точках области $D$, общих с этим кругом, удовлетворяется неравенство $|z-\zeta_n|^\sigma\,|f(z)|<\varepsilon$.*

*При этих условиях неравенство $|f(z)|\leqslant C$ выполняется в каждой точке области $D$, причем знак равенства в некоторой точке $z_0$ области $D$ может быть лишь в том случае, когда $f(z)$ есть тождественное постоянное модуля $C$* [2].

Примечание. В случае, когда бесконечно удаленная точка составляет часть множества $E$, нужно заменить условие $|z-\zeta_n|^\sigma\,|f(z)|<\varepsilon$ неравенством $\left|\frac{f(z)}{z}\right|^\sigma<\varepsilon$.

n° 3. Теорема n° 1 может быть доказана прямым путем и в более общем виде для пространства $p\geqslant 3$ измерений[1]).

Пусть $u(P)$ — функция, обладающая свойствами:

1) $u(P)$ — субгармоническая в области $D$ пространства $p\geqslant 3$ измерений;

2) во всех точках границы, отличных от точек $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ некоторого счетного множества $E$, функция $u(P)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное.

3) для всякого $\varepsilon>0$ имеем $u(P)-\frac{\varepsilon}{\overline{PP_n}^{\,p-2}}\to-\infty$ всякий раз, как точка $P$ стремится к $P_n$. При этих условиях неравенство $u(P)\leqslant C$ выполняется в каждой точке области $D$, причем знак равенства в некоторой точке $P_0$ области $D$ может быть лишь в том случае, когда $u(P)$ есть тождественное постоянное, равное $C$.

Действительно, функция $\frac{1}{\overline{PP_n}^{\,p-2}}$ — гармоническая в области $D$; следовательно, функция

$$U_\varepsilon(P)=u(P)-\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\,\overline{PP_n}^{\,p-2}}$$

есть субгармоническая в области $D$. Вследствие условий 2) и 3) имеем $\overline{\lim}\,U_\varepsilon(P)\leqslant C$, когда точка $P$ стремится к какой-либо граничной точке области $D$.

Следовательно, в силу § 3, будет $U_\varepsilon(P)\leqslant C$ всюду в области $D$. Заставляя $\varepsilon$ стремиться к нулю, в пределе получим $u(P)\leqslant C$, ч. т. д.

[1]) Это предложение сообщено мне в письме Заксом (Saks).



## § 6. Приложения к угловым областям (плоский случай)

n° 1. Займемся приложениями обобщений принципа максимума к случаю, когда граница области содержит бесконечно удаленную точку.

Рассматривая сначала случай плоской области $D$, предположим, что функция $u(z)$ обладает свойствами:

1) *$u(z)$ — субгармоническая в области угла $D$, определяемого условиями $z=re^{i\varphi}$, где $|\varphi|<\frac{\alpha\pi}{2}$, $0<r<+\infty$;*

2) *во всякой точке $\zeta$ на конечном расстоянии, расположенной на сторонах угла, функция $u(z)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

3) *существует положительное число $k<\frac{1}{\alpha}$ такое, что выполняется неравенство $u(z)<r^k$, начиная с достаточно большого $r$.*

*При этих условиях неравенство $u(z)\leqslant C$ удовлетворяется во всякой точке угла $D$, причем знак равенства в некоторой точке $z_0$ может быть лишь в случае, когда $u(z)$ тождественно равна постоянному $C$.*

Для доказательства применим теорему § 4, рассматривая функцию $\omega(z)=e^{-r^{k'}\cos k'\varphi}$, где $k'$ — число, заключенное между $k$ и $\frac{1}{\alpha}$.

Очевидно, $\omega(z)$ — логарифмически-субгармоническая функция, меньшая единицы. Вследствие неравенств $|\varphi|<\frac{\alpha\pi}{2}$ и $k'<\frac{1}{\alpha}$ угол $k'\varphi$ всегда по абсолютной величине меньше некоторого угла $<\frac{\pi}{2}$, и, значит, $\cos k'\varphi>\eta$, где $\eta$ — некоторое положительное постоянное. Следовательно, имеем $\omega(z)<e^{-r^{k'}\eta}$. Начиная с достаточно большого $r$, будет

$$e^{u(z)}[\omega(z)]^\sigma<e^{-r^{k'}(\sigma\eta-r^{k-k'})},$$

последнее же стремится к нулю вместе с $\frac{1}{r}$. Так как условия теоремы § 4 выполнены, то предложение доказано.

n° 2. Полагая в доказанном предложении $u(z)=\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — голоморфная функция, получим как следствие теорему:

*Пусть $f(z)$ — функция аналитическая в области угла $D$, определяемого условиями $z=re^{i\varphi}$, где $|\varphi|<\frac{\alpha\pi}{2}$, $0<r<+\infty$, обладает свойствами:*

1) *во всякой точке $\zeta$ на конечном расстоянии, расположенной на сторонах угла, $|f(z)|$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

2) *существует положительное число $k<\frac{1}{\alpha}$ такое, что выполняется неравенство $|f(z)|<e^{r^k}$, начиная с достаточно большого $r$.*

*При этих условиях неравенство $|f(z)|\leqslant C$ удовлетворяется во всякой точке угла $D$, причем знак равенства в некоторой точке $z_0$ может быть лишь в случае, когда $f(z)$ тождественно равно постоянному модуля $C$* [2].

n° 3. Теорема, доказанная в этом параграфе, справедлива для угла величины $\alpha\pi$, любым образом расположенного в плоскости. Действительно, мы приходим к рассмотренному случаю посредством преобразования координат, которое не изменяет ни величину угла, ни свойство $k<\frac{1}{\alpha}$ и переводит субгармоническую функцию в другую субгармоническую функцию.

Она также верна, если область $D$ не есть угловая, а содержится в угле величины $\alpha\pi$, и граничные точки удовлетворяют тем же условиям, потому что доказательство не предполагает, чтобы граница состояла из сторон угла.

а только чтобы $\varphi$ было меньше $\frac{\alpha\pi}{2}$. Возникает вопрос, возможно ли условия теоремы заменить менее ограничительными и, в частности, заменить условие $k<\frac{1}{\alpha}$ посредством неравенства $k\leqslant\frac{1}{\alpha}$. Хотя очень простой пример субгармонической функции $u(z)=\frac{1}{2}r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}$ показывает, что это не так, можно тем не менее уточнить доказанную теорему, приняв условие, промежуточное между $k<\frac{1}{\alpha}$ и $k\leqslant\frac{1}{\alpha}$. Этот последний вопрос мы рассмотрим далее в § 8.

## § 7. Пространственный случай

Теорема предыдущего параграфа распространяется на случай, когда $u(P)$ есть субгармоническая функция в области пространственного угла $D$, определяемого условиями $x_1=r\cos\varphi$, $x_2=r\sin\varphi$, где $|\varphi|<\frac{\alpha\pi}{2}$, $0<r<+\infty$, а $x_3$, $x_4$, ..., $x_p$ — произвольны ($x_1$, $x_2$, ..., $x_p$ — координаты точки $P$), если эта функция обладает свойствами:

1) *во всякой точке на конечном расстоянии, расположенной на сторонах угла, функция $u(P)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

2) *существует положительное число $k<\frac{1}{\alpha}$ такое, что выполняется неравенство $M(r)<r^k$, начиная с достаточно большого $r$.*

*Здесь $M(r)$ обозначает верхнюю границу функции $u(P)$ в области $x_1=t\cos\varphi$, $x_2=t\sin\varphi$, где $|\varphi|<\frac{\alpha\pi}{2}$, $0<t\leqslant r$, а $x_3$, ..., $x_p$ произвольны.*

*При этих условиях неравенство $u(P)\leqslant C$ удовлетворяется во всякой точке области $D$, причем знак равенства в некоторой точке $P_0$ может быть лишь в случае, когда $u(P)$ тождественно равно постоянному $C$.*

Для доказательства следует применить рассуждения § 6, n° 1, заменяя теорему § 4 следующим предложением, вытекающим из § 19 гл. III.

Если субгармоническая функция внутри угла $D$ ограничена сверху и во всех точках на конечном расстоянии, расположенных на сторонах угла, не превосходит $C$, то она не превосходит $C$ всюду в области $D$.

Замечание. Возможно доказать [34] теорему, аналогичную, только что рассмотренной, вводя вместо функции $M(r)$, характеризующей цилиндрический порядок роста субгармонической функции в пространственном угле, функцию $\mathfrak{M}(\rho)$, определяющую сферический порядок роста.

Ограничиваясь пространством трех измерений, введем сферические координаты $\rho$, $\theta$, $\varphi$, полагая $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(\rho)$ верхнюю границу функции $u(x, y, z)$ в области $x=t\sin\theta\cos\varphi$, $y=t\sin\theta\sin\varphi$, $z=t\cos\theta$, где $|\varphi|<\frac{\alpha\pi}{2}$, $0<t\leqslant\rho$, $0<\theta<\pi$.

Пусть $u(x, y, z)$ — субгармоническая функция внутри угла $D$, образованного двумя полуплоскостями, проходящими через ось $OZ$, наклоненными друг к другу под углом $\alpha\pi$.

*Предположим, что $u(x, y, z)$ обладает свойствами:*

1) *во всякой точке на конечном расстоянии, расположенной на сторонах угла, функция $u(x, y, z)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

2) *существует положительное число $k<\frac{1}{\alpha}$ такое, что выполняется неравенство $\mathfrak{M}(\rho)<\rho^k$, начиная с достаточно большого $\rho$.*

*При этих условиях неравенство $u(x, y, z)\leqslant C$ удовлетворяется во всякой точке области $D$, причем знак равенства в некоторой точке $(x_0, y_0, z_0)$ может быть лишь в случае, когда $u(x, y, z)$ тождественно равна постоянному $C$.* Эта теорема уже неверна, если $k=\frac{1}{\alpha}$, как показывает пример гармонической функции $\rho^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}\sin^{\frac{1}{\alpha}}\theta$.



## § 8. Приложения к угловым областям — (продолжение) (плоский случай)

n° 1. Предложение § 6 возможно усилить следующим образом. *Пусть $u(z)$ — функция, обладающая свойствами:*

1) *$u(z)$ — субгармоническая внутри угла $D$, определяемого неравенствами $|\varphi|<\alpha\frac{\pi}{2}$, $0<r<+\infty$,* где $z=re^{i\varphi}$;

2) *во всякой точке $\zeta$ на конечном расстоянии, расположенной на сторонах угла, функция $u(z)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

3) *каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, имеем $u(z)<\varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}}$, начиная с достаточно большого $r$.*

*При этих условиях неравенство $u(z)\leqslant C$ удовлетворяется в любой точке угла, причем знак равенства в некоторой точке $z_0$ может быть только в случае, когда $u(z)$ тождественно равна постоянному $C$.*

Рассмотрим для доказательства логарифмически-субгармоническую функцию $\omega(z)=e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}}$, которая внутри угла остается меньше единицы.

Полагая $F_\sigma(z)=e^{u(z)}[\omega(z)]^\sigma$, мы получаем субгармоническую функцию в области угла $D$, каково бы ни было положительное постоянное $\sigma$. В окрестности всякой граничной точки, лежащей на конечном расстоянии, $F_\sigma(z)$, будучи меньше $e^{u(z)}$, тем более меньше любого числа большего постоянного $e^C$. Когда $z$ стремится к бесконечности, оставаясь на луче $\varphi=c$, $|c|<\frac{\alpha\pi}{2}$, внутреннем к рассматриваемому углу, то $F_\sigma(z)$ стремится к нулю, потому что $F_\sigma(z)=e^{-\left(\sigma\cos\frac{\varphi}{\alpha}\right)r^{\frac{1}{\alpha}}+u(z)}$ и $\sigma\cos\frac{\varphi}{\alpha}$ — положительное постоянное, а $u(z)<\varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}}$, приняв $\varepsilon<\sigma\cos\frac{\varphi}{\alpha}$. Обозначим через $C'$ верхнюю границу функции $F_\sigma(z)$ на луче $\varphi=0$, внутреннем к углу $D$, и через $C''$ наибольшее из двух постоянных $e^C$ и $C'$. Теорема § 6 прилагается к каждому из двух углов: $0<\varphi<\frac{\alpha\pi}{2}$ и $0>\varphi>-\frac{\alpha\pi}{2}$, откуда следует, что всюду в области $D$ имеем $F_\sigma(z)\leqslant C''$.

Покажем, что $C''=e^C$. В самом деле, $C'$ не может быть больше $e^C$, так как $F_\sigma(z)$, стремясь к нулю при неограниченном удалении точки $z$ по лучу $\varphi=0$, становится равной $C'$ в некоторой точке $z_0$ этого луча вследствие полунепрерывности сверху. Поэтому если $C'>e^C$, то точка $z_0$ не могла бы совпадать с началом координат, в окрестности которого функция $F_\sigma(z)$ меньше любого числа, большего $e^C$; следовательно, $F_\sigma(z)$ достигала бы наибольшего значения во внутренней точке $z_0$ области $D$ и была бы постоянным числом $C'$, что находится в противоречии с неравенством $F_\sigma(z)<e^C+\varepsilon$, удовлетворяющимся в окрестности любой граничной точки.

Итак, $F_\sigma(z) \leqslant e^C$ всюду внутри угла $D$, откуда находим $u(z) \leqslant C + \left(\sigma \cos \frac{\varphi}{\alpha}\right) r^{\frac{1}{\alpha}}$. Оставляя $z$ неподвижной точкой, а $\sigma$ заставляя стремиться к нулю, получим $u(z) \leqslant C$.

Если $u(z_0) = C$, то субгармоническая функция $u(z)$ достигала бы наибольшего значения внутри области и была бы тождественно равна постоянному $C$.

Примечание. Теорема верна для любой области, расположенной внутри угла величины $\alpha\pi$. Могло бы случиться, что множество точек области $D$, лежащих в одном из углов $0 < \varphi < \frac{\alpha\pi}{2}$ и $0 > \varphi > -\frac{\alpha\pi}{2}$, не было бы связным и состояло бы из множества связных областей. К тем из этих областей, все точки которых лежат на конечном расстоянии, применяется основной принцип § 3, и мы получаем $u(z) \leqslant C$. К области же, простирающейся в бесконечность, прилагается только что доказанная теорема, которая также дает $u(z) \leqslant C$.

n° 2. Полагая в доказанном предложении $u(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ функция комплексного переменного, получим, в частности, следующую теорему:

*Пусть $f(z)$ — аналитическая функция внутри угла $D$, определяемого условиями $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2}$, $0 < r < +\infty$, обладающая свойствами:*

1) *во всякой точке $z$ на конечном расстоянии, расположенной на сторонах угла, $|f(z)|$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

2) *каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, имеем $|f(z)| < e^{\varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}}}$, начиная с достаточно большого $r$.*

*При этих условиях неравенство $|f(z)| \leqslant C$ удовлетворяется в любой точке внутри угла, причем знак равенства в некоторой точке $z_0$ может быть только в случае, когда $f(z)$ тождественно равна постоянному модуля $C$* [2].

## § 9. Пространственный случай

Доказательство теоремы предыдущего параграфа непосредственно переносится на случай, когда $u(P)$ есть субгармоническая функция в области пространственного угла $D$, определяемого условиями $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, где $|\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2}$, $0 < r < +\infty$, $x_3, \ldots, x_p$ произвольны, если эта функция обладает свойствами:

1) *во всякой точке на конечном расстоянии, расположенной на сторонах угла, функция $u(P)$ не превосходит $C$, где $C$ — некоторое постоянное;*

2) *каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, имеем $M(r) < \varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}}$, начиная с достаточно большого $r$* [1]).

*При этих условиях неравенство $u(P) \leqslant C$ удовлетворяется в любой точке угла, причем знак равенства в некоторой точке $P_0$ может быть только в случае, когда $u(P)$ тождественно равна постоянному $C$.*

## § 10. Приложения к угловым областям — (окончание) (плоский случай)

n° 1. Третье условие теоремы § 6 возможно заменить более общим, а именно:

3) *существует последовательность кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, соединяющих две стороны угла, расстояния которых от начала координат*

[1]) Относительно определения $M(r)$ см. § 7.



*неограниченно возрастают, такие, что на этих кривых осуществляется неравенство $u(z) < r^k$, где $k$ — положительное постоянное $< \frac{1}{\alpha}$.*

*При этих условиях неравенство $u(z) \leqslant C$ удовлетворяется во всякой точке области $D$, причем знак равенства возможен только в случае, когда $u(z)$ тождественно равна постоянному $C$.*

Сохраняя обозначения § 6, докажем, что во всякой точке области $D$ осуществляется неравенство

$$F_\sigma(z) = e^{u(z)}[\omega(z)]^\sigma \leqslant e^C.$$

В самом деле, с одной стороны, в окрестности всякой граничной точки, лежащей на конечном расстоянии, $F_\sigma(z)$ меньше любого числа, большего $e^C$; с другой стороны, на всякой кривой $C_n$ имеем неравенство $F_\sigma(z) < e^{r^k - \sigma\eta r^{k'}}$, где $k < k' < \frac{1}{\alpha}$, вторая часть которого стремится к нулю, когда $r$ неограниченно возрастает. Пусть $z$ — точка области $D$; она является внутренней к области $D_n$, ограниченной сторонами угла и кривой $C_n$, причем $n$ взято достаточно большим, чтобы на $C_n$ функция $F_\sigma(z)$ была меньше $e^C$. Вблизи границы области $D_n$ функция $F_\sigma(z)$ будет меньше $e^C + \varepsilon$.

Прилагая основной принцип § 3 к этой области, получим неравенство $F_\sigma(z) \leqslant e^C$, откуда, заставляя $\sigma$ стремиться к нулю, найдем в пределе $e^{u(z)} \leqslant e^C$ или $u(z) \leqslant C$. Знак равенства может быть лишь в случае, когда $u(z)$ тождественно равна $C$, потому что субгармоническая функция, отличная от постоянного, не может достигать наибольшего значения во внутренней точке области. Доказательство сохраняется и приводится к теореме § 8, если заменим третье условие следующим: всякому $\varepsilon > 0$ возможно привести в соответствие последовательность кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, соединяющих две стороны угла, расстояния которых от начала координат неограниченно возрастают, таких, что на этих кривых осуществляется неравенство $u(z) < \varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}}$.

n° 2. Полагая, в частности, $u(z) = \ln|f(z)|$, получим следующую теорему:

*Пусть $f(z)$ — функция комплексного переменного $z$, обладающая свойствами:*

1) *$f(z)$ — голоморфная внутри угла $D$, определяемого условиями $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2}$, $0 < r < +\infty$;*

2) *во всякой граничной точке, лежащей на конечном расстоянии, функция $|f(z)|$ не больше некоторого постоянного $C$;*

3) *всякому $\varepsilon > 0$ возможно привести в соответствие последовательность кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, соединяющих две стороны угла, расстояния которых от начала координат неограниченно возрастают, таких, что на этих кривых осуществляется неравенство*

$$|f(z)| < e^{\varepsilon r^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

*При этих условиях неравенство $|f(z)| \leqslant C$ удовлетворяется во всякой точке угла $D$, причем знак равенства возможен только в случае, когда $f(z)$ тождественно равна постоянному модуля $C$* [2].

## § 11. Резюме

n° 1. Результаты § 6, 8, 10 возможно резюмировать так:

Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в области $D$, лежащей внутри угла величины $\alpha\pi$, отличная от постоянного, не превосходящая некоторого постоянного $C$ в любой граничной точке на конечном расстоянии. Тогда будет

одно из двух: либо во всякой точке области $D$ функция $u(z)$ меньше $C$, либо, каково бы ни было положительное число $k<\frac{1}{\alpha}$, возможно найти последовательность точек $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, стремящихся к бесконечности, такую, что $u(z_n)$ будет больше $r_n^k$, начиная с достаточно большого $n$.

Более того, существует даже последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q, \ldots$ стремящаяся к нулю, для каждого из которых возможно найти последовательность точек $z_1^{(q)}, z_2^{(q)}, \ldots, z_n^{(q)}, \ldots$ области $D$, стремящуюся к бесконечности, так, чтобы мы имели неравенство $u(z_n^{(q)})>\varepsilon_q [r_n^{(q)}]^{\frac{1}{\alpha}}$.

n° 2. В частности, полагая $u(z)=\ln|f(z)|$, получим теорему:

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области $D$, лежащей внутри угла величины $\alpha\pi$, отличная от постоянного, по модулю не превосходящая некоторого постоянного $C$ в любой граничной точке на конечном расстоянии.

Тогда будет одно из двух: либо во всякой точке области $D$ функция $|f(z)|$ меньше $C$, либо, каково бы ни было положительное число $k<\frac{1}{\alpha}$, возможно найти последовательность точек $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, стремящихся к бесконечности, такую, что $|f(z_n)|$ будет больше $e^{r_n^k}$, начиная с достаточно большого $n$.

Более того, существует даже последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q, \ldots$, стремящаяся к нулю, для каждого из которых возможно найти последовательность точек $z_1^{(q)}, z_2^{(q)}, \ldots, z_n^{(q)}, \ldots$ области $D$, стремящуюся к бесконечности, так, чтобы мы имели неравенство

$$|f(z_n^{(q)})|>e^{\varepsilon_q [r_n^{(q)}]^{\frac{1}{\alpha}}} \quad [2].$$

Аналогично результаты § 7, 9 возможно резюмировать так:

Пусть $u(P)$ — субгармоническая функция в угловой области $D$ пространства $p$ измерений ($p>2$), величины $\alpha\pi$, отличная от постоянного, не превосходящая некоторого постоянного $C$ в любой граничной точке на конечном расстоянии. Тогда будет одно из двух: либо во всякой точке области $D$ функция $u(P)$ меньше $C$, либо, каково бы ни было положительное число $k<\frac{1}{\alpha}$, возможно найти последовательность точек $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, стремящихся к бесконечности, такую, что $u(P_n)$ будет больше $r_n^k$, начиная с достаточно большого $n$.

Более того, существует даже последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q, \ldots$, стремящаяся к нулю, для каждого из которых возможно найти последовательность точек $P_1^{(q)}, P_2^{(q)}, \ldots, P_n^{(q)}, \ldots$ области $D$, стремящуюся к бесконечности, так, чтобы мы имели неравенство

$$u(P_n^{(q)})>\varepsilon_q [r_n^{(q)}]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

## § 12. Субгармонические функции во всей плоскости

n° 1. *Обозначим через $\rho$ и назовем порядком функции $u(z)$, субгармонической во всей плоскости, наименьшее число, обладающее свойством:*

*При любом $\varepsilon>0$ неравенство $u(z)<r^{\rho+\varepsilon}$ удовлетворяется, начиная с достаточно большого $r=|z|$.*

*Если такого числа не существует, то, скажем, что наша функция бесконечного порядка.*

В силу § 6 имеем предложение:

*Если функция $u(z)$, субгармоническая во всей плоскости, конечного порядка $\rho$, ограничена сверху на двух лучах, выходящих из начала координат, образующих угол $\alpha\pi$, меньший, чем $\frac{\pi}{\rho}$, то эта функция ограничена сверху во всем угле.*



В частности, полагая $u(z)=\ln|f(z)|$, получим теорему:

*Если целая функция $f(z)$, конечного порядка $\rho$, ограничена на двух лучах, выходящих из начала координат, образующих угол $\alpha\pi$, меньший, чем $\frac{\pi}{\rho}$, то эта функция ограничена во всем угле.*

n° 2. На основании вышеуказанной теоремы, мы получаем:

I. Если функция $u(z)$, субгармоническая во всей плоскости, ограничена сверху на лучах, проходящих через общее начало, каждый из которых составляет со смежным угол, не больший, чем $\alpha\pi$, то возможно одно из двух: или порядок функции, по крайней мере, равен $\frac{1}{\alpha}$, или она тождественно равна постоянному. Последнее заключение сделано на основании того, что функция, субгармоническая во всей плоскости и ограниченная сверху, есть тождественная константа (§ 7 гл. III).

II. Предположим, что функция $u(z)$, субгармоническая во всей плоскости, была бы ограничена сверху на всяком луче, выходящем из общего начала, или, более обще, на каждом из бесконечного множества лучей таких, что имеется хотя бы один луч во всяком угле произвольно малой величины. Тогда, если наша функция не является константой, она бесконечного порядка.

n° 3. В частности, полагая $u(z)=\ln|f(z)|$, имеем следующие заключения:

I. Если целая функция $f(z)$ ограничена на лучах, проходящих через общее начало, каждый из которых составляет со смежным угол, не больший, чем $\alpha\pi$, то возможно одно из двух: или порядок функции, по крайней мере, равен $\frac{1}{\alpha}$, или она тождественно равна постоянному.

II. Предположим, что целая функция $f(z)$ была бы ограничена на всяком луче, выходящем из общего начала, или, более обще, на каждом из бесконечного множества лучей таких, что имеется хотя бы один луч во всяком угле произвольно малой величины. Тогда, если наша функция не является константой, она бесконечного порядка.

В теории целых функций существуют примеры функций, ограниченных на каждом луче, выходящем из начала координат [2].

## § 13. Субгармонические функции во всем пространстве

Обозначим через $\rho$ и назовем цилиндрическим порядком функции $u(P)$, субгармонической во всем пространстве точек $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, наименьшее число, обладающее свойством:

При любом $\varepsilon>0$ неравенство $M(r)<r^{\rho+\varepsilon}$ удовлетворяется, начиная с достаточно большого $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Если такого числа не существует, то скажем, что наша функция бесконечного цилиндрического порядка [1]).

В силу § 7 имеем предложение:

Если функция $u(P)$, субгармоническая во всем пространстве, цилиндрического конечного порядка $\rho$, ограничена сверху на двух полуплоскостях, проходящих через ребро $r=0$, образующих угол $\alpha\pi$, меньший, чем $\frac{\pi}{\rho}$, то эта функция ограничена сверху во всем угле.

На основании этой теоремы мы получаем:

I. Если функция $u(P)$, субгармоническая во всем пространстве, ограничена сверху на полуплоскостях, проходящих через общее ребро $r=0$, каждая из которых составляет со смежной угол, не больший, чем $\alpha\pi$, то возможно одно

---

[1]) Здесь $M(r)$ обозначает верхнюю границу функции $u(P)$ внутри цилиндра радиуса $r$.

из двух: или цилиндрический порядок функции, по крайней мере, равен $\frac{1}{\alpha}$, или она ограничена сверху во всем пространстве.

Как известно (гл. III, § 7), существуют субгармонические функции, ограниченные во всем пространстве, не обращающиеся в константу.

II. Предположим, что функция $u(P)$, субгармоническая во всем пространстве, была бы ограничена сверху на всякой полуплоскости, проходящей через общее ребро, или, более обще, на каждой из бесконечного множества полуплоскостей таких, что имеется хотя бы одна полуплоскость внутри всякого угла произвольно малой величины. Тогда, если наша функция не является ограниченной сверху во всем пространстве, то она бесконечного цилиндрического порядка.

Замечание. Аналогичные теоремы справедливы, если вместо цилиндрического порядка субгармонической функции в пространстве принять ее сферический порядок [34].

---

ГЛАВА V

# ПРИНЦИП ГАРМОНИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТЫ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

## § 1. Принцип гармонической мажоранты

n° 1. *Пусть $u(P)$ — функция, обладающая свойствами:*

1) *$u(P)$ — субгармоническая в области $D$;*

2) *существует функция $G(P)$, гармоническая в области $D$, такая, что в окрестности всякой граничной точки $u(P) - G(P)$ меньше любого положительного числа, т. е. всякой граничной точке $\overline{P}$ и всякому $\varepsilon > 0$ соответствует шар с центром $\overline{P}$ такой, что в любой точке области $D$, принадлежащей этому шару, удовлетворяется неравенство $u(P) < G(P) + \varepsilon$.*

*При этих условиях неравенство $u(P) \leqslant G(P)$ удовлетворяется во всякой точке области $D$, причем знак равенства в некоторой точке $P_0$ может быть лишь в случае, когда $u(P) \equiv G(P)$.*

Применяя основной принцип § 3 гл. IV к субгармонической функции $u(P) - G(P)$, мы убеждаемся в справедливости формулированного предложения.

## § 2. Неравенство Неванлинны (Nevanlinna) и Островского

n° 1. Пусть $D$ есть односвязная область, граница которой разделена на конечное число поверхностей $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Обозначим через $\omega_i(P)$ ограниченную гармоническую функцию в области $D$, равную единицена на $S_i$ и нулю на остальной части границы[1]).

Сумма $\omega_1(P) + \omega_2(P) + \ldots + \omega_n(P)$ есть значение в точке $P$ гармонической функции, равной единице на $S_1, S_2, \ldots, S_n$; следовательно, эта сумма тождественно равна единице. Заметив это, рассмотрим функцию $u(P)$, субгармоническую в области $D$, и предположим, что во всякой точке на $S_i$ функция $u(P)$ не больше $M_i$, где $M_i$ — некоторая константа.

По принципу гармонической мажоранты (§ 1) $u(P)$ будет не больше гармонической функции, равной $M_1$ на $S_1$, $M_2$ на $S_2, \ldots, M_n$ на $S_n$. Так как эта функция в точке $P$ равна $M_1\omega_1(P) + \ldots + M_n\omega_n(P)$, то имеем

$$u(P) \leqslant M_1\omega_1(P) + \ldots + M_n\omega_n(P), \tag{1}$$

---

[1]) Функция $\omega_i(P)$ однозначно определяется по условиям: a) $\omega_i(P)$ гармоническая и ограниченная в области $D$; b) $\omega_i(P)$ равна 1 на $S_i$ и 0 на остальной части границы.

где $\omega_1(P)+\omega_2(P)+\ldots+\omega_n(P)\equiv 1$, причем знак равенства в некоторой точке $P_0$ может быть только в том случае, когда

$$u(P)\equiv M_1\omega_1(P)+\ldots+M_n\omega_n(P).$$

Ради простоты возьмем $n=2$ и положим $M_1=M$, $M_2=m$, $\omega_1(P)=\omega(P)$, откуда $\omega_2(P)=1-\omega(P)$. Тогда неравенство (1) примет вид:

$$u(P)\leqslant M\omega(P)+m\,[1-\omega(P)]. \qquad (1')$$

Пусть точка $P$ лежит в замкнутой области $\overline{D'}$, внутренней к области $D$. Тогда гармоническая функция $\omega(P)$ остается все время заключенной в пределах $s$ и $t$ соответственно больше нуля и меньше единицы, т. е.

$$0<s\leqslant\omega(P)\leqslant t<1.$$

Если $M\geqslant m$, то во всякой точке области $\overline{D'}$ удовлетворяется вследствие (1′) неравенство

$$u(P)\leqslant(M-m)\,\omega(P)+m\leqslant tM+(1-t)\,m. \qquad (2)$$

Если $M<m$, то во всякой точке области $\overline{D'}$ удовлетворяется неравенство

$$u(P)\leqslant sM+(1-s)\,m. \qquad (3)$$

Неравенства (2) и (3) выражают *предложение о двух постоянных*. Постоянные $s$ и $t$ зависят только от областей $D$ и $\overline{D'}$, и от того, на какие два куска разбита граница области $D$, но не зависят ни от вида функции $u(P)$, ни от точки $P$, $P\subset\overline{D'}$, ни от $M$, ни от $m$. Существенно важно заметить, что имеются различные неравенства (2) и (3), смотря по тому, будет ли $M>m$ или $M<m$.

n° 2. В частности, полагая $u(z)=\ln|f(z)|$, получаем следующее предложение, принадлежащее Неванлинне и Островскому:

*Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в односвязной области $D$, граница которой состоит из двух частей $S_1$ и $S_2$. Предположим, что во всякой точке границы $S_1$ модуль функции не превосходит $M$, а во всякой граничной точке на $S_2$ модуль функции не превосходит $m$. Пусть, далее, $\overline{D'}$ — любая замкнутая область принадлежащая области $D$. Существуют два постоянных $s$ и $t$, $0<s<t<1$, таких, что во всякой точке области $\overline{D'}$ выполняется неравенство*

$$|f(z)|\leqslant\left(\frac{M}{m}\right)^t\cdot m,\quad \text{если } M\geqslant m,$$

и

$$|f(z)|\leqslant\left(\frac{M}{m}\right)^s\cdot m,\quad \text{если } M<m.$$

n° 3. Введенная здесь гармоническая функция $\omega(P)$ имеет простое геометрическое истолкование в случае плоскости. В самом деле, выполним конформное отображение области $D$ на единичный круг так, чтобы точка $z$ области $D$ перешла в начало координат. Тогда, очевидно,



значение $\omega(z)$, равное значению преобразованной гармонической функции в центре круга, по теореме Гаусса совпадает со средним арифметическим значений преобразованной функции на окружности единичного круга. Замечая, что на части окружности, являющейся отображением дуги $S_1$ преобразованная функция равна единице, а на остальной части окружности равна нулю, мы заключаем:

*Значение $2\pi\omega(z)$ равно длине дуги единичной окружности, служащей отображением дуги $S_1$ при конформном преобразовании области $D$ на единичный круг с переводом точки $z$ в центр круга.*

## § 3. Лемма Карлемана (Carleman) [2]

n° 1. Оценки, установленные в предыдущем параграфе, верны для всякой области $\overline{D'}$, принадлежащей вместе с границей к данной области $D$. Эти неравенства не дают оценок всюду в области $D$. Карлеман поставил задачу получить для субгармонических функций оценки сверху всюду в области $D$. С этой целью рассмотрим в плоскости $z=re^{i\varphi}$ область $D$ (черт. 1), ограниченную двумя сторонами $OA$ и $OB$ угла $\alpha\pi$, имеющего действительную ось биссектрисой и дугой $ACB$ кривую Жордана (Jordan).

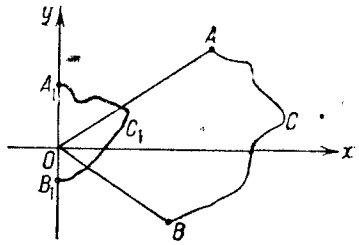
Пусть $u(z)$ — функция, субгармоническая в области $D$, во всех точках $OA$ и $OB$ не превосходящая $M$, а в точках дуги $ACB$ не превосходящая $m$, $m\leqslant M$.

Согласно предыдущему параграфу мы имеем

$$u(z)\leqslant M\omega(z)+m\,[1-\omega(z)]$$

или

$$u(z)-M\leqslant(m-M)\big(1-\omega(z)\big), \qquad (4)$$




Черт. 1.

где $\omega(z)$ обозначает гармоническую функцию в области $D$, равную единице на сторонах угла и нулю на дуге $ACB$. Чтобы построить функцию $\omega(z)$, выполним преобразование $z_1=z^{\frac{1}{\alpha}}$, которое переводит область $D$ в область $D_1$, ограниченную сегментом $A_1B_1$ мнимой оси и дугой $A_1C_1B_1$ кривой Жордана. Функция $\omega(z)$ при преобразовании переходит в функцию $\omega_1(z_1)$, гармоническую в области $D_1$, равную единице на $A_1B_1$ и нулю на $A_1C_1B_1$. Далее, $\omega_1(z_1)=\omega(z)$ есть гармоническая функция в области $D_1$, равная единице на $A_1B_1$ и нулю на $A_1C_1B_1$. Чтобы иметь верхнюю границу функции $u(z)$, нужно оценить вторую часть неравенства (4), и мы видим, что достаточно мажорировать $\omega(z)$, так как $m\leqslant M$. Очевидно, на границе области $D_1$, а значит, и внутри ее функция $\omega_1(z_1)$ меньше гармонической функции $\Omega_1(z_1)$, равной единице на мнимой оси и нулю на прямой $x_1=\mathrm{Reel}\,z_1=R_1=R^{\frac{1}{\alpha}}$, где $R$ обозначает наибольшее из расстояний точек дуги $ACB$ от начала координат.

Очевидно, для $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ имеем

$$\Omega_1(z_1) = \frac{R_1 - x_1}{R_1} = 1 - \frac{r_1}{R_1}\cos\varphi_1$$

и, следовательно, $1 - \omega(z) \geqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}$, после чего неравенство (4) примет вид:

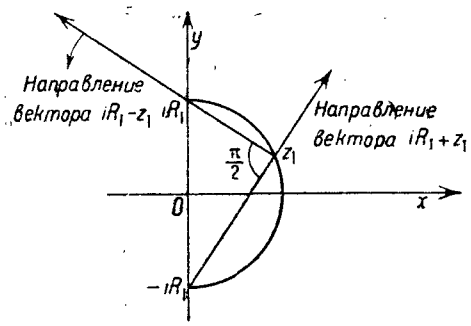
$$u(z) \leqslant M + (m - M)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}. \qquad (C)$$

n° 2. Полагая в неравенстве (C), в частности, $u(z) = \ln|f(z)|$, получим предложение [2]:

*Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области $D$, во всех точках $OA$ и $OB$ по модулю не превосходящая $M$, а в точках дуги $ACB$ по модулю не больше $m$, $m \leqslant M$.*

*При этих условиях во всякой точке $z = re^{i\varphi}$ области $D$ имеем:*

$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{m}{M}\right)^{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}}. \qquad (C')$$




Черт. 2.

Как следствие неравенства (C′) отметим предложение:

*Если аналитическая функция в области $D$, на непрерывной дуге границы, равномерно стремится к нулю, то она тождественно равна нулю в области $D$.*

n° 3. Чтобы получить лучшую оценку функции $u(z)$, проведем дугу окружности радиуса $R$ с центром в точке $O$ до пересечения с $OA$ и $OB$ и будем рассматривать область $D$ как часть построенной области кругового сектора. Очевидно, гармоническая функция $\Omega(z)$ внутри кругового сектора, равная единице на радиусах и нулю на дуге окружности, будет мажорантой функции $\omega(z)$ на границе области $D$, а значит, и внутри $D$. Для построения гармонической мажоранты $\Omega(z)$ выполним преобразование $z_1 = z^{\frac{1}{\alpha}}$.

Функция $\Omega(z)$ перейдет в $\Omega_1(z_1)$, которая будет гармонической внутри полукруга, равна единице на его диаметре $(-iR_1, +iR_1)$ и нулю на полуокружности. Очевидно, из геометрических соображений (черт. 2), что

$$\Omega_1(z_1) = 1 - \frac{2}{\pi}\arg\frac{iR_1 - z_1}{iR_1 + z_1},$$

а следовательно,

$$\Omega(z) = 1 - \frac{2}{\pi}\arg\frac{iR^{\frac{1}{\alpha}} - z^{\frac{1}{\alpha}}}{iR^{\frac{1}{\alpha}} + z^{\frac{1}{\alpha}}}.$$



Таким образом

$$1 - \omega(z) \geqslant 1 - \Omega(z) = \frac{2}{\pi}\arg\frac{iR^{\frac{1}{\alpha}} - z^{\frac{1}{\alpha}}}{iR^{\frac{1}{\alpha}} + z^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Вспомнив неравенство (4), а также, что $m \leqslant M$, получим

$$u(z) \leqslant M + (m - M)\frac{2}{\pi}\Phi, \qquad (5)$$

где

$$\Phi = \arg\frac{iR^{\frac{1}{\alpha}} - z^{\frac{1}{\alpha}}}{iR^{\frac{1}{\alpha}} + z^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad 0 < \Phi < \frac{\pi}{2}.$$

Легко вычислением обнаружить, что

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{2\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}, \qquad (6)$$

где $0 < \Phi < \frac{\pi}{2}$.

n° 4. Возникает естественно вопрос, как оценивается сверху субгармоническая функция $u(z)$, если $m > M$. Исходя из того же неравенства (4), мы в этом случае должны оценить $\omega(z)$ снизу. Построим круговой сектор с углом $\alpha\pi$ радиуса $R'$, $R'$ есть наименьшее расстояние дуги $ACB$ от начала координат. Очевидно, этот круговой сектор принадлежит области $D$ и функция $\Omega'(z)$ гармоническая внутри построенного сектора, равная единице на прямолинейных сторонах и нулю на дуге окружности, будет минорантой для функции $\omega(z)$ на границе этого сектора, а значит, и внутри его. Итак, имеем при $|z| < R' : \omega(z) \geqslant \Omega'(z)$ или $1 - \omega(z) \leqslant 1 - \Omega'(z)$.

Заметив, что

$$\Omega'(z) = 1 - \frac{2}{\pi}\arg\frac{iR'^{\frac{1}{\alpha}} - z^{\frac{1}{\alpha}}}{iR'^{\frac{1}{\alpha}} + z^{\frac{1}{\alpha}}},$$

получим из неравенства (4)

$$u(z) \leqslant M + (m - M)\frac{2}{\pi}\Phi', \qquad (7)$$

где

$$\Phi' = \arg\frac{iR'^{\frac{1}{\alpha}} - z^{\frac{1}{\alpha}}}{iR'^{\frac{1}{\alpha}} + z^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Это неравенство (7) для случая $m > M$ дает оценку функции $u(z)$ в части области $D$, для которой $|z| < R'$; в то время как неравенство (5) для $m \leqslant M$ справедливо всюду в области $D$.

Вычисления дают для $\Phi'$:

$$\operatorname{tg}\Phi' = \frac{2\left(\frac{r}{R'}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}}{1-\left(\frac{r}{R'}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}, \quad 0<\Phi'<\frac{\pi}{2}.$$

## § 4. Лемма Карлемана в пространстве

n° 1. Переходя к случаю пространства, рассмотрим область $D$, ограниченную двумя полуплоскостями $x_2 = \pm x_1 \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$, проходящими через ось $x_3$, угол между которыми равен $\pi\alpha$, двумя горизонтальными плоскостями $x_3 = \text{const}$, и непрерывной поверхностью.

Пусть $u(P)$ — функция, обладающая свойствами:

1) $u(P)$ — субгармоническая в области $D$;

2) в точках плоскостей $x_2 = \pm x_1 \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$ она не превосходит $M$, а в остальных точках границы не больше $m$, $m \leqslant M$.

Обозначим через $R$ наибольшее расстояние от оси $x_3$ до точек кривой поверхности и построим область $D_1$, ограниченную цилиндрической поверхностью, с осью $x_3$ радиуса $R$ и теми же плоскостями, что и область $D$.

Функция $\Omega(P) = 1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}$, где $x_1+ix_2 = re^{i\varphi}$, будет гармонической в области $D_1$, равной единице на плоскостях $x_2 = \pm x_1 \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$ и положительной на остальной части границы области $D_1$.

Отправляясь от неравенства (4)

$$u(P) \leqslant M + (m-M)\big(1-\omega(P)\big),$$

мажорируем $\omega(P)$ — гармоническую функцию в области $D$, равную единице на плоскостях $x_2 = \pm x_1 \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$ и нулю на остальной части ее границы. Очевидно, $\omega(P) \leqslant \Omega(P)$ на границе области $D$, а значит, и внутри $D$, т. е.

$$1-\omega(P) \geqslant \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}.$$

Итак, из неравенства (4) вытекает:

Всюду в области $D$ имеет место неравенство

$$u(P) \leqslant M + (m-M)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\varphi}{\alpha}.$$

Последнее неравенство представляет собой аналог леммы Карлемана для случая пространства трех измерений.

n° 2. В пространстве возможно установить аналогичные оценки для иных областей.

Рассмотрим область $D$, ограниченную

1) двумя коническими поверхностями, полученными от вращения около оси $x_3$ лучей $x_3 = \pm x_1 \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}$,

2) двумя любыми плоскостями, проходящими через ось $x_3$,

3) произвольной непрерывной поверхностью.



Обозначим через $R$ наибольшее расстояние от начала координат до точек кривой поверхности и положим

$$x_1 = \rho\cos\theta\cos\psi, \quad x_2 = \rho\cos\theta\sin\psi, \quad x_3 = \rho\sin\theta.$$

Пусть $u(P)$ — субгармоническая функция в области $D$, не превосходящая $M$ во всех точках конических поверхностей и не превосходящая $m$ в каждой точке остальной части границы.

Считая $m \leqslant M$, установим неравенство

$$u(P) \leqslant M + (m-M)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\theta}{\alpha}$$

для всех точек области $D$.

Попрежнему будем отправляться от соотношения (4), где $\omega(P)$ гармоническая функция в области $D$, равная единице на конических поверхностях и нулю на остальной части границы. Чтобы мажорировать $\omega(P)$, построим функцию

$$\Omega(P) = 1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\theta}{\alpha}$$

и рассмотрим область $D_1$, ограниченную сферической поверхностью с центром $O$ радиуса $R$ двумя коническими поверхностями и двумя плоскостями (конические поверхности и плоскости те же, что и для границы области $D$). Очевидно, функция $\Omega(P)$ равна единице на конических поверхностях и положительна на остальной части границы области $D_1$. С другой стороны, легко обнаружить, что она супергармоническая в области $D_1$. В самом деле, полагая $u = \Omega(P)$ в диференциальном параметре Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

найдем

$$\Delta\Omega(P) = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}\cos\frac{\theta}{\alpha}\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{\alpha}\right) < 0.$$

Сравнивая $\omega(P)$ и $\Omega(P)$ на границе области $D$, мы видим, что $\omega(P) \leqslant \Omega(P)$; значит, то же неравенство имеет место и внутри области $D$. Следовательно, в области $D$ будет

$$1-\omega(P) \geqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\theta}{\alpha},$$

и окончательно получим из неравенства (4)

$$u(P) \leqslant M + (m-M)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\theta}{\alpha}.$$

## § 5. Понятие наилучшей гармонической мажоранты в полной области

n° 1. Имея субгармоническую функцию $u(P)$ в области $D$, мы можем построить ее наилучшую гармоническую мажоранту $G_r(P)$ для любой области $\overline{D}_r'$, принадлежащей $D$ [1]). Предположим теперь, что

[1]) В случае непрерывности данной субгармонической функции функция $G_r$ будет представлять решение задачи Дирихле для области $\overline{D}_r'$ по граничным значениям $u$.

область $\overline{D}_r'$, возрастая, стремится к предельной области $D$. Последовательность гармонических функций $G_r(P)$ в каждой точке $P$ области $D$ будет неубывающей, потому что если $r_1 < r_2$ и $P \subset \overline{D}'_r$, то $G_{r_2}$, наилучшая гармоническая мажоранта для области $\overline{D}'_{r_2}$, является в то же время мажорантой для области $\overline{D}'_{r_1}$ и, следовательно, не может быть меньше наилучшей гармонической мажоранты для области $\overline{D}'_{r_1}$, т. е. $G_{r_2} \geqslant G_{r_1}$. По теореме Гарнака (гл. I, § 3) возможно одно из двух: либо предельная функция последовательности $G_r$ есть гармоническая функция $G$ в области $D$, либо эта предельная функция тождественно равна $+\infty$.

В первом случае мы скажем, что данная субгармоническая функция имеет в области $D$ наилучшую гармоническую мажоранту $G(P)$ [1]), во втором случае, — что она не имеет гармонической мажоранты в полной области $D$. Итак, *функции субгармонические в области $D$ можно разбить на два класса: одни имеют гармонические (а значит, и наилучшие) мажоранты во всей области $D$, другие — не имеют.* В гл. III, § 7 мы показали, что для того чтобы субгармоническая функция $u(P)$ внутри шара $\overline{OP} < R$ имела гармоническую мажоранту, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(P)\,d\sigma = O(1),$$

где интегрирование распространено по поверхности сферы $\sigma$ радиуса $\rho < R$ с центром в точке $O$.

## § 6. Критерий разложимости субгармонической функции на сумму двух слагаемых [17; 9]

n° 1. Рассмотрим функцию $u(P)$, субгармоническую в области $D$, и спросим себя, при каком условии она представима в виде

$$u(P) = \overline{u}(P) + h(P), \tag{I}$$

где $\overline{u}(P)$ — субгармоническая отрицательная функция, а $h(P)$ — гармоническая положительная функция. Для вывода этого условия положим

$$u^+(P) = u(P), \quad \text{если} \quad u(P) \geqslant 0,$$
$$u^+(P) = 0, \quad \text{если} \quad u(P) < 0.$$

Очевидно, $u^+(P)$ как верхняя огибающая функций $u(P)$ и нуля есть субгармоническая функция. Легко видеть, что *необходимым и достаточным условием для разложения* (I) *является то, чтобы субгармоническая функция $u^+(P)$ имела гармоническую мажоранту во всей области $D$.* Когда областью $D$ является шар, $\overline{OP} < R$, наше условие выразится так:

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u^+(P)\,d\sigma = O(1), \tag{II}$$

где интегрирование распространено по поверхности сферы $\sigma$ с центром $O$ радиуса $\rho < R$ (§ 5).

Считая, в частности, $\overline{u}(P)$ гармонической функцией в области $D$, мы видим, что вышеустановленное условие необходимо и достаточно для представления гармонической функции в виде разности двух положительных гармонических функций.

Полезно отметить, что условие (II) для субгармонической функции $u(P)$ внутри шара эквивалентно условию

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma |u(P)|\,d\sigma = O(1), \tag{II'}$$

где интегрирование распространено по сфере $\sigma$ с центром $O$ радиуса $\rho < R$.

В самом деле, соотношение (II) вытекает из (II'). Покажем, что и, обратно, соотношение (II') следует из (II), если $u(P)$ — субгармоническая функция. Для этого представим $u(P)$ в виде

$$u(P) = u^+(P) - u_+(P),$$

где

$$u_+(P) = 0, \quad \text{если} \quad u(P) \geqslant 0,$$
$$u_+(P) = -u(P), \quad \text{если} \quad u(P) < 0.$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$|u(P)| = u^+(P) + u_+(P).$$

Заметив, что

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma |u(P)|\,d\sigma = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u^+(P)\,d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u_+(P)\,d\sigma,$$

приведем вопрос к доказательству ограниченности выражения

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u_+(P)\,d\sigma.$$

Это же последнее вытекает немедленно из соотношения

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(P)\,d\sigma = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u^+(P)\,d\sigma - \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u_+(P)\,d\sigma,$$

если заметим, что левая часть есть функция, не убывающая относительно $\rho$.

n° 2. Перепишем теперь соотношение (I) в виде

$$e^{u(P)} = e^{\overline{u}(P)} \cdot e^{h(P)} = \frac{e^{\overline{u}(P)}}{e^{-h(P)}}. \tag{I'}$$

[1]) Если бы $G(P)$ не была наилучшей мажорантой, то существовала бы точка $P_0$, в которой $G(P_0) > U(P_0)$, где $U(P)$ — некоторая гармоническая мажоранта в области $D$. Отсюда вытекает, что для некоторого $r$ будет $G_r(P_0) > U(P_0)$, что невозможно, так как $U(P)$ есть подавно мажоранта для области $\overline{D}_r'$.

Положим, далее, в этом разложении

$$e^{u(P)} = U(P), \quad e^{\bar{u}(P)} = U_1(P), \quad e^{-h(P)} = H_1(P)$$

и заметим, что $U(P)$ и $U_1(P)$ — логарифмически-субгармонические функции в области $D$, а $H_1(P)$ — логарифмически-гармоническая, причем $U_1(P) < 1$, $H_1(P) < 1$.

Тогда соотношение (I′) примет вид:

$$U(P) = \frac{U_1(P)}{H_1(P)}, \tag{I''}$$

и из предыдущего мы будем иметь *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы логарифмически-субгармоническая функция в области D могла быть рассматриваема как отношение ограниченных логарифмически-субгармонической и логарифмически-гармонической функций. Это условие будет:* $\ln^+ U(P)$ *имеет гармоническую мажоранту в области D.*

Полагая, в частности, в соотношении (1″)

$$U(P) = |f(z)|, \quad U_1(P) = |g(z)|, \quad H_1(P) = |h(z)|,$$

где $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — голоморфные функции в области $D$, причем $|g(z)| < 1$, $|h(z)| < 1$ и $h(z) \neq 0$, получим *необходимое и достаточное условие для представления голоморфной функции* $f(z)$ *в виде отношения* $\frac{g(z)}{h(z)}$ *двух ограниченных голоморфных функций, данное Неванлинной. Это условие будет:* $\ln^+ |f(z)|$ *имеет гармоническую мажоранту в области D. В случае круга* $|z| < R$ *условие запишется в виде*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\theta})|\, d\theta = O(1), \qquad (\rho < R).$$

Известно, что Неванлинна решил более общую задачу, установив необходимое и достаточное условие для представления мероморфной функции в области в виде отношения двух ограниченных голоморфных функций в этой области.

Заметив, что из соотношения

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

где $g(z)$ и $h(z)$ — голоморфные функции в области $D$, $|g(z)| < 1$, $|h(z)| < 1$, следует

$$\ln |f(z)| = \ln |g(z)| - \ln |h(z)|,$$

и, обратно, мы заключаем:

Задача Неванлинны есть частный случай проблемы об условии представимости функции $U(P)$ $[U(P) = \ln |f(z)|]$ в виде суммы субгармонической отрицательной функции $U_1(P)$ $[U_1(P) = \ln |g(z)|]$ и супергармонической положительной функции

$$V_1(P)\ [V_1(P) = -\ln |h(z)|].$$



Однако решение этой проблемы, обобщающей задачу, разобранную в этом параграфе, не может быть дано лишь методом гармонической мажоранты, а требует применения аналитического аппарата субгармонических функций. Оно будет рассмотрено во второй части этого сочинения.

n° 3. Метод гармонической мажоранты позволяет нам решить также следующую задачу:

При каком условии субгармоническая функция $u(P)$ в области $D$ представима в виде

$$u(P) = \bar{u}(P) + H(P),$$

где $\bar{u}(P)$ — субгармоническая отрицательная функция, а $H(P)$ — гармоническая функция произвольного знака?

Очевидно, необходимо и достаточно для возможности такого разложения, чтобы $u(P)$ имела гармоническую мажоранту в области $D$.

Когда областью $D$ является шар, $\overline{OP} < R$, наше условие выразится так:

$$\frac{1}{\sigma} \int_\sigma u(P)\, d\sigma < C,$$

где интегрирование распространено по поверхности сферы $\sigma$ с центром $O$ радиуса $\rho < R$ (§ 5).

n° 4. Перепишем теперь наше разложение в виде

$$e^{u(P)} = e^{\bar{u}(P)} \cdot e^{H(P)}.$$

Положим, далее, в этом разложении

$$e^{u(P)} = U(P), \quad e^{\bar{u}(P)} = U_1(P), \quad e^{H(P)} = H_1(P)$$

и заметим, что $U(P)$ и $U_1(P)$ — логарифмически-субгармонические функции в области $D$, а $H_1(P)$ — логарифмически-гармоническая, причем $U_1(P) < 1$.

Тогда будем иметь

$$U(P) = U_1(P) \cdot H_1(P),$$

и, следовательно, *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы логарифмически-субгармоническая функция в области D могла быть рассматриваема как произведение ограниченной логарифмически-субгармонической на логарифмически-гармоническую функцию, есть:*

$\ln U(P)$ *имеет гармоническую мажоранту в области D.*

n° 5. Полагая, в частности, $U(P) = |f(z)|$, $U_1(P) = |\varphi(z)|$, $H_1(P) = |\psi(z)|$, где $f(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — голоморфные функции в области $D$, причем $|\varphi(z)| < 1$ и $\psi(z) \neq 0$, получим *необходимое и достаточное условие для представления голоморфной функции* $f(z)$ *в виде произведения* $\varphi(z)\,\psi(z)$ *двух голоморфных функций* $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$, *из которых первая предполагается ограниченной, а вторая — не обращающейся в нуль в области D. Это условие будет:* $\ln |f(z)|$ *имеет гар-*

*моническую мажоранту в области D.* В случае круга $|z|<R$ наше условие запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\theta})|\,d\theta<C,\quad \rho<R.$$

## § 7. Некоторые экстремальные задачи теории субгармонических функций [23; 2]

n° 1. Пусть $D$ есть односвязная область плоскости комплексного переменного $z$ и $\rho$ — *ее радиус конформности в точке* $z_0$, т. е. $\rho=\frac{1}{|F'(z_0)|}$, где $\zeta=F(z)$ реализует взаимно однозначное и конформное отображение области $D$ на единичный круг с переводом точки $z_0$ в начало координат.

*Рассмотрим семейство* $\{u(z)\}$ *всех функций, супергармонических в области D, представляемых в виде*

$$u(z)=\ln\frac{\rho}{|z-z_0|}+U(z)\ ^{1)},\tag{8}$$

*где* $U(z)$ — *произвольная функция, супергармоническая в области D, равная нулю в точке* $z_0$.

Для этого семейства $\{u(z)\}$ ставится следующая задача:

I. *Показать, что нижние границы функций* $u(z)$ *достигают максимума для единственной функции* $u(z)=G(z;z_0)$, *где* $G(z;z_0)$ *есть функция Грина области D с полюсом в точке* $z_0$ [2]).

Положим, ради краткости, $\rho e^{-u(z)}=v(z)$, $e^{-U(z)}=V(z)$ и заметим, что $v(z)$ и $V(z)$ суть функции логарифмически-субгармонические в области $D$, причем $V(z)$ равна единице в точке $z_0$. В этих обозначениях соотношение (8) перепишется в виде

$$v(z)=|z-z_0|\,V(z),\tag{8'}$$

и задача I преобразуется в ей эквивалентную проблему I′: дано семейство $\{v(z)\}$ всех функций, логарифмически-субгармонических в области $D$, представимых в виде $v(z)=|z-z_0|\,V(z)$, где $V(z)$ — произвольная функция, логарифмически-субгармоническая в области $D$, равная единице в точке $z_0$. Показать, что верхние границы функций $v(z)$ достигают минимума для единственной функции $v(z)=\rho e^{-G(z;z_0)}$, где $G(z;z_0)$ есть функция Грина области с полюсом в точке $z_0$, а $\rho$ — радиус конформности этой области в точке $z_0$.

Решение этой задачи получим из следующих соображений. Пусть $\zeta=f(z)$ выполняет, при условиях $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=1$, взаимно однозначное и конформное отображение области $D$ на круг $\Delta$ с центром в начале координат радиуса $\rho$ ($\rho$ есть радиус конформности области $D$

---

[1]) $\ln\frac{\rho}{|z-z_0|}$ есть супергармоническая функция.

[2]) $G(z;z_0)=-\ln|F(z)|$.



в точке $z_0$), а $z=\varphi(\zeta)$ есть обратная функция. Очевидно, $f(z)=\rho F(z)$ и $|f(z)|=\rho e^{-G(z;z_0)}$.

Положим

$$\Phi(\zeta)=\frac{v[\varphi(\zeta)]}{|\zeta|}=\left|\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(0)}{\zeta}\right|V[\varphi(\zeta)]$$

и заметим, что $\Phi(\zeta)$ есть субгармоническая функция в круге $|\zeta|<\rho$, причем $\Phi(0)=1$. Если $\Phi(\zeta)$ не есть константа, то $\max\limits_{|\zeta|=r}\Phi(\zeta)$ возрастает вместе с $r$. Так как $\Phi(0)=1$, то $\max\limits_{|\zeta|=r}\Phi(\zeta)>1$ и, значит, верхняя граница функции $\Phi(\zeta)$ в круге $|\zeta|<\rho$ и подавно больше единицы. Отсюда вытекает, что в случае, когда $\Phi(\zeta)$ не константа, верхняя граница функции $v[\varphi(\zeta)]=|\zeta|\,\Phi(\zeta)$ в круге $|\zeta|<\rho$ обязательно больше $\rho$. В случае же $\Phi(\zeta)=\text{const}$ имеем $\Phi(\zeta)\equiv1$ или $v[\varphi(\zeta)]=|\zeta|$, т. е. в этом случае верхняя граница функции $v[\varphi(\zeta)]$ в круге $|\zeta|<\rho$ есть $\rho$.

Итак, верхняя граница функции $v(z)$ в области $D$ не меньше $\rho$, причем она равна своему минимуму $\rho$ лишь в случае, когда $\Phi(\zeta)\equiv1$, т. е. когда

$$v(z)=|f(z)|=\rho e^{-G(z;z_0)}.$$

n° 2. Рассмотрим *семейство* $\{v(z)\}$ *всех функций, логарифмически-субгармонических в ограниченной односвязной области D, представляемых в виде*

$$v(z)=|z-z_0|\,V(z),$$

*где* $V(z)$ — *произвольная функция, логарифмически-субгармоническая в области D, равная единице в точке* $z_0$.

*Для этого класса функций ставится проблема:*

II. *Показать, что интеграл*

$$I_p=\iint_D v^p(z)\,dx\,dy\quad(p>0)$$

*имеет минимум для единственной функции* $v(z)$, *и определить эту функцию.*

Пусть попрежнему $\zeta=f(z)$ выполняет при условиях $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=1$, взаимно однозначное и конформное отображение области $D$ на круг $\Delta$ с центром в начале координат радиуса $\rho$ ($\rho$ — радиус конформности области $D$ в точке $z_0$), а $z=\varphi(\zeta)$ есть обратная функция.

Так как функциональный определитель

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|=\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2=|\varphi'(\zeta)|^2,$$

то

$$I_p=\iint_\Delta v^p[\varphi(\zeta)]\,|\varphi'(\zeta)|^2\,d\xi\,d\eta.$$

Полагая

$$\Phi(\zeta)=\frac{v[\varphi(\zeta)]\,|\varphi'(\zeta)|^{\frac{2}{p}}}{|\zeta|}=\left|\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\zeta}\right|V[\varphi(\zeta)]\,|\varphi'(\zeta)|^{\frac{2}{p}},$$

мы видим, что $\Phi(\zeta)$ — логарифмически-субгармоническая функция в круге $|\zeta| < \rho$, причем $\Phi(0) = 1$.

Полагая $\zeta = re^{i\theta}$, будем иметь

$$I_p = \int_0^\rho r^{p+1}\,dr \int_0^{2\pi} \Phi^p(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Так как $\Phi^p(re^{i\theta})$ есть функция, субгармоническая в круге $r < \rho$, то, каково бы ни было $r$, выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} \Phi^p(re^{i\theta})\,d\theta \geqslant 2\pi\Phi^p(0) = 2\pi \tag{a}$$

и, следовательно,

$$I_p \geqslant 2\pi \int_0^\rho r^{p+1}\,dr = \frac{2\pi}{p+2}\rho^{p+2}.$$

Если в последней формуле имеет место знак равенства, то это может быть лишь в том случае, когда в формуле (a) имеется знак равенства при всяком $r$, что возможно только при $\Phi(\zeta) \equiv \text{const.} = 1$.

Это последнее заключение мы сделали на основании следующих соображений. Если, как мы предполагаем,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^p(re^{i\theta})\,d\theta = \Phi^p(0),$$

то субгармоническая функция $\Phi^p(\zeta)$ должна совпадать со своей наилучшей гармонической мажорантой, т. е. $\Phi^p(\zeta)$ есть гармоническая функция в круге $|\zeta| < \rho$; обозначим ее через $\Gamma(\zeta)$. С другой стороны, по условию, $\Phi^p(\zeta) = \Gamma(\zeta)$ есть логарифмически-субгармоническая функция, т. е. $\Delta \ln \Gamma = \Gamma\Delta\Gamma - \Delta(\Gamma, \Gamma)^2 \geqslant 0$, откуда, в силу $\Delta\Gamma = 0$, следует $\Delta(\Gamma, \Gamma)^2 = 0$, т. е. $\Gamma = \text{const.}$[1]). Последнее условие означает, что $I_p$ достигает своей нижней границы. Это условие $\Phi(\zeta) \equiv 1$ запишется так:

$$v[\varphi(\zeta)] = |\zeta|\,|\varphi'(\zeta)|^{-\frac{2}{p}}$$

или

$$v(z) = |f(z)|\,|f'(z)|^{\frac{2}{p}}.$$

Таким образом мы показали, что *$I_p$ достигает своей нижней границы $\frac{2\pi}{p+2}\rho^{p+2}$ только для функции*

$$v_p(z) = |f(z)|\,|f'(z)|^{\frac{2}{p}}.$$

---

[1]) Так как $\Delta(\Gamma, \Gamma) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)^2$.



Кроме того, заметим, что среднее значение функции $v(z)$ порядка $p$ на области $D$ есть $m_p = \left(\frac{I_p}{d}\right)^{\frac{1}{p}}$ ($d$ — площадь области $D$). Следовательно, имеем

$$m_p \geqslant \rho\left[\frac{2\pi\rho^2}{(p+2)\,d}\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{b}$$

причем знак равенства возможен лишь для функции $v_p(z)$.

Замечание. Проблему I′ можно рассматривать как предельный случай задачи II, если считать $v(z)$ непрерывной в области $D$.

В самом деле, когда $p$ неограниченно возрастает, то $m_p$ стремится к верхней границе $M(v)$ функции $v(z)$ в области $D$. Поэтому при $p \to \infty$ из формулы (b) мы получим $M(v) \geqslant \rho$, причем знак равенства имеет место только для функции $v(z) = \lim v_p(z) = |f(z)| = \rho e^{-G(z;\, z_0)}$, что мы видели непосредственно в n° 1.

n° 3. *Рассмотрим семейство $\{V(z)\}$ всех функций, логарифмически-субгармонических в ограниченной односвязной области $D$, удовлетворяющих условию $V(z_0) = 1$.*

*Для этого класса функций ставится проблема:*

III. *Показать, что интеграл*

$$I_p = \iint_D V^p(z)\,dx\,dy \quad (p > 0)$$

*имеет минимум для единственной функции $V(z)$, и определить эту функцию.*

Пусть $\zeta = f(z)$ реализует при условиях $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 1$ взаимно однозначное и конформное отображение области $D$ на круг $\Delta$ с центром в начале координат радиуса $\rho$ ($\rho$ — радиус конформности области $D$ в точке $z_0$), а $z = \varphi(\zeta)$ есть обратная функция.

$$I_p = \iint_\Delta V^p[\varphi(\zeta)]\,|\varphi'(\zeta)|^2\,d\xi\,d\eta.$$

Полагая

$$\Phi_1(\zeta) = V[\varphi(\zeta)]\,|\varphi'(\zeta)|^{\frac{2}{p}},$$

мы видим, что $\Phi_1(\zeta)$ — логарифмически-субгармоническая функци в круге $\Delta$, причем $\Phi_1(0) = 1$. Полагая $\zeta = re^{i\theta}$, будем иметь

$$I_p = \int_0^\rho r\,dr \int_0^{2\pi} \Phi_1^p(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \Phi_1^p(re^{i\theta})\,d\theta \geqslant 2\pi$$

(см. n° 2), то

$$I_p \geqslant 2\pi \int_0^\rho r\,dr = \pi\rho^2.$$

Знак равенства в последней формуле возможен только в случае, когда

$$\Phi_1(\zeta) \equiv 1$$

(см. n° 2), т. е.

$$V[\varphi(\zeta)] = |\varphi'(\zeta)|^{-\frac{2}{p}}$$

или

$$V(z) = |f'(z)|^{\frac{2}{p}}.$$

Среднее значение функции $V(z)$ порядка $p$ на области $D$ есть

$$m_p' = \left(\frac{I_p}{d}\right)^{\frac{1}{p}}$$

($d$ — площадь $D$). Следовательно, имеем

$$m_p' \geqslant \left(\frac{\pi\rho^2}{d}\right)^{\frac{1}{p}},$$

причем знак равенства возможен лишь для функции

$$V(z) = |f'(z)|^{\frac{2}{p}}.$$

n° 4. Вместо того чтобы искать минимум интеграла $I_p$ при условии $V(z_0) = 1$, возможно по принципу взаимности искать максимум $V(z_0)$ при условии $I_p = A$.

Применяя предыдущий результат (n° 3) к функции $\frac{V(z)}{V(z_0)}$, получим

$$\frac{A}{V^p(z_0)} \geqslant \pi\rho^2$$

или

$$V(z_0) \leqslant \left(\frac{A}{\pi\rho^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Максимум $V(z_0)$ достигается только для

$$V(z) = |f'(z)|^{\frac{2}{p}} \quad V(z_0) = C|f'(z)|^{\frac{2}{p}},$$

где $C$ определяется из условия $I_p = A$.

Итак,

$$C^p \pi\rho^2 = A,$$

откуда

$$C = \left(\frac{A}{\pi\rho^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

---

# ГЛАВА VI

# ПОДЧИНЕННЫЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## § 1. Определение

n° 1. Рассмотрим, с одной стороны, субгармоническую функцию $U(z)$ в единичном круге $|z| < 1$ и, с другой стороны, голоморфную в этом круге функцию $\omega(z)$, удовлетворяющую условиям $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$. Тогда функция $u(z) = U[\omega(z)]$ будет субгармонической в единичном круге $|z| < 1$.

В самом деле, предположим сначала, что $U(z)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в круге $|z| < 1$.

Тогда, полагая $z = x + iy$, $\omega(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$, имеем $u(z) = u(x, y)$ и $U[\omega(z)] = U(\xi, \eta)$.

Так как согласно условию

$$u(x, y) = U(\xi, \eta),$$

то

$$u_{xx} = U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx} + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\xi\xi}\xi_x^2 + U_{\eta\eta}\eta_x^2,$$
$$u_{yy} = U_\xi \xi_{yy} + U_\eta \eta_{yy} + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\xi\xi}\xi_y^2 + U_{\eta\eta}\eta_y^2,$$

отсюда следует

$$\Delta u = U_\xi \Delta\xi + U_\eta \Delta\eta + 2U_{\xi\eta}\Delta(\xi;\ \eta) + U_{\xi\xi}\Delta(\xi;\ \xi) + U_{\eta\eta}\Delta(\eta;\ \eta).$$

Заметив, что $\Delta\xi = 0$, $\Delta\eta = 0$, $\Delta(\xi, \eta) = 0$,

$$\Delta(\xi;\ \xi) = \Delta(\eta;\ \eta) = |\omega'(z)|^2,$$

окончательно найдем

$$\Delta u = |\omega'(z)|^2 [U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}] \geqslant 0$$

вследствие субгармоничности функции $U$; из последнего неравенства вытекает, что $u$ — функция субгармоническая. В частности, $u$ будет гармонической функцией, если $U$ есть гармоническая.

Обращаясь теперь к общему случаю, когда $U(z)$ есть произвольная субгармоническая функция, представим ее в виде предела монотонно убывающей последовательности $\{U_n(z)\}$ субгармонических функций, имеющих непрерывные частные производные второго порядка (см. ч. II, гл. I, § 5).

Положим $u_n(z) = U_n[\omega(z)]$ и заметим, что $u(z) = U[\omega(z)]$ есть предел монотонно убывающей последовательности $\{u_n(z)\}$, причем, по доказанному выше, $u_n(z)$ — функции субгармонические. Следовательно, функция $u(z)$ есть также субгармоническая.

*Условимся называть функцию $u(z)$ подчиненной в круге $|z|<1$ субгармонической функции $U(z)$, если имеет место соотношение*

$$u(z)=U[\omega(z)],$$

*где $\omega(z)$ есть голоморфная при $|z|<1$, причем $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$.*

Функция $U(z)$ по отношению к $u(z)$ носит название *подчиняющей* [2; 12; 17].

## § 2. Принцип средних значений

n° 1. *Если субгармоническая функция $u(z)$ подчинена в единичном круге субгармонической функции $U(z)$, то имеет место неравенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta})\,d\theta, \tag{1}$$

*каково бы ни было $\rho<1$, причем знак равенства при некотором значении $\rho=\rho_0$ возможен лишь в случаях, когда либо $U(z)$ есть гармоническая функция при $|z|<\rho_0$, либо $\omega(z)\equiv ze^{i\alpha}$.*

Для доказательства обозначим через $g(z)$ и $G(z)$ наилучшие гармонические мажоранты функций $u(z)$ и $U(z)$ для круга $|z|\leqslant\rho$. Заметив, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\rho e^{i\theta})\,d\theta=g(0),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\rho e^{i\theta})\,d\theta=G(0),$$

мы докажем первую часть нашего предложения, если установим неравенство $g(0)\leqslant G(0)$.

Так как

$$u(\rho e^{i\theta})=U[\omega(\rho e^{i\theta})]\leqslant G[\omega(\rho e^{i\theta})]$$

(последнее в силу неравенства Шварца $|\omega(\rho e^{i\theta})|\leqslant\rho$; гл. IV, § 2), то

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G[\omega(\rho e^{i\theta})]\,d\theta=G[\omega(0)]=G(0),$$

ч. т. д.

Чтобы доказать вторую часть, заметим, что равенство $g(0)=G(0)$ возможно лишь в случае, когда $U[\omega(\rho_0 e^{i\theta})]=G[\omega(\rho_0 e^{i\theta})]$. В этом случае вовможно одно из двух: либо $|\omega(\rho_0 e^{i\theta})|<\rho_0$, и тогда по принципу гармонической мажоранты (гл. V, § 1) $U(z)\equiv G(z)$ при $|z|<\rho_0$, либо $|\omega(\rho_0 e^{i\theta})|=\rho_0$, и тогда $\omega(z)\equiv ze^{i\alpha}$ вследствие леммы Шварца. Таким образом и вторая часть нашего утверждения доказана [2; 12; 17].

n° 2. Предполагая, что $u(z)$ подчинена в единичном круге функции $U(z)\geqslant 0$, мы немедленно заключаем, что $u^p(z)$, $p>1$, подчинена



в этом круге субгармонической функции $U^p(z)$ (см. гл. III, § 10). Поэтому мы вправе к функциям $u^p(z)$ и $U^p(z)$ применить доказанное соотношение (1), что нам даст

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^p(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^p(\rho e^{i\theta})\,d\theta\right]^{\frac{1}{p}}\quad(p>1), \tag{2}$$

или

$$M_p(u,\rho)\leqslant M_p(U,\rho).$$

Таким образом мы доказали теорему:

*Если субгармоническая функция $u(z)$ подчинена в единичном круге субгармонической функции $U(z)\geqslant 0$, то имеет место неравенство*

$$M_p(u,\rho)\leqslant M_p(U,\rho)\quad(p>1), \tag{2'}$$

*каково бы ни было $\rho<1$, причем знак равенства возможен лишь в случае, когда $\omega(z)\equiv ze^{i\alpha}$.*

n° 3. Если мы предположим, что функция $U(z)$ есть логарифмически-субгармоническая в единичном круге, то $U^\alpha(z)$ при любом $\alpha>0$ будет субгармонической, и неравенство (1) применяется немедленно к функциям $u^\alpha$ и $U^\alpha$, что дает нам предложение:

*Если функция $u(z)$ подчинена в единичном круге логарифмически-субгармонической функции $U(z)$, то имеет место неравенство*

$$M_\alpha(u,\rho)\leqslant M_\alpha(U,\rho)\quad(\alpha>0), \tag{3}$$

*каково бы ни было $\rho<1$, причем знак равенства возможен лишь в случае, если $\omega(z)\equiv ze^{i\beta}$.*

## § 3. Принцип максимума и минимума

n° 1. В силу леммы Шварца, $\omega(z)$ либо равна $ze^{i\alpha}$, либо находится внутри окружности $|z|=\rho$, когда $z$ описывает эту окружность. С другой стороны, субгармоническая функция имеет наибольшее значение при $|z|\leqslant\rho$ обязательно на окружности $|z|=\rho$. Отсюда становится очевидным справедливость следующего принципа максимума:

*Если $u(z)$ — субгармоническая функция, подчиненная в единичном круге субгармонической функции $U(z)$, то при $|z|\leqslant\rho$ имеет место соотношение*

$$u(z)\leqslant\max_{|\zeta|=\rho}U(\zeta)\quad(\rho<1), \tag{4}$$

*причем знак равенства может быть только в случае, когда $\omega(z)\equiv ze^{i\alpha}$.*

Неравенство (4) можно рассматривать как предельный случай при $p\to+\infty$ соотношения (2) предыдущего параграфа.

n° 2. Установив принцип максимума, выражаемый неравенством (4), естественно поставить вопрос о том, при каком условии будет иметь место принцип минимума, т. е.

$$u(z) \geqslant \min_{|\zeta|=\rho} U(\zeta).$$

Прежде всего очевидно, что для субгармонических функций, допускающих минимум внутри области, этот принцип вообще не верен, как показывает простой пример:

$$U(z) = |z|^2, \quad \omega(z) = \beta z, \quad \beta < 1.$$

Однако, *если предположить, что субгармоническая функция $U(z)$ не имеет минимума внутри области $\overline{G}$, какова бы ни была область $\overline{G}$, принадлежащая единичному кругу, то справедлив и принцип минимума, выражаемый неравенством*

$$u(z) \geqslant \min_{|\zeta|=\rho} U(\zeta), \quad |z| \leqslant \rho < 1, \tag{5}$$

*причем знак равенства возможен лишь в случае, когда $\omega(z) \equiv ze^{i\alpha}$.*

Это утверждение непосредственно следует из леммы Шварца аналогично неравенству (4).

## § 4. Подчиненные аналитические функции комплексного переменного [2; 12; 17]

n° 1. Рассмотрим аналитическую функцию $F(z)$ в единичном круге $|z| < 1$ и функцию $\omega(z)$, голоморфную в этом круге, удовлетворяющую условиям $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$. Тогда функция $f(z) = F[\omega(z)]$, очевидно, будет аналитической в единичном круге $|z| < 1$. *Условимся называть функцию $f(z)$ подчиненной в круге $|z| < 1$ аналитической функции $F(z)$, если имеет место соотношение*

$$f(z) = F[\omega(z)],$$

где $\omega(z)$ — голоморфная при $|z| < 1$, причем $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$.

*Функция $F(z)$ по отношению к $f(z)$ носит название подчиняющей.*

n° 2. Обозначим через $\mathfrak{F}$ поверхность Римана, в которую функция $F(z)$ переводит единичный круг, и через $P$ — точку этой римановой поверхности с аффиксом $F(0)$, соответствующую точке $z = 0$. Легко дать геометрическую характеристику подчиненных функций.

*Для того чтобы функция $f(z)$ была подчинена в единичном круге аналитической функции $F(z)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $f(0) = F(0)$;

2) *когда $z$ описывает любой контур в круге $|z| < 1$ с началом и концом при $z = 0$, точка $w = f(z)$ описывает контур, лежащий на $\mathfrak{F}$, с началом и концом в точке $P$.*

Необходимость этих условий очевидна. Для доказательства достаточности обозначим через $Z(w)$ функцию, обратную для $w = F(z)$, $Z[F(0)] = 0$; эта функция будет однозначной на римановой поверхности $\mathfrak{F}$. Очевидно, что $\omega(z) = Z[f(z)]$ будет однозначной аналитической функцией в единичном круге, причем $|\omega(z)| < 1$ и $\omega(0) = Z[f(0)] = Z[F(0)] = 0$. Отсюда вытекает, что $f(z) = F[\omega(z)]$, ч. т. д.



n° 3. Очевидно, *если $f(z)$ подчинена в единичном круге аналитической функции $F(z)$, то $|f(z)|$, $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ будут субгармоническими функциями, подчиненными в том же круге соответственно $|F(z)|$, $\operatorname{Re} F(z)$, $\operatorname{Im} F(z)$.* Применяя результаты § 2 и 3, получим: *если $f(z) = u + iv$ подчинена в единичном круге аналитической функции $F(z) = U + iV$, то имеют место соотношения:*

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^\alpha d\theta\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(\rho e^{i\theta})|^\alpha d\theta\right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha > 0), \tag{6}$$

$$|f(z)| \leqslant \max_{|\zeta|=\rho} |F(\zeta)|, \quad |z| \leqslant \rho, \tag{7}$$

$$\min_{|\zeta|=\rho} U(\zeta) \leqslant u(z) \leqslant \max_{|\zeta|=\rho} U(\zeta), \tag{8}$$

$$\min_{|\zeta|=\rho} V(\zeta) \leqslant v(z) \leqslant \max_{|\zeta|=\rho} V(\zeta), \tag{9}$$

*где $|z| \leqslant \rho$, каково бы ни было $\rho < 1$, причем знак равенства в одном из этих соотношений возможен лишь в случае, когда $\omega(z) \equiv ze^{i\beta}$.*

Левые части неравенств (8) и (9) получены из неравенства (5), так как $U(z)$ и $V(z)$ — функции гармонические.

Если $F(z)$ не обращается в нуль в единичном круге, то неравенство (7) может быть дополнено соотношением (§ 3):

$$|f(z)| \geqslant \min_{|\zeta|=\rho} |F(\zeta)|, \quad |z| \leqslant \rho,$$

каково бы ни было $\rho < 1$, причем знак равенства возможен лишь в случае, когда $\omega(z) \equiv ze^{i\beta}$.

n° 4. Значение установленных в этом параграфе неравенств для изучения свойств аналитических функций исключительно большое.

Так, например, пусть $w = f(z)$ — голоморфная функция в единичном круге с положительной действительной частью. Обозначим через $G(w)$ функцию, реализующую конформное отображение правой полуплоскости на единичный круг с переводом точки $f(0) = a_0$ в центр круга. Тогда $G[f(z)] = \omega(z)$, где $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$; если $F(z)$ означает обратную функцию для $z = G(w)$, то

$$f(z) = F[\omega(z)].$$

Таким образом семейство всех функций, подчиненных функции $F(z)$, состоит из функций, голоморфных в единичном круге, с фиксированным свободным членом $a_0 = f(0)$, у которых действительная часть положительна.

Установление универсальных мажорант и минорант для этого семейства может быть сделано на основании изучения одной лишь подчиняющей функции $F(z)$. Метод для решения подобного рода задач следует немедленно из общих принципов настоящего параграфа.

Зак. 1672. — И. И. Привалов. 8

## § 5. Пример

n° 1. Чтобы иллюстрировать приложения принципов предыдущего параграфа, рассмотрим следующую задачу: дана функция $f(z)=u+iv$, $f(0)=u_0+iv_0=a_0$, голоморфная внутри круга $|z|<R$, с положительной действительной частью.

Требуется найти границы для $|f(z)|$, $u$, $v$. Очевидно, функция $f(z)$ подчинена в круге $|z|<R$ аналитической функции $F(z)=U+iV$, реализующей конформное отображение круга $|z|<R$ на правую полуплоскость, причем начало координат переходит в точку $a_0$.

Построив функцию $F(z)$, мы должны, согласно § 4, найти наибольшие и наименьшие значения $|F(z)|$, $U$, $V$ на окружности $|z|=\rho<R$[1]). Заметив, что

$$F(z)=\frac{a_0R+\bar{a}_0z}{R-z},$$

имеем на окружности $z=\rho e^{i\theta}$

$$|F(z)|^2=u_0^2+v_0^2+4\rho Ru_0\,\frac{u_0\cos\theta+v_0\sin\theta}{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}.$$

Приравняв нулю производную по $\theta$, получим

$$v_0\cos\theta-u_0\sin\theta=\frac{2\rho Rv_0}{R^2+\rho^2},$$

после чего будет

$$|F(z)|^2=u_0^2+v_0^2+4\rho R\,\frac{(u_0^2+v_0^2)\cos\theta-\dfrac{2\rho Rv_0^2}{R^2+\rho^2}}{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}.$$

Внося сюда $\cos\theta$, определяемый из предыдущего уравнения, получим

$$|F(z)|^2=u_0^2+v_0^2\pm\frac{4\rho Ru_0(u_0^2+v_0^2)\sqrt{A}}{A\pm2\rho Ru_0\sqrt{A}},$$

где для сокращения положено

$$A=(u_0^2+v_0^2)(R^2+\rho^2)^2-4\rho^2R^2v_0^2.$$

После элементарных преобразований найдем

$$|F(z)|^2=\frac{u_0^2(R^2+\rho^2)^2+v_0^2(R^2-\rho^2)^2+4\rho^2R^2u_0^2\pm4\rho Ru_0\sqrt{A}}{(R^2-\rho^2)^2}=$$

$$=\frac{A\pm4\rho Ru_0\sqrt{A}+4\rho^2R^2u_0^2}{(R^2-\rho^2)^2},$$

откуда

$$|F(z)|=\pm\frac{2\rho Ru_0}{R^2-\rho^2}+\frac{\sqrt{A}}{R^2-\rho^2},$$

или, заменяя $A$ его выражением, получим

$$|F(z)|=\pm\frac{2\rho Ru_0}{R^2-\rho^2}+\sqrt{u_0^2\left(\frac{R^2+\rho^2}{R^2-\rho^2}\right)^2+v_0^2}.$$

[1]) Результаты § 4 применяются к кругу $|z|<R$, так как этот случай приводится к единичному кругу помощью подстановки $z=Rz'$.



Полученные два значения для $|F(z)|$ дают соответственно его максимум и минимум на окружности $|z|=\rho$. Итак, окончательно находим

$$-\frac{2\rho Ru_0}{R^2-\rho^2}+\sqrt{u_0^2\left(\frac{R^2+\rho^2}{R^2-\rho^2}\right)^2+v_0^2}\leqslant|f(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\rho Ru_0}{R^2-\rho^2}+\sqrt{u_0^2\left(\frac{R^2+\rho^2}{R^2-\rho^2}\right)^2+v_0}.$$

При знаке равенства необходимо будет

$$f(z)=F(ze^{i\alpha})=\frac{a_0R+\bar{a}_0e^{i\alpha}z}{R-e^{i\alpha}z}.$$

Далее легко находим

$$U(z)=\operatorname{Reel}F(z)=\frac{u_0(R^2-\rho^2)}{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2},$$

$$V(z)=\operatorname{Im}F(z)=v_0+u_0\,\frac{2\rho R\sin\theta}{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2},$$

$$\max_{|z|=\rho}U(z)=u_0\,\frac{R+\rho}{R-\rho},\quad\min_{|z|=\rho}U(z)=u_0\,\frac{R-\rho}{R+\rho},$$

$$\max_{|z|=\rho}V(z)=v_0+u_0\,\frac{2\rho R}{R^2-\rho^2},\quad\min_{|z|=\rho}V(z)=v_0-u_0\,\frac{2\rho R}{R^2-\rho^2}.$$

В силу § 4 окончательно получим

$$u_0\,\frac{R-\rho}{R+\rho}\leqslant u(z)\leqslant u_0\,\frac{R+\rho}{R-\rho};$$

при знаке равенства необходимо

$$u(z)=\operatorname{Reel}\left(\frac{a_0R+\bar{a}_0e^{i\alpha}z}{R-e^{i\alpha}z}\right).$$

Наконец имеем

$$|v(z)-v_0|\leqslant u_0\,\frac{2\rho R}{R^2-\rho^2};$$

пра знаке равенства необходимо

$$v(z)=\operatorname{Im}\left(\frac{a_0R+\bar{a}_0e^{i\alpha}z}{R-e^{i\alpha}z}\right).$$

n° 2. Вспомнив, что $f(z)=F\left[R\omega\left(\frac{z}{R}\right)\right]$, где $\omega$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы Шварца, мы находим

$$|f'(0)|\leqslant|F'(0)|, \tag{10}$$

причем знак равенства возможен лишь в случае, когда $\omega(z)\equiv ze^{i\alpha}$.

Применяя неравенство (10), выражающее принцип растяжения в начале координат, к нашей задаче, найдем

$$|f'(0)|\leqslant2\,\frac{u_0}{R}\quad\text{или}\quad R\leqslant2\,\frac{u_0}{|a_1|}.$$

где

$$a_1=f'(0).$$

Последнее неравенство дает точную верхнюю границу для радиуса $R$ круга, внутри которого голоморфная функция имеет свою действительную часть положительной по знаку. Замечательным обстоятельством является то, что эта верхняя граница зависит только от $u_0$ и $|a_1|$.

## § 6. Метод Линделефа для круга [2;17]

n° 1. Рассмотрим аналитическую функцию $\Phi(z)$ в круге $|z|<R$ и функцию $\Omega(z)$, голоморфную в этом круге, удовлетворяющую условиям $|\Omega(z)|<R$, $\Omega(z_0)=z_0$, где $z_0$ — какая-нибудь точка круга $|z|<R$. Тогда функция $\varphi(z)=\Phi[\Omega(z)]$, очевидно, будет аналитической в круге $|z|<R$.

Обобщая определение § 4, *условимся называть функцию $\varphi(z)$ подчиненной в круге $|z|<R$ аналитической функции $\Phi(z)$, если имеет место соотношение*

$$\varphi(z)=\Phi[\Omega(z)],$$

*где $\Omega(z)$ — голоморфная при $|z|<R$, причем*

$$\Omega(z_0)=z_0, \quad |\Omega'(z)|<R.$$

*Функция $\Phi(z)$ по отношению к $\varphi(z)$ носит название подчиняющей.*

n° 2. Обозначим через $S$ поверхность Римана, в которую функция $\Phi(z)$ переводит круг $|z|<R$, и через $P$ — точку этой римановой поверхности с аффиксом $\Phi(z_0)$, соответствующую точке $z=z_0$.

Согласно § 4, *геометрически определение подчиненности в круге $|z|<R$ функции $\varphi(z)$ аналитической функции $\Phi(z)$ выразится помощью двух условий:*

1) $\varphi(z_0)=\Phi(z_0)$;

2) *когда $z$ описывает любой контур в круге $|z|<R$ с началом и концом при $z=z_0$, точка $w=\varphi(z)$ описывает контур, лежащий на $S$, с началом и концом в точке $P$.*

n° 3. Пусть функция $\varphi(z)$ подчинена в круге $|z|<R$ аналитической функции $\Phi(z)$; обозначим через $S$ поверхность Римана, которая служит конформным отображением круга $|z|<R$ при помощи подчиняющей функции $\Phi(z)$.

Тогда имеем

$$\varphi(z)=\Phi[\Omega(z)], \quad \Omega(z_0)=z_0, \quad |\Omega(z)|<R.$$

Выполним конформное преобразование круга $|z|<R$ на единичный круг плоскости $\zeta$; с переводом точки $z_0$ в центр $\zeta=0$

$$R\frac{z-z_0}{R^2-z\bar{z}_0}=\zeta,$$

откуда, обратно, $z=l(\zeta)$. Положим

$$\varphi[l(\zeta)]=f(\zeta); \quad \Phi[l(\zeta)]=F(\zeta); \quad l^{-1}[\Omega[l(\zeta)]]=\omega(\zeta).$$

Тогда соотношение $\varphi(z)=\Phi[\Omega(z)]$ заменяется следующим: $f(\zeta)=F[\omega(\zeta)]$, где $\omega(0)=0$, $|\omega(\zeta)|<1$.



Функция $F(\zeta)$ конформно отображает единичный круг $|\zeta|<1$ на поверхность Римана $S'$ с переводом точки $\zeta=0$ в точку $P$ римановой поверхности с аффиксом $F(0)=\Phi(z_0)$. Другими словами, поверхность Римана $S'$ будет та самая, которая соответствует функции $\Phi(z)$, т. е. $S'\equiv S$.

Заметив это, применим неравенство (4) из § 3, приняв

$$U(\zeta)=-G_S[F(\zeta);\ F(0)],$$

где $G_S$ обозначает функцию Грина для поверхности Римана $S$.

Согласно неравенству (4), получим

$$-G_S[f(\zeta);f(0)]\leqslant-\min_{|\zeta|=\rho}G_S[F(\zeta);\ F(0)],$$

или

$$G_S[f(\zeta);\ f(0)]\geqslant\min_{|\zeta|=\rho}G_S[F(\zeta);\ F(0)].$$

Так как функция Грина является инвариантом конформного отображения, то

$$G_S[F(\zeta);\ F(0)]=G_\zeta[\zeta;\ 0],$$

где $\zeta$ пробегает единичный круг $|\zeta|<1$.

Таким образом предыдущее неравенство примет вид:

$$G_S[f(\zeta);\ f(0)]\geqslant\min_{|\zeta|=\rho}G_\zeta[\zeta;\ 0]=G_\zeta[\zeta;\ 0],$$

потому что на окружности $|\zeta|=\rho$ функция $G_\zeta[\zeta;\ 0]$ сохраняет постоянное значение.

Итак, мы доказали, что

$$G_S[f(\zeta);\ f(0)]\geqslant G_\zeta[\zeta;\ 0].$$

Возвращаясь от $\zeta$ к переменному $z$, найдем

$$G_S[\varphi(z);\ \varphi(z_0)]\geqslant G_Z[z;\ z_0], \tag{11}$$

причем знак равенства может быть лишь в случае, когда $\varphi(z)$ конформно отображает круг $Z$, $|z|<R$, на поверхность Римана $S$.

Функция Грина $G_Z[z;\ z_0]$ для круга $Z$ имеет следующий вид[1]):

$$G_Z[z;\ z_0]=\ln\frac{|z_0|}{R}\left|\frac{z-z_0^*}{z-z_0}\right|,$$

где $z_0^*=\dfrac{R^2}{\bar{z}_0}$ есть точка, симметричная с $z_0$ относительно окружности $|z|=R$.

Таким образом геометрически неравенство (11) выражает следующее:

*Если точка $z$ находится в замкнутой области, ограниченной окружностью $\left|\dfrac{z-z_0^*}{z-z_0}\right|=\dfrac{R}{|z_0|}e^\lambda$, $\lambda>0$, то точка $w=\varphi(z)$ находится в замкнутой области, ограниченной кривой $G_S[w,\ w_0]=\lambda$. Сверх того, если точка $z$ лежит на окружности $\left|\dfrac{z-z_0^*}{z-z_0}\right|=\dfrac{R}{|z_0|}e^\lambda$,*

---

[1]) См. Введение, § 2.

*а соответствующая точка $w=\varphi(z)$ находится на кривой $G_S[w, w_0]=\lambda$, то функция $w=\varphi(z)$ реализует конформное отображение круга $Z$ на поверхность Римана $S$.*

В этом заключается *первая часть метода Линделефа* в его применении к кругу $Z$.

n° 4. Мы получим частный случай этого предложения, если предположим, что функция $\varphi(z)$, голоморфная при $|z|<R$, удовлетворяет условию $|\varphi(z)|<R$. В этом случае поверхность Римана $S$ совпадает с кругом $Z$.

Применение метода Линделефа в этом случае нам дает:

*Если точка $z$ находится в замкнутой области, ограниченной окружностью*

$$\left|\frac{z-z_0^*}{z-z_0}\right|=\frac{R}{|z_0|}e^{\lambda},$$

*то точка $w=\varphi(z)$ находится в замкнутой области, ограниченной окружностью $\left|\frac{w-w_0^*}{w-w_0}\right|=\frac{R}{|w_0|}e^{\lambda}$. Сверх того, если точка $z$ лежит на окружности $\left|\frac{z-z_0^*}{z-z_0}\right|=\frac{R}{|z_0|}e^{\lambda}$, а соответствующая точка $w=\varphi(z)$ находится на окружности $\left|\frac{w-w_0^*}{w-w_0}\right|=\frac{R}{|w_0|}e^{\lambda}$, то функция $w=\varphi(z)$ реализует конформное отображение круга $Z$ самого в себя, т. е. будет вида*

$$\frac{w-\varphi(z_0)}{R^2-w\overline{\varphi(z_0)}}=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{R^2-z\bar{z}_0}.$$

Последнее предложение носит название *теоремы Шварца-Пика.* Ему может быть придана простая геометрическая формулировка, если ввести неэвклидову метрику, что будет сделано в последней главе первой части этой книги.

n° 5. Чтобы получить вторую часть метода Линделефа, оценивающую растяжение, введем предварительно понятие радиуса области $S$ в точке $w_0$.

Пусть $\mathfrak{F}(w)$ — одна из функций, которая конформно отображает область $S$ на единичный круг $|\zeta|<1$ таким образом, что данной точке $w_0$ области $S$ соответствует начало координат $\zeta=0$ (эти функции $\mathfrak{F}$ зависят от постоянного фактора с модулем единица, нас не интересующего).

Тогда функция $G(w)=\frac{\mathfrak{F}(w)}{\mathfrak{F}'(w_0)}$ конформно преобразует область $S$ на круг с центром $O$ некоторого радиуса $\rho$, причем точка $O$ является прообразом для точки $w_0$.

Равенство $G'(w_0)=1$ показывает, что преобразование $\zeta=G(w)$ сохраняет бесконечно малую длину дуг, выходящих из $w_0$. Обратно, всякая функция $G(w)$, которая конформно отображает область $S$ на круг с центром $O$ так, чтобы длина бесконечно малых дуг, выходящих из $w_0$, сохраняется, удовлетворяет условию $G'(w_0)=1$ и будет вида $e^{i\theta}\frac{\mathfrak{F}(w)}{\mathfrak{F}'(w_0)}$.

Радиус $\rho$ круга, на который функция $G(w)$ отображает область $S$, зависит только от $w_0$ и $S$; его называют *радиусом области в $w_0$* и обозначают через $\gamma_S(w_0)$.



Из предыдущего мы усматриваем, что

$$\gamma_S(w_0)=\frac{1}{|\mathfrak{F}'(w_0)|}=|F'(0)|,$$

где $w=F(\zeta)$ реализует конформное отображение единичного круга $|\zeta|<1$ на область $S$, причем точке $\zeta=0$ отвечает точка $w=w_0$.

n° 6. Уравнение кривой Грина $G_S(w;\ w_0)=\lambda$ может быть записано в виде

$$|w-w_0|=\gamma_S(w_0)\,e^{-\lambda}[1+\varepsilon(w, w_0)],$$

где $\varepsilon(w, w_0)$ есть функция от $w$, стремящаяся к нулю при $w\to w_0$.

В самом деле, $G_S(w;\ w_0)=-\ln|\mathfrak{F}(w)|$ [1]), где $\zeta=\mathfrak{F}(w)$ конформно отображает область $S$ на единичный круг $|\zeta|<1$, причем $\mathfrak{F}(w_0)=0$. С другой стороны, очевидно, имеем

$$\mathfrak{F}(w)=(w-w_0)\,\mathfrak{F}'(w_0)\,[1+\eta(w, w_0)],$$

где $\eta\to 0$, когда $w\to w_0$.

Таким образом — $G_S(w;\ w_0)=\ln|w-w_0|+\ln|\mathfrak{F}'(w_0)|+\ln|1+\eta|=\ln\frac{|w-w_0||1+\eta|}{\gamma_S(w_0)}$, так как $|\mathfrak{F}'(w_0)|=\frac{1}{\gamma_S(w_0)}$.

Отсюда уравнение кривой Грина $G_S(w;\ w_0)=\lambda$ запишется в виде

$$|w-w_0|=\gamma_S(w_0)\,e^{-\lambda}\frac{1}{|1+\eta|}$$

или

$$|w-w_0|=\gamma_S(w_0)\,e^{-\lambda}[1+\varepsilon(w, w_0)],$$

где $\varepsilon(w, w_0)\to 0$ при $w\to w_0$.

Также уравнение кривой Грина $G_Z(z;\ z_0)=\lambda$ будет

$$|z-z_0|=\gamma_Z(z_0)\,e^{-\lambda}[1+\varepsilon_1(z, z_0)].$$

Вследствие первой части метода Линделефа, если $z$ удовлетворяет условию

$$|z-z_0|=\gamma_Z(z_0)\,e^{-\lambda}[1+\varepsilon_1(z, z_0)],$$

то

$$|w-w_0|\leqslant\gamma_S(w_0)\,e^{-\lambda}[1+\varepsilon(w, w_0)].$$

Отсюда вытекает

$$\left|\frac{w-w_0}{z-z_0}\right|\leqslant\frac{\gamma_S(w_0)}{\gamma_Z(z_0)}\,\frac{1+\varepsilon(w, w_0)}{1+\varepsilon_1(z, z_0)},$$

и в пределе при $z\to z_0$ получим

$$|\varphi'(z_0)|\leqslant\frac{\gamma_S(w_0)}{\gamma_Z(z_0)}. \tag{12}$$

Легко вычислить $\gamma_Z(z_0)=\frac{R^2-|z_0|^2}{R}$, после чего соотношение (12) примет вид:

$$|\varphi'(z_0)|\leqslant\frac{R}{R^2-|z_0|^2}\,\gamma_S(w_0). \tag{12'}$$

---

[1]) См. Введение, § 2.

Здесь $\gamma_S(w_0)$ есть радиус области $S$ в $w_0$ и определяется по формуле $\gamma_S(w_0)=|F'(0)|$, если $F(\zeta)$ реализует конформное отображение единичного круга $|\zeta|<1$ на область $S$ с переводом точки $\zeta=0$ в $w_0$.

Соотношение (12) выражает собой вторую часть метода Линделефа. Если в соотношении (12) имеется знак равенства, то функция $\varphi(z)$ конформно отображает круг $Z$ на риманову поверхность $S$.

n° 7. В примере § 5 мы рассмотрели свойства функций $f(z)$, голоморфных в круге $|z|<R$, имеющих положительную действительную часть. Применяя к этому примеру неравенство (12′), мы должны вычислить $\gamma_S(w_0)$, считая $S$ за правую полуплоскость. Так как в этом случае $F(\zeta)=\frac{w_0+\bar{w}_0\zeta}{1-\zeta}$, то

$$F'(0)=2\,\mathrm{Reel}\,w_0=2\,\mathrm{Reel}\,f(z_0).$$

Таким образом имеем

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{2R}{R^2-|z_0|^2}\,\mathrm{Reel}\,f(z_0).$$

## § 7. Приложения [2]

n° 1. Рассмотрим функцию

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots,$$

голоморфную в круге $|z|<R$, удовлетворяющую условию $|f(z)|<M$ и не исчезающую в круге.

Легко получить оценки сверху и снизу для модуля и аргумента функции $f(z)$, если воспользоваться результатами § 5.

В самом деле, положим

$$g(z)=-\ln f(z)+\ln M=\ln\frac{M}{f(z)}.$$

Тогда функция $g(z)$ — с положительной действительной частью, и для нее мы имеем оценки в § 5. Пользуясь результатами § 5, имеем

$$\ln\frac{M}{|a_0|}\cdot\frac{R-|z|}{R+|z|}\leqslant\mathrm{Reel}\,g(z)\leqslant\ln\frac{M}{|a_0|},\quad\frac{R+|z|}{R-|z|},$$

откуда, заметив, что

$$\mathrm{Reel}\,g(z)=\ln\left|\frac{M}{f(z)}\right|,$$

найдем

$$\left|\frac{M}{a_0}\right|^{\frac{R-|z|}{R+|z|}}\leqslant\left|\frac{M}{f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{M}{a_0}\right|^{\frac{R+|z|}{R-|z|}}$$

или

$$\left|\frac{M}{a_0}\right|^{-\frac{2|z|}{R-|z|}}\leqslant\left|\frac{f(z)}{a_0}\right|\leqslant\left|\frac{M}{a_0}\right|^{\frac{2|z|}{R+|z|}}.$$



Аналогично рассматривая мнимую часть функции $g(z)$, пользуясь соответствующим неравенством § 5, получим

$$\left|\arg\frac{f(z)}{a_0}\right|\leqslant\frac{2R|z|}{R^2-|z|^2}\ln\frac{M}{|a_0|}.$$

Наконец из последнего неравенства § 6

$$|g'(z)|\leqslant\frac{2R}{R^2-|z|^2}\,\mathrm{Reel}\,g(z)$$

найдем, переходя к $f(z)$,

$$|f'(z)|\leqslant\frac{2R|f(z)|}{R^2-|z|^2}\ln\frac{M}{|f(z)|}.$$

В частности, при $z=0$ последнее соотношение перейдет в следующее:

$$R\leqslant2\left|\frac{a_0}{a_1}\right|\ln\frac{M}{|a_0|}.$$

n° 2. Применим предыдущее неравенство к целой функции $f(z)$, не имеющей нулей.

Мы будем иметь

$$|f'(z)|\leqslant2|f(z)|\left[\frac{\ln M(R)}{R}-\frac{\ln|f(z)|}{R}\right],$$

начиная с достаточно большого $R$.

Отсюда, если целая функция удовлетворяет условию $\frac{\ln M(R)}{R}\to0$, то ее производная $f'(z)$ равна нулю в каждой точке $z$, т. е. $f(z)\equiv\mathrm{const}$.

Итак, имеем предложение: *целая функция, не имеющая нулей и удовлетворяющая условию* $\frac{\ln M(R)}{R}\to0$ (например порядка $<1$), *необходимо есть константа.*

## § 8. Модулярная функция [2]

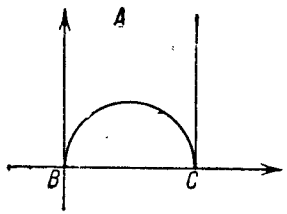
n° 1. В предыдущем мы рассмотрели приложения общих принципов настоящей главы к изучению двух классов аналитических функций (§ 5 и 7). В этих приложениях подчиняющими функциями были элементарные аналитические функции, и поэтому мы имели возможность выразить в элементарных символах точные оценки для соответствующих классов функций. В дальнейшем для изучения семейств функций нам придется пользоваться в качестве подчиняющей так называемой модулярной функцией. Задача настоящего параграфа и заключается в том, чтобы познакомиться с некоторыми основными свойствами модулярной функции, необходимыми для дальнейших приложений ее к исследованию общих вопросов теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим в плоскости комплексного переменного $t$ криволинейный треугольник $ABC$: $A$ есть бесконечно удаленная точка, $B$ — начало координат, $C$ имеет аффиксом единицу; сторона $AB$ есть положительная часть мнимой оси, $AC$ — ее параллель, проходящая через точку $C$, наконец сторона $BC$ есть полуокружность с диаметром $BC$ (черт. 3).

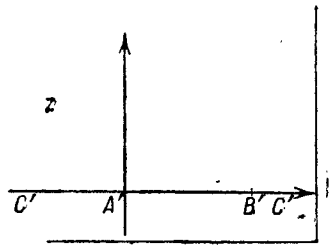
Треугольник определен неравенствами

$$0 \leqslant \operatorname{Reel} t \leqslant 1, \quad \left|t - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим также верхнюю полуплоскость плоскости комплексного переменного $z$: обозначим через $A'$ начало координат, через $B'$ —

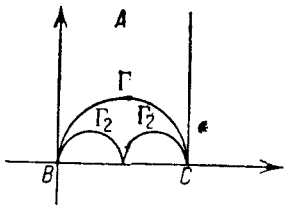



Черт. 3.




Черт. 4.

точку с аффиксом единица, через $C'$ — бесконечно удаленную точку (черт. 4). Три точки $A$, $B$, $C$ расположены в положительном направлении на границе треугольника, ориентированной относительно его внутренности. Точки $A'$, $B'$, $C'$ также расположены в положительном направлении относительно верхней полуплоскости. Следовательно, существует функция, притом единственная, комплексного переменного $t$, реализующая конформное отображение треугольника $ABC$ на верхнюю полуплоскость таким образом, что трем точкам $A$, $B$, $C$ отвечают при этом отображении соответственно три точки $A'$, $B'$, $C'$. Эту функцию мы обозначим через $z = \lambda(t)$ и назовем *модулярной функцией*.




Черт. 5.

$n^\circ$ 2. Покажем, что *модулярная функция аналитически продолжаема на всю верхнюю полуплоскость, причем действительная ось служит для нее существенно особой линией*. Аналитическое продолжение выполняется на основании принципа симметрии.

Пусть $D$ — область, ограниченная сегментом $BC$ действительной оси и двумя прямыми $AB$ и $AC$ (черт. 5).

Согласно определению, функция голоморфна во всей части $D_1$ области, расположенной сверху от полуокружности $\Gamma_1$ диаметра $BC$; она непрерывна и имеет действительные значения на этой полуокружности. Применяя принцип симметрии к $D_1$ относительно $\Gamma_1$, мы продолжим функцию в область, служащую симметричным изображением $D_1$ относительно $\Gamma_1$; эта область ограничена снизу двумя полуокружностями $\Gamma_2$. Таким образом функция голоморфна во всей части $D_2$ области $D$, расположенной сверху от полуокружностей $\Gamma_2$; она непрерывна и имеет действительные значения на этих полуокружностях. Прилагая снова принцип симметрии, продолжим функцию в области, служащие симметричными изображениями $D_2$ относительно $\Gamma_2$; эти области ограничены снизу полуокружностями $\Gamma_3$. Таким образом функция будет голоморфной во всей части $D_3$ области $D$, расположенной сверху от полуокружностей $\Gamma_3$; она непрерывна и имеет действительные значения на этих полуокружностях. Так мы можем продолжать неограниченно.



Применяя принцип симметрии относительно полуокружностей $\Gamma_n$, продолжим функцию в области, симметричные с $D_n$ относительно $\Gamma_n$. Эти области ограничены сверху полуокружностями $\Gamma_n$, а снизу — полуокружностями $\Gamma_{n+1}$; их общие точки с $D_n$ суть точки $\Gamma_n$. Функция будет голоморфной во всей части $D_{n+1}$ области $D$, расположенной сверху от полуокружностей $\Gamma_{n+1}$; на этих полуокружностях она непрерывна и имеет действительные значения. Каждая из этих областей $D_n$ содержится в следующих и в области $D$. Мы докажем, что функция аналитически продолжаема во всю область $D$, если покажем, что, какова бы ни была точка $P$ внутри этой области, она находится, начиная с достаточно большого $n$, внутри $D_n$.

В самом деле, рассмотрим симметрию относительно одной полуокружности $\Gamma_n$: так как функция голоморфна в области $D_n$, которая содержит всю ее часть $\Delta(\Gamma_n)$, расположенную сверху от этой полуокружности $\Gamma_n$, то при продолжении функция будет голоморфной в области, содержащей, по крайней мере, изображение части $\Delta(\Gamma_n)$ относительно $\Gamma_n$; это же изображение ограничено снизу двумя полуокружностями, ортогональными к действительной оси, радиус которых равен половине радиуса $\Gamma_n$. Следовательно, полуокружности $\Gamma_{n+1}$, получающиеся от симметрии относительно любой полуокружности $\Gamma_n$, имеют радиусы, меньшие или равные половине радиуса $\Gamma_n$; отсюда немедленно вытекает, что радиусы полуокружностей $\Gamma_n$ не больше $\frac{1}{2^n}$. Так как $\frac{1}{2^n}$ стремится к нулю при неограниченном возрастании $n$, то всякая точка $t$ области $D$ будет находиться в области $D_n$, начиная с достаточно большого $n$, что и нужно.

Так как радиусы полуокружностей $\Gamma_n$ стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$, то при достаточно большом $n$ внутри всякой полуокружности, ортогональной к действительной оси, имеется некоторая полуокружность $\Gamma_n$, и, следовательно, находится бесконечное множество их.

Отсюда легко заключить, что функция не может быть продолжена за отрезок $BC$ действительной оси, т. е. что все точки этого отрезка являются существенно особыми для функции.

Действительно, предположим, что точка $P$ сегмента $BC$ была бы правильной точкой или полюсом модулярной функции, тогда возможно найти круг с центром в этой точке, внутри которого функция мероморфна и не принимает двух из трех значений 0, 1, $\infty$. С другой стороны, рассматривая одну из окружностей $\Gamma_n$, внутреннюю к нашему кругу, мы видим, что функция принимает в точках пересечения $\Gamma_n$ с действительной осью два различных из трех значения 0, 1, $\infty$, и мы пришли к противоречию.

Итак, мы доказали, что модулярная функция аналитически продолжается на всю область $D$. Отсюда легко перейти ко всей верхней

полуплоскости. Так как функция непрерывна и имеет действительные значения на $AB$ и $AC$, то принцип симметрии позволяет нам заключить, что она обладает в области $D_1'$, расположенной в верхней полуплоскости в полосе $-1 \leqslant \operatorname{Reel}(t) \leqslant +1$, тремя следующими свойствами: она голоморфна внутри $D_1'$; все точки отрезка $(-1, +1)$ действительной оси являются для нее существенно особыми точками; наконец она непрерывна и имеет действительные значения на двух полупрямых, параллельных мнимой оси, проходящих через точки $-1$ и $+1$.

Прилагая принцип симметрии относительно прямой $CA$ к части области $D_1'$, расположенной справа от мнимой оси, т. е. к $D$, и относительно параллели мнимой оси, проходящей через точку $-1$, к части области $D_1'$, расположенной слева от этой оси, мы видим, что функция обладает в области $D_2'$, расположенной в верхней полуплоскости в полосе $-2 \leqslant \operatorname{Reel}(t) \leqslant 2$, тремя следующими свойствами: она голоморфна внутри $D_2'$; точки отрезка $(-2, +2)$ действительной оси служат для нее существенно особыми; она непрерывна и имеет действительные значения на параллелях к мнимой оси, проходящих через точки $+2$ и $-2$. Возможно неограниченно продолжать применение принципа симметрии.

Заметив, что функция голоморфна внутри области $D_{n+1}'$, расположенной в верхней полуплоскости в полосе $-2^n \leqslant \operatorname{Reel}(t) \leqslant 2^n$, точки отрезка $(-2^n, 2^n)$ будут существенно особыми для нее; наконец она непрерывна и имеет действительные значения на параллелях к мнимой оси, проходящих через точки $+2^n$, $-2^n$; можно применить принцип симметрии для части области $D_{n+1}'$, расположенной справа от мнимой оси относительно параллели к мнимой оси с абсциссой $2^n$, и также для части области $D_{n+1}'$, расположенной слева от этой оси относительно прямой с абсциссой $-2^n$; мы видим тогда, что функция обладает в области $D_{n+2}'$, расположенной в верхней полуплоскости в полосе $-2^{n+1} \leqslant \operatorname{Reel}(t) \leqslant 2^{n+1}$, теми же свойствами, что в области $D_{n+1}'$. Так как $2^n$ неограниченно возрастает вместе с $n$, то всякая точка верхней полуплоскости будет находиться внутри области $D_n'$, начиная с достаточно большого $n$; наше утверждение, таким образом, доказано.

n° 3. Если обозначить через $S$ поверхность Римана, в которую модулярная функция $z = \lambda(t)$ переводит верхнюю полуплоскость, то обратная функция $t = \nu(z)$ будет однозначной на поверхности $S$ и регулярной в окрестности каждой точки.

Всякая замкнутая линия, проведенная в плоскости $z$ и не окружающая ни одной из трех точек $0, 1, \infty$, может быть рассматриваема как замкнутая линия, проведенная на $S$.

n° 4. В приложениях важно бывает знать функцию, отображающую конформно поверхность Римана $S$ на единичный круг, причем точке $z_0 = \lambda(t_0)$ соответствует центр этого круга.

Для построения этой функции заметим, что преобразование $u = \dfrac{t - t_0}{t - \bar{t}_0}$ переводит верхнюю полуплоскость комплексного переменного $t$ на единичный круг плоскости комплексного переменного $u$ так, что точке $t_0$ соответствует центр этого круга.



Следовательно, функция $u = \dfrac{\nu(z) - \nu(z_0)}{\nu(z) - \overline{\nu(z_0)}}$ решает поставленную задачу.

Итак, мы видим, что поверхность Римана $S$ конформно отображается на единичный круг и, следовательно, допускает функцию Грина для всякой точки.

## § 9. Неравенство Шоттки [2]

n° 1. Пусть $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ — функция, голоморфная в круге с центром $O$ радиуса $R$, не принимающая значений 0 и 1.

Метод Линделефа (§ 6) применяется, если заметим, что функция $f(z)$ подчинена в круге $|z| < R$ функции, реализующей конформное отображение этого круга на поверхность Римана $S$ (§ 8), с переводом точки $z = 0$ в точку с аффиксом $a_0$.

Когда точка $z$ находится в замкнутой области, ограниченной кривой $G_Z(z, 0) = \lambda$, т. е. $|z| \leqslant Re^{-\lambda}$, то точка $w = f(z)$ принадлежит области, ограниченной кривой $G_S(z, a_0) = \lambda$.

Расстояние точек этой кривой до точки $O$ имеет минимум, не равный нулю, так как в противном случае кривая проходила бы через точку $O$, а это было бы в противоречии с тем фактом, что, когда $z$ стремится к граничной точке, функция $G_S(z, a_0)$ стремится к нулю. Установленный минимум зависит только от $a_0$ и $\lambda$; обозначим его через $m_0(a_0, \lambda)$; также, расстояние точек кривой до точки $z = 1$ имеет минимум, не равный нулю, $m_1(a_0, \lambda)$; наконец расстояние точек кривой от точки $O$ имеет конечный максимум $M_0(a_0, \lambda)$. Таким образом при $|z| \leqslant Re^{-\lambda}$ функция $f(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$m_0(a_0, \lambda) \leqslant |f(z)| \leqslant M_0(a_0, \lambda),$$

$$|f(z) - 1| \geqslant m_1(a_0, \lambda).$$

Если одно из трех последних неравенств обращается в равенство, то функция $f(z)$ конформно отображает круг $|z| < R$ на поверхность $S$. В этом случае, если $t_0 = \nu(a_0)$ есть один из корней уравнения $\lambda(t) = a_0$, то ветвь функции $\nu[f(z)]$, которая принимает значение $t_0$ для $z = 0$, конформно отображает круг $|z| < R$ на верхнюю полуплоскость, причем началу координат соответствует точка $t_0$.

Отсюда вытекает, что функция $f(z)$ — вида $f(z) = \lambda(t)$, где $\dfrac{t - t_0}{t - \bar{t}_0} = e^{i\alpha} \dfrac{z}{R}$.

n° 2. Обозначая через $\Omega(a_0\theta)$ выражение $M_0\left(a_0, \ln \dfrac{1}{\theta}\right)$, $0 < \theta < 1$, получим, в частности, предложение Шоттки:

*Если функция $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ в круге с центром $O$ радиуса $R$ голоморфна и не принимает значений 0, 1, то существует число $\Omega(a_0, \theta)$, зависящее только от $a_0$ и $\theta$ $(0 < \theta < 1)$, такое, что для $|z| \leqslant R\theta$ удовлетворится всегда неравенство $|f(z)| \leqslant \Omega(a_0, \theta)$.*

## § 10. Теорема Ландау [2]

n° 1. В предыдущем параграфе мы применили первую часть метода Линделефа (§ 6) к изучению функции $f(z)$, голоморфной при $|z|<R$ и не принимающей значений 0 и 1. Применим же теперь вторую часть этого метода, относящуюся к оценке растяжения.

Неравенство (2) § 6 нам дает

$$R\,|f'(0)|\leqslant\gamma_S(a_0),$$

где $\gamma_S$ есть радиус поверхности $S$ в точке $a_0$. Считая $a_1\neq 0$, мы имеем $R\leqslant\frac{\gamma_S(a_0)}{|a_1|}$, что выражает *теорему Ландау*:

*Если функция $f(z)=a_0+a_1z+\ldots$ — голоморфна в окрестности начала координат, то существует число $R_0=\frac{\gamma_S(a_0)}{|a_1|}$, зависящее только от $a_0$ и $a_1\neq 0$, такое, что для $|z|\leqslant R_0$ имеет место, по крайней мере, одна из трех возможностей: или функция имеет особую точку, или функция принимает значение 0, или функция принимает значение 1.*

*Наконец, если функция голоморфна и не принимает значений 0 и 1 внутри круга $|z|<R_0$, то окружность $|z|=R_0$ есть существенно особая линия для функции, которая в этом случае будет модулярной в этом круге.*

n° 2. В частности, теорема Ландау содержит в себе известное предложение Пикара о целых функциях: если целая функция имеет два исключительных конечных значения, то она приводится к постоянному.

В самом деле, пусть $f(z)$ — такая функция.

Не уменьшая общности, мы можем считать, что она не принимает значений 0 и 1. Тогда неравенство $R\,|f'(0)|\leqslant\gamma_S(a_0)$ удовлетворяется, как бы велико ни было $R$; и так как вторая часть неравенства не зависит от $R$, то имеем $f'(0)=0$. Рассуждение справедливо, каково бы ни было выбранное начало координат; следовательно, производная нашей функции всюду равна нулю, а это значит, что функция вырождается в постоянное.

n° 3. В заключение этого параграфа представим выражение $\gamma_S(a_0)$ в явном виде.

Из § 8 мы знаем, что функция

$$\frac{\nu(z)-\nu(a_0)}{\nu(z)-\overline{\nu(a_0)}}$$

конформно отображает поверхность $S$ на единичный круг с переводом точки $a_0$ в центр этого круга. Производная этой функции в точке $a_0$ имеет значение $\frac{\nu'(a_0)}{\nu(a_0)-\overline{\nu(a_0)}}$, и мы отсюда получаем

$$\gamma_S(a_0)=\frac{2\operatorname{Im}[\nu(a_0)]}{|\nu'(a_0)|}.$$

Таким образом радиус теоремы Ландау есть $R_0=\frac{2\operatorname{Im}[\nu(a_0)]}{|a_1|\,|\nu'(a_0)|}$.



## § 11. Метод Линделефа для односвязной области

n° 1. Распространяя определение § 4, мы скажем, что *аналитическая функция $f(z)$ подчинена в односвязной области $D$ аналитической функции $F(z)$, если выполняются следующие условия:*

1) $f(z_0)=F(z_0)$, где $z_0$ — *некоторая точка области $D$;*

2) *когда точка $z$ описывает замкнутый контур, принадлежащий области $D$, с началом и концом в точке $z_0$, то точка $w=f(z)$ описывает замкнутый контур на поверхности Римана $S$ с началом и концом в точке $P$, где $S$ получается в результате конформного отображения области $D$ посредством функции $F(z)$, точка $P$ является при этом отображением точки $z_0$.*

Функция $F(z)$ носит название *подчиняющей* относительно $f(z)$.

Предположим, что функция $f(z)$ подчинена в области $D$ функции $F(z)$ и $S$ есть поверхность Римана, соответствующая подчиняющей функции. Метод Линделефа, изложенный в § 6 для круга, легко распространяется на случай любой односвязной области $D$, если выполним вспомогательное конформное отображение области $D$ на единичный круг, при котором точке $z_0$ соответствует центр круга, и, сверх того, заметим, что функция Грина есть инвариант конформного преобразования.

Таким образом мы приходим к следующему предложению:

*Если точка $z$ находится в замкнутой области, ограниченной кривой $G_D(z;\,z_0)=\lambda$, $\lambda>0$, то точка $w=f(z)$ находится в замкнутой области, ограниченной кривой $G_S[w;\,w_0]=\lambda$.*

Кроме того, *если точка $z$ лежит на кривой $G_D(z;\,z_0)=\lambda$, а соответствующая точка $w=f(z)$ находится на кривой $G_S[w;\,w_0]=\lambda$, то функция $w=f(z)$ реализует конформное отображение области $D$ на поверхность Римана $S$.*

В этом заключается первая часть метода Линделефа.

n° 2. Поступая аналогично § 6, *предельным переходом получим вторую часть метода Линделефа, выражаемую неравенством*

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{\gamma_S(w_0)}{\gamma_D(z_0)},$$

где $w_0=f(z_0)$, $\gamma_D(z_0)$ есть радиус области $D$ в точке $z_0$, определяемый по формуле $\gamma_D(z_0)=|\varphi'(0)|$, если $\varphi(\zeta)$ реализует конформное отображение единичного круга $|\zeta|<1$ на область $D$ с переводом точки $\zeta=0$ в точку $z=z_0$. Аналогично определяется $\gamma_S(w_0)$.

Наконец, если в последнем неравенстве имеется знак равенства, то функция $f(z)$ конформно отображает область $D$ на риманову поверхность $S$ [2].

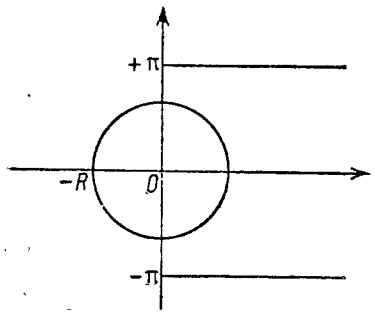
## § 12. Теорема Пикара [2]

n° 1. *Если функция $f(z)$ однозначна в окрестности существенно особой изолированной точки, то уравнение $f(z)=A$ допускает бесконечное число корней в окрестности этой точки, каково бы ни было конечное постоянное $A$, за исключением, быть может, одного значения.*

В самом деле, предположим, что для двух различных значений $A$ — назовем их $a$ и $b$ — уравнение $f(z)=A$ не имело бы бесконечного числа корней в окрестности точки; предполагая эту точку существенно особой, мы придем к противоречию.

Всегда можно считать, что $a$ и $b$ суть 0 и 1, так как изучение функции $f(z)$ можно привести к изучению функции $g(z)=\frac{f(z)-a}{b-a}$, причем существенно особая точка для одной из этих функций будет таковой же и для другой. Мы можем также предполагать, выполнив преобразование переменного, что особая точка есть начало координат $O$.

Наконец, если уравнения $f(z)=0$ и $f(z)=1$ имеют только конечное число корней в окрестности точки $O$, то мы можем окружить точку $O$ кругом радиуса $R$ достаточно малого настолько, что в этом круге наши два уравнения не имеют совсем корней. Так как для нас затруднительно приложить метод Линделефа (§ 11) к кругу радиуса $R$, в котором функция голоморфна, исключая точки $O$, вследствие двухсвязности этой области, то мы будем рассматривать $z$ как функцию комплексного переменного $u$ правой полуплоскости $U$, выполнив преобразование $z=Re^{-u}$; так как $z$ — функция периодическая относительно $u$ и с периодом $2\pi i$, то можно предполагать $u$ заключенным в полосе $-\pi \leqslant \operatorname{Im}(u) \leqslant +\pi$, которая посредством функции $z=Re^{-u}$ преобразуется в круг с центром $O$ радиуса $R$, разрезанный вдоль отрезка $(-R, O)$ действительной оси (черт. 6).



Черт. 6.

Пусть $C$ — какое-нибудь число, отличное от нуля и единицы. По теореме Вейерштрасса можно найти последовательность точек $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, стремящихся к точке $O$ и таких, что числовая последовательность $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n), \ldots$ стремится к $C$.

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — соответствующие точки, лежащие внутри предыдущей полосы, $\lambda$ — произвольное положительное число, $\lambda' < \lambda$. Когда $n$ неограниченно возрастает, точки $w_n = f(z_n)$ стремятся к $C$ и для $n > N$ кривые $G_Z(z, z_n)=\lambda$ все расположены внутри кривой $G_Z(z, C)=\lambda'$. Вследствие метода Линделефа (§ 11) мы, следовательно, можем утверждать, что для $n > N$ неравенство $G_U(u, u_n) \geqslant \lambda$ влечет неравенство $G_S(f(z), f(z_n)) \geqslant \lambda$ или $|f(z)| \leqslant M_0[f(z_n), \lambda] < M_0[C, \lambda']$ (§ 9), где $z=Re^{-u}$.

Кривая $G_U(u, u_n)=\lambda$ есть окружность $\left|\frac{u-u_n}{u+\overline{u_n}}\right| = e^{-\lambda}$; эта окружность пересекает параллель к мнимой оси, проходящей через ее центр по отрезку длины

$$\frac{4\operatorname{Reel}(u_n)}{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}.$$



Для $n > N'$ этот отрезок имеет длину, бо́льшую $2\pi$, потому что когда $n$ неограниченно возрастает, то $\operatorname{Reel}(u_n)$ стремится к бесконечности.

Предполагая $n$ бо́льшим одновременно $N$ и $N'$, мы заключаем, что на отрезке длины $2\pi$, параллельном мнимой оси, функция $f(Re^{-u}) = f_1(u)$ по модулю меньше $M_0(C, \lambda')$.

Этому отрезку в плоскости $z$ соответствует вся окружность с центром $O$ радиуса $Re^{-\operatorname{Reel}(u_n)}$. Таким образом функция $f(z)$ по модулю меньше, чем $M_0(C, \lambda')$ на бесконечном числе окружностей с центром $O$, радиусы которых стремятся к нулю; эта функция, следовательно, ограничена числом $M_0(C, \lambda')$ во всякой точке, лежащей между двумя из этих окружностей, т. е. в окрестности точки $O$. Последнее же находится в противоречии с теоремой Вейерштрасса, что и доказывает нашу теорему.

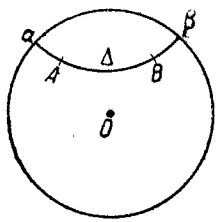
Зак 1672. — П. И. Привалов.

## ГЛАВА VII

# ПОДЧИНЕННЫЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ОБОБЩЕННОМ СМЫСЛЕ

## § 1. Неевклидова метрика [2]

n° 1. Известно, что аксиоматика геометрии Лобачевского отличается от аксиоматики геометрии Евклида только в одном пункте, а именно: вместо постулата Евклида о параллельных прямых „через точку, внешнюю к прямой, можно провести прямую и притом только одну, не встречающую данной прямой", вводится следующий постулат Лобачевского: „через точку, внешнюю к прямой, проходит бесконечное множество прямых, не встречающих данной прямой; эти прямые заполняют некоторый угол, стороны которого — граничные прямые — называются параллельными данной прямой". Далее, „свойство параллелизма двух прямых не зависит от точки, выбранной на одной или другой прямой".



Черт. 7.

Чтобы выполнить евклидово изображение геометрии Лобачевского, мы будем рассматривать в части евклидова пространства евклидовы геометрические элементы и операции, которые заставим соответствовать элементам и операциям геометрии Лобачевского, обозначая их тем же названием с присоединением слова „неевклидов", мы установим, что эти элементы обладают свойствами, которые выражаются в указанных терминах посредством основных предложений геометрии Лобачевского.

Обозначим через $G$ внутреннюю часть евклидовой окружности $\Gamma$, называемой фундаментальной. Условимся за неевклидову точку принимать точку внутри $G$, за неевклидову прямую — часть окружности, ортогональной к $\Gamma$, расположенную на $G$. Через две точки $A$, $B$ проходит единственная неевклидова прямая (черт. 7); эта окружность встречает $\Gamma$ в точках $\alpha$ и $\beta$.

По определению неевклидово расстояние между двумя точками $A$, $B$ есть логарифм ангармонического отношения четырех точек $\alpha$, $\beta$, $B$, $A$ окружности $\Delta$ с точностью до множителя $k$, которому возможно приписать произвольное положительное числовое значение

$$D(A, B) = k \ln(\alpha, \beta, B, A) > 0. \qquad (1)$$

Легко видеть, что неевклидово расстояние $D(A, B)$ неограниченно возрастает, когда одна из точек $A$ или $B$ стремится к $\alpha$ или $\beta$. Таким



образом окружность $\Gamma$ может быть рассматриваема как изображение множества бесконечно удаленных точек неевклидовой плоскости. По определению, неевклидов угол между двумя неевклидовыми прямыми есть угол между двумя соответствующими окружностями. Неевклидовы перемещения суть линейные преобразования, сохраняющие внутренность окружности $\Gamma$.

n° 2. Чтобы показать, что эти определения удовлетворяют постулатам геометрии Лобачевского, констатируем, не входя в детали, лишь следующее:

а) Неевклидовы перемещения сохраняют неевклидовы прямые, расстояния и углы.

Это очевидно в силу свойств линейных преобразований, сохраняющих внутренность окружности $\Gamma$.

б) Неевклидовы расстояния складываются на неевклидовой прямой, т. е. если $A$, $B$, $C$ — три точки на неевклидовой прямой, то

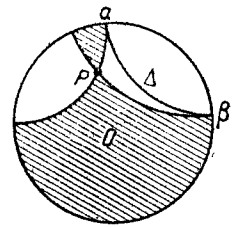
$$D(A, C) = D(A, B) + D(B, C). \qquad (2)$$

Действительно, обозначим через $\alpha$, $\beta$, $a$, $b$, $c$ аффиксы в комплексной плоскости точек $\alpha$, $\beta$, $A$, $B$, $C$ окружности $\Delta$ и покажем, что

$$(\alpha, \beta, c, a) = (\alpha, \beta, b, a)(\alpha, \beta, c, b).$$

Справедливость последнего равенства легко проверить, если написать его в раскрытом виде:

$$\frac{c-\alpha}{c-\beta}\,\frac{a-\beta}{a-\alpha} = \frac{b-\alpha}{b-\beta}\,\frac{a-\beta}{a-\alpha}\,\frac{c-\alpha}{c-\beta}\,\frac{b-\beta}{b-\alpha}.$$



Черт. 8

Логарифмируя это равенство и умножая на $k$, найдем (2).

в) Постулат Лобачевского о параллельных выполняется.

Рассмотрим неевклидовы прямые, выходящие из точки $P$, и изучим их расположение относительно неевклидовой прямой $\Delta$, не содержащей $P$.

Вводя окружности $P\alpha$, $P\beta$, касательные к $\Delta$ в точках $\alpha$, $\beta$, мы видим, что неевклидовы прямые, выходящие из $P$, разделяются на два класса, встречающие $\Delta$ и не встречающие ее; последние принадлежат некоторому углу, заштрихованному на черт. 8, ограниченному прямыми $P\alpha$, $P\beta$, параллельными $\Delta$. Так как условие параллелизма выражается условием встречи в точке фундаментальной окружности евклидовых окружностей, ортогональных к основной окружности, то отсюда становится очевидным свойство параллелизма, формулированное в начале параграфа.

n° 3. Обозначим аффиксы данных точек через $z_1$, $z_2$, и выполним неевклидово перемещение, переводящее $z_1$ в центр $O$ окружности $\Gamma$ (черт. 9).

Если $\Gamma$ есть окружность радиуса $R$ с центром в начале координат, а $w_2$ — точка, соответствующая точке $z_2$, и $|w_2| = r$, то

$$D(z_1, z_2) = D(O, w_2) = k \ln(-R, +R, r, O) = k \ln \frac{R+r}{R-r}.$$

В самом деле, при неевклидовом перемещении неевклидова прямая $z_1z_2$ переходит в прямую $Ow_2$, причем $D(z_1, z_2) = D(Ow_2)$. С другой стороны, посредством вращения около точки $O$ точка $w_2$ переходит в точку с аффиксом $r$ и, значит, $D(O, w_2) = D(O, r)$.

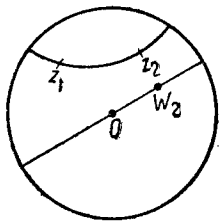
Окончательно находим

$$D(z_1, z_2) = D(O, r) = k \ln(-R, +R, r, O) = k \ln \frac{R+r}{R-r},$$

ч. т. д.

Итак, чтобы выразить $D(z_1, z_2)$ через аффиксы точек $z_1, z_2$, остается сделать это для $r = |w_2|$. Заметив, что линейное преобразование, переводящее $z_1$ в центр окружности Г и сохраняющее эту окружность, есть

$$w = e^{i\theta} \frac{R^2(z - z_1)}{R^2 - z\bar{z}_1},$$




Черт. 9.

находим $w_2 = e^{i\theta} \dfrac{R^2(z_2 - z_1)}{R^2 - z_2\bar{z}_1}$ и, значит,

$$r = |w_2| = \left| \frac{R^2(z_2 - z_1)}{R^2 - z_2\bar{z}_1} \right|.$$

Итак, мы получили следующую формулу для вычисления неевклидова расстояния между двумя точками с данными аффиксами $z_1$ и $z_2$:

$$D(z_1, z_2) = k \ln \frac{R+r}{R-r}, \tag{3}$$

где

$$r = \left| \frac{R^2(z_2 - z_1)}{R^2 - z_2\bar{z}_1} \right|.$$

n° 4. По определению, неевклидовой окружностью назовем место точек, неевклидово расстояние которых до данной точки есть постоянное число $\rho$ ($\rho > 0$). На основании формулы (3), если $z_0$ есть данная точка, то неевклидова окружность есть евклидова кривая, имеющая уравнение

$$\left| \frac{z - z_0^*}{z - z_0} \right| = \frac{R}{|z_0|} \cdot \frac{e^{\frac{\rho}{k}} + 1}{e^{\frac{\rho}{k}} - 1}, \tag{4}$$

где $z_0^* = \dfrac{R^2}{\bar{z}_0}$.

Из последнего уравнения мы усматриваем, что оно изображает окружность, внутреннюю к фундаментальной, принадлежащую к пучку окружностей с точками Понселе $z_0$ и $z_0^* = \dfrac{R^2}{\bar{z}_0}$, симметричными относительно Г. Точками Понселе пучка окружностей называют две точки, симметричные относительно каждой окружности пучка, или, что то же, центры пучка, ортогонального к данному. Всякая внутренняя к Г окружность может быть, очевидно, рассматриваема и притом, однозначным способом как неевклидова окружность. Точка $z_0$ называется неевклидовым центром, неевклидовы прямые, выходящие из $z_0$, — неевклидовыми радиусами. Легко видеть, что они ортогональны к неевклидовой окружности и ко всем окружностям с тем же неевклидовым центром. В самом деле, это будут окружности, ортогональные к Г и проходящие через $z_0$, а значит, они будут ортогональны ко всем окружностям пучка с точками Понселе $z_0$ и $\dfrac{R^2}{\bar{z}_0}$ [1]).



## § 2. Лемма Шварца-Пика [2; 21]

n° 1. В главе VI, § 6 мы установили предложение Шварца-Пика. Пользуясь неевклидовой метрикой, изложенной в предыдущем параграфе, ему можно придать следующую геометрическую формулировку: функция $\varphi(z)$, голоморфная при $|z| < R$, удовлетворяющая условию $|\varphi(z)| < R$, обладает следующими свойствами:

1) *если точка $z$ принадлежит замкнутому неевклидову кругу $D(z_0, z) \leqslant \rho$, то точка $w = \varphi(z)$ находится в замкнутом неевклидовом круге $D(w_0, w) \leqslant \rho$ того же неевклидова радиуса $\rho$ с центром $w_0 = \varphi(z_0)$;*

2) *если точка $z$ лежит на неевклидовой окружности $D(z_0, z) = \rho$, а соответствующая точка $w = \varphi(z)$ находится на неевклидовой окружности $D(w_0, w) = \rho$ того же неевклидова радиуса $\rho$ с центром $w_0 = \varphi(z_0)$, то функция $w = \varphi(z)$ выражает неевклидово движение, переводящее $z_0$ в $w_0 = \varphi(z_0)$.*

Короче говоря, из неравенства $D(z_0, z) \leqslant \rho$ вытекает неравенство $D(\varphi(z_0), \varphi(z)) \leqslant \rho$, причем в случае равенства $D(z_0 z) = D(\varphi(z_0), \varphi(z))$ для какой-либо точки $z$, $w = \varphi(z)$ есть неевклидово движение, т. е. линейная функция вида

$$\frac{w - \varphi(z_0)}{R^2 - w\overline{\varphi(z_0)}} = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{R^2 - z\bar{z}_0}.$$

## § 3. Определение

n° 1. Обобщая определение § 1 гл. VI, мы назовем функцию $u(z)$ подчиненной в обобщенном смысле в круге $|z| < 1$ субгармонической функции $U(z)$, если имеет место соотношение

$$u(z) = U[\omega(z)],$$

где $\omega(z)$ есть любая функция, голоморфная в единичном круге, удовлетворяющая лишь условию $|\omega(z)| < 1$. Функция $U(z)$ относительно $u(z)$ носит название подчиняющей в обобщенном смысле [21].

## § 4. Принцип максимума и минимума [21]

n° 1. В силу леммы Шварца-Пика (§ 2) $\omega(z)$ либо выражает неевклидово движение, переводящее окружность неевклидова радиуса $\rho$ с центром $z_0$ в неевклидову окружность $\sum$ того же радиуса $\rho$ с центром

[1]) Более подробные сведения по вопросу изображения плоскости Лобачевского внутри фундаментальной окружности читатель может найти в моем курсе: „Введение в теорию функций комплексного переменного", 4-е изд.

$\omega(z_0)$, либо $\omega(z)$ находится внутри $\sum$, когда $z$ описывает $\sigma$. С другой стороны, субгармоническая функция достигает наибольшего значения на окружности.

Отсюда становится очевидным справедливость следующего принципа максимума:

*Если $u(z)$ — субгармоническая функция, подчиненная в обобщенном смысле в единичном круге субгармонической функции $U(z)$, то имеет место соотношение*

$$u(z) \leqslant \max_{\Sigma} U(Z), \tag{5}$$

*где $z$ принадлежит неевклидову кругу с центром $z_0$ неевклидова радиуса $\rho$, а $\sum$ обозначает неевклидову окружность того же радиуса $\rho$ с неевклидовым центром $\omega(z_0)$.*

Сверх того, знак равенства в соотношении (5) может быть только в случае, когда $\omega(z)$ есть неевклидово движение, переводящее $\sigma$ в $\sum$, т. е.

$$\frac{\omega(z)-\omega(z_0)}{1-\omega(z)\overline{\omega(z_0)}} = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}. \tag{6}$$

n° 2. Если предположить, что субгармоническая функция $U(z)$ не имеет минимума внутри области $\overline{G}$, какова бы ни была область $\overline{G}$, принадлежащая единичному кругу, то справедлив также *принцип минимума*, выражаемый неравенством

$$u(z) \geqslant \min_{\Sigma} U(Z), \tag{7}$$

где $z$ принадлежит неевклидову кругу с центром $z_0$ неевклидова радиуса $\rho$, а $\sum$ есть неевклидова окружность того же радиуса $\rho$ с центром $\omega(z_0)$, причем знак равенства в (7) возможен лишь в случае, когда $\omega(z)$ есть неевклидово движение, переводящее $\sigma$ в $\sum$.

Это утверждение непосредственно следует из леммы Шварца-Пика аналогично неравенству (5).

В частности, оба принципа (5) и (7) имеют место для гармонической функции $U(z)$.

## § 5. Принцип средних значений [21]

n° 1. Выполним линейные преобразования

$$\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} = t, \qquad \frac{\omega(z)-\omega(z_0)}{1-\overline{\omega(z_0)}\,\omega(z)} = \omega^1(z),$$

из которых найдем $\omega^1(z) = \omega_1(t)$, $\omega_1(0) = 0$, $|\omega_1(t)| < 1$ при $|t| < 1$. Полагая $z = l(t)$, $\omega = L(\omega_1)$ и обозначая $ul$ через $u_1$, а $UL$ — через $U_1$, перепишем соотношение $u(z) = U[\omega(z)]$ в виде

$$u_1(t) = U_1[\omega_1(t)].$$



В силу доказанного (гл. VI, § 2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_1(re^{i\varphi})\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_1(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

каково бы ни было $r < 1$.

Возвращаясь к переменному $z$ при помощи подстановки $t = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ и обозначая через $\sigma$ и $\sum$ неевклидовы окружности с центрами $z_0$ и $\omega(z_0)$ одного и того же неевклидова радиуса $\rho = \ln\frac{1+r}{1-r}$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} u(z)\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} U(Z)\,d\Theta, \tag{8}$$

где $d\theta$ и $d\Theta$ — углы между бесконечно близкими неевклидовыми радиусами в $\sigma$ и $\sum$. Знак равенства в (8) возможен, очевидно, лишь в случаях (гл. VI, § 2), когда либо $U(z)$ есть гармоническая функция внутри $\sum$, либо $\omega(z)$ есть неевклидово движение, переводящее $\sigma$ в $\sum$, определяемое формулой (6).

n° 2. Предположим теперь, что функция $U(z) \geqslant 0$ в единичном круге — субгармоническая в этом круге. Тогда $U^p(z)$, $p > 1$ будет субгармонической функцией в единичном круге (гл. III, § 10). Вспомнив, что $u(z)$ подчинена в обобщенном смысле в единичном круге функции $U(z)$, мы немедленно заключаем, что $u^p(z)$, $p > 1$ подчинена в этом круге субгармонической функции $U^p(z)$.

Поэтому мы вправе применить к функциям $u^p(z)$ и $U^p(z)$ доказанное соотношение (8), что нам даст

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} u^p(z)\,d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} U^p(Z)\,d\Theta\right]^{\frac{1}{p}} \quad (p > 1) \tag{9}$$

или

$$M_p[u, \sigma] \leqslant M_p[U, \textstyle\sum].$$

Таким образом мы доказали теорему:

*Если субгармоническая функция $u(z)$ подчинена в обобщенном смысле в единичном круге субгармонической функции $U(z) \geqslant 0$, то имеет место неравенство*

$$M_p[u, \sigma] \leqslant M_p[U, \textstyle\sum] \quad (p > 1), \tag{9'}$$

*где $\sigma$ и $\sum$ — неевклидовы окружности с центрами $z_0$ и $\omega(z_0)$ одного и того же неевклидова радиуса $\rho$, причем знак равенства возможен лишь в случае, когда $\omega(z)$ есть линейная функция, определяемая по формуле* (6).

n° 3. Если мы предположим, что функция $U(z)$ есть логарифмически-субгармоническая в единичном круге, то $U^\alpha(z)$ при любом $\alpha > 0$ будет субгармонической, и неравенство (8) применяется немедленно к функциям $u^\alpha$ и $U^\alpha$, что нам дает предложение:

*Если функция $u(z)$ подчинена в обобщенном смысле в единичном круге логарифмически-субгармонической функции $U(z)$, то имеет место неравенство*

$$M_\alpha[u, \sigma] \leqslant M_\alpha[U, \Sigma] \quad (\alpha > 0), \tag{10}$$

*где $\sigma$ и $\Sigma$ — неевклидовы окружности с центрами $z_0$ и $\omega(z_0)$ одного и того же неевклидова радиуса $\rho$, причем знак равенства возможен лишь в случае, если $\omega(z)$ есть линейная функция, определяемая по формуле* (6).

В заключение заметим, что неравенство (5), выражающее принцип максимума, может быть рассматриваемо как предельное при $p \to \infty$ соотношения (9).

## § 6. Случай односвязной области [21]

n° 1. Чтобы распространить предыдущие исследования на любую односвязную область $D$, предварительно перепишем неравенство (8) в иной форме. Обозначим через $G(z_0; z)$ функцию Грина для единичного круга с логарифмической особенностью при $z = z_0$. Рассматривая неевклидову окружность с центром $z_0$ неевклидова радиуса $\rho$, мы немедленно заключаем:

$$d\theta = \frac{\partial G(z; z_0)}{\partial n}\, ds,$$

где $d\theta$ есть угол между двумя бесконечно близкими неевклидовыми радиусами, $ds$ — соответствующая евклидова дуга окружности $\sigma$ и производная взята по внутренней нормали.

В самом деле, это равенство очевидно, если $z_0 = 0$; с другой стороны, при линейном преобразовании, переводящем круг с центром в начале координат неевклидова радиуса $\rho$ в неевклидов круг того же радиуса с центром (неевклидовом) $z_0$, величина $d\theta$ сохраняется, а $\frac{\partial G(z, z_0)}{\partial n} ds$ есть инвариант конформного отображения; следовательно, наше равенство справедливо.

Заметив это, перепишем неравенство (8) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} u(z)\, \frac{\partial G(z; z_0)}{\partial n}\, ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma} U(Z)\, \frac{\partial G(Z; \omega_0)}{\partial N}\, dS. \tag{11}$$

После этого можем обратиться к исследованию общего случая.

Пусть $U(z)$ есть функция, субгармоническая в односвязной области $D$, $\omega(z)$ — любая голоморфная функция в области $D$, удовлетворяющая тому условию, что проекция точек ее римановой поверхности дает область, являющуюся частью области $D$. Обозначим через $\sigma_\lambda$ и $\Sigma_\lambda$ соответственные кривые Грина

$$G_D(z; z_0) = \lambda \quad \text{и} \quad G_D(z; \omega(z_0)) = \lambda$$

области $D$. Наконец положим

$$u(z) = U[\omega(z)].$$



При этих условиях имеет место соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_\lambda} u(z)\, \frac{\partial G(z; z_0)}{\partial n}\, ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma_\lambda} U(Z)\, \frac{\partial G(Z; \omega_0)}{\partial N}\, dS. \tag{12}$$

Доказательство неравенства (12) легко приводится к вышеустановленному принципу из гл. VI, § 2 посредством конформного отображения области $D$ на единичный круг.

В самом деле, пусть $t = f(z, z_0)$, $f(z_0, z_0) = 0$, есть функция, реализующая конформное отображение области $D$ на круг $|t| < 1$ с переводом точки $z_0$ в начало координат.

Положим $f[\omega(z), \omega(z_0)] = \omega^1(z)$, откуда следует, что $\omega^1(z) = \omega_1(t)$, $\omega_1(0) = 0$, $|\omega_1(t)| < 1$. Данное соотношение

$$u(z) = U[\omega(z)]$$

перепишется в виде

$$u_1(t) = U_1[\omega_1(t)],$$

где $U_1$ — субгармоническая функция в единичном круге, причем положено

$$u_1[f(z, z_0)] = u(z), \quad U_1[f(Z, \omega(z_0))] = U(Z).$$

Доказываемое неравенство (12) с помощью конформного отображения

$$f(Z, \omega(z_0)) = f(z, z_0)$$

области $D$ в самое себя переходит в следующее:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_\lambda} u(z)\, \frac{\partial G(z; z_0)}{\partial n}\, ds \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_\lambda} U_1[f(z, z_0)]\, \frac{\partial G(z; z_0)}{\partial n}\, ds.$$

Далее, выполняя конформное отображение области $D$ на единичный круг, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_1(t)\, d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U_1(t)\, d\varphi,$$

где $t = re^{i\varphi}$, что было ранее доказано (гл. VI, § 2).

Очевидно, что знак равенства в соотношении (12) возможен лишь в случаях, когда либо $U(z)$ есть гармоническая функция внутри $\Sigma_\lambda$, либо $\omega(z)$ конформно отображает область $D$ самое в себя с переводом точки $z_0$ в $\omega(z_0)$.

n° 2. Пусть $U(z) \geqslant 0$ — субгармоническая функция в области $D$, $\omega(z)$ — голоморфная функция, отображающая область $D$ на риманову поверхность, проектирующуюся на часть области $D$.

Положим $u(z) = U[\omega(z)]$ и докажем, что

$$M_p[u, \sigma_\lambda] \leqslant M_p[U, \Sigma_\lambda] \quad (p > 1), \tag{13}$$

где положено

$$M_p[u, \sigma_\lambda] = \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_\lambda} u^p(z)\, \frac{\partial G(z; z_0)}{\partial n}\, ds\right]^{\frac{1}{p}};$$

$\sigma_\lambda$ и $\Sigma_\lambda$ суть линии Грина с уравнениями

$$G(z; z_0) = \lambda \quad \text{и} \quad G(z; \omega(z_0)) = \lambda.$$

Для доказательства стоит только применить неравенство (12) к функциям $u^p$ и $U^p$, которые будут субгармоническими, при $p > 1$.

n° 3. Неравенство (13) имеет место при любом $p > 0$, если функция $U(z)$ логарифмически-субгармоническая в области $D$, потому что тогда $u^p$ и $U^p$ будут субгармоническими при любом $p > 0$. Знак равенства в (13) возможен лишь в случае, когда $\omega(z)$ реализует конформное отображение области $D$ самое в себя.

n° 4. Из неравенства (13) при $p \to +\infty$ найдем

$$u(z) \leqslant \max_{\Sigma_\lambda} U(Z), \tag{14}$$

где $z$ принадлежит области $G(z_0, z) \geqslant \lambda$, а $\Sigma_\lambda$ обозначает линию Грина с уравнением $G(z; \omega(z_0)) = \lambda$.

Впрочем, неравенство (14) может быть непосредственно получено, если выполнить конформное отображение области $D$ на единичный круг $f(z, z_0) = t$, $f(z_0, z_0) = 0$, и положить

$$f[\omega(z), \omega(z_0)] = \omega^1(z) = \omega_1(t).$$

Тогда $\omega_1(0) = 0$, $|\omega_1(t)| < 1$ при $|t| < 1$.

Применяя классическую лемму Шварца, мы видим, что $\omega(z)$ либо реализует конформное отображение области $D$ самое в себя, переводя $\sigma_\lambda$ в $\Sigma_\lambda$, либо $\omega(z)$ находится внутри $\Sigma_\lambda$, когда $z$, описывает $\sigma_\lambda$.

Это замечание, сверх того, показывает, что знак равенства в (14) может быть только в случае, когда $\omega(z)$ конформно отображает область $D$ самое на себя, потому что субгармоническая функция, отличная от постоянного, не может достигать максимума внутри области.

n° 5. Аналогично легко доказать:

При гипотезе, что $U(z)$ не имеет минимума внутри области $\overline{G}$, какова бы ни была $\overline{G}$, принадлежащая области $D$, справедлив также принцип:

$$u(z) \geqslant \min_{\Sigma_\lambda} U(Z), \tag{15}$$

где $z$ принадлежит области $G(z, z_0) \geqslant \lambda$, а $\Sigma_\lambda$ определяется уравнением $G(z, \omega(z_0)) = \lambda$. Знак равенства в (15) возможен лишь в случае, когда $\omega(z)$ конформно отображает область $D$ самое на себя.

---

ЧАСТЬ II

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Результаты первой части были получены при помощи метода максимума и гармонической мажоранты. В основании этих результатов лежат точные экстремальные принципы.

В настоящей второй части мы будем изучать свойства субгармонических функций при помощи аналитического метода, в основании которого лежит аналитический аппарат, служащий для представления произвольной субгармонической функции. Выводу основной формулы теории субгармонических функций и будет посвящена первая глава второй части настоящей монографии.

---

ГЛАВА I

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

### § 1. Основная формула для представления субгармонической функции в классическом случае

n° 1. Рассмотрим область $D$ пространства $p$-измерений и любую непрерывную функцию $\rho(P) = \rho(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ в этой области. Будем обозначать через $D'$ область, принадлежащую вместе с своей границей области $D$, и рассмотрим выражения

$$u^*(Q) = -\int_{D'} \rho(P) \frac{d\omega}{\overline{PQ}^{p-2}} \quad (p > 2)$$

или

$$u^*(Q) = -\int_{D'} \rho(P) \ln \frac{1}{\overline{PQ}}\, d\omega \quad (p = 2), \tag{1}$$

которые называются *потенциалами, соответственно ньютонианским или логарифмическим.*

Покажем, что *потенциал во всякой точке $Q_0$ области $D'$ удовлетворяет уравнению*

$$\Delta^* u^*(Q_0) = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} p(p-2)\rho_0 \quad (p>2) \tag{2}$$

или

$$\Delta^* u^*(Q_0) = 2\pi\rho_0 \quad (p=2), \tag{3}$$

где $\Delta^*$ есть обобщенный параметр Лапласа (ч. I, гл. I, § 1) и $\rho_0 = \rho(Q_0)$.

Для доказательства проведем около точки $Q_0$ шар радиуса $h$, расположенный вместе со своей сферой в области $D'$, и обозначим через $D_1'$ внутренность этого шара; тогда $D' = D_1' + D_2'$.

В нашем случае $(p>2)$ выражение

$$\Delta_h u^*(Q_0) = \frac{1}{v}\int\limits_{D_1'} u^*(Q)\,dv - u^*(Q_0)$$

примет вид

$$\Delta_h u^*(Q_0) = -\int\limits_{D'} \rho(P)\,d\omega\left(\frac{1}{v}\int\limits_{D_1'}\frac{dv}{\overline{PQ}^{p-2}} - \frac{1}{\overline{PQ_0}^{p-2}}\right) = -\int\limits_{D_1'} - \int\limits_{D_2'} = J_1 + J_2.$$

Воспользуемся легко доказываемыми свойствами потенциальной функции:

1) для точки $P$, принадлежащей области $D_2'$, имеем:

$$\frac{1}{v}\int\limits_{D_1'}\frac{dv}{\overline{PQ}^{p-2}} = \frac{1}{\overline{PQ_0}^{p-2}},$$

так как $\frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$ в области интеграции $D_1'$ будет гармонической функцией;

2) для точки $P$, внутренней к области $D_1'$,

$$\frac{1}{v}\int\limits_{D_1'}\frac{dv}{\overline{PQ}^{p-2}} = \frac{ph^2 - (p-2)\overline{PQ_0}^2}{2h^p}\ ^{1)}.$$

Следовательно, мы имеем

$$\Delta_h u^*(Q_0) = J_1 = -\int\limits_{D_1'} \rho(P)\frac{ph^2\overline{PQ_0}^{p-2} - (p-2)\overline{PQ_0}^p - 2h^p}{2h^p\overline{PQ_0}^{p-2}}\,d\omega.$$

Полагая:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + ht\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{p-1},\\
x_2 &= x_2^0 + ht\cos\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{p-1}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(гл. I, ч. I, § 1)},\\
x_3 &= x_3^0 + ht\cos\theta_2\sin\theta_3\ldots\sin\theta_{p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_p &= x_p^0 + ht\cos\theta_{p-1},\\
0 \leqslant t < 1,\quad & 0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi\,(k=2,3,\ldots)\quad 0 \leqslant \theta_1 < 2\pi,
\end{aligned}$$

[1]) Следует разбить область интегрирования на две части при помощи сферы с центром в точке $Q_0$, проходящей через точку $P$.



где $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$ суть координаты точек $P$ и $Q_0$, и, замечая, что

$$d\omega = h^p t^{p-1}\sin\theta_2\sin^2\theta_3\ldots\sin^{p-2}\theta_{p-1}\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{p-1}\,dt,$$

мы находим

$$\Delta_h u^*(Q_0) = -h^2\int\limits_0^{2\pi} d\theta_1\int\limits_0^{\pi}\sin\theta_2\,d\theta_2\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta_3\,d\theta_3\ldots$$

$$\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{p-2}\theta_{p-1}\,d\theta_{p-1}\int\limits_0^1 \rho(P)\,\frac{t(pt^{p-2}-(p-2)t^p-2)}{2}\,dt.$$

Так как $\rho$ непрерывна в точке $Q_0$, то можно положить $\rho(P) = \rho_0 + o(1)$, где $o(1)$ — бесконечно малая вместе с $h$, и тогда предыдущее равенство примет вид

$$\Delta_h u^*(Q_0) = -\frac{h^2}{2}\rho_0\int\limits_0^{2\pi} d\theta_1\int\limits_0^{\pi}\sin\theta_2\,d\theta_2\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta_3\,d\theta_3\ldots$$

$$\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin^{p-2}\theta_{p-1}\,d\theta_{p-1}\int\limits_0^1 t(pt^{p-2}-(p-2)t^p-2)\,dt + o(h^2),$$

откуда следует

$$\lim_{h\to 0}\Delta_h u^*(Q_0) : \frac{h^2}{2(p+2)} = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} p(p-2)\rho_0,$$

т. е.

$$\Delta^* u^*(Q_0) = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} p(p-2)\rho_0, \text{ ч. т. д.}$$

n° 2. Аналогично рассматривается случай $p=2$. В этом случае выражение $\Delta_h u^*(Q_0)$ примет вид

$$\Delta_h u^*(Q_0) = -\int\limits_{D'}\rho(P)\,d\omega\left(\frac{1}{v}\int\limits_{D_1'}\ln\frac{1}{\overline{PQ}}\,dv - \ln\frac{1}{\overline{PQ_0}}\right) = -\int\limits_{D_1'} - \int\limits_{D_2'} = J_1 + J_2.$$

Воспользуемся легко доказываемыми свойствами логарифмического потенциала:

1) для точки $P$, принадлежащей области $D_2'$, имеем

$$\frac{1}{v}\int\limits_{D_1'}\ln\frac{1}{\overline{PQ}}\,dv = \ln\frac{1}{\overline{PQ_0}},$$

так как $\ln\frac{1}{\overline{PQ}}$ в области интеграции $D_1'$ будет гармонической функцией;

2) для точки $P$, внутренней к области $D_1'$,

$$\frac{1}{v}\int\limits_{D_1'} \ln\frac{1}{\overline{PQ}}\,dv = \ln\frac{1}{h} + \frac{h^2-\overline{PQ_0}^2}{2h^2}\ ^{1)}.$$

Следовательно, мы имеем

$$\Delta_h u^*(Q_0) = J_1 = -\int\limits_{D_1'} \rho(P)\left[\ln\frac{\overline{PQ_0}}{h} + \frac{h^2-\overline{PQ_0}^2}{2h^2}\right] d\omega$$

или

$$\Delta_h u^*(Q_0) = J_1 = -h^2\rho_0\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^1 t\left(\ln t + \frac{1-t^2}{2}\right)dt + o(h^2) =$$

$$= 2\pi\frac{h^2}{8}\rho_0 + o(h^2),$$

так как вследствие непрерывности функции $\rho$ в точке $Q_0$ можно положить $\rho(P) = \rho_0 + o(1)$.

Из последней формулы вытекает

$$\lim_{h\to 0}\Delta_h u^*(Q_0) : \frac{h^2}{8} = 2\pi\rho_0,$$

т. е.

$$\Delta^* u^*(Q_0) = 2\pi\rho_0,$$

ч. т. д.

n° 3. Уравнения (2) и (3) сохраняются, если вместо потенциалов (1) мы возьмем функцию

$$v(Q) = -\int\limits_{D'} G'(Q, P)\,\rho(P)\,d\omega \quad (p \geqslant 2), \tag{4}$$

где $G'(Q;\ P)$ обозначает функцию Грина для области $D'$ [2]) с особенностью при $P = Q$. В самом деле, выражение (4) будет отличаться от $u^*(Q)$ лишь на гармоническую функцию внутри $D'$, и, следовательно, из равенств (2) и (3) вытекает, что

$$\Delta^* v(Q_0) = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}\,p(p-2)\,\rho_0 \quad (p > 2) \tag{5}$$

---

[1]) Следует разбить область интегрирования на две части при помощи окружности, проходящей через точку $P$, с центром в точке $Q_0$.

[2]) Функция Грина для области $D'$ существует, так как границу области $D'$ мы считаем простейшей формы, например, состоящей из конечного числа кусков шаровых поверхностей.



или

$$\Delta^* v(Q_0) = 2\pi\rho_0 \quad (p = 2) \tag{6}$$

для всякой точки $Q_0$ области $D'$.

Кроме того, из свойств функции Грина немедленно заключаем, что $v(Q)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}'$ и равна нулю всюду на границе этой области.

n° 4. Будем отправляться теперь от субгармонической функции $u(Q)$ в области $D$, непрерывной вместе со своими частными производными, до второго порядка включительно в той же области.

Положим

$$\frac{\Delta u(Q)}{\dfrac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}\,p(p-2)} = \rho(Q) \quad (p > 2) \tag{7}$$

или

$$\frac{\Delta u(Q)}{2\pi} = \rho(Q) \quad (p = 2), \tag{8}$$

где $\rho(Q) \geqslant 0$ есть непрерывная функция в области $D$; соотношения (7) или (8) могут быть записаны в виде

$$\Delta u(Q) = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}\,p(p-2)\,\rho(Q) \quad (p > 2) \tag{7'}$$

или

$$\Delta u(Q) = 2\pi\rho(Q) \quad (p = 2). \tag{8'}$$

Величина $\rho(Q)$ носит название плотности в точке $Q$ масс, порождаемых субгармонической функцией $u(Q)$.

Вспомнив, что $\Delta^* u(Q) = \Delta u(Q)$, вычитая соответственно (5) из (7′) и (6) из (8′), найдем

$$\Delta^*[u(Q_0) - v(Q_0)] = 0,$$

какова бы ни была точка $Q_0$, принадлежащая области $D'$.

В силу результата ч. I, гл. I, § 2 мы отсюда заключаем:

$$u(Q_0) - v(Q_0)$$

есть функция, гармоническая в области $D'$. Обозначая ее через $h(Q_0)$, мы имеем формулу

$$u(Q) = -\int\limits_{D'} G'(Q;\ P)\,\rho(P)\,d\omega + h(Q), \tag{1}$$

где $Q$ — любая точка области $D'$, а функция $\rho$ определяется согласно формулам (7) или (8). Так как первое слагаемое правой части фор-

мулы (I) на границе области $D'$ всюду равно нулю, то гармоническая функция $h(Q)$ в области $D'$, непрерывная в замкнутой области $\bar{D}'$, принимает на границе области $\bar{D}'$ те же значения, что и $u(Q)$. Другими словами, $h(Q)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(Q)$ в области $\bar{D}'$. *Формула* (I) *представляет собой основной аналитический аппарат для изображения субгармонической функции в классическом случае.* Ближайшая наша задача будет состоять в том, чтобы распространить формулу (I) на общий случай субгармонической функции. Для этого нам предварительно придется ввести понятие функции множества и связанное с ним понятие интеграла в смысле Стильтьеса.

## § 2. Функции множества [27]

n° 1. Пусть $E$ — открытое множество в пространстве $p$-измерений; предположим, *что каждому открытому подмножеству $e$ множества $E$, включая само $E$, соответствует число $\mu(e)$ и что эта функция множества обладает следующими свойствами:*

1) $\mu(e) \geqslant 0$, т. е. $\mu(e)$ — положительная функция;

2) если $e_1$ содержится в $e_2$, то $\mu(e_1) \leqslant \mu(e_2)$, т. е. $\mu(e)$ — монотонно возрастающая функция;

3) она непрерывна снизу, это значит, что когда множества $e_n$, возрастая любым образом, стремятся к множеству $e$, то $\mu(e_n) \to \mu(e)$;

4) она аддитивна, т. е. $\mu(e_1 + e_2) = \mu(e_1) + \mu(e_2)$, если $e_1$ и $e_2$ не имеют общих точек; вообще

$$\mu(e_1) + \mu(e_2) = \mu(e_1 + e_2) + \mu(e_1 e_2).$$

Когда эти гипотезы выполнены, мы будем говорить, что $\mu(e)$ определяет распределение положительных масс на множестве $E$; $\mu(E)$ есть полная масса. Более кратко мы скажем, что $\mu(e)$ есть *положительный слой*. Отрицательные слои определяются аналогичным образом, и когда $\mu(e)$ есть положительный слой, то функция множества $-\mu(e)$ определяет *отрицательный слой*, и обратно.

Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением положительных слоев, потому что результаты, относящиеся к отрицательным слоям, будут тогда очевидны.

n° 2. Итак, пусть $\mu(e)$ положительный слой, распределенный на $E$. Рассмотрим одно из множеств $e$ и его открытое дополнение относительно $E$, т. е. открытое множество, образованное из точек, внутренних множества $E - e$; это множество мы будем обозначать через $\underline{E - e}$. Так как $e$ и $\underline{E - e}$ не имеют общих точек, то вследствие (2) и (4) имеем $\mu(e) + \mu(\underline{E - e}) \leqslant \mu(E)$.

В этом соотношении может иметь место знак равенства, но может быть и неравенство. Например, если, по определению, положим $\mu(e)$ равной внутренней мере множества $e$, то будем иметь знак равенства или неравенства, смотря по тому, будет ли часть границы множества $e$, содержащаяся в $E$, меры нуль или нет. Всякий раз, как имеет место знак равенства, условимся называть множество $e$ *регулярным* [относительно слоя $\mu(e)$].



n° 3. Чтобы дать удобный способ построения регулярных множеств, мы преобразуем определение регулярного множества к другому виду. Рассмотрим множество $e_0$ и все множества $e$, содержащие $e_0$, с его граничными точками, принадлежащими $E$, т. е. все открытые множества $e$ такие, что

$$e + (\underline{E - e_0}) = E. \tag{9}$$

Пусть $\bar{\mu}(e_0)$ — нижняя граница масс $\mu(e)$ рассматриваемых множеств $e$; так как $e_0$ составляет часть всех множеств $e$, то имеем

$$\mu(e_0) \leqslant \bar{\mu}(e_0);$$

величину $\bar{\mu}(e_0)$ естественно назвать *внешней массой множества $e_0$*.

Из соотношения (9) вытекает

$$\mu(e) + \mu(\underline{E - e_0}) \geqslant \mu(E)$$

для всех рассматриваемых множеств $e$ и, следовательно,

$$\bar{\mu}(e_0) + \mu(\underline{E - e_0}) \geqslant \mu(E). \tag{10}$$

С другой стороны, рассмотрим множества $e_n$, образованные из точек множества $E$, расстояние которых от множества $e_0$ меньше $\frac{1}{n}$.

Они принадлежат к рассматриваемому классу множеств $e$, и, значит,

$$\bar{\mu}(e_0) \leqslant \mu(e_n). \tag{11}$$

Далее, так как множества $e_n$ и $\underline{E - e_n}$ без общих точек, то имеем

$$\mu(e_n) + \mu(\underline{E - e_n}) \leqslant \mu(E),$$

что на основании (11) дает

$$\bar{\mu}(e_0) + \mu(\underline{E - e_n}) \leqslant \mu(E). \tag{12}$$

Так как открытые множества $\underline{E - e_n}$, возрастая, стремятся к $\underline{E - e_0}$, то

$$\mu(\underline{E - e_n}) \to \mu(\underline{E - e_0}). \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) следует

$$\bar{\mu}(e_0) + \mu(\underline{E - e_0}) \leqslant \mu(E),$$

и, сравнив это соотношение с (10), мы найдем

$$\bar{\mu}(e_0) + \mu(\underline{E - e_0}) = \mu(E). \tag{14}$$

Отсюда немедленно вытекает, *что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $e_0$ было регулярным, заключается в выполнении равенства $\mu(e_0) = \bar{\mu}(e_0)$.*

Заметив это, рассмотрим семейство множеств $e_t$, зависящее от непрерывного параметра $t$; мы предполагаем, что множество $e_t$ возрастает вместе с $t$ и, более точно, что для $t_1 < t_2$ множество $e_{t_2}$ содержит $e_{t_1}$ вместе с его граничными точками, принадлежащими $E$.

При этих условиях функция $g(t) = \mu(e_t)$ будет возрастающей относительно $t$ и, следовательно, может иметь не более как счетное множество точек прерывности. Если $g(t)$ непрерывна для $t = t_0$, то множество $e_{t_0}$ будет регулярным. В самом деле, вследствие сделанной гипотезы относительно множеств $e_t$ имеем

$$g(t) = \mu(e_t) \leqslant \bar{\mu}(e_t) \leqslant g(t+0),$$

т. е. из условия $g(t_0) = g(t_0+0)$ следует $\mu(e_{t_0}) = \bar{\mu}(e_{t_0})$, что и доказывает регулярность множества $e_{t_0}$. Итак множества $e_t$ вообще суть регулярные, за исключением, быть может, счетной бесконечности их. Аналогичное рассуждение справедливо в случае, когда множество $e_t$ убывает с возрастанием $t$.

Приведем несколько примеров семейств множеств указанного типа:

а) множества, образованные из точек множества $E$, расстояния которых от множества $e_0$ меньше $t$;

б) множества, образованные из точек множества $e_0$, расстояния которых от множества $E - e_0$ больше $t$; отсюда следует, что для каждого множества $e_0$, регулярного или нет, существуют регулярные части, аппроксимирующие массу $\mu(e_0)$ с любой степенью точности;

в) части $E(x_i < t)$ множества $E$, определяемые неравенством, заключенным в скобки. Также множества $E(x_i > t)$.

n° 4. Наконец докажем весьма важное следующее предложение:

*Если множества $e_1$, $e_2$ — регулярные, то множества $e_1 + e_2$ и $e_1e_2$ — тоже регулярные.*

Положим, ради сокращения письма,

$$\underline{E - e_1} = e_3, \quad \underline{E - e_2} = e_4.$$

Тогда, по условию, будем иметь

$$\mu(e_1) + \mu(e_3) = \mu(E),$$
$$\mu(e_2) + \mu(e_4) = \mu(E)$$

и, с другой стороны,

$$\mu(e_1) + \mu(e_2) = \mu(e_1 + e_2) + \mu(e_1e_2),$$
$$\mu(e_3) + \mu(e_4) = \mu(e_3 + e_4) + \mu(e_3e_4).$$

Складывая два первых равенства, принимая при этом во внимание два последних, получим

$$[\mu(e_1 + e_2) + \mu(e_3e_4)] + [\mu(e_1e_2) + \mu(e_3 + e_4)] = 2\mu(E).$$

Так как множества $e_1 + e_2$ и $e_3e_4$, так же как и множества $e_1e_2$ и $e_3 + e_4$, не имеют общих точек, то значение каждого выражения в скобках не может превзойти $\mu(E)$; следовательно, эти выражения в точности должны быть равны $\mu(E)$.



Заметим теперь, что множества $e_3e_4$ и $e_3 + e_4$ соответственно тождественны или составляют части множеств $\underline{E - (e_1 + e_2)}$ и $\underline{E - e_1e_2}$; таким образом тем более должно быть

$$\mu(e_1 + e_2) + \mu(\underline{E - (e_1 + e_2)}) = \mu(E),$$

$$\mu(e_1e_2) + \mu(\underline{E - e_1e_2}) = \mu(E),$$

т. е. множества $e_1 + e_2$ и $e_1e_2$ — регулярные, что и требовалось доказать.

## § 3. Интеграл Стильтьеса [27]

n° 1. Условимся говорить, что *открытые множества $e_1, e_2, \ldots, e_m$ представляют допустимое разложение множества $E$, если выполнены следующие условия:*

1) *все множества $e_k$ регулярны;*

2) *никакие два из множеств $e_k$ не имеют общих точек;*

3) *множества $e_k$ вместе с их граничными точками, принадлежащими $E$, покрывают множество $E$;*

4) $$\sum_{k=1}^{m} \mu(e_k) = \mu(E). \tag{15}$$

Пусть $f(P)$ — функция, равномерно непрерывная на множестве точек $E$; образуем выражение

$$\sum_{k=1}^{m} f(P_k)\,\mu(e_k), \tag{16}$$

где открытые множества $e_1, e_2, \ldots, e_m$ представляют допустимое разложение множества $E$ и точки $P_k$ принадлежат $e_k$.

Рассмотрим бесконечную последовательность таких разложений $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ и пусть $\delta_n$ — наибольший из диаметров множеств $e_k$, входящих в разложение $\Delta_n$. Допустим, что $\delta_n$ стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Тогда посредством классического рассуждения из интегрального исчисления можно доказать, что сумма (16) стремится к определенному пределу, не зависящему от выбора точек $P_k$, и одному и тому же для всех последовательностей рассматриваемого типа.

Этот предел называется интегралом в смысле Стильтьеса от функции $f(P)$ относительно слоя $\mu(e)$ и обозначается

$$\int_E f(P)\,d\mu.$$

Чтобы обосновать это определение, остается еще показать, что действительно существуют допустимые разложения такие, что максимальный диаметр $\delta$ был бы малым по нашему желанию.

Такое разложение, например, может быть осуществлено, если мы воспользуемся множествами $E(x_i < t)$, $E(x_i > t)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$,

выбирая последовательность значений $t$ так, чтобы плоскости $x_i = t$ делили множество $E$ на сколь угодно малые куски и чтобы, с другой стороны, эти множества были регулярными. Тогда, отвлекаясь от точек, принадлежащих плоскостям разложения, вышеупомянутые куски будут открытыми множествами, произведениями регулярных множеств, а следовательно, и сами регулярными множествами.

Отсюда немедленно вытекает, что эти множества $e_k$ не имеют попарно общих точек и удовлетворяют условию (15), т. е. дают допустимое разложение.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x)$, равномерно непрерывную в интервале $0 < x < 1$, и возрастающую ограниченную, непрерывную слева, функцию $\varphi(x)$ в этом интервале. При определении интеграла Стильтьеса функции $f(x)$ относительно $\varphi(x)$, т. е. $\int_0^1 f(x)\,d\varphi(x)$, за функцию интервала $\mu(e)$, $e = (\alpha, \beta)$, нужно принять $\mu(e) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) - D_\alpha$, где $D_\alpha$ — скачок функции $\varphi$ в точке $\alpha$, считая за значение функции $\varphi$ в точке прерывности ее предельное значение слева.

При образовании интегральной суммы допустимым разложением интервала (0,1) на открытые интервалы $e_k = (\alpha_k, \beta_k)$ будет любое разбиение с общими концами при условии, что эти концы не являются точками прерывности.

## § 4. Потенциал [27]

n° 1. Ньютонианский потенциал слоя $\mu(e)$

$$u^*(Q) = u^*(x_1, x_2, \ldots, x_p) = -\int_E \frac{d\mu}{\overline{PQ}^{p-2}} \quad (p > 2) \tag{17}$$

или логарифмический потенциал этого слоя

$$u^*(Q) = u^*(x_1, x_2) = -\int_E \ln\frac{1}{\overline{PQ}}\,d\mu \quad (p = 2), \tag{18}$$

где $Q$ обозначает точку, притягиваемую нашими массами, вообще говоря, не входят в определение интеграла, которое мы рассмотрели в прошлом параграфе, так как подинтегральная функция

$$f(P) = \frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}} \quad \text{или} \quad f(P) = \ln\frac{1}{\overline{PQ}}$$

обращается в бесконечность при $P = Q$. Однако мы можем перейти от случая непрерывных функций к настоящему случаю. Будем во всем дальнейшем предполагать множество $E$ ограниченным.

Мы воспользуемся функциями $f_n(P, Q)$, равными наименьшему из чисел $\frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$ и $n\,(p > 2)$ или $\ln\frac{1}{\overline{PQ}}$ и $n\,(p = 2)$. Эти функции $f_n(P; Q)$ будут непрерывными относительно $P$ и $Q$; поэтому интеграл относительно $P$

$$-\int_E f_n(P, Q)\,d\mu$$



будет иметь смысл и будет определять функцию $u_n^*(Q)$. Эта функция непрерывна и субгармоническая; в самом деле, функция $f_n(P; Q)$ при $P$, произвольно фиксированной, относительно переменной точки $Q$ непрерывна и супергармоническая (как нижняя огибающая двух супергармонических функций $\frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$ и $n$ или $\ln\frac{1}{\overline{PQ}}$ и $n$); то же самое заключение имеет место для функций, определяемых выражениями

$$\sum f_n(P_k; Q)\,\mu(e_k). \tag{19}$$

Наконец равномерный предел выражений (19) $[-u_n^*(Q)]$ будет также непрерывной и супергармонической функцией.

Значит, $u_n^*(Q)$ — субгармоническая.

Заставим теперь $n$ неограниченно возрастать. Тогда функции $f_n(P, Q)$ и $-u_n^*(Q)$ стремятся, возрастая, первые к $\frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$ или $\ln\frac{1}{\overline{PQ}}$; что касается последних, то их предел — $u^*(Q)$ конечен почти всюду, т. е. исключая, быть может, некоторых точек $Q$, образующих множество меры нуль. Чтобы это видеть, достаточно показать, что интеграл от $-u_n^*(Q)$ или, что сводится к тому же, интеграл от выражения (19) относительно $Q$, распространенный на любую ограниченную область, не превосходит некоторой границы, не зависящей от $n$. Интеграл от $f_n(P_k, Q)$, распространенный на какую-либо ограниченную область, остается всегда меньше интеграла от функции $\ln\frac{1}{\overline{P_kQ}}$ $(p = 2)$, распространенного на наибольшую область, в которой она положительна, т. е. на круг радиуса единицы с центром в точке $P_k$; этот последний интеграл имеет значение $\frac{\pi}{2}$, поэтому интеграл от выражения (19) не превосходит границы $\frac{\pi}{2}\mu(E)$. В случае $p > 2$ интеграл от $f_n(P_k; Q)$, распространенный на какую-либо ограниченную область, остается всегда меньше интеграла от функции $\frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$, распространенного на область шара радиуса $R$ с центром в точке $P_k$, содержащего внутри себя рассматриваемую ограниченную область. Этот последний интеграл имеет значение $\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}R^2$, поэтому интеграл от выражения (19) не превосходит границы

$$\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}R^2\mu(E).$$

Следовательно, как мы уже сказали, предельная функция $-u^*(Q)$ будет конечна почти всюду; она равна положительной бесконечности

для множества меры нуль. Таким образом мы придали точный смысл интегралу (17) или (18); потенциал $u^*(Q)$, определяемый этим интегралом, по построению есть предел убывающей последовательности субгармонических функций; следовательно, он сам есть функция субгармоническая.

Аналогично потенциал отрицательного слоя $-\mu(e)$ есть функция супергармоническая; действительно, чтобы его получить, нужно только изменить знак у $u^*(Q)$.

n° 2. Наконец рассмотрим отдельно частный случай, когда слой $\mu(e)$ допускает функцию плотности $\rho(P)=\rho(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, т. е. существует функция $\rho(P)$, интегрируемая в смысле Лебега, такая, что имеем для всякого множества

$$\mu(e)=\int_e \rho(P)\,d\omega.$$

В этом случае разность между суммой (16) $\sum_{k=1}^{m} f(P_k)\mu(e_k)$ и интегралом $\int_E f(P)\rho(P)\,d\omega$ по абсолютной величине не может превзойти суммы $\sum_{k=1}^{m}\omega_k\mu(e_k)$, где $\omega_k$ обозначает колебание равномерно непрерывной функции $f(P)$ на множестве $e_k$; таким образом, когда переходим от суммы (16) к интегралу Стильтьеса, наша разность стремится к нулю. Следовательно, имеем

$$\int_E f(P)\,d\mu=\int_E f(P)\rho(P)\,d\omega.$$

Прилагая это равенство к функциям $f_n(P; Q)$, которые мы выше рассматривали и которые, возрастая, стремятся к $\frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$ $(p>2)$ или $\ln\frac{1}{\overline{PQ}}$ $(p=2)$, будем иметь посредством второго перехода к пределу

$$u^*(Q)=-\int_E \frac{d\mu}{\overline{PQ}^{p-2}}=-\int_E \frac{\rho(P)\,d\omega}{\overline{PQ}^{p-2}} \quad (p>2)$$

или

$$u^*(Q)=-\int_E \ln\frac{1}{\overline{PQ}}\,d\mu=-\int_E \ln\frac{1}{\overline{PQ}}\cdot\rho(P)\,d\omega \quad (p=2).$$

## § 5. Аппроксимация субгармонической функции [27]

n° 1. Чтобы распространить классический результат § 1 о представлении субгармонической функции на общий случай произвольной субгармонической функции, нам необходимо, кроме введенного в предыдущем параграфе понятия потенциала, рассмотреть метод аппроксимации субгармонической функции помощью субгармонических функций, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Этот метод будет основан на применении к функции $u(Q)=u(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *операции, обозначаемой нами* $W_r$, состоящей в замене функции $u$ посредством ее средне-арифметического, вычисленного для объема шара с центром $Q(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ и радиуса $r$, т. е. посредством интеграла от $u$, распространенного на область этого шара, разделенного на его объем $\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}r^p$. Заставляя изменяться центр шара и сохраняя радиус $r$, мы определим новую функцию $W_r u$. Возможно повторить этот процесс, пользуясь каждый раз различными значениями $r$ или тем же самым $r$; мы придем таким путем к функциям, которые будем обозначать через $W_{r_2}W_{r_1}u$, $W_{r_3}W_{r_2}W_{r_1}u$ и т. д.; второе обозначение указывает, например, что мы приложили последовательно операции $W_{r_1}$, $W_{r_2}$, $W_{r_3}$. Само собой понятно, если функция $u(Q)$ задана только в области $D$, то новые функции будут определены только в части этой области; так, например, $W_r^3$ будет определена во всякой точке $Q$ области $D$, расстояние которой от границы больше $3r$. Сейчас же заметим, что в приложениях мы будем брать радиусы $r$ сколь угодно малыми, а это позволит нам достигнуть всякой точки области $D$. *Операции* $W_r$ *прилагаются ко всякой функции* $f(P)=f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, *интегрируемой в смысле Лебега, и дают непрерывную функцию* $W_r f$. Этот факт есть немедленное следствие известной теоремы Лебега, на основании которой интеграл, распространенный на бесконечно малую область, сам есть величина бесконечно малая.



Сверх того, можно показать, посредством рассуждения, обычного для классического анализа, что *операция* $W_r$ *преобразует непрерывные функции в функции, обладающие непрерывными первыми производными, и вообще, что она преобразует функции, допускающие непрерывные производные* $n$ *первых порядков, в функции, которые обладают непрерывными производными до порядка* $n+1$ *включительно.*

В самом деле, объемный интеграл, дающий отношение приращений

$$\frac{W_r f(x_1^0+h, x_2^0, \ldots, x_p^0)-W_r f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)}{h},$$

может быть вычислен посредством двух последовательных интеграций отвлекаясь пока от знаменателя $hr^p\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}$, нужно сначала вычислить интеграл от $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,dx_2\,dx_3\ldots dx_p$ вдоль сферы радиуса $r$, проведенной вокруг точки $Q(x_1, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ как центра, и затем интегрировать относительно $x_1$ в пределах от $x_1^0$ до $x_1^0+h$.

Отсюда следует, что предел рассматриваемого отношения для $h\to 0$, т. е. производная от $W_r f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ относительно $x_1$ в точке $Q^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ существует и что она выражается посредством интеграла от $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,dx_2\,dx_3\ldots dx_p$, распростра-

ненного вдоль сферы радиуса $r$ с центром в $Q^0$, поделенным на

$$r^p \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}.$$

То же самое справедливо относительно диференцирования по каждому переменному $x_2, x_3, \ldots, x_p$. Когда функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ допускает непрерывные производные порядка $n$, производные того же порядка от $W_r f$ вычисляются, переставляя порядок интегрирования и диференцирования, т. е. прилагая операцию $W_r$ к указанным производным от $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$; следовательно, вследствие доказанного производные порядка $n$ от $W_r f$ будут допускать непрерывные первые производные, что означает наличие непрерывных производных $n+1$ порядка у функции $W_r f$.

n° 2. Чтобы прилагать эти общие результаты к субгармонической функции $u(Q)$, следует прежде всего заметить, что эта функция интегрируема по всякому шару, который вместе со своей поверхностью принадлежит области $D$ (ч. I, гл. III, § 9). Из того же § 9 гл. III ч. I следует, что всюду

$$u(Q) \leqslant W_r u(Q) \tag{20}$$

и что вообще

$$W_{r_2} u(Q) \leqslant W_{r_1} u(Q) \quad (r_2 < r_1). \tag{21}$$

Далее, очевидно, что $W_\rho u(Q)$ — субгармоническая функция, потому что из (20) вытекает

$$W_\rho u(Q) \leqslant W_\rho W_r u(Q) = W_r W_\rho u(Q)$$

(ч. I, гл. III, § 9).

Покажем, что *всякая субгармоническая функция обладает некоторого рода непрерывностью, которая выражается уравнением*

$$u(Q) = \lim_{r \to 0} W_r u(Q). \tag{22}$$

В самом деле, из неравенства (21) следует, что при $r \to 0$ $W_r u(Q)$ стремится к определенному пределу — конечному — или отрицательной бесконечности.

Этот последний случай может представиться на основании (20), только если $u(Q) = -\infty$.

Если $W_r u(Q)$ стремится при $r \to 0$ к конечному пределу, то $u(Q)$ имеет конечное значение (это следует из определения $u(Q)$ как предела убывающей последовательности непрерывных функций). Действительно, пусть $u(Q) = \lim\limits_{k \to \infty} u_k(Q)$, причем $u(Q) \leqslant u_k(Q)$. Обозначая через $c$ предел $W_r u(Q)$ при $r \to 0$, имеем

$$c \leqslant W_r u(Q) \leqslant W_r u_k(Q).$$



В пределе при $r \to 0$ и $k$ постоянном найдем $c \leqslant u_k(Q)$ при любом $k$. Так как $u(Q) = \lim\limits_{k \to \infty} u_k(Q)$, то отсюда следует, что $c \leqslant u(Q)$, т. е. $u(Q)$ — конечно.

Так как $u$ полунепрерывна сверху, то при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$u(P) < u(Q) + \varepsilon \tag{23}$$

в окрестности точки $Q$, и, значит, также

$$W_r u(Q) < u(Q) + \varepsilon,$$

начиная с достаточно малого $r$. Сравнив это неравенство с (20), получим равенство (22).

Предыдущее возможно обобщить. Посредством повторного применения неравенства (21) имеем

$$W_{r_2''} W_{r_2'} W_{r_2} u(Q) \leqslant W_{r_1''} W_{r_1'} W_{r_1} u(Q),$$

если $r_2 \leqslant r_1$, $r_2' \leqslant r_1'$, $r_2'' \leqslant r_1''$ и, в частности,

$$W_{r_2}^3 u(Q) \leqslant W_{r_1}^3 u(Q) \quad (r_2 \leqslant r_1).$$

Таким образом показано, что функции $W_r^3 u(Q)$, зависящие от параметра $r$, убывают вместе с $r$. Мы утверждаем, что

$$u(Q) = \lim_{r \to 0} W_r^3 u(Q). \tag{24}$$

Это оправдывается аналогично равенству (22). С одной стороны, посредством итерации неравенства (20) будет

$$u(Q) \leqslant W_r^3 u(Q). \tag{25}$$

С другой стороны, так как $W_r^3 u(Q)$ убывают вместе с $r$, то $W_r^3 u(Q)$ стремится при $r \to 0$ к определенному пределу — конечному — или отрицательной бесконечности.

Этот последний случай может представиться на основании (25) только в случае $u(Q) = -\infty$; Когда же $W_r^3 u(Q)$ стремится при $r \to 0$ к конечному числу, тогда и $u(Q)$ — конечно. В силу полунепрерывности сверху неравенство (23) справедливо в некоторой окрестности точки $Q$, и возможно считать $r$ достаточно малым, для того чтобы вычисление $W_r^3 u(Q)$ выполнялось, не выходя за пределы этой окрестности. Тогда будем иметь, начиная с достаточно малого $r$.

$$W_r^3 u(Q) < u(Q) + \varepsilon. \tag{26}$$

Равенство (24) есть следствие неравенств (25) и (26).

n° 3. Положим теперь

$$u_n(Q) = W^3_{\frac{1}{n}}\, u(Q).$$

Из предыдущих рассмотрений вытекает замечательный факт, что *существуют функции $u_n(Q)$, субгармонические и непрерывные вместе с их производными двух первых порядков, которые, монотонно убывая, стремятся к функции $u(Q)$*. В действительности эти функции не определены для всей целой области $D$, однако области, для которых мы их определили, стремятся, возрастая, к области $D$; этого нам достаточно для различных их приложений.

## § 6. Принцип компактности функций множества [27]

n° 1. Построенные в предыдущем параграфе субгармонические функции $u_n(Q)$ позволяют определить соответствующие им функции множества $\mu_n(e)$, полагая

$$\mu_n(e) = \int\limits_e \frac{\Delta u_n(P)}{\dfrac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} p(p-2)}\, d\omega \quad (p > 2)$$

или

$$\mu_n(e) = \int\limits_e \frac{\Delta u_n(P)}{2\pi}\, d\omega \quad (p = 2).$$

Каково бы ни было открытое множество $e$, принадлежащее вместе со своей границей области $D$, существует номер $N(e)$, начиная с которого функция $\mu_n(e)$ $(n \geqslant N)$ определена.

Эта *последовательность функций $\mu_n(e)$ открытого множества обладает свойствами:*

1) $\mu_n(e)$ *положительна* } (так как $u_n(P)$ — субгармоническая
2) $\mu_n(e)$ *монотонна* } функция, то $\Delta u_n(P) \geqslant 0$);
3) $\mu_n(e)$ *непрерывна* (вследствие непрерывности вторых частных производных);
4) $\mu_n(e)$ *аддитивна*.

Кроме того, покажем, что *для каждого множества $e$ последовательность $\mu_n(e)$ остается меньше некоторого конечного числа;* это число может, впрочем, изменяться вместе с множеством $e$.

В самом деле, так как каждое множество $e$ может быть вполне покрыто конечным числом шаровых областей, то достаточно оправдать наше утверждение для таких областей. Рассмотрим внутренность шара с центром $Q$ радиуса $r_0$; для этого множества мы получим значение $\mu_n(e)$, если рассмотрим как функцию от $\frac{1}{r^{p-2}}$ (или от $\ln r$ при $p = 2$) среднее значение $J_n(r)$ функции $u_n(P)$, вычисленное для сфер с центром $Q$ радиуса $r$; $\mu_n(e)$ есть производная этой функции для $r = r_0$.



Действительно, полагая для $p > 2$ площадь поверхности единичной сферы $\sigma_1 = \dfrac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} p$, имеем

$$\mu_n(e) = \int\limits_e \frac{\Delta u_n}{(p-2)\sigma_1}\, d\omega = \frac{1}{(p-2)\sigma_1}\left[\int \frac{\partial u_n}{\partial r} r^{p-1}\, d\sigma_1\right]_{r=r_0} =$$

$$= -\left[\frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{r^{p-2}}\right)} \frac{1}{\sigma_1}\int u_n\, d\sigma_1\right]_{r=r_0}$$

(по формуле Грина), где $d\sigma_1$ — элемент поверхности единичной сферы, т. е. если

$$J_n(r) = \frac{1}{\sigma}\int u_n\, d\sigma = \frac{1}{\sigma_1}\int u_n\, d\sigma_1,$$

то

$$\mu_n(e) = -\left[\frac{dJ_n(r)}{d\left(\frac{1}{r^{p-2}}\right)}\right]_{r=r_0}.$$

Аналогично в случае $p = 2$ будем иметь

$$\mu_n(e) = \int\limits_e \frac{\Delta u_n}{2\pi}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial u_n}{\partial r} r\, d\theta\right]_{r=r_0} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial(\ln r)} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_n\, d\theta\right]_{r=r_0},$$

т. е. если

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_n\, d\theta,$$

то

$$\mu_n(e) = \left[\frac{dJ_n(r)}{d\ln r}\right]_{r=r_0}.$$

Так как $J_n(r)$ есть функция, выпуклая относительно $\frac{1}{r^{p-2}}$ (относительно $\ln r$ при $p = 2$), то, выбирая радиус $r_1 > r_0$, мы видим, что $\mu_n(e)$ не может превзойти величины отношения

$$\frac{J_n(r_1) - J_n(r_0)}{\dfrac{1}{r_0^{p-2}} - \dfrac{1}{r_1^{p-2}}} \quad (p > 2)$$

или

$$\frac{J_n(r_1) - J_n(r_0)}{\ln r_1 - \ln r_0} \quad (p = 2).$$

Это отношение стремится для $n \to \infty$ к аналогичному отношению, соответствующему функции $u$, и, следовательно, должно оставаться меньше границы, не зависящей от $n$. Отсюда следует, что то же заключение имеет место для $\mu_n(e)$.

n° 2. Докажем теперь, что если последовательность функций $\mu_n(e)$ удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, то из нее возможно

выбрать подпоследовательность $\mu^{(n)}(e)$, стремящуюся к функции множества $\mu(e)$, положительной, монотонной, непрерывной снизу и аддитивной, и это — для всякого открытого множества $e$, регулярного относительно $\mu(e)$ [1]). Этот принцип доказывается тем же способом, что и ему аналогичный для функций интервала.

Рассмотрим и обозначим через $\pi$ те из наших множеств $e$, которые ограничены одним или многими интервалами, вершины которых имеют рациональные координаты. Так как эти множества $\pi$ составляют счетное множество, то возможно выбрать из последовательности $\mu_n(e)$ частную последовательность $\mu^{(n)}(e)$, сходящуюся для каждого из множеств $\pi$ к определенному и конечному пределу $\mu_0(\pi)$, определяя, таким образом, для множеств $\pi$ функцию множества, положительную, монотонную и аддитивную. Указанный выбор мы осуществляем на основании диагонального процесса Кантора. Сделав это, определим функцию множества $\mu(e)$ для каждого открытого множества $e$, полагая ее равной верхней границе чисел $\mu_0(\pi)$, образованных для всех множеств $\pi$, внутренних вместе с их границами к множеству $e$, или, что сводится к тому же, полагая ее равной пределу, очевидно, существующему и однозначно определенному, чисел $\mu_0(\pi)$, образованных для множеств $\pi$, стремящихся, возрастая, к множеству $e$. Из этого определения функции $\mu(e)$ немедленно вытекает, что эта функция — открытого множества, положительна, монотонна, аддитивна и непрерывна снизу. Чтобы убедиться в сходимости последовательности $\mu^{(n)}(e)$ к $\mu(e)$ для всякого регулярного множества, обозначим через $e_0$ такое множество; пусть $e_1$ — другое открытое множество, содержащее $e_0$ вместе с его границей и выбранное так, чтобы $\mu(e_1) < \mu(e_0) + \varepsilon$, где $\varepsilon$ обозначает положительное произвольно малое число.

Пусть $\pi_1$ — одно из наших интервальных множеств, построенное, таким образом, что оно вместе со своей границей заключено в множестве $e_1$, и, с другой стороны, $e_0$ и его граница являются частью $\pi_1$.

Тогда, очевидно, имеем

$$\mu(e_0) \leqslant \mu_0(\pi_1) < \mu(e_0) + \varepsilon.$$

Пусть, далее, $\pi_2$ — одно из наших интервальных множеств, заключенное вместе со своей границей в множестве $e_0$ и выбранное так, чтобы

$$\mu_0(\pi_2) > \mu(e_0) - \varepsilon.$$

Тогда, вспомнив, что $\mu^{(n)}(\pi) \to \mu_0(\pi)$, заключаем, начиная с некоторого номера $n$,

$$\mu(e_0) - \varepsilon < \mu^{(n)}(\pi_2) \leqslant \mu^{(n)}(e_0) \leqslant \mu^{(n)}(\pi_1) < \mu(e_0) + \varepsilon,$$

откуда вытекает, что $\mu^{(n)}(e_0) \to \mu(e_0)$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что условие $\mu(e) \equiv 0$ есть необходимое и достаточное для того, чтобы субгармоническая функция была гармонической.

[1]) То-есть при условии, что $\mu(e) = \bar{\mu}(e)$, где множество $e$ вместе с своей границей принадлежит области $D$.



## § 7. Основная формула для представления субгармонической функции внутри области [27]

n° 1. Классический результат § 1 об изображении субгармонической функции внутри области может быть распространен на общий случай любой субгармонической функции в области $D$.

С этой целью изучим соотношение, которое существует между данной функцией $u(P)$ и потенциалом ее слоя $\mu(e)$, образованным для открытого множества $E$, принадлежащего вместе с его границей области $D$. Сначала предположим, что множество $E$ удовлетворяет условию $\mu(E) = \bar{\mu}(E)$ [1]). В этом случае для всякой функции $f(P)$, равномерно непрерывной на $E$, имеем

$$\int_E f(P)\, d\mu_n \to \int_E f(P)\, d\mu. \tag{27}$$

В самом деле, если разложим $E$ на регулярные множества $e_k$ и образуем суммы

$$\sum_{k=1}^{m} f(P_k)\,\mu_n(e_k); \quad \sum_{k=1}^{m} f(P_k)\,\mu(e_k), \tag{28}$$

где $P_k$ — точка, принадлежащая $e_k$, то первая из этих сумм стремится ко второй при $n \to \infty$. С другой стороны, разности между рассматриваемыми интегралами и соответствующими им суммами по абсолютной величине не больше, чем произведения наибольшего из колебаний функции $f(P)$ на множествах $e_k$ и соответственно $\mu_n(E)$ или $\mu(E)$.

Так как $\mu_n(E) \to \mu(E)$ и, кроме того, возможно выбрать множества $e_k$ так, чтобы вышеупомянутые колебания были сколь угодно малыми, то отсюда следует, что можно неограниченно приближать два интеграла посредством сумм (28) равномерно относительно $n$.

n° 2. Рассмотрим теперь потенциалы слоев $\mu_n(e)$ и $\mu(e)$, образованные для множества $E$:

$$\left.\begin{aligned} u_n^*(Q) &= -\int_E \frac{d\mu_n}{\overline{PQ}^{p-2}} \ (p>2) \ \text{или} \ u_n^*(Q) = \int_E \ln \overline{PQ}\, d\mu_n \ (p=2), \\ u^*(Q) &= -\int_E \frac{d\mu}{\overline{PQ}^{p-2}} \ (p>2) \ \text{или} \ u^*(Q) = \int_E \ln \overline{PQ}\, d\mu \ (p=2). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Мы покажем, что

$$W_r u_n^*(Q) \to W_r u^*(Q). \tag{30}$$

Действительно, интеграции (29) и операции $W_r$ могут быть переставлены так, что функции $W_r u_n^*$ и $W_r u^*$ могут быть вычислены, заменяя $\frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$ или $\ln \overline{PQ}$ функцией, которая получается приложением операции $W_r$. Так как эта функция $W_r \frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$ или $W_r \ln \overline{PQ}$ будет непрерыв-

[1]) Это предположение позволяет нам заключить, что $\mu_n(E) \to \mu(E)$. В конце доказательства мы от него освободимся.

ной относительно переменных точек $P$ и $Q$, то формула (27) может быть приложена, и мы получаем соотношение (30).

Заметив это, мы в состоянии сравнить данную субгармоническую функцию $u(Q)$ с потенциалом $u^*(Q)$. Для этого рассмотрим функции

$$h_n(Q) = u_n(Q) - u_n^*(Q), \quad h(Q) = u(Q) - u^*(Q).$$

Соотношение (30) и очевидное соотношение $W_r u_n \to W_r u$ дают, что $W_r h_n(Q) \to W_r h(Q)$. На основании классического результата § 1 функции $h_n(Q)$ — гармонические на $E$, и поэтому $W_r h_n(Q) = h_n(Q)$; следовательно,

$$h_n(Q) \to W_r h(Q).$$

Это соотношение имеет место независимо от величины $r$ при условии, что $r$ остается меньше, чем расстояние точки $Q$ до границы множества $E$. Таким образом $W_r h(Q)$ не зависит от $r$, и мы можем написать

$$W_r h(Q) = h^*(Q).$$

С другой стороны, из соотношения $W_r u(Q) \to u(Q)$ при $r \to 0$ и ему аналогичного относительно субгармонической функции $u^*(Q)$ следует, что такое же соотношение имеет место для функции $h(Q) = u(Q) - u^*(Q)$ во всякой точке $Q$, в которой $u(Q)$ и $u^*(Q)$ одновременно не равны $-\infty$.

Итак, имеем для всех этих точек $Q$

$$h(Q) = h^*(Q) = W_r h(Q) = W_r h^*(Q); \tag{31}$$

равенство двух последних частей вытекает из равенства двух первых.

Далее, так как функция $h^*(Q) = W_r u(Q) - W_r u^*(Q)$ непрерывна и соотношение (31) имеет место почти всюду на множестве $E$, то отсюда вытекает, что всюду на этом множестве

$$h^*(Q) = W_r h^*(Q).$$

Последнее нас убеждает (ч. I, гл. I, § 2) в том, что непрерывная функция $h^*(Q)$ есть гармоническая на множестве $E$. Резюмируя, мы скажем, что разность $u(Q) - u^*(Q)$ равна гармонической функции $h^*(Q)$ во всякой точке множества $E$, исключая те точки, для которых эта разность не имеет смысла; это будет, когда $u(Q)$ и $u^*(Q)$ одновременно равны $-\infty$.

Другими словами, *на множестве $E$ потенциал $u^*(Q)$ имеет конечное значение или равен отрицательной бесконечности в одно и то же время, как и функция $u(Q)$*; это позволяет нам заключить, что $u(Q) = u^*(Q) + h^*(Q)$ всюду на множестве $E$, где $h^*(Q)$ есть гармоническая функция на $E$.

Освободимся теперь от ограничения регулярности множества $E$.

Когда множество $E$ не есть регулярное относительно функции множества $\mu(e)$, то рассмотрим регулярное множество $E_0$, заключающее в себе множество $E$, и образуем потенциал $u_0^*(Q)$, а также гармоническую функцию $h_0^*(Q) = u(Q) - u_0^*(Q)$, соответствующие множеству $E_0$.

Тогда разность

$$h^*(Q) - h_0^*(Q) = u_0^*(Q) - u^*(Q)$$



представляет потенциал слоя $\mu(E_0 \cdot e) - \mu(Ee)$ и будет гармонической на множестве $E$, которое свободно от масс этого слоя.

Отсюда следует, что функция $h^*(Q)$ — гармоническая на $E$, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали следующую теорему:

*Всякой функции $u(Q)$, субгармонической в области $D$, соответствует функция множества $\mu(e)$, положительная, монотонная, аддитивная и непрерывная снизу, определенная для открытых множеств, принадлежащих вместе с их границами области $D$, такая, что имеем для всякого множества $E$ рассматриваемого типа*

$$u(Q) = u^*(Q) + h(Q),$$

*где положено* $u^*(Q) = -\int\limits_E \frac{d\mu}{\overline{PQ}^{p-2}}$ $(p > 2)$ или $u^*(Q) = \int\limits_E \ln \overline{PQ}\, d\mu$ $(p = 2)$ *и $h(Q)$ — гармоническая на $E$.*

n° 3. Как частный случай этой общей теоремы отметим элементарное предложение о гармонических функциях, принадлежащее *Бохеру* и *Пикару*. Эта теорема утверждает, что *гармоническая функция в области $D$, за исключением точки $P$, в которой она равна бесконечности определенного знака, необходимо будет вида* $\frac{c}{r^{p-2}} + h(Q)$ $(p > 2)$ *или* $c \ln \frac{1}{r} + h(Q)$ $(p = 2)$, *где* $r = \overline{PQ}$ *и $h(Q)$ — гармоническая в области $D$.*

В самом деле, предполагая, например, что в теореме речь идет об отрицательной бесконечности, мы видим, что наша функция будет субгармонической всюду в области $D$ и, следовательно, доказанная общая теорема приложима. С другой стороны, так как функция всюду гармоническая, кроме точки $P$, то $\mu(e)$ равна нулю, исключая те множества $e$, которые содержат точку $P$, и для этих множеств $\mu(e) = c$; иначе говоря, полная масса равна $c$ и сконцентрирована в точке $P$. Отсюда теорема становится очевидной вследствие общего предложения.

Доказанная основная теорема важна также в том отношении, что она открывает путь для анализа поведения субгармонических функций в бесконечно малом, так как этот анализ приводится к исследованию потенциала; придаточная гармоническая функция не имеет значения с этой точки зрения.

n° 4. Примем за $E$ область $D'$, принадлежащую вместе с границей области $D$. В доказанной главной теореме удобно заменить потенциал $u^*(Q)$ посредством выражения

$$v'(Q) = -\int\limits_{D'} G'(Q; P)\, d\mu, \tag{32}$$

где $G'(Q; P)$ обозначает функцию Грина для области $D'$ [1]) с особенностью при $P = Q$. В самом деле, выражение (32) будет отличаться от

[1]) Функция Грина для области $D'$ существует, так как границу области $D'$ мы считаем простейшей формы, например состоящей из конечного числа кусков шаровых поверхностей.

$u^*(Q)$ лишь на гармоническую функцию внутри $D'$, и, следовательно, согласно доказанной общей теоремы имеем

$$u(Q) = -\int_{D'} G'(Q; P)\, d\mu + h'(Q), \tag{33}$$

где $h'(Q)$ — функция, гармоническая в области $D'$.

Очевидно, $h'(Q)$ есть гармоническая мажоранта функции $u(Q)$ в области $D'$; из результата следующего параграфа будет вытекать, что $h'(Q)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта в области $D'$ для субгармонической функции $u(Q)$.

Таким образом формула (33) является обобщением классической формулы, выведенной в § 1.

## § 8. Основная формула для представления субгармонической функции во всей области [27]

п° 1. Пусть $u(Q)$ — субгармоническая функция в области $D$ и $\mu(e)$ — ей соответствующая функция множества. Рассмотрим обобщенный интеграл Стильтьеса

$$v(Q) = \int_D G(P;\ Q)\, d\mu, \tag{34}$$

где интегрирование производится относительно точки $P$; интеграл распространен на всю область $D$ и определяется как предел интегралов

$$v_k(Q) = \int_{D_k} G(P;\ Q)\, d\mu, \tag{35}$$

когда области $D_k$ стремятся, возрастая, к области $D$.

Так как разность $G(P; Q) - \frac{1}{\overline{PQ}^{p-2}}$ $(p > 2)$ или $G(P; Q) - \ln\frac{1}{\overline{PQ}}$ $(p = 2)$ — гармоническая функция относительно точек $P$ и $Q$ (см. Введение, § 2), то интеграл (35) существует почти для всякой точки $Q$ области $D$ и отличается от $-u(Q)$ на гармоническую функцию в $D_k$ (§ 7, п° 2).

Когда области $D_k$ стремятся, возрастая, к области $D$, функции $v_k(Q)$ также возрастают, а следовательно, возрастают функции $h_k(Q) = v_k(Q) + u(Q)$, гармонические в областях $D_k$.

Согласно теореме Гарнака (ч. I, гл. I, § 3), могут представиться лишь два случая; либо эти функции $h_k(Q)$ стремятся к предельной функции $h(Q)$, гармонической в области $D$, либо они имеют своей предельной функцией тождественную $+\infty$. Только в первом из этих двух случаев интеграл (34) имеет смысл, и имеем тогда

$$v(Q) = h(Q) - u(Q). \tag{36}$$

Посредством обычного в таких случаях рассуждения можно показать, что предел интегралов (35), т. е. функция $v(Q)$ не зависит от частного выбора последовательности областей $D_k$.



п° 2. После сказанного становится очевидным необходимое условие, для того чтобы представлялся первый случай, т. е. чтобы существовал интеграл (34).

Так как функция $G(P; Q)$ и функция множества $\mu(e)$ не отрицательны, то то же справедливо и для функции $v(Q)$. Из соотношения (36), следовательно, вытекает, что $u(Q) \leqslant h(Q)$, т. е. что существует гармоническая функция, не меньшая функции $u(Q)$ во всей области $D$. Докажем теперь, что это необходимое условие также и достаточное.

Предположим, что оно выполнено, и пусть $H(Q)$ — гармоническая функция, не меньшая функции $u(Q)$ во всей области $D$.

Чтобы доказать существование почти всюду функции $v(Q)$, определенной интегралом (34), мы покажем, согласно определению интеграла (34), что последовательность функций $v_k(Q)$, определенных интегралами (35), возрастающих вместе с $k$, остается ограниченной почти всюду в области $D$.

Это же есть немедленное следствие неравенства

$$\int_E G(P;\ Q)\, d\mu \leqslant H(Q) - u(Q), \tag{37}$$

имеющего место для каждого множества $E$, принадлежащего вместе с границей области $D$. Докажем это неравенство. Прежде всего заметим, что каждое множество $E$ составляет часть регулярного множества, а потому при доказательстве, не уменьшая общности, мы можем предполагать, что рассматриваемое множество $E$ — регулярное. Заметив это, обозначим через $D'$ область, принадлежащую вместе со своей границей области $D$ и содержащую на себе множество $E$ вместе с его границей. Предположим, сверх того, что область $D'$ выбрана такой, что к ней можно прилагать классические результаты теории потенциала (§ 1) и, в частности, что ей соответствует функция Грина $G'(P; Q)$, обращающаяся в нуль равномерно непрерывным образом на границе области $D'$. Возможно, например, считать, что область $D'$ есть соединение конечного числа шаровых областей.

Возьмем снова функции $u_n(Q) = W^3_{\frac{1}{n}} u(Q)$ (§ 5) и им соответствующие функции множества $\mu_n(e)$ (§ 6), предполагая, что $\frac{3}{n}$ меньше расстояния области $D'$ до границы области $D$. Тогда функции $u_n(Q)$ и их производные двух первых порядков будут непрерывными в $\overline{D'}$ и даже в области, включающей в себя $\overline{D'}$, а потому к ним возможно применить классическую теорию (§ 1).

На основании этой теории (§ 1) функция, определенная интегралом

$$\int_{D'} G'(P;\ Q)\, d\mu_n = \int_{D'} G'(P;\ Q)\, \rho_n(P)\, d\omega, \tag{38}$$

отличается от $-u_n(Q)$ в области $D'$ только на гармоническую функцию $h_n(Q)$, равную на границе области $D'$ $u_n(Q)$. Так как

$$u_n(Q) = W^3_{\frac{1}{n}} u(Q) \leqslant W^3_{\frac{1}{n}} H(Q) = H(Q),$$

то на границе области $D'$ будет

$$h_n(Q) = u_n(Q) \leqslant H(Q).$$

По принципу максимума гармонических функций и внутри области $D'$ будет

$$h_n(Q) \leqslant H(Q).$$

С другой стороны, $u_n(Q) \geqslant u(Q)$; следовательно, имеем

$$h_n(Q) - u_n(Q) \leqslant H(Q) - u(Q),$$

т. е. во всякой точке $Q$ области $D'$ величина интеграла (38) не превосходит разности $H(Q) - u(Q)$. Отсюда следует

$$\int_E G'(P;\ Q)\, d\mu_n \leqslant \int_{D'} G'(P;\ Q)\, d\mu_n \leqslant H(Q) - u(Q).$$

Чтобы отсюда перейти к неравенству (37), которое мы хотим оправдать, обозначим через $G(P;\ Q;\ \nu)$ функцию, равную $G(P;\ Q)$ всюду, где величина этой функции не превосходит числа $\nu$, и равную $\nu$ в противном случае; через $G'(P;\ Q;\ \nu)$ — аналогичную функцию, связанную с $G'(P;\ Q)$. Тогда будем иметь

$$H(Q) - u(Q) \geqslant \int_E G'(P;\ Q)\, d\mu_n \geqslant \int_E G'(P;\ Q;\ \nu)\, d\mu_n \to$$

$$\to \int_E G'(P;\ Q;\ \nu)\, d\mu \to \int_E G(P;\ Q;\ \nu)\, d\mu,$$

где первый переход к пределу берется при $n \to \infty$, а второй — при $D' \to D$. В самом деле, оба перехода к пределу возможны; первый — вследствие непрерывности функции $G'(P;\ Q;\ \nu)$ и второй — потому, что сходимость $G'(P;\ Q;\ \nu)$ к $G(P;\ Q;\ \nu)$ при $D' \to D$ — монотонная (и даже равномерная) на множестве $E$. Следовательно, имеем

$$\int_E G(P;\ Q;\ \nu)\, d\mu \leqslant H(Q) - u(Q).$$

Так как первая часть последнего неравенства стремится при $\nu \to \infty$ к первой части неравенства (37), то это последнее оправдано.

Таким образом мы доказали следующую теорему:

*Для того чтобы функция $u(Q)$, субгармоническая в области $D$, могла быть представлена посредством функции Грина $G(P;\ Q)$ этой области в виде*

$$u(Q) = -\int_D G(P;\ Q)\, d\mu + h(Q),$$

*где $\mu(e)$ — функция множества, построенная известным образом, исходя из $u(Q)$, положительная, монотонная, аддитивная и непрерывная снизу, определенная для открытых множеств $e$, принадлежащих вместе с границами области $D$, и где $h(Q)$ есть функция гармоническая в $D$, необходимо и достаточно, чтобы существовала гармоническая мажоранта функции $u(Q)$ во всей области $D$.*



n° 3. Наконец к этому добавим, что *гармоническая функция $h(Q)$, входящая в основную формулу, есть наименьшая среди гармоничвских функций, мажорирующих в области $D$ функцию $u(Q)$.* В самом деле, с одной стороны, $u(Q) \leqslant h(Q)$ и, с другой стороны, в силу неравенства (37)

$$h(Q) = u(Q) + \int_D G(P;\ Q)\, d\mu \leqslant u(Q) + H(Q) - u(Q) = H(Q),$$

где $H(Q)$ обозначает любую гармоническую функцию, мажорирующую в области $D$ функцию $u(Q)$.

Важно также заметить, что функция $h(Q)$ может быть определена, независимо от изображения $u(Q)$, как предел наилучших гармонических мажорант функции $u(Q)$, образованных для областей $D'$, когда области $D'$ стремятся, возрастая, к области $D$.

Короче говоря, функция $h(Q)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(Q)$ во всей области $D$ (ч. I, гл. V, § 5).

Действительно, наилучшая гармоническая мажоранта, образованная для области $D'$, изменяется, возрастая, вместе с областью $D'$ и так как она не может никогда превзойти мажоранты $h(Q)$, то она стремится к гармонической функции $h^*(Q) \leqslant h(Q)$. С другой стороны, очевидно, что функция $h^*(Q)$ есть сама мажоранта в полной области $D$. Следовательно, она есть наименьшая среди этих функций, т. е. $h^*(Q) = h(Q)$, ч. т. д.

Теорема предыдущего параграфа содержится в результате, доказанном в настоящем параграфе, так как условие существования гармонической мажоранты для внутренней области $D'$ автоматически выполняется; функция $h'(Q)$ теоремы § 7 есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(Q)$ в области $D'$.

## § 9. Приложения к аналитическим функциям [8; 9]

n° 1. Чтобы иллюстрировать результаты этой главы, приложим их к субгармонической функции $u(x, y) = \ln|f(x+iy)| = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ обозначает голоморфную функцию в области $D$. Слой $\mu(e)$, который здесь получается, очевидно, состоит из точечных масс, помещенных в нулях функции $f(z)$ и равных кратностям соответствующих нулей. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — нули, каждый из которых повторяется столько раз, какова его кратность. Формула (33) в нашем случае примет вид

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int \ln|f(\zeta)|\,\frac{\partial G'(z;\ \zeta)}{\partial n}\, ds - \sum_{\zeta_k \subset D'} G'(z;\ \zeta_k),$$

где $z \subset D'$ и интегрирование распространено по контуру области $D'$ а суммирование — по всем нулям $\zeta_k$, принадлежащим области $D'$, причем область $D'$ вместе со своими граничными точками лежит внутри области $D$, $G'(z, \zeta)$ — функция Грина области $D'$ с особенностью в точке $z = \zeta$, кроме того, на контуре области $D'$ нет нулей функции $f(z)$.

В частности, беря за $D$ круг $|z|<R$, а за $D'$ — круг $|z|<\rho<R$, будем иметь

$$\ln|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\theta})|\,\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta-\sum_{|\zeta_k|<\rho}\ln\left|\frac{\rho^2-\bar{z}\zeta_k}{\rho(z-\zeta_k)}\right|,$$

где $z=re^{i\varphi}$, $r<\rho$.

Последняя формула носит имя *Пуассона-Иенсена*.

n° 2. Далее, интеграл (34), соответствующий рассматриваемому здесь случаю, может быть представлен в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}G(\zeta_k;\ z). \tag{39}$$

Вследствие доказанной в предыдущем параграфе теоремы сходимость этого ряда эквивалентна существованию гармонической мажоранты функции $\ln|f(z)|$ в области $D$. В то же время, как мы видели в ч. I, гл. V, § 6, существование этой мажоранты есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $f(z)$ могла быть представлена в виде

$$f(z)=\varphi(z)\psi(z),$$

произведения двух голоморфных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, из которых первая предполагается ограниченной, а вторая — не обращающейся в нуль в области $D$.

Итак, *сходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty}G(\zeta_k;\ z)$ *есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция* $f(z)$ *могла быть представлена в виде*

$$f(z)=\varphi(z)\psi(z),$$

*где* $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ — *голоморфные функции в области* $D$, *причем* $|\varphi(z)|\leqslant 1$ *и* $\psi(z)$ *не обращается в нуль.* Результат предыдущего параграфа показывает, что за $\varphi(z)$ возможно взять такую функцию, что $\ln|\varphi(z)|$ изображается рядом (39) с обратным знаком, или, что сводится к тому же, будем иметь, с точностью до произвольного фактора модуля 1,

$$\varphi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}g(\zeta_k;\ z),$$

где положено

$$g(\zeta;\ z)=e^{-G(\zeta;\,z)-iV(\zeta;\,z)};$$

причем $V$ — функция, сопряженная с $G$.

n° 3. Когда область $D$ есть единичный круг, то получаем

$$\varphi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_k-z}{1-\bar{\zeta}_k z}. \tag{40}$$



Абсолютная сходимость этого произведения в единичном круге эквивалентна абсолютной сходимости произведения $\prod_{k=1}^{\infty}\zeta_k$ [1]). Таким образом в случае единичного круга абсолютная сходимость произведения $\prod_{k=1}^{\infty}\zeta_k$, или, что сводится к тому же, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\zeta_k|)$, есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(z)$ могла быть представлена в виде произведения двух голоморфных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, из которых первая ограничена, а вторая не обращается в нуль в единичном круге.

n° 4. Что касается функции $\varphi(z)$, определенной произведением (40), то она, будучи голоморфной и ограниченной в единичном круге, должна допускать предельные значения по всем некасательным путям почти всюду на окружности. Это вытекает из известной теоремы Фату; легко показать, сверх того, что в рассматриваемом случае эти предельные значения имеют модуль, почти всюду равный единице. Другими словами, субгармоническая функция $\ln|\varphi(z)|$ будет иметь почти всюду предельное значение, равное нулю. В дальнейшем мы докажем, что это обстоятельство имеет место в случае круговой области для всякой субгармонической функции, изобразимой формулой (34).

## § 10. Обобщение формулы Иенсена-Неванлинны [20]

n° 1. Рассмотрим субгармоническую функцию $u(P)$ внутри шара $\overline{OP}<R$ и приложим к ней формулу (33) из § 7, применив для выражения гармонической мажоранты внутри сферы интеграл Пуассона [Введение, § 5, n° 2, (16)].

$$u(Q)=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}u(P)\,\frac{(\rho^2-\overline{OQ}^2)\,\rho^{p-2}}{\overline{PQ}^p}\,d\sigma-\int_{\overline{OP}<\rho}G(Q;\ P)\,d\mu, \tag{a}$$

где $Q$ — любая точка внутри сферы $\sigma$ радиуса $\rho<R$.

Что касается функции Грина $G(Q;\ P)$ для шара $OP<\rho$, то она имеет следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} &G(Q;\ P)=\frac{1}{\overline{QP}^{p-2}}-\frac{1}{\rho^{p-2}}\left(\frac{\overline{OQ}^*}{\overline{Q^*P}}\right)^{p-2} && (p>2)\\ &\text{или}\\ &G(Q;\ P)=\ln\frac{\overline{OQ}\cdot\overline{Q^*P}}{\rho\cdot\overline{QP}} && (p=2),\end{aligned}\right\} \tag{a'}$$

где $Q^*$ — точка, симметричная с точкой $Q$ относительно сферы ра-

[1]) Ср. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, гл. IX, § 3, n° 3 и 4.

диуса $\rho$. Положим в этой формуле, в частности, $Q=O$, считая $u(O)$ величиной конечной; тогда найдем

$$u(O)=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma-\int_{\overline{OP}<\rho}\left(\frac{1}{\overline{OP}^{p-2}}-\frac{1}{\rho^{p-2}}\right)d\mu \quad (p>2) \tag{41}$$

или

$$u(O)=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma-\int_{\overline{OP}<\rho}\ln\frac{\rho}{\overline{OP}}\,d\mu \qquad (p=2).$$

Если $u(O)=-\infty$, то в формулах (41) заменим $u(P)$ через

$$u(P)+\mu(O)\frac{1}{\overline{OP}^{p-2}} \quad (p>2)$$

или через

$$u(P)+\mu(O)\ln\frac{1}{\overline{OP}}, \quad (p=2)$$

последние выражения при $P\to O$ стремятся к конечным пределам $c$ [1]). Тогда получим

$$c=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma+\mu(O)\frac{1}{\rho^{p-2}}-\int_{0<\overline{OP}<\rho}\left(\frac{1}{\overline{OP}^{p-2}}-\frac{1}{\rho^{p-2}}\right)d\mu \quad (p>2)$$

или (42)

$$c=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma+\mu(O)\ln\frac{1}{\rho}-\int_{0<\overline{OP}<\rho}\ln\frac{\rho}{\overline{OP}}\,d\mu \quad (p=2).$$

Формулы (42) содержат в себе формулы (41) как частный случай. Займемся теперь преобразованием объемного интеграла формул (42). Обозначим через $n(r)$ массу слоя $\mu(e)$, заключенную внутри шара с центром $O$ радиуса $r$. Тогда, очевидно, будем иметь

$$\int_{0<\overline{OP}<\rho}\left(\frac{1}{\overline{OP}^{p-2}}-\frac{1}{\rho^{p-2}}\right)d\mu=\int_0^{\rho}\left[\frac{1}{r^{p-2}}-\frac{1}{\rho^{p-2}}\right]d\big(n(r)-n(0)\big)=$$

$$=(p-2)\int_0^{\rho}\frac{n(r)-n(0)}{r^{p-1}}\,dr \quad (p>2).$$

В случае же $p=2$ получим

$$\int_{0<\overline{OP}<\rho}\ln\frac{\rho}{\overline{OP}}\,d\mu=\int_0^{\rho}\ln\frac{\rho}{r}\,d\,[n(r)-n(0)]=\int_0^{\rho}\frac{n(r)-n(0)}{r}\,dr.$$

---

[1]) Здесь предполагается, что при $u(O)=-\infty$ точка $O$ имеет изолированную массу, равную $\mu(O)$ и применяется теорема Пикара (§ 7).



Итак, формулы (42) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} c&=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma-(p-2)\int_0^{\rho}\frac{n(r)-n(0)}{r^{p-1}}\,dr+n(0)\frac{1}{\rho^{p-2}} \quad (p>2)\\ &\text{или}\\ c&=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma-\int_0^{\rho}\frac{n(r)-n(0)}{r}\,dr+n(0)\ln\frac{1}{\rho} \quad (p=2).\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Введем следующие обозначения:

$$N(\rho)=N(\rho,\ u)=(p-2)\int_0^{\rho}\frac{n(r)-n(0)}{r^{p-1}}\,dr-n(0)\frac{1}{\rho^{p-2}} \quad (p>2)$$

или

$$N(\rho)=N(\rho,\ u)=\int_0^{\rho}\frac{n(r)-n(0)}{r}\,dr+n(0)\ln\rho \quad (p=2);$$

$$m^+(\rho)=m^+(\rho,\ u)=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u^+(P)\,d\sigma,$$

$$m_+(\rho)=m_+(\rho,\ u)=\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u_+(P)\,d\sigma,$$

где

$$u(P)=u^+(P)-u_+(P), \quad |u(P)|=u^+(P)+u_+(P).$$

В этих обозначениях формулы (43) примут следующий общий вид:

$$m^+(\rho,\ u)=m_+(\rho,\ u)+N(\rho,\ u)+c, \tag{I}$$

или, что то же,

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma=N(\rho,\ u)+c. \tag{I'}$$

n° 2. Формуле (I) можно придать более общий и симметричный вид, если рассматривать функцию $U(P)$, представимую в виде разности двух субгармонических функций $u(P)$ и $v(P)$. Действительно, согласно формуле (I'), можем написать

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} v(P)\,d\sigma=N(\rho,\ v)+c_1.$$

Вычитая последнее соотношение из формулы (I'), получим

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U(P)\,d\sigma=N(\rho,\ u)-N(\rho,\ v)+C$$

или в принятых обозначениях

$$m^+(\rho,\ U)+N(\rho,\ v)=m_+(\rho,\ U)+N(\rho,\ u)+C. \tag{II}$$

Соотношение (II) представляет собой обобщение формулы Иенсена-Неванлинны. Эту последнюю мы получим из соотношения (II), если примем $U(P)=\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — мероморфная функция внутри круга $|z|<R$.

В самом деле, если $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z)$ и $h(z)$ — голоморфные функции внутри круга $z<R$, имеющие своими нулями соответственно нули и полюсы функции $f(z)$, то $\ln|f(z)|=\ln|g(z)|-\ln|h(z)|$ есть разность двух субгармонических функций $u(z)=\ln|g(z)|$ и $v(z)=\ln|h(z)|$.

Функция $N(\rho, u)$ будет давать плотность распределения нулей, а функция $N(\rho, v)$ — плотность распределения полюсов мероморфной функции $f(z)$ внутри круга $|z|<\rho$.

Соотношение (II) примет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\theta})|\,d\theta+\int_0^{\rho}\frac{n(r,\infty)-n(0,\infty)}{r}\,dr+$$

$$+n(0,\infty)\ln\rho=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|\frac{1}{f(\rho e^{i\theta})}\right|d\theta+$$

$$+\int_0^{\rho}\frac{n(r,0)-n(0,0)}{r}\,dr+n(0,0)\ln\rho+c,$$

где $n(r,\infty)$ обозначает число полюсов функции $f(z)$ внутри круга $|z|<r$, а $n(r,0)$ — число нулей, считая их вместе с кратностями. Очевидно, соотношение (II) выражает некоторый закон взаимности между членами $m$ и $N$, показывая, что при перестановке $u$ и $v$ сумма $m+N$ не изменяется, если пренебречь постоянным.

n° 3. В § 9, n° 3 мы видели, что абсолютная сходимость произведения $\prod_{k=1}^{\infty}\zeta_k$ есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(z)$, голоморфная в единичном круге и имеющая $\zeta_k$ [1]) своими нулями, могла быть представлена в виде произведения двух голоморфных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, из которых первая ограничена, а вторая не обращается в нуль в единичном круге. Этот результат вытекает как частный случай из следующих общих соображений, связанных с формулой (I′), установленной в n° 1 настоящего параграфа. В самом деле, в силу формулы (I′), условия

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}u(P)\,d\sigma=O(1)\quad\text{и}\quad N(\rho,u)=O(1)$$

эквивалентны. С другой стороны, мы знаем, что первое из этих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы субгармоническая функция $u(P)$ внутри шара $\overline{OP}<1$ допускала в этом шаре гармоническую мажоранту, или, что сводится к тому же, для того, чтобы она была представима в виде суммы субгармонической отрицательной функции и гармонической функции.

Таким образом условие $N(\rho, u)=O(1)$ есть необходимое и достаточное для представимости субгармонической функции $u(P)$ в шаре.

[1]) Каждый нуль $\zeta_k\neq 0$ и выписывается столько раз, какова его кратность.



$\overline{OP}<1$ в виде суммы двух слагаемых, из которых первое — отрицательная субгармоническая функция, а второе — гармоническая функция. Переходя к случаю плоскости и полагая, в частности $u(P)=\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — голоморфная функция в единичном круге, мы отсюда заключаем [1]): *необходимое и достаточное условие для представимости $f(z)$ в виде произведения двух голоморфных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, $f(z)=\varphi(z)\psi(z)$, из которых первая ограничена, а вторая не обращается в нуль в единичном круге, будет:*

$$N(\rho,\ln|f(z)|)=O(1).$$

Последнее же условие означает не что иное, как абсолютную сходимость произведения $\prod_{k=1}^{\infty}\zeta_k$, где $\zeta_k\neq 0$ суть нули функции $f(z)$, лежащие внутри единичного круга.

Действительно, согласно определению,

$$N(\rho,\ln|f(z)|)=\int_0^{\rho}\frac{n(r,0)-n(0,0)}{r}\,dr+n(0,0)\ln\rho,$$

и вопрос сводится к выяснению смысла неравенства

$$\int_0^{\rho}\frac{n(r,0)-n(0,0)}{r}\,dr+n(0,0)\ln\rho<C,$$

где $C$ — постоянное, не зависящее от $\rho$.

С этой целью, вычисляя интеграл, перепишем последнее неравенство в виде

$$\ln\frac{\rho^{n+n_0}}{|\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n|}<C,$$

где $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n$, $\zeta_k\neq 0$, — нули функции $f(z)$, лежащие внутри круга радиуса $\rho$, $n$ — число этих нулей (как всегда, каждый нуль считается столько раз, какова его кратность), наконец $n_0$ — кратность $z=0$ как корня $f(z)=0$.

Последнее же неравенство, в свою очередь, может быть записано так:

$$|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n|>\frac{\rho^{n+n_0}}{e^c}. \tag{a}$$

Неравенство (a) справедливо при любом $\rho<1$ и соответствующем $n$. Покажем, что это неравенство останется в силе, если $n$ будем считать постоянным, а $\rho$ — сколь угодно близким к единице, т. е. обнаружим справедливость неравенства

$$|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n|>\frac{\rho'^{n+n_0}}{e^c}, \tag{b}$$

[1]) Ср. ч. I, гл. III, § 6.

где $1 > \rho' \geqslant \rho$. Действительно, обозначая через $n'$ число нулей $\zeta_k$, лежащих внутри окружности $|z| = \rho'$, перепишем так:

$$|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_{n'}| > \frac{\rho'^{n'+n_0}}{e^c}. \qquad (a')$$

Из неравенства (a′) вытекает искомое неравенство (b):

$$\frac{|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n|}{\rho'^n} = \frac{|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_{n'}|}{\rho'^{n'}} \cdot \frac{\rho'^{n'-n}}{|\zeta_{n+1}\zeta_{n+2}\ldots\zeta_{n'}|} > \frac{|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_{n'}|}{\rho'^{n'}},$$

так как

$$\frac{\rho'^{n'-n}}{|\zeta_{n+1}\zeta_{n+2}\ldots\zeta_{n'}|} = \prod_{k=1}^{n'-n}\left|\frac{\rho'}{\zeta_{n+k}}\right| > 1,$$

и, значит, в силу (a′),

$$\frac{|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n|}{\rho'^n} > \frac{\rho'^{n_0}}{e^c},$$

что совпадает с (b).

Считая $n$ постоянным, перейдем в неравенстве (a) к пределу при $\rho$, стремящемся к единице. Получим в результате

$$|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n| \geqslant \frac{1}{e^c}.$$

Последнее неравенство справедливо при всяком $n$. Следовательно, будем иметь

$$\prod_{k=1}^{\infty}|\zeta_k| \geqslant \frac{1}{e^c} > 0,$$

т. е. мы доказали, что бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|$ сходится, так как положительные числа $p_n = |\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n|$ убывают, оставаясь больше положительного постоянного. Обратно, из сходимости бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|$ вытекает очевидным образом неравенство (a):

если

$$|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n| \geqslant \frac{1}{e^c},$$

то и подавно

$$|\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n| > \frac{\rho^{n+n_0}}{e^c},$$

так как $\rho < 1$.

---

ГЛАВА II

# ПРИЛОЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО АППАРАТА К ИЗУЧЕНИЮ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

## § 1. Свойства характеристической функции [8; 9; 20]

n° 1. Будем называть *характеристической функцией* разности $U(P) = u(P) - v(P)$ двух субгармонических функций внутри шара $OP < R$ выражение $m^+(\rho, U) + N(\rho, v)$, стоящее в левой части соотношения (II) (гл. I, § 10). Обозначим эту функцию через $T(\rho)$, т. е. положим

$$T(\rho) = T(\rho, U) = m^+(\rho, U) + N(\rho, v)$$

и докажет следующие ее свойства:

1) $T(\rho)$ — *неубывающая функция относительно* $\rho$ и

2) $T(\rho)$ — *выпуклая функция относительно* $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p > 2)$ *или относительно* $\ln\rho$ $(p = 2)$.

При доказательстве свойства 1) исходной формулой будет служить формула (a) из § 10 гл. I:

$$u(Q) = \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\frac{(\rho^2 - \overline{OQ}^2)\rho^{p-2}}{\overline{PQ}^p}\,d\sigma - \int_{\overline{OP}<\rho} G(Q;\ P)\,d\mu. \qquad (a)$$

Написав аналогичное равенство для $v(Q)$, получим

$$v(Q) = \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} v(P)\frac{(\rho^2 - \overline{OQ}^2)\rho^{p-2}}{\overline{PQ}^p}\,d\sigma - \int_{\overline{OP}<\rho} G(Q;\ P)\,d\nu. \qquad (b)$$

Вычитая из соотношения (a) равенство (b), найдем

$$U(Q) = \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U(P)\frac{(\rho^2 - \overline{OQ}^2)\rho^{p-2}}{\overline{PQ}^p}\,d\sigma - \int_{\overline{OP}<\rho} G(Q;\ P)\,d\mu + \int_{\overline{OP}<\rho} G(Q;\ P)\,d\nu, \qquad (c)$$

где $G(Q;\ P)$ есть функция Грина для шара $\overline{OP} < \rho$ с особенностью при $P = Q$ и определяется по одной из двух формул (a′) гл. I, § 10, смотря по тому, будет ли $p > 2$ или $p = 2$.

Введем следующие сокращенные обозначения:

$$U_\rho^+(Q)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma U^+(P)\frac{(\rho^2-\overline{OQ}^2)\,\rho^{p-2}}{\overline{PQ}^p}\,d\sigma,$$

$$_+U_\rho(Q)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_\sigma U_+(P)\frac{(\rho^2-\overline{OQ}^2)\,\rho^{p-2}}{\overline{PQ}^p}\,d\sigma,$$

$$V_\rho^+(Q)=\int\limits_{\overline{OP}<\rho} G(Q;\ P)\,d\nu,$$

$$_+V_\rho(Q)=\int\limits_{\overline{OP}<\rho} G(Q;\ P)\,d\mu.$$

Тогда в этих обозначениях формула (c) примет вид

$$U(Q)=U_\rho^+(Q)+V_\rho^+(Q)-{}_+U_\rho(Q)-{}_+V_\rho(Q),$$

откуда вытекает неравенство

$$U^+(Q)\leqslant U_\rho^+(Q)+V_\rho^+(Q).$$

Интегрируя последнее неравенство по сфере $s$ с центром в $O$ радиуса $\overline{OQ}=r<\rho$, получим

$$m^+(r,\ U)\leqslant\frac{1}{s}\int\limits_s U_\rho^+(Q)\,ds+\frac{1}{s}\int\limits_s V_\rho^+(Q)\,ds. \tag{1}$$

Так как $U_\rho^+(Q)$ — гармоническая функция внутри шара $\overline{OQ}<\rho$, то

$$\frac{1}{s}\int\limits_s U_\rho^+(Q)\,ds=U_\rho^+(O)=m^+(\rho,\ U). \tag{2}$$

С другой стороны, разность $V_\rho^+(Q)-V_r^+(Q)$ будет гармонической функцией внутри шара $\overline{OQ}<r$, и поэтому имеем, замечая, что $V_r^+(Q)=0$ на сфере $s$,

$$\frac{1}{s}\int\limits_s V_\rho^+(Q)\,ds=\frac{1}{s}\int\limits_s[V_\rho^+(Q)-V_r^+(Q)]\,ds=$$
$$=V_\rho^+(O)-V_r^+(O)=N(\rho,\ v)-N(r,\ v). \tag{3}$$

Складывая равенства (2) и (3) и пользуясь неравенством (1), найдем

$$m^+(r,\ U)\leqslant m^+(\rho,\ U)+N(\rho,\ v)-N(r,\ v)$$

или

$$m^+(r,\ U)+N(r,\ v)\leqslant m^+(\rho,\ U)+N(\rho,\ v),$$

т. е. $T(r)\leqslant T(\rho)$, что и доказывает возрастание функции $T(\rho)$.

n° 2. При исследовании выпуклости функции $T(\rho)$ будем отправляться от формулы (33) гл. I, § 7, приняв за область $D'$ шаровое кольцо $0<r<\overline{OP}<\rho<R$,

$$u(Q)=h'(Q)-\int\limits_{D'} G'(Q;\ P)\,d\mu, \tag{33}$$



где $h'(Q)$ как наилучшая гармоническая мажоранта определяется по формуле Грина

$$h'(Q)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2(p-2)\,\pi^{\frac{p}{2}}}\int\limits_{C'} u(P)\frac{\partial G'(Q;\ P)}{\partial n}\,dS\quad(p>2)$$

($C'$ — поверхность кольца) или

$$h'(Q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C'} u(P)\frac{\partial G'}{\partial n}\,dS\,^{1)}\quad(p=2).$$

Применяя эту формулу к субгармонической функции $v(Q)$ и вычитая последнюю из (33), найдем

$$U(Q)=H(Q)-\int\limits_{D'} G'(Q;\ P)\,d\mu+\int\limits_{D'} G'(Q;\ P)\,d\nu, \tag{4}$$

где $H(Q)$ определяется по формуле

$$H(Q)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2(p-2)\,\pi^{\frac{p}{2}}}\int\limits_{C'} U(P)\frac{\partial G'(Q;\ P)}{\partial n}\,dS\quad(p>2)$$

или

$$H(Q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C'} U(P)\frac{\partial G'(Q;\ P)}{\partial n}\,dS\quad(p=2).$$

Введем следующие сокращенные обозначения:

$$W^+(Q)=H^+(Q)+\int\limits_{D'} G'(Q;\ P)\,d\nu,$$

$$W_+(Q)=H_+(Q)+\int\limits_{D'} G'(Q;\ P)\,d\mu,$$

где $H^+$ и $H_+$ получаются из $H$ заменой $U$ соответственно на $U^+$ и $U_+$.

Тогда соотношение (47) примет вид

$$U(Q)=W^+(Q)-W_+(Q),$$

откуда вытекает неравенство

$$U^+(Q)\leqslant W^+(Q).$$

Считая $r<t<\rho$, проинтегрируем последнее неравенство по сфере $s$ с центром в точке $O$ радиуса $\overline{OQ}=t$; получим

$$m^+(t,\ U)\leqslant\frac{1}{s}\int\limits_s W^+(Q)\,ds. \tag{5}$$

С другой стороны, согласно формуле (5), будет

$$N(t,\ v)=N(\rho,\ v)-\frac{1}{s}\int\limits_s V_\rho^+(Q)\,ds. \tag{6}$$

---

1) Ср. Введение, § 4.

Складывая (5) и (6), найдем

$$m^+(t, U) + N(t, v) \leqslant \frac{1}{s}\int_s A(Q)\,ds, \tag{7}$$

где положено $A(Q) = W^+(Q) - V_\rho^+(Q) + N(\rho, v)$.

Функция $A(Q)$, гармоническая внутри кольца, на его поверхности удовлетворяет условиям:

на сфере $\overline{OQ} = \rho$

$$A(Q) = U^+(Q) + N(\rho, v),$$

откуда

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma A(Q)\,d\sigma = m^+(\rho, U) + N(\rho, v) = T(\rho);$$

на сфере $\overline{OQ} = r$

$$A(Q) = U^+(Q) + N(\rho, v) - V_\rho^+(Q),$$

откуда

$$\frac{1}{\sigma'}\int_{\sigma'} A(Q)\,d\sigma' = m^+(r, U) + N(\rho, v) - \frac{1}{\sigma'}\int_{\sigma'} V_\rho^+(Q)\,d\sigma' =$$
$$= m^+(r, U) + N(r, v) = T(r)$$

($\sigma'$ — сфера радиуса $r$).

Итак, согласно формуле (7),

$$T(t) \leqslant \frac{1}{s}\int_s A(Q)\,ds. \tag{8}$$

Правая часть последнего неравенства как среднее значение на сфере $s$ гармонической функции $A(Q)$ внутри кольца есть линейная функция относительно $\frac{1}{t^{p-2}}$ $(p > 2)$ или относительно $\ln t\,(p = 2)$ (ч. I, гл. III, § 8). С другой стороны, мы видели, что эта правая часть неравенства (8) равна $T(r)$ при $t = r$ и $T(\rho)$ при $t = \rho$.

Это и доказывает выпуклость функции $T(\rho)$ относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p > 2)$ или относительно $\ln\rho\,(p = 2)$.

## § 2. Функция $N(\rho)$ [8; 9; 20]

n° 1. В § 10 гл. I мы отметили соотношение (I′)

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(P)\,d\sigma = N(\rho, u) + c, \tag{I′}$$

согласно которому среднее значение на сфере $\sigma\,(\overline{OP} = \rho)$ субгармонической функции внутри шара $\overline{OP} < R$, $\rho < R$, совпадает, с точностью до придаточного постоянного, со значением $N(\rho, u) = N(\rho)$, выражающим среднюю плотность распределения масс внутри шара радиуса $\rho$.



В силу определения (гл. I, § 10) функция $N(\rho)$ имеет своей производной относительно $-\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p > 2)$ или относительно $\ln\rho\,(p = 2)$ величину $n(\rho, u)$, положительную и возрастающую вместе с $\rho$. Отсюда немедленно заключаем, что функция $N(\rho)$ обладает свойствами:

1) $N(\rho)$ — неубывающая функция относительно $\rho$;

2) $N(\rho)$ — выпуклая функция относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ $(p > 2)$ или относительно $\ln\rho\,(p = 2)$.

В силу формулы (I′) только что упомянутые два свойства должны принадлежать также и среднему значению субгармонической функции на сфере $\sigma$, что представляет теорему о среднем значении, доказанную в ч. I, гл. III, § 8, независимо от аналитического аппарата.

n° 2. Далее, мы видели (ч. I, гл. V, § 5), что необходимое и достаточное условие для существования гармонической мажоранты функции $u(P)$ во всем шаре $\overline{OP} < R$ заключается в ограниченности сверху среднего значения $\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u^+(P)\,d\sigma$ как функции $\rho$. В силу формулы (I′) мы получаем отсюда другой критерий для существования гармонической мажоранты функции $u(P)$ во всем шаре $\overline{OP} < R$. Этот критерий, необходимый и достаточный, состоит в ограниченности функции $N(\rho)$, выражающей среднюю плотность распределения масс.

n° 3. В ч. I, гл. V, § 6 мы показали, что для субгармонической функции внутри шара $\overline{OP} < R$ условия

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u^+(P)\,d\sigma = O\,(1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sigma}\int_\sigma |u(P)|\,d\sigma = O\,(1)$$

($\sigma$ — сфера $\overline{OP} = \rho < R$), эквивалентны между собой. Тот же результат немедленно получается из нашей формулы (I′), если запишем ее в виде

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u^+(P)\,d\sigma = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u_+(P)\,d\sigma + N(\rho, u) + c.$$

n° 4. Естественно назвать *плотностью массы в точке* $O$ величину $\nu$, определяемую из условия

$$\nu = \lim_{r\to 0}\frac{n(r, u)}{\dfrac{\pi^{\frac{p}{2}} r^p}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}} \quad (p \geqslant 2),$$

предполагая, что этот предел существует. В этом случае значение $u(O)$ субгармонической функции в точке $O$ конечно, и формула (I′) имеет вид

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(P)\,d\sigma = (p-2)\int_0^\rho \frac{n(r, u)}{r^{p-1}}\,dr + u(O) \quad (p > 2)$$

или

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma = \int_0^{\rho} \frac{n(r,\ u)}{r}\,dr + u(O) \quad (p=2).$$

Заметив, что

$$\int_0^{\rho} \frac{n(r,\ u)}{r^{p-1}}\,dr \approx \frac{\pi^{\frac{p}{2}}\rho^2}{2\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}\nu \quad (p \geqslant 2),$$

мы получим

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma - u(O)}{\frac{\rho^2}{2p}} = \frac{2(p-2)\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\nu \quad (p>2)$$

или

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\,d\sigma - u(O)}{\frac{\rho^2}{4}} = 2\pi\nu \quad (p=2).$$

Последние равенства следует рассматривать как *обобщенные уравнения Пуассона.*

## § 3. Критерий для суммы субгармонической отрицательной и супергармонической положительной функций [8; 9; 20]

n° 1. В ч. I, гл. V, § 6 был выведен критерий разложимости субгармонической функции в области $D$ на сумму двух слагаемых, из которых одно представляет субгармоническую отрицательную функцию в $D$, а другое — гармоническую положительную функцию. Там же была поставлена более общая задача об определении необходимого и достаточного условия представимости функции в виде суммы двух слагаемых, из которых первое есть субгармоническая отрицательная функция, а второе — супергармоническая положительная функция. Пользуясь аналитическим аппаратом гл. I, мы в состоянии решить эту проблему.

*Необходимое и достаточное условие для представимости функции $U(P)=u(P)-v(P)$ в виде разности двух отрицательных субгармонических функций внутри шара $\overline{OP}<R$ будет*

$$T(\rho)=T(\rho,\ U)=O\ (1) \quad (\rho<R).$$

В самом деле, пусть $U(P)=u(P)-v(P)$, где $u(P)$ и $v(P)$ — отрицательные субгармонические функции внутри шара $\overline{OP}<R$. Заметив, что $U(P)<-v(P)$ и, значит, $U^+(P)<-v(P)$, получаем

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U^+(P)\,d\sigma < -\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} v(P)\,d\sigma,$$

где $\sigma$ есть сфера $\overline{OP}=\rho<R$.



Так как по формуле (I′)

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} v(P)\,d\sigma = N(\rho,\ v) - c,$$

то будем иметь

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U^+(P)\,d\sigma < -N(\rho,\ v) + c$$

или

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U^+(P)\,d\sigma + N(\rho,\ v) < c, \text{ т. е. } T(\rho) < c.$$

Обратно, допустим, что характеристическая функция $T(\rho)=T(\rho, U)$ для разности двух субгармонических функций $U(P)=u(P)-v(P)$ удовлетворяет условию $T(\rho)=O(1)$. При этом условии покажем, что функцию $U(P)$ можно представить в виде разности отрицательных субгармонических функций. Согласно условию, имеем

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U^+(P)\,d\sigma < c, \quad N(\rho,\ v) < c, \tag{9}$$

каков бы ни был радиус $\rho<R$ сферы $\sigma$.

По основной формуле (II) (гл. I, § 10) будет

$$T(\rho) = \frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U_+(P)\,d\sigma + N(\rho,\ u) + \text{const}.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$N(\rho,\ u) < c_1.$$

В силу последнего неравенства, а также второго из неравенств (9) заключаем, что субгармонические функции $u(P)$ и $v(P)$ имеют во всем шаре $\overline{OP}<R$ гармонические мажоранты (§ 2). Обозначим эти последние соответственно $u^*(P)$ и $v^*(P)$. Представив $U(P)=u(P)-v(P)$ в виде

$$U(P) = [u(P) - u^*(P)] - [v(P) - v^*(P)] + [u^*(P) - v^*(P)]$$

и полагая

$$u(P) - u^*(P) = u_1(P), \quad v(P) - v^*(P) = v_1(P),$$

заключаем:

$$U(P) = u_1(P) - v_1(P) + g(P),$$

где $u_1(P)$ и $v_1(P)$ — отрицательные субгармонические функции, а $g(P)$ — гармоническая функция.

По доказанному, если положить $u_1(P)-v_1(P)=U_1(P)$, имеем

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U_1^+(P)\,d\sigma = O(1). \tag{10}$$

Так как

$$g(P) = U(P) - U_1(P),$$

то

$$|g(P)| \leqslant |U(P)| + |U_1(P)|.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma |g(P)|\,d\sigma \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U^+(P)\,d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U_+(P)\,d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U_1^+(P)\,d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U_{1+}(P)\,d\sigma = O(1).$$

Здесь мы воспользовались первым из неравенств (9), неравенством (10), а также ограниченностью выражений $\frac{1}{\sigma}\int_\sigma U_+(P)\,d\sigma$ и $\frac{1}{\sigma}\int_\sigma U_{1+}(P)\,d\sigma$, что следует из условий $T(\rho, U) = O(1)$ и $T(\rho, U_1) = O(1)$ на основании основной формулы (II). Из установленного соотношения

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma |g(P)|\,d\sigma = O(1)$$

заключаем, что гармоническая функция $g(P)$ представима в виде разности $g_1(P) - g_2(P)$ гармонических положительных функций (ч. I, гл. V, § 6). После этого имеем

$$U(P) = u_1(P) - v_1(P) + g_1(P) - g_2(P) = [u_1(P) - g_2(P)] - [v_1(P) - g_1(P)],$$

т. е. $U(P)$ представлена в виде разности двух субгармонических отрицательных функций, что и требовалось доказать.

n° 2. Рассматриваемое разложение $U(P) = u(P) - v(P)$ перепишем в виде

$$e^{U(P)} = e^{u(P) - v(P)} = \frac{e^{u(P)}}{e^{v(P)}}.$$

Положим $e^{U(P)} = V(P)$, $e^{u(P)} = a(P)$, $e^{v(P)} = b(P)$. Тогда будем иметь

$$V(P) = \frac{a(P)}{b(P)},$$

где $a(P)$ и $b(P)$ — логарифмически-субгармонические функции.

Из доказанной теоремы вытекает *необходимое и достаточное условие для представимости функции* $V(P) = \frac{a(P)}{b(P)}$, *являющейся отношением двух логарифмически-субгармонических функций, в виде отношения ограниченных логарифмически-субгармонических функций.*

*Искомое условие, очевидно, будет*

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma \ln^+ V(P)\,d\sigma + N(\rho, \ln b) = O(1).$$

n° 3. В частности, полагая $a(P) = |g(z)|$, $b(P) = |h(z)|$, где $g(z)$ и $h(z)$ — голоморфные функции в круге $|z| < R$, найдем *условие Неванлинны для представимости мероморфной функции* $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$



*в круге* $|z| < R$ *в виде отношения двух ограниченных голоморфных функций. Это условие будет*

$$T(\rho) = T(\rho, \ln|f|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\theta})|\,d\theta + N(\rho, \ln|h|) = O(1),$$

*где* $N$ *характеризует плотность распределения полюсов мероморфной функции* $f(z)$ *внутри круга* $|z| < \rho$.

## § 4. Обобщение теоремы Лиувилля [8; 9; 20]

n° 1. В ч. I, гл. III, § 8 мы видели, что субгармоническая функция во всей плоскости, ограниченная сверху, необходимо есть константа. Пользуясь аналитическим аппаратом гл. I, мы можем расширить это предложение, доказав следующую теорему:

*Если функция* $U(z) = u(z) - v(z)$, *представимая в виде разности двух субгармонических функций во всей плоскости, удовлетворяет условию*

$$T(\rho) = T(\rho, U) = o(\ln \rho),$$

*то эта функция* $U(z)$ *есть константа.*

В самом деле, согласно § 1, характеристическая функция $T(\rho)$, рассматриваемая как функция от $\ln \rho$, должна быть выпуклой и возрастающей.

Полагая $T(\rho) = f(\ln \rho) = f(t)$, предположим, что $f(t)$ не есть постоянное. Тогда существует значение $t = t_0$, при котором производная $f'(t_0) = a > 0$, причем вследствие выпуклости функции $f(t)$ неравенство $f'(t) \geqslant a$ выполняется при всех $t \geqslant t_0$.

Посредством интегрирования этого неравенства в пределах от $t_0$ до $t > t_0$ получим

$$f(t) \geqslant at + f(t_0) - at_0,$$

т. е.

$$\frac{f(t)}{t} \geqslant a + \frac{f(t_0) - at_0}{t},$$

откуда вытекает, что $\varliminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} \geqslant a$; это же находится в противоречии с условием $\frac{f(t)}{t} \to 0$ при неограниченном возрастании $t$.

Итак, доказано, что $T(\rho)$ есть постоянная величина. Применяя основное соотношение (II), мы немедленно убеждаемся, что

$$N(\rho, u) = O(1) \quad \text{и} \quad N(\rho, v) = O(1).$$

Так как вследствие § 2 функция $N$ есть возрастающая и выпуклая относительно $\ln \rho$, то последние соотношения влекут постоянство функций $N(\rho, u)$ и $N(\rho, v)$ относительно $\rho$. С другой стороны, мы знаем, что $\frac{dN(\rho)}{d\ln\rho} = n(\rho)$, откуда в данном случае вытекает, что

$$n(\rho, u) = 0, \quad n(\rho, v) = 0.$$

Иными словами, функции $u$ и $v$ — гармонические, а значит, и $U(z)$ — функция, гармоническая во всей плоскости.

Вспомнив, что

$$T(\rho, U) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = C,$$

мы из формулы Пуассона

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta})\,\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho\cos(\theta-\varphi) + r^2}\,d\theta$$

найдем

$$U(z) < \frac{1}{2\pi}\,\frac{\rho + r}{\rho - r}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

Так как по условию $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = C$, то из предыдущего неравенства, заставляя $\rho$ неограниченно расти, получим:

$$U(z) \leqslant C.$$

Последнее справедливо, какова бы ни была точка $z$. Следовательно, гармоническая функция $U(z)$ должна быть ограниченной сверху во всей плоскости, что, как известно из ч. I, гл. III, § 6, может быть только в случае, когда $U(z)$ тождественно равна постоянному, что и требовалось доказать.

n° 2. Принимая, в частности, $U(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — мероморфная функция, предположим, что

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\theta})|\,d\theta + \int_0^{\rho} \frac{n(r, \infty) - n(0, \infty)}{r}\,dr + n(0, \infty)\ln\rho,$$

где $n(r, \infty)$ — число полюсов внутри круга $|z| < r$, удовлетворяет условию: $T(\rho) = o(\ln\rho)$. При этом условии мы можем заключить: $f(z)$ есть постоянное.

n° 3. В ч. I, гл. III, § 9 была рассмотрена теорема Лиувилля для гармонических функций в пространстве любого числа $p \geqslant 2$ измерений. В настоящем § мы видели, как широко обобщается это предложение для класса субгармонических функций во всей плоскости. Для пространства $p \geqslant 2$ измерений представляется интересным отметить следующую теорему: не существует функции $u(P)$, отличной от константы со следующими свойствами:

1) $u(P)$ непрерывная функция во всем пространстве, имеющая гармонический характер в окрестности бесконечно удаленной точки;

2) $u(P)$ не имеет экстремальных значений во всем пространстве;

3) $u(P) < C$ во всем пространстве.

Предполагая $u(P)$ отличной от константы придем к противоречию.



В самом деле, не уменьшая общности, мы можем предполагать $u(P) < -1$. Выполняя инверсию относительно сферы с центром в начале координат, радиуса 1, рассмотрим функцию [1]):

$$v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = u(x_1, x_2, x_3),$$

где

$$x_1 = \frac{\xi_1}{R_1^2};\quad x_2 = \frac{\xi_2}{R_1^2},\quad x_3 = \frac{\xi_3}{R_1^2},\quad R_1^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$

Так как $u(x_1, x_2, x_3)$ имеет гармонический характер в окрестности бесконечно удаленной точки, то функция $\frac{v(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{R_1}$ будет гармонической в окрестности начала координат, причем она стремится к $-\infty$, когда точка $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ приближается неограниченно к началу координат. Последнее заключение следует из неравенства $\frac{v(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{R_1} < -\frac{1}{R_1}$.

Следовательно, по теореме Бохера и Пикара (гл. I, § 7, n° 3) наша функция в окрестности начала координат представима в виде:

$$\frac{v(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{R_1} = \frac{c}{R_1} + U(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

где $U(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ функция гармоническая, включая начало координат.

Из последней формулы вытекает, что

$$v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = c + R_1 \cdot U(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

стремится к определенному конечному пределу $c$, когда точка $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ неограниченно приближается к началу координат. Возвращаясь к старым переменным $x_1, x_2, x_3$, мы видим, что непрерывная функция $u(x_1, x_2, x_3)$ имеет предел $c$, когда точка $P(x_1, x_2, x_3)$ уходит в бесконечность. Это противоречиво с условием 2) теоремы.

## § 5. Логарифмический потенциал конечной массы [8; 9; 20]

n° 1. *Функцию* $u^*(z) = \int \ln|z - \zeta|\,d\mu$ *мы называем логарифмическим потенциалом конечной массы, если вся масса заключена внутри достаточно большого круга* $|\zeta| < R$ *и величина* $n(R, u^*) = \int_{0 \leqslant |\zeta| < R} d\mu$ *конечна.*

В этом случае за область интегрирования мы можем принять всю плоскость комплексного переменного $\zeta$. Очевидно, функция $u^*(z)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{*+}(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho).$$

---

[1]) Для определенности мы считаем $p = 3$. Доказательство проводится аналогично при любом $p$.

Ради общности рассмотрим функцию

$$U^*(z) = u^*(z) - v^*(z) + C,$$

представимую в виде разности двух логарифмических потенциалов конечной массы (с точностью до придаточной константы). Очевидно, эта функция также удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^{*+}(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho).$$

Так как $N(\rho, v^*) = O(\ln\rho)$, то

$$T(\rho) = T(\rho, U^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^{*+}(\rho e^{i\theta})\,d\theta + N(\rho, v^*) = O(\ln\rho).$$

n° 2. Замечательным является то обстоятельство, что, обратно, если функция $W(z) = u(z) - v(z)$ есть разность двух субгармонических функций во всей плоскости, массы которых расположены в конечной части плоскости, удовлетворяющая условию $T(\rho, U) = O(\ln\rho)$, то она представима в виде разности двух логарифмических потенциалов конечной массы (с точностью до придаточного постоянного). Действительно, из условия $T(\rho) = O(\ln\rho)$ следует, что $N(\rho, u) = O(\ln\rho)$ и $N(\rho, v) = O(\ln\rho)$. Последние соотношения показывают, что $n(\rho, u)$ и $n(\rho, v)$ ограничены; так как функции $u$ и $v$ — гармонические вне круга $|z| > R$ достаточно большого радиуса, то функции $n(\rho, u)$ и $n(\rho, v)$, начиная с некоторого $\rho > R$, сохраняют постоянное конечное значение. Эти постоянные значения и будут выражать полные массы субгармонических функций $u(z)$ и $v(z)$. Согласно основной теореме гл. I, § 7 имеем

$$u(z) = \int \ln|z-\zeta|\,d\mu + h(z),$$

$$v(z) = \int \ln|z-\zeta|\,d\nu + h_1(z),$$

где интегралы можно считать распространенными на всю плоскость, функции $h(z)$ и $h_1(z)$ — гармоническими во всей плоскости.

Из последних равенств вытекает, что

$$U(z) = u(z) - v(z) = \int \ln|z-\zeta|\,d\mu - \int \ln|z-\zeta|\,d\nu + H(z),$$

где $H(z)$ — гармоническая функция во всей плоскости.

Итак, мы имеем

$$U(z) = F(z) + H(z),$$

где $F(z)$ есть разность логарифмических потенциалов конечной массы и, следовательно, удовлетворяет условию $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho)$; $H(z)$ — гармоническая функция.



Из соотношения $H(z) = U(z) - F(z)$ следует, что всегда $H^+(z) \leqslant U^+(z) + F_+(z)$ и, значит,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

Это неравенство показывает нам, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho),$$

так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho)$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho).$$

Покажем, что при условии $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho)$ гармоническая функция $H(z)$ должна быть константой. С этой целью, полагая $H(z) = \ln|f(z)|$, мы должны считать $f(z)$ целой функцией, причем максимальный модуль в круге $|z| \leqslant \rho$ функции $f(z)$ — обозначим его через $M(\rho)$ — удовлетворяет неравенству $\frac{\ln M(\rho)}{\ln\rho} < C$, начиная с достаточно большого $\rho$.

Другими словами, начиная с достаточно большого $\rho$, имеем $M(\rho) < \rho^c$, т. е. $f(z)$ есть полином. Так как, с другой стороны, $f(z)$ не может обращаться в нуль, то $f(z) \equiv \text{const}$ и, значит, $H(z) = \text{const}$. Таким образом $H(z)$ есть константа, и наше утверждение доказано.

Доказанное предложение возможно формулировать следующим образом:

*Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $U(z) = u(z) - v(z)$, представимая во всей плоскости в виде разности двух субгармонических функций, массы которых расположены в конечной части плоскости, могла быть рассматриваема с точностью до придаточного постоянного как разность двух логарифмических потенциалов конечной массы, есть $T(\rho) = T(\rho, U) = O(\ln\rho)$.*

n° 3. Как частный случай этого предложения мы получаем, что вышеупомянутое *условие $T(\rho) = O(\ln\rho)$ есть необходимое и достаточное для того, чтобы мероморфная функция $f(z)$ была рациональной.*

Этот случай мы получим, полагая $U(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — мероморфная функция, и замечая, что имеется дискретное распреде-

ление масс, выражаемых целыми числами. В этом случае логарифмические потенциалы выражаются конечными суммами вида

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \ln|z-\zeta_k| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \nu_k \ln|z-\zeta_k'|,$$

где $\zeta_k$ и $\zeta_k'$ суть нули и полюсы с кратностями, соответственно равными $\mu_k$ и $\nu_k$.

Функция $f(z)$ примет вид рациональной дроби:

$$f(z)=\frac{C\prod\limits_{k=1}^{m}(z-\zeta_k)^{\mu_k}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\zeta_k')^{\nu_k}}.$$

---

# ГЛАВА III

# ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

## § 1. Случай круга [14; 15; 16]

n° 1. Теорема. *Пусть $u(z)$ есть субгармоническая функция в круге $|z|=r<1$, удовлетворяющая условию*

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\theta})\,d\theta = O(1) \quad (r<1). \tag{1}$$

*Когда точка $re^{i\theta}$ стремится по любым некасательным путям к $e^{i\theta_0}$, то почти для всех значений $\theta_0$, $-\pi \leqslant \theta_0 < \pi$ существует* $\lim u(re^{i\theta}) = U(\theta_0)$. Обозначим через

$$g(P;\ Q)=g(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=g(r,\ \theta;\ \rho,\ \varphi)$$

функцию Грина для единичного круга. Как известно, для точки $P$, внутренней к кругу, функция $g$ — положительная во всех точках $Q$, принадлежащих области $\rho<1$, равная нулю на окружности $\rho=1$. Далее, функция $g$ во всех точках $Q$ внутри круга $\rho<1$ гармоническая, за исключением точки $Q=P$, в которой она имеет логарифмическую бесконечность. Очевидно, функция $g$ представляется формулой

$$g(P;\ Q)=\ln\left(\frac{r\cdot\overline{QP^*}}{\overline{QP}}\right),$$

где $P^*$ — точка, симметричная с точкой $P$ относительно единичной окружности.

Введем следующие сокращенные обозначения:

$$s=1-r,\quad \sigma=1-\rho,\quad \psi=\varphi-\theta;$$

через $A$, $A_1$, $A_2$, ... будем обозначать положительные абсолютные постоянные, значения которых в различных случаях могут быть разными.

Функция $g(P;\ Q)$ удовлетворяет (для точек $P$ и $Q$ внутри круга) следующим неравенствам, в которых $\psi$ считается принадлежащим интервалу $(-\pi, +\pi)$:

$$0<g(P;\ Q)\leqslant\frac{A\sigma s}{(s-\sigma)^2+\psi^2}\quad\left(s<\frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

$$0<g(P;\ Q)\leqslant\ln\left(1+\frac{A\sigma s}{(s-\sigma)^2+\psi^2}\right)\quad\left(s<\frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Из этих неравенств первое следует из второго.

Для вывода неравенства (3) заметим, что

$$e^{2g}=\left(\frac{r\cdot\overline{QP^*}}{\overline{QP}}\right)^2=\frac{r^2(r^{-2}-2r^{-1}\rho\cos\psi+\rho^2)}{r^2-2r\rho\cos\psi+\rho^2}=$$
$$=1+\frac{(1-r^2)(1-\rho^2)}{D}\leqslant 1+\frac{4\sigma s}{D},$$

где положено

$$D=r^2-2r\rho\cos\psi+\rho^2=(s-\sigma)^2+4r(1-\sigma)\sin^2\frac{1}{2}\psi.$$

Так как $r>\frac{1}{2}\left(\text{или } s<\frac{1}{2}\right)$, то имеем в случае $\sigma\leqslant\frac{3}{4}$ неравенство

$$D\geqslant(s-\sigma)^2+A_1\psi^2\geqslant A_2\{(s-\sigma)^2+\psi^2\};$$

в случае $\sigma>\frac{3}{4}$ будет

$$D>(s-\sigma)^2>\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2=A_1\geqslant A_2(1+\psi^2)\geqslant A_3\{(s-\sigma)^2+\psi^2\}.$$

Таким образом в обоих случаях

$$e^{2g}\leqslant 1+\frac{A\sigma s}{(s-\sigma)^2+\psi^2},$$

что и доказывает неравенство (3).

n° 2. Лемма. *Пусть $h(\varphi)\geqslant 0$ монотонно возрастает [значение $h(\pi)$ — конечное] на сегменте $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ и удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{\varphi\to+0}}\frac{h(\varphi)}{\varphi}\leqslant c.$$

Тогда имеют место соотношения:

$$\overline{\lim_{s\to+0}}\, s\int_{s-0}^{\pi}\frac{dh(\varphi)}{\varphi^2}\leqslant Ac, \tag{4}$$

$$\overline{\lim_{s\to+0}}\, s\int_{+0}^{s}\frac{dh(\varphi)}{s^2+\varphi^2}\leqslant Ac, \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{s\to+0}}\,\frac{1}{s}\int_{+0}^{s}\ln\left(\frac{A_1s^2}{\varphi^2}\right)dh(\varphi)\leqslant Ac. \tag{6}$$

Действительно, для (4) имеем

$$s\int_{s-0}^{\pi}=s\left[\frac{h(\varphi)}{\varphi^2}\right]_{s-0}^{\pi}+2s\int_{s}^{\pi}\frac{h(\varphi)\,d\varphi}{\varphi^3}\leqslant s\frac{h(\pi)}{\pi^2}+2s\int_{s}^{\pi}\frac{c\varphi+o(\varphi)}{\varphi^3}d\varphi<$$
$$<o(1)+2c+2s\int_{s}^{\pi}\frac{o(\varphi)\,d\varphi}{\varphi^3}.$$

Выберем $\varepsilon>0$ столь малым, чтобы для $0<\varphi\leqslant\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$\frac{o(\varphi)}{\varphi}<c.$$



Тогда будем иметь

$$2s\int_{s}^{\pi}\frac{o(\varphi)\,d\varphi}{\varphi^3}=2s\int_{s}^{\varepsilon}\frac{o(\varphi)\,d\varphi}{\varphi^3}+2s\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{o(\varphi)\,d\varphi}{\varphi^3}<2c+$$
$$+\frac{2s\pi}{\varepsilon^3}\max o(\varphi)=2c+o(1).$$

Следовательно, окончательно получаем

$$s\int_{s-0}^{\pi}\frac{dh(\varphi)}{\varphi^2}<o(1)+2c+2c+o(1)=4c+o(1),$$

что и доказывает неравенство (4).

Для (5) имеем

$$s\int_{+0}^{s}=s\left[\frac{h(\varphi)}{s^2+\varphi^2}\right]_{+0}^{s}+2s\int_{0}^{s}\frac{h(\varphi)\,\varphi d\varphi}{(s^2+\varphi^2)^2}\leqslant c+2s\int_{0}^{s}\frac{c\varphi^2+o(\varphi^2)}{(s^2+\varphi^2)^2}d\varphi=$$
$$=c+2\int_{0}^{s}\{c+o(1)\}\frac{s\varphi^2\,d\varphi}{(s^2+\varphi^2)^2}=c+2\int_{0}^{1}\{c+o(1)\}\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}=$$
$$=Ac+o(1).$$

Наконец (6) проверяется так:

$$\frac{1}{s}\int_{+0}^{s}=\frac{1}{s}\left[\ln\left(\frac{A_1s^2}{\varphi^2}\right)h(\varphi)\right]_{+0}^{s}+\frac{2}{s}\int_{0}^{s}\frac{h(\varphi)\,d\varphi}{\varphi}\leqslant$$
$$\leqslant\ln A_1\frac{h(s)}{s}+\frac{2}{s}\int_{0}^{s}\{c+o(1)\}\,d\varphi\leqslant Ac+o(1).$$

n° 3. После вывода предварительных оценок, рассмотренных в п. 1 и 2, обратимся к доказательству основной теоремы о существовании граничных значений субгармонической функции $u(z)$.

Вследствие условия (1) наша функция $u(z)$ имеет гармоническую мажоранту во всем единичном круге, и поэтому применима основная формула гл. I, § 8:

$$u(P)=h(P)-\iint g(P;\,Q)\,d\mu(Q), \tag{7}$$

где $h(P)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта в единичном круге функции $u(P)$, а интегрирование распространено на круг $\rho<1$.

Положим

$$h(r,\theta;\,R)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(R,\alpha)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\alpha-\theta)+r^2}\,d\alpha, \tag{8}$$

где $0\leqslant r<R<1$.

Так как $h(P)=h(r,\theta)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u$ во всем единичном круге, то для всякой точки $P(r,\theta)$ имеем

$$h(r,\theta)=\lim_{R\to1}h(r,\theta;\,R).$$

Согласно теореме Фату (Fatou) можем написать

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(r, \theta)|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{R\to 1} |h(r, \theta;\ R)|\, d\theta \leqslant \overline{\lim_{R\to 1}} \int_{-\pi}^{\pi} |h(r, \theta;\ R)|\, d\theta,$$

откуда, принимая во внимание (8) и замечая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta) + r^2}\, d\alpha = 1,$$

находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(r, \theta)|\, d\theta \leqslant \overline{\lim} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(R, \alpha)| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta) + r^2}\, d\alpha =$$

$$= \overline{\lim} \int_{-\pi}^{\pi} |u(R, \alpha)|\, d\alpha.$$

В силу условия (1) последний предел есть конечное постоянное, так как соотношение $\int_{-\pi}^{\pi} u^+(R, \alpha)\, d\alpha = O(1)$ эквивалентно с равенством $\int_{-\pi}^{\pi} |u(R, \alpha)|\, d\alpha = O(1)$ (ч. I, гл. III, § 8, n° 8).

Итак, мы доказали, что гармоническая функция $h(r, \theta)$, входящая в формулу (7), удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(r, \theta)|\, d\theta = O(1) \quad (r < 1). \tag{9}$$

В силу гл. V, § 6, гармоническая функция $h(r, \theta)$ при условии (9) всюду в единичном круге может быть представлена в виде разности двух положительных гармонических функций:

$$h(r, \theta) = h_1(r, \theta) - h_0(r, \theta).$$

Известно, что положительная гармоническая функция в единичном круге стремится к конечным предельным граничным значениям по всем некасательным путям, почти всюду на единичной окружности [1]). Это немедленно вытекает из известного предложения Фату [2]) о существовании почти всюду на окружности предельных значений аналитической функции, ограниченной внутри окружности, и теоремы единственности, так как функция $\frac{1}{h_1(r, \theta) + iq_1(r, \theta) + 1}$ ($q_1$ — сопряженная с $h_1$) будет голоморфной и ограниченной в единичном круге, если $h_1(r, \theta) > 0$. Итак, функции $h_1(r, \theta)$ и $h_0(r, \theta)$ имеют предельные значения почти всюду на окружности $r = 1$, когда точка $(r, \theta)$ приближается к точке окружности по любым некасательным путям. Если так, то их разность $h(r, \theta)$ обладает тем же свойством.

---

[1]) См. И. И. Привалов, Интеграл Cauchy, Изв. Саратовского ун-та, 1918.
[2]) См., например, Bieberbach, Moderne Functionentheorie, II.



Возвращаясь к формуле (7), мы видим, что вопрос приводится к изучению предельных значений функции

$$w(P) = \iint g(P;\ Q)\, d\mu(Q). \tag{10}$$

n° 4. Докажем теперь следующее вспомогательное предложение: *функция* $w(P) = \iint g(P;\ Q)\, d\mu(Q)$ *стремится к нулю для почти всех точек окружности* $r = 1$, *когда точка* $P(r, \theta)$ *стремится к точке* $(1, \theta_0)$ *окружности так, что* $\theta \leqslant \theta_0$.

Прежде всего заметим, что

$$\iint (1 - \rho)\, d\mu(Q) < +\infty; \tag{11}$$

это следует из существования интеграла (10), если заметим, что при фиксированной точке $P$ имеем $g(P;\ Q) \geqslant K(1 - \rho)$ для всех точек $Q$, где $K$ зависит только от $P$.

Обозначим через

$$\varepsilon(\rho_0) = \iint_{\rho > \rho_0} \sigma\, d\mu, \tag{12}$$

где $\sigma = 1 - \rho$. Тогда в силу (11)

$$\lim_{\rho_0 \to 1} \varepsilon(\rho_0) = 0.$$

Полагая $\eta(\rho_0) = \sqrt{\varepsilon(\rho_0)}$, мы покажем, что

$$\overline{\lim} \iint_{\rho > \rho_0} g\, d\mu \leqslant A\eta(\rho_0) \tag{13}$$

для всех точек $\theta_0$ множества $E = E(\rho_0)$, мера которого $\geqslant 2\pi - \eta(\rho_0)$; причем верхний предел берется в предположении, что точка $(r, \theta)$ стремится к точке $(1, \theta_0)$ и $\theta \leqslant \theta_0$.

Так как $\lim \iint_{\rho \leqslant \rho_0} g\, d\mu = 0$ равномерно для всех точек окружности, то левая часть неравенства (13) не изменится, если откинем в ней символ $\rho > \rho_0$ и интеграцию распространения на всю область $\rho < 1$. Но тогда левая часть неравенства (13) не зависит от $\rho_0$; следовательно, установив неравенство (13) и замечая, что $\eta(\rho_0)$ — произвольно малое, мы убеждаемся в справедливости предложения, формулированного в начале настоящего пункта.

Приступая к доказательству неравенства (13), положим

$$\Phi(\omega) = \iint \sigma\, d\mu,$$

где интегрирование распространено на область $\rho_0 < \rho < 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \omega$.

Очевидно, $\Phi(\omega) \geqslant 0$ есть монотонно возрастающая функция на сегменте $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$, ограниченная числом $2\varepsilon(\rho_0)$. Следовательно, $\Phi'(\omega)$ существует почти для всех $\omega$ [1]), причем докажем, что множество точек $E = E(\rho_0)$, для которых

$$0 \leqslant \Phi'(\omega) \leqslant 2\eta(\rho_0),$$

имеет меру $\geqslant 2\pi - \eta(\rho_0)$.

---

[1]) См., например, Вале Пуссеи, Курс анализа, т. I.

В самом деле,

$$2\eta^2(\rho_0)=2\varepsilon(\rho_0)\geqslant\Phi(2\pi)\geqslant\int\limits_0^{2\pi}\Phi'(\omega)\,d\omega\geqslant\int\limits_{C(E)}\Phi'(\omega)\,d\omega\geqslant\operatorname{mes}\big(C(E)\big)2\eta(\rho_0),$$

так как $\Phi'>2\eta(\rho_0)$ почти всюду на $C(E)$. Из выведенного неравенства вытекает, что $\operatorname{mes}\big(C(E)\big)\leqslant\eta(\rho_0)$ и, значит, $\operatorname{mes}E\geqslant 2\pi-\eta(\rho_0)$. Пусть теперь

$$J(\theta_0,t)=\iint\sigma\,d\mu,$$

где интегрирование распространено на область

$$\rho_0<\rho<1,\ \theta_0\leqslant\varphi\leqslant\theta_0+t.$$

Если $\theta_0$ есть точка множества $E$, то на основании определения этого множества будем иметь

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(\theta_0,t)}{|t|}\leqslant 2\eta(\rho_0). \tag{14}$$

Покажем, что если в точке $\theta_0$ выполнено неравенство (14), то для этой точки справедливо и неравенство (13); этим наше предложение будет установлено. При доказательстве, не уменьшая общности, можем считать $\theta_0=0$. Положим $J(t)=J(0,t)$ и $J^*(t)=J(t)+J(-t)\ (t\geqslant 0)$. Тогда в силу (14) имеем

$$\lim_{t\to+0}\frac{J^*(t)}{t}\leqslant 4\eta(\rho_0). \tag{15}$$

Положим, далее,

$$\lambda(r,\theta)=\iint\limits_{\rho>\rho_0}g\,d\mu\leqslant\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \tag{16}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ суть соответствующие интегралы, распространенные на области $T_1$, $T_2$, $T_3$, в которых

$$(T_1)\ \rho_0<\rho<1,\quad s\leqslant|\varphi|\leqslant\pi,$$

$$(T_2)\ \rho_0<\rho<1,\quad |\sigma-s|\geqslant\frac{1}{2}s,\quad |\varphi|<s,$$

$$(T_3)\ \rho_0<\rho<1,\quad |\sigma-s|\leqslant\frac{1}{2}s,\quad |\varphi|<s.$$

В области $T_1$ на основании формулы (2) имеем $g\leqslant\frac{A\sigma s}{\psi^2}\leqslant\frac{A\sigma s}{\varphi^2}$, так как $\psi=\varphi-\theta$ и $\theta\leqslant 0$. Следовательно,

$$\lambda_1\leqslant As\iint\limits_{T_1}\varphi^{-2}\sigma\,d\mu\leqslant As\int\limits_{s-0}^{\pi}\varphi^{-2}dJ^*(\varphi),$$

откуда на основании (15) и (4)

$$\overline{\lim}\,\lambda_1\leqslant A_1\eta(\rho_0). \tag{17}$$

В области $T_2$ на основании формулы (2) имеем

$$g\leqslant\frac{A\sigma s}{s^2+\psi^2}\leqslant\frac{A\sigma s}{s^2+\varphi^2}$$



и, следовательно,

$$\lambda_2\leqslant As\iint\limits_{T_2}\frac{\sigma\,d\mu}{s^2+\varphi^2}\leqslant As\int\limits_{+0}^{s}\frac{dJ^*(\varphi)}{s^2+\varphi^2},$$

откуда на основании (15) и (5)

$$\overline{\lim}\,\lambda_2\leqslant A_1\eta(\rho_0). \tag{18}$$

Наконец в области $T_3$ в силу (3) имеем

$$g\leqslant\ln\left(1+\frac{A\sigma s}{(s-\sigma)^2+\psi^2}\right)\leqslant\ln\left(1+\frac{A\sigma s}{(s-\sigma)^2+\varphi^2}\right),$$

потому что $\psi=\varphi-\theta\geqslant\varphi$. Так как в этой области $\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sigma}{s}\leqslant\frac{3}{2}$, а $|\varphi|<s$, то

$$g\leqslant\ln\left(\frac{A\sigma s}{\varphi^2}\right)\leqslant\frac{2\sigma}{s}\ln\left(\frac{A_1s^2}{\varphi^2}\right).$$

Следовательно,

$$\lambda_3\leqslant\frac{2}{s}\iint\limits_{T_3}\ln\left(\frac{A_1s^2}{\varphi^2}\right)\sigma\,d\mu\leqslant\frac{2}{s}\int\limits_{+0}^{s}\ln\left(\frac{A_1s^2}{\varphi^2}\right)dJ^*(\varphi),$$

откуда вследствие (15) и (6)

$$\overline{\lim}\,\lambda_3\leqslant A_2\eta(\rho_0). \tag{19}$$

Принимая во внимание (17), (18) и (19), мы получаем из (16)

$$\overline{\lim_{\substack{r\to 1\\ \theta\leqslant 0}}}\,\lambda(r,\theta)\leqslant A\eta(\rho_0),$$

что и доказывает предложение настоящего пункта.

n° 5. Чтобы доказать стремление субгармонической функции $u(z)$ к определенным конечным значениям почти всюду на окружности при приближении точки $z$ по любым некасательным путям, нам достаточно обнаружить это для функции $w(P)$, изученной в прошлом пункте. В предыдущих пунктах это было доказано в предположении, что точка $(r,\theta)$ стремится к точке $(1,\theta_0)$ по любому касательному пути при условии $\theta\leqslant\theta_0$.

С этой целью мы установим одно вспомогательное предложение общего характера, весьма полезное во многих граничных задачах.

*Пусть $f(z)=f(r,\theta)$ — функция, заданная в круге $|z|=r<1$, измеримая и конечная почти всюду, и $E$ — множество точек окружности $r=1$ положительной меры. Предположим, что каждой точке $\zeta$ множества $E$ соответствует угол величин $\alpha(\zeta)>0$ с вершиной в точке $\zeta$, направленный внутрь круга и имеющий радиус своей биссектрисой или одноименной стороной.*

*Допустим, что данная функция $f(z)$ стремится к определенному конечному пределу $f(\zeta)$, когда точка $z$ приближается к точке $\zeta$, оставаясь в соответствующем угле. Тогда данная функция $f(z)$ будет иметь предельное значение $f(\zeta)$ почти всюду на множестве $E$, когда*

*точка $z$ приближается к точке $\zeta$, следуя любому некасательному пути к окружности* [1]).

Сначала рассмотрим наше предложение для случая $f(\zeta) \equiv 0$. В силу известного свойства измеримых функций существует совершенное множество $P \subset E$ меры, сколь угодно близкой к мере множества $E$, на котором функция $\alpha(\zeta)$ непрерывна и, следовательно, имеет положительный минимум $\alpha$. Проводя из каждой точки $\zeta$ множества $P$ две полупрямые, образующие угол величины $\alpha$, принадлежащий соответствующему углу величины $\alpha(\zeta)$ и имеющий радиус в качестве биссектрисы или стороны [смотря по тому, будет ли, по условию, радиус биссектрисой или стороной угла $\alpha(\zeta)$] опишем из $\zeta$ окружность радиусом $\frac{1}{n}$ и обозначим через $f_n(\zeta)$ верхнюю границу $|f(z)|$ для построенного сектора. Таким образом определим последовательность функций $f_n(\zeta)$, конечных и измеримых на $P$, сходящуюся к нулю в каждой точке множества $P$. По известной теореме существует совершенное множество $\Pi \subset P$ меры, сколь угодно близкой к мере множества $E$, на котором функции $f_n(\zeta)$ сходятся равномерно к нулю. Оставляя это множество $\Pi$ неизменным, заменим его дуги смежности полупрямыми, проведенными из их концов, представляющими разноименные стороны углов величины $\alpha$. Получаемая таким путем спрямляемая кривая ограничивает область $K$. Данная функция $f(z)$ принимает значение нуль в каждой точке множества $\Pi$, когда точка $z$ стремится к точке множества $\Pi$, оставаясь внутри области $K$. Спрямляемая граница области $K$ имеет почти всюду определенную касательную и, значит, почти для всех точек множества $\Pi$ касательная к спрямляемой кривой совпадает с касательной к окружности. Для каждой такой точки множества $\Pi$, некасательные к окружности пути, лежат внутри $K$. Отсюда вытекает, что почти всюду на $\Pi$ функция $f(z)$ принимает предельное значение нуль, когда точка $z$ движется по любому некасательному с окружностью пути. Заметив же, что мера множества $\Pi$ сколь угодно близка к мере множества $E$, убеждаемся в справедливости нашего предложения для рассматриваемого пока частного случая $f(\zeta) \equiv 0$.

Переходя теперь к общему случаю любой функции $f(\zeta)$, выделим совершенную часть $P_1$ множества $E$ меры, сколь угодно близкой к мере множества $E$, на которой граничная функция $f(\zeta)$ непрерывна. Построим, далее, непрерывную функцию $F(z)$ в замкнутой области круга $|z| \leqslant 1$, равную $f(\zeta)$ на множестве точек $\Pi$. Тогда разность

$$d(z) = f(z) - F(z)$$

будет удовлетворять условиям разобранного случая, и, следовательно, $d(z)$ имеет предельное значение нуль почти всюду на $P_1$, когда $z$ стремится и точкам множества $P_1$ по любым некасательным путям. Отсюда же заключаем, что $f(z) = F(z) + d(z)$ — по всем таким путям будет иметь предельное значение $f(\zeta)$, почти всюду на $P_1$, а значит, и почти всюду на $E$, ч. т. д.

---

[1]) Ср. И. И. Привалов, Интеграл Cauchy, Изв. Саратовского ун-та, 1918.



n° 6. Применяя только что доказанное предложение к функции $w(z)$ теоремы n° 4, мы видим, что она стремится к нулю почти всюду на окружности, когда точка $z$ приближается к окружности по любым некасательным путям.

n° 7. Комбинируя результаты, доказанные в n° 3 и 6, мы из формулы (7) $u = h - w$ получаем теорему, формулированную в начале настоящего параграфа.

## § 2. Случай произвольной области [16]

n° 1. Доказанная теорема может быть распространена на случай любой односвязной области $D$ со спрямляемой границей. Обозначим через $G(P; Q)$ функцию Грина для области $D$ с логарифмическим полюсом $Q = P$. Уравнение

$$G(P_0; Q) = \lambda \quad (\lambda > 0)$$

определяет линию уровня $C_\lambda$, соответствующую некоторой точке $P_0$, лежащей внутри области $D$.

Теорема. *Если функция $u(Q)$, субгармоническая в области $D$, удовлетворяет условию*

$$\int_{C_\lambda} u^+(Q) \frac{\partial G(P_0; Q)}{\partial n} ds = O(1), \tag{1'}$$

*то она имеет определенные конечные предельные значения почти всюду на границе области $D$, когда точка $Q$ стремится к граничной точке, следуя любому некасательному пути.*

Действительно, выполним конформное отображение области $D$ на единичный круг с переводом точки $P_0$ в начало координат и заметим, что при этом данная субгармоническая функция преобразуется в субгармоническую же функцию $u_1(r, \theta)$; линии $C_\lambda$ перейдут в окружности $r = e^{-\lambda}$, функция Грина $G$ — в функцию же Грина для круга с полюсом в начале координат, т. е. в $\ln \frac{1}{r}$. Условие (1') для функции $u$ перейдет в условие для преобразованной функции $u_1$:

$$\int_0^{2\pi} u_1^+(r, \theta)\, d\theta = O(1).$$

По доказанному, функция $u_1$ будет иметь определенные конечные граничные значения почти всюду на окружности, принимаемые по всем некасательным путям.

Заметив, с другой стороны, что при конформном отображении области $D$ на круг имеют место инвариантность нуль-множеств и консерватизм углов на границе, если пренебрегать множеством точек меры нуль, мы убеждаемся в справедливости теоремы настоящего параграфа.

## § 3. Общая задача [18]

n° 1. Мы видели (§ 1), что если функция $u(z)$, субгармоническая в круге $|z|<1$, удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} u^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(1), \tag{I}$$

то она стремится по всем некасательным путям к определенному конечному пределу почти для всякой точки окружности $|z|=1$.

В настоящем параграфе мы докажем более общее предложение: *функция $u(z)$, субгармоническая в секторе $\alpha<\theta<\beta$, $|z|<1$, удовлетворяющая условию*

$$\int_\alpha^\beta u^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(1), \tag{II}$$

*стремится по всем некасательным путям к определенному конечному пределу почти для всякой точки дуги $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ окружности $|z|=1$.* Предварительно установим следующую лемму: дана функция $u(z)$, субгармоническая в односвязной области $D$, ограниченной спрямляемым контуром $C$. Если существует гармоническая мажоранта для функции $u^+(z)$ в области $D$, то $u(z)$ стремится по всем некасательным путям к определенному конечному пределу почти во всякой точке контура $C$.

В ч. I, гл. V, § 6 мы показали, что при условии леммы данная функция $u(z)$ представима в виде суммы субгармонической отрицательной функции $u_1(z)$ и положительной гармонической функции $h(z)$; $u(z)=u_1(z)+h(z)$. Так как гармоническая положительная функция $h(z)$ стремится по всем некасательным путям к определенному конечному пределу почти всюду на контуре $C$, то утверждение леммы приводится к доказательству того же положения относительно отрицательной субгармонической функции $u_1(z)$. Выполнив конформное преобразование $\zeta=\zeta(z)$ области $D$ на единичный круг $|\zeta|<1$, мы получим функцию $U_1(\zeta)=u_1(z)$, субгармоническую и отрицательную в этом круге. Так как функция $U_1(\zeta)$, очевидно, удовлетворяет условию (I), то она стремится к определенному конечному пределу по всем некасательным путям почти во всякой точке окружности $|\zeta|=1$. Возвращаясь к первоначальной функции $u_1(z)$, мы видим, что эта последняя также стремится к определенным конечным предельным значениям по всем некасательным путям почти всюду на контуре $C$.

n° 2. Установив лемму, вернемся к нашей задаче. Согласно условию задачи, существует двойной интеграл

$$\int_0^1\int_\alpha^\beta u^+(\rho e^{i\theta})\,d\rho\,d\theta.$$

Следовательно, почти для всех $\theta$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, существует $\int_0^1 u^+(\rho e^{i\theta})\,d\rho$.



Поэтому, не уменьшая общности задачи, можно считать интегралы

$$\int_0^1 u^+(\rho e^{i\alpha})\,d\rho \quad \text{и} \quad \int_0^1 u^+(\rho e^{i\beta})\,d\rho$$

конечными. Выполняя преобразование

$$z = e^{i\alpha} z_1^{\frac{\beta-\alpha}{\pi}},$$

мы получим функцию $U(z_1)=u(z)$, субгармоническую внутри верхнего единичного полукруга, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^\pi U^+(\rho_1 e^{i\theta_1})\,d\theta_1 = O(1), \quad \int_{-1}^{+1} U^+(x_1)\,dx_1 < +\infty.$$

Наша задача, очевидно, будет решена, если мы покажем, что преобразованная функция $U(z_1)$ стремится к определенному конечному пределу по всем некасательным путям почти для всякой точки полуокружности $0\leqslant\theta_1\leqslant\pi$, $\rho_0=1$. В силу леммы для этого достаточно обнаружить, что функция $U^+(z_1)$ имеет гармоническую мажоранту в полукруге $0<\theta_1<\pi$, $\rho_1<1$.

С этой целью рассмотрим полукруг

$$0<\theta_1<\pi, \quad \rho_1<R_1<1$$

и его функцию Грина с логарифмической особенностью при $z_1=\zeta_1$:

$$g(z_1;\zeta_1) = \ln\left|\frac{(z_1+R_1)^2(\bar\zeta_1-R_1)^2-(z_1-R_1)^2(\bar\zeta_1+R_1)^2}{(z_1+R_1)^2(\zeta_1-R_1)^2-(z_1-R_1)^2(\zeta_1+R_1)^2}\right|.$$

Наилучшая гармоническая мажоранта функции $U^+(z_1)$ в этом полукруге будет

$$G_{R_1}(\zeta_1) = \frac{1}{2\pi}\int U^+(z_1)\frac{\partial g(z_1;\zeta_1)}{\partial n}\,ds,$$

где интегрирование распространено вдоль замкнутой границы этого полукруга.

Мы получим наилучшую гармоническую мажоранту функции $U^+(z_1)$ во всем полукруге $0<\theta_1<\pi$, $\rho_1<1$, если найдем предел функции $G_{R_1}(\zeta_1)$, когда $R_1$ стремится к единице. По теореме Гарнака, этот предел будет гармонической функцией, а не тождественной бесконечностью, при условии, что $G_{R_1}\left(\frac{i}{2}\right)$ остается ограниченным для $R_1<1$. Нам остается лишь проверить выполнение только что указанного условия. Обозначим через $h$ функцию, сопряженную с $g$, и заметим, что

$$g+ih = \ln\frac{(z_1+R_1)^2(\bar\zeta_1-R_1)^2-(z_1-R_1)^2(\bar\zeta_1+R_1)^2}{(z_1+R_1)^2(\zeta_1-R_1)^2-(z_1-R_1)^2(\zeta_1+R_1)^2};$$

имеем

$$\frac{\partial g}{\partial n}\,ds = -\frac{\partial h}{\partial s}\,ds = -\frac{1}{i}\,d\,(g+ih) =$$

$$= -\frac{2}{i}\left\{\frac{(\bar{\zeta}_1-R_1)^2(z_1+R_1)-(\bar{\zeta}_1+R_1)^2(z_1-R_1)}{(\bar{\zeta}_1-R_1)^2(z_1+R_1)^2-(\bar{\zeta}_1+R_1)^2(z_1-R_1)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\zeta_1-R_1)^2(z_1+R_1)-(\zeta_1+R_1)^2(z_1-R_1)}{(\zeta_1-R_1)^2(z_1+R_1)^2-(\zeta_1+R_1)^2(z_1-R_1)^2}\right\}dz_1.$$

Полагая здесь $\zeta_1=\frac{i}{2}$, $z_1=R_1e^{i\theta_1}$, найдем

$$\frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \frac{8R_1(4R_1^2-1)\sin\theta_1 d\theta_1}{(4R_1^2-1)^2+16R_1^2\cos^2\theta_1} < \frac{8R_1}{4R_1^2-1}\,d\theta_1,$$

так как $0\leqslant\theta_1\leqslant\pi$. С другой стороны, полагая $\zeta_1=\frac{i}{2}$, $z_1=R_1x_1$ получим

$$\frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \frac{4R_1(4R_1^2-1)(1-x_1^2)\,dx_1}{(4R_1^2-1)^2x_1^2+4R_1^2(x_1^2+1)^2} < \frac{4R_1^2-1}{R_1}\,dx_1,$$

так как $-1\leqslant x_1\leqslant+1$. После этого будем иметь

$$G_{R_1}\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} U^+(R_1e^{i\theta_1})\,\frac{8R_1(4R_1^2-1)\sin\theta_1}{(4R_1^2-1)^2+16R_1^2\cos^2\theta_1}\,d\theta_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} U^+(x_1)\,\frac{4R_1(4R_1^2-1)(1-x_1^2)}{(4R_1^2-1)^2x_1^2+4R_1^2(x_1^2+1)^2}\,dx_1,$$

откуда заключаем:

$$G_{R_1}\left(\frac{i}{2}\right) < \frac{1}{\pi}\,\frac{4R_1}{4R_1^2-1}\int_0^{\pi} U^+(R_1e^{i\theta_1})\,d\theta_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\,\frac{4R_1^2-1}{R_1}\int_{-1}^{+1} U^+(x_1)\,dx_1,$$

что остается ограниченным при $R_1\to 1$.

n° 3. Из доказанной теоремы вытекают следствия:

1. *Функция $v(z)$, супергармоническая в секторе $\alpha<\theta<\beta$, $|z|<$ удовлетворяющая условию*

$$\int_\alpha^\beta v_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(1),$$

*стремится по всем некасательным путям к определенному коне ному пределу почти для всякой точки дуги $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ окружнос $|z|=1$.*

В этой формулировке мы полагаем

$$v_+(z) = -v(z), \quad \text{если } v(z)<0,$$
$$v_+(z) = 0, \quad \text{если } v(z)\geqslant 0.$$



Заключение немедленно следует из доказанного предложения, полагая в нем

$$u(z) = -v(z)$$

и замечая, что

$$u^+(z) = v_+(z).$$

2. *Функция $g(z)$, гармоническая в секторе $\alpha<\theta<\beta$, $|z|<1$, удовлетворяющая одному из условий*

$$\int_\alpha^\beta g^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(1) \quad \textit{или} \quad \int_\alpha^\beta g_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(1),$$

*стремится к определенному конечному пределу почти во всякой точке дуги $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ окружности $|z|=1$, когда точка $z$ приближается по всем некасательным путям.*

3. *Функция $f(z)$, аналитическая в секторе $\alpha<\theta<\beta$, $|z|<1$, удовлетворяющая условию*

$$\int_\alpha^\beta \ln^+|f(\rho e^{i\theta})|\,d\theta = O(1),$$

*стремится по всем некасательным путям к определенному конечному пределу почти для всякой точки дуги $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$* окружности $|z|=1$.

Заключение немедленно следует из доказанного предложения, полагая в нем $u(z)=\ln|f(z)|$ и замечая, что если $|f(z)|$ стремится по всем некасательным путям к определенному конечному пределу почти для всякой точки дуги $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ окружности $|z|=1$, то то же справедливо относительно самой функции $f(z)$ [1].

---

[1] И. И. Привалов, Интеграл Cauchy, Изв. Саратовского ун-та, 1918.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ


1. Brellot, Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point, 1934.
2. Julia, Principes géometriques d'analyse, T. I и II.
3. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Mat., T. 30 (1906).
4. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabh. Veränderlichen, Mat. Ann., T 62.
5. Hardy, On the mean value of the modulus of an analytic function, Proc. Lond. Mat. Sos., T. 14 (1915).
6. Montel, Sur les fonctions convexes et sousharmoniques, Journ. de Mat., 1928.
7. Montel, Sur quelques familles de fonctions harmoniques, Fund. Mat., T. 25, 1935.
8. R. Nevanlinna, Zur Theorie der meromorphen Functionen, Acta Mat., T. 46 (1925).
9. R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions mèromorphes. Collection Borel, Paris 1929.
10. F. et R. Nevanlinna, Über die Eigenschaften analytischer Functionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Fen., T. 50 (1922).
11. Ostrowsky, Über die Bedeutung der Jensen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, Acta Szeg., T. 1 (1922).
12. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, Proc. Lond. Mat. Soc., T. 22 (1923); Proc. Lond. Mat. Soc., T. 23.
13. Littlewood, On the definition of a subharmonic function, Journ. of Lond. Mat. Soc., T. 2, 1927.
14 Littlewood, On functions subharmonic in a circle, Journ. of Lond. Mat. Soc., T. 2, 1927.
15. Littlewood, On functions subharmonic in a circle (II), Proc. Lond. Mat. Soc., T. 28, 1927.
16. Привалов, Об одной граничной задаче субгармонических функций, Мат. сб., т. 41, 1934.
17. Привалов, О некоторых вопросах теории субгармонических и аналитических функций, Мат. сб., т. 41, 1935.
18. Привалов, Граничная задача теории функций, Изв. Акад. наук СССР, 1935.
19. Privaloff, Sur les fonctions harmoniques, Мат. сб., т. 32, 1925.
20. Привалов, Обобщение формулы Иенсена-Неванлинны, Изв. Акад. наук СССР, 1935, ст. I и ст. II.
21. Привалов, Обобщение метода Линделефа, Изв. НИИММ при Томском гос. ун., т. I, 1935.
22. Привалов, К общей теории гармонических и субгармонических функций, Мат. сб. т. I, 1936.
23. Привалов, О некоторых экстремальных задачах субгармонических функций, Мат. сб., т. I, 1936.
24. Perron, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, Mat. Zeit., 1923.
25. Rado und F. Riesz, Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, Mat. Zeit., T. 22, 1925.
26. F. Riesz, Über Subharmonische Functionen und ihre Rolle in der Functionentheorie und in der Potentialtheorie, Acta Szeg., T. 2, 1925.





27. F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la thèorie du potentiel, Acta Mat., T. 48, 1926; Acta Mat., 1930.
28. F. Riesz, Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques, Acta Szeg., I, 1922.
29. F. Riesz, Sur une inégalité de M. Littlewood dans la théorie des fonctions, Proc. Lond. Mat. Soc., T. 23, 1924.
30. Remak, Über potentialconvexe Functionen, Mat. Zeit., T. 20, 1924.
31. Saks, On subharmonic functions, Acta Univ. Hamb., 1932.
32. Saks, On convex and subharmonic functions, (по-польски) Mat. Polska, 1931.
33. Szpielrayn, Remarques sur les fonctions sousharmoniques, Ann. of Mat., 1933.
34. Цыркин, Некоторые вопросы теории субгармонических функций (рукопись).

# МАТЕМАТИКА В МОНОГРАФИЯХ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

акад. С. Н. Бернштейна, акад. И. М. Виноградова, проф. А. Н. Колмогорова, проф. Л. А. Люстерника, проф. А. И. Плеснера, проф. В. А. Тартаковского, проф. Н. Г. Чеботарева.

## ОСНОВНАЯ СЕРИЯ

Книга I. С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций.
Книга II. И. И. Привалов, Субгармонические функции.
Книга III. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы.
Книга IV. Н. Г. Чеботарев, Теория Галуа, ч. I.
Книга V. Тоже, ч. II.
Книга VI. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей.
Книга VII. А. Н. Колмогоров и А. Я. Хинчин, Теория вероятностей.
Книга VIII. С. Л. Соболев, Уравнения гиперболического типа.

## СЕРИЯ ОБЗОРОВ

Книга I. Н. Г. Чеботарев, Теория Галуа.
Книга II. А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей.
Книга III. А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей.
Книга IV. Б. А. Венков, Элементарная теория чисел.
Книга V. М. А. Лаврентьев, О представимости функций комплексного переменного рядами полиномов.

---

## ОПЕЧАТКИ

| Стр. | Строка | Напечатано | Должно быть | По чьей вине |
|---|---|---|---|---|
| 43 | 4 снизу | $r^{\beta}M_{\alpha}(r) = e^{\beta \ln r + \ln M_{\alpha}}$, | $r^{\beta}M_{\alpha}^{\alpha}(r) = e^{\beta \ln r + \alpha \ln M_{\alpha}}$, | ред. |
| 43 | 5 » | $r^{\beta}M_{\alpha}(r)$ | $r^{\beta}M_{\alpha}^{\alpha}(r)$ | » |
| 70 | 21 » | $P$ | $\rho$ | » |
| 87 | 15 » | $F_{\sigma}(z) = e^{-\left(\sigma \cos \frac{\varphi}{\alpha}\right) r^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot e^{u(z)}$ | $F_{\sigma}(z) = e^{-\left(\sigma \cos \frac{\varphi}{\alpha}\right) r^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot e^{u(z)}$ | типогр |
| 157 | 5 » | влены так, что | влены, так что | » |
| 173 | 2 » | (5) | (3) | » |

Зак. 1678. Привалов. „Субгармонические функции".