

Достижения

физики

плазмы

Перевод с английского

Под редакцией

доктора физ.-мат. наук, профессора

М. С. РАБИНОВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1974

ADVANCES IN PLASMA PHYSICS

Vols. 3 and 4

Edited by

ALBERT SIMON

Department of Mechanical and Aerospace Sciences
University of Rochester
Rochester, New York

and

WILLIAM B. THOMPSON

Department of Physics
University of California at San Diego
La Jolla, California

INTERSCIENCE PUBLISHERS

A Division of John Wiley and Sons

New York — London — Sydney — Toronto
1969, 1971

Достижения

физики

плазмы

Перевод с английского

Под редакцией

доктора физ.-мат. наук, профессора

М. С. РАБИНОВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1974

Книга представляет собой как бы продолжение коллективной монографии «Физика высокотемпературной плазмы», выпущенной издательством «Мир» в 1972 г. В настоящую книгу включены 5 обзоров из 3-го и 4-го томов серии «Успехи физики плазмы», издаваемой в США под редакцией известных физиков А. Саймона и У. Томпсона. Эти обзоры охватывают следующие проблемы: 1) движение заряженных частиц в сильных магнитных полях; 2) равновесие релятивистского пучка; 3) коллективные моды колебаний плазмы в сложных магнитных конфигурациях; 4) двухпучковая неустойчивость; 5) кинетическая теория волн в плазме. Все обзоры написаны крупными зарубежными учеными, ведущими специалистами в данных областях физики.

Сборник представляет интерес для научных работников, занимающихся физикой плазмы, проблемами управляемого термоядерного синтеза, ускорительной техникой, разработкой и применением различных плазменных устройств. Он может быть полезен также студентам старших курсов и аспирантам соответствующего профиля.

Редакция литературы по физике

© Перевод на русский язык, «Мир», 1974

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Начиная с 1968 г. в США выходят сборники больших обзорных статей в серии «Успехи физики плазмы» под редакцией профессора Рочестерского университета А. Саймона и профессора Калифорнийского университета в Сан-Диего У. Томпсона. К настоящему времени вышло 4 тома этой серии, содержащих в общей сложности 19 статей.

Издательство «Мир» в 1972 г. выпустило книгу, в которую вошли переводы шести статей из первых двух томов, под названием «Физика высокотемпературной плазмы». В предлагаемый вниманию читателя сборник включены пять обзоров из 3-го и 4-го томов серии «Успехи физики плазмы».

При отборе статей мы старались сделать книгу более однородной, посвященной одной проблеме, а именно физике горячей плазмы, так что настоящий сборник вместе с изданным в 1972 г. может служить справочным и учебным руководством, исключительно полезным для всех, кто по-серьезному интересуется физикой плазмы или работает в этой области.

Сборник открывается небольшой статьей А. Бернштейна, посвященной движению заряженных частиц в сильных магнитных полях. В нашей и зарубежной литературе имеется много статей и книг, в которых рассматривается так называемое дрейфовое движение частиц. Это не удивительно, так как без детального, тщательного понимания характера движения частиц в самых разнообразных конфигурациях магнитного поля невозможно ни изучать теоретические проблемы, ни интерпретировать экспериментальные данные. Много статей, посвященных дрейфовому движению, вошли, в частности, в шесть томов сборников «Вопросы теории плазмы» под ред. М. А. Леонтовича. Совсем недавно вышла книга Л. А. Арцимовича и С. Ю. Лукьянова «Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях». Однако статья А. Бернштейна, безусловно, занимает особое место. В ней не ставится, как в других книгах и статьях, задача обоснования методов или разбор многочисленных примеров. Основная цель автора — продемонстрировать *практические* приемы нахождения адиабатических инвариантов без детального обсуждения сложных теоретических вопросов.

За последние годы достигнуты большие успехи в технике сильноточных электронных ускорителей. Уже не представляет непреодолимых трудностей создание ускорителей с током от сотен килоампер до миллионов ампер при энергии электронов от 1 до 15 МэВ и длительности импульса тока 20—100 нс. Однако физика таких пучков только начинает развиваться, и полностью отсутствует какая-либо систематическая литература. Поэтому включенная в сборник статья Г. Бенфорда и Д. Бука «Равновесие релятивистского пучка», без сомнения, вызовет значительный интерес. Конечно, как во всяком новом направлении, когда еще не до конца поняты связи многих явлений, очень трудно отделить важное от второстепенного. Статья, по нашему мнению, несколько перегружена деталями и рассмотрением многих моделей, тем более что для большинства из них не выяснена проблема устойчивости.

Следующие три статьи можно рассматривать как подробные и тщательно продуманные лекции, которые теоретики читают для экспериментаторов. Прекрасным примером такой лекции служит обзор известного физика-теоретика профессора Массачусетского технологического института Б. Коппи. Как известно, он руководит также большой экспериментальной программой по физике горячей плазмы. В его статье содержится относительно простое описание коллективных мод колебаний плазмы в сложных магнитных конфигурациях. Вполне продуктивен подход Б. Коппи к исследованию явлений в плазме: весь расчет ведется в линейном приближении, что позволяет качественно рассмотреть развитие коллективных эффектов. При сложной геометрии магнитного поля это пока единственно возможный метод, если не считать математического моделирования и эксперимента.

В статье Р. Бриггса теоретически исследуется двухпучковая неустойчивость — одно из явлений, возникающее при взаимодействии пучков с плазмой, при ускорении электронов или при взаимодействии мощного СВЧ-поля с плазмой. По-видимому, эта статья возникла из лекций для аспирантов и будет полезна всем, кто хочет изучить этот важный тип неустойчивости. К сожалению, в статье отсутствует сравнение с экспериментом и расчет ведется в линейном приближении.

Завершает сборник очень большая статья Д. Балдвина, А. Бернштейна и М. Вининка, посвященная кинетической теории волн в плазме. По сути дела, эту статью можно рассматривать как самостоятельную книгу. В задачу авторов входило изложение линейной теории волн в том случае, когда необходимо учитывать магнитное поле и использовать кинетическое уравнение. Авторы считают свою книгу как бы продолжением их старых обзоров, выполненных в 1960—1964 гг. и посвященных изучению

плазменных волн в гидродинамическом приближении (1960 г.) и в кинетическом приближении в отсутствие магнитного поля (1964 г.). Однако вошедший в сборник материал полностью самостоятелен и современен.

Резюмируя, можно сказать, что в данном сборнике, с одной стороны, достаточно полно изложена линейная теория колебаний плазмы, а с другой — содержится новый материал по физике релятивистских электронных пучков и по технике расчета адиабатических инвариантов.

Перевод первых четырех статей выполнен М. Д. Райзером, пятой — С. Е. Гребенщиковым.

М. Рабинович

Движение заряженной частицы в сильном магнитном поле

А. БЕРНСТЕЙН

Ira B. Bernstein, Yale University, New Haven, Connecticut

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач физики плазмы является создание поддающейся аналитическому анализу теории движения частицы в сильном магнитном поле. Работа в этом направлении была начата Альфвенем [1] на основе наглядных физических представлений и доведена Крускалом [2] до высокой степени математического совершенства. Формальное рассмотрение, проведенное Крускалом, подготовило математический аппарат для развития так называемого «приведенного описания» движения посредством разложения в ряды по соответствующему малому параметру¹⁾. Такой метод применим к любой динамической системе, которая испытывает одно или несколько почти периодических возмущений. Нортроп [3] частично согласовал оба вышеуказанных подхода и попытался объединить различные точки зрения. Основная идея, лежащая в основе всех предыдущих работ, заключается в том, что для каждого почти периодического движения существуют два временных масштаба, один из которых характеризует быстрое периодическое движение, а другой — любое медленное возмущение этого движения. Если к проблеме движения заряженной частицы в сильном магнитном поле последовательно применять эту идею совместно с соответствующим методом последовательных приближений, то можно получить довольно эффективно все хорошо известные результаты и, кроме того, явно указать, какие именно параметры являются малыми, и рассмотреть все детали приведенного описания.

Глава 1 посвящена движению ведущего центра в наинизшем учитываемом порядке и соответствующей приближенной кон-

¹⁾ Асимптотическая теория движения частиц была наиболее последовательно разработана Н. Н. Боголюбовым и его школой (см., например, Д. В. Сивухин, Дрейфовая теория движения заряженных частиц. Вопросы теории плазмы, Госатомиздат, 1963 г. и содержащийся там список литературы). В замечательной работе М. Крускала (Адиабатические инварианты, ИЛ, 1962 г.) разработан метод исследования движения частиц во всех порядках асимптотического разложения. Неасимптотическая теория развита в работах А. Н. Колмогорова и его школы. — *Прим. ред.*

стане движения или адиабатическому инварианту (магнитному моменту). В гл. 2 дается вывод приведенного описания в том случае, когда движение ведущего центра вдоль силовой линии является периодическим и за один период частица почти не передвигается перпендикулярно силовой линии. Получено значение (в наини́зшем учитываемом порядке по этому второму малому параметру) второго адиабатического инварианта, так называемого продольного инварианта, и приведено описание быстрого колебания частицы. В гл. 3 проведено результирующее приведение в том случае, когда энергия ведущего центра частицы мало меняется за время, необходимое для одного оборота по магнитной поверхности. Здесь получен третий адиабатический инвариант (магнитный поток) и, кроме того, рассмотрены детали движения по поверхности постоянного потока.

Достоинство приведенных в данной работе решений заключается в том, что все расчеты проведены с единой точки зрения и аналитически довольно просты. Очевидно также, что такое рассмотрение явно показывает, какой именно параметр является малым и как следует получать результаты с точностью до следующего параметра. Более того, все стадии рассмотрения достаточно просто связаны с обычной проблемой классической механики.

1. ВРАЩЕНИЕ ЧАСТИЦЫ И МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ — АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ

Уравнение движения частицы с зарядом q и массой m , испытывающей действие электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и гравитационного потенциала $G(\mathbf{r}, t)$, имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} - \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{m} - \nabla G(\mathbf{r}, t), \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{mc}. \quad (1.3)$$

Если \mathbf{a} и $\boldsymbol{\Omega}$ являются величинами постоянными в пространстве и во времени, то решение уравнения (1.1) можно записать [4] как

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \left[\dot{\mathbf{R}}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \right] + \mathbf{b} \times \mathbf{a} \frac{t}{\Omega}, \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \frac{[\mathbf{e}_2 \cos(\Omega t + \phi) + \mathbf{e}_1 \sin(\Omega t + \phi)] \omega}{\Omega}. \quad (1.6)$$

Перпендикулярная скорость w и фаза ϕ являются величинами постоянными в вышеприведенных выражениях, и мы введем обозначения

$$\Omega = \frac{qB}{mc}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B} \quad (1.8)$$

и используем правостороннюю систему ортогональных декартовых единичных векторов: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$. Очевидно, что

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot [\dot{\mathbf{R}}(0) + \mathbf{a}t] + \mathbf{b} \times \mathbf{a} \frac{1}{\Omega}, \quad (1.9)$$

$$\rho = w[-\mathbf{e}_2 \sin(\Omega t + \phi) + \mathbf{e}_1 \cos(\Omega t + \phi)] = -\Omega \times \rho. \quad (1.10)$$

Решение проверяется простой подстановкой в уравнение (1.1). Вектор $\mathbf{R}(t)$ описывает траекторию так называемого ведущего центра; член уравнения (1.5), стоящий в квадратных скобках, обусловлен ускоренным движением частицы вдоль магнитного поля; произведение $\mathbf{b} \times \mathbf{a}/\Omega$ определяет дрейфовую скорость поперек магнитного поля.

Рассмотрим случай, когда \mathbf{a} и Ω зависят от координат и времени, но при этом их величины не сильно изменяются на расстоянии w/Ω или за время $1/\Omega$, где w — компонента скорости частицы, ортогональная к направлению магнитного поля и измеренная относительно системы координат, движущейся с дрейфовой скоростью, а Ω — частота обращения в данной точке траектории частицы. Представляется весьма вероятным, что в данном случае решение уравнения движения будет аналогично выражениям (1.4) — (1.6). Если это так, то целесообразно искать решение в виде ряда с малым параметром

$$\varepsilon = \left| \Omega^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla \right) \ln aB \right| + \left| \frac{w}{\Omega} \nabla \ln aB \right|. \quad (1.11)$$

Крускал [2] придерживался именно такой программы, приводящей к асимптотическому ряду.

Другой метод, который весьма облегчает задачу получения результатов в наименьшем порядке, состоит в том, что вводится вспомогательная переменная θ и используется соответствующий метод итераций. Переменная θ описывает быстрое вращение, которое имеет место, как следует из выражения (1.6), в случае постоянного магнитного поля. Мы потребуем, чтобы существовала периодичность по θ , и выберем период, равный единице; таким образом переменная θ характеризует угловую переменную в уравнении Гамильтона — Якоби. Как следует из уравнения (1.6), случаю постоянного магнитного поля соответствует значение $\theta = \Omega t/2\pi$. В общем случае мы запишем

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \rho(\theta, t). \quad (1.12)$$

Если мы будем обозначать частные производные соответствующими индексами и положим $\dot{\theta} = v(t)$, то

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}}(t) + v(t) \rho_{\theta}(\theta, t) + \rho_t(\theta, t). \quad (1.13)$$

Предполагая неравенство

$$v^2 \rho_{\theta}^2 \gg \rho_t^2,$$

следует ожидать, что по порядку величины $v \approx \Omega/2\pi$.

Дальнейшее преобразование уравнения движения осуществляется следующим образом: поскольку мы считаем, что $\rho^2 = \omega^2/\Omega^2$, то разложим $\Omega(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ в ряды по ρ , так как это равнозначно в данном случае разложению в ряды по малому параметру ϵ , который определен формулой (1.11). Тогда запишем

$$\mathbf{a}(\mathbf{R} + \rho, t) = \mathbf{a}(\mathbf{R}, t) + \rho \cdot \nabla \mathbf{a}(\mathbf{R}, t) + \frac{1}{2} \rho \rho * \nabla \nabla \mathbf{a}(\mathbf{R}, t) + \dots \quad (1.14)$$

и аналогичное разложение для Ω . Подставляя эти разложения и продифференцированное по времени выражение (1.13) в уравнение движения (1.1), получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} + v^2 \rho_{\theta\theta} + 2v \rho_{\theta t} + \dot{v} \rho_{\theta} + \rho_{tt} &= \mathbf{a} + \rho \cdot \nabla \mathbf{a} + \frac{1}{2} \rho \rho * \nabla \nabla \mathbf{a} + \dots \\ \dots - \Omega \times \dot{\mathbf{R}} - \rho \cdot (\nabla \Omega) \times \dot{\mathbf{R}} - \frac{1}{2} \rho \rho * (\nabla \nabla \Omega) \times \dot{\mathbf{R}} - \dots \\ \dots - v \Omega \times \rho_{\theta} - v \rho \cdot (\nabla \Omega) \times \rho_{\theta} - \frac{1}{2} v \rho \rho * (\nabla \nabla \Omega) \times \rho_{\theta} - \dots \\ \dots - \Omega \times \rho_t - \rho \cdot (\nabla \Omega) \times \rho_t - \frac{1}{2} \rho \rho * (\nabla \nabla \Omega) \times \rho_t - \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что в уравнении (1.15) переменная θ входит только в члены, содержащие ρ и ее производные, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{R}, t)$, $\Omega = \Omega(\mathbf{R}, t)$, а символ ∇ означает градиент по \mathbf{R} . Мы потребуем периодичности ρ по θ с периодом, равным единице, и равенства нулю значения ρ , усредненного по одному периоду θ . Тогда, следуя использованной Крускалом процедуре, можно записать ряд Фурье:

$$\rho(\theta, t) = \sum_{n=-1}^{\infty} [\rho^{(n)}(t) e^{i2\pi n\theta} + \rho^{(n)*}(t) e^{-i2\pi n\theta}]. \quad (1.16)$$

Таким образом, если мы проинтегрируем уравнение (1.15) по одному периоду θ , то получим

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a} + v \int_0^1 d\theta \rho_{\theta} \times [\rho \cdot (\nabla \Omega)] - \Omega \times \dot{\mathbf{R}} + \dots \quad (1.17)$$

Как будет показано ниже, зависимость ρ от θ в наинизшем учитываемом порядке определяется выражением (1.6) при замене Ωt на $2\pi\theta$. Таким образом, если провести интегрирование по одному периоду θ , то интеграл от любой величины ρ в третьей степени или ее производной в наинизшем порядке будет равен нулю. В частности, из этого рассмотрения следует, что члены, обозначенные выше многоточием, явно меньше из-за множителя порядка ε^2 наибольшего удерживаемого члена.

Если из уравнения (1.15) вычесть уравнение (1.17), перегруппировать члены и учесть то обстоятельство, что $\dot{\mathbf{R}}$ не является функцией \mathbf{R} , а зависит только от t , то найдем, что

$$(\mathbf{v}^2\rho_\theta + \mathbf{v}\Omega \times \rho)_\theta = -2\nu\rho_{\theta t} - \dot{\nu}\rho_\theta + \rho \cdot \nabla(\mathbf{a} + \dot{\mathbf{R}} \times \Omega) + \rho_t \times \Omega + \nu\rho_\theta \times (\rho \cdot \nabla\Omega) - \int_0^1 d\theta \nu\rho_\theta \times (\rho \cdot \nabla\Omega) + \dots \quad (1.18)$$

В правой части этого уравнения члены, обозначенные многоточием, явно меньше из-за множителя порядка ε остальных членов. Эти последние в свою очередь в такое же число раз меньше членов, стоящих в левой части уравнения (1.18). Таким образом, мы считаем, что в наинизшем порядке по ε вышеупомянутая левая часть равна нулю и, следовательно, после интегрирования по θ имеем

$$\mathbf{v}^2\rho_\theta + \mathbf{v}\Omega \times \rho = \xi(t), \quad (1.19)$$

где $\xi(t)$ — константа интегрирования. Если проинтегрировать уравнение (1.19) по одному периоду θ , то левая часть будет равна нулю вследствие выполнения равенства (1.16). Таким образом, $\xi = 0$, и если разложить уравнение (1.19) по координатам в декартовой системе единичных векторов, введенных предварительно в (1.9), то получим

$$\rho_{1\theta} - \frac{\Omega}{\nu} \rho_2 = 0, \quad (1.20)$$

$$\rho_{2\theta} + \frac{\Omega}{\nu} \rho_1 = 0, \quad (1.21)$$

$$\rho_{3\theta} = 0. \quad (1.22)$$

Из равенства (1.22) и с учетом того, что ρ зависит от θ без аддитивной константы, следует, что $\rho_3 = 0$. Если выражение (1.21) умножить на i и сложить с (1.20), то получим

$$(\rho_1 + i\rho_2)_\theta = -i \frac{\Omega}{\nu} (\rho_1 + i\rho_2) \quad (1.23)$$

и, следовательно,

$$\rho_1 + i\rho_2 = i\rho(t) \exp\left[-i\left(\frac{\Omega}{\nu}\theta + \phi(t)\right)\right]^{1/2}. \quad (1.24)$$

В последнее выражение мы ввели $\rho(t)$ и $\phi(t)$ — действительные константы интегрирования.

Мы вынуждены считать, что

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\Omega(\mathbf{R}(t), t)}{2\pi}, \quad (1.25)$$

чтобы ρ , определяемый выражением (1.24), являлся периодической функцией θ с периодом, равным единице. Таким образом, переписав данные результаты в векторной форме, получим в наинизшем порядке по ε

$$\rho(\theta, t) = \rho[\mathbf{e}_2 \cos(2\pi\theta + \phi) + \mathbf{e}_1 \sin(2\pi\theta + \phi)], \quad (1.26)$$

где ρ , ϕ , \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 зависят от времени. Очевидно, что в случае постоянного магнитного поля уравнение (1.26) переходит в (1.6). Зависимость θ от времени определяется теперь следующей формулой:

$$\theta(t) = \int \frac{dt \Omega(\mathbf{R}(t), t)}{2\pi}. \quad (1.27)$$

Отметим, однако, что в данном наинизшем порядке по ε значения ρ и ϕ еще не определены как функции времени.

Если необходимо вычислить решение в следующем приближении по ε , то это адекватно пренебрежению членами, обозначенными в уравнении (1.18) многоточием. Прежде чем полностью решить результирующее уравнение, мы удовлетворимся выводом приближенной константы движения с точностью до такого порядка по ε , который соответствует пренебрежению членами, обозначенными в уравнении (1.18) многоточием. Для этого необходимо зачеркнуть все члены, обозначенные многоточием, и взять скалярное произведение уравнения (1.18) на ρ_θ , т. е.

$$\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \rho_\theta^2\right)_\theta + (\mathbf{v} \rho_\theta^2)_t = \rho_\theta \rho * \nabla(\mathbf{a} + \dot{\mathbf{R}} \times \Omega) + \rho_\theta \times \rho_t \cdot \Omega - \rho_\theta \cdot \int_0^1 d\theta \mathbf{v} \rho_\theta \times (\rho \cdot \nabla \Omega). \quad (1.28)$$

Если проинтегрировать уравнение (1.28) по одному периоду θ , то получим

$$\left(\int_0^1 d\theta \mathbf{v} \rho_\theta^2\right)_t = \int_0^1 d\theta \rho_\theta \rho * \nabla(\mathbf{a} + \dot{\mathbf{R}} \times \Omega) + \int_0^1 d\theta \rho_\theta \times \rho_t \cdot \Omega. \quad (1.29)$$

Интегрирование по θ устраняет номинально большие члены в уравнении (1.28), и поэтому можно использовать приближенное (в наинизшем порядке) выражение (1.26) в уравнении (1.29).

Таким образом,

$$\int_0^1 d\theta \rho_\theta^2 = 4\pi^2 \rho^2 \int_0^1 d\theta [\cos^2(2\pi\theta + \phi) + \sin^2(2\pi\theta + \phi)] = 4\pi^2 \rho^2 \quad (1.30)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\theta \rho_\theta \rho &= 2\pi \rho^2 \int_0^1 d\theta [-\mathbf{e}_2 \sin(2\pi\theta + \phi) + \mathbf{e}_1 \cos(2\pi\theta + \phi)] \times \\ &\quad \times [\mathbf{e}_2 \cos(2\pi\theta + \phi) + \mathbf{e}_1 \sin(2\pi\theta + \phi)] = \\ &= 2\pi \rho^2 \int_0^1 d\theta \{(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) \sin(2\pi\theta + \phi) \cos(2\pi\theta + \phi) + \\ &+ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cos^2(2\pi\theta + \phi) - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \sin^2(2\pi\theta + \phi)\} = \pi \rho^2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \quad (1.31) \end{aligned}$$

Заметим, что из совместного рассмотрения уравнений (1.19) и (1.25) мы можем записать

$$\rho_\theta = -2\pi \mathbf{b} \times \rho. \quad (1.32)$$

Это равенство весьма облегчает задачу преобразования оставшегося в (1.29) интеграла. Умножив скалярно уравнение (1.32) на \mathbf{b} и используя следствие уравнения (1.26), а именно $\mathbf{b} \cdot \rho = 0$, мы находим, что

$$\mathbf{b} \times \rho_\theta = 2\pi \rho. \quad (1.33)$$

Таким образом, поскольку $\rho^2 = \rho^2$ и не зависит от θ , то

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\theta \rho_\theta \times \rho_t \cdot \Omega &= \Omega \int_0^1 d\theta \mathbf{b} \times \rho_\theta \cdot \rho_t = 2\pi \Omega \int_0^1 d\theta \rho \cdot \rho_t = \\ &= 2\pi \Omega \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 d\theta \frac{1}{2} \rho^2 = \pi \Omega \frac{\partial}{\partial t} \rho^2. \quad (1.34) \end{aligned}$$

Эти результаты позволяют нам записать уравнение (1.29) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (2\pi \Omega \rho^2)_t &= \pi \rho^2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdot \nabla - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \cdot \nabla) \cdot (\mathbf{a} + \dot{\mathbf{R}} \times \Omega) + \pi \Omega (\rho^2)_t = \\ &= -\pi \rho^2 [(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \nabla] \cdot (\mathbf{a} + \dot{\mathbf{R}} \times \Omega) + (\pi \Omega \rho^2)_t - \pi \rho^2 \Omega_t. \quad (1.35) \end{aligned}$$

Если перенести из правой в левую часть этого уравнения член, кратный левой части, использовать в правой части формулы (1.2) и (1.3) и учесть, что $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}$, мы получим

$$\begin{aligned} (\pi \Omega \rho^2)_t &= -\pi \rho^2 \{(\mathbf{b} \times \nabla) \cdot (\mathbf{a} + \dot{\mathbf{R}} \times \Omega) + \Omega_t\} = \\ &= -\pi \rho^2 \{\mathbf{b} \cdot \nabla \times (\mathbf{a} + \dot{\mathbf{R}} \times \Omega) + \Omega_t\} = \\ &= -\pi \rho^2 \frac{q}{m} \left\{ \mathbf{b} \cdot \nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} \right] + \frac{1}{c} B_t \right\}. \quad (1.36) \end{aligned}$$

В данном уравнении величину B_t мы должны интерпретировать как производную по времени при фиксированном значении θ , т. е. B_t является полной производной по времени с учетом движения ведущего центра, определяемого $\dot{\mathbf{R}}$, а именно:

$$B_t = \frac{\partial B}{\partial t} + \dot{\mathbf{R}} \nabla B. \quad (1.37)$$

Но из уравнения Максвелла следует, что

$$c \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.38)$$

и поскольку $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ и $\nabla \dot{\mathbf{R}} = 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \nabla \mathbf{B} = \\ &= -c \nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} \right] + \mathbf{B} \cdot \nabla \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \dot{\mathbf{R}} = \\ &= -c \nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} \right]. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B} \right] + \frac{1}{c} B_t &= - \frac{1}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}_t + \frac{1}{c} B_t = \\ &= - \frac{1}{c B} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_t + \frac{1}{c} \left(\frac{B^2}{2} \right)_t = 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Заметим, что для наблюдателя, движущегося вместе с ведущим центром, электрическое поле как раз равно величине $\mathbf{E} + (\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B})/c$.

Теперь мы можем на основании (1.36) сделать вывод, что

$$(\pi \Omega \rho^2)_t = 0 \quad (1.41)$$

и, таким образом, μ — так называемый магнитный момент, являющийся приближенной константой движения, — равен

$$\mu = \frac{q}{c} \frac{\Omega}{2\pi} \pi \rho^2 = \frac{q}{c} \nu \rho^2. \quad (1.42)$$

Такую приближенную константу обычно называют *адиабатическим инвариантом*.

Вернемся теперь к уравнению (1.17). Отметим, что член этого уравнения, содержащий $\nabla \Omega$, можно приближенно представить, используя выражение (1.31), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \nu \int_0^1 d\theta \rho_\theta \times [\rho \cdot (\nabla \Omega)] &= \nu \rho^2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdot \nabla - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \cdot \nabla) \times \frac{q \mathbf{B}}{mc} = \\ &= - \frac{\mu}{m} [(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \nabla] \times \mathbf{B} = - \frac{\mu}{m} (\mathbf{b} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \\ &= - \frac{\mu}{m} [(\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{B}] = - \frac{\mu}{m} \nabla B. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Таким образом, пренебрегая членами, обозначенными точками в уравнении (1.17), умножив это уравнение скалярно на \mathbf{b} и используя (1.43), получим

$$\mathbf{b} \cdot \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \frac{\mu}{m} \mathbf{b} \cdot \nabla B \quad (1.44)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{\perp} &\equiv \mathbf{b} \times (\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{b}) = \frac{1}{\Omega} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \frac{\mu}{m\Omega} \mathbf{b} \times \nabla B + \frac{1}{\Omega} \mathbf{b} \times \ddot{\mathbf{R}} = \\ &= c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{1}{\Omega} \mathbf{b} \times \nabla G + \frac{\mu}{m\Omega} \mathbf{b} \times \nabla B + \frac{1}{\Omega} \mathbf{b} \times \ddot{\mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Если мы введем определение

$$u = \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{R}} \quad (1.46)$$

и учтем, что $\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{b}} = 0$, то мы сможем записать уравнение (1.44) в виде

$$m\dot{u} = \mathbf{b} \cdot [q\mathbf{E} - m\nabla G - \mu\nabla B] + m\dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{R}}. \quad (1.47)$$

Очевидно, что за интервал времени, сравнимый с Ω^{-1} , ускорение вдоль магнитного поля не должно быть большим, так же как и изменение магнитного поля; в противном случае приведенная здесь теория несправедлива.

Уравнение (1.45) может быть решено методом последовательных приближений, если предположить, что основным процессом является ускорение, а именно в наинизшем порядке это уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (1.48)$$

и в следующем приближении

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \frac{\mu}{m\Omega} \mathbf{b} \times \nabla B + \frac{1}{\Omega} \mathbf{b} \times \left[\left(\frac{1}{\Omega} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \right)' + (u\mathbf{b})' \right]. \quad (1.49)$$

Для следующего приближения с сохранением точности необходимо восстановить члены, обозначенные многоточием в уравнении (1.17), и, кроме того, вычислить ρ тоже в следующем приближении по ϵ .

Систему координат, в которой будем описывать вращательное движение, выберем, например, с помощью следующего соотношения:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\dot{\mathbf{R}}_{\perp}}{|\dot{\mathbf{R}}_{\perp}|}, \quad (1.50)$$

и в данном случае

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{b}. \quad (1.51)$$

Можно вывести уравнение, характеризующее эволюцию во времени медленно изменяющейся функции фазы $\phi(t)$. Для этого вернемся к уравнению (1.18) и рассмотрим его как неоднородное уравнение во втором приближении. Напишем тогда уравнение (1.16) в виде

$$\left[\rho_\theta + \frac{\Omega}{v} \times \rho \right]_\theta = \mathbf{f}, \quad (1.52)$$

где ρ определено выражением (1.26), а $v^2 \mathbf{f}$ определяется правой частью уравнения (1.18), в которой опущены все члены, обозначенные точками. Легко показать, что функция \mathbf{f} имеет только первую и вторую гармоники по $2\pi\theta$, а именно:

$$\mathbf{f} = \sum_{n=1}^2 (\mathbf{f}^{(n)} e^{2\pi i n \theta} + \mathbf{f}^{(n)*} e^{-2\pi i n \theta}). \quad (1.53)$$

Мы должны, как и раньше, выбрать значение $v = 2\pi/\Omega$, и тогда решение однородного уравнения (1.52) воспроизводит выражение (1.26). Если, как и раньше, мы разложим уравнение (1.52) на компоненты в декартовой системе координат, определяемой ортогональными векторами \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$, умножим вторую компоненту уравнения (1.52) на i и сложим с первой, то получим

$$(\rho_1 + i\rho_2)_{\theta\theta} + 2\pi i (\rho_1 + i\rho_2)_\theta = f_1 + if_2. \quad (1.54)$$

Мы считаем, что функция ρ может быть представлена в виде (1.16), а именно что эта функция является периодической по θ с периодом, равным единице, и что отсутствует аддитивная константа у θ . Тогда, если мы запишем

$$\rho_1 + i\rho_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi n i \theta}, \quad (1.55)$$

$$f_1 + if_2 = \sum_{n=-2}^2 d_n e^{2\pi n i \theta}, \quad (1.56)$$

где оба коэффициента c_0 и d_0 равны нулю, подставим эти выражения в уравнение (1.54) и приравняем соответствующие коэффициенты ряда Фурье, сократив множители $\exp(2\pi n i \theta)$, то получим

$$4\pi^2 n(n+1) c_n = d_n. \quad (1.57)$$

Очевидно, что когда $n \neq -1$, то

$$c_n = -\frac{d_n}{4\pi^2 n(n+1)} \quad (1.58)$$

и c_n равен нулю при $n = \pm 3, \pm 4, \dots$. При $n = -1$ решение существует только в том случае, если $d_{-1} = 0$, что эквивалентно, как следует из равенства (1.56) после умножения его на

$\exp(2\pi i\theta)$ и интегрирования по одному периоду θ , равенству

$$\mathbf{d}_1 = \int_0^1 d\theta (f_1 + if_2) e^{2\pi i\theta} = 0. \quad (1.59)$$

Уравнение (1.59) эквивалентно двум действительным условиям, соответствующим действительной и мнимой частям этого уравнения. Эти условия являются эквивалентными уравнениями для $\dot{\phi}$ и $\dot{\rho}$. Их разумная комбинация дает формулу (1.41). Мы не будем детально это рассматривать.

Если не интересоваться подробным анализом вращения, то достаточно рассмотреть основные уравнения ведущего центра для $\mathbf{R}(t)$: уравнение (1.47), которое определяет скорость изменения во времени компоненты скорости ведущего центра вдоль магнитного поля в месте расположения ведущего центра, и уравнение (1.49), которое определяет скорость ведущего центра, перпендикулярную магнитному полю в месте расположения ведущего центра. Эти уравнения имеют два преимущества перед уравнением (1.1): во-первых, они не учитывают быстрые по сравнению с основной гармоникой вращения, и, во-вторых, они образуют систему обычных дифференциальных уравнений четвертого порядка, в то время как уравнение (1.1) является системой шестого порядка. Эти обе особенности весьма полезны для численных расчетов, а также для аналитического рассмотрения и качественных оценок.

Можно получить решение в следующем приближении, применив метод последовательных приближений к уже найденным результатам, но при этом обычно решения получаются настолько сложные, что теряются достоинства приведенного описания.

В работе [6] показано, что полученные здесь в наинизшем порядке результаты являются основным членом асимптотического разложения траектории частицы в ряд по малому параметру ε , определяемому формулой (1.11). Это означает, что если написать сумму

$$\mathbf{S}_N(t) = \mathbf{r}_0(t) + \varepsilon \mathbf{r}_1(t) + \varepsilon^2 \mathbf{r}_2(t) + \dots + \varepsilon^N \mathbf{r}_N(t),$$

то для некоторого фиксированного времени t

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{S}_N(t)|}{\varepsilon^N} = 0.$$

Это условие отличается от условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{S}_N(t)| = 0,$$

которое должно было бы выполняться, если бы рассматриваемый метод разложения был бы истинно сходящимся.

2. ВТОРОЙ ИЛИ ПРОДОЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ

Дальнейшее приведение предыдущего описания движения ведущего центра может быть сделано в такой ситуации, когда движение вдоль силовых линий является квазипериодическим и значительно более быстрым, чем движение, связанное с дрейфом. Обосновать это утверждение помогает запись магнитного поля посредством двух скалярных полей $\alpha(\mathbf{r}, t)$ и $\beta(\mathbf{r}, t)$, т. е.

$$\mathbf{B} = (\nabla\alpha) \times (\nabla\beta). \quad (2.1)$$

Очевидно, что это выражение удовлетворяет уравнению $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Чтобы показать справедливость уравнения (2.1), достаточно напомнить, что силовые линии определяются уравнением

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Пусть теперь S — некоторая поверхность, касательная к силовым линиям. На этой поверхности выберем семейство линий. Набор всех силовых линий через одну из линий этого семейства определяет поверхность. Пусть $\alpha(\mathbf{r}, t) = \text{const}$ — уравнение такой «магнитной поверхности». Выберем затем второе семейство линий на поверхности S , касательных теперь к первому семейству и образующих аналогичным образом семейство магнитных поверхностей $\gamma(\mathbf{r}, t) = \text{const}$. Примем, что

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{B} \cdot \nabla\gamma = 0. \quad (2.2)$$

Если теперь учесть, что $\mathbf{B} = (\nabla\alpha) \times (\nabla\gamma)/\lambda + (\nabla\alpha)\mu + (\nabla\gamma)\nu$, и поскольку $\nabla\alpha$, $\nabla\gamma$ и $(\nabla\alpha) \times (\nabla\gamma)$ не компланарны, то из выражения (2.2) непосредственно следует, что

$$(\nabla\alpha) \times (\nabla\gamma) = \lambda\mathbf{B}.$$

Если взять дивергенцию от данного уравнения и использовать равенство $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, то

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\lambda = 0,$$

а λ должна быть функцией α и γ . Введем теперь новую переменную $\beta(\alpha, \gamma)$. Очевидно, что $\mathbf{B} \cdot \nabla\beta = 0$. Если рассматривать γ как функцию α и β и обозначить частные производные соответствующими индексами, то

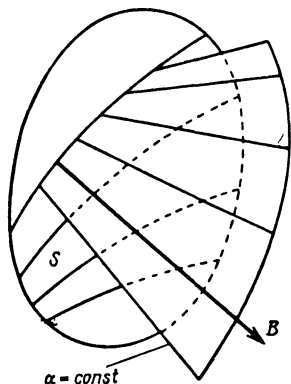
$$(\nabla\alpha) \times (\nabla\gamma) = (\nabla\alpha) \times [\gamma_\alpha \nabla\alpha + \gamma_\beta \nabla\beta] = \gamma_\beta (\nabla\alpha) \times \nabla\beta.$$

Мы возьмем $\lambda_\beta = \lambda$. Такой выбор значения γ_β приводит к искомому результату

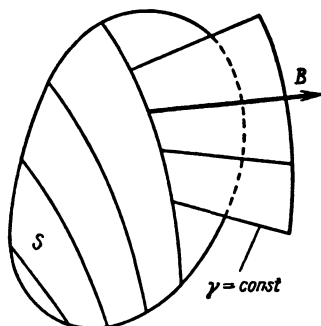
$$\mathbf{B} = (\nabla\alpha) \times (\nabla\beta) = \nabla \times (\alpha \nabla\beta). \quad (2.3)$$

Поэтому пересечение любых двух поверхностей $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ является силовой линией, и соответствующую пару

значений α и β можно интерпретировать как координаты силовой линии. Если даже картина силовых линий может изменяться во времени, мы будем отождествлять линию, обозначен-



Фиг. 1. Диаграмма, иллюстрирующая построение поверхности $\alpha = \text{const}$.



Фиг. 2. Диаграмма, иллюстрирующая построение поверхности $\gamma = \text{const}$.

ную данной парой величин α и β , с той же самой силовой линией. Функции α и β не обязательно должны быть однозначными (фиг. 1—3).

Теперь можно написать уравнение Максвелла

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \nabla \beta) \right].$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \beta - \frac{1}{c} \alpha \nabla \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad (2.4)$$

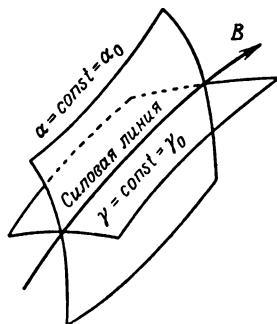
и поскольку как $\mathbf{b} \cdot \nabla \alpha = 0$, так и $\mathbf{b} \cdot \nabla \beta = 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} &= -\mathbf{b} \cdot \nabla \phi - \frac{1}{c} \alpha \mathbf{b} \cdot \nabla \frac{\partial \beta}{\partial t} = \\ &= -\mathbf{b} \cdot \nabla \left(\phi + \frac{\alpha}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поэтому если ввести определение потенциала V

$$V(\mathbf{r}, t) = q\phi + \frac{\partial \alpha}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \mu B + mG \quad (2.6)$$

и предположить, что произведения $m\alpha \times \mathbf{b}$ и $\mu \mathbf{b} \times \nabla B$ являются величинами одного порядка, то уравнение движения для парал-



Фиг. 3. Диаграмма, поясняющая использование координат α и γ для обозначения силовой линии.

тельной скорости в наинизшем порядке, который следует учитывать, можно написать в виде

$$m\dot{u} = -\mathbf{b} \cdot \nabla V + m u \mathbf{b} \cdot (\nabla \mathbf{b}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_{\perp}. \quad (2.7)$$

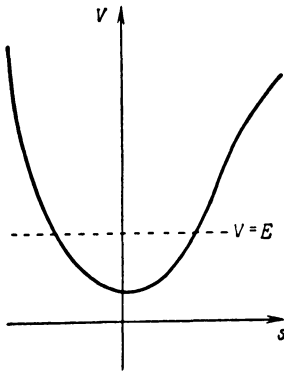
Поскольку мы сделали аналогичное предположение, что в наинизшем порядке

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (u \mathbf{b} + \dot{\mathbf{R}}_{\perp}) \cdot \nabla \mathbf{b} \sim u \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b},$$

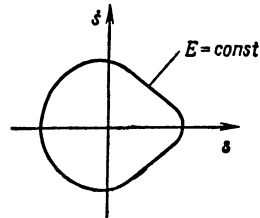
то соответствующее выражение для $\dot{\mathbf{R}}_{\perp}$ можно записать так:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{\mathbf{b}}{m\Omega} \times \left[\nabla V + \frac{q}{c} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \beta - \frac{\partial \beta}{\partial t} \nabla \alpha \right) + m u^2 \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} \right]. \quad (2.8)$$

Заметим, что в выражении для $m\dot{u}$ член, содержащий $\dot{\mathbf{R}}_{\perp}$, явно меньше $-\mathbf{b} \cdot \nabla V$. Более того, мы предположим, что величина V_t мала, причем понятие о малости величины V_t мы уточним несколько позже. Пусть s — длина дуги вдоль силовой линии и



Фиг. 4. Характерная зависимость потенциальной энергии V от s .



Фиг. 5. Характерная диаграмма фазовой плоскости $s\dot{s}$ в случае $E = \text{const}$.

допустим, что зависимость V от s имеет характер потенциальной ямы, как схематически показано на фиг. 4. Тогда обе величины $\dot{\mathbf{R}}_{\perp}$ и V_t равны нулю, так как величина

$$u = \dot{s}$$

является первым интегралом уравнения движения

$$\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + V = \text{const} = E.$$

Если это уравнение решить относительно \dot{s} , то легко показать, что

$$t = \int^s ds \left\{ \frac{2[E - V]}{m} \right\}^{-1/2}$$

Очевидно, что движение является периодическим, причем период равен

$$\tau(E) = \oint ds \left\{ \frac{2[E - V]}{m} \right\}^{-1/2}.$$

На фазовой плоскости $s\dot{s}$ орбита частицы является замкнутой кривой, соответствующей $E = \text{const}$ (фиг. 5).

Когда \dot{R}_\perp и V_t не равны нулю, то энергия E является функцией t . Допустим, однако, что определение периода $\tau(E)$ посредством интеграла применимо и в данном случае, и предположим, что

$$\varepsilon = \tau \left| \frac{\partial \ln E}{\partial t} \right| + \dot{R}_\perp \left(\frac{2E}{m} \right)^{-1/2} \ll 1. \quad (2.9)$$

Представляется весьма правдоподобным, что в этих условиях движение будет почти периодическим. Сделаем такое предположение и найдем решение уравнения движения посредством введения дополнительной переменной $\theta(t)$, причем θ ответственна за быстрые осцилляции, период которых порядка τ , а любая явная зависимость от t связана с медленным изменением во времени. Таким образом, мы напомним ¹⁾

$$s = s(\theta, t). \quad (2.10)$$

Следовательно, если мы введем определение $v(t) = \dot{\theta}$, то

$$\dot{s} = v s_\theta + s_t, \quad (2.11)$$

где индексами обозначены частные производные. Уравнение движения имеет вид

$$v^2 s_{\theta\theta} + V_s = -2v s_{\theta t} - \dot{v} s_\theta - (v s_\theta + s_t) \dot{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_\perp) \cdot \mathbf{b}, \quad (2.12)$$

где мы использовали то обстоятельство, что $\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{R}}_\perp = 0$ и

$$(\nabla \mathbf{b}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_\perp = \nabla(\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{R}}_\perp) - (\nabla \dot{\mathbf{R}}_\perp) \cdot \mathbf{b} = -(\nabla \dot{\mathbf{R}}_\perp) \cdot \mathbf{b}.$$

По-видимому, члены в левой части уравнения движения в $1/\varepsilon$ раз больше членов в правой части. Тогда мы считаем, что в наинизшем порядке левая часть уравнения равна нулю. В этом случае после умножения на s_θ получаем

$$\left(\frac{m}{2} v^2 s_\theta^2 + V \right)_0 = 0.$$

Следовательно, после интегрирования

$$\frac{m}{2} v^2 s_\theta^2 + V = E(t). \quad (2.13)$$

¹⁾ Величины θ и v отличаются от величин, обозначенных этими же символами в гл. I. Мы использовали одинаковые обозначения, чтобы подчеркнуть аналогию в подходе.

Константа интегрирования $E(t)$ является пока неизвестной функцией от t . Тогда возможное решение для s_θ находится посредством последующего интегрирования (2.13), а именно:

$$\frac{\theta}{v} = \int^s ds \left\{ \frac{2[E(t) - V(s, \alpha, \beta, t)]}{m} \right\}^{-1/2}. \quad (2.14)$$

В подынтегральном выражении мы явно указали, что потенциал зависит от положения точки s на силовой линии, определяемой значениями α , β и временем t . Но мы не указали явно, что потенциал V зависит также и от μ .

Подберем такое значение $v = v(E, \alpha, \beta, t)$, при котором θ является угловой переменной, т. е. когда s проходит один период своего движения при фиксированных значениях α , β , t , мы будем считать, что θ изменилось на единицу. Тогда

$$\frac{1}{v} = \oint ds \left\{ \frac{2[E - V]}{m} \right\}^{-1/2} \equiv \tau(E, \alpha, \beta, t) \quad (2.15)$$

и

$$\theta(t) = \int dtv. \quad (2.16)$$

Для определения $E(t)$ мы вернемся к уравнению (2.13) и заметим, что если удержать в нем члены следующего порядка по ε , помимо тех, которые привели к уравнению (2.13), то получим

$$v^2 s_{\theta\theta} + V_s + 2vs_{\theta t} + v_t s_\theta + vs_\theta \mathbf{b} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_\perp) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Если умножить это уравнение на s_θ , то результат можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{2} v^2 s_\theta^2 + V \right)_\theta + (vs_\theta^2)_\theta + (vs_\theta^2 \mathbf{b} \cdot \nabla \dot{\mathbf{R}}_\perp) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Если мы проинтегрируем это уравнение по θ от нуля до единицы и учтем, что функция $s(\theta, t)$ является по предположению периодической с периодом, равным единице, то получим

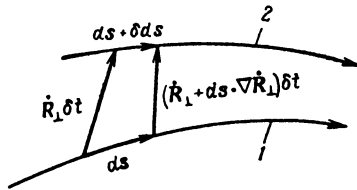
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 d\theta vs_\theta^2 + \int_0^1 d\theta \mathbf{b} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_\perp) \cdot \mathbf{b} vs_\theta^2 = 0. \quad (2.17)$$

Пусть в данном уравнении s используется в качестве переменной интегрирования. Покажем при этом, что можно в наименьшем учитываемом порядке выразить s_θ через E и V , используя

уравнение (2.13). После умножения на m уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint ds \{2m [E(t) - V(s, \alpha, \beta, t)]^{1/2} + \oint ds \mathbf{b} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_{\perp}) \cdot \mathbf{b} \{2m [E(t) - V(s, \alpha, \beta, t)]^{1/2} = 0. \quad (2.18)$$

Отметим, что операция $\partial/\partial t$ над первым интегралом этого уравнения означает дифференцирование по времени вдоль фиксированной силовой линии. Мы теперь покажем, что именно вели-



Фиг. 6. Диаграмма, поясняющая расчет скорости изменения длины дуги вдоль силовой линии, обусловленной скоростью \dot{R}_{\perp} .

1 — силовая линия в момент времени t . 2 — силовая линия в момент времени $t + \delta t$.

чина $ds \mathbf{b} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_{\perp}) \cdot \mathbf{b}$ является скоростью изменения элемента длины дуги ds , обусловленной скоростью \dot{R}_{\perp} (фиг. 6).

Рассмотрим вектор

$$ds = ds \mathbf{b}.$$

При движении ведущего центра конец вектора ds за бесконечно малое время δt проходит расстояние $\dot{\mathbf{R}}_{\perp}(\mathbf{R}, t) \delta t$, как показано на фиг. 6, и занимает новое положение, а именно:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp}(\mathbf{R} + ds t) \delta t = [\dot{\mathbf{R}}_{\perp}(\mathbf{R}, t) + ds \cdot \nabla \dot{\mathbf{R}}_{\perp}(\mathbf{R}, t) + \dots] \delta t.$$

В наинизшем порядке результирующее изменение ds равно

$$\delta ds = ds \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_{\perp}) \delta t.$$

Следовательно, квадрат длины элемента дуги изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (ds + \delta ds)^2 &= (ds)^2 + 2 ds \cdot (\delta ds) + \dots \\ \dots &= (ds)^2 + 2 ds \mathbf{b} \cdot [ds \mathbf{b} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_{\perp}) \delta t] + \dots \\ \dots &= (ds)^2 [1 + 2 \mathbf{b} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_{\perp}) \cdot \mathbf{b} \delta t + \dots]. \end{aligned}$$

Тогда

$$ds + \delta ds = ds [1 + \mathbf{b} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{R}}_{\perp}) \cdot \mathbf{b} \delta t + \dots],$$

а в пределе $\delta t \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{\delta ds}{\delta t} = \mathbf{b} \cdot (\nabla \mathbf{R}_\perp) \cdot \mathbf{b} ds.$$

В этом случае уравнение (2.18) следует интерпретировать как производную по времени интеграла по траектории ведущего центра и величина J , равная

$$J = \oint ds \{2m [E(r) - V(s, \alpha, \beta, t)]\}^{1/2}, \quad (2.19)$$

является приближенной константой движения. Это выражение есть в неявном виде уравнение для E при заданном значении J и известном потенциале V . Константу J обычно называют вторым или продольным адиабатическим инвариантом.

В заключение повторим, что движение вдоль силовой линии определяется уравнением (2.14), причем E определена формулой (2.19). Движение перпендикулярно силовой линии определяется выражением (2.8) для $\dot{\mathbf{R}}_\perp$, в котором мы можем заменить mu^2 на $2(E - V)$. Для нахождения траектории, связанной с $\dot{\mathbf{R}}_\perp$, требуется только решить систему обычных дифференциальных уравнений второго порядка.

Интересно отметить, что если применить изложенную в этом разделе процедуру к уравнению

$$\ddot{x} + \omega(t)^2 x = 0,$$

соответствующему

$$V = \frac{1}{2} \omega^2 x^2$$

и

$$\dot{\omega} \ll \omega^2,$$

то в наиминиме порядке решение совпадает с хорошо известными результатами, получаемыми методом Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна.

3. ТРЕТИЙ ИЛИ ПОТОКОВЫЙ ИНВАРИАНТ

В том случае, когда поля, входящие в выражение для $\dot{\mathbf{R}}_\perp$, меняются достаточно медленно, возможно еще одно приведение, причем понятие «медленное изменение» будет уточнено ниже. Удобнее в этом случае записать уравнения для $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ вместо уравнения для $\dot{\mathbf{R}}$. С этой целью рассмотрим $\dot{\mathbf{R}}_\perp$ как функцию s , α , β и t и напомним:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{s}\mathbf{R}_s + \dot{\alpha}\mathbf{R}_\alpha + \dot{\beta}\mathbf{R}_\beta + \mathbf{R}_t, \quad (3.1)$$

где индексами обозначены частные производные. На основании цепочного правила дифференцирования для единичной диады имеем

$$\nabla \mathbf{R} = \nabla s \mathbf{R}_s + \nabla \alpha \mathbf{R}_\alpha + \nabla \beta \mathbf{R}_\beta. \quad (3.2)$$

Следовательно, если умножить это выражение слева скалярно на \mathbf{b} и учесть, что $\mathbf{b} \cdot \nabla s = s_s = 1$, то получим

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla s) \mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s. \quad (3.3)$$

Если умножить уравнение (3.2) слева скалярно на $\mathbf{b} \times \mathbf{R}_\alpha$ и $\mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta$, то

$$\mathbf{b} \times \mathbf{R}_\alpha = \nabla \beta \mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{R}_\alpha, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta = \nabla \alpha \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta. \quad (3.5)$$

Векторное произведение этих двух уравнений дает

$$-\nabla \alpha \times \nabla \beta (\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_\alpha \times \mathbf{R}_\beta)^2 = (\mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{R}_\alpha) = \mathbf{b} \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta.$$

Но поскольку $\nabla \alpha \times \nabla \beta = \mathbf{B} = B\mathbf{b}$, то

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_\alpha \times \mathbf{R}_\beta = \frac{1}{B}. \quad (3.6)$$

Теперь в результате скалярного умножения уравнения (3.1) на $\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_\beta = \mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta$ получаем

$$\dot{\alpha} \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta - \mathbf{R}_t \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta$$

или при использовании уравнений (2.8), (3.5) и (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}}{B} = & -\mathbf{b} \times \mathbf{R}_\beta \cdot \frac{\mathbf{b}}{m\Omega} \times \\ & \times \left[\nabla V + \frac{q}{c} (\alpha_t \nabla \beta - \beta_t \nabla \alpha) + 2(E - V) \mathbf{b}_s \right] + \mathbf{R}_t \cdot \frac{\nabla \alpha}{B}. \end{aligned}$$

Поскольку вследствие цепочного правила для дифференцирования $\mathbf{R}_t \cdot \nabla \alpha = \alpha_t$, $\mathbf{R}_\beta \cdot \nabla V = V_\beta$, $\mathbf{b} \cdot \nabla V = \mathbf{R}_s \cdot \nabla V = V_s$, $\mathbf{R}_\beta \cdot \nabla \beta = \beta_\beta = 1$, $\mathbf{R}_\beta \cdot \nabla \alpha = \alpha_\beta = 0$, в то время как $\mathbf{b} \cdot \nabla \alpha = 0$, $\mathbf{b} \cdot \nabla \beta = 0$, и так как \mathbf{b} — единичный вектор и $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_s = 0$, то вышенаписанное выражение сводится к следующему:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & \alpha_t (\mathbf{R}_\beta - \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_\beta) \cdot \frac{c}{q} \left[\nabla V + \frac{q}{c} (\alpha_t \nabla \beta - \beta_t \nabla \alpha) + 2(E - V) \mathbf{b}_s \right] = \\ = & \alpha_t - \frac{c}{q} \left[\mathbf{R}_\beta \cdot \Delta V + \frac{q}{c} \alpha_t \mathbf{R}_\beta \cdot \nabla \beta - \frac{q}{c} \beta_t \mathbf{R}_\beta \cdot \nabla \alpha + \right. \\ & \left. + 2(E - V) \mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{b}_s - \mathbf{b} \cdot \nabla V \mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_s \right] = \\ = & -\frac{c}{q} [V_\beta - V_s \mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_s + 2(E - V) \mathbf{b}_s \cdot \mathbf{R}_\beta], \end{aligned}$$

Но, учитывая, что $\mathbf{R}_{\beta s} = (\mathbf{R}_s)_\beta = \mathbf{b}_\beta$ и $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_\beta = 0$, это выражение можно переписать в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -\frac{c}{q} \left\{ V_\beta + \left[\frac{2(E-V)}{m} \right]^{1/2} ([2m(E-V)]^{1/2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_\beta)_s \right\}.$$

Наконец, если мы введем вместо s угловую переменную θ и поскольку

$$ds = \left[\frac{2(E-V)}{m} \right]^{1/2} \tau d\theta,$$

то

$$\dot{\alpha} = -\frac{c}{q} [V_\beta + \{\tau^{-1} [2m(E-V)]^{1/2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{R}_\beta\}_\theta].$$

Если проинтегрировать это выражение по одному периоду θ , то

$$\int_0^1 d\theta \dot{\alpha} = -\frac{c}{q} \int_0^1 d\theta V_\beta = -\frac{c}{q} \tau^{-1} \oint ds \left[\frac{2(E-V)}{m} \right]^{-1/2} V_\beta. \quad (3.7)$$

Правую часть уравнения (3.7) можно выразить через энергию E , которая неявно определяется выражением (2.19), и рассматривать ее как функцию от α , β , t и, конечно, констант движения J и μ . Если мы возьмем от уравнения (2.19) частную производную по β , то, поскольку J является независимым параметром, мы найдем

$$0 = \oint ds \left[\frac{2(E-V)}{m} \right]^{-1/2} [E_\beta - V_\beta]$$

или, используя уравнение (2.15),

$$\oint ds \left[\frac{2(E-V)}{m} \right]^{-1/2} V_\beta = \tau E_\beta.$$

Таким образом, если интерпретировать значение $\int_0^1 d\theta \dot{\alpha}$ как производную по времени от среднего значения α для частицы с периодом τ , то мы можем сокращенно записать уравнение (3.7) в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -\frac{c}{q} E_\beta. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом мы можем показать, что

$$\dot{\beta} = \frac{c}{q} E_\alpha, \quad (3.9)$$

где следует особо подчеркнуть, что α и β — координаты средней силовой линии, вокруг которой частица вращается и осциллирует.

Уравнения движения для α и β представлены в форме Гамильтона, где роль гамильтониана, зависящего от времени, играет $E(\alpha, \beta, t)$. Когда $E_t = 0$, то E является константой движения и в фазовой плоскости α, β орбита частицы соответствует кривой $E = \text{const}$. Допустим, что эта орбита является замкнутой кривой, как схематически показано на фиг. 7. Тогда движение является периодическим, причем период T равен

$$T = \frac{q}{c} \oint \frac{d\beta}{E_\alpha} = \frac{q}{c} \oint \frac{d\alpha}{E_\beta}. \quad (3.10)$$

Предположим, что

$$T \left| \frac{\partial \ln E}{\partial t} \right| \ll 1.$$

Мы полагаем, что, как и в предшествующих ситуациях, движение будет почти периодическим; введем дополнительную переменную $\chi(t)$ и напишем

$$\alpha = \alpha(\chi, t), \quad \beta = \beta(\chi, t). \quad (3.11)$$

Если мы определим значение ω как $\omega(t) = \dot{\chi}$, то сможем записать уравнения движения в следующем виде:

$$\omega \alpha_\chi + \alpha_t = -\frac{c}{q} E_\beta, \quad (3.12)$$

$$\omega \beta_\chi + \beta_t = \frac{c}{q} E_\alpha. \quad (3.13)$$

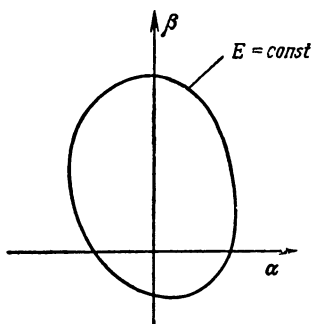
Мы пренебрегаем в наименьшем порядке бесконечно малыми членами α_t и β_t и отмечаем, что тогда

$$\frac{c}{q} E_\chi = \frac{c}{q} [\alpha_\chi E_\alpha + \beta_\chi E_\beta] = \alpha_\chi \omega \beta_\chi + \beta_\chi (-\omega \alpha_\chi) = 0.$$

В этом же приближении

$$E = H(t), \quad (3.14)$$

где $H(t)$ — константа интегрирования, которая пока еще не определена. Выберем $\omega = 1/T$, причем период T определен выражением (3.10), а интегрирование проводится по замкнутой кривой на поверхности $E = H$. В этом случае χ является угловой переменной, и если пренебречь α_t и β_t , то можно формаль-



Фиг. 7. Диаграмма поверхности постоянного потока, поясняющая траекторию движения частицы.

но проинтегрировать приближенные уравнения движения (3.12) и (3.13):

$$\chi T = \frac{q}{c} \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{E_{\beta}[\alpha, \beta(\alpha, t), t]} = -\frac{q}{c} \int \frac{d\beta}{E_{\alpha}[\alpha(\beta, t), \beta, t]},$$

где значение $\beta(\alpha, t)$ определяется из равенств $E(\alpha, \beta, t) = H(t)$ и т. д.

Отметим, что для определения $H(t)$ не нужно использовать приближенные уравнения движения и

$$\begin{aligned} \frac{c}{q} E_{\chi} &= \alpha \frac{c}{q} E_{\alpha} + \beta_{\chi} \frac{c}{q} E_{\beta} = \alpha_{\chi} (\omega \beta_{\chi} + \beta_t) - \beta_{\chi} (\omega \alpha_{\chi} + \alpha_t) = \\ &= \alpha_{\chi} \beta_t - \beta_{\chi} \alpha_t = -(\alpha \beta_{\chi})_t + (\alpha \beta_t)_{\chi}. \end{aligned}$$

Если мы теперь проинтегрируем это выражение по χ от нуля до единицы, то получим

$$\left(\int_0^1 d\chi \alpha \beta_{\chi} \right)_t = 0$$

и в наинизшем учитываемом порядке величина ψ , равная

$$\psi = \oint d\beta \alpha, \quad (3.15)$$

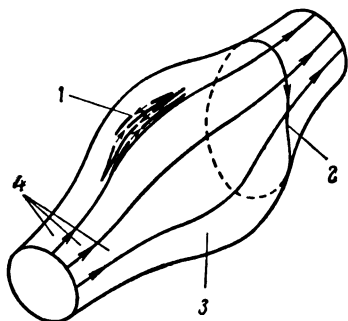
является приближенной константой движения, причем интегрирование проводится по замкнутой кривой на поверхности $E = H$.

Мы покажем теперь, что ψ — это магнитный поток. Для доказательства мы используем теорему Стокса и равенство

$\mathbf{B} = (\nabla \alpha) \times (\nabla \beta) = \nabla \times (\alpha \nabla \beta)$ и заметим, что магнитный поток через любую поверхность в пространстве x, y, z равен

$$\int d^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \int d^2 \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\alpha \nabla \beta) = \int d\mathbf{r} \cdot \alpha \nabla \beta = \int d\beta \alpha. \quad (3.16)$$

В этом уравнении интегрирование проводится по линии, которая представляет собой любую замкнутую кривую, возникающую, как схематически показано на фиг. 8, при разрезе магнитной поверхности, которая в пространстве x, y, z определяется уравнением $E(\alpha, \beta, t) = H(t)$. Очевидно, что величина ψ не зависит от выбора силовой линии до тех пор, пока ее топологические свойства соответствуют описанным выше. Поэтому урав-



Фиг. 8. Диаграмма, на которой схематически показаны траектория частицы (1) и путь интегрирования (2) на магнитной поверхности $E = H$ (3). (4 — силовые линии.)

нение (3.15) для ψ неявно определяет значение $H(t)$. По традиции приближенную константу ψ называют третьим адиабатическим инвариантом или по-другому — потоковым инвариантом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфвен Х., Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.
2. Kruskal M. D., Journ. Math. Phys., 3, 806 (1962).
3. Нортрон Т., Адиабатическая теория движения заряженных частиц, М., Атомиздат, 1967.
4. Ленерт Б., Динамика заряженных частиц, М., Атомиздат, 1967.
5. Berkowitz J., Gardner C., Communs. Pure and Appl. Math., 12, 501 (1959).

Равновесие релятивистского пучка

Г. БЕНФОРД, Д. Л. БУК

Gregory Benford, David L. Book, Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore, California

ВВЕДЕНИЕ

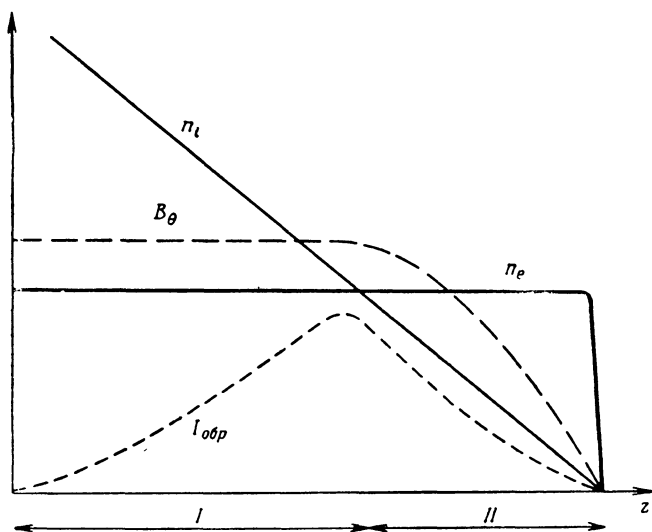
Высокоскоростные пучки электронов давно представляют интерес для физики плазмы. Первые теоретические исследования таких пучков были проведены Беннетом [1] и Альфвенем [2]. Достигнутый в последние годы прогресс экспериментальной техники позволил впервые в лабораторных условиях исследовать предельные токи электронных пучков [3—6], значения которых были давно предсказаны теорией. Это в свою очередь стимулировало теоретические исследования новых равновесных состояний.

Развитие работ по релятивистским электронным пучкам обусловлено главным образом тем, что они могут транспортировать весьма большие плотности энергии. Поэтому электронные пучки удобно использовать как для изучения ударных волн в твердых телах без разрушения материала, так и для изучения рентгеновского излучения. В этих случаях электронные пучки выгоднее лазерных, так как они могут нести более высокие плотности энергии и проникать в материалы на значительно большую глубину. По-видимому, внутри таких пучков могут также ускоряться ионы. В эксперименте [7] был зарегистрирован поток порядка 10^{14} протонов с энергией от 1 до 2 МэВ.

Чем больше ток пучка, тем более полезным инструментом для различных исследований является сам пучок. В связи с этим желательны токи, превышающие 10^4 А, и как раз в этой области токов по теоретическим оценкам существуют ограничения на максимальную величину тока. В данной статье мы рассматриваем вопрос о том, могут ли быть превзойдены теоретические предельные значения токов. Мы обсудим также все известные нам равновесные состояния цилиндрически симметричных пучков, бесконечных в направлении оси z , поддающиеся аналитическому анализу.

Количество возможных равновесных состояний пучка зависит от среды, окружающей пучок. Можно инжектировать пучок в вакуумную камеру, тогда кулоновское расталкивание зарядов

быстро разбрасывает пучок в поперечном направлении. Если, однако, пучок инжектируется в ионизованный газ, то из-за изменения магнитного поля в головной части пучка в плазме может индуцироваться обратный ток. Важно понимать, что этот обратный ток существует не вечно, а постепенно затухает по мере поглощения энергии индуцированного магнитного поля при омическом нагреве плазмы. Это проиллюстрировано на фиг. 1. Когда пучок пронизывает ионизованную среду, имеется область



Фиг. 1. Характерные зависимости плотностей n_e и n_t , магнитного поля B_θ и обратного тока $I_{обр}$ от z .

I —область нейтрализации тока. II —область нейтрализации заряда.

нейтрализации заряда, называемая головной частью пучка. В данной области возрастающее собственное магнитное поле пучка индуцирует в плазме изменяющееся аксиальное электрическое поле, что вызывает обратный ток, который в свою очередь затухает из-за столкновений в плазме. Обратный ток затухает обратно пропорционально расстоянию от головной части пучка, и характерная длина затухания D равна

$$D = \frac{V_z a^2 \sigma}{c^2} = V_z \tau,$$

где V_z — скорость пучка, a — радиус однородного пучка, σ — проводимость плазмы, c — скорость света и τ — постоянная времени диффузии магнитного поля. В проведенных экспериментах характерная длина затухания D , на которой существенна

роль обратного тока, а также имеется нейтрализация заряда, может быть достаточно велика — порядка нескольких метров. Данное обстоятельство позволяет предполагать для облегчения математических расчетов равновесных состояний, что пучок бесконечен в направлении оси z . Это означает, что радиус пучка a мал по сравнению с длиной пучка L , т. е. $a/L \ll 1$. Если мы потребуем, чтобы обратные токи протекали по окружающей плазме в области самого пучка, то будем вынуждены предположить также, что и $a/D \ll 1$.

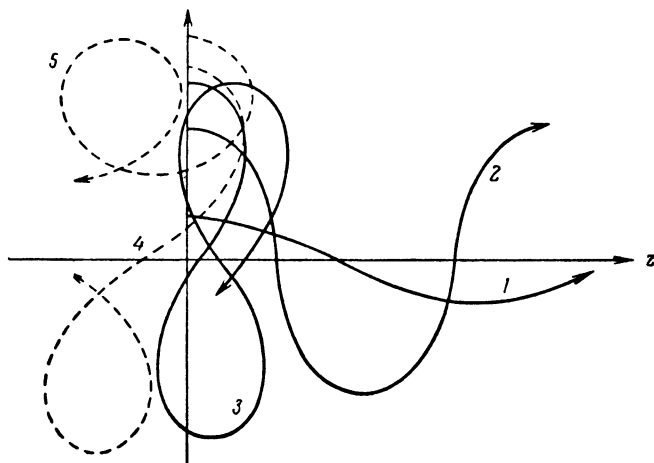
Пренебрежение зависимостью от z означает, что постоянная времени переходных эффектов, связанных с нейтрализацией заряда и тока или настолько мала, что эти эффекты равны нулю, или настолько велика, что поля и точки во время переходного процесса можно считать постоянными. Поэтому в зависимости от изучаемой модели время образования равновесного состояния берется много меньше или много больше постоянной времени переходного процесса. Теоретические описания переходных процессов в плазме в большинстве случаев весьма сложны и содержат много приближений. В данной статье мы опускаем рассмотрение переходных процессов (см., например, [3, 8, 9]).

Электроны пучка при наличии ионов неизбежно испытывают с ними столкновения. Передача импульса при столкновениях замедляет пучок и изменяет равновесное состояние. Мы будем пренебрегать этим зависящим от времени эффектом. Такое приближение справедливо в двух случаях: во-первых, на первых стадиях жизни пучка, когда за время установления равновесного состояния происходит только несколько электрон-ионных столкновений, и, во-вторых, если небольшое приложенное электрическое поле E_z препятствует торможению пучка. При этом может наступить такое равновесное состояние [10], при котором энергия, получаемая электронами от поля E_z , теряется при электромагнитном излучении (обусловленном поперечными электронными колебаниями), и поле E_z компенсирует потери импульса при столкновениях. Тогда основные параметры пучка не изменяются. Если поле E_z значительно меньше установившихся полей в равновесном состоянии, то в первом приближении им можно пренебречь.

В экспериментальных условиях пучок обычно находится внутри проводящего цилиндра — дрейфовой трубки. Стенки трубки не оказывают влияния на пучок с круглым поперечным сечением. Поля, обусловленные проводящими стенками трубки, становятся существенными (по теории устойчивости) только в случае возмущения равновесного состояния пучка с круглым поперечным сечением. Однако этими эффектами можно пренебречь, если радиус дрейфовой трубки R значительно больше радиуса пучка, т. е. $a/R \ll 1$.

В.1. Ограничения тока

Многие новые исследования по пучкам посвящены получению больших токов. Максимально возможное значение тока пучка было впервые получено Альфвенем [2], который рассмотрел цилиндрически симметричную модель с однородной плотностью тока и моноэнергетичными частицами, заряд которых нейтрализован окружающей холодной плазмой. Он проинтегрировал уравнения движения для траекторий частиц и получил



Фиг. 2.

семейство кривых, подобных приведенным на фиг. 2; при малых токах траектория движения частицы является приближенно синусоидальной. Характер траектории частицы определяется величиной тока, заключенного внутри максимального радиуса, достигаемого частицей. Альфвен определил, что силы сжатия ограничивают ток величиной

$$I_A = 17000\beta\gamma A.$$

Здесь $\beta = V_z/c$ и $\gamma = [1 - (V_z/c)^2]^{-1/2}$. Если ток внутри максимального радиуса, достигаемого частицей, много меньше I_A , то траектория движения частицы является практически синусоидальной (кривая 1). По мере возрастания тока увеличивается поперечная скорость частицы (кривая 2), и это продолжается до тех пор, пока ток внутри максимального радиуса частицы не достигает значения I_A — тогда частица пересекает ось z под прямым углом. Если ток возрастает еще больше, то усредненная дрейфовая скорость частицы начинает уменьшаться (кривые 3, 4 и 5). Данное значение предельного тока не зависит от размеров пучка.

Впоследствии Лауссон [11] рассмотрел ту же самую модель без предположения о полной нейтрализации заряда и нашел, что ток ограничен величиной

$$I_L = \frac{17\,000\beta^2\gamma}{\beta^2 + f - 1},$$

где f — коэффициент нейтрализации. Очень большие токи можно было бы получить, если бы можно было поддерживать постоянными значения f и β^2 вдоль пучка. Однако поскольку при столкновениях пучка с окружающей плазмой образуются ионы, то значение f возрастает в каждой точке пространства по мере прохождения пучка. Предел Лауссона можно получить из условия, что радиус ларморовской орбиты частицы в максимальном собственном магнитном поле пучка равен радиусу самого пучка. Это означает, что частица не может изменить направление своего движения вдоль оси z при вращении в собственном поле пучка. Из этого условия непосредственно следует метод увеличения токов в пучках, если плотность тока в пучке может быть неоднородной. Предположение о трубчатой форме пучка приводит нас к выводу о том, что предельное значение тока возрастает только в том случае, когда ларморовские орбиты частиц расположены внутри цилиндрического токового слоя. Ниже мы покажем, что такие трубчатые пучки можно описать различными равновесными состояниями с более высокими значениями предельных токов.

Другой способ получения произвольно больших токов заключается в создании обратного тока в плазме, через которую распространяется пучок. Такая «магнитная нейтрализация» возникает вследствие большого числа электронов окружающей плазмы, образующих внутри пучка медленный противопоток, так что результирующая плотность тока резко уменьшается. При этом собственное поле пучка мало, и пропорционально уменьшается поперечное движение электронов в пучке.

Еще один метод увеличения токов пучка — это наложение внешнего поля B_z , значительно превышающего собственное поле B_0 . Электроны стремятся вращаться вокруг силовых линий магнитного поля. При добавлении к B_0 поля B_z форма силовой линии изменяется: из окружности она становится спиралью. Когда $B_z \gg B_0$, электроны дрейфуют преимущественно в направлении оси z и пучок «вынужден» распространяться, если даже $I > I_A$. Все эти методы увеличения тока пучка будут ниже проверены критерием наличия равновесного состояния.

В данной статье все модели пучков (исключая два случая астроновских пучков) являются бесконечными вдоль оси z ($a/L \ll 1$). Это означает, в частности, что коэффициент нейтрализации f считается постоянным. В экспериментальных усло-

виях это, однако, не всегда соблюдается. Столкновения электронов пучка с окружающим газом приводят к непрерывному увеличению плотности n_i окружающей плазмы в течение эксперимента. Например, при давлении газа порядка 0,5 тор плотность n_i возрастает примерно как

$$n_i = nn_0\sigma_I L,$$

где n_0 — плотность газа, n — плотность пучка, σ_I — эффективное поперечное сечение ионизации, соответствующее данной энергии пучка, и L — длина пучка, пронизывающего плазму. При давлении воздуха 0,5 тор, энергии электронов пучка 1 МэВ, плотности электронов $2 \cdot 10^{11}$ см⁻³ и $\sigma_I = 2 \cdot 10^{-18}$ см⁻² коэффициент f равен [6]

$$f = \frac{n_i}{n} = 4L,$$

где L выражено в метрах. Когда длина пучка, вошедшего в газ, составит четверть метра, то $f = 1$. Ясно, что рассматриваемая модель неприменима, если диаметр пучка превышает несколько сантиметров. Однако при более низких давлениях газа область, в которой коэффициент f приблизительно постоянен, может составлять много метров.

Пучки удобно характеризовать величиной отношения v/γ , где

$$v = \frac{Ne^2}{4\pi mc^2} \equiv Nr_0,$$

N — число положительных или отрицательных зарядов на сантиметр длины пучка и r_0 — классический радиус электрона. Для выполнения условия $v/\gamma \gg 1$ нужно иметь много электронов внутри каждого участка пучка длиной r_0 , что, очевидно, возможно лишь для очень больших токов.

Вообще, чем больше отношение v/γ , тем пучок более нестабилен. (Магнитогидродинамическая теория неустойчивости применима к пучкам [12], если отношение $v/\gamma \gg 1$.)

Спенс, Эккер и Ионес [13] для модели однородного пучка, которая хотя и не является самосогласованной, но отражает основные свойства пучка в дрейфовой трубке, показали, что соотношение между поперечным и продольным движениями равно

$$\frac{\langle V_{\perp}^2 \rangle}{\langle V_z^2 \rangle} = \left(\frac{v}{\gamma} \right)_{\text{нетто}} (1 - f_m),$$

где

$$f_m = \frac{I_0}{I}$$

и I_0 — обратный ток. Интуиция подсказывает, что когда преобладающим становится поперечное движение, то наступает ограничение тока. При отсутствии обратных токов это означает, что $v/\gamma \geq 1$. Важно отметить, что для нерелятивистских пучков нет никаких ограничений на ток. Рассмотрим, например, однородный нейтрализованный пучок. Если на поверхности ($r = a$) выполняется условие

$$\frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{V} = \nabla P_{\perp},$$

то будет равновесное состояние, и если поперечное давление в пучке P_{\perp} приближенно определить как

$$P_{\perp} \approx \frac{mV_{\perp}^2}{2} n\gamma,$$

то $j \approx P_{\perp} c / a V_{\theta}$, где выражение для поля B_{θ} (при $r = a$) имеет вид

$$B_{\theta} \approx \frac{2\pi V_z n e}{c} a.$$

Полный ток I (с учетом поперечного сечения пучка πa^2) равен

$$I \approx \frac{m\gamma V_{\perp}^2 c^2}{4eV_z} = I_A \left(\frac{V_{\perp}}{2V_z} \right)^2.$$

Уменьшая величину $2V_z$ относительно V_{\perp} , можно получить ток, в любое число раз превышающий I_A . Но целесообразность использования сильноточных пучков определяется тем, что они могут нести большую энергию, а энергия пучков с малым значением V_z/c неизбежно должна быть небольшой. Поэтому с данной точки зрения такие пучки не представляют большого интереса.

В.2. Основные уравнения

При конструировании модели релятивистского пучка мы поступаем следующим образом:

1. Точно определяем геометрию; направление тока определяет степень симметрии.
2. Записываем функцию равновесного распределения f_0 через константы движения, соответствующие выбранной геометрии.
3. Используя функцию f_0 , рассчитываем плотность тока j и плотность заряда $-nq$ как функционалы потенциалов.

4. Для нахождения векторного потенциала \mathbf{A} и скалярного потенциала ϕ решаем уравнения

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi j}{c} \quad (\text{B.1})$$

и

$$-\nabla^2 \Phi = 4\pi nq. \quad (\text{B.2})$$

Применяемая математическая процедура позволяет использовать два свойства этих уравнений. Во-первых, если даже уравнения связаны, то часто можно найти такую линейную комбинацию Φ и единственно существенной компоненты (компоненты \mathbf{A} в направлении j), которая расщепляет эти уравнения. Во-вторых, уравнение

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = f(\Phi)$$

может быть проинтегрировано после умножения на $d\Phi/dx$, а именно:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = \int f(\Phi) d\Phi.$$

В частности, решением уравнения

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = e^{-\Phi} \quad (\text{B.3})$$

является

$$\Phi = \ln \frac{ch^2 [\eta(x - x_0)]}{2\eta^2}, \quad (\text{B.4})$$

где η и x_0 — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = e^{-\Phi},$$

которое является двумерной формой уравнения (B.3), также известно [14—16].

$$e^{-\Psi} = 8 \frac{(\partial g^2 / \partial x) + (\partial g^2 / \partial y)^2}{(1 + g^2 + h^2)^2},$$

где $f(z) = f(x + iy) = g(x, y) + ih(x, y)$ — произвольная, но однозначная аналитическая функция, а g и h — ее действительная и мнимая части. Эта формула может быть использована для описания пучков с некруглым поперечным сечением. К несчастью, неизвестно общее решение трехмерного аналога уравнения (B.3):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = e^{-\Phi}.$$

При конструировании модели пучка мы можем распорядиться выбором степени нейтрализации и параметрами функции f_0 . Кроме того, можно так выбрать общее решение [(B.4) или аналогичное], чтобы сформировался определенный профиль плотности пучка. Мы можем иногда конкретизировать решение при наличии внешнего однородного магнитного поля, направление которого совпадает с направлением тока. Наконец, для упрощения результатов можно использовать два предельных случая: классический ($mc \rightarrow \infty$) или ультрарелятивистский ($mc \rightarrow 0$). Мы рассматриваем системы с аксиальной и азимутальной симметрией (за исключением двух моделей в гл. 2). В цилиндрических координатах r , θ и z все величины не зависят от θ и z . Тогда

$$H = c(p^2 + m^2c^2)^{1/2} + q\phi, \quad (\text{B.5})$$

$$P_z = p_z + \frac{q}{c} A_z, \quad (\text{B.6})$$

$$P_\theta = r\left(p_\theta + \frac{q}{c} A_\theta\right) \quad (\text{B.7})$$

являются константами движения.

В.3. Граничные условия

Равновесное состояние не может быть определено одной только функцией f_0 ; необходимо задать также граничные условия на потенциалы ϕ и \mathbf{A} . Решения обычно автоматически стремятся к нулю, когда r стремится к бесконечности. Соответствующий потенциал (ϕ или \mathbf{A}_z или их линейная комбинация) удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, которое обычно имеет только одну независимую переменную r . Общее решение содержит две константы интегрирования. Иногда оказывается, что если только один из параметров не имеет вполне определенное значение, то выражение для поля, например B_θ , расходится как $\sim 1/r$ при $r \rightarrow 0$. Если этот параметр имеет какое-либо другое значение, то линейный заряд или ток на оси ($r = 0$) должны быть источником поля, т. е. они должны быть способны создать данное поле. Это и есть по существу способ согласования граничных условий для нахождения решения, что не противоречит уравнениям поля, которые в цилиндрических координатах имеют особую точку $r = 0$.

Если потребуется рассмотреть модель пучка в проводящей трубке, то электрическое поле E_z на стенке трубки должно быть равно нулю. (Здесь и далее поле E_z равно нулю и на других радиусах пучка, поскольку пучок однороден в направлении оси z .) Решение для бесконечного по оси z цилиндрически сим-

метричного равновесного состояния с $B_r \neq 0$ может быть обрезано на любом произвольном радиусе, и в месте обрезания помещена проводящая стенка. Решение для равновесного состояния справедливо внутри объема, ограниченного стенками, если частицы испытывают зеркальные отражения от границ. Однако это свойство не очень полезно в практических приложениях, так как при столкновениях с плазменной границей частицы практически не испытывают зеркального отражения.

1. МОДЕЛИ АКСИАЛЬНОГО ТОКА

1.1. Диффузные пучки

1.1.1. **Обобщенное распределение Беннета.** Рассмотрим следующую функцию распределения:

$$f_0 = \bar{K} \exp \left[-\frac{a}{c} H + \alpha P_z \right]. \quad (1.1)$$

Как было отмечено Бунеманом [7], показатель экспоненты можно записать (используя обычное правило суммирования) в ковариантной форме как $a_\mu P_\mu$, где P_μ — канонический четырехмерный импульс и a_μ — постоянный четырехмерный вектор с отличными от нуля компонентами в направлении оси z и времяподобных направлениях. Переходя к новой, произвольно выбранной, инерционной системе отсчета, мы можем преобразовать это выражение в $a' P'_0$, где P'_0 — полная энергия в новой системе координат. В этой системе отсчета распределение является максвелловским.

В любой из упомянутых систем координат имеются частицы со всевозможными скоростями между $-c$ и $+c$. Поэтому уравнение (1.1) определяет такую модель пучка, которая не осуществляется на опыте, где все электроны движутся в направлении положительной оси z . Действительное максвелловское распределение может возникать в экспериментальных условиях только по истечении интервала времени, достаточного для хаотизации скоростей из-за столкновений. Однако простая форма выражения (1.1) привлекательна тем, что приводит ко многим упрощениям.

Если равновесные распределения вида (1.1) описывают два или более сорта частиц, то невозможно в общем виде найти такую систему отсчета, где бы одновременно все типы частиц были покоящимися. В действительности мы интересуемся такой ситуацией, когда электроны с релятивистскими скоростями дрейфуют сквозь окружающий их фон ионов в лабораторной системе отсчета. Будем считать, что этот дрейф является положительным, т. е. $\alpha > 0$.

Функция распределения f_0 является инвариантной к преобразованиям Лорентца [7]. (Поскольку d^3r и d^3p — элементы объемов в пространстве координат и импульсов — не инвариантны, то это означает, что число частиц в элементе объема как пространства координат, так и фазового пространства также не инвариантно.) Так как функция f_0 — скаляр, то необходимо обеспечить инвариантность как \bar{K} , так и $a_\mu P_\mu$. Следовательно, преобразование величин a_μ действительно осуществляется как преобразование компонент четырехмерного вектора. Неравенство $a > |\alpha|$ является условием того, что при интегрировании по импульсам уравнения (1.1) получится конечная плотность частиц. Это неравенство сохраняется при преобразовании Лорентца; следовательно, во всех системах отсчета $a_\mu a_\mu = a^2 - \alpha^2 > 0$ и $a > 0$ (a_μ — времяподобный вектор).

Следуя указанной ранее схеме, рассчитаем плотности частиц и тока, связанные с выражением (1.1). Определив ток как четырехмерный вектор $j_\mu = (nqc, j_x, j_y, j_z)$, где $n(r) = \int d^3p f_0$ и $\mathbf{j}(r) = \int d^3p \mathbf{v} f_0$, $\mathbf{v} = (p^2 + m^2 c^2)^{-1/2} \mathbf{p}c$, находим

$$j_\mu = qc \bar{K} e^{-\psi} Q a_\mu; \quad (1.2)$$

где величины

$$\psi = \frac{q}{e} (a\phi - \alpha A_z) = \frac{q}{c} a_\mu A_\mu \quad (1.3)$$

и

$$Q = \frac{4\pi (mc)^2}{a^2 - \alpha^2} K_2 [mc (a^2 - \alpha^2)^{1/2}] \quad (1.4)$$

инвариантны к преобразованиям Лорентца. В ультрарелятивистском пределе ($mc \rightarrow 0$), используя разложение модифицированной функции Бесселя K_2 при малом значении аргумента, можно вместо уравнения (1.4) записать

$$Q \rightarrow \frac{8\pi}{(a^2 - \alpha^2)^2}.$$

Если полностью пренебречь теперь вкладом ионов, то закон Ампера и уравнение Пуассона принимают вид ($q = -e$)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_\mu}{dr} \right) = - \frac{4\pi}{c} j_\mu = 4\pi e \bar{K} Q a_\mu e^{-\psi}. \quad (1.5)$$

Умножая на $e/c a_\mu$, получаем уравнение для ψ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = - \frac{4\pi e^2}{c} \bar{K} Q (a^2 - \alpha^2) e^{-\psi} = G e^{-\psi}. \quad (1.6)$$

Записав $x = \lg r$ и $\Phi = \psi - 2 \ln r - \ln G$, преобразуем уравнение (1.6) в уравнение (1.3). Таким образом, общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$\psi = \ln \left\{ \frac{Gr^2}{8\eta^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r} \right)^\eta \right]^2 \right\}, \quad (1.7)$$

где G — величина отрицательная, так как формула (1.7) получена без учета ионов. Следовательно, общее решение для ψ теряет силу, и мы должны заново пересмотреть вывод уравнения (1.5). Полученный результат отражает тот физический факт, что электростатическое расталкивание двух зарядов с относительной скоростью v в $(v/c)^{-2}$ раз сильнее магнитного притяжения. [Как следует из уравнения (1.2), $\langle v_z/c \rangle = \alpha/a$.] Нужна по крайней мере частичная нейтрализация заряда, чтобы пучок находился в равновесном состоянии.

Простейший способ обращения с ионами — это предположить, что они образуют холодный неподвижный фон, в каждой точке которого их плотность пропорциональна $n_e(r)$. Как правило, мы так и будем поступать. Более строгое рассмотрение, однако, следует начинать с равновесной функции распределения f_{0i} . Интегрирование этой функции по импульсам дает плотность ионов $n_i(r)$. Если зависимость плотности n_i от r не такая же, как у n_e , то очень трудно решить уравнение Пуассона. Такая ситуация, однако, всегда может встретиться.

Проиллюстрируем это замечание детальным рассмотрением ионов в обсуждаемой модели. Предположим для определенности, что *оба* сорта частиц удовлетворяют распределению типа (1.1):

$$f_{0j} = \bar{K}_j \exp[-a_\mu^{(j)} p_\mu^{(j)}], \quad j = i, e. \quad (1.8)$$

Следовательно, уравнение (1.5) заменяется уравнением

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_\mu}{dr} \right) = 4\pi \sum_{j=i, e} q_j \bar{K}_j Q_j a_\mu^{(j)} e^{-\psi_j}, \quad (1.9)$$

где

$$\psi_j = \frac{q_j}{c} a_\mu^{(j)} A_\mu \quad (1.10)$$

и

$$Q_j = \frac{4\pi (m_j c)^2}{a_j^2 - \alpha_j^2} K_2 [m_j c (a_j^2 - \alpha_j^2)^{1/2}].$$

Добавляя к уравнению (1.9) величину $(q/c) a^{(l)}$, получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi_l}{dr} \right) = -\frac{4\pi}{c} \sum_l q_l q_l \bar{K}_l Q_l a^{(l)} e^{-\psi_l}, \quad l = i, e. \quad (1.11)$$

Когда можно решить систему уравнений (1.11)? (Отложим на будущее обсуждение граничных условий.)

Условием обратимости линейного преобразования (1.10) является

$$\begin{bmatrix} a^{(i)} & \alpha^{(i)} \\ a^{(e)} & \sigma^{(e)} \end{bmatrix} = a^{(i)} a^{(e)} \left(\frac{a^{(e)}}{a^{(e)}} - \frac{\alpha^{(i)}}{a^{(i)}} \right) \neq 0. \quad (1.12)$$

Если это условие не соблюдается, то векторы $a_{\mu}^{(i)}$ и $a_{\mu}^{(e)}$ параллельны, т. е.

$$a_{\mu}^{(i)} = \kappa a_{\mu}^{(e)}, \quad (1.13)$$

причем постоянный коэффициент κ должен быть положительным. Система (1.10) сводится к одному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi_e}{dr} \right) = - \frac{4\pi e^2}{c} a_{\mu}^{(e)} a_{\mu}^{(e)} \left[\bar{K}_e Q_e \exp(-\psi_e) - \kappa \bar{K}_i Q_i \exp(\kappa\psi_e) \right],$$

которое, по-видимому, неразрешимо аналитическими методами. Отметим, что если равенство (1.13) выполняется, то оба сорта частиц находятся в состоянии покоя в одной системе отсчета, хотя они имеют в этой системе разные температуры. Поэтому для пучков такая ситуация не представляет интереса.

Но если даже условие (1.12) выполнено, то решение уравнения (1.11) можно найти, предположив, что ψ для электронов и ионов имеют одинаковые радиальные зависимости, а именно:

$$\exp(-\psi_i) = \sigma_i \frac{8\eta^2}{r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\eta} + \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\eta} \right]^{-2} \equiv \sigma_i \exp(-\psi_0).$$

Используя то обстоятельство, что при $G=1$ величина ψ из уравнения (1.7) равна ψ_0 , подстановкой в уравнение (1.11) находим, что

$$1 = \sigma_e M_{ee} + \sigma_i M_{ei}, \quad 1 = \sigma_e M_{ie} + \sigma_i M_{ii}, \quad (1.14)$$

где

$$M_{ij} = - \frac{4\pi}{c} q_i q_j \bar{K}_j Q_j a^{(i)} a^{(j)}.$$

Решение уравнения (1.14) равно

$$\sigma_e = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & M_{ei} \\ 1 & M_{ii} \end{bmatrix} = \frac{M_{ii} - M_{ei}}{\Delta},$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_{ee} & 1 \\ M_{ie} & 1 \end{bmatrix} = \frac{M_{ee} - M_{ie}}{\Delta},$$

где определитель Δ равен

$$\Delta = \begin{bmatrix} M_{ee} & M_{ei} \\ M_{ie} & M_{ii} \end{bmatrix} = \left(\frac{4\pi e^2}{c} \right)^2 \bar{K}_e \bar{K}_i Q_e Q_i \begin{bmatrix} a^{(e)} \cdot a^{(e)} & - a^{(e)} \cdot a^{(i)} \\ - a^{(i)} \cdot a^{(e)} & a^{(i)} \cdot a^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Этот определитель равен нулю только и только в том случае, когда

$$[a^{(e)} \cdot a^{(e)}][a^{(i)} \cdot a^{(i)}] - [a^{(e)} \cdot a^{(i)}]^2 = -(\alpha_e a_i - \alpha_i a_e)^2 = 0,$$

что равносильно предположению о том, что условие (1.12) не соблюдается. Тогда решение уравнения (1.14) записывается как

$$\sigma_e = \frac{c}{4\pi e^2} \frac{a_i^2 - \alpha_i^2 + a_e a_i - \alpha_e \alpha_i}{\bar{K}_e Q_e (\alpha_e a_i - \alpha_i a_e)^2},$$

$$\sigma_i = \frac{c}{4\pi e^2} \frac{a_e^2 - \alpha_e^2 + a_e a_i - \alpha_e \alpha_i}{\bar{K}_i Q_i (\alpha_e a_i - \alpha_i a_e)^2}.$$

Плотности частиц n_e и n_i равны

$$n_e(r) = \bar{K}_e Q_e a_e e^{-\psi_e} = \frac{c a_e}{4\pi e^2} \frac{a_i^2 - \alpha_i^2 + a_e a_i - \alpha_e \alpha_i}{(\alpha_e a_i - \alpha_i a_e)^2} e^{-\psi_e}, \quad (1.15)$$

$$n_i(r) = \bar{K}_i Q_i a_i e^{-\psi_i} = f n_e(r), \quad (1.16)$$

где степень нейтрализации f определена как

$$f = \frac{a_i a_e^2 - \alpha_i^2 + a_e a_i - \alpha_e \alpha_i}{a_e a_i^2 - \alpha_i^2 + a_e a_i - \alpha_e \alpha_i}. \quad (1.17)$$

Обращая уравнение (1.10), находим, что

$$A_z = + \frac{c}{e} \frac{a_i + a_e}{\alpha_e a_i - \alpha_i a_e} \ln \left\{ \frac{r^2}{8\eta^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r} \right)^\eta \right]^2 \right\} + \text{const}, \quad (1.18)$$

$$\phi = + \frac{c}{e} \frac{a_i + \alpha_e}{\alpha_e a_i - \alpha_i a_e} \ln \left\{ \frac{r^2}{8\eta^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r} \right)^\eta \right]^2 \right\} + \text{const}. \quad (1.19)$$

Следовательно,

$$B_\theta = - \frac{c}{e} \frac{a_i + a_e}{\alpha_e a_i - \alpha_i a_e} \frac{2}{r} \left\{ 1 + \eta \frac{(r/r_0)^\eta - (r_0/r)^\eta}{(r/r_0)^\eta + (r_0/r)^\eta} \right\}, \quad (1.20)$$

$$E_r = - \frac{c}{e} \frac{a_i + \alpha_e}{\alpha_e a_i - \alpha_i a_e} \frac{2}{r} \left\{ 1 + \eta \frac{(r/r_0)^\eta - (r_0/r)^\eta}{(r/r_0)^\eta + (r_0/r)^\eta} \right\}. \quad (1.21)$$

Эти результаты становятся более ясными в такой системе отсчета, где ионы покоятся ($\alpha_i = 0$). Тогда уравнение (1.11) при $l = e$ имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} = \frac{4\pi e^2}{c} \bar{K} Q a^2 \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + f - 1 \right) e^{-\psi} \equiv G e^{-\psi}. \quad (1.22)$$

(Теперь индексы, обозначающие сорт частиц, опускаются, и в дальнейшем все величины, зависящие от сорта частиц, без индексов, относятся к электронам.) Из уравнения (1.17) следует, что когда величина a_i меняется от 0 до ∞ , f принимает значения от $1 - \alpha^2/a^2$ до 1. Таким образом, в противоположность уравнению (1.6) в уравнении (1.22) величина G всегда положительна. Выражения (1.20) и (1.21) можно переписать, используя коэффициент нейтрализации f :

$$B_\theta = -\frac{c}{e} \frac{2\alpha}{[\alpha^2 + (f-1)a^2]r} \left\{ 1 + \eta \frac{(r/r_0)^\eta - (r_0/r)^\eta}{(r/r_0)^\eta + (r_0/r)^\eta} \right\}. \quad (1.23)$$

$$E_r = -\frac{c}{e} \frac{2\alpha(1-f)}{[\alpha^2 + (f-1)a^2]r} \left\{ 1 + \eta \frac{(r/r_0)^\eta - (r_0/r)^\eta}{(r/r_0)^\eta + (r_0/r)^\eta} \right\}. \quad (1.24)$$

Выражение (1.15) принимает вид

$$n(r) = \frac{c}{4\pi e^2} \frac{a}{\alpha^2 + (f-1)a^2} \frac{8\eta^2}{r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r} \right)^\eta \right]^{-2}, \quad (1.25)$$

тогда как

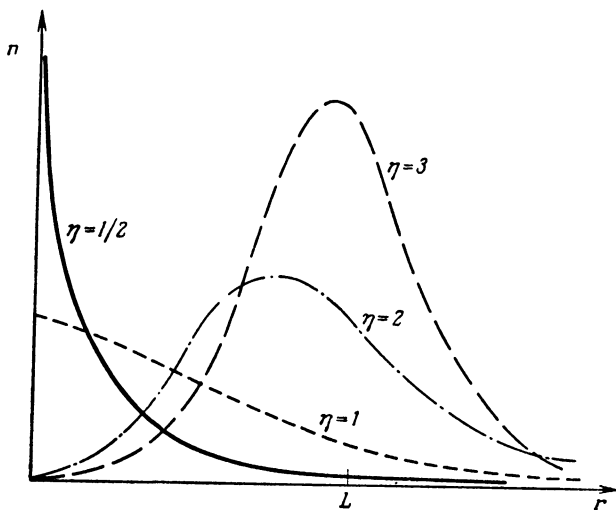
$$j(r) = \frac{c}{4\pi e} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (f-1)a^2} \frac{8\eta^2}{r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r} \right)^\eta \right]^{-2}. \quad (1.26)$$

Характер решений определяется соотношением сил собственного магнитного сжатия (член α^2/a^2) и электростатического расталкивания (член $1-f$). Видно, что если $a_i \rightarrow \infty$ или $a_e \rightarrow \infty$, то $f \rightarrow 1$ и $\phi \rightarrow \text{const}$. Это легко понять, если вспомнить наши первоначальные допущения. Из выражения (1.8) следует, что когда $a_i \rightarrow \infty$, то температура ионов равна нулю. Но если ионы холодные и неподвижные и если система находится в равновесном состоянии, то полная сила, действующая на каждый отдельный ион (электростатическая плюс магнитная), равна нулю. Магнитная сила равна нулю, поскольку $v = 0$, поэтому электростатическая сила также равна нулю и величина ϕ должна быть постоянной. В такой ситуации должна быть полная нейтрализация заряда, так что $f = 1$. Аналогичные рассуждения применимы и в случае холодных электронов.

Решения уравнений (1.23) — (1.26) имеют ряд интересных свойств. Ясно, что r_0 — просто масштабный параметр, характеризующий вариации профиля плотности пучка по радиусу. Вторая постоянная η — параметр формы функций распределения плотности (фиг. 3). При $\eta < 1$ выражения для $n(r)$ и $j(r)$ имеют особенности при $r = 0$; при $\eta > 1$ плотность n и ток j равны нулю при $r = 0$ и профиль плотности пучка принимает трубчатую форму. При $\eta = 1$ плотность n и ток j имеют конечные значения на оси пучка. Именно такое решение было впервые получено Беннетом [1].

Выбор различных значений η отражается также и на характере выражений для B_θ и E_r . При $\eta > 1$ (или $\eta < 1$) выражения для B_θ и E_r при $r \rightarrow 0$ расходятся как $\approx 1/r$ (к $+\infty$ или $-\infty$). Если $\eta = 1$ (распределение Беннета), то значения обоих полей на оси равны нулю. Предположим временно, что $f = 1$, т. е. E_r равно нулю, и проверим выражения для поля B_θ в предельных случаях.

При $r \rightarrow \infty$ поле $B_\theta \rightarrow -[2(1 + \eta)c/re\alpha]$. Точно такое поле создается полным током $I_{\text{полн}} = [(1 + \eta)c^2/e\alpha]$. При $r \rightarrow 0$ поле



Фиг. 3.

$B_\theta \rightarrow -[2(1 - \eta)c/re\alpha]$. Такое поле создается осевым током $I_0 = [(1 - \eta)c^2/e\alpha]$. Но, как видно из выражения для $j(r)$, нашему решению явно не хватает такого тока. Объяснение такое: аксиальный ток должен быть добавлен как граничное условие. Если этого не сделать, решение не будет самосогласованным. Этот аксиальный ток равен нулю только в первоначальной модели Беннета ($\eta = 1$).

Физический смысл явления заключается в том, что дополнительный ток необходим для равновесия внутренних сил в пучке, когда $\eta \neq 1$. Когда $\eta = 1$, магнитное сжатие точно компенсирует разлет электронов, обусловленный тепловым движением. Как только пучок начнет сжиматься к оси, так опять возникнет тенденция к разлету пучка. Сила притяжения, удерживающая пучок от разлета, как раз и обусловлена дополнительным током, заданным на оси параллельно потоку электронов. Если пучок трубчатый, то необходим аксиальный ток противоположного на-

правления, чтобы предотвратить сжатие пучка к конфигурации Беннета. Поэтому токи I_0 и $I_{\text{полн}}$ параллельны при $\eta < 1$ и антипараллельны при $\eta > 1$.

Если $f \neq 1$, то аналогичное рассмотрение можно провести относительно поля E_r и аксиального линейного заряда λ . В общем виде заряд на единицу длины зависит от величины η следующим образом:

$$\lambda = \frac{-(1-f)}{\alpha^2/a^2 + f - 1} \frac{(1-\eta)c}{ea}, \quad (1.27)$$

тогда как аксиальный ток

$$I_0 = \frac{-\alpha}{\alpha^2 + (f-1)a^2} \frac{(1-\eta)c^2}{e}. \quad (1.28)$$

Во введении отмечалось, что обратные токи существуют на длине $D = V_z a^2 \sigma / c^2$, отсчитываемой от головной части однородного пучка. Однако если пучок трубчатый, то постоянная времени τ диффузии индуцированного поля B_θ изменяется. В случае однородного пучка $\tau \sim a^2$, т. е. пропорциональна квадрату радиуса пучка. А в случае трубчатого пучка $\tau \sim a\Delta$, где Δ — толщина цилиндрического слоя электронов. Соответствующая диффузионная длина D' равна

$$D' = \frac{V_z a \Delta \sigma}{c^2}.$$

В этом случае условие применимости модели, в которой все величины не зависят от z , является отчасти более строгим: $D' \gg a$.

Довольно примечательно, что вектор \bar{K}_j не появляется ни в одной из макроскопических величин, рассчитанных посредством функции f_{0j} . Мы могли с таким же успехом положить $\bar{K}_j = 1$. Это связано с тем, что $n(r)$ и $j(r)$ зависят экспоненциально от ϕ и A_z . Произвольные аддитивные константы в этих потенциалах приводят к появлению неопределенного постоянного коэффициента — множителя \bar{K}_j в выражении для j_μ ; следовательно, величина \bar{K}_j не определена и не имеет физического смысла.

Интегрируя выражение для $n(r)$, находим число электронов на единицу длины:

$$N = 2\pi \int_0^\infty n(r)r dr = 2\eta \frac{c}{e^2 a} \left[\left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 + f - 1 \right]^{-1}. \quad (1.29)$$

Значение N определяется величиной η и не зависит от r_0 . Из выражения (1.29) или из разности токов $I_{\text{полн}}$ и I_0 находим ток, переносимый электронным пучком:

$$I_B = \frac{2\eta c^2 \alpha}{ea^2} \left[\left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 + f - 1 \right]^{-1}. \quad (1.30)$$

При условии $f \neq 1$, $I_B \rightarrow 0$, если $\alpha \rightarrow 0$. Если $f = 1$, то $I_B \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$. Это может казаться странным до тех пор, пока мы не заметим, что в том же предельном случае N стремится к бесконечности как α^{-2} , так что $I_B/N \rightarrow 0$.

Когда $f \rightarrow 1 - \alpha^2/a^2$, то выражение для тока I_B расходится. Это следует из наличия в знаменателе выражения (1.26) члена $[\alpha^2 + (f - 1)a^2]$. В этом предельном случае нейтрализующие ионы способны так уменьшить силы электростатического расталкивания, что последние могут только уравновесить силу магнитного сжатия. Поэтому необходимы очень большие токи, чтобы в этих условиях пинч-эффекту удалось удержать пучок от разлета.

Каким образом можно удовлетворить граничные условия типа (1.27) и (1.28)? В простом случае $f = 1$ требуется ток на оси $r = 0$; другими словами, нужна токнесущая проволока в центре пучка. Радиус такой проволоки должен быть мал по сравнению с r_0 , так как данное решение теряет силу внутри проволоки. Эксперименты с релятивистскими пучками в таких условиях не проводились, хотя в некоторых плазменных экспериментах [19] использовались внутренние твердые проводники.

Возможна, однако, другая интерпретация [20] при $\eta > 1$. Если пучок строго трубчатый и если среда, которую он проходит, ионизована (и поэтому является проводящей) только вблизи оси, то обратный ток может протекать только вдоль оси. Нет причин ожидать протекания обратного тока в равновесном состоянии, так как в эксперименте его возникновение связано с переменными во времени эффектами, индуцирующими поле E_z в головной части пучка (во введении обсуждались приближения, необходимые для наличия обратного тока при равновесии «тонкого» пучка). Нет еще пока и экспериментального доказательства локализации обратного тока вблизи оси. Тем не менее соблазнительно именно таким образом интерпретировать ток I_0 , так как частичный или полный ток нейтрализации является неотъемлемой характеристикой многих экспериментов с пучками [21, 22].

Как указывалось выше, предел Лауссона — Альфвена предсказывает максимальный ток пучка порядка

$$I_A = \frac{mc^3}{e} \beta_z \gamma.$$

Величина β_z уже найдена: $\beta_z = 1/[n(r)c] \int d^3p v_z f_0 = \alpha/a$; таким же образом можно найти γ :

$$\gamma = \frac{1}{n(r)mc} \int d^3p (p^2 + m^2c^2)^{1/2} f_0 = 4\pi (mc)^2 \left\{ \frac{a^2 + \alpha^2}{(a^2 - \alpha^2)^2} \times \right. \\ \left. \times K_2 [mc(a^2 - \alpha^2)^{1/2}] - \frac{mca^2}{(a^2 - \alpha^2)^{1/2}} K'_2 [mc(a^2 - \alpha^2)^{1/2}] \right\}. \quad (1.31)$$

В ультрарелятивистском пределе выражение для γ принимает более простой вид

$$\gamma \approx (mca)^{-1} \frac{3a^2 + \alpha^2}{a^2 - \alpha^2} \gg 1. \quad (1.32)$$

Следовательно,

$$I_A \approx \frac{c^2}{e} \frac{\alpha}{a^2} \frac{3a^2 + \alpha^2}{a^2 - \alpha^2}.$$

Из сравнения с выражением (1.30) видно, что

$$\frac{I_B}{I_A} = 2\eta \left[\left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 + f - 1 \right]^{-1} \frac{a^2 - \alpha^2}{3a^2 + \alpha^2}. \quad (1.33)$$

Как видно из (1.33), ток I_B может превысить любое произвольное значение; для этого надо просто сделать величину η достаточно большой. Второй член выражения (1.33) может быть большим, если $f \approx 1 - \alpha^2/a^2$. Но, как отмечалось во введении, в экспериментальных условиях величина f возрастает по направлению пучка по всей его длине. Нельзя ожидать, чтобы рассматриваемая модель, в которой величина тока сильно зависит от степени нейтрализации пучка, привела к хорошему согласию с экспериментами.

Для данной модели интересно рассчитать энергию, связанную с движением частиц и магнитными и электрическими полями. Кинетическая энергия на единицу длины пучка в ультрарелятивистском пределе с учетом выражения (1.32) равна

$$W_K = N(\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{4\eta c^2}{e^2} \frac{1}{\alpha^2 + a^2(f-1)} \frac{a^2 + \alpha^2}{a^2 - \alpha^2}.$$

Плотность магнитной энергии равна $B^2/8\pi$. Она меняется как r^{-2} при больших r и так же при малых значениях r , исключая случай $\eta = 1$. Следовательно, интеграл

$$2\pi \int r dr \frac{B^2}{8\pi}$$

расходится при обоих пределах. Этого можно было ожидать, поскольку форма поля B при $r \rightarrow \infty$ подобна форме поля от прямой проволоки, по которой течет ток $I_{\text{полн}}$, а при $r \rightarrow 0$ поле полностью определяется граничным током I_0 . Считая энергию магнитного поля на единицу длины W_B конечной величиной, проведем обрезание при $r = r_1$ и $r = r_2 > r_1$. Тогда

$$W_B = \frac{1}{4} \int_{r_1}^{r_2} r dr B^2 = \frac{c}{e^2} \frac{\alpha^2}{[\alpha^2 + (f-1)a^2]^2} \times \\ \times \left\{ (1 + \eta^2) \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + 2 \ln \frac{\rho_2^\eta + \rho_2^{-\eta}}{\rho_1^\eta + \rho_1^{-\eta}} - \eta \left[\frac{\rho_2^\eta - \rho_2^{-\eta}}{\rho_2^\eta + \rho_2^{-\eta}} - \frac{\rho_1^\eta - \rho_1^{-\eta}}{\rho_1^\eta + \rho_1^{-\eta}} \right] \right\},$$

где $\rho_2 = r_2/r_0$, $\rho_1 = r_1/r_0$. Если $\rho_2 \gg 1 \gg \rho_1$, то

$$W_B \approx \frac{c^2}{e^2} \frac{\alpha^2}{[\alpha^2 + (f-1)\alpha^2]^2} \left[(1 + \eta^2) \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + 2\eta \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \right].$$

Проводя аналогичные вычисления для энергии электрического поля на единицу длины, находим

$$W_E = \frac{1}{4} \int_{r_1}^{r_2} E^2 r dr = \frac{(1-f)^2 \alpha^2}{\alpha^2 W_B}.$$

Для нейтрализованного пучка с током I_0 , протекающим по небольшому проводящему каналу или проволоке, $\rho_1 \approx 1/10$, и ограниченного цилиндром ($\rho_2 \approx 5$) при $\eta > 1$

$$\frac{W_B}{W_K} \sim \eta \frac{\alpha^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \alpha^2}.$$

В явно выраженном трубчатом пучке ($\eta \gg 1$) большая часть энергии сосредоточена в магнитных полях. Однако если $\eta > 1$, то отношение W_B/W_K не чувствительно к местоположению внутренней и внешней границ. Этим данная модель сильно отличается от модели двойной дельта-функции (разд. 1.2.1), в которой изменение радиуса на 10% удваивает энергию поля.

Нетрудно убедиться, что электроны пучка движутся по орбитам, в которых даже при $f = 1$ связаны все три степени свободы. Следовательно, безнадежно трудно проводить анализ устойчивости по линеаризованным уравнениям Власова — Максвелла посредством интегрирования вдоль невозмущенных орбит. Однако, поскольку f_0 не зависит от P_θ , не возникнет трудностей, если постулировать наличие однородного внешнего поля B_{z0} , определяемого уравнением

$$A_\theta = \frac{B_{z0} r}{2}. \quad (1.34)$$

Если $B_{z0} \gg B_\theta$, то появляется практическая возможность интегрирования по невозмущенным орбитам.

1.1.2. Родственные модели. Если предположить, что заряд нейтрализован с самого начала процесса, то $\phi = 0$. Тогда необходимо решить только одно уравнение (B.1). В этом случае энергия уже не зависит от r (так как $\phi = 0$):

$$H = (p^2 + m^2 c^2)^{1/2} c.$$

Поэтому можно допустить также более общую зависимость функции f_0 от H :

$$f_0 = K(H) \exp(\alpha P_z). \quad (1.35)$$

Единственным ограничением на $K(H)$ является условие $K(H) > 0$, и ток определяется посредством сходящегося интеграла:

$$j(r) = -ec \int d^3p v_z K(H) \exp(\alpha P_z) = -\frac{4\pi ec}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{ae}{c} A_z\right) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{p dp}{(p^2 + m^2 c^2)^{1/2}} [\alpha p \operatorname{ch}(\alpha p) - \operatorname{sh}(\alpha p)] K(H) < \infty.$$

Рассмотрим теперь несколько возможных моделей такого типа.

а) *Максвелловское распределение с весовым множителем.* Пусть

$$K(H) = \bar{K} \left(\frac{H}{E_0}\right)^\mu \exp\left(-\frac{aH}{c}\right).$$

При $\mu = 0$ выражение (1.35) сводится к выражению (1.1). Если μ — положительное целое число, то

$$j(r) = -\bar{K} e c \alpha \exp\left(-\frac{e}{c} a A_z\right) \left(-\frac{c}{E_0}\right)^\mu \frac{\partial^\mu Q}{\partial a^\mu},$$

где Q определяется выражением (1.4); $n(r)$ находят аналогичным образом.

Распределения по радиусу тока, плотности частиц и магнитного поля точно такие же, как в разд. 1.1.1; меняется только нормировка плотности. Поэтому

$$n(r) = \frac{c}{4\pi e^2 \alpha^2} \frac{(\partial/\partial a)^\mu (aQ)}{(\partial/\partial a)^\mu Q} \frac{8\eta^2}{r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r}\right)^\eta \right]^{-2}, \\ j(r) = \frac{-c^2}{4\pi e \alpha} \frac{8\eta^2}{r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r}\right)^\eta \right]^{-2}, \\ B_\theta(r) = \frac{-2c}{e a r} \left[1 + \eta \frac{(r/r_0)^\eta - (r_0/r)^\eta}{(r/r_0)^\eta + (r_0/r)^\eta} \right].$$

Как и раньше, если $\eta \neq 1$, необходим ток I_0 вдоль оси:

$$I_0 = \frac{(\eta - 1) c^2}{\alpha e}.$$

б) *Моноэнергетическое распределение.* Положим, как и в работе [42], что $K(H) = \bar{K} \delta(H - E_0)$, где $E_0 > mc^2$. Теперь у всех электронов пучка одинаковая энергия. Записав тогда, что $p_0 = (E_0^2 - m^2 c^4)^{1/2} / c$, находим

$$j(r) = \frac{-4\pi e \bar{K} \exp[-(e/c) a A_z]}{\alpha^2} [\alpha p_0 \operatorname{ch}(\alpha p_0) - \operatorname{sh}(\alpha p_0)].$$

Когда $p_0 \gg mc$, то

$$j(r) \approx -\frac{2\pi e \bar{K} p_0}{a} \exp\left(\alpha p_0 - \frac{e}{c} \alpha A_z\right).$$

Когда $p_0 \ll mc$, то

$$j(r) \approx -\frac{4\pi}{3} \bar{K} e \alpha p_0^3 \exp\left(-\frac{e}{c} \alpha A_z\right).$$

К каждому из этих случаев можно применить методы, рассмотренные в разд. 1.1.1, и функции $n(r)$, $j(r)$ и $B(r)$ идентичны с уже исследованными.

в) *Полурелятивистское максвелловское распределение.* При расчетах $j(r)$ и $n(r)$ основная трудность при интегрировании заключается в том, что выражение для $j(r)$ содержит «неудобный» член $(p^2 + m^2 c^2)^{-1/2}$. Если ввести этот член в выражение для f_0 и сократить его со знаменателем выражения для v_z , то значительно облегчаются вычисления $j(r)$, но $n(r)$ не может быть выражено в аналитической форме. Такая процедура использовалась Марксом [23] в его модели «релятивистского жесткого ротатора» (см. разд. 2.4). Эта процедура применима также к расчету аксиального тока.

Возьмем функцию распределения f_0 в виде нерелятивистского смещенного максвелловского распределения, умноженного на $(p^2 + m^2 c^2)^{1/2}$:

$$f_0 = \bar{K} (p^2 + m^2 c^2)^{1/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2\chi^2} + \alpha P_z\right).$$

Тогда

$$j(r) = -\bar{K} e c (2\pi)^{1/2} \alpha \chi^5 \exp\left(\frac{1}{2} \alpha^2 \chi^2 - \frac{e}{c} \alpha A_z\right).$$

Этот подход приводит опять к такому уравнению для A_z , которое уже было получено раньше. Решения для $B_\theta(r)$ и $j(r)$ такие же, как (1.23) и (1.26). Как и предполагалось, решение для $n(r)$ не может быть получено в аналитической форме, за исключением предельного ультрарелятивистского случая.

1.1.3. Случай плоской орбиты. Поскольку P_θ является константой движения, то в функцию f_0 можно ввести произвольную зависимость от этой переменной. Вообще это приводит к появлению как азимутального тока j_θ , так и тока j_z . В результате, согласно уравнению (1.7), выражение для P_θ имеет электромагнитный член, и мы вынуждены решать систему связанных уравнений для A_θ , A_z и ϕ . Но если f_0 является гладкой функцией от P_θ и мы предполагаем отсутствие внешнего потенциала A_θ , то решения для j_θ (и поэтому для A_θ) будут равны нулю. Рассмотрим теперь несколько простых примеров, относящихся к распределению Беннета

Пусть все электроны пучка имеют одинаковый канонический угловой импульс \bar{P}_θ , а по остальным направлениям имеется максвелловское распределение, т. е.

$$f_0 = \bar{K} \exp\left[-\frac{a}{c} H + \alpha P_z\right] \delta(P_\theta - \bar{P}_\theta). \quad (1.36)$$

В таком пучке отдельные электроны движутся по спиралям. При $\alpha \rightarrow 0$ спирали вырождаются в окружности с центром на оси пучка. Этот случай обсуждается в гл. 2.

Если $\bar{P}_\theta = 0$, то азимутальный ток j_θ равен нулю. Более того, орбита каждого электрона лежит в плоскости, проходящей через ось пучка. Поэтому эти орбиты существенно более простые, чем в предыдущем случае. Поскольку в уравнении (1.36) имеется экспоненциальная зависимость для A_z и ϕ , можно ожидать, что общее решение уравнений Максвелла окажется такого же вида, как (1.7). В нашем случае, однако, центробежная сила не действует на электроны, поэтому для удержания электронов от разлета достаточно слабого граничного тока I_0 при $r = 0$.

С учетом этих замечаний проинтегрируем уравнение (1.36) и найдем плотности тока и частиц:

$$n(r) = \frac{2\pi\bar{K}e^{-\psi}}{r} \frac{a}{(a^2 - \alpha^2)^{1/2}} \left[\frac{mc}{(a^2 + \alpha^2)^{1/2}} + \frac{1}{a^2 - \alpha^2} \right] \times \\ \times \exp\left[-mc(a^2 - \alpha^2)^{1/2}\right], \quad (1.37)$$

$$j(r) = -\frac{\alpha}{a} ecn(r), \quad (1.38)$$

где по-прежнему $\psi = e/c(\alpha A_z - a\phi)$. Можно найти также выражение для γ , аналогичное (1.31); в ультрарелятивистском пределе

$$\gamma \approx (mca)^{-1} \frac{2a^2 + \alpha^2}{a^2 - \alpha^2}.$$

Подставляя уравнения (1.37) и (1.38) в уравнения Максвелла и предполагая, что ионный фон приводит к коэффициенту нейтрализации f , при котором

$$n_i(r) = fn_e(r),$$

получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{1}{rL} e^{-\psi}, \quad (1.39)$$

где

$$\frac{1}{L} = \bar{K} \frac{8\pi^2 e^2}{c} \frac{\alpha^2 + (f-1)a^2}{(a^2 - \alpha^2)^{1/2}} \left[\frac{mc}{(a^2 - \alpha^2)^{1/2}} + \frac{1}{a^2 - \alpha^2} \right] \times \\ \times \exp\left[-mc^2(a^2 - \alpha^2)^{1/2}\right]. \quad (1.40)$$

Положив $\Phi = \psi - \ln(r/L)$ и $x = \ln r$, мы опять получим уравнение (В.3). Поэтому общее решение уравнения (1.39) равно

$$\psi = \ln \left\{ \frac{r}{8\eta^2 L} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r} \right)^\eta \right] \right\},$$

где η и r_0 — произвольные величины.

Из общего решения видно, что

$$n(r) = \frac{e}{4\pi e^2} \frac{a}{\alpha^2 + (f-1)a^2} \frac{8\eta^2}{r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^\eta + \left(\frac{r_0}{r} \right)^\eta \right]^{-2} \quad (1.41)$$

и

$$j(r) = -ec \left(\frac{\alpha}{a} \right) n(r) \quad (1.42)$$

идентичны с выражениями (1.25) и (1.26). Следовательно, остаются справедливыми выражения (1.29) и (1.30). Однако

$$B_\theta = -\frac{c}{e} \frac{2\alpha}{[\alpha^2 + (f-1)a^2]r} \left[\frac{1}{2} + \eta \frac{(r/r_0)^\eta - (r_0/r)^\eta}{(r/r_0)^\eta + (r_0/r)^\eta} \right] \quad (1.43)$$

и

$$E_r = -\frac{c}{e} \frac{2\alpha(1-f)}{[\alpha^2 + (f-1)a^2]r} \left[\frac{1}{2} + \eta \frac{(r/r_0)^\eta - (r_0/r)^\eta}{(r/r_0)^\eta + (r_0/r)^\eta} \right] \quad (1.44)$$

отличаются от соответствующих выражений (1.23) и (1.24) тем, что внутри квадратных скобок стоит коэффициент $1/2$ вместо 1.

Различие это объясняется особенностью нулевого углового импульса электрона. Из выражений (1.43) и (1.44) следует, что при $\eta \leq 1/2$ радиальная сила, действующая на электрон, всегда направлена к оси $r = 0$. Поэтому каждый электрон пересекает ось. При $\eta > 1/2$ имеются две группы электронов: одна пересекает ось, а другая локализована между минимальным и максимальным радиусами. Легко показать, что вторая группа электронов есть всегда. Пусть $f = 1$, так что $E_r = 0$. Из уравнения (1.43) следует, что $B_\theta = 0$ при $r = r^*$, где

$$r^* = r_0 \left[\frac{2\eta - 1}{2\eta + 1} \right]^{1/2 \eta}.$$

Поэтому на электрон, перемещенный с $r = 0$ на $r = r^*$, не действует сила, и он будет двигаться с постоянной скоростью вдоль z ; если электрон слегка сместить с $r = r^*$, то он будет осциллировать по радиусу относительно r^* между r_1 и r_2 .

Как видно, ток пучка определяется выражением (1.26). Из формулы (1.43) следует, однако, что полный ток равен

$$I_{\text{полн}} = \frac{-\alpha}{\alpha^2 + (f-1)a^2} \frac{(1/2 + \eta)c^2}{e}, \quad (1.45)$$

тогда как при $r = 0$ именно этот ток необходим для удовлетворения граничного условия, а именно:

$$I_0 = \frac{-\alpha}{\alpha^2 + (f-1)\alpha^2} \frac{({}^{1/2} - \eta) c^2}{e}. \quad (1.46)$$

Сравним это с формулой (1.28). Выражение (1.46) равно нулю при $\eta = 1/2$, что соответствует расходимости выражения для плотности частиц при $r = 0$. Это и есть «естественная» равновесная конфигурация, аналогичная решению Беннета при $\eta = 1$, рассмотренному в разд. 1.1.1. Пучок приходит именно к такому равновесному состоянию, если функция f_0 определяется выражением (1.36) при $\bar{P}_\theta = 0$ и нет аксиального граничного тока. Это естественное равновесное состояние по сравнению с рассмотренным в разд. 1.1.1 состоянием имеет бесконечный пик плотности при $r = 0$, так как все электроны пересекают ось. Если электроны имеют обычный тепловой разброс по угловым импульсам, то центробежные силы стягивают электроны и профиль пучка соответствует распределению Беннета.

За указанным исключением данная модель очень похожа на уже исследованные. В частности, можно превысить предел Лаусона — Альфвена, выбрав величину η достаточно большой. Отношение токов I_B и I_A аналогично выражению (1.33) и равно

$$\frac{I_B}{I_A} = 2\eta \left[\left(\frac{\alpha}{a} \right)^2 + f - 1 \right]^{-1} (a^2 - \alpha^2) (2a^2 + \alpha^2)^{-1}.$$

Если $f = 1$, то можно, точно так же как и в предыдущем разделе, взять функцию f_0 с произвольной зависимостью от энергии. Единственный результат, который от этого изменится, — это формула (1.40) для характерной длины L . Выражения (1.41) — (1.44), так же как и граничное условие (1.46), сохраняют свой вид, изменяются только нормировочные множители.

Хотя интересно получить решения равновесного состояния при наличии общей зависимости от P_θ , например

$$f_0 = \bar{K} \exp\left(-\frac{a}{c} H + \alpha P_z - \Lambda^{-2} P_\theta^2\right)$$

или

$$f_0 = \bar{K} \delta(H - E_0) \delta(P_\theta^2 - P_\theta^{-2}) \exp(\alpha P_{\theta z}),$$

решения уравнений поля не могут быть получены в аналитической форме. Можно показать тем не менее, что также и в этих случаях уменьшение плотности тока в центре пучка позволяет превысить ток I_A [24].

1.2. Пучки с резкими границами

1.2.1. Модель двойной дельта-функции. В этой модели, введенной Майлснесом [25] и подробно исследованной Хаммером и Ростокером [3], все электроны имеют одинаковую энергию E_0 и одинаковый канонический импульс \bar{P}_z . Функция распределения

$$f_0 = \bar{K} \delta(H - E_0) \delta(P_z - \bar{P}_z) \quad (1.47)$$

не разделяется на две отдельные части, зависящие от координат и импульсов, и поэтому средняя скорость пучка $\langle v_z \rangle$ зависит от координат. Такое распределение может привести к резким границам цилиндрического пучка электронов. Если пучок распространяется в однородном внешнем продольном поле [уравнение (1.34)], то цилиндр вращается практически как твердое тело вокруг своей оси.

Предположим, что аргумент каждой из дельта-функций имеет одно нулевое значение и

$$\left[\left(\bar{P}_z + \frac{e}{c} A_z \right)^2 + m^2 c^2 \right]^{1/2} c - e\phi < E_0. \quad (1.48)$$

К этому допущению мы вернемся позднее, после нахождения точных решений для ϕ и A_z . Тогда

$$n(r) = \frac{2\pi\bar{K}}{c^2} (E_0 + e\phi), \quad (1.49)$$

$$j(r) = -2\pi\bar{K}e \left(\bar{P}_z + \frac{e}{c} A_z \right). \quad (1.50)$$

Таким образом, уравнения (B.1) и (B.2) расщепляются автоматически, без каких-либо ограничений на степень нейтрализации f . Запишем эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = \frac{8\pi^2 e \bar{K}}{c} \left(\bar{P}_z + \frac{e}{c} A_z \right), \quad (1.51)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{8\pi^2 e \bar{K} (1-f)}{c} (E_0 + e\phi), \quad (1.52)$$

где использовано обычное предположение об ионном фоне: $n_i(r) = f n_e(r)$. Мы ожидаем, что, точно так же как и в разд. 1.1, степень нейтрализации f должна превышать некоторое минимальное значение, иначе электростатическое расталкивание будет преобладать над притяжением. Мы вскоре покажем, однако, что это накладывает на модель только тривиальное ограничение.

Решая уравнение (1.51), запишем $\rho = r/L$ и $\chi = (eA_z/c\bar{P}_z) + 1$, где $L^{-2} = 8\pi^2 e^2 \bar{K}/c^2$. Можно положить $\bar{K} = n_0 c^2 / 2\pi E_0$, где n_0 — масштабный параметр плотности. При этом L — характерная

длина, на которой изменяется A_z , — это обычная бесстолкновительная толщина скин-слоя, равная c/ω_p . Тогда χ удовлетворяет уравнению для модифицированной функции Бесселя нулевого порядка

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\chi}{d\rho} - \chi = 0. \quad (1.53)$$

При решении уравнения (1.52) поступим аналогичным образом и запишем $\chi' = e\phi/E_0 + 1$ и $\rho' = r\sqrt{1-f}/L$. Тогда $\chi'(\rho')$ также удовлетворяет уравнению (1.53), и мы в общем виде имеем

$$\frac{eA_z}{cP_z} + 1 = C_1 I_0\left(\frac{r}{L}\right) + D_1 K_0\left(\frac{r}{L}\right), \quad (1.54)$$

$$\frac{e\phi}{E_0} + 1 = C_2 I_0\left(\frac{r\sqrt{1-f}}{L}\right) + D_2 K_0\left(\frac{r\sqrt{1-f}}{L}\right), \quad (1.55)$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 — произвольные постоянные.

Так как функции $I_0(\rho)$ и $K_0(\rho)$ расходятся при $\rho = \infty$ и $\rho = 0$ соответственно, то выражения (1.54) и (1.55) не всюду удовлетворяют неравенству (1.48). Когда это неравенство не выполняется, то $n(r) = 0 = j(r)$ и уравнение (1.53) заменяется на

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\chi}{d\rho} \right) = 0, \quad (1.56)$$

т. е. $\chi = C' + D' \ln \rho$.

Открывается целый ряд возможностей. Если $f = 1$, то $\phi = \text{const}$, и мы имеем плоский профиль плотности; более того, для всех частиц оказывается одинаковой величина $\gamma = (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}$. Очевидно, что в общем случае плотность $n(r)$ и ток $j(r)$ не пропорциональны друг другу. Действительно, они могут быть пропорциональны только при $f = 0$ (ионы полностью отсутствуют).

Предположим, что $D_1 = 0 = D_2$. Тогда, следуя Хаммеру и Ростокеру [3], запишем $C_1 = 1 = C_2$. Это можно допустить даже в общем случае, так как в выражении для функции f_0 величины C и D появляются только как сомножители величин \bar{P}_z и E_0 :

$$f_0 = \bar{K}\delta \left\{ (p^2 + m^2c^2)^{1/2} c - E_0 \left[C_2 I_0\left(\frac{r}{L} \sqrt{1-f}\right) + D_2 K_0\left(\frac{r}{L} \sqrt{1-f}\right) \right] \right\} \delta \left\{ p_z - \bar{P}_z \left[C_1 I_0\left(\frac{r}{L}\right) + D_1 K_0\left(\frac{r}{L}\right) \right] \right\},$$

и, следовательно, они появляются таким же образом в величинах, являющихся моментами функций $f_0(n(r), j(r), \gamma(r))$, или в комбинациях этих величин. Поэтому общность рассмотрения не нарушается при внесении C_1 в выражение для \bar{P}_z и C_2 в выражение для E_0 и соответствующем переобозначении D_1 и D_2 .

При выбранных таким образом коэффициентах $\phi(r)|_{r=0} = 0 = A_z(r)|_{r=0}$. Тогда если $\gamma(r)|_{r=0}$ обозначить как γ_0 , то найдем, что

$$mc^2\gamma_0 = E_0, \quad \bar{P}_z = m\gamma_0 V_z,$$

где $V_z = v_z(r)|_{r=0}$. Теперь

$$\phi = \frac{mc^2\gamma_0}{e} \left[I_0 \frac{r}{L} \sqrt{1-f} - 1 \right], \quad (1.57)$$

$$A_z = \frac{mcV_z\gamma_0}{e} \left[I_0 \left(\frac{r}{L} \right) - 1 \right]. \quad (1.58)$$

Эти уравнения справедливы внутри области $r \leq a$, где a определяется при подстановке выражений (1.57) и (1.58) в неравенство (1.48):

$$\beta_z^2 \gamma_0^2 I_0^2 \left(\frac{a}{L} \right) + 1 = \gamma_0^2 I_0^2 \left(\frac{a}{L} \sqrt{1-f} \right); \quad (1.59)$$

здесь $\beta_z = V_z/c$. Решения для $r > a$ находятся из условий непрерывности самих решений (и их производной) уравнения (1.56) и уравнений (1.57) и (1.58):

$$\phi = \frac{mc^2\gamma_0}{e} \left[I_0 \left(\frac{a\sqrt{1-f}}{L} \right) - 1 + \frac{a\sqrt{1-f}}{L} I_1 \left(\frac{a\sqrt{1-f}}{L} \right) \ln \frac{r}{a} \right] \quad (1.60)$$

и

$$A_z = \frac{mcV_z\gamma_0}{e} \left[I_0 \left(\frac{a}{L} \right) - 1 + \frac{a}{L} I_1 \left(\frac{a}{L} \right) \ln \frac{r}{a} \right]. \quad (1.61)$$

Следовательно,

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{mc^2\gamma_0\sqrt{1-f}}{eL} I_1 \left(\frac{r\sqrt{1-f}}{L} \right), & r \leq a, \\ -\frac{mc^2\gamma_0\sqrt{1-f}}{eL} I_1 \left(\frac{a\sqrt{1-f}}{L} \right) \frac{a}{r}, & r > a, \end{cases} \quad (1.62)$$

и

$$B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{mcV_z\gamma_0}{eL} I_1 \left(\frac{r}{L} \right), & r \leq a, \\ -\frac{mcV_z\gamma_0}{eL} I_1 \left(\frac{a}{L} \right) \frac{a}{r}, & r > a. \end{cases} \quad (1.63)$$

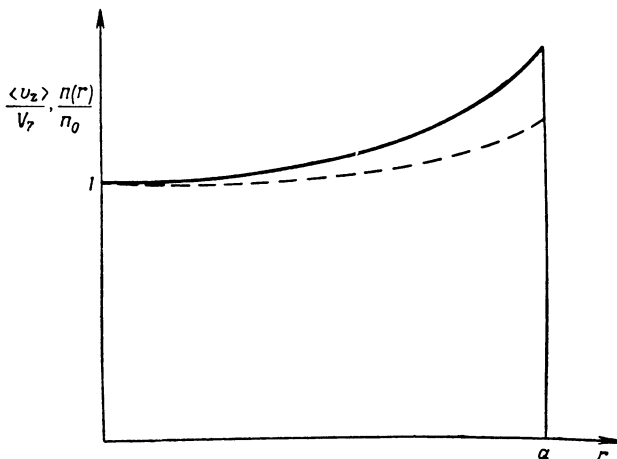
Из уравнений (1.57) и (1.58) и определения γ получаем для $r \leq a$ (фиг. 4)

$$\frac{n(r)}{n_0} = \frac{\gamma(r)}{\gamma_0} = I_0 \left(\frac{r\sqrt{1-f}}{L} \right) \quad (1.64)$$

и

$$\langle v_z(r) \rangle = V_z \frac{I_0(r/L)}{I_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{1-f} \right)}. \quad (1.65)$$

В этой модели заданными параметрами являются γ_0 , β_z и f . Насколько свободны мы в выборе этих параметров? Прежде чем ответить, обратим вначале внимание на то, что уравнение



Фиг. 4. Зависимости скорости (сплошная кривая) и плотности (пунктирная кривая) электронов пучка от r при $f < 1$, иллюстрирующие, как в модели Хаммера и Ростокера [3] возникает трубчатый пучок.

(1.59) не имеет решения при $f = 0$. Действительно, при $f = 0$ мы вынуждены, с одной стороны, положить

$$\frac{1}{\gamma_0^2(1 - \beta_z^2)} = I_0^2 \left(\frac{a}{L} \right) > 1$$

или

$$\gamma_0^2 < \frac{1}{1 - \beta_z^2}.$$

Но, с другой стороны,

$$\gamma_0^2 = \left[1 - \beta_z^2 - \frac{\langle v_{\perp}^2 \rangle}{c^2} \right]^{-1},$$

где $\langle v_{\perp}^2 \rangle$ — средний квадрат поперечной скорости при $r = 0$; это означает, что

$$\gamma_0^2 > \frac{1}{1 - \beta_z^2}. \quad (1.66)$$

Уравнение (1.59) имеет решение при $0 < f \leq 1$. При $f \ll 1$ уравнение (1.59) имеет решение только в том случае, если радиус a очень велик. Это отражает тот факт, что в нескомпенсированном пучке сильно возрастает тенденция к расталкиванию

электронов. Но все равно, как бы ни было мало выбранное значение f , если радиус a достаточно велик, величина тока в пучке вполне достаточна, чтобы обеспечить магнитное удержание.

В экспериментах с пучками ионный фон возникает за счет ионизации первичными электронами, т. е. электронами пучка. При каждом ионизационном столкновении образуется ион и медленный вторичный электрон. Под действием сил электростатического расталкивания вторичные электроны уходят из пучка до тех пор, пока ионы полностью не нейтрализуют пучок ($f = 1$). С этого момента вторичные электроны остаются вблизи пучка, так как весьма трудно представить себе реальный пучок с избытком положительного или отрицательного заряда. Тем не менее интересно посмотреть, как данная модель описывает такой пучок с избыточным зарядом.

При $f > 1$ величина $\sqrt{1-f}$ является мнимой и необходимо использовать соотношение $I_0 [(r/L) \sqrt{1-f}] = J_0 [(r/L) \sqrt{f-1}]$. С учетом этого соотношения решения (1.57) — (1.63) остаются справедливыми, если выполнено условие:

$$\left[\beta_z^2 \gamma_0^2 \left(\frac{r}{L} \right) + 1 \right]^{1/2} \leq \gamma_0 J_0 \left(\frac{r}{L} \sqrt{f-1} \right).$$

Это выражение при равенстве обеих частей, как и раньше, определяет граничный радиус a . Очевидно, что $(a/L) \sqrt{f-1} > x_{01}$, где x_{01} — первый корень функции $J_0(x)$.

Поскольку движение каждого отдельного электрона ограничено $r \leq a$, то скорость v_z стремится к нулю вблизи границы этой области. Следовательно, можно ожидать, что скорость $\langle v_z(r) \rangle$ достигает максимального значения при $r = a$, и это действительно так. Из выражения (1.65) можно записать условие, что данная максимальная скорость меньше c : $\beta_z I_0(a/L) < I_0(a/L) \times \sqrt{1-f}$. Подставляя в это условие значение $I_0(a/L) \sqrt{1-f}$ из (1.59), получаем неравенство, которое всегда выполняется:

$$\beta_z^2 I_0^2 \left(\frac{a}{L} \right) < \beta_z^2 I_0^2 \left(\frac{a}{L} \right) + \frac{1}{\gamma^2}.$$

Таким образом, всякий раз, когда определено значение a (т. е. при любой $f > 0$), в любой точке пучка $v_z < c$.

Аналогичным способом можно показать, что на всех радиусах $0 < \langle v_{\perp}^2 \rangle / c^2 < 1$. Для этого не потребуются какие-либо новые ограничения. Таким образом, единственными ограничениями на исходные параметры являются два условия:

$$\gamma_0^2 > \frac{1}{1 - \beta_z^2}$$

и

$$f > 0.$$

Полный ток, переносимый пучком, находится посредством интегрирования плотности тока $j(r) = -nev_z$. Результат таков:

$$I = -\frac{mc^3}{2e} \gamma_0^2 \beta_z \frac{a}{L} I_1\left(\frac{a}{L}\right). \quad (1.67)$$

Интересно сравнить это выражение с предельным током Альфвена — Лауссона [3]. Так как скорость электронов неодинакова по сечению пучка, то указанное ранее выражение для предельного тока Альфвена

$$I_A = \frac{mc^3}{e} \gamma_0 \beta_z$$

в данном случае неприменимо. Однако, как указывалось выше, значение I_A точно соответствует такой величине тока, при которой радиус вращения электрона в максимальном поле B_θ равен половине радиуса пучка. Подставив выражения (1.63) — (1.65) в равенство

$$\left[\frac{\gamma mc}{c} \frac{v_z}{B_\theta} \right]_{r=a} = \frac{a}{2},$$

найдем, что

$$\frac{a}{2L} I_1\left(\frac{a}{L}\right) = I_0\left(\frac{a}{L}\right). \quad (1.68)$$

«Критический» ток $I_{кр}$ соответствует току пучка с радиусом $a = a_{кр}$, определяемым равенством (1.68). Из выражения (1.67) следует, что величина $I_{кр}$ равна

$$I_{кр} = \frac{-mc^3}{e} \beta_z \gamma_0 I_0\left(\frac{a_{кр}}{L}\right). \quad (1.69)$$

Из отношения выражений (1.69) и (1.67) получаем

$$\frac{I}{I_{кр}} = \frac{a}{2L} \frac{I_1(a/L)}{I_0(a_{кр}/L)}.$$

Таким образом, при $a \gg L$, $a \gg a_{кр}$ возможно равновесное состояние с $I \gg I_{кр}$. Ясно, что электроны в таком пучке не испытывают опасности быть повернутыми полем B_θ , поскольку только небольшая часть орбиты электронов пересекает область максимального поля.

Число электронов на единицу длины пучка равно

$$N = 2\pi \int_0^a r dr n(r) = \frac{mc^2}{2e^2} \gamma_0 \frac{a}{L \sqrt{1-f}} I_1\left(\frac{a\sqrt{1-f}}{L}\right). \quad (1.70)$$

Если $f = 1$, то выражение (1.70) имеет вид: $N = \pi n_0 a^2$. Если $f > 1$, то

$$N = \frac{mc^2 \gamma_0 a}{L \sqrt{f-1} 2e^2} J_1\left(\frac{a}{L} \sqrt{f-1}\right).$$

Найдем отношение v/γ из выражения (1.70), вычислив γ при $r = a$:

$$\frac{v}{\gamma} = \frac{1}{2} \frac{a}{L\sqrt{1-f}} I_1 \left(\frac{a}{L} \sqrt{1-f} \right) / I_0 \left(\frac{a}{L} \sqrt{1-f} \right).$$

Таким образом, большие значения a/L означают как большие величины v/γ , так и большие токи

Как показали Хаммер и Ростокер [3], для большинства экспериментальных ситуаций разумно выбирать $f = 1$. Они отметили также, что $\beta_{\perp}^2 \gg \beta_z^2$ (β_{\perp} — поперечная скорость электрона при $r = 0$), когда $I \gg I_A$. Преобладающим является поперечное движение, но ток еще может превышать I_A . Точно такая же ситуация рассматривалась в разд. 1.1, где выбор функции f_0 предполагал, что движение отдельного электрона является в основном поперечным.

В случае $I \ll I_A$ (низкая плотность, $a \ll L$) пучок является однородным с радиусом a . Такое решение впервые было получено Мейлссесом [25] и в нерелятивистском случае Лонгмайром [26]. Тогда n , γ и $\langle v_z \rangle$ не зависят от радиуса вплоть до $r = a$ и

$$B_0 = \frac{2\pi v_z n e}{c} r.$$

Как упоминалось во введении, это приводит к максимальному току

$$I \approx \frac{m\gamma v_{\perp}^2 c^2}{4ev_z}.$$

Итак, малоскоростной пучок может нести произвольно большой ток. (Конечно, энергия в таком пучке совсем небольшая и поэтому такие пучки не представляют большого интереса.)

Хаммер и Ростокер детально рассмотрели орбиты частиц в равновесном состоянии. Они показали, что в их трубчатой модели пучка большая часть энергии содержится в движении частиц, а не в магнитном и электрическом полях, и поэтому такая модель пучка более эффективна по сравнению с однородным пучком. Проводящий цилиндр, в который помещен пучок, препятствует развитию неустойчивости типа перетяжка, так как при сжатии пучка должна увеличиваться доля энергии, содержащаяся в полях; эта тенденция усиливается с ростом тока пучка.

Возвращаясь к общему решению уравнений (1.54) и (1.55), отметим, что коэффициенты D_1 и D_2 могут принимать ненулевые значения. Проведенный только что анализ применим также и к этой более общей модели, но алгебраические преобразования являются значительно более сложными. Единственно важ-

ный новый физический результат заключается в том, что в некоторых случаях, подобно тому как в разд. 1.1, для существования равновесного состояния необходим граничный ток и линейный заряд. Это связано с тем, что выражения для полей B_θ и E_r расходятся на оси как $1/r$; граничный ток и заряд необходимы, чтобы удерживать пучок при его отклонении от оси или стягивать его в более тесное образование, чем естественная равновесная конфигурация при $D_1 = D_2 = 0$.

Общее решение может представить интерес при описании специфической экспериментальной ситуации. С иллюстративной целью ограничимся рассмотрением простого примера.

Пусть $C_1 = 0 = C_2$ и $D_1 = 1 = D_2 K_0(b/L) \sqrt{1-f}$, где $K_0(b/L) = 1$. Если при этом $f \rightarrow 1$, то

$$\phi(r) = 0,$$

$$A_z(r) = \begin{cases} \frac{mcV_z\gamma_0}{e} \left[K_0\left(\frac{a}{L}\right) - 1 - \left(\frac{a}{L}\right) K_1\left(\frac{a}{L}\right) \ln \frac{r}{a} \right], & r < a, \\ \frac{mcV_z\gamma_0}{e} \left[K_0\left(\frac{r}{L}\right) - 1 \right], & r \geq a, \end{cases}$$

где, как и ранее, $E_0 = mc^2\gamma_0$, $P_z = mV_z\gamma_0$. Первое выражение для A_z получено из условия непрерывности самого решения и его производной в вакуумной области при $r \geq a$, а величина a определяется из условия равенства правой и левой частей неравенства (1.48):

$$\gamma_0^2 \beta_z^2 K_0^2\left(\frac{a}{L}\right) + 1 = \gamma_0^2. \quad (1.71)$$

Предположим, что $b > a$. Тогда $A_z = 0$ при $r = b$; следовательно, $v_z = V_z$. Записав по-прежнему $\beta_z = V_z/c$, получим $\gamma_0^2 > (1 - \beta_z^2)^{-1}$; это действительно так, поскольку $K_0(a/L) > 1$ (функция K_0 уменьшается монотонно).

Магнитное поле пучка равно

$$B_\theta = \begin{cases} \frac{mcV_z\gamma_0}{eL} K_1\left(\frac{a}{L}\right) \frac{a}{r}, & r < a, \\ \frac{mcV_z\gamma_0}{eL} K_1\left(\frac{r}{L}\right), & r \geq a. \end{cases} \quad (1.72)$$

Конечно, $E_r = 0$. Также и для $r < a$, $n(r) = 0 = v_z(r)$. Для $r \geq a$, $n(r) = n_0$, $\gamma(r) = \gamma_0$ и

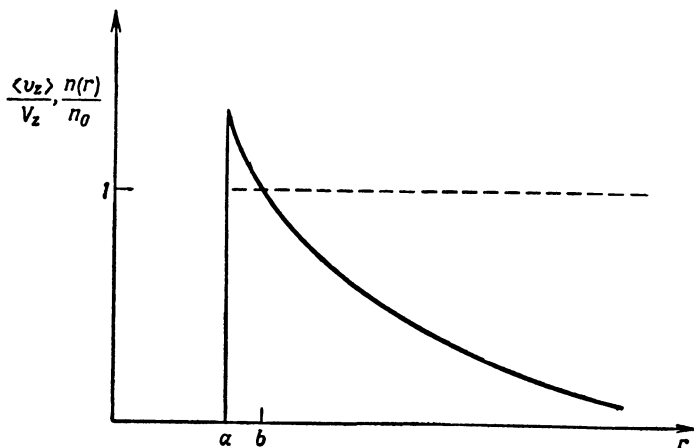
$$v_z = V_z K_0\left(\frac{r}{L}\right) \quad (1.73)$$

(фиг. 5). Таким образом, должно соблюдаться условие $\beta_z K_0(a/L) < 1$. Как видно из выражения (1.71), это действи-

тельно имеет место. Плотность тока при $r \geq a$ равна $j(r) = -n_0 e v_z$. Интегрируя это выражение, получаем значение полного тока

$$I = -\frac{mc^3}{2e} \beta_z \gamma_0 \frac{a}{L} K_1\left(\frac{a}{L}\right).$$

Полное число электронов бесконечно, так как при $r \geq a$ плотность $n(r)$ является постоянной величиной. Однако мы можем ограничить пучок некоторым радиусом $r = r_{\text{макс}} \gg a$, и при этом свойства пучка мало изменятся, поскольку при больших r



Фиг. 5. Зависимости скорости (сплошная кривая) и плотности (пунктир) электронов пучка от r при $f = 1$, иллюстрирующие влияние обратного осевого тока на расталкивающую силу в модели двойной дельта-функции.

электроны движутся в основном, как следует из (1.73), в поперечном направлении. Тогда

$$N \approx n_0 \pi r_{\text{макс}}^2.$$

Так как электроны, находящиеся на радиусах $r \gg a$, дают небольшой вклад в полный ток, то в этой модели точная формула предельного тока Альфвена — Лауссона имеет вид

$$I_A = \frac{mc^3}{e} \bar{\beta}_z \gamma_0,$$

где $\bar{\beta}_z < \beta_z$. Следовательно, отношение I к I_A равно

$$\frac{I}{I_A} = \frac{\bar{\beta}_z}{\beta_z} \frac{a}{L} K_1\left(\frac{a}{L}\right).$$

Как и раньше, ток может превышать I_A .

Возвращаясь к выражению (1.72) для B_0 , отметим, что оно не определено при малых r . Чтобы избежать этого противоречия, мы вынуждены постулировать наличие на оси тока I_0 , равного

$$I_0 = \frac{mc^3}{2e} \beta_z \gamma_0 \left(\frac{a}{L} \right) K_1 \left(\frac{a}{L} \right).$$

Этот ток равен току пучка, но направлен в противоположную сторону. Обратный ток I_0 таким образом изменяет характер расталкивающей силы, что она теперь удерживает электроны пучка, удаленные от оси по крайней мере на расстояние a .

Равновесное состояние, рассмотренное в данном разделе, и обобщенная модель Беннета из разд. 1.1, по-видимому, наиболее успешно и подробно исследовались теоретически. Модель Хаммера и Ростокера имеет преимущество перед моноэнергетической моделью и моделью с ограниченными конечными радиусами; в частности, она соответствует таким условиям, в том числе и экспериментальным ситуациям, когда пучок почти заполняет свой цилиндрический канал и масштаб времени таков, что в первоначальном моноэнергетическом пучке энергия частиц не успевает хаотизироваться.

1.2.2. Полурелятивистский однородный пучок. Мы можем повторить вывод основных формул предыдущей модели в более ясной форме, сделав ряд упрощающих предположений [25]. Полученное решение будет соответствовать предельному случаю точного решения при малом значении отношения v/γ . Удобно начать с уравнений движения отдельного электрона:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m\gamma \frac{dx}{dt} \right) &= -e \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt} \left(m\gamma \frac{dy}{dt} \right) &= -e \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{d}{dt} \left(m\gamma \frac{dz}{dt} \right) &= \frac{e}{c} \frac{d}{dt} A_z, \end{aligned} \quad (1.74)$$

где $U = -e(\phi - \beta_z A_z)$. Предположим, что для всех электронов $\gamma = \gamma_0$, так что $d\gamma/dt = 0$, и, объединяя первые два уравнения системы (1.74), получаем

$$W = \frac{1}{2} m\gamma_0 v_{\perp}^2 + U = \text{const}, \quad (1.75)$$

где $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$. После интегрирования третьего уравнения имеем

$$P_z = m\gamma_0 \frac{dz}{dt} - \frac{e}{c} A_z = \text{const}.$$

Возьмем $m\gamma_0 dz/dt \gg (e/c)A_z$, при этом v_z является приближенной константой движения. Тогда мы можем выбрать функцию распределения f_0 вида

$$f_0 = \bar{K} \delta(W - W_0) \delta(v_z - V_z). \quad (1.76)$$

Здесь функция f_0 нормирована на $\int d^3v f_0 = n(r)$. Дополнительным приближением является отсутствие обрезания при $|v| = c$.

Взяв моменты функции распределения, найдем, что снаружи некоторого предельного радиуса $r = a$, $v_z = V_z$ и $n(r) = 2\pi\bar{K}/mr_0$. Радиус пучка a определяется при подстановке $v_{\perp} = 0$ в выражение (1.75); если $r > a$, то нет такого значения v_{\perp} , при котором аргумент первой дельта-функции в уравнении (1.76) равен нулю, и поэтому $n(r) = 0$.

Уравнения для ϕ и A_z можно объединить тем же методом, который позволил ввести в рассмотрение функцию ψ в разд. 1.1. Тогда для $r < a$ имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi n e (1 - f) = \frac{8\pi^2 \bar{K} e (1 - f)}{m\gamma_0}$$

и

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\frac{4\pi j}{c} = \frac{8\pi^2 \bar{K} e \beta_z}{m\gamma_0}.$$

Объединяя эти два выражения, имеем при $r \leq a$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{8\pi^2 \bar{K} e^2}{m\gamma_0} [f - 1 + \beta_z^2],$$

в то время как при $r > a$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = 0.$$

Решения имеют вид

$$U = \begin{cases} W_0 \frac{r^2}{a^2}, & r \leq a, \\ W_0 \left[1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right], & r > a, \end{cases}$$

где величина a теперь определена как

$$a^{-2} = \frac{2\pi^2 e^2 \bar{K}}{m\gamma_0 W_0} [f - 1 + \beta_z^2].$$

Следовательно,

$$B_{\theta} = \begin{cases} -\frac{4\pi^2 \bar{K} e \beta_z}{m\gamma_0} r, & r \leq a, \\ -\frac{4\pi^2 \bar{K} e \beta_z}{m\gamma_0} \frac{a^2}{r}, & r > a, \end{cases}$$

и

$$E_r = B_0(1 - f)/\beta_z.$$

Приближение $m\gamma_0 V_z \gg (e/c) A_z$ означает, что

$$\gamma_0(f - 1 + \beta_z^2) \gg \frac{W_0}{mc^2}. \quad (1.77)$$

Приближение $W = \text{const}$ означает, что

$$\frac{\gamma_0 v_{\perp}^2}{c^2} \ll 2$$

или

$$\gamma_0 \gg \frac{W_0}{mc^2}. \quad (1.78)$$

Очевидно, что выражение (1.77) является более точным условием, чем (1.78).

Таким образом, электроны движутся почти исключительно в направлении оси z . Их орбиты только слегка возмущены собственным полем пучка. Поэтому не удивительно, что отношение тока пучка к току Альфвена мало [в соответствии с (1.78)] и равно

$$\frac{I}{I_A} = - \frac{W_0 V_z / e (f - 1 + \beta_z^2)}{mc^3 \beta_z \gamma_0 / e} = \frac{-W_0}{mc^2 \gamma_0}.$$

Все формулы для данной модели вытекают из предельного случая $a/L \ll 1$ для результатов предыдущего раздела. Достоинство данной модели — в ее простоте и (поскольку орбиты являются синусоидальными) в удобстве использования при расчетах устойчивости.

2. МОДЕЛИ АЗИМУТАЛЬНОГО ТОКА

Астрон — наименование экспериментального термоядерного устройства, которое интенсивно исследуется в Лоуренсовской радиационной лаборатории (Ливермор, Калифорния)¹⁾. Отличительная особенность данного устройства — цилиндр релятивистских электронов, вращающийся в магнитном поле ловушечной геометрии. Именно в этом состоит отличие данного устройства от других систем удержания плазмы, в которых внутренние токи удерживают нагретую плазму. Соленоид релятивистских электронов, вращающийся во внешнем поле B_z , изменяет направление внешнего поля, в результате чего вокруг небольшого объема образуются замкнутые магнитные силовые линии. Именно в этой области возможно удержание плазмы за

¹⁾ В настоящее время эти работы прекращены. — *Прим. ред.*

счет гидромагнитной устойчивости конфигурации с минимумом среднего значения B . Захваченная плазма нагревается также релятивистскими электронами посредством столкновений и, возможно, двухпотоковой неустойчивостью. Исторически сложилось так, что основное внимание уделяется расчетам равновесных состояний самих релятивистских электронов и глубине образованной ими магнитной ямы. Модели, отражающие истинную экспериментальную ситуацию, требуют, по-видимому, численного решения, за исключением некоторых частных случаев. Мы в основном рассмотрим аналитические модели и только в конце коротко укажем характерные особенности численных расчетов, сделанных в последнее время.

В данном случае ток течет в направлении θ и соответствующий компонент уравнения Максвелла равен

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\theta) \right] = - \frac{4\pi}{c} j_\theta(r). \quad (2.1)$$

Естественно попытаться обобщить рассмотренную выше, в гл. 1, модель на азимутальные токи, взяв функцию распределения f_0 вида

$$f_0 = \bar{K} \exp \left[- \frac{a}{c} H + \beta P_\theta \right].$$

Это приводит к повсеместной замене α на βr . Ограничение $a > |\alpha|$ переходит в $a > |\beta| r$, которое, конечно, неосуществимо для очень больших r . Нельзя постулировать, что функция f_0 равна нулю для r , превышающих некоторое критическое значение, так как f_0 не должна быть явной функцией от r . Поскольку радиус не является константой движения, обойти эту трудность не представляется возможным. По этой причине неосуществима попытка использовать результаты разд. 1.1.2 для азимутальных токов.

2.1. Моноэнергетическое распределение в отсутствие осевой симметрии

Попытаемся приспособить модель, рассмотренную в разд. 1.1.2, п. б, к случаю азимутального тока. Вместо выражения (1.35) запишем

$$f_0 = \bar{K} \delta(H - E) e^{\beta P_\theta}. \quad (2.2)$$

Здесь $f = 1$ и $\phi = 0$. Уравнение для $j_\theta(r)$ идентично соответствующему уравнению из разд. 1.1.2, п. б, если мы проведем следующую замену:

$$\begin{aligned} A_z &\rightarrow A_\theta, \\ \alpha &\rightarrow \beta r. \end{aligned}$$

Поэтому

$$j_{\theta}(r) = -2\pi e \bar{K} \exp\left(-\frac{e}{c} \beta r A_{\theta}\right) \times \\ \times \left\{ \frac{mc\gamma}{\beta r} [e^{\beta r mc\gamma} + e^{-\beta r mc\gamma}] - \frac{1}{(\beta r)^2} [e^{\beta r mc\gamma} - e^{-\beta r mc\gamma}] \right\}.$$

Если это выражение подставить в правую часть уравнения (2.1), то результирующее дифференциальное уравнение нельзя решить даже в предельном случае $mc\beta r\gamma \gg 1$. Однако в противоположном предельном случае оно идентично уравнению (1.3), если провести следующие преобразования:

$$\Phi = \frac{e}{c} \beta r A_{\theta}$$

и

$$x = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2,$$

где

$$\lambda^{-4} = \frac{4\pi^2}{3} \bar{K} \left(\frac{e\beta}{c}\right)^2 \left(\frac{E_0}{c}\right)^3.$$

Еще раз обращаясь за помощью к уравнению (1.4), получаем в аналитическом виде выражения для вектора потенциала поля и плотности тока:

$$r A_{\theta} = -\frac{c}{\beta e} \ln \left\{ \frac{\text{ch}^2 \left[\eta \lambda^{-2} (r^2 - r_0^2) \right]}{2\eta^2} \right\}, \\ B_z = \frac{4c\eta}{\lambda^2 \beta e} \text{th} \left[\eta \left(\frac{r^2 - r_0^2}{\lambda^2} \right) \right], \\ j_{\theta}(r) = \frac{8\pi}{3} \eta^2 \bar{K} e \left(\frac{E_0}{c}\right)^3 \beta r \text{sh}^2 \left[\eta \frac{r^2 - r_0^2}{\lambda^2} \right].$$

Так как \bar{K} и η входят в измеряемые величины только в виде произведения $\bar{K}\eta^2$, то ясно, что без потери общности можно считать $\eta = 1$. Решение теряет силу при $r \gg (mc\beta\gamma)^{-1}$, в этом случае должно использоваться точное выражение для j_{θ} . Но если $\lambda \ll r_0 \ll (mc\beta\gamma)^{-1}$, то для таких значений r величина $j_{\theta}(r)$ пренебрежимо мала и ошибка ничтожно мала.

2.2. Модель Хекротта—Нейла

Другой подход к данной проблеме [27] заключается в выборе желаемой формы плотности тока j_{θ} и восстановления расчетным путем функции распределения. В данном случае P_{θ} и P являются константами движения, так что любая функция от P_{θ} и P будет «законной» функцией распределения f_0 . Хекротт и Нейл выбрали f_0 вида

$$f_0(P, P_{\theta}) = \phi(P) \delta(P_{\theta} - P_0),$$

где функция $\phi(P)$ должна быть впоследствии определена. При соответствующей нормировке полное число частиц $N(z)$ на единицу длины вдоль оси z равно

$$N(z) = \int \phi(P) dP_z d\theta.$$

Авторы рассмотрели тонкий E -слой радиусом R , в котором течет ток

$$j_\theta(z) = -\frac{e}{2\pi R} \int \frac{P_\theta}{m} \phi(P) dP_z d\theta,$$

где m — масса частицы в релятивистском пределе, приближенно равная P/c , и кинетический импульс P_θ равен

$$P_\theta = \frac{P_0}{R} + \frac{e}{c} (A_0 + A_\theta).$$

Так как A_0 — вектор-потенциал однородного внешнего поля B_0 , то $A_0 = -B_0 R/2$. Проведем замену переменных и получим

$$j_\theta(z) = -\frac{2e\pi c}{R} \int_{P_\theta}^{P_m} \frac{\phi(P) dP}{\sqrt{P^2 - P_\theta^2}}, \quad (2.3)$$

где P_m — максимально возможное значение P и P_θ является функцией z , поскольку A_θ зависит от z . В особой точке z все электроны независимо от их полного импульса P имеют одинаковые P_θ . Электрон колеблется вдоль оси z и амплитуда колебаний определяется величиной P . Если $P = P_m$, то только тогда электрон сможет достичь конца E -слоя при $z = \pm l/2$. Используем это обстоятельство для нахождения простой формы углового канонического импульса P_θ .

Возьмем электрон с $P = P_m$. При $z = \pm l/2$ $A = 0$ и

$$P_\theta\left(\pm \frac{l}{2}\right) = \frac{P_0}{R} + \frac{e}{c} A_0 = P_m.$$

Тогда наибольший импульс, который электрон может иметь в поле B_0 , равен

$$P_m = -\frac{eB_0 R}{c}.$$

Таким образом, находим, что

$$P_0 = -\frac{eB_0 R^2}{2c}.$$

Угловой импульс любого электрона определяется как

$$P_\theta = P_m + \frac{eA_\theta}{c}.$$

Выберем некоторую простую форму тока j_θ , например

$$j_\theta = j_0 \cos kz.$$

Легко показать, что

$$A_\theta = \frac{2\pi R}{c} j_\theta,$$

и, таким образом,

$$P_\theta = P_m \left(1 - \frac{2\pi j_0}{cB_0} \cos kz \right).$$

Теперь мы можем вернуться к интегральному уравнению для $\phi(P)$, уравнению (2.3). Найдем, что

$$\int_{P_\theta}^{P_m} \frac{\phi(P) dP}{\sqrt{P^2 - P_\theta^2}} = \frac{c}{4\pi e^2} \left(\frac{P_m - P_\theta}{P_\theta} \right).$$

Это и есть обычная форма интегрального уравнения [26], которое можно записать как

$$G(P_\theta) = \int_1^{P_m/P_\theta} \frac{\phi(P_\theta, v) dv}{\sqrt{v^2 - 1}}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\phi(P) = -\frac{2P}{\pi} \int_1^{P_m/P} \frac{G'(Pw) dw}{\sqrt{w^2 - 1}}.$$

Следовательно,

$$\phi(P) = \frac{c \sqrt{P_m^2 - P^2}}{2\pi^2 e^2 P}.$$

Мы привели данное рассмотрение, чтобы продемонстрировать в основном, как можно решить «обратную задачу» нахождения функции f_0 при выбранной простой форме плотности тока j_θ . Однако эта задача становится значительно более сложной при конечной толщине (по r) E -слоя. Мы отсылаем читателя к статье Хекротта и Нейла [27], в которой подробно рассмотрены как случай тонкого E -слоя, так и некоторые аспекты неустойчивостей в Астроне.

2.3. Однородный холодный азимутальный пучок

Рассмотрим функцию распределения

$$f_0 = \bar{K} \delta(H - E_0) \delta(P_\theta - \bar{P}_\theta). \quad (2.4)$$

Данный случай — вариант модели из разд. 1.2.1, соответствующий азимутальному току. Разброс по энергиям или угловым им-

пульсам в E -слое может стабилизировать многие неустойчивости, развивающиеся в Астроне. Равновесное состояние, которому необходим такой разброс, не годится для детального изучения E -слоя. В области параметров, где не выполняется неравенство

$$\left[\left(\frac{\bar{P}_\theta}{r} + \frac{e}{c} A_\theta \right)^2 + m^2 c^2 \right]^{1/2} c - e\phi < E_0,$$

обе величины $n(r)$ и $j_\theta(r)$ равны нулю. В той области параметров, где имеет место данное неравенство:

$$j_\theta(r) = -\frac{2\pi\bar{K}e}{r} \left(\frac{\bar{P}_\theta}{r} + \frac{e}{c} A_\theta \right)$$

и

$$n(r) = 2\pi\bar{K} \frac{1}{r} \frac{E_0 + e\phi}{c^2}.$$

Уравнение для A_θ записывается как

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\theta) \right] = \frac{8\pi^2 e \bar{K}}{r^2 c} \bar{P}_\theta \left(1 + \frac{e r A_\theta}{c \bar{P}_\theta} \right), \quad (2.5)$$

тогда как для ϕ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{8\pi^2 e \bar{K}}{r c^2} E_0 (1 - f) \left(1 + \frac{e\phi}{E_0} \right). \quad (2.6)$$

Положив $\rho = r/L$, мы можем решить уравнение (2.5), обозначив

$$\chi = \frac{e r A_\theta}{c \bar{P}_\theta} + 1,$$

где

$$\frac{1}{L} = \frac{8\pi^2 e^2 \bar{K}}{c^2}.$$

Получим

$$\frac{d^2 \chi}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d\chi}{d\rho} - \frac{1}{\rho} \chi = 0. \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.7) может быть представлено в модифицированных функциях Бесселя при

$$\chi = \rho [C_1 I_2(2\rho^{1/2}) + C_2 K_2(2\rho^{1/2})],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подобным образом, записав $\chi = (e\phi/E_0) + 1$, $\rho = r/L'$, где $L' = L(1-f)^{-1/2}$, находим, что

$$\frac{d^2 \chi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\chi}{d\rho} - \frac{1}{\rho} \chi = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\chi = D_1 I_0(2\rho^{1/2}) + D_2 K_0(2\rho^{1/2}).$$

Анализ, аналогичный проведенному в разд. 1.2.1, приводит к следующему результату: в области $r < r_{\text{макс}}$ можно получить решения вида

$$j_{\theta}(r) = -\frac{2\pi\bar{K}e\bar{P}_{\theta}}{r^2} \frac{r}{L} I_2 \left[2 \left(\frac{r}{L} \right)^{1/2} \right],$$

$$n(r) = \frac{2\pi\bar{K}E_0}{rc^2} I_0 \left[2 \left(\frac{r}{L'} \right)^{1/2} \right],$$

а при $r > r_{\text{макс}}$ обе величины $j_{\theta}(r)$ и $n(r)$ равны нулю, тогда как

$$B_z(r) = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA_{\theta}) = \frac{c\bar{P}_{\theta}}{eL^2} \left(\frac{L}{r} \right)^{1/2} I_1 \left[2 \left(\frac{r}{L} \right)^{1/2} \right], & r \leq r_{\text{макс}}, \\ \frac{c\bar{P}_{\theta}}{eL^2} \left(\frac{L}{r_{\text{макс}}} \right)^{1/2} I_1 \left[2 \left(\frac{r_{\text{макс}}}{L} \right)^{1/2} \right], & r > r_{\text{макс}}. \end{cases}$$

Величина $r_{\text{макс}}$ определяется из уравнения

$$\left\{ \left[\frac{\bar{P}_{\theta}}{L} I_2 \left[2 \left(\frac{r_{\text{макс}}}{L} \right)^{1/2} \right] \right]^2 + m^2 c^2 \right\}^{1/2} c = E_0 I_0 \left[\frac{2r_{\text{макс}}^{1/2}}{L'^{1/2}} \right],$$

которое всегда имеет решение, если только $E_0 > mc^2$.

Если допустить, что $C_2 \neq 0$, то возможно существование вращающейся оболочки, в которой повсюду, кроме $r_{\text{мин}} < r < r_{\text{макс}}$, $j_{\theta}(r)$ равна нулю. Если $(r_{\text{макс}} - r_{\text{мин}})/L \ll 1$, то с хорошим приближением можно считать $n(r)$ и $j_{\theta}(r)$ постоянными.

Данная модель рассматривалась Марксом [23], который ввел ее при помощи нерелятивистского гамильтониана (положив $f = 1$):

$$H = \frac{p^2}{2m}.$$

Такая модификация не приводит к каким-либо изменениям в уравнении для поля.

Применительно к задачам устойчивости Астроны целесообразно рассмотреть также решения, зависящие от z . Тогда к уравнению поля (2.5) добавляется дополнительный член и оно имеет вид

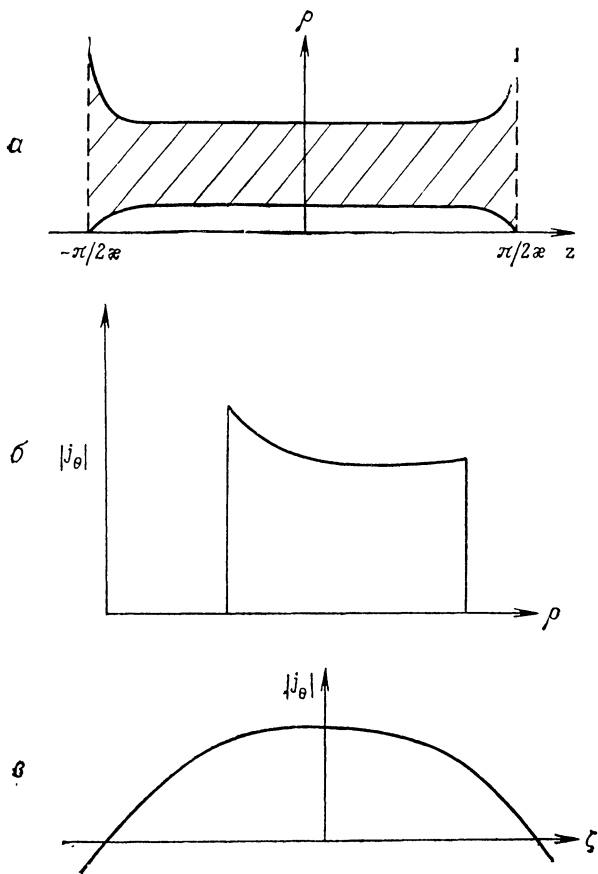
$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial} (rA_{\theta}) \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{8\pi^2 e \bar{K}}{r^2 c} \bar{P}_{\theta} \left(1 + \frac{erA_{\theta}}{c\bar{P}_{\theta}} \right)$$

или

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\rho} \Phi,$$

где $\zeta = z/L$ и $\Phi = (e/c) rA_{\theta} + \bar{P}_{\theta}$. Записав $\Phi = \psi(\rho) \cos \kappa \zeta$, найдем, что

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \left(\kappa^2 + \frac{1}{\rho} \right) \psi = 0.$$



Фиг. 6. *a* — область, внутри которой локализован *E*-слой в азимутальной модели двойной дельта-функции при наличии зависимости от *z*; *б* — зависимость плотности тока от радиуса при $z=0$, *в* — зависимость плотности тока от ζ при фиксированном значении ρ .

Решение можно записать в виде

$$\psi = e^{-\kappa\rho} F\left(\frac{1-\kappa}{2\kappa}, -1, 2\kappa\rho\right),$$

где $F(a, c, \xi)$ — решение уравнения Каммера

$$\xi F'(\xi) + (c - \xi) F'(\xi) - aF(\xi) = 0.$$

В качестве основных решений возьмем функции ϕ_1 и ϕ_2 , определение которых приведено в справочнике [29]:

$$e^{\kappa\rho}\phi_1(\kappa\rho) = y_2 = \xi^2\Phi\left(\frac{1-\kappa}{2\kappa}, 3, 2\kappa\rho\right),$$

$$e^{\kappa\rho}\phi_2(\kappa\rho) = y_5 = \Psi\left(\frac{1-\kappa}{2\kappa}, -1, 2\kappa\rho\right).$$

Область, в которой $j_\theta \neq 0$, определяется из условия

$$\left(\frac{\psi}{r}\right)^2 = \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 - m^2c^2.$$

При фиксированном значении z величина j_θ локализована между минимальным и максимальным радиусами. Эта область радиусов показана на фиг. 6, а и

$$j_\theta(r, z) = \frac{1}{Lr^2} \psi(r, z) = \frac{e^{\kappa\rho}}{L^3} \frac{1}{\rho} [C_1\phi_1(\kappa\rho) + C_2\phi_2(\kappa\rho)] \cos \kappa z.$$

Поскольку $\psi = \text{const}$ на периметре области, указанной на фиг. 6, а, то j_θ обращается в бесконечность при $\rho = 0$, $\xi = \pm\pi/2\kappa$ и $j_\theta = 0$ при $\rho = \infty$, $\xi = \pm\pi/2\kappa$. На фиг. 6, б показана зависимость $j_\theta(r)$ от ρ при фиксированном значении ξ , тогда как на фиг. 6, в — зависимость j_θ от ξ при фиксированном значении ρ .

2.4. Модель Маркса

(«релятивистский жесткий ротатор») [23]

Рассмотрим функцию распределения

$$f_0 = \bar{K} (p^2 + m^2c^2)^{1/2} \exp\left[-\frac{p^2}{2\chi^2} + \frac{m\omega_0 P_\theta}{\chi^2}\right]. \quad (2.8)$$

Предполагается наличие полной нейтрализации. Выражение для плотности $n(r)$ нельзя получить в аналитической форме, за исключением двух предельных случаев: ультрарелятивистского и классического; но ток $j_\theta(r)$ равен

$$j_\theta(r) = -\bar{K} e c m \omega_0 r (2\pi\chi^2)^{1/2} \exp\left[\frac{e}{c} \frac{m\omega_0 r}{\chi^2} A_\theta + \frac{1}{2} \frac{(m\omega_0 r)^2}{\chi^2}\right].$$

Записав

$$\Phi = -\frac{e}{c} A_\theta \frac{m\omega_0 r}{\chi^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega_0 r}{\chi}\right)^2, \\ \chi = r^2\lambda,$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2} (\overline{K} e c t \omega_0)^{1/2} (2\pi\chi^2)^{1/4},$$

получим уравнение (В.3). Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$rA_\theta = -\frac{c\chi^2}{e t \omega_0} \left[\frac{\omega_0^2 m^2 r^2}{2\chi^2} - \ln 2 - B + 2 \ln \operatorname{ch} \left(e^{B/2} \frac{r^2 - r_0^2}{\delta^2} \right) \right],$$

где B и r_0 — произвольные постоянные и δ — среднее геометрическое радиуса Дебая и усредненного радиуса вращения:

$$\delta^{-4} = \frac{8\pi\omega_0^2 e^2 m^2 \overline{K} (2\pi\chi^2)^{1/2}}{c}.$$

Мы можем положить без потери общности $B = 0$, так как во все выражения величина \overline{K} входит совместно со множителем $e^{B/2}$. Тогда

$$j_\theta(r) = -2(2\pi\chi^2)^{1/2} \overline{K} e \omega_0 m c r \operatorname{sh}^2 \frac{r^2 - r_0^2}{2\delta^2},$$

$$B_z = \frac{c\chi^2}{e t \omega_0} \left(\frac{m^2 \omega_0^2}{\chi^2} + \frac{2}{\delta^2} \operatorname{th} \frac{r^2 - r_0^2}{2\delta^2} \right).$$

Маркс применил данную модель к проблеме стабильности в Астроне и рассмотрел физический смысл различных параметров модели. Одно из затруднений, встречающихся в данной модели, заключается в том, что конечное число электронов вращается в противоположном направлении. Это можно увидеть из уравнения (2.8), в котором изменение знака P_θ приводит к ненулевой плотности частиц. В процессе эксперимента все частицы инжектируются в Астрон под одним и тем же углом, так что их импульс P_θ всегда положителен.

2.5. Численная модель Мардера—Вейтцнера

Для получения истинной модели Астроны с зависимостями по обеим осям r и z необходимо проведение численных расчетов, так как соответствующее нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных аналитически не решается. Обычно используемая функция распределения имеет форму «жесткого ротатора»:

$$\hat{f}_0 = n_0 \left(\frac{m}{KT} \right)^{3/2} g_0 \left(\frac{1/2 m v^2 + \omega (m r v_\theta + q \psi)}{KT} \right),$$

где $\psi(r, z) = rA_\theta(r, z)$, n_0 , ω и T — плотность электронов на оси, средняя частота вращения и температура. Точная форма распределения g_0 не критична к виду функции ψ : при любой по-

ложительной монотонной функции ψ распределение остается по существу неизменным. Удобно в качестве функции g_0 взять нерелятивистское максвелловское распределение и определить характерную длину L как

$$L = \left(\frac{KT}{n_0 \omega^2 q^2} \right)^{1/4}.$$

Тогда в безразмерных координатах

$$\rho = \frac{r}{L}, \quad y = \sqrt{2} \frac{z}{L}$$

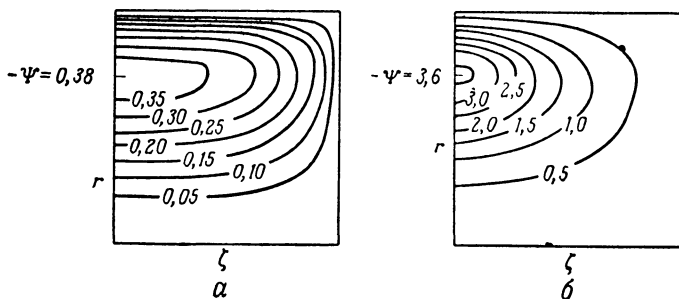
уравнение Максвелла примет вид (ср. уравнение В.3 и уравнения предыдущего раздела)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = e^{-\Psi},$$

где

$$\Psi = \frac{\omega q \psi - (m \omega^2 r^2 / 2)}{KT}.$$

Это уравнение нужно решать численно. Мы ищем решение в замкнутом прямоугольнике со следующими граничными условиями: на трех границах $\Psi = 0$; на четвертой границе ($y = 0$)



Фиг. 7.

считаем $\partial \Psi / \partial y = 0$. Такое решение описывает половину сечения E -слоя. Эти условия не обеспечивают единственности решения. Вследствие того что проблемы связаны с бифуркацией, все решения нельзя получить стандартными численными методами. Мардер и Вейтцнер [30] развили процедуру последовательных приближений, которая приводит к сходящимся решениям. Некоторые результаты этих авторов приведены на фиг. 7. На фиг. 7, а приведена возможная конфигурация E -слоя с глубиной ямы $\Psi = -0,38$. На фиг. 7, б приведено решение с такими же однородными граничными условиями и с более глубокой ямой. Эти два E -слоя отличаются только начальными предположениями, сде-

ланными при вычислениях методом последовательных приближений. Поскольку плотность ведет себя как $e^{-\Psi}$, то в случае решения с более глубокой ямой плотность почти в 30 раз меньше, чем в случае решения с более пологой ямой. Цель работ по программе Астрон — создание именно такой глубокой магнитной ямы, которая сможет удерживать термоядерную плазму (см. примечание на стр. 68).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В лабораторных условиях трудно получать равновесные состояния, и это ограничивает эффективность исследований равновесных состояний релятивистского пучка. До сих пор наибольшая продолжительность экспериментов составляет несколько сот наносекунд, и длина камер, пронизываемых пучками, только изредка превышает несколько метров. Это очень похоже на стрельбу из пушки по воробьям — определяющим является переходной процесс.

Тем не менее весьма полезно знание ряда возможных равновесных состояний для пучка с заданными начальными параметрами. Работы, посвященные неустойчивостям плазмы, почти всегда начинаются с предположения о наличии у плазмы равновесного состояния. Анализ неустойчивости весьма затруднителен при отсутствии таких знаний. Равновесное состояние определяет невозмущенные орбиты частиц, и эти орбиты используются при интегрировании уравнения Власова. (В теории неустойчивости используются и другие приближения, но они менее строгие.) Поэтому традиционная мудрость в этой сфере деятельности требует наличия в качестве отправной точки равновесного состояния.

Приведенные в данной работе равновесные состояния даже с этой точки зрения имеют очевидные недостатки. Нами были сделаны очень наивные предположения относительно процессов ионизации окружающего газа. Мы пренебрегали наличием стенок или проводящих границ, которые должны присутствовать во многих экспериментах. Взяв очень длинный пучок, мы тем самым исключили внешнее электрическое поле и все анодные явления, которые обязаны быть. Игнорируется целая проблема: как именно релятивистский пучок распространяется через газ, ионизируя его по мере прохождения; возможно, что в заметном диапазоне давлений газа скорость пучка меняется скачками, так что несправедливо предположение о независимости равновесного состояния от z .

Хотя многие из приведенных нами равновесных состояний не полностью отражают действительность, тем не менее они позволяют выполнить важные работы по устойчивости. В конце кон-

цов имеется много очевидных источников неустойчивостей в высокоскоростных пучках: сжатие собственным полем, двухпоточковая неустойчивость релятивистских электронов и холодных ионов и поперечная неустойчивость типа шланговой. По этим вопросам имеется очень много работ, которые мы не в состоянии здесь рассмотреть. Лучшими вводными работами являются статьи Будкера [10] Финкельштейна и Стуррока [12] и две статьи Блудмана, Ватсона и Розенблюта [31]. Более современные работы приведены в ссылках [32—41].

Рассмотренные нами модели исчерпывают известный нам перечень точно разрешимых равновесных состояний релятивистского пучка. Ясно показано, что альфвеновский предел тока может быть превышен посредством уменьшения плотности электронов на оси пучка. Ток произвольно большой величины можно транспортировать, формируя должным образом профиль плотности электронов в пучке. Широкий диапазон экспериментальных ограничений можно также охватить выбором соответствующей модели, т. е. пучки с фиксированной энергией или импульсом могут быть представлены различными способами. Во всяком случае, данные математические модели могут отражать достаточно сложные физические условия, и есть надежда, что область применимости этих моделей будет увеличиваться по мере углубления наших знаний о релятивистских пучках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennet W. H., Phys. Rev., **45**, 890 (1934).
2. Alfvén H., Phys. Rev. **55**, 425 (1939).
3. Hamner D., Rostoker N., Phys. Fluids, **13**, 1831 (1970).
4. Graybill S. E., Uglam J., Nablo S. V., Bull. Am. Phys. Soc., **13**, 56 (1968).
5. Yonas G., Spence P., Proc. Tenth Symposium on Electron, Ion and Laser Beam Technology, L. Marton, ed., San Francisco Press, 1969.
6. Andrews M. L., Davitian H. E., Fleischmann H. H., Hammer D. A., Nation J. A., в печати.
7. Rander J., Ecker B., Yonas G., Drickey D. J., Phys. Rev. Lett., **24**, 2321 (1966).
8. Putnam S., Phys. Rev. Lett., **25**, 1129 (1970).
9. Linhart J. G., Proc. Roy. Soc. (London), **A249**, 318 (1959).
10. Будкер Г. И., Атомная энергия, **5**, 673 (1956).
11. Lawson J. D., Journ. Electronics, **3**, 587 (1957); **5**, 146 (1958); Plasma Physics, **1**, 31 (1959).
12. Finkelstein D., Sturrock P. A., «Stability of Relativistic Self-Focusing Streams», Ch. 8, в книге Plasma Physics, ed. Drummond J. E., McGraw-Hill, New York, 1961.
13. Spence P. B., Ecker B., Yonas G., неопубликованная работа.
14. Ames W. F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, 1967.
15. Walker G., Proc. Roy. Soc., **91**, 410 (1915).
16. Pfirsch D., Zs. Naturforsch., **17A**, 861 (1962).

17. *Buneman O.*, «The Bennett Pinch», Ch. 7, в книге *Plasma Physics*, ed. Drummond J. E., McGraw-Hill, New York, 1961.
18. *Benford J.*, частное сообщение.
19. *Furth H. P.*, *Plasma Physics*, АЕА, Vienna, 1965, p. 411.
20. *Benford G.*, *Book D. L.*, *Sudan R. N.*, *Phys. Fluids*, **13**, 2621 (1970).
21. *Spence P. W.*, *Ecker B.*, *Yonas G.*, *Bull. Am. Phys. Soc.*, **14**, 1007 (1969); см. также *Physics International Report RFIR-106-2*.
22. *Roberts T. G.*, *Bennett W. H.*, *Plasma Physics*, **10**, 381 (1968).
23. *Marx K. D.*, *Phys. Fluids*, **11**, 357 (1968).
24. *Sudan R. N.*, частное сообщение.
25. *Mjolsness R. C.*, *Phys. Fluids*, **6**, 1730 (1963).
26. *Longmire C. L.*, *Elementary Plasma Physics*, Interscience, New York, 1963, p. 105.
27. *Heckrotte W.*, *Neil V. K.*, Report UCRL-6942, Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California, 1962.
28. *Richards Paul I.*, *Manual of Mathematical Physics*, Pergamon Press, 378 (1959).
29. *Erdelyi A.*, ed., *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York, 1953, p. 253.
30. *Marder M. B.*, *Weitzner H.*, в печати.
31. *Watson K. M.*, *Bludman S. A.*, *Rosenbluth M. N.*, *Phys. Fluids*, **3**, 741 (1960).
32. *Rosenbluth M. N.*, *Phys. Fluids*, **3**, 932 (1960).
33. *Benford G.*, *Book D. L.*, *Christofilos N. C.*, *Fowler T. K.*, *Neil V. K.*, *Pearlstein L. D.*, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, Novosibirsk, USSR, 1967, Paper CN24-F10.
34. *Yadavalli S. V.*, *Zs. Phys.*, **196**, 255 (1966).
35. *Weinberg S.*, *Journ. Math. Phys.*, **5**, 1371 (1964); *Journ. Math. Phys.*, **8**, 614 (1967).
36. *Prentice A. J. R.*, *Plasma Physics*, **9**, 433 (1967).
37. *Sessler A. M.*, Proc. Fifth International Conference on High Energy Accelerators, CNEN, 1966.
38. *Железняков В. В.*, *Суворов Е. В.*, *ЖЭТФ*, **54**, 627 (1968).
39. *Dorman G.*, *Journ. Plasma Physics*, **2**, 557 (1968); *Journ. Appl. Phys.*, **37**, 2321 (1966).
40. *Fung P. C. W.*, *Plasma Physics*, **11**, 285 (1969); *Can. Journ. Phys.*, **47**, 161 (1969).
41. *Roberts A. S., Jr.*, *Plasma Physics*, **8**, 53 (1966).

Коллективные моды в плазме, связанные с геометрией магнитного поля и распределением скоростей частиц

Б. КОППИ

B. Coppi, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts

ВВЕДЕНИЕ

Основные характерные особенности динамики плазмы обусловлены дальнедействующими силами между взаимодействующими частицами. По этой причине макроскопическая геометрия данной плазменной конфигурации оказывает существенное влияние на характер коллективных эффектов, которые могут развиваться в плазме, и она должна учитываться при микроскопическом, негидродинамическом описании системы. В этом и состоит заметное отличие данной ситуации от случая газа с короткодействующими силами между взаимодействующими частицами, когда геометрия системы не влияет в основном на микроскопические моды колебаний, которые могут существовать в системе [1, 2]. Таким образом, плазма проявляет себя по-разному в зависимости от того, является ли она, например, двумерной или трехмерной системой.

Для классической системы многих частиц мы определим микроскопические моды как такие моды, для описания которых нужно знать одночастичную функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, и макроскопические моды как такие моды, которые описываются обычными моментами функции f , т. е. плотностью, потоком скорости и давлением. В плазме могут спонтанно возбуждаться моды обоих типов, когда плазма не находится в тепловом равновесии и имеется источник, способный отдать свою энергию колебаниям. Поэтому плазму можно рассматривать как систему, распадающуюся от первоначально заданного состояния, которое мы будем называть равновесным состоянием [3]. Различные типы мод, которые возбуждаются в системе при этом распаде, могут либо разрушить первоначальную плазменную конфигурацию [4] (в этом случае эти моды справедливо называют неустойчивыми), либо привести к когерентным колебаниям [5], либо вызвать турбулентное состояние [6, 7] или, скажем в более общем виде, так изменить характер процессов переноса, т. е. диффузию частиц, электропроводность [8, 9] и т. д., что эти процессы

не могут быть более описаны теорией, рассматривающей взаимодействия только между частицами. Такие процессы переноса в плазме обычно называют *аномальными*.

Коллективные моды обычно описываются нелинейными уравнениями; характерная процедура заключается в разделении общей проблемы на следующие задачи:

1. Задача о равновесном состоянии, позволяющая описать начальное состояние, которое не зависит от времени или слабо меняется во времени.

2. Линейная задача (задача устойчивости), в которой анализируются свойства и эволюция во времени малых возмущений равновесного состояния посредством должным образом линеаризованных соответствующих уравнений.

3. Динамическая нелинейная задача, в которой рассматриваются вышеупомянутые возмущения, когда они нарастают во времени и переходят в такой режим, где более неприменимо линейное приближение. Тогда в этой последней задаче возникает вопрос идентификации конечной стадии распада системы, оценки колебаний, которые могут в ней возникать, аномальных процессов переноса и т. п.

В частности, обычно называют «неустойчивой» любую моду, полученную из линейного приближения и зависящую от времени как $\exp(i\omega t)$ при $\text{Im } \omega < 0$. Так поступают независимо от того, какая будет конечная эволюция этой моды, и в большинстве случаев такая мода существенно отличается от действительно неустойчивой, которая разрушает первоначальную конфигурацию, как, например, неустойчивость Рэлея — Тэйлора тяжелой жидкости, удерживаемой слоем легкой жидкости при наличии силы тяжести [1, 2, 4].

Все-таки решение линеаризованной задачи приобретает важное значение, поскольку оно позволяет понять физическую сущность явления и приближенно оценить коллективные эффекты, которые могут возникать в данной плазменной конфигурации. Более того, решение важно еще и потому, что во многих важных случаях система в конечном состоянии «помнит» [5, 10] особенности мод, рассмотренных в линейном приближении, и поэтому можно на основе этих особенностей интерпретировать результаты экспериментов.

1. ДВУМЕРНОЕ НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ

В последние три года имеется существенный прогресс в вопросах анализа и понимания коллективных эффектов [11, 12], возникающих в двумерной равновесной плазменной конфигурации (фиг. 1), в которой кинетическое давление nkT значительно меньше магнитного давления.

Работы в этом направлении стимулированы пышным расцветом «мультипольных экспериментов» [13], для которых характерно наличие внутри плазмы низкого давления проводников с током, возбуждающих двумерную конфигурацию магнитного поля (как это показано на фиг. 1 и 2). Эти эксперименты, в которых магнитное поле и кривизна магнитных силовых линий изменяются в пространстве, показали наличие таких мод, которые не могли быть учтены известной ранее теорией. Вторым стимулом для развития данного направления послужило то обстоятельство, что существенный прогресс, достигнутый в теоретическом понимании одномерной конфигурации плазмы (фиг. 3), сделал возможным интерпретацию соответствующих экспериментов с плазмой в постоянном магнитном поле [5].

Как мы покажем, прогресс в указанном новом направлении приведет к пониманию новых коллективных эффектов, и это обусловлено совместным рассмотрением частиц в пространстве скоростей и макроскопической геометрии системы. Данная проблема заставляет искать решение интегрального уравнения, которое линейно по собственным функциям (электрический потенциал) в случае упомянутого выше линейного приближения и сильно нелинейно по комплексным собственным значениям (частотам).

Предположим, что $\beta \ll 1$, где $\beta = 8\pi nT/B^2$, n — число частиц в 1 см^3 , T — температура плазмы в энергетических единицах (эрг) и B — напряженность магнитного поля. Двумерное поле \mathbf{B} в низшем порядке по параметру β равно магнитному полю в вакууме, и поэтому можно ввести магнитный потенциал χ , так что $\mathbf{B} = \nabla\chi$ и $dl = d\chi/B$, где l — длина вдоль данной силовой линии. Поэтому в системе координат

$$\mathbf{e}_\theta \text{ (симметрии), } \mathbf{e}_\parallel \equiv \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\parallel$$

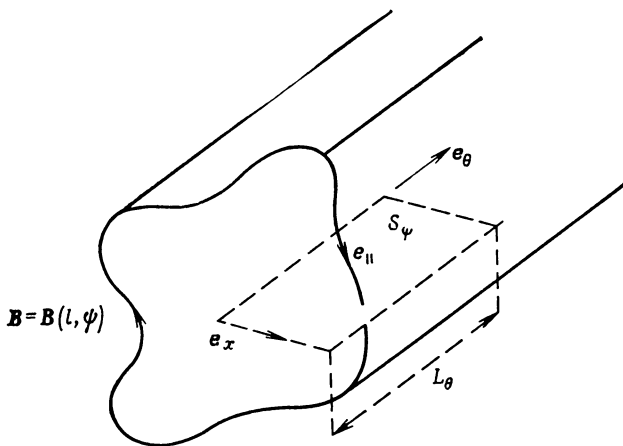
мы будем использовать две системы масштабов [14]

$$r_\theta, l, r_x \text{ или } r_\theta, \chi, \psi$$

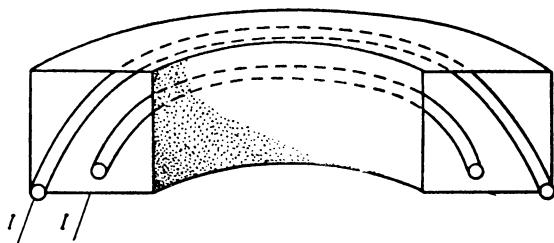
в зависимости от удобства их применения. В этом случае величина ψL_θ определяет магнитный поток через поверхность, перпендикулярную силовым линиям (фиг. 1), длиной L_θ вдоль \mathbf{e}_θ , так что $d\psi = Bdr_x$.

Предполагается, что длина свободного пробега между столкновениями частиц значительно больше всех макроскопических размеров системы, и поэтому мы можем использовать уравнение Власова

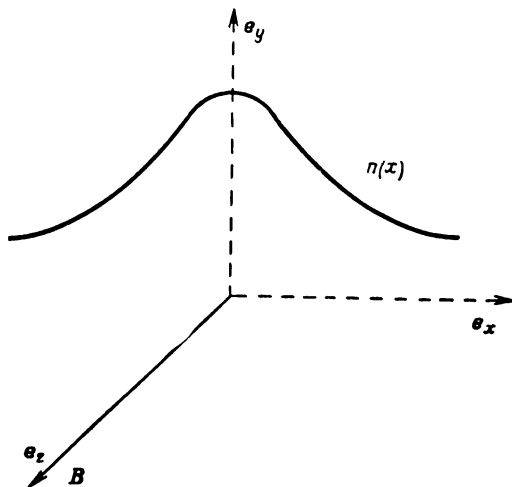
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \left(\mathcal{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (1.1)$$



Ф и г. 1. Двумерная конфигурация магнитного поля.



Ф и г. 2. Принципиальная схема квадрупольной системы.



Ф и г. 3. Одномерная конфигурация неоднородной плазмы.

где \mathbf{v} — скорость, e — заряд и m — масса рассматриваемых частиц. Начальное равновесное состояние определяется уравнением (1.1) при $\partial/\partial t = 0$, так что f является функцией констант движения частицы, E и p_θ , и мы в качестве f_0 выберем функцию распределения с постоянной изотропной температурой T :

$$f_0 = \left(\frac{m}{\pi T}\right)^{3/2} N(p_\theta) \exp\left(-\frac{mE}{2T}\right), \quad (1.2)$$

где функция $N(p_\theta)$ определяет зависимость f_0 в пространстве координат. Здесь $E \equiv v_\perp^2 + v_\parallel^2$ — энергия частицы, $p_\theta = mv_\theta + (e/c)A_\theta$ — компонента по \mathbf{e}_θ канонического импульса частицы, A — магнитный вектор-потенциал и по предположению [14] $\mathcal{E}_0 = 0$.

В конфигурации, приведенной на фиг. 1, орбиты всех частиц являются периодическими. Частицы, которые при своем движении проходят всю длину данной магнитной силовой линии, мы будем называть «пролетными», а те частицы, которые проходят только часть этой длины, — «запертыми». Вследствие градиента плотности электроны и ионы дрейфуют в разных направлениях относительно вектора \mathbf{e}_θ , и скорость такого диамагнитного дрейфа v_d равна

$$v_{dj} = -\frac{cT_j}{e_j B n_0} \frac{dn}{dr_x} = -\frac{cT_j}{e_j n_0} \frac{dn_0}{d\psi}, \quad (1.3)$$

где $j = i$ или $j = e$ обозначают сорт частиц и n_0 — равновесная плотность. Очевидно, что скорость v_{dj} является постоянной величиной вдоль данной силовой линии. С другой стороны, кривизна силовых линий магнитного поля вызывает дрейф ведущего центра вдоль \mathbf{e}_θ , и скорость этого дрейфа равна

$$v_{Dj} = c \frac{m_j}{e_j} \frac{(E - \frac{1}{2} \mu B)}{B^2} \frac{\partial B}{\partial r_x} = c \frac{m_j}{e_j B} \left(E - \frac{1}{2} \mu B\right) \frac{\partial B}{\partial \psi}, \quad (1.4)$$

где $\mu = v_\perp^2/B$ — магнитный момент. Поскольку мы будем рассматривать процессы с характерными частотами

$$\omega < \Omega_i,$$

то во всех случаях величина μ будет оставаться постоянной (Ω_i — циклотронная частота ионов). В частности, интеграл от элемента объема в пространстве скоростей может быть представлен в виде двойного интеграла от независимых переменных μ и E после интегрирования по фазовому углу перпендикулярной скорости, так что

$$\int d^3\mathbf{v} = \frac{1}{2} \pi \int \int dE d\mu \frac{B}{|v_\parallel|},$$

и заметим при этом, что $v_{\parallel} = (E - \mu B)^{1/2}$ может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Для оценки порядка величин введем характерный масштаб изменения плотности r_n , локальный радиус кривизны магнитной силовой линии R_c и длину связи¹⁾ L , а именно

$$\frac{1}{r_n} \approx \left| \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dr_x} \right|, \quad \frac{1}{R_c} \approx \left| \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r_x} \right|, \quad \frac{1}{L} \approx \left| \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial l} \right|. \quad (1.5)$$

В частности, применительно к ситуации, изображенной на фиг. 1, длина L по порядку величины равна расстоянию между минимумом и последующим максимумом напряженности поля B вдоль данной силовой линии. Если теперь $v_{th j} = \sqrt{2T_j/m_j}$ — тепловая скорость и $a_j = v_{th j}/\Omega_j$ — усредненный циклотронный радиус, то, например,

$$v_{di} \approx \frac{1}{2} \frac{a_i v_{th i}}{r_n} \quad \text{и} \quad v_{Di} \approx a_i \frac{v_{th i}}{R_c},$$

так что $v_{di}/v_{Di} \approx R_c/2r_n$.

Предположим, чтобы отразить реально существующую экспериментальную ситуацию, что в асимптотическом смысле

$$a_j < r_n < L \sim R_c, \quad (1.6)$$

так что $v_{Di}/v_{di} \ll 1$, и в дальнейшем мы всегда будем проводить разложение по этому малому параметру.

Рассмотрим также величину $X(l, \mathbf{v})$, усредненную по пространству скоростей:

$$\langle X \rangle \equiv \frac{1}{n_0} \int d^3 \mathbf{v} f_0 X, \quad (1.7)$$

усредненную вдоль силовой линии:

$$[X]_{\text{ср}} \equiv \frac{\oint (dl/B) X}{\oint dl/B} \quad (1.8)$$

и усредненную за время движения частицы по орбите:

$$X^{(0)}(E, \mu) \equiv \frac{\oint (dl/v_{\parallel}) X}{\oint dl'/v_{\parallel}}. \quad (1.9)$$

В частности, если $Y = Y(l)$ не зависит от \mathbf{v} , тогда

$$Y^{(0)}(E, \mu) = Y^{(0)}(\lambda),$$

¹⁾ Длиной связи (connection length) обычно называют расстояние вдоль силовой линии между точками с разным знаком кривизны. В мультипольной конфигурации длина связи совпадает с характерной длиной. — *Прим. ред.*

где величина $\lambda \equiv \mu/E$ характеризует угол наклона спирали. Определим также

$$\tau(E, \mu) = \oint \frac{dl}{v_{\parallel}} \quad \text{и} \quad \omega_b(E, \mu) \equiv \frac{2\pi}{\tau}$$

как период орбиты и «частоту дрейфового цикла». Тогда очевидно, что по порядку величины

$$\langle \omega_{bj} \rangle \sim \frac{v_{th} l}{L}.$$

Мы часто будем в дальнейшем изменять порядок интегрирования по E , μ и l , показав, например, что

$$[\langle X \rangle]_{cp} = \frac{\pi}{2 \oint dl/B} \int \int dE d\mu |\tau(E, \mu)| X^{(0)}(E, \mu) \quad (1.10)$$

и

$$[\langle X^{(0)} \rangle]_{cp} = [\langle X \rangle]_{cp}. \quad (1.11)$$

Отметим дополнительно, что если $Y = Y(l)$, то в соответствии с неравенством Шварца

$$[Y^2(l)]_{cp} - [(Y^{(0)})^2]_{cp} > 0. \quad (1.12)$$

Действительно, если разложить $Y(l)$ по гармоникам обращения по орбите, то получим

$$Y(l) = \sum Y^{(n)}(E, \mu) \exp\left(in2\pi \frac{\hat{t}}{\tau}\right), \quad (1.13)$$

где $\hat{t} \equiv \int^l dl'/v_{\parallel}$ — параметр, введенный взамен l и связанный с ним уравнением движения, и с учетом

$$Y^{(n)}(E, \mu) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Y[l(\hat{t})] \exp\left(-in2\pi \frac{\hat{t}}{\tau}\right) d\hat{t} \quad (1.14)$$

левая часть уравнения (1.12) принимает вид

$$\sum_n [\langle |Y^{(n)}(E, \mu)|^2 \rangle]_{cp}$$

и по определению является положительной величиной, когда $n \neq 0$.

Рассматривая, в частности, дрейф, обусловленный кривизной магнитных силовых линий, мы будем анализировать такие ситуации, когда дрейф, обусловленный локальной кривизной силовой линии, меньше дрейфа, усредненного по всей силовой линии, т. е.

$$\langle v_{Di} \rangle < [\langle v_{Di} \rangle]_{cp}.$$

Это условие имеет место в реальных системах типа квадрупольей, обладающих «пологой магнитной ямой», в том смысле, что средний радиус кривизны магнитных силовых линий, определяющий устойчивость гидромагнитных мод, много больше r_n . Действительно, как будет ясно из дальнейшего, знак величины $v_{di}v_{Di}$ важен для определения устойчивости ряда таких мод, которые обусловлены расширением плазмы поперек силовых линий, когда напряженность магнитного поля и плотность частиц уменьшаются в одном и том же направлении, т. е. $v_{di}v_{Di} < 0$.

Наконец, целесообразно напомнить, что, используя введенные ранее системы отсчета, можно записать

$$\bar{v}_{Di} \equiv [\langle v_{Di} \rangle]_{cp} = 2c \frac{T_i}{e_i} \frac{(\partial/\partial\psi) \oint d\chi/B^2}{\oint d\chi/B^2} = \frac{2c}{e_i} T_i \frac{(\partial/\partial\psi) \oint dl/B}{\oint dl/B}, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} v_{Di}^{(0)} &\equiv \frac{\oint (dl/v_{\parallel}) v_{Di}}{\oint dl/v_{\parallel}} = \frac{cm_i}{e_i \oint dl/v_{\parallel}} \oint d\chi \frac{\partial}{\partial\psi} \left[\frac{(2E - 2\mu B)^{1/2}}{B} \right] = \\ &= - \frac{\sqrt{2} cm_i}{e_i \oint dl/v_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial\psi} \oint dl v_{\parallel} \equiv - \frac{cm_i}{e_i \oint dl/v_{\parallel}} \frac{\partial J(E, \mu)}{\partial\psi} = \\ &= - \frac{cm_i E}{e_i} \frac{(\partial/\partial\psi) \oint dl (1 - \lambda B)^{1/2}}{\oint dl / (1 - \lambda B)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Первая величина, знак которой зависит от градиента $\oint dl/B$ относительно ψ , определяет устойчивость гидромагнитных мод желобкового типа (см. следующую главу) и характеризует глубину так называемой магнитной ямы [15]. Следующая величина, которая обусловлена градиентом интеграла энергии [12] $J(E, \mu) = \oint v_{\parallel} dl$, различна для разных частиц с заданными значениями E и μ и очень существенна для некоторых кинетических мод, которые мы в дальнейшем будем рассматривать.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ МОД

При рассмотрении конфигурации с $\beta \ll 1$ становится интуитивно ясным (и это можно доказать), что более вероятно развитие таких возмущений от равновесного состояния, которые не изменяют магнитного поля, и магнитная энергия системы при этом не увеличивается. Поскольку равновесное электрическое поле равно нулю, мы рассмотрим небольшое электростатическое

возмущение и положим $\mathcal{E} = -\nabla\Phi$. Ограничим также наше рассмотрение только собственными решениями вида

$$\Phi = \phi(l, r_x) \exp[i(\omega t + kr_\theta)]. \quad (2.1)$$

Тогда проведем первую грубую классификацию мод по величине ω , а именно:

1. Гидромагнитные моды, не зависящие от величины L , в том смысле, что в предельном случае $L/r_n \rightarrow \infty$,

$$\langle \omega_{bi} \rangle < \langle \omega_{be} \rangle < \omega. \quad (2.2)$$

2. Быстрые нарастающие кинетические моды с частотой

$$\langle \omega_{bi} \rangle < \omega < \langle \omega_{be} \rangle. \quad (2.3)$$

При возбуждении этих мод для электронов сохраняется адиабатический продольный инвариант J , а для ионов — не сохраняется.

3. Медленно нарастающие кинетические моды с частотой

$$\omega < \langle \omega_{bi} \rangle < \langle \omega_{be} \rangle. \quad (2.4)$$

При возбуждении этих мод продольный адиабатический инвариант сохраняется и для электронов, и для ионов.

Механизм возбуждения этих неустойчивых мод связан с избытком свободной энергии, который может быть реализован. Таким образом, имеем

1. Моды дрейфового типа, для возбуждения которых необходим только градиент плотности. Эти моды нарастают за счет средней кинетической энергии частиц вдоль магнитного поля.

2. Моды, обусловленные кривизной магнитных силовых линий, для возбуждения которых необходимы градиент плотности и локальная кривизна магнитных силовых линий соответствующего знака; при этом энергия передается колебаниям, когда плотность частиц и напряженность магнитного поля уменьшаются вдоль одного направления.

Дальнейшая классификация связана с топологией анализируемых мод. Мы ограничим наше рассмотрение такими профилями распределения потенциала, которые локализованы в направлении e_x в окрестности точки $r_x = r^0$ и характерный масштаб изменения которых меньше r_n . Предполагается, что длина волны в направлении e_θ достаточно мала, так что $k \gg |d\Phi/dr_x| \Phi^{-1}$, и поэтому можно пренебрегать зависимостью Φ от r_x . Следовательно, $\phi(l, r_x) \approx \phi(l, r^0) \equiv \phi(l)$.

Рассматривая профиль распределения потенциала вдоль l и вводя определение величины ϕ как $\phi = \bar{\phi} + \tilde{\phi}$, где $\bar{\phi} \equiv [\phi]_{\text{ср}}$, имеем

1. Моды баллонного типа, когда $\bar{\phi} = 0$ или $\tilde{\phi} \gg \bar{\phi}$.

2. Моды желобкового типа, когда $\bar{\phi} \gg \tilde{\phi}$.

Наконец, мы находим, что в зависимости от того, происходит ли при возбуждении данной моды возмущение малой части пространства скоростей или всего пространства, следует различать

1. Резонансные моды с малой скоростью нарастания, обусловленные резонансным взаимодействием волн с частицами (типа мод, обусловленных затуханием Ландау).

2. Нерезонансные моды (гидродинамического типа), скорость нарастания которых больше или порядка частоты осцилляций и при возбуждении которых возмущается все пространство скоростей.

3. ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА ДЛЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ МОД

Очевидно, что такое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_e + \frac{e}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_e = + \frac{e}{m} \nabla \Phi \cdot \nabla_v f_0, \quad (3.1)$$

где f_e — возмущенная функция распределения. В частности, интегрируя вдоль невозмущенной траектории частицы, получаем

$$\dot{f}_e = \frac{e}{m} \int^t \nabla \Phi \cdot \nabla_v f_0 dt'. \quad (3.2)$$

Если, кроме того, рассматривать случай, когда ларморовский радиус много меньше поперечных длин волн Φ , то можно проинтегрировать уравнение (3.2) вдоль траектории ведущих центров, которая, очевидно, задана уравнениями

$$\frac{dl}{dt} = v_{\parallel}$$

и

$$\frac{dr_{\theta}}{dt} = v_D,$$

где v_D — дрейфовая скорость, определяемая выражением (1.4). Таким образом, опуская индекс j , получаем

$$\nabla_v f_0 = 2\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial E} + e_{\theta} m \frac{\partial f_0}{\partial p_{\theta}},$$

и учитывая, что $\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = d\Phi/dt - \partial\Phi/\partial t$, имеем

$$\dot{f} = 2e \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial (mE)} \Phi - i \left[\omega \frac{\partial f_0}{\partial (mE)} - k \frac{\partial f_0}{\partial p_{\theta}} \right] \int^t \Phi(\mathbf{r}(t')) dt' \right\},$$

где \hat{f} — возмущенное распределение ведущих центров. Используя теперь выражения для Φ и f_0 , получаем [16, 17]:

$$\hat{f}_1 = -\frac{2e_f}{T_f} f_{0f} \left\{ \Phi - i(\omega - \omega_{df}) \int_{-\infty}^t dt' \phi(l(t')) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[i\omega t' + ik \int^{t'} v_{Df}(l(\hat{t})) d\hat{t} \right] \right\}, \quad (3.3)$$

где $\omega_{dj} = kv_{dj}$ и v_{dj} — диамангнитная скорость, определяемая выражением (1.3). Уравнение (3.3) можно применять и в том случае, когда нельзя пренебрегать ларморовским радиусом ионов по сравнению с поперечной длиной волны; и поскольку мы рассматриваем частоты $\omega < \Omega_j$, то представляет интерес только функция распределения, усредненная по углу вращения, т. е.

$$\hat{f}_1 = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \hat{f}_e d\varphi. \quad \text{В этом случае получаем [18]}$$

$$\hat{f}_{1f} = -\frac{2e_f}{T_f} f_{0f} \left\{ \Phi - i(\omega - \omega_{df}) J_0 \left(\frac{kv_{\perp}}{\Omega_f} \right) \int^t dt' \phi(l') J_0 \left(\frac{kv_{\perp}}{\Omega_f'} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[i\omega t' + ik \int^{t'} dt' v_{Df}(\hat{l}) \right] \right\}, \quad (3.4)$$

где $l' \equiv l(t')$, $\Omega' = \Omega_f'(l')$ и $\hat{l} = l(\hat{t})$, поскольку учитывается, что в рассматриваемых ограничениях траекторию частицы, перпендикулярную силовым линиям поля, можно записать как

$\mathbf{r}_{\perp}(t) = \Omega [(\mathbf{B}/B) \times \mathbf{V}] + \int \mathbf{V}_D dt''$ и усреднить по φ выражение $\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{\perp}(t') - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)]$. Действительно, на частицу действует усредненное электрическое поле, которое равно

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi(\mathbf{r}_g + \mathbf{a}(\varphi)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \phi(l) \exp \left(i \frac{kv_{\perp}}{\Omega} \cos \varphi \right) = \\ = \phi(l) J_0 \left(\frac{kv_{\perp}}{\Omega} \right).$$

Вышеупомянутый множитель J_0 преобразует часть распределения ведущих центров в функцию распределения частиц, а именно ту часть, которая связана с изменением энергии частицы и

определена, например, первым слагаемым в скобках уравнения (3.4). Тогда $f_0 = N(\rho_0) F(\bar{E}, \mu)$ и (см. [19])

$$f_1 = \frac{2e}{m} \left\{ \Phi \left[\frac{\partial f_0}{\partial E} + \frac{1}{B} \frac{\partial f_0}{\partial \mu} (1 - J_0^2) \right] - i \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial E} - \frac{kc}{2e} \frac{\partial f_0}{\partial \Phi} \right) \times \right. \\ \left. \times J_0(l) \int^t dt' \exp \left[i\omega t' + ik \int^{t'} v_D(l'') dt'' \right] \phi(l') J_0(l') \right\}. \quad (3.5)$$

Наличие слагаемого, содержащего $\partial f_0 / \partial \mu$, оправдано тем обстоятельством, что с точностью до членов первого порядка по Φ выражение для адиабатического инварианта имеет вид

$$\mu_e = \frac{v_{\perp}^2}{B} + \frac{2e}{Bm} (1 - J_0^2) \Phi. \quad (3.6)$$

В работе [20] приведен вывод этой формулы из выражения для Φ_1 .

В данном случае дисперсионное соотношение выводится посредством совместного рассмотрения решения уравнения (3.3) или (3.4) с уравнением Пуассона:

$$-\nabla^2 \phi = 4\pi e (n_{i1} - n_{e1}), \quad (3.7)$$

где n_{i1} — возмущенная плотность. Если предположить, как мы и будем считать в дальнейшем, что $k \gg |\partial \phi / \partial l| / \phi$, то

$$n_{ik} = n_{ek} + \frac{k^2}{4\pi e} \phi,$$

и мы будем всякий раз пренебрегать вторым членом, когда несущественно влияние конечного дебаевского радиуса.

4. БЫСТРО НАРАСТАЮЩИЕ (ЭЛЕКТРОННЫЕ) МОДЫ

Рассмотрим вначале моды [11] с частотой $\langle \omega_{bi} \rangle < \omega < \langle \omega_{be} \rangle$ и пренебрежем полностью электронным ларморовским радиусом, так что функция f_{e1} определяется уравнением (3.3). Тогда, чтобы провести интегрирование по t' , мы запишем $v_{De}(\hat{l}) = v_{De}^{(0)} + \tilde{v}_{De}$, учитывая определение (1.16), и используем разложение, указанное в (1.13), а именно

$$\phi(l') \exp \left[ik \int^{t'} dt' \tilde{v}_{De}(\hat{l}) \right] = \sum_n A_e^{(n)}(E, \mu) \exp[i(n\omega_b t' + kr_0)]. \quad (4.1)$$

Тогда для $f_{ek} = f_{e1} \exp[-i(\omega t + ikr_\theta)]$ получаем

$$f_{ek} = \frac{e}{T_e} f_{0e} \left\{ \phi - (\omega - \omega_{de}) \left[\frac{A_e^{(0)}(E, \mu)}{\omega + \omega_{De}^{(0)}} + \sum_{n \neq 0} \frac{A_e^{(n)} \exp(in\omega_b \hat{t})}{\omega + \omega_{De}^{(0)} + n\omega_b} \right] \right\}, \quad (4.2)$$

где $\omega_{De}^{(0)} = kv_{De}^{(0)}$ и $\omega_b \hat{t} = 2\pi \left(\int^{\hat{t}} dl'/v_{\parallel} \right) / \left(\oint dl/v_{\parallel} \right)$. Очевидно, что если $A^{(n)} \leq A^{(0)}$, то последний член в квадратных скобках оказывается более высокого порядка по параметру $\omega/\langle \omega_{be} \rangle$, чем первый. Если, кроме того, предположить, как мы и будем делать в дальнейшем, что $\omega_{De} \leq \omega$, то $A^{(0)} \approx \Phi^{(0)} = \left[\oint dl \phi(l)/v_{\parallel} \right] / \oint dl/v_{\parallel}$ в наинизшем порядке по параметру $\omega/\langle \omega_{be} \rangle$. Действительно, разложение ϕ по гармоникам обращения по орбите показывает, что $\phi(l) = \sum \Phi^{(n)}(E, \mu) \exp[in\omega_b \hat{t}]$. Соответствующая возмущенная плотность равна

$$n_{ek} = \frac{e}{T_e} n_{e0} \left\{ \phi - (\omega - \omega_{de}) \left\langle \sum_n \frac{A^{(n)} \exp(in\omega_b \hat{t})}{\omega + \omega_{De}^{(0)} + n\omega_b} \right\rangle \right\}. \quad (4.3)$$

Рассмотрим теперь ионы, и если определить функцию f_{ik} как

$$f_{ik} = f_{i1} \exp[-i(\omega t + kr_\theta)],$$

а также учесть, что $\omega > \langle \omega_{bi} \rangle$, то можно провести интегрирование по t' , записав:

$$f_{ik} = -\frac{e}{T_e} f_{0i} \times \\ \times \left\{ \phi - \frac{\omega - \omega_{di}}{\omega + \omega_{Di}} J_0\left(\frac{kv_{\perp}}{\Omega_i}\right) \int_{-\infty}^0 dt_* \left(\frac{\partial}{\partial t_*} \exp[i(\omega + \omega_{Di})t_*] \right) \times \right. \\ \left. \times A(l(\hat{t} + t_*)) \right\}, \quad (4.4)$$

где

$$A(l_*) \equiv \phi(l_*) J_0(l_*) \exp \left[ik \int_0^{t_*} \{v_{Di}[l(t'_*)] - v_{Di}(l)\} dt'_* \right], \\ l_* \equiv l(\hat{t} + t_*) \text{ и } \hat{t} \equiv \int^{\hat{t}} \frac{dl}{B}.$$

Таким образом, если провести два раза интегрирование по частям, то интеграл в уравнении (4.4) принимает вид

$$A(l) + \frac{i}{\omega + \omega_{Di}} v_{\parallel} \frac{\partial A}{\partial l} - \left(\frac{1}{\omega + \omega_{Di}} \right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}. \quad (4.5)$$

Если мы вычислим теперь возмущенную плотность ионов n_{ik} , в которую не вносит вклада появившийся в уравнении (4.5) нечетный член, содержащий v_{\parallel} , то получим

$$n_{ik} = -\frac{e}{T_i} n_{i0} \left\{ \phi(l) - \left\langle \frac{\omega - \omega_{di}}{\omega + \omega_{Di}} J_0 \left[J_0 \phi(l) - \left(\frac{1}{\omega + \omega_{Di}} \right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] \right\rangle \right\}. \quad (4.6)$$

Заметим, что при выводе как n_{ik} , так и n_{ek} мы удерживали члены более высокого порядка в соответствующих разложениях. Это связано с тем, что в конечном дисперсионном соотношении для различных мод члены наимизшего порядка взаимно сокращаются. Поэтому предполагаем, что

$$\omega_{De} \sim \omega_{Di} < \omega,$$

и это не противоречит тому обстоятельству, что часто $\omega \sim \omega_{de} \sim \omega_{di}$ и $r_n \ll R_c$, и, следовательно, при $\omega = \omega_{Dj}$ резонансному (ландауовскому) взаимодействию волн с частицами подвержено только небольшое количество частиц на хвосте распределения. Следовательно, конечное дисперсионное соотношение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(l) \left[1 - \left\langle \frac{\omega - \omega_{di}}{\omega + \omega_{Di}} J_0^2 \left(\frac{kv_{\perp}}{\Omega_i} \right) \right\rangle \right] \frac{T_e}{T_i} + \\ + \frac{T_e}{T_i} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \left\langle \frac{1}{\omega^2} J_0(l) \frac{\partial^2}{\partial t^2} J_0(l) \phi(l) \right\rangle + \phi(l) + \\ + (\omega - \omega_{de}) \left\langle \sum_n \frac{A^{(n)} \exp(in\omega_b \hat{t})}{\omega + \omega_{De}^{(0)} + n\omega_b} \right\rangle + \frac{k^2 T_e}{4\pi e^2 n_0} \phi(l) = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если предположить, что

$$\lambda_{De}^2 < a_i^2 \frac{T_e}{T_i},$$

то для рассматриваемых сейчас мод можно пренебречь последним членом в уравнении (4.7). Этот член имеет существенное значение для медленной нарастающей моды, рассматриваемой ниже.

Теперь, прежде чем искать точное решение уравнения (4.7), целесообразно рассмотреть его квадратичную форму, возникаю-

шую при умножении уравнения на $\phi^*(l)$ и интегрировании по всему объему силовой трубки:

$$\iiint dV \phi^* \sim \int \frac{dl}{B} \phi^*.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \int \frac{dl}{B} |\phi|^2 \left\{ 1 + \frac{T_e}{T_i} \left[1 - \left\langle \frac{\omega - \omega_{di}}{\omega + \omega_{Di}} J_0^2 \right\rangle \right] \right\} - \\ & - \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \frac{T_e}{T_i \omega^2} \frac{\pi}{2} \iint dE d\mu f_{i0} \int_0^\tau dt \left| \frac{\partial}{\partial t} J_0 \phi \right|^2 - \\ & - (\omega - \omega_{de}) \frac{\pi}{2} \iint dE d\mu \tau |f_{e0}| \left\{ \frac{|\Phi^{(0)}|^2}{\omega + \omega_{De}^{(0)}} + \sum_{n \neq 0} \frac{|\Phi^{(n)}|^2}{\omega + n\omega_b} \right\} = 0, \quad (4.8) \end{aligned}$$

и мы будем использовать это уравнение как основное для оценок порядка величин, ответственных за возбуждение различных мод.

5. РЕЗОНАНСНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БАЛЛОННАЯ МОДА

Рассмотрим вначале предельный случай относительно длинных волн, когда $J_0 \approx 1 - 1/4 k^2 v_\perp^2 \Omega_i^2$. Этот случай весьма важен, поскольку считается, что именно моды, длина волны которых сравнима с макроскопическими размерами системы, наиболее существенным образом изменяют характер процесса переноса частиц. Тогда уравнение (4.8) в наинизшем порядке сводится к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} & \oint \frac{dl}{B} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) (|\phi|^2 - \langle |\Phi^{(p)}|^2 \rangle) + \right. \\ & + \left\langle \frac{\omega_{De}^{(0)} (\omega - \omega_{de})}{\omega (\omega + \omega_{De}^{(0)})} |\Phi^{(0)}|^2 - \frac{\omega_{De} (\omega - \omega_{di})}{\omega (\omega + \omega_{Di})} |\phi|^2 + \right. \\ & \left. \left. + \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \frac{T_e}{m_i} \left(\frac{k^2}{\Omega_i^2} |\phi|^2 - \frac{1}{\omega^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 \right) \right\} = 0. \quad (5.1) \end{aligned}$$

Очевидно, что первое слагаемое является членом наинизшего порядка. Таким образом, имеется альтернатива [11, 21]:

1. $\omega = \omega_{de} + \delta\omega$ при $\delta\omega < \omega$.
2. $\phi = \phi^{(0)} + \delta\phi$, так что для $\phi \equiv \bar{\phi} + \tilde{\phi}$, где $\tilde{\phi} \equiv [\phi(l)]_{cp} = \text{const}$, $\tilde{\phi} < \bar{\phi}$. Это неравенство надо понимать в асимптотическом смысле.

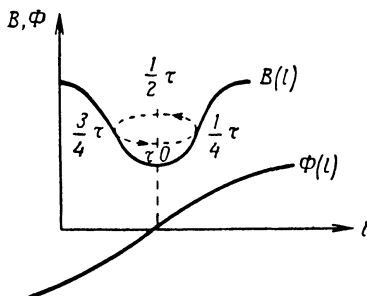
В этой главе мы рассмотрим первый случай и дополнительно предположим, что $\Phi^0 = 0$. Если профиль потенциала в данной

конфигурации симметричен в окрестности каждого минимума магнитного поля, то данный случай соответствует антисимметричной функции $\phi(l)$ в окрестности каждой точки минимума. Действительно, как показано на фиг. 4, если вычислить интеграл

$\int_0^{\tau} \phi(l(\hat{t})) d\hat{t}$ посредством представления его в виде

$$\int_0^{\tau/4} + \int_{\tau/4}^{\tau/2} + \int_{\tau/2}^{3\tau/4} + \int_{3\tau/4}^{\tau},$$

то мы обнаружим, что если функция $\phi(l)$ антисимметрична по определению, то эти интегралы взаимно сокращаются. Очевидно, что, выбрав такую функцию, мы тотчас исключаем прямой



Фиг. 4. Типичный профиль распределения электростатического потенциала для электронных мод.

вклад от запертых частиц. Тогда уравнение (5.1) сводится к следующему:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_{de}} \oint \frac{dl}{B} |\phi|^2 - \oint \frac{dl}{B} |\phi|^2 \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \left(\frac{\langle\omega_{De}\rangle}{\omega_{de}} - b_{(e)}\right) - \frac{T_e + T_i}{\omega_{de}^2 m_i} \oint \frac{dl}{B} \left|\frac{\partial\phi}{\partial l}\right|^2 = 0, \quad (5.2)$$

которое явно содержит вариацию $\delta\omega$ и может быть использовано для применения вариационных методов; $b_{(e)} \equiv k^2 T_e / m_i \Omega_i^2$. Мы ожидаем, что если $\delta\omega / \omega_{de} < 0$, т. е. $\omega < \omega_{de}$, то результирующая мода становится неустойчивой из-за резонансных взаимодействий волны и частицы. Таким образом, видно, что звуковая волна, распространяющаяся вдоль силовых линий (последний член), всегда оказывает стабилизирующее действие, в то время как инерция ионов при их движении поперек силовых линий (т. е. поляризация и дрейф с конечным ларморовским радиусом — предыдущий член уравнения) оказывает дестабилизирую-

шее действие. Ясно, что член, содержащий $\langle \omega_{De} \rangle / \omega_{de}$ и обусловленный кривизной силовых линий, дает вклад в неустойчивость только в том случае, если он отрицателен. Таким образом, мы считаем, что интенсивность данной моды максимальна в окрестности точки, в которой величина

$$\mathcal{K}(k) \equiv \frac{k_{\perp}^2 T_e}{m_i \Omega_i^2} - \frac{\langle v_{De} \rangle}{v_{de}} \equiv b_{(e)} - \frac{d \ln B}{d \ln r}$$

является максимальной. Действительно, мы можем точно решить дисперсионное уравнение для таких собственных мод, которые строго локализованы в окрестности данной точки $l = l_0$. Тогда мы имеем дифференциальное уравнение [11, 21]

$$\left\{ \frac{T_i + T_e}{m_i \omega_{de}^2} \frac{d^2}{dl^2} - \frac{\delta \delta \omega}{\omega_{de}} - \frac{l^2}{2} \left| \frac{d^2 \mathcal{K}}{dl^2} \right|_{l=l_0} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \right\} \phi(l) = 0, \quad (5.3)$$

где $\delta \delta \omega = \delta \omega - (1 + T_i/T_e) \mathcal{K}(l_0) \omega_{de}$. Если мы введем определение

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}^2} \equiv \left| \frac{d^2 \mathcal{K}}{dl^2} \right|_{l=l_0},$$

то увидим, что собственные решения уравнения (5.3) имеют вид

$$\phi_{\nu}(l) = H_{\nu} \left(\frac{l}{\Delta} \right) \exp \left(-\frac{l^2}{2\Delta^2} \right),$$

где индекс ν — величина нечетная и

$$\Delta \approx \frac{(\mathcal{L} r_n)^{1/2}}{(b_{(e)} \mathcal{K}_0)^{1/4}}. \quad (5.4)$$

Данный результат справедлив только в том случае, когда $\Delta^2 < \mathcal{L}^2$, что позволяет нам записать критерий отсутствия устойчивости

$$\mathcal{L} < \frac{r_n}{(\mathcal{K}_0 b_{(e)})^{1/2}}, \quad (5.5)$$

который в явном виде не зависит от ионной температуры. С другой стороны, основываясь на неизбежности затухания Ландау на ионах и на различных нарушениях используемого приближения, можно записать с точностью до численных коэффициентов

$$L < r_n \left(\frac{T_i}{T_e b_{(e)}} \right)^{1/2}. \quad (5.6)$$

В гл. 16 проводится сравнение этих результатов с экспериментально наблюдаемыми типами флуктуаций; данное рассмотрение легко распространить на всю область значений

$b \equiv (k^2 T_i / m_i \Omega_i^2) > 1$. В частности, в работе [22] анализируется нелокальное решение уравнения (5.2) для особого случая кризисны магнитных силовых линий.

6. РЕЗОНАНСЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЦ С ВОЛНОЙ

Как показано, мы можем найти скорость нарастания рассмотренных ранее мод только при учете резонансного взаимодействия волны с частицами, колеблющимися с частотой дрейфового цикла [11, 18]:

$$\omega_b(E, \mu) = \omega. \quad (6.1)$$

Вспомним теперь, что в конфигурации с прямыми силовыми линиями магнитного поля (см. фиг. 3) в соответствующем резонансном взаимодействии участвуют частицы с $v_{\parallel} = \omega/k_{\parallel}$, где k_{\parallel} — волновое число вдоль направления магнитного поля. Таким образом, возникают два следствия: 1) резонансная область в пространстве скоростей имеет вид плоскости, так как величина v_{\perp} может принимать любое значение, и 2) величина k_{\parallel} должна быть конечной, чтобы в резонансном взаимодействии участвовало достаточное число частиц, поскольку величина ω/k_{\parallel} немалого больше тепловой скорости.

С этой точки зрения конфигурация с переменным в пространстве полем B отличается тем, что, во-первых, мода с постоянным значением ϕ вдоль направления поля B , т.е. $\omega/k_{\parallel} = \infty$, может быть возбуждена конечным числом частиц, дающими вклад в резонанс, определяемый формулой (6.1). Действительно, это обстоятельство будет учтено в последующих главах. Второе отличие связано с тем, что в предельном случае, когда $\omega < \langle \omega_b \rangle \sim \sim v_{th}/L$, резонанс, определяемый формулой (6.1), возмущает обычно меньшую область фазового пространства, чем в соответствующем случае постоянного в пространстве магнитного поля. Действительно, можно записать ω_b как

$$\omega_b = \frac{2\pi}{L_0(\lambda)} \sqrt{E},$$

где

$$L_0(\lambda) \equiv \oint \frac{dl}{\sqrt{1 - \lambda B}}$$

и $\lambda \equiv \mu/E$, так что резонансная область фазового пространства обычно имеет вид небольшой сферической поверхности радиусом \sqrt{E} . Таким образом, в то время как в случае постоянного в пространстве магнитного поля вклад от резонансного взаимодействия частиц с волной порядка $\omega/k_{\parallel} v_{th}$, то в данном случае он

меньше, обычно порядка $(\omega/\langle\omega_b\rangle)^2$, причем для сравнения укажем, что $k_{\parallel} \sim 1/L$.

Для мод, рассмотренных в предыдущих двух разделах, характерно резонансное взаимодействие с волной только электронов с низкой частотой дрейфового цикла. Именно такими частицами являются только запертые или только пролетные, или частицы с очень малой энергией. Поскольку при выводе уравнения (5.1) были опущены члены более высокого порядка по $\omega/\langle\omega_{be}\rangle$, то вернемся к соответствующему члену из уравнения (4.8):

$$\left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega}\right) \int \int dE d\mu | \tau | f_{e0} \sum_{n \neq 0} |\Phi^{(n)}|^2 \times \\ \times \left[\frac{\omega}{n\omega_b} \left(1 - \frac{\omega}{n\omega_b}\right) + i\pi | \omega | \delta(\omega + n\omega_b) \right]. \quad (6.2)$$

Отметим, что члены первого порядка по ω/ω_b сокращаются и вклад от нерезонансных членов [23] (в наинизшем порядке) обусловлен членами порядка $\omega^2/\langle\omega_b\rangle^2$.

Рассмотрим теперь резонансные члены

$$i\pi | \omega | \int \int dE d\mu | \tau | f_{e0} |\Phi^{(n)}|^2 \delta(\omega - n\omega_b) = \\ = i\pi \int d\lambda L_0(\lambda) \int dE f_0(E) E^{1/2} |\Phi^{(n)}(E, \lambda)|^2 E_{(n)} \delta(E - E_{(n)}), \quad (6.3)$$

где

$$\tau = \frac{L_0(\lambda)}{\sqrt{E}}, \\ \delta(\omega - n\omega_b) = E_{(n)} \delta(E - E_{(n)}) | \omega |, \\ E_{(n)} = \frac{\omega^2 L_0^2(\lambda)}{(2\pi n)^2}.$$

Таким образом, выражение (6.2) принимает вид

$$\left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega}\right) \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{be}^2 n^2} \left(\frac{m_e}{T_e \pi^3}\right)^{1/2} \int dE \frac{\exp(-m_e E/2T_e)}{E^{1/2}} \times \right. \\ \times \int d\lambda \frac{L_0^3(\lambda)}{L^2} |\Phi^{(n)}(E, \lambda)|^2 - \frac{i}{\pi} \frac{|\omega^3|}{\hat{\omega}_{be}^3 n^3} \int d\lambda \frac{L_0^4(\lambda)}{L^3} \times \\ \left. \times \exp\left[-\frac{m_e}{2T_e} \left(\frac{\omega L_0(\lambda)}{2\pi n}\right)^2\right] |\Phi^{(n)}(E_{(n)}, \lambda)|^2 \right\}, \quad (6.4)$$

где $\lambda = \mu/E$ и $\hat{\omega}_{be} \equiv (2\pi/L) \sqrt{2T_e/m_e}$ и видно, что в рассматриваемом пределе вклад от резонансного взаимодействия частиц с волной обусловлен членами порядка $\omega^3/\langle\omega_{be}^3\rangle$.

Возвращаясь опять к конфигурации с постоянным в пространстве магнитным полем [24], мы напишем, что затухание Ландау рассчитывается посредством интеграла

$$W\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}v_{th}}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f/\partial v}{\omega/k_{\parallel}v_{th} + v} dv, \quad (6.5)$$

где $v \equiv v_{\parallel}/v_{th}$. Теперь если в предельном случае $\omega < k_{\parallel}v_{th}$ функция $f = (1/\sqrt{\pi}) \exp(-v^2)$, то

$$W \approx -1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_{\parallel}v_{th}}.$$

Если вместо этой функции распределения взять другую функцию [24] с «плато» в окрестности $v = 0$, как, например, $f \sim \exp(-v^4)$, то при $\omega < k_{\parallel}v_{th}$

$$W \sim -\alpha_1 - \alpha_2 \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th}^2} + i\alpha_3 \frac{\omega^3}{k_{\parallel}^3 v_{th}^3}. \quad (6.6)$$

Как было показано раньше, возникновение в уравнениях (6.4) и (6.6) резонансных членов порядка $\omega^3/\hat{\omega}_{be}^3$ связано с вкладом нерасходящихся нерезонансных членов порядка $(\omega/\hat{\omega}_{be})^2$.

Наконец, мы можем вывести из уравнений (4.8) и (5.2) скорость нарастания моды, рассмотренной в первой главе:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\omega_{de}} \oint \frac{dl}{B} |\phi|^2 = \\ = -(\delta\omega) \frac{\pi}{2} \int \int dE d\mu f_0(E) |\tau| \sum_n |A^{(n)}|^2 \delta(\omega + n\omega_b), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $\gamma = -\text{Im}(\omega)$ — скорость нарастания. Поэтому, как и предполагалось, неустойчивость развивается при $\delta\omega/\omega_{de} < 0$.

7. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ДРЕЙФОВАЯ МОДА

Мы определим квазигидродинамическую моду как такую моду, которая может быть неустойчивой, т.е. самовозбуждающейся, независимо от таких резонансных взаимодействий частиц с волной, которые возмущают все пространство скоростей, но, с другой стороны, не описывается приближением классической магнитогидродинамики.

Рассматриваемая мода [24] является быстро нарастающей в том смысле, что $\hat{\omega}_{bi} < \omega < \hat{\omega}_{be}$, и ее возникновение обусловлено наличием в дисперсионном соотношении члена наименьшего порядка по параметру $(\omega/\hat{\omega}_{be})^2$. Если обратиться к уравнению (4.8), то очевидно, что в данном случае подразумевается $\Phi^{(0)} = 0$,

т. е $\Phi(l)$, как указано в гл. 5, является антисимметричной функцией в окрестности каждого минимума магнитного поля. Тогда уравнение (4.8) сводится к следующему:

$$\oint \frac{dl}{B} |\phi|^2 \left\{ 1 + \frac{T_e}{T_i} \left[1 - \left\langle \frac{\omega - \omega_{dl}}{\omega + \omega_{Di}} J_0^2 \right\rangle \right] \right\} + \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{be}^2} \frac{\pi}{2} \iint dE d\mu f |\tau^3| \sum_{n \neq 0} \left| \frac{2\pi \hat{\omega}_{be} \Phi^{(n)}}{n} \right|^2 = 0, \quad (7.1)$$

и мы вынуждены выбрать $\omega < \omega_{de}$, $\omega_{Di} < \omega < \omega_{di}$ и $J_0^2 \ll 1$, так что $kv_{th i}/\Omega_i > 1$, и тогда последнее слагаемое будет соответствовать члену наименьшего порядка по параметру $(\omega/\hat{\omega}_{be})^2$. Поэтому в учитываемом порядке дисперсионное соотношение имеет вид

$$\left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \left(\oint \frac{dl}{B} |\phi|^2 \right) - \frac{\omega_{de}}{\omega} \left(\frac{1}{(2\pi b_0)^{1/2}} \oint \frac{dl}{B_0} |\phi|^2 \right) - \frac{\omega_{de}\omega}{\hat{\omega}_{be}^2} \left(\frac{\pi}{2} \iint dE d\mu f |\tau^3| \sum \left| \frac{2\pi \hat{\omega}_{be} \Phi^{(n)}}{n} \right|^2 \right) = 0, \quad (7.2)$$

$$\frac{\omega \omega_{de}}{\hat{\omega}_{be}^2} + \frac{\omega_{de}}{\omega} \frac{\Upsilon}{(2\pi b_0)^{1/2}} - \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \Xi = 0, \quad (7.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi &\equiv (2\pi \hat{\omega}_{be})^2 \frac{\pi}{2} \iint dE d\mu f_{0e} |\tau^3| \sum_{n \neq 0} \frac{|\Phi^{(n)}|^2}{n^2} \equiv \\ &\equiv \iint dl \frac{|\phi|^2}{B} = \frac{\pi}{2} \iint dE d\mu f_{0e} |\tau| \sum_{n \neq 0} |\Phi^{(n)}|^2, \\ \Upsilon &\equiv \frac{\Xi \oint dl |\phi|^2}{B_0 \oint dl |\phi|^2 / B}, \quad b_0 = \frac{k^2 T_i}{m_i \Omega_i^2}, \quad \Omega_0 \equiv \frac{e B_0}{m_i} \end{aligned}$$

и B_0 — характерное значение магнитного поля, которое введено здесь, чтобы продемонстрировать, что Υ пропорционально $\oint dl |\phi|^2$. Действительно, $\langle J_0^2 \rangle = I_0(b) \exp(-b)$, где

$$b \equiv \frac{k^2 T_i^2}{m_i \Omega_i^2} \quad (7.4)$$

и $I_0(b) \exp(-b) \approx (2\pi b)^{-1/2}$ при $b > 1$. Очевидно, что решение имеет вид

$$\frac{\omega}{\hat{\omega}_{be}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{\hat{\omega}_{be}}{\omega_{de}} \Xi \pm \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2 \frac{\hat{\omega}_{be}^2}{\omega_{de}^2} \Xi^2 - \frac{\Upsilon}{(2\pi b_0)^{1/2}} \right]^{1/2}. \quad (7.5)$$

Таким образом, макроскопическая неустойчивость магнитогиродинамического типа возникает, если

$$\omega_{de} > \frac{1}{2} \hat{\omega}_{be} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{\Xi}{\Upsilon^{1/2}} (2\pi b_0)^{1/2}. \quad (7.6)$$

Отметим, что неустойчивость, обусловленная отрицательным корнем, является, собственно говоря, продолжением дрейфовой баллонной моды, рассмотренной в гл. 5. Положительный корень соответствует новой моде. Важность этого замечания вытекает из рассмотрения такой области параметров, в которой условие (7.6) не выполняется. В этой области оба корня уравнения (7.5) соответствуют устойчивости и требование $\omega < \omega_{de}$ означает, что

$$\omega_{de} > \hat{\omega}_{be} \left[\left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \Xi \right]^{1/2}. \quad (7.7)$$

Это неравенство является менее строгим, чем условие (7.6). Если в этой ситуации применить процедуру, использованную в случае $\phi(l) \approx \exp(ik_{\parallel}l)$, то мы определим энергию волны как $U_k = \omega_k (\partial \epsilon / \partial \omega_k)$, где ϵ — эффективная диэлектрическая постоянная, причем

$$\epsilon \sim \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \Xi - \frac{\omega_{de}}{\omega} \frac{\Upsilon}{(2\pi b_0)^{1/2}} - \frac{\omega \omega_{de}}{\hat{\omega}_{be}^2},$$

и найдем, что

$$U_k \sim \mp 2 \frac{\omega_{de}}{\hat{\omega}_{be}} \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2 \frac{\hat{\omega}_{be}^2}{\omega_{de}^2} \Xi^2 - \frac{\Upsilon}{(2\pi b_0)^{1/2}} \right]^{1/2}. \quad (7.8)$$

Поэтому энергия в этих двух модах имеет противоположные знаки. Таким образом, мы можем убедиться, что если учесть резонансное взаимодействие частиц с волной, рассмотренное в гл. 6, то один из этих корней остается неустойчивым, хотя теперь резонансное взаимодействие происходит в ограниченной области фазового пространства. Более того, применив к данной ситуации теорию нелинейного взаимодействия волн с положительной и отрицательной энергией [25, 26], мы предполагаем, что нелинейные эффекты будут способствовать усилению неустойчивости. Таким образом, мы считаем, что при выполнении условия (7.7) и возбуждении данных мод будет существенная аномальная диффузия частиц. Действительно, или они развиваются как потоковая неустойчивость, когда условие (7.6) также выполнено, или, хотя они могут начать возбуждаться как слабая резонансная неустойчивость, нелинейные взаимодействия будут стремиться увеличить скорость нарастания и результирующий аномальный перенос частиц.

Вообще для расчетов коэффициентов Υ и Ξ надо знать собственную функцию $\phi(l)$. Легко показать, однако, что в частном случае, когда можно пренебречь последним членом в левой части уравнения (7.2), для определения собственных значений ω^2 применим вариационный принцип, и он может быть использован для расчета скорости нарастания неустойчивости.

Отметим в заключение, что мы классифицировали данные моды как дрейфовые, поскольку неустойчивость этих мод не связана с эффектами кривизны магнитных силовых линий.

8. РЕЗОНАНСНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЖЕЛОБКОВАЯ МОДА [11]

Вернемся к квадратичной форме уравнения (5.1) и дискуссии, приведенной вслед за записью этого уравнения. Рассмотрим теперь второй асимптотический предел из указанных двух возможных предельных случаев, а именно $\bar{\phi} > \tilde{\phi}$, где $\bar{\phi} + \tilde{\phi} \equiv \phi$ и $\bar{\phi} \equiv [\phi]_{\text{ср}}$. Тогда квадратичное уравнение сводится к следующему:

$$\oint \frac{dl}{B} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) b_{(e)} - \frac{\omega_{de} \langle \omega_{De} \rangle}{\omega^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \langle \frac{\omega_{De}^2}{\omega^2} \rangle \frac{T_i}{T_e} - \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) \left\langle \left(\frac{\omega_{De}^{(0)}}{\omega} \right)^2 \right\rangle \right]_{\text{ср}} \bar{\phi}^2 + \\ + \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) (|\tilde{\phi}|^2 - \langle |\tilde{\Phi}^{(0)}|^2 \rangle) - \frac{\tilde{T}_e}{m_i \omega^2} \left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial l} \right|^2 + \\ + \left\langle \frac{\omega_{De}^{(0)}}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) \bar{\phi} (\tilde{\Phi}^{(0)} + \tilde{\Phi}^{(0)*}) - \frac{\omega_{De}}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \bar{\phi} (\tilde{\phi} + \tilde{\phi}^*) \right\rangle \right\} = 0. \quad (8.1)$$

В этом выражении мы учли члены порядка $(\omega_D/\omega)^2$ и $\omega_D \tilde{\phi}/\omega \bar{\phi}$, что позволяет нам проанализировать случай, когда $[\langle \omega_{De} \rangle]_{\text{ср}} < < \{[\langle \omega_{De}^2 \rangle]_{\text{ср}}\}^{1/2}$, и тогда именно эти члены, как будет показано ниже, играют существенную роль. В данном разделе мы не станем рассматривать такую ситуацию, поэтому уравнение (8.1) сводится к следующему:

$$\left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \bar{b}_{(e)} - \frac{\omega_{de} \bar{\omega}_{De}}{\omega^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) + \\ + \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) \left[\left| \frac{\tilde{\phi}}{\bar{\phi}} \right|^2 - \left\langle \left| \frac{\tilde{\Phi}^{(0)}}{\bar{\phi}} \right|^2 \right\rangle \right]_{\text{ср}} - \frac{T_e}{m_i \omega^2} \left[\left| \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial l} \frac{1}{\bar{\phi}} \right|^2 \right]_{\text{ср}} = 0. \quad (8.2)$$

Для того чтобы продвинуться дальше, нам необходимо вычислить отношение $\bar{\phi}/\tilde{\phi}$. Рассмотрим поэтому периодическую по

$\oint dl/B$ часть соответствующего дисперсионного соотношения в низшем порядке:

$$\phi(l) - \langle \Phi^{(0)} \left(1 - \frac{\omega_{De}^{(0)}}{\omega} \right) \rangle + \\ + \frac{\omega - \omega_{dt}}{\omega - \omega_{de}} \left[b_{(e)} - \frac{\langle \omega_{De} \rangle}{\omega} + \frac{T_e}{m_i \omega^2} B \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial l} \right] \phi(l) = 0, \quad (8.3)$$

и тогда имеем

$$\left(1 + \frac{T_e}{m_i \omega^2} B \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial l} \right) \tilde{\phi}(l) - \langle \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle = \\ = -\bar{\phi} \left\{ \frac{\langle \tilde{\omega}_{De}^{(0)} \rangle}{\omega} + \frac{\omega - \omega_{dt}}{\omega - \omega_{de}} \left[b_{(e)} - \frac{\langle \tilde{\omega}_{De} \rangle}{\omega} \right] \right\}, \quad (8.4)$$

где $\tilde{b}_{(e)} \equiv b_{(e)} - \bar{b}_{(e)}$ и $\tilde{\omega}_{De} = \omega_{De} - \bar{\omega}_{De}$. Таким образом, если $\omega \neq \omega_{de}$, то

$$\frac{\tilde{\phi}}{\phi} \approx \frac{\omega_{de}}{\omega},$$

и в уравнении (8.2) можно последовательно пренебречь всеми членами, содержащими $|\tilde{\phi}/\bar{\phi}|^2$. Тогда действительная часть частоты равна

$$\omega^0 = \frac{1}{2} \omega_{dt} \pm \left[\frac{1}{4} \omega_{dt}^2 + \frac{\omega_{dt} \bar{\omega}_{Di}}{\bar{b}} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \right]^{1/2}. \quad (8.5)$$

Поскольку нас интересуют моды, устойчивые в магнитогиродинамическом приближении, то рассмотрим теперь силовые линии, вдоль которых $\omega_{di} \bar{\omega}_{Di} > 0$. Скорость нарастания, равная $\gamma = -\text{Im}(\omega)$ вычисляется по теории возмущений из уравнения (8.2), к которому добавляется член, обусловленный резонансным взаимодействием частиц с волной:

$$-\frac{i\pi^2}{2} (\omega - \omega_{de}) \iint dE d\mu | \tau | f_{e0} \sum_{n \neq 0} | A^{(n)} |^2 \delta(\omega - n\omega_b). \quad (8.6)$$

Поэтому мы имеем

$$\gamma \frac{\tilde{b}_{(e)}}{\omega_0^2} (2\omega_0 - \omega_{dt}) = \\ = \frac{i\pi^2}{2} (\omega_{de} - \omega_0) \iint dE d\mu | \tau | f_{e0} \sum_{n \neq 0} | A^{(n)} |^2 \delta(\omega - n\omega_b), \quad (8.7)$$

так что для развития неустойчивости необходимо выполнение неравенства $0 < \omega_0/\omega_{de} < 1$, что в свою очередь приводит к условию

$$\frac{\bar{\omega}_{Dt}}{\omega_{dt}} > \bar{b} \frac{T_e}{T_i}.$$

Фазовая скорость соответствующей волны совпадает по направлению с диамагнитной скоростью электрона, и в работе [11] эта волна называется «гравитационной», поскольку действие благоприятной средней кривизны магнитных силовых линий можно отождествить с действием направленной вверх эффективной силой тяжести.

Напомним также, что

$$\frac{\bar{\omega}_{Dt}}{\omega_{dt}} \equiv 2h \frac{r_n}{R_c},$$

где величину h обычно называют средней относительной глубиной магнитной ямы, $0 < h < 1$, потому что средняя кривизна магнитных силовых линий при $\bar{\omega}_{Di}/\omega_{di} > 0$ благоприятствует устойчивости мод гидромагнитного типа.

9. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЖЕЛОБКОВАЯ МОДА [27]

Рассмотрим теперь случай, интересный для практических приложений, когда магнитная яма является достаточно полой, и поэтому существенными становятся члены второго порядка по ω_{De}/ω , ω_{Di}/ω и $(\tilde{\phi}/\bar{\phi})^2$. Условие, налагаемое на h , будет определено ниже. В рассматриваемом случае необходимо получить решение для $\tilde{\phi}$. Для этого значительно проще воспользоваться не квадратичной формой уравнения (8.1), а эквивалентным уравнением, которое можно получить, вычислив среднее от уравнения (8.3) по формуле $\oint dl/B$. Это эквивалентное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \bar{\phi} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \frac{T_e}{T_i} \left(\bar{b} - \frac{\bar{\omega}_{Di}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_{de} \bar{\omega}_{De}}{\omega^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) - \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) \frac{\hat{\omega}_{De}^2}{\omega^2} \right\} + \\ & + \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega} \right) \left[\left\langle \frac{\bar{\omega}_{De}^{(0)}}{\omega} \tilde{\phi}^{(0)} \right\rangle + \frac{\omega - \omega_{di}}{\omega - \omega_{de}} \frac{T_e}{T_i} \left(\bar{b} + \frac{\langle \bar{\omega}_{Di} \rangle}{\omega} \right) \tilde{\phi}(l) \right]_{\text{cp}} = 0. \quad (9.1) \end{aligned}$$

При этом по-прежнему предполагают, основываясь на уравнении (8.4), что $\tilde{\phi} < \bar{\phi}$. Кроме того, мы определим величины $\bar{\omega}_{Di}^2$ и $\hat{\omega}_{De}^2$ как $\bar{\omega}_{Di}^2 \equiv [\langle \omega_{Di}^2 \rangle]_{\text{cp}}$ и $\hat{\omega}_{De}^2 \equiv [\langle \omega_{De}^{(0)2} \rangle]_{\text{cp}}$ и напомним, что $\bar{\omega}_{Di} \equiv [(\omega_{Di})]_{\text{cp}} = -(T_i/T_e) [\langle \omega_{De}^{(0)2} \rangle]_{\text{cp}}$ из-за изменения порядка

интегрирования по $d^3\mathbf{v}$ и dl/B . Следуя такой процедуре обращения, отметим, что

$$\oint \frac{dl}{B} \int d^3\mathbf{v} f_{e0} \omega_{De}^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)} = \frac{\pi}{2} \oint dl \iint \frac{dE d\mu}{v_{\parallel}} f_{e0} \tilde{\omega}_{De}^{(0)} \frac{\oint (dl/v_{\parallel}) \tilde{\phi}(l)}{\oint dl/v_{\parallel}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \oint \frac{dl}{B} \tilde{\phi}(l) \iint \frac{dE d\mu}{v_{\parallel}} B f_{e0} \tilde{\omega}_{De}^{(0)},$$

так что

$$[\langle \tilde{\omega}_{De}^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle]_{\text{cp}} = [\langle \tilde{\omega}_{De}^{(0)} \tilde{\phi}(l) \rangle]_{\text{cp}}. \quad (9.2)$$

Поэтому последний член уравнения (9.1) принимает вид

$$\left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega}\right) \left[\left(\frac{\langle \tilde{\omega}_{De}^{(0)} \rangle}{\omega} + \frac{\omega - \omega_{di}}{\omega - \omega_{de}} \frac{T_e}{T_i} \left(\tilde{b} + \frac{\langle \tilde{\omega}_{Di} \rangle}{\omega} \right) \right) \tilde{\phi}(l) \right]_{\text{cp}}, \quad (9.3)$$

и подставив в него левую часть уравнения (8.4), мы получаем в итоге

$$\tilde{b} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega}\right) \frac{T_e}{T_i} - \frac{1}{\omega^2} \left[\omega_{de} \tilde{\omega}_{De} + \hat{\omega}_{De}^2 + \frac{T_i}{T_e} (\omega_{de} \tilde{\omega}_{De} + \overline{\omega_{De}^2}) \right] +$$

$$+ \frac{\omega_{de}}{\omega^3} \left(\hat{\omega}_{De}^2 - \frac{T_i^2}{T_e^2} \overline{\omega_{De}^2} \right) - \left(1 - \frac{\omega_{de}}{\omega}\right) \left[\frac{\tilde{\phi}^2}{\phi^2} - \frac{\langle \tilde{\Phi}^{(0)2} \rangle}{\phi^2} \right]_{\text{cp}} +$$

$$+ \frac{T_e}{m_i \omega^2} \left[\left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial l} \right)^2 \right]_{\text{cp}} = 0. \quad (9.4)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (8.1), которое обладает тем свойством, что его коэффициенты действительны.

Возвращаясь к неоднородному интегро-дифференциальному уравнению (8.4), отметим, что если $T_e \sim T_i$, то можно пренебречь членом, содержащим вторую производную, так как по предположению $\omega < \langle \omega_{bi} \rangle$. С другой стороны, можно показать после оценки различных вариантов, что наиболее интересный асимптотический предел имеет место при $T_e > T_i$, $\omega \sim \omega_{di} < \omega_{de}$, $\tilde{b} > \tilde{\omega}_{De}/\omega$. Этот случай также интересен для практических приложений, так как $T_e > T_i$ во многих важных экспериментах по двумерным конфигурациям (гл. 16). Тогда в наинизшем порядке правая часть уравнения (8.4) сводится к $-\tilde{\phi} \langle \tilde{\omega}_{De}^{(0)2} \rangle / \omega$, и если $\omega \omega_{de} > T_e / M_i L^2$, то в уравнении (8.4) член, содержащий вторую производную, опять является пренебрежимо малым и $\tilde{\phi}/\bar{\phi} \sim \tilde{\omega}_{De}/\omega \ll 1$. В этом случае квадратичные члены, содержащие $(\tilde{\phi}/\bar{\phi})^2$, дают вклад такого порядка, как и $\omega_{de} \hat{\omega}_{De}^2 / \omega^3$, и можно показать, что $\omega \sim [\omega_{de} T_e / M_i R_c^2]^{1/2}$. Поэтому, если $L^2 \sim R_c^2$, то

условие $\omega_{de} > \omega$ означает также, что $\omega_{de} > T_e/M_i L^2 \omega$, и мы можем записать

$$\tilde{\phi}(l) - \langle \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle = -\bar{\phi} \frac{\langle \tilde{\omega}_{De}^{(0)} \rangle}{\omega}, \quad (9.5)$$

что соответствует уравнению (8.4) в наимизшем порядке.

Теперь важно отметить, что решение уравнения (9.5) можно формально записать как

$$\tilde{\phi}_l = \frac{\hat{\omega}_{De}}{\omega} G(l) \bar{\phi}, \quad (9.6)$$

где $G(l)$ — конечная действительная функция от l , зависящая от геометрии системы. Тогда уравнение (9.4) просто сводится к

$$\bar{b}_{(e)} \left(1 + \frac{\omega_{de}}{\omega} \frac{T_i}{T_e} \right) - \frac{\omega_{de} \bar{\omega}_{De}}{\omega^2} + \frac{\omega_{de} \hat{\omega}_{De}^2}{\omega^3} (1 + \Gamma_0) = 0, \quad (9.7)$$

где

$$\Gamma_0 \equiv [G^2(l) - \langle (G^{(0)})^2 \rangle]_{\text{ср}}, \quad \bar{b}_{(e)} \equiv T_e \bar{b} / T_i,$$

и напомним, что уравнение (1.12) по определению является положительной величиной при выполнении неравенства Шварца. Очевидно, что в этом случае мы выбрали $T_e/T_i > (\bar{\omega}_{De}^2 / \hat{\omega}_{De}^2)^{1/2}$.

Отметим, что уравнение (9.7) обладает третьим корнем дополнительно к двум, определяемым уравнением (8.2), вследствие расщепления электронной гравитационной моды, рассмотренной выше, на две моды, фазовые скорости которых совпадают по направлению со скоростью диамагнитного дрейфа электрона. Одна из них становится неустойчивой независимо от резонансных эффектов взаимодействия частиц с волной при условии, что

$$(3W + I^2)^{1/2} < \left[\left(\frac{3}{2} \right)^3 + I^3 \right] + \frac{9}{2} WI, \quad (9.8)$$

где

$$I \equiv \frac{T_i}{T_e} \left(\frac{\omega_{de}}{\hat{\omega}_{De}} \right)^{2/3} \left(\frac{\bar{b}_{(e)}}{1 + \Gamma_0} \right)^{1/3} = \frac{T_i}{T_e} \left(\frac{R_c}{2r_n} \right)^{2/3} \left(\frac{\bar{b}_{(e)}}{1 + \Gamma_0} \right)^{1/3}$$

и

$$W \equiv \bar{\omega}_{De} \left[\frac{\omega_{de}}{\hat{\omega}_{De}^4 \bar{b}_{(e)} (1 + \Gamma_0)^2} \right]^{1/2} = h \left[\frac{R_c}{2r_n \bar{b}_{(e)} (1 + \Gamma_0)^2} \right]^{1/2}.$$

Условие (9.8) получено посредством записи дисперсионного соотношения (9.7) в виде

$$F(\xi) = 1 + \frac{I}{\xi} - \frac{W}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^2} = 0$$

и требования $F(\xi_0) > 0$, где ξ_0 — положительный корень уравнения $dF/d\xi = 0$ и $\xi \equiv \omega \{ \bar{b}_{(e)} / [\omega_{de} \hat{\omega}_{De} (1 + \Gamma_0)] \}^{1/3}$. В частности, в пре-

дельном случае очень малого значения отношения T_i/T_e , когда члены, содержащие l , пренебрежимо малы, условие неустойчивости сводится к следующему:

$$h < 3(1 + \Gamma_0)^{2/3} \left[\frac{r_n}{2R_c} \bar{b}_{(e)} \right]^{1/3}. \quad (9.9)$$

В том же предельном случае, когда это условие выполняется с большим запасом, соответствующая мода неустойчива и частота ее колебаний по порядку величины равна скорости нарастания:

$$\gamma \sim \left(\omega_{de} \frac{T_e}{M_i R_c^2} \right)^{1/3}. \quad (9.10)$$

Заметим, что предположение о предельном случае $\omega < \omega_{de}$ влечет за собой выполнение неравенства

$$b_{(e)} > \left(\frac{r_n}{R_c} \right)^2. \quad (9.11)$$

В частности, условия (9.9) и (9.11) совместимы и действительно реализуются в интересных экспериментальных ситуациях, например в стеллараторах, где имеется полая магнитная яма, и ее характерная глубина $h \sim r_n/R_c$. Когда глубина магнитной ямы достаточно велика, так что неравенство (9.8) нарушается, то, как было показано в предыдущей главе, имеет место слабая неустойчивость, обусловленная резонансными эффектами при взаимодействии частиц с волнами.

Напомним в заключение, что наименьшее предельное значение отношения T_i/T_e , при превышении которого развивается рассмотренная выше неустойчивость гидродинамического типа, является функцией геометрии системы и может быть определено следующим образом. В предположении $L > R_c$, что не противоречит выбору значения $b \sim \bar{\omega}_{Di}^2/\omega^2$, рассмотрим асимптотический предельный случай $T_i \sim T_e$, $\omega < \omega_{de} \sim \omega_{di}$. Тогда уравнение (8.4) сводится к

$$\tilde{\phi} - \langle \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle = - \left(\frac{\bar{\phi}}{\omega} \right) \left\{ \langle \tilde{\omega}_{De}^{(0)} \rangle + \frac{T_i \langle \tilde{\omega}_{De} \rangle}{T_e} \right\},$$

так что формально

$$\tilde{\phi} \bar{\phi} = \left(\frac{\hat{\omega}_{De}}{\omega} \right) \cdot \left\{ G(l) + \left(\frac{T_i}{T_e} \right) H(l) \right\},$$

и дисперсионное соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{b} - \frac{\bar{\omega}_{De}}{\omega} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) + \\ + \frac{\hat{\omega}_{De}^2}{\omega^2} \left\{ 1 - \frac{T_i^2}{T_e^2} \left[\left(G + \frac{T_i}{T_e} H \right)^2 - \left\langle \left(G^{(0)} + \frac{T_i}{T_e} H^{(0)} \right)^2 \right\rangle \right]_{\text{cp}} - \right. \\ \left. + \left(\frac{T_i}{T_e \hat{\omega}_{De}} \right)^2 \left[\langle \omega_{De}^2 \rangle - \langle (\omega_{De}^{(0)})^2 \rangle \right]_{\text{cp}} \right\} = 0, \end{aligned}$$

где величины внутри квадратных скобок положительны при выполнении неравенства Шварца. Таким образом, можно легко получить условие неопределенного равновесия, а стабилизацию, возникающую при увеличении отношения T_i/T_e , можно объяснить эффектом конечного ларморовского радиуса иона.

10. МЕДЛЕННО НАРАСТАЮЩИЕ (ИОННЫЕ) МОДЫ

Это семейство мод имеет очень низкие частоты, $\omega < \langle \omega_{bi} \rangle < \langle \omega_{be} \rangle$, и поэтому как для ионов, так и для электронов сохраняется равенство $J = \oint v_{\parallel} dl$. В частности, возмущенная плотность электронов равна

$$n_{ek} = \frac{e}{T_e} n_{e0} \left\{ \phi - (\omega - \omega_{de}) \left\langle \frac{A_e^{(0)}}{\omega + \omega_{De}^{(0)}} \right\rangle \right\}, \quad (10.1)$$

и ионная плотность равна

$$n_{ik} = -\frac{e}{T_e} n_{i0} \left\{ \phi - (\omega - \omega_{di}) \left\langle J_0 \left(\frac{kv_{\perp}}{\Omega} \right) \sum_n \frac{A_i^{(n)} \exp(in\omega_b \hat{t})}{\omega + \omega_{Di}^{(0)} + n\omega_b} \right\rangle \right\}. \quad (10.2)$$

Тогда, следуя процедуре, изложенной в гл. 4, мы можем получить квадратичную форму, вычислив среднее от уравнения Пуассона

$$k^2 \phi = 4\pi e (n_{ik} - n_{ek})$$

по формуле $\oint (dl/B) \phi^*$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} & \left[\left(k^2 \lambda_{De}^2 + 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) |\phi|^2 - (\omega - \omega_{de}) \left\langle \frac{|A_e^{(0)}|^2}{\omega + \omega_{De}^{(0)}} \right\rangle - \right. \\ & \quad \left. - (\omega - \omega_{di}) \frac{T_e}{T_i} \left\langle \frac{|A_i^{(0)}|^2}{\omega + \omega_{Di}^{(0)}} \right\rangle \right]_{\text{cp}} + \\ & + \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \frac{T_e}{T_i} \frac{\pi}{2} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{bi}^2 n^2} \int \frac{dE}{E^{1/2}} \exp \left(-\frac{m_i}{2T_i} E \right) \times \right. \\ & \quad \times \int d\lambda \frac{L_0^3(\lambda)}{L^2} |A_i^{(n)}(E, \lambda)|^2 - \\ & \quad \left. - \frac{i}{\pi} \frac{|\omega^3|}{(n\hat{\omega}_{bi})^3} \int d\lambda \frac{L_0^4(\lambda)}{L^3} \exp \left[-\frac{m_i}{T_i} \left(\frac{\omega L(\lambda)}{2\pi n} \right)^2 \right] |A_i^{(n)}(\lambda)|^2 \right\} = 0, \quad (10.3) \end{aligned}$$

где $\lambda_{De}^2 \equiv T_e / (4\pi n e^2)$ и учтены члены более высокого порядка по $\omega/\hat{\omega}_{bi}$, как было указано при выводе уравнения (6.4).

11. МЕДЛЕННО НАРАСТАЮЩИЕ ЖЕЛОБКОВЫЕ МОДЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЛОКАЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим теперь моды, у которых перпендикулярные длины волн больше ионных гирорадиусов, так что $ka_i < 1$. Это означает, что $\langle \omega_{Di}^2 \rangle / \langle \omega_{bi} \rangle^2 \sim (ka_i)^2 L^2 / R_c^2 < 1$. Поэтому

$$|A_i^{(0)}|^2 \approx \left| \left\{ \phi(\hat{t}) \left[1 - \frac{1}{4} \frac{k^2 v_{\perp}^2}{\Omega_i^2}(\hat{t}) + ik \int^{\hat{t}} (v_{Di}(t') - v_{Di}^{(0)}) \right] \right\} \right|^2$$

и

$$|A_e^{(0)}|^2 \approx |\Phi^{(0)}|^2.$$

Пренебрегая вначале членами более высокого порядка, чем ω/ω_{bi} , найдем, что уравнение (10.3) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) (|\phi|^2 - \langle |\Phi^{(0)}|^2 \rangle) - \right. \\ & - \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{T_e}{T_i} \left\langle \frac{\omega_{Di}^{(0)} (\omega_{di} + \omega_{Di}^{(0)})}{\omega^2 + \omega \omega_{Di}^{(0)} (1 - T_e/T_i) - \omega_{Di}^{(0)2} T_e/T_i} |\Phi^{(0)}|^2 \right\rangle + \\ & \left. + (\omega - \omega_{di}) \frac{T_e}{T_i} \left\langle \frac{|\Phi^{(0)}|^2 - |A_i^{(0)}|^2}{\omega + \omega_{Di}^{(0)}} \right\rangle \right]_{\text{cp}} = 0. \quad (11.1) \end{aligned}$$

Теперь если взять предельный случай $\omega < \omega_{Di}$, то легко показать, что достаточным условием стабильности является $\omega_{di} \omega_{Di}^{(0)} > 0$, означающее, что

$$\frac{\partial J}{\partial \psi} < 0, \quad (11.2)$$

т. е. величина J максимальна во всех случаях, когда $\partial n_0 / \partial \psi < 0$.

Условие (11.2) означает, что усредненный дрейф каждой частицы, обусловленный кривизной магнитных силовых линий, является вполне определенным и благоприятным для устойчивости. В данной главе мы рассматриваем конфигурации или магнитные поверхности, для которых неравенство (11.2) не выполняется и глубина магнитной ямы также невелика, причем понятие «глубины» ямы будет определено позже. Тогда удобно опять, как в гл. 9, разделить ϕ на $\bar{\phi} + \tilde{\phi}$ и взять усредненную и периодическую по $\int dl/B$ часть дисперсионного соотношения:

$$\phi - \langle \Phi^{(0)} \rangle - \frac{T_e}{T_i} \left\langle \frac{\omega_{Di}^{(0)} (\omega_{di} + \omega_{Di}^{(0)})}{\omega^2 + \omega \omega_{Di}^{(0)} (1 - T_e/T_i) - \omega_{Di}^{(0)2} T_e/T_i} \Phi^{(0)} \right\rangle = 0. \quad (11.3)$$

Здесь мы пренебрегли членом порядка $(ka_i)^2$, соответствующим последнему слагаемому уравнения (11.1), предположив, что

$$\frac{\omega_{Di}^2}{\omega^2} \sim (ka_i)^2 \frac{\hat{\omega}_{bi}^2}{\omega^2} \frac{L^2}{R_c^2} > (ka_i)^2. \quad (11.4)$$

Таким образом, если учитывать члены второго порядка по параметру ω_{Di}^2/ω^2 , то имеем

$$\begin{aligned} \phi(l) - \langle \Phi^{(0)} \rangle &= \\ &= \frac{T_e}{T_i} \left\langle \left[\frac{\omega_{di} \omega_{Di}^{(0)}}{\omega^2} + \frac{\omega_{Di}^{(0)2}}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \right] \Phi^{(0)} \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (11.5)$$

и после усреднения

$$\begin{aligned} \left[\bar{\omega}_{Di} \frac{\omega_{di}}{\omega^2} + \frac{[\langle \omega_{Di}^{(0)2} \rangle]_{\text{ср}}}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \right] \bar{\phi} + \\ + \frac{\omega_{di}}{\omega^2} [\langle \omega_{Di}^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle]_{\text{ср}} = 0, \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(l) - \langle \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle &= \\ &= \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di}}{\omega^2} [\langle \tilde{\omega}_{Di}^{(0)} - \bar{\omega}_{Di} \rangle \bar{\phi} + \langle \omega_{Di}^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)} - [\langle \omega_{Di}^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle]_{\text{ср}} \rangle]. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Видно, что по порядку величины $\tilde{\phi} \sim (\omega_{de} \omega_{Di} / \omega^2) \bar{\phi}$ и поэтому, чтобы перейти к случаю $\tilde{\phi} / \bar{\phi} < 1$, предположим, что

$$\frac{\omega_{de} \omega_{Di}}{\omega^2} < 1, \quad (11.8)$$

а в уравнении (11.6) выделим соответствующий член, содержащий $\tilde{\phi}$ при выполнении неравенства

$$\bar{\omega}_{Di} < \hat{\omega}_{Di}, \quad (11.9)$$

которое, грубо говоря, означает, что усредненная кривизна магнитных силовых линий меньше характерной локальной кривизны. Здесь $\bar{\omega}_{Di} \equiv [\langle \omega_{Di} \rangle]_{\text{ср}}$ и $\hat{\omega}_{Di}^2 \equiv [\langle \omega_{Di}^{(0)2} \rangle]_{\text{ср}}$. В этих условиях уравнение (11.7) в наинизшем порядке имеет вид

$$\tilde{\phi}(l) - \langle \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle = \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di}}{\omega^2} \langle \omega_{Di}^{(0)} \rangle \bar{\phi}. \quad (11.10)$$

Его решение можно формально записать как

$$\tilde{\phi} = \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di} \hat{\omega}_{Di}}{\omega^2} G(l) \bar{\phi}, \quad (11.11)$$

где $G(l)$ — действительная конечная функция l , зависящая от конкретной геометрии системы. С другой стороны, рассматривая последний член уравнения (11.6) и вспоминая вывод уравнения (9.2), получаем

$$\langle \omega_{Di}^{(0)} \tilde{\Phi}^{(0)} \rangle_{\text{ср}} = [\phi(l) \langle \omega_{Di}^{(0)} \rangle]_{\text{ср}} \quad (11.12)$$

и

$$\bar{\phi} [\tilde{\phi}(l) \langle \omega_{Di}^{(0)} \rangle]_{\text{ср}} = \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega^2}{\omega_{di}} [\tilde{\phi}^2(l) - \langle \tilde{\Phi}^{(0)2} \rangle]_{\text{ср}}. \quad (11.13)$$

Завершая эту процедуру, заменим величину $\tilde{\phi}$ ее формальным выражением (11.11) и получим из уравнения (11.6) дисперсионное соотношение

$$\epsilon_0 \equiv -\frac{\omega_{di} \bar{\omega}_{Di}}{\omega^2} + \frac{\omega_{di}^2 \hat{\omega}_{Di}^2}{\omega^4} \frac{T_e}{T_i} \Gamma - \frac{\hat{\omega}_{Di}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) = 0. \quad (11.14)$$

Здесь $\Gamma \equiv [G^2(l) - \langle (G^{(0)})^2 \rangle]_{\text{ср}}$ — функция положительная по определению, если выполняется неравенство Шварца, и конечная для таких магнитных полей B , которые изменяются вдоль l на конечную величину, и ϵ_0 — диэлектрическая постоянная.

Окончательно решения уравнения (11.14) имеют вид

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \omega_{di} \frac{[1 - (T_e/T_i) \pm D]}{1 + \omega},$$

где

$$\omega \equiv \bar{\omega}_{Di} \frac{\omega_{di}}{\hat{\omega}_{Di}^2} \quad \text{и} \quad D^2 \equiv \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right)^2 - 4\Gamma \left(\frac{T_e}{T_i} \right) (1 + \omega).$$

В частности, мы можем записать с точностью до порядка величины, что

$$\omega = \frac{hR_c}{2r_n},$$

где $h \equiv R_c [(1/R_c)]_{\text{ср}}$. Таким образом, мы получили следующие результаты:

1. Если $\Gamma(\omega + 1) > (1 - T_e/T_i)^2 T_i/4T_e$, то независимо от резонансных эффектов взаимодействия частиц с волной развивается алгебраически неустойчивая мода. Отметим, что действительная часть выражения для частоты определяет фазовую скорость, которая совпадает по направлению с диамагнитной скоростью электронов при $T_e > T_i$ или ионов, если $T_i > T_e$.

В случаях достаточно глубокой ямы скорость нарастания этой моды равна

$$\gamma \approx \hat{\omega}_{Di} \left(\frac{\Gamma \omega_{di} T_e}{\langle \hat{\omega}_{Di} \rangle T_i} \right)^{1/2},$$

т. е. скорость уменьшается с увеличением глубины ямы. Заметим, что условие $\tilde{\phi}/\bar{\phi} \approx \omega_{*i}\omega_{Di}T_eG/\omega^2T_i < 1$ справедливо при $\bar{\omega}_{Di} < G\hat{\omega}_{Di}$, т. е. в конфигурациях с относительно глубокой магнитной ямой (см. гл. 16), когда

$$h < G.$$

2. Если $(T_i/4T_e)(1 - T_e/T_i)^2 > (\omega + 1)G$, то из уравнения (11.14) следует наличие двух чисто осцилляторных мод. Это условие может быть реализовано в случаях пологой магнитной ямы и относительно больших значений отношений T_e/T_i или T_i/T_e . Можно показать, что фазовая скорость этих мод совпадает по направлению со скоростью ионного диамагнитного дрейфа, если $T_i/T_e > 1$, и направлена в противоположную сторону при $T_e/T_i > 1$.

Важно отметить, что энергия, содержащаяся в этих модах, имеет разные знаки, т. е. энергия одной моды положительна, другой отрицательна, и поэтому мы полагаем, что одна из этих мод становится неустойчивой, если дополнительно к данному рассмотрению учесть резонансные эффекты при взаимодействии частиц с волнами, которые обсуждались в гл. 10. Действительно, энергия волны U_h пропорциональна

$$\frac{\omega \partial \varepsilon_0}{\partial \omega} \sim \frac{\omega}{\omega_{di}} \left[1 - \frac{T_e}{T_i} - 2(\omega + 1) \frac{\omega}{\omega_{di}} \right] \sim \mp \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) - D,$$

и диэлектрическая постоянная, учитывающая резонансные эффекты между волной и ионами с частотой обращения $\omega_b(E, \mu) = \omega_0$ (см. гл. 10), равна

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - i(\omega - \omega_{di}) \frac{\Delta}{|\omega|},$$

где Δ — величина положительная по определению и

$$\Delta \sim \frac{\omega^3}{\hat{\omega}_{bi}^3} \frac{|A^{(1)}|^2}{|\bar{\phi}|^2} \frac{1}{1 + T_e/T_i}.$$

Теперь

$$\frac{|A^{(1)}|^2}{\bar{\phi}^2} \sim \left(\frac{\tilde{\phi}}{\bar{\phi}} \right)^2 + \left(\frac{\hat{\omega}_{Di}}{\hat{\omega}_{bi}} \right)^2 \sim \frac{\hat{\omega}_{Di}^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega_{de}^2}{\omega^2} + \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{bi}^2} \right) \sim \left(\frac{\hat{\omega}_{Di}\omega_{de}}{\omega^2} \right)^2,$$

так что

$$\Delta \sim \frac{(\omega_{de}\hat{\omega}_{Di}G)^2}{|\omega| \hat{\omega}_{bi}^3 (1 + T_e/T_i)}. \quad (11.15)$$

В данном случае, положив $\omega = \omega_0 - i\gamma$, дисперсионное соотношение можно решить по теории возмущений и

$$\gamma = \left[D \mp \left(2\omega + 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \right] \omega_0^4 \frac{\Delta}{2\omega_{Di}^2 |\omega_0| (1 + \omega)}.$$

Вышеприведенный анализ указывает на вполне реальную возможность наблюдения флуктуаций желобкового типа в таких конфигурациях, в которых глубина магнитной ямы невелика в достаточно большом диапазоне значений ψ и когда отношения T_i/T_e или T_e/T_i значительно больше единицы.

3. Значение двух наибольших корней уравнения (11.14) можно понять, сделав предположение, что $k_c^2 > L^2$, так что $(ka_i)^2 \sim \sim \omega_{Di}^2/\omega^2$. Тогда, пересмотрев уравнения гл. 10 с учетом конечного гирорадиуса ионов, мы приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$\varepsilon_2 \equiv b \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) - \frac{\omega_{Di}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) - \frac{\omega_{di} \bar{\omega}_{Di}}{\omega^2} - \\ - \frac{\omega_{di}^2 \hat{\omega}_{Di}^2}{\omega^4} \frac{T_e}{T_i} \Gamma - i(\omega - \omega_{di}) \frac{\Delta}{|\omega|} = 0, \quad (11.16)$$

где $b \approx k_{\perp}^2 a_i^2$. Теперь можно показать, что оба упомянутых корня приводят к практически гидромагнитным желобковым модам, что связано с равенством второго и четвертого членов в выражении для ε_2 .

Сравнивая между собой желобковые моды, рассмотренные в данной главе и гл. 9, отметим, что

1. Медленно нарастающие моды ($\omega < \hat{\omega}_{bi}$) стремятся принять резонансный характер, т.е. имеет место неалгебраическая неустойчивость, в условиях экстремальных отношений температур (большое значение T_i/T_e или T_e/T_i) и в областях или конфигурациях с пологой магнитной ямой. Поэтому неустойчивость гидродинамического типа развивается только в том случае, когда магнитная яма становится достаточно глубокой или когда $T_i = T_e$.

2. В противоположность этому быстро нарастающие моды ($\omega > \hat{\omega}_{be}$) принимают характер неустойчивости гидродинамического типа в случае пологой магнитной ямы и относительно большого отношения T_e/T_i . Если одно из этих условий не выполнено, то соответствующая неустойчивость носит резонансный характер.

В заключение мы отметим, что если постепенно переходить из областей, где выполняется условие $\bar{\omega}_{Di} < \hat{\omega}_{Di}$, в области, где оно нарушается, то интересующее нас решение $\phi(l)$ становится все более и более локализованным и, таким образом, ожидается переход данных мод в моды, рассматриваемые в гл. 15. Это соответствует переходу из областей с относительно большим числом частиц и с неблагоприятной средней дрейфовой скоростью $v_D^{(0)}$, обусловленной кривизной магнитных силовых линий, в области с относительно малым числом частиц данного типа (см. гл. 16).

12. НИЗКАЯ ПЛОТНОСТЬ, ИОННАЯ ЖЕЛОБКОВАЯ МОДА [29]

Если мы рассмотрим теперь режим низкой плотности, когда существенными являются эффекты, обусловленные конечной дебаевской длиной, то сможем получить другие типы неустойчивых мод желобкового типа при выполнении, как следует из уравнения (11.11), следующего условия:

$$\frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di} \hat{\omega}_{Di}}{\omega^2} G < 1. \quad (12.1)$$

Соответствующее дисперсионное соотношение принимает вид

$$\epsilon_3 \equiv \frac{T_i}{T_e + T_i} \left[k^2 \lambda_{Di}^2 + \bar{b} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \right] - \frac{\hat{\omega}_{Di}^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) - \frac{\omega_{di} \bar{\omega}_{Di}}{\omega^2} - \frac{\omega_{di}^2 \hat{\omega}_{Di}^2}{\omega^4} \frac{T_e}{T_i} \Gamma - i(\omega - \omega_{di}) \frac{\Delta}{|\omega|} = 0, \quad (12.2)$$

где $\lambda_{Di}^2 = T_i / 4\pi n e^2$.

Отметим, что если $T_e / T_i \ll 1$, то у интересующей нас моды частота ω не зависит от T_e ; поэтому, как следует из уравнения (11.11), величина $\tilde{\phi}$ пренебрежимо мала по сравнению с $\bar{\phi}$. Таким образом, данная мода действительно становится желобковой. Тогда дисперсионное соотношение сводится к следующему:

$$k^2 \lambda_{Di}^2 - \frac{\omega_{di} \bar{\omega}_{Di}}{\omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \left(\bar{b} - \frac{\hat{\omega}_{Di}^2}{\omega^2} - i\Delta \frac{\omega}{|\omega|} \right) = 0, \quad (12.3)$$

где Δ теперь не зависит от $\tilde{\phi}$, так как $|A^{(1)}|^2 \sim |\bar{\phi} \hat{\omega}_{Di} / \omega|^2$. Поэтому из уравнения (10.3) имеем

$$\Delta \sim \frac{|\omega| \hat{\omega}_{Di}^2}{\hat{\omega}_{Di}^3}. \quad (12.4)$$

Если магнитная яма достаточно пологая, так что $\bar{\omega}_{Di} / \hat{\omega}_{Di} < \hat{\omega}_{Di} / \omega$, то тогда может развиваться неустойчивость резонансного типа с частотой $\omega = \omega_{di} + \delta\omega$, и в данном асимптотическом пределе

$$\frac{\delta\omega}{\omega_{di}} = \left(k^2 \lambda_{Di}^2 - \frac{\bar{\omega}_{Di}}{\omega_{di}} \right) \frac{1}{\hat{\omega}_{Di}^2 / \omega_{di}^2 + i\Delta}. \quad (12.5)$$

В этом случае неустойчивость развивается, если [29]

$$k^2 \lambda_{Di}^2 > \frac{2hr_n}{R_c}. \quad (12.6)$$

С другой стороны, из соотношения (12.3) можно получить также неустойчивость гидродинамического типа. Это уравнение в предельном случае $L/R_c \sim 1$ сводится к следующему:

$$1 - \frac{\bar{\omega}_{Di}\omega_{di} + \hat{\omega}_{Di}^2}{k^2\lambda_{Di}^2\omega^2} + \frac{\omega_{di}\hat{\omega}_{Di}^2}{k^2\lambda_{Di}^2\omega^3} = 0. \quad (12.7)$$

Условием развития неустойчивости является неравенство

$$k\lambda_{Di} > \frac{2}{3^{1/2}} \left[h \left(\frac{R_c}{2r_n} \right)^{1/2} + \left(\frac{2r_n}{R_c} \right)^{2/3} \right]^{1/2}, \quad (12.8)$$

которое можно сравнить с условием (12.6) развития неустойчивости резонансного типа [29, 30].

13. МЕДЛЕННО НАРАСТАЮЩИЕ ДРЕЙФОВЫЕ МОДЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА [14, 23, 24]

Рассмотрим теперь моды, которые не являются желобковыми в том смысле, что $\tilde{\phi} \geq \bar{\phi}$. Как мы покажем, эти моды могут становиться неустойчивыми даже при отсутствии эффектов, обусловленных кривизной магнитных силовых линий, и они отличаются от мод, рассмотренных в гл. 7, так как по существу их происхождение связано с тем, что $\Phi^{(0)} \neq 0$. Для этого мы обратимся к квадратичной форме уравнения (10.3), возьмем предельный случай $\omega_{Di} < \omega$ и вспомним вывод уравнения (11.1). Для $k^2\lambda_{De}^2 < 1$ и $k^2a_i^2 < 1$ получим

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) (|\phi|^2 - \langle |\Phi^{(0)}|^2 \rangle) - \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{di}}{\omega^2} \langle \omega_{Di}^{(0)} | \Phi^{(0)}|^2 \rangle + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \frac{T_e}{T_i} \langle |\Phi^{(0)}|^2 - |A_i^{(0)}|^2 \rangle \right]_{\text{cp}} + \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_{bi}^2} \times \\ & \times \sum_{n \neq 0} \int \int dE d\mu f_{i0} |\tau^3| \sum_{n \neq 0} \left| \frac{2\pi}{n} \hat{\omega}_{bi} \Phi^{(n)}(E, \mu) \right|^2 = 0. \quad (13.1) \end{aligned}$$

Теперь имеется возможность найти последовательно такие моды, которые становятся неустойчивыми, когда в низшем порядке существенными становятся члены, содержащие $\omega^2/\hat{\omega}_{bi}^2$. С этой целью мы вынуждены рассмотреть предельный случай $\omega < \omega_{di}$. Тогда, вспомнив уравнение (1.10) и выполнив обычную процедуру интегрирования, получим

$$\begin{aligned} & \int \int dE d\mu f_{00} |\tau| \left\{ \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \sum_n |\Phi^{(n)}|^2 - \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{\omega_{di}\omega_{Di}^{(0)}}{\omega^2} |\Phi^{(0)}|^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_{di}}{\omega} \left(|\Phi^{(0)}|^2 - |A_i^{(0)}|^2 + \frac{\omega^2}{\omega_b^2} \sum_{n \neq 0} \left| \frac{\Phi^{(n)}}{n} \right|^2 \right) \right\} = 0, \quad (13.2) \end{aligned}$$

где $\{|\Phi^{(0)}|^2 - |A_i^{(0)}|^2\}$ — действительная положительная функция, равная по порядку величины $b|\Phi^{(0)}|^2$. Уравнение (13.2) можно переписать, используя очевидную идентификацию интегралов как P , Q , R и S , т. е.

$$\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)P - \frac{\omega_{di}}{\omega} \left\{ \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} Q + \bar{b}R + \frac{\omega^2}{\hat{\omega}_b^2} S \right\} = 0. \quad (13.3)$$

В данном случае в дисперсионное соотношение введены величины \bar{b} , $\hat{\omega}_{bi}$ и $\hat{\omega}_{Di}$, что позволяет оценить порядок величин различных членов. Отметим, что уравнение (13.3) возможно записать в вариациях относительно ω , ω^2 или ω^3 . Мы будем использовать эту форму записи, если даже указанные величины не варьируются, чтобы оценить порядок величины ω и порог неустойчивости.

Покажем прежде всего, что если кривизна магнитных силовых линий так мала, что

$$\bar{b} > \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega},$$

то неустойчивость развивается при

$$\omega_{di} > \hat{\omega}_{bi} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{P}{(RSb)^{1/2}}. \quad (13.4)$$

В этом случае скорость нарастания по порядку величины равна

$$\gamma \sim \bar{b}^{1/2} \hat{\omega}_{bi} \left(\frac{R}{S}\right)^{1/2} \sim ka_i \frac{v_{thi}}{L}. \quad (13.5)$$

Соответствующую неустойчивость можно классифицировать как неустойчивость дрейфового типа, поскольку она не зависит от кривизны магнитных силовых линий и вызывает преобразование средней кинетической энергии иона вдоль силовых линий. Можно также показать из уравнения (13.3), что фазовая скорость неустойчивой моды совпадает по направлению со скоростью диамагнитного дрейфа ионов. Если рассмотреть, кроме того, энергию обеих мод, используя уравнение (13.3) при $\hat{\omega}_{Di} = 0$, как это было сделано в гл. 7, то можно показать, что энергии этих мод имеют противоположные знаки. Можно убедиться, что моды становятся неустойчивыми вследствие нелинейного взаимодействия друг с другом даже в том случае, когда неравенство (13.4) строго не выполняется. Поэтому условие для границы области устойчивости можно определить как

$$\omega_{di} > \hat{\omega}_{bi} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2}. \quad (13.6)$$

Рассмотрим теперь строго случай $L \sim R_c$; при этом в уравнении (13.3) член, содержащий $\hat{\omega}_{Di}/\omega$ и обусловленный кривизной

силовых линий, безусловно, превышает член, содержащий \bar{b} . В такой ситуации посредством соответствующей нормировки переменной $\omega \sim x$ мы можем привести уравнение (13.3) к виду

$$1 - \frac{D}{x^2} - x = 0, \quad (13.7)$$

где

$$D \equiv \frac{\hat{\omega}_{Di} \omega_{di}^3}{\hat{\omega}_{bi}^4} \frac{S^2 Q}{(1 + T_i/T_e)^2 P^3}. \quad (13.8)$$

Поэтому можно показать, что если $D > 0$, то неустойчивость гидродинамического типа развивается при

$$D > \frac{4}{27}. \quad (13.9)$$

Это грубо, с точностью до численных коэффициентов означает, что

$$\bar{b} > \left(\frac{r_n}{L}\right)^{1/2} \left(\frac{R_c}{L}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right).$$

Поэтому достаточным условием устойчивости при $T_i/T_e > 1$ является неравенство

$$\frac{T_i}{T_e} \gg \left(\frac{L}{r_n}\right)^{1/2} \left(\frac{L}{R_c}\right)^{1/2}.$$

Если условие (13.9) сильно нарушено, то скорость нарастания по порядку величины равна

$$\gamma \sim \hat{\omega}_{bi}^{2/3} \hat{\omega}_{Di}^{1/3} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{1/3} \left(\frac{Q}{S}\right)^{1/3} \sim (ka_i)^{1/3} \frac{v_{th i}}{(L^2 R_c)^{1/3}} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{1/3}.$$

По величине γ примерно равна частоте осцилляций и велика в реальных плазменных конфигурациях.

Эта мода остается неустойчивой при $0 < D < 4/27$ за счет резонансного взаимодействия частиц с волной. В уравнении (13.3) мы пренебрегли членом, учитывающим это взаимодействие, и ниже (в гл. 15) он будет строго проанализирован.

В заключение укажем, что если $D < 0$, то неустойчивой становится другая гидродинамическая мода, и это новое семейство мод мы рассмотрим в следующей главе.

14. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НА ЗАПЕРТЫХ ЧАСТИЦАХ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ КРИВИЗНОЙ МАГНИТНЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ

Данные моды [12, 16, 17] получаются из уравнения (11.1) в таком предельном случае, когда можно пренебречь последним слагаемым, обусловленным конечным ионным гирорадиусом. Эти моды развиваются в окрестности таких силовых линий, на кото-

рых немного частиц с $\omega_{Di}^{(0)}\omega_{di} < 0$, т. е. $\partial J/\partial\psi > 0$, проводят относительно много времени в областях с неблагоприятной кривизной. Эти моды довольно сильно локализованы вдоль силовых линий, так что \bar{v}_{Di} не выходит далеко из этой области и, очевидно, отношение $\tilde{\phi}/\bar{\phi}$ не является более малой величиной.

Рассмотрим для простоты случай, когда не существенны резонансы типа $\omega - \omega_{Di}^{(0)} = 0$; тогда уравнение (11.1) можно использовать для применения вариационных методов и оно принимает вид

$$\omega^2 = \frac{T_e}{T_i} \omega_{di} \frac{(\pi/2) \int \int dE d\mu f_{0i} |\tau| \omega_{Di}^{(0)} |\Phi^{(0)}|^2}{\oint dl/B \{ |\phi|^2 - \langle |\Phi^{(0)}|^2 \rangle \}}. \quad (14.1)$$

Очевидно, если имеется немного частиц с $\omega_{Di}^{(0)} < 0$, то весьма важно, чтобы соответствующее время τ было относительно большим, т. е. $\omega^2 < 0$. Поэтому частицы, которые проводят длительное время в области с неблагоприятной кривизной силовых линий и дают вклад в неустойчивость, будут либо только запертыми, либо только пролетными.

Действительно, если взять сильно локализованную пробную функцию, такую, как, например, $\phi(l) \approx \delta(l - l_0)$, то мы имеем

$$\Phi^{(0)}(\lambda) \approx \left\{ [1 - \lambda B(l_0)]^{1/2} \oint \frac{dl}{(1 - \lambda B)^{1/2}} \right\}^{-1}$$

и числитель выражения (14.1) принимает вид

$$\left(\frac{\pi}{2} \int dE f_{0i}(E) E^{3/2} \right) \int_0^{1/B(l_0)} d\lambda \frac{\hat{\omega}_{Di}^{(0)}(\lambda)}{[1 - \lambda B(l_0)] \oint dl/(1 - \lambda B)^{1/2}},$$

где $\hat{\omega}_{Di}^{(0)}(\lambda) = \omega_{Di}^{(0)}(E, \mu) T_i/m_i E$.

Теперь основной является частота $\omega_{Di}^{(0)}$ [при этом $\lambda = B(l_0)^{-1}$] из-за наличия множителя $[1 - \lambda B(l_0)]$ в знаменателе интеграла по λ . Поэтому неустойчивость может развиваться всякий раз, когда частицы, скорость которых примерно равна нулю и параллельна $B(l_0)$, испытывают неблагоприятный дрейф, обусловленный кривизной силовых линий.

15. МОДЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ПРИМЕСНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

В работе [31] показано, что в плазме могут возникать новые неустойчивые моды, если плазма состоит, например, из двух сортов ионов с разными тепловыми скоростями из-за различия тем-

ператур или различия масс. В работах [3, 14, 24] было обращено внимание на то, что имеется тесное сходство между этими модами и рассмотренными нами ранее модами, обусловленными запертыми частицами.

Мы не будем вначале рассматривать эффекты, обусловленные кривизной магнитных силовых линий, а обратимся к случаю, проанализированному в гл. 13. Соответствующие моды могут быть отождествлены с модами, возникающими в конфигурациях с прямым магнитным полем (см. фиг. 3), где роль запертых электронов и ионов выполняют холодные электроны и ионы с плотностями n_{eC} и n_{iC} и температурами T_{eC} и T_{iC} . В этом случае решения для собственных мод записываются в виде

$$\Phi = \tilde{\phi} \exp(i\omega t + ik_{\theta} r_{\theta} + ik_{\parallel} l), \quad (15.1)$$

а их фазовые скорости таковы, что

$$v_{th iC} < v_{th eC} < \frac{\omega}{k_{\parallel}} < v_{th i} < v_{th e}. \quad (15.2)$$

Таким образом, возмущенные плотности равны соответственно

$$\tilde{n}_{eC} = \frac{\tilde{\phi}}{\omega} k_{\theta} \frac{c}{B} \frac{dn_{eC}}{dx} = \frac{e\tilde{\phi}}{T_{eC}} n_{eC} \frac{\omega_{deC}}{\omega} \quad (15.3)$$

и

$$\tilde{n}_{iC} = -\frac{e\tilde{\phi}}{T_{iC}} n_{iC} \left[\frac{\omega_{diC}}{\omega} + b_{iC} \left(1 - \frac{\omega_{diC}}{\omega} \right) \right], \quad (15.4)$$

где обозначения ω_{deC} и ω_{diC} являются очевидными.

При выводе выражения (15.3) мы учли только дрейф в скрещенных полях $\mathcal{E} \times \mathbf{B}$ поперек силовых линий, в то время как в уравнении (15.4) дополнительно учитываются поляризация и дрейф, обусловленный конечным ларморовским радиусом (см. гл. 17). С другой стороны, для горячих (незапертых) электронов имеем

$$\tilde{n}_e = \frac{e\tilde{\phi} n_e}{T_e} \quad (15.5)$$

и для соответствующих ионов

$$\tilde{n}_i = \frac{e\tilde{\phi}}{T_i} n_i \left[1 - \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{th i}} \right], \quad (15.6)$$

где последний член в квадратных скобках обусловлен затуханием Ландау. Теперь мы предположим, что функция распределения ионов имеет плато при $v_{\parallel} = 0$, что позволит нам выявить характер резонансного взаимодействия волны с частицей в изме-

няющемся магнитном поле. Следовательно, как показано было при выводе уравнения (6.6), имеем

$$\tilde{n}_i = -\frac{e\tilde{\phi}}{T_i} n_i \left[1 + \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \alpha_2 \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th i}^2} \right]. \quad (15.7)$$

Накладывая условие квазинейтральности вида $\tilde{n}_i + \tilde{n}_{iC} = \tilde{n}_e + \tilde{n}_{eC}$ при $n_i = n_e$ и $n_{iC} = n_{eC} \equiv n_C$, мы приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$\left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) - \frac{\omega_{di}}{\omega} \left(\frac{n_C}{n} b_{iC} + \alpha_2 \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th i}^2} \right) = 0, \quad (15.8)$$

которое воспроизводит уравнение (13.3).

В заключение мы покажем, что магнитное поле с пространственной вариацией, помимо изменения характера резонансного взаимодействия волны с частицей (последствия этого процесса рассмотрены в гл. 6 и последующих разделах), приводит к тому, что распределение возмущенных частиц для частот, меньших характерной частоты дрейфового цикла, не является максвелловским в том смысле, что $f_1 \neq -e\Phi f_0/T$, но $f_1 = -(ef_0/T) (\phi - \Phi^{(0)})$. Причина этого явления заключается в том, что всегда имеется много настолько медленных частиц, что их частота дрейфового цикла меньше частоты волны; эта ситуация аналогична тому, что в упомянутой ранее конфигурации, подобной системе с прямыми силовыми линиями магнитного поля, имеется много холодных частиц, у которых $k_{\parallel} v_{th} < \omega < k_{\parallel} (v_{th})$.

Наконец, можно учесть влияние кривизны магнитных силовых линий посредством добавления членов, ответственных за дрейф при наличии кривизны силовых линий (гл. 17). Тогда вместо выражений (15.3) и (15.4) имеем

$$\tilde{n}_{eC} = \frac{e}{T_{eC}} n_{eC} \left[\frac{\omega_{deC}}{\omega} - \frac{\omega_{DeC}}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_{deC}}{\omega} \right) \right] \tilde{\phi}$$

и

$$\tilde{n}_{iC} = -\frac{e}{T_{iC}} n_{iC} \left[\frac{\omega_{diC}}{\omega} + \left(b_{iC} - \frac{\omega_{DiC}}{\omega} \right) \left(1 - \frac{\omega_{diC}}{\omega} \right) \right] \tilde{\phi}.$$

Если, кроме того, учесть эффекты, подобные резонансным при взаимодействии волн с частицами, то, согласно уравнению (6.6), выражение (15.6) принимает вид

$$\tilde{n}_i = -\frac{e\tilde{\phi}}{T_i} n_i \left[1 + \left(1 - \frac{\omega_{di}}{\omega} \right) \left(\alpha_2 \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th i}^2} - i\alpha_3 \frac{\omega^3}{k_{\parallel}^3 v_{th i}^3} \right) \right].$$

Искомое дисперсионное соотношение имеет вид

$$\left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_e}\right) - \frac{\omega_{DiC}\omega_{dIC}}{\omega^2} \frac{n_C}{n} \left(\frac{1}{T_{iC}} + \frac{T_{eC}}{T_{iC}}\right) - \frac{n_C}{n} \frac{b_{iC}}{T} \left(1 - \frac{\omega_{dIC}}{\omega}\right) + \left(1 - \frac{\omega_{dI}}{\omega}\right) \left(\alpha_2 \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th i}^2} - i\alpha_3 \frac{\omega^3}{k_{\parallel}^3 v_{th i}^3}\right) = 0 \quad (15.9)$$

и воспроизводит уравнение (13.3) с дополнительным членом, отражающим резонансное взаимодействие частиц с волной. Таким образом, если пренебречь членом, содержащим b_{iC} , то для частот $\omega < \omega_{di}$ уравнение (15.9) можно переписать по аналогии с уравнением (13.7) в следующем виде:

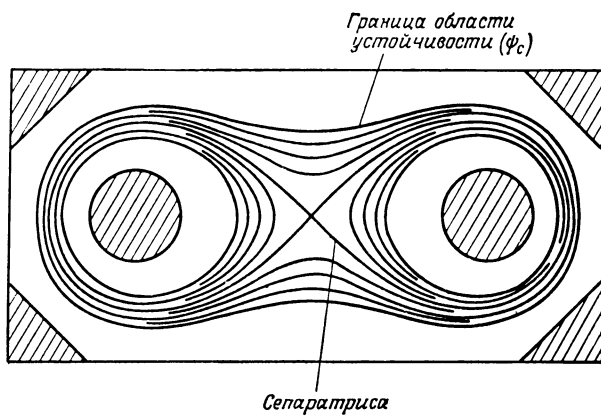
$$1 - \frac{D}{x^2} - x + i\Delta x^2 = 0,$$

где величины D и x определены так же, как в уравнениях (13.7) и (13.8), а член, содержащий Δ , обусловлен резонансным взаимодействием волн с частицами. В этом случае нетрудно убедиться в том, что при наличии этого члена всегда имеется неустойчивая мода при любом значении D .

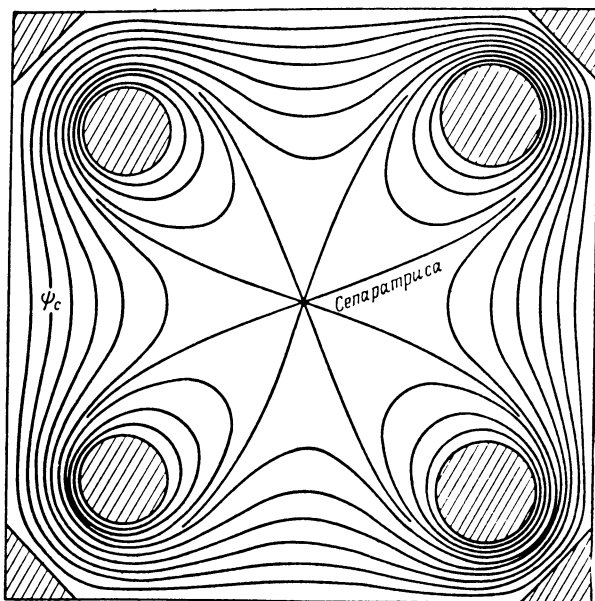
16. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В настоящее время трудно сопоставлять полученные результаты с экспериментальными данными. С одной стороны, в экспериментах регистрируются колебания, соответствующие конечной стадии нелинейной эволюции коллективных мод, характеристики которых теоретически исследовались только в начальной стадии развития. Действительно, все еще не достигнуто решение проблемы нелинейного взаимодействия мод, описанных в предыдущих разделах; это связано с тем, что данные моды необычно сложным образом перепутывают координатное и импульсное пространства. По этой же причине до сих пор нет полного понимания всех явлений, обусловленных столкновениями частиц.

С другой стороны, основная цель экспериментов, проведенных в двумерных плазменных конфигурациях, заключалась в достижении большого времени удержания и недостаточно исследовались такие академические вопросы, как выяснение причин, почему определенные моды, предсказанные теоретически, наблюдаются экспериментально, а другие моды не наблюдаются. Основным источником экспериментальных данных по указанным проблемам являются эксперименты в так называемых мультипольных конфигурациях [13], когда токовые проводники находятся внутри плазмы, образуя удерживающее магнитное поле (см. фиг. 3, 5 и 6).



Ф и г. 5. Силовые линии магнитного поля в квадрупольной системе



Ф и г. 6. Силовые линии магнитного поля в октупольной системе.

Относительно этих экспериментов мы можем констатировать следующее:

1. Быстро нарастающие электронные моды, описанные в гл. 5 и 7, могут объяснить наблюдение баллонных мод в плазме с горячими электронами, т.е. $T_e > T_i$, на Принстонском линейном квадруполе. Действительно, у наблюдаемых мод фазовая скорость совпадает по направлению с электронной диамангнитной скоростью, максимальная амплитуда регистрируется в окрестности точки $l = l_0$ максимальной неблагоприятной кривизны [21, 36], а профиль распределения потенциала в окрестности минимумов магнитного поля описывается нечетной функцией, так что $\Phi^{(0)} = 0$ и частота колебаний

$$\omega \approx \omega_{de} \quad \text{при} \quad \hat{\omega}_{bi} < \omega < \hat{\omega}_{be}.$$

2. Медленно нарастающие ионные желобковые моды ($\omega < \hat{\omega}_{bi} < \hat{\omega}_{be}$), рассмотренные в гл. 10 в предельном случае $T_i > T_e$, могут объяснить наблюдение желобковых мод в плазме с горячими ионами, т.е. $T_i > T_e$, в тороидальном квадруполе [28, 32] фирмы «Галф Джeneral Атомик» (ГДА). Действительно, эти моды регистрировались внутри критической магнитной поверхности $\psi = \psi_c$, на которой $[\langle v_{Di} \rangle]_{cp} = (\partial/\partial\psi) \oint dl/B = 0$, отделяющей область (внешнюю), где возбуждаются моды гидромагнитного типа, от области (внутренней), где моды такого типа не могут возбуждаться, поскольку кривизна магнитных силовых линий, усредненная по фазовому пространству, является благоприятной для устойчивости. Кроме того, наблюдаемая фазовая скорость совпадала по направлению с диамангнитной скоростью ионов; частота была меньше $\hat{\omega}_{bi}$; моды такого типа, по-видимому, не существуют внутри магнитной поверхности $\psi = \psi_L$, на которой величина $(\partial/\partial\psi) \oint dl$ меняет знак. Последний экспериментальный факт можно объяснить, вспомнив, что необходимым условием существования таких желобковых мод является неравенство $[\langle \omega_{ai} \rangle]_{cp}^2 < [\langle \omega_{Di}^{(0)} \rangle]_{cp}^2$, так что для заметного числа частиц усредненный по орбите дрейф должен быть неблагоприятным, т.е. $\partial J/\partial\psi > 0$. Действительно, численные расчеты $\partial J/\partial\psi$ показали, что именно при ψ_L по грубой оценке имеет место переход от очень малого числа частиц с неблагоприятным дрейфом к очень большому числу частиц.

Отметим, что в окупольной конфигурации [33, 34] при тех же параметрах плазмы (плотность и температура) моды данного типа не были обнаружены (или их амплитуда была значительно меньше, чем в квадруполе). Это можно объяснить посредством

уравнения (11.14) и учитывая то обстоятельство, что в октуполе имеется более глубокая яма [35], так что неравенство

$$(\omega + 1) \Gamma > \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right)^2 \frac{T_i}{i4T_e} \quad (16.1)$$

является более сильным внутри области $\psi = \psi_c$ и внутри области $\psi = \psi_L$ поток больше, чем в квадруполе. Тогда доминирующие моды должны носить желобковый характер и не могут быть зарегистрированы в виде флуктуаций. В частности, они могут быть ответственны за наблюдаемые аномальные потери частиц из плазмы, удерживаемой октупольными полями, которые не могут быть связаны с очень низким уровнем флуктуаций, возникающих внутри области $\psi = \psi_c$.

В более общем виде можно утверждать, что, если предполагаемая мода возбуждается в данной плазменной конфигурации и, по-видимому, ответственна за чрезмерные аномальные потери частиц, одним из способов ее идентификации является анализ тех режимов или областей пространства, в которых она стремится проявить себя как флуктуации [28]. Действительно, в этом случае информация о частоте, длине волны и фазовой скорости является определяющей для выявления корреляции с теоретическими результатами.

3. Экспериментальное исследование плазмы с горячими электронами ($T_e > T_i$) на Принстонском линейном квадруполе также показало наличие желобковых мод [36]. Измеренная характерная частота $\omega < \hat{\omega}_{bi}$. Кроме того, в отличие от мод, наблюдаемых в экспериментах на квадруполе фирмы ГДА, фазовая скорость совпадает по направлению с диамагнитной скоростью электронов. Эти факты полностью согласуются со свойствами медленно нарастающих желобковых мод в области температур $T_e > T_i$ при выполнении неравенства (16.1), рассмотренных в гл. 11.

Наконец, мы напомним, что предварительная идентификация мод, наблюдаемых в плазме с $T_i > T_e$ в экспериментах на квадруполе в Калэме (Англия), указывает на наличие мод, которые не локализованы в определенной области силовых линий и фазовая скорость которых стремится совпадать по направлению с диамагнитной скоростью ионов [37].

4. В экспериментах на тороидальном квадруполе фирмы ГДА при $T_i > T_e$ было замечено, что с уменьшением отношения T_i/T_e проявляется новая желобковая мода [38], помимо уже рассмотренной в п. 2 этой главы. У этой моды фазовая скорость совпадает по направлению с диамагнитной скоростью электрона. В связи с тем обстоятельством, что в экспериментальных условиях отношение T_i/T_e больше единицы, мы можем идентифицировать эту моду скорее как быстро нарастающую электронную

желобковую моду (гл. 8 или 9), чем как одну из мод, рассмотренных в гл. 11.

5. Эксперименты, проведенные на Принстонском миниполе (тороидальном квадруполе со слабым магнитным полем) и мультиполях фирмы ГДА, показали, что возникают новые желобковые моды [34, 39], когда плотность меньше заданного значения. Фазовые скорости этих мод совпадают по направлению с диамагнитной скоростью иона, частота $\omega < \hat{\omega}_{bi}$, и они идентифицируются как моды, рассмотренные в гл. 7.

6. Рассмотрим теперь эксперименты с плазмой, удерживаемой в стеллараторах. Отметим, что теория, развитая в предыдущих главах для конфигураций с замкнутыми силовыми линиями, может быть применима к центральной части плазменного столба в типичном стеллараторе, где магнитный шир мал и имеется благоприятная для устойчивости средняя кривизна магнитных силовых линий, но при небольшой глубине магнитной ямы. Действительно, по порядку величины

$$h \sim \frac{r_n}{R_c}.$$

В частности, для экспериментов с $T_e \gg T_i$ особый интерес представляют выводы, полученные в гл. 9; рассмотренные в этой главе желобковые моды могут объяснить наблюдаемые флуктуации, которые развиваются по всей длине плазменного столба и не локализованы в какой-либо определенной области силовых линий магнитного поля [40]. Кроме того, теоретическая скорость нарастания этих мод и отношение их длин волн поперек магнитного поля к гирорадиусу иона полностью соответствуют относительно большому коэффициенту диффузии частиц, наблюдаемому в этом режиме. Если взять для иллюстрации коэффициент диффузии \mathcal{D} порядка $\gamma \lambda_{\perp}^2$, где λ_{\perp} — характерная длина волны поперек магнитного поля и $\lambda_{\perp} \sim r_n$, то имеем

$$\mathcal{D} \sim \left(\mathcal{D}_B \frac{r_n^4 T_e}{R_c^2 m_i} \right)^{1/3},$$

где $\mathcal{D}_B \sim T_e c / eB$ — известный коэффициент диффузии Бома.

Режимы с $T_i > T_e$ реализуются при ионном циклотронном нагреве [41]. Если применить к этому случаю результаты, полученные в гл. 11, то мы опять должны ожидать регистрации таких желобковых мод, фазовая скорость которых совпадает по направлению с диамагнитной скоростью иона. Действительно, в работе [41] предлагается именно такая идентификация этих мод, фазовая скорость которых совпадает по направлению с диамагнитной скоростью иона.

7. Недавно в плазме с $T_i > T_e$, удерживаемой в системе с твердым сердечником (левитрон), были зарегистрированы моды [42] с частотой $\hat{\omega} < \hat{\omega}_{bi}$, локализованные в области неблагоприятной кривизны силовых линий; фазовая скорость этих мод совпадает по направлению с диамагнитной скоростью иона. Эти моды относятся, по-видимому, к семейству мод, рассмотренных в гл. 11 и 14. Для их точной идентификации необходим более детальный анализ, учитывающий характерные особенности левитрона.

8. До сих пор не проведена идентификация медленно нарастающих дрейфовых мод, рассмотренных в гл. 14, хотя они, безусловно, представляют большой интерес. Это связано, по-видимому, с тем, что у этих мод относительно большая скорость нарастания — порядка или даже больше их частоты колебаний. Поэтому они не могут быть выявлены как флуктуации, а скорее ответственны за аномальные процессы переноса, как, например, за диффузию частиц, зарегистрированную даже в таких внутренних областях мультиполей, где у всех частиц [38] имеется благоприятный усредненный дрейф, обусловленный кривизной силовых линий.

17. ПРИЛОЖЕНИЕ. УПРОЩЕННАЯ ТРАКТОВКА ЭЛЕКТРОННЫХ МОД В ПРИБЛИЖЕНИИ ВЕДУЩИХ ЦЕНТРОВ

Для некоторых из рассмотренных выше мод можно привести в определенных условиях упрощенную трактовку, которая более явно показывает физическую сущность различных явлений. Мы рассмотрим здесь электронные моды из гл. 5, характеризующиеся наличием

$$\hat{\omega}_{bi} < \omega < \hat{\omega}_{be} \quad \text{и} \quad \Phi^{(0)} = 0. \quad (17.1)$$

В этом случае возмущенную электронную плотность можно получить из закона сохранения электронного импульса, если пренебречь инерционным членом, а именно:

$$0 = -\frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla (n_{e1} T_e - en\Phi), \quad (17.2)$$

так что

$$n_{e1} = \frac{en}{T_e} \Phi.$$

Плотность ионов получим другим способом из закона сохранения для ведущих центров частиц:

$$i\omega n_{G1} + \nabla \cdot (n_{G1} \mathbf{u}) = \nabla \cdot (n_G \mathbf{u}_{\perp}) + \nabla \cdot \left(n_G \frac{\mathbf{B}}{B} u_{\parallel} \right) = 0, \quad (17.3)$$

где n_G , \mathbf{u} — плотность и скорость дрейфа ведущих центров соответственно. Напомним, что

$$u_\theta = \frac{2cT_i m_i}{eB} \frac{\partial B}{\partial \psi} = \langle v_{Di} \rangle \quad (17.4)$$

и

$$\mathbf{u}_{\perp} = \left(1 + \frac{1}{4} a_i^2 \nabla_{\perp}^2\right) \frac{\mathcal{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c + \frac{c}{\Omega_i B} \frac{d\mathcal{E}_1}{dt}, \quad (17.5)$$

где $a_i^2 = 2T_i / (m_i \Omega_i)^2$ и учтены соответственно дрейф, обусловленный кривизной силовых линий, дрейф в скрещенных полях $\mathcal{E} \times \mathbf{B}$, дрейф, обусловленный конечным ларморовским радиусом, и поляризационный дрейф. Поток скорости вдоль магнитного поля определяется как

$$i\omega n m_i u_{\parallel} = -\frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla (n_{G1} T_i + en\Phi). \quad (17.6)$$

Поскольку мы рассматриваем приближение больших длин волн, когда $a_i^2 \nabla_{\perp}^2 \ll 1$, то в итоге плотность ионов связана с плотностью ведущих центров следующим соотношением:

$$n_{i1}^2 = \left[1 + \frac{1}{4} a_i^2 \nabla_{\perp}^2\right] n_{G1}^2. \quad (17.7)$$

Таким образом, получаем

$$i \left[\omega + \langle \omega_{Di} \rangle + \frac{T_{\perp}}{m_i \omega} B \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial l} \right] n_{Gk} - \\ - i \left(1 - \frac{1}{2} b\right) k_{\theta} c \frac{\partial n}{\partial \psi} \phi - ic \frac{\omega n}{\Omega_i B} k_{\theta}^2 \phi = 0,$$

где $b \equiv \frac{1}{2} k_{\theta}^2 a_1^2$ и $\langle \omega_{Di} \rangle = k_{\theta} \langle v_{Di} \rangle$. Если теперь использовать выражение (17.7) и разложение по параметрам

$$\frac{\langle \omega_{Di} \rangle}{\omega} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{T_i}{m_i \omega^2} B \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial l} < 1,$$

то в итоге получим

$$n_{ik} = -\frac{en}{T_i} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\omega_{di}}{\omega}\right) \left[1 - \frac{\langle \omega_{Di} \rangle}{\omega} - \right. \right. \\ \left. \left. - b - \frac{T_i}{m_i \omega^2} B \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial l} \right] \right\} \phi. \quad (17.8)$$

Поэтому дисперсионное соотношение из условия квазинейтральности $n_{ik} = n_{ek}$ имеет вид

$$\phi(l) + \frac{\omega - \omega_{di}}{\omega - \omega_{de}} \left\{ b \frac{T_e}{T_i} - \frac{\langle \omega_{De} \rangle}{\omega} + \frac{T_e}{m_i \omega^2} B \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial l} \right\} \phi(l) = 0. \quad (17.9)$$

Это выражение соответствует уравнению (8.3) при $\Phi^{(0)} = 0$. Мы показали, что температура ионов не играет существенной роли,

как и для обычной дрейфовой волны. Она дает лишь поправки, связанные с конечным ларморовским радиусом, возникающие в члене, содержащем частоту ω_{di} . Вместо нее существенную роль играет продольная относительно магнитного поля электронная температура. Это согласуется с тем обстоятельством, что резервуаром энергии для соответствующей неустойчивости является тепловая энергия электронов, обусловленная компонентами тепловой скорости, параллельными \mathbf{B} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г., Гидродинамика, М., Гостехиздат, 1947.
2. Davison B., Neutron Transport Theory, London, 1958.
3. Кадомцев Б. Б., Review paper given at the 1967 European Conference on Plasma Physics, Royal Institute of Technology, Stockholm, не опубликовано.
4. Rosenbluth M. N., Longmire C. L., Ann. Phys. (N.Y.), 1, 120 (1957).
5. Coppi B., Hendel H., Perkins E., Politzer P., Proc. Conference on Physics of Quiescent Plasmas, Part 1, Frascati, 1967, p. 201; Hendel H., Coppi B., Perkins F., Politzer P., Phys. Rev. Lett., 18, 439 (1967).
6. Кадомцев Б. Б., Вопросы теории плазмы, вып. 4, М., Атомиздат, 1964, стр. 188.
7. Сагдеев Р. З., Галеев А. А., International Centre for Theoretical Physics Report IC/66/64, Trieste, 1966.
8. Кадомцев Б. Б., Погутице О. П., ЖЭТФ, 51, 1734 (1966).
9. Coppi B., Mazzucato E., Princeton University Plasma Physics Report MATT-720, 1969; Phys. Fluids (1971).
10. Dupree T. H., Phys. Fluids 11, 2680 (1968).
11. Coppi B., Laval G., Pellat R., Rosenbluth M. N., International Centre for Theoretical Physics Report IC/66/55, Trieste, 1966; Plasma Phys., 10, 1 (1968).
12. Кадомцев Б. Б., Письма ЖЭТФ, 4, 15 (1966).
13. Okhawa T., Kerst W. D., Nuovo Cimento, 22, 784 (1961).
14. Galeev A. A., Sagdeev R. Z., Wong V., Phys. Fluids, 10, 1553 (1967).
15. Furth H. P., in Plasma Physics, Vienna, 1966, p. 391.
16. Rosenbluth M. N., Phys. Fluids, 11, 869 (1968).
17. Кадомцев Б. Б., Погутице О. П., ЖЭТФ, 53, 2025 (1967).
18. Rutherford P., Frieman E. A., Phys. Fluids, 11, 569 (1968).
19. Hastie R. J., Taylor J. B., Haas F. A., Ann. Phys. (N.Y.), 41, 302 (1968).
20. Taylor J. B., Phys. Fluids, 10, 1357 (1967).
21. Coppi B., Rosenbluth M. N., Yoshikawa S., Phys. Rev. Lett., 20, 190 (1968).
22. Jukes J. D., Rohlena K., Phys. Fluids, 11, 891 (1968).
23. Rutherford P., Rosenbluth M. N., Coppi B., Paper presented at the 1968 Sherwood Meeting on Theoretical Plasma Physics, Berkeley, California, 1968.
24. Coppi B., Rosenbluth M. N., Rutherford P., Princeton Plasma Physics Laboratory MATT-611, 1968; Phys. Rev. Lett., 21, 1055 (1968).
25. Дикасов В. М., Рудаков Л. И., Рютов Д. Д., ЖЭТФ, 48, 913 (1965).
26. Coppi B., Rosenbluth M. N., Sudan R. N., Princeton University Plasma Physics Report MATT-529, 1967—1969; Ann. Phys. (N.Y.), 55, 207 (1969).
27. Coppi B., Princeton University Plasma Physics Report MATT-668, 1969; Phys. Rev., 184, 130 (1969).
28. Coppi B., Phys. Rev. Lett., 22, 50 (1969).

29. *Coppi B., Ossakow S.*, Princeton Plasma Physics Laboratory MATT-567, 1967; *Coppi B., Ossakow S., Rosenbluth M. N.*, Plasma Phys., **10**, 571 (1968).
30. *Horton C. W., Coppi B., Rosenbluth M. N.*, Paper presented at the 1968 Sherwood Meeting on Theoretical Plasma Physics, Berkeley, 1968; *Rutherford P., Rosenbluth M. N., Horton C. W., Frieman E. A.*, in Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion Research, Vol. 1, IAEA Vienna, 1969, p. 367.
31. *Coppi B., Furth H. P., Rosenbluth M. N., Sagdeev R. Z.*, Phys. Rev. Lett., **17**, 377 (1966).
32. *Okhawa T., Yoshikawa M.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1374 (1968).
33. *Forsen H. et al.*, в книге Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion Research, Vol. 1, IAEA, Vienna, 1969, p. 313.
34. *Okhawa T. et al.*, в книге Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion Research, Vol. 1, IAEA, Vienna, 1969, p. 683.
35. *Jukes J. D.*, Gulf General Atomic Report GA-8735, San Diego, California, 1968.
36. *Meade D., Yoshikawa S.*, Paper presented at the International Symposium on Plasma Fluctuations and Diffusion, Princeton, 1967; Princeton University Plasma Physics Report MATT-Q-25, 1968.
37. *Allen T. K. et al.*, Paper presented at the European Conference on Plasma Physics, Utrecht, 1969.
38. *Okhawa T., Yoshikawa M.*, Gulf General Atomic Report GA-9142, San Diego, Calif., 1969, submitted to Plasma Physics.
39. *Yoshikawa S.*, частное сообщение, 1967.
40. *Grove D. J.*, частное сообщение, 1969.
41. *Pease R. S., Yoshikawa S., Eubank H. P.*, Phys. Fluids, **10**, 2059 (1967).
42. *Anderson O. A. et al.*, in Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Fusion Research, Vol. 1, IAEA, Vienna, 1969, p. 443.

Двухпучковая неустойчивость

Р. БРИГГС

Richard J. Briggs, Department of Electrical Engineering, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts

ВВЕДЕНИЕ

Двухпучковая неустойчивость, по-видимому, — наиболее детально исследованная микронеустойчивость в физике плазмы. После первой успешной экспериментальной демонстрации усиления волн в системе плазма — пучок [1] проведены обширные экспериментальные исследования плазменно-пучковых взаимодействий¹⁾. Во многих теоретических работах, посвященных данной проблеме, учитываются эффекты, которые не часто встречаются в теории плазмы, например конечная геометрия системы. Однако даже в случае простейших конфигураций и в линейном режиме в настоящее время еще полностью не достигнуто удовлетворительное согласие между экспериментальными данными и теорией [2—4]. Несомненно, что по крайней мере часть ответственности за это должна быть возложена на те упрощения, которые до сих пор имеют место в теории.

В настоящее время уже имеется много обзорных статей и книг, посвященных двухпотоковой неустойчивости [5—10]. Эти обзоры снабжены хорошей библиографией работ примерно до 1964 г. Поэтому ссылки на литературу в данной статье в значительной степени ограничиваются основополагающими работами или появившимися в последние годы. Основная цель данной статьи — дать адекватное последовательное изложение линейной теории двухпотоковой неустойчивости с тем, чтобы подчеркнуть методологию, которая используется при анализе и описании микронеустойчивостей. Например, для интерпретации многих результатов мы использовали концепцию волн с отрицательной энергией. Будем надеяться, что такой подход к проблеме сде-

¹⁾ Первые экспериментальные подтверждения усиления электромагнитных волн при плазменно-пучковом взаимодействии в Советском Союзе были опубликованы в работах Я. Б. Файнберга с сотр. (ЖЭТФ, 38, 685, 1960) и Р. А. Демирханова с сотр. (ЖТФ, 30, 315, 1960). Прекрасный обзор современного состояния теории и эксперимента можно найти в работах Я. Б. Файнберга (Атомная энергия, 11, 313, 1961 г.; Czechsl. Phys. Journ. B18, 652, 1968; УФН, 93, 617, 1968). — Прим. ред.

лает эту статью полезной как для студентов старших курсов, поскольку статья посвящена избранным вопросам микронеустойчивости, так и для читателей, интересующихся деталями двухпоточковой неустойчивости. Мы не включили в статью описания опубликованных экспериментальных результатов и их сравнения с теорией отчасти в интересах краткости изложения, отчасти потому, что в общей картине явления все еще остаются большие пробелы.

Наше рассмотрение мы начнем с анализа простейших возможных предельных случаев и получим основные соотношения, которые позволят понять и оценить влияние различных физических эффектов, не учитываемых в теории нулевого порядка. Это позволит нам показать, как связано «гидродинамическое» описание моноэнергетических пучков с описанием на языке распределения скоростей. Для ясности и ограничения сферы исследований мы сосредоточим наше внимание на таких модах, которые не зависят от магнитного поля.

В главе 1 будет дан вывод уравнений, описывающих одиночный моноэнергетический поток в бесконечной однородной системе. Простейшая форма двухпоточковой неустойчивости иллюстрируется суперпозицией двух таких моноэнергетических потоков. Мы покажем также, как посредством суперпозиции большого числа потоков можно описать моды в плазменной системе с непрерывным распределением скоростей. В главе 2 мы исследуем взаимодействие пучка низкой плотности со стационарной плазмой по-прежнему в пределе бесконечной однородной среды. Этот случай пучка низкой плотности в стационарной плазме особенно важен, так как именно такая ситуация очень часто реализуется на практике. Взяв отношение плотности пучка к плотности плазмы в качестве малого параметра разложения, мы можем построить аналитическую теорию в тех случаях, когда температуры плазмы и пучка отличны от нуля и частота столкновений отлична от нуля. В общем случае результаты являются более сложными. Поэтому одна из главных целей данного анализа заключается в том, чтобы показать, как можно определить критерий применимости данной теории, когда существенным является определенный физический эффект. Мы сможем показать тогда, при каких обстоятельствах имеет место классическая конфигурация «пик на хвосте распределения» и когда ей соответствует описание моноэнергетического пучка.

В главе 3 начинается анализ систем с конечным радиусом. Основное предположение заключается в том, что очень сильное аксиальное магнитное поле ограничивает движение частиц в радиальном направлении. В этом случае имеется ряд дискретных собственных мод, что позволяет простым способом исследовать ситуации с более общими профилями плотности. При этом воз-

никает новое важное явление — система, если ее диаметр достаточно мал, может быть стабилизирована на всех длинах волн даже при наличии моноэнергетических потоков.

В главе 4 рассматриваются конечные неоднородные системы в отсутствие магнитного поля. Возможно, это и неожиданно, но именно такой случай ставит ряд гораздо более тонких и сложных вопросов, чем ситуации с бесконечным магнитным полем. В случае холодного пучка дискретные собственные моды отсутствуют при идентичных профилях плотности. В данной ситуации, наоборот, имеется сплошной спектр неустойчивых собственных частот. Почти весь предыдущий анализ конечных систем в конечном или равном нулю магнитных полях предполагал наличие резких границ у профиля плотности пучка и плазмы, и в этом случае мы имеем дело с дискретными собственными модами. Анализ, проведенный в приложении, знакомит читателя с последними исследованиями вплоть до 1968 г. Показано, что учет слабых градиентов плотности позволяет выявить ряд важных физических эффектов.

1. МНОГОПОТОКОВАЯ МОДЕЛЬ

В этой главе анализируется наипростейшая из возможных ситуаций, а именно бесконечная однородная система в отсутствие внешнего магнитного поля. Вначале анализируется одиночный моноэнергетический поток и обсуждаются некоторые энергетические аспекты волн малой амплитуды. Затем в разд. 1.2 приведены элементарные ситуации с двумя моноэнергетическими потоками, иллюстрирующие основной механизм взаимодействия двух потоков. В разд. 1.3 дан вывод дисперсионного соотношения для произвольного распределения скоростей, что является предельным случаем большого числа моноэнергетических потоков. Здесь же обсуждается общий метод Найквиста для получения границ устойчивости.

1.1. Свойства одиночного моноэнергетического потока

Для понимания многих характерных особенностей двухпоточковой неустойчивости целесообразно рассмотреть вначале волновые свойства одиночного направленного потока заряженных частиц. Для описания продольных колебаний пространственного заряда потока частиц с нулевой температурой используются следующие основные уравнения:

закон сил

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{q}{m} E, \quad (1.1)$$

закон сохранения заряда

$$\frac{\partial J}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (1.2)$$

закон Гаусса

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.3)$$

где v — скорость, J — ток и E — электрическое поле направлены вдоль оси z , ρ — плотность заряда в потоке. (Отметим, что здесь и в дальнейшем используется система единиц MKS.) Для рассмотрения волн малой амплитуды, изменяющихся по закону $\exp i(kz - \omega t)$, мы линеаризуем вышенаписанные уравнения относительно невозмущенных значений констант движения. Например,

$$v = v_0 + v_1, \quad (1.4)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (1.5)$$

и

$$J = \rho_0 v_0 + \rho_1 v_0 + \rho_0 v_1 = J_0 + J_1, \quad (1.6)$$

где индекс нуль используется для обозначения невозмущенных величин, а индекс единица — для обозначения возмущенных величин. Из линеаризованных уравнений (1.1) и (1.2) и предполагаемого закона изменения волны можно получить следующее выражение для возмущенного тока:

$$J_1 = i\omega\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} E_1, \quad (1.7)$$

где ω_p — плазменная частота и

$$\omega_p^2 = \frac{q\rho_0}{\epsilon_0 m}. \quad (1.8)$$

Если к току проводимости добавить ток смещения, то мы можем следующим образом формально определить диэлектрическую постоянную:

$$J_1 - i\omega\epsilon_0 E_1 = -i\omega\epsilon E_1, \quad (1.9)$$

где

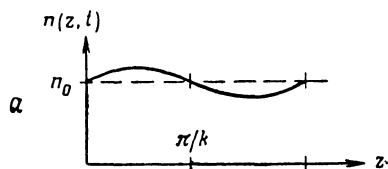
$$\epsilon = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} \right). \quad (1.10)$$

Дисперсионное соотношение для нашей системы можно получить из линеаризованных уравнений (1.2) и (1.3), положив $\epsilon = 0$, или

$$\omega = \begin{cases} kv_0 + \omega_p & \text{«быстрая волна пространственного заряда»,} \\ kv_0 - \omega_p & \text{«медленная волна пространственного заряда».} \end{cases} \quad (1.11)$$

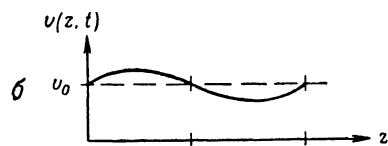
Эти волны пространственного заряда являются, конечно, просто хорошо известными колебаниями пространственного заряда стационарной плазмы с доплеровским сдвигом частоты, обусловленным пучком со скоростью v_0 .

Один из интересных аспектов волн пространственного заряда заключается в том, что направленная энергия потока может перейти в отрицательную энергию волны малой амплитуды. Чтобы показать это, вспомним, что усредненная по времени плотность энергии волны малой амплитуды этих электростатических колебаний определена в работе [11] как

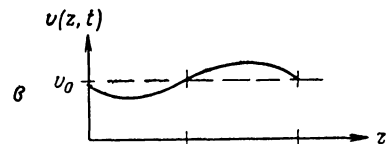


плотность энергии волны малой амплитуды этих электростатических колебаний определена в работе [11] как

$$\langle W_{ek} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \epsilon) |E_1|^2. \quad (1.12)$$



Если вычислить энергию волны малой амплитуды, используя значение диэлектрической постоянной по формуле (1.10), то найдем



$$\langle W_{ek} \rangle = \pm \frac{\omega}{\omega_p} \frac{1}{2} \epsilon_0 |E_1|^2, \quad (1.13)$$

Фиг. 1. Качественные зависимости плотности (а) и скорости одиночного потока от z [для быстрой волны пространственного заряда (б) и для медленной волны пространственного заряда (в)], поясняющие физическую интерпретацию медленной волны с отрицательной энергией.

где верхний знак относится к быстрой волне пространственного заряда, а нижний знак относится к медленной волне пространственного заряда. Медленная волна пространственного заряда переносит отрицательную энергию малой амплитуды (ясно, что это справедливо при $\omega > 0$, или $kv_0 > \omega_p$).

Мы можем дать физическую интерпретацию этой отрицательной энергии при помощи расчетов относительной фазы возмущенной скорости и возмущенной плотности. Легко показать, что у быстрой волны пространственного заряда возмущенная скорость находится в фазе с возмущенной плотностью, в то время как у медленной волны пространственного заряда возмущенная скорость находится в противофазе с возмущенной плотностью. На фиг. 1 показано, как изменяются полная плотность и скорость потока. В случае быстрой волны пространственного заряда в той области, где возмущение увеличивает плотность, скорость движения частиц превышает среднюю скорость, а в области пониженной плотности скорость движения частиц меньше средней

скорости. Поэтому когда возбуждена быстрая волна пространственного заряда, то результирующая кинетическая энергия, переносимая пучком, *превышает* энергию, переносимую невозмущенным пучком. В случае медленной волны пространственного заряда в областях повышенной плотности скорость движения электронов, наоборот, меньше средней скорости и больше средней скорости в областях пониженной плотности; следовательно, результирующая кинетическая энергия, переносимая потоком при наличии возмущения, *меньше* энергии невозмущенной системы. Этим и обусловлено возникновение отрицательного возмущения энергии, соответствующего медленной волне пространственного заряда. Физическая сущность отрицательного возмущения энергии заключается в том, что для *увеличения* амплитуды волны энергия должна *отводиться* из волны.

Знание этих энергетических аспектов волн пространственного заряда позволяет нам понять такие ситуации, анализ которых другим способом может поставить нас в затруднительное положение. Сформулировав общую задачу, рассмотрим теперь, например, малое возмущение, предполагая, что электронный поток пронизывает среду с очень малой проводимостью σ . Так как в проводящей среде имеется положительная диссипация энергии, равная $(1/2\sigma|E_1|^2)$, то, основываясь на энергетических аспектах волн малой амплитуды, можно ожидать, что быстрая волна пространственного заряда будет затухать в проводящей среде, в то время как медленная волна пространственного заряда будет неустойчива. Мы можем, конечно, получить такой результат непосредственно из уравнения (1.9), добавив к току частиц и току смещения ток проводимости σE_1 . Если так и поступить, решая результирующее дисперсионное уравнение, то для $\sigma \ll \omega \epsilon_0$ имеем

$$\omega - kv_0 = \pm \omega_p \left(1 - i \frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0} \right). \quad (1.14)$$

Как и ожидалось, быстрая волна пространственного заряда [верхний знак в формуле (1.14)] экспоненциально затухает во времени, в то время как медленная волна пространственного заряда [нижний знак в формуле (1.14)] экспоненциально нарастает во времени.

Из проведенного рассмотрения вытекает весьма важное следствие для двухпучкового взаимодействия, а именно: потери энергии не являются необходимым условием для устойчивости системы, как это будет показано в следующих разделах. В случае прохождения потока электронов через стационарную плазму при определенных обстоятельствах столкновительные потери или затухание Ландау в плазме будут уменьшать скорость нарастания неустойчивости; эти же потери, однако, при других обстоя-

тельствах могут фактически возбуждать неустойчивость в таких режимах, в которых модель без учета диссипации предсказывает развитие устойчивых волн.

1.2. Основное двухпоточковое взаимодействие

Один из простейших предельных случаев, который мы можем проанализировать, — это набор одномерных моноэнергетических потоков. Дисперсионное соотношение для такой системы непосредственно следует из проведенного анализа одиночного моноэнергетического потока. В уравнение (1.9) должен быть включен вклад токов от всех потоков. Возмущенный ток каждого потока определяется выражением (1.7), и поэтому дисперсионное соотношение имеет вид

$$\varepsilon = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{(\omega - kv_{0j})^2} = 0, \quad (1.15)$$

где ω_{pj} и v_{0j} — плазменные частоты и скорости дрейфа j -го потока. Для двух потоков дисперсионное соотношение записывается следующим образом:

$$1 = \frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - kv_1)^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - kv_2)^2}. \quad (1.16)$$

На фиг. 2 приведены действительные значения ω и k , полученные из соотношения (1.16) для трех случаев: дрейфовые скорости потоков направлены в одну сторону (*а*), в противоположные стороны (*б*) и один из потоков неподвижен (*в*). Во всех этих примерах имеется диапазон действительных значений k , в котором существуют комплексно-сопряженные значения ω . Этот диапазон ограничен такими значениями $k = \pm k_{кр}$, при которых исчезают два вещественных корня ω ; поэтому во всех этих случаях имеется *минимальная* длина волны неустойчивости, равная $2\pi/k_{кр}$. Можно показать, например, что в случае потоков с одинаковой плотностью ($\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$) критическое волновое число, как следует из формулы (1.16), равно

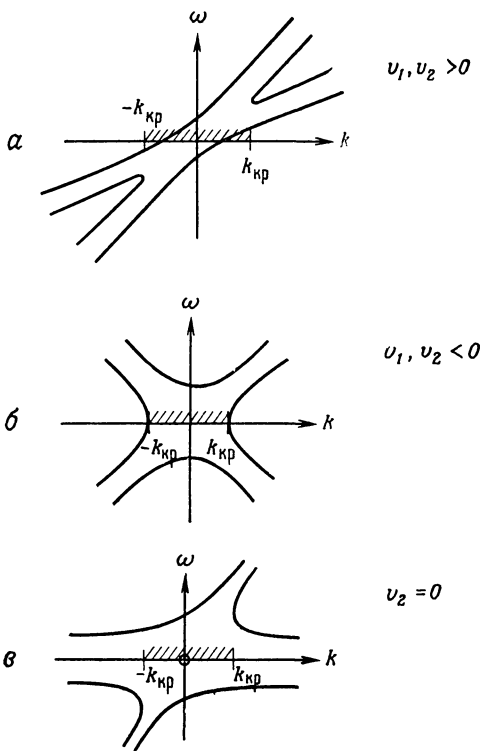
$$k_{кр} = \frac{2\sqrt{2}\omega_p}{|v_1 - v_2|}, \quad (1.17)$$

и максимальная *временная* скорость нарастания (максимум $\text{Im } \omega$ для действительного значения k) равна

$$(\omega_i)_{\text{макс}} = \frac{1}{2} \omega_p. \quad (1.18)$$

При экспериментальном исследовании двухпоточковой неустойчивости *длина* аппаратуры ограничена, и поэтому часто

описание неустойчивой волны в терминах *временной* скорости нарастания ($\text{Im } \omega$ для действительного значения k) является неадекватным. В большинстве таких экспериментов система возбуждается на заданной частоте и регистрируется *пространственное* усиление сигнала. В других работах, например у Бриггса [8],



Ф и г. 2. Диаграммы связи $\omega - k$ для двух моноэнергетических потоков. Штриховкой отмечена полоса действительных значений k , при которых существуют комплексные значения ω .

подробно обсуждается соответствие между описаниями в терминах пространственного и временного нарастания применительно к проблеме двухпотоковой неустойчивости. Кратко резюмируем, что существенным моментом является различие в характере развития первоначально локализованного возмущения (в бесконечной системе): или это возмущение возрастает экспоненциально во времени в каждой точке пространства (абсолютная неустойчивость), или, наоборот, затухает во времени в любой фиксированной точке и нарастает в пространстве по мере удаления от первоначального местоположения (конвективная неустойчивость).

Описание в терминах пространственного усиления синусоидальных колебаний обычно является более подходящим для *конвективной* неустойчивости, так как при этом непосредственно получаем максимальный рост неустойчивости на данной длине. Пространственная скорость нарастания определяется, конечно, решением дисперсионного соотношения для $\text{Im } k$ при действительном значении ω ; как видно на фиг. 2, во всех указанных случаях имеется полоса действительных значений ω , для которых комплексные корни k образуют комплексно-сопряженные пары.

Математическая процедура определения корней k , соответствующих пространственному усилению (но не затуханию), заключается в наблюдении за величиной $\text{Im } k$ для частного значения корня при изменении величины $\text{Im } \omega$ от 0 до ∞ . Если при этом $\text{Im } k$ изменяет знак, то этот корень определяет пространственное нарастание для действительного значения ω . С другой стороны, абсолютная неустойчивость возникает всякий раз, когда при некоторых значениях ω (при $\omega_i > 0$) вырожденные корни сливаются таким образом, что $\text{Im } k$ имеет разные знаки при $\omega_i \rightarrow \infty$. Используя такую процедуру, можно показать, что во встречных потоках (фиг. 2, б) в соответствии с нашей физической интуицией развивается абсолютная неустойчивость (в этом случае имеется внутренняя обратная связь). В такой ситуации решение дисперсионного соотношения для комплексного значения k и действительного значения ω не имеет физического смысла. Легко показать, с другой стороны, что в случае потоков, направленных в одну сторону (фиг. 2, а), когда $\omega_i \rightarrow \infty$, для всех корней $\text{Im } kv_{1,2} \rightarrow +\infty$, и, следовательно, неустойчивость обязана быть конвективной. Комплексные корни k при $\text{Im } kv_{1,2} < 0$ для действительного значения ω определяют пространственное усиление (в направлении движения потока). Особый случай, когда один поток неподвижен (фиг. 2, в), является «неопределенным», и поскольку предыдущее обсуждение данного вопроса было недостаточно корректным, более детально он будет рассмотрен в четвертой главе.

В последующих разделах мы вообще не будем для рассматриваемых ситуаций подробно обсуждать различие между абсолютной и конвективной неустойчивостями и расчеты как пространственной, так и временной скорости нарастания. Этот пробел не означает, что для полной теории данное различие несущественно и наличие временного роста является, конечно, обязательным условием для возникновения любой неустойчивости или усиления. Но основное внимание в данном обзоре уделяется влиянию различных физических параметров (температура, геометрия и т. д.) на механизмы неустойчивостей.

Для выявления физического смысла двухпоточковой неустойчивости рассмотрим ситуацию, когда поток пронизывает стацио-

нарную плазму. Этот частный случай представляет существенный интерес для многих экспериментальных условий, и можно отметить также, что применительно к проблеме бесконечной среды мы всегда можем перейти к такой системе отсчета, где один из потоков будет неподвижен. Дисперсионное соотношение для такой ситуации имеет вид

$$\frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kv_0)^2} = \epsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (1.19)$$

где мы будем всегда при плазменно-пучковых взаимодействиях использовать обозначения ω_{pb} и v_0 для величин, относящихся к потоку.

Представим себе, что имеется *замороженное возмущение* плотности заряда пучка вида e^{ikhz} , движущееся через плазму и «осведомленное» о силах, действующих на частицы пучка. В лабораторной системе отсчета к плазме приложено переменное поле с частотой kv_0 , и если $kv_0 < \omega_p$, то плазму можно рассматривать как диэлектрик с отрицательной диэлектрической постоянной в том смысле, что фаза электрического поля определяется возмущением *заряда пучка* [см. формулу (1.19)].

При наличии диэлектрика с отрицательной диэлектрической постоянной электрическое поле, обусловленное локальным уплотнением заряда пучка («бунчем»), изменяет свое направление на *обратное* относительно направления в свободном пространстве. Поэтому силы, действующие на сбунчированный пучок, при $kv_0 < \omega_p$ увеличивают бунчировку, и возмущение неустойчиво.

Такая аргументация, основанная на абстрактно «замороженном» возмущении заряда пучка, строго справедлива только в предельном случае $\omega_{pb} \rightarrow 0$. Для определения точных действительных значений k , для которых существует комплексное значение ω , получим из формулы (1.19) действительные значения k и ω , для которых $\partial k / \partial \omega = 0$. Вывод такой: волна неустойчива в области таких действительных значений k , при которых

$$kv_0 \leq \omega_p \left(1 + \frac{\omega_{pb}^{2/3}}{\omega_p^{2/3}} \right)^{3/2}. \quad (1.20)$$

Это условие при $n_b \ll n_p$ можно приближенно записать как $kv_0 < \omega_p$.

1.3. Дисперсионное соотношение для распределения скоростей

Основные физические свойства двухпотоковой неустойчивости наиболее ясно проявляются в предельном случае моноэнергетичных потоков; эти результаты непосредственно приме-

нимы также ко многим ситуациям, в том числе и к процессам инжекции пучков в плазму. В других задачах, и особенно в таких ситуациях, когда двухпоточковая неустойчивость является нежелательным эффектом, первостепенную важность приобретают исследования стабилизирующего влияния разброса невозмущенных скоростей («температуры» пучка или плазмы).

Можно легко применить наши предыдущие результаты к общему случаю распределения невозмущенных скоростей внутри потока. Для этого возьмем за основу соотношение (1.15) и перейдем к предельному случаю бесконечного числа потоков [12]. Для непрерывного распределения невозмущенных скоростей $f_0(v)$ плазменная частота или плотность j -го потока определяется как

$$\omega_{pj}^2 = \omega_p^2 f_0(v) \Delta v, \quad (1.21)$$

где невозмущенная скорость j -го потока лежит в пределах от v до $v + \Delta v$. В этом случае в соотношении (1.15) сумму можно заменить интегралом и дисперсионное соотношение имеет вид

$$0 = 1 - \omega_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(v) dv}{(\omega - kv)^2}, \quad (1.22)$$

причем мы предположили, для простоты, что все потоки содержат частицы одного сорта (например, электроны). Для учета частиц других сортов нужно просто просуммировать дисперсионное соотношение (1.15) по всем различным сортам частиц. Другую форму вышеупомянутого дисперсионного уравнения можно получить посредством интегрирования по частям. В результате имеем

$$0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{f_0'(v) dv}{(v - \omega/k)}. \quad (1.23)$$

Полученное дисперсионное соотношение идентично соотношению, выведенному посредством уравнения Власова [13]. Это не удивительно, так как при формулировке «модели многих потоков» мы неявно предполагали, что электрическое поле, входящее в уравнение (1.1), полностью тождественно макроскопическому электрическому полю. Точно такое же предположение имеет место при выводе бесстолкновительного уравнения Власова. Взяв за основу уравнение Власова, мы используем линеаризованное уравнение вида

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} f_1 + \frac{qE_1}{m} n_0 \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (1.24)$$

где f_1 — возмущение функции распределения f , которая равна числу частиц, содержащихся в элементе объема $\Delta v \Delta z$ фазового

пространства. Невозмущенная функция распределения скоростей f_0 определена таким образом, что величина $n_0 f_0$ равна невозмущенной плотности частиц в фазовом пространстве. Из определения функции распределения следует, что макроскопическое возмущение плотности равно $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dv$, так что уравнение Пуассона принимает вид

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial z} = q \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dv. \quad (1.25)$$

Если предположить, что волна изменяется по закону $\exp i(kz - \omega t)$, то мы получим дисперсионное соотношение (1.23).

При выводе дисперсионного соотношения для потока с конечной температурой мы игнорировали одно важное свойство соотношения (1.23), а именно то, что функция

$$F\left(\frac{\omega}{k}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_0(v) dv}{(v - \omega/k)} \quad (1.26)$$

имеет разрыв по линии $\text{Im}(\omega/k) = 0$ для всех таких действительных значений $\omega/k = u$, для которых $f'_0(u) \neq 0$. Это явление связано с наличием сплошного спектра мод в предельном случае непрерывного распределения по скоростям; много книг и статей [10, 14—16] посвящено детальному обсуждению этого аспекта проблемы¹⁾. Поскольку в данной статье нас интересуют *неустойчивые* моды, то мы можем использовать функцию $F(\omega/k)$, определенную для $\text{Im} \omega \geq 0^+$ и игнорировать наличие сплошного спектра мод в тех случаях, когда рассматривается проблема устойчивости.

Для гладких функций распределения можно сформулировать более общие условия на $f_0(v)$, необходимые для существования неустойчивых мод [10, 16, 17]. Дисперсионное соотношение в терминах $F(u)$, где $u = \omega/k$ — фазовая скорость, имеет вид

$$F(u) = \frac{k^2}{\omega_p^2}. \quad (1.27)$$

В случае неустойчивой моды должно существовать такое значение ω с положительной мнимой частью, которое удовлетворяет уравнению (1.1) для некоторого действительного значения k .

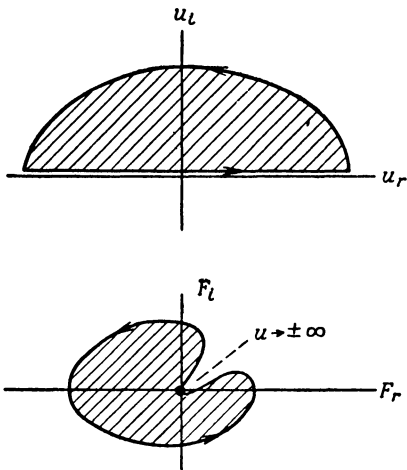
¹⁾ В советской литературе эта проблема подробно обсуждена в монографии В. П. Силлина и А. А. Рухадзе «Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред», М., Атомиздат, 1961 г. — Прим. ред.

Поскольку в данном анализе волновое число k является свободным параметром, то необходимым и достаточным условиями для развития неустойчивости являются

$$\operatorname{Re} F > 0, \quad \operatorname{Im} F = 0 \quad (1.28)$$

для некоторого значения $u = u_r + iu_i$, причем $u_i > 0$. Мы обсудим подробно только случай положительных k ; случай отрицательных k исследуется точно таким же образом и эквивалентен замене $f_0(v)$ на $f_0(-v)$ [17].

Исследуя условие (1.28), рассмотрим отражение верхней половины u -плоскости в комплексную F -плоскость, как показано на фиг. 3. Двигаясь вдоль оси действительных значений u от $-\infty$ до $+\infty$, мы пересечем в F -плоскости замкнутую кривую. (Обратный путь при $u = \infty$ соответствует в F -плоскости началу координат.) Поскольку область внутри замкнутого контура в u -плоскости (заштрихованная область на фиг. 3) отражается в заштрихованную область на F -плоскости, можно сделать вывод, что необходимое и достаточное условие возникновения неустойчивой моды заключается в том, что выражение (1.28) справедливо при действительном значении u , т. е. при $u = u_r + i0$. Физически это означает, что неустойчивая мода



Фиг. 3. Конформное отображение верхней половины u -плоскости в F -плоскость.

возникает только и только в том случае, если имеет место неопределенная устойчивость (состояние неопределенного равновесия) для некоторого действительного значения k .

В предельном случае, когда u_i стремится к нулю со стороны положительных значений, для действительных значений u_r функция $F(u_r)$ принимает вид

$$F(u_r + i0) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_0(v) dv}{(v - u_r)} + i\pi f'_0(u_r), \quad (1.29)$$

где P — главное значение интеграла, которое является действительной величиной. Поэтому очевидно, что необходимое условие развития неустойчивости имеет вид

$$f'_0(u_r) = 0. \quad (1.30)$$

Точка, в которой наклон функции $f_0(v)$ равен нулю, должна также определять локальный минимум «достаточной глубины», и точный критерий развития неустойчивости следует из дополнительного требования, чтобы в уравнении (1.29) действительная часть $F(u_r)$ была положительной. Интегрируя по частям [ср. соотношение (1.22)], получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0(v) - f_0(u_r)}{(v - u_r)^2} dv \geq 0, \quad (1.31)$$

причем не нужно указывать главного значения интеграла, так как предполагалось, что $f_0'(u_r) = 0$. Выражения (1.30) и (1.31) составляют необходимое и достаточное условия, налагаемые на функцию распределения $f_0(v)$ для возникновения неустойчивых мод. Они впервые были выведены Пенрозе [17] и на них иногда ссылаются как на критерий Пенрозе.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКА МАЛОЙ ПЛОТНОСТИ СО СТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМОЙ

Наиболее простой способ практической реализации двухпоточковой ситуации — инжекция электронного пучка в стационарную плазму. В таких случаях плотности пучков обычно много меньше плотности стационарной плазмы, т. е. $n_b \ll n_p$. В этой главе мы рассмотрим некоторые особенности такой ситуации и рассчитаем скорости нарастания в различных диапазонах параметров.

Вначале мы исследуем предельный случай пучка и плазмы с нулевыми температурами, а затем рассмотрим влияние температуры каждого из компонентов по отдельности. Одна из основных задач данной главы — изложение метода исследования и анализ интуитивного подхода для понимания переходов между этими различными предельными случаями.

2.1. Предельный случай холодного пучка и холодной плазмы

Дисперсионное уравнение для электростатических волн в плазме с нулевой температурой, пронизываемой моноэнергетическим пучком [ср. уравнение (1.19)], имеет вид

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0. \quad (2.1)$$

В этом разделе ионы плазмы в основном не учитываются, и только в заключении вкратце упоминается возможность взаимодействия ионов с горячими электронами плазмы.

Часто предполагают, что уравнение (2.1) описывает конвективную неустойчивость; тогда решение для комплексных величин k и действительных значений ω показывает, что установившаяся скорость нарастания равна

$$\text{Im } k = \frac{\omega_{pb}/v_0}{[(\omega_p^2/\omega^2) - 1]^{1/2}} \quad (2.2)$$

и стремится к *бесконечности* при $\omega \rightarrow \omega_p$. В четвертой главе показано, что этот результат не строго корректен, так как установившееся решение для *любого* возбуждения будет действительно стремиться к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Такой результат не является особенно неожиданным, так как установившееся бесконечное нарастание означает, что конечная амплитуда не будет достигнута для $z > 0$. Конечное число столкновений или температура плазмы ограничивают скорость нарастания, и последняя является конечной, хотя в общем довольно большой величиной.

Вернемся теперь к задаче описания неустойчивости в терминах временной скорости нарастания, т. е. в терминах комплексных значений ω для действительных значений k . Такое описание весьма целесообразно при расчетах стабилизирующего влияния температуры и столкновений. В предположении $n_b \ll n_p$ у неустойчивых мод «расстройка»

$$\delta = \omega - kv_0 \quad (2.3)$$

много меньше $|\omega|$. Поэтому в данной области параметров дисперсионное соотношение можно приближенно записать так:

$$\frac{\omega_{pb}^2}{\delta^2} = (\epsilon_p)_{\omega=kv_0} + \left(\frac{\partial \epsilon_p}{\partial \omega} \right)_{\omega=kv_0} \delta + \dots \quad (2.4)$$

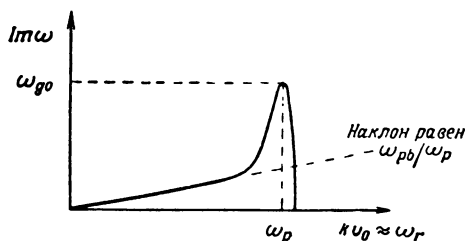
Когда частота $\omega_r \approx kv_0$ достаточно удалена от ω_p , можно пренебречь вторым членом в правой части уравнения (2.4). Тогда мы найдем, что при $\omega < \omega_p$ скорость нарастания неустойчивости прямо пропорциональна ω_{pb} . Для частот $\omega > \omega_p$ величина ϵ положительна и система устойчива. Можно легко показать, исходя из уравнения (2.4), что максимальная скорость нарастания неустойчивости имеет место *при* $\omega = \omega_p$ и эта максимальная скорость нарастания равна

$$(\omega_i)_{\text{макс}} = (\text{Im } \delta)_{\text{макс}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_{pb}^2 \omega_p}{2} \right)^{1/2} \equiv \omega_{g0}. \quad (2.5)$$

На фиг. 4 приведена качественная зависимость скорости нарастания неустойчивости от волнового числа (или частоты). Отметим, как следует из выражения (2.5), что максимальная скорость нарастания неустойчивости имеет порядок $0,1 \omega_p$, если

плотность пучка $n_b = 10^{-3} n_p$. Скорость развития неустойчивости моноэнергетического пучка максимальна.

Легко определить, как на эти результаты влияют столкновения в плазме. Если использовать приближение времени релак-



Ф и г. 4. Зависимость временной скорости нарастания неустойчивости от k для слабого пучка в плазме.

сации и ввести частоту столкновений ν_c , то диэлектрическая постоянная плазмы равна [10, 11]

$$\epsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_c)}. \tag{2.6}$$

Если пренебречь вторым членом в правой части уравнения (2.4), то найдем, что максимальная скорость нарастания равна

$$(\omega_i)_{\text{макс}} = \omega_{pb} \left(\frac{\omega_p}{2\nu_c} \right)^{1/2}. \tag{2.7}$$

Условие, при котором можно пренебречь вторым членом в соотношении (2.4), является одновременно условием, при котором скорость нарастания по формуле (2.7) много *меньше* скорости нарастания, рассчитанной по формуле (2.5) при $\nu_c = 0$. Поэтому частота столкновений, необходимая для уменьшения максимальной скорости нарастания потоковой неустойчивости, равна

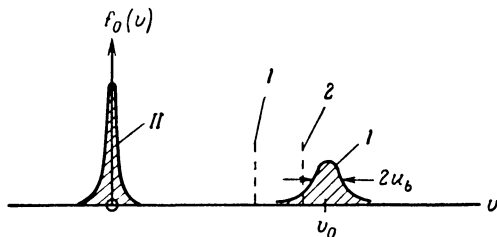
$$\frac{\nu_c}{\omega_p} > \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/2}. \tag{2.8}$$

Видно, что требуются относительно большие значения частоты столкновений даже для очень малых отношений плотности пучка к плотности плазмы; следовательно, для описания временного нарастания обычно вполне достаточно бесстолкновительное приближение. Попутно отметим также, что если в отсутствие столкновений при $kv_0 > \omega_p$ система устойчива, то при наличии столкновений, как легко можно показать из соотношения (2.4), *это больше не имеет места*. Малая скорость нарастания на частотах,

достаточно превышающих ω_p , является, конечно, проявлением именно резистивной неустойчивости, рассмотренной в первой главе.

2.2. Влияние температуры пучка

Если скорость пучка v_0 много больше тепловой скорости электронов плазмы, то описание плазмы еще соответствует приближению холодной плазмы, так как неустойчивые моды должны иметь скорость $\omega/k \approx v_0$ (фиг. 5). С другой стороны, если скорость волны уменьшается, оставаясь при этом в пределах распределения скоростей пучка (т. е. смещается от v_0 в комплексной плоскости), то описание пучка больше не может быть



Фиг. 5. Качественные зависимости функций распределения пучка (I) и плазмы (II) от v , поясняющие наличие области фазовых скоростей, в которой существенна роль температуры пучка.

Штриховыми вертикальными линиями отмечены значения ω/k , при которых температура пучка незначительна (1) и существенна (2).

адекватно дельта-функционному описанию в пространстве скоростей. Поэтому условием применимости теории моноэнергетического пучка является неравенство

$$\left| \frac{\omega}{k} - v_0 \right| \gg u_b, \quad (2.9)$$

где u_b — разброс тепловых скоростей электронов пучка; так, например, смещенное распределение Максвелла — Больцмана имеет вид

$$f_{0b}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_b} \exp \left[-\frac{(v - v_0)^2}{2u_b^2} \right]. \quad (2.10)$$

Другой аргумент, который часто приводится, заключается в том, что если неустойчивость сильно нарастает раньше, чем частицы из-за теплового разброса успеют разойтись на длину волны, то неустойчивость хорошо описывается моноэнергетической теорией. Условием этого является по существу неравенство $\text{Im } \omega \gg k u_b$, которое эквивалентно условию (2.9) при $\text{Im } \omega \sim |\omega - k v_0|$. Однако во многих ситуациях это не так, как, например, в случае резистивных мод, рассмотренных в гл. 1

(другие важные примеры применительно к ускорителям частиц указаны в работе [20]). Вообще более надежно предыдущее условие, основанное на *величине* смещения скорости v_{ph} от v_0 (в смысле смещения на комплексной плоскости).

Мы можем вычислить левую часть неравенства (2.9), используя значение $|\omega/k - v_0|$ из моноэнергетической теории [формула (2.5)], и получить условие на разброс скоростей в пучке

$$\frac{u_b}{v_0} \ll \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/3}, \tag{2.11}$$

при котором описание пучка адекватно дельта-функциональному описанию в фазовом пространстве (в тех случаях, когда рассматривается временная скорость нарастания двухпоточковой неустойчивости [18, 19]). Отметим, что для таких малых отношений плотностей, как $n_b/n_p \sim 10^{-3}$, дельта-функциональное приближение справедливо до тех пор, пока $u_b \ll 0,1v_0$. Это максимально большой разброс скоростей для такой ситуации, как инжекция пучка в плазму; мы приходим к заключению, что для большинства инжектируемых пучков справедливо приближение моноэнергетического пучка (во всяком случае, в начальной стадии развития неустойчивости).

Однако некорректно предполагать, что при таком разбросе скоростей пучка, когда нарушается неравенство (2.11), имеет место стабилизация двухпоточковой неустойчивости. В плазме с нулевой температурой (или без потерь) неустойчивость возникает даже при больших разбросах скоростей пучка.

Если предположить, что мнимая часть частоты достаточно мала, то дисперсионное соотношение для горячего пучка в холодной плазме можно записать в следующем виде [ср. с уравнением (1.29)]:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pb}^2}{k^2} P \int \frac{f'_{0b}(v)}{(v - \omega_r/k)} - i\pi \frac{\omega_{pb}}{k^2} f'_{0b} \left(\frac{\omega_r}{k} \right) = 0. \tag{2.12}$$

При $\omega_{pb} \ll \omega_p$ вещественная часть соотношения (2.12) может быть удовлетворена *только выбором частоты, близкой к плазменной* (т. е. $\omega_r \approx \omega_p$). Для удовлетворения мнимой части этого соотношения требуется, чтобы в низшем порядке по параметру n_b/n_p

$$\frac{2\omega_i}{\omega_p} = \pi \frac{\omega_{pb}^2}{k^2} f'_0 \left(\frac{\omega}{k} \right) \approx \pi \frac{\omega_{pb}^2}{\omega_p^2} v_0^2 f'_0 \left(\frac{\omega}{k} \right). \tag{2.13}$$

В рассматриваемом случае имеют место два допущения: плотность пучка значительно меньше плотности плазмы и функции распределения скоростей значительно удалены друг от друга (см. фиг. 5). В этих условиях волна неустойчива при любой

фазовой скорости, для которой функция распределения пучка имеет положительный наклон. Данный предельный случай очень похож на ситуацию с так называемым пиком на хвосте распределения, так как очевидно, что данный анализ применим, когда общая функция распределения имеет очень небольшой «плавный горбик», соответствующий функции распределения пучка. Когда температура плазмы повышается, хвост основного распределения начинает перекрывать функцию распределения пучка — такой предельный случай обсуждается в следующем разделе.

В предельном случае горячего пучка двухпоточковая неустойчивость развивается значительно слабее, чем в дельта-функциональном приближении. Физическая причина этого различия состоит в том, что в первом случае волна сильно взаимодействует только с небольшим числом электронов пучка, а именно с теми электронами, скорости которых очень близки к фазовой скорости. Физическая сущность неустойчивости в этом пределе также немного другая: электроны, движущиеся немного медленнее, чем $v_{ph} = \omega/k$, ускоряются (в среднем) волной, и их энергия увеличивается, в то время как электроны, движущиеся быстрее, тормозятся; если $f'_0(v_{ph})$ положительна, то в результате синхронные электроны отдают энергию волне. Отметим также, что в горячем пучке в отличие от холодного пучка нарастание имеет место только для $\omega \approx \omega_p$ (см. фиг. 4).

В этом предельном случае максимальной скорости нарастания неустойчивости соответствует такая фазовая скорость, при которой функция распределения имеет наибольший наклон. Для максвелловского распределения вида (2.10) эта максимальная скорость имеет место при $\omega/k - v_0 = -u_b$ и равна

$$(\omega_i)_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pb}^2}{\omega_p} \frac{v_0^2}{u_b^2}}. \quad (2.14)$$

Вывод этой скорости нарастания из соотношения (2.12) справедлив, если только соблюдается условие

$$\omega_i \ll k u_b \approx \frac{\omega_p u_b}{v_0}, \quad (2.15)$$

которое требует выполнения неравенства

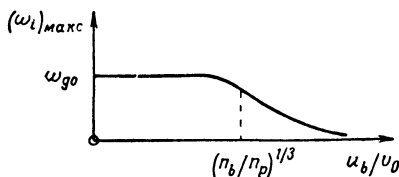
$$\left(\frac{n_b}{n_p}\right)^{1/2} \ll \frac{u_b}{v_0}. \quad (2.16)$$

Это неравенство в точности противоположно неравенству (2.11).

Скорость нарастания, определяемую формулой (2.14), можно записать в другом виде (с точностью до численного коэффициента порядка единицы):

$$(\omega_i)_{\max} \sim \left[\frac{v_0}{u_b} \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/3} \right]^2 \omega_{g0}, \quad (2.17)$$

где ω_{g0} — скорость нарастания неустойчивости в моноэнергетическом пучке [формула (2.5)]. Поэтому скорость нарастания неустойчивости в горячем пучке во много раз меньше ω_{g0} [см. неравенство (2.16)]. На фиг. 6 приведена качественная зависимость $(\omega_i)_{\max}$ от температуры пучка, u_b/v_0 , при фиксированном



Фиг. 6. Зависимость максимальной скорости нарастания неустойчивости от температуры пучка при фиксированном отношении n_b/n_p .

Убывание $(\omega_i)_{\max}$ справа от точки $(n_b/n_p)^{1/3}$ идет по закону $1/u_b^2$ [см. формулу (2.14)].

значении отношения плотностей, которая показывает влияние температуры пучка на максимальную скорость нарастания неустойчивости.

Как мы показали, в плазме без потерь неустойчивость существует даже при очень большой температуре пучка; однако если учесть конечную частоту столкновений в плазме, то система будет устойчива [18], если

$$\frac{v_c}{\omega_p} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{\omega_{pb}^2}{\omega_p^2} \frac{v_0^2}{u_b^2}. \quad (2.18)$$

Этот результат легко получить из соотношения (2.12), если в диэлектрическую постоянную плазмы ввести конечную частоту столкновений [см., например, формулу (2.6)].

2.3. Влияние температуры плазмы

Как упоминалось в предыдущем разделе, эффекты, связанные с температурой плазмы, обычно не очень существенны в тех случаях, когда речь идет о временных скоростях нарастания, до тех пор, пока тепловая скорость электронов плазмы (v_T) сравнима с v_0 (например, $v_T \gtrsim 0,3v_0$). В пучках малой плотности у неустойчивых мод $\omega_i \ll \omega_p$; поэтому мы часто можем вычислить эквивалентную диэлектрическую постоянную плазмы,

если считать отношение ω/k практически действительной величиной, так что

$$\epsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} P \int \frac{f'_0(v) dv}{v - \omega/k} - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} f'_0\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad (2.19)$$

Случай $\omega/k \approx v_0 \gg v_T$ вызовет только небольшое изменение результатов, относящихся к холодной плазме. Если v_T сравнима с v_0 , то затухание Ландау [см. член $\text{Im } \epsilon_p$ в выражении (2.19)] влияет на скорость нарастания почти таким же образом, как затухание из-за столкновений. Обсудим теперь стабилизацию двухпоточковой неустойчивости посредством затухания Ландау. Вначале отметим, однако, что диэлектрическая постоянная *горячей* плазмы, когда $\omega/k \approx v_0 \ll v_T$, имеет вид

$$\epsilon_p \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_T^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_T} \right) \quad (2.20)$$

в случае максвелловского распределения типа

$$f_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_T} e^{-v^2/2v_T^2}. \quad (2.21)$$

В этом высокотемпературном режиме для всех действительных значений $k \text{Re } \epsilon_p > 0$, и, конечно, не может действовать механизм отрицательной диэлектрической постоянной (эффекты реактивной среды). С другой стороны, из приближенного дисперсионного соотношения (2.4) явно следует, что отличные от нуля значения $\text{Im } \epsilon_p$ приводят к неустойчивости моноэнергетического пучка для всех действительных значений k . Механизм неустойчивости в этом случае обусловлен эффектом резистивной среды, в которой потери в плазме происходят за счет затухания Ландау. На фиг. 7 приведена зависимость скорости нарастания такой неустойчивой моды от волнового числа (частоты) при нескольких фиксированных значениях v_T/v_0 в диапазоне $v_T \gg v_0$.

В режиме горячей плазмы имеется также существенная возможность непосредственного взаимодействия электронов пучка с ионами плазмы. Приближенное выражение для диэлектрической постоянной плазмы с учетом холодных ионов при $\omega/k \ll v_T$ имеет вид

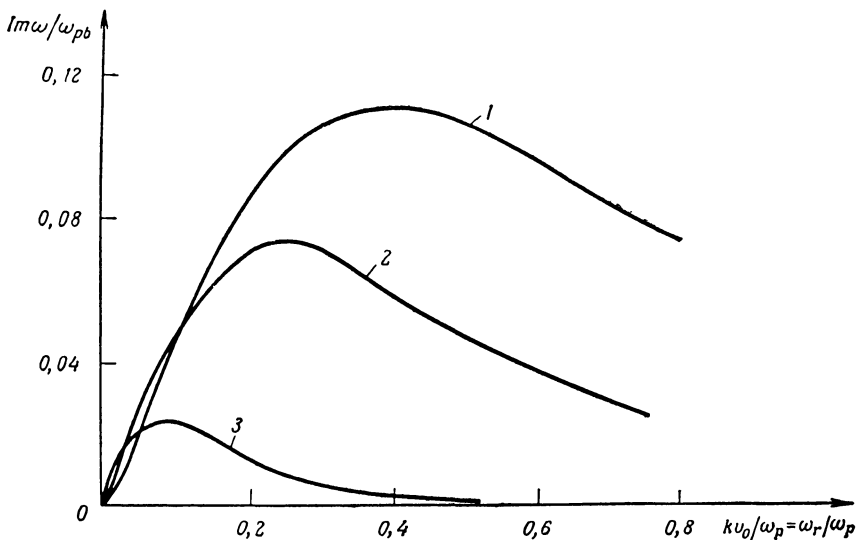
$$\epsilon_p \approx 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_T^2}, \quad (2.22)$$

где ω_{pi} — ионная плазменная частота. Когда $\omega/k < (\omega_{pi}/\omega_{pe})v_T$, то диэлектрическая постоянная при $\omega < \omega_{pi}$ может иметь отрицательное значение, и появляется возможность развития низкочастотной неустойчивости, обусловленной динамикой ионов. Эта

проблема довольно подробно исследована в работе автора [8]; условие развития неустойчивости при $\omega < \omega_{pi}$ имеет вид

$$\frac{\omega_{pb}^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_T^2}{v_0^2} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pb}} \right)^{2/3} \right]^3 > 1, \quad (2.23)$$

где для ϵ_p использовано приближенное выражение, определяемое формулой (2.22), в которой пренебрегают членом $\text{Im} \epsilon_p$. (Когда мы пренебрегаем затуханием Ландау, то исключаем тем



Фиг. 7. Зависимость скорости нарастания неустойчивости, обусловленной затуханием Ландау, от волнового числа в горячей плазме (из работы Бриггса [8]).

Фиксированные значения $(v_T/v_0)^2$ равны соответственно 4 (1), 10 (2), 100 (3).

самым рассмотренное выше слабое резистивное нарастание и сосредоточиваем внимание на сильных низкочастотных взаимодействиях.) Для очень слабых пучков ($\omega_{pb} \ll \omega_{pi}$) вышеуказанное условие принимает именно такой вид, $v_T/v_0 > \omega_{pe}/\omega_{pi} = \sqrt{M/m}$, что и следовало ожидать, так как оно идентично условию $\epsilon_p < 0$ для $\omega/k \approx v_0$.

Вернемся теперь в область средних температур ($v_0 \lesssim v_T$) и высокочастотных взаимодействий. Как мы уже отмечали, если пучок считать моноэнергетическим, то всегда возникает неустойчивость. Приступая к расчетам скорости нарастания для слабого пучка, внесем в соотношение (2.4) выражение для ϵ_p , определяемое формулой (2.19). Качественно уменьшение скорости

нарастания, обусловленное небольшой температурой плазмы, аналогично влиянию столкновений в холодной плазме, как это уже обсуждалось в разд. 2.1. Затухание Ландау, точно так же как и столкновительные эффекты, может привести к полной стабилизации в случае конечного разброса скоростей в пучке. Отметим, что случай конечных температур пучка и плазмы весьма родствен классической ситуации с пиком на хвосте распределения. Для определения границы неустойчивого режима приравняем максимальное значение мнимой части пучкового члена [выражения (2.12) — (2.14)] плазменному члену, соответствующему затуханию Ландау [соотношение (2.19)], и получим следующее условие:

$$\frac{n_b}{n_p} \frac{v_0^2}{u_b^2} < \left(\frac{v_0}{v_T} \right)^3 \exp \left(\frac{v_0^2}{2v_T^2} \right). \quad (2.24)$$

При выводе этого условия предполагалось, что и пучок и плазма имеют максвелловские распределения скоростей с $u_b \ll v_0$, так что в неустойчивой области $\omega/k \approx v_0$. При умеренных плотностях затухание Ландау в плазме только тогда эффективно стабилизирует неустойчивость, когда отношение скоростей $v_T/v_0 \gtrsim \gtrsim 0,1 \div 0,2$.

3. КОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ — БЕСКОНЕЧНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Во всех предыдущих разделах рассматривалась теория двухпоточковой неустойчивости в бесконечных однородных системах. Такая модель является довольно грубым приближением для лабораторных экспериментов, хотя она, по-видимому, правильно отражает многие из основных физических явлений. Одной из моделей конечных систем, которая достаточно легко поддается теоретическому анализу, является система плазма — пучок, помещенная в бесконечное аксиальное магнитное поле, и эту модель целесообразно применять к таким физическим ситуациям, в которых плазменная частота много меньше циклотронной частоты.

3.1. Обобщенные дисперсионные соотношения

При наличии бесконечного магнитного поля, направленного вдоль оси z , скорость частиц и ток вынуждены быть направлены также вдоль оси z , и, следовательно, возмущенный ток одиночного моноэнергетического пучка по-прежнему определяется уравнением (1.7) даже при произвольной зависимости плотности от радиуса, т. е. $\omega_p^2 = \omega_p^2(r)$.

Весьма небольшое дополнительное усилие позволило бы нам довести до конца точное аналитическое решение, но для про-

стоты изложения ограничимся квазистатическим приближением $\omega/k \ll c$, в котором

$$\bar{E}_1 \approx -\nabla\phi.$$

Возмущенная плотность заряда одиночного моноэнергетического пучка определяется уравнением (1.7) и равна

$$\rho_1 = ik\epsilon_0 \frac{\omega_p^2(r)}{(\omega - kv_0)^2} E_{z1} = k^2\epsilon_0 \frac{\omega_p^2(r)}{(\omega - kv_0)^2} \phi. \quad (3.1)$$

Отметим, что k — волновое число в направлении оси z и система должна быть однородна вдоль z , что позволяет всем величинам изменяться по закону $i(kz - \omega t)$. Так как

$$\nabla^2\phi \equiv \nabla_T^2\phi - k^2\phi = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0}, \quad (3.2)$$

то для $\phi(r)$ можно записать следующее основное уравнение:

$$\nabla_T^2\phi - k^2 \left(1 - \sum \frac{\omega_{pj}^2(r)}{(\omega - kv_{0j})^2} \right) \phi = 0. \quad (3.3)$$

В уравнении (3.3) мы вынуждены учесть возможность многопоточковой системы суммировать плотность заряда различных потоков. Можно иметь дело и с непрерывным распределением скоростей, переходя к интегралу точно таким же образом, как это было сделано в гл. I для случая бесконечной системы. Формулировка основных уравнений многопоточковой системы в бесконечном магнитном поле при *конечной температуре* достаточно проста, и в этом, по-видимому, заключается основная причина широкого использования данного приближения в литературе [21—24]. Возможно, несколько неожиданным является то, что исследование неоднородных систем в отсутствие магнитного поля порождает, как будет показано ниже, ряд далеко идущих следствий.

Возьмем теперь в качестве простого и отчасти характерного примера [23, 24] цилиндрическую систему, в которой в *нулевом приближении* все плотности имеют одинаковые зависимости от радиуса, так что

$$\omega_{pj}^2(r) = g(r)\omega_{p0j}^2, \quad (3.4)$$

где $g(r)$ — функция формы плотности ($g \leq 1$) и ω_{p0j} — максимальная плазменная частота. Тогда дифференциальное уравнение для $\varphi(r, \theta) = \varphi_l(r)e^{i\theta}$ имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi_l}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} \varphi_l + k^2(\lambda g(r) - 1) \varphi_l = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\lambda \equiv \sum_j \omega_{p0j}^2 \int \frac{f_{0j}(v) dv}{(\omega - kv)^2}. \quad (3.6)$$

[Уравнение (3.6) остается точным и в случае многих потоков с конечной температурой.] При наличии полностью проводящих стенок на $r = a$, $\varphi_l = 0|_{r=a}$; в отсутствие каких-либо стенок мы требуем, чтобы на бесконечности $\varphi \rightarrow 0$. Для любого граничного условия уравнение (3.5) представляет собой обычную задачу на собственные значения λ , причем собственные значения (λ_n) зависят *только от k* . Таким образом, решая уравнение (3.5) с учетом граничного условия на φ_l , мы получаем ряд (бесконечный) собственных значений $\lambda = \lambda_n(k)$. Подставив $\lambda_n(k)$ в уравнение (3.6), получим дисперсионное соотношение для любой из этих радиальных мод¹⁾.

Можно легко показать, что все $\lambda_n(k)$ являются положительными действительными величинами и все они больше единицы для всех действительных значений k . Умножив уравнение (3.5) на φ^* и проинтегрировав по площади, занимаемой системой, получим после интегрирования первого слагаемого по частям:

$$\lambda = \frac{\int |\nabla_T \varphi|^2 da + k^2 \int |\varphi|^2 da}{k^2 \int g(r) |\varphi|^2 da}, \quad (3.7)$$

где $|\nabla_T \varphi|$ — амплитуда поперечного электрического поля. Поскольку по определению $g(r) \leq 1$ для всех r , ясно, что $\lambda \geq 1$ для всех действительных значений k . Укажем также, что уравнение (3.7) является вариационной функцией для λ . Зная это и подставляя в выражение (3.7) различные пробные функции $\varphi(r)$, можно найти приближенные выражения для собственных значений [23, 24].

Главная цель, к которой мы стремились, заключается в возможности замены всех плазменных частот на $\omega_q = \omega_{p_0} / \sqrt{\lambda(k)}$. При этом дисперсионное соотношение для различных мод (в системе с идентичными профилями плотности для всех компонент) будет *точно соответствовать* дисперсионному соотношению для одномерной системы. Вследствие этого все результаты, полученные для одномерного случая и рассмотренные в первом и втором разделах, можно распространить на данную задачу, в которой плазменная частота заменена вышеуказанной уменьшенной плазменной частотой, *зависящей от k* . Такое уменьшение эффективной плазменной частоты в конечной системе хорошо известно в теории волн пространственного заряда электронных пучков. Оно обусловлено тем, что «краевое» возмущенное электрическое поле уменьшает аксиальную «восстанавливающую» силу, дей-

¹⁾ Вопрос о строгом выводе граничных условий в многопотоковых системах подробно обсуждается в обзорной работе: Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, УФН, 103, 609 (1971). — Прим. ред.

ствующую на сбунчированный заряд. Так как в одномерной теории большим плотностям соответствуют большие скорости нарастания, то очевидно, что для исследования устойчивости наиболее важными являются низшие радиальные моды [с наименьшим $\lambda_n(k)$].

Зависимость эффективной (уменьшенной) плазменной частоты от k порождает некоторые качественно новые свойства. Бесконечная система для моноэнергетических потоков всегда устойчива для достаточно длинных волн; в то же время, как будет показано в разд. 3.2, конечную систему можно стабилизировать для *всех* длин волн, если ее размеры достаточно малы. Тепловые эффекты определяются простым способом: к исследуемой ситуации применимы результаты одномерного случая, и поэтому в следующих разделах основное внимание мы уделим для ясности моноэнергетическим пучкам.

Подчеркнем еще раз, что в этом разделе получены результаты для частного случая идентичных профилей плотности у всех потоков. Часто во многих реальных ситуациях средний радиус пучка существенно меньше радиуса плазмы, и при этом могут появиться некоторые новые свойства, которые рассматриваются в разд. 3.3.

3.2. Взаимодействие холодного пучка с плазмой при полном заполнении волновода

Рассмотрим в качестве простого примера холодную систему пучок — плазма с однородными плотностями пучка (ω_{pb}) и плазмы (ω_p) внутри полностью проводящего цилиндра радиусом a . В этом случае собственные функции уравнения (3.5) равны

$$\varphi_l(r) = AJ_l(p_n r), \quad (3.8)$$

где

$$p_n^2 \equiv k^2(\lambda_n - 1). \quad (3.9)$$

Граничные условия при $r = a$ удовлетворены, если

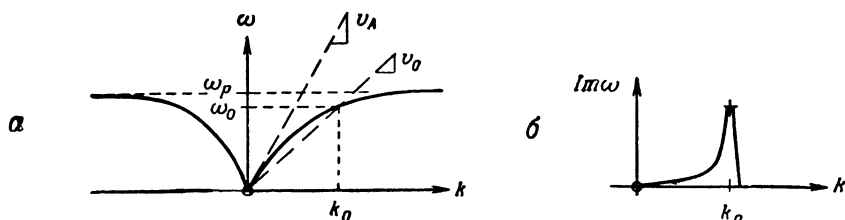
$$p_n a = \epsilon_n, \quad (3.10)$$

где ϵ_n — n -й корень равенства $J_l(\epsilon_n) = 0$ (наименьшее значение этого корня равно 2,405). Поэтому для любой отдельной моды p_n — фиксированное число, величина которого обратно пропорциональна a — радиусу системы. Из уравнений (3.6) и (3.9) для конкретного случая холодной системы плазма — пучок можно записать дисперсионное соотношение вида

$$D(\omega, k) \equiv (\omega - kv_0)^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{p_n^2}{k^2} \right) - \omega_{pb}^2 = 0. \quad (3.11)$$

Рассмотрим вначале дисперсию плазменных волн в отсутствие пучка, как показано на фиг. 8, а. В противоположность бесконечной среде, в которой $\omega = \omega_p$ для всех значений k , в конечном плазменном столбе при $\omega \leq \omega_p$ возможно существование волн с отличной от нуля групповой скоростью.

В присутствии пучка очень малой плотности частота неустойчивых мод должна быть равна $\omega \approx kv_0 + \delta$, где $\delta \ll \omega$, и приближенное решение для δ из соотношения (3.11) показывает, что если $v_0 < v_A = \omega_p/\rho_n$ (фиг. 8, а), то моды устойчивы для всех значений k . Из соотношения (3.11) отчетливо следует, что при



Фиг. 8. Дисперсия волн в плазменном столбе в бесконечном магнитном поле.

При точном (неквазистатическом) расчете скорость $v_A = (\omega_p/\rho_n)(1 + \omega_p^2/\rho_n^2 c^2)^{-1/2}$; если $v_A \ll c$, то $v_A \approx \omega_p/\rho_n$.

$v_0 > v_A$ система становится неустойчивой при всех значениях $k \leq k_0$ ($\omega \leq \omega_0$). Самая быстрая скорость нарастания имеет место при $\omega = \omega_0$ и для пучка малой плотности она равна

$$(\text{Im } \omega)_{\text{макс}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_{pb}^2 \omega_p}{2} \right)^{1/3} \frac{\omega_0}{\omega_p}, \quad (3.12)$$

[ср. с формулой (2.5)]. Таким образом, пик скорости нарастания имеет место при синхронизме скорости пучка с фазовой скоростью распространяющейся плазменной волны (фиг. 8, б), почти как в обычной лампе бегущей волны.

Заключение о возможности полной стабилизации двухпоточковой неустойчивости в системе с конечным радиусом нуждается в некотором примечании. В бесконечной среде мы рассматривали механизм неустойчивости, используя понятие об отрицательной диэлектрической постоянной плазмы. В конечной системе из-за наличия бесконечного магнитного поля поперечная диэлектрическая постоянная всегда равна своему значению в свободном пространстве, и поэтому *эффективная диэлектрическая постоянная* должна быть отрицательной и равной сумме поперечной и продольной диэлектрических постоянных с некоторым усредненным множителем, а именно: $k^2[1 - (\omega_p^2/\omega^2)] + p^2(1)$. В случае достаточно больших p^2 (достаточно малых радиусов)

преобладает положительная поперечная диэлектрическая постоянная и система устойчива.

Из уравнения (3.11) легко получить точное условие устойчивости для произвольной плотности пучка. Так как все коэффициенты являются действительными величинами (для действительных значений k), то комплексные значения ω должны быть попарно сопряженными. Следовательно, появление комплексных ω указывает на наличие в уравнении (3.11) дважды вырожденных действительных корней ω . Условие существования таких дважды вырожденных корней следует из решений уравнений $\partial D/\partial \omega = 0$ и $D = 0$. Это дает условие устойчивости n -й моды:

$$v_0^2 \geq \frac{\omega_p^2}{\rho_n^2} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pb}}{\omega_p} \right)^2 \right]^3. \quad (3.13)$$

Заканчивая этот раздел, отметим, что вышеуказанное условие устойчивости справедливо также для неоднородных систем, когда плазма и пучок имеют одинаковые профили плотности. Можно показать, что значение ρ_n^2 , соответствующее неоднородной системе и используемое в неравенстве (3.13), определяется предельной величиной собственного значения λ_n при $k \rightarrow 0$, т. е.

$$\rho_{n0} = \lim_{k \rightarrow 0} (\lambda_n k^2). \quad (3.14)$$

Из уравнения (3.7) ясно, что этот предел конечен. Действительно, для получения приближенных значений ρ_n , которые позволят использовать выражение (3.13) в качестве условия устойчивости для неоднородных систем, в уравнении (3.7) могут быть использованы различные пробные функции.

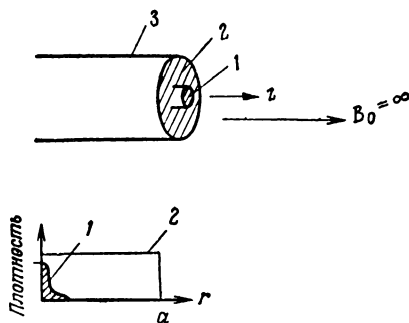
3.3. Тонкий пучок в однородной плазме

В предыдущих разделах рассматривались только системы с идентичными профилями плотности пучка и плазмы. В этом разделе мы покажем, какие новые особенности возникают при различии этих профилей плотности, что имеет место во многих реальных ситуациях. Характерным примером (фиг. 9) является неоднородный моноэнергетический пучок (1) $[\omega_{pb}^2(r)]$ в плазменном цилиндре (2) радиусом a с однородной плотностью, ограниченном проводящими стенками (3) на том же радиусе. Из уравнения (3.3) следует, что дифференциальное уравнение для φ имеет вид

$$\nabla_T^2 \varphi - k^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \varphi + k^2 \frac{\omega_{pb}^2(r)}{(\omega - kv_0)^2} \varphi = 0. \quad (3.15)$$

Для простой формы профиля плотности типа однородной плотности пучка с радиусом $b \leq a$ можно записать трансцен-

дентное дисперсионное соотношение [8]. Однако возможно более поучительно «решать» уравнение (3.15) путем разложения по собственным модам, так как это непосредственно покажет, что характер результатов не зависит от типа профиля пучка (или



Фиг. 9. Схематическое изображение тонкого пучка в однородной плазме.

в действительности от типа профиля плазмы, хотя такое обобщение мы не рассматриваем). Пусть $\varphi_n(r, \theta)$ — полный набор ортогональных функций, удовлетворяющих уравнению

$$\nabla_T^2 \varphi_n + p_n^2 \varphi_n = 0 \quad (3.16)$$

с граничным условием $\varphi_n(r) |_{r=0}$ и нормированных таким образом, что

$$\int |\varphi_n|^2 da = \int_0^a \int_0^{2\pi} |\varphi_n|^2 r dr d\theta = 1. \quad (3.17)$$

Можно показать, что значение φ_n , соответствующее цилиндрической системе, равно

$$\varphi_n = [-\pi a^2 J_{l-1}(p_n a) J_{l+1}(p_n a)]^{-1/2} J_l(p_n r) e^{il\theta}, \quad (3.18)$$

где равенство $J_l(p_n a) = 0$ определяет собственные значения p_n , которые правильнее записать как p_{ml} , поскольку в действительности для каждого значения l имеется бесконечный набор p_n . Ниже мы рассмотрим отдельно каждую азимутальную моду (значение l) и ликвидируем этот дополнительный индекс. Отметим, что все величины p_n^2 являются положительными и действительными — это общее свойство собственных значений уравнения (3.16).

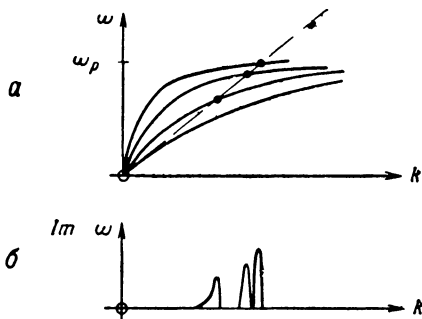
Разложим теперь φ в ряд по полному набору функций:

$$\varphi = \sum_n a_n \varphi_n. \quad (3.19)$$

Подставим это выражение в уравнение (3.15) и, используя свойство ортогональности функций $\varphi_n \int \varphi_n \varphi_p^* da = 0$ для $n \neq p$, получим следующее выражение для амплитуд a_n :

$$a_n \left[p_n^2 + k^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right] = \frac{k^2}{(\omega - kv_0)^2} \sum_p a_p \int \omega_{pb}^2(r) \varphi_n^* \varphi_p da. \quad (3.20)$$

Для специфического типа профиля пучка, а именно $\omega_{pb}^2(r) = \omega_{b0}^2 s(r)$ при $s(r) \leq 1$, решение бесконечного ряда уравнений (3.20) приводит к детерминанту бесконечного порядка. Результат сильно упрощается в частном случае, когда плотность пучка



Фиг. 10. Связь пучковой моды (тонкий пучок) с различными плазменными модами в волноводе, полностью заполненном плазмой.

a — условие синхронизма пучка с распространяющимися плазменными модами (сплошные кривые соответствуют плазменным модам, наклон пунктирной прямой равен v_0); *b* — качественная зависимость скорости нарастания неустойчивости от k .

также однородна в области $r \leq a$, так как при этом благодаря ортогональности функций φ_n уравнение (3.20) расщепляется на несвязанные уравнения для каждого значения a_n . Теперь мы можем понять, почему при одинаковых профилях плотности пучка и плазмы результат сильно упрощается: в этом случае моды составной системы согласованы с модами каждой из подсистем, и, следовательно, моды, например, пучка сцеплены только с одной из мод плазмы, поскольку они ортогональны ко всем остальным модам.

Сосредоточим теперь внимание на исследовании пучка очень малой плотности ($\omega_{b0}^2 \ll \omega_p^2$) и в наиболее интересной области $\omega - k$ -пространства, а именно в той области, где пучок близок к синхронизму с одной из распространяющихся плазменных мод. Так, для $\omega \approx kv_0$ (фиг. 10) считаем, что величины ω и k близки к значениям, при которых

$$p_n^2 + k^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \approx 0. \quad (3.21)$$

В этом случае $|a_n| \gg |a_p|$ для $p \neq n$; следовательно, можно записать вблизи этой области приближенное дисперсионное соотношение, если пренебречь в правой части уравнения (3.20) всеми членами, у которых $p \neq n$, и тогда

$$(\omega - kv_0)^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{p_n^2}{k^2} \right) = \omega_{b0}^2 \int s(r) |\varphi_n|^2 da. \quad (3.22)$$

Для любого заданного n это выражение идентично соотношению (3.11), за исключением того, что плазменная частота пучка уменьшена в R_n раз относительно максимального значения, где

$$R_n^2 \equiv \int s(r) |\varphi_n|^2 da < 1. \quad (3.23)$$

Поэтому вблизи синхронизма пучка с n -й плазменной модой применимы результаты исследования слабого пучка в полностью заполненном волноводе, если заменить ω_{pb} на $R_n \omega_{b0}$. Основное качественное отличие данного случая состоит в том, что на графике, характеризующем зависимость скорости нарастания от частоты, может проявиться несколько (более одного) пиков (см. фиг. 10, б).

Мы показали, что в случае целиком заполненного волновода данная мода устойчива, если скорость пучка всегда больше фазовой скорости плазменной волны, т. е. если $v_{ph} \leq \omega_p/p_n < v_0$ (см. фиг. 8, а). Мы можем показать, что в данном случае пучок малой плотности устойчив, если $v_0 > \omega_p/p_n$ для всех p_n . Чтобы показать это, заметим, что в матричном представлении уравнение (3.20) является стандартной записью задачи на собственные значения, т. е.

$$\mathbf{L}a = \lambda ba, \quad (3.24)$$

где

$$L_{nm} = \int \varphi_n^* \varphi_m da, \quad b_{nm} = \left(\frac{p_n^2}{k^2} + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \delta_{nm}$$

и собственное значение $\lambda \equiv (\omega - kv_0)^2 / \omega_{b0}^2$. Для слабого пучка можно вычислить значение b_{nm} при $\omega = kv_0$ посредством проверки неустойчивых корней, и поскольку \mathbf{L} — эрмитов тензор, то, следовательно, все собственные значения λ — положительные и действительные, если $b_{nm} > 0$ для всех n . Таким образом, система с тонким пучком также устойчива, если $v_0 > \omega_p/p_n$ для наименьшего значения p_n (которое в цилиндрической системе равно $2,405/a$).

4. КОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ — НУЛЕВОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

В этой главе мы исследуем двухпотоковую неустойчивость в неоднородной по радиусу (холодной) плазменно-пучковой системе *при отсутствии* магнитного поля. Мы покажем, что не существуют дискретные собственные моды [25] для гладких и идентичных профилей плотности. Спектр мод по существу сплошной. Мы убедимся в том, что для выявления этого спектра неустойчивых частот необходимо значительно более детальное, чем прежде, исследование формального решения начальной задачи.

4.1. Дискретные собственные моды

Легко показать, что в отсутствие магнитного поля возмущенный ток в холодном потоке определяется следующим выражением:

$$\mathbf{J}_1 = i\omega\epsilon_0 \frac{\omega_p^2(\mathbf{r}_T)}{(\omega - kv_0)^2} \mathbf{E}_1, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_z v_0$ — возмущенная скорость и предполагается, что волна изменяется по закону $\exp i(kz - \omega t)$ [ср. выражение (1.7)]. Для нерелятивистских потоков справедливо квазистатическое приближение, и дифференциальное уравнение для потенциала ($\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi$) имеет вид

$$\nabla_T \epsilon(\mathbf{r}_T) \nabla_T \phi - k^2 \epsilon(\mathbf{r}_T) \phi = 0, \quad (4.2)$$

где опять «диэлектрическая постоянная» равна

$$\epsilon(\mathbf{r}_T) = 1 - \sum \frac{\omega_p^2(\mathbf{r}_T)}{(\omega - kv_0)^2}. \quad (4.3)$$

В цилиндрической системе координат, когда все величины не зависят от θ , основное уравнение для $\phi(r)$ принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \epsilon(r) \frac{d\phi}{dr} \right] - k^2 \epsilon(r) \phi = 0. \quad (4.4)$$

Важной особенностью этого уравнения является наличие сингулярных точек на таких радиусах $r_s(\omega, k)$, где $\epsilon(r_s) = 0$. Мы покажем, что собственные моды с регулярным $\phi(r)$ отсутствуют в случае идентичных профилей плотности всех компонент, когда

$$\epsilon(r) = 1 - g(r) \sum \frac{\omega_{p_0}^2}{(\omega - kv_0)^2} \equiv 1 - \lambda(\omega, k) g(r), \quad (4.5)$$

где $g(r) \leq 1$. Аналогичное доказательство можно привести для неоднородного пучка в однородной плазме [25]. Умножив уравнение (4.4) на $r\phi^*$ и проинтегрировав, получим

$$\int_0^{\infty} \varepsilon(r) \left[r \left| \frac{d\phi}{dr} \right|^2 + k^2 r |\phi|^2 \right] dr = 0 \quad (4.6)$$

или

$$\int_0^{\infty} Q(r) dr = \lambda(\omega, k) \int_0^{\infty} g(r) Q(r) dr, \quad (4.7)$$

где

$$Q(r) \equiv r \left| \frac{d\phi}{dr} \right|^2 + k^2 r |\phi|^2. \quad (4.8)$$

Так как $Q(r)$ — величина действительная и положительная для действительных значений k , мы вынуждены иметь дело с действительными значениями $\lambda(\omega, k)$, и поскольку по определению $g(r) \leq 1$, то очевидно, как следует из уравнения (4.7), что

$$\lambda(\omega, k) \geq 1. \quad (4.9)$$

Поэтому $\varepsilon(r)$ должна быть действительной величиной, и где-нибудь должно выполняться равенство $\varepsilon = 0$.

Как выше упоминалось, потенциал $\phi(r)$ имеет сингулярность на некотором радиусе $r = r_s(\omega, k)$, где $\varepsilon(r_s) = 0$. (Если использовать решение только уравнения (4.4), которое регулярно на радиусе r_s , то $\phi(r)$ не может быть регулярным [25] на обоих радиусах $r = 0$ и $r = \infty$.) Следовательно, в данном случае *не существуют* дискретные собственные моды, соответствующие гладкой функции ϕ . Для понимания этого несколько неожиданного результата и правильного определения роли сингулярностей в $\phi(r)$ мы должны более детально исследовать решение начальной задачи.

4.2. Сплошной спектр

При расчетах устойчивости мы интересовались собственными модами, главным образом из-за их роли в определении отклика системы на некоторое предполагаемое начальное возмущение. В данной задаче спектр собственных значений является по крайней мере частично сплошным, и наиболее наглядный способ выявить данный сплошной спектр — это записать формальное решение начальной задачи.

Применим преобразования Фурье по z и будем иметь дело с единственным волновым числом [все величины меняются как

$\exp(ikz)$]. Если применить преобразование Лапласа во времени, т. е.

$$\begin{aligned} \phi_k(r, t) &= \int_L \tilde{\phi}_k(r, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \\ \tilde{\phi}_k(r, \omega) &= \int_0^\infty \phi_k(r, t) e^{+i\omega t} dt, \end{aligned} \quad (4.10)$$

и предположить для упрощения результатов, что только возмущенная плотность отлична от нуля при $t = 0$, то получим следующее дифференциальное уравнение для $\tilde{\phi}_k(r, \omega)$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varepsilon(\omega, k, r) \frac{d\tilde{\phi}_k}{dr} - k^2 \varepsilon(\omega, k, r) \tilde{\phi}_k = \sum \frac{\rho_1(t, r)|_{t=0}}{i(\omega - kv_0)} \equiv S(r). \quad (4.11)$$

Начальные значения входят в правую часть уравнения (4.11) как «источники»; при $S = 0$ мы возвращаемся опять к однородному дифференциальному уравнению (4.4), которое рассматривалось выше в связи с задачей о собственных колебаниях. Отметим также, что мы рассматриваем только аксиально симметричные возмущения; точно таким же образом исследуется возмущение, изменяющееся по азимуту как $\exp(i\ell\theta)$.

Мы можем записать следующее формальное решение уравнения (4.4), используя технику функций Грина:

$$\tilde{\phi}_k(r, \omega) = \frac{1}{D(\omega, k)} \left\{ \phi_2 \int_0^r \frac{r' \phi_1(r') S(r') dr'}{\varepsilon(r')} + \phi_1 \int_0^\infty \frac{r' \phi_2(r') S(r') dr'}{\varepsilon(r')} \right\}, \quad (4.12)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — решения *однородного* уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\phi_{1,2}}{dr} - \frac{\partial \varepsilon(r)/dr}{\varepsilon(r)} \frac{d\phi_{1,2}}{dr} - k^2 \phi_{1,2} = 0. \quad (4.13)$$

Причем ϕ_1 регулярна при $r = 0$, и $\phi_2 \rightarrow 0$ при $r = \infty$ (или на радиусе проводящей стенки, окружающей систему плазма — пучок). Функция $D(\omega, k)$ определена вронскианом от ϕ_1 и ϕ_2 :

$$\phi_1 \phi_2' - \phi_2 \phi_1' = \frac{D(\omega, k)}{r}. \quad (4.14)$$

Дискретные собственные значения соответствуют таким значениям $\omega(k)$, которые удовлетворяют уравнению $D(\omega, k) = 0$, поскольку равенство вронскиана от ϕ_1 и ϕ_2 нулю означает, что эти функции одинаковы с точностью до постоянного множителя. Для этих значений $\omega(k)$ функции $\phi_k = \phi_1 = c\phi_2$ удовлетворяют однородное уравнение и граничные условия на обоих радиусах $r = 0$ и $r = \infty$. С другой стороны, сплошной спектр собствен-

ных значений представлен на комплексной ω -плоскости пересечениями ветви функции $\tilde{\phi}_k(r, \omega)$. Находим, что в данном случае на ω -плоскости ветвь функции $\tilde{\phi}_k(r, \omega)$ пересекается линией, которая определена соотношением

$$\varepsilon(r, \omega) = 0 \text{ для всех действительных значений } r. \quad (4.15)$$

Это пересечение ветви возникает по двум причинам: наличие точек ветвления ϕ_1 и ϕ_2 при $\varepsilon = 0$ и наличие членов $1/\varepsilon$ в интегралах, входящих в уравнение (4.12). Рассмотрим опять в качестве примера случай идентичных профилей плотности [уравнение (4.5)], где вблизи $r = 0$

$$g(r) \sim 1 - \frac{r^2}{L^2} \quad (4.16)$$

и максимум плотности имеет место при $r = 0$. Так как функция ϕ_1 определена при $r = 0$, то значение первого интеграла в уравнении (4.12) записывается в виде

$$\tilde{\phi}_k(\omega, r) \sim \int_0^r \frac{d(r')^2}{\varepsilon(r')} \sim \ln(\lambda - 1). \quad (4.17)$$

Тогда на ω -плоскости имеется точка ветвления $\tilde{\phi}(\omega, r)$ при таких значениях $\omega(k)$, когда $\lambda = 1$ или

$$\varepsilon_0(\omega, k) = 1 - \sum \frac{\omega_{p0}^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0. \quad (4.18)$$

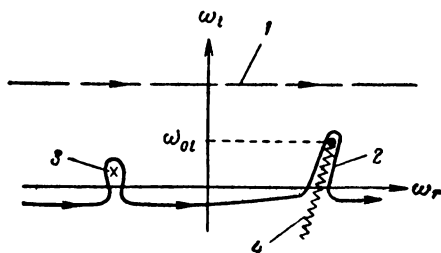
В конечном итоге нас интересует возмущенный потенциал $\phi_k(t, r)$, который вычисляется посредством обратного преобразования Лапласа [уравнение (4.10)]. При этом обратном преобразовании основной вклад в $\phi_k(t, r)$ за большой интервал времени дает интеграл в окрестности точки ветвления $\omega_0 = \omega_{0r} + i\omega_{0i}$, где ω_0 — корень уравнения (4.18) с наибольшим значением $\text{Im } \omega$ (фиг. 11). Это приводит к следующему асимптотическому выражению:

$$\phi_k(t, r) \sim \frac{1}{t} \exp(-i\omega_{0r}t + ikz + \omega_{0i}t). \quad (4.19)$$

Общий вывод заключается в том, что отклик конечной неоднородной системы нарастает экспоненциально. Практически скорость нарастания соответствует максимуму плотности в бесконечной среде. Более детальный анализ уравнения (4.12) ясно показывает, что этот результат применим не только к идентичным профилям плотности, но и в общем случае. Чтобы убедиться в этом, укажем, что на комплексной ω -плоскости ветви функции $\tilde{\phi}_k(r, \omega)$ пересекаются линиями, которые определены решениями уравнения (4.15). Поэтому максимум $\text{Im } \omega$ вдоль такой линии

преобладает над асимптотическим откликом системы. Решение уравнения (4.15) адекватно, конечно, решению дисперсионного соотношения для бесконечной среды с «локальной» плотностью. Очень важно подчеркнуть, что скорость нарастания $\phi_k(t, r)$ не определяется (в этом нет необходимости) дисперсионным соотношением, соответствующим данному радиусу $r(\epsilon(r) = 0)$. Асимптотическая скорость нарастания потенциала *одинакова* на всех радиусах.

Другой весьма важный момент, заслуживающий внимания, заключается в том, что наличие особенностей в *преобразованной* функции $\tilde{\phi}_k(\omega, r)$, а также в ϕ_1 и ϕ_2 не означает наличия



Ф и г. 11. Рисунок, поясняющий деформацию контура Лапласа и вклад от непрерывного спектра в $\phi_k(t, r)$.

1 — первоначальный контур Лапласа; 2 — деформированный контур Лапласа; 3 — корень уравнения $D(\omega, k) = 0$; 4 — пересечение ветви $\tilde{\phi}_k(\omega, r)$ линией, определяемой уравнением $\epsilon(\omega, r) = 0$ для всех действительных значений r .

особенностей в физически разумной величине $\phi(t, r)$. Непосредственно из начальной задачи следует соответствующая интерпретация логарифмической особенности в $\tilde{\phi}$.

Поэтому мы полностью пренебрегали вкладом от дискретных мод, возникающих в полюсах $\tilde{\phi}(\omega, k)$ [нулях $D(\omega, k)$]. В предыдущих разделах мы показали, что таких дискретных мод нет в случае идентичных профилей плотности (или неоднородного пучка в бесконечной плазме). Дискретные моды могут, по-видимому, возникать в случае более общих профилей плотности, но мы уверенно предполагаем, что их скорость нарастания меньше скорости нарастания, соответствующей максимуму плотности в бесконечной среде. Для таких систем более важен сплошной спектр.

4.3. Заключение

В подавляющем большинстве теоретических работ, посвященных взаимодействиям в ограниченных системах плазма — пучок, рассматривается модель со ступенчатым распределением плотности по радиусу (см., например, [8, 9, 26, 27]). Такая мо-

дель приводит только к дискретному спектру и к ней применим обычный анализ собственных мод. В предыдущих разделах мы показали, что в холодной системе плазма — пучок с плавным профилем плотности (и в отсутствие магнитного поля) преобладающим является сплошной спектр. Можно, по-видимому, проследить переход от сплошного спектра к дискретному по мере того, как профиль плотности становится все более и более крутым; однако в предельном случае резких границ становится сомнительным допущение о линеаризации уравнений для граничных электронов [28, 29]. По этой причине весьма сомнительным является применимость предельного случая резких границ в качестве физической модели для конечного (или нулевого) магнитных полей.

Нерешенный вопрос для каждой модели — это влияние конечной температуры. В предыдущий анализ легко включить разброс скоростей в *продольном* направлении посредством перехода в уравнении (4.3) к предельному случаю непрерывного распределения «холодных потоков». Однако не так легко это сделать для хаотических скоростей в *перпендикулярном* направлении. В последние годы [30—32] большое внимание уделяется весьма родственной проблеме поперечных резонансов в неоднородном столбе плазмы конечной температуры. Недавно в работе [33] было показано, что, основываясь на уравнениях холодной плазмы, можно интерпретировать многие явления, но довольно затруднительно детально проанализировать связь результатов теории холодной плазмы с предельными случаями теории, учитывающей конечную температуру [34]. Эта задача продолжает еще оставаться объектом исследования. Поэтому для неоднородной системы мы не в состоянии в настоящее время записать условие, аналогичное неравенству (2.11) (которое указывает пределы применимости приближения холодной системы плазма — пучок).

Обсудим здесь только случай нулевого внешнего магнитного поля. Причем легко показать, что в магнитном поле конечной величины сингулярности и сплошной спектр обусловлены нулевыми значениями функции ϵ_{\perp} , где

$$\epsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{\omega_{pj}^2 \bar{r}_T}{(\omega - kv_{0j})^2 - \omega_{cj}^2} \quad (4.20)$$

и ω_{cj} — циклотронная частота j -й компоненты [35].

Большинство особенностей анализа немагнитных систем применимо также для мод с $\omega^2 \sim \omega_p^2 + \omega_c^2$ в магнитном поле конечной величины. Очевидно, что моды с $\omega \sim \omega_p \ll \omega_c$ хорошо аппроксимируются предельным случаем бесконечного магнитного поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы рассмотрим различие между абсолютной и конвективной неустойчивостями на простом примере плазменно-пучкового взаимодействия в бесконечной однородной среде с нулевой температурой. Основываясь на критерии слияния полюсов [8], заманчиво классифицировать данную неустойчивость как конвективную. Поскольку $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$, то два корня k из уравнения (2.1) находятся в верхней половине k -плоскости (при этом обе волны распространяются в направлении $+z$). Однако если считать что температура плазмы равна нулю или нет столкновений, то скорость пространственного усиления *бесконечна* при $\omega = \omega_p$, и поэтому вряд ли можно назвать решенным вопрос о верхнем пределе интенсивности возбуждаемых волн. С теоретической точки зрения интересно выделить данный предельный случай, несмотря на то, что в реальной ситуации конечная геометрия, температура и т. д. могут существенно изменить эти результаты [36].

Вопрос о том, является неустойчивость конвективной (усиление) или абсолютной (спонтанные колебания), решается посредством рассмотрения импульсного отклика системы. Например, если имеется пара близко расположенных друг к другу сеток, то мы можем возбудить такую систему электрическим полем вида

$$E_c(z, t) = E_0 \delta(z) \delta(t). \tag{П.1}$$

Используя преобразования Фурье — Лапласа, найдем, что отклик имеет вид

$$E(z, t) = E_0 \int_L \int_F \frac{e^{i(kz - \omega t)}}{\varepsilon(\omega, k)} \frac{dk d\omega}{(2\pi)^2}, \tag{П.2}$$

где F — контур Фурье в k -плоскости ($\text{Im } k = 0$), L — контур Лапласа в ω -плоскости ($\text{Im } \omega \geq \sigma > 0$), а $\varepsilon(\omega, k)$ определена дисперсионным уравнением (2.1). Интегрирование в k -плоскости легко осуществить, замыкая контур интегрирования в верхней k -полуплоскости для $z > 0$ или нижней k -полуплоскости для $z < 0$ и учитывая, что для больших положительных значений $\text{Im } \omega$ оба полюса подынтегрального выражения (корни уравнения $\varepsilon = 0$) находятся в верхней k -полуплоскости. Тогда получим

$$E(z, t) = \begin{cases} \int_L \frac{ik_b E_0}{2e_p^{3/2}} e^{-i\omega t} \left\{ e^{ik_b z / e_p^{1/2}} - e^{-ik_b z / e_p^{1/2}} \right\} \frac{d\omega}{2\pi}, & z > 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases} \tag{П.3}$$

где $k_b = \omega_{pb}/v_0$, $\epsilon_p = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$ и $\tau = t - z/v_0$. Для определения асимптотического выражения $E(z, t)$ при $t \rightarrow \infty$ мы ищем седловые точки фазы

$$\phi(\omega) = \omega\tau - \frac{k_b z}{\epsilon_p^{1/2}}. \quad (\text{П.4})$$

Частоты в седловых точках в верхней полуплоскости (корни уравнения $\partial\phi/\partial\omega = 0$) при $\omega_p\tau \gg k_b z$ равны

$$\omega \approx \omega_p \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_b z}{\omega_p \tau} \right)^{2/3} e^{i2\pi/3} \right]. \quad (\text{П.5})$$

Подставив значение этих частот в уравнение (П.4), мы найдем следующую асимптотическую зависимость для $E(z, t)$:

$$E(z, t) \begin{cases} \approx \exp(i\omega_p\tau) \exp\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} (k_b z)^{2/3} (\omega_p \tau)^{1/3}\right), & z > 0, \\ \equiv 0, & z < 0. \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

Этот результат существенно отличается от обычного выражения для абсолютной неустойчивости, в котором отклик стремится к бесконечности как $\exp(\alpha t)$, где α не зависит от координаты. Данный случай является примером того, как нужно видоизменить критерий слияния полюсов, если слияние происходит на бесконечности при действительных значениях ω . Показано (например, в работе [37]), что конечная температура или столкновения *вынуждают* неустойчивость носить конвективный характер и ограничивает скорость пространственного усиления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boyd G. D., Field L. M., Gould R. W., Phys. Rev., **109**, 1393 (1958).
2. Cannara A. B., Crawford F. W., Journ. Appl. Phys., **38**, 583 (1967).
3. Mills D. M., Abraham E. E., Crawford F. W., Journ. Appl. Phys., **38**, 4767 (1967).
4. Apel J. R., Stone A. M., Proc. Seventh International Conference on Phenomena in Ionized Gases, 1966, v. 2, p. 405; Apel J. R., Tech. Memo TG-821, Applied Physics Laboratory, John Hopkins University, June 1966.
5. Boyd G. D., Gould R. W., Field L. M., Proc. IRE, **49**, 1906 (1961).
6. Crawford F. W., Kino G. S., Proc. IRE, **49**, 1767 (1961).
7. Trivelpiece A. W., «Slow Wave Propagation in Plasma Waveguides», San Francisco, 1967. (В основе лежат статьи и диссертации, опубликованные примерно в 1958 г.)
8. Briggs R. J., Electron-Stream Interaction with Plasmas, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1964.
9. Кислов В. Я., Богданов Е. В., Чернов З. С., Advances in Electronics and Electron Physics, Vol. 25, Academic Press, New York, 1965.
10. Стикс Т., Теория плазменных волн, М., Атомиздат, 1965.
11. Эллис В., Буксбаум С., Берс А., Волны в анизотропной плазме, М., Атомиздат, 1966.

- 12 Dawson J. M., Phys. Rev., **118**, 381 (1960).
- 13 Buneman O., Radiation and Waves in Plasmas, ed. Mitchner M., Stanford University Press, Stanford, California, 1961.
- 14 Ландау Л. Д., Sov. Phys., **10**, 25 (1946); ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).
- 15 Case K. M., Ann. Phys. (N. Y.), **7**, 349 (1959).
- 16 Jackson J. D., Journ. Nucl. Energy, **C1**, 171 (1960).
- 17 Penrose O., Phys. Fluids, **3**, 258 (1960).
- 18 Singhaus H. E., Phys. Fluids, **7**, 1534 (1964).
- 19 O'Neil T. M., Malmberg J. H., Phys. Fluids, **11**, 1754 (1968).
- 20 O'Neil V. K., Sessler A. M., Rev. Sci. Instr., **36**, 429 (1965).
- 21 Harrison E. R., Proc. Phys. Soc. (London), **79**, 317 (1962).
- 22 Vlaardingerbroeck M. T., Weimer K. R. U., Nunnink H. J. C., Phillips Research Report, **17**, 344 (1962).
- 23 Harris E. G., Phys. Fluids, **7**, 1572 (1964).
- 24 Lee K. F., Phys. Fluids, **9**, 2435 (1966).
- 25 Frieman E. A., Goldberger M. L., Watson K. M., Weinberg S., Rosenbluth M. N., Phys. Fluids, **5**, 196 (1962).
- 26 Simpson J. E., Dunn D. A., Journ. Appl. Phys., **37**, 4201 (1966).
- 27 Crawford E. W., Int. Journ. Electronics, **19**, 217 (1965).
- 28 Bobroff D. L., Haus H. A., Kluver J. W., Journ. Appl. Phys., **33**, 2932 (1962).
- 29 Schneider H. M., Phys. Fluids, **9**, 2299 (1966).
- 30 Parker J. V., Nickel J. C., Gould R. W., Phys. Fluids, **7**, 1489 (1964).
- 31 Гильденбург В. Б., ЖЭТФ, **46**, 2156 (1964).
- 32 Baldwin D. E., Hirshfield J. L., Appl. Phys. Letters, **11**, 175 (1967).
- 33 Baldwin D. E., Henderson D. M., Hirshfield J. L., Phys. Rev. Lett., **20**, 314 (1968).
- 34 Pearlstein L. D., Bhadra D., Phys. Fluids, **12**, 213 (1969).
- 35 Briggs R. J., Paik S. F., Int. Journ. Electronics, **23**, 163 (1968).
- 36 Buneman O., Phys. Rev., **115**, 503 (1959).
- 37 Briggs R. J., MIT Quarterly Progress Report, No. 85, 183 (1967).

Кинетическая теория плазменных волн в магнитном поле

Д. БАЛДВИН, А. БЕРНСТЕЙН, М. ВИННИК

David E. Baldwin, Ira B. Bernstein, M. P. H. Weenink, Department of Engineering and Applied Science, Yale University, New Haven, Connecticut

ВВЕДЕНИЕ

В двух предыдущих частях данной серии обзорных работ о волновых явлениях в плазме¹⁾ рассматривались соответственно теория волн, основанная на уравнениях гидродинамики, и кинетическая теория без учета влияния магнитного поля. Здесь мы разовьем кинетическую теорию волн в магнитном поле²⁾. Из-за многообразия работ, появившихся в последние годы в данной области, авторы не пытались дать их исчерпывающий обзор, а постарались просуммировать наиболее существенные результаты и методы расчетов, отсылая читателя к литературе для более детального ознакомления с конкретными исследованиями.

В таком духе изложена прежде всего теория волн малой амплитуды в безграничной однородной плазме, где оказалось возможным получить общее решение в явном виде. Сложность ответа и обилие параметров делают целесообразным рассмотрение только ряда важных предельных случаев. Для того чтобы установить, насколько данные результаты применимы к реальным ситуациям (появление границ и градиентов плотности), детально рассмотрены две следующие проблемы: резонансы в плазменном столбе и геометрическая оптика в горячей замагниченной плазме и ее приложения для вычисления потерь из-за синхротронного излучения.

Когда даются ссылки, относящиеся к предшествующим обзорам данной серии, то сначала римскими цифрами обозначается номер обзора, а затем номер уравнения.

¹⁾ Обзор I — Nucl. Fusion, 1, 3 (1960); обзор II — Nucl. Fusion, 4, 61 (1964).

²⁾ Данный обзор является вполне самостоятельным и может быть понят без обращения к другим статьям данной серии. Вместе с тем читателям можно рекомендовать познакомиться с отечественными монографиями: В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, «Волны в магнитоактивной плазме», изд-во «Наука», М., 1970; В. П. Силин, А. А. Рухадзе, «Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред», М., Атомиздат, 1961. — *Прим. ред.*

1. БЕЗГРАНИЧНАЯ ПЛАЗМА

1.1. Общее рассмотрение

Рассмотрим плазму, в которой столкновениями можно пренебречь. Позднее мы обсудим условия, при которых такое рассмотрение законно. Предположим, что необходимо учитывать только электромагнитные силы, действующие на заряженные частицы, причем энергия некоторых из них настолько велика, что оправдано релятивистское рассмотрение. Пусть \mathbf{r} обозначает координату и обозначим

$$\mathbf{v} = \dot{\gamma} \mathbf{r}, \quad (1.1)$$

где

$$\gamma = \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Заметим, что декартовы компоненты вектора \mathbf{v} являются тремя пространственными компонентами четырехмерной скорости v_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$), и если m есть масса покоя данной частицы, то $m\mathbf{v}$ представляет собой соответствующий импульс. Обозначим через $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ функцию распределения данного сорта заряженных частиц в точке \mathbf{r} , \mathbf{v} фазового пространства. По необходимости мы будем отмечать функцию f соответствующим индексом, но для краткости записи постараемся воздерживаться от этого насколько возможно.

Кинетическое уравнение для f легко может быть получено из рассмотрения временного изменения количества частиц в произвольном фиксированном объеме фазового пространства. В отсутствие столкновений скорость этого изменения определяется потоками через границы объема, т. е. если $d^2\mathbf{r}$ есть векторный элемент поверхности в \mathbf{r} -пространстве, направленный наружу из объема, а $d^2\mathbf{v}$ — соответствующий векторный элемент в пространстве скоростей, то, поскольку $\mathbf{r}f$ соответствует потоку плотности через поверхность в \mathbf{r} -части пространства, а $\mathbf{v}f$ — в \mathbf{v} -части пространства, имеем

$$\frac{d}{dt} \int d^3r d^3v f = - \int d^3v d^2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}f - \int d^3r d^2\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}f. \quad (1.3)$$

Переставляя местами интегрирование и дифференцирование по времени в левой части уравнения и применяя теорему Гаусса к правой части, получаем

$$\int d^3r d^3v \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (\dot{\mathbf{r}}f) + \nabla_v \cdot (\dot{\mathbf{v}}f) \right] = 0. \quad (1.4)$$

Но если данное уравнение выполняется для произвольного объема в \mathbf{r} , \mathbf{v} -пространстве, то сам интеграл должен исчезать.

Таким образом, если использовать уравнение (1.1) и учесть, что уравнение для силы Лоренца имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\right], \quad (1.5)$$

где q — заряд рассматриваемой частицы, то можно написать

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{\gamma} f\right) + \nabla_v \cdot \left[\frac{q}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{\gamma c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) f\right] = 0. \quad (1.6)$$

Поскольку \mathbf{v} и γ не зависят от \mathbf{r} , а γ зависит только от v , получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{\gamma} \cdot \nabla f + \frac{q}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{\gamma c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot \nabla_v f = 0. \quad (1.7)$$

Если для большинства частиц $\dot{r}^2 \ll c^2$, $\gamma \rightarrow 1$ и $\mathbf{v} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}$, то, очевидно, что уравнение (1.7) переходит в обычное нерелятивистское уравнение Власова¹⁾.

Очевидно, что плотность частиц равна

$$N(\mathbf{r}, t) = \int d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (1.8)$$

в то время как макроскопическую скорость описывает выражение

$$N\mathbf{U} = \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{\gamma} f. \quad (1.9)$$

Таким образом, если проинтегрировать уравнение (1.7) по \mathbf{v} , то получаем

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N\mathbf{U}) = 0. \quad (1.10)$$

С помощью этих «макроскопических» величин можно записать плотность зарядов

$$\sigma = \sum qN \quad (1.11)$$

и плотность электрического тока

$$\mathbf{J} = \sum qN\mathbf{U}, \quad (1.12)$$

где суммирование производится по всем видам присутствующих в объеме частиц. Нетрудно видеть, что следствием уравнения (1.10) является сохранение заряда, а именно:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.13)$$

¹⁾ Вообще говоря, теория может быть представлена в явно ковариантной форме (см. работы [2, 3]), но для наших целей важнее подчеркнуть аналогию с хорошо известной нерелятивистской теорией и тот факт, что уравнение (1.7) просто соответствует сохранению числа частиц в одночастичном фазовом пространстве.

Система уравнений (1.7) должна быть дополнена уравнениями Максвелла

$$c\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.14)$$

$$c\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\sigma, \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.17)$$

Уравнения (1.16) и (1.17) в некотором смысле являются следствиями уравнений (1.14) и (1.15). Так, если вычислить дивергенцию в двух последних уравнениях, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\sigma] = -4\pi \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right] = 0. \quad (1.19)$$

Таким образом, если уравнения (1.16) и (1.17) справедливы для какого-либо частного момента времени, то в соответствии с уравнениями (1.14) и (1.15) они будут справедливы для любого момента времени.

Рассмотрим состояние, описываемое уравнениями (1.7), (1.14)–(1.17). Очевидно, что данные уравнения должны быть дополнены соответствующими граничными условиями. Например, если мы имеем дело с замкнутой системой, то необходимо задание условий на границе объема для входящих частиц, а именно:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \text{ для } \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} < 0, \quad (1.20)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль, направленная наружу. Если стенки рассматриваемого объема, полностью проводящие и покоящиеся, то на границе должно выполняться условие

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0. \quad (1.21)$$

Если, кроме того, они зеркально отражают частицы, то уравнение (1.20) сводится к виду

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, t). \quad (1.22)$$

Уравнения (1.21) и (1.22) описывают систему, замкнутую как для выходящих частиц, так и для излучения, т. е. следуя уравнению (1.3), легко можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d^3r d^3v f = & - \int d^3v d^2\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} f - \\ & - \int d^3r d^2\mathbf{v} \cdot \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{vc} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) f = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Поверхностный интеграл в пространстве скоростей равен нулю. Поскольку требуется, чтобы $f \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$. Точнее говоря, f должно так стремиться к нулю, чтобы существовали все моменты $\int d^3\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v} \dots \mathbf{v}f$. Поверхностный интеграл в обычном пространстве равен нулю в соответствии с уравнением (1.22).

Аналогично ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \sum \int d^3r d^3v c^2 m \gamma f + \frac{1}{8\pi} \int d^3r [E^2 + B^2] \right\} = \\ = \sum \int d^3r d^3v c^2 m \gamma \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = \\ = - \sum \int d^3r d^3v c^2 m \gamma \left\{ \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{\gamma} f \right) + \nabla_v \cdot \left[\frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\gamma c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) f \right] \right\} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left\{ \mathbf{E} \cdot [c \nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{J}] + \mathbf{B} \cdot (-c \nabla \times \mathbf{E}) \right\} = \\ = - \sum \int d^3v d^2\mathbf{r} \cdot c^2 m \mathbf{v} f - \sum \int d^3r d^2\mathbf{v} \cdot c^2 \gamma q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{\gamma c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] f + \\ + \sum \int d^3r d^3v q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{\gamma c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] f \cdot \frac{\mathbf{v}}{\gamma} + \\ + \int d^3r \left[-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] = \\ = - \int d^2\mathbf{r} \cdot \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \sum \int d^3v d^2\mathbf{r} \cdot c^2 m \mathbf{v} f = 0, \quad (1.24) \end{aligned}$$

где мы использовали теорему Гаусса с учетом того, что $\nabla_v \gamma = v/c^2 \gamma$, и учли граничные условия. Очевидно, если имеются потоки частиц в систему, то величина $\sum \int d^3v d^2\mathbf{r} \cdot c^2 m \mathbf{v} f$ не должна быть равна нулю. Соответственно если бы имелась возможность излучения сквозь границы, то поток Пойнтинга $(c/4\pi) \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ не был бы равен нулю.

1.2. Линеаризованные уравнения

Будем интересоваться устойчивостью и распространением волн в плазме, квазистационарное состояние которой описывается уравнениями (1.7), (1.14)–(1.17) при $\partial/\partial t = 0$. Там, где это

¹⁾ В нерелятивистском пределе кинетическая энергия $c^2 m \gamma = c^2 m [1 + 1/2 \cdot v^2/c^2] = mc^2 + 1/2 m v^2$, где v по существу есть скорость, и уравнение (1.24) принимает обычную форму.

необходимо, мы будем отмечать соответствующие величины индексом ноль:

$$\frac{\mathbf{v}}{\gamma} \cdot \nabla f_0 + \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{\gamma c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \right) \cdot \nabla_v f_0 = 0, \quad (1.25)$$

$$c \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0, \quad (1.26)$$

$$c \nabla \times \mathbf{B}_0 = 4\pi \mathbf{J}_0, \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 4\pi \sigma_0, \quad (1.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0. \quad (1.29)$$

Очевидно, что уравнение (1.26) позволяет нам записать

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla \Phi_0. \quad (1.30)$$

Развитие метода малых возмущений нескольких переменных связано с использованием линеаризованных форм уравнений (1.7), (1.14) и (1.15). Если мы запишем

$$\hat{f} = f_0 + f_1, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \quad (1.33)$$

и т. д., где индексом 0 обозначены стационарные значения соответствующих величин, то получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{\gamma} \cdot \nabla f_1 + \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{\gamma c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \right) \cdot \nabla_v f_1 = \\ = -\frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{\gamma c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \nabla_v f_0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$c \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad (1.35)$$

$$c \nabla \times \mathbf{B}_1 = 4\pi \sum q \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{\gamma} f_1 + \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}. \quad (1.36)$$

Мы можем обойтись без соответствующих уравнений, вытекающих из (1.16) и (1.17), если предположим, что в начальный момент они удовлетворяют полям возмущений.

Структура уравнения (1.34) позволяет записать формальное решение для f_1 через \mathbf{E}_1 и \mathbf{B}_1 . Этот результат получается если учесть, что левая часть уравнения (1.34) может быть проинтегрирована как производная по времени, взятая вдоль траектории частицы, уравнениями движения которой являются уравнения (1.1) и (1.5):

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left\{ f_1 \left[\mathbf{r} + \frac{\mathbf{v} dt}{\gamma}, \right. \right. \\ \left. \left. \mathbf{v} + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) dt, t + dt \right] - f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

После разложения в ряд Тэйлора это выражение в пределе $dt \rightarrow 0$ переходит в левую часть уравнения (1.34). Введем векторы $\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t)$ и $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t)$ таким образом, что

$$\frac{d}{dt'} \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{v}'}{\gamma'},$$

$$\frac{d}{dt'} \mathbf{v}' = \frac{q}{m} \left[\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}'}{\gamma'} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}') \right], \quad (1.38)$$

где

$$\gamma' = \left[1 + \frac{v'^2}{c^2} \right]^{1/2} \quad (1.39)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) &= \mathbf{r}, \\ \mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0) &= \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Тогда после формального интегрирования уравнения (1.34) получим¹⁾

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= f_1[\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, -t), \mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, -t), 0] - \\ &- \frac{q}{m} \int_0^t dt' \{ \mathbf{E}_1[\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t), t'] + [c^2 + v'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t)^2]^{-1/2} \times \\ &\times \mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t) \times \mathbf{B}_1[\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t), t'] \} \times \\ &\times \nabla_{\mathbf{v}'} f_0[\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t), \mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t)]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Заметим, что граничные условия для функции f_1 автоматически удовлетворяются, если они удовлетворяются для функции f_0 , поскольку являются по существу характеристиками невозмущенных траекторий на границах. Это очевидно для случая, когда стенки зеркально отражают частицы²⁾.

Уравнение (1.41) представляет функцию f_1 как линейный функционал от \mathbf{E}_1 и \mathbf{B}_1 . При этом можно записать

$$\mathbf{J}_1 = \sum q \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{v} f_1. \quad (1.42)$$

Таким образом, проблема в принципе сведена к совместному решению уравнений (1.35), (1.36) и (1.42).

В общем случае уравнение (1.41) не может быть решено. Решение возможно только в простейших случаях, когда в явном виде известны орбиты частиц, или даже известны равновесные

¹⁾ Разложение в ряд $\nabla_{\mathbf{v}'} f_0(\xi, [1 - \xi^2/c^2]^{-1/2} \xi)$ означает, что $\nabla_{\mathbf{v}'} f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ вычисляется в точке $\mathbf{r} = \xi$, $\mathbf{v} = \xi [1 - \xi^2/c^2]^{-1/2}$.

²⁾ Заметим, что если столкновения в уравнении (1.34) были бы представлены с помощью простого релаксационного члена, а именно $Df_1 = -\nu f_1$, то уравнение (1.41) могло бы быть модифицировано введением фактора $e^{-\nu t}$, умноженного на первый член правой части и члена $e^{-\nu(t-t')}$ под интегралом.

величины E_0 , B_0 и f_0 . Более того, система уравнений (1.35), (1.36), (1.41) и (1.42) не относится к классу уравнений, свойства которых хорошо изучены. Таким образом, выход может быть найден с помощью анализа очень простых ситуаций или систем, содержащих малый параметр, например, малый ларморовский радиус. В качестве модельной задачи мы будем довольно подробно исследовать по изложенной выше общей схеме случай бесконечной однородной плазмы. Однако при использовании малого параметра часто оказывается более удобным применять уравнение (1.34), а не (1.41).

Рассмотрим стационарную бесконечную однородную плазму при $E_0 = 0$, $B_0 = \text{const}$, $\nabla f_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$ и $J_0 = 0$. Тогда уравнение (1.25) сводится к виду

$$\frac{q}{\gamma m} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_{\sigma} f_0 = 0. \quad (1.43)$$

Для анализа уравнения (1.43) удобно ввести в пространстве скоростей цилиндрическую систему координат ω , ϕ , u таким образом, чтобы

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \omega \cos \phi + \mathbf{e}_2 \omega \sin \phi + \mathbf{e}_3 u, \quad (1.44)$$

где \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 — правосторонние единичные декартовы векторы, направленные так, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{B}_0/B_0$. Затем, если ввести единичные векторы

$$\mathbf{e}_{\omega} = \mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{e}_{\phi} = -\mathbf{e}_1 \sin \phi + \mathbf{e}_2 \cos \phi \quad (1.46)$$

и учесть, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_{\omega} \omega + \mathbf{e}_3 u, \quad (1.47)$$

$$\nabla_{\sigma} = \mathbf{e}_{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} + \mathbf{e}_{\phi} \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial u}, \quad (1.48)$$

где \mathbf{e}_{ω} , \mathbf{e}_{ϕ} и \mathbf{e}_3 образуют правосторонний ортогональный декартовый набор, то легко видеть, что уравнение (1.43) может быть записано в виде

$$\Omega \frac{\partial f_0}{\partial \phi} = 0, \quad (1.49)$$

где

$$\Omega = \frac{qB_0}{mc\gamma} = \frac{qB_0}{mc} \left[1 + \left(u^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (1.50)$$

обозначает ларморовскую частоту. Заметим, что определенное таким образом Ω имеет знак, соответствующий знаку q . Таким образом, уравнение (1.49) определяет, что f_0 не зависит от фазы

вращения ϕ по ларморовской орбите и благодаря пространственной однородности зависит только от ω и u :

$$f_0 = f_0(\omega, u). \quad (1.51)$$

Требования отсутствия суммарного заряда и плотности тока соответственно имеют вид

$$\sigma_0 = \sum q \int d^3v f_0 = \sum q 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{\infty}^{\infty} d\omega \omega f_0 = 0, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{J}_0 = \sum q \int d^3v \mathbf{v} \gamma^{-1} f_0 = \sum q e_3 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} d\omega \omega \gamma^{-1} u f_0 = 0, \quad (1.53)$$

так как элемент объема

$$d^3v = du d\omega d\phi. \quad (1.54)$$

Траектории, определяемые уравнениями (1.38)–(1.40), принимают вид ¹⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t) - \mathbf{r} &\equiv \xi(\mathbf{v}, t' - t) = \\ &= -\mathbf{e}_3 \frac{u}{\gamma} (t - t') + \mathbf{e}_2 \frac{\omega}{\gamma \Omega} \{\cos[\Omega(t - t') + \phi] - \cos \phi\} - \\ &\quad - \mathbf{e}_1 \frac{\omega}{\gamma \Omega} \{\sin[\Omega(t - t') + \phi] - \sin \phi\} \end{aligned} \quad (1.55)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t) &= \xi(\mathbf{v}, t' - t) = \\ &= \mathbf{e}_3 u + \mathbf{e}_2 \omega \sin[\Omega(t - t') + \phi] + \mathbf{e}_1 \omega \cos[\Omega(t - t') + \phi]. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Заметим, что $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ не зависит от \mathbf{r} и

$$\nabla_v f_0(\omega, u) = (\mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial f_0}{\partial u}. \quad (1.57)$$

Уравнение (1.57) необходимо для подстановки в интеграл уравнения (1.41), в котором аргументы должны быть заменены их алгебраическими дополнениями через \mathbf{v}' . Но ω и u , а следовательно, γ и Ω являются константами движения, определяемыми уравнениями (1.55) и (1.56). Следовательно, $\partial f_0(\omega, u)/\partial \omega$ и $\partial f_0(\omega, u)/\partial u$ также являются константами движения. Кроме того, из сравнения уравнений (1.44) и (1.56) легко видеть, что для фазы вращения желательно ввести преобразование:

$$\phi' = \phi + \Omega(t - t'). \quad (1.58)$$

¹⁾ Вектор ξ зависит от τ и t только через комбинацию $\tau - t$, поскольку уравнение (1.38) инвариантно относительно переноса по τ .

Таким образом, с учетом (1.56) интеграл в правой части уравнения (1.41) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \frac{q}{m} \int_0^t dt' \left[\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}' \times \frac{\mathbf{B}_1}{\gamma c} \right] \left\{ \frac{\mathbf{v}' - u \mathbf{e}_3}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial f_0}{\partial u} \right\} = \\ = \frac{q}{m} \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \int_0^t dt' \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{v}' + \frac{q}{m} \frac{1}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \mathbf{e}_3 \times \\ \times \int_0^t dt' \left[\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}' \times \frac{\mathbf{B}_1}{\gamma c} \right]. \quad (1.59) \end{aligned}$$

Заметим, что выражение $\omega \partial f_0 / \partial u - u \partial f_0 / \partial \omega$ равно нулю для любой функции распределения f_0 , зависящей только от $v = (u^2 + \omega^2)^{1/2}$.

Теперь для рассматриваемого случая пространственно однородной плазмы коэффициенты в системе уравнений (1.34) — (1.36) не зависят ни от \mathbf{r} , ни от t . Независимость от \mathbf{r} позволяет искать решения, в которых пространственная зависимость определяется формой интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_k(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k, \\ \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{B}_k(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k, \\ f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \int f_k(\mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Независимость от t позволяет ввести преобразование Лапласа:

$$\mathbf{E}_{k, \omega} = \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \mathbf{E}_k(t) \text{ и т. д.} \quad (1.61)$$

где мнимая часть ω выбрана существенно положительной для того, чтобы интеграл сходился. Тогда уравнения Максвелла (1.35) и (1.36) принимают вид

$$i c k \times \mathbf{E}_{k, \omega} = i \omega \mathbf{B}_{k, \omega} + \mathbf{B}_k(0), \quad (1.62)$$

$$i c k \times \mathbf{B}_{k, \omega} = 4\pi \mathbf{J}_{k, \omega} - i \omega \mathbf{E}_{k, \omega} - \mathbf{E}_k(0), \quad (1.63)$$

и в соответствии с уравнением (1.42)

$$\mathbf{J}_{k, \omega} = \sum q \int d^3v \frac{v}{\gamma} f_{k, \omega}(\mathbf{v}) + \mathbf{J}_{k, \omega}^{\text{внеш}}, \quad (1.64)$$

где $\mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{внеш}}$ учитывает эффект распределения внешних токов, если таковые имеются. Аналогично уравнение (1.59) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{q}{m} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \int_0^t dt' e^{i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t) - \mathbf{r}]} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t') \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t) + \frac{1}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \mathbf{e}_3 \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t') + \mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t' - t) \times \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t')}{\gamma c} \right] \right\}, \quad (1.65) \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ и \mathbf{v}' не зависят от \mathbf{r} . Заметим, что уравнение (1.65) содержит произведение функций от аргумента t' и аргумента $t - t'$. Таким образом, если использовать теорему о свертке для преобразования Лапласа:

$$\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_0^t dt' f(t') g(t - t') = f_{\omega} g_{\omega}. \quad (1.66)$$

то для двойного преобразования, возникающего из (1.65), можно записать выражение

$$\begin{aligned} & \frac{q}{m} \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \int_0^{\infty} dt G \mathbf{v}'(-t) + \\ & + \frac{q}{m} \frac{1}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \mathbf{e}_3 \int_0^{\infty} dt G \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} + \mathbf{v}'(-t) \times \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega}}{\gamma c} \right], \quad (1.67) \end{aligned}$$

в котором мы показали только временную зависимость величины \mathbf{v}' и ввели обозначение

$$\begin{aligned} \ln G &= i\omega t + i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}; -t) - \mathbf{r}] = \\ &= i \left(\omega - \frac{k_{\parallel} u}{\gamma} \right) t - i \frac{k_{\perp} \omega}{\gamma \Omega} \{ \sin(\Omega t + \phi) - \sin \phi \}, \quad (1.68) \end{aligned}$$

где $\mathbf{k} = k_{\parallel} \mathbf{e}_3 + k_{\perp} \mathbf{e}_1$. Заметим, что уравнение (1.67) является тем самым уравнением, которое мы получали бы, если бы нашли решение системы уравнений (1.34)–(1.36), в котором все величины зависят от времени по закону $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$, а все временные интегралы брались при $\text{Im } \omega > 0$ или как собственное аналитическое продолжение. Более того, когда $\text{Im } \omega > 0$, интегрирование по t определяет функции от ω , которые являются аналитическими в верхней половине ω -плоскости, и аналитическое продолжение расширяет область их определения.

Если объединить уравнения (1.62), (1.64) и (1.67), то можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega} - \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{внеш}} = & \sum q \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{v} \int_0^{\infty} dt G f_{\mathbf{k}}[\mathbf{v}'(-t), 0] + \\ & + \sum i \frac{q^2}{m} \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{v} \frac{1}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \cdot \int_0^{\infty} dt G \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}'(-t) \times \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{k}}(0)}{\gamma \omega} - \\ & - \sum \frac{q^2}{m} \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{v} \int_0^{\infty} dt G \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \mathbf{v}'(-t) + \frac{1}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left[\mathbf{e}_3 + \frac{[\mathbf{e}_3 + \mathbf{v}'(-t)] \times \mathbf{k}}{\gamma \omega} \right] \right\} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (1.69) \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (1.63) может быть записано в виде

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{a}, \quad (1.70)$$

где диадный тензор

$$\mathbf{R} = (c^2 k^2 - \omega^2) \mathbf{I} - c^2 \mathbf{k} \mathbf{k} + \mathbf{Q}, \quad (1.71)$$

обозначение \mathbf{I} соответствует единичной диаде, а

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & \sum \frac{4\pi i \omega q^2}{m} \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{v} \int_0^{\infty} dt G \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \mathbf{v}'(-t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \left[\mathbf{e}_3 + \frac{[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}'(-t)] \times \mathbf{k}}{\gamma \omega} \right] \right\}, \quad (1.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & ick \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(0) - i\omega \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(0) + 4\pi i \omega \sum q \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{v} \int_0^{\infty} dt G f_{\mathbf{k}}[\mathbf{v}'(-t), 0] - \\ & - 4\pi \omega \sum \frac{q^2}{m} \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{v \omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \times \\ & \times \int_0^{\infty} dt \frac{G}{\omega c \gamma} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}'(-t) \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(0) + 4\pi i \omega \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega}^{\text{внеш}}. \quad (1.73) \end{aligned}$$

Заметим, что все начальные условия содержатся в выражении (1.73).

Уравнение (1.72) решается, если учесть, что величина, обратная \mathbf{R} , равна

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} = & \frac{\mathbf{R}^A}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{|\mathbf{R}|} \times \\ & \times \begin{vmatrix} R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32} & R_{31}R_{23} - R_{21}R_{33} & R_{21}R_{32} - R_{31}R_{22} \\ R_{32}R_{13} - R_{12}R_{33} & R_{11}R_{33} - R_{13}R_{31} & R_{12}R_{31} - R_{11}R_{32} \\ R_{12}R_{23} - R_{13}R_{22} & R_{21}R_{13} - R_{11}R_{23} & R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} \end{vmatrix}. \quad (1.74) \end{aligned}$$

где $|R|$ обозначает детерминант R , а R^A — присоединенная матрица, т. е. матрица, элементы которой являются алгебраически дополнительными минорами (алгебраическим дополнением) элементов R , при том, что она сама представляет матрицу, составленную из ее декартовых координат. Таким образом, подставляя (1.74) в (1.70) и используя обратное преобразование Лапласа, можно записать

$$E_k(t) = \int_C \frac{d\omega}{2\pi} R^{-1} \cdot a e^{-i\omega t}, \quad (1.75)$$

и, очевидно,

$$E(r, t) = \int d^3k e^{ik \cdot r} E_k(t). \quad (1.76)$$

Контур C в уравнении (1.75) представляет собой прямую в ω -плоскости, параллельную действительной оси и проходящую выше всех особых точек в подынтегральном выражении. Вследствие особенности структуры фактора G [он зависит от ω только в виде $\exp(i\omega t)$], а также из-за ограниченности по t остальных факторов в интегралах, которые определяют элементы R и a , последние являются аналитическими функциями ω во всей верхней ω -полуплоскости. Таким образом, единственно возможными особыми точками в подынтегральных выражениях уравнения (1.75) в верхней ω -полуплоскости являются полюса, связанные с нулями $|R|$. Ясно также, что интеграл вдоль C может быть записан при соответствующей деформации контура как интеграл вдоль действительной ω -оси (в пределах от $-\infty$ до $+\infty$) плюс вклады от всех полюсов, расположенных между контуром C и действительной осью, причем последние легко можно получить с помощью теоремы Коши о вычетах. Такие полюса, если они имеются, указывают на существование неустойчивости, поскольку связанное с ними электрическое поле будет экспоненциально расти во времени. Заметим, что R зависит только от f_0 и не зависит от f_1 , и в этом смысле отражает свойства равновесной плазмы, определяющие распространение волн и их устойчивость. Ясно, что если существует корень «дисперсионного соотношения» $\|R\| = 0$ при $\text{Im } \omega > 0$, то проблема распространения волн теряет смысл, поскольку плазма будет переходить в новое состояние, определяемое нелинейными процессами или граничными условиями.

Аналогичным образом можно записать выражение для плотности тока, используя теоремы о свертке для преобразований Лапласа и Фурье:

$$J_1(r, t) = J_1^*(r, t) + \int d^3r' \int_0^t dt' K(r - r', t - t') \cdot E_1(r', t') + J^{\text{внеш}}(r, t), \quad (1.77)$$

где

$$\mathbf{K}_{\mathbf{k}, \omega} = -\frac{\mathbf{Q}}{4\pi i \omega}, \quad (1.78)$$

а \mathbf{J}_1 — описывает токи, связанные через уравнение (1.73) с начальными условиями. Эти токи проявляют тенденцию затухать за время одного соударения, если таковые имеются, или в любом случае уменьшать свою амплитуду из-за дисперсии скоростей. Таким образом, соотношение между плотностью тока и электрическим полем, хотя и является линейным, но в общем случае не совпадает с простым законом Ома, а определяется с помощью линейного оператора \mathbf{K} . Плотность тока не определяется электрическим полем в данной пространственно-временной точке, а зависит от значения полей в других точках в предшествующие времена. Подобные свойства возникают из-за того, что частицы не локализованы в пространстве, а находятся в движении, причем условия, в которых они находятся в настоящий момент, зависят от предшествующей истории и, в частности, от ускорений, которые они испытывали вдоль своих траекторий.

1.3. Предел бесконечно малого магнитного поля

Рассмотрим предел слабого магнитного поля, когда возможно разложение в ряд по степеням Ω . Проинтегрировав по частям преобразование Фурье — Лапласа уравнения (1.41), мы получим

$$f_{\mathbf{k}, \omega}(\mathbf{v}) = \int_0^{\infty} dt G f_{\mathbf{k}}[\mathbf{v}'(-t), 0] - \frac{q}{m} \int_0^{\infty} dt G \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} + \mathbf{v}'(-t) \times \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega}}{\gamma c} \right] \times \nabla_{\mathbf{v}'} f_0[\mathbf{v}'(-t)]. \quad (1.79)$$

Далее из уравнения (1.68) следует, что

$$\frac{\partial G}{\partial t} = i \left[\omega - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'(-t)}{\gamma} \right] G, \quad (1.80)$$

в то время как уравнение (1.56) дает

$$\frac{\partial \mathbf{v}'(-t)}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{v}'(-t) = \Omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}'(-t). \quad (1.81)$$

Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt G f_{\mathbf{k}}[\mathbf{v}'(-t), 0] &= \\ &= \int_0^{\infty} dt \frac{\partial G}{\partial t} \frac{f_{\mathbf{k}}[\mathbf{v}'(-t), 0]}{i [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'(-t)/\gamma]} = \frac{G f_{\mathbf{k}}[\mathbf{v}'(-t), 0]}{i [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'(-t)/\gamma]} \Big|_0^{\infty} - \\ &\quad - \int_0^{\infty} dt G \frac{\partial \mathbf{v}'(-t)}{\partial t} \times \nabla_{\mathbf{v}'} \frac{f_{\mathbf{k}}[\mathbf{v}'(-t), 0]}{i [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'(-t)/\gamma]}. \quad (1.82) \end{aligned}$$

Но фактор G равен 1 при $t = 0$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ для $\text{Re } \omega > 0$. Таким образом, при повторном интегрировании по частям уравнение (1.82) с учетом того, что $v'(0) = v$, приводит к выражению

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dt G f_{\mathbf{k}} [v'(-t), 0] = \\ & = -\frac{f_{\mathbf{k}}(v, 0)}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v/\gamma]} + \frac{\Omega}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v/\gamma]} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v \frac{f_{\mathbf{k}}(v, 0)}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v/\gamma]} - \\ & - \frac{\Omega^2}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v/\gamma]} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v \left\{ \frac{1}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v/\gamma]} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v \left[\frac{f_{\mathbf{k}}(v, 0)}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v/\gamma]} \right] \right\} - \\ & - \Omega^3 \int_0^{\infty} dt G \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}' \times \nabla_{v'} \left\{ \frac{1}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v'/\gamma]} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}' \times \right. \\ & \quad \left. \times \nabla_{v'} \left[\frac{1}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v'/\gamma]} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}' \times \nabla_{v'} \left(\frac{f_{\mathbf{k}}(v', 0)}{i[\omega - \mathbf{k} \cdot v'/\gamma]} \right) \right] \right\}. \quad (1.83) \end{aligned}$$

Такой же результат, очевидно, может быть получен и для другого интеграла правой части уравнения (1.79).

Подобные выражения могут быть получены более простым способом (который легче обобщать на случай неоднородной плазмы), если учесть, что преобразование Фурье — Лапласа уравнения (1.34) для пространственно однородной плазмы в постоянном внешнем поле даст

$$\begin{aligned} & -i \left(\omega - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\gamma} \right) f_{\mathbf{k}, \omega} - \Omega \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v f_{\mathbf{k}, \omega} = \\ & = f_{\mathbf{k}}(v, 0) - \frac{q}{m} \left[\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega}}{\gamma c} \right] \cdot \nabla_v f_0. \quad (1.84) \end{aligned}$$

Таким образом, если мы ищем решение в виде разложения в ряд по степеням Ω :

$$f_{\mathbf{k}, \omega} = f_{\mathbf{k}, \omega}^{(0)} + f_{\mathbf{k}, \omega}^{(1)} + f_{\mathbf{k}, \omega}^{(2)} + \dots, \quad (1.85)$$

то, подставляя выражение (1.85) в уравнение (1.84) и приравнявая члены с одинаковыми степенями Ω , мы находим

$$f_{\mathbf{k}, \omega}^{(0)} = i \frac{f_{\mathbf{k}}(v, 0) - (q/m) [\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega}/\gamma c] \cdot \nabla_v f_0}{\omega - \mathbf{k} \cdot v/\gamma}, \quad (1.86)$$

$$f_{\mathbf{k}, \omega}^{(n+1)} = i \frac{\Omega}{\omega - \mathbf{k} \cdot v/\gamma} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v f_{\mathbf{k}, \omega}^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.87)$$

Если последние два результата подставить в уравнение (1.85), то ряд, образованный таким способом, совпал бы в точности с выражением, которое получается, если к уравнению (1.83) добавить член, вычисленный путем повторного интегрирования второго интеграла в правой части уравнения (1.79). Преимуще-

ство уравнения (1.83) или производной от него заключается в том, что сохранен остаточный член ряда, и ошибка разложения может быть оценена.

В пределе $\Omega \rightarrow 0$ уравнения (1.71) и (1.73) после некоторых преобразований сводятся к виду

$$\mathbf{R} = (c^2 k^2 - \omega^2) \mathbf{l} + c^2 \mathbf{k} \mathbf{k} - \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3 v \mathbf{v} \frac{\omega \nabla_v f_0 + \mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \nabla_v f_0) / \gamma}{\gamma \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad (1.88)$$

$$\mathbf{a} = -i\omega \mathbf{E}_k(0) + ick \times \mathbf{B}_k(0) + 4\pi i \omega \mathbf{J}_{k, \omega}^{\text{внеш}} - \sum 4\pi q \omega \int d^3 v \mathbf{v} \frac{f_k(\mathbf{v}, 0) + (qi/m) (\mathbf{v} / \gamma c \omega) \cdot \mathbf{B}_k(0) \times \nabla_v f_0}{\gamma \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (1.89)$$

Если, как часто предполагают, $\mathbf{v} \times \nabla_v f_0 = 0$ для всех видов частиц, то уравнения (1.70) можно решить, получив

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{k, \omega} = \frac{i\omega \mathbf{k} \times \mathbf{E}_k(0) + ick^2 \mathbf{B}_k(0) + \sum 4\pi q(\omega) \int d^3 v \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{v} f_k(\mathbf{v}, 0)}{\gamma \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} - 4\pi i \omega \mathbf{k} \times \mathbf{J}_{k, \omega}^{\text{внеш}}}{\omega^2 - c^2 k^2 + \frac{1}{2} \omega \sum \frac{4\pi q^2}{mk^2} \int d^3 v \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \times \nabla_v f_0}{\gamma \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}}, \quad (1.90)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{k, \omega} = \frac{\sum 4\pi q \int d^3 v \frac{\gamma f_k(\mathbf{v}, 0)}{\gamma \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} - 4\pi i \sigma_{k, \omega}^{\text{внеш}}}{1 + \sum \frac{4\pi q^2}{mk^2} \int d^3 v \frac{\gamma \mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0}{\gamma \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}}. \quad (1.91)$$

Для преобразования уравнений (1.90) и (1.91) используем тот факт, что $\nabla_v f_0 = (\mathbf{v}/v) (\partial f_0 / \partial v)$, и проведем интегрирование по азимуту в \mathbf{v} -пространстве, где система координат выбрана таким образом, что полярная ось совпадает с вектором \mathbf{k} , а также используем двойное преобразование уравнения (1.16). Их нерелятивистские выражения получаются при $\gamma \rightarrow 1$. Математическая особенность, введенная релятивистской динамикой, связана с появлением точек ветвления для найденных выражений, рассматриваемых как функции ω в точках $\omega = \pm kc$. Они возникают из-за наличия фактора γ в подынтегральном выражении и могут быть рассмотрены на примере типичного интеграла, входящего в знаменатель уравнения (1.91), который можно записать в виде

$$\int d^3 v \frac{\gamma \mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0}{\gamma \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} = - \int_{-c}^c \frac{du F(u)}{u - \omega/k}, \quad (1.92)$$

где

$$F(u) = \int d^3 v \gamma \mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0(\mathbf{v}) \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - ku\gamma). \quad (1.93)$$

Но правая часть уравнения (1.92) представляет собой интеграл того же типа, что интеграл, рассмотренный в уравнении (II—29) и последующих, где существование таких точек ветвления было продемонстрировано. Физическая картина, лежащая в основе этого явления, связана с взаимодействием волна — частица, т. е. резонансным взаимодействием частиц со скоростью \mathbf{v}/γ и волн с действительной частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , для которых величина $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}/\gamma$ приблизительно равна нулю, или фазовая скорость волны ω/k примерно равна проекции скорости частицы $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}/k\gamma$ в направлении распространения волны. Поскольку скорость частицы никогда не может быть больше, чем скорость света c , а фазовая скорость волны может быть больше c , то интервал действительных значений ω , для которых $\omega^2 < k^2 c^2$, занимает лишь часть действительной ω -оси.

1.4. Преобразование дисперсионного соотношения

Упростим уравнение (1.72), проводя интегрирование по переменным ϕ и t . Раскрывая тройное произведение в уравнении (1.72) и используя уравнение (1.80), запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum \frac{4\pi i q^2}{m} \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{\gamma} \int_0^\infty dt G \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{\omega}{w} \frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3}{\gamma w} \left(w \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial w} \right) \right] \mathbf{v}'(-t) + \right. \\ &\left. + \mathbf{e}_3 \frac{1}{w} \left(w \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial w} \right) \left[\omega - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'(-t)}{\gamma} \right] \right\} = \\ &= \sum \frac{4\pi i q^2}{m} \int_0^\infty d\omega w \int_{-\infty}^\infty du \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ &\times \int_0^\infty dt \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}'(-t)}{\gamma} G \left[\frac{\omega}{w} \frac{\partial f_0}{\partial w} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma w} \left(w \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial w} \right) \right] - \\ &- \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \frac{\mathbf{v} \mathbf{e}_3}{\gamma} \frac{1}{w} \left(w \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial w} \right). \quad (1.94) \end{aligned}$$

Удобно записать

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_3 u + \frac{w}{2} (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) e^{i\phi} + \frac{w}{2} (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2) e^{-i\phi}, \quad (1.95)$$

$$\mathbf{v}'(-t) = \mathbf{e}_3 u + \frac{w}{2} (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) e^{i(\Omega t + \phi)} + \frac{w}{2} (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2) e^{-i(\Omega t + \phi)}. \quad (1.96)$$

Применяя соотношение

$$e^{iz \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} J_n(z), \quad (1.97)$$

выразим G с помощью уравнения (1.68) в виде

$$G = e^{i(\omega - k_{\parallel}u/\gamma)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} J_n\left(\frac{k_{\perp}\omega}{\gamma\Omega}\right) e^{-in'(\Omega t + \phi)} J_{n'}\left(\frac{k_{\perp}\omega}{\gamma\Omega}\right). \quad (1.98)$$

Это позволяет тривиально провести интегрирование по переменным ϕ и t . В результате интегрирования получаем

$$\begin{aligned} Q + \sum \frac{4\pi q^2}{m} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 2\pi \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u}{\gamma} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) = \\ = - \sum \frac{4\pi q^2}{m} 2\pi \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{\gamma} \left[\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \frac{k_{\parallel}}{\gamma} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \right] \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{T}_n}{\omega - (k_{\parallel}u/\gamma) - n\Omega}, \quad (1.99) \end{aligned}$$

где мы ввели обозначение

$$\mathbf{e}_{\pm} = \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2. \quad (1.100)$$

Если аргумент функций J_n равен $k_{\perp}\omega/\gamma\Omega$, то эрмитовый тензор \mathbf{T}_n равен

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 u^2 J_n^2 + (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_3) \frac{\omega u}{2} J_n J_{n+1} + (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- \mathbf{e}_3) \frac{\omega u}{2} J_n J_{n-1} + \\ + (\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- \mathbf{e}_-) \frac{\omega^2}{4} J_{n-1} J_{n+1} + \mathbf{e}_- \mathbf{e}_+ \frac{\omega^2}{4} J_{n-1}^2 + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_- \frac{\omega^2}{4} J_{n+1}^2 = \\ = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 u^2 J_n^2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \omega^2 J_n'^2 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 n^2 \omega^2 \frac{J_n^2}{z^2} + i(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) n \omega^2 \frac{J_n J_n'}{z} - \\ - i(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) \omega u J_n J_n' + (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) \omega u n \frac{J_n^2}{z}. \quad (1.101) \end{aligned}$$

Ясно, что аналитический характер элементов матрицы \mathbf{R} , рассматриваемых как функции ω , качественно тот же, что и знаменателя уже обсуждавшегося ранее уравнения (1.91).

1.5. Предел низкой температуры и слабого магнитного поля

Для того чтобы получить возможность разобраться в довольно сложной общей проблеме, описываемой матрицей \mathbf{R} , рассмотрим ряд относительно простых предельных случаев. Во-первых, обратимся к случаю, когда тепловые эффекты и влияние магнит-

ного поля малы. Для вычисления величины \mathbf{Q} удобно применить уравнение (1.83). Если мы введем обозначение

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \omega \nabla_v f_0 + \gamma^{-1} \mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \nabla_v f_0) = \left(\omega - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\gamma} \right) \nabla_v f_0 + \left(\frac{\mathbf{v}}{\gamma} \right) \mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0, \quad (1.102)$$

то можем записать \mathbf{Q} в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & - \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{\gamma} \left\{ \frac{\mathbf{g}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} + \frac{i\Omega}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \right. \\ & \times \nabla_v \left(\frac{\mathbf{g}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} \right) - \frac{\Omega^2}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \\ & \left. \times \nabla_v \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v \left(\frac{\mathbf{g}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} \right) \right] + \dots \right\} \quad (1.103) \end{aligned}$$

или, учитывая, что $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v = \partial / \partial \phi$, и проводя интегрирование по частям, получить

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & - \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \left\{ \frac{\mathbf{v}}{\gamma} - i\Omega \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v \left(\frac{\mathbf{v} / \gamma}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} \right) - \Omega^2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v} \times \nabla_v \left(\frac{\mathbf{v} / \gamma}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} \right) \right] + \dots \right\} \frac{\mathbf{g}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma}. \quad (1.104) \end{aligned}$$

Предположим для простоты, что скорость

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \int d^3v \frac{f_0}{N_0} \quad (1.105)$$

равна нулю для каждого сорта частиц, и, разлагая в ряд $\gamma = 1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 + \dots$, запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma} &= \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} [1 - \frac{1}{2}v^2/c^2 + \dots]} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left[1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} + \frac{v^2}{2c^2} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} + \dots \right]. \quad (1.106) \end{aligned}$$

Заметим, что в нерелятивистском пределе $\langle \mathbf{v} \rangle$ представляет собой просто среднюю скорость. Случай $\langle \mathbf{v} \rangle \neq 0$ может быть рассмотрен аналогичным способом, но математика становится очень сложной. Выражение для \mathbf{Q} в данном случае равно

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & - \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \left\{ \mathbf{v} - \frac{v^2}{2c^2} \mathbf{v} + \dots - i \frac{\Omega}{\omega} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v} - i \frac{\Omega}{\omega^2} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \dots \right. \\ & \left. \dots - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}) + \dots \right\} \left\{ \nabla_v f_0 + \frac{\mathbf{v}}{\omega} \mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}}{\omega^2} \mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0 + \dots \right\}. \quad (1.107) \end{aligned}$$

Если мы проведем интегрирование по частям таким образом, чтобы устранить действие оператора ∇_v на функцию f_0 , и за-

метим, что в соответствии с уравнением (1.106) все члены, линейные по \mathbf{v} , исчезают, то уравнение (1.107) приводится к виду

$$\mathbf{Q} = \sum \omega_p^2 \left\{ \left| 1 - \frac{\langle v^2 \rangle}{2c^2} \right| - \frac{\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle}{c^2} + \dots - i \frac{\Omega}{\omega} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{l} + \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{l}) + \dots + \frac{\mathbf{k} \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{k} + k^2 \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle + \mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle \mathbf{k}}{\omega^2} + \dots \right\}, \quad (1.108)$$

где собственная плазменная частота определяется выражением

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N_0 q^2}{m}. \quad (1.109)$$

Пока f_0 не зависит от ϕ ,

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \omega^2 \cos^2 \phi + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \omega^2 \sin^2 \phi + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 u^2 + (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \times \\ \times \omega^2 \sin \phi \cos \phi + (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) \omega u \cos \phi + (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) \omega u \sin \phi. \quad (1.110)$$

Таким образом, поскольку $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{l} - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$, то

$$\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle = \int d^3v \mathbf{v}\mathbf{v} \frac{f_0}{N_0} = \left\langle \frac{1}{2} \omega^2 \right\rangle (\mathbf{l} - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) + \langle u^2 \rangle \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.111)$$

Это выражение может быть использовано в уравнении (1.108) совместно с уравнением (1.71) для того, чтобы записать \mathbf{R} в виде

$$\mathbf{R} = (c^2 k^2 - \omega^2) \mathbf{l} - c^2 \mathbf{k}\mathbf{k} + \sum \omega_p^2 \left\{ \left| 1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 \langle w^2 \rangle + \Omega^2}{\omega^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left\langle \frac{w^2}{c^2} \right\rangle - \left\langle \frac{u^2}{2c^2} \right\rangle \right] - i \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \mathbf{e}_3 \times \mathbf{l} + \frac{1}{\omega^2} \left[\mathbf{k}\mathbf{k} \langle w^2 \rangle + \right. \\ \left. + \left(k^2 \langle u^2 - \frac{1}{2} \bar{w}^2 \rangle - \Omega^2 \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \langle u^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \rangle \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{k} (\mathbf{e}_3 \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_3) \right] - \\ \left. - \left(\frac{\langle u^2 - \frac{1}{2} \bar{w}^2 \rangle}{c^2} \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \right\}. \quad (1.112)$$

Рассмотрим случай настолько высоких частот, что вкладом тяжелых частиц в \mathbf{R} можно пренебречь ($\omega_p^2_{\text{эл}} \gg \omega_p^2_{\text{ион}}$). Выберем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы вектор \mathbf{k} был направлен вдоль оси z , а вектор \mathbf{e}_3 — в $x-z$ -плоскости под углом θ к \mathbf{k} . Тогда, если пренебречь тепловыми, релятивистскими и магнитными поправками, матрица \mathbf{R} принимает вид

$$\begin{array}{c} x \\ y \\ y \end{array} \left\| \begin{array}{ccc} -\omega^2 + c^2 k^2 + \omega_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 + c^2 k^2 + \omega_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 + \omega_p^2 \end{array} \right\|. \quad (1.113)$$

Очевидно, что дисперсионное соотношение $|\mathbf{R}| = 0$ имеет простой корень $\omega^2 = \omega_p^2$, соответствующий продольным колебаниям холодной плазмы, и двойной корень $\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2$, соответствующий поперечной волне. Поправочные члены для случая продольной волны могут быть, очевидно, получены из условия $R_{zz} = 0$ заменой ω^2 в теории возмущения на ω_p^2 . Эта процедура представляет собой по существу использование первого порядка теории возмущений. Результат имеет вид

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} k^2 \langle \omega^2 \rangle \sin^2 \theta + 3k^2 \langle u^2 \rangle \cos^2 \theta + \Omega^2 \sin^2 \theta - \left\langle \frac{1}{2} u^2 + \omega^2 + \left(u^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \cos^2 \theta \right\rangle \frac{\omega_p^2}{c^2}. \quad (1.114)$$

Поправки в случае поперечных волн сложнее, так как в наименьшем порядке корни вырождаются. Здесь необходимо положить нулю алгебраическое дополнение R_{zz} и в поправочных членах заменить ω на $(c^2 k^2 + \omega_p^2)^{1/2}$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 = & c^2 k^2 + \omega_p^2 + \\ & + \frac{1/2 k^2 \langle \omega^2 \rangle (1 + \cos^2 \theta) + k^2 \langle u^2 \rangle \sin^2 \theta + \Omega^2 (1 + \cos^2 \theta)}{2 (c^2 k^2 + \omega_p^2)} \omega_p^2 - \\ & - \frac{\langle 2\omega^2 + u^2 \rangle + \langle u^2 - 1/2 \omega^2 \rangle \sin^2 \theta}{2c^2} \omega_p^2 \pm \\ & \pm \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{(1 + \cos^2 \theta) (1/2 k^2 \langle \omega^2 \rangle + \Omega^2) + k^2 \langle u^2 \rangle \sin^2 \theta}{c^2 k^2 + \omega_p^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2 \{ (\omega^2 + u^2/2) + \langle u^2/2 + \omega^2/4 \rangle \sin^2 \theta \}}{c^2} \right]^2 \sin^2 \theta + \frac{\Omega^2 \cos^2 \theta}{c^2 k^2 + \omega_p^2} \right\}^{1/2} \omega_p^2. \quad (1.115) \end{aligned}$$

Если $\Omega^2 \sim k^2 \langle v^2 \rangle + \omega_p^2 \langle v^2 \rangle / c^2$, то очевидно, что основной эффект связан с введением магнитного поля, и уравнение (1.115) приводится к виду

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2 \pm \omega_p^2 \Omega (c^2 k^2 + \omega_p^2)^{-1/2} \cos \theta. \quad (1.116)$$

С другой стороны, если пренебречь магнитным полем, то имеем два корня

$$\begin{aligned} \omega^2 = & c^2 k^2 + \omega_p^2 + \left\{ \frac{1}{2} k \langle \omega^2 \rangle (1 + \cos^2 \theta) + k^2 \langle u \rangle \right\} \omega_p^2 (c^2 k^2 + \omega_p^2)^{-1} - \\ & - \langle 2\omega^2 + u^2 \rangle \frac{\omega_p^2}{c^2} - \left\langle u^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right\rangle \omega_p^2 \frac{\sin^2 \theta}{c^2}, \quad \omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2. \quad (1.117) \end{aligned}$$

При выводе уравнения (1.112) не задавалось условие $k^2 v^2 \ll \omega^2$, а, как это ясно из уравнения (1.106), требовалось только, чтобы $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \ll \omega^2$. Предположим, $\omega^2 \sim 1/2 k^2 \omega^2 \gg k^2 u^2$ и $\theta \sim 0$

(распространение вдоль магнитного поля). В этом случае матрица \mathbf{R} является диагональной и условие $R_{xx} = 0$ в пренебрежении релятивистскими и магнитными поправками дает

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2 + \frac{1}{2} k^2 \langle \omega^2 \rangle \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (1.118)$$

Поскольку $\langle \omega^2 \rangle \ll c^2$, мы можем приближенно положить левую часть уравнения (1.118) равной нулю и получить решение

$$\omega^2 = - \frac{1/2 k^2 \langle \omega^2 \rangle \omega_p^2}{c^2 k^2 + \omega_p^2}, \quad (1.119)$$

которое соответствует нарастанию поперечной волны, возникающему из-за анизотропии электронной функции распределения. Ясно, что эта неустойчивость не зависит от наличия магнитного поля, но возникает всякий раз, когда функция f_0 такова, что для некоторого единичного вектора \mathbf{n} выполняется условие

$$\langle (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})^2 \rangle \ll \langle (\mathbf{n} \times \mathbf{v})^2 \rangle.$$

Разложение уравнения (1.106) справедливо везде, за исключением случая $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma \leq 0$. Это условие, очевидно, не может выполняться в холодной плазме для поперечных волн, частоты которых определяются выражением $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, поскольку $v^2 / \gamma^2 \leq c^2$. Однако в случае продольных волн, для которых частоты $\omega^2 = \omega_p^2$ таковы, что $\omega_p^2 < k^2 c^2$, область $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} / \gamma \sim 0$ дает мнимую добавку в характеристический интеграл типа (1.92) и, как показано в уравнении (II-40) и последующих, приводит к явлению затухания Ландау. Как мы увидим, это явление возникает всегда, когда существует возможность резонансного взаимодействия волн с частицами.

1.6. Распространение вдоль магнитного поля

Другой предельный случай, который может быть довольно подробно рассмотрен,— это распространение вдоль очень слабого магнитного поля. В этом случае $k_{\perp} = 0$, а $J_n(k_{\perp} \omega / \gamma \Omega) = \delta_{n,0}$, где $\delta_{n,m}$ — дельта-функция Кронекера, равная единице при $n = m$ и нулю во всех других случаях.

При этом

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 u^2 \delta_{n,0} + \mathbf{e}_- \mathbf{e}_+ \frac{1}{4} \omega^2 \delta_{n,1} + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_- \frac{1}{4} \omega^2 \delta_{n,-1} \quad (1.120)$$

и

$$\mathbf{e}_3^2 = 1, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_+ = 0, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_- = 0, \quad \mathbf{e}_+^2 = 0, \quad \mathbf{e}_-^2 = 0, \quad \mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_- = 2. \quad (1.121)$$

Таким образом, если мы образуем скалярные произведения уравнения (1.70) с векторами \mathbf{e}_+ , \mathbf{e}_- и \mathbf{e}_3 , то получим в результате

$$\left[c^2 k^2 - \omega^2 - \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \frac{\omega}{2\gamma} \frac{\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \frac{k}{\gamma} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right)}{\omega - ku/\gamma - \Omega} \right] \times \\ \times \mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{a}, \quad (1.122)$$

$$\left[c^2 k^2 - \omega^2 - \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \frac{\omega}{2\gamma} \frac{\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \frac{k}{\gamma} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right)}{\omega - ku/\gamma + \Omega} \right] \times \\ \times \mathbf{e}_- \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{e}_- \cdot \mathbf{a}, \quad (1.123)$$

$$- \omega^2 \left[1 + \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \frac{\partial f_0 / \partial u}{\omega - ku/\gamma} \right] \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}. \quad (1.124)$$

Очевидно, что уравнение (1.124) идентично уравнению (1.91) и описывает продольные волны. Кроме того, уравнение (1.122) отличается от уравнения (1.123) только знаком Ω , и анализ первого из них может быть непосредственно перенесен на второе.

Рассмотрим уравнение (1.123). Если мы проведем интегрирование по частям таким образом, чтобы устранить дифференцирование f_0 , то получим в результате для коэффициента при $\mathbf{e}_- \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$ выражение

$$c^2 k^2 - \omega^2 + \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int \frac{d^3v}{\gamma} f_0 \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{\Omega}{\omega - ku/\gamma + \Omega} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1/2 k \omega^2 \gamma^{-1}}{\omega - ku/\gamma + \Omega} \right) - \frac{\omega^2 \omega (\omega - ku/\gamma)}{2\gamma^2 c^2 (\omega + \Omega - ku/\gamma)^2} \right\}, \quad (1.125)$$

которое для холодной плазмы, состоящей из электронов и протонов, сводится к виду

$$c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_+^2 + \omega_-^2 - \frac{\Omega_+ \omega_+^2}{\omega + \Omega_+} + \frac{\Omega_- \omega_-^2}{\omega - \Omega_-} \equiv R_-(\omega), \quad (1.126)$$

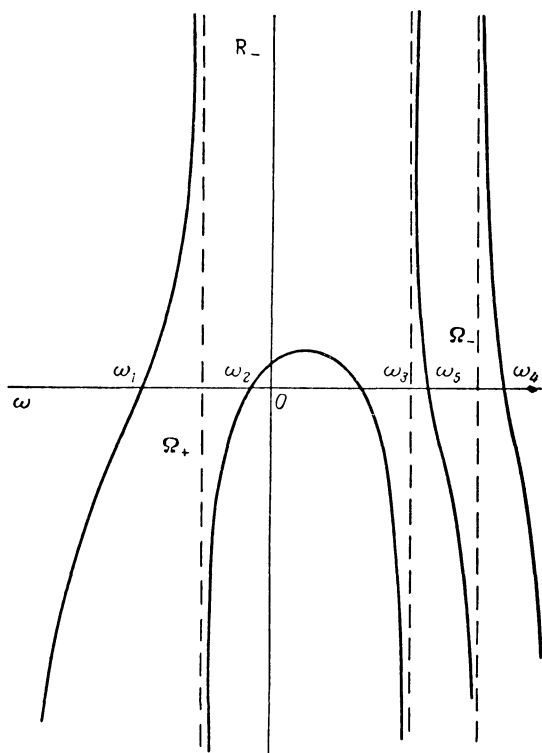
где

$$\omega_+^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{m_+}, \quad \omega_-^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{m_-}, \quad \Omega_+ = \frac{eB_0}{m_+ c}, \quad \Omega_- = \frac{eB_0}{m_- c}. \quad (1.127)$$

Анализ уравнения (1.126) удобно провести с помощью диаграммы на фиг. 1, где уравнение (1.126) изображено схематически как функция ω . Заметим, что для больших ω , $R_-(\omega) \sim -\omega^2$, что $R_-(0) = c^2 k^2$ и что существуют простые полюса при $\omega = \Omega_+$ и $\omega = \Omega_-$. Таким образом, кривая $R_-(\omega)$, как показано на фигуре, состоит из трех ветвей и существуют, очевидно, четыре нуля. Все они должны быть корнями, поскольку если R_- привести к

общему знаменателю, то числитель будет представлять собой полином четвертого порядка по ω .

Существуют различные предельные случаи, в которых могут быть получены простые результаты. Во-первых, рассмотрим



Фиг. 1. Диаграмма функции $R_-(\omega)$ для покоящейся плазмы.

возможность существования корня, для которого $|\omega| \ll \Omega_+$. Очевидно, что из-за малого отношения электронной и протонной массы $\Omega_+ \ll \Omega_-$. В этом случае возможно разложить в ряд дисперсионное соотношение $R_- = 0$ и получить

$$0 = -\omega^2 + c^2 k^2 + \omega_+^2 - \omega_-^2 - \omega_+^2 \left[1 - \frac{\omega}{\Omega_+} + \frac{\omega^2}{\Omega_+^2} - \dots \right] - \omega_-^2 \left[1 + \frac{\omega}{\Omega_-} + \frac{\omega^2}{\Omega_-^2} + \dots \right]. \quad (1.128)$$

Но $\omega_+^2/\Omega_+ = \omega_-^2/\Omega_-$. Таким образом, уравнение (1.128) можно приближенно представить в виде

$$0 = -\omega^2 + c^2 k^2 - \frac{\omega^2 \omega_+^2}{\Omega_+^2}, \quad (1.129)$$

откуда

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{v_A^2}{1 + v_A^2/c^2} = \frac{c^2}{1 + 4\pi N_0 m_+ c^2 / B_0^2}, \quad (1.130)$$

где v_A — альфвеновская скорость, определяемая выражением

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi N_0 m_+}. \quad (1.131)$$

Когда $v_A^2 \ll c^2$, то $\omega^2 = k^2 v_A^2$, и уравнение (1.130) описывает магнитогидродинамические волны; когда $v_A^2 \gg c^2$, то $\omega^2 = k^2 c^2$, и уравнение (1.130) описывает электромагнитные волны.

Предположим, что существует корень $\omega \sim -\Omega_+$. В этом случае, поскольку $\Omega_- \gg \Omega_+$, дисперсионное соотношение $R_- = 0$ можно приближенно записать в виде

$$0 = -\Omega_+^2 + c^2 k^2 + 2\omega_+^2 - \frac{\Omega_+ \omega_+^2}{\omega + \Omega_+}, \quad (1.132)$$

откуда

$$\omega = -\Omega_+ \left[1 - \frac{\omega_+^2}{c^2 k^2 + 2\omega_+^2 - \Omega_+^2} \right]. \quad (1.133)$$

Очевидно, что приведенное выше выражение справедливо, пока второй член в квадратных скобках мал по сравнению с единицей, т. е. в случаях $c^2 k^2 \gg \Omega_+^2$ или $c^2 k^2 \ll \Omega_+^2$. Аналогично если искать корень $\omega \sim \Omega_-$, то в результате аппроксимации уравнения (1.126) получим

$$0 = c^2 k^2 - \Omega_-^2 + \omega_-^2 + \frac{\omega_-^2 \Omega_-}{\omega - \Omega_-} \quad (1.134)$$

или

$$\omega = \Omega_- \left[1 + \frac{\omega_-^2}{\Omega_-^2 - \omega_-^2 - c^2 k^2} \right], \quad (1.135)$$

и уравнение (1.135), очевидно, справедливо, если $\Omega_-^2 \gg c^2 k^2$ или если $\Omega_-^2 \ll c^2 k^2$.

Рассмотрим затем, как изменяются полученные выше результаты при наличии пучка быстрых электронов. В этом случае

$$f_-(\omega, u) = N_0 \{ (1 - \varepsilon) \delta(u + u_1) + \varepsilon \delta(u - u_2) \} \frac{\delta(\omega)}{2\pi\omega}, \quad (1.136)$$

$$f_+(\omega, u) = \frac{N_0 \delta(u) \delta(\omega)}{2\pi\omega}, \quad (1.137)$$

где для того, чтобы в равновесии отсутствовал суммарный ток, необходимо положить

$$\frac{(1 - \varepsilon) u_1}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon u_2}{\gamma_2} \quad (1.138)$$

или

$$\gamma_i = \left[1 + \frac{u_i^2}{c^2} \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2. \quad (1.139)$$

В этом случае дисперсионное соотношение, вытекающее из уравнения (1.123), имеет вид

$$\begin{aligned} 0 = R_- = c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_+^2 \left[1 - \frac{\Omega_+}{\omega + \Omega_+} \right] + \\ + \frac{(1 - \varepsilon) \omega_-^2}{\gamma_1} \left[1 + \frac{\Omega_- / \gamma_1}{\omega + k u_1 / \gamma_1 - \Omega_- / \gamma_1} \right] + \\ + \frac{\varepsilon \omega_-^2}{\gamma_2} \left[1 + \frac{\Omega_- / \gamma_2}{\omega - k u_2 / \gamma_2 - \Omega_- / \gamma_2} \right]. \quad (1.140) \end{aligned}$$

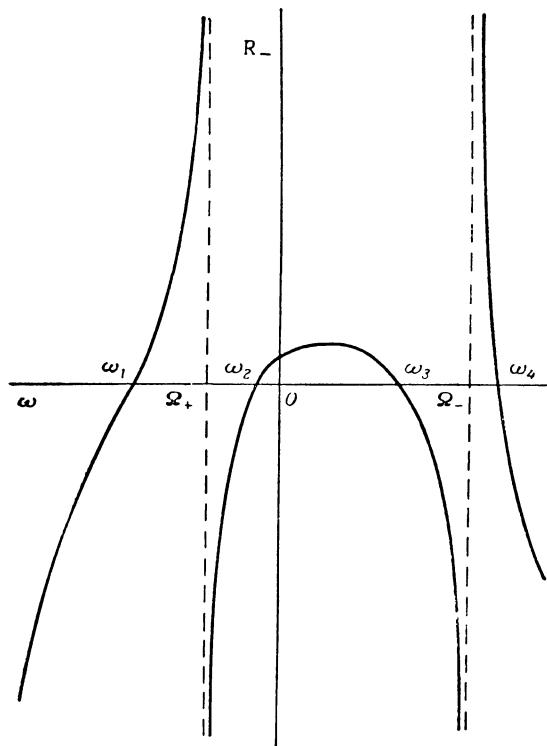
Заметим, что пучок быстрых электронов создает новый полюс в выражении R_- как функции от ω . Этот результат показан схематически на фиг. 2. В общем случае, как можно видеть на фигуре, появляется еще один дополнительный корень ω_3 дисперсионного соотношения. По мере того как u_2/γ_2 растет от нуля, этот корень движется влево по диаграмме, сдвигая максимум второй ветви вниз. Если u_2/γ_2 настолько велико, что из-за смещения максимума образовалась щель, захватывающая ω -ось, то два действительных корня исчезают и возникают два комплексно-сопряженных корня. Один из них должен иметь отрицательную мнимую часть и соответствует неустойчивости. Однако поскольку максимальная величина u_2/γ_2 равна c , то данная ситуация не может возникнуть, если $\omega_2 > kc$.

Есть простое физическое объяснение случая возникновения неустойчивости; приближенное условие того, что щель захватывает ось ω , можно записать

$$\omega - \frac{k u_2}{\gamma_2} - \frac{\Omega_-}{\gamma_2} \sim 0, \quad (1.141)$$

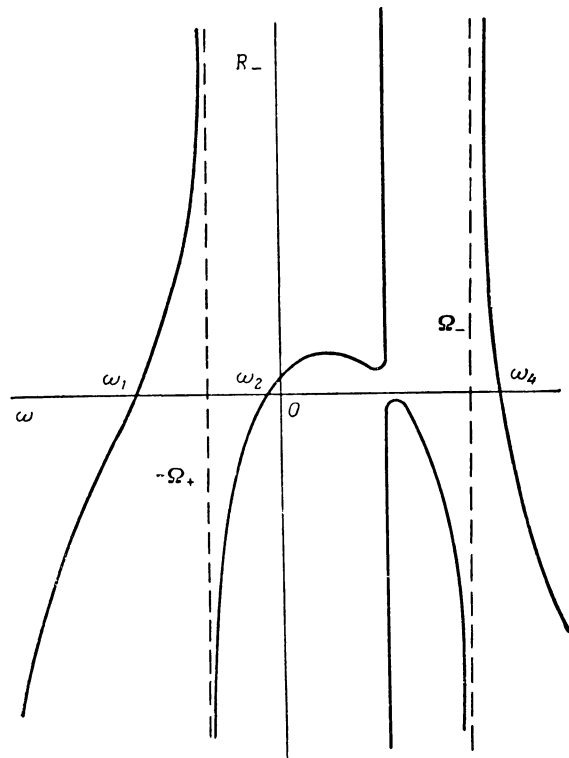
т. е. при движении с данной скоростью в z -направлении вращающийся электрон в возмущенном пучке «чувствует» поляризованную по кругу волну, частота которой равна гирочастоте электрона, так что связь между частицей и полем является резонансной, поскольку наблюдателю, вращающемуся вместе с электроном, поле будет казаться постоянным.

Рассмотрим влияние пучка быстрых электронов на гидромагнитные волны, описываемые уравнением (1.130), в случае, когда



Фиг. 2. Диаграмма функции $R_-(\omega)$ для покоящейся плазмы, пронизываемой электронным пучком.

Случай устойчивости.



Фиг. 3. Диаграмма функции $R_-(\omega)$ для покоящейся плазмы, пронизываемой электронным пучком.

Случай неустойчивости.

на фиг. 1 появляется небольшая щель, охватывающая ось вблизи невозмущенного корня (фиг. 3):

$$\omega_2 = -kv_A \left[1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right]^{-1/2}. \quad (1.142)$$

Рассмотрим для простоты настолько малые ϵ , что в любом разложении по ϵ достаточно удержать лишь члены наименьшего значащего порядка. Тогда для рассматриваемого случая с хорошим приближением можно записать

$$\begin{aligned} 0 = R_- = & -\omega^2 + c^2 k^2 + \omega_+^2 \left[\frac{\omega}{\Omega_+} - \frac{\omega^2}{\Omega_+^2} + \dots \right] + \\ & + \frac{(1-\epsilon)\omega_-^2}{\gamma_1} \left[\frac{\omega + ku_1\gamma_1}{-\Omega_-/\gamma_1} - \dots \right] + \frac{\epsilon\omega_-^2}{\gamma_2} \left[1 + \frac{\Omega_-/\gamma_2}{\omega - ku_2/\gamma_2 - \Omega_-/\gamma_2} \right] = \\ & = -\omega^2 \left(1 + \frac{\omega_+^2}{\Omega_+^2} \right) + c^2 k^2 + \epsilon \left(\frac{\omega_-^2}{\Omega_-} \right) \left(\omega - \frac{ku_2}{\gamma_2} \right) + \dots \\ & \dots + \frac{\epsilon\omega_-^2}{\gamma_2} + \frac{\epsilon(\omega_-^2/\gamma_2)(\Omega_-/\gamma_2)}{\omega - ku_2/\gamma_2 - \Omega_-/\gamma_2} \sim - \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2} \right) 2\omega_2(\omega - \omega_2) + \\ & + \epsilon\omega_-^2 \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{ku_2}{\Omega_- \gamma_2} \right) + \frac{\epsilon\omega_-^2 \Omega_-/\gamma_2^2}{\omega - ku_2/\gamma_2 - \Omega_-/\gamma_2}. \quad (1.143) \end{aligned}$$

Корни данного уравнения равны

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{1}{2} \left[-\omega_2 + \frac{\Omega_-}{\gamma_2} + \frac{ku_2}{\gamma_2} - \frac{\epsilon\omega_-^2(1/\gamma_2 - ku_2/\Omega_- \gamma_2)}{2|\omega_2|(1+c^2/v_A^2)} \right] \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[\omega_2 - \frac{\Omega_-}{\gamma_2} - \frac{ku_2}{\gamma_2} - \frac{\epsilon\omega_-^2[(1/\gamma_2) - ku_2/\Omega_- \gamma_2]}{2|\omega_2|(1+c^2/v_A^2)} \right]^2 - \right. \\ & \left. - \frac{2\epsilon\omega_-^2 \Omega_-/\gamma_2^2}{|\omega_2|(1+c^2/v_A^2)} \right\}^{1/2}. \quad (1.144) \end{aligned}$$

Очевидно, что максимальный инкремент неустойчивости возникает, если выражение в квадратных скобках под корнем квадратным стремится к нулю или если выполнено резонансное условие (1.141). Разброс по скоростям около значения скорости, определяемой уравнением (1.141), при котором имеет место неустойчивость, равен

$$\Delta = \frac{1}{k} \left[\frac{2\epsilon\omega_-^2 \Omega_- \gamma_2^{-2}}{|\omega_2|(1+c^2/v_A^2)} \right]^{1/2}, \quad (1.145)$$

и очевидно, что приведенное выше выражение, умноженное на k , дает максимальный инкремент нарастания неустойчивости.

Если параметры таковы, что в отсутствие пучка быстрых электронов интересующий нас корень ω_2 описывается уравнением (1.133), то при наличии пучка дисперсионное соотношение может быть приближенно заменено следующим:

$$0 = R_- \sim \omega_+^2 \Omega_+ \left[\frac{1}{\omega_2 + \Omega_+} - \frac{1}{\omega + \Omega_+} \right] + \frac{\varepsilon \omega_-^2}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon \omega_-^2 \Omega_- / \gamma_2^2}{\omega - k u_2 / \gamma_2 - \Omega_- / \gamma_2} - \omega_+^2 \sim \frac{\Omega_+ \omega_+^2 (\omega - \omega_2)}{(\omega_2 + \Omega_+)^2} + \frac{\varepsilon \omega_-^2}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon \omega_-^2 \Omega_- / \gamma_2^2}{\omega - k u_2 / \gamma_2 - \Omega_- / \gamma_2} - \omega_+^2, \quad (1.146)$$

корни которого равны

$$\omega = \frac{1}{2} \left[-\omega_2 + \frac{k u_2}{\gamma_2} + \frac{\Omega_-}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon \Omega_-}{\gamma_2} \left(\frac{\omega_+^2}{c^2 k^2 + 2\omega_+^2 - \Omega_-^2} \right)^2 \right] \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[\omega_2 - \frac{k u_2}{\gamma_2} - \frac{\Omega_-}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon \Omega_-}{\gamma_2} \left(\frac{\omega_+^2}{c^2 k^2 + 2\omega_+^2 - \Omega_-^2} \right)^2 \right]^2 - \frac{4\varepsilon \Omega_-^2}{\gamma_2^2} \left(\frac{\omega_+^2}{c^2 k^2 + 2\omega_+^2 - \Omega_-^2} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (1.147)$$

Максимальный инкремент неустойчивости возникает, если член в квадратных скобках стремится к нулю, и определяется выражением

$$\frac{\Omega_-}{\gamma_2} \varepsilon^{1/2} \left| \frac{\omega_+^2}{c^2 k^2 + \omega_+^2 - \Omega_-^2} \right|. \quad (1.148)$$

Интервал скоростей Δ около скорости, для которой имеет место максимальный инкремент неустойчивости, равен данному выражению, умноженному на $1/k$.

Рассмотрим влияние пучка быстрых ионов, который создает щель в дисперсионной кривой, как показано схематически на фиг. 4. В этом случае:

$$f_- = N_0 \delta(u) \frac{\delta(\omega)}{2\pi\omega}, \quad (1.149)$$

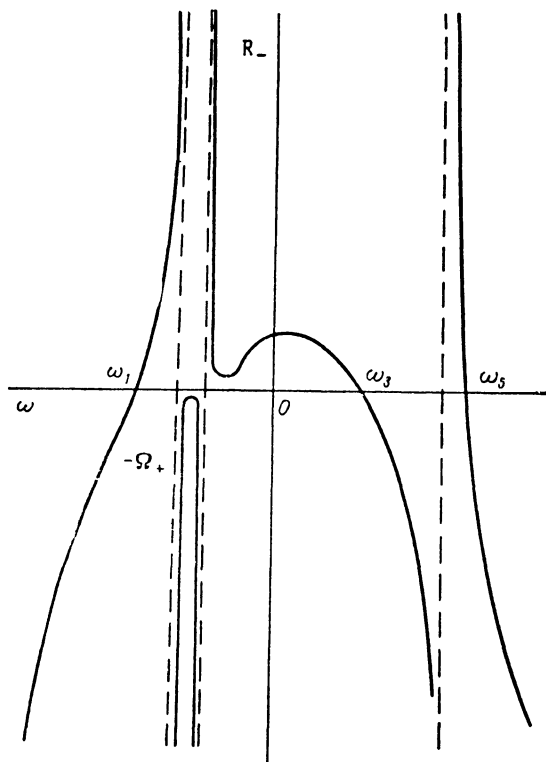
$$f_+ = N_0 [(1 - \varepsilon) \delta(u - u_1) + \varepsilon \delta(u + u_2)] \frac{\delta(\omega)}{2\pi\omega},$$

а u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению (1.138). Дисперсионное соотношение теперь принимает вид

$$0 = R_- = c^2 k^2 - \omega^2 + \frac{(1 - \varepsilon) \omega_+^2}{\gamma_1} \left[1 - \frac{\Omega_+ / \gamma_1}{\omega - k u_1 / \gamma_1 + \Omega_+ / \gamma_1} \right] + \frac{\varepsilon \omega_+^2}{\gamma_2} \left[1 - \frac{\Omega_+ / \gamma_2}{\omega + k u_2 / \gamma_2 + \Omega_+ / \gamma_2} \right] + \omega_-^2 \left[1 + \frac{\Omega_-}{\omega - \Omega_-} \right]. \quad (1.150)$$

Пусть теперь

$$\omega_3 = kv_A \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (1.151)$$



Ф и г. 4. Диаграмма функции $R_-(\omega)$ для покоящейся плазмы при наличии ионного пучка.

Тогда уравнение (1.150) можно приближенно записать в виде

$$\begin{aligned} 0 = & -\omega^2 + c^2 k^2 + \frac{(1-\varepsilon)\omega_+^2}{\gamma_1} \left[\frac{\omega - ku_1/\gamma_1}{\Omega_+/\gamma_1} - \frac{(\omega - ku_1/\gamma_1)^2}{(\Omega_+/\gamma_1)^2} + \dots \right] + \\ & + \frac{\varepsilon\omega_+^2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon\omega_+^2\Omega_+/\gamma_2^2}{\omega + ku_2/\gamma_2 + \Omega_+/\gamma_2} - \omega^2 \left[\frac{\omega}{\Omega_-} + \dots \right] = \\ = & -\omega^2 + c^2 k^2 - (1-\varepsilon) \frac{\omega_+^2 ku_1}{\Omega_+ \gamma_1} - \frac{\omega\omega_+^2}{\Omega_+^2} + \frac{\varepsilon\omega_+^2}{\gamma_2} - \\ & - \frac{\varepsilon\omega_+^2\Omega_+/\gamma_2^2}{\omega + ku_2/\gamma_2 + \Omega_+/\gamma_2} \sim - \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2}\right) 2\omega_3 (\omega - \omega_3) + \\ & + \varepsilon\omega_+^2 \left[\frac{1}{\gamma_2} - \frac{ku_2}{\Omega_+ \gamma_2} \right] - \frac{\varepsilon\omega_+^2\Omega_+/\gamma_2^2}{\omega + ku_2/\gamma_2 + \Omega_+/\gamma_2}. \quad (1.152) \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.152) имеет вид

$$\omega = \frac{1}{2} \left[-\omega_3 - \frac{ku_2}{\gamma_2} - \frac{\Omega_+}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon\omega_+^2 (1/\gamma_2 - ku_2/\Omega_+\gamma_2)}{2\omega_3(1+c^2/v_A^2)} \right] \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[\omega_3 + \frac{ku_2}{\gamma_2} + \frac{\Omega_+}{\gamma_2} + \frac{\varepsilon\omega_+^2 (1/\gamma_2 - ku_2/\Omega_+\gamma_2)}{2\omega_3(1+c^2/v_A^2)} \right]^2 - \frac{2\varepsilon\omega_+^2\Omega_+/\gamma_2^2}{\omega_3(1+c^2/v_A^2)} \right\}^{1/2}. \quad (1.153)$$

Если приближенно удовлетворяется условие (1.141), то вновь максимальный инкремент имеет место и он равен

$$\left[\frac{2\varepsilon\omega_+^2\Omega_+/\gamma_2^2}{\omega_3(1+c^2/v_A^2)} \right]^{1/2}. \quad (1.154)$$

Соответствующий диапазон скоростей, для которого возникает неустойчивость, равен приведенному выше выражению, умноженному на $1/k$.

Рассмотрим затем, как изменяются только что полученные результаты при наличии теплового разброса в пучке быстрых частиц. С этой целью исследуем характеристический интеграл

$$\int \frac{d^3v}{\gamma} f_0 \left\{ 1 - \frac{\Omega}{\omega - ku/\gamma + \Omega} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1/2 k \omega^2 \gamma^{-1}}{\omega - ku/\gamma + \Omega} \right) \right\} \quad (1.155)$$

для простоты в нерелятивистском пределе. Поскольку тепловые эффекты предполагаются малыми, разложим выражение в фигурных скобках в ряд около точек $\omega = 0$ и $u = \langle u \rangle$, откуда получим

$$\int d^3v f_0 \left\{ 1 - \frac{\Omega}{\omega - k \langle u \rangle + \Omega} - \frac{k(u - \langle u \rangle)\Omega}{(\omega - k \langle u \rangle + \Omega)^2} - \frac{k^2(u - \langle u \rangle)^2\Omega}{(\omega - k \langle u \rangle + \Omega)^3} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1/2 k^2 \omega^2}{(\omega - k \langle u \rangle + \Omega)^2} + \dots \right\} = N_0 \left\{ 1 - \frac{\Omega}{\omega - k \langle u \rangle + \Omega} - \frac{k \langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle \Omega}{(\omega - k \langle u \rangle + \Omega)^3} + \frac{1/2 k^2 \langle \omega^2 \rangle}{(\omega - k \langle u \rangle + \Omega)^2} \right\}. \quad (1.156)$$

Предыдущие результаты справедливы, пока тепловые поправки малы и при условии, что инкремент нарастания максимален, а именно, если

$$\Delta^2 \gg \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle + \langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle, \quad (1.157)$$

где Δ принимает различные значения, определяемые уравнениями (1.145), (1.148), (1.154).

1.7. Распространение перпендикулярно магнитному полю

Рассмотрим теперь случай $k_{\parallel} = 0$. Тогда уравнение (1.99) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \frac{u}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \Upsilon^{-1} = \\ = - \sum \frac{4\pi q^2 \omega}{m} \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Upsilon^{-1}}{\omega - n\Omega} \times \\ \times \left\{ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 u^2 J_n^2 + (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_3) \frac{1}{2} \omega u J_n J_{n+1} + (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- \mathbf{e}_3) \frac{1}{2} \omega u J_n J_{n-1} + \right. \\ \left. + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \frac{1}{4} \omega^2 (J_{n-1} + J_{n+1})^2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \frac{1}{4} \omega^2 (J_{n-1} - J_{n+1})^2 + \right. \\ \left. + i(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \frac{1}{4} \omega^2 (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2) \right\}, \quad (1.158) \end{aligned}$$

где мы использовали уравнение (1.100) для того, чтобы сократить члены, содержащие $\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_+$, $\mathbf{e}_- \mathbf{e}_-$, $\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-$ и $\mathbf{e}_- \mathbf{e}_+$. Предположим, что интересующие нас частоты настолько высоки, что нам необходимо учитывать только вклад электронов в уравнение (1.158), и, кроме того, электронная функция распределения является четной функцией от u . Тогда написанные выше члены с $\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_-$, $\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_+$, $\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_- \mathbf{e}_3$ становятся равными нулю, и, поскольку $k_{\parallel} = 0$, мы получаем $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_1$. В результате выражения для Q_{13} , Q_{23} , Q_{31} и Q_{32} , а также их алгебраические дополнения R_{13} , R_{23} , R_{31} и R_{32} становятся тоже равными нулю, т. е. предполагается, что матрица \mathbf{R} имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} -\omega^2 + Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.159)$$

При этом уравнение (1.70) можно непосредственно решить относительно $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$, а именно:

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{a}}{c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{33}}. \quad (1.160)$$

Дисперсионное соотношение, получающееся, если положить равным нулю написанный выше знаменатель, равно

$$\begin{aligned} \omega^2 - c^2 k^2 = - \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \left\{ \frac{u}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega u^2 J_n^2}{\omega - n\Omega} \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right\} \Upsilon^{-1}. \quad (1.161) \end{aligned}$$

Замечая, что

$$J_n(z) = J_{-n}(z), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 = 1, \quad (1.162)$$

$$\int d^3v u \frac{\partial f_0}{\partial u} = -N_0, \quad \omega_-^2 \equiv \frac{4\pi N_0 e^2}{m_-},$$

можно переписать уравнение (1.161) в удобной форме

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \omega_-^2 - \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n\Omega)^2 J_n^2}{\omega^2 - (n\Omega)^2} \frac{u^2}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega}. \quad (1.163)$$

В пределе, когда $v^2 \ll c^2$, в соответствии с динамикой материальной точки можно пренебречь релятивистскими эффектами. В этом случае $\gamma \sim 1$ и Ω становится независимым от \mathbf{v} , а уравнение (1.163) сводится к виду

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \omega_-^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\omega^2 - n^2 \Omega^2} \right], \quad (1.164)$$

где

$$b_n = -\frac{2n^2 \Omega^2}{N_0} \int d^3v J_n^2 \left(\frac{k\mathbf{v}}{\Omega} \right) \frac{u^2}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega}. \quad (1.165)$$

Заметим, что для фиксированной формы функции распределения f_0/N_0 величина b_n не зависит от величины плотности, а зависимость от плотности, как можно видеть, содержится в ω_-^2 . В частном случае теплового равновесия, при котором

$$f_0 = N_0 \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2\theta}, \quad (1.166)$$

используя соотношение

$$\int_0^{\infty} dt t e^{-1/2 \mu t^2} J_n(at) J_n(bt) = \mu^{-1} e^{-(a^2+b^2)/2\mu} I_n \left(\frac{ab}{\mu} \right), \quad (1.167)$$

можно легко вычислить, что

$$b_n = 2n^2 \Omega^2 e^{-\theta k^2/m\Omega^2} I_n \frac{\theta k^2}{m\Omega^2}. \quad (1.168)$$

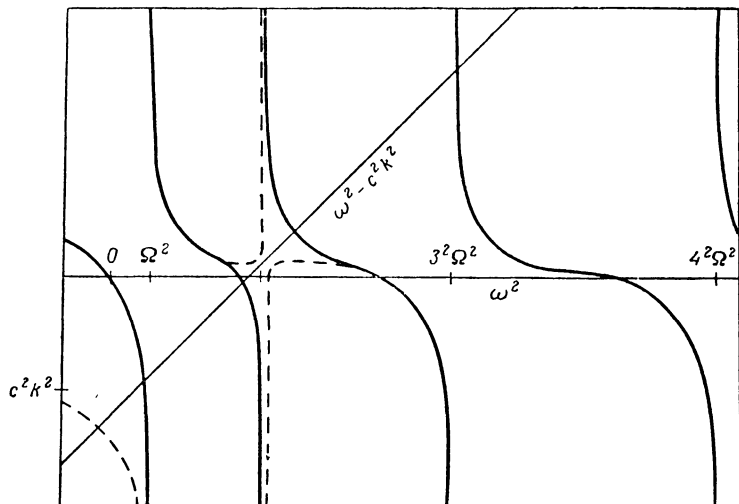
Если тепловые эффекты малы, можно применить разложение в ряд

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{n+2r}}{r! (n+r)!}, \quad (1.169)$$

откуда, сохраняя лишь основные члены в разложении и проведя интегрирование по частям, получаем

$$b_n = -\frac{2n^2\Omega^2}{N_0} \int d^3v \left[\frac{(k\omega/2\Omega)^n}{n!} \right]^2 \frac{u^2}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} = \frac{4n^3\Omega^2}{(n!)^2} \left\langle \left(\frac{k\omega}{2\Omega} \right)^{2n-2} \left(\frac{k u}{2\Omega} \right)^2 \right\rangle. \quad (1.170)$$

Заметим, что в этом случае все величины b_n не являются отрицательными, как и для случая $\partial f_0/\partial \omega \leq 0$, что непосредственно следует из уравнения (1.165).



Фиг. 5. График зависимости от ω^2 левой и правой частей уравнения (1.64).

Если все b_n не отрицательны, то можно легко показать, что уравнение (1.164) не имеет корней, для которых ω^2 комплексно. Для того чтобы убедиться в этом, запишем $\omega^2 = x + iy$ и возьмем мнимую часть уравнения (1.164), откуда

$$y \left\{ 1 + \omega_-^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n [(x - n^2\Omega^2)^2 + y^2]^{-1} \right\} = 0. \quad (1.171)$$

Но если b_n не отрицательны, то коэффициент при y положителен и, следовательно, значение y должно быть равно нулю.

Дальнейший анализ уравнения (1.164) облегчается, если рассмотреть фиг. 5, на которой отдельно нанесены правая и левая части уравнения (1.164) как функции ω^2 . Поскольку производная по ω^2 правой части отрицательна и вследствие наличия полюсов при $\omega^2 = n^2\Omega^2$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, рассматриваемая кривая имеет многоветвевой характер, показанный сплошной

линией, которая демонстрирует случай, когда все b_n положительны. Пересечение этой кривой с точкой $\omega^2 = 0$ происходит в общем случае при

$$-\frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \frac{u}{\omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) = \omega^2 \left[1 - \frac{2\pi}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} du u^2 f_0(0, u) \right]. \quad (1.172)$$

Это выражение равно нулю при всех значениях f_0 , для которых $\mathbf{v} \times \nabla_v f_0 = 0$. Из фигуры ясно, что если этот отсекаемый отрезок больше или равен нулю и все b_n положительны, то все корни, являющиеся пересечением многоветвевой кривой с прямой линией, соответствующей левой части уравнения (1.164), положительны и рассматриваемые волны оказываются устойчивыми. Более того, большие по абсолютной величине корни, очевидно, приближаются к значениям $n^2\Omega^2$, поскольку b_n стремится к нулю, по мере того как n стремится к бесконечности.

Если, однако, отсекаемый отрезок отрицателен, как показано пунктирной ветвью в левой нижней части фигуры, то, если плотность достаточно велика, существует, естественно, один корень с $\omega^2 < 0$. Ясно, что это так, поскольку зависимость от плотности полностью содержится в правой части уравнения (1.164); и при фиксированной форме распределения f_0/N_0 , если N_0 увеличивать, многоветвевая кривая расширяется по вертикали, в то время как прямые линии остаются фиксированными. Эта неустойчивость требует, чтобы f_0 была анизотропна относительно \mathbf{v} .

Предположим теперь ситуацию, когда один из коэффициентов b_n , скажем b_2 , становится отрицательным при изменении некоторым непрерывным образом функции f_2/N_2 . Если коэффициент b_2 отрицателен, но мал, многоветвевая кривая будет выглядеть подобно сплошной кривой везде, за исключением области вблизи $\omega^2 = 4\Omega^2$. В окрестности $\omega^2 = 4\Omega^2$ форма кривой будет определяться членом $b_2(\omega^2 - 4\Omega^2)^{-1}$, как показано пунктирной кривой на фигуре в данной области ω^2 . Если прямая линия $\omega^2 - c^2k^2$ проходит через щель, образованную многоветвевой кривой, то два действительных корня исчезают и возникает пара комплексно-сопряженных корней. Два из четырех квадратных корней для данных значений ω^2 будут иметь положительные мнимые части и соответствовать неустойчивости. Если b_2 мал, эти корни могут быть вычислены из уравнения (1.164), записанного в следующем виде:

$$(\omega^2 - 4\Omega^2) + (4\Omega^2 - c^2k^2) = \omega^2 \left[1 + \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{b_n}{4\Omega^2 - n^2\Omega^2} + \frac{b_2}{\omega^2 - 4\Omega^2} \right]. \quad (1.173)$$

Решение этого уравнения есть

$$\omega^2 - 4\Omega^2 = -v^2 \pm [v^4 + \omega_-^2 b_2]^{1/2}, \quad (1.174)$$

где мы ввели возможно отрицательную величину:

$$2v^2 = 4\Omega^2 - c^2 k^2 - \omega_-^2 \left[1 + \sum_{n=1, n \neq 2}^{\infty} \frac{b_{2n}}{4\Omega^2 - n^2 \Omega^2} \right], \quad (1.175)$$

причем $v^4 \ll \Omega^4$ по определению. Очевидно, что неустойчивость существует всякий раз, когда $v^4 + \omega_-^2 b_2 < 0$. Соответствующий инкремент нарастания максимален, когда $v^2 = 0$ и, как легко видеть, равен $^{1/4}(-\omega_-^2 b_2)^{1/2} \Omega^{-1}$.

Рассмотрим затем случай полностью продольных волн. Для этого учтем, что существует решение для другого условия равенства детерминанта, возникающее из уравнения (1.159), а именно $R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} = 0$ причем с хорошей степенью точности его корни равны корням уравнения $R_{11} = 0$. Если такой корень равен ω_0 , то требуется, чтобы возмущение Δ , вводимое отброшенным членом, было мало по сравнению с ω_0 , или, применяя метод Ньютона, чтобы

$$\left| \frac{\Delta}{\omega_0} \right| = \left| \frac{R_{12}R_{21}}{\omega (\partial R_{11}/\partial \omega) R_{22}} \right|_{\omega=\omega_0} \ll 1. \quad (1.176)$$

Уравнение $R_{11} = 0$ при использовании уравнения (1.158) и соотношения

$$J_{n-1} + J_{n+1} = 2nJ_n/z \quad (1.177)$$

может быть записано в виде

$$R_{11} = -\omega^2 \left[1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 \Omega^2 J_n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega^2} \right] = 0. \quad (1.178)$$

Это дисперсионное соотношение можно проанализировать с помощью метода, аналогичного методу, использованному для анализа уравнения (1.163). Запишем дисперсионное соотношение в виде

$$\frac{1}{\omega_-^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2 \Omega^2}, \quad (1.179)$$

где

$$a_n = -\frac{2n^2 \Omega^2}{N_0 k^2} \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} J_n^2. \quad (1.180)$$

В случае максвелловской функции f_0 данное выражение сводится к виду

$$a_n = 2n^2 \left(\frac{m\Omega^2}{k^2\theta} \right) I_n \left(\frac{k^2\theta}{m\Omega^2} \right) e^{-k^2\theta/m\Omega^2}. \quad (1.181)$$

Если все a_n положительны, то можно доказать, как это было сделано для уравнения (1.171), что все корни для ω^2 действительны. Поскольку в этом случае, как следует непосредственно из уравнения (1.179) при $\omega^2 = 0$, точка пересечения многоветвевой кривой, соответствующей правой части уравнения (1.179), будет отрицательна, все эти корни должны быть положительны и волны устойчивы. Итак, большие корни достигают значений $n^2\Omega^2$.

Если, однако, $\partial f_0/\partial\omega$ не везде отрицательна, могут существовать одно или более отрицательных значений a_n . Предположим, что существует только одно такое значение, скажем a_2 , и что оно мало. График правой части уравнения (1.179) как функции ω^2 будет иметь характер многоветвевой кривой, как на фиг. 5, у которой ветви вблизи $\omega^2 = 4\Omega^2$ обозначены пунктирной кривой. Неустойчивость начинается, если абсцисса горизонтальной линии, равная ω_-^2 , как раз совпадает с касательной к минимуму кривой слева от $\omega^2 = 4\Omega^2$ и существует для всех низших значений ω_-^2 . Приближенное решение в этой области легко находится. Положим, что ω_0^2 равно такой величине ω^2 , для которой имеет место минимум, а ω_{-0}^2 равно соответствующим значениям ω_-^2 . В минимуме первая производная от правой части (1.179) по ω^2 равна нулю, а вторая положительна. Таким образом, разложение в ряд Тэйлора уравнения (1.179) можно записать в виде

$$\frac{1}{\omega_-^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_0^2 - n^2\Omega^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(\omega_0^2 - n^2\Omega^2)^3} + \dots$$

$$\dots \sim \frac{1}{\omega_{-0}^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \frac{a_2}{(\omega_0^2 - 4\Omega^2)^3} \quad (1.182)$$

и

$$\omega^2 - \omega_0^2 \sim \left\{ \frac{(\omega_0^2 - 4\Omega^2)^3}{a_2} \left[\frac{1}{\omega_-^2} - \frac{1}{\omega_{-0}^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (1.183)$$

Очевидно, что неустойчивость существует при $\omega_-^2 > \omega_{-0}^2$, поскольку как a_2 , так и $\omega_0^2 - 4\Omega^2$ отрицательны.

Если $k\omega/\Omega \ll 1$, то можно использовать несколько первых членов в разложении (1.169), откуда

$$a_n = -\frac{2n^2\Omega^2}{N_0k^2} \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial\omega} \left[\frac{(k\omega/2\Omega)^{2n}}{(n!)^2} - 2 \frac{(k\omega/2\Omega)^{2n+2}}{n!(n+1)!} + \dots \right]. \quad (1.184)$$

В результате интегрирования по частям по ω имеем

$$a_n = \frac{2n^2\Omega^2}{N_0k^2} \int d^3v f_0 \left\{ \frac{k^2}{4\Omega^2} \frac{2n(k\omega/2\Omega)^{2n-2}}{(n!)^2} - \frac{k^2}{2\Omega^2} \frac{(2n+2)(k\omega/2\Omega)^{2n}}{n!(n+1)!} + \dots \right\} = \\ = \frac{n^3}{(n!)^2} \left[\left\langle \left(\frac{k\omega}{2\Omega} \right)^{2n-2} \right\rangle - \frac{2}{n} \left\langle \left(\frac{k\omega}{2\Omega} \right)^{2n} \right\rangle + \dots \right], \quad (1.185)$$

вследствие чего, уравнение (1.179) принимает вид

$$\frac{1}{\omega_-^2} = \frac{1 - 1/2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle + \dots}{\omega_-^2 - \Omega^2} + \frac{1/2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle - \dots}{\omega_-^2 - 4\Omega^2} + \dots \quad (1.186)$$

Если пренебречь тепловыми эффектами, то, очевидно, имеем обычный гибридный резонанс для холодной плазмы:

$$\omega^2 = \omega_-^2 + \Omega^2, \quad (1.187)$$

а тепловые поправки можно вычислить из уравнения (1.186), заменяя ω^2 на $\omega_-^2 + \Omega^2$ во втором члене правой части, пренебрегая всеми другими членами, кроме явно указанных в уравнении (1.186). Если, однако, условие близко к $\omega^2 = 4\Omega^2$, то уравнение (1.186) можно аппроксимировать в виде

$$\frac{1}{\omega_-^2} = \frac{1}{3\Omega^2} + \frac{1/2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle}{\omega_-^2 - 4\Omega^2} \quad (1.188)$$

и

$$\omega^2 = 4\Omega^2 + \frac{3/2 \langle k^2 \omega^2 \rangle \omega_-^2}{3\Omega^2 - \omega_-^2}, \quad (1.189)$$

пока

$$\frac{1/2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle \omega_-^2}{|3\Omega^2 - \omega_-^2|} \ll 1. \quad (1.190)$$

Очевидно, подобный результат может быть получен вблизи каждой гармоники Ω .

Исследуем справедливость нашего предположения о продольных колебаниях, т. е. условий, при которых неравенство (1.176) имеет место. Матричный элемент R_{11} определяется уравнением (1.178). Из уравнений (1.158) и (1.159) следует, что, поскольку

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = \frac{2dJ_n(z)}{dz} \equiv 2J'_n(z), \quad (1.191)$$

можно записать в виде

$$R_{22} = c^2k^2 - \omega^2 - \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \omega \frac{df_0}{d\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega J_n'^2}{\omega - n\Omega} = \\ = c^2k^2 - \omega^2 - \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \omega \frac{df_0}{d\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ J_n'^2 + \frac{n\Omega}{\omega - n\Omega} J_n'^2 \right\}. \quad (1.192)$$

Но $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 = 1/2$. Таким образом, интегрирование по частям первого члена в фигурных скобках и суммирование членов того же порядка по n^2 во втором члене дает

$$R_{22} = c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_-^2 - \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 \Omega^2 J_n'^2}{\omega^2 - n^2 \Omega^2}. \quad (1.193)$$

Итак, поскольку

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \quad (1.194)$$

можно записать

$$\begin{aligned} R_{12} = -R_{21} &= \frac{4\pi e^2 i}{m} \int d^3v \frac{\omega}{4} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega (2J_n')}{\omega - n\Omega} \frac{2nJ_n}{k\omega/\Omega} = \\ &= \frac{-4\pi e^2 i}{m} \int d^3v \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\omega}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\Omega)^2 (J_n')^2}{\omega^2 - n^2 \Omega^2}. \end{aligned} \quad (1.195)$$

Если тепловые эффекты малы, то, используя уравнение (1.169), эти выражения можно свести к виду

$$R_{11} = -\omega^2 \left\{ 1 - \omega_-^2 \left[\frac{1 - 1/2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle + \dots}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{1/2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle - \dots}{\omega^2 - 4\Omega^2} + \dots \right] \right\}, \quad (1.196)$$

$$R_{22} = c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_-^2 \left[1 + \frac{\Omega^2 - 3/2 \langle k^2 \omega^2 \rangle + \dots}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{2 \langle k^2 \omega^2 \rangle - \dots}{\omega^2 - 4\Omega^2} + \dots \right], \quad (1.197)$$

$$R_{12} = -R_{21} = i\omega\Omega\omega_-^2 \left[\frac{1 - 3 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle + \dots}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{1/2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle - \dots}{\omega^2 - 4\Omega^2} + \dots \right]. \quad (1.198)$$

Если пренебречь тепловыми эффектами, то для того, чтобы уравнение (1.187) было хорошим приближением искомого корня, из уравнения (1.176) после простых вычислений получим

$$\left| \frac{R_{12} R_{21}}{2\omega^2 (\partial R_{11} / \partial \omega^2) R_{22}} \right| = \frac{\Omega^2 \omega_-^2}{2(\omega_-^2 + \Omega^2) c^2 k^2} \ll 1. \quad (1.199)$$

Это условие выполняется при $c^2 k^2 \gg \omega_-^2$ или $c^2 k^2 \gg \Omega^2$. Если эти неравенства имеют место, то существует квазипоперечная волна, дисперсионное соотношение для которой получается из условия $R_{22} = 0$, что в случае холодной плазмы дает

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_-^2 + \Omega^2 \omega_-^2 (\omega^2 - \Omega^2)^{-1}. \quad (1.200)$$

Если $c^2 k^2 \gg \omega_-^2, \Omega^2$, то имеются два приближенных значения для корней:

$$\begin{aligned}\omega^2 &\sim c^2 k^2 + \omega_-^2 + \frac{\Omega^2 \omega_-^2}{c^2 k^2}, \\ \omega^2 &\sim \Omega^2 - \frac{\Omega^2 \omega_-^2}{c^2 k^2}.\end{aligned}\quad (1.201)$$

Очевидно, если $R_{22} \sim 0$ является хорошим приближением, то вновь может быть использована для общего случая графическая техника.

Подобный анализ может быть выполнен в низкотемпературном случае для высоких гармоник. Для корня $\omega^2 \sim 4\Omega^2$ можно везде (за исключением случая резонансного знаменателя) заменить ω^2 на $4\Omega^2$ и пренебречь тепловыми поправками по сравнению с единицей. Таким образом, уравнение (1.196) можно записать в виде

$$R_{11} \sim -4\Omega^2 \left[1 - \frac{\omega_-^2}{3\Omega^2} - \frac{1/2 \omega_-^2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle}{\omega^2 - 4\Omega^2} \right] \sim 0 \quad (1.202)$$

и

$$\omega^2 - 4\Omega^2 = \frac{3/2 \Omega^2 \omega_-^2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle}{3\Omega^2 - \omega_-^2}. \quad (1.203)$$

Эти уравнения, очевидно, справедливы, пока мы достаточно далеки от условия $3\Omega^2 - \omega_-^2 \sim 0$ или, более точно, пока правая часть приведенного выше выражения много меньше, чем $4\Omega^2$. В том же порядке приближения

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\Omega^2} \frac{\partial R_{11}}{\partial \omega^2} &\sim -\frac{1/2 \omega_-^2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle}{(\omega^2 - 4\Omega^2)^2} \sim -\frac{2}{\omega_-^2 \langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle} \left(1 - \frac{\omega_-^2}{3\Omega^2} \right)^2, \\ R_{22} &\sim c^2 k^2 - 4\Omega^2 + \omega_-^2 \left[\frac{4}{3} + 4 \left(\frac{\Omega^2}{\omega_-^2} - \frac{1}{3} \right) \right] \sim c^2 k^2, \quad (1.204) \\ R_{12} = -R_{21} &\sim 2i\Omega^2 \omega_-^2 \left[\frac{1}{3\Omega^2} + \frac{\langle k^2 \omega^2 / \Omega^2 \rangle}{\omega^2 - 4\Omega^2} \right] \sim -\frac{2}{3} i \omega_-^2 \left(1 - \frac{6\Omega^2}{\omega_-^2} \right)\end{aligned}$$

и связь с поперечными волнами мала, если

$$\left| \frac{R_{12} R_{21}}{2\omega^2 (\partial R_{11} / \partial \omega^2) R_{22}} \right|_{\omega=4\Omega^2} = \frac{\omega_-^2 (\omega_-^2 - 6\Omega^2)^2 \langle \omega^2 \rangle}{16 (3\Omega^2 - \omega_-^2)^2 c^2} \ll 1. \quad (1.205)$$

1.8. Распространение перпендикулярно бесконечно малому магнитному полю

В случае распространения перпендикулярно к \mathbf{B}_0 в пределе $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$ возникают совершенно новые черты, не появляющиеся при формальном разложении (1.83). Они наиболее просто обнаруживаются при исследовании случая почти продольных волн, для которых в общем случае

$$\begin{aligned} k\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} &= \mathbf{k}E_{\mathbf{k}, \omega}, \\ \mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega} &= 0 \end{aligned} \quad (1.206)$$

и

$$R_{11} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}. \quad (1.207)$$

Уравнения (1.71) и (1.72) позволяют записать

$$R_{11} = -\omega^2 + \frac{4\pi e^2 i \omega}{m} \int d^3v \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \omega \cos \phi \int_0^\infty dt G \cos(\phi + \Omega t), \quad (1.208)$$

где из-за перпендикулярного распространения

$$G = \exp \left\{ i \left(\frac{k\omega}{\Omega} \right) [\sin \phi - \sin(\phi + \Omega t)] + i\omega t \right\}. \quad (1.209)$$

Таким образом, уравнение (1.208) можно записать в виде

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\omega^2 - \frac{4\pi e^2 \omega}{m} \int d^3v \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \cos \phi \int_0^\infty dt \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega \right) G = \\ &= -\omega^2 - \frac{4\pi e^2 \omega}{mk} \int d^3v \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \cos \phi \left[-1 - i\omega \int_0^\infty dt G \right] = \\ &= -\omega^2 \left[1 - \frac{4\pi e^2 i}{mk} \int d^3v \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \cos \phi \int_0^\infty dt G \right]. \end{aligned} \quad (1.210)$$

Из уравнений (1.73) и (1.206) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a} &= -i\omega E_{\mathbf{k}}(0) - 4\pi i \omega e \int d^3v \int_0^\infty dt \omega \cos \phi G f_{\mathbf{k}}(\omega, \phi + \Omega t, u, 0) = \\ &= -i\omega E_{\mathbf{k}}(0) - \frac{4\pi \omega e}{k} \int d^3v \int_0^\infty dt \left[\Omega \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} + i\omega \right] \times \\ &\quad \times [G f_{\mathbf{k}}(\omega, \phi + \Omega t, u, 0)] = \\ &= -i\omega E_{\mathbf{k}}(0) - \frac{4\pi \omega e}{k} \int d^3v f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, 0) - \\ &\quad - \frac{4\pi \omega^2 e i}{k} \int d^3v \int_0^\infty dt G f_{\mathbf{k}}(\omega, \phi + \Omega t, u, 0). \end{aligned} \quad (1.211)$$

Но первые два члена в правой части приведенного уравнения сокращаются при применении преобразования Фурье к линеаризованной форме уравнения Пуассона (1.16). Таким образом, если объединить уравнения (1.210) и (1.207) и сократить на общий фактор ω^2 , то, положив $\phi \rightarrow \phi - \Omega t$, получаем

$$\left\{ 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[i \left(\frac{k\omega}{\Omega} \right) [\sin(\phi - \Omega t) - \sin \phi] \right] \right\} E_{k, \omega} = \\ = \frac{4\pi e i}{k} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int d^3v f_k(\mathbf{v}, 0) \exp \left\{ i \left(\frac{k\omega}{\Omega} \right) [\sin(\phi - \Omega t) - \sin \phi] \right\}. \quad (1.212)$$

Введем две функции, явно периодические по t с периодом $2\pi/\Omega$:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{4\pi e i}{k} \int d^3v f_k(\mathbf{v}, 0) \exp \left\{ i \left(\frac{k\omega}{\Omega} \right) [\sin(\phi - \Omega t) - \sin \phi] \right\}, \quad (1.213)$$

$$K(t) = - \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \exp \left\{ i \left(\frac{k\omega}{\Omega} \right) [\sin(\phi - \Omega t) - \sin \phi] \right\}. \quad (1.214)$$

Заметим, что при заменах $t \rightarrow -t$ и $\phi \rightarrow \phi - \Omega t + \pi$ приведенное выше выражение переходит само в себя и K является четной функцией t . Далее применение теоремы о свертке позволяет нам записать обратное преобразование Лапласа уравнения (1.212) в виде

$$E_k(t) - \mathbf{v}(t) = \int_0^t dt \dot{K}(\tau) E_k(t - \tau) = \int_0^t d\tau \dot{K}(t - \tau) E_k(\tau), \quad (1.215)$$

где точка обозначает производную от K по аргументу. Данное выражение оказывается более удобным для анализа, чем обратный интеграл Бромвича, соответствующий уравнению (1.207).

Заметим, что если функция f_0 — максвелловская, то

$$K(t) = \frac{4\pi e^2}{k^2 \theta} \int_{-\infty}^\infty du \int_0^\infty d\omega \omega \int_0^{2\pi} d\phi N_0 \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} \times \\ \times \exp \left[- \frac{m(u^2 + \omega^2)}{2\theta} - 2i \left(\frac{k\omega}{\Omega} \right) \cos \left(\phi - \frac{\Omega t}{2} \right) \sin \frac{\Omega t}{2} \right] = \\ = \frac{4\pi e^2 N_0}{k^2 \theta} \frac{m}{\theta} \int_0^\infty d\omega \omega \exp \left(- \frac{m\omega^2}{2\theta} \right) J_0 \left(\frac{2k\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) = \\ = \frac{4\pi N_0 e^2}{k^2 \theta} \exp \left[- 2 \left(\frac{\theta k^2}{m\Omega^2} \right) \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \right], \quad (1.216)$$

где мы использовали уравнение (1.167) и соотношение

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \exp(iz \cos \theta).$$

Основной смысл соблюдения уравнения (1.215) заключается в том, что функции v и K являются периодическими с периодом $2\pi/\Omega$, не взирая на то, насколько мало Ω , но техника разложения уравнения (1.83), если ее применить к преобразованию Лапласа, эквивалентна разложению в ряд по Ωt ядер уравнений (1.213) и (1.214) и, таким образом, дает разумные результаты только для $t < 2\pi/\Omega$. Качественные соображения о том, что должно быть для больших величин t , можно получить при рассмотрении случая $\omega_-^2 \gg k^2 \langle \omega^2 \rangle$ для качественно максвелловской функции f_0 и для функций f_k , обладающих подобными свойствами в смысле их общей зависимости от v .

Из структуры уравнения (1.215) ясно, что значение $E_k(t)$ определяется предыдущей историей. Таким образом, для $t \ll 2\pi/\Omega$ действительно можно получить хорошее приближение путем разложения в ряд по Ωt подынтегральных выражений уравнений (1.213) и (1.214). С точностью наименьшего порядка

$$v^\dagger(t) = \frac{4\pi e i}{k} \int d^3v f_k(v, 0) \exp(-ik\omega t \cos \phi), \quad (1.217)$$

$$K^\dagger(t) = -\frac{4\pi e^2}{mk^2} \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \exp(-ik\omega t \cos \phi), \quad (1.218)$$

где мы отметили крестиком локальные периодические решения.

Если f_k и f_0 — квазимаквелловские функции, то уравнения (1.217) и (1.218) определяют функции, которые стремятся к нулю в момент времени $\tau_k = (kv_\perp)^{-1}$, где v_\perp обозначает эффективную полуширину в пространстве скоростей соответствующей функции распределения. Это можно ясно видеть на примере уравнения (1.218). Проблема предельного перехода, определенного таким образом, соответствует обычной задаче о распространении в направлении e_1 продольных колебаний в незамагниченной плазме. Это легко установить, возвращаясь к уравнению (1.212) и проводя соответствующее разложение в ряд по Ωt с точностью до наименьшего порядка. Соответствующее решение для $E_k(t)$ равно

$$E_k(t) = \int_C \frac{d\omega}{2\pi} \frac{(4\pi e i/k) \int d^3v [f_k(v, 0)/\omega - k \cdot v]}{1 + (4\pi e^2/mk^2) \int [d^3vk \cdot \nabla_v f_0/(\omega - k \cdot v)]}, \quad (1.219)$$

где контур C представляет собой прямую линию, проходящую выше и параллельно действительной ω -оси. Так как мы предпо-

лагаем, что решение должно быть устойчивым, то не существует нулей в знаменателе подынтегрального выражения в верхней ω -полуплоскости.

Предположим для простоты, что

$$\omega_-^2 \gg k^2 \langle \omega^2 \rangle \gg \gamma^2 \gg \Omega^2, \quad (1.220)$$

и перепишем уравнение (1.219) в виде

$$E_k(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} v_\omega [1 + L_\omega] e^{-i\omega t}, \quad (1.221)$$

где v_ω есть произведение i на преобразование Лапласа уравнения (1.217), а

$$L_\omega = \frac{1 - \varepsilon(k, \omega)}{\varepsilon(k, \omega)} \quad (1.222)$$

и

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega}. \quad (1.223)$$

Применение теоремы о свертке к уравнению (1.221) приводит к выражению

$$E_k(t) = \int_0^t d\tau v(t - \tau) L(\tau) + v(t). \quad (1.224)$$

Подобная формулировка удобна, поскольку позволяет разделить обсуждение аналитических свойств L_ω и обсуждение свойств $v(t)$ или, наоборот, v_ω .

Для простоты предположим, что f_0 является целой функцией декартовых компонент вектора \mathbf{v} , имеющей качественно максвелловский характер. Хорошо известно, что если f_0 — максвелловская функция, то единственными сингулярностями, связанными с нулями ε (см. разд. 2А и 2В из обзора II), являются простые полюса. Из анализа структуры величины ε легко видеть, что если ω_n есть корень, то $-\omega_n^*$ — тоже корень. Более того, поскольку условие (1.220) подразумевает, что $\omega - \tau_k \gg 1$, то существует такой корень $\omega_0 = \beta_0 + i\gamma_0$, для которого можно приближенно записать (см. II—50)

$$\beta_0 = \omega_- + \frac{3}{2\omega - \tau_k^2}, \quad (1.225)$$

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_-^3}{N_0 k^2} \int d^3v \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \beta_0) \mathbf{k} \cdot \nabla_v f_0 < 0. \quad (1.226)$$

Кроме того, процедура, посредством которой было получено вышеприведенное выражение, гарантирует, что для всех осталь-

ных корней, если мы запишем их в виде $\omega = \beta + i\gamma$, должно иметь место соотношение $-\gamma \gtrsim \tau_k^{-1}$. Теперь

$$L(t) = \int_C \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} e^{-i\omega t}, \quad (1.227)$$

и если мы деформируем контур C в прямую линию C' , уравнение которой есть $\text{Im } \omega = \gamma_1$, где $\gamma_1 \sim \tau_k^{-1}$, но много больше, чем γ для следующего возможного полюса, то, вычисляя с помощью теоремы Коши вклады от полюсов при ω_0 и $-\omega_0^*$, получаем

$$L(t) = -i \left\{ \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\varepsilon'(k, \omega_0)} + \frac{e^{i\omega_0^* t}}{\varepsilon'(k, -\omega_0^*)} \right\} + \int_{C'} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} e^{-i\omega t}, \quad (1.228)$$

где $\varepsilon' = \partial\varepsilon/\partial\omega$. Если мы теперь пренебрежем членами порядка γ_0/β_0 по сравнению с единицей, поскольку $\beta_0 \tau_k^{-1} \gg 1$, то

$$\varepsilon(k, \omega_0) \sim 1 - \frac{4\pi e^2}{mk^2} P \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla v f_0}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \beta_0} \sim 1 - \frac{4\pi e^2}{m} P \int \frac{d^3v f_0}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \beta_0)^2} \quad (1.229)$$

и

$$\varepsilon'(k, \omega_0) \sim \frac{4\pi e^2}{m} P \int \frac{2d^3v f_0}{(\beta_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^3} \sim \frac{2}{\beta_0}. \quad (1.230)$$

Таким образом, для уравнения (1.228) можно записать

$$L(t) \sim -\beta_0 \sin \beta_0 t e^{\gamma_0 t} + \int_{C'} \frac{d\omega}{2\pi} L_\omega e^{-i\omega t}. \quad (1.231)$$

Оценки для максвелловской функции f_0 предполагают, что в случае качественно подобных функций распределений интеграл правой части приведенного выше выражения оказывается порядка $\gamma e^{\gamma t}$ при $-\gamma \sim \tau_k^{-1}$. Таким образом, для времен, больших по сравнению с τ_k , но меньших по сравнению с $2\pi/\Omega$, можно пренебречь в уравнении (1.224) величиной $v(t)$ и, используя главный член в уравнении (1.231), записать

$$E_k(t) \sim \int_0^\infty dt v(\tau) L(t-\tau) \sim \int_0^\infty dt v(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \cos \beta_0(t-\tau) \right] e^{\gamma_0(t-\tau)} \sim \\ \sim v(0) \cos \beta_0 t e^{\gamma_0 t} \left[1 + O\left(\frac{1}{\omega - \tau_k}\right) \right]. \quad (1.232)$$

Однако если подставить главный член приведенного выше выражения в уравнении (1.215) и провести подобное интегрирование по частям, то легко показать, что $E_k(t) \sim +v(0) \cos \beta_0 t e^{\gamma_0 t}$ является хорошим приближением для всего интервала $\tau_k < t <$

$< 2\pi/\Omega - \tau_k$. Иными словами, поскольку в этой области можно пренебречь величиной $v(t)$, а $K(t)$ имеет предел порядка τ_k , мы можем приближенно записать уравнение (1.215) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 E_k(t) &= \int_0^{\infty} d\tau \dot{K}^+(\tau) v(0) \cos \beta_0(t-\tau) e^{\gamma_0(t-\tau)} = \\
 &= - \int_0^{\infty} d\tau \dot{K}^+(\tau) v(0) e^{\gamma_0(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\sin \beta_0(t-\tau)}{\beta_0} \right] = \\
 &= \frac{\dot{K}^+(0)}{\beta_0} v(0) e^{\gamma_0 t} \sin \beta_0 t + \\
 &+ \int_0^{\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\dot{K}^+(\tau) v(0) e^{\gamma_0(t-\tau)} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\cos \beta_0(t-\tau)}{\beta_0^2} \right] = \\
 &= - \left[\frac{\dot{K}^+(0) - \gamma_0 \dot{K}^+(0)}{\beta_0^2} \right] v(0) \cos \beta_0 t e^{\gamma_0 t} + \dots + 0 \left(\frac{1}{\omega - \tau_k} \right) = \\
 &= v(0) \cos \beta_0 t e^{\gamma_0 t} + 0 \left(\frac{1}{\omega - \tau_k} \right), \quad (1.233)
 \end{aligned}$$

поскольку из уравнения (1.218) легко можно установить, что

$$\dot{K}^+(0) = 0, \quad \ddot{K}^+(0) = -\omega_-^2 \quad \text{и} \quad \beta_0^2 = \omega_-^2 + 0 \left(\frac{1}{\omega_-^2 \tau_k^2} \right).$$

Для времен $2\pi/\Omega - \tau_k < t < 2\pi/\Omega + \tau_k$ член $v(t)$ в уравнении (1.215) благодаря своей периодичности снова становится существенным, и $E_k(t)$ должны снова расти вблизи $t = 2\pi/\Omega$. В этом случае уравнение (1.215) может быть приближенно представлено в виде

$$\begin{aligned}
 E_k(t) &= v^+(t) + \int_0^t d\tau \dot{K}^+(\tau) E_k(t-\tau) + v^+ \left(t - \frac{2\pi}{\Omega} \right) + \\
 &+ \int_0^t d\tau \dot{K}^+ \left(\tau - \frac{2\pi}{\Omega} \right) E_k^{(0)}(t-\tau), \quad (1.234)
 \end{aligned}$$

где мы использовали тот факт, что первые два хорошо разделенные пика функций $v(t)$ и $K(t)$ могут быть существенны, и где $E_k^{(0)}$ с хорошим приближением описывается уравнением (1.233) и удовлетворяет соотношению

$$E_k^{(0)}(t) = v^+(t) + \int_0^t d\tau \dot{K}^+(\tau) E_k^{(0)}(t-\tau). \quad (1.235)$$

Таким образом, уравнение (1.234) можно записать так:

$$E_k(t) = E_k^{(0)}(t) + v^\dagger\left(t - \frac{2\pi}{\Omega}\right) + \int_0^t d\tau \dot{K}^\dagger(\tau) E_k(t - \tau), \quad (1.236)$$

и это уравнение можно проанализировать с помощью (1.219) тем же способом, что и уравнение (1.235). Очевидно, подобный анализ справедлив вблизи значений кривых, равных $2\pi/\Omega$.

Введение релятивистских поправок, очевидно, нарушит периодичность ядра $K(t)$ уравнения (1.214) и источника $v(t)$ уравнения (1.213), так как Ω будет теперь зависеть от ω и u . Поскольку это предполагает, что частицы будут менять фазу вращения, то можно ожидать, что решение будет аналогично решению с нулевым магнитным полем, что уменьшит обсуждавшиеся дополнительные пики. Подобного эффекта можно ожидать из-за зависимости эффективной частоты столкновений от скорости $v_c(\mathbf{v}, t)$, когда столкновения с нейтралами становятся существенными, что вводит в уравнения (1.213) и (1.214) фактор $e^{-v_c t}$.

1.9. Указания к литературе

Подробное рассмотрение случая неионизированного релятивистского газа можно найти в работе Синга [1].

Вывод кинетического уравнения в явно ковариантной форме был сделан Гото [2] и Курсуногли [3].

Первыми работами по волнам в горячей однородной магнитоактивной плазме являются работы Драмонда [4], Бернштейна [5] и Ахиезера с соавт. [6].

Случай продольных волн в релятивистской незамагниченной плазме был рассмотрен Клеммовым и Вилсоном [7].

Случай распространения волн вдоль магнитного поля рассматривался Прадханом [8].

Графическая техника, использованная для анализа случая распространения волн перпендикулярно магнитному полю, развита Бернштейном [5].

Предел малого магнитного поля для случая перпендикулярного распространения был взят из работы Балдвина и Роуландса [9].

2. ПРОДОЛЬНЫЕ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ

2.1. Независимость продольных мод

В этом разделе мы хотим исследовать решение дисперсионного соотношения для продольных мод в приближении, когда они независимы от поперечных мод колебаний. Для того чтобы

исследовать сущность этого приближения и вывести дисперсионные соотношения для продольных колебаний, удобно написать общее уравнение для \mathbf{E}_k в системе координат с осью z , направленной вдоль вектора \mathbf{k} :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_k, \omega = a_{k, \omega}, \quad (2.1)$$

причем мы будем обозначать оси системы координат через x , y , z . Если θ — есть угол между направлением магнитного поля и вектором \mathbf{k} , то матрица \mathbf{R} в этой системе координат принимает вид

$$[R_{ij}] = \begin{vmatrix} c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & -\omega^2 + Q_{zz} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= Q_{11} \cos^2 \theta - (Q_{13} + Q_{31}) \sin \theta \cos \theta + Q_{33} \sin^2 \theta, \\ Q_{xy} &= Q_{12} \cos \theta - Q_{32} \sin \theta, \\ Q_{xz} &= Q_{13} \cos^2 \theta + (Q_{11} - Q_{33}) \sin \theta \cos \theta - Q_{31} \sin^2 \theta, \\ Q_{yx} &= Q_{21} \cos \theta - Q_{23} \sin \theta, \\ Q_{yy} &= Q_{22}, \\ Q_{yz} &= Q_{21} \sin \theta + Q_{23} \cos \theta, \\ Q_{zx} &= Q_{31} \cos^2 \theta + (Q_{11} - Q_{33}) \sin \theta \cos \theta - Q_{11} \sin^2 \theta, \\ Q_{zy} &= Q_{12} \sin \theta + Q_{32} \cos \theta, \\ Q_{zz} &= Q_{11} \sin^2 \theta + (Q_{13} + Q_{31}) \sin \theta \cos \theta + Q_{33} \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а Q_{11}, \dots, Q_{33} являются элементами матрицы \mathbf{Q} , определяемой уравнением (1.99). Определитель $\|\mathbf{R}\|$ в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}\| &= (-\omega^2 + Q_{zz}) [(c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{xx})(c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{yy}) - Q_{xy} Q_{yx}] - \\ &\quad - Q_{yz} [(c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{xx}) Q_{zy} - Q_{zx} Q_{xy}] + \\ &\quad + Q_{zx} [Q_{yx} Q_{zy} - Q_{zx} (c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{yy})]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В пределе $kc \gg \omega_p$ корни уравнения $\|\mathbf{R}\| = 0$ распадаются на два класса. С точностью до членов наименьшего порядка по $\omega_p^2/k^2 c^2$ существуют низкочастотные корни, описывающие продольные моды, определяемые решением уравнения

$$\omega^2 = Q_{zz}, \quad (2.5)$$

и высокочастотные корни, соответствующие поперечным модам колебаний, которые в том же приближении описываются уравнением

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{1}{2} [Q_{xx} + Q_{yy} \pm \{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}Q_{yx}\}^{1/2}]. \quad (2.6)$$

В этом разделе мы будем интересоваться лишь корнями уравнения (2.5). Поведение поперечных мод, определяемых уравнением (2.6), детально обсуждалось в гл. 1. Используя соответствующие члены уравнения (1.99), можно показать, что уравнение (2.5) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} D(\omega, \mathbf{k}) &\equiv 1 - \frac{1}{\omega^2} Q_{zz} = \\ &= 1 + \frac{1}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_m \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \left(\frac{n\Omega}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + k_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial u} \right) \frac{J_n^2(k_{\perp} \omega / \Omega)}{\omega - k_{\parallel} u - n\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь и далее в этой главе мы будем предполагать нерелятивистское приближение. Мы ввели в уравнение (2.7) величину $D(\omega, \mathbf{k})$ для удобства ссылок.

При исследовании корней уравнения (2.7) мы будем главным образом интересоваться вопросом устойчивости, т. е. интересоваться, при каком выборе параметров могут возникать корни уравнения (2.7), для которых $\text{Im } \omega > 0$. В то же время при некоторых условиях мы обнаружим существование неустойчивизированных или слабо стабилизированных мод. Из-за сложности уравнения (2.7) в общем случае необходимо рассмотреть по отдельности различные области параметров и для каждой из них использовать удобное приближение и свою технику расчета.

2.2. Перпендикулярное распространение — устойчивость

Прежде всего рассмотрим случай $k_{\parallel} = 0$. В этом случае мы можем установить общие достаточные условия устойчивости с помощью метода, использованного в гл. 1 при исследовании устойчивости поперечных волн, распространяющихся поперек магнитного поля. Если мы введем для каждого сорта частиц обозначение:

$$a_n = - \frac{2}{k^2} \frac{4\pi q^2}{m} n^2 \Omega^2 \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} J_n^2 \left(\frac{k\omega}{\Omega} \right) \quad (2.8)$$

и обозначим соответственно действительную и мнимую части ω^2 через

$$\begin{aligned} R &= \text{Re } \omega^2, \\ I &= \text{Im } \omega^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

то можем записать уравнение (2.7), полагая соответственно действительные и мнимые части уравнения равными нулю в виде

$$0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum \frac{(R - n^2\Omega^2) a_n}{(R - n^2\Omega^2)^2 + I^2}, \quad (2.10)$$

$$0 = I \sum_{n=1}^{\infty} \sum \frac{a_n}{(R - n^2\Omega^2)^2 + I^2}. \quad (2.11)$$

Если $a_n > 0$ для всех значений n , то уравнение (2.11) требует, чтобы I было равно нулю. Аналогично, если $a_n > 0$ для всех значений n , то уравнение (2.10) не может иметь корней при $R < 0$ и, наоборот, они должны существовать при $R > \Omega_+^2$. (Заметим также, что если $a_n < 0$ для некоторого n и решения действительно существуют при $I \neq 0$, то уравнения (2.10) и (2.11) зависят только от I^2 . Следовательно, если $R + iI$ есть решение, то комплексно-сопряженная величина $R - iI$ также является решением.)

Функция распределения, для которой $a_n > 0$ для всех n , не приводит к неустойчивым модам с $k_{\parallel} = 0$. Простое максвелловское распределение является очевидным примером такого типа. То же справедливо для бимакселловских распределений

$$f_0 \sim \exp \left[-\frac{m}{2} \left(\frac{w^3}{T_{\perp}} + \frac{u^2}{T_{\parallel}} \right) \right]. \quad (2.12)$$

Возникновение неустойчивых мод вследствие изменения знака у одной или более величин a_n может быть проиллюстрировано графически с помощью техники, использованной в гл. 1. Запишем уравнение (2.7) при $k_{\parallel} = 0$ в виде

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum \frac{n\Omega \hat{a}_n}{\omega - n\Omega}, \quad (2.13)$$

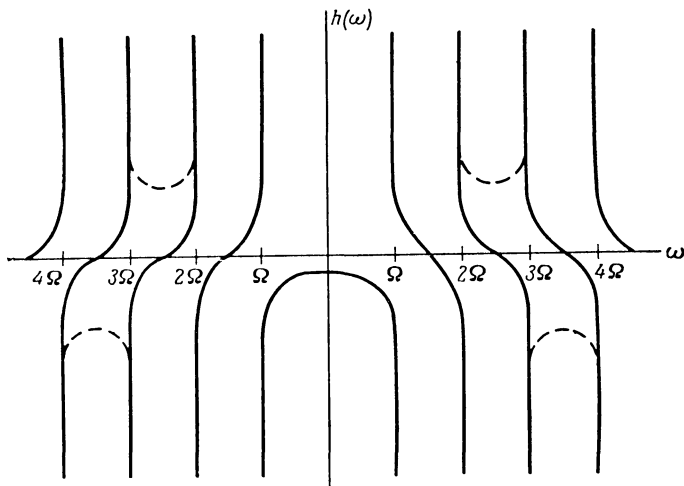
где $\hat{a}_n \equiv (2n^2\Omega^2)^{-1}a_n$, а a_n определяется уравнением (2.8).

Для частот порядка электронной циклотронной частоты вклад ионов в уравнение (2.13) можно не учитывать. Для частот порядка ионной циклотронной частоты, пока $k^2 \langle w^2 \rangle_- \ll \ll \Omega_-^2$, электронный вклад в уравнение (2.13) будет порядка (ω_-^2/Ω_-^2) и он мал, если параметры таковы, что неустойчивость существует вблизи ионной циклотронной частоты. Следовательно, для этих мод связь между ионами и электронами

слаба, можно не проводить суммирования по сортам частиц в уравнении (2.13), а рассмотреть уравнение

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\Omega \hat{a}_n}{\omega - n\Omega} = h(\omega), \quad (2.14)$$

которое мы будем применять для ионов или электронов в зависимости от величины ω . Обозначая правую часть уравнения



Фиг. 6. Схематическое изображение правой части уравнения (2.14).

(2.14) через $h(\omega)$ и строя график этой функции для всех $a_n > 0$, мы получаем сплошную кривую на фиг. 6, где значение функции в точке пересечения с осью ординат $h(\omega)_{\omega=0}$ определяется выражением

$$h(\omega)_{\omega=0} = \frac{4\pi q^2}{k^2 m} \int d^3v \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left[1 - J_0^2\left(\frac{k v}{\Omega}\right) \right]. \quad (2.15)$$

Предположим, что одно из значений \hat{a}_n (для $|n| > 1$) становится отрицательным. Соответствующий результат показан для случая $\hat{a}_3 < 0$ пунктирной кривой на фиг. 6. Положение минимума положительной ветви пунктирной кривой возрастает с увеличением плотности. Выше некоторой критической плотности пунктирная кривая не будет более пересекать линию $h(\omega) = 1$, образуя таким образом пару комплексно-сопряженных корней со значением действительной части между $(n-1)\Omega$ и $n\Omega$ и корни, которые равны этой же величине с противоположным знаком. Аналогичную ситуацию можно ожидать, если более чем одно значение a_n становится отрицательным.

Ситуация при изменении знака $h(\omega)|_{\omega=0}$ и (или) только \hat{a}_1 совершенно отлична. Если $h(\omega)|_{\omega=0}$ становится положительным, а \hat{a}_1 остается отрицательным, то будет возникать неустойчивость с $\text{Re } \omega = 0$, которая исчезает с уменьшением плотности. (Используя результаты, полученные ниже для случая $k_{\parallel} \neq 0$, можно показать, что эта неустойчивость устраняется при появлении какого-либо ненулевого значения k_{\parallel} .) Если $\hat{a}_1 < 0$ и $h(\omega)|_{\omega=0} < 0$, то все корни уравнения (2.14) действительные; однако если $\hat{a}_n < 0$, а $h(\omega)|_{\omega=0} > 0$, то при достаточно высокой плотности будет возникать пара комплексно-сопряженных корней со стремящейся к нулю действительной частью.

Очевидно, что свойство $\hat{a}_n < 0$ обеспечивается условием $\partial f_0 / \partial \omega > 0$ в достаточно широкой области значений ω , при которых с учетом $J_n^2(k\omega/\Omega)$ интеграл уравнения (2.8) становится положительным.

Заметим в этой связи, что условие $\hat{a}_n < 0$ может достигаться, если только $k\langle\omega\rangle \geq n\Omega$; для случая $k\langle\omega\rangle \ll n\Omega$, используя разложение функции Бесселя по малому аргументу и проводя интегрирование по частям, получаем, что $\hat{a}_n > 0$ для любого распределения. Аналогичным образом если $k\langle\omega\rangle_{\pm} \sim 0(\Omega_{\pm})$, то мы можем получить оценку $\hat{a}_n \sim 0(\omega_{\pm}^2/\Omega_{\pm}^2)$. При этом грубая оценка для порога неустойчивости по плотности при данном $\hat{a}_n < 0$ сводится к $\omega_{\pm}^2 \geq 0(\Omega_{\pm}^2)$.

В общем случае подобный анализ предполагает, что решение дисперсионного соотношения и установление критерия устойчивости должны быть сделаны численно. Например, мы можем рассмотреть две функции распределения:

$$f_0(\omega, u) = \frac{n_0}{2\pi\langle\omega\rangle} \delta(\omega - \langle\omega\rangle) f_0(u) \quad (2.16)$$

и

$$f_0(\omega, u) = \frac{n_0}{\pi\alpha_{\pm}^2(j!)} \left(\frac{\omega}{\alpha_{\pm}}\right)^{2j} f_0(u) e^{-(\omega^2/2\alpha_{\pm}^2)}, \quad (2.17)$$

где $f_0(u)$ — произвольная функция и нормированная к единице. Для функции $f_0(\omega, u)$, заданной уравнением (2.16), непосредственно получаем, что

$$\hat{a}_n = \frac{2}{k\langle\omega\rangle} \frac{\omega_p^2}{\Omega} J_n \frac{k\langle\omega\rangle}{\Omega} J_n' \frac{k\langle\omega\rangle}{\Omega} \quad (2.18)$$

и

$$h(\omega)_{\omega=0} = -\frac{2}{k\langle\omega\rangle} \frac{\omega_p^2}{\Omega} J_0 \frac{k\langle\omega\rangle}{\Omega} J_1 \frac{k\langle\omega\rangle}{\Omega}, \quad (2.19)$$

где $\omega_p^2 = \omega_{\pm}^2$ в зависимости от сорта рассматриваемых частиц, а J_n' — производная от функции Бесселя по ее аргументу. Согласно уравнению (2.18), \hat{a}_n будут отрицательны для значений

$k(\omega)/\Omega$, лежащих в серии полос. Дополнительное условие на то, чтобы пунктирная кривая на фиг. 6 лежала выше линии $h(\omega) = 1$, дает условие неустойчивости $\omega_p > A\Omega$, где A — константа порядка единицы, зависящая от рассматриваемой полосы $k(\omega)/\Omega$. В частности, если величина $h(\omega)|_{\omega=0}$, определяемая уравнением (2.19), положительна, а \hat{a}_1 из уравнения (2.18) отрицательна, то условие существования неустойчивого корня с нулевой действительной частью имеет вид $\omega_p > 4,13 \Omega$ [11].

Распределение, описываемое уравнением (2.17), было взято для того, чтобы показать влияние уширения резких пиков в распределении по скоростям ω , соответствующим уравнению (2.16). Как было показано численными расчетами (см. [11]), критическая плотность, характерная для существования неустойчивых корней с нулевой действительной частью быстро растет с увеличением полуширины $\delta\omega^2 \sim \alpha_{\perp}(4j)^{-1/2}$, а при $j \leq 3$ появляется устойчивость.

Для проблемы удержания плазмы представляет интерес распределение, связанное с конусом потерь, при котором функция распределения равна нулю в конусе, определяемом неравенством $|u| > \beta\omega$, где β — константа порядка единицы. Такое распределение возникает в плазме, удерживаемой магнитным полем с пробочной геометрией, вследствие потерь частиц с высокой продольной скоростью. При определении \hat{a}_n в уравнении (2.18) мы использовали функцию от ω , усредненную по всем скоростям ω . Для распределения типа конуса потерь это делается следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du f_0 = \int_{-\beta\omega}^{\beta\omega} du f_0. \quad (2.20)$$

Функция от ω , определяемая уравнением (2.20), равна нулю при $\omega = 0$, возрастает до максимального значения при некотором среднем значении ω , а затем вновь стремится к нулю для больших ω . Таким образом, функция $f_0(\omega, u)$, заданная уравнением (2.17), является достаточно хорошей моделью для распределений типа конуса потерь при вычислении коэффициентов \hat{a}_n .

2.3. Перпендикулярное распространение — прохождение волн

Другое предсказание дисперсионного соотношения при $k_{\parallel} = 0$ — это существование незатухающих возмущений, распространяющихся вдали от несущей частоты ω_0 , где ω_0 лежит в пределах определенных полос прозрачности, связанных с гармониками циклотронной частоты. Для того чтобы показать существование и определить свойства этих возмущений, предположим, что в невозмущенной однородной плазме возбуждается

плоский слой, ориентированный параллельно магнитному полю. Пусть заряд слоя меняется по закону $\rho_0 \sin \omega_0 t$. Преобразование Фурье — Лапласа для плотности заряда имеет вид

$$\rho_{k, \omega} = -\rho_0 (2\pi)^{-1} \delta(k_3) \delta(k_2) \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (2.21)$$

где, как и ранее, введем координатную систему x_1, x_2, x_3 с осью x_3 , расположенной вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0 , и осью x_1 , направленной по нормали к возбуждающей плоскости. Если, как и в уравнении (2.7), мы введем функцию

$$D(\omega, k_1, k_2, k_3) = -\omega^{-2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.22)$$

то получим из уравнения (1.70) выражение для потенциала, как функции x_1 и t :

$$\phi(x_1, t) = -2\omega_0 \rho_0 \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{i(kx_1 - \omega t)}}{k^2 D(\omega, k, 0, 0) (\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad (2.23)$$

где ε — положительная бесконечно малая величина. Функция $\phi(x_1, t)$ в уравнении (2.23) принимает действительные значения, так как

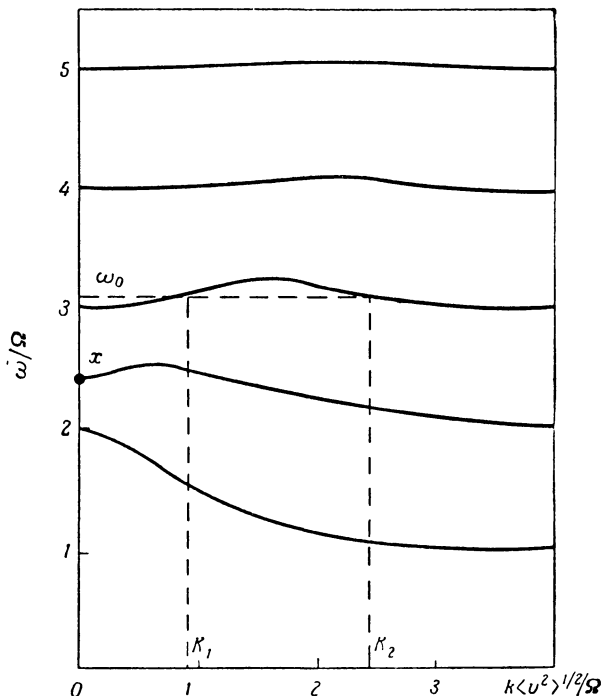
$$D(\omega, k, 0, 0) = D(-\omega, -k, 0, 0). \quad (2.24)$$

При выполнении обратного преобразования уравнения (2.23) используем дисперсионную диаграмму для корней уравнения (2.14). Пример, показанный на фиг. 7 (взятый из работы [12]), получен для максвелловского распределения с шириной $\langle v^2 \rangle^{1/2}$ для случая $(\omega_p/\Omega)^2 = 5$. Точка x обозначает положение гибридного резонанса $\sqrt{1 + (\omega_p/\Omega)^2}$. Для получения дисперсионного соотношения в трех других (непоказанных) квадрантах достаточно развернуть фиг. 7 относительно соответствующей оси.

Вычислим интеграл для обратного преобразования Лапласа, возникающий в уравнении (2.23), замыкая ω -контур вдоль полукружности произвольно большого радиуса, лежащей в нижней полуплоскости, и определяя вычеты подынтегрального выражения при нулевом знаменателе. Из рассмотрения фиг. 7 ясно, что, кроме полюсов при $\omega = \pm \omega_0$, это обратное преобразование будет учитывать для каждого действительного k вклад от бесконечного ряда корней уравнения $D(\omega, k, 0, 0) = 0$. Данный ряд сингулярностей определяет свойства плазмы, аналогичные свойствам, обсужденным в разд. 1.8, где мы рассмотрели в пределе слабого магнитного поля распространение волн поперек поля. Вклад от данных сингулярностей в потенциал $\phi(x_1, t)$ отличается от вклада из-за полюсов при $\pm \omega_0$ и соответствует непотенциальным явлениям, вызванным включением

возмущающего заряженного слоя. В отсутствие какого-либо затухания периодичность интеграла $2\pi\Omega^{-1}$ будет вызывать повторение этих переходных процессов.

Для того чтобы устранить эти трудности, введем постоянную частоту соударений, осуществив в выражении D замену



Фиг. 7. Дисперсионная диаграмма для корней уравнения (2.14).

$\omega \rightarrow \omega + i\nu$. Бесконечный ряд полюсов, связанный с нулями D , смещается теперь на расстояние ν в нижнюю часть полуплоскости, при этом уравнение (2.23) может быть записано в виде

$$\phi(x_1, t) =$$

$$= -\pi i \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k^2} e^{ikx_1} \left(\frac{e^{i\omega_3 t}}{D(-\omega_0 + i\nu, k, 0, 0)} - \frac{e^{-i\omega_0 t}}{D(\omega_0 + i\nu, k, 0, 0)} \right) + \\ + \frac{\omega_0}{\pi} e^{-\nu t} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{i(kx_1 - \omega t)}}{k^2 D(\omega, k, 0, 0) (\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (2.25)$$

В таком виде в уравнении (2.25) расходящиеся члены ограничены фактором $e^{-\nu t}$. В любом реальном эксперименте потен-

циал измеряется спустя некоторый макроскопический интервал времени после включения возбудителя и, таким образом, последним членом в уравнении (2.25) можно пренебречь фактически во всех приложениях. Появление фактора iv в первых двух членах уравнения (2.25) будет, конечно, вызывать пространственное затухание в возбуждаемой части поля, но оно мало для малых частот соударений и не зависит от времени.

Для учета эффекта соударений мы выбрали модель независимых от скорости частот соударений и получили в соответствии с уравнением (2.25) бесстолкновительный результат, измененный огибающей вида $e^{-\nu t}$. В качестве более подходящей модели для учета соударений мы можем выбрать либо частоту соударений, зависящую от скорости, либо оператор столкновений Фокера — Планка. Любая из этих моделей будет приводить к нарушению строгой периодичности $2\pi\Omega^{-1}$ для равновесных орбит частиц и тем самым к затуханию нестационарной компоненты $\phi(t)$ вследствие перемешивания фаз.

Вычисление первого интеграла в уравнении (2.25) может быть осуществлено для $x_1 > 0$ путем замыкания k -контура по большой полуокружности в верхней полуплоскости и нахождения вычета подынтегрального выражения для нулевых значений знаменателя, расположенных в данной полуплоскости. Если $x_1 < 0$, то подобная процедура применима для нулей, расположенных в нижней полуплоскости.

Для того чтобы найти корни выражения

$$D(\pm \omega_0 + iv, k, 0, 0) = 0, \quad (2.26)$$

расположенные в верхней полуплоскости, предположим прежде всего, что ω_0 находится в полосе прозрачности так, что существует один или более корней уравнения

$$D[\omega_0, k_r(\omega_0)] = 0, \quad (2.27)$$

где $k_r(\omega_0)$ есть действительный корень, который может быть найден графически из фиг. 7. Полагая $k = k_r + ik_i$ и считая частоты столкновений ν малыми, а k_i порядка ν , получаем, разлагая выражение (2.26) в ряд Тэйлора и используя уравнение (2.27), что

$$k_i = -\nu \frac{[\partial D(\omega, k_r)/\partial \omega]_{\omega=\omega_0}}{[\partial D(\omega_0, k)/\partial k]_{k=k_r}} = \nu \frac{\partial k_r(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (2.28)$$

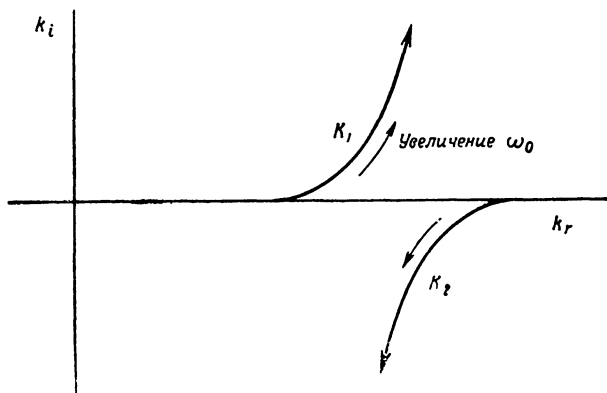
где вторая форма уравнения (2.28) получена при дифференцировании относительно ω_0 уравнения (2.27). Учитывая, что $\nu > 0$ только для тех корней уравнения (2.26), которые лежат в верхней полуплоскости, получаем условие $dk_r/d\omega|_{\omega=\omega_0} > 0$. Таким образом, если, например, $\omega = \omega_0$, как показано на фиг. 7, то

для первого члена уравнения (2.25), полагая $\nu \rightarrow 0$, получаем выражение

$$\phi(x_1, t) = -4\pi \left(\frac{\sin(\omega_0 t - K_1 x_1)}{K_1^2 D_k(\omega_0, K_1)} + \frac{\sin(\omega_0 t + K_2 x_1)}{K_2^2 D_k(\omega_0, -K_2)} \right), \quad (2.29)$$

где $D_k \equiv \partial D / \partial k$, а K_1 и K_2 являются корнями $k(\omega_0)$, показанными на фиг. 7.

По мере того как ω_0 меняется, корни K_1 и K_2 начинают сливаться, мы получаем условие $dk/d\omega|_{\omega_0} \rightarrow \infty$, а при этом решение



Фиг. 8. Перемещение корней уравнения $K_{1,2}(\omega)$ при перемещении возбуждающей частоты ω_0 из полосы пропускания в полосу отражения.

для возмущения, приводящее к уравнению (2.27), перестает существовать. Переход к более высокому порядку разложения в ряд Тэйлора уравнения (2.25) дает в этом случае результат $k - k_r = 0(\nu^{1/2})$, соответствующий тому факту, что корни начинают смещаться от действительной k -оси. На фиг. 8 показана диаграмма контура, образованного корнями $K_1(\omega_0)$ и $K_2(\omega_0)$, по мере того как ω_0/Ω переходит из области выше полосы пропускания 3 в область ниже полосы отражения 4. Пока ω_0 движется в полосу отражения, определяемую условием отсутствия действительных корней уравнения (2.26), интегрирование по k в уравнении (2.25) для $x_1 > 0$ с помощью нахождения вычета подынтегрального выражения для полюсов, расположенных в верхней полуплоскости, все еще остается справедливым. Однако поскольку эта полоса уже более не существует вблизи действительной оси, то оказывается, что амплитуда $\phi(x_1, t)$ затухает экспоненциально при отходе от возбуждателя, меняясь в e раз на длине порядка $\langle v^2 \rangle^{1/2} \Omega$.

С точки зрения эксперимента это означает, что $\phi(x, t)$ будет наблюдаться на некотором конечном расстоянии только в том

случае, когда ω_0 лежит в полосе пропускания, где существуют действительные решения уравнения (2.27).

В приведенном на фиг. 7 примере для ω_0/Ω оба волновых вектора K_1 и K_2 будут наблюдаться при конечных x_1 , однако моды будут иметь противоположные фазовые скорости.

Заметим, что, для того чтобы определить, какой из корней уравнения (2.27) лежит в верхней полуплоскости и, следовательно, какой из корней дает вклад при $x_1 > 0$, необходимо ввести частоту столкновений ν . Это должно быть полностью эквивалентно использованию начальных условий, характеризующих проблему, причем уравнение (2.27) рассматривается как аналитическое продолжение аналитической функции $D(\omega, k)$ для действительных ω_0 , определенной при $\text{Im } \omega > 0$.

2.4. Резонансы продольных волн при перпендикулярном распространении

Серия экспериментов, выполненных в верхних слоях земной атмосферы с помощью спутников Alouette, показала наличие ряда резонансов при распространении волн в замагниченной плазме, существующей на исследованных высотах. В этих экспериментах антенна возбуждалась короткими импульсами тока, а после прекращения импульса та же антенна использовалась в качестве приемной. Было обнаружено, что принятый сигнал состоит из ряда острых пиков на отдельных частотах, причем амплитуда пиков довольно медленно затухает во времени. Параметры исследуемой плазмы позволили предположить, что выделенные частоты совпадают с ω_- , Ω_- , гибридной частотой $(\omega_-^2 + \Omega_-^2)^{1/2}$ и гармониками Ω_- .

Причина таких резонансов была исследована теоретически с использованием модели однородной плазмы и магнитного поля, возбуждаемого дипольной или линейной системой. С помощью трехмерной модели, учитывающей и электростатические и электромагнитные эффекты, было теоретически найдено, что резонансы следует ожидать на тех частотах, для которых групповая скорость возбуждаемой моды стремится к нулю. Простое физическое объяснение этого явления заключается в том, что вся энергия, вложенная в эти моды начальным импульсом, не может далеко распространиться от «передающей» антенны, и, таким образом, эта энергия должна, отражаясь, возбуждать «приемную» антенну.

Здесь мы проиллюстрируем это теоретическое заключение, исследуя одномерную задачу возбуждения плазмы с помощью осциллирующего слоя зарядов, введенного в предыдущем разделе. Используя эту модель, мы ожидаем, что будут учтены резонансы, возникающие при распространении продольных

волн перпендикулярно магнитному полю, и при этом опущены как резонансы при ω_- для длинноволновых электростатических волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, так и любые резонансы, связанные с электромагнитными модами. Мы не станем исследовать временное затухание найденных решений, но только покажем, откуда возникают эти решения и что они связаны с равенством нулю групповой скорости.

Для более подробного рассмотрения этих резонансов и их временной зависимости, не рассматриваемой здесь, советуем читателю обратиться к оригинальным работам.

Мы хотим, таким образом, рассчитать потенциал в точке $x_1 = 0$ для $t > 0$, если возбуждающие заряды описываются формулой

$$\rho(x_1, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{2\pi\lambda_c^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\lambda_c^2}\right).$$

В приведенном выше выражении мы заряженную плоскость $\rho(x_1, t) = \delta(t)\delta(x_1)$ заменили слоем, толщина которого λ_c . Для λ_c , меньших чем длины волн всех интересующих нас мод, эти два случая физически эквивалентны, но для последующего анализа такая замена удобна, поскольку позволяет избежать возбуждения бесконечного числа волн. Следуя тем же путем, что и в предыдущем разделе, находим

$$\phi(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(-i\omega t - 1/2\lambda_c^2 k^2)}{k^2 D(\omega, k, 0, 0)}, \quad (2.30)$$

где $\epsilon > 0$, а $D(\omega, k, 0, 0)$ описывается выражением (2.22).

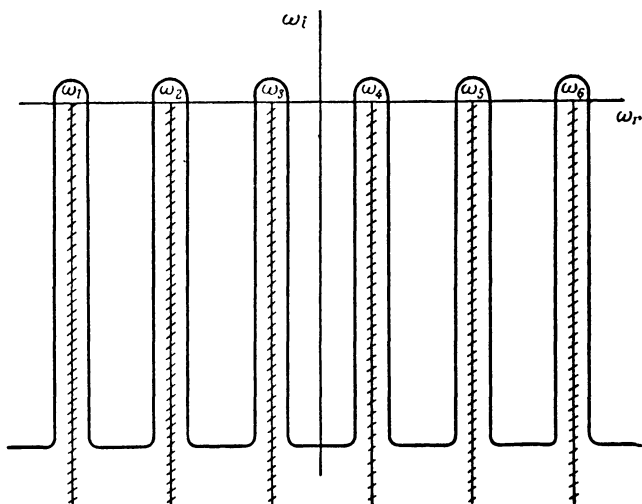
Для того чтобы установить асимптотическое поведение во времени уравнения (2.30), нам необходимо знать те точки, в которых неаналитична функция

$$\phi_\omega(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(-1/2\lambda_c^2 k^2)}{k^2 D(\omega, k, 0, 0)}. \quad (2.31)$$

Форма записи потенциала (2.30) такова, что $\phi(x_1, t)$ равно нулю при $t < 0$. Таким образом, все сингулярности ϕ_ω лежат ниже ω -контур, по которому проводится интегрирование уравнения (2.30). Используя обычную процедуру для обратного преобразования Лапласа, мы хотим деформировать ω -контур в уравнении (2.30) таким образом, чтобы он лежал в нижней полуплоскости, как показано в качестве примера на фиг. 9 везде, где возможно аналитическое продолжение ϕ_ω , определяемое уравнением (2.31). Когда t становится большим и положительным, вклад от той части ω -контур, которая лежит в

нижней полуплоскости в уравнениях (2.30) становится малым. Существенный вклад в интеграл вносит та часть контура, которая не может быть деформирована в нижнюю часть плоскости из-за сингулярности ϕ_ω при ω_n , а сами сингулярности в данном случае будут возникать как точки ветвления.

Когда ω приближается сверху к действительной оси, то, как видно из предыдущего раздела (теперь ν играет роль $\text{Im } \omega$), особая точка в подынтегральном выражении уравнения (2.31)



Фиг. 9. Контур интегрирования по ω в уравнении (2.31) при обратном преобразовании.

приближается к действительной k -оси всякий раз, когда $\text{Re } \omega$ лежит в пределах полосы пропускания, т. е. там, где существует действительный корень k для действительных ω . Между этими полосами пропускания в полосах отражения не существует особенностей в k -плоскости, и аналитическое продолжение для ϕ_ω становится возможным. Аналитическое продолжение ϕ_ω вне действительной оси, где ω лежит в полосе прозрачности, может быть осуществлено непрерывной деформацией k -контура уравнения (2.31) от действительной оси в комплексную плоскость таким образом, чтобы охватывать особую точку, которая с уменьшением $\text{Im } \omega$ проходит через действительную k -ось. Такой процесс позволяет получить аналитическое продолжение $D(\omega, k, 0, 0)$ в комплексную k -плоскость, и такое аналитическое продолжение для $D(\omega, k, 0, 0)$ непосредственно получается с помощью уравнения (2.31). Фактор k^{-2} в подынтегральном выражении уравнения (2.31) не приводит к затруднениям, по-

сколько нетрудно показать, что произведение $k^{-2}D^{-1}(\omega, k, 0, 0)$ является регулярным в начале координат. Этот процесс аналитического продолжения потенциала $\phi_\omega(0)$ путем деформации k -контура может быть выполнен всегда, за исключением двух случаев: а) для некоторых значений ω особые точки могут приближаться к k -контур, по мере того как $k \rightarrow \pm\infty$; б) при некоторых значениях ω две особые точки могут, приближаясь к k -контур с противоположных сторон, с ним сливаться. Мы избавились от исключения типа а) с помощью предположения о распределенном возбуждающем слое, при этом компонента Фурье стремится к нулю при $k \rightarrow \pm\infty$. Физически это означает, что мы исключили возбуждение бесконечно коротких длин волн. Случай б) возможен лишь при выполнении двух условий. Во-первых, должен существовать двойной корень дисперсионного соотношения, в котором ω рассматривается как независимое переменное, а k как функция. Это можно выразить, с другой стороны, как требование существования одновременного решения двух уравнений

$$\begin{aligned} D(\omega, k) &= 0, \\ D_k(\omega, k) &= 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Во-вторых, условие слияния может осуществляться, если только два корня в k -плоскости возникают при $\omega \rightarrow +i\infty$ в противоположных полуплоскостях. Последнее требование вытекает из того факта, что k -контур должен проходить между обоими корнями. Легко показать, что пара уравнений (2.32) эквивалентна требованию $dk(\omega)/d\omega = 0$, где $k(\omega)$ является корнем уравнения $D(k, \omega) = 0$. Из анализа фиг. 7 следует, что существует бесконечное множество совместных корней уравнений (2.32). Они возникают во всех тех точках на фиг. 7, где сплошная линия имеет нулевой наклон. Предполагая, что ω имеет малую положительную часть, и рассматривая одну из таких точек, мы можем найти приближенно корни уравнений (2.32) с помощью метода, аналогичного использованному в предшествующем разделе, где мы имели дело с малой частотой соударений. Принимая во внимание, что $\text{Im } \omega \rightarrow 0$, по мере того как $\text{Re } \omega \rightarrow \omega_n$, можно легко видеть, что два связанных корня действительно сливаются с действительной k -осью.

Без какого-либо дополнительного анализа мы получаем результат, заключающийся в том, что асимптотический временной отклик в точке $x_1 = 0$, обусловленный возбудителем, будет представлять собой колебания на тех частотах, для которых дисперсионные кривые имеют нулевой наклон. Для того чтобы найти временную зависимость амплитуд, мы должны в действительности определить асимптотическую форму интеграла в

уравнении (2.30). Как предполагалось, при обсуждении графика фиг. 9, этот асимптотический результат будет иметь форму суммы интегралов, каждый из которых содержит интегрирование относительно одной из точек ветвления ω_n . Эти вклады от точки $k = 0$ могут быть непосредственно определены, так как дисперсионное соотношение может быть разложено в ряд при малых k . Учет вклада, возникающего для $k(v^2)^{1/2}/\Omega \sim 1$, более затруднителен.

Временная зависимость амплитуд обсуждается более подробно в работах, указанных в конце главы.

2.5. Распространение, близкое к перпендикулярному, изотропное максвелловское распределение

Нахождение корней дисперсионного соотношения в случае $k_{\parallel} \neq 0$ является гораздо более сложной задачей, чем для случая $k_{\parallel} = 0$. Интегрирование полюса по скорости u должно рассматриваться в смысле Ландау, беря $\text{Im } \omega > 0$, и затем, получая поведение $D(\omega)$ в остальной части комплексной ω -плоскости с помощью асимптотического продолжения. Использование такой процедуры позволяет определить, что дисперсионное соотношение обычно имеет мнимую часть для действительных ω и, таким образом, оно качественно отличается от дисперсионного соотношения для случая $k_{\parallel} = 0$. Одна из проблем, которую мы хотим рассмотреть, — это связь между такими двумя случаями.

Заслуживает внимания общая посылка, которую мы будем использовать, пытаясь решить дисперсионное соотношение для случая $k_{\parallel} \neq 0$ мы будем предполагать, что для некоторого частного набора предполагаемых параметров существует корень $\omega = \omega_r + i\omega_i$, и будем использовать приближения в уравнении (2.7), согласующиеся с предполагаемыми амплитудами ω_r , ω_i и различными значениями параметров. Если можно показать, что упрощенное таким образом дисперсионное соотношение обладает корнем при предположенном значении $\omega_r + i\omega_i$, то мы будем говорить, что имеем a posteriori оправдание для нашего предположения.

В соответствии с данным методом общее рассмотрение уравнения (2.7) разобьем на ряд отдельных приближенных рассмотрений, в каждом из которых делаются предположения по ряду параметров.

Мы предполагаем, что в уравнении (2.7) возможно аналитически продолжить функцию $f_0(\omega, u)$ в область комплексной u -плоскости, по крайней мере в полосе шириной ω_i/k_{\parallel} . Затем мы сдвигаем контур интегрирования по u таким образом, чтобы

он проходил как раз под точкой $(\omega_r + i\omega_i)/k_{\parallel}$. Процедура Ландау для интегрирования полюса дает

$$\begin{aligned}
 D(\omega, k) &= \\
 &= 1 + \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi q^2}{m} \int_0^{\infty} d\omega \omega P \int_{-\infty + i(\omega_i/k_{\parallel})}^{\infty + i(\omega_i/k_{\parallel})} du \left(\frac{n\Omega}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + k_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial u} \right) \times \\
 &\times \frac{J_n^2(k_{\perp} \omega / \Omega)}{\omega - k_{\parallel} u - n\Omega} - \frac{2\pi^2 i}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi q^2}{m} \int_0^{\infty} d\omega \omega \int_{-\infty}^{\infty} du \delta(\omega_r - k_{\parallel} u - n\Omega) \times \\
 &\times \left(\frac{n\Omega}{\omega} \frac{\partial f_0[\omega, u + (i\omega_i/k_{\parallel})]}{\partial \omega} + k_{\parallel} \frac{\partial f_0[\omega, u + (i\omega_i/k_{\parallel})]}{\partial u} \right) J_n^2\left(\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega}\right), \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

где символ P обозначает главное значение полюса интеграла по u . Фактор $i\omega_i/k_{\parallel}$, возникающий в аргументе функции в последнем члене уравнения (2.33), служит для ограничения значений ω_i , при которых этим членом можно пренебречь даже для низких значений $\langle u^2 \rangle$. Например, если распределение по u является приблизительно максвелловским, то членами, содержащими интегралы от δ -функции в уравнении (2.33), можно пренебречь, пока для соответствующего сорта частиц и целых n

$$(\omega_r - n\Omega)^2 - \omega_i^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle. \quad (2.34)$$

При нахождении высокочастотных корней уравнения (2.33) для изотропного максвелловского распределения мы пренебрегаем ионным движением, а для электронов пренебрегаем последним членом в уравнении (2.33), если

$$(\omega_r - n\Omega_-)^2 - \omega_i^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-. \quad (2.35)$$

Если условие (2.35) удовлетворяется, то мы можем разложить в ряд главное значение интеграла в уравнении (2.33) для малых u . В этом случае особенность возникает в области таких значений u , для которых функция f_0 мала. Тогда, согласно уравнению (2.35), пренебрегая членом, пропорциональным k_{\parallel}^2 , мы в результате получаем выражение для уравнения (2.13), которое мы получали ранее из уравнения (2.7), полагая k_{\parallel} точно равным нулю.

В разд. 2.1 и 2.5 мы получили несколько результатов, которые были справедливы при k_{\parallel} , точно равном нулю. Однако можно ожидать, что эти же результаты будут справедливы, если k_{\parallel} мало: уравнение (2.35) дает необходимый для этого критерий малости.

При нахождении низшего корня уравнения (2.33) в случае ионного циклотронного резонанса для случая изотропного максвелловского распределения мы должны включить эффекты,

связанные с движением электронов. Мы можем сделать довольно общее предположение, что

$$\Omega_-^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_- \quad (2.36)$$

и

$$\Omega_-^2 \gg k_{\perp}^2 \langle w^2 \rangle_- \quad (2.37)$$

Однако условие, получаемое для электронов в предположении $n = 0$ в уравнении (2.35), является гораздо более сильным:

$$\omega_r^2 \sim \Omega_+^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_- \quad (2.38)$$

В общем случае, учитывая при $n = 0$ только электронный вклад и используя уравнение (2.37) (пренебрегая членом порядка ω_-^2 / Ω_-^2), получаем

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m_- k^2} \int d^3v \frac{k_{\parallel} (\partial f_0 / \partial u)}{\omega - k_{\parallel} u} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\Omega_+ + \hat{a}_{n+}}{\omega - n\Omega_+}, \quad (2.39)$$

где для ионов мы ввели величину \hat{a}_{n+} из уравнения (2.14) и последовательно использовали предположение:

$$(\omega_r - n\Omega_+)^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_+.$$

Мнимая часть интеграла в уравнении (2.39) мала только в случаях $\omega_r^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$ или $\omega_r^2 \ll k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$. Если предположить изотропное максвелловское распределение для электронов и ионов, возможность различия температур T_- и T_+ , а также принять $k_{\perp}^2 \langle w^2 \rangle_+ \sim \Omega_+^2$, то для удовлетворения уравнения (2.38) требуется, чтобы

$$\frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \ll \frac{\langle w^2 \rangle_+}{\langle w^2 \rangle_-}. \quad (2.40)$$

Последнее условие соответствует очень малым отклонениям от распространения, точно перпендикулярного магнитному полю. В этом приближении

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_-^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2 k^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\Omega_+ + \hat{a}_{n+}}{\omega - n\Omega_+}. \quad (2.41)$$

В любой экспериментальной установке длиной L вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0 значение k_{\parallel} ограничено условием $k_{\parallel} \gtrsim L^{-1}$, так что уравнение (2.40) может не удовлетворяться.

Второй режим, обуславливающий малое затухание Ландау, $\omega_r^2 \ll k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$ приводит к такому же соотношению, что и уравнение (2.40), но с обратным направлением знака неравенства, что существенно легче удовлетворяется. В этом случае разложение

в ряд интеграла в уравнении (2.39) для малых ω приводит в наинизшем порядке к выражению

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{k_{D-}^2}{k^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\Omega_+ a_{n+}}{\omega - n\Omega_+}, \quad (2.42)$$

где $k_{D-} = 4\pi n_- e^2 / \theta_-$.

Предполагая вновь $k_{\perp}^2 \langle \omega^2 \rangle_+ \sim \Omega_+^2$, можно найти оценку $(k_{D-}^2 / k^2) \sim (T_+ \omega_+^2 / T_- \Omega_+^2)$ и заключить, что для температур $T_- \gtrsim T_+$ дисперсионная кривая, описываемая уравнением (2.42), должна быть подобна кривой, обсуждавшейся для случая $k_{\parallel} = 0$. Заметим, что справедливость дисперсионного соотношения (2.42) ограничена областью $\langle \omega^2 \rangle_+ / \langle \omega^2 \rangle_- \ll k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2 \ll 1$, которая, за исключением случая почти точно перпендикулярного распространения, совпадает с областью справедливости дисперсионного соотношения для высоких частот.

Суммируя результаты в пределе малого k_{\parallel} для изотропного максвелловского распределения, мы получаем следующее. Для частот порядка электронной циклотронной частоты дисперсионное соотношение, полученное непосредственно при $k_{\parallel} = 0$, оказывается справедливым, пока $\Omega_-^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$. Для частот порядка ионной циклотронной частоты дисперсионное соотношение, полученное непосредственно для $k_{\parallel} = 0$, справедливо только, если $k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2 \sim \langle \omega^2 \rangle_+ / \langle \omega^2 \rangle_-$. При этом условии возникает затухание Ландау из-за движения электронов вдоль силовых линий. Если $\langle \omega^2 \rangle_+ / \langle \omega^2 \rangle_- \ll k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2 \ll 1$, то вновь могут возникать незатухающие волны, удовлетворяющие теперь уравнению (2.42).

2.6. Распространение, близкое к перпендикулярному, — анизотропное распределение

Исследуем теперь предел малых k_{\parallel} , отбросив предположение об изотропности максвелловского распределения. Прежде всего рассмотрим высокочастотный случай с учетом только электронного движения. Тогда, поскольку уравнение (2.35) содержит все n , мы можем опустить последний член в уравнении (2.33) и разложить главное значение интеграла для малых u , получая в наинизшем порядке

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi e^2}{m_-} \times \\ \times \int d^3v \left(\frac{(n\Omega_- / \omega) (\partial f_{0-} / \partial \omega)}{\omega - n\Omega_-} - \frac{k_{\parallel}^2 f_{0-}}{(\omega - n\Omega_-)^2} \right) J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega_-} \right), \quad (2.43)$$

или записать эквивалентное дисперсионное соотношение

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n\Omega_- \hat{a}_{n-}}{\omega - n\Omega_-} - \frac{b_{n-}}{(\omega - n\Omega_-)^2} \right), \quad (2.44)$$

где величина \hat{a}_{n-} определяется уравнением (2.14), а

$$b_{n-} = \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \frac{4\pi e^2}{m_-} \int d^3v f_{0-} J_n^2 \left[\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega_-} \right] > 0. \quad (2.45)$$

Уравнение (2.43) является точной формой $D(\omega, \mathbf{k})$ для распределения

$$f_{0-} = f_{0-}(\omega) \delta(u), \quad (2.46)$$

где $f_{0-}(\omega)$ — произвольная функция, нормированная по плотности. Из-за ограничений на справедливость уравнения (2.43) для более общих распределений, определяемых уравнением (2.35), член, содержащий b_{n-} , в уравнении (2.43) оправданно сохранять лишь при условии $\langle u^2 \rangle_- \ll \langle \omega^2 \rangle_-$. В этом случае член, содержащий b_{n-} , может превышать член, содержащий \hat{a}_{n-} .

Если существует условие на анизотропию в пространстве скоростей, то нетрудно показать, что уравнение (2.43) может давать неустойчивые решения даже при всех $\hat{a}_{n-} > 0$. Рассмотрим диаграмму, представляющую собой график правой части уравнения (2.44) как функцию ω . Влияние членов с \hat{a}_n будет таким же, как и на графике уравнения (2.14) (см. фиг. 6), но к этому добавятся эффекты от членов с b_n , которые являются симметричными относительно каждого из значений $n\Omega_-$. Качественная картина этих кривых изображена на фиг. 10.

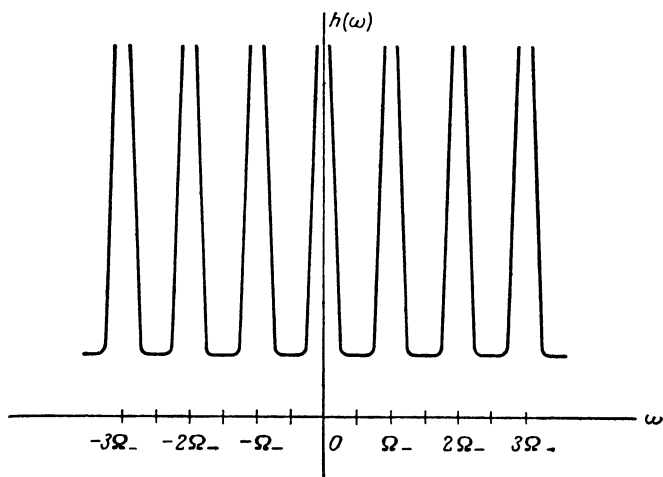
Если один или более минимумов кривой $h(\omega)$ лежит выше значения $h(\omega) = 1$, то возникает пара комплексно-сопряженных корней уравнения (2.44). Заметим, что изменение знака \hat{a}_n теперь не так существенно, поскольку направление, в котором кривая уходит в бесконечность, определяется условием $b_n > 0$. Эти неустойчивости будут возникать при условии $(\Omega_-^2 / \langle u^2 \rangle) \gg k_{\parallel}^2 > \Omega_-^2 / \langle \omega^2 \rangle_-$. Для значений k_{\parallel} , лежащих ниже этой области, корни уравнения (2.44) становятся действительными, а для значений k_{\parallel} выше этой области возникает затухание Ландау из-за нарушения неравенства (2.35). Как и раньше, приближенная оценка величины плотности, необходимой для существования неустойчивости, определяется неравенством $k_{\parallel}^2 \omega_-^2 / k^2 \Omega_-^2 \gtrsim 1$.

Для того чтобы исследовать форму $D(\omega, \mathbf{k})$ в случае малых k_{\parallel} и низких частот для анизотропного распределения по скоро-

стям, нам необходимо только добавить к уравнению (2.39) члены, содержащие b_{n+} . В результате получаем

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{m_- k^2} \int d^3v k_{\parallel} \frac{\partial f_{0-}/\partial u}{\omega - k_{\parallel} u} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n\Omega_+ \hat{a}_{n+}}{\omega - n\Omega_+} + \frac{b_{n+}}{(\omega - n\Omega_+)^2} \right), \quad (2.47)$$

где значение \hat{a}_{n+} определяется уравнением (2.14), а b_{n+} — уравнением (2.45) для ионов. Как и ранее, для достаточно малых



Фиг. 10. Схематическое изображение правой части уравнения (2.44).

$\langle u^2 \rangle_-$ мы можем разложить в ряд интеграл для электронной компоненты в режиме, когда отсутствует затухание Ландау. Однако поскольку в уравнении (2.44) мы интересуемся случаем $k_{\parallel}^2 \leq k_{\perp}^2$, то это условие приводит к очень сильному требованию $\langle \omega^2 \rangle_+ \gg \langle u^2 \rangle_-$. Более интересный случай существует при $\omega_r^2 \sim \sim \Omega_+^2 \ll k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$. При этом можно для низких частот провести разложение интеграла для электронной компоненты и получить в наинизшем порядке

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{k_{D-}^2}{k^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n\Omega_+ \hat{a}_{n+}}{\omega - n\Omega_+} + \frac{b_{n+}}{(\omega - n\Omega_+)^2} \right). \quad (2.48)$$

Мы можем проанализировать эту функцию тем же способом, что и уравнение (2.44), и вновь найти неустойчивости между гармониками ионной циклотронной частоты. Эти неустойчивости

возникают при гораздо более высокой плотности, чем неустойчивости типа Харриса, обсуждаемые ниже. Как будет показано, неустойчивости Харриса имеют порог по плотности при $\omega_- > \Omega_+$, тогда как уравнение (2.48) имеет нули с неустойчивыми корнями только при $\omega_+ \geq \Omega_+$.

2.7. Моды с $\langle u^2 \rangle_+ k_{\parallel}^2 \ll \Omega_+^2$

В предыдущих разделах мы исследовали форму функции $D(\omega, \mathbf{k})$ и ее корни для случая достаточно малых k_{\parallel} , при которых дисперсионное соотношение было действительно для действительных значений ω . Это имело практические преимущества, поскольку мы могли прибегать к графическому анализу для определения величины действительных корней и делать выводы о существовании комплексных корней. Для достаточно больших k_{\parallel} , когда последними членами в уравнении (2.26) нельзя пренебрегать, мы уже не можем более использовать графические методы.

Обсуждение проблемы устойчивости мы начнем с предположения $\omega_i \ll \omega_r$. При определенном выборе параметров некоторые распределения по скоростям, будучи существенно неустойчивыми, могут нарушать это предположение, и тогда потребуются другой метод анализа. Однако даже в этом случае наш метод анализа будет оставаться справедливым на границе области устойчивости, и, таким образом, появится возможность предсказывать существование неустойчивости и, кроме того, делать оценки ожидаемой величины инкремента неустойчивости.

Предположим, что уравнение

$$D(\omega, \mathbf{k}) = D_r(\omega, \mathbf{k}) + iD_i(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (2.49)$$

имеет корень $\omega = \omega_r + i\omega_i$, где $\omega_i \ll \omega_r$, а $\partial D_i(\omega, \mathbf{k})/\partial \omega|_{\omega=\omega_r} \ll \ll \partial D_r(\omega, \mathbf{k})/\partial \omega|_{\omega=\omega_r}$. Затем разложим уравнение (2.49) в ряд при малых ω_i и, приравняв нулю действительные и мнимые части, получим приближенно

$$D_r(\omega_r, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.50)$$

$$\omega_i = - \frac{D_i(\omega_r, \mathbf{k})}{\partial D_r/\partial \omega|_{\omega=\omega_r}}. \quad (2.51)$$

Уравнение (2.50) является действительным уравнением, корни которого определяют $\omega_r(\mathbf{k})$. Для этих значений ω_r уравнение (2.51) дает приближенное значение $\omega_i(\mathbf{k})$. Используя процедуру Ландау для анализа полюсов в интегралах уравнения (2.7),

получаем при $\omega = \omega_r$ для действительной и мнимой частей функции $D(\omega, \mathbf{k})$ следующие выражения:

$$D_r(\omega_r, k) = 1 + \frac{1}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \left(\frac{n\Omega}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + k_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial u} \right) \times \\ \times J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega} \right) \frac{P}{\omega - k_{\parallel} u - n\Omega}, \quad (2.52)$$

$$D_i(\omega_r, \mathbf{k}) = -\frac{\pi}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \left(\frac{n\Omega}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + k_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial u} \right) \times \\ \times J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega} \right) \delta(\omega_r - k_{\parallel} u - n\Omega), \quad (2.53)$$

где P в уравнении (2.52) обозначает главное значение полюса интеграла.

Если мы введем функцию

$$F_n(u) = \frac{2\pi^2}{k_{\parallel} k^2} \frac{4\pi q^2}{m} \int_0^{\infty} d\omega \left\{ \omega_r \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + k_{\parallel} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial u} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \right\} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega} \right), \quad (2.54)$$

то уравнение (2.53) может быть записано в виде

$$D_i = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_n \left(\frac{\omega_r - n\Omega}{k_{\parallel}} \right). \quad (2.55)$$

Форма записи (2.55) удобна в случае, когда $\Omega^2 > k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle$ для каждого сорта частиц. При этом правая часть уравнения (2.55), рассматриваемая как функция ω_r для каждого сорта частиц в окрестности $m\Omega$, будет функцией, зависящей только от F_n . Вклады от других членов с $n \neq m$ в сумме (2.55) малы. Мы прежде всего будем исследовать этот предельный случай.

В примерах, которые будут рассмотрены, распределение для электронов принято максвелловским, поэтому высокочастотные моды устойчивы, в то время как ионы могут иметь аномальные распределения, что может приводить к низкочастотным неустойчивостям. Для области параметров, которую мы будем рассматривать, можно принять $\Omega_-^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$ и $\Omega_-^2 \gg k_{\perp}^2 \langle w^2 \rangle_-$. Будем рассматривать случай $\omega_r \ll \Omega_-$, когда существен только электронный вклад в уравнение (2.55):

$$F_{0-}(u) = \frac{8\pi^3 e^2}{m_- k^2} \int_0^{\infty} d\omega \omega \frac{\partial f_{0-}}{\partial u}. \quad (2.56)$$

В этом приближении мы вновь ограничиваемся рассмотрением движения электронов вдоль силовых линий. Вклад $F_{0-}(\omega_r/k_{\parallel})$ в уравнение (2.55) будет определяться затуханием Ландау вследствие этого движения.

Существенная черта в анализе уравнения (2.52) — появление для каждого сорта частиц величины обратной массы. Так, если отсутствуют компенсирующие факторы, то электронное движение будет определять поведение действительной части дисперсионного соотношения. В качестве первого примера рассмотрим случай $\omega_-^2 \ll \Omega_-^2$ и $\omega_r^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$, когда уравнение (2.52) в наименьшем порядке принимает вид

$$D_r = 1 - \frac{\omega_-^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2 k^2} + \frac{1}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi q_+^2}{m_+} \int d^3v \left(\frac{n\Omega_+}{\omega} \frac{\partial f_{0+}}{\partial \omega} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{0+}}{\partial u} \right) \times \\ \times J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega_+} \right) \frac{P}{\omega - k_{\parallel} u - n\Omega_+}. \quad (2.57)$$

Пока $k_{\parallel}^2/k^2 \gg m_-/m_+$, мы можем полностью пренебречь ионным членом, и при этом получить

$$\omega_r^2 = \omega_-^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k^2}, \quad (2.58)$$

или частоты, меньшие или равные ω_- , но выше чем ω_+ (из-за ограничения на k_{\parallel}). В этом приближении

$$\left. \frac{\partial D_r}{\partial \omega} \right|_{\omega_r} = \frac{2}{\omega_r} \quad (2.59)$$

и для уравнения (2.50) с помощью (2.55) получаем

$$\frac{\omega_i}{\omega_r} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left(\omega_r - \frac{n\Omega}{k_{\parallel}} \right). \quad (2.60)$$

Если f_{0+} имеет вид одnogорбовой функции от u , то ясно, что для частоты ω_r , определяемой уравнением (2.58), значение ω_i , определяемое уравнением (2.58), в соответствии с (2.60) не может быть положительным, если не выполнено условие $\omega_- > \Omega_+$. При этом величина $\omega_r F_{0+}(\omega_r/k_{\parallel})$ по необходимости должна быть отрицательной.

Если $\omega_- > \Omega_+$ и ω_r окажется близкой к Ω_+ или одной из низших гармоник Ω_+ , то удобно ввести полярный угол ϑ в пространстве скоростей, так что $\omega = v \sin \vartheta$ и $u = v \cos \vartheta$, где v — величина скорости. Тогда уравнение (2.54) принимает вид

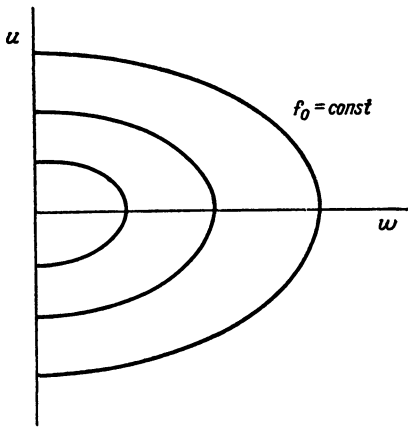
$$F_n(u) = \frac{8\pi^3 q^2}{k_{\parallel} k^2 m} \int_0^{\infty} d\omega \left(\omega_r \frac{\partial f_{0-}}{\partial \omega} - k_{\parallel} \frac{\partial f_{0-}}{\partial \vartheta} \right) J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega} \right). \quad (2.61)$$

Для монотонно убывающей по v^2 функции, подобно максвелловской функции, $df_0/d\vartheta = 0$ и $df_0/d\omega < 0$ поэтому $F_n(u) < 0$ для всех n . Из уравнения (2.61) ясно, что F_n может становиться положительным при некоторых значениях u , либо при двухгорбом распределении, $df_0/d\omega > 0$, либо в случае, когда условие $df_0/d\vartheta < 0$ существует в достаточно широкой области ω , так что при значительных по величине $J_n^2(k_\perp \omega / \Omega)$ интеграл становится положительным.

В качестве наглядного метода анализа, удобного для данного и последующих случаев, используем график контура линий постоянных значений $f_0(u, \omega)$. Например, для двухмаксвелловского распределения

$$f_{0+} \sim \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{\langle \omega^2 \rangle_+} + \frac{u^2}{\langle u^2 \rangle_+} \right) \right] \quad (2.62)$$

при $\langle \omega^2 \rangle_+ > \langle u^2 \rangle_+$. Такой график изображен на фиг. 11. Распределение, имеющее качественно такое же поведение, что и распределение на фиг. 11, имеет место при любых $u < 0$, $df_0/d\omega < 0$ и $df_0/d\vartheta < 0$. Поэтому при $\omega_r < n\Omega_+$ существует возможность для неустойчивости. Действительно, предполагая, что электроны



Фиг. 11. Контурсы постоянных значений функции $f_0(u, \omega)$, $T_\perp > T_\parallel$.

имеют изотропное максвелловское распределение с шириной $\langle v^2 \rangle_-$, и подставляя в уравнение (2.60) нормированную форму выражения (2.62), мы получаем для $\omega_r \approx n\Omega_+$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_i}{\omega_r} = & -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_-^2}{k^2 \langle u^2 \rangle_-^{1/2}} \left[\left(\frac{\langle u^2 \rangle_+}{\langle v^2 \rangle_-} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\alpha \omega_r^2}{2k_\parallel^2 \rho_L^2 \Omega_+^2} \right) + \right. \\ & + \frac{m_-}{m_+} \exp \left(-\frac{\langle \omega^2 \rangle_+ (\omega_r - n\Omega_+)^2}{2k_\parallel^2 \rho_L^2 \langle u^2 \rangle_+ \Omega_+^2} \right) \times \\ & \left. \times \left(1 - \frac{n\Omega_+}{\omega_r} \left(1 - \frac{\langle u^2 \rangle_+}{\langle \omega^2 \rangle_+} \right) \right) e^{-\rho_L^2 k_\perp^2} I_n(\rho_L^2 k_\perp^2) \right], \quad (2.63) \end{aligned}$$

где I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода, $\rho_L^2 = \langle \omega^2 \rangle_+ / \Omega_+^2$ и $\alpha = \langle \omega^2 \rangle_+ / \langle v^2 \rangle_-$. Если принять $\rho_L k_\perp$, k_\parallel / k_\perp , ω_r / Ω_+ и $\langle u^2 \rangle_+ / \langle \omega^2 \rangle_+$ порядка единицы, то это будет означать, что α должно быть велико в электронном члене для

того, чтобы стал существенным учет влияния ионного члена. При этом условии

$$\langle v^2 \rangle_- < \langle \omega^2 \rangle_+ \quad (2.64)$$

устанавливает определенный предел на электронную температуру.

Пока удовлетворяется уравнение (2.64) и пока $\langle u^2 \rangle_+ < \langle \omega^2 \rangle_+$, ω_i в соответствии с уравнением (2.63) положительно, если $\omega_r \leq n\Omega_+$. Для $\omega_r/\Omega_+ < n - 1/2$ уравнение (2.63) должно быть заменено ему подобным выражением с $n \rightarrow n - 1$ и при этом будет предсказывать неустойчивость, если

$$n - \frac{1}{2} < \frac{\omega_r}{\Omega_+} < n \left(1 - \frac{\langle u^2 \rangle_+}{\langle \omega^2 \rangle_+} \right). \quad (2.65)$$

Эта мода, в частности, является устойчивой для данного номера гармоники, если $\langle u^2 \rangle_+ \langle \omega^2 \rangle_+ > 1/(2n)$, хотя, если $n > 1$, то наименее гармоники будут неустойчивы. Таким образом, при фиксированной анизотропии увеличение плотности не вызывает неустойчивости для гармоник с номером выше некоторого максимального. Для $\langle u^2 \rangle_+ > \langle \omega^2 \rangle_+$ ω_i , определяемое уравнением (2.63), будет всегда отрицательным.

Холл, Хекротт и Кеммаш исследовали эти ионно-циклотронные электростатические неустойчивости гораздо более детально и в гораздо более широкой области изменения параметров. Они показали, что неустойчивым может быть целый ряд мод как из-за ион-электронных, так и ион-ионных связей в зависимости от деталей предполагаемой анизотропии в пространстве скоростей.

Другой тип распределения, который может приводить к неустойчивости в этом приближении, — это рассмотренное ранее распределение с конусом потерь. Контуры постоянных f_0 для функций распределения, которые равны нулю при $|u| > \beta\omega$, качественно имеют характер, показанный на фиг. 12, а и 12, б.

Фиг. 12, а представляет собой контурный график функции, которая для значений $|u| < \beta\omega$ близка к функции v^2 , но спадает быстро к нулю вблизи линии $|u| = \beta\omega$. Фиг. 12, б представляет собой график функции, которая стремится к нулю вдоль линии $|u| = \beta\omega$ гораздо более медленно.

При наличии соударений скорее можно ожидать распределения типа, изображенного на фиг. 12, б, чем распределения типа фиг. 12, а.

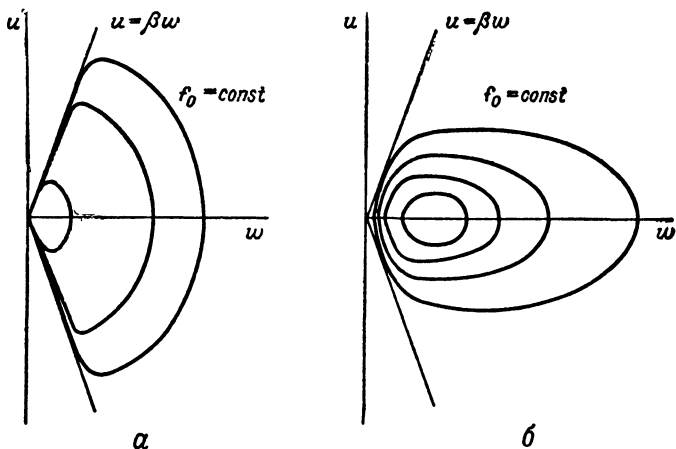
Для того чтобы привести пример, в котором такое распределение может приводить к неустойчивости, предположим в уравнении (2.61), что $\langle u^2 \rangle^{1/2} k_{\parallel} / \beta\Omega \gg n$. При этом можно использовать асимптотическую формулу для функции Бесселя:

$$J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} \omega}{\Omega} \right) \sim \frac{1}{\pi} \frac{\Omega}{k_{\perp} \omega}, \quad (2.66)$$

где в соответствии с (2.66) мы пренебрегаем быстро осциллирующими синусоидальными членами. Затем, интегрируя по частям уравнение (2.61), получаем

$$F_{n+} \left(\frac{\omega_r - n\Omega_+}{k_{\parallel}} \right) = \frac{8\pi^2 q_+^2}{k_{\parallel} k^2 m_+} \int_{|u|/\beta}^{\infty} d\omega \left(\frac{\omega_r}{\omega^2} f_{0+} - \frac{k_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f_{0+}}{\partial \vartheta} \right) \Big|_{u=(\omega_r - n\Omega_+)/k_{\parallel}}. \quad (2.67)$$

Для достаточно малых k_{\parallel} уравнение (2.67) дает $F_{n+} > 0$ для любого распределения, обладающего конусом потерь. Распределение типа, показанного на фиг. 12, а, имеет производную $\partial f_{0+}/\partial \vartheta$,



Фиг. 12. Примеры контуров постоянных значений функции $f_0(u, \omega)$ при наличии конуса потерь.

равную нулю везде, кроме области вблизи $u \approx \beta\omega$, где эта производная отрицательна. Таким образом, мы получаем $F_{n+} > 0$, если $\omega_r < n\Omega_+$ для немалых k_{\parallel} . Подобное рассмотрение возможно и для распределения типа, показанного на фиг. 12, б. Например, распределение

$$f_{0+} \sim (\beta\omega^2 - u^2) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{\langle \omega^2 \rangle_+} + \frac{u^2}{\langle u^2 \rangle_+} \right) \right] \quad (2.68)$$

при $\beta\omega > |u| = 0$ имеет производную $\partial f_{0+}/\partial \vartheta < 0$ для $u < 0$, и можно ожидать, что оно приводит к неустойчивости, если $\omega_r < n\Omega_+$.

2.8. Моды с $\langle u^2 \rangle_+ k_{\parallel}^2 \gg \Omega_+^2$

До сих пор, анализируя устойчивость при конечном k_{\parallel} , мы предполагали, что $\Omega_+^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_+$, поэтому при исследовании знака ионного вклада в уравнении (2.55) было достаточно ис-

следовать знак каждого члена F_{n+} в отдельности, поскольку сумма в уравнении (2.55) складывалась из суммы неперекрывающихся функций. Если это неравенство уже не удовлетворяется и меняется на обратное, то знак $D_i(\omega_r, \mathbf{k})$ из уравнения (2.55) будет определяться вкладами от нескольких различных функций F_{n+} . В этом случае становится полезным другое представление для $D_i(\omega_r, \mathbf{k})$.

Для этой цели удобно вернуться к форме уравнения (2.7) для $D(\omega, \mathbf{k})$ и использовать для ионного члена следующие тождества:

$$\frac{1}{\omega} = -i \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau}, \quad (2.69)$$

где $\text{Im } \omega > 0$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n^2(x) = J_0\left(2x \sin \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left[-i2x \sin \frac{\theta}{2} \cos \phi\right], \quad (2.70)$$

где ϕ — азимутальный угол в пространстве скоростей. В результате получим

$$\begin{aligned} D(\omega, k) = & 1 + \frac{1}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi e^2}{m_-} \int d^3v \left(\frac{n\Omega_-}{\omega} \frac{\partial f_{0-}}{\partial \omega} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{0-}}{\partial u} \right) \times \\ & \times \frac{J_n^2(k_{\perp} \omega / \Omega_-)}{\omega - k_{\parallel} u - n\Omega_-} - \frac{1}{k^2} \frac{4\pi q_+^2}{m_+} \int d^3v \frac{1}{\omega} \frac{\partial f_{0+}}{\partial \omega} + \\ & + \frac{i}{k^2} \frac{4\pi q_+^2}{m_+} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3v \left(\frac{\omega - k_{\parallel} u}{\omega} \frac{\partial f_{0+}}{\partial \omega} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{0+}}{\partial u} \right) \times \\ & \times \exp\left[i(\omega - k_{\parallel} u) \tau - 2i \frac{k_{\perp} \omega}{\Omega_+} \sin\left(\Omega_+ \frac{\tau}{2}\right) \cos \phi \right]. \quad (2.71) \end{aligned}$$

Проведем прежде всего интегрирование по u в ионном члене уравнения (2.71) и в качестве характерной формы возьмем максвелловскую функцию $f_{0+}(u)$. Тогда интегрирование дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \exp - \left(\frac{u^2}{2 \langle u^2 \rangle_+} + ik_{\parallel} u \tau \right) \sim \exp - \left(\frac{1}{2} k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle \tau^2 \right).$$

В случае $\Omega_+^2 < k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_+$ из-за быстрого убывания интеграла в (2.71) с ростом τ только часть τ -интегрирования при $\tau < \Omega_+^{-1}$ су-

щественна. Поэтому удобно разложить в ряд подынтегральное выражение при малых $\Omega_+\tau$ и получить в данном приближении

$$-i \int_0^{\infty} d\tau \exp \left[i(\omega - k_{\parallel}u) \tau - i2 \frac{k_{\perp}\omega}{\Omega_+} \sin \frac{\Omega_+\tau}{2} \cos \phi \right] \sim \\ \sim \left(1 - \frac{\Omega_+^2 k_{\perp} \omega \cos \phi}{4!} \frac{\partial^3}{\partial \omega^3} \right) \frac{1}{\omega - k_{\parallel}u - k_{\perp}\omega \cos \phi} + \dots \quad (2.72)$$

Пока $\Omega_-^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$, $\Omega_-^2 \gg k_{\perp}^2 \langle \omega^2 \rangle_-$ и $\omega \ll \Omega_-$, мы можем для электронов делать разложение по малому ларморовскому радиусу, как это делалось выше. Сохраняя ω и $k_{\parallel} \langle u^2 \rangle_-^{1/2}$ одного и того же порядка и используя описанные выше приближения для ионов и электронов, мы получаем для уравнения (2.71) в нулевом порядке по Ω_+ выражение

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_-^2}{\Omega_-^2} + \frac{4\pi e^2}{m_- k^2} \int d^3v \frac{k_{\parallel} (\partial f_{0-} / \partial u)}{\omega - k_{\parallel}u} + \\ + \frac{4\pi q_+^2}{m_+ k^2} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot (\partial f_{0+} / \partial \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (2.73)$$

В этом приближении ионы движутся независимо от магнитного поля, в то время как электроны вынуждены двигаться вдоль силовых линий.

Для слабой неустойчивости ($\omega_i \ll \omega_r$) функция $D(\omega, \mathbf{k})$ может быть разложена на действительную и мнимую части, что приводит к уравнениям (2.50) и (2.51). Знак D_i и, следовательно, ω_i будут определяться знаком величины

$$\frac{\partial}{\partial (\omega_r/k)} \int d^3v f_{0+} \delta \left(\frac{\omega_r}{k} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v} \right) \quad (2.74)$$

в предположении, что электронное затухание пренебрежимо мало.

Для того чтобы отчетливо представить себе, когда выражение (2.74) может быть положительно, полезными оказываются введенные ранее графики контуров постоянных значений $f_0(u, \omega)$. Рассмотрим поверхность постоянного значения f_0 , образованную путем вращения $u - \omega$ -графика вокруг оси u . Интегрирование f_0 в уравнении (2.74) осуществляется по плоскости, перпендикулярной к вектору \mathbf{k} на расстоянии ω_r/k от начала координат. Неустойчивость становится возможной в случае, если этот интеграл возрастает с увеличением расстояния от начала координат. Поверхности, образованные для случая двухмаксвелловского распределения (см. фиг. 11), представляют сложенные друг в друга сфериды и для данной области параметров не будут давать неустойчивых корней. По-

верхности, образованные для распределения типа конуса потерь (см. фиг. 12), образуют вложенные друг в друга тороиды. Для вектора \vec{k} , лежащего в конусе потерь, выражение (2.74) отрицательно; однако, если вектор \vec{k} достаточно наклонен к оси u и если $\omega_r/k \leq \langle \omega^2 \rangle_+^{1/2}$, выражение (2.74) может становиться положительным. Если выражение (2.74) положительно для некоторого ω_r/k , то для существования неустойчивого корня требуется, чтобы ω_r/k также было корнем уравнения (2.50).

Пока $k_{\parallel}^2/k^2 \gg 0 (m_-/m_+)$, действительная часть частоты снова будет определяться уравнением (2.58). В этом случае фазовая скорость порядка ионной тепловой скорости возможна, если только $k \sim \omega_- / \langle \omega^2 \rangle_+^{1/2}$. Дифференцируя уравнение (2.73), мы предполагали, что $\Omega_-^2 / \langle u^2 \rangle_- \gg k_{\parallel}^2 \gg \Omega_+^2 / \langle u^2 \rangle_+$, поэтому приближения, использованные при получении положительных ω_i для распределения типа конуса потерь, когда ω_r определяется уравнением (2.58), остаются справедливыми при условии, если $\Omega_+^2 \ll \omega_r^2 (\langle u^2 \rangle_+ / \langle \omega^2 \rangle_+) \ll \Omega_-^2 (m_-/m_+)$. Для частот, более высоких, чем эта, необходимо учитывать члены с конечным ларморовским радиусом электронов. Заметим, что предположение об отсутствии затухания Ландау на электронах подразумевает условие $\langle \omega^2 \rangle_+^{1/2} > \langle u^2 \rangle_-^{1/2}$, накладывающее жесткое ограничение на электронную температуру.

Когда k_{\parallel}^2/k^2 становится порядка m_-/m_+ , то действительная часть частоты не может уже определяться только электронами, поскольку в уравнении (2.73) электронный член того же порядка, что и ионный член. Например, если $\omega_r/k_{\parallel} \gg \langle u^2 \rangle_-^{1/2}$, то мы получаем дисперсионное соотношение

$$1 + \frac{\omega_-^2}{\Omega_-^2} = \frac{\omega_-^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} + \frac{4\pi q_+^2}{m_+ k^2} \int d^3v \frac{k_{\perp} \cos \phi \partial f_{0+} / \partial \omega}{\omega - k_{\perp} \omega \cos \phi}. \quad (2.75)$$

Для распределения типа, показанного на фиг. 12, можно ожидать, очевидно, что выражение (2.74) будет положительным, если \vec{k} почти перпендикулярно оси u , а $\omega_r < k \langle \omega^2 \rangle_+^{1/2}$. Точное решение уравнения (2.75) должно быть получено численно, поскольку $\omega_i \approx 0 (\omega_r) \approx \omega_+$, и разложение при малом ω_i более несправедливо. Условие, при котором можно пренебречь затуханием Ландау, теперь принимает вид $m_+ \langle \omega^2 \rangle_+ \gg m_- \langle u^2 \rangle_-$, и это условие легче удовлетворить, чем в указанном выше случае, когда ω_r определялось только движением электронов.

Розенблют и Пост изучали численными методами зависимость корня уравнения (2.75) от наличия максимума на функции распределения f_{0+} по энергии и в полярном угле. Они нашли, что распределение с достаточно большим пиком может

становиться крайне неустойчивым. Холл и Хекротт рассмотрели дополнительно случай неустойчивости, появляющейся в соответствии с уравнением (2.73), когда одновременно существуют холодная и горячая компоненты одного и того же сорта частиц. Они нашли, что смесь горячих и холодных ионов (модель, обладающая конусом потерь) может быть неустойчивой при требовании очень малых значений k_{\parallel} , как это было в рассмотренном выше примере.

2.9. Преобразование, удобное для численных расчетов

До сих пор мы повсюду предполагали, что $\omega_i \ll \omega_r$, поскольку хотели исследовать вопрос об устойчивости аналитически. В большинстве случаев, когда это предположение не выполняется, аналитический способ нахождения корней дисперсионного соотношения либо связан с затруднениями, либо вообще невозможен. В этом случае удобнее использовать численную технику расчетов. Когда это необходимо, следует записать точное дисперсионное соотношение через интегральный функционал самой функции $D(\omega, \mathbf{k})$. Имея это в виду, заметим, что если $\omega(\mathbf{k})$ является простым корнем дисперсионного соотношения

$$D[\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k}] = 0, \quad (2.76)$$

то

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c dZ \frac{Z [\partial D(Z, \mathbf{k}) / \partial Z]}{D(Z, \mathbf{k})}. \quad (2.77)$$

Здесь c — замкнутый контур в той области Z -плоскости, где D является аналитическим контуром, охватывающим по часовой стрелке точку $Z = \omega(\mathbf{k})$, причем в этой области не существует других корней уравнения (2.76). Поскольку для определения $D(\omega, \mathbf{k})$ в соответствии с уравнением (2.7) используется контур Ландау, то можно показать, что если ω лежит в верхней полуплоскости, то

$$\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \omega} \Big|_{|\omega| \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \left(\frac{1}{\omega^3} \right).$$

Тогда, если $\omega(\mathbf{k})$ является наиболее высоко расположенным корнем уравнения (2.76) в комплексной ω -плоскости, то уравнение может быть записано в виде

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} dZ \frac{Z (\partial D / \partial Z)}{D(Z, \mathbf{k})}, \quad (2.78)$$

где β лежит ниже корня $\omega(\mathbf{k})$, но выше следующего наивысшего корня в ω -плоскости. Пока $D(Z, \mathbf{k})$ есть аналитическая функция на действительной оси и существует только один корень в верхней полуплоскости, β может быть взято равным нулю.

Решение уравнения (2.78) сводится непосредственно к задаче численного интегрирования известной функции. Если число неустойчивых корней не известно, то уравнение (2.78) должно вычисляться для ряда значений β , начиная от больших положительных и до нуля; значение интеграла будет меняться для последующих значений β только в том случае, если охватывается еще один корень. Заметим, кстати, что вычисление интеграла в уравнении (2.78) для двух значений β при одном корне является полезной проверкой точности метода численного интегрирования.

2.10. Указания к литературе

Анализ устойчивости для двух моделей неустойчивых распределений в случае распространения волн в направлении, перпендикулярном магнитному полю, взят из работ Дори, Геста и Харриса [10].

Диаграмма, использованная для описания корней дисперсионного соотношения, взята из работы Крауфорда [11], которая в свою очередь содержит ряд литературных ссылок по этому вопросу.

Описание экспериментов Alouette приведено в работе Локвуда [12]. Теоретическое объяснение этих резонансов было дано Староком [13] и Дагерти и Монаганом [14].

Продольные неустойчивости из-за анизотропного распределения по скоростям впервые были рассмотрены Харрисом [15].

Гораздо более подробный анализ этих неустойчивостей, чем был дан в нашем обзоре, содержится в работе Холла, Хекротта и Кеммаш [16].

Численное исследование неустойчивостей, связанных с распределением типа конуса потерь, было выполнено Гестом и Дори [17].

Другими работами, представляющими интерес в связи с неустойчивостями анизотропного распределения по скоростям, являются работы Шима и Холла [18] и Холла и Хекротта [19].

Неустойчивость распределения типа конуса потерь при более высоких плотностях обсуждалась Розенблютом и Постом [20].

Преобразование, удобное для вычисления корней дисперсионного соотношения численным методом, взято из работы Мак-Куна [21].

3. СЛУЧАЙ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Решение методом возмущений

Рассмотрим класс медленных движений, эффективная частота которых много меньше, чем наименьшая ионная циклотронная частота. Такое неравенство предполагает возможность поиска решения задачи путем формального разложения в ряд по степеням обратной величины этой циклотронной частоты. Ограничимся для простоты случаем безграничной однородной плазмы, эффективная температура которой настолько низка, что релятивистскими эффектами можно пренебречь. Кроме того, не решая полную задачу с начальными условиями, мы ограничимся только нахождением дисперсионного соотношения. Для этой цели достаточно искать решение в случае, когда все малые величины имеют вид $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ и когда все величины определены при $\text{Im } \omega > 0$ или как аналитические продолжения самих себя. Используя предлагаемую форму и ограничиваясь первым порядком по магнитному полю, мы можем записать уравнения (1.34) — (1.36) в виде

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}, \quad (3.1)$$

$$c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}) + \omega^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = -4\pi i \omega \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) f_{\mathbf{k}, \omega} + \frac{q}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\mathbf{k}, \omega} = \\ = -\frac{q}{m} [\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} + \omega^{-1} \mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega})] \nabla_{\mathbf{v}} f_0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega} = \sum q \int d^3v \mathbf{v} f_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (3.4)$$

Как и прежде, наша задача будет состоять в нахождении решения уравнения (3.3) для функции $f_{\mathbf{k}, \omega}$ через $\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$ и использовании этого решения для того, чтобы выразить $\mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega}$ как линейную функцию $\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$. Искомым дисперсионным соотношением будет условие, определяющее тот факт, что результирующее однородное уравнение, являющееся следствием уравнения (3.2), имеет решение.

Формальное разложение в ряд облегчается использованием цилиндрической системы координат в соответствии с уравнением (1.44). При этом уравнение (3.3) записывается в виде

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}, \omega}}{\partial \phi} = (A + B \cos \phi) f_{\mathbf{k}, \omega} + C + D \cos \phi + E \sin \phi, \quad (3.5)$$

где не зависящие от ϕ коэффициенты равны

$$\begin{aligned}
 A &= i \frac{k_{\parallel} u - \omega}{\Omega}, \\
 B &= \frac{ik_{\perp} \omega}{\Omega}, \\
 C &= \frac{q}{m\Omega} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \mathbf{e}_3 \frac{\partial f_0}{\partial u}, \\
 D &= \frac{q}{m\Omega} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \left\{ \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \omega} - \frac{k_{\parallel}}{\omega} F \right) + \mathbf{e}_3 \frac{k_{\perp}}{\omega} F \right\}, \\
 E &= \frac{q}{m\Omega} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \omega} - \frac{k_{\parallel}}{\omega} F \right), \\
 F &= u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} - \omega \frac{\partial f_0}{\partial u}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Кроме того, мы ввели обозначение $\mathbf{k} = k_{\parallel} \mathbf{e}_3 + k_{\perp} \mathbf{e}_1$. Если при этом мы запишем формально разложение по степеням ω/Ω

$$f_{\mathbf{k}, \omega} = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots, \tag{3.7}$$

подставим это выражение в уравнение (3.5) и приравняем члены одинакового порядка, то придем к следующему требованию при $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \phi} = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial \phi} = (A + B \cos \phi) f^{(n)} + (C + D \cos \phi + E \sin \phi) \delta_{n,0}. \tag{3.9}$$

Поскольку функция $f_{\mathbf{k}, \omega}$ периодична по ϕ с периодом 2π , то же самое условие должно выполняться для каждого из $f^{(n)}$. Проинтегрировав уравнение (3.9) по одному периоду, мы получим в результате

$$0 = A \int_0^{2\pi} d\phi f^{(n)} + B \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi f^{(n)} + 2\pi \delta_{n,0} C. \tag{3.10}$$

Из уравнения (3.10) непосредственно следует, что

$$f^{(0)} = -\frac{C}{A}, \tag{3.11}$$

а уравнение (3.9) для $n = 0$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \phi} = B \cos \phi f^{(0)} + D \cos \phi + E \sin \phi. \tag{3.12}$$

После интегрирования, используя (3.11), получаем

$$f^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f^{(1)} + \sin \phi \frac{AD - CB}{A} - \cos \phi E. \tag{3.13}$$

Интеграл в правой части (3.13) находим из уравнения (3.10) при $n = 1$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f^{(1)} = -\frac{B}{A} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi f^{(1)} = \frac{EB}{2A}. \quad (3.14)$$

Уравнение для $f^{(2)}$ теперь в соответствии с (3.9) может быть найдено следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \phi} &= (A + B \cos \phi) \left(\frac{BE}{2A} + \sin \phi \frac{AD - CB}{A} - \cos \phi E \right) = \\ &= \sin \phi (AD - CB) + \cos \phi \left(\frac{B^2 E}{2A} - AE \right) + \\ &\quad + \sin 2\phi \frac{B(AD - CB)}{2A} - \cos 2\phi \frac{BE}{2}, \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f^{(2)} + \sin \phi \frac{E(1/2 B^2 - A^2)}{A} + \cos \phi (CB - AD) - \\ &\quad - \cos 2\phi \frac{B(AD - CB)}{4A} - \sin 2\phi \frac{BE}{4}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Из уравнения (3.10) видно, однако, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f^{(2)} = -\frac{B}{A} \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi f^{(2)} = -\frac{B}{2A} (CB - AD), \quad (3.17)$$

Объединяя эти результаты, мы можем записать с точностью до второго порядка по ω/Ω :

$$\begin{aligned} f_{k, \omega} &= -\frac{C}{A} + \frac{EB}{2A} - \frac{B(CB - AD)}{2A} + \\ &+ \sin \phi \left[\frac{AD - CB}{A} + \frac{E(1/2 B^2 - A^2)}{A} \right] + \cos \phi [-E + CB - AD] - \\ &\quad - \sin 2\phi \frac{BE}{4} + \cos 2\phi \left[\frac{B^2 C}{4A} - \frac{BD}{4} \right]. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Но

$$\mathbf{J}_{k, \omega} = \sum q \int d^3 v f_{k, \omega} [\mathbf{e}_1 \omega \cos \phi + \mathbf{e}_2 \omega \sin \phi + \mathbf{e}_3 u], \quad (3.19)$$

откуда, учитывая условия равновесия (1.52) и (1.53) и используя уравнение (3.18), получаем после интегрирования по ϕ

и очевидного интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \sum \frac{q^2}{m} \int d^3v \left\{ \mathbf{e}_3 \left[\frac{\omega}{k_{\parallel}} \frac{i \partial f_0 / \partial u}{k_{\parallel} u - \omega} \left(1 - \frac{k_{\perp}^2 \omega^2}{2\Omega^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{ik_{\perp}^2 (1/2 \omega^2 - u^2) f_0}{\omega \Omega^2} \right] + \mathbf{e}_2 \frac{k_{\perp} \omega^2}{2\Omega} \frac{\partial f_0 / \partial u}{k_{\parallel} u - \omega} + \right. \\ \left. + \mathbf{e}_1 \frac{ik_{\perp} k_{\parallel}}{\omega \Omega^2} \left(u^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) f_0 \right\}, \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \sum \frac{q^2}{m} \int d^3v \left\{ -\mathbf{e}_3 \frac{k_{\perp} \omega^2}{2\Omega} \frac{\partial f_0 / \partial u}{k_{\parallel} u - \omega} + \right. \\ \left. + i \mathbf{e}_2 \left[\frac{k_{\perp}^2 k_{\parallel} \omega^4}{4\omega \Omega^2} \frac{\partial f_0 / \partial u}{k_{\parallel} u - \omega} + \frac{-\omega^2 - k_{\parallel}^2 u^2 + (2k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) 1/2 \omega^2}{\omega \Omega^2} f_0 \right] \right\}, \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{k}, \omega} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \sum \frac{q^2}{m} \int d^3v i f_0 \left\{ \mathbf{e}_1 \frac{k_{\parallel}^2 (1/2 \omega^2 - u^2) - \omega^2}{\Omega^2 \omega} + \right. \\ \left. + \mathbf{e}_3 \frac{k_{\parallel} k_{\perp} (u^2 - 1/2 \omega^2)}{\Omega^2 \omega} \right\}. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Заметим, что если мы введем определения

$$\rho_{\parallel} = \sum \int d^3v m u^2 f_0, \quad (3.23)$$

$$\rho_{\perp} = \sum \int d^3v m \omega^2 f_0, \quad (3.24)$$

то некоторые члены в уравнениях (3.20) — (3.22) могут быть выражены через ρ_{\parallel} и ρ_{\perp} , поскольку для данного сорта частиц $q^2/m\Omega^2 = mc^2/B_0^2$.

Из уравнений (3.20) и (3.22) мы можем получить элементы тензора \mathbf{Q} , введенного в гл. 1.

$$Q_{11} = \sum \frac{4\pi q^2}{m\Omega^2} \int d^3v f_0 \left[k_{\parallel}^2 \left(\frac{1}{2} \omega^2 - u^2 \right) - \omega^2 \right], \quad (3.25)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 0, \quad (3.26)$$

$$Q_{13} = Q_{31} = -k_{\parallel} k_{\perp} \sum \frac{4\pi q^2}{m\Omega^2} \int d^3v f_0 \left(\frac{1}{2} \omega^2 - u^2 \right), \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} Q_{22} = \sum \frac{4\pi q^2}{m\Omega^2} \int d^3v \left\{ \frac{k_{\perp}^2 k_{\parallel} \omega^4}{4(k_{\parallel} u - \omega)} + \right. \\ \left. + \left[(2k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) \frac{1}{2} \omega^2 - \omega^2 - k_{\parallel}^2 u^2 \right] f_0 \right\}, \quad (3.28) \end{aligned}$$

$$Q_{23} = -Q_{32} = i \frac{\omega k_{\perp}}{2} \sum \frac{4\pi q^2}{m\Omega} \int d^3v \omega^2 \frac{\partial f_0 / \partial u}{k_{\parallel} u - \omega}, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} Q_{33} = \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int d^3v \left[\frac{\omega^2}{k_{\parallel}} \frac{\partial f_0 / \partial u}{k_{\parallel} u - \omega} \left(1 - \frac{k_{\perp}^2 \omega^2}{2\Omega^2} \right) + \frac{k_{\perp}^2 (1/2 \omega^2 - u^2)}{\Omega^2} f_0 \right]. \quad (3.30) \end{aligned}$$

Для того чтобы сохранить в последующем учет разложения по обратным величинам Ω , удобно ввести для Q_{ij} верхний индекс, обозначающий порядок этого малого параметра. Как было показано выше, все элементы Q_{ij} , за исключением Q_{33} , имеют члены только одного порядка, например $Q_{11} \rightarrow Q_{11}^{(2)}$. Представляющий исключение элемент Q_{33} имеет члены двух порядков так, что мы можем обозначить $Q_{33} = Q_{33}^{(0)} + Q_{33}^{(2)}$, где $Q_{33}^{(0)}$ и $Q_{33}^{(2)}$ получаются из уравнения (3.30).

В этих обозначениях искомое дисперсионное соотношение принимает вид

$$(c^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2 + Q_{11}^{(2)})[(c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{22}^{(2)})(c^2 k_{\perp}^2 - \omega^2 + Q_{33}^{(2)} + Q_{33}^{(0)}) - Q_{23}^{(1)} Q_{32}^{(1)}] - (k_{\parallel} k_{\perp} c^2 - Q_{13}^{(2)})^2 (c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{22}^{(2)}) = 0. \quad (3.31)$$

3.2. Анализ дисперсионного соотношения

Прежде всего будем искать корни уравнения (3.31) в предположении $c^2 k^2 \gg 0 (\Omega^{-2})$. Формально это есть предел $|\mathbf{V}_0| \rightarrow \infty$, а в этом пределе уравнение (3.31) принимает вид

$$[(c^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2)(c^2 k_{\perp}^2 - \omega^2 + Q_{33}^{(0)}) - k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2 c^4] (c^2 k^2 - \omega^2) = 0. \quad (3.32)$$

Простой корень уравнения $\omega^2 = c^2 k^2$ соответствует распространению волны с электрическим вектором, перпендикулярным \mathbf{k} и \mathbf{V}_0 . Так как в пределе $\mathbf{V}_0 \rightarrow \infty$ все частицы вынуждены двигаться вдоль силовых линий, их присутствие не влияет на эту моду. Другие корни уравнения (3.32) соответствуют электрическому вектору, лежащему в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{V}_0 , и в общем случае содержат связь между продольными и поперечными компонентами. Конкретные свойства этих корней зависят от формы элемента $Q_{33}^{(0)}$.

Прежде всего исследуем $Q_{33}^{(0)}$ в пределе $(\omega/k_{\parallel})^2 \gg \langle u^2 \rangle_{-}, \langle u^2 \rangle_{+}$; в этом случае движением ионов можно пренебречь, и корни уравнения (3.32) принимают вид

$$\omega^2 = \frac{1}{2} [c^2 k^2 + \omega_{-}^2 \pm \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_{-}^2)^2 - 4k_{\parallel}^2 \omega_{-}^2 c^2}]. \quad (3.33)$$

Для распространения вдоль \mathbf{V}_0 мы получаем корни

$$\omega^2 = \omega_{-}^2, \quad c^2 k^2, \quad (3.34)$$

соответствующие продольным плазменным колебаниям и второй поперечной моде. Для распространения в направлении, перпендикулярном \mathbf{V}_0 , мы получаем

$$\omega^2 = 0, \quad c^2 k^2 + \omega_{-}^2. \quad (3.35)$$

Нулевая частота продольной моды вновь отражает для частиц факт запрета на движение поперек магнитного поля.

Затем рассмотрим уравнение (3.32) при $\langle u^2 \rangle_- \gg (\omega/k_{\parallel})^2 \gg \langle u^2 \rangle_+$, поскольку в этом случае можно воспользоваться разложением вследствие высокой фазовой скорости волны для ионов и низкой фазовой скорости для электронов. Мы будем систематически пренебрегать вкладом $\pi i \delta(\omega - k_{\parallel} u)$ в характеристические интегралы. Заметим, что предел, до которого мы можем считать k_{\parallel} малым в полученных нами конечных выражениях и, таким образом, рассматривать распространение как перпендикулярное, зависит от величины электронной температуры $\langle u^2 \rangle_-$. Для $Q_{33}^{(0)}$ получаем приближенное выражение

$$Q_{33}^{(0)} \approx \omega_+^2 - \frac{\omega_-^2 \omega_-^2}{k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-}. \quad (3.36)$$

Откуда в соответствии с уравнением (3.32) получаем выражение для ω^2

$$\omega^2 = \frac{k_{\parallel}^2}{2(k_{\parallel}^2 + k_{D-}^2)} \{c^2(k^2 + k_{D-}^2) + \omega_+^2 \pm \sqrt{[\omega_+^2 + c^2(k^2 + k_{D-}^2)]^2 - 4c^2\omega_+^2(k_{\parallel}^2 + k_{D-}^2)}\}, \quad (3.37)$$

где $k_{D-}^2 \equiv \omega_-^2 / \langle u^2 \rangle_-$.

Для случая распространения вдоль \mathbf{V}_0 мы получаем два корня

$$\omega^2 = c^2 k^2, \quad \omega_+^2 \frac{k_{\parallel}^2}{(k_{\parallel}^2 + k_{D-}^2)} \quad (3.38)$$

соответственно для поперечной электромагнитной и продольной ионно-звуковой мод. Мы не можем искать развязки мод в уравнении (3.37), полагая $k_{\parallel} \rightarrow 0$, поскольку предел применимости уравнения (3.37) ограничивается требованием $\omega^2 \ll k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$. Уменьшение k_{\parallel} за область применения уравнения (3.37) будет приводить к сильному затуханию Ландау на электронах до тех пор, пока k_{\parallel} не уменьшится ниже значения, при котором $\omega^2 \gg k_{\parallel}^2 \langle u^2 \rangle_-$. В этой области становятся применимыми результаты уравнения (3.35).

Простое выражение для $Q_{33}^{(0)}$ можно получить также в области $\langle u^2 \rangle_-$, $\langle u^2 \rangle_+ \gg (\omega^2/k_{\parallel}^2)$. В этом случае

$$Q_{33}^{(0)} \approx -\frac{k_D^2}{k_{\parallel}^2} \omega^2, \quad (3.39)$$

где $k_D^2 \equiv \sum (4\pi q^2/m \langle u^2 \rangle) \int d^3v f_0$, и необращающийся в нуль корень уравнения (3.32) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{k_{\parallel}^2}{k_D^2 + k_{\parallel}^2} c^2 (k^2 + k_D^2). \quad (3.40)$$

Уравнение (3.40) демонстрирует тот факт, что экранировка, вызываемая ионами и электронами, движущимися вдоль магнитных силовых линий, сильно влияет на волны с $k_{\parallel}^2 \leq k_D^2$.

Вернемся теперь к уравнению (3.31) и будем искать корни для случая $k^2 c^2 = 0 (\Omega^{-2})$. Поскольку это условие требует, чтобы $Q_{33}^{(0)} \gg c^2 k^2$, последнее произведение в уравнении (3.31) может быть отброшено как малое и корни уравнения определяются выражениями

$$c^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2 + Q_{11}^{(2)} = 0, \quad (3.41)$$

$$(c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{22}^{(2)}) (Q_{33}^{(0)} - \omega^2) - Q_{32}^{(1)} Q_{23}^{(1)} = 0. \quad (3.42)$$

При $Q_{33}^{(0)} \gg \omega^2$ уравнение (3.42) представляет собой результат, который мог бы быть получен из требования зарядовой нейтральности в пренебрежении уравнением Пуассона, как в известной процедуре рассмотрения альфвеновских волн в магнитной гидродинамике.

Используя уравнение (3.25), можно непосредственно получить решение уравнения (3.41):

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 \left(V_A^2 + \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} \right), \quad (3.43)$$

где

$$V_A^2 \equiv \frac{4\pi B_0^2}{\rho}, \quad \rho \equiv \sum m \int d^3v f_0. \quad (3.44)$$

Здесь и в последующем мы предполагаем $c^2 \gg V_A^2$. Это известный результат для поперечной альфвеновской волны, распространяющейся через плазму с анизотропным давлением при поляризации электрического поля, в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой расположены векторы \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 .

Для вычисления корней уравнения (3.42) необходимо воспользоваться выражением для $Q_{33}^{(0)}$, определяемым первым членом уравнения (3.30), и выражениями $Q_{22}^{(2)}$ и $Q_{23}^{(1)}$, определяемыми соответственно уравнениями (3.28) и (3.29). Из-за резонансов, возникающих в знаменателях этих выражений, мы будем вычислять корни уравнения (3.42) при тех же отношениях продольной фазовой скорости к тепловым скоростям, что и при нахождении корней уравнения (3.32), как это делалось выше,

Действительно, только в этих областях фазовых скоростей можно ожидать, что затухание Ландау будет мало и, таким образом, волны будут существовать.

Прежде всего рассмотрим область $(\omega/k_{\parallel})^2 \gg \langle u^2 \rangle_-$, $\langle u^2 \rangle_+$, в которой

$$Q_{33}^{(0)} \approx \omega_-^2, \quad (3.45)$$

$$Q_{22}^{(2)} \approx \frac{c^2}{V_A^2} \left(2k_{\perp}^2 \frac{p_{\perp}}{\rho} + k_{\parallel}^2 \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} - \omega^2 \right), \quad (3.46)$$

$$Q_{23}^{(1)} \approx i \frac{c}{V_A} \frac{k_{\perp} k_{\parallel}}{\omega} \omega_+ \frac{\langle \omega^2 \rangle_-}{2}. \quad (3.47)$$

Последний член в уравнении (3.42) должен быть, по-видимому, порядка $k_{\parallel}^2 \langle \omega^2 \rangle / \omega^2$ по отношению к остальным членам, и им можно пренебречь, получая для корня следующее выражение:

$$\omega^2 = k^2 V_A^2 + 2k_{\perp}^2 \frac{p_{\perp}}{\rho} + k_{\parallel}^2 \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho}. \quad (3.48)$$

Далее рассмотрим область $\langle u^2 \rangle_- \gg (\omega/k_{\parallel})^2 \gg \langle u^2 \rangle_+$, в которой

$$Q_{33}^{(0)} \approx \omega_+^2 - \omega^2 \frac{k_{D-}^2}{k_{\parallel}^2}, \quad (3.49)$$

$$Q_{22}^{(2)} \approx \frac{c^2}{V_A^2} \left(2k_{\perp}^2 \frac{p_{\perp}}{\rho} + k_{\parallel}^2 \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} - \omega^2 - k_{\perp}^2 \frac{m_- \langle \omega^4 \rangle_-}{4m_+ \langle u^2 \rangle_-} \right), \quad (3.50)$$

$$Q_{23}^{(2)} \approx +i \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \frac{\omega c \omega_+}{V_A} \frac{\langle {}^{1/2} \omega^2 \rangle_-}{\langle u^2 \rangle_-}. \quad (3.51)$$

Корни уравнения (3.42) в этом случае являются корнями биквадратного уравнения

$$\left(k^2 V_A^2 + 2k_{\perp}^2 \frac{p_{\perp}}{\rho} + k_{\parallel}^2 \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} - \omega^2 \left(1 + \frac{V_A^2}{c^2} \right) - k_{\perp}^2 \frac{m_- \langle \omega^4 \rangle_-}{4m_+ \langle u^2 \rangle_-} \right) \times \\ \times \left(\frac{k_{\parallel}^2 \omega_+^2}{k_{D-}^2} - \omega^2 - \frac{k_{\parallel}^2 \omega^2}{k_{D-}^2} \right) - \omega^2 \omega_+^2 \frac{k_{\perp}^2}{k_{D-}^2} \left(\frac{\langle {}^{1/2} \omega^2 \rangle_-}{\langle u^2 \rangle_-} \right)^2 = 0. \quad (3.52)$$

Эти корни соответствуют двум модам, которые имеют электрические векторы в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{V}_0 , и описывают связь поперечной альфвеновской волны с продольными ионно-звуковыми волнами.

Более подробное обсуждение ионно-звуковых волн в отсутствие магнитного поля содержится в обзоре II, разд. 7. Если в

уравнении (3.52) $k_{\perp} = 0$, то альфвеновская и ионно-звуковая волны оказываются незацепленными и распадаются на волну

$$\omega^2 = \frac{k_{\parallel}^2 \omega_+^2}{k_{\parallel}^2 + k_D^2} \quad (3.53)$$

и вторую альфвеновскую волну, идентичную волне (3.43). Заметим, что предположения, приведшие к уравнению (3.42), требуют, чтобы $k^2 \ll c^{-2} \omega_+^2$.

Рассмотрим, наконец, область $(\omega/k_{\parallel})^2 \ll \langle u^2 \rangle_-, \langle u^2 \rangle_+$, в которой

$$Q_{33}^{(0)} \approx -\omega^2 \frac{k_D^2}{k_{\parallel}^2}, \quad (3.54)$$

$$Q_{22}^{(2)} \approx \frac{c^2}{V_A^2} \left(2k_{\perp}^2 \frac{p_{\perp}}{\rho} + k_{\parallel}^2 \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} - \omega^2 + k_{\perp}^2 \sum \frac{m_- \langle \omega^4 \rangle}{4m_+ \langle u^2 \rangle} \right), \quad (3.55)$$

$$Q_{23}^{(2)} \approx -i \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \frac{\omega \omega_+ c}{V_A} \left(\frac{1/2 \langle \omega^2 \rangle_+}{\langle u^2 \rangle_+} - \frac{1/2 \langle \omega^2 \rangle_-}{\langle u^2 \rangle_-} \right). \quad (3.56)$$

Из уравнения (3.42) получаем единственный корень:

$$\omega^2 = k^2 V_A^2 + 2k_{\perp}^2 \frac{p_{\perp}}{\rho} + k_{\parallel}^2 \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{\rho} - k_{\perp}^2 \sum \frac{m_- \langle \omega^4 \rangle_-}{4m_+ \langle u^2 \rangle_-} + \frac{k_{\perp}^2 \omega_+^2}{k_{\parallel}^2 + k_D^2} \left(\frac{1/2 \langle \omega^2 \rangle_+}{\langle u^2 \rangle_+} - \frac{1/2 \langle \omega^2 \rangle_-}{\langle u^2 \rangle_-} \right). \quad (3.57)$$

Снова для распространения вдоль магнитного поля получаем известный результат, описывающий альфвеновскую волну в случае неизотропных давлений.

Существенно напомнить, что уравнения (3.41) и (3.42) и, следовательно, уравнения (3.43) и (3.57) справедливы, если только $c^2 k^2 \ll Q_{33}^{(0)}$; в противном случае имеет место уравнение (3.22) и его следствия — уравнения (3.33) — (3.40). Для трех обсуждаемых областей фазовых скоростей данное неравенство принимает вид

$$c^2 k^2 \ll \omega_-^2, \quad \text{если} \quad \left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} \right)^2 \gg \langle u^2 \rangle_-, \langle u^2 \rangle_+, \quad (3.58)$$

$$c^2 k^2 \ll \omega_+^2, \quad \text{если} \quad \langle u^2 \rangle_- \gg \left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} \right)^2 \gg \langle u^2 \rangle_+, \quad (3.59)$$

$$c^2 k^2 \ll \omega^2 \frac{k_D^2}{k_{\parallel}^2}, \quad \text{если} \quad \langle u^2 \rangle_-, \langle u^2 \rangle_+ \gg \left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} \right)^2. \quad (3.60)$$

Мы не будем вычислять затухание Ландау для данного ряда мод. Законность такой процедуры может быть рассмотрена для

случая слабого затухания путем приравнивания действительных и мнимых частей уравнения (3.31), как это обсуждалось в разд. 2.7. Мнимая часть уравнения (3.31) получается при учете вклада δ -функций в элементы Q_{ij} , определяемые уравнениями (3.25) — (3.30). Результирующее затухание будет содержать вклады от $\partial f_0 / \partial u |_{u=\omega/k_{\parallel}}$ как для ионов, так и для электронов.

Требование, чтобы оно было мало, приводит нас в области параметров (3.58) — (3.60). Волны, имеющие продольные компоненты фазовой скорости, отличные от значений, определяемых уравнениями (3.58) — (3.60), будут сильно затухать вследствие движения частиц вдоль силовых линий.

3.3. Указания к литературе

Использованная процедура разложения в пределе сильного магнитного поля обсуждается довольно подробно для более общей задачи в работе Калсруда [22].

Обсуждение гидромагнитных волн с точки зрения кинетической теории содержится в работе Степанова [23].

Ионные волны в плазме при наличии магнитного поля обсуждаются Степановым в работе [24].

Дополнительные сведения можно найти в работах, собранных в обширной библиографии к обзору Стикса [25].

4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ¹⁾

Рассматривая волны в замагниченной плазме, мы везде предполагали однородную плотность плазмы и однородное магнитное поле. Уравнение движения для возмущенных величин [уравнения (1.34) — (1.36)] имеют коэффициенты, не зависящие от пространства и времени, так что преобразование в обеих этих переменных были возможны. Для описания волн в квазистационарных ограниченных системах, за исключением некоторых идеализированных примеров однородной плазмы с резкими границами, по-прежнему можно пользоваться частотным разложением, но нельзя применять фурье-разложение в пространстве. Уравнение (1.41), являющееся результатом интегрирования уравнения (1.34) вдоль траекторий, справедливо для произвольной геометрии. Однако, когда вычисленные таким образом токи подставляются в уравнения Максвелла [уравнения (1.35) и (1.36)], последние преобразуются в ряд интегро-дифференциальных уравнений, которые для неоднородных сред не могут быть сведены

¹⁾ Авторы благодарны д-ру Я. Рему за проверку расчетов, приведенных в этой главе.

с помощью фурье-преобразования к ряду алгебраических уравнений.

В результате интегрирования по траекториям частиц ток возмущения выражается как нелокальный функционал от возмущенных величин электрического и магнитного полей. Для нулевой температуры, т. е. для случая, когда скорости частиц произвольно малы, эта зависимость становится локальной в предположении, что для низких, но не равных нулю температур ток может быть выражен приближенно через малые пространственные производные полей. Действительно, прямое разложение уравнения (1.41) для случая малых скоростей показывает, что это так. При $\mathbf{V}_0 \rightarrow 0$ параметром разложения для каждого сорта частиц будет величина $\langle v^2 \rangle^{1/2}/\omega L$, где L — характерный равновесный размер. При $\mathbf{V}_0 \neq 0$ параметром разложения для движения вдоль силовых линий становится величина $\langle u^2 \rangle^{1/2}/\omega L$, в то время как для движения поперек магнитного поля — меньшая из величин $\langle \omega^2 \rangle^{1/2}/\omega L$ или $\langle \omega^2 \rangle^{1/2}/\Omega L$. Необходимо подчеркнуть, что такое разложение предполагает следующее условие: скорости частиц малы по сравнению со скоростями волны, и поэтому резонансными эффектами для частиц можно пренебречь. Мы не будем возвращаться к вопросам о затухании или неустойчивости волн, которых можно ожидать из-за этих резонансных эффектов и формы равновесного распределения.

4.1. Разложение уравнения Власова

Операция разложения интеграла по траекториями в уравнении (1.41) довольно громоздка и гораздо удобнее пользоваться низкотемпературным приближением непосредственно в кинетическом уравнении (1.34). Для этой цели запишем уравнение (1.34) при $\gamma = 1$ в виде

$$i\omega f_1 + \Omega \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \nabla_{\sigma} f_0 + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\sigma} f_1 + \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 \cdot \nabla_{\sigma} f_1, \quad (4.1)$$

где мы приняли $\mathbf{E}_1 \sim e^{-i\omega t}$ и будем искать решение для f_1 через \mathbf{E}_1 . Эта операция проводится в предположении, что \mathbf{E}_1 стремится к нулю в далеком прошлом, т. е. мы принимаем $\text{Im } \omega > 0$. Угол ϕ снова представляет собой азимутальный угол цилиндрической системы координат в пространстве скоростей с осью, расположенной вдоль вектора \mathbf{V}_0 . Два члена в левой части уравнения (4.1) берутся одного и того же порядка, хотя наши результаты будут все еще справедливы, если это и не так, например в пределе $\Omega \rightarrow 0$. Два члена в правой части уравнения (4.1), содержащие функцию f_1 , берутся с точностью до первого порядка

по ω^{-1} или Ω^{-1} в зависимости от того, какая из величин меньше. Аналогично в члене, содержащем неоднородность, мы берем величину $c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1$ с точностью до первого порядка относительно E_1 , так как посредством уравнений Максвелла эти величины оказываются связанными через обратную степень частоты. Записываем формально

$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} h_n, \quad (4.2)$$

где h_n — обозначает величину n -го порядка по малому параметру.

Используемая ниже техника решения зависит от предположения $\partial f_0 / \partial \phi = 0$. Это предположение справедливо только в пределе сильного поля, и для общности мы должны также разложить функцию f_0 в ряд, подобный (4.2), в котором только член наименьшего порядка не зависит от ϕ . С помощью такого разложения в конечных уравнениях будут учтены такие эффекты, как $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ и $\text{grad} |\mathbf{B}_0|$, дрейфы и токи из-за градиента n_0 . Мы не будем вводить эти усложняющие факторы, а рассмотрим наиболее простой случай.

Из-за сложности конечных уравнений удобно ввести тензорное обозначение. Впредь мы будем обозначать i -е декартовы компоненты векторов \mathbf{E}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{E}_0 , \mathbf{b} , \mathbf{V}_r и \mathbf{V}_v соответственно через E_i , B_i , \mathcal{E}_i , b_i , $\partial/\partial x_i$ и $\partial/\partial v_i$. Тогда конечные уравнения для полей могут быть записаны в векторном обозначении.

Подстановка уравнения (4.2) в уравнение (4.1) с учетом наших предположений о порядках величин различных членов дает следующий ряд уравнений:

$$\frac{\partial h_0}{\partial \phi} + \frac{i\omega}{\Omega} h_0 = \frac{q}{m\Omega} E_i \frac{\partial f_0}{\partial v_i} = S_0(\phi), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \phi} + \frac{i\omega}{\Omega} h_1 = \frac{q}{mc\Omega} e_{ijk} v_j B_k \frac{\partial f_0}{\partial v_i} + \\ + \frac{v_i}{\Omega} \frac{\partial h_0}{\partial x_i} + \frac{q}{m\Omega} \mathcal{E}_i \frac{\partial h_0}{\partial v_i} = S_1(\phi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

и для $n > 1$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \phi} + \frac{i\omega}{\Omega} h_n = \frac{v_i}{\Omega} \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x_i} + \frac{q}{m\Omega} \mathcal{E}_i \frac{\partial h_{n-1}}{\partial v_i} = S_n(\phi), \quad (4.5)$$

где e_{ijk} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга, а функция источника $S_n(\phi)$ определена как правая часть уравнений (4.3)–(4.5). Для каждого значения n $S_n(\phi)$ является известной функцией от h_{n-1} ; ее зависимость от \mathbf{r} , ω и u не выражена явным образом. Функция S_n должна быть периодичной по ϕ из-за требования периодичности функции f_1 .

При данной форме уравнений (4.3)—(4.5) решение уравнения (4.1) сводится к интегрированию ряда дифференциальных уравнений первого порядка. Для того чтобы записать решение в сжатой форме, удобно ввести оператор вращения в пространстве скоростей $R_{ij}(\phi)$, который бы воздействовал на величину скорости согласно следующему соотношению:

$$v_i(\phi + \phi') = R_{ij}(\phi') v_j(\phi). \quad (4.6)$$

Матричное представление для оператора R_{ij} в системе координат, ориентированной вдоль b_i , имеет вид

$$[R_{ij}(\phi)] = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Введем также операцию (используя символ угловых скобок), обозначающую прямое произведение операторов R_{ij} :

$$\begin{aligned} \langle R_{ij} R_{kl}, \dots, R_{rs} \rangle &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{\Omega} \int_0^{\pm\infty} d\phi \exp\left(-i \frac{\omega}{\Omega} \phi\right) R_{ij} R_{kl}(\phi), \dots, R_{rs}(\phi), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где знак верхнего предела выбирается из условия сходимости интеграла в соответствии со знаком Ω в предположении $\text{Im } \omega > 0$. С учетом условия периодичности $S_n(\phi)$ решения уравнений (4.3)—(4.5), которые также являются периодичными в пространстве скоростей, принимают вид

$$h_n(\phi) = \int_0^{\pm\infty} d\phi' S_n(\phi - \phi') \exp\left(-i \frac{\omega}{\Omega} \phi'\right). \quad (4.9)$$

Используя форму решения (4.9) и условие периодичности функции $S_n(\phi)$, можно показать двойной перестановкой интегрирования по ϕ , что выражение для тока принимает вид

$$J_i = q \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3v v_i h_n = q\Omega \langle R_{ij} \rangle \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3v v_j S_n. \quad (4.10)$$

Для каждого значения n интеграл, возникающий в уравнении (4.10), может быть вычислен для S_n , определяемых уравнениями (4.3)—(4.5) путем интегрирования по частям и перестановкой интегрирования, подобной той, что привела к уравнению (4.10). Будем предполагать, что суммарный поток частиц вдоль

магнитного поля B_0 отсутствует, так что момент первого рода от f_0 равен нулю. Введем также тензор давления:

$$P_{ij} \equiv p_{\parallel} b_i b_j + p_{\perp} \delta_{ij}^{\perp}, \quad (4.11)$$

где

$$p_{\parallel} \equiv m \int d^3v (b_i v_i)^2 f_0, \quad (4.12)$$

$$p_{\perp} \equiv m \int d^3v v_i \delta_{ij}^{\perp} v_j f_0, \quad (4.13)$$

а

$$\delta_{ij}^{\perp} \equiv \delta_{ij} - b_i b_j. \quad (4.14)$$

Можно показать, что

$$R_{ij} R_{kl} P_{jl} = P_{ik}. \quad (4.15)$$

Используя эти результаты, мы можем получить значение тока с точностью до третьего порядка разложения по обратным степеням частоты:

$$\begin{aligned} J_i = & -\frac{q^2}{m} \langle R_{lj} \rangle \left\{ n_0 E_l + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle R_{kl} R_{jn} \rangle \times \right. \\ & \times \left[\frac{1}{mc} (p_{\parallel} - p_{\perp}) (e_{lqr} B_r b_n b_q + e_{nqr} B_r b_l b_q) + \right. \\ & + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_p} (P_{ln} \langle R_{pm} \rangle E_m + P_{lp} \langle R_{nm} \rangle E_m + P_{np} \langle R_{lm} \rangle E_m) - \\ & - \frac{qn_0}{m} (\mathcal{E}_l \langle R_{nm} \rangle E_m + \mathcal{E}_n \langle R_{lm} \rangle E_m) \left. \right] - \\ & \left. - \frac{q}{i\omega m} \mathcal{E}_j \frac{\partial}{\partial x_s} (n_0 \langle R_{sm} \rangle E_m) \right\}. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Заметим, что при изотропном распределении $p_{\parallel} = p_{\perp} = p_0$ магнитное взаимодействие исчезает, как и можно было ожидать.

Ток возмущения, описываемый уравнением (4.16), должен быть использован в волновом уравнении, получающемся путем исключения магнитного поля из уравнений Максвелла:

$$c^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E_j - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} E_i \right] - \omega^2 E_i = 4\pi i \omega J_i. \quad (4.17)$$

С точностью до порядка, использованного при разложении тока, данная подстановка даст ряд зацепляющихся дифференциальных уравнений второго порядка для компонент электрического поля.

Мы ограничимся рассмотрением высокочастотного случая и будем учитывать только движение электронов. Для того чтобы получить выражение для электронного тока из уравнения (4.16), положим $q \rightarrow -e$, $m \rightarrow m_-$, $\Omega \rightarrow -\Omega_-$ (где $\Omega_- > 0$).

4.2. Перпендикулярное распространение

Уравнение (4.16) в приведенной форме справедливо для анизотропного давления и неоднородного магнитного поля. Однако в последующем мы будем предполагать, что все величины изменяются только в плоскости, перпендикулярной прямому однородному магнитному полю, и предполагать изотропное давление. В этом случае нам необходимы только перпендикулярные к полю части операторов вращения:

$$\langle R_{ij} \rangle = -\frac{1}{\omega^2 - \Omega_-^2} [i\omega\delta_{ij}^\perp - \Omega_- e_{ikj} b_k] \quad (4.18)$$

и

$$\begin{aligned} \langle R_{kel} R_{jn} \rangle = & -\frac{i}{\omega} \frac{\omega^2 - 2\Omega_-^2}{\omega^2 - 4\Omega_-^2} \delta_{ki}^\perp \delta_{ln}^\perp + \\ & + \frac{\Omega_-}{\omega^2 - 4\Omega_-^2} (\delta_{ki}^\perp e_{jqn} b_q + \delta_{ln}^\perp e_{kql} b_q) + \\ & + \frac{2i\Omega_-^2}{\omega(\omega^2 - 4\Omega_-^2)} e_{kpl} b_p e_{jqn} b_q. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В соответствии с предполагаемой изотропией давления получаем

$$-en_0 \mathcal{E}_k = \frac{\partial p_0}{\partial x_k}. \quad (4.20)$$

Подставляя уравнения (4.20), (4.18) и (4.19) в уравнение (4.16), получаем

$$\begin{aligned} J_i = & -\frac{q^2}{m} \left[n_0 \langle R_{ij} \rangle E_j + \frac{1}{m} M_{iklm} \frac{\partial}{\partial x_k} P_0 \frac{\partial}{\partial x_l} E_m - \right. \\ & \left. - \frac{e}{i\omega} \langle R_{ij} \rangle \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial x_s} n_0 \langle R_{sm} \rangle E_m \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\begin{aligned} M_{iklm} = & \frac{1}{(\omega^2 - 4\Omega_-^2)(\omega^2 - \Omega_-^2)^2} \left[2 \frac{i}{\omega} (\omega^2 - \Omega_-^2)^2 \delta_{il}^\perp \delta_{km}^\perp - \right. \\ & - 3\Omega_- (\omega^2 - \Omega_-^2) (\delta_{il}^\perp e_{kpm} b_p + \delta_{km}^\perp e_{ipl} b_p + \delta_{ki}^\perp e_{ipm} b_p) - \\ & - 6i \frac{\Omega_-^2}{\omega} (\omega^2 - \Omega_-^2) e_{ipl} b_p e_{kqm} b_q + \frac{i}{\omega} (\omega^2 + 2\Omega_-^2) (\omega^2 - \Omega_-^2) \delta_{im}^\perp \delta_{kl}^\perp - \\ & \left. - \Omega_- (\omega^2 + 5\Omega_-^2) \delta_{im}^\perp e_{kpl} b_p - 2i \frac{\Omega_-^2}{\omega} (2\omega^2 + \Omega_-^2) e_{ipm} b_p e_{kql} b_q \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Пока $\omega^2 \not\approx \Omega_-^2$, последним членом в уравнении (4.21) можно пренебречь. Это следует из того факта, что, будучи пропорцио-

нальным E_m , последний член в (4.21) дает малую поправку к первому члену правой части уравнения (4.21).

Существенно отметить, что это уравнение есть лишь приближенное выражение для тока. Использование этого выражения для тока справедливо только в том случае, когда отброшенные члены малы по сравнению с членами оставшимися. Это замечание окажется существенным при решении вопроса о возможной структуре электрического поля волны, которая может быть получена с помощью членов, содержащих производные в уравнении (4.21), при подстановке этого уравнения в волновое уравнение (4.16), как это делается в следующем разделе.

4.3. Связь продольных и поперечных мод

Для того чтобы продемонстрировать связь продольных и поперечных мод, удобно ввести скалярный и векторные потенциалы для электромагнитных полей и работать в кулоновских единицах. Исходя из этого имеем

$$B_i = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k, \quad (4.23)$$

$$E_i = \frac{i\omega}{c} A_i - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.25)$$

и уравнения для A_i и Φ

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} A_j + \frac{\omega^2}{c^2} A_j = -\frac{4\pi}{c} J_j - \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} J_i. \quad (4.27)$$

Подставляя выражение (4.21) для тока в уравнение (4.27), получаем уравнение для скалярного потенциала

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\omega^2 - \Omega_-^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\omega_-^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \frac{i\Omega_-}{\omega} \frac{\partial \omega_-^2}{\partial x_i} e_{ikj} b_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \right. \\ \left. - \frac{i\omega}{c} \frac{\partial \omega_-^2}{\partial x_i} A_i + \frac{\Omega_-}{c} \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega_-^2 e_{ikj} b_k A_j) \right] = \\ = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{e^2}{m^2} M_{iklm} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} p_- - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - \frac{i\omega}{c} A_m \right), \quad (4.28) \end{aligned}$$

где $\omega_-^2(\mathbf{r}) \equiv 4\pi n_-(\mathbf{r}) e^2 m_-^{-1}$, а $p_-(\mathbf{r})$ — электронное давление.

Из уравнения (4.28) видно, что в отсутствие тепловых эффектов скалярный и векторный потенциалы связаны как с градиентом плотности, так и с магнитным полем. Для характерных длин A_i , c/ω , больших по сравнению с характерными длинами

Φ и ω_-^2 , эта связь слаба, за исключением области в окрестности гибридного резонанса, где $\omega^2 = \omega_-^2 + \Omega_-^2$. В этой особой точке уравнения для Φ коэффициент при наивысшей производной становится равным нулю.

Помня об итоговых рассуждениях разд. 3.2, заметим, что если в данном случае второй член в уравнении (4.21) того же порядка, что и первый, из-за большой величины пространственной производной E_i , то пренебрежение вкладами от других членов с более высокими производными электрического поля недопустимо. Следствием данной реализации является то, что правая часть уравнения (4.28) описывает только возмущение потенциала, полученного без тепловых эффектов всюду, за исключением окрестности гибридного резонанса, где происходит сокращение членов низшего порядка. В частности, члены с тепловыми поправками не могут быть использованы для определения новых мод в случае большой кривизны, существующей вдали от точки гибридного резонанса. Таким образом, если ω^2 не находится вблизи точки $4\Omega_-^2$, мы имеем картину колебаний холодной плазмы (измененную магнитным полем), которая лишь слабо возмущена поперечным полем и тепловыми эффектами всюду, за исключением области в окрестности гибридного резонанса. В этой точке вступают в силу тепловые эффекты, которые связывают потенциал с особыми точками уравнения холодной плазмы и увеличивают связь с поперечным полем.

Если ω^2 настолько близко к $4\Omega_-^2$, что правая часть уравнения (4.28) формально увеличивает свой порядок, производная четвертого порядка, возникающая в этом члене, может приводить к новой волновой структуре скалярного потенциала. Так как члены, которыми пренебрегли в выражении для тока, не содержат знаменатели $\omega^2 - 4\Omega_-^2$, то оправданно опустить их. Характерный размер этой новой моды будет равен $\{p_- / [m_- (\omega^2 - 4\Omega_-^2)]\}^{1/2}$ и может из-за малости знаменателя быть того же порядка, что и размер неоднородности ω_-^2 . Однако из-за пренебрежения вкладами в ток новая характерная длина должна быть больше, чем $[p_- / (m_- \omega^2)]^{1/2}$. Новая волновая структура скалярного потенциала может быть исследована с помощью уравнения (4.28) при отбрасывании векторного потенциала, который при более строгом рассмотрении служит источником в уравнении для скалярного потенциала; в результате получаем

$$\frac{i}{\omega} (v^2)_- M_{iklm} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \omega_-^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_m} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(1 - \frac{\omega_-^2}{\omega^2 - \Omega_-^2} \right) \delta_{ij} - \frac{i\Omega_-}{\omega(\omega^2 - \Omega_-^2)} e_{ikj} b_k \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \quad (4.29)$$

где мы положили

$$\frac{\rho_-}{m_-} = \langle v^2 \rangle_- n_-(\mathbf{r}).$$

4.4. Продольная мода с $m = 0$ в замагниченном плазменном столбе

В плазменном столбе с цилиндрической симметрией, в котором ω_-^2 зависит только от радиуса, можно провести фурье-разложение потенциала на ряд независимых мод

$$\Phi(r, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(r) e^{im\phi}. \quad (4.30)$$

При таком разложении уравнение (4.29) разбивается на ряд обычных дифференциальных уравнений четвертого порядка для $\Phi_m(r)$. Уравнение $\phi_0(r)$ может быть проинтегрировано один раз по r , причем константа интегрирования будет равна нулю, поскольку $\phi_0(r)$ становится равной нулю вне плазменного столба. Если мы используем в качестве переменной $\phi'_0(r) \equiv d\phi_0(r)/dr$, то получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda^2(r) \frac{d\phi'_0}{dr} \right) + \left(\mathcal{E}(r) - 1 - \frac{\lambda^2(r)}{r^2} \right) \phi'_0 = 0, \quad (4.31)$$

где

$$\lambda^2(r) \equiv \frac{3 \langle v^2 \rangle_- \omega_-^2(r)}{(4\Omega_-^2 - \omega^2)(\omega^2 - \Omega_-^2)}, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{E}(r) \equiv \frac{\omega_-^2(r)}{\omega^2 - \Omega_-^2}. \quad (4.33)$$

На границе плазменного столба $r = r_w$, когда электронная плотность плавно стремится к нулю, соответствующее граничное условие для уравнения (4.31) имеет вид $\phi'_0(r_w) = 0$. Когда плотность резко падает к нулю на границе, интегрирование уравнения (4.31) по скачку плотности дает граничное условие $d\phi'_0/dr|_{r=r_w} = 0$.

Очевидно, возможны два класса собственных функций для ϕ'_0 . Если $\omega^2 < 4\Omega_-^2$, то функция ϕ'_0 имеет отрицательную кривизну только для радиусов внутри точки гибридного резонанса, т. е. там, где $\omega^2 > \omega^2 - \Omega_-^2$, для больших радиусов кривизна положительна, и разрешено лишь нулевое решение. Если $\omega^2 > 4\Omega_-^2$, то возникает обратная ситуация: ϕ'_0 имеет отрицательную кри-

визну при $\omega_-^2 < \omega^2 - \Omega_-^2$, и существует нулевое решение при $\omega_-^2 > \omega^2 - \Omega_-^2$.

В качестве первого примера найдем собственные частоты уравнения (4.31) для случая, когда $\lambda^2(r)$ и $\mathcal{E}(r)$ являются константами при $r < r_w$ и равны нулю при $r > r_w$; такая ситуация может осуществляться, например, в цилиндрической плазме твердого тела. В этом случае собственными функциями уравнения (4.31) будут

$$\phi'_0 = J_1(\beta r), \quad (4.34)$$

где

$$\beta^2 = \frac{\mathcal{E} - 1}{\lambda^2}, \quad (4.35)$$

а $J_1(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Собственные значения β_n определяются из условия

$$\left. \frac{dJ_1(\beta_n r)}{dr} \right|_{r=r_w} = 0. \quad (4.36)$$

Если $\beta_n r_w \gg 1$, условие (4.36) принимает приближенно вид

$$\beta_n r_w = \left(n + \frac{3}{4} \right) \pi, \quad (4.37)$$

где $n \gg 1$ или после подстановки уравнений (4.32) и (4.33) в уравнение (4.35)

$$(4\Omega_-^2 - \omega_n^2)(\omega_-^2 + \Omega_-^2 - \omega_n^2) = 3 \left(n + \frac{3}{4} \right)^2 \pi^2 \frac{\omega_-^2 \langle v^2 \rangle_-}{r_w^2}. \quad (4.38)$$

Во втором примере мы будем находить для случая $\omega^2 < 4\Omega_-^2$ собственные значения уравнения (4.31) с помощью ВКБ-приближения, которое применимо, пока λ малó по сравнению с характерным размером неоднородности ω_-^2 [но все еще так велико, что можно пренебрегать вкладами высоких порядков в выражение для тока в уравнении (4.16)].

Введем безразмерную переменную

$$d\xi = \lambda_0^2 \left[\frac{dr}{r\lambda^2(r)} \right], \quad (4.39)$$

где $\lambda_0^2 = \lambda^2(r)|_{r=0}$. После замены переменных уравнение (4.31) принимает вид

$$\frac{d^2 \phi'_0(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\lambda^2(\xi) r^2(\xi)}{\lambda_0^4} \left(\mathcal{E}(\xi) - 1 - \frac{\lambda^2(\xi)}{r^2(\xi)} \right) \phi'_0(\xi) = 0. \quad (4.40)$$

Условие, налагаемое на фазовый интеграл в ВКБ-методе, в этом случае принимает вид

$$\frac{1}{\lambda_0^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \lambda(\xi) r(\xi) \left[\mathcal{E}(\xi) - 1 - \frac{\lambda^2(\xi)}{r^2(\xi)} \right]^{1/2} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (4.41)$$

где ξ_1 и ξ_2 — точки поворота в ВКБ-методе, являющиеся решением уравнения

$$\left[\mathcal{E}(\xi) - 1 - \frac{\lambda^2(\xi)}{r^2(\xi)} \right] = 0. \quad (4.42)$$

Возвращаясь к интегрированию по переменной r и подставляя выражения (4.32) и (4.33) в уравнение (4.41), получаем

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \Omega_-^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega_-^2(r)} - \frac{\lambda_0^2}{r^2} \right)^{1/2} = \lambda_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (4.43)$$

где r_1 и r_2 — точки, в которых подинтегральное выражение обращается в нуль, а ω_0 — плазменная частота в центре столба.

Приближенное решение уравнения (4.43) можно получить для случая, когда r_2 существенно меньше, чем радиус плазменного столба, так что можно принять для $r < r_2$:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_-^2(r)} \approx 1 + \frac{\omega_0^2}{2} r^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{\omega_-^2} \right) \right]_{r=0} \equiv 1 + \frac{r^2}{R^2}, \quad (4.44)$$

где R — радиус кривизны распределения плотности в точке $r=0$. Точки r_1 и r_2 должны быть взяты аналогичным образом как точки, в которых аппроксимированное данным способом подинтегральное выражение уравнения (4.43) обращается в нуль. При данной форме распределения плотности интеграл в уравнении (4.43) может быть взят точно. При этом получается следующее дисперсионное соотношение:

$$(4\Omega_-^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega_-^2)^2 = \frac{54 \langle v^2 \rangle_- (\omega^2 - \Omega_-^2) n^2 \omega_0^2}{R^2}. \quad (4.45)$$

Как обсуждается в работах, на которые ниже даны ссылки, данное дисперсионное соотношение приводит к разумному соответствию с экспериментально определенными при $m=0$ собственными частотами замагниченного плазменного столба.

4.5. Прохождение через однородный слой

В этом разделе мы рассмотрим проблему рассеяния плоской электромагнитной волны на однородном слое плазмы для случая, когда частота волны, вторая гармоника электронной цикло-

тронной частоты и верхняя гибридная частота — все приближенно равны. Возьмем бесконечный слой толщины $2L$, ориентированный в плоскости $y-z$, с однородным магнитным полем, направленным вдоль оси z . Нормально к этой плоскости падает поперечная волна с электрическим полем, поляризованным в y -направлении. Как можно показать с помощью уравнений, выведенных в предыдущих разделах, внутри слоя будет индуцироваться продольное электрическое поле E_x , величина которого будет велика при определенных резонансных частотах. Наша цель — определить эти частоты и величину связи между продольным и поперечным полем.

Величину связи удобно определять, вычисляя коэффициенты отражения и прохождения падающей электромагнитной волны. Чтобы избежать полного отражения на резонансных частотах плазменного слоя, введем постоянную частоту столкновений ν и положим $\omega^2 = \omega^2 + i\nu$, как мы делали раньше. Вводя продольные и поперечные компоненты электрического поля E_x и E_y , мы можем приспособить уравнение (4.16) к предлагаемой нами модели и затем, воспользовавшись двумя компонентами волнового уравнения (4.17), получить для области внутри слоя

$$\lambda^2 \frac{d^2 E_x}{dx^2} + \left(\mathcal{E} - \frac{\omega}{\omega'} \right) E_x - i \frac{2\Omega_e}{\omega'} \left(\frac{1}{2} \mathcal{E} E_y + \lambda^2 \frac{d^2 E_y}{dx^2} \right) = 0 \quad (4.46)$$

и

$$\left(\frac{c^2}{\omega^2} - \frac{\omega'^2 + 8\Omega_e^2}{3\omega\omega'} \lambda^2 \right) \frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{\omega'}{\omega} \left(\frac{\omega}{\omega'} - \mathcal{E} \right) E_y - i \left(\frac{\Omega_e}{\omega} \mathcal{E} E_x + 2 \frac{\Omega_e}{\omega} \lambda^2 \frac{d^2 E_x}{dx^2} \right) = 0. \quad (4.47)$$

В соответствии с предполагаемой однородностью в пределах слоя можно предположить, что обе компоненты поля меняются по закону $\exp(ikx)$ и получить, следуя этому, из уравнений (4.46) и (4.47) следующую пару уравнений:

$$\left[-\lambda^2 k^2 + \left(\mathcal{E} - \frac{\omega}{\omega'} \right) \right] E_x - \left(\frac{1}{2} \mathcal{E} - \lambda^2 k^2 \right) F_y = 0 \quad (4.48)$$

и

$$\left[\left(\frac{c^2}{\omega^2} - \frac{\omega'^2 + 8\Omega_e^2}{3\omega\omega'} \lambda^2 \right) k^2 - \frac{\omega'}{\omega} \left(\frac{\omega}{\omega'} - \mathcal{E} \right) \right] F_y - \frac{4\Omega_e^2}{\omega'\omega} \left(\frac{1}{2} \mathcal{E} - k^2 \lambda^2 \right) E_x = 0, \quad (4.49)$$

где

$$F_y \equiv i \frac{2\Omega_e}{\omega'} E_y. \quad (4.50)$$

Определитель, составленный из коэффициентов (4.48) и (4.49), будет давать квадратичное уравнение относительно k^2 , решение которого определяет внутри слоя четыре допустимые величины k . Мы обсудим эти решения позднее, а сейчас просто обозначим их через $\pm k_1$ и $\pm k_2$.

Общее выражение для поля внутри слоя $|x| < L$ представляет собой линейную комбинацию четырех нормальных мод:

$$F_y = \sum_{j=1}^4 a_j e^{ik_j x} = \sum_{\pm} (a_1^{\pm} e^{\pm ik_1 x} + a_2^{\pm} e^{\pm ik_2 x}). \quad (4.51)$$

Для того чтобы рассчитать коэффициент отражения, рассмотрим падающую слева волну с единичной амплитудой, отраженную волну с амплитудой R и преобразованную волну с амплитудой T . При $|x| > L$ мы имеем

$$\begin{aligned} F_y &= e^{ik_0 x} + R e^{-ik_0 x}, & x < -L, \\ F_y &= T e^{ik_0 x}, & x > L, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где $k_0 = \omega/c$.

Условие непрерывности E_y и $B_z \sim dE_y/dx$ на двух границах слоя дает четыре соотношения между шестью неизвестными величинами a_1^{\pm} , a_2^{\pm} , T и R . Два дополнительных граничных условия получаются при интегрировании уравнений для неоднородного слоя на небольшом расстоянии от границы. С помощью данной процедуры находим при $x = \pm L$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{dF_y}{dx}. \quad (4.53)$$

С учетом уравнений (4.48) и (4.51) и при $x = \pm L$ это соотношение принимает вид

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_j \frac{1/2 \mathcal{E} - \lambda^2 k_j^2}{\mathcal{E} - (\omega/\omega') - \lambda^2 k_j^2} a_j e^{ik_j x} = \frac{d}{dx} \sum a_j e^{ik_j x} \quad (4.54)$$

или

$$\sum_j \frac{k_j a_j e^{ik_j x}}{\mathcal{E} - (\omega/\omega') - \lambda^2 k_j^2} = 0. \quad (4.55)$$

Из уравнения (4.55) и четырех уравнений непрерывности для E_y и B_z :

$$\begin{aligned} e^{-ik_0 L} + R e^{ik_0 L} &= \sum_j a_j e^{-ik_j L}, \\ T e^{ik_0 L} &= \sum_j a_j e^{ik_j L}, \\ k_0 (e^{-ik_0 L} - R e^{ik_0 L}) &= \sum_j k_j a_j e^{-ik_j L}, \\ k_0 T e^{ik_0 L} &= \sum_j k_j a_j e^{ik_j L} \end{aligned} \quad (4.56)$$

можно получить решение

$$\begin{aligned}
 a_1^\pm &= \frac{S_1 i}{2 \sin(2k_1 L)} [R e^{ik_0 L \mp ik_1 L} + T e^{ik_0 L \pm ik_1 L} - e^{-ik_0 L \mp ik_1 L}], \\
 a_2^\pm &= \frac{S_2 i}{2 \sin(2k_2 L)} [R e^{ik_0 L \mp ik_2 L} + T e^{ik_0 L \pm ik_2 L} - e^{-ik_0 L \mp ik_2 L}], \\
 R &= e^{-2ik_0 L} \left[\frac{A^2 - B^2 - 1}{A^2 - B^2 + 1 - 2iB} \right], \\
 T &= e^{-2ik_0 L} \left[\frac{-2iA}{A^2 - B^2 + 1 - 2iB} \right],
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= S_1 \csc 2k_1 L + S_2 \csc 2k_2 L, \\
 B &= S_1 \operatorname{ctg} 2k_1 L + S_2 \operatorname{ctg} 2k_2 L, \\
 S_{1,2} &= \frac{k_0 (\mathcal{E} - (\omega/\omega') - \lambda^2 k_{1,2}^2)}{k_{1,2} \lambda^2 (k_{1,2}^2 - k_{2,1}^2)}.
 \end{aligned}$$

Если $\nu = 0$, то нормальные моды $k_{1,2}$ становятся действительными, и, следовательно,

$$|R|^2 + |T|^2 = 1. \tag{4.58}$$

Если, кроме того, $\sin 2k_1 L = 0$ или $\sin 2k_2 L = 0$, то как A^2 , так и B^2 становятся бесконечно большими, и, следовательно, $|R| = 1$, а $|T| = 0$. Введение конечного ν исключает появление полного отражения.

Мы будем вычислять корни $k_{1,2}$ только в пределе $\lambda^2 \omega^2 / c^2 \ll 1$, который соответствует случаю, когда длина волны в свободном пространстве для падающей волны много больше толщины слоя. Легко видеть, что в этом случае в первом порядке

$$k_1^2 \approx \frac{\mathcal{E} - (\omega/\omega')}{\lambda^2} - \frac{\omega^2 (\mathcal{E} - 2)^2}{4c^2 (\mathcal{E} - 1)} \tag{4.59}$$

и

$$\begin{aligned}
 k_2^2 &= \frac{[\mathcal{E} - (\omega/\omega')] [1 - (\omega'/\omega) \mathcal{E}] + (\Omega e^2 / \omega \omega') \mathcal{E}}{\lambda^2 [\mathcal{E} - (\omega/\omega')]} - \\
 &\quad - \frac{\lambda^2 \omega^4 (\mathcal{E} - 2)^3 (3\mathcal{E} - 2)}{16c^4 (\mathcal{E} - 1)^3}.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

В поправках первого порядка в уравнениях (4.59) и (4.60) мы положим $\omega' = \omega$ и $\omega^2 = 4\Omega_e^2$, за исключением случаев, когда ω^2 входит в разность $\omega^2 - 4\Omega_e^2$, и сохранили частоту столкновений в членах наименьшего порядка уравнений (4.59) и (4.60). Если ν/ω порядка $\lambda^2 \omega^2 / c^2$ или меньше, то для обеспечения непротиворечивости членов низшего порядка уравнений (4.59) и (4.60) необходимо провести разложение в ряд по малым ν .

4.6. Указания к литературе

Рассмотрение задачи о распространении волн в низкотемпературной неоднородной плазме проводилось на основании работы Балдвина [26]. Для более подробного ознакомления с экспериментальными и теоретическими работами в этой области смотрите работу Ван ден Пласа [27].

Оригинальные эксперименты и их теоретическая интерпретация были выполнены Бухсбаумом и Хасегавой [28, 29].

Детальные расчеты коэффициентов прохождения и отражения для плоского слоя и цилиндрической геометрии были выполнены Бернштейном и Вининком [30] и Шурманом и Вининком [31].

Теория флуктуационных явлений в плазме обсуждается в работе Ростокера [32].

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА И СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

5.1. Проблема электромагнитного излучения

Мы хотим рассмотреть явление некогерентного электромагнитного излучения из замагниченной плазмы, обусловленного флуктуациями. Существование подобных флуктуаций относительно средних значений является характерной чертой любой плазмы, поскольку система представляет собой ансамбль частиц, а не сплошную среду. Кроме того, плазма может находиться в статистически стационарном состоянии, которое характеризуется турбулентностью электрических полей и других параметров с амплитудами, определяемыми ограничением из-за нелинейных эффектов, возникающих при данных неустойчивостях. Программа данной работы ограничивается рассмотрением радиационных полей настолько слабых, что они не оказывают эффективного обратного воздействия на систему и не оказывают влияния на корреляционные функции частиц. В этом случае можно считать, что флуктуации обусловлены известными источниками, возбуждающими электромагнитные поля столь малой амплитуды, что их распространение описывается линеаризованными уравнениями для сплошной среды. Это позволяет разбить задачу на две части. Первая из них заключается в определении с помощью статистической механики необходимых корреляционных функций, которые предполагаются зависящими только от средних характеристик системы. Вторая часть задачи связана с распространением электромагнитных волн в плазме, описываемой некими усредненными параметрами. Сначала будет рассмотрена общая задача, за которой последует вывод уравнений геометрической оптики и радиационного переноса для случая очень

малых длин волн. Затем полученные результаты будут применены к случаю однородной замагниченной плазмы с целью определения потерь, обусловленных радиационным излучением.

В общем случае электрическое поле описывается уравнением

$$c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - 4\pi \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (5.1)$$

Это уравнение получено путем исключения вектора \mathbf{B} из уравнений (1.15) и (1.14). Плотность тока \mathbf{J} удобно записать в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{J}'', \quad (5.2)$$

где \mathbf{J}'' — соответствует плотности тока, возникающего вследствие флуктуаций относительно средних значений параметров системы, а

$$\mathbf{J}' = \sum q \int d^3v \frac{\mathbf{v}}{v} f. \quad (5.3)$$

Здесь f — обычная одночастичная функция распределения, причем не зависящую от времени часть этой функции мы интерпретируем как усредненное по ансамблю число частиц в малой ячейке одночастичного фазового пространства, деленное на объем данной ячейки. Плотность тока \mathbf{J}'' соответствует спонтанному излучению, в то время как \mathbf{J}' соответствует поглощению и индуцированному излучению. Усредненное по ансамблю среднее значение \mathbf{J}'' есть, очевидно, стационарное значение тока $\mathbf{J}_0(\mathbf{r})$. Величина $\mathbf{J}' - \mathbf{J}_0$ тогда обусловлена излучением от флуктуирующих источников \mathbf{J}'' . В задаче об излучении существенно знание усредненных по ансамблю значений среднеквадратичных значений \mathbf{J}'' , которые, вообще говоря, не равны нулю и выражаются через одно- и двухчастичные корреляционные функции. Если нас интересуют высокочастотные процессы, то необходимо учесть только электронный вклад в величину \mathbf{J}' . Кроме того, если поля излучения малы, то можно записать $f = f_0 + f_1$, где f_0 описывает усредненное по ансамблю стационарное состояние, а f_1 , если пренебречь столкновениями и рассеянием излучения, удовлетворяет линеаризованному уравнению Власова (1.34). Для того чтобы полуколичественно учесть эффект столкновений, а также обеспечить вычисление интегралов в пределе стремящихся к нулю столкновений, введем феноменологически частоту столкновений $\nu = \text{const}$ и добавим в правую часть уравнения (1.34) член $-\nu f_1$. Это — удовлетворительная модель для случаев, когда определяющими являются соударения электронов с нейтронами, а это обычно имеет место в слабо ионизованных разрядах.

Мы будем рассматривать спектральную плотность эмиттируемого излучения и воспользуемся для этого фурье-разложением во времени. При этом удобно предположить, что ток $\mathbf{J}''(\mathbf{r}, t)$

включается в момент времени $t = -t_1$ и выключается в момент $t = t_1$. В этом случае получаем выражение

$$J''_{\omega}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} J''(\mathbf{r}, t) = \int_{-t_1}^{t_1} dt e^{i\omega t} J''(\mathbf{r}, t). \quad (5.4)$$

Соответствующие выражения для других величин имеют такую же форму. После этого мы перейдем к пределу $t_1 \rightarrow \infty$.

Данное рассмотрение предполагает, что для функции f_0 система уравнений (1.34) — (1.36) не предсказывает каких-либо неустойчивостей, а также отсутствуют какие-либо переменные электромагнитные поля, кроме полей, возбуждаемых током J'' .

С учетом упомянутого выше простого столкновительного члена уравнение, описывающее функцию f_1 , имеет вид

$$f_1 + \mathbf{v}f_1 = -\frac{q}{m} \left[\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{v}}{v} \times \mathbf{B}_1 \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0. \quad (5.5)$$

Но поскольку f_1 и соответственно все величины, характеризующие возмущения, равны нулю для моментов времени $t \leq -t_1 \rightarrow -\infty$, а скорость распространения конечна, то можно записать

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q}{m} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\nu(t-t')} \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') + \frac{\mathbf{v}'}{vc} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}', t') \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_0(\mathbf{r}', \mathbf{v}'), \quad (5.6)$$

где \mathbf{r}' и \mathbf{v}' определяются уравнениями (1.38) и последующими и зависят от времени через $t - t'$. Таким образом, если записать \mathbf{E}_1 и \mathbf{B}_1 через временные интегралы Фурье и ввести $\tau = t - t'$, то получим

$$f_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\frac{q}{m} \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega + i\nu)\tau} \left[\mathbf{E}_{\omega} + \frac{\mathbf{v}'}{vc} \times \mathbf{B}_{\omega} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_0,$$

где аргумент \mathbf{E}_{ω} и т. д. есть $\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, -\tau)$. Затем из уравнения (1.14) можно найти $\mathbf{B}_{\omega} = -(ic/\omega) \nabla \times \mathbf{E}_{\omega}$ и соответственно записать

$$J'_{\omega}(\mathbf{r}) = -\sum \frac{q^2}{m} \int d^3v \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega + i\nu)\tau} \times \\ \times \left[\mathbf{E}_{\omega} - \frac{i}{v'\omega} \mathbf{v}' \times (\nabla \times \mathbf{E}_{\omega}) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_0, \quad (5.7)$$

т. е. J'_{ω} является линейным функционалом от \mathbf{E}_{ω} и $\nabla \times \mathbf{E}_{\omega}$. Уравнение (5.1) для фурье-компонент записывается в виде

$$c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{\omega} - \omega^2 \mathbf{E}_{\omega} - 4\pi i \omega J'_{\omega} = 4\pi i \omega J''_{\omega}, \quad (5.8)$$

т. е. представляет собой, если рассматривать ток \mathbf{J}'' как известный, линейное неоднородное волновое уравнение, которое следует решать при соответствующих граничных условиях.

Например, если рассматривается ограниченная и изолированная в пространстве плазма, то на расстоянии R снаружи и достаточно далеко от центральной области плазмы требуется, чтобы электромагнитное поле имело форму расходящейся сферической волны. Поскольку среда в этой области представляет собой вакуум, то асимптотические электрическое и магнитное поля, соответствующие состоянию с линейной поляризацией, будут ортогональны и поперечны по отношению к вектору распространения $\mathbf{k} = \omega \mathbf{R}/Rc$, например

$$\mathbf{B}_\omega \approx \frac{i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\omega}{R^2} e^{i\omega(t-R/c)}, \quad (5.9)$$

$$E_\omega \approx \frac{\omega}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_\omega, \quad (5.10)$$

где \mathbf{A}_ω — постоянный вектор, соответствующий асимптотическому значению векторного потенциала. Если плазма настолько разрежена, что током \mathbf{J}' можно пренебречь, то искомое решение уравнения (5.8) может быть записано в виде

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}''(\mathbf{r}'), \quad (5.11)$$

где при $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $k = \omega/c$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= -\frac{1}{i\omega} [k^2 \mathbf{I} + \nabla \nabla] \frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \\ &= -\frac{1}{i\omega} \left[\left(k^2 + \frac{ik}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) \mathbf{I} + \frac{\rho\rho}{\rho^2} \left(-k^2 - \frac{3ik}{\rho} + \frac{3}{\rho^2} \right) \right] \frac{e^{ik\rho}}{\rho}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

В общем случае форма уравнения (5.11) будет по-прежнему справедлива из-за линейности определяющих уравнений. Функция влияния \mathbf{M} будет удовлетворять граничным условиям совместно с уравнением (5.9), но не может быть вычислена в явном виде. Тем не менее асимптотическая форма для полей будет по-прежнему определяться уравнениями (5.9) и (5.10), и, как было показано в уравнениях II—373 и последующих, спектральная плотность потока электромагнитной энергии от источника S_ω определяется выражением

$$S_\omega = \frac{c}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle\langle B(\mathbf{R}, t) B(\mathbf{R}, t + \tau) \rangle\rangle. \quad (5.13)$$

Скобки $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ показывают усреднение по ансамблю. Поскольку в волновой зоне $B = E$, в приведенном выше выражении можно с равным успехом использовать значение E . Для статисти-

чески стационарного состояния указанное выше усреднение не будет зависеть от t . Далее из уравнения (5.1) следует, что $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ является линейным функционалом от $\mathbf{J}''(\mathbf{r}, t)$, откуда S_0 будет пропорционально

$$\langle\langle \mathbf{J}''(\mathbf{r}, t) \mathbf{J}''(\mathbf{r}', t') \rangle\rangle,$$

где $t' = t + \tau$. Поскольку мы предполагаем, что поле излучения не вносит статистических эффектов, для системы точечных частиц

$$\mathbf{J}''(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}) - \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, t), \quad (5.14)$$

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{r}) = \langle\langle \sum_i q_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) \delta(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}) \rangle\rangle. \quad (5.15)$$

Используя уравнение (5.14) для упрощения перекрестных членов, получаем

$$\begin{aligned} & \langle\langle \mathbf{J}''(\mathbf{r}, t) \mathbf{J}''(\mathbf{r}', t') \rangle\rangle = \\ & = \langle\langle \sum_i q_i^2 \dot{\mathbf{r}}_i(t) \dot{\mathbf{r}}_i(t') \delta[\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}] \delta[\mathbf{r}_i(t') - \mathbf{r}'] \rangle\rangle + \\ & + \langle\langle \sum_{i \neq j} q_i q_j \dot{\mathbf{r}}_i(t) \dot{\mathbf{r}}_j(t') \delta[\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}] \delta[\mathbf{r}_j(t') - \mathbf{r}'] \rangle\rangle - \\ & - \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) \mathbf{J}_0(\mathbf{r}'). \quad (5.16) \end{aligned}$$

5.2. Статистическое рассмотрение

Пусть $f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ обозначает одночастичную функцию распределения для частиц сорта σ , т. е. является математическим ожиданием числа частиц сорта σ в элементе фазового объема $d^3r d^3v$ вокруг точки \mathbf{r}, \mathbf{v} в момент времени t . Пусть $f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f_{\sigma'}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') + g_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$ обозначает взаимное ожидание числа частиц сорта σ в элементе объема $d^3r d^3v$ около точки \mathbf{r}, \mathbf{v} в момент времени t и числа частиц сорта σ' в элементе объема $d^3r' d^3v'$ около точки \mathbf{r}', \mathbf{v}' в момент t' . Функция $g_{\sigma\sigma'}$ называется функцией парных корреляций. Поскольку

$$\mathbf{J}'(\mathbf{r}, t) = \sum_\sigma q_\sigma \int d^3v (\mathbf{v}/\gamma) f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

то можно записать, используя введенные выше обозначения

$$\begin{aligned} & \langle\langle \mathbf{J}''(\mathbf{r}, t) \mathbf{J}''(\mathbf{r}', t') \rangle\rangle = \\ & = \sum_\sigma q_\sigma^2 \int d^3v f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta[\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}'] \left(\frac{\mathbf{v}}{\gamma}\right) \left(\frac{\mathbf{v}'(t')}{\gamma'}\right) + \\ & + \sum_{\sigma\sigma'} q_\sigma q_{\sigma'} \int d^3v d^3v' \left(\frac{\mathbf{v}}{\gamma}\right) \left(\frac{\mathbf{v}'}{\gamma'}\right) g_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \mathbf{r}', \mathbf{v}', t'), \quad (5.17) \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}'(t')$ и $\mathbf{v}'(t')$ соответственно значения координаты и момента на единицу массы покоя, которыми обладает рассматриваемая частица в момент времени t' , если ее траектория проходила через точку \mathbf{r} , \mathbf{v} в момент t .

Мы предполагаем, что поля излучения малы в том смысле, что эффективная сила реакции излучения пренебрежимо мала по сравнению с эффективной электростатической силой. Это означает, что при определении f_σ и $g_{\sigma\sigma'}$ учтены только электростатические взаимодействия. В статистическом стационарном состоянии $\partial f_\sigma / \partial t = 0$, в то время как $g_{\sigma\sigma'}$ зависит от t и t' только через разность $t - t'$. В однородной безграничной плазме $\nabla f_\sigma = 0$, а $g_{\sigma\sigma'}$ зависит от \mathbf{r} и \mathbf{r}' только через $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Для системы, в которой частицы находятся в кинетическом равновесии, т. е. для случая, когда функции распределения соответствуют, а поля излучения не обязательно соответствуют тепловому равновесию, можно написать:

$$f_\sigma = \frac{N}{4\pi c^3} \frac{mc^2/\theta}{K_2(mc^2/\theta)} e^{-mc^2\mathbf{v}/\theta}, \quad (5.18)$$

где K_2 обозначает модифицированную функцию Бесселя второго рода. Электрон-электронная корреляционная функция при $t - t' = 0$, если опустить индекс σ , описывается выражением

$$-f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}') \frac{e^2}{\theta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\lambda_D}. \quad (5.19)$$

Если $t - t' \neq 0$, то нужно просто заменить \mathbf{r} на $\mathbf{r} + \xi(\mathbf{v}, t' - t)$ и \mathbf{r}' на $\mathbf{r}' + \xi(\mathbf{v}', t' - t)$, где величина ξ , если плазма находится в постоянном магнитном поле, определяется уравнением (1.55). Если имеет место приближенное локальное кинетическое равновесие, то в приведенных выше выражениях нужно оставить те же функции, но значения величин N , θ и λ_D брать для точки \mathbf{r}' , пока $|\nabla \ln f| \ll \lambda_D^{-1}$. Действительно, можно ожидать, что вблизи локального кинетического равновесия, когда $|\nabla \ln f| \ll \lambda_D^{-1}$ и $e^2/\lambda_D \ll \theta$, любая плазма будет иметь качественно одни и те же черты.

В случае статистически стационарной, квазиоднородной системы в пределе высоких частот, когда необходимо учитывать лишь вклад от электронов, нам потребуется знание величины

$$\int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[-i\omega(t - t') - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \times \\ \times \langle\langle \mathbf{J}''(\mathbf{r}, t) \mathbf{J}''(\mathbf{r}', t') \rangle\rangle. \quad (5.20)$$

Член, содержащий электронную функцию распределения, в (5.20) может быть представлен следующим образом, если заменить $t - t'$ на $-t'$ в первом члене выражения (5.17):

$$e^2 \int d^3 r' \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3 v \exp[i\omega t - ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \times \\ \times \frac{\mathbf{v}}{\gamma} \dot{\xi}(\mathbf{v}, -t) \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r} - \xi(\mathbf{v}, -t)] f(\mathbf{v}). \quad (5.21)$$

Используя свойства δ -функции, можно провести в экспоненте замену $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ на ξ , после чего, как легко видеть, путем сравнения с уравнением (1.68) данное выражение можно переписать так:

$$e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} d\omega \omega G \frac{\mathbf{v}\dot{\xi}}{\gamma} f(\mathbf{v}), \quad (5.22)$$

или

$$e^2 \int_0^{\infty} dt \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} d\omega \omega G \frac{\mathbf{v}\dot{\xi}}{\gamma} f(\mathbf{v}) + \\ + e^2 \int_{-\infty}^0 dt \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} d\omega G \frac{\mathbf{v}\dot{\xi}}{\gamma} f(\mathbf{v}). \quad (5.23)$$

Положим в последнем интеграле $t = -t'$, $\phi = \phi' + \Omega t'$. Якобиан этого преобразования равен единице, в то время как из уравнений (1.68) и (1.56) видно, что величины, входящие в (5.23), можно выразить через первоначальные переменные

$$\ln G = -i \left(\omega - \frac{k_{\parallel} u}{\gamma} \right) t' + i \left(\frac{k_{\perp} \omega}{\gamma \Omega} \right) [\sin(\Omega t' + \phi') - \sin \phi'], \quad (5.24)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_3 u + \mathbf{e}_2 \omega \sin(\phi' + \Omega t') + \mathbf{e}_1 \omega \cos(\phi' + \Omega t'), \quad (5.25)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{e}_3 u + \mathbf{e}_2 \omega \sin \phi' + \mathbf{e}_1 \omega \cos \phi'. \quad (5.26)$$

Таким образом, если опустить штрихи, то видно, что данное преобразование переводит G в G^* , \mathbf{v} в $\dot{\xi}$ и $\dot{\xi}$ в \mathbf{v} , а уравнение (5.23) может быть записано путем сравнения с уравнениями (1.92) и последующими в виде

$$e^2 \int_0^{\infty} dt \int d^3 v (\mathbf{v}\dot{\xi} G + \dot{\xi} \mathbf{v} G^*) f \gamma^{-1} = \\ = 2\pi e^2 \int d^3 v f \gamma^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \delta \left(\omega - \frac{k_{\parallel} u}{\gamma} - n\Omega \right). \quad (5.27)$$

Данный результат справедлив, пока функция f не зависит от ϕ . В случае когда f задана уравнением (5.18), из уравнения (1.72) следует, что

$$\mathbf{Q} = \frac{4\pi i \omega e^2}{\theta} \int_0^{\infty} dt \int d^3v G \mathbf{v} \dot{\xi} f \gamma^{-1}. \quad (5.28)$$

Левая часть уравнения (5.27) может быть записана в виде $-2(\theta/4\pi i \omega) \mathbf{Q}''$, где \mathbf{Q}'' обозначает антиэрмитовую часть \mathbf{Q} , т. е.

$$\mathbf{Q}'' = \frac{1}{2} [\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^\dagger], \quad (5.29)$$

а символ « \dagger » обозначает комплексно-сопряженную перестановку. Эрмитова часть $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}''$.

В случае кинетического равновесия член уравнения (5.20), содержащий корреляционную функцию, может быть записан в виде

$$e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r' d^3v d^3v' \frac{\mathbf{v}}{\gamma} \frac{\mathbf{v}'}{\gamma'} f f' \times \\ \times \frac{-e^2}{\theta |\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|} \exp \left[i\omega t - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|}{\lambda_D} \right] \quad (5.30)$$

или, после выполнения интегрирования по \mathbf{r}'

$$e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3v d^3v' \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}'}{\gamma \gamma'} f f' \frac{4\pi e^2 / \theta}{k^2 + \lambda_D^{-2}} \exp [i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') + i\omega t]. \quad (5.31)$$

Сравнение данного выражения с уравнением (5.22) показывает, что их отношение по порядку величины равно

$$\frac{4\pi N e^2 / \theta}{k^2 + \lambda_D^{-2}} = \frac{1}{k^2 \lambda_D^2 + 1}. \quad (5.32)$$

Но, как мы увидим, для случаев, представляющих интерес $k \sim \sim \omega/c$, в то время как тепловая скорость $v_T \ll c$, а $\omega \gg \omega_p$. Таким образом, $k^2 \lambda_D^2 = (\omega/\omega_p)^2 (v_T/c)^2 \gg 1$ и членом, содержащим g , можно пренебречь по сравнению с членом, содержащим f . Очевидно, однако, что при рассмотрении частот $\omega \sim \omega_p$ этот член должен быть сохранен. С физической точки зрения предположение о том, что длина волны $2\pi/k$ много меньше, чем длина корреляции λ_D , означает, что корреляции не влияют на рассматриваемые явления.

5.3. Геометрическая оптика

Во многих интересных случаях, в частности в условиях, характеризующих, как предполагают, будущий термоядерный реактор, значительная доля излучения будет иметь длины волн малые по сравнению с соответствующей длиной поглощения, которая в свою очередь может быть соизмерима с характерными размерами системы. Это позволяет свести задачу к геометрической оптике с помощью метода, в котором в наинизшем порядке будут содержаться лишь величины обычные для теории однородной безграничной плазмы, но определенные в каждой точке системы через локальные макроскопические параметры в данной точке.

Наша программа будет сводиться прежде всего к нахождению выражения для точечного источника, определяющего функцию влияния, а затем с помощью суммирования по распределению таких источников к нахождению в каждой точке вектора Пойнтинга, который при усреднении по ансамблю приводит к уравнению радиационного переноса. Очевидно, что в непосредственной окрестности источника трудно ожидать справедливости коротковолнового приближения, однако по отношению к такому точечному источнику окружающая плазма может рассматриваться как однородная, несмотря на общую анизотропию. Предполагается, что на расстоянии нескольких длин волн от источника поля должны достигать своих асимптотических значений и иметь, по-видимому, характер полей излучения, или, точнее, векторной сферической волны, выражение для которой может быть плавно сведено к решению геометрической оптики.

Придерживаясь данной схемы, мы прежде всего рассмотрим область вдали от источника и будем искать решение в виде

$$\mathbf{E}_\omega = \boldsymbol{\varepsilon} e^{i\psi}. \quad (5.33)$$

Если мы введем обозначение

$$\mathbf{k} = \nabla\psi, \quad (5.34)$$

то уравнение (5.1) может быть записано в виде

$$c^2[-\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + i\mathbf{k} \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) + i\nabla \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}] - \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon} - 4\pi i \omega \mathbf{J}'_\omega e^{-i\psi} = 0. \quad (5.35)$$

Выражение $-4\pi i \omega \mathbf{J}'_\omega e^{-i\psi}$ связано с $\boldsymbol{\varepsilon}$ с помощью линейного оператора, который, предвосхищая последующие результаты, мы запишем формально в виде

$$-4\pi i \omega \mathbf{J}'_\omega e^{-i\psi} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.36)$$

Предполагается, что \mathbf{Q} не меняется заметно на размерах, на которых меняется ψ . Мы предполагаем также, что \mathbf{Q} будет до-

волью хорошо аппроксимироваться тензором, обозначенным нами ранее тем же символом. Кроме того, мы ожидаем, что значение действительной части вектора \mathbf{k} будет равно по порядку величины волновому вектору ω/c в свободном пространстве, в то время как амплитуда $\epsilon e^{-\text{Im} \psi}$ не будет сильно меняться с длиной волны, равной по порядку величины $2\pi c/\omega$. Это предположение требует, чтобы вектор \mathbf{k} удовлетворял однородной системе линейных уравнений

$$-c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}) - \omega^2 \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0. \quad (5.37)$$

Такая система, вообще говоря, имеет решение только для определенных значений параметров, входящих в линейные операторы. Теперь вектор \mathbf{k} есть градиент скаляра и в соответствии с этим должен быть безвихревым, что, как мы видим, приводит к дифференциальному уравнению. Запишем

$$\mathbf{k} = k' \mathbf{K}' + ik'' \mathbf{K}'' = \mathbf{k}' + ik'', \quad (5.38)$$

где \mathbf{K}' и \mathbf{K}'' — действительные единичные векторы, а k' и k'' — действительные амплитуды. Заметим, что данное разложение соответствует записи $\psi = \psi' + i\psi''$ при $\mathbf{k}' = \nabla\psi'$ и $\mathbf{k}'' = \nabla\psi''$. В таком случае должны иметь место уравнение

$$\nabla \times (k' \mathbf{K}') = (\nabla k') \times \mathbf{K}' + k' \nabla \times \mathbf{K}' = 0 \quad (5.39)$$

и соответствующее уравнение для величин с двумя штрихами. Умножим скалярно данное выражение на вектор \mathbf{K}' и, используя векторное соотношение $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b}\mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}\mathbf{c})$, запишем

$$0 = \mathbf{K}' \times [(\nabla k') \times \mathbf{K}'] + k' \mathbf{K}' \times (\nabla \times \mathbf{K}') = \\ = \nabla k' \mathbf{K}'^2 - \mathbf{K}' \mathbf{K}' \cdot \nabla k' + k' [(\nabla \mathbf{K}') \cdot \mathbf{K}' - \mathbf{K}' \cdot \nabla \mathbf{K}']. \quad (5.40)$$

Но поскольку $\mathbf{K}'^2 = 1$, то, вычисляя градиент, получаем, что $(\nabla \mathbf{K}') \cdot \mathbf{K}' = 0$, откуда

$$\nabla \ln k' - \mathbf{K}' \mathbf{K}' \cdot \nabla \ln k' = \mathbf{K}' \cdot \nabla \mathbf{K}'. \quad (5.41)$$

Пусть S обозначает длину дуги вдоль линии, описываемой уравнением $\mathbf{K}' \times d\mathbf{r} = 0$. Тогда уравнение (5.41) может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{K}'}{dS} = \mathbf{K}' \times [(\nabla \ln k') \times \mathbf{K}'] \quad (5.42)$$

и представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение для вектора \mathbf{K}' вдоль данных линий, являющихся, очевидно, траекториями, ортогональными к поверхностям $\psi' = \text{const}$. Действительно, если вектор \mathbf{K}' определен на одной такой поверхности, то он может быть найден везде путем решения обыкно-

венных дифференциальных уравнений, если амплитуда k' известна как функция \mathbf{r} и K' . Подобные утверждения могут быть сделаны и относительно вектора \mathbf{K}'' . Таким образом, мы приходим к заключению, что условием разрешимости уравнения (5.37) является определение k' и k'' как собственных значений уравнения.

Приступая к дальнейшему анализу, запишем $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} + \dots$, где мы рассматриваем k' как величину порядка $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$. Если подставить это выражение в уравнение (5.35) и приравнять различные порядки, то в наименьшем значимом порядке уравнение принимает вид

$$\mathbf{k}' \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}) + \nabla \times (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}) = 0. \quad (5.43)$$

Поскольку в данной работе мы не предполагаем переходить к точности более высокой, чем в нулевом порядке, то будем в дальнейшем отождествлять в приведенном выше уравнении $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$ с $\boldsymbol{\varepsilon}$. Теперь, забегаая вперед, скажем, что уравнение (5.37), помимо определения собственных значений k' и k'' , будет также определять с точностью до произвольного комплексного множителя соответствующий собственный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$. Таким образом, если мы введем действительные числа A и β и запишем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = A e^{i\beta} \mathbf{e}, \quad (5.44)$$

где \mathbf{e} — единичный вектор, выбранный некоторым однозначным образом так, что $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} = 1$, то можно предвидеть, что уравнение (5.43) будет определять значения A и β . Для того чтобы продемонстрировать это, образуем скалярное произведение уравнения (5.43) с вектором \mathbf{e}^* :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{k}' \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{e}^* \cdot \nabla \times (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}) = \\ &= -\nabla \cdot [\mathbf{e}^* \times (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon})] + (\nabla \times \mathbf{e}^*) \cdot \mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon} - (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{k}' \times \mathbf{e}^*. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Удобно ввести определения

$$\mathbf{s} = \text{Re} \{ \mathbf{e}^* \times (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}) \}, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{t} = \text{Im} \{ \mathbf{e}^* \times (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon}) \}. \quad (5.47)$$

Тогда, приравнявая отдельно действительные и мнимые части уравнения (5.45), получаем

$$\nabla \cdot (\mathbf{s} A^2) = \mathbf{s} \cdot \nabla A^2 + A^2 \nabla \cdot \mathbf{s} = 0, \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} 2A^2 \mathbf{s} \cdot \nabla \beta + \nabla \cdot (\mathbf{t} A^2) + \text{Im} A [(\nabla A) \times \mathbf{e}^* + A(\nabla \times \mathbf{e}^*)] \cdot \mathbf{k}' \times \boldsymbol{\varepsilon} - \\ - \text{Im} A [\nabla A \times \boldsymbol{\varepsilon} + A(\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})] \cdot \mathbf{k}' \times \mathbf{e}^* = 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Заметим, что векторы \mathbf{s} и \mathbf{t} в принципе уже известны, и, следовательно, можно сконструировать линии, описываемые уравнениями $\mathbf{s} \times d\mathbf{r} = 0$. Тогда уравнение (5.48) является обыкновенным дифференциальным уравнением для A вдоль такого луча.

Таким образом, если $d\zeta$ обозначает элемент длины дуги, то уравнение (5.48) может быть записано в виде

$$\frac{d \ln A}{d\zeta} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{s}}{2s}, \quad (5.50)$$

где правая часть является известной. Очевидно, что уравнение (5.49) также имеет подобную форму: $d\beta/d\zeta$ равно некоторой известной величине. Таким образом, если A и β даны на некоторой поверхности $\psi' = \text{const}$, то с помощью интегрирования они могут быть найдены везде. Поле $\mathbf{E}_\omega = \epsilon e^{i\psi}$, сконструированное таким способом, мы будем называть полем геометрической оптики.

Особый интерес представляет случай, когда все лучи \mathbf{k}' исходят радиально из точки \mathbf{r}' . Волновая поверхность, от которой начинается интегрирование, очевидно, представляет собой сферу бесконечно малого радиуса, и векторное поле \mathbf{k}' можно распространить на все пространство. То же самое можно сделать для вектора \mathbf{k}'' , который также исходит радиально, хотя, вообще говоря, и не параллельно взаимно дополняющему вектору \mathbf{k}' . Зная также ϵ как функцию координаты, можно сконструировать \mathbf{s} и \mathbf{t} . Вектор \mathbf{s} , очевидно, будет также направлен радиально от точки \mathbf{r}' , но не будет, вообще говоря, параллелен вектору \mathbf{k}' , с которым он связан уравнением (5.46). Вблизи точки \mathbf{r}' , вводя определение $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, можно записать

$$\nabla \cdot (\mathbf{s}A^2) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \mathbf{s}A^2) = 0. \quad (5.51)$$

Величина \mathbf{s} остается конечной при $\rho \rightarrow 0$. Таким образом, мы приходим к заключению, что вблизи точки источника $A \sim \rho^{-1}$. Как мы увидим, именно такое поведение требуется при $\rho \rightarrow 0$ для того, чтобы поле геометрической оптики соответствовало наинизшему порядку приближения, справедливого вблизи точки источника.

Дальнейший шаг на пути решения проблемы может быть сделан с учетом того, что если пренебречь величиной $\nabla \times \epsilon$ по сравнению с $i\mathbf{k} \times \epsilon$, как это было сделано при выводе уравнения (5.37), то уравнение (5.7) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{J}'_\omega = & - \sum \frac{q^2}{m} \int d^3v \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \right) \int_0^\infty dt e^{i(\omega + i\nu)t} \times \\ & \times [\nabla_\sigma f_0 + (\nu\omega)^{-1} \mathbf{k} \times (\mathbf{v}' \times \nabla_\sigma f_0)] \cdot \epsilon e^{i\psi}, \quad (5.52) \end{aligned}$$

где все аргументы различных функций в подынтегральных выражениях интегралов по времени вычисляются в точках $\mathbf{r}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, -t)$ и $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, -t)$. Приближенная схема, которой мы будем следо-

вать, заключается, однако, в использовании разложения в ряд Тэйлора:

$$\psi(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}) + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{k}'(\mathbf{r}) + \dots \quad (5.53)$$

и сохранении только членов, указанных здесь в явной форме. Кроме того, поскольку нас интересует в конечном счете проблема синхротронного излучения из квазирелятивистской плазмы в сильном магнитном поле, то мы можем соответственно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_0 + \mathbf{r}'_1 + \dots, \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_1 + \dots, \end{aligned} \quad (5.54)$$

где \mathbf{r}'_0 и \mathbf{v}'_0 соответствуют той траектории, которую частица имела бы, если в момент времени t она проходила через точку \mathbf{r} , \mathbf{v} и двигалась бы вне электрического поля, но в однородном магнитном поле, равном усредненному по ансамблю стационарному магнитному полю, существующему в точке \mathbf{r} . Затем учитывается добавка возмущения \mathbf{v}'_1 , например, различные дрейфовые движения, возникающие в скрещенных электрическом и магнитных полях и в неоднородном магнитном поле. Мы будем предполагать, что данная добавка много меньше, чем тепловая скорость, а это, по-видимому, в особенности справедливо для квазирелятивистских систем. Таким образом, если мы сохраним в наинищем порядке только члены \mathbf{r}'_0 и \mathbf{v}'_0 , то интегральный оператор уравнения (5.36) может быть приближенно представлен в виде тензора \mathbf{Q} , определяемого уравнением (1.72) при замене ω на $\omega + i\nu$ и вектора \mathbf{k} на \mathbf{k}' .

В данном порядке приближения однородные условия, определяющие значение \mathbf{k} и направление $\boldsymbol{\varepsilon}$, могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad (5.55)$$

где

$$\mathbf{R} = (c^2 k^2 - \omega^2) \mathbf{I} - c^2 \mathbf{k} \mathbf{k} + \mathbf{Q}, \quad (5.56)$$

а \mathbf{Q} зависит от $\mathbf{k}' = \text{Re } \mathbf{k}$. Условие того, что данные уравнения имеют нетривиальное решение, есть $|\mathbf{R}| = 0$. Если мы выберем ряд ортогональных комплексных базисных векторов \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z , таких, что $\mathbf{e}_x^* \cdot \mathbf{e}_x = 1$, $\mathbf{e}_x^* \cdot \mathbf{e}_y = 0$ и т. д. при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_x^* = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_y^* = 0$, то элементы \mathbf{R} в данном случае могут быть представлены в виде

$$\left\| \begin{array}{ccc} c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & -\omega^2 + Q_{zz} \end{array} \right\|. \quad (5.57)$$

Теперь элементы \mathbf{Q} являются, вообще говоря, функциями \mathbf{k}' , но ограничены значениями порядка ω_p^2 (как мы увидим позднее

в явном виде для случая теплового равновесия), пока в рассматриваемой области часто отсутствуют острые резонансы, что справедливо для случая квазирелятивистских электронов. Таким образом, если $\omega^2 \gg \omega_p^2$, то для уравнения $|\mathbf{R}| = 0$ величину k в тензоре \mathbf{Q} с хорошим приближением можно заменить величиной k' для свободного пространства ($k' = (\omega/c)\mathbf{K}'$). Очевидно результат может быть улучшен с помощью итерирования.

Уравнение $|\mathbf{R}| = 0$, если \mathbf{Q} рассматривать заданным, формально является квадратичным по k^2 , а его корни, как легко показать, равны

$$k_{\pm}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{1}{2c^2} \left[Q_{xx} + Q_{yy} + \frac{Q_{xz}Q_{zx} + Q_{yz}Q_{zy}}{\omega^2 - Q_{zz}} \right] \pm \frac{1}{2c^2} \left\{ \left[Q_{xx} - Q_{yy} + \frac{Q_{xz}Q_{zx} - Q_{yz}Q_{zy}}{\omega^2 - Q_{zz}} \right]^2 + 4 \left[Q_{xy} + \frac{Q_{xz}Q_{zx}}{\omega^2 - Q_{zz}} \right] \left[Q_{yx} + \frac{Q_{zy}Q_{yz}}{\omega^2 - Q_{zz}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (5.58)$$

Поскольку в общем случае тензор \mathbf{Q} не является эрмитовым, то корни k_{\pm}^2 должны быть, вообще говоря, комплексными. Очевидно, что в пределе $\omega^2 > \omega_p^2$ будут существовать именно эти два корня, и данная ситуация будет сохраняться при уменьшении ω^2 , пока плазма остается устойчивой и не имеет незатухающих коротковолновых мод. Каждому квадратному корню $k = k_+$, $-k_+$, k_- , $-k_-$ будет соответствовать собственный вектор, направление которого может быть выражено через элементы матрицы \mathbf{R}^A , поскольку из соотношения $\mathbf{R}^A = \mathbf{R}^{-1}|\mathbf{R}|$, если его умножить слева на \mathbf{R} , а справа на произвольный вектор \mathbf{b} , следует, что

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^A \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{R}| \mathbf{b}. \quad (5.59)$$

Но если k есть корень уравнения $|\mathbf{R}| = 0$, то легко видеть путем сравнения этого уравнения с уравнением (5.55), что $\mathbf{R}^A \cdot \mathbf{b}$ есть соответствующий собственный вектор. Если мы введем единичный вектор поляризации

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}^A \cdot \mathbf{b} [(\mathbf{R}^A \cdot \mathbf{b})^* \cdot (\mathbf{R}^A \cdot \mathbf{b})]^{-1/2}, \quad (5.60)$$

то общий собственный вектор может быть записан в форме уравнения (5.35), где A и β — действительные числа. Заметим, что в общем случае $\mathbf{e}_+^* \cdot \mathbf{e}_- \neq 0$.

Поле геометрической оптики, метод расчета которого только что был развит, в общем случае эллиптически поляризовано. Для того чтобы продемонстрировать это, введем в плоскости, содержащей действительную и мнимую части вектора \mathbf{E} , два

действительных ортогональных вектора \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Тогда электрическое поле обсуждаемой моды может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathbf{E}_\omega e^{i\psi} &= \operatorname{Re} [(\epsilon'_1 + i\epsilon''_1) \mathbf{e}_1 + (\epsilon'_2 + i\epsilon''_2) \mathbf{e}_2] e^{-i\omega t} = \\ &= (\epsilon'_1 \cos \omega t + \epsilon''_1 \sin \omega t) \mathbf{e}_1 + (\epsilon'_2 \cos \omega t + \epsilon''_2 \sin \omega t) \mathbf{e}_2 \equiv \\ &\equiv A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= (\epsilon''_2 A_1 - \epsilon''_1 A_2) [\epsilon'_1 \epsilon''_2 - \epsilon'_2 \epsilon''_1]^{-1}, \\ \sin \omega t &= (\epsilon'_1 A_2 - \epsilon'_2 A_1) [\epsilon'_1 \epsilon''_2 - \epsilon'_2 \epsilon''_1]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Если исключить время, возводя в квадрат и суммируя эти уравнения, то получим

$$\begin{aligned} [\epsilon'_1 \epsilon''_2 - \epsilon'_2 \epsilon''_1]^2 &= (\epsilon_2'^2 + \epsilon_1''^2) A_2^2 - 2(\epsilon_1'' \epsilon_2'' + \epsilon_1' \epsilon_2') A_1 A_2 + \\ &+ (\epsilon_2'^2 + \epsilon_2''^2) A_1^2. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Ориентацию ортогональных векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 всегда можно выбрать таким способом, чтобы коэффициент $A_1 A_2$ обращался в нуль, и в этом случае уравнение принимает вид обычного уравнения эллипса.

Если в уравнении (5.59) положить $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x$, то компоненты вектора \mathbf{e} будут удовлетворять соотношению

$$\frac{\epsilon_x}{R_{xx}^A} = \frac{\epsilon_y}{R_{yx}^A} = \frac{\epsilon_z}{R_{zx}^A} \quad (5.64)$$

или после подстановки значений элементов R^A

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon_x}{(c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{yy})(-\omega^2 + Q_{zz}) - Q_{yz} Q_{zy}} = \\ &= \frac{\epsilon_y}{Q_{zy} Q_{xz} - Q_{xy}(-\omega^2 + Q_{zz})} = \frac{\epsilon_z}{Q_{xy} Q_{yz} - Q_{xz}(c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{yy})}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

В пределе $\omega^2 \gg \omega_p^2$ элементы тензора \mathbf{Q} , как будет показано ниже, ограничены числом порядка ω_p^2 , и корни уравнения хорошо аппроксимируются выражением

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{2c^2} (Q_{xx} + Q_{yy}) \pm \frac{1}{2c^2} [(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy} Q_{yx}]^{1/2}. \quad (5.66)$$

Из уравнения (5.65) видно, кроме того, что знаменатель члена с ϵ_z уменьшен на фактор порядка ω_p^2/ω^2 по сравнению с другими знаменателями. Следовательно, в том же приближении, что было использовано выше, $\epsilon_z = 0$ и

$$\frac{\epsilon_x}{c^2 k^2 - \omega^2 + Q_{yy}} = - \frac{\epsilon_y}{Q_{xy}}. \quad (5.67)$$

Тот же самый результат мог бы быть получен, если бы мы использовали определитель второго порядка, полученный из выражения (5.59), отбросив в нем все элементы, содержащие z . Заметим, что в этом пределе, поскольку $c^2k^2 - \omega^2 + Q_{yy}$ и Q_{yx} определяют масштаб средней плотности, отношение e_x/e_y не зависит от средней плотности. Заметим также, что даже в этом пределе $e_+^* \cdot e_-$, вообще говоря, не равно нулю, поскольку матрица \mathbf{Q} в общем случае не является эрмитовой.

Поскольку предположительно $k'^2 \gg k''^2$, то можно ожидать, что мнимая часть k^2 будет мала по сравнению с действительной. Но

$$k^2 = k'^2 - k''^2 + 2ik'k''\mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}''. \quad (5.68)$$

Таким образом, можно приближенно положить k'^2 равным действительной части правой половины уравнения (5.66), а $2k'k''\mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}''$ — мнимой части.

5.4. Функция влияния

В качестве следующего шага для построения функции влияния в приближении геометрической оптики рассмотрим действие точечного элемента тока, расположенного в плазме в точке \mathbf{r}' . Очевидно, что геометрическая оптика будет являться плохим приближением в области нескольких длин волн от источника, но вне этой области, обычно называемой волновой зоной, результат данного приближения асимптотически будет приближаться к правильному решению. В соответствии с предположением о том, что плазма не меняет заметно своих свойств на расстоянии порядка длины волны, мы можем приближенно решать задачу вблизи источника, считая его помещенным в бесконечную среду, свойства которой везде такие же, как и в точке \mathbf{r}' . Асимптотическое выражение для \mathbf{E}_ω затем сшивается с полем геометрической оптики и может быть продолжено на область вдали от источника с помощью уже развитой теории.

Таким образом, мы хотим решить уравнение

$$c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_\omega - \omega^2 \mathbf{E}_\omega - 4\pi i \omega \mathbf{J}'_\omega = 4\pi i \omega \bar{\mathbf{J}}_\omega \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.69)$$

что нетрудно сделать с помощью фурье-преобразования по \mathbf{r} , а именно:

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}, \quad (5.70)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{1}{8\pi^3} \int d^3r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}). \quad (5.71)$$

В результате преобразования получаем

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{i\omega}{2\pi^2} \bar{\mathbf{J}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}, \quad (5.72)$$

где, как обычно, $\mathbf{R} = (c^2 k^2 - \omega^2) \mathbf{I} - c^2 \mathbf{k} \mathbf{k} + \mathbf{Q}$, но \mathbf{Q} вычисляется для параметров в точке \mathbf{r}' . Затем после подстановки и введения обозначения $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) &= \frac{i\omega}{2\pi^2} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}} \mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{J}} = \\ &= \frac{i\omega}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{J}} \frac{1}{ik\rho} \frac{\partial}{\partial \mu} e^{ik\rho\mu}, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где мы выбрали систему сферических полярных координат (k , $\arccos \mu$, ϕ) с полюсом вдоль $\boldsymbol{\rho}$. Приведенный выше интеграл в общем случае не может быть вычислен через элементарные функции, однако путем последовательного интегрирования по частям по переменной μ можно, очевидно, образовать асимптотический ряд, справедливый при больших значениях ρ . Мы потребуем, чтобы только основной член этого ряда сшивался с полем геометрической оптики, а именно:

$$\mathbf{E}_{\omega} = \frac{i\omega}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{J}} \frac{e^{ik\rho\mu}}{ik\rho} \Big|_{\mu=-1}^{\mu=1}. \quad (5.74)$$

Но для данных значений μ вектор \mathbf{k} либо параллелен, либо антипараллелен $\boldsymbol{\rho}$ и подынтегральное выражение не зависит от ϕ . Таким образом, можно записать

$$\mathbf{E}_{\omega} = \frac{i\omega}{\pi\rho} \int_0^{\infty} dk k \left[e^{ik\rho} \mathbf{R}^{-1} \Big|_{\mu=1} - e^{-ik\rho} \mathbf{R}^{-1} \Big|_{\mu=-1} \right] \cdot \bar{\mathbf{J}}. \quad (5.75)$$

Далее в соответствии с уравнением (1.99) записываем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= - \sum \frac{4\pi q^2}{m} \int \frac{d^3 v}{\gamma} \left[\frac{\omega}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3}{\gamma \omega} \left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial \omega} - u \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \right] \times \\ &\quad \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{T}_n}{\omega + iv - \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 u / \gamma - n\Omega}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

где \mathbf{e}_3 — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля в точке \mathbf{r}' , а \mathbf{T}_n зависит от \mathbf{k} только через $(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_3)^2$. Таким образом, \mathbf{Q} и, следовательно, \mathbf{R} и \mathbf{R}^{-1} , которые, не считая их зависимости от \mathbf{k} через \mathbf{Q} , содержат только k^2 и $\mathbf{k} \mathbf{k}$, поскольку имеется только значение $\mu = 1$, зависят только от $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 = k \hat{\mu} \cdot \mathbf{e}_3$, причем изменение k на $-k$ эквивалентно замене μ на $-\mu$. Следовательно, если в члене уравнения (5.75), вычисляемом для

$\mu = -1$, мы изменим переменную интегрирования с k на $-k$, то, объединяя оба члена, получаем

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{\omega}{\pi\rho} \int dk k e^{ik\rho} \mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{J}}, \quad (5.77)$$

где в \mathbf{R}^{-1} мы ввели обозначение $\mathbf{k} = k\hat{\rho}$. Теперь это выражение имеет форму, при которой оно может быть вычислено с помощью интегрирования по контуру.

Для того чтобы сделать это, рассмотрим контур, замкнутый в верхней k -полуплоскости полуокружностью с радиусом, уходящим в бесконечность. Пусть k_+ и k_- обозначают те квадратные корни k_+^2 и k_-^2 , которые имеют положительную мнимую часть, и мы обозначим

$$\Delta(k) = |\mathbf{R}|. \quad (5.78)$$

Затем, поскольку $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^A \Delta^{-1}$ вблизи $k = k_\pm$, получаем, что $\Delta(k) \sim (k - k_\pm) \Delta'(k_\pm)$, где штрих обозначает дифференцирование по k . Применение теоремы Коши приводит к результату:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{2i\omega}{\rho} \left[\frac{k_+}{\Delta'_+} \mathbf{R}_+^A e^{ik_+\rho} + \frac{k_-}{\Delta'_-} \mathbf{R}_-^A e^{ik_-\rho} \right] \cdot \bar{\mathbf{J}}, \quad (5.79)$$

где индекс «+» или «-» при операторах Δ' и \mathbf{R}^A показывает, что они должны быть вычислены при $k = k_+$ или $k = k_-$ соответственно. Заметим, что $\mathbf{R}_\pm^A \cdot \bar{\mathbf{J}}$ есть вектор в направлении собственного вектора, связанного с k , как было это показано в уравнениях (5.59) и следующих.

Правильность этого результата может быть проверена для случая $\mathbf{Q} = 0$, где $\Delta = -\omega^2(c^2k^2 - \omega^2)^2$ и $\mathbf{R}^A = -\omega^2(c^2k^2 - \omega^2) \times \times (\mathbf{I} - \hat{\rho}\hat{\rho}) + (c^2k^2 - \omega^2)^2 \hat{\rho}\hat{\rho}$. В этих выражениях ω должно рассматриваться как величина, имеющая бесконечно малую положительную мнимую часть. Поскольку корни $k_\pm = \omega/c$ являются двукратно вырожденными, то вместо того, чтобы применять правило Лопиталья к уравнению (5.79), удобнее вернуться к уравнению (5.77), преобразовав его к виду

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{\omega}{\pi\rho} \int_C dk k e^{ikr} \left[\frac{\mathbf{I} - \hat{\rho}\hat{\rho}}{c^2k^2 - \omega^2} - \frac{\hat{\rho}\hat{\rho}}{\omega^2} \right], \quad (5.80)$$

где контур C описан выше. Применение теоремы о вычетах дает выражение

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega}{c^2} \frac{e^{i\omega\rho/c}}{\rho} (\mathbf{I} - \hat{\rho}\hat{\rho}) \cdot \bar{\mathbf{J}}, \quad (5.81)$$

которое согласуется с видом асимптотического решения, вытекающего из уравнения (5.12). Мы отождествляем уравнение (5.79) с предельным полем геометрической оптики для случая

$\rho \rightarrow 0$. Введем следующие функции от \mathbf{r}' , определенные для случая $\rho = 0$:

$$e_{\pm} = \mathbf{R}_{\pm}^A \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\omega} [(\mathbf{R}_{\pm}^A \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\omega})^* \cdot (\mathbf{R}_{\pm}^A \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\omega})]^{-1/2}, \quad (5.82)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho A_{\pm} = \frac{2i\omega k_{\pm}}{\Delta'_{\pm}} e_{\pm}^* \cdot \mathbf{R}_{\pm}^A \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\omega}, \quad (5.83)$$

$$\beta_{\pm} = 0, \quad (5.84)$$

$$\mathbf{k}'_{\pm} = k'_{\pm} \rho, \quad (5.85)$$

$$\mathbf{k}''_{\pm} = k''_{\pm} \rho, \quad (5.86)$$

где $k_{\pm} = k'_{\pm} + ik''_{\pm}$. Очевидно, что для поляризации, обозначенной плюсом, и поляризации, обозначенной минусом, можно с помощью уравнений (5.58), (5.41) и (5.60) определить значения величин \mathbf{k}'_{\pm} , \mathbf{k}''_{\pm} , e_{\pm} и отсюда найти \mathbf{s}_{\pm} , \mathbf{t}_{\pm} и т. д. Тогда уравнения (5.48) и (5.49) с учетом приведенных выше условий (5.83) и (5.84) позволяют нам определить повсюду коэффициенты A и β и определить однозначным образом поле геометрической оптики, связанное с точечным источником $\bar{\mathbf{J}}_{\omega}$, расположенным в точке \mathbf{r}' .

В общем случае система лучей, образованная при данной поляризации вектором \mathbf{s} для точечного источника в точке \mathbf{r}' , не будет совпадать с системой лучей, связанных с точечным источником, расположенным в точке \mathbf{r}'' . Таким образом, для того чтобы определить электрическое поле \mathbf{e}_{ω} в точке \mathbf{r} , необходимо образовать систему лучей для всех точек \mathbf{r}' , в которых $\mathbf{J}''_{\omega}(\mathbf{r}') \neq 0$. Однако при данной поляризации в точке \mathbf{r}' будет существовать по крайней мере один луч, пересекающий точку \mathbf{r} , в которой поляризация e , фаза β , функция ψ и амплитуда A будут однозначно определены с помощью развитого выше метода. В частности, скалярная величина A должна быть линейной функцией мощности источника в точке \mathbf{r}' и, следовательно, выражаться в виде скалярного произведения некоторого вектора и вектора тока источника. Таким образом, для суммарного поля, обусловленного источниками, расположенными в пределах системы, можно записать выражение

$$\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) = \sum_{\pm} \int d^3r' \exp \{i[\psi_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \beta_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]\} \times \\ \times e_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}''_{\omega}(\mathbf{r}'), \quad (5.87)$$

где суммирование производится по двум поляризациям. К этому выражению необходимо добавить вклады от полей всех внешних источников. Заметим, что лучи, связанные с точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' , в об-

щем случае будут обладать различными поляризациями. Ясно, что коэффициент при $\mathbf{J}''_{\omega}(\mathbf{r}')$ в приведенном выше подынтегральном выражении в приближении геометрической оптики представляет собой формальное выражение для функции (тензора) влияния $\mathbf{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Для частного случая пространственно однородной плазмы решение для точки \mathbf{r} внутри плазмы может быть записано с учетом вклада всех источников системы в виде

$$\mathbf{E}_{\omega} = 2i\omega \sum_{\pm} \int d^3r' \frac{k_{\pm}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \Delta'_{\pm}} \mathbf{R}_{\pm}^A \cdot \mathbf{J}''_{\omega}(\mathbf{r}') \times \\ \times \exp(ik'_{\pm} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - k''_{\pm} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (5.88)$$

где k_{\pm} , Δ и \mathbf{R}_{\pm}^A являются функциями направления $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ в соответствии с требованием, что для каждого типа поляризации соответствующий вектор \mathbf{s}_{\pm} должен быть параллелен вектору $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Заметим, что $e^* \cdot k_{\pm} \mathbf{R}_{\pm}^A |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \Delta'_{\pm}{}^{-1}$ представляет собой вектор $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в уравнении (5.87). Магнитное поле в приближении геометрической оптики, связанное с приведенным выше электрическим полем, определяется из соотношения $\mathbf{B}_{\omega} = i(c/\omega) \nabla \times \mathbf{E}_{\omega}$ и равно

$$\mathbf{B}_{\omega} = -2ic \sum_{\pm} \int d^3r' \frac{k_{\pm}^2}{\Delta'_{\pm}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \\ \times \mathbf{R}_{\pm}^A \cdot \mathbf{J}''_{\omega}(\mathbf{r}') \exp(ik'_{\pm} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - k''_{\pm} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (5.89)$$

поскольку в наинишем порядке достаточно применить оператор градиента к вектору $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ только в члене $\exp(ik_{\pm} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$.

Реальная ограниченная плазма всегда имеет вокруг себя стенки и другие предметы, которые могут поглощать и отражать излучение, создавая таким образом дополнительные поля, которые должны быть добавлены в каждой данной точке к полям излучения непосредственно от внутренних источников. Кроме того, если мы принимаем модель плазмы с постоянной плотностью или модель, в которой плотность может меняться в пространстве, но на границе меняется на расстояниях короче, чем длина волны, то необходимо учитывать рефракцию на границе и возможность внутреннего отражения, если фазовая скорость на границе плазмы больше, чем скорость света, и имеется надлежащий угол падения. Очевидно, что в пределах любого такого граничного слоя геометрическая оптика неприменима, однако в рамках геометрической оптики обычное соотношение между полями на противоположных сторонах граничного слоя, рассма-

триваемого в пределе как математическую поверхность, может быть получено с использованием известного в электродинамике условия скачков на границе. При этом предполагается, что радиус кривизны этой предельной поверхности много больше, чем длина волны.

Пусть \mathbf{n} обозначает единичную нормаль в данной точке поверхности. Предположим при этом отсутствие поверхностного тока. Тогда если обозначить скобками $[[\dots]]$ пограничный скачок величин, заключенных внутри объема, то в соответствии с уравнениями (1.4) и (1.5) получаем условия

$$[[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\omega]] = 0, \quad (5.90)$$

$$c [[\mathbf{n} \times \mathbf{B}_\omega]] = 4\pi \mathbf{J}_\omega^*, \quad (5.91)$$

где \mathbf{J}^* есть плотность поверхностного тока, если таковой имеется. Если воспользоваться выражениями для полей в приближении геометрической оптики $\mathbf{E}_\omega = \boldsymbol{\varepsilon} e^{i\psi}$, $\mathbf{B}_\omega = (c/\omega) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon} e^{i\psi}$, то, поскольку фаза ψ должна быть непрерывной, первое условие предполагает, что тангенциальная компонента $\boldsymbol{\varepsilon}$ должна быть непрерывной. Второе условие в соответствии с (5.91) дает

$$4\pi\omega c^{-2} e^{-i\psi} \mathbf{J}_\omega^* = [[\mathbf{n} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon})]] = [[\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}]] = 0. \quad (5.92)$$

Скачок $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$ определяется по известным из уравнения (5.58) значениям величины k . Легко можно установить, что эти соотношения представляют собой просто закон преломления Снеллиуса. Если принять, что $k' = \text{Re } k$, и если θ — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{k}' , то непрерывность $\mathbf{n} \times \mathbf{k}'$ предполагает непрерывность $k' \sin \theta$, в то время как $k'c/\omega$ может рассматриваться как коэффициент отражения.

5.5. Излучение однородной плазмы

Рассмотрим ограниченную однородную плазму в свободном пространстве. Рассчитаем интенсивность излучения в направлении $\hat{\mathbf{r}}$. В предельном случае $\omega^2 \gg \omega_p^2$, которым мы ограничимся, $k'_\pm \sim \omega/c$, и излучение не будет ни отражаться от границы, ни менять поляризацию при выходе лучей из плазмы. Поэтому в точке \mathbf{r} вдали от плазмы поле определяется значением поля в точке $\mathbf{r}_b(\mathbf{r}')$, где рассматриваемый луч пересекает границу плазмы. Действительно, для данной точки свободного пространства можно прямо использовать выражения (5.88) и (5.89), заменяя в них $k''_\pm |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ на $k'_\pm |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}'|$. Если мы выберем начало нашей системы координат, лежащим внутри плазмы, и если расстояние r много больше, чем размеры системы, то

можно заменить уравнения (5.88) и (5.89) их асимптотическими выражениями

$$\mathbf{E}_\omega = 2i\omega \sum_{\pm} \frac{k_{\pm}}{\Delta_{\pm}} \mathbf{R}_{\pm}^A \frac{e^{ik'_{\pm} r}}{r} \int d^3 r' \mathbf{J}''_{\omega}(\mathbf{r}') \times \\ \times \exp[-ik' \cdot \mathbf{r}' - k''_{\pm} \cdot (\mathbf{r}_b \cdot \mathbf{r}')], \quad (5.93)$$

$$\mathbf{B}_\omega = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_\omega, \quad (5.94)$$

где нами введены новые векторы $\mathbf{k}' = (\omega/c) \hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{k}''_{\pm} = k''_{\pm} \hat{\mathbf{r}}$, а \mathbf{R}_{\pm}^A и Δ_{\pm} зависят только от \mathbf{r} . Заметим, что $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_\omega = 0$. Решение данных уравнений достигается обычным путем разложения $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в ряд Тэйлора и учетом первого порядка разложения в фазовом факторе, а в остальных только нулевого порядка.

Как видно из уравнения (5.57), в высокочастотном пределе можно записать

$$\Delta = c^4 (k^2 - k_+^2)(k^2 - k_-^2), \quad (5.95)$$

откуда

$$\Delta'_{\pm} = \pm 2c^4 k_{\pm} (k_+^2 - k_-^2) \sim \pm 2\omega c^3 (k_+^2 - k_-^2), \quad (5.96)$$

а k_{\pm}^2 определяется уравнением (5.66). В том же порядке приближения матрице \mathbf{R}^A соответствует матрица

$$\left\| \begin{array}{cc} -\frac{1}{2}(Q_{xx} - Q_{yy}) \pm \frac{c^2}{2}(k_+^2 - k_-^2) & -Q_{xy} \\ -Q_{yx} & \frac{1}{2}(Q_{xx} - Q_{yy}) \pm \frac{c^2}{2}(k_+^2 - k_-^2) \end{array} \right\| \quad (5.97)$$

и

$$k_+^2 - k_-^2 = [(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}Q_{yx}]^{1/2}. \quad (5.98)$$

В данном порядке приближения в качестве базисных векторов \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z можно выбирать тройку действительных ортогональных векторов, удовлетворяющих правилу правой руки с $\mathbf{e}_z = \hat{\mathbf{r}}$. Таким образом, уравнение (5.93) может быть записано в виде

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}''_{\omega}(\mathbf{r}'), \quad (5.99)$$

где

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i\omega}{c^4 (k_+^2 - k_-^2)} \frac{e^{i\omega r/c - ik \cdot \mathbf{r}'}}{r} \times \\ \times (\mathbf{R}_+^A e^{-k''_+ \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}')} - \mathbf{R}_-^A e^{-k''_- \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}')}). \quad (5.100)$$

Отсюда

$$|\mathbf{E}_\omega|^2 = \int d^3r' d^3r'' \mathbf{J}_\omega''(\mathbf{r}') \mathbf{J}_\omega''(\mathbf{r}'') \cdot \mathbf{W}_+^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (5.101)$$

поскольку $J_\omega''' = -J_{-\omega}''$.

В уравнении (5.101) индекс „+“ обозначает комплексно-сопряженную величину, а

$$\mathbf{J}_\omega''(\mathbf{r}') \mathbf{J}_{-\omega}''(\mathbf{r}'') = \int_{-t_1}^{t_1} dt' \int_{-t_1}^{t_1} dt'' e^{i\omega(t'-t'')} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') \mathbf{J}(\mathbf{r}'', t''). \quad (5.102)$$

Таким образом, после усреднения по ансамблю подынтегрального выражения с учетом, что оно зависит только от $t' - t''$, получаем в пределе $t_1 \rightarrow \infty$

$$\langle\langle \mathbf{J}_\omega''(\mathbf{r}') \mathbf{J}_{-\omega}''(\mathbf{r}'') \rangle\rangle = 2t_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \mathbf{J}(\mathbf{r}'', t + \tau) \rangle\rangle. \quad (5.103)$$

С другой стороны, поскольку вдали от плазмы $\mathbf{B}_\omega = \mathbf{E}_\omega$, мы можем записать уравнение (5.13) в виде

$$S_\omega = \frac{c^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle\langle \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega't} E_{\omega'} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' e^{-i\omega''(t+\tau)} E_{\omega''} \rangle\rangle, \quad (5.104)$$

но

$$\int d\tau e^{i(\omega - \omega'')\tau} = 2\pi\delta(\omega - \omega''), \quad (5.105)$$

откуда

$$S_\omega = \frac{c}{16\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i(\omega + \omega')t} \langle\langle E_{\omega'} E_{\omega} \rangle\rangle. \quad (5.106)$$

Если мы проинтегрируем данное выражение по времени от $-t_1$ до t_1 и разделим на $2t_1$, то, устремляя $t_1 \rightarrow \infty$ и применяя уравнение (5.105), получаем

$$S_\omega = \frac{c}{8\pi^2} \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_1} |\mathbf{E}_\omega|^2. \quad (5.107)$$

Далее, комбинируя полученное уравнение с уравнениями (5.101) и (5.103), находим

$$S_\omega = \frac{c}{8\pi^2} \int d^3r' d^3r'' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle\langle \mathbf{J}''(\mathbf{r}', t) \times \mathbf{J}''(\mathbf{r}'', t + \tau) \rangle\rangle * \mathbf{W}_+^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (5.108)$$

Заметим, что при соответствующем переопределении \mathbf{W} имеет место то же выражение, если \mathbf{E}_ω определяется уравнением (5.87).

Используем уравнение (5.100) для вычисления \mathbf{W}

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\omega^2}{c^8 |k_+^2 - k_-^2|^2 r^2} \exp[ik' \cdot (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')] \times \\ &\times \left\{ \mathbf{R}_+^{A\dagger} \cdot \mathbf{R}_+^A \exp\{-k_+'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{r}'] - k_+'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}'') - \mathbf{r}'']\} - \right. \\ &- \mathbf{R}_+^{A\dagger} \cdot \mathbf{R}_-^A \exp\{-k_-'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{r}'] - k_+'' [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}'') - \mathbf{r}'']\} - \\ &- \mathbf{R}_-^{A\dagger} \cdot \mathbf{R}_+^A \exp\{-k_+'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{r}'] - k_-'' [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}'') - \mathbf{r}'']\} + \\ &\left. + \mathbf{R}_-^{A\dagger} \cdot \mathbf{R}_-^A \exp\{-k_-'' [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{r}'] - k_-'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}'') - \mathbf{r}'']\} \right\}. \quad (5.109) \end{aligned}$$

Оценка порядка величины интеграла $\int dt e^{i\omega t} \langle\langle \mathbf{J}''(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{J}''(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle\rangle$ показывает, что он стремится к нулю, если $\omega^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 / \langle v^2 \rangle \gg 1$. (Это подробно рассмотрено в приложении I для случая немагнитиченной нерелятивистской равновесной плазмы.) Это означает, что в соответствии с принятыми до сих пор приближениями величина $k_\pm'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}'') - \mathbf{r}'']$ в уравнении (5.109) может быть заменена на $k_\pm'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{r}']$. Так как данные выражения быстро стремятся к нулю с ростом величины $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, то если рассматривать последнюю как переменную и использовать уравнения (5.27) и последующие, можно свести уравнение (5.109) к виду

$$\begin{aligned} S_\omega &= \frac{i\omega}{16\pi^3 c^3 r^2} \int d^3 r' \frac{\theta Q''}{c^4 |k_+^2 - k_-^2|^2} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{R}_+^{A\dagger} \cdot \mathbf{R}_+^A \exp\{-2k_+'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{r}']\} - \right. \\ &- \left[\mathbf{R}_+^{A\dagger} \cdot \mathbf{R}_-^A + \mathbf{R}_-^{A\dagger} \cdot \mathbf{R}_+^A \right] \exp\{-(k_+'' + k_-'') \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{r}']\} + \\ &\left. + \mathbf{R}_-^{A\dagger} \cdot \mathbf{R}_-^A \exp\{-2k_-'' \cdot [\mathbf{r}_b(\mathbf{r}') - \mathbf{r}']\} \right\}, \quad (5.110) \end{aligned}$$

где θ , \mathbf{Q}^A , k_\pm и \mathbf{R} — все являются функциями $\hat{\mathbf{r}}$. Заметим, что если размеры плазмы много меньше, чем минимальная величина $1/k'_\pm$, то для однородной системы с учетом вытекающего из уравнения (5.98) соотношения

$$\mathbf{R}_+^A - \mathbf{R}_-^A = c^4 (k_+^2 - k_-^2) (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.111)$$

следует записать

$$S_{\omega} = \frac{i\omega V}{16\pi^3 c^2 r^2} \theta (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{Q}'', \quad (5.112)$$

где V — объем. Но $i(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{Q}'' = -\text{Im}(Q_{xx} + Q_{yy})$, в то время как из уравнений (5.66), (5.68) и последующих видно, что в высокочастотном пределе $2\omega c(k_+'' + k_-'') = -\text{Im}(Q_{xx} + Q_{yy})$. Таким образом, после исключения \mathbf{Q}'' из уравнения (5.112) получаем соотношение

$$V^{-1} r^2 S_{\omega} = \frac{\omega^2 \theta}{8\pi^3 c^2} (k_+'' + k_-''), \quad (5.113)$$

которое с учетом того, что $\omega^2 \theta / 8\pi^3 c^2$ есть выражение Релея — Джинса для интенсивности спектра в единице телесного угла и в единичном интервале частот, а $k_+'' + k_-''$ есть суммарный коэффициент поглощения, представляет собой закон Кирхгофа для суммарного излучения в единице объема. Так как перекрестные члены в уравнении (5.111) не стремятся к нулю, за исключением случая $\mathbf{Q}' \gg \mathbf{Q}''$ или обратного, то в общем случае видно, что закон Кирхгофа не выполняется для каждой моды излучения в отдельности.

Подобное же рассмотрение может быть проведено для вычисления суммарного излучения от элемента тока. Для этой цели используем уравнение (5.79) с ρ , выбранным таким образом, чтобы $k_{\pm}' \rho \gg 1 \gg k_{\pm}''$. В этом пределе уравнение (5.79) сводится к уравнению (5.81), и

$$\mathbf{W} = \frac{i\omega}{c^2} \frac{e^{i\omega\rho}}{\rho} (\mathbf{I} - \hat{\rho}\hat{\rho}). \quad (5.114)$$

Если применить данный результат к объему V однородной по плотности плазмы с размером, много меньшим, чем длина поглощения, то $\bar{\mathbf{J}} = V\mathbf{J}$ и выражение (5.109) приводит при $g \gg g'$ к результату:

$$V^{-1} r^2 S_{\omega} = \frac{\omega^2}{8\pi^2 c^3} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \times \int d^3\rho \int d\tau \times \\ \times e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\cdot\rho)} \langle\langle \mathbf{J}''(\mathbf{r}, t) \mathbf{J}''(\mathbf{r}' + \rho, t + \tau) \rangle\rangle. \quad (5.115)$$

В высокочастотном пределе, где необходимо учитывать только электроны, используя уравнения (5.20) и (5.27), можно записать

$$V^{-1} r^2 S_{\omega} = \frac{\omega^2 e^2}{4\pi c^3} \int d^3v f \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{k_{\parallel} v}{\gamma} - n\Omega\right) (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{T}_{n\gamma}^{-2}, \quad (5.116)$$

где $k_{\parallel} = \omega \cos \theta / c$ и $k_{\perp} = \omega \sin \theta / c$, а θ — угол между вектором \mathbf{k} и локальным магнитным полем. Но из уравнения (1.101) видно, что

$$(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{T}_n = \left(\frac{n\omega \cos \theta}{z} - u \sin \theta \right)^2 J_n^2 + \omega^2 J_n'^2, \quad (5.117)$$

где $z = k_{\perp} \omega / \gamma \Omega$ есть аргумент функций J_n , а величина J_n' — их производных по z . Из-за наличия дельта-функций в уравнении (5.117) $n\Omega = \omega - k_{\parallel} u / \gamma$ и коэффициент при J_n равен

$$\begin{aligned} n\omega \frac{\cos \theta}{z} - u \sin \theta &= n\Omega \gamma c \frac{\cos \theta}{\omega} \sin \theta - u \sin \theta = \\ &= \frac{\gamma c}{\sin \theta} \left[\frac{\cos \theta}{\omega} \left(\omega - \omega u \frac{\cos \theta}{\gamma c} \right) - u \frac{\sin^2 \theta}{\gamma c} \right] = \frac{\gamma c}{\sin \theta} \left[\cos \theta - \frac{u}{\gamma c} \right]. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Таким образом, поскольку

$$\begin{aligned} \delta \left(\omega - \frac{k_{\parallel} u}{\gamma} - n\Omega \right) &= \delta \left[\omega \left(1 - u \frac{\cos \theta}{\gamma c} \right) - n\Omega \right] = \\ &= \left(i - u \frac{\cos \theta}{\gamma c} \right)^{-1} \delta \left[\omega - n\Omega \left(1 - u \frac{\cos \theta}{\gamma c} \right)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (5.119)$$

для уравнения (5.116) можно записать

$$V^{-1} r^2 S_{\omega} = \int d^3 v f I_{\omega}, \quad (5.120)$$

откуда

$$\begin{aligned} I_{\omega} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 e^2}{2\pi c^3 \gamma^2} \frac{\delta \left[\omega - n\Omega \left(1 - u \cos \theta / \gamma c \right)^{-1} \right]}{1 - u \cos \theta / \gamma c} \times \\ &\quad \times \left\{ (\gamma c)^2 \left(\omega \tau \theta - u \frac{\cos \theta}{\gamma c} \right)^2 J_n^2 + \omega^2 J_n'^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.121)$$

Если рассматривать данное выражение как функцию ω , то легко видеть, что из-за наличия дельта-функций член с $n = 0$ не дает вклада, в то время как вклады от членов $-n$ и n равны. Таким образом, рассматриваемое выражение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} I_{\omega} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^2 \Omega^2 \delta \left[\omega - n\Omega \left(1 - u \cos \theta / \gamma c \right)^{-1} \right]}{2\pi c \left(1 - u \cos \theta / \gamma c \right)} \times \\ &\quad \times \left\{ \left(\omega \tau \theta - u \frac{\cos \theta}{\gamma c} \right)^2 J_n^2 + \left(\frac{\omega}{\gamma c} \right)^2 J_n'^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.122)$$

где аргумент функции Бесселя равен $(n\omega \cos \theta / \gamma c) \times (1 - u \sin \theta / \gamma c)^{-1}$. Уравнение (5.122) соответствует спектральной

плотности излучения одного электрона, движущегося в постоянном магнитном поле, в то время как уравнение (5.116) соответствует сумме таких выражений для всех электронов.

5.6. Вычисление \mathbf{Q} для случая теплового равновесия

Вычислим интеграл (1.72), определяющий выражение \mathbf{Q} . Для этой цели удобно записать, следуя уравнению (1.44), что $\omega \cos \theta = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}$, $\omega \sin \theta = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}$, а $u = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}$. Разлагая в ряд тригонометрические функции, уравнение (1.55) можно записать в следующей форме:

$$-\gamma \dot{\xi}(\mathbf{v}, -t) = \left[\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 t + \frac{\sin \Omega t}{\Omega} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) + \frac{1 - \cos \Omega t}{\Omega} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \right] \cdot \mathbf{v}. \quad (5.123)$$

Подобным образом уравнение (1.56) можно выразить в виде

$$\gamma \dot{\xi}(\mathbf{v}, -t) = [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \cos \Omega t (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) + \sin \Omega t (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)] \cdot \mathbf{v}. \quad (5.124)$$

Из уравнения (1.72) видно, что если учесть только вклад электронов и предположить существование кинетического равновесия, при котором функция f описывается уравнением (5.18), то

$$\mathbf{Q} = \frac{4\pi i \omega e^2}{\theta} \int_0^\infty dt \int d^3 v \frac{\mathbf{v} \dot{\xi}}{\gamma} f e^{t(\omega t - \mathbf{k} \cdot \xi)}. \quad (5.125)$$

Для электронов $\gamma \Omega = -\Omega_0$, где $\Omega_0 = |eB/mc|$ — положительная постоянная величина. Таким образом, если ввести обозначения $\chi = -\Omega t$ и

$$\lambda = \Omega_0^{-1} \mathbf{k} \cdot [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \sin \chi (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - (1 - \cos \chi) (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)], \quad (5.126)$$

$$\mathbf{S} = -\nabla_\lambda \nabla_\lambda \int d^3 v \gamma^{-1} e^{-\xi \gamma - i \lambda \cdot \mathbf{v}}, \quad (5.127)$$

где $\xi = \beta - i\omega/\Omega_0$, то величина \mathbf{Q} может быть выражена в виде

$$\mathbf{Q} = \omega_p^2 \frac{\beta^2}{4\pi c^5 K_2(\beta)} \frac{i\omega}{\Omega_0} \int_0^\infty d\chi \int d^3 v \mathbf{S} \times \times [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \cos \chi (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) + \sin \chi (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)]. \quad (5.128)$$

Введем в пространстве скоростей систему сферических полярных координат $(v, \arccos \mu, \phi)$, где λ направлено в сторону

полюса. Тогда интеграл, содержащий S , может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dv v^2 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\phi \gamma^{-1} e^{-\zeta v - i\mu\lambda v} &= \\ = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} dv v \gamma^{-1} \sin \lambda v e^{-\zeta v} &= -\frac{2\pi i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dv v \gamma^{-1} e^{-\zeta v + i\lambda v} = \\ = \frac{2\pi i c^2}{\lambda \xi} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{i\lambda v} \frac{d}{dv} e^{-\zeta v} &= \frac{2\pi c^2}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{i\lambda v - \zeta v}. \quad (5.129) \end{aligned}$$

Переходя от первой ко второй строчке в правой части приведенного выше равенства, мы воспользовались четностью функции $v\gamma^{-1} \sin \lambda v$ для того, чтобы расширить интервал на всю действительную ось, а затем ввести экспоненту, действительная часть которой дает бесконечно малый вклад. Для того чтобы преобразовать данное выражение к известному виду, удобно ввести переменную $z = \operatorname{arcsinh} v/c$. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \frac{2\pi c^3}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \operatorname{ch} z \exp(i\lambda c \operatorname{sh} z - \zeta \operatorname{ch} z) &= \\ = -\frac{2\pi c^3}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(i\lambda c \operatorname{sh} z - \zeta \operatorname{ch} z). \quad (5.130) \end{aligned}$$

Если ввести обозначение $\psi = \operatorname{arctg} \lambda c/\xi$, то экспонента в данном интеграле может быть представлена в виде $-\rho \operatorname{ch}(z - i\psi)$, где $\rho^2 = \lambda^2 c^2 + \zeta^2$. Однако если положить $z' = z - i\psi$ и деформировать контур интегрирования в действительную z' -ось, то интеграл сводится к виду

$$-\frac{2\pi c^2}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' e^{-\rho \operatorname{ch} z'} = -\frac{2\pi c^3}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} [2K_0(\rho)]. \quad (5.131)$$

Далее $\partial/\partial \xi = (\xi/\rho) d/d\rho$, и если обозначить штрихом дифференцирование по ρ , то функция K_ν удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\rho K'_\nu = \nu K_\nu - \rho K_{\nu+1}. \quad (5.132)$$

Таким образом, $K'_0 = -K_1$ и

$$\int d^3 v \gamma^{-1} e^{-\zeta v - i\lambda \cdot v} = \frac{4\pi c^3 K_1(\rho)}{\rho}. \quad (5.133)$$

Поскольку $\nabla_\lambda \rho = (c^2/\rho) \lambda$, то, применяя оператор ∇_λ к интегралу, получаем, как легко видеть,

$$\frac{c^2 \lambda}{\rho} \left[\frac{4\pi c^3 K_1}{\rho} \right]' = \frac{4\pi c^5 \lambda}{\rho^3} [\rho K_1' - K_1] = -\frac{4\pi c^5 \lambda}{\rho^2} K_2, \quad (5.134)$$

так как для $\nu = 1$ рекуррентное соотношение дает $\rho K_1' - K_1 = -\rho K_2$. Применение оператора $-\nabla_\lambda$ к приведенному выше выражению дает

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 4\pi c^5 \left[\frac{K_2}{\rho^2} (\nabla_\lambda \lambda) + \frac{c^2}{\rho} \lambda \lambda \left\{ \frac{K_2}{\rho^2} \right\}' \right] = \\ &= 4\pi c^5 \left[\frac{K_2}{\rho^2} \mathbf{I} + \frac{c^2 \lambda \lambda}{\rho^4} (\rho K_2' - 2K_2) \right] = 4c \left[\frac{K_2}{\rho^2} \mathbf{I} - \frac{K_3}{\rho^3} c^2 \lambda \lambda \right], \end{aligned} \quad (5.135)$$

где мы использовали следствие рекуррентного соотношения для $\nu = 2$

$$\rho K_2 = 2K_2 - \rho K_3.$$

Если мы запишем $\mathbf{k} = k_\parallel \mathbf{e}_3 + k_\perp \mathbf{e}_1$, а это можно сделать без нарушения общности, то можно записать

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 \lambda \lambda &= k_\parallel^2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + k_\perp^2 (1 - \cos \chi)^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + k_\perp \sin^2 \chi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \\ &+ k_\parallel k_\perp \chi \sin \chi (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) + k_\parallel k_\perp \chi (1 - \cos \chi) \times \\ &\times (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) + k_\perp^2 \sin \chi (1 - \cos \chi) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1). \end{aligned} \quad (5.136)$$

Шпур от данного выражения равен

$$\Omega_0^2 \lambda^2 = k_\parallel^2 \chi^2 + 2k_\perp^2 (1 - \cos \chi), \quad (5.137)$$

откуда

$$\rho^2 = \Omega_0^{-2} c^2 [k_\parallel^2 \chi^2 + 2k_\perp^2 (1 - \cos \chi)] + \left[i \frac{\omega}{\Omega_0} \chi - \frac{mc^2}{\theta} \right]^2. \quad (5.138)$$

Суммируя все эти результаты, можно записать, вычисляя скалярное произведение в уравнении (5.128):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \omega_p^2 \frac{\beta^2}{K_2(\beta)} \frac{i\omega}{\Omega_0} \int_0^\infty d\chi \left\{ \frac{K_2}{\rho^2} [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \cos \chi (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) + \right. \\ &+ \sin \chi (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)] - \frac{c^2}{\Omega_0^2} \frac{K_3}{\rho^3} [k_\perp^2 \sin^2 \chi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - k_\perp^2 (1 - \cos \chi)^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \\ &+ k_\parallel^2 \chi^2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + k_\perp^2 \sin \chi (1 - \cos \chi) (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) + \\ &\left. + k_\parallel k_\perp \chi \sin \chi (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + k_\parallel k_\perp \chi (1 - \cos \chi) (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Заметим, что если $k_{\parallel} = (\omega/c) \cos \theta$, $k_{\perp} = (\omega/c) \sin \theta$, то можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \rho^2 &= -\chi^2 \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta (1 - \cos \chi) - \\ &\quad - 2i \frac{\Omega_0}{\omega} \frac{mc^2}{\theta} \chi + \left(\frac{mc^2}{\theta}\right)^2 \left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)^2 = \\ &= -(x^2 - y^2 + 2ixy) \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta [1 - \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y] + \\ &\quad + 2i \frac{\Omega_0}{\omega} \frac{mc^2}{\theta} (x + iy) + \left\{ \frac{mc^2}{\theta} \right\}^2 \left\{ \frac{\Omega_0}{\omega} \right\}^2, \quad (5.140) \end{aligned}$$

где мы обозначили $\chi = x + iy$.

Данное выражение может быть вычислено для квазирелятивистского случая методом стационарной фазы. Чтобы сделать это, заметим, что асимптотическое выражение для $K_n(\rho)$ равно

$$K_n(\rho) \sim \left(\frac{\pi}{2\rho}\right)^{1/2} e^{-\rho}. \quad (5.141)$$

Кроме того, если χ велико и является комплексной величиной, то из уравнения (5.140) следует, что $\rho^2 \sim -(\omega/\Omega_0)^2 \sin^2 \theta e^{-i\chi}$, пока $(\omega/\Omega_0)^2 \sin^2 \theta \gg 1$. Величины, содержащие $K_n(\rho)$ в подынтегральном выражении, будут наиболее быстро меняться на любом контуре в комплексной χ -плоскости, вдоль которого они могут быть представлены асимптотической формой [уравнение (5.141)]. Будем поэтому находить стационарные точки функции $\ln K_n(\rho)$. Поскольку в общем случае $d \ln K_n / d\chi = (K'_n / K_n) (d\rho/d\chi)$, то они возникают, если $d\rho/d\chi = 0$ или, дифференцируя уравнение (5.140), если

$$\rho \frac{d\rho}{d\chi} = \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \left\{ -\chi \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \sin \chi - i \frac{\Omega_0}{\omega} \frac{mc^2}{\theta} \right\} = 0. \quad (5.142)$$

Если записать $\chi = x + iy$ и разбить уравнение (5.134) на действительные и мнимые части, то получим

$$\sin x \operatorname{ch} y - x = 0, \quad (5.143)$$

$$\cos x \operatorname{sh} y - y = \frac{\Omega_0}{\omega} \frac{mc^2}{\theta} \frac{1}{\sin^2 \theta} \equiv \alpha. \quad (5.144)$$

Очевидно, что для данных уравнений существует корень, если $x = 0$, а $y = y_0$, где

$$\operatorname{sh} y_0 - y_0 = \alpha. \quad (5.145)$$

Если уравнение (5.143) решить относительно y , то для $y > 0$ получаем

$$y = \ln \left\{ \frac{x}{\sin x} + \left[\left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}. \quad (5.146)$$

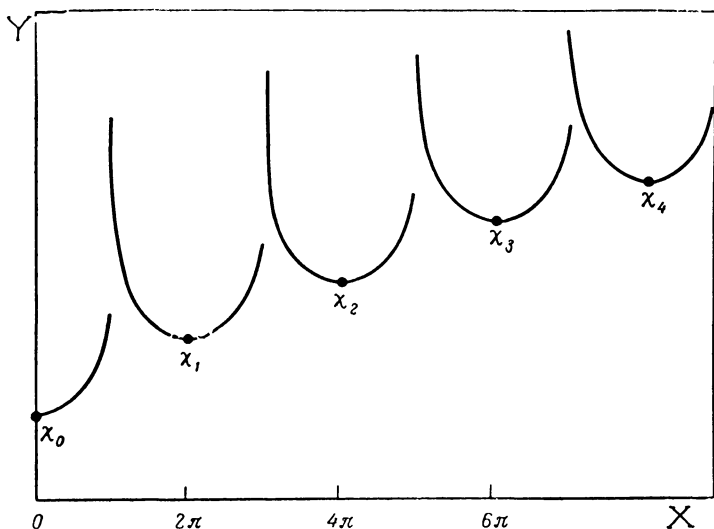
Если это выражение использовать для того, чтобы оценить y из уравнения (5.144), то получим при $x \neq 0$, что

$$\cos x \left[\left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} - \ln \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 + \left[\left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\} = \alpha. \quad (5.147)$$

Когда $x \gg 1$, то можно в наиминиме порядке пренебречь логарифмом и единицей по сравнению с членом $(x/\sin x)^2$ и записать данное выражение в виде

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{\alpha}. \quad (5.148)$$

Как легко видеть, с помощью построения отдельно левой и правой частей этого выражения как функции x большие положительные корни этого уравнения лежат вблизи значений $x_n =$

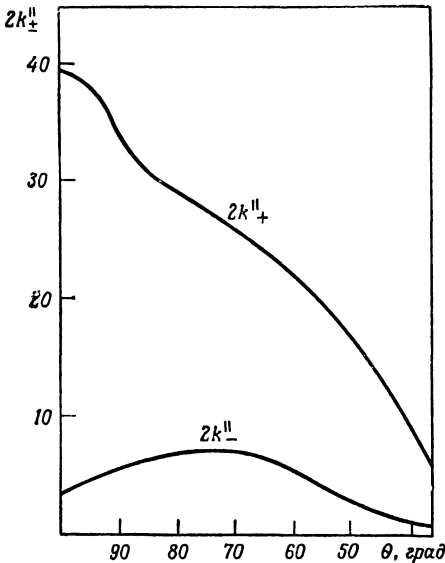


Фиг. 13. Схематический график пути интегрирования в комплексной χ -плоскости.

Точки $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots$ являются стационарными точками.

$= (2n + 1)(\pi/2)$, где $n^2 \gg 1$. Применение метода Ньютона дает в качестве следующего приближения $x = x_n - \alpha/x_n$. Очевидно, данное приближение справедливо, если $\alpha/x_n^2 \ll 1$. Если α не сильно отличается от единицы, то данная асимптотическая форма предполагается справедливой и для значений n , много больших единицы. Величина y , связанная со значением $x \sim x_n$, равна $y \sim \ln 2x_n$. Данные точки в первом квадранте плоскости изображены схематически на фиг. 13. На фигуре также показаны кривые, проходящие через эти стационарные точки, для которых $\operatorname{Im} \rho = \text{const}$.

Метод интегрирования заключается в деформировании контура интегрирования по χ от действительной оси до многоветвевой кривой, проходящей через особые точки типа седла. Так как вдоль любой такой ветви $\text{Re } \rho \sim e^{y/2}$, то при $y \rightarrow \infty$ существует



Фиг. 14. Схематический график удвоенных коэффициентов поглощения $2k''_{\pm}$ для случая квазирелятивистской плазмы.

очень быстрая сходимость по мере того, как мы сдвигаемся от седловой точки. Кроме того, поскольку $y_n \sim \ln 2(2n+1)(\pi/2)$, вклады, связанные с окрестностями данной седловой точки, уменьшаются с ростом n . Колебания, которые должны были бы возникать вблизи чисто мнимых значений ρ , подавляются при данном выборе контура.

Для дальнейших численных расчетов требуется применение электронных вычислительных машин. Результаты единственного имеющегося численного расчета, сделанного Драммондом и Розенблютом, показаны на фиг. 14, где графики k''_{+} и k''_{-} приведены в зависимости от θ для случая $\omega/\omega_0 = 5$ и температуры $4 \cdot 10^4$ эВ. Расчеты

проведены для высокочастотного предельного случая, для которого использовались соотношения, вытекающие из уравнений (2.3) и (5.139), а именно:

$$Q_{xx} = \frac{i\omega_p^2 \omega}{\Omega_0} \frac{\beta^2}{K_2(\beta)} \int_0^\infty d\chi \left[\cos \chi \rho^{-2} K_2(\rho) + \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \chi) \rho^{-3} K_3(\rho) \right],$$

$$Q_{xy} = -Q_{yx} = -\frac{i\omega_p^2 \omega}{\Omega_0} \frac{\beta^2}{K_2(\beta)} \int_0^\infty d\chi \left[\cos \theta \sin \chi \rho^{-2} K_2(\rho) - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \sin^2 \theta \cos \theta (1 - \cos \chi) (\sin \chi - \chi) \rho^{-3} K_3(\rho) \right],$$

$$Q_{yy} = \frac{i\omega_p^2 \omega}{\Omega_0} \frac{\beta^2}{K_2(\beta)} \int_0^\infty d\chi \left[(\cos^2 \theta \cos \chi + \sin^2 \theta) \rho^{-2} K_2(\rho) - \left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta (\sin \chi - \chi) \rho^{-3} K_3(\rho) \right]. \quad (5.149)$$

Данные расчеты были применены авторами для вычисления радиационных потерь из однородного плазменного столба, при пренебрежении в уравнении (5.110) перекрестными членами. Это, по-видимому, оправдано, если принять во внимание различие между коэффициентами поглощения. Для более детального ознакомления с этими вычислениями отсылаем читателя к оригинальной работе.

5.7. Указания к литературе

Подробнейшее обсуждение вопроса о связи электромагнитной теории и геометрической оптики содержится в работе Клина и Кея [33].

Модификации закона Кирхгофа, необходимые для вычисления теплового излучения из замагниченной среды, обсуждаются в работе Бункина [34].

Формула для синхротронного излучения частицы впервые была получена Швингером [35].

Впервые вопрос синхротронного излучения плазмы был рассмотрен Трубниковым и Кудрявцевым [36].

Гораздо более подробное рассмотрение данной проблемы можно найти в диссертации Трубникова [37].

Подробные расчеты синхротронного излучения из равновесной плазмы были выполнены Хиршфильдом, Балдвиным и Браунном [38].

Окончательные расчеты данных, содержащихся в довольно сложном виде в предыдущих работах, были выполнены Драмондом и Розенблютом [39].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Synge J. L.*, The Relativistic Gas, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1957.
2. *Goto K.*, Prog. Theoret. Phys., 20, 1 (1958).
3. *Kursunoglu B.*, Nucl. Fusion, 1, 213 (1961).
4. *Drummond J. E.*, Phys. Rev., 112, 1460 (1958).
5. *Bernstein I. B.*, Phys. Rev., 109, 10 (1958).
6. *Ахиєзер А. И., Файнберг Я. Б., Ситенко А. Г., Степанов К. Н., Курилко В. И., Горбатенко М. Ф., Кирочкин Ю. А.*, Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958, т. I, М., Атомиздат, 1959, стр. 184.
7. *Clemmow P. C., Willson A. J.*, Proc. Roy. Soc. (London), A237, 117 (1956).
8. *Pradhan T.*, Phys. Rev., 107, 1222 (1957).
9. *Baldwin D. E., Rowlands G.*, Phys. Fluids, 9, 2444 (1966).
10. *Dory R. A., Guest G. E., Harris E. G.*, Phys. Rev. Lett., 14, 131 (1965).
11. *Crawford F. W.*, Nucl. Fusion, 5, 73 (1965).
12. *Lockwood G. E. K.*, Can Journ. Phys., 41, 190 (1963).
13. *Sturrock P. A.*, Phys. Fluids, 8, 88 (1965).

14. *Dougherty J. P., Monaghan J. J.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A289**, 214 (1965).
15. *Harris E. G.*, Journ. Nucl. Energy, Part C, Plasma Phys., **2**, 138 (1961).
16. *Hall L. S., Heckrotte W., Kammash T.*, Phys. Rev., **139**, A1117 (1965).
17. *Guest G. F., Dory R. A.*, Phys. Fluids, **8**, 1853 (1965).
18. *Shima Y., Hall L. S.*, Phys. Rev., **139**, A1115 (1965).
19. *Hall L. S., Heckrotte W.*, Phys. Rev., **134**, A1474 (1965).
20. *Rosenbluth M. N., Post R. F.*, Phys. Fluids, **8**, 547 (1965); **9**, 730 (1966).
21. *McCune J. E.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 398; 684 (1965).
22. *Kulsrud R. M.*, Advanced Plasma Theory (Proceeding of the International School of Physics «Enrico Fermi»), Academic Press, New York, 1964, p. 72 et seq.
23. *Степанов К. Н.*, ЖЭТФ, **34**, 1292 (1958).
24. *Степанов К. Н.*, ЖЭТФ, **35**, 1155 (1958).
25. *Stix T. H.*, The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill, New York, 1962.
26. *Baldwin D. E.*, Journ. Plasma Physics, **1**, 289 (1967).
27. *Van den Plas P.*, Electron Waves and Resonances in Bounded Plasmas, Interscience, New York, 1968.
28. *Buchsbaum S. J., Hasegawa A.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 685 (1964).
29. *Buchsbaum S. J., Hasegawa A.*, Phys. Rev., **143**, 303 (1965).
30. *Bernstein I. B., Weenink M. P. H.*, I. R., 66/104, FOM-Institut voor Plasma-Fysica, Rijnhuizen, Jutphaas, The Netherlands.
31. *Schuurman W., Weenink M. P. H.*, Proc. 8th Intern. Conf. Phenomena Ionized Gases 1967, paper 4.3.2, IAEA, Vienna, 1968.
32. *Rostoker N.*, Nucl. Fusion, **1**, 101 (1961).
33. *Kline M., Kay I. W.*, Electromagnetic Theory and Geometrical Optics, Interscience, New York, 1965.
34. *Бункин Ф. В.*, ЖЭТФ, **32**, 811 (1957).
35. *Schwinger J. S.*, Phys. Rev., **75**, 1912 (1949).
36. *Трубников Б. А., Кудрявцев В. С.*, Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958, т. I, М., Атомиздат, 1959, стр. 165.
37. *Трубников Б. А.*, Диссертация, МИФИ, 1958.
38. *Hirschfield J. L., Baldwin D. E., Brown S. C.*, Phys. Fluids, **4**, 198 (1961). М., Атомиздат, 1959, стр. 165.
39. *Drummond W., Rosenbluth M. N.*, Phys. Fluids, **6**, 276 (1963).

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
А. Бернштейн. Движение заряженной частицы в сильном магнитном поле	9
Введение	9
1. Вращение частицы и магнитный момент — адиабатический инвариант	10
2. Второй или продольный инвариант	20
3. Третий или потоковый инвариант	26
Литература	31
Г. Бенфорд, Д. Л. Бук. Равновесие релятивистского пучка	32
Введение	32
В.1. Ограничения тока	35
В.2. Основные уравнения	38
В.3. Граничные условия	40
1. Модели аксиального тока	41
1.1. Диффузные пучки	41
1.1.1. Обобщенное распределение Беннета (41). 1.1.2. Родственные модели (51). 1.1.3. Случай плоской орбиты (53).	
1.2. Пучки с резкими границами	57
1.2.1. Модель двойной дельта-функции (57). 1.2.2. Полурелятивистский однородный пучок (66).	
2. Модели азимутального тока	68
2.1. Моноэнергетическое распределение в отсутствие осевой симметрии	69
2.2. Модель Хекротта — Нейла	70
2.3. Однородный холодный азимутальный пучок	72
2.4. Модель Маркса («релятивистский жесткий ротатор»)	76
2.5. Численная модель Мардера — Вейтнера	77
Заключение	79
Литература	80
В. Коппи. Коллективные моды в плазме, связанные с геометрией магнитного поля и распределением скоростей частиц	82
Введение	82
1. Двумерное начальное состояние	83
2. Классификация мод	89

3. Линеаризованное уравнение Власова для низкочастотных мод	91
4. Быстро нарастающие (электронные) моды	93
5. Резонансная электронная баллонная мода	96
6. Резонансы при взаимодействии частиц с волной	99
7. Квазигидродинамическая электронная дрейфовая мода	101
8. Резонансная электронная желобковая мода	104
9. Квазигидродинамическая электронная желобковая мода	106
10. Медленно нарастающие (ионные) моды	110
11. Медленно нарастающие желобковые моды, обусловленные локальной кривизной магнитного поля	111
12. Низкая плотность, ионная желобковая мода	116
13. Медленно нарастающие дрейфовые моды гидродинамического типа	117
14. Неустойчивость на запертых частицах, обусловленная кривизной магнитных силовых линий	119
15. Моды, обусловленные примесными частицами	120
16. Сравнение с экспериментом	123
17. Приложение. Упрощенная трактовка электронных мод в приближении ведущих центров	128
Литература	130

Р. Бриггс. Двухпучковая неустойчивость 132

Введение	132
1. Многопоточковая модель	134
1.1. Свойства одиночного моноэнергетического потока	134
1.2. Основное двухпоточковое взаимодействие	138
1.3. Дисперсионное соотношение для распределения скоростей	141
2. Взаимодействие пучка малой плотности со стационарной плазмой	145
2.1. Предельный случай холодного пучка и холодной плазмы	145
2.2. Влияние температуры пучка	150
2.3. Влияние температуры плазмы	151
3. Конечные системы — бесконечное магнитное поле	154
3.1. Обобщенные дисперсионные соотношения	154
3.2. Взаимодействие холодного пучка с плазмой при полном заполнении волновода	157
3.3. Тонкий пучок в однородной плазме	159
4. Конечные системы — нулевое магнитное поле	163
4.1. Дискретные собственные моды	163
4.2. Сплошной спектр	164
4.3. Заключение	167
Приложение	169
Литература	170

Д. Балдвин, А. Бернштейн, М. Винник. Кинетическая теория плазменных волн в магнитном поле 172

Введение	172
1. Безграничная плазма	173

1.1.	Общее рассмотрение	173
1.2.	Линеаризованные уравнения	176
1.3.	Предел бесконечно малого магнитного поля	185
1.4.	Преобразование дисперсионного соотношения	188
1.5.	Предел низкой температуры и слабого магнитного поля	189
1.6.	Распространение вдоль магнитного поля	193
1.7.	Распространение перпендикулярно магнитному полю	203
1.8.	Распространение перпендикулярно бесконечно малому магнитному полю	212
1.9.	Указания к литературе	218
2.	Продольные моды колебаний	218
2.1.	Независимость продольных мод	218
2.2.	Перпендикулярное распространение — устойчивость	220
2.3.	Перпендикулярное распространение — прохождение волн	224
2.4.	Резонансы продольных волн при перпендикулярном распространении	229
2.5.	Распространение, близкое к перпендикулярному — изотропное максвелловское распределение	233
2.6.	Распространение, близкое к перпендикулярному — анизотропное распределение	236
2.7.	Моды с $\langle u^2 \rangle + k_{\parallel}^2 \ll \Omega_{\pm}^2$	239
2.8.	Моды с $\langle u^2 \rangle + k_{\parallel}^2 \gg \Omega_{\pm}^2$	244
2.9.	Преобразование, удобное для численных расчетов	248
2.10.	Указания к литературе	249
3.	Случай сильного магнитного поля	250
3.1.	Решение методом возмущений	250
3.2.	Анализ дисперсионного соотношения	254
3.3.	Указания к литературе	259
4.	Распространение волн в низкотемпературной неоднородной плазме	259
4.1.	Разложение уравнения Власова	260
4.2.	Перпендикулярное распространение	264
4.3.	Связь продольных и поперечных мод	265
4.4.	Продольная мода с $m = 0$ в замагниченном плазменном столбе	267
4.5.	Прохождение через однородный слой	269
4.6.	Указания к литературе	273
5.	Геометрическая оптика и синхротронное излучение	273
5.1.	Проблема электромагнитного излучения	273
5.2.	Статистическое рассмотрение	277
5.3.	Геометрическая оптика	281
5.4.	Функция влияния	288
5.5.	Излучение однородной плазмы	293
5.6.	Вычисление Q для случая теплового равновесия	299
5.7.	Указания к литературе	305
	Литература	305

**Достижения
физики плазмы**

Редактор Л. Ф. Верес
Художник М. Мержиевский
Художественный редактор Е. Самойлов
Технический редактор Е. Потапенкова
Корректор Т. Подгорная

Сдано в набор 24/X 1973 г.
Подписано к печати 2/IV 1974 г.
Бумага тип. № 3 60×90¹/₁₆. 9,75 бум. л. 19,50 печ. л.
Уч.-изд. л. 18,83 Изд. № 2/6926
Цена 2 р. 04 к. Зак. 847

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29