П. К. РАШЕВСКИЙ

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

517.5
Р 28
УДК 513.813:512.972

Петр Константинович Рашевский

Риманова геометрия и тензорный анализ

М., 1967 г., 664 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *А. Ф. Серкина*

Сдано в набор 26/XI 1966 г. Подписано к печати 3/IV 1967 г. Бумага $60\times 90^1/_{16}$.
Физ. печ. л. 41.5. Условн. печ. л. 41.5. Уч.-изд. л. 38,94. Тираж 18 000 экз.
Т-04714. Цена книги 2 р. 63 к. Заказ № 1108.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

2-2-3
93-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

По своему характеру эта книга гораздо ближе к учебнику, чем к монографии, предназначенной для специалистов. Это сказывается прежде всего в выборе материала: автор стремился дать лишь действительно основное и важнейшее в рассматриваемой области, но зато в развернутом изложении со всесторонним освещением предмета.

По характеру изложения книга должна быть вполне доступна студенту III курса университета.

Другой характерной чертой книги являются выходы из области тензорного анализа и римановой геометрии в механику и физику; эти выходы автор старался указывать везде, где это было возможно. Как известно, наиболее замечательные приложения тензорный анализ и риманова геометрия имеют в области теории относительности; ей посвящены IV и X главы книги.

Особую роль играет глава I; она носит как бы пропедевтический характер и развивает тензорные методы с их приложениями к механике и физике в простейшем (даже тривиальном) случае обычного пространства в прямоугольных декартовых координатах. Эта глава по уровню изложения должна быть доступна инженеру и студенту втуза, которые пожелали бы познакомиться с элементами тензорного анализа в минимальном объеме, необходимом для технических приложений.

Для читателя, знакомого с моей прежней книгой «Введение в риманову геометрию и тензорный анализ», замечу, что по сравнению с ней излагаемый материал сильно увеличился. В настоящее время нельзя пройти мимо псевдоевклидовых и псевдоримановых пространств (кстати, необходимых для теории относительности) и пространств аффинной связности. Эти вопросы нашли место в книге. На ряде примеров даны также основные идеи теории геометрических объектов, в том числе теория спиноров в четырехмерном пространстве. Изложение дополнено также рядом частных вопросов, но зато фундаментального значения (как, например, теория кривых и гиперповерхностей в римановом пространстве и др.).

Имея в виду значительный объем книги, автор отметил ряд параграфов звездочками, что означает возможность пропустить их без ущерба для понимания дальнейшего. Некоторые указания в этом направлении сделаны и в тексте. При всем том чисто факультативного материала книга не содержит, и почти все в ней изложенное в том или ином отношении имеет в рассматриваемой области важное значение.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность редактору книги А. Ф. Лапко за его внимательное отношение к тексту и сделанные им замечания.

П. К. Рашевский

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание отличается от первого лишь некоторыми небольшими добавлениями, а также редакционными изменениями. Существенно переработаны лишь §§ 57—59 (основы теории спиноров); здесь изложение сильно упрощено и в то же время несколько дополнено.

П. К. Рашевский

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание практически не отличается от второго; сделаны лишь мелкие редакционные изменения.

П. К. Рашевский

ГЛАВА I

ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе мы подойдем к понятию тензора в наиболее простом и элементарном случае, а именно, рассматривая обычное пространство и притом в прямоугольных декартовых координатах. Мы покажем важнейшие применения понятия тензора в гидродинамике и теории упругости. Таким образом, эта глава по отношению ко всей книге будет носить вводный характер, но в то же время представлять собой в известном смысле законченное целое. Читатель, желающий получить лишь простейшее понятие о тензорах и их приложениях, может ограничиться даже одной этой главой. Напротив, читателю, математически хорошо развитому и желающему серьезно изучить книгу, возможно, будет достаточно лишь просмотреть эту главу, так как дальнейшее изложение на ее результаты не опирается и использует их лишь в качестве иллюстраций.

§ 1. Одновалентные тензоры

На протяжении главы I мы будем рассматривать (не оговаривая этого каждый раз отдельно) исключительно прямоугольные декартовы координаты (в обычном пространстве).

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — *орты*, положенные в основу нашей координатной системы (рис. 1). Совокупность ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, отложенных из начала O, мы будем называть *ортогональным репером*. Составим скалярные произведения ортов:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{1.1}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x}$, отложенный для простоты из начала O. Как известно, координаты вектора $\mathbf{x}$ (которые мы будем обозначать x_1, x_2, x_3) можно определить как коэффициенты разложения

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

и, что означает то же самое, как проекции вектора **x** на оси:

$$x_1 = \mathbf{x}\mathbf{e}_1,\quad x_2 = \mathbf{x}\mathbf{e}_2,\quad x_3 = \mathbf{x}\mathbf{e}_3. \tag{1.2}$$

Здесь проекции записаны в виде скалярных произведений вектора **x** на соответствующие орты.

Вектор **x** выражает какой-либо геометрический или физический объект, например, параллельный сдвиг твердого тела (заданный по величине и направлению), силу, скорость, напряженность электрического поля в данной точке и т. п. Этот объект имеет реальное существование независимо от того, в какой системе координат мы его рассматриваем и рассматриваем ли мы его вообще. Однако числа x_1, x_2, x_3 — координаты вектора **x** — зависят уже не только от самого вектора **x**, но и от координатной системы, к которой он отнесен.

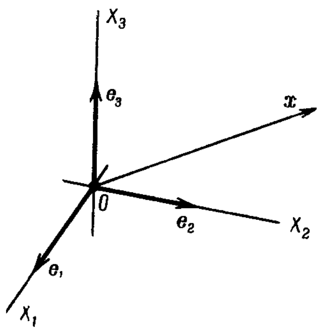

Рис. 1.

Между тем, координатные оси можно выбирать со значительным произволом: их можно подвергать произвольным параллельным сдвигам и поворотам около начала O.

Таким образом, наш способ задания векторов **x** координатами x_1, x_2, x_3 отражает между прочим и произвол выбора координатных осей. Это обстоятельство является вредным: на картину изучаемых нами векторов (а в дальнейшем и более сложных объектов) накладывается, вообще говоря, случайный выбор координатных осей. Вследствие этого изучаемая картина усложняется излишними подробностями. Мы увидим далее, что основная задача тензорного исчисления — разобраться в создавшемся положении, научиться выделять то существенное, что относится к самим изучаемым объектам, и отбрасывать то случайное, что привнесено произвольным выбором координатных осей.

Для этой цели нужно выяснить прежде всего, как меняются координаты неизменного вектора **x** вследствие перехода от одних координатных осей к другим.

Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать лишь поворот осей (включая и зеркальное отражение) около неподвижного начала O. Параллельных сдвигов осей мы, таким образом, не рассматриваем. Это объясняется тем, что в большинстве геометрических и физических приложений положение начала O или вообще не играет роли (как, например, для подсчета координат вектора) или, наоборот, естественно определяется (большей частью — это та точка, в бесконечно малой окрестности которой изучается геометрическая или физическая картина).

В обоих случаях нет надобности рассматривать параллельные сдвиги осей, и начало O можно считать неподвижным.

Итак, пусть мы перешли при неподвижном начале O от старого ортогонального репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к такому же новому реперу $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Этот переход можно задать, выразив новые орты в разложении по старым:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= A_{11}\mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_2 + A_{13}\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_2 &= A_{21}\mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2 + A_{23}\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_3 &= A_{31}\mathbf{e}_1 + A_{32}\mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3.\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Из этих соотношений немедленно следует, что скалярное произведение $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2$ равно A_{12} и вообще

$$A_{ij} = \mathbf{e}'_i\mathbf{e}_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.4}$$

Другими словами, A_{ij} совпадает со скалярным произведением i-го нового орта на j-й старый орт, т. е. с косинусом угла между этими ортами.

Выразим теперь старые орты через новые при помощи обратной матрицы A'_{ij}:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= A'_{11}\mathbf{e}'_1 + A'_{12}\mathbf{e}'_2 + A'_{13}\mathbf{e}'_3,\\ \mathbf{e}_2 &= A'_{21}\mathbf{e}'_1 + A'_{22}\mathbf{e}'_2 + A'_{23}\mathbf{e}'_3,\\ \mathbf{e}_3 &= A'_{31}\mathbf{e}'_1 + A'_{32}\mathbf{e}'_2 + A'_{33}\mathbf{e}'_3.\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Аналогично предыдущему получим:

$$A'_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}'_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.6}$$

Сравнивая (1.4) с (1.6), мы замечаем, что

$$A'_{ij} = A_{ji}, \tag{1.7}$$

т. е. матрицы $\|A_{ij}\|$ и $\|A'_{ij}\|$ — взаимно транспонированные. Но, кроме того, они и взаимно обратные, так как определяют взаимно обратные преобразования (1.3) и (1.5).

Итак, чтобы получить матрицу, обратную $\|A_{ij}\|$, достаточно ее транспонировать. Матрицы с этим свойством называются *ортогональными*. То, что матрицы $\|A_{ij}\|$, $\|A'_{ij}\|$ взаимно обратные, можно записать в виде равенства их произведения единичной матрице:

$$\sum_s A_{js}A'_{sk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k),\\ 1 & (j = k),\end{cases}$$

или согласно (1.7)

$$\sum_s A_{js}A_{ks} = \delta_{jk}. \tag{1.8}$$

Перемножая эти же матрицы в обратном порядке, получим аналогично:

$$\sum_s A_{sj}A_{sk} = \delta_{jk}. \tag{1.9}$$

Каждое из соотношений (1.8), (1.9), очевидно, равносильно ортогональности матрицы.

Пользуясь формулами (1.8), легко показать, что ортогональность матрицы $\|A_{ij}\|$ не только необходима, но и достаточна для того, чтобы формулы (1.3) давали переход от ортогонального репера снова к ортогональному реперу.

Ортогональная матрица имеет определитель ± 1.

В самом деле, равенства (1.8) показывают, что, умножая определитель ортогональной матрицы на себя (причем строки умножаются на строки), мы получаем определитель единичной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, квадрат определителя ортогональной матрицы равен 1, а сам определитель равен ± 1.

Положительный знак означает, что новый ортогональный репер имеет ту же ориентацию, что и старый, а отрицательный — что ориентация репера меняется на обратную (правый заменяется левым, и наоборот).

Посмотрим теперь, как будут меняться координаты неизменного вектора $\mathbf{x}$ при повороте осей. Запишем формулы (1.2) в старой координатной системе:

$$x_i = \mathbf{x}\mathbf{e}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

и аналогично, в новой координатной системе:

$$x_i' = \mathbf{x}\mathbf{e}_i' \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Умножая скалярно на $\mathbf{x}$ равенства (1.3) и пользуясь последними формулами, получим:

$$\begin{aligned} x_1' &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3, \\ x_2' &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3, \\ x_3' &+ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3. \end{aligned}$$

Другими словами, при повороте осей координаты каждого данного вектора подвергаются тому же ортогональному преобразованию (1.3), что и орты. Эти преобразования мы будем записывать кратко:

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi}\mathbf{e}_i, \tag{1.10}$$

$$x'_p = \sum_i A_{pi}x_i. \tag{1.11}$$

В пределах главы I индекс, по которому происходит суммирование, всегда пробегает значения 1, 2, 3. Равным образом свободным буквенным индексам в формулах можно придавать любое из этих значений. Преобразования, обратные (1.10) и (1.11), запишутся аналогичным образом:

$$\mathbf{e}_i = \sum_p A'_{ip}\mathbf{e}'_p = \sum_p A_{pi}\mathbf{e}'_p, \tag{1.12}$$

$$x_i = \sum_p A'_{ip}x'_p = \sum_p A_{pi}x'_p. \tag{1.13}$$

Мы воспользовались здесь соотношением (1.7).

Будем говорить, что нам дан тензор 1-й валентности, если в каждой из координатных систем нам заданы три занумерованных числа x_1, x_2, x_3 преобразующихся при повороте осей по закону (1.11). Эти числа мы будем называть *координатами тензора.*

Мы видим, что координаты данного вектора, рассматриваемые во всевозможных координатных системах, образуют *вектор 1-й валентности.* Очевидно и обратное: координаты каждого тензора 1-й валентности можно рассматривать как координаты некоторого постоянного вектора. Для этого достаточно подобрать вектор так, чтобы это имело место в одной координатной системе; в силу того что и для координат вектора, и для координат одновалентного тензора действует закон преобразования (1.11), это же будет иметь место и в любой координатной системе.

Однако не нужно думать, что одновалентный тензор может иметь истолкование только лишь в виде вектора. Пусть, например, нам задана фиксированная плоскость, не проходящая через начало координат O. Уравнение этой плоскости можно записать в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1.$$

Когда мы совершаем поворот координатных осей, коэффициенты уравнения a_1, a_2, a_3 подвергаются, как нетрудно подсчитать преобразованию по тому же закону (1.11) и образуют, следовательно, одновалентный тензор (как и координаты вектора).

§ 2. Понятие о двухвалентном тензоре

Понятие о двухвалентном и вообще многовалентном тензоре естественно возникает при рассмотрении уже простейших геометрических образов.

Возьмем, например, (неконическую) центральную поверхность 2-го порядка с центром в начале O. Ее уравнение можно записать в виде

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = 1. \tag{2.1}$$

Как мы условились, каждый индекс суммирования пробегает значения 1, 2, 3. Матрица коэффициентов $\|a_{ij}\|$ предполагается симметричной:

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{2.2}$$

Мы будем называть коэффициентами именно числа a_{ij}, хотя после приведения подобных членов в уравнении (2.1) коэффициенты при произведениях координат будут иметь вид $2a_{ij}$ (при $i \neq j$).

Совершаем поворот координатных осей. Новые координаты каждого вектора (и тем самым каждой точки) выражаются через старые согласно (1.11). Обратное преобразование согласно (1.13) запишется в виде

$$x_i = \sum_k A_{pi} x'_p. \tag{2.3}$$

И аналогично,

$$x_j = \sum_q A_{qj} x'_q.$$

Вставляя эти выражения в (2.1), получим уравнение той же поверхности в новых координатах:

$$\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij} x'_p x'_q = 1.$$

Очевидно, коэффициенты преобразованного уравнения имеют вид

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij} \qquad (p,\ q = 1,\ 2,\ 3). \tag{2.4}$$

Получается, что наша поверхность определяет в каждой координатной системе (с началом O в центре поверхности) совокупность девяти чисел a_{ij}, занумерованных двумя индексами, каждый из которых независимо от другого пробегает значения 1, 2, 3. При повороте координатных осей (1.12) эти числа преобразуются по закону (2.4), который, очевидно, повторяет закон (1.10) для каждого из двух индексов, имеющихся у a_{ij}.

Мы будем говорить, что нам дан тензор 2-й валентности, если в каждой из координатных систем нам заданы девять чисел, занумерованных двумя индексами

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

и преобразующихся при повороте координатных осей по закону (2.4). Сами числа a_{ij} мы будем называть *координатами* тензора.

Условия (2.2) не являются обязательными. В тех случаях, когда они соблюдаются, тензор 2-й валентности называется *симметрическим*. Таким образом, коэффициенты уравнения центральной поверхности 2-го порядка с центром в начале O образуют симметрический тензор 2-й валентности. Нетрудно показать и обратное: координаты (ненулевого) симметрического тензора 2-й валентности всегда можно истолковать как коэффициенты уравнения некоторой фиксированной поверхности 2-го порядка с центром O.

Впрочем, это истолкование, как мы вскоре увидим, является не самым важным.

Нетрудно получить примеры и несимметрических тензоров 2-й валентности. Возьмем два вектора $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ и обозначим через a_{ij} всевозможные попарные произведения их координат:

$$a_{ij} = x_i y_j. \tag{2.6}$$

Определенные таким образом в каждой координатной системе числа a_{ij} занумерованы двумя индексами и образуют тензор 2-й валентности. В самом деле, при повороте осей получаем согласно (1.11)

$$x'_p = \sum_i A_{pi} x_i. \tag{2.7}$$

И аналогично

$$y'_q = \sum_j A_{qj} y_j. \tag{2.8}$$

Перемножая эти равенства почленно, получим:

$$x'_p y'_q = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} x_i y_j, \tag{2.9}$$

а значит,

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij}, \tag{2.10}$$

т. е. имеет место закон преобразования (2.4). Здесь особенно наглядно выступает то обстоятельство, что этот закон преобразования получается повторением закона преобразования (1.11) для каждого из двух индексов. В частности, если в формулах (2.6) векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равны, то тензор a_{ij} симметрический.

§ 3. Двухвалентный тензор как аффинор

Важнейшее значение двухвалентного тензора a_{ij} состоит в том, что он всегда определяет некоторый аффинор.

Аффинором $\mathfrak{A}$ называется закон, посредством которого каждому вектору $\mathbf{x}$ в пространстве сопоставляется некоторый вектор $\mathbf{y}$, обозначаемый нами

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \tag{3.1}$$

причем должны соблюдаться следующие условия:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \mathfrak{A}\mathbf{x} + \mathfrak{A}\mathbf{x}', \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ — произвольные векторы, а α — произвольное (вещественное) число.

Другими словами, аффинор $\mathfrak{A}$ означает задание функциональной зависимости вектора $\mathbf{y}$ от вектора-аргумента $\mathbf{x}$, причем эта зависимость должна быть линейной, т. е. при сложении двух значений аргумента $\mathbf{x}$ складываются и соответствующие значения функции $\mathbf{y}$ (согласно (3.2)), а при умножении аргумента $\mathbf{x}$ на какое-либо число функция $\mathbf{y}$ также умножается на это число (согласно (3.3)).

Рассмотрим, в частности, те векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$, в которые перейдут орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Если аффинор $\mathfrak{A}$ не задан наперед, то его всегда можно подобрать (и притом единственным образом) так, чтобы векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$ имели любые наперед заданные значения. В самом деле, задавшись этими значениями, мы можем вычислить $\mathfrak{A}\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ с координатами x_1, x_2, x_3:

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1\mathfrak{A}\mathbf{e}_1 + x_3\mathfrak{A}\mathbf{e}_3. \tag{3.4}$$

Мы воспользовались здесь свойствами (3.2), (3.3) искомого аффинора $\mathfrak{A}$. Таким образом, искомый аффинор, если он существует, определяется формулой (3.4). Нетрудно проверить, что эта формула действительно определяет аффинор, т. е. свойства (3.2), (3.3) всегда имеют место.

Можно следующим образом наглядно представить себе действие аффинора.

Для каждой точки M пространства строим ее радиус-вектор

$$\mathbf{x} = \overline{OM} \tag{3.5}$$

и подвергаем его действию аффинора $\mathfrak{A}$. Новый вектор $\mathfrak{A}\mathbf{x}$, отложенный также из начала O, укажет своим концом некоторую, вообще говоря, новую точку M':

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \overline{OM'}. \tag{3.6}$$

В результате каждая точка M пространства перейдет в новое положение M', и тем самым пространство подвергнется некоторой деформации.

В частности, единичный кубик, построенный на ортах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, перейдет в параллелепипед, построенный на векторах $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$, *если предположить, что эти векторы некомпланарны*. Действительно, точкам кубика будут отвечать координаты x_i, для которых $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3)$, а тогда согласно (3.4) преобразованные точки M' заполняют указанный параллелепипед.

Вообще пространственная решетка, составленная из единичных (или любых других) одинаковых кубиков, растянется (сожмется) и перекосится так, что кубики превратятся в параллелепипеды, однако тоже одинаковые.

В случае некомпланарности векторов $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$ рассматриваемая деформация пространства называется его *центроаффинным преобразованием*. В случае компланарности этих векторов все пространство отображается в одну плоскость или в одну прямую, или, наконец, даже в одну точку O (случай, когда $\mathfrak{A}\mathbf{x} \equiv 0$). Это — различные случаи вырождения аффинора $\mathfrak{A}$.

Переходим к координатной записи аффинора $\mathfrak{A}$. Мы знаем, что аффинор $\mathfrak{A}$ вполне определяется заданием векторов $\mathfrak{A}\mathbf{e}_i$, а эти последние можно задать их разложением по ортам. Запишем это разложение, обозначая коэффициенты через a_{pq}:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathfrak{A}\mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathfrak{A}\mathbf{e}_3 &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

или в краткой записи:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_q = \sum_p a_{pq}\mathbf{e}_p. \tag{3.8}$$

Вполне определяющие аффинор $\mathfrak{A}$ коэффициенты a_{pq} мы будем называть его *координатами*. Умножая скалярно первое из уравнений (3.7), например, на $\mathbf{e}_3$, получим в силу (1.1) $\mathbf{e}_3\mathfrak{A}\mathbf{e}_1 = a_{31}$. Аналогичным образом и вообще

$$a_{pq} = \mathbf{e}_p\mathfrak{A}\mathbf{e}_q. \tag{3.9}$$

Будем рассматривать один и тот же аффинор $\mathfrak{A}$, но в разных координатных системах. Его координаты a_{pq} будут иметь при этом каждый раз другие численные значения. Спрашивается, по какому закону эти численные значения будут меняться при повороте координатных осей?

Запишем формулы (3.9) в новой координатной системе:

$$a'_{pq} = \mathbf{e}'_p \mathfrak{A} \mathbf{e}'_q.$$

Но согласно (1.10)

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi} \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}'_q = \sum_j A_{qj} \mathbf{e}_j,$$

а следовательно,

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} \mathbf{e}_i \mathfrak{A} \mathbf{e}_j = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij} \qquad (p, q = 1, 2, 3).$$

Полученный закон преобразования совпадает с (2.4), и это показывает, *что координаты аффинора a_{ij} образуют двухвалентный тензор.*

Нетрудно проверить и обратное: координаты всякого двухвалентного тензора a_{ij} могут быть истолкованы как координаты некоторого аффинора $\mathfrak{A}$. Для этого достаточно построить аффинор $\mathfrak{A}$ с данными координатами в какой-либо одной координатной системе. В силу одинакового закона преобразования (2.4) для координат двухвалентного тензора и координат аффинора равенство между этими координатами сохранится и при переходе в любую другую координатную систему.

Дадим, наконец, координатную запись аффинора $\mathfrak{A}$, выразив координаты вектора $\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}$ через координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}$. Запишем разложения:

$$\mathbf{x} = \sum_q x_q \mathbf{e}_q, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{y} = \sum_p y_p \mathbf{e}_p \tag{3.11}$$

и подействуем на (3.10) аффинором $\mathfrak{A}$.

Получим, пользуясь линейными свойствами аффинора и формулами (3.8):

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A} \sum_q x_q \mathbf{e}_q = \sum_q x_q \mathfrak{A} \mathbf{e}_q = \sum_q x_q \sum_p a_{pq} \mathbf{e}_p. \tag{3.12}$$

Так как (3.11) и (3.12) дают разложение одного и того же вектора $\mathbf{y}$, то коэффициенты при ортах $\mathbf{e}_p$ должны быть одинаковы. Следовательно:

$$y_p = \sum_q a_{pq} x_q. \tag{3.13}$$

Итак, координаты вектора $\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}$ получаются из координат вектора $\mathbf{x}$ линейным преобразованием, матрица которого совпадает с матрицей a_{pq} координат аффинора (в то время как в преобразовании (3.7) мы пользовались транспонированной матрицей). Заметим еще, что для вырождения аффинора $\mathfrak{A}$, т. е. для компланарности векторов (3.7), необходимо и достаточно обращение в нуль определителя $|a_{pq}|$. В этом и только в этом случае преобразование (3.13) необратимо.

Отметим частный случай аффинора $\mathfrak{A}$, когда он сводится к умножению каждого вектора $\mathbf{x}$ *на одно и то же число* λ*:*

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{3.14}$$

Очевидно, в этом случае

$$y_p = \lambda x_p \qquad (p = 1,\ 2,\ 3). \tag{3.15}$$

Сравнивая с (3.13) убеждаемся, что матрица координат нашего аффинора *в любой координатной системе* имеет вид

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{Vmatrix}. \tag{3.16}$$

Следовательно, соответствующий двухвалентный тензор (3.16) обладает тем замечательным свойством, что его координаты остаются постоянными во всех координатных системах.

Центроаффинное преобразование, отвечающее аффинору в нашем случае, есть преобразование подобия (при $\lambda \neq 0$).

При $\lambda = 1$ аффинор (3.14) называется *единичным* и дает, очевидно, тождественное преобразование. Мы будем обозначать единичный аффинор через E, так что $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Соответствующий ему тензор

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{3.17}$$

также называется единичным. Для координат единичного тензора принято обозначение δ_{ij}, причем во всех координатных системах

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \tag{3.18}$$

Пользуясь обозначениями (3.18), можно переписать (3.16) (при любом λ) в следующем виде:

$$a_{ij} = \lambda \delta_{ij}. \tag{3.19}$$

§ 4. Многовалентные тензоры. Тензорная алгебра

По аналогии с двухвалентным тензором можно ввести понятие о тензоре любой валентности.

Мы говорим, что нам дан тензор валентности v, если в каждой из координатных систем нам заданы 3^v чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_v}$, занумерованных v индексами $i_1, i_2, \ldots, i_v$, каждый из которых независимо от других пробегает значения 1, 2, 3 *(и которые в записи различаются друг от друга* 1-*м*, 2-*м*, …, v-*м местом записи при букве* a*), причем при повороте координатных осей эти числа преобразуются по закону:*

$$a'_{p_1 p_2 \ldots p_v} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_v i_v} a_{i_1 i_2 \ldots i_v}. \tag{4.1}$$

Здесь предполагается, что поворот осей задается, как и прежде, формулами (1.10).

Закон преобразования (4.1) получается, очевидно, повторением закона преобразования одновалентного тензора (1.11) для каждого из индексов многовалентного тензора.

Как и раньше, мы будем называть числа $a_{i_2 i_2 \ldots i_v}$ *координатами* тензора в данной координатной системе.

Многовалентные тензоры также выражают различные геометрические и физические объекты. В связи с этим существенно помнить, что тензор есть нечто единое и целое, а «распадение» его на координаты $a_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ происходит лишь по отношению к данной координатной системе. В законе преобразования (4.1) это сказывается в том, что *каждая* координата тензора в новой системе выражается, вообще говоря, через *все* его координаты $a_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ в старой системе, т. е. распадение на координаты не имеет инвариантного смысла.

Над тензорами можно производить ряд инвариантных операций, т. е. операций, результаты которых не зависят от той координатной системы, в которой они производятся.

1°. *Сложение тензоров одинаковой валентности.* Пусть $a_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ и $b_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ — два тензора одинаковой валентности.

Составим *в каждой координатной системе* числа $c_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ путем сложения соответствующих координат наших тензоров

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_v} = a_{i_1 i_2 \ldots i_v} + b_{i_1 i_2 \ldots i_v}. \tag{4.2}$$

Мы утверждаем, что эти числа тоже являются координатами некоторого тензора валентности v.

Для этого достаточно показать, что $c_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ подчиняются закону преобразования (4.1). Но это почти очевидно. В самом деле, для тензоров $a'_{i_1 i_2 \ldots i_v}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ закон преобразования (4.1) имеет место:

$$a'_{p_1 \ldots p_v} = \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} \ldots A_{p_v i_v} a_{i_1 \ldots i_v},$$

$$b'_{p_1 \ldots p_v} = \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} \ldots A_{p_v i_v} b_{i_1 \ldots i_v}.$$

Складываем эти равенства почленно и пользуемся формулами (4.2), учитывая, что числа $c_{i_1 \ldots i_v}$ построены в каждой координатной системе, в том числе и в той, которая у нас отмечена штрихом. Получим:

$$c'_{p_1 \ldots p_v} = \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} \ldots A_{p_v i_v} c_{i_1 \ldots i_v}.$$

Таким образом, закон преобразования (4.1) выполняется и для $c_{i_1 \ldots i_v}$, так что эти числа, построенные в любой координатной системе, представляют собой координаты *одного и того же* тензора.

Этот тензор называется *суммой* двух данных тензоров, а сама операция (4.2) — их *сложением*.

Сложение тензоров отвечает сложению (в каком-нибудь естественном смысле) тех геометрических и физических объектов, которые данными тензорами изображаются. Так, например, сложение одновалентных тензоров по схеме (4.2)

$$z_i = x_i + y_i \tag{4.3}$$

соответствует сложению тех векторов, координаты которых образуют данные тензоры:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}.$$

Равным образом, сложение двухвалентных тензоров

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{4.4}$$

отражает сложение соответствующих им аффиноров:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}. \tag{4.5}$$

Последнее равенство нужно понимать в том смысле, что для любого вектора $\mathbf{x}$

$$\mathfrak{C}\mathbf{x} = \mathfrak{A}\mathbf{x} + \mathfrak{B}\mathbf{x}. \tag{4.6}$$

Ясно, что сложение нескольких тензоров одинаковой валентности выполняется совершенно так же, как и сложение двух.

2°. *Умножение тензоров.* Эта операция применяется к любым двум (или нескольким) тензорам, заданным в определенном порядке.

Лучше всего показать ее на примере; в общем случае дело будет обстоять совершенно так же.

Пусть требуется умножить трехвалентный тензор a_{ijk} на двухвалентный тензор b_{lm}. Составляем в *каждой* координатной системе всевозможные произведения каждой координаты a_{ijk} на каждую координату b_{lm}. Эти произведения, которые, очевидно, будут зависеть от пяти индексов, мы обозначим:

$$c_{ijklm} = a_{ijk} b_{lm}, \tag{4.7}$$

причем условимся писать (при букве c) сначала индексы первого множителя с сохранением их порядка, затем индексы второго множителя с сохранением их порядка (если бы множителей было несколько, мы таким же образом последовательно переписали бы индексы каждого из них).

Мы утверждаем, что числа c_{ijklm}, составленные нами согласно (4.7) *в каждой координатной системе, суть координаты одного и того же тензора* 5-*й валентности*. Чтобы это проверить, выпишем закон преобразования (4.1) для перемножаемых тензоров:

$$a'_{pqr} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qj} A_{rk} a_{ijk},$$

$$b'_{st} = \sum_l \sum_m A_{sl} A_{tm} b_{lm}.$$

Перемножим эти равенства почленно и воспользуемся формулой (4.7), учитывая, что она имеет место в любой координатной системе, в том числе и в той, которая отмечена у нас штрихом. Получим:

$$c'_{pqrst} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m A_{pi} A_{qi} A_{rk} A_{sl} A_{tm} c_{ijklm}. \tag{4.8}$$

Нетрудно видеть, что мы получили для чисел c_{ijklm} закон преобразования вида (4.1) для случая $v=5$. Это показывает, что числа c_{ijklm} в любой координатной системе являются координатами одного и того же тензора 5-й валентности.

Полученный таким образом тензор называется произведением двух заданных (в определенном порядке) тензоров, а сама операция — умножением тензоров.

По этому же образцу рассматривается и произведение любого числа тензоров любой валентности, заданных в определенном порядке. Валентность тензора, получающегося в произведении, равна, очевидно, сумме валентностей множителей: по схеме (4.7) координаты произведения снабжаются индексами, снятыми поочередно со всех множителей.

В частности, в этой же схеме можно рассматривать умножение тензора на инвариант (т. е. на число, заданное независимо от выбора координатной системы и не меняющееся при ее преобразовании).

Всякий инвариант a можно рассматривать как тензор 0-й валентности, т. е. тензор, лишенный индексов и имеющий потому лишь одну координату a. (В общем случае число координат тензора равно 3^v, где v — его валентность; в случае $v=0$ получаем $3^0=1$.)

Схема перемножения (4.7) дает в этом случае

$$c_{lm} = ab_{lm}, \tag{4.9}$$

т. е. просто все координаты тензора b_{lm} умножаются на инвариант a и превращаются в координаты нового тензора c_{lm} той же валентности.

Заметим, что вычитание тензора из тензора той же валентности мы не считаем самостоятельной операцией, потому что она сводится к сложению уменьшаемого с вычитаемым, умноженным предварительно на инвариант -1.

3°. *Свертывание тензоров.* Пусть нам дан, какой-нибудь тензор не менее, чем 2-й валентности, например, трехвалентный, a_{ijk}. Отметим какие-либо два его индекса, например 2-й и 3-й, и сделаем с ними следующее. *В каждой координатной системе* отберем те координаты нашего тензора, для которых отмеченные индексы равны (это будут координаты вида a_{ill}), и составим сумму всех таких координат при каких-нибудь фиксированных остальных индексах (в нашем случае при как-нибудь фиксированном первом индексе i).

Эта сумма имеет вид $\sum\limits_l a_{ill}$ и зависит *только* от фиксированных индексов (в нашем случае от индекса i). Обозначим ее a_i. Итак,

$$a_i = \sum_l a_{ill}. \tag{4.10}$$

Мы утверждаем, что числа a_i, составленные в каждой координатной системе согласно (4.10), *образуют тензор* 1*-й валентности.* Мы будем говорить, что этот тензор получается из исходного тензора a_{ijk} *свертыванием* 2-го и 3-го индекса.

Для доказательства выпишем закон преобразования (4.1) в применении к исходному тензору

$$a'_{pqr} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qj} A_{rk} a_{ijk}. \tag{4.11}$$

Составим теперь числа a_i в новой (штрихованной) координатной системе. Обозначая эти числа a'_p, получим согласно (4.10)

$$a'_p = \sum_s a'_{pss}. \tag{4.12}$$

Заменяя в преобразовании (4.11) индексы q и r через s и вставляя результат (в 4.12), получим:

$$a'_p = \sum_s \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{sj} A_{sk} a_{ijk}. \tag{4.13}$$

Выполним прежде всего суммирование по s. При этом согласно (1.9)

$$\sum_s A_{sj} A_{sk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k), \end{cases} \tag{4.14}$$

и (4.13) принимает вид

$$a'_p = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} \delta_{jk} a_{ijk}. \tag{4.15}$$

В процессе суммирования по j и k можно сохранить лишь члены, для которых $j = k$; остальные члены согласно (4.14) обратятся в нуль. Обозначим общее значение индексов j и k через l; при этом $\delta_{jk} = \delta_{ll} = 1$, и (4.15) принимает вид

$$a'_p = \sum_i \sum_l A_{pi} a_{ill} = \sum_i A_{pi} a_i. \tag{4.16}$$

Мы воспользовались здесь формулой (4.10). Этим доказан тензорный закон преобразования чисел a_i, так что они действительно определяют одновалентный тензор.

Совершенно так же производится свертывание двух произвольно избранных индексов в любом тензоре. Например, свернуть 2-й и 4-й индекс в тензоре a_{pqrst} значит составить новый тензор следующим образом:

$$a_{prt} = \sum_l a_{plrlt}. \tag{4.17}$$

Тензорный характер результата доказывается совершенно так же, как и выше. Валентность свернутого тензора на две единицы ниже, чем у исходного.

Повторяя свертывание достаточное число раз, причем валентность снижается каждый раз на 2, мы в случае тензора четной валентности приходим в конце концов к тензору нулевой валентности, т. е. к инварианту. Таким образом свертывание есть важный источник получения инвариантов рассматриваемых геометрических и физических объектов.

Так, для аффинора $\mathfrak{A}$ с координатами a_{ij} можно составить путем свертывания важный инвариант

$$a = \sum_l a_{ll}, \tag{4.18}$$

который называется *следом* этого аффинора.

Для двухвалентного тензора (2.6)

$$a_{ij} = x_i y_j,$$

где x_i, y_j — координаты двух произвольных векторов, свертывание дает инвариант

$$a = \sum_i a_{ii} = \sum_i x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \mathbf{xy}. \qquad (4.19)$$

Мы видим, что этот инвариант есть скалярное произведение векторов **x**, **y**, которое по своему геометрическому смыслу действительно не зависит от выбора координатной системы (а зависит лишь от самих векторов **x**, **y**).

Этот пример проливает свет на механизм операции свертывания. Она протекает и в общем случае как бы по образцу составления скалярного произведения из попарных произведений координат $x_i y_i$, и с этим связан ее инвариантный характер.

Очень часто, как и в приведенном примере, свертываемый тензор предварительно получен перемножением двух или нескольких тензоров. В таком случае мы будем кратко говорить, что один тензор свертывается с другим или с другими, *подразумевая*, что предварительно составляется произведение этих тензоров. В нашем примере: тензор x_i свертывается с тензором y_j.

4°. *Подстановка индексов*. Еще одна травиальная, но имеющая большое значение операция над тензорами, может быть названа *подстановкой индексов*. Она заключается в том, что из тензора, например a_{ijk}, составляется новый тензор b_{ijk} той же валентности и даже с теми же координатами, но с иной нумерацией этих координат. Например, координата, которая раньше была занумерована индексами i, j, k (индекс i — первый, j — второй, k — третий), теперь нумеруется теми же индексами, но в другом порядке, например, j, k, i (индекс j — первый, k — второй, i — третий). Получающийся в результате новый тензор определяется, очевидно, формулой

$$b_{jki} = a_{ijk}. \qquad (4.20)$$

То, что b_{jki} представляет собой действительно тензор, т. е. тоже подчиняется тензорному закону преобразования, проверяется очевидным образом.

Не следует думать, что операция подстановки индексов ничего не изменяет, и мы получаем «прежний тензор». В определение тензора входит нумерация его координат при помощи значений первого, второго и т. д. его индексов. Поэтому изменение этой нумерации есть изменение и самого тензора.

Разумеется, аналогичным образом можно производить любую подстановку индексов над тензором любой валентности.

§ 5. Кососимметрические тензоры

Свертывание не есть единственный источник получения инвариантов данного тензора. В этом параграфе мы встретимся с другим важным способом; но предварительно нам нужно познакомиться с кососимметрическими тензорами.

Тензор называется кососимметрическим, если при транспозиции (перестановке) любых двух индексов у любой его координаты она меняет знак.

Рассмотрим прежде всего двухвалентный кососимметрический тензор c_{ij}.

Согласно сказанному он характеризуется свойством

$$c_{ij} = -c_{ji} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{5.1}$$

В частности, если $i = j$, мы получаем:

$$c_{ii} = -c_{ii}, \qquad \text{откуда} \qquad c_{ii} = 0. \tag{5.2}$$

Двухвалентный кососимметрический тензор называется кратко *бивектором*. Будем считать, что мы находимся в *правой* координатной системе. Тогда, обозначая

$$u_1 = -c_{23}, \qquad u_2 = -c_{31}, \qquad u_3 = -c_{12} \tag{5.3}$$

и принимая во внимание (5.1) и (5.2), мы можем составить матрицу координат нашего бивектора:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0, & -u_3, & u_2 \\ u_3, & 0, & -u_1 \\ -u_2, & u_1, & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.4}$$

Как мы знаем (§ 3), всякому двухвалентному тензору, в частности нашему бивектору c_{ij}, отвечает некоторый аффинор с теми же координатами. Обозначим этот аффинор через $\mathfrak{C}$ и выясним его характер. Для этой цели используем координатную запись аффинора (3.13), которая в нашем случае дает:

$$y_p = \sum_q c_{pq} x_q,$$

или в подробной записи при $p = 1,\ 2,\ 3$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -x_2 u_3 + x_3 u_2, \\ y_2 &= x_1 u_3 - x_3 u_1, \\ y_3 &= -x_1 u_2 + x_2 u_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Мы замечаем, что вектор $\mathbf{y} = \mathfrak{C}\mathbf{x}$ есть не что иное, как векторное произведение $\mathbf{u}$ на $\mathbf{x}$, если обозначить через $\mathbf{u}$ вектор с координатами u_1, u_2, u_3. Итак,

$$\mathfrak{C}\mathbf{x} = [\mathbf{ux}]. \tag{5.6}$$

Из этой записи видно, в частности, что вектор $\mathbf{u}$ будет вполне определенным независимо от выбора координатной системы. В самом деле, если бы он мог меняться, то менялась бы и *зависимость* вектора $\mathbf{y}$ от $\mathbf{x}$, что невозможно, так как мы рассматриваем некоторый вполне определенный аффинор $\mathfrak{C}$.

Таким образом, аффинор $\mathfrak{C}$, *отвечающий бивектору* c_{ij}, *сводится к векторному умножению некоторого постоянного вектора* $\mathbf{u}$ *на вектор-аргумент* $\mathbf{x}$.

При этом *в правых координатных системах координаты бивектора* c_{ij} *и вектора* $\mathbf{u}$ *связаны формулами* (5.3).

В левых координатных системах, напротив, полагаем

$$u_1 = c_{23}, \qquad u_2 = c_{31}, \qquad u_3 = c_{12}. \tag{5.7}$$

Тогда в правых частях (5.5) тоже нужно изменить знаки на обратные; мы получаем запись (по-прежнему *правого*) векторного произведения $[\mathbf{ux}]$ в *левой* системе и снова переходим к (5.6).

Переходим к *трехвалентному кососимметрическому тензору*, который носит название *тривектора*. Обозначим его координаты c_{ijk}. Для любых двух его индексов, например 2-го и 3-го, имеет место соотношение

$$c_{ijk} = -c_{ikj}. \tag{5.8}$$

Если среди его индексов есть хотя бы два одинаковых, например 2-й и 3-й, то (5.8) принимает вид

$$c_{ijj} = -c_{ijj}, \qquad \text{откуда} \qquad c_{ijj} = 0. \tag{5.9}$$

Итак, если мы хотим рассматривать отличные от нуля координаты тривектора, то должны брать все три индекса различными, т. е. придать им значения 1, 2, 3. Получим шесть следующих координат тривектора:

$$c_{123} = c_{231} = c_{312} = -c_{213} = -c_{321} = -c_{132}. \tag{5.10}$$

Знаки равенства поставлены на основании (5.8) и аналогичных соотношений для любой пары индексов. Так, например, чтобы проверить первый знак равенства, достаточно в c_{123} переставить 1-й и 2-индексы, а у полученной координаты переставить 2-й и 3-й индексы. При двойной транспозиции дважды меняется знак, и полученная в итоге координата c_{231} равна c_{123}.

Нетрудно заметить, что общий смысл (5.10) состоит в том, что при четной подстановке индексов координата тривектора не меняется, а при нечетной — меняет только знак.

В результате у тривектора имеется лишь одна, как говорят, существенная координата, например, c_{123}. Остальные координаты или равны ей, или отличаются от нее только знаком, или, наконец, равны нулю.

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — три произвольных вектора, x_p, y_q, z_r — их координаты. Подсчитаем инвариант, полученный путем полного свертывания тензоров c_{ijk}, x_i, y_j, z_k:

$$I = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_i y_j z_k. \tag{5.11}$$

Сумма в правой части формально содержит 27 членов, но большинство членов равно нулю в силу (5.9). Остается лишь шесть членов, не равных нулю, а именно, те, для которых индексы i, j, k все различны (и представляют собой, следовательно, некоторую подстановку из 1, 2, 3). Эти члены имеют коэффициенты c_{ijk}, выражающиеся через c_{123} согласно (5.10).

Выписывая теперь (5.11) в развернутом виде, получим окончательно:

$$I = c_{123}(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2) =$$
$$= c_{123}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} c_{123}(\mathbf{xyz}) & \text{(в правой системе)}, \\ \\ -c_{123}(\mathbf{xyz}) & \text{(в левой системе)}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Мы использовали то обстоятельство, что полученный определитель выражает смешанное произведение $(\mathbf{xyz})$ в правой координатной системе и отличается от этого произведения лишь знаком в левой координатной системе (само смешанное произведение трех векторов мы берем всегда *правое*).

Из полученного результата вытекает, в частности, что

$$\left.\begin{aligned} c_{123} &= \frac{I}{\mathbf{xyz}} \quad \text{(в правой системе)}, \\ c_{123} &= -\frac{I}{\mathbf{xyz}} \quad \text{(в левой системе)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Мы предполагаем здесь, что $\mathbf{xyz} \neq 0$. Так как I и $\mathbf{xyz}$ инвариантны, то c_{123} сохраняет одно и то же численное значение во всех правых системах и одно и то же численное значение во всех левых системах, причем эти два значения отличаются только знаком. Величина, обладающая таким свойством, называется *относительным инвариантом*.

Итак, единственная существенная координата тривектора есть относительный инвариант. Это позволяет нам использовать тривекторы как источник получения инвариантов.

Заметим, что в рассматриваемом нами трехмерном пространстве невозможен кососимметрический тензор более чем 3-й валентности. Говоря точнее, такой тензор всегда имеет лишь нулевые координаты.

В самом деле, совершенно так же, как и в (5.9), убеждаемся, что наличие двух одинаковых индексов обращает координату нашего тензора в нуль. Между тем, его координаты всегда имеют по меньшей мере два одинаковых индекса, так как индексов у них четыре или больше, а принимать они могут лишь значения 1, 2, 3. Следовательно, все координаты нашего тензора равны нулю.

§ 6. Получение инвариантов с помощью кососимметрических тензоров

Если нам задан трехвалентный тензор a_{pqr} (не обязательно кососимметрический), то мы можем получить из него кососимметрический тензор c_{ijk} путем так называемой операции *альтернации*; а именно, каждая координата c_{ijk} определяется как среднее арифметическое шести координат тензора a_{pqr}, индексы при которых получены из i, j, k всевозможными подстановками (в том числе и тождественной), причем в случае четной подстановки координата берется со своим знаком, а в случае нечетной — с обратным:

$$c_{ijk}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{jik}-a_{kji}-a_{ikj}). \tag{6.1}$$

Нетрудно заметить, что c_{ijk} представляют собой тензор, так как операция альтернирования, которой мы их получили, сводится к комбинации известных нам тензорных операций подстановки индексов и сложения (вычитания) тензоров (§ 4). Кроме того, из соотношений (6.1) немедленно следует, что c_{ijk} меняет знак при транспозиции двух индексов, так как в правой части первая тройка членов превращается во вторую тройку со знаками + вместо —, а вторая тройка превращается в первую со знаками — вместо +. Таким образом, альтернация по трем индексам дает нам тензор, кососимметрический по этим индексам.

Когда тензор c_{ijk} получен из тензора a_{ijk} по формуле (6.1), *то мы будем говорить, что он получен из a_{ijk} альтернацией по индексам i, j, k; при этом мы будем применять взамен развернутого выражения* (6.1) *краткое обозначение*

$$c_{ijk}=a_{[ijk]}. \tag{6.2}$$

Альтернацию можно производить и над тремя произвольно выбранными индексами многовалентного тензора, например, над первыми тремя индексами тензора a_{ijklm}.

Получаем тензор

$$c_{ijklm}=a_{[ijk]\,lm}, \tag{6.3}$$

причем в правой части над индексами i, j, k проделывается в точности то же самое, что и в правой части (6.1); индексы l, m переписываются при этом без изменения. Полученный в результате тензор является *кососимметрическим по индексам* i, j, k (т. е. по тем, по которым произведена альтернация).

Альтернацию можно производить *и по двум индексам*, произвольно выбранным в каком-либо (по крайней мере, двухвалентном) тензоре, причем в этом случае она выглядит значительно проще и означает просто *составление полуразности данной координаты и координаты, полученной из нее транспозицией избранных индексов.*

Так, для двухвалентного тензора a_{ij} альтернация по его индексам означает составление тензора

$$c_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}). \tag{6.4}$$

Для четырехвалентного тензора a_{ijkl} альтернация, например, по 2-му и 4-му индексам означает составление тензора

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ijkl} - a_{ilkj}). \tag{6.5}$$

Ясно, что результат альтернации и здесь будет кососимметричен по соответствующим двум индексам j, l.

Как мы вскоре увидим, альтернация по двум индексам в своем месте играет большую роль, но для составления инвариантов (в трехмерном пространстве) является полезной лишь альтернация по трем индексам. К ней мы и возвращаемся.

Ясно, что, проальтернировав трехвалентный тензор согласно (6.1), мы можем получить его относительный инвариант в виде одной существенной координаты кососимметрического тензора

$$c_{123} = \frac{1}{6}(a_{123} + a_{231} + a_{312} - a_{213} - a_{321} - a_{132}). \tag{6.6}$$

Интересно, что выражение в скобке по способу своего составления весьма напоминает определитель 3-го порядка. И действительно, оно и в самом деле обращается в определитель 3-го порядка, если, в частности, в качестве тензора a_{ijk} взять произведение трех тензоров 1-й валентности:

$$a_{ijk} = x_i y_j z_k. \tag{6.7}$$

Эти тензоры можно всегда считать, как мы знаем, координатами некоторых определенных векторов **x**, **y**, **z**.

Теперь (6.6) принимает вид

$$c_{123} = \frac{1}{6}(x_1 y_2 z_3 + \ldots) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{6.8}$$

Полученный определитель дает смешанное произведение (**xyz**), если он вычислен в правой координатной системе, и — (**xyz**), если он вычислен в левой координатной системе. Это соответствует тому, что c_{123} есть *относительный инвариант*.

Однако при помощи кососимметрических тензоров можно составлять и абсолютные инварианты, а не только относительные.

Пусть шестивалентный тензор $c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$ будет кососимметрическим как по индексам первой тройки, так и по индексам второй тройки. Рассмотрим его единственную существенную координату c_{123123}. Так как она является относительным инвариантом, если рассматривать ее в зависимости отдельно от первой или отдельно от второй тройки индексов, то при переходе от правой координатной системы к левой (или наоборот) она дважды умножается на -1, т. е. не меняется. *Следовательно, c_{123123} есть инвариант уже абсолютный.*

Пусть теперь нам задан произвольный шестивалентный тензор $a_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$. Проальтернируем его как по первой, так и по второй тройке индексов, в каждом случае по схеме (6.1). Получим тензор

$$c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{[i_1 i_2 i_3]\,[j_1 j_2 j_3]}, \tag{6.9}$$

кососимметрический как по первой, так и по второй тройке индексов. Следовательно, мы можем составить абсолютный инвариант

$$c_{123123} = a_{[123]\,[123]}. \tag{6.10}$$

Особенно важен частный случай, когда этот шестивалентный тензор представляет собой произведение трех одинаковых двухвалентных тензоров:

$$a_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3}\,^{*}). \tag{6.11}$$

Произведем альтернацию по индексам j_1, j_2, j_3. Получим новый тензор

$$c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{i_1 i_2 i_3\,[j_1 j_2 j_3]} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix}. \tag{6.12}$$

То, что в результате получается именно такой определитель, вытекает из близкого родства процесса альтернации согласно (6.1) и процесса составления определителя, а именно, исходное для альтернации выражение (6.11) представляет собой тот член определителя, который получается произведением элементов по главной диагонали, а в процессе альтернации к нему добавляется не что

---

*) Ради удобства записи мы нарушаем здесь правило (4.7) для расстановки индексов у произведения тензоров; точнее говоря, $a_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$ есть произведение тензоров $a_{i_1 j_1}$, $a_{i_2 j_2}$, $a_{i_3 j_3}$, в котором произведена некоторая подстановка индексов.

иное, как остальные члены определителя. Это легко усмотреть, вспомнив правило составления определителя. Впрочем, легко проверить равенство (6.12) и прямой выкладкой, написав результат альтернации в развернутом виде согласно (6.1) и убедившись, что он совпадает с разложением определителя.

В отличие от (6.9) мы произвели здесь альтернацию лишь по одной тройке индексов. Но этого в данном случае достаточно, так как полученный нами тензор (6.12) *будет кососимметричен не только по индексам* j_1, j_2, j_3, *по которым мы альтернировали, но и по индексам* i_1, i_2, i_3 *тоже.*

В самом деле, взаимная перестановка индексов, например j_1, j_2, означает перестановку первых двух столбцов определителя (6.12), а взаимная перестановка индексов, например, i_1, i_2, означает перестановку первых двух его строк. И в том и в другом случае определитель умножается на -1, чем и доказывается требуемая кососимметричность.

Мы можем теперь составить абсолютный инвариант

$$c_{123123} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\operatorname{Det}|a_{ij}|. \tag{6.13}$$

Таким образом, определитель, составленный из координат двухвалентного тензора, есть инвариант преобразования координатной системы.

Этот результат, впрочем, можно было бы получить и совершенно самостоятельно следующим образом. Запишем закон преобразования координат двухвалентного тензора

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij}.$$

Тогда из правила умножения детерминантов следует, что

$$\operatorname{Det}|a'_{pq}| = \operatorname{Det}|A_{pi}| \cdot \operatorname{Det}|A_{qj}| \cdot \operatorname{Det}|a_{ij}| = \operatorname{Det}|a_{ij}|,$$

так как $\operatorname{Det}|A_{pi}|$ и $\operatorname{Det}|A_{qj}|$ суть детерминанты одной и той же ортогональной матрицы и, следовательно, равны оба или $+1$ или -1.

Инвариант $\operatorname{Det}|a_{ij}|$ *имеет важный геометрический смысл, а именно, он дает то постоянное отношение, в котором изменяются объемы всех тел при центроаффинном преобразовании*

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x},$$

где аффинор $\mathfrak{A}$ *имеет координаты* a_{ij}.

Достаточно проверить это утверждение для кубов, так как объем любого тела можно сколь угодно точно приблизить объемом входящего тела, составленного из кубов, и выходящего тела, также составленного из кубов (имеются в виду тела с кусочно гладкой границей).

Возьмем какой-нибудь куб, помещенный для простоты одной вершиной в начале координат O, и направим координатные оси

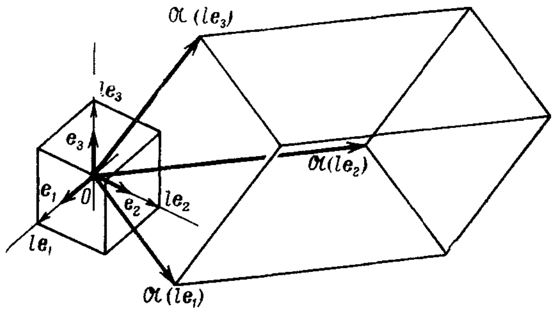

Рис. 2.

по ребрам куба (рис. 2). Тогда можно будет считать, что куб построен на векторах $l\mathbf{e}_1$, $l\mathbf{e}_2$, $l\mathbf{e}_3$, где l — ребро куба. Эти векторы согласно (3.8) перейдут в векторы:

$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_1) = l(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3),$$
$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_2) = l(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3),$$
$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_3) = l(a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3).$$

Куб перейдет в построенный на этих векторах параллелепипед, объем которого $\tilde{V}$ равен, как известно, смешанному произведению векторов, а значит, равен определителю

$$\tilde{V} = \operatorname{Det}|la_{ij}| = l^3 \cdot \operatorname{Det}|a_{ij}|$$

Мы считаем при этом, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют правую тройку; объем $\tilde{V}$ берется со знаком $\pm$ в зависимости от правой или левой ориентации векторов $\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_1)$, $\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_2)$, $\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_3)$, на которых он построен.

Если учесть, что объем куба $V = l^3$, то оказывается, что изменение объема произошло в отношении $\operatorname{Det}|a_{ij}|$. Тем самым и для всякого тела коэффициент объемного расширения (со знаком!) имеет вид

$$\frac{\tilde{V}}{V} = \operatorname{Det}|a_{ij}|. \tag{6.14}$$

Исходя из инварианта $\operatorname{Det}|a_{ij}|$, можно построить и другие инварианты двухвалентного тензора a_{ij}. Для этой цели вычтем из a_{ij} тензор (3.19) с постоянными координатами $\lambda\delta_{ij}$, где λ —

произвольное число, и составим детерминант из координат нового двухвалентного тензора

$$\operatorname{Det}|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Мы получаем снова инвариант преобразования координатной системы.

Если развернуть определитель и собрать члены с одинаковыми степенями λ, то получится, очевидно, кубический многочлен относительно λ

$$\operatorname{Det}|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3, \tag{6.15}$$

где

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_l a_{ll}, \tag{6.16}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \tag{6.17}$$

$$I_3 = \operatorname{Det}|a_{ij}|. \tag{6.18}$$

Так как (6.15) представляет собой инвариант *при любом значении* λ, то коэффициенты I_1, I_2, I_3 по отдельности также должны являться инвариантами.

При этом инвариант I_1 нам уже встречался ранее (см. (4.18)), а инвариант I_3 был нами получен в этом параграфе.

Таковы основные *инварианты тензора* a_{ij}. Что же касается добавка $-\lambda\delta_{ij}$, то он уже сыграл свою роль и в окончательном результате, как мы видим, не участвует.

§ 7. Симметрический аффинор

Для приложений тензорного исчисления исключительно важную роль играет понятие симметрического аффинора.

Аффинор $\mathfrak{A}$ называется *симметрическим*, если для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ имеет место соотношение

$$\mathbf{x}\mathfrak{A}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'\mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{7.1}$$

Другими словами, скалярное произведение одного вектора на функцию $\mathfrak{A}$ от другого вектора не меняется при перестановке этих векторов между собой.

Необходимым и достаточным признаком симметричности аффинора служит симметричность матрицы его координат. В самом деле, пусть аффинор $\mathfrak{A}$ симметрический. Согласно (3.9)

$$a_{pq} = \mathbf{e}_p \mathfrak{A} \mathbf{e}_q, \qquad a_{qp} = \mathbf{e}_q \mathfrak{A} \mathbf{e}_p, \tag{7.2}$$

а в силу симметричности аффинора правые части равны и, следовательно,

$$a_{pq} = a_{qp}, \tag{7.3}$$

т. е. матрица координат аффинора симметрическая.

Обратно, пусть соблюдаются соотношения (7.3). Тогда в силу формул (7.2) получаем:

$$\mathbf{e}_p \mathfrak{A} \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_q \mathfrak{A} \mathbf{e}_p. \tag{7.4}$$

Тем самым соотношение (7.1) проверено для ортов. Но тогда оно будет справедливым и для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$. Чтобы убедиться в этом, достаточно помножить равенство (7.4) почленно на $x_p x'_q$ (где x_p — координаты $\mathbf{x}$, а x'_q — координаты $\mathbf{x}'$) и просуммировать почленно по p и q. Так как

$$\sum_p x_p \mathbf{e}_p = \mathbf{x}, \qquad \sum_q x'_q \mathbf{e}_q = \mathbf{x}',$$

то в результате мы получим соотношение (7.1).

Важнейшее свойство симметрического аффинора — наличие у него трех взаимно ортогональных собственных направлений. Вообще *собственным направлением аффинора* $\mathfrak{A}$ (не обязательно симметрического) называется направление, все векторы которого $\mathbf{x}$ при действии на них аффинора $\mathfrak{A}$ умножаются на некоторое число λ:

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \tag{7.5}$$

Для того чтобы направление было собственным, достаточно, чтобы хоть один его вектор $\mathbf{x}$ обладал свойством (7.5); тогда и все векторы этого направления обладают этим свойством, причем λ имеет для всех них одно и то же значение. Для проверки этого достаточно умножить (7.5) почленно на произвольное число $\alpha \neq 0$ и внести α в левой части равенства под знак $\mathfrak{A}$. Тогда оказывается, что вектор $\alpha\mathbf{x}$, т. е. любой вектор, коллинеарный с $\mathbf{x}$, также обладает свойством (7.5).

Число α может быть и отрицательным: собственное направление всегда рассматривается с точностью до замены на обратное.

Коэффициент λ называется *собственным значением* аффинора $\mathfrak{A}$ для данного собственного направления.

Запишем условие (7.5) в координатах, обозначая через y_p координаты $\mathfrak{A}\mathbf{x}$:

$$y_p = \lambda x_p \qquad (p = 1, 2, 3).$$

Пользуясь формулами (3.13), получим:

$$\sum_q a_{pq}x_q = \lambda x_p \qquad (p = 1,\ 2,\ 3). \tag{7.6}$$

Выписывая каждое из трех равенств отдельно в развернутом виде и перенося все члены налево, получим:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1 + \quad a_{12}x_2 + \quad a_{13}x_3 &= 0,\\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \quad a_{23}x_3 &= 0,\\ a_{31}x_1 + \quad a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Для отыскания собственных направлений и собственных значений достаточно решить эту систему относительно неизвестных λ, x_1, x_2, x_3. При этом x_1, x_2, x_3 не должны одновременно обращаться в нуль (иначе вектор не укажет направления!) и ищутся они, как вытекает и из смысла задачи и из однородного характера уравнений (7.6), с точностью до умножения на общий множитель.

Чтобы система линейных однородных уравнений (7.7) относительно x_1, x_2, x_3 имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7.8}$$

Таким образом, чтобы удовлетворить системе (7.7), необходимо брать в качестве λ корень кубического уравнения (7.8) (которое называется *характеристическим уравнением* аффинора $\mathfrak{A}$). Обратно, если в качестве λ взят корень уравнения (7.8), то система (7.7) имеет ненулевое решение x_1, x_2, x_3.

Однако это не всегда означает отыскание собственного направления, так как взятый нами корень λ может оказаться комплексным.

До сих пор мы говорили о произвольном аффиноре $\mathfrak{A}$. *Теперь предположим, что он симметрический*, а следовательно,

$$a_{pq} = a_{qp}. \tag{7.9}$$

В этом случае все три корня уравнения (7.8) *обязательно вещественные*. Действительно, возьмем какой-нибудь корень λ уравнения (7.8), подставим его в систему (7.7) и найдем ненулевые x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие (7.7), а следовательно, и (7.6). При этом мы не предрешаем вопроса, будут ли значения λ, x_1, x_2, x_3 вещественными или существенно комплексными. Во всяком случае мы не ошибемся, считая их комплексными, так как вещественные числа есть частный случай комплексных.

Умножим обе части равенства (7.6) на $\overset{*}{x}_p$, где $\overset{*}{x}_p$ комплексно сопряжено с x_p, и просуммируем почленно по $p = 1, 2, 3$. Получим:

$$\sum_p \sum_q a_{pq} \overset{*}{x}_p x_q = \lambda \sum_p x_p \overset{*}{x}_p. \tag{7.10}$$

Произведения вида $x_p \overset{*}{x}_p$ — вещественные (и даже неотрицательные) числа. Поэтому те члены суммы в левой части, для которых $p = q$, будут вещественными. Те же члены, для которых $p \neq q$, мы будем рассматривать попарно, объединяя, например, члены с $p = 1$, $q = 2$ и с $p = 2$, $q = 1$. Получим (пользуясь затем (7.9)):

$$a_{12} \overset{*}{x}_1 x_2 + a_{21} \overset{*}{x}_2 x_1 = a_{12} (\overset{*}{x}_1 x_2 + \overset{*}{x}_2 x_1).$$

Выражение в скобках есть сумма двух комплексно сопряженных чисел, и следовательно, число вещественное. Тем самым левая часть (7.10) есть число вещественное, равно как и коэффициент при λ в правой части (который, кроме того, не равен нулю, так как x_p не обращаются в нуль одновременно). Отсюда и λ всегда оказывается числом вещественным, а следовательно, ему отвечает определяемое из (7.7) собственное направление нашего симметрического аффинора $\mathfrak{A}$, для которого λ, таким образом, является собственным значением.

Теперь мы можем показать существование трех взаимно ортогональных собственных направлений. Возьмем какой-нибудь корень λ_1 уравнения (7.8) и отвечающее ему собственное направление, представленное, например, единичным вектором $\mathbf{e}'_1$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1. \tag{7.11}$$

Рассмотрим плоскость E_2, ортогональную к $\mathbf{e}'_1$. Мы утверждаем, что векторы этой плоскости под действием аффинора $\mathfrak{A}$ переходят в векторы этой же плоскости. В самом деле, пусть $\mathbf{x}$ — вектор плоскости E_2, так что $\mathbf{x} \perp \mathbf{e}'_1$:

$$\mathbf{e}'_1 \mathbf{x} = 0. \tag{7.12}$$

Умножая скалярно обе части равенства (7.11) на $\mathbf{x}$, получим:

$$\mathbf{x}\mathfrak{A}\mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1 \mathbf{x} = 0.$$

Пользуясь свойством (7.1), можем переписать это в виде

$$\mathbf{e}_1 \mathfrak{A}\mathbf{x} = 0. \tag{7.13}$$

Другими словами, $\mathfrak{A}\mathbf{x}$ ортогонален к $\mathbf{e}'_1$ и, следовательно, тоже принадлежит плоскости E_2 (точнее, может быть в ней отложен).

Мы можем теперь рассматривать наш симметрический аффинор $\mathfrak{A}$ на плоскости E_2, поскольку он переводит векторы этой плоскости в векторы этой же плоскости. Вводим на плоскости E_2 прямоугольные декартовы координаты и ищем собственные направления и собственные значения аффинора $\mathfrak{A}$ совершенно так же, как и ранее с тем лишь упрощением, что вместо трехмерного пространства у нас будет двумерное, и вместо трех координат x_1, x_2, x_3 будут лишь две x_1, x_2. Матрица координат аффинора $\mathfrak{A}$ будет иметь теперь вид

$$\begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{Vmatrix}, \qquad a'_{12} = a'_{21},$$

а вместо уравнения (7.8) мы получим:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Мы снова обнаружим наличие собственного направления, которое зададим некоторым единичным вектором $\mathbf{e}'_2$; соответствующее собственное значение обозначим λ_2. Так как $\mathbf{e}'_2$ принадлежит E_2, то $\mathbf{e}'_2 \perp \mathbf{e}'_1$.

Наконец, построим единичный вектор $\mathbf{e}'_3$, ортогональный и к $\mathbf{e}'_1$, и к $\mathbf{e}'_2$. Так как из (7.12) следует (7.13), то $\mathfrak{A}\mathbf{e}'_3$ тоже будет ортогонален к $\mathbf{e}'_1$ и аналогично к $\mathbf{e}'_2$. Другими словами, $\mathfrak{A}\mathbf{e}'_3$ оказывается коллинеарным $\mathbf{e}'_3$, а следовательно, определяет собственное направление. Соответствующее собственное значение обозначим λ_3.

Итак, у нас построены три взаимно ортогональных собственных направления $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ *с собственными значениями* λ_1, λ_2, λ_3:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1, \qquad \mathfrak{A}\mathbf{e}'_2 = \lambda_2 \mathbf{e}'_2, \qquad \mathfrak{A}\mathbf{e}'_3 = \lambda_3 \mathbf{e}'_3. \tag{7.14}$$

Возникает вопрос, почему мы не построили сразу всех этих собственных направлений, используя поочередно все три корня уравнения (7.8) (подобно тому как мы построили $\mathbf{e}'_1$, используя корень λ_1). И действительно, это было бы самым простым способом доказательства, но лишь для случая *различных* корней уравнения (7.8). Для случая же, когда два или даже все три корня равны между собой, этот способ не годится. Поэтому мы пошли другим путем, пригодным во всех случаях.

Мы уже давали (§ 3) истолкование аффинора как центроаффинного преобразования пространства. В случае симметрического аффинора это истолкование принимает особенно простой вид, а именно, так как векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ взаимно ортогональны, то согласно (7.14) симметрический аффинор производит растяжение (сжатие) пространства по трем взаимно ортогональным направлениям в отношениях λ_1, λ_2, λ_3.

Примем $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ за орты новой координатной системы. Тогда каждая точка с координатами (x'_1, x'_2, x'_3) переходит, очевидно, в точку (y'_1, y'_2, y'_3) по формулам:

$$y'_1 = \lambda_1 x'_1, \quad y'_2 = \lambda_2 x'_2, \quad y'_3 = \lambda_3 x'_3. \tag{7.15}$$

Если среди λ_1, λ_2, λ_3 нет нулей, то получающееся таким образом специального вида центроаффинное преобразование пространства называется *чистой деформацией*. При отрицательном знаке, например у λ_1, в растяжение (сжатие) по оси X'_1 нужно включить и ее «перепрокидывание» в обратную сторону (т. е. зеркальное отражение пространства относительно плоскости $X'_2X'_3$).

В случае, когда, например, $\lambda_1 = 0$, преобразование (7.15) вырождается: все точки пространства переходят в точки плоскости $X'_2X'_3$.

Строго формально соотношения (7.15) можно получить так. Сравнивая (7.14) с (3.7), мы видим, что в новой координатной системе координаты нашего аффинора имеют вид

$$\begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}. \tag{7.16}$$

Отсюда координатная запись аффинора (3.13) принимает вид

$$y'_p = \sum_q a'_{pq} x'_q = \lambda_p x'_p,$$

т. е. мы снова получим (7.15).

Если λ_1, λ_2, λ_3 все различны, то аффинор не имеет собственных направлений кроме трех найденных. Действительно, из формул (7.15) легко следует, что всякий вектор, не направленный по одной из осей, под действием аффинора уклоняется в сторону от своего первоначального направления.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то всякий вектор *в плоскости* $X'_1X'_2$ (т. е. при $x'_3 = 0$) под действием аффинора, как видно из (7.15), умножается на $\lambda\ (= \lambda_1 = \lambda_2)$:

$$y'_1 = \lambda x'_1, \quad y'_2 = \lambda x'_2, \quad y'_3 = 0. \tag{7.17}$$

Поэтому двойному собственному значению $\lambda\ (= \lambda_1 = \lambda_2)$ будет отвечать целая собственная плоскость $X'_1X'_2$, любое направление которой будет собственным. Направления, не принадлежащие ни этой плоскости, ни оси X'_3, очевидно, собственными быть не могут.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, то (7.15) принимают вид

$$y'_1 = \lambda x'_1, \quad y'_2 = \lambda x'_2, \quad y'_3 = \lambda x'_3. \tag{7.18}$$

т. е. для *любого* вектора $\mathbf{x}$

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

и аффинор $\mathfrak{A}$ вообще сводится к умножению на данное число λ. Любое направление является собственным.

Мы разобрали все возможные случаи расположения собственных направлений. Нам нужно показать, наконец, что корни уравнения (7.8) (с учетом их кратности) совпадают с нашими собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3.

Прежде всего в осях X_1', X_2', X_3' уравнение (7.8) принимает вид (согласно (7.16)):

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, действительно, видно, что в этом случае его корни совпадают с собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3, а так как коэффициенты уравнения (7.8) суть инварианты преобразования координатной системы (см. (6.15)), то корни этого уравнения суть тоже инварианты и, следовательно, вычисленные в любых координатных осях дают наши собственные значения λ_1, λ_2, λ_3.

Пример. *Тензор моментов инерции.* Дано твердое тело, вращающееся около закрепленной точки O. Эту точку мы примем за начало координат. Будем для простоты записи считать, что тело состоит из конечного числа n материальных точек, жестко скрепленных между собой. Массы этих точек обозначим $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(n)}$, а координаты их (в данный момент) через $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$ $(i=1, 2, 3)$.

Составим матрицу

$$a_{ij} = -\sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} + \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \mathbf{x}^{(\alpha)2}. \tag{7.19}$$

Нетрудно убедиться, что эта матрица, построенная в любой координатной системе, дает координаты одного и того же симметрического тензора. В самом деле, в первом слагаемом при умножении тензора $x_i^{(\alpha)}$ на $x_j^{(\alpha)}$ (т. е. на себя) получается симметрический двухвалентный тензор; дальнейшее умножение на инвариант $m^{(\alpha)}$ и сложение полученных результатов дают тензор той же валентности. Второе слагаемое представляет собой единичный тензор δ_{ij}, умноженный на инвариант; действительно, как $m^{(\alpha)}$, так и

$$\mathbf{x}^{(\alpha)2} = x_1^{(\alpha)2} + x_2^{(\alpha)2} + x_3^{(\alpha)2}, \tag{7.20}$$

т. е. квадрат расстояния данной точки от начала O, суть инварианты преобразования координатной системы.

Полученный симметрический тензор a_{ij} называется *тензором моментов инерции* данного твердого тела. Физический смысл этого тензора следующий. Пусть через точку O проведена некоторая ось с единичным направляющим вектором $\mathbf{l}$ (l_1, l_2, l_3). Вычислим инвариант $\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j$, полученный в результате полного свертывания тензора a_{ij} с дважды взятым тензором l_i:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j = -\sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \sum_i x_i^{(\alpha)} l_i \sum_j x_j^{(\alpha)} l_j + \sum_i \sum_j \delta_{ij} l_i l_j \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \mathbf{x}^{(\alpha)^2}.$$

Так как $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$, то $\sum_i \sum_j \delta_{ij} l_i l_j = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$; кроме того, $\sum_i x_i^{(\alpha)} l_i = \mathbf{x}^{(\alpha)} \mathbf{1}$, и мы получаем:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j = \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \left\{ -(\mathbf{x}^{(\alpha)} \mathbf{1})^2 + \mathbf{x}^{(\alpha)^2} \right\}. \qquad (7.21)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, дает квадрат расстояния точки с массой $m^{(\alpha)}$ до выбранной нами оси, и мы получаем момент инерции относительно этой оси.

Момент инерции данного твердого тела относительно произвольной оси вращения, проходящей через точку O, получается путем свертывания тензора момента инерции с дважды взятым тензором l_i (направляющие косинусы оси). Собственные направления аффинора $\mathfrak{A}$ с координатами a_{ij} параллельны так называемым главным осям инерции. В них тензор моментов инерции принимает вид (7.16).

§ 8. Разложение аффинора на симметрическую и кососимметрическую части

Рассмотрим произвольный аффинор

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}. \qquad (8.1)$$

Соответствующая координатная запись имеет вид (3.13):

$$y_p = \sum_q a_{pq} x_q. \qquad (8.2)$$

Здесь a_{pq} — координаты аффинора, образующие двухвалентный тензор. В правой части (8.2) происходит тензорная операция умножения этого тензора на тензор x_q с последующим свертыванием по двум последним индексам. В результате получается снова тензор, именно, y_p.

Мы хотим теперь детальнее представить себе структуру аффинора $\mathfrak{A}$, разложив его на симметрическую и кососимметрическую части. Для этой цели произведем альтернацию над тензором a_{ij}, т. е. составим новый тензор c_{ij} согласно (6.4):

$$c_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}). \qquad (8.3)$$

С другой стороны, составим новый тензор b_{ij}, беря в формуле (8.3) полусумму вместо полуразности:

$$b_{ij}=a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}). \tag{8.4}$$

Здесь $a_{(ij)}$ есть сокращенное обозначение для выражения в правой части. Операция составления тензора $a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$ называется *симметрированием* тензора a_{ij} по его индексам i, j (аналогично тому как операция составления тензора $a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$ называется *альтернацией* тензора a_{ij} по его индексам i, j). В обозначениях различие состоит в том, что симметрируемые индексы заключаются в круглые скобки, в то время как альтернируемые — в прямые скобки.

То, что операция (8.4) приводит действительно к тензору, видно из того, что она сводится (не считая деления на 2) к операции сложения двух тензоров, причем второй из них образован из первого также тензорной операцией — подстановкой индексов. Очевидно, тензор b_{ij} будет симметрическим, а c_{ij} — кососимметрическим:

$$b_{ij}=b_{ji}, \quad c_{ij}=-c_{ji}.$$

Складывая тензоры (8.3) и (8.4) почленно, мы видим, что первоначальный тензор a_{ij} можно представить в виде

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}. \tag{8.5}$$

Итак, любой двухвалентный тензор a_{ij} можно разложить на сумму симметрического тензора b_{ij} и кососимметрического тензора c_{ij}.

Такого рода разложение будет единственным. В самом деле, симметрируя какое-либо разложение вида (8.5) почленно, мы получаем, что b_{ij} обязательно выражается формулой (8.4), а альтернируя его, видим, что c_{ij} выражается формулой (8.3).

Обозначим теперь аффиноры, координатами которых служит b_{ij} и c_{ij}, соответственно через $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Тогда (8.5) можно переписать в виде

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}+\mathfrak{C} \quad \text{или} \quad \mathfrak{A}\mathbf{x}=\mathfrak{B}\mathbf{x}+\mathfrak{C}\mathbf{x}. \tag{8.6}$$

Итак, любой аффинор $\mathfrak{A}$ разлагается на сумму симметрического аффинора $\mathfrak{B}$, выражающего чистую деформацию пространства (§ 7), и кососимметрического аффинора $\mathfrak{C}$ (§ 5), сводящегося к векторному умножению вектора аргумента $\mathbf{x}$ на некоторый постоянный вектор $\mathbf{u}$.

Разложение (8.6) *играет особенно важную роль в одном частном случае, а именно, когда рассматривается аффинор, бесконечно мало отличающийся от единичного.*

Будем рассматривать аффинор $E+\varepsilon\mathfrak{A}$, где E — единичный аффинор (§ 3), $\mathfrak{A}$ — произвольный аффинор, а ε — бесконечно малый множитель. Разумеется, аффинор $E+\varepsilon\mathfrak{A}$ будет переменным и стремится к единичному аффинору E как к своему пределу при $\varepsilon \to 0$.

Переход к пределу для аффинора можно определить, чтобы не вдаваться в излишние подробности, хотя бы как переход к пределу для каждой из его координат.

Важное значение аффинора вида $E+\varepsilon\mathfrak{A}$ выяснится несколько позже.

Разложим аффинор $\mathfrak{A}$ на симметрический и кососимметрический аффиноры согласно (8.6). Тогда

$$E+\varepsilon\mathfrak{A} = E+\varepsilon\mathfrak{B}+\varepsilon\mathfrak{C}, \tag{8.7}$$

и соответствующее центроаффинное преобразование запишется в виде

$$\mathbf{y} = (E+\varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{C}\mathbf{x}, \tag{8.8}$$

где $\mathbf{x}$ — произвольный вектор.

Ввиду того что рассматриваемый аффинор бесконечно близок к единичному, формула (8.8) определяет *бесконечно малое* центроаффинное преобразование пространства (если понимать под $\mathbf{x}$, как мы это ранее и делали, радиус-вектор произвольной точки пространства).

Рассмотрим сначала частный случай, когда в (8.7) отсутствует $\mathfrak{C}$, так что речь идет об аффиноре $E+\varepsilon\mathfrak{B}$.

Вместе с E и $\mathfrak{B}$ этот аффинор будет симметрическим и, следовательно, дает чистую деформацию пространства, т. е. его растяжение (сжатие) по трем взаимно ортогональным направлениям.

Координаты аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, очевидно, равны $\delta_{ij}+\varepsilon b_{ij}$, т. е. в подробной матричной записи имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 1+\varepsilon b_{11} & \varepsilon b_{12} & \varepsilon b_{12} \\ \varepsilon b_{21} & 1+\varepsilon b_{22} & \varepsilon b_{23} \\ \varepsilon b_{31} & \varepsilon b_{32} & 1+\varepsilon b_{33} \end{Vmatrix}. \tag{8.9}$$

Чтобы найти собственные направления и собственные значения для аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, достаточно найти их для аффинора $\mathfrak{B}$. В самом деле, пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения $\mathfrak{B}$ и пусть $\mathbf{x}$ — вектор, идущий по одному из собственных направлений, например, первому. Тогда

$$(E+\varepsilon\mathfrak{B})\mathbf{x} = E\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}+\varepsilon\lambda_1\mathbf{x} = (1+\varepsilon\lambda_1)\,\mathbf{x}. \tag{8.10}$$

Следовательно, направление $\mathbf{x}$ будет собственным и для $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ и притом с собственным значением $1+\varepsilon\lambda_1$.

Итак, собственные направления аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ *совпадают с собственными направлениями аффинора* $\mathfrak{B}$, *и соответствующие собственные значения равны* $1+\varepsilon\lambda_1$, $1+\varepsilon\lambda_2$, $1+\varepsilon\lambda_3$. Таковы будут коэффициенты бесконечно малого растяжения (сжатия), производимого аффинором $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ по трем взаимно ортогональным собственным направлениям.

Теперь рассмотрим противоположный частный случай, когда в (8.7) отсутствует $\mathfrak{B}$, так что речь идет об аффиноре $E+\varepsilon\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ кососимметричен.

Согласно (5.6) для любого $\mathbf{x}$

$$\mathfrak{C}\mathbf{x}=[\mathbf{ux}],$$

где $\mathbf{u}$ — некоторый постоянный вектор. Следовательно,

$$(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}]. \tag{8.11}$$

Легко заметить, что соответствующее центроаффинное преобразование

$$\mathbf{x}\rightarrow(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}] \tag{8.12}$$

означает *поворот около оси, проходящей через* O *и направленной по* $\mathbf{u}$, *на бесконечно малый угол* $\varepsilon\,|\mathbf{u}|$.

В самом деле, рассмотрим вращение пространства как твердого тела около точки O с постоянным вектором угловой скорости $\mathbf{u}$. Это значит, что вращение совершается вокруг оси, направленной по $\mathbf{u}$, причем за единицу времени происходит поворот на угол $|\mathbf{u}|$ (против часовой стрелки, если смотреть от конца к началу вектора $\mathbf{u}$).

Как известно из кинематики твердого тела, линейная скорость движения каждой точки M выражается при этом вектором

$$\mathbf{v}=[\mathbf{ux}],$$

где $\mathbf{x}=\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор точки M.

За бесконечно малый промежуток времени ε точка M сместится на вектор

$$\varepsilon\mathbf{v}=\varepsilon\,[\mathbf{ux}],$$

если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка. Следовательно, радиус-вектор смещенной точки M' будет:

$$\overrightarrow{OM'}=\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{v}=\mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}]=(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}.$$

Итак, переход

$$\overrightarrow{OM}\rightarrow\overrightarrow{OM'},$$

или, что то же,

$$\mathbf{x} \to (E + \varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}, \tag{8.13}$$

означает поворот пространства за бесконечно малое время ε *при векторе угловой скорости* $\mathbf{u}$ (координаты которого определяются согласно (5.3) или (5.7)). Угол этого бесконечно малого поворота равен, очевидно, $\varepsilon\,|\mathbf{u}|$. Этим наше утверждение доказано.

Рассмотрим, наконец, общий случай аффинора (8.7). Подействуем на произвольный вектор $\mathbf{x}$ сначала аффинором $E + \varepsilon\mathfrak{B}$

$$(E + \varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + \varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x},$$

а на полученный вектор подействуем аффинором $E + \varepsilon\mathfrak{C}$. Получим:

$$(E + \varepsilon\mathfrak{C})\,(E + \varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + \varepsilon\mathfrak{C}\mathbf{x} + \varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x} + \varepsilon^2\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathbf{x}.$$

Последний член мы отбросим, пренебрегая бесконечно малыми 2-го порядка, и, пользуясь (8.8), получим окончательно:

$$(E + \varepsilon\mathfrak{C})\,(E + \varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x} \approx (E + \varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x}. \tag{8.14}$$

Этот результат показывает, что если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка, аффинор $E + \varepsilon\mathfrak{A}$ *представляет собой результат наложения аффиноров* $E + \varepsilon\mathfrak{B}$ *и* $E + \varepsilon\mathfrak{C}$, *т. е. бесконечно малой чистой деформации и бесконечно малого поворота.* Изменение формы и размеров тел происходит при этом за счет чистой деформации; при повороте, они, конечно, не меняются.

Заметим, что и произвольный аффинор (а не только вида $E + \varepsilon\mathfrak{A}$) можно свести к последовательному выполнению чистой деформации и поворота, и притом совершенно точным образом. Однако доказательство в этом случае будет значительно сложнее, а чистая деформация и поворот уже не отвечают симметрической и кососимметрической частям рассматриваемого аффинора.

Для дальнейшего нам будет необходим коэффициент объемного расширения (6.14) в случае бесконечно малого центроаффинного преобразования

$$\mathbf{y} = (E + \varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x}.$$

Согласно (6.14) в нашем случае мы получим:

$$\frac{\tilde{V}}{V} = \operatorname{Det}|\delta_{ij} + \varepsilon a_{ij}| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \varepsilon a_{13} \\ \varepsilon a_{21} & 1 + \varepsilon a_{22} & \varepsilon a_{23} \\ \varepsilon a_{31} & \varepsilon a_{32} & 1 + \varepsilon a_{33} \end{vmatrix} \approx 1 + \varepsilon\,(a_{11} + a_{22} + a_{33}). \tag{8.15}$$

Здесь при раскрытии определителя мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка.

Мы видим, что коэффициент объемного расширения отличается от 1 на след аффинора $\mathfrak{A}$, умноженный на ε.

§ 9. Тензорные поля

Начиная с этого параграфа, мы переходим из области тензорной алгебры в область тензорного анализа, но по-прежнему в самом простом частном случае: рассматриваем трехмерное евклидово пространство и притом в прямоугольных декартовых координатах. Следует предупредить читателя, что узость нашей точки зрения гораздо более резко будет сказываться после этого перехода. Если о тензорной алгебре и можно составить себе некоторое представление по предыдущим параграфам, то тензорный анализ в широком смысле слова при нашем подходе настолько упрощается, что теряет почти все свое содержание.

Смысл перехода от тензорной алгебры к тензорному анализу заключается в том, что вместо отдельных тензоров мы будем рассматривать тензорные поля, в связи с чем появляется дифференцирование тензоров.

Мы говорим, что нам дано тензорное поле, если в каждой точке M пространства задан некоторый тензор постоянной валентности, но в остальном, вообще говоря, меняющийся от точки к точке. Этот тензор мы будем называть *тензором поля.* Он задается, следовательно, как функция точки M, причем его валентность остается постоянной, например, 3-й:

$$a_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 i_2 i_3}(M). \tag{9.1}$$

Эту формулу нужно понимать в том смысле, что координаты тензора зависят от выбора точки M (и, разумеется, от выбора координатной системы, преобразуясь по обычному тензорному закону).

Если мы рассматриваем тензорное поле в определенной координатной системе, то точка M характеризуется своими координатами x_1, x_2, x_3, и формула (9.1) принимает вид

$$a_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 i_2 i_3}(x_1, x_2, x_3), \tag{9.2}$$

т. е. координаты тензора заданы как функции координат точки M.

Мы будем предполагать, что функции (9.2) *непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько нам будем нужно.*

Тензорное поле может быть задано и не во всем пространстве, а лишь в некоторой его области Ω. Это значит, что тензор поля (9.1) определен как функция точки M для всевозможных положений точки M лишь в некоторой области Ω (а не во всем пространстве).

Рассмотрим простейшие частные случаи тензорных полей.

Тензорное *поле нулевой валентности* называется иначе *скалярным полем.* Так как тензор нулевой валентности есть инвариант, то скалярное поле означает задание в каждой точке M некоторой области Ω определенного числа a:

$$a = a(M), \tag{9.3}$$

причем $a(M)$ зависит только от выбора точки M, но не зависит от выбора координатной системы. Если зависимость (9.3) записывается в определенной координатной системе, то она принимает вид

$$a = a(x_1, x_2, x_3). \tag{9.4}$$

Примеры скалярных полей: температура неравномерно нагретого тела, имеющая свое значение в каждой его точке; потенциал электростатического поля как функция точки; плотность неоднородного тела, в каждой его точке имеющая свое значение; давление в газовой среде, меняющееся, вообще говоря, от точки к точке, и т. п.

Рассмотрим теперь одновалентное тензорное поле

$$a_i = a_i(M). \tag{9.5}$$

Мы знаем, что координаты одновалентного тензора a_i всегда можно истолковать как координаты некоторого инвариантного вектора $\mathbf{a}$, причем

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i.$$

Поэтому задать поле одновалентного тензора (9.5) все равно, что указать в каждой точке M определенный вектор

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i = \mathbf{a}(M), \tag{9.6}$$

т. е. все равно, что задать векторное поле.

Примеры векторных полей: вектор электрического или магнитного поля; вектор скорости движения жидкой или газовой среды, имеющий в каждой ее точке свое значение; вектор плотности электрического тока в массивном проводнике и т. п. О двухвалентных и т. д. тензорных полях мы будем говорить позже.

Настоящий смысл тензорного исчисления заключается, конечно, в изучении тензорных полей, и для приложений нужны, как правило, именно тензорные поля, а не отдельные тензоры. Поэтому на тензорную алгебру, изложенную в §§ 4, 5, где рассматривались операции над отдельными тензорами, следует смотреть как на необходимый подготовительный материал, а именно, все операции, установленные там для отдельных тензоров, автоматически переносятся и на тензорные поля, если подразумевать, что эти операции производятся над тензорами поля *в каждой точке M области Ω*.

Так, например, сложение тензоров двух полей одинаковой валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M), \quad b_{ijk} = b_{ijk}(M)$$

означает построение нового тензорного поля

$$c_{ijk}(M) = a_{ijk}(M) + b_{ijk}(M) \tag{9.7}$$

путем сложения тензоров a_{ijk} и b_{ijk} в каждой точке M области Ω.

Аналогично и перемножение тензоров двух полей, например, $a_{ijk}(M)$ и $b_{lm}(M)$, означает построение нового тензорного поля

$$c_{ijklm}(M) = a_{ijk}(M)\, b_{lm}(M) \tag{9.8}$$

путем перемножения тензоров a_{ijk} и b_{lm} в каждой точке M области Ω.

Аналогично операции свертывания и подстановки индексов производятся над тензором поля в каждой точке M области Ω.

Но помимо алгебраических операций над тензорами поля можно производить еще операцию дифференцирования, которая и определяет лицо тензорного анализа.

§ 10. Дифференцирование тензора поля

Рассмотрим какое-нибудь тензорное поле, для примера, трехвалентное:

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M) = a_{ijk}(x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{10.1}$$

Нас интересует вопрос (действительно очень важный для приложений): как меняется наш тензор от точки к точке в *бесконечно малой окрестности данной точки* $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Для этой цели мы смещаемся из точки M в произвольную бесконечно близкую точку M'.

Говоря более точно, это бесконечно малое смещение состоит в том, что мы движемся по некоторой параметрически заданной кривой

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \qquad x_3 = x_3(t), \tag{10.2}$$

причем при данном значении t мы находимся в M, а при бесконечно близком значении $t + \Delta t$ попадаем в бесконечно близкую точку M'. Все дифференциалы, которые мы будем выписывать, предполагаются взятыми по отношению к аргументу t.

Функции $x_i(t)$ мы считаем, конечно, непрерывно дифференцируемыми.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M в силу (10.2) выражается формулой

$$\overrightarrow{OM} = \sum_i x_i(t)\, \mathbf{e}_i, \tag{10.3}$$

а его дифференциал, который дает главную линейную часть вектора смещения $\overrightarrow{MM'}$ и который мы будем обозначать $\overrightarrow{d\mathbf{M}}$, имеет вид

$$\overrightarrow{d\mathbf{M}} = \sum_l dx_l(t)\,\mathbf{e}_l \approx \overrightarrow{MM'}. \tag{10.4}$$

В силу (10.1) и (10.2) координаты тензора a_{ijk} меняются как сложные функции от t; их дифференциалы при нашем бесконечно малом смещении $\overrightarrow{MM'}$ вычисляются по формулам

$$da_{ijk} = \sum_l \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}\,dx_l. \tag{10.5}$$

Тензор с координатами da_{ijk} мы будем называть абсолютным дифференциалом тензора поля a_{ijk} *).

Абсолютный дифференциал da_{ijk} зависит, очевидно, и от точки M и от данного бесконечно малого смещения из M в M'. То, что это действительно тензор, легко проверить. В самом деле, при переходе к новой координатной системе

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi}\mathbf{e}_i \tag{10.6}$$

координаты тензора a_{ijk} испытывают преобразование

$$a'_{pqr} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi}A_{qj}A_{rk}a_{ijk}; \tag{10.7}$$

дифференцируя почленно, получим:

$$da'_{pqr} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi}A_{qj}A_{rk}da_{ijk}, \tag{10.8}$$

так как A_{pi} от выбора точки M не зависят и при переходе от M к M' ведут себя как постоянные.

Таким образом, для da_{ijk} также имеет место тензорный закон преобразования.

Как видно из формулы (10.5), для характеристики изменения тензора a_{ijk} от точки M к любой бесконечно близкой точке M' нужно знать частные производные $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$ от координат тензора a_{ijk} по координатам точки $M(x_1, x_2, x_3)$.

Мы будем обозначать для краткости

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = \nabla_l a_{ijk}. \tag{10.9}$$

*) Смысл термина «абсолютный» выяснится позже, когда абсолютный дифференциал будет рассматриваться в криволинейных координатах (вообще говоря, в пространстве аффинной связности, в частности, в евклидовом пространстве).

Выясним, по какому закону будет происходить преобразование этих величин при переходе к новой координатной системе (10.6).

Как мы знаем, при этом переходе старые координаты точки M выражаются через новые согласно (1.13):

$$x_l = \sum_s A_{sl} x'_s. \tag{10.10}$$

Вычислим теперь величины (10.9) в новой координатной системе:

$$\nabla_s a'_{pqr} = \frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x'_s} = \sum_l \frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x'_s}. \tag{10.11}$$

Последнее выражение получено по правилу дифференцирования функции от функции (можно считать a'_{pqr} функциями от x_1, x_2, x_3, причем эти переменные сами являются функциями от x'_1, x'_2, x'_3 в силу (10.10)). Так как согласно (10.10)

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_s} = A_{sl}$$

и согласно (10.7)

$$\frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x_l} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qj} A_{rk} \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$$

(A_{pi} — величины постоянные), то окончательно (10.11) принимает вид

$$\nabla_s a'_{pqr} = \sum_l \sum_i \sum_j \sum_k A_{sl} A_{pi} A_{qj} A_{rk} \nabla_l a_{ijk}. \tag{10.12}$$

Мы видим, что $\nabla_l a_{ijk}$ преобразуются как координаты четырехвалентного тензора (при трехвалентном исходном тензоре a_{ijk}).

Наши рассуждения дословно повторяются и при любой валентности исходного тензора. Таким образом, получаем следующий результат. *Совокупность всех частных производных 1-го порядка (например, $\nabla_l a_{ijk}$) от координат тензора поля по координатам x_l той точки, где этот тензор в данный момент рассматривается, образует снова тензор на единицу высшей валентности, а именно, в качестве добавочного индекса появляется индекс той координаты, по которой берется производная.*

Новый тензор $\nabla_l a_{ijk}$ можно построить в любой точке M области Ω, так что по существу мы из тензорного поля a_{ijk} получили новое тензорное поле $\nabla_l a_{ijk}$.

Тензор поля $\nabla_l a_{ijk}$ называется абсолютной производной тензора поля a_{ijk}.

Формулу (10.5) теперь можно переписать в виде

$$da_{ijk} = \sum_l dx_l \nabla_l a_{ijk} \tag{10.13}$$

и понимать в том смысле, что тензор da_{ijk} есть результат свертывания двух тензоров dx_l и $\nabla_l a_{ijk}$.

В качестве простейшего случая рассмотрим дифференцирование скалярного поля

$$a = a(M) = a(x_1, x_2, x_3). \tag{10.14}$$

Абсолютная производная есть одновалентный тензор

$$\nabla_i a = \frac{\partial a}{\partial x_i}. \tag{10.15}$$

Как и всякий одновалентный тензор, $\nabla_i a$ может быть истолкован как вектор с теми же координатами. Этот вектор называется *градиентом скалярного поля*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, a = \sum_i \nabla_i a \cdot \mathbf{e}_i. \tag{10.16}$$

Формула (10.13) принимает вид

$$da = \sum_l dx_l \cdot \nabla_l a = \overrightarrow{d\mathbf{M}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, a. \tag{10.17}$$

Последняя запись в виде скалярного произведения легко получается при помощи формул (10.4) и (10.16).

Итак, дифференциал скаляра $a(M)$ при бесконечно малом смещении $\overrightarrow{MM'}$ равен скалярному произведению дифференциала радиуса-сектора $\overrightarrow{d\mathbf{M}}$ на градиент скалярного поля.

Градиент скалярного поля определяется, разумеется, в каждой точке области Ω, в которой скалярное поле задано, и *образует векторное поле.*

Приведем примеры.

1°. Силовое поле $\mathbf{F}(M)$ (где $\mathbf{F}(M)$ — напряженность поля, т. е. сила, действующая в точке M на единицу заряда (массы)) называется *потенциальным*, если $\mathbf{F}(M)$ в каждой точке есть градиент некоторого скалярного поля $a(M)$:

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, a. \tag{10.18}$$

Функция $a(M)$ называется *потенциальной функцией* данного силового поля и лишь знаком отличается от его потенциала.

Физический смысл формулы (10.17) состоит в том, что *приращение потенциальной функции при бесконечно малом смещении $\overrightarrow{MM'}$*

равно работе, производимой силой поля при этом же смещении над единицей заряда (массы). Правда, в формуле (10.17) выписаны не сами названные величины, а их главные линейные части, но если (10.17) почленно проинтегрировать по какому-либо пути, то наше утверждение оправдается, и притом для любого конечного пути (а не только для бесконечно малого).

2°. Рассматриваем скалярное поле $a(M)$, где $a(M)$ выражает давление в произвольной точке идеальной жидкости, заполняющей некоторую область Ω. Тогда $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a$ имеет следующий физический смысл: вектор

$$\mathbf{F} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a\, d\omega \tag{10.19}$$

выражает равнодействующую сил давления, приложенных к элементарному объему $d\omega$.

3°. Скалярное поле $a(M)$ выражает температуру в различных точках однородного, но неравномерно нагретого тела. Здесь вектор

$$\mathbf{F} = -k\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a \tag{10.20}$$

выражает плотность теплового потока, идущего от более теплых, к более холодным местам тела; k — коэффициент теплопроводности. Более подробно, роль вектора $\mathbf{F}$ состоит в том, что тепловой поток в каждой точке идет по его направлению, причем через ортогональный к $\mathbf{F}$ элемент площади $d\sigma$ за единицу времени проходит количество тепла, равное $|\mathbf{F}|\, d\sigma$.

§ 11. Дифференцирование одновалентного тензора

Пусть в некоторой области Ω нам дано одновалентное тензорное поле

$$a_i = a_i(M) = a_i(x_1, x_2, x_3), \tag{11.1}$$

или, что то же самое, векторное поле

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = \sum_i a_i(M)\, \mathbf{e}_i. \tag{11.2}$$

Его дифференцирование, которым мы сейчас займемся, исключительно важно для приложений. Формулы (10.5), (10.13) для нашего случая примут вид

$$da_i = \sum_l \frac{\partial a_i}{\partial x_l} dx_l = \sum_l \nabla_l a_i dx_l. \tag{11.3}$$

Абсолютная производная представляет собой в нашем случае поле двухвалентного тензора, координаты которого мы обозначим:

$$a_{il} = \nabla_l a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_l}. \tag{11.4}$$

Вводя обозначение a_{il} для координат тензора, мы сознательно сделали так, чтобы индекс дифференцирования занимал второе место.

Двухвалентному тензору a_{il} всегда отвечает, как мы знаем, аффинор $\mathfrak{A}$ с теми же координатами a_{il}. Вместе с тензором a_{il} аффинор $\mathfrak{A}$ определится в каждой точке M, так что мы получаем *аффинорное поле*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(M). \tag{11.5}$$

Итак, абсолютной производной вектора поля $\mathbf{a}(M)$ *можно считать аффинор поля* $\mathfrak{A}(M)$, *где координаты аффинора определяются через координаты вектора по формуле*

$$a_{il} = \frac{\partial a_i}{\partial x_l}. \tag{11.6}$$

Этот аффинор мы будем называть *производным аффинором* векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Перепишем теперь (11.3) в виде

$$da_i = \sum_l a_{il}\, dx_l, \tag{11.7}$$

где дифференциалы взяты при произвольном смещении из данной точки M в бесконечно близкую точку M'. При этом согласно (10.4) dx_l — координаты вектора $\overrightarrow{d\mathbf{M}} \approx \overrightarrow{MM'}$, а da_i — координаты вектора $\overrightarrow{d\mathbf{a}}$, что легко получить, дифференцируя (11.2) почленно:

$$\overrightarrow{d\mathbf{a}} = \sum_i da_i \mathbf{e}_i.$$

В таком случае (11.7) можно переписать в виде

$$\overrightarrow{d\mathbf{a}} = \mathfrak{A}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}}. \tag{11.8}$$

В самом деле, (11.7) можно рассматривать согласно (3.13) как координатную запись действия аффинора $\mathfrak{A}$ на вектор $\overrightarrow{d\mathbf{M}}$, причем получается вектор $d\mathbf{a}$.

Итак, абсолютная производная $\mathfrak{A}(M)$, *действуя на вектор* $\overrightarrow{d\mathbf{M}} \approx \overrightarrow{MM'}$, *дает вектор* $d\mathbf{a}(M) \approx \Delta\mathbf{a}(M)$. *Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно сказать, что* $\mathfrak{A}(M)$, *действуя на* *вектор бесконечно малого смещения* $\overrightarrow{MM'}$, *дает соответствующее приращение вектора поля* $\mathbf{a}(M)$:

$$\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M) = \Delta\mathbf{a}(M) = \mathfrak{A}\mathbf{z}, \tag{11.9}$$

где $\mathbf{z} = \overrightarrow{MM'}$.

Аффинор $\mathfrak{A}(M)$ можно разложить (§ 8) на симметрическую и кососимметрическую части:

$$\mathfrak{A}(M) = \mathfrak{B}(M) + \mathfrak{C}(M), \tag{11.10}$$

причем координаты a_{ij} разложатся соответственно

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}. \tag{11.11}$$

Здесь

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right), \tag{11.12}$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \tag{11.13}$$

Формула (11.8) принимает вид

$$d\mathbf{a} = \mathfrak{B}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}} + \mathfrak{C}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}}. \tag{11.14}$$

Действие аффинора $\mathfrak{C}$ можно заменить согласно (5.6) векторным умножением (слева) на определенный вектор $\mathbf{u}$, координаты которого в правой координатной системе выражаются через координаты аффинора по формулам (5.3). В нашем случае эти формулы принимают вид (после почленного умножения на 2, что будет для нас удобно в дальнейшем):

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 &= -2c_{23} = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \\ 2u_2 &= -2c_{31} = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \\ 2u_3 &= -2c_{12} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

Формулу (11.14) можно теперь переписать следующим образом:

$$d\mathbf{a} = \mathfrak{B}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}} + [\mathbf{u}\,d\mathbf{M}]. \tag{11.16}$$

Так как вектор $\mathbf{u}$ определяется вместе с аффинором $\mathfrak{C}(M)$ в каждой точке M области Ω, то он образует векторное поле

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(M),$$

порожденное, как мы видим, исходным векторным полем $\mathbf{a}(M)$.

Удвоенный вектор $\mathbf{u}(M)$ *называется ротором векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *и обозначается* $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Итак:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = 2\mathbf{u} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{11.17}$$

Мы пользовались здесь формулами (11.15)

В правильности последней записи $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в виде символического определителя 3-го порядка нетрудно убедиться, развертывая его по элементам первой строки.

Что касается симметрического аффинора $\mathfrak{B}(M)$, то он не может быть охарактеризован столь же просто, как $\mathfrak{C}(M)$. Во многих приложениях играет роль не столько он сам, сколько его след $\sum\limits_i b_{ii}$, совпадающий, между прочим, со следом аффинора $\mathfrak{A}(M)$, т. е. с $\sum\limits_i a_{ii}$. Действительно,

$$\sum_i a_{ii} = \sum_i (b_{ii} + c_{ii}) = \sum_i b_{ii}, \quad \text{так как } c_{ii} = 0.$$

След аффинора $\mathfrak{A}(M)$ есть инвариант, зависящий вместе с самим аффинором от выбора точки M.

След аффинора $\mathfrak{A}(M)$ *называется дивергенцией исходного векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *и обозначается* $\operatorname{div}\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \sum_i a_{ii} = \sum_i b_{ii} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \tag{11.18}$$

Дивергенция образует, таким образом, скалярное поле, порожденное данным векторным полем $\mathbf{a}(M)$.

§ 12. Кинематическое истолкование векторного поля и его производного аффинора

Построения предыдущего параграфа получают наглядный кинематический смысл, если исходному векторному полю

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = \sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i. \tag{12.1}$$

придать следующее истолкование. *Пусть область* Ω, *в которой задано векторное поле, заполнена некоторой подвижной деформирующейся средой, например жидкостью, и пусть вектор* $\mathbf{a}(M)$ *выражает ту скорость, с которой движется частица жидкости, находящаяся в данный момент в точке* M.

Для простоты движение жидкости будем считать *стационарным*, т. е. поле скоростей $\mathbf{a}(M)$ не зависящим от времени.

Спрашивается, какой кинематический смысл получает производный аффинор $\mathfrak{A}$ нашего векторного поля.

Для этой цели мы проследим, что делается с бесконечно малой «каплей» жидкости в процессе ее движения. Вырежем из жидкости шарик с центром в какой-нибудь точке M и с бесконечно малым радиусом ρ. С течением времени жидкость, заключенная в этом шарике, перемещается с общим потоком жидкости, одновременно вращаясь и деформируясь. Этот процесс мы и проследим.

Каждая точка, увлекаемая потоком жидкости,— мы ее будем кратко называть «частицей жидкости» — описывает с течением времени t определенную траекторию

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t). \tag{12.2}$$

При этом проекции вектора скорости на координатные оси равны, как известно, $\frac{dx_i}{dt}$ $(i = 1, 2, 3)$. С другой стороны, вектор скорости совпадает в каждой точке M с вектором поля $\mathbf{a}(M)$, и его проекции равны $a_i(M)$, т. е. $a_i(x_1, x_2, x_3)$. В результате

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{12.3}$$

Таким образом, функции (12.2) должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений (12.3).

Частица жидкости, находящаяся в данный момент в точке M, спустя бесконечно малый промежуток времени ε сместится на вектор $\varepsilon\mathbf{a}(M)$, если пренебрегать бесконечно малыми высшего порядка.

В самом деле, скорость движения частицы жидкости в данный момент выражается вектором $\mathbf{a}(M)$, и если бы эта скорость оставалась постоянной, то за время ε смещение частицы точно выразилось бы вектором $\varepsilon\mathbf{a}(M)$.

Но так как скорость движения частицы зависит от ее положения, то в процессе движения скорость будет, вообще говоря, меняться. Однако за бесконечно малый промежуток времени она успевает измениться, начиная от значения $\mathbf{a}(M)$, лишь на бесконечно малую величину. В результате $\varepsilon\mathbf{a}(M)$ дает смещение с ошибкой бесконечно малой высшего порядка (грубо говоря, бесконечно малая ошибка в скорости умножается еще на ε).

Будем рассматривать смещения всех частиц жидкости за бесконечно малый промежуток времени ε, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка относительно ε. Тогда эти смещения можно считать равными $\varepsilon\mathbf{a}(M)$, где M — начальное положение частицы жидкости.

Пусть M' — какая-нибудь точка в шарике бесконечно малого радиуса ρ с центром в M. Подвергнем все точки шарика указанному смещению; в частности, точки M, M' переходят в некоторые точки L, L' (рис. 3).

При этом, как мы знаем,

$$\overrightarrow{ML} \approx \varepsilon \mathbf{a}(M), \quad \overrightarrow{M'L'} \approx \varepsilon \mathbf{a}(M'). \qquad (12.4)$$

Нас интересует, что произошло в результате смещения с вектором $\overrightarrow{MM'}$, ведущим из центра шарика M в его произвольную точку M'. Очевидно, он перейдет в вектор $\overrightarrow{LL'}$, который можно представить в следующем виде:

$$\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'L'} = \overrightarrow{MM'} + (\overrightarrow{M'L'} - \overrightarrow{ML}) \approx$$
$$\approx \overrightarrow{MM'} + \varepsilon(\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)). \qquad (12.5)$$

В дальнейшем мы пренебрегаем бесконечно малыми высшего порядка не только относительно ε, но и относительно ρ тоже. Это нужно оговорить особо, так как ε и ρ — независимые друг от друга бесконечно малые. Тогда можно принять согласно (11.9)

$$\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M) = \Delta\mathbf{a}(M) \approx \mathfrak{A}\mathbf{z},$$

где $\mathbf{z}$ — краткое обозначение для $\overrightarrow{MM'}$. Теперь (12.5) дает:

$$\overrightarrow{LL'} \approx \mathbf{z} + \varepsilon\mathfrak{A}\mathbf{z} = (E + \varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{z}. \qquad (12.6)$$

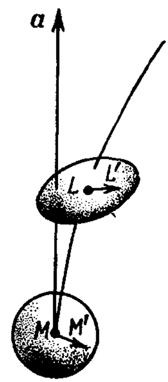

Рис. 3.

Итак, преобразование вектора $\overrightarrow{MM'}$ в вектор $\overrightarrow{LL'}$ происходит (с указанной степенью точности) посредством аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — производный аффинор векторного поля скоростей, а ε — протекший бесконечно малый промежуток времени.

Другими словами, бесконечно малые векторы, исходящие из центра M первоначальной «капли» (т. е. нашего шарика радиуса ρ), переходят в векторы, исходящие из центра L смещенной (и деформированной) капли, подвергаясь действию аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{A}$. Но действие такого аффинора, как мы знаем (§ 8), сводится к чистой деформации, порождаемой аффинором $E + \varepsilon\mathfrak{B}$, и к повороту посредством аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{C}$. При этом $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — симметрическая и кососимметрическая части аффинора $\mathfrak{A}$. В нашем случае их координаты выражаются согласно (11.12) и (11.13), так как у нас $\mathfrak{A}(M)$ — производный аффинор векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

В результате бесконечно малая шаровая капля жидкости за бесконечно малый промежуток времени ε подвергается (помимо параллельного сдвига вместе со своим центром M на вектор $\overrightarrow{ML} \approx \varepsilon \mathbf{a}(M)$), во-первых, бесконечно малой чистой деформации $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, т. е. растяжению (сжатию) по трем взаимно ортогональным направлениям, превращаясь из шара в эллипсоид, и, во-вторых, вращению $E+\varepsilon\mathfrak{C}$. В силу (8.13) это вращение происходит с вектором угловой скорости $\mathbf{u}$, который согласно (11.17) равен в нашем случае $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Вращение любой бесконечно малой капли жидкости в процессе ее движения происходит с (переменным) вектором угловой скорости, равным в каждой точке $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — векторное поле скоростей.

Аффинор $\mathfrak{B}$ называется аффинором скоростей деформации, а соответствующий тензор

$$b_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}+\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \tag{12.7}$$

— тензором скоростей деформации.

Как отмечалось в § 8, коэффициент объемного расширения при действии аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{A}$ равен (согласно (8.15)):

$$\frac{\tilde{V}}{V}=1+\varepsilon\sum_i a_{ii}.$$

Но в нашем случае в силу формулы (11.18)

$$\sum_i a_{ii}=\operatorname{div}\mathbf{a},$$

и следовательно,

$$\frac{\tilde{V}}{V}=1+\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Отсюда видно, что в процессе движения жидкости относительное объемное расширение θ каждой ее бесконечно малой капли за бесконечно малый промежуток времени ε равно $\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}$ (т. е. происходит со скоростью $\operatorname{div}\mathbf{a}$):

$$\theta \approx \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}=\varepsilon\sum_i b_{ii} \quad \left(\text{где } \theta=\frac{\tilde{V}-V}{V}\right). \tag{12.8}$$

В этом и заключается кинематический смысл дивергенции векторного поля.

Отметим важные частные случаи.

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *соленоидальным*, если

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0. \tag{12.9}$$

В нашем кинематическом истолковании это означает, что объемное расширение происходит с нулевой скоростью, т. е. любая пространственная область, заполненная частицами жидкости в начальный момент, с течением времени смещается и деформируется, не меняя своего объема (строго говоря, это показано у нас лишь для бесконечно малых капель жидкости, и переход к конечному объему требовал бы еще некоторых рассуждений). Таким образом, условие (12.9) при кинематическом истолковании векторного поля $\mathbf{a}(M)$ означает *несжимаемость жидкости*.

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *потенциальным*, если $\mathbf{a}(M)$ представляет собой градиент некоторого скалярного поля

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} a(M). \tag{12.10}$$

Согласно (10.16) координаты вектора $\mathbf{a}(M)$ выражаются формулами:

$$a_i = \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{12.11}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что для потенциального поля $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ (вычисляемый по формуле (11.17)) тождественно равен нулю:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \tag{12.12}$$

Возвращаясь к кинематическому истолкованию, рассмотрим случай *потенциального поля скоростей* $\mathbf{a}(M)$. Тогда обращение в нуль $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ означает, что вращение любой бесконечно малой капли жидкости происходит с нулевой угловой скоростью, т. е. в каждый бесконечно малый промежуток времени капля испытывает лишь смещение и чистую деформацию. Движение жидкости — незавихренное. Условие (12.12), т. е. незавихренность движения жидкости, является и достаточным для того, чтобы поле скоростей было потенциальным, по крайней мере, в любой односвязной области Ω. Действительно, из (12.12) в силу формулы (11.17) вытекает:

$$\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 0, \tag{12.13}$$

а при этих условиях в односвязной области всегда можно подобрать скалярное поле $a(M)$ такое, что a_i выражаются согласно (12.11), т. е.

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} a(M).$$

§ 13. Малая деформация твердого тела

Все, что было сделано в § 12 для течения жидкости, применимо в известном смысле и для малой деформации твердого тела. Аналогично предыдущему мы будем представлять себе, что $\mathbf{a}(M)$ есть поле скоростей, но теперь уже частиц твердого тела.

Однако перемещение частиц твердого тела мы будем допускать лишь в течение некоторого малого промежутка времени ε, в результате чего получается малое, но конечное смещение каждой точки M на вектор $\varepsilon\mathbf{a}(M)$. Это малое смещение точек твердого тела мы и будем рассматривать.

Итак, разница по сравнению с трактовкой течения жидкости заключается в следующем. Раньше промежуток времени ε был бесконечно малым, т. е. стремящейся к нулю переменной величиной. Теперь ε — малая постоянная величина. Раньше за время ε происходила лишь бесконечно малая доля неограниченно продолжающегося процесса течения жидкости. Теперь за малый промежуток времени ε происходит и заканчивается весь процесс смещения частиц твердого тела. Добавим к этому, что в данном случае нас интересует не сам процесс смещения, а только его результат, т. е. тот факт, что каждая точка M сместилась на малый вектор $\varepsilon\mathbf{a}(M)$.

Если мы говорим все-таки о *процессе* смещения, то в сущности лишь условно, чтобы подогнать наши построения под предыдущие результаты и не повторять снова почти тех же рассуждений. Строго говоря, нас интересует лишь векторное поле окончательных перемещений, которое мы будем обозначать:

$$\mathbf{w}(M) = \varepsilon\mathbf{a}(M). \tag{13.1}$$

Разделение же $\mathbf{w}(M)$ на множители ε и $\mathbf{a}(M)$, как было сказано, является по существу условным.

Несмотря на то, что ε уже не бесконечно малая величина, мы по-прежнему будем пренебрегать малыми второго порядка относительно ε. При достаточно малых деформациях твердого тела это приближение является практически допустимым, и на нем основывается простейшая (линейная) форма теории упругости.

В таком случае результаты § 12 переносятся и на наш случай, а именно, мысленно вырезанный из твердого тела бесконечно малый шарик радиуса ρ с центром в точке M испытывает (помимо параллельного сдвига вместе со своим центром на вектор $\mathbf{w}(M)$), во-первых, чистую деформацию $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, во-вторых, поворот $E+\varepsilon\mathfrak{C}$. Оба аффинора применяются к бесконечно малым векторам, исходящим из центра шарика.

При этом здесь играют роль лишь те малые добавки $\varepsilon\mathfrak{B}$, $\varepsilon\mathfrak{C}$, которые делаются к единичному аффинору E, а не $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ в чистом виде.

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathfrak{A}}=\varepsilon\mathfrak{A},\quad \tilde{\mathfrak{B}}=\varepsilon\mathfrak{B},\quad \tilde{\mathfrak{C}}=\varepsilon\mathfrak{C}. \tag{13.2}$$

Соответственно обозначим координаты этих аффиноров:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{a}_{ij}&=\varepsilon a_{ij}=\varepsilon\frac{\partial a_i}{\partial x_j},\\
\tilde{b}_{ij}&=\varepsilon b_{ij}=\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}+\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right),\\
\tilde{c}_{ij}&=\varepsilon c_{ij}=\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}-\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

Мы воспользовались здесь формулами (11.12), (11.13).

Так как $\varepsilon\mathbf{a}(M)=\mathbf{w}(M)$, а значит, $\varepsilon a_i=w_i$, то окончательно получаем:

$$\tilde{a}_{ij}=\frac{\partial w_i}{\partial x_j}, \tag{13.4}$$

$$\tilde{b}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right), \tag{13.5}$$

$$\tilde{c}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}-\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right). \tag{13.6}$$

Так выражаются через вектор поля перемещений $\mathbf{w}(M)$ *координаты аффиноров* $\tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{\mathfrak{C}}$, *причем чистая деформация и вращение бесконечно малого шарика с центром в точке* M *вызываются соответственно аффинорами* $E+\tilde{\mathfrak{B}}$, $E+\tilde{\mathfrak{C}}$ *(воздействующими на всевозможные бесконечно малые векторы, отложенные из точки* M *внутри этого шарика).*

Аффинор $\tilde{\mathfrak{B}}$ называется *аффинором деформаций* и соответствующий тензор $\tilde{b}_{ij}$ — *тензором деформаций*. Если предположить тело упругим, то упругие силы, развивающиеся в нем, определяются в каждой точке тензором деформаций, так как аффинор $E+\tilde{\mathfrak{C}}$ создает лишь поворот, а следовательно, не меняет взаимного расположения частиц тела в пределах вырезанного нами бесконечно малого шарика.

В формулах (13.3), (13.4) малый множитель ε включен в рассматриваемые величины и в явном виде не выписывается. Поэтому нужно просто помнить, что координаты w_i вектора перемещения $\mathbf{w}$ и их частные производные $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ мы считаем величинами малыми, так что их квадратами можно пренебрегать (сравнительно с 1). Очевидно, то же относится и к координатам тензоров $\tilde{b}_{ij}$ и $\tilde{c}_{ij}$.

Отметим еще, что относительное объемное расширение будет равно в нашем случае (согласно (12.8) и принимая во внимание соотношение (13.1)):

$$\theta \approx \operatorname{div} \mathbf{w}(M). \tag{13.7}$$

При этом, умножая почленно (11.18) на ε, мы имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \sum_i \tilde{a}_{ii} = \sum_i \tilde{b}_{ii} = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i}. \tag{13.8}$$

§ 14. Тензор напряжений

Пусть упругое тело подверглось некоторой деформации, и в нем появились упругие напряжения. Это означает следующее.

Рассмотрим какую-нибудь плоскую площадку, мысленно внесенную нами внутрь упругого тела и там как-либо установленную. Проведем нормаль к этой площадке и выберем какое-либо из двух направлений на нормали за положительное. Площадку мы в этом случае будем называть *ориентированной*.

Вблизи данной ориентированной площадки упругое тело будет рассечено ею на две части: одна из них расположена с положительной стороны площадки (т. е. в сторону положительного направления нормали), другая — с отрицательной стороны.

Наличие в теле напряжений означает, что первая из этих частей действует на вторую через отделяющую их площадку с известной силой. Эту силу мы будем называть *силой напряжения*, действующей на данную ориентированную площадку. Разумеется, вторая часть тела также действует на первую (по закону равенства действия и противодействия), но, чтобы при подсчете силы напряжения не сбиваться в знаке, мы условимся рассматривать действие именно первой части на вторую.

Охарактеризовать напряжения, существующие в теле, значит уметь установить силу напряжения для любой ориентированной площадки, указанной в теле.

Однако наша постановка вопроса является слишком грубой и нуждается в уточнении. Дело в том, что сила, действующая на площадку, большей частью непрерывно по ней распределена, и это распределение также должно быть указано.

Другими словами, мы должны указать силу, приложенную к каждому элементу (к каждому бесконечно малому кусочку) нашей площадки.

Это показывает нам, что нет смысла класть в основу рассмотрение конечных площадок, а нужно ограничиться площадками бесконечно малыми. Так мы и поступим.

Выберем произвольно какую-нибудь точку M в рассматриваемом теле и будем проводить через нее всевозможные ориентированные бесконечно малые площадки. Каждую из этих площадок мы будем характеризовать, во-первых, единичным вектором $\mathbf{n}$, направленным по ее нормали в положительную сторону, и, во-вторых, ее площадью dS. При этом мы представляем себе дело так, что вектор $\mathbf{n}$ является для данной площадки постоянным; следовательно, ортогональная к $\mathbf{n}$ плоскость, проходящая через M, в которой расположена площадка, тоже постоянная, но сама площадка — переменная и стремится стянуться в точку M; при этом $dS \longrightarrow 0$.

Форма площадки нас интересовать не будет.

Более коротко нашу площадку можно задать одним бесконечно малым вектором

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}\,dS, \tag{14.1}$$

по которому, очевидно, можно определить и $\mathbf{n}$, и dS ($\mathbf{n}$ — как единичный вектор того же направления, а dS — как модуль).

Обозначим $\mathbf{F}$ силу напряжения, действующую на площадку $\mathbf{s}$. Естественно предположить, что в данной точке M и при данном $\mathbf{n}$ сила $\mathbf{F}$, действующая на площадку, пропорциональна (пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка) ее площади dS.

Тем самым сила $\mathbf{F}$ не зависит от формы площадки и вполне определяется вектором площадки $\mathbf{s}$, причем при умножении $\mathbf{s}$ на число на то же число умножается и $\mathbf{F}$. Итак, $\mathbf{F}$ мы должны искать как функцию от $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s}), \tag{14.2}$$

учитывая, что для всякого числа α

$$\mathfrak{F}(\alpha\mathbf{s}) = \alpha\mathfrak{F}(\mathbf{s}). \tag{14.3}$$

Последнее показывает, что достаточно знать $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$, чтобы определить и $\mathfrak{F}(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s}) = \mathfrak{F}(\mathbf{n}\,dS) = \mathfrak{F}(\mathbf{n})\,dS. \tag{14.4}$$

Кроме того, отсюда видно, $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$ выражает силу напряжения на данной площадке, отнесенную к единице площади, т. е. *напряжение* $\mathbf{P}$ *на данной площадке*. Итак,

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}\,dS. \tag{14.5}$$

Характер зависимости $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$ выводится в курсах теории упругости из некоторых механических соображений, которые мы повторять здесь не будем. Воспользуемся готовым результатом*), а именно, оказывается, что в произвольной координатной системе проекции напряжения $\mathbf{P} = \mathfrak{F}(\mathbf{n})$ на координатные оси выражаются линейно через направляющие косинусы положительной нормали $\mathbf{n}$, т. е. в наших

---

[1]) См., например, М. М. Филоненко-Бородич, Теория упругости изд. 3-е, Гостехиздат, М.— Л., 1947, § 3, формулы (1.8).

обозначениях через координаты n_1, n_2, n_3 единичного вектора $\mathbf{n}$:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= f_{11}n_1 + f_{12}n_2 + f_{13}n_3, \\ P_2 &= f_{21}n_1 + f_{22}n_2 + f_{23}n_3, \\ P_3 &= f_{31}n_1 + f_{32}n_2 + f_{33}n_3. \end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

Мы обозначили f_{11}, f_{12}, ... напряжения X_x, X_y, ... на площадках, параллельных координатным осям. В данной координатной системе и в данной точке M это будут постоянные величины.

Запишем (14.6) в наших кратких обозначениях

$$P_i = \sum_j f_{ij} n_j. \tag{14.7}$$

Умножим эти равенства почленно на dS. Тогда вектор $\mathbf{P}$ согласно (14.5) превратится в $\mathbf{F}$, а вектор $\mathbf{n}$ в силу формулы (14.1) в $\mathbf{s}$, и мы получим:

$$F_i = \sum_j f_{ij} s_j. \tag{14.8}$$

Таким образом, для всевозможных бесконечно малых ориентированных площадок, проведенных через данную точку M, координаты вектора силы $\mathbf{F}$ линейно выражаются через координаты вектора площадки $\mathbf{s}$, а следовательно, сила $\mathbf{F}$ получается из вектора площадки $\mathbf{s}$ действием на него некоторого аффинора $\mathfrak{F}$ с координатами f_{ij}:

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}\mathbf{s}. \tag{14.9}$$

В самом деле, из линейного характера формул (14.8) сейчас же следует, что для функциональной зависимости $\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s})$ соблюдается свойство $\mathfrak{F}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = \mathfrak{F}(\mathbf{s}_1) + \mathfrak{F}(\mathbf{s}_2)$, что в сочетании с (14.3) и означает, что эта зависимость является некоторым аффинором (см. § 3).

Этот аффинор $\mathfrak{F}$ называется *аффинором напряжений*, а соответствующий ему тензор f_{ij} — *тензором напряжений*.

В каждой точке M будет свой тензор напряжений, так что в деформированном упругом теле возникает поле тензора напряжений.

Чтобы уяснить себе смысл координат тензора напряжений в данной точке M, достаточно, например, положить $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$.

Тогда

$$n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0,$$

и формулы (14.6) дают

$$P_1 = f_{11}, \quad P_2 = f_{21}, \quad P_3 = f_{31}. \tag{14.10}$$

Мы получаем координаты напряжения $\mathbf{P}$ на площадке, ортогональной к $\mathbf{e}_1$.

Таким образом, f_{ij} выражает i-ю координату напряжения $\mathbf{P}$ на площадке, ортогональной к j-му орту $\mathbf{e}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Из механических соображений можно получить, далее, что тензор напряжений должен быть симметрическим *)

$$f_{ij} = f_{ji}. \tag{14.11}$$

Тензор напряжений возникает не только в деформированном упругом теле, но и, например, в жидкости. Если жидкость *идеальная*, т. е. силы внутреннего трения отсутствуют, то сила напряжения $\mathbf{F}$, действующая на площадку, может быть лишь силой нормального давления на эту площадку, т. е. направлена по нормали $\mathbf{n}$ (в отрицательную сторону). Так как вектор площадки $\mathbf{s}$ тоже всегда направлен по $\mathbf{n}$, то в формуле (14.9) функция $\mathbf{F}$ оказывается всегда коллинеарной с аргументом $\mathbf{s}$, т. е. у аффинора $\mathfrak{F}$ все направления собственные.

Исследуя собственные направления симметрического аффинора (§ 7), мы обнаружили, что этот случай возможен лишь тогда, когда действие аффинора сводится к умножению на некоторое определенное число. Следовательно,

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}\mathbf{s} = -p\mathbf{s}, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{F} = -pE, \tag{14.12}$$

где число $-p$ означает взятое с обратным знаком давление в данной точке жидкости. Тензор напряжений имеет в этом случае вид

$$f_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad f_{ii} = -p. \tag{14.13}$$

Если же жидкость *вязкая*, то тензор напряжений не обязан иметь столь простой вид, так как помимо нормального давления на данную площадку действуют еще силы, порождаемые трением.

§ 15. Зависимость тензора напряжений от тензора деформаций

Основой теории упругости является установление зависимости тензора напряжений от тензора деформаций. В самом деле, каждый элемент деформированного упругого тела испытывает, как мы знаем, параллельный сдвиг, поворот и чистую деформацию. Только последняя вызывает появление упругих сил, а следовательно, тензор напряжений должен в каждой точке тела зависеть от тензора деформаций, который как раз и выражает чистую деформацию. Если такая зависимость будет установлена, то становится ясной и основная схема теории упругости, которая в грубых чертах такова: ускорения, испытываемые частицами упругого тела, зависят от напряжений в нем, эти последние зависят от тензора деформаций, а тензор деформаций выражается уже известным нам образом через переме-

*) См. там же, § 2, формулы (1.6).

щения частиц тела. Следовательно, ускорения частиц тела выражаются в зависимости от их перемещений, что и приводит к основным дифференциальным уравнениям теории упругости.

Итак, речь идет о зависимости тензора напряжений f_{ij} (§ 14) от тензора деформаций $\tilde{b}_{ij}$ (§ 13).

В первом приближении (как это большей частью и делается в теории упругости) эту зависимость можно считать линейной. Для однородных и изотропных тел она имеет вид

$$f_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\tilde{b}_{ij}. \tag{15.1}$$

Здесь λ и μ — *коэффициенты Ламе,* постоянные для данного тела, а θ — относительное объемное расширение (13.7):

$$\theta = \sum_i \tilde{b}_{ii}. \tag{15.2}$$

Разумеется, θ — инвариант преобразования координатной системы и по своему геометрическому смыслу, и как след аффинора $\tilde{\mathfrak{B}}$. Обратим внимание на инвариантный характер зависимости (15.1): в какой бы координатной системе ни вычислять f_{ij} по этой формуле, они всегда будут служить координатами одного и того же тензора.

В самом деле, f_{ij} получаются сложением координат двух тензоров, из которых один — единичный тензор δ_{ij}, умноженный на инвариант $\lambda\theta$, а другой — тензор деформаций $\tilde{b}_{ij}$, умноженный на инвариант (и даже константу) 2μ. Операция носит, таким образом, тензорный характер. Легко заметить, что три взаимно ортогональных собственных направления являются общими для тензора деформаций и для тензора напряжений (главные оси деформаций и напряжений). В них картина деформаций и напряжений становится особенно простой.

На обосновании формулы (15.1) мы останавливаться не будем, отсылая за этим к курсам теории упругости.

Несколько иной вид принимает зависимость (15.1) в случае жидкости (вообще говоря, вязкой). Аффинор напряжений $\mathfrak{F}$ состоит здесь из двух слагаемых $\mathfrak{F}^{(1)}$, $\mathfrak{F}^{(2)}$, первое из которых представляет собой реакцию жидкости на изменение ее формы. Его мы сейчас и рассмотрим. Жидкость не оказывает сопротивления изменению ее формы, если это изменение уже произошло, однако оказывает сопротивление в самом процессе изменения, что и выражается в силах внутреннего трения.

Поэтому та часть тензора напряжений, которая связана с силами внутреннего трения, будет зависеть не от аффинора деформаций $\tilde{\mathfrak{B}}$, а от аффинора *скоростей* деформации $\mathfrak{B}$ (12.7) с координатами

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \tag{15.3}$$

Здесь, как и в § 12, a_i — координаты вектора поля скоростей **a** (M).

При этом нужно учитывать даже не весь аффинор скоростей деформации $\mathfrak{B}$, а только ту его часть $\mathfrak{B}^{(1)}$, которая отвечает изменению формы элемента жидкости, откинув другую часть $\mathfrak{B}^{(2)}$, отвечающую лишь изменению объема.

Говоря точнее, мы разлагаем аффинор $\mathfrak{B}$ на два слагаемых:

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^{(1)}+\mathfrak{B}^{(2)} \tag{15.4}$$

таким образом, чтобы $\mathfrak{B}^{(2)}$ имело вид

$$\mathfrak{B}^{(2)}=bE \tag{15.5}$$

и, следовательно, вызывало бы в элементе жидкости происходящее с известной скоростью преобразование подобия.

Действительно, как мы знаем из § 12, за бесконечно малый промежуток времени ε элемент жидкости подвергается деформации при помощи аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$; в том числе за счет $\mathfrak{B}^{(2)}$ получается аффинор

$$E+\varepsilon\mathfrak{B}^{(2)}=(1+\varepsilon b)\,E, \tag{15.6}$$

который означает преобразование подобия с изменением линейных размеров в отношении $1+\varepsilon b$. Коэффициент b в формуле (15.5) мы выбираем так, *чтобы это преобразование подобия могло принять на себя все изменение объема элемента жидкости*. Тогда оставшееся слагаемое $\mathfrak{B}^{(1)}$ определяет как бы чистое «изменение формы» элемента жидкости без изменения объема. За возникновение сил внутреннего трения мы будем считать ответственным именно это первое слагаемое $\mathfrak{B}^{(1)}$. Действительно, второе слагаемое $\mathfrak{B}^{(2)}$ означает лишь преобразование подобия, т. е. равномерное объемное расширение (сжатие) элемента жидкости; это изменяет лишь давление p (в более детальной теории соответствующее слагаемое в p рассматривается отдельно).

Подсчитаем теперь коэффициент b. Преобразование подобия (15.6) означает изменение объема в отношении

$$(1+b\varepsilon)^3\approx 1+3b\varepsilon. \tag{15.7}$$

Мы откинули здесь бесконечно малые высшего порядка относительно ε.

Поскольку преобразование подобия (15.6) мы подбираем так, чтобы оно приняло на себя все изменение объема, нам приходится положить:

$$3b=\operatorname{div}\mathbf{a}=\sum_i b_{ii}, \tag{15.8}$$

Действительно, как видно из (15.7), при нашем преобразовании подобия относительное объемное расширение за время ε равно $3b\varepsilon$.

Оно должно совпадать с имеющим место в действительности относительным объемным расширением (12.8), откуда и получаем (15.8).

Итак, мы от аффинора скоростей деформации $\mathfrak{B}$ отщепляем аффинор

$$\mathfrak{B}^{(2)}=\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot E, \tag{15.9}$$

принимающий на себя все изменение объема элемента жидкости, а оставшийся аффинор

$$\mathfrak{B}^{(1)}=\mathfrak{B}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot E, \tag{15.10}$$

означающий лишь изменение формы без изменения объема, считаем целиком ответственным за возникновение сил внутреннего трения.

В гидродинамике принимается, что в изотропной вязкой жидкости первая часть $\mathfrak{F}^{(1)}$ аффинора напряжений $\mathfrak{F}$, вызванная силами внутреннего трения, пропорциональна аффинору $\mathfrak{B}^{(1)}$:

$$\mathfrak{F}^{(1)}=2\mu\mathfrak{B}^{(1)}=2\mu\left\{\mathfrak{B}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot E\right\}. \tag{15.11}$$

Коэффициент μ — для данной жидкости величина постоянная — называется ее *коэффициентом вязкости*.

Если записать (15.11) в координатной форме, то получим:

$$f_{ij}^{(1)}=2\mu\left\{b_{ij}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot\delta_{ij}\right\}, \tag{15.12}$$

где b_{ij} определяется по формуле (12.7), а δ_{ij} — координаты единичного аффинора E. Как легко проверить, пользуясь (15.8), след аффинора $\mathfrak{F}^{(1)}$ равен нулю.

Вторая часть $\mathfrak{F}^{(2)}$ аффинора напряжений $\mathfrak{F}$, не связанная с силами внутреннего трения, принимается такой же, как и в идеальной жидкости, где эти силы полностью отсутствуют. В силу (14.12) получаем:

$$\mathfrak{F}^{(2)}=-pE, \tag{15.13}$$

где $p=p(M)$ — давление в данной точке жидкости (в данном случае после исключения сил внутреннего трения).

В координатной записи:

$$f_{ij}^{(2)}=-p\delta_{ij}. \tag{15.14}$$

Складывая почленно (15.11) и (15.13), получим окончательное выражение тензора напряжений:

$$\mathfrak{F}=2\mu\left\{\mathfrak{B}-\frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot E\right\}-pE. \tag{15.15}$$

Соответственно в координатах:

$$f_{ij} = 2\mu \left\{ b_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij} \right\} - p\delta_{ij} =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij} - p\delta_{ij}. \quad (15.16)$$

Так как след аффинора $\mathfrak{F}^{(1)}$ равен нулю, то след $\mathfrak{F}$ совпадает со следом $\mathfrak{F}^{(2)}$, т. е. имеет значение $3p$. Отсюда давление p в каждой точке можно вычислить по формуле

$$p = -\frac{1}{3} \sum_i f_{ii}. \quad (15.17)$$

В случае несжимаемой жидкости, плотность которой $\rho(M) = \mathrm{const}$, давление $p(M)$ связывается с вектором скорости дифференциальными уравнениями движения жидкости, — ими мы еще будем заниматься. В случае сжимаемой жидкости $p(M)$ связано, кроме того, с плотностью $\rho(M) \neq \mathrm{const}$ определенными соотношениями, которыми мы заниматься не будем.

§ 16. Поток векторного поля через поверхность

Возвратимся к общей теории векторного поля $\mathbf{a}(M)$. Пусть нам дана некоторая ограниченная кусочно гладкая поверхность S. Это значит, что она склеена из конечного числа ограниченных кусков, на каждом из которых (включая границу куска) она обладает непрерывно меняющейся касательной плоскостью. Говоря более точно, мы требуем, чтобы поверхность могла быть склеена из конечного числа кусков, каждый из которых при подходящем выборе координатных осей можно задать уравнением

$$x_3 = f(x_1, x_2), \quad (16.1)$$

где $f(x_1, x_2)$ — функция с непрерывными частными производными 1-го порядка, определенная в некоторой области D на плоскости x_1, x_2; при этом D ограничена кусочно гладким (не самопересекающимся) контуром. Функция f определена на D, включая и ее границу. Далее предполагается, что склеивание производится так, что кусочек поверхности в окрестности каждой точки склеивания допускает взаимно однозначное и непрерывное отображение на кружок.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие поверхности. Кроме того, мы будем считать, что поверхность двусторонняя и, следовательно, ее нормаль (определенная во всяком случае на каждом отдельном ее куске) может быть снабжена положительным направлением так, что единичный вектор $\mathbf{n}$, идущий в этом направлении, указывает в местах склейки «в одну и ту же сторону» от поверхности, независимо от того, какому из склеиваемых кусков он принадлежит. Конечно, предполагается, что в пределах каждого отдельного куска вектор $\mathbf{n}$ меняется от точки к точке непрерывно.

Если поверхность ограничивает некоторое пространственное тело, то вектор $\mathbf{n}$ мы будем направлять по внешней нормали, если же нет, то предполагаем, что выбор $\mathbf{n}$ произведен каким-нибудь одним из двух возможных способов.

Поверхность S мы будем называть в этом случае *ориентированной* и только такие поверхности будем рассматривать.

Если поверхность S помещена в той области Ω, в которой задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$, то для этой поверхности можно определить важное понятие потока векторного поля.

Потоком векторного поля $\mathbf{a}(M)$ *через данную поверхность* S *называется взятый по этой поверхности двойной интеграл от элемента площади* dS, *умноженного на нормальную составляющую вектора поля* $\mathbf{a}(M)$:

$$p = \iint_S \mathbf{an}\, dS. \tag{16.2}$$

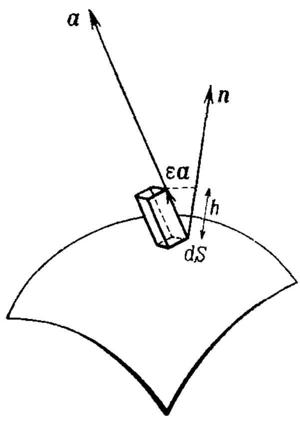

Рис. 4.

Так как $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, то скалярное произведение $\mathbf{an}$ выражает как раз проекцию вектора поля $\mathbf{a}$ на положительное направление нормали к поверхности. Двойной интеграл по поверхности следует понимать как сумму соответствующих интегралов по гладким кускам, составляющим поверхность.

Значение введенного нами понятия выясняется из следующих примеров.

1°. Пусть $\mathbf{a}(M)$ — поле скоростей стационарного движения жидкости (§ 12). Тогда поток p выражает объем жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность с отрицательной ее стороны на положительную (если жидкость сжимаемая, то объем каждой «капли» жидкости мы оцениваем в момент ее протекания через поверхность S). Разумеется, если течение жидкости происходит в обратном направлении, то поток засчитывается с отрицательным знаком.

В самом деле, за бесконечно малый промежуток времени ε частицы жидкости, находящиеся на элементе поверхности dS, сместятся на вектор $\varepsilon\mathbf{a}$ (рис. 4). В результате этого через площадку dS вытеснится некоторый объем жидкости, заключенный в наклонном цилиндре с основанием dS и с образующей, которая совпадает с вектором $\varepsilon\mathbf{a}$. Этот объем dV мы найдем, умножая площадь основания цилиндра dS на его высоту h, которая равна проекции образующей $\varepsilon\mathbf{a}$ на перпендикуляр к основанию dS, т. е. на нормаль к поверхности:

$$h = \varepsilon\mathbf{a}\mathbf{n}, \quad dV = h\,dS = \varepsilon\mathbf{a}\mathbf{n}\,dS.$$

Интегрируя полученный элементарный объем по всей поверхности S, мы видим, что полный объем жидкости, протекающий через S за время ε, равен

$$\varepsilon\iint_S \mathbf{a}\mathbf{n}\,dS,$$

а за единицу времени он, следовательно, равен потоку p, как видно из (16.2).

Рассуждение, которое мы сейчас провели, нельзя, разумеется, считать доказательством, так как оно было проведено чрезвычайно грубо; мы путали маленький кусочек кривой поверхности dS с кусочком плоскости, переменный вектор $\mathbf{a}(M)$ считали в пределах dS постоянным, а в заключение суммирование по кусочкам поверхности подменили двойным интегрированием. Однако это грубое рассуждение содержит правильную идею, и, уточняя его, можно было бы показать, что все допущенные нами ошибки исчезают при предельном переходе к интегралу, так что окончательный результат является правильным. Чтобы не загромождать изложения, мы ограничимся здесь, как и в других примерах этого параграфа, лишь такого рода ориентировочными рассуждениями.

2°. По-прежнему $\mathbf{a}(M)$ — поле скоростей стационарного движения жидкости, а $\rho(M)$ — ее плотность. Тогда поток вектора $\rho(M)\mathbf{a}(M)$ через поверхность S

$$\iint_S \rho\mathbf{a}\mathbf{n}\,dS \tag{16.3}$$

дает массу жидкости, протекающую через S за единицу времени.

В самом деле, подсчитывая массу жидкости, протекшую за время ε через элемент поверхности dS, мы должны умножить на плотность ρ соответствующий объем dV:

$$\rho\,dV = \varepsilon\rho\mathbf{a}\mathbf{n}\,dS.$$

Интегрируя затем по всей поверхности S и относя результат к единице времени (т. е. деля на ε), получаем (16.3).

Возвращаясь к общему определению потока (16.2), отметим, что его (в целях последующих выкладок) можно переписать так:

$$p = \iint_S \sum_i a_i n_i\,dS. \tag{16.4}$$

Здесь скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ записано как результат свертывания соответствующих тензоров.

§ 17. Поток аффинорного поля через поверхность

Пусть теперь в области Ω, где выбрана поверхность S, вместо векторного поля $\mathbf{a}(M)$ задано аффинорное поле $\mathfrak{A}(M)$, т. е. вместо поля одновалентного тензора a_i — поле двухвалентного тензора a_{ij}.

Мы определяем поток аффинорного поля $\mathfrak{A}(M)$ через поверхность S как взятый по этой поверхности двойной интеграл от элемента площади dS, умноженного на результат действия аффинора $\mathfrak{A}$ на вектор единичной нормали $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{p} = \iint\limits_S \mathfrak{A}\mathbf{n}\, dS. \qquad (17.1)$$

Поток $\mathbf{p}$ аффинора $\mathfrak{A}(M)$ как результат интегрирования вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$ также будет *вектором* в отличие от потока p вектора $\mathbf{a}(M)$, который представлял собой *число*.

Что же касается интегрирования вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$, то, не вдаваясь в излишние разъяснения, его можно определить просто как интегрирование каждой из координат этого вектора по отдельности. Тогда формула (17.1) распадется на три координатные формулы:

$$p_i = \iint\limits_S \sum_j a_{ij} n_j dS \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (17.2)$$

и

Мы выразили здесь координаты вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$ согласно (3.13) при помощи тензорной операции свертывания.

В этой записи обнаруживается глубокое формальное родство понятий потока векторного поля и потока аффинорного поля. В самом деле, формула (17.2) представляет собой как бы повторенную в трех вариантах (при $i = 1, 2, 3$) формулу (16.4). Этим родством мы в дальнейшем воспользуемся.

Не нужно забывать, что величины a_{ij}, n_j, стоящие под знаком интеграла (17.2), меняются от точки к точке поверхности, хотя мы и не выписываем явно их аргументов. Аналогично дело обстоит и в случае (16.4).

Теперь укажем важнейшее приложение понятия потока аффинора.

Пусть в какой-либо сплошной среде имеются силы напряжения, характеризуемые полем аффинора напряжений $\mathfrak{F}$ с координатами f_{ij}. Составим поток этого аффинора через какую-либо поверхность S, мысленно построенную нами в рассматриваемой среде. Тогда в силу (17.1)

$$\mathbf{p} = \iint\limits_S \mathfrak{F}\mathbf{n}\, dS. \qquad (17.3)$$

Но подынтегральное выражение согласно (14.4) представляет собой силу напряжения, приложенную к элементарной площадке dS (которая предполагается ориентированной соответственно ориентации всей поверхности S). Поэтому в результате интегрирования мы получаем *равнодействующую* $\mathbf{p}$ *всех сил напряжения, приложенных к поверхности* S. Таков смысл потока аффинора напряжений.

§ 18. Теорема Остроградского

Теорема Остроградского сводит вычисление потока векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую некоторое пространственное тело ω, к тройному интегралу по этому телу от дивергенции вектора $\mathbf{a}$:

$$\iint\limits_S \mathbf{an}\, dS = \iiint\limits_\omega \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\omega. \tag{18.1}$$

Здесь $d\omega$ обозначает элемент объема, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Для доказательства удобно переписать (18.1) в координатной форме:

$$\iint\limits_S (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3)\, dS = \iiint\limits_\omega \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) d\omega. \tag{18.2}$$

Мы докажем сначала формулу (18.2) в частном случае, когда $a_1 = a_2 = 0$. Тогда она принимает вид

$$\iint\limits_S a_3 n_3\, dS = \iiint\limits_\omega \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, d\omega. \tag{18.3}$$

На время можно забыть, что a_3 — координата вектора $\mathbf{a}$, а просто рассматривать ее как некоторую (непрерывно дифференцируемую) функцию от координат x_1, x_2, x_3.

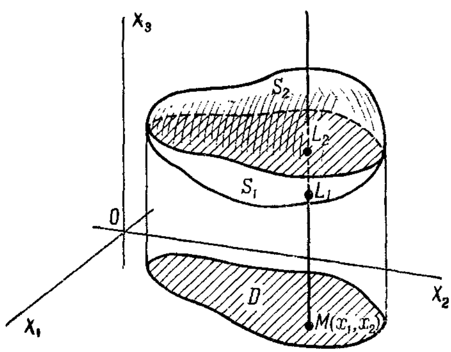

Рис. 5.

Предположим сначала, что поверхность S такова, что каждая параллель оси X_3 пробивает ее не более чем в двух точках. Для краткости будем называть поверхность S в этом случае *правильно расположенной*. Проектируя S на плоскость X_1X_2, получим на последней некоторую область D (рис. 5). Проводя параллели оси X_3 через точки $M(x_1, x_2)$ области D, мы отмечаем на каждой из них точки L_1, L_2 пересечения с поверхностью S.

Пусть L_1 расположена «ниже» L_2*), т. е. обладает меньшей координатой x_3. Когда точка M описывает область D, L_1 описывает нижнюю часть поверхности S, которую обозначим S_1, а L_2 — верхнюю часть, которую обозначим S_2. При этом и для L_1, и для L_2 координата x_3 меняется в зависимости от x_1, x_2:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= f_1(x_1, x_2) \quad (\text{для } L_1);\\ x_3 &= f_2(x_1, x_2) \quad (\text{для } L_2). \end{aligned}\right\} \tag{18.4}$$

Уравнения, которые мы записали, определяют, таким образом, соответственно поверхности S_1 и S_2.

Функции f_1, f_2 однозначны по определению и непрерывны, как можно вывести из наших общих предположений о характере поверхности S (§ 16).

Вычисляем теперь правую часть (18.3), производя сначала интегрирование по x_3 при данных x_1, x_2 от f_1 до f_2, а затем интегрирование по x_1, x_2 в пределах области D:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, d\omega = \iint\limits_{D} \int\limits_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, dx_3\, dx_2\, dx_1 =$$

$$= \iint\limits_{D} \{a_3(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)) - a_3(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2))\}\, dx_1\, dx_2. \tag{18.5}$$

С другой стороны, рассмотрим левую часть (18.3), разбивая ее на два интеграла — по S_1 и по S_2:

$$\iint\limits_{S} a_3 n_3\, dS = \iint\limits_{S_1} a_3 n_3\, dS + \iint\limits_{S_2} a_3 n_3\, dS. \tag{18.6}$$

Если функция $x_3 = f_1(x_1, x_2)$ обладает непрерывными частными производными 1-го порядка, то для соответствующей поверхности S_1 элемент площади dS и единичный нормальный вектор $\mathbf{n}$ можно записать, как известно, в виде

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1\, dx_2, \tag{18.7}$$

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\pm\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}}. \tag{18.8}$$

*) Или в крайнем случае с ней совпадает (когда M лежит на границе области D).

Знак $\pm$ соответствует тому или другому выбору положительного направления на нормали.

Отсюда, в частности,

$$n_3 = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}}. \tag{18.9}$$

Так как S_1 образует нижнюю границу рассматриваемого объема, то внешняя нормаль будет направлена «вниз» (т. е. в сторону убывания x_3), и проекция n_3 вектора $\mathbf{n}$ на ось X_3 будет отрицательной; в формуле (18.9) мы выбираем знак минус. Перемножая (18.7) и (18.9), получим:

$$n_3\,dS = -dx_1\,dx_2, \tag{18.10}$$

и следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} a_3 n_3 dS = -\iint\limits_{S_1} a_3\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= -\iint\limits_{D} a_3(x_1,\ x_2,\ f_1(x_1,\ x_2))\,dx_1\,dx_2. \tag{18.11}$$

В последней записи мы свели интеграл по поверхности S_1 к двойному интегралу по переменным x_1, x_2, которые пробегают область D, когда точка пробегает поверхность S_1. При этом пришлось уже явно указать, что a_3 берется для точек поверхности S_1, т. е. аргументу x_3 придается значение $f_1(x_1,\ x_2)$.

Совершенно аналогично мы поступаем с интегралом по S_2 с той только разницей, что S_2 ограничивает рассматриваемый объем сверху, вектор $\mathbf{n}$ будет направлен «вверх» (в сторону возрастания x_3), и в формуле (18.9) мы должны будем взять знак плюс. Соответственно и в формуле (18.10) знак $-$ заменяется на $+$, и мы получаем:

$$\iint\limits_{S_2} a_3 n_3\,dS = \iint\limits_{D} a_3(x_1,\ x_2,\ f_2(x_1,\ x_2))\,dx_1\,dx_2. \tag{18.12}$$

Две последние формулы позволяют переписать (18.6) в виде

$$\iint\limits_{S} a_3 n_3\,dS = -\iint\limits_{D} a_3(x_1,\ x_2,\ f_1(x_1,\ x_2))\,dx_1\,dx_2 +$$
$$+\iint\limits_{D} a_3(x_1,\ x_2,\ f_2(x_1,\ x_2))\,dx_1\,dx_2.$$

Сравнивая это выражение с (18.5), убеждаемся в справедливости формулы (18.3), которую нам и требовалось доказать.

При доказательстве мы предположили, что $f_1(x_1, x_2)$ (и аналогично $f_2(x_1, x_2)$) имеют непрерывные частные производные. В действительности это не везде соблюдается, так как поверхность S, вообще говоря, лишь кусочно гладкая и, кроме того, на ней могут встречаться точки, особенно по линии соединения S_1 и S_2, в которых касательная плоскость параллельна оси X_3.

В таком случае доказательство равенства (18.12) (и аналогично (18.11)) следует видоизменить: сначала это равенство устанавливается для отдельных гладких кусков $S_2^{(i)}$ поверхности S_2 и соответствующих кусков $D^{(i)}$ области D, откуда почленным сложением приходим к равенству (18.12). При доказательстве равенства для отдельного гладкого куска $S_2^{(i)}$ мы относим его к параметрам u_1, u_2, причем текущие координаты x_1, x_2, x_3 являются функциями u_1, u_2 с непрерывными частными производными 1-го порядка.

Из дифференциальной геометрии известно, что тогда

$$\left.\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG-F^2}\,du_1\,du_2, \\ n_3 &= \pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}, \end{aligned}\right\} \tag{18.13}$$

где

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}^{*)}.$$

В случае S_2 мы берем n_3 положительным, вернее неотрицательным, так как $n_3 = 0$ в точках, где касательная плоскость параллельна оси X_3. Следовательно,

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right|, \tag{18.14}$$

а значит,

$$n_3\,dS = \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right| du_1 du_2. \tag{18.15}$$

Отсюда

$$\iint_{S_2^{(i)}} a_3 n_3\,dS = \iint_{S_2^{(i)}} a_3\left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right| du_1\,du_2 = \iint_{D^{(i)}} a_3\,dx_1\,dx_2.$$

Последний знак равенства поставлен на основании формулы преобразования переменных под знаком двойного интеграла. Этим

---

*) См., например, П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, изд. 3-е, Гостехиздат, М.—Л., 1950, формулы (338), (350) и (360).

равенство (18.12) доказано для отдельных кусков $S_2^{(i)}$, а значит, и для S_2.

Аналогично поступаем с S_1 и его гладкими кусками $S_1^{(i)}$ с той лишь разницей, что в формуле (18.14), а значит, и в формуле (18.15), в правой части добавляется знак минус, и мы приходим к (18.11).

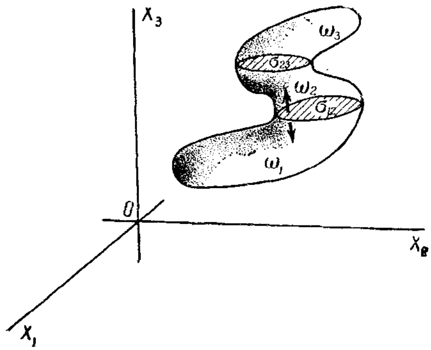

Рис. 6.

Итак, формула (18.3) у нас доказана, правда, пока только для «правильно расположенных» поверхностей S. Но она будет верна и для произвольной замкнутой поверхности S, ограничивающей некоторое пространственное тело ω. В самом деле, это тело всегда можно разбить на куски ω_i таким образом, чтобы ограничивающие их поверхности S_i были «правильно расположенными» (не вдаваясь в подробности, будем считать это наглядно очевидным; см. рис. 6). В таком случае мы выписываем формулу (18.3) по отдельности для каждого куска

$$\iint\limits_{S_i} a_3 n_3\, dS = \iiint\limits_{\omega_i} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, d\omega \tag{18.16}$$

и все эти формулы складываем почленно. В правой части сумма интегралов по телам ω_i даст соответствующий интеграл по ω, а в левой части сумма интегралов по поверхностям S_i даст интеграл по поверхности S. В самом деле, интегралы по дополнительным поверхностям, рассекающим тело ω, берутся по два раза с противоположными знаками и в сумме уничтожаются. Так, например, интеграл по поверхности σ_{12} войдет, во-первых, в состав интеграла по поверхности S_1, ограничивающей тело ω_1, и, во-вторых, в состав интеграла по поверхности S_2, ограничивающей тело ω_2. Так как тела ω_1 и ω_2 примыкают к σ_{12} с противоположных сторон, то внешние нормали к σ_{12} будут направлены в том и другом случае в противоположные стороны, так что вектор $\mathbf{n}$ меняет направление на обратное, а его проекция n_3 меняет знак. Но вместе с n_3 меняет знак и интеграл $\iint\limits_{\sigma_{12}} a_3 n_3\, dS$.

Итак, формула (18.3) доказана окончательно. Но ввиду полного равноправия координатных осей она будет верна и с заменой 3-го индекса на 1-й или 2-й. Складывая все три формулы почленно, получаем равенство (18.2), а следовательно, и (18.1). Доказательство закончено.

Рассмотрим еще поток аффинорного поля $\mathfrak{A}$ через замкнутую поверхность S. Пользуясь координатной записью (17.2), получим:

$$p_i = \iint\limits_S (a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + a_{i3}n_3)\, dS = \\ = \iiint\limits_\omega \left(\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3}\right) d\omega. \qquad (18.17)$$

Последнее выражение получено на основании формулы (18.2). Введем понятие *дивергенции аффинорного поля*, а именно, сопоставим аффинорному полю $\mathfrak{A}$ векторное поле $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}$, определив координаты вектора $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}$ формулами:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}\}_i = \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^j} = \sum_j \nabla_j a_{ij}. \qquad (18.18)$$

Мы видим, что координаты вектора $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}$ образуют одновалентный тензор, полученный свертыванием тензора $\nabla_k a_{ij}$ по 1-му и 3-му индексам; следовательно, вектор $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}$ будет в каждой точке вполне определенным (не зависит от выбора координатной системы, в которой вычисляются его координаты; см. § 1).

Теперь (18.17) можно переписать в виде

$$p_i = \iiint\limits_\omega \{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}\}_i\, d\omega,$$

или, что то же,

$$\mathbf{p} = \iiint\limits_\omega \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}\, d\omega. \qquad (18.19)$$

Записав $\mathbf{p}$ в развернутом виде согласно (17.1), получим окончательно

$$\iint\limits_S \mathfrak{A}\mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_\omega \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}\, d\omega. \qquad (18.20)$$

Мы получили теорему Остроградского для потока аффинора через замкнутую поверхность.

§ 19. Основные уравнения гидродинамики

Теперь мы можем составить основные дифференциальные уравнения гидродинамики. Они, в сущности, сводятся к записи второго закона Ньютона для элемента жидкости.

Предположим для общности, что внутри жидкости действуют (кроме сил напряжения) объемные силы, т. е. нам задано векторное поле $\mathbf{Q}(M, t)$, выражающее в каждой точке и в каждый момент времени силу, действующую на элемент жидкости и отнесенную к единице ее массы.

Мы рассматривали до сих пор в случае течения жидкости лишь стационарные процессы, когда все изучаемые нами величины, например, вектор поля скоростей $\mathbf{a}$, плотность ρ, аффинор напряжений $\mathfrak{F}$ и т. д. зависели лишь от точки M, в которой мы их рассматривали; теперь будем считать их, кроме того, и функциями времени:

$$\mathbf{a}(M, t), \quad \rho(M, t), \quad \mathfrak{F}(M, t) \text{ и т. д.}$$

Полученные ранее выводы этим затронуты не будут, так как стационарность процесса мы предполагали лишь для простоты и по существу не использовали.

Сначала составим равнодействующую сил напряжения, действующих на замкнутую поверхность S, которая выделяет каким-либо образом часть нашей жидкой среды. Относительно поверхности S сохраняем прежние предположения; $\mathbf{n}$ направляем по внешней нормали.

Эта равнодействующая согласно (17.3) имеет вид

$$\mathbf{p} = \iint\limits_S \mathfrak{F}\mathbf{n}\, dS.$$

Пользуясь теоремой Остроградского (18.20), этот результат можно переписать так:

$$\mathbf{p} = \iiint \operatorname{div} \mathfrak{F}\, d\omega, \tag{19.1}$$

где тройной интеграл берется по области, ограниченной поверхностью S.

Далее, составим равнодействующую объемных сил

$$\iiint \mathbf{Q}\rho\, d\omega. \tag{19.2}$$

Этот интеграл также берется по области, ограниченной поверхностью S, причем $d\omega$ — элемент объема, $\rho\, d\omega$ — элемент массы, а $\mathbf{Q}\rho\, d\omega$ — объемная сила, действующая на этот элемент массы.

Составим, наконец, равнодействующую сил инерции для жидкости, заключенной внутри S. Скорость каждой частицы жидкости выражается вектором $\mathbf{a}(M, t)$, ускорение же ее будет выражаться вектором

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}+\mathfrak{A}\mathbf{a},$$

где $\mathfrak{A}(M, t)$ — производный аффинор векторного поля $\mathbf{a}(M, t)$ (который составляется в каждый данный момент времени так же, как и в § 11).

Действительно, прослеживая движение одной частицы жидкости, мы видим, что ее координаты x_i являются функциями от t, причем в каждой точке M и в каждый момент времени t скорость ее движения выражается вектором $\mathbf{a}(M, t)$. Это можно записать так:

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}=\mathbf{a}(M, t),$$

или в проекциях на оси:

$$\frac{dx_i}{dt}=a_i(x_1, x_2, x_3, t). \tag{19.3}$$

Чтобы найти проекции ускорения, дифференцируем по t еще раз. Получаем:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial a_i}{\partial t}+\frac{\partial a_i}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial a_i}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial a_i}{\partial x_3}\cdot\frac{dx_3}{dt}.$$

Пользуясь формулами (11.6) и (19.3), получаем окончательно:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial a_i}{\partial t}+a_{i1}a_1+a_{i2}a_2+a_{i3}a_3=\frac{\partial a_i}{\partial t}+\sum_j a_{ij}a_j, \tag{19.4}$$

где a_{ij} — координаты производного аффинора $\mathfrak{A}$. Обозначая вектор ускорения $\frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$, можно перейти теперь от координатной записи к векторной:

$$\frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}=\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}+\mathfrak{A}\mathbf{a}. \tag{19.5}$$

Умножая ускорение на элемент массы $\rho\, d\omega$, интегрируя по области, ограниченной S, и беря результат с обратным знаком, мы получаем равнодействующую сил инерции

$$-\iiint\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}+\mathfrak{A}\mathbf{a}\right)\rho\, d\omega. \tag{19.6}$$

Сумма всех сил, действующих на рассматриваемую часть жидкости, включая силы инерции, должна равняться нулю. Складывая выражения (19.1), (19.2), (19.6) и приравнивая результат нулю, получаем:

$$\iiint \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathfrak{F} + \mathbf{Q} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \mathfrak{A}\mathbf{a} \right) \rho \, d\omega = 0. \tag{19.7}$$

Так как этот тройной интеграл равен нулю для любой области, вырезанной в нашей жидкой среде, то подынтегральное выражение должно равняться нулю тождественно. Мы получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a} = \mathbf{Q} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathfrak{F}. \tag{19.8}$$

При этом, пользуясь формулами (18.18) и (15.16), мы можем вычислить координаты вектора $\operatorname{div} \mathfrak{F}$:

$$[\operatorname{div} \mathfrak{F}]_i = \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} =$$

$$= \mu \sum_j \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2\mu}{3} \sum_j \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \sum_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij}.$$

Так как $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \Delta$ есть *оператор Лапласа*, то первый член дает $\mu \Delta a_i$; во втором члене операцию $\frac{\partial}{\partial x_i}$ можно вынести за знак суммы, а сумма дает тогда $\operatorname{div} \mathbf{a}$; в последних двух слагаемых от суммы фактически остается по одному члену, именно, тому, где $j = i$ (остальные обращаются в нуль). Окончательно получим:

$$[\operatorname{div} \mathfrak{F}]_i = \mu \Delta a_i + \mu \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x_i} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} =$$

$$= \mu \Delta a_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{19.9}$$

В векторной форме это же равенство принимает вид

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = \mu \Delta \mathbf{a} + \frac{\mu}{3} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \mathbf{a} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} p. \tag{19.10}$$

Вставляя полученное выражение в (19.8), имеем окончательно:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a} = \mathbf{Q} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{a} + \frac{\mu}{3\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \mathbf{a} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p. \tag{19.11}$$

Это *уравнение Навье-Стокса* в инвариантной форме. Здесь фигурируют неизвестные функции $\mathbf{a}(M, t)$, $\rho(M, t)$ и $p(M, t)$. Производный аффинор $\mathfrak{A}$ самостоятельного значения не имеет — его координаты выражаются через координаты $\mathbf{a}$ (M, t) по формулам (11.6):

$$a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Следует отметить еще, что оператор Лапласа Δ (в применении к скалярному или векторному полю безразлично) носит инвариантный характер. Действительно,

$$\Delta a = \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i}$$

есть результат свертывания тензора $\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}$, полученного двойным дифференцированием скалярного поля $a(x_1, x_2, x_3)$, и, следовательно, представляет собой инвариант.

Аналогично

$$\Delta a_k = \sum_i \frac{\partial^2 a_k(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \partial x_i}$$

есть результат свертывания тензора $\nabla_i \nabla_j a_k = \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$ по индексам i и j и представляет собой, следовательно, снова тензор. Тем самым вектор $\Delta\mathbf{a}$, обладающий, очевидно, координатами Δa_k, будет *инвариантно определенным вектором.*

К уравнению (19.11) нужно присоединить так называемое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{a}) = 0, \tag{19.12}$$

выражающее закон сохранения массы.

§ 20. Дифференциальные уравнения теории упругости в перемещениях

Мы будем рассматривать малые колебания однородного изотропного упругого тела под действием объемных сил, которые (аналогично § 19) заданы переменным векторным полем $\mathbf{Q}(M, t)$. Вектор $\mathbf{Q}$ выражает объемную силу, отнесенную к единице массы, в данной точке M и в данный момент времени t. Искомым является переменное векторное поле $\mathbf{w}(M, t)$, выражающее перемещение каждой точки упругого тела (сравнительно с положением равновесия) в каждый момент времени. Мы не будем ставить задачу в полном виде и ограничимся инвариантной записью дифференциальных уравнений, накладываемых на $\mathbf{w}(M, t)$.

Тензор деформаций выражается формулой (13.5):

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right), \tag{20.1}$$

а тензор напряжений — согласно (15.1):

$$f_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\tilde{b}_{ij}, \qquad \theta = \sum_i \tilde{b}_{ii}. \tag{20.2}$$

Выделим из упругого тела произвольный кусок ω, ограниченный некоторой поверхностью S. Подсчитаем равнодействующую $\mathbf{p}$ сил напряжения, действующих на ω через его поверхность S.

Совершенно аналогично (19.1) получаем:

$$\mathbf{p} = \iiint_\omega \overrightarrow{\operatorname{div}}\, \mathfrak{F} \cdot d\omega, \tag{20.3}$$

где $\mathfrak{F}$ — аффинор напряжений, координаты которого имеют вид (20.2). Далее, равнодействующая объемных сил тоже совершенно аналологично (19.2) имеет вид

$$\iiint_\omega \mathbf{Q}\rho\, d\omega, \tag{20.4}$$

где ρ — плотность упругого тела.

Заметим, что ввиду малости перемещений $\mathbf{w}$ мы позволяем себе брать все интегралы по той области ω, которую занимает выделенный кусок упругого тела в состоянии равновесия (а не по той переменной области, которую он занимает в процессе колебаний).

По той же причине считаем, что плотность ρ не меняется в процессе колебаний.

Теперь составим равнодействующую сил инерции:

$$-\iiint_\omega \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}\, d\omega. \tag{20.5}$$

Действительно, $\frac{\partial^2 \mathbf{w}(M, t)}{\partial t^2}$ выражает в момент времени t ускорение точки, которая в положении равновесия совпадала с M, а $\rho\, d\omega$ дает элемент массы. Равнодействующая всех сил, действующих на ω, должна равняться нулю. Складывая выражения (20.3), (20.4) и (20.5) и приравнивая нулю, получаем:

$$\iiint_\omega \left(\overrightarrow{\operatorname{div}}\, \mathfrak{F} + \mathbf{Q}\rho - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}\right) d\omega = 0.$$

Поскольку равен нулю интеграл, взятый в любой момент времени по *любому куску* ω нашего упругого тела, то это значит, что подынтегральная функция в любой момент времени и в любой точке равна нулю. Поделив на ρ, получаем:

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathfrak{F} + \mathbf{Q} - \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.6}$$

Пользуясь формулами (18.18) и (20.2), вычисляем координаты $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}$:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i = \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = \sum_j \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \delta_{ij} + \sum_j 2\mu \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}.$$

Так как δ_{ij} равно 1, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$, то в первой из двух сумм остается лишь один член $\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$; во второй сумме производим замену, используя формулу (20.1). Получим:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{20.7}$$

Согласно (20.2), (20.1)

$$\theta = \sum_i \tilde{b}_{ii} = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{w} \tag{20.8}$$

Поэтому последний член в (20.7) равен $\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$, так что окончательно можно написать:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta w_i. \tag{20.9}$$

Отсюда, возвращаясь к векторной записи, получаем:

$$\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F} = (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\theta + \mu\,\Delta \mathbf{w}. \tag{20.10}$$

Вставляя это выражение в (20.6), получаем *дифференциальные уравнения упругих колебаний в перемещениях (Ламе)*, записанные в инвариантной форме:

$$\frac{1}{\rho}(\lambda + \mu)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\theta + \frac{\mu}{\rho}\,\Delta \mathbf{w} + \mathbf{Q} - \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0, \text{ где } \theta = \operatorname{div} \mathbf{w}. \tag{20.11}$$

Таким образом, неизвестной функцией является здесь лишь $\mathbf{w}(M, t)$.

Функция $\mathbf{Q}(M, t)$ и константа ρ предполагаются заданными. Кроме дифференциального уравнения на искомую функцию $\mathbf{w}$ накладываются обычно граничные и начальные условия, но этим мы заниматься не будем.

ГЛАВА II

АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО n ИЗМЕРЕНИЙ

Исходным пунктом всех геометрических теорий являются свойства протяженности материальных тел и притом в основном в том виде, как они были фиксированы в старейшей геометрической теории — в геометрии обычного трехмерного евклидова пространства. В частности, и аффинная геометрия имеет тот же источник; а именно, анализ различных геометрических свойств обычного пространства показывает, что они не все равноценны по степени своей устойчивости, по степени той прочности, с которой они связаны с геометрическими фигурами. Одни, как, например, отношение любым образом расположенных отрезков, величина угла, свойство фигуры быть кругом или шаром и т. д., сохраняются лишь при движениях пространства как твердого тела (и преобразованиях подобия); другие, более устойчивые, как, например, отношение параллельных отрезков, параллельность двух прямых, свойство фигуры быть прямой линией или плоскостью и т. д., сохраняются, кроме того, и при всех аффинных (линейных при записи в декартовых координатах) преобразованиях пространства. Этот, более глубоко лежащий и более прочно связанный с геометрическими фигурами класс свойств и образует аффинную геометрию, которой мы будем заниматься в этой главе.

Однако при построении аффинной геометрии мы не пойдем путем выделения аффинных свойств из числа евклидовых, напротив, мы сформулируем самостоятельную систему аксиом, достаточную для вывода всех аффинных свойств, и притом не только в трехмерном, но и в многомерном пространстве. Позже — уже в следующей главе — мы построим на этой базе и евклидово пространство путем введения добавочных аксиом.

§ 21. Точечно-векторная аксиоматика аффинного пространства

Основными понятиями, не подлежащими прямому логическому определению, будут служить у нас *точка* и *вектор*. (Это, конечно, не означает, что понятия точки и вектора будут лишены у нас содержания. В нашей теории они будут определены посредством перечисления их свойств в аксиомах. При этом мы считаем, что теория вещественных (равно как и комплексных) чисел уже построена.) Тогда нам достаточно принять следующие аксиомы.

1°. *Существует по меньшей мере одна точка.*

2°. *Каждой паре точек A, B, заданных в определенном порядке, поставлен в соответствие один и только один вектор.*

Этот вектор мы будем обозначать $\overrightarrow{AB}$, но, если понадобится, будем пользоваться обозначением и в виде отдельной (жирной) буквы **a**, **x** и т. п.

3°. *Для каждой точки A и каждого вектора* **x** *существует одна и только одна точка B такая, что*

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}. \tag{21.1}$$

Знак $=$ между векторами (как и между числами) мы будем понимать в смысле тождества, например, в данном случае $=$ означает, что $\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{x}$ — это просто один и тот же вектор. В связи с этим нет надобности обосновывать особыми аксиомами свойства знака $=$ (например, транзитивность), так как это просто свойства логического тождества. В дальнейшем мы именно так со знаком $=$ и будем обращаться.

Следует подчеркнуть, что при наглядном истолковании нашей аксиоматики вектор выступает не в виде направленного отрезка, а в виде параллельного сдвига, которому подвергаются все точки пространства. Поэтому наглядный смысл аксиомы 2° состоит в существовании (единственного) параллельного сдвига, переводящего данную точку A в данную точку B, а аксиома 3° в сущности означает, что каждый вектор **x** реализуется в виде сдвига, а именно, каждой точке A ставит в соответствие определенную точку B согласно (21.1).

Конечно, очень полезно иметь в виду эти наглядные истолкования наших аксиом, но не нужно забывать, что мы дадим аксиоматику, достаточную для развертывания аффинной геометрии и независимо от каких-либо наглядных соображений (как и полагается делать при аксиоматическом построении математической теории).

4°. *(Аксиома параллелограмма.) Если*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \text{ то } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Очевидно, наглядный смысл аксиомы 4° в основном состоит в том, что при равенстве и параллелизме одной пары противоположных сторон четырехугольника то же имеет место и для другой пары.

Перечисленные четыре аксиомы образуют в известном смысле законченную часть нашей аксиоматики: остальные аксиомы относятся к умножению вектора на число и тем самым носят иной характер. Поэтому, прежде чем перечислять остальные аксиомы, рассмотрим следствия аксиом $1°—4°$.

Теорема. *Векторы* $\overrightarrow{AA}$ *и* $\overrightarrow{BB}$ *для любых точек* A, B *равны между собой*:

$$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}. \tag{21.2}$$

Для доказательства достаточно применить аксиому $4°$, положив $C\equiv A$, $D\equiv B$. Тогда, очевидно, справедливо равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (так как оно сводится к $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$), а следовательно, по аксиоме $4°$ справедливо и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, т. е. $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$.

Определение. Вектор $\overrightarrow{AA}$ (как было показано, один и тот же при любом выборе точки A) носит название *вектор-нуль* и обозначается

$$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}. \tag{21.3}$$

Откладывая вектор $\overrightarrow{0}$ от любой точки M, мы получаем в качестве результата вектор $\overrightarrow{MM}$. Действительно, этот последний вектор равен $\overrightarrow{0}$, а так как откладывание данного вектора происходит единственным образом (аксиома $3°$), то других возможностей представиться не может.

Теорема. *Если* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, *то* $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$.

Доказательство. Применяя аксиому $4°$ к $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, получим $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, или, что то же, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$, откуда снова в силу аксиомы $4°$ следует

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}.$$

Определение. *Вектор* $\overrightarrow{BA}$ *мы будем называть обратным по отношению к вектору* $\overrightarrow{AB}$. Вектор, обратный вектору $\mathbf{x}$, обозначаем $-\mathbf{x}$.

Для каждого вектора $\mathbf{x}$ существует один и только один обратный ему вектор $-\mathbf{x}$. Действительно, представляя $\mathbf{x}$ в различных видах

$$\mathbf{x}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\ldots,$$

мы тем не менее получим *лишь один* обратный вектор

$$-\mathbf{x} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} = \ldots$$

согласно только что доказанной теореме.

Определение. Пусть нам заданы два каких-нибудь вектора в определенном порядке, например, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Выберем произвольно точку A и отложим от нее вектор $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$ (аксиома 3°), а затем от точки B — вектор $\overrightarrow{BC} = \mathbf{y}$ (аксиома 3°). Точки A, C определяют вектор $\overrightarrow{AC}$ (аксиома 2°), который мы будем называть *суммой* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ вектора $\mathbf{x}$ и вектора $\mathbf{y}$ (именно в этом порядке взятых). Итак:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \overrightarrow{AC},$$

или, что то же,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{21.4}$$

Теорема. *Вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ не зависит от выбора точки A (так что сложение векторов — операция однозначная).*

Доказательство. Повторим построение суммы при другом выборе точки A и, следовательно, с другими точками B и C. Новые точки будем обозначать штрихованными буквами. Тогда аналогично (21.4)

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'},$$

причем

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{x}, \quad \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{y}.$$

Отсюда согласно аксиоме 4° следует, что

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C}.$$

Применяя снова аксиому 4° к равенству

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C},$$

получаем:

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC},$$

т. е. результат сложения векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ не зависит от выбора начальной точки A.

Теорема. *Сложение векторов — операция коммутативная:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}. \tag{21.5}$$

Доказательство. Из произвольной точки A откладываем (аксиома 3°) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$, затем $\overrightarrow{BC} = \mathbf{y}$, так что

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \tag{21.6}$$

кроме того, из той же точки A откладываем $\overrightarrow{AD} = \mathbf{y}$.

Так как $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{y}$, то (аксиома 4°) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, т. е. $\overrightarrow{DC} = \mathbf{x}$.

Можно считать, что из точки A отложен сначала вектор $\overrightarrow{AD} = \mathbf{y}$, а затем $\overrightarrow{DC} = \mathbf{x}$, так что по определению сложения

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{y} + \mathbf{x}. \tag{21.7}$$

Сравнивая равенство (21.7) с (21.6), получаем:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}.$$

Теорема. *Сложение векторов — операция ассоциативная:*

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}). \tag{21.8}$$

Доказательство буквально такое же, как и в элементарной векторной алгебре; повторять его мы не будем.

Ассоциативность сложения при любом числе слагаемых векторов является простым следствием соотношения (21.8).

Короче говоря, сложение векторов, как оно у нас установлено, обладает всеми обычными свойствами. В дальнейшем мы будем обращаться с ним столь же непринужденно, как и в обычной векторной алгебре (не делая каждый раз ссылок на соответствующие теоремы).

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{x} + \vec{0} = \mathbf{x}. \tag{21.9}$$

Действительно, представим вектор $\mathbf{x}$ (аксиома 3°) как $\overrightarrow{AB}$, а вектор $\vec{0}$ — как $\overrightarrow{BB}$. В силу (21.4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$, и тем самым $\mathbf{x} + \vec{0} = \mathbf{x}$.

Далее, всегда справедливо равенство

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \vec{0}. \tag{21.10}$$

Действительно, представим $\mathbf{x}$ как $\overrightarrow{AB}$; тогда $-\mathbf{x}$ по определению представится как $\overrightarrow{BA}$; но $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ (согласно (21.4)), а значит, $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \vec{0}$.

Определение. *Вычесть вектор* $\mathbf{y}$ *из вектора* $\mathbf{x}$ *значит найти вектор* $\mathbf{z}$ *такой, что*

$$\mathbf{z}+\mathbf{y}=\mathbf{x}. \tag{21.11}$$

Вектор $\mathbf{z}$ мы будем называть *разностью* $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Теорема. *Вычитание — всегда выполнимая и притом однозначная операция.*

Доказательство. Допустим сначала, что разность $\mathbf{z}$ найдена. Добавим к обеим частям (21.11) вектор $-\mathbf{y}$. Получим:

$$\mathbf{z}+\mathbf{y}+(-\mathbf{y})=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}).$$

В силу ассоциативности сложения можно в левой части сложить сначала $\mathbf{y}$ и $-\mathbf{y}$. Это дает $\vec{0}$ в силу (21.10), после чего согласно (21.9) в левой части остается просто $\mathbf{z}$. Получаем в результате

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}),$$

т. е. если разность $\mathbf{z}$ существует, то она обязательно имеет такой вид. Остается показать, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$ действительно есть разность. Это легко проверить, складывая $\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$ с $\mathbf{y}$ и убеждаясь, что в результате получается $\mathbf{x}$. Итак,

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}). \tag{21.12}$$

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\vec{0}. \tag{21.13}$$

§ 22. Точечно-векторная аксиоматика аффинного пространства (окончание)

Мы переходим теперь ко второй группе аксиом, связанной с операцией умножения вектора на число. Под числами мы будем здесь понимать или вещественные числа — тогда полученное аффинное пространство называется *вещественным* — или комплексные числа — тогда полученное аффинное пространство называется *комплексным*.

В изложении мы не будем разделять эти два случая до тех пор, пока разница между ними не начнет сказываться (а это наступит еще не скоро).

Если мы изучаем вещественное аффинное пространство, то везде в дальнейшем изложении (а не только в формулировке аксиом) под «числами», «численными значениями функций» и т. п. нужно понимать вещественные числа; если же речь идет о комплексном аффинном пространстве, то везде имеются в виду комплексные числа. Можно употреблять вместо чисел вообще элементы некоторого алгебраического поля — тогда мы получим аффинное пространство над этим полем. Последнее построение нам, впрочем, не понадобится.

5°. *Каждому вектору* $\mathbf{x}$ *и каждому числу* α *поставлен в соответствие определенный вектор.* Этот вектор мы будем обозначать $\alpha\mathbf{x}$ и называть *произведением* вектора $\mathbf{x}$ на число α.

6°. $$1\mathbf{x} = \mathbf{x}. \tag{22.1}$$

Важнейшее значение этой аксиомы не в том, что умножение на единицу не меняет вектора, а в том, что различными произведениями векторов на числа можно исчерпать все векторы (а не только их подмножество, как это было бы возможно, если бы аксиому 6° исключить).

7°. $$(\alpha+\beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}. \tag{22.2}$$

8°. $$\alpha\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}. \tag{22.3}$$

Аксиомы 7° и 8° выражают два *дистрибутивных* закона: один — для умножения вектора на сумму чисел, другой — для умножения суммы векторов на число. Из них немедленно следуют аналогичные правила при любом числе слагаемых.

9°. $$\alpha\,(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{x}, \tag{22.4}$$

т. е. последовательное умножение вектора на числа β и α сводится к его умножению на их произведение.

Выведем некоторые следствия. Прежде всего при любом $\mathbf{x}$

$$0\mathbf{x} = \vec{0}. \tag{22.5}$$

В самом деле, взяв произвольное число α, составим выражение

$$\alpha\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (\alpha+0)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}. \tag{22.6}$$

Мы воспользовались здесь аксиомой 7°. То, что $\alpha+0=\alpha$, разумеется, нам известно из арифметики чисел и здесь в обосновании не нуждается. Итак,

$$\alpha\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}, \text{ т. е. } 0\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \vec{0}.$$

согласно (21.13). Тем самым (22.5) доказано.

Далее, отметим, что при любом α

$$\alpha\vec{0} = \vec{0}. \tag{22.7}$$

Действительно, взяв произвольный вектор $\mathbf{x}$, составим выражение

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha\vec{0} = \alpha\,(\mathbf{x} + \vec{0}) = \alpha\mathbf{x}.$$

Мы воспользовались здесь сначала аксиомой 8°, затем свойством (21.9). Получаем, что

$$\alpha\vec{0} = \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \vec{0},$$

и (22.7) доказано.

Очевидно, что установленные нами аксиомы и их следствия позволяют беспрепятственно производить по обычным правилам выкладки над векторами с участием операций сложения и умножения на число. Мы и будем в дальнейшем это делать уже без скрупулезных ссылок на аксиомы. Но еще одну очень важную аксиому, которой нам не хватает, мы должны сейчас рассмотреть.

Речь идет о том, что наши аксиомы справедливы для точек и векторов аффинного пространства любого числа измерений $n = 0, 1, 2, \ldots$ и даже $n = \infty$. Поэтому, если мы хотим остановиться на пространстве определенного числа измерений, то нам придется ввести еще одну соответствующую аксиому. Но предварительно нужно сформулировать важные понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Определение. *Пусть дано некоторое число векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$. *Эти векторы называются линейно зависимыми, если можно подобрать числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *так, чтобы имело место соотношение*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m = \vec{0}, \tag{22.8}$$

причем среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *хоть одно не равно нулю. Если же таких чисел подобрать нельзя, то векторы* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ *называются линейно независимыми.*

Смысл линейной зависимости векторов состоит в следующем. Так как в соотношении (22.8), по крайней мере, один коэффициент отличен от нуля, то будем считать для определенности $\alpha_1 \neq 0$. Прибавив к обеим частям равенства (22.8) вектор $-\alpha_1\mathbf{x}_1$, получим:

$$\alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m = -\alpha_1\mathbf{x}_1.$$

Умножим полученное равенство на $-\frac{1}{\alpha_1}$ почленно:

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_1.$$

Обозначая для краткости

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \beta_2, \ \ldots, \ -\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \beta_m,$$

можно записать окончательно

$$\mathbf{x}_1 = \beta_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{x}_m. \tag{22.9}$$

Таким образом, при линейной зависимости векторов один из них (но, вообще говоря, не любой!) может быть выражен в виде линейной комбинации остальных, т. е., говоря коротко, разложен по ним.

Обратное также верно: разложение вида (22.9) означает, очевидно, наличие линейной зависимости между $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Обращая эту характеристику линейной зависимости, получаем, что линейная независимость векторов равносильна тому, что ни один из них не может быть разложен по остальным, так что все они играют, так сказать, самостоятельную роль.

Теперь мы можем сформулировать аксиому размерности.

10° *(Аксиома размерности). Существует n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов линейно зависимы между собой.*

Целым неотрицательным числом n можно задаться произвольно, так что аксиома размерности существует в бесчисленном количестве вариантов. *Мы будем называть n-мерным аффинным пространством множество точек и векторов, удовлетворяющих аксиомам* 1°—10°. Чем больше n, тем большее многообразие векторов, а следовательно, и точек мы имеем в своем распоряжении.

Важно заметить, что аксиома 1° гарантирует нам существование лишь одной точки (обозначим ее A), а следовательно (совместно с 2°), и лишь одного вектора $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. То, что у нас имеются и другие точки и векторы, вытекает исключительно из первой половины аксиомы размерности и притом в случае $n>0$. Если же $n=0$, то из аксиомы размерности следует, напротив, что всякий вектор $\mathbf{x}$ «линейно зависимый», т. е., попросту говоря, совпадает с $\vec{0}$, и точка A — единственная; *нульмерное аффинное пространство содержит лишь одну точку A и один вектор $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.*

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, случай $n>0$.

Мы получили довольно простую и легко обозримую аксиоматику n-мерного аффинного пространства. Это объясняется отчасти элементарностью самого предмета, отчасти тем, что мы допустили некоторую хитрость, включив в аксиоматику операцию с участием *числа*. Если бы мы задались целью построить *чисто геометрическую* аксиоматику, то дело не обошлось бы так просто.

Не следует рассматривать нашу аксиоматику как нечто особенно принципиальное и глубокое. Мы хотели сказать ею лишь то, что в n-мерном аффинном пространстве можно обращаться с точками и векторами в основном так же, как и в обычной векторной алгебре (в ее аффинной части), с тем лишь отличием, что максимальное число линейно независимых векторов — не обязательно три, а любое n.

И именно, чтобы сказать это, мы перечислили те основные свойства точек и векторов, из которых очевидным образом можно вывести все остальные их (аффинные) свойства. Это перечисление и составило нашу аксиоматику.

§ 23. Аффинная координатная система

Цель этого параграфа — рассмотреть в n-мерном аффинном пространстве наиболее естественные координатные системы, геометрически связанные со свойствами пространства. Указания для первой ориентации в этом направлении дает нам аксиома размерности.

В самом деле, согласно ей в нашем пространстве существует n линейно независимых векторов. Выберем их каким-нибудь образом и обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Присоединяя к этим векторам *любой вектор* $\mathbf{x}$, мы получим $n+1$ уже линейно зависимых векторов согласно второй половине аксиомы.

Запишем эту линейную зависимость

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = 0 \tag{23.1}$$

(начиная с этого параграфа, мы перестаем писать стрелку над вектором-нуль).

Мы утверждаем, что $\alpha \neq 0$. Действительно, если бы $\alpha = 0$, то у нас осталась бы линейная зависимость между $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, что противоречит выбору этих векторов. Выражая теперь из нашей линейной зависимости $\mathbf{x}$ через остальные векторы, мы получаем его разложение (совершенно аналогично выводу (22.9) из (22.8)):

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n. \tag{23.2}$$

Через $x^1, x^2, \ldots, x^n$ обозначены коэффициенты разложения; $x^1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha}$ и т. д. Запись индекса наверху является не случайной; она, как мы увидим, будет указывать на характер преобразования этих коэффициентов.

Итак, *любой вектор n-мерного аффинного пространства может быть разложен по n как-либо выбранным линейно независимым векторам.*

В случае $n = 1$ любой вектор $\mathbf{x}$ может быть записан в виде

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1, \tag{23.3}$$

что соответствует положению вещей на прямой линии, где все векторы коллинеарны между собой.

В случае $n = 2$ любой вектор $\mathbf{x}$ разлагается по двум данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2, \tag{23.4}$$

что дает картину плоскости, аффинную геометрию которой мы в этом случае и получаем.

В случае $n=3$ любой вектор $\mathbf{x}$ можно разложить по трем данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2+x^3\mathbf{e}_3. \qquad (23.5)$$

Геометрия трехмерного аффинного пространства, которую мы в этом случае получаем, и есть геометрия нашего обычного пространства с сохранением лишь ее аффинных свойств (о чем шла речь в начале этой главы).

Возвращаемся к n-мерному случаю. Мы будем называть *аффинным репером* совокупность какой-нибудь точки O (начало репера) и каких-нибудь n занумерованных линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (которые для наглядности будем представлять себе отложенными из начала O).

Пусть некоторый аффинный репер нам задан. Тогда любой вектор $\mathbf{x}$ разлагается по векторам репера согласно (23.2). *Коэффициенты разложения $x^1, x^2, \ldots, x^n$ мы будем называть аффинными координатами вектора $\mathbf{x}$ относительно данного репера.*

Эти координаты определяются единственным образом. В самом деле, если бы вектор $\mathbf{x}$ допускал два *различных* разложения

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n=\tilde{x}^1\mathbf{e}_1+\ldots+\tilde{x}^n\mathbf{e}_n,$$

где не все x^i были бы равны соответствующим $\tilde{x}^i$, то оказалось бы, что $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно зависимы, так как

$$(x^1-\tilde{x}^1)\,\mathbf{e}_1+\ldots+(x^n-\tilde{x}^n)\,\mathbf{e}_n=0;$$

но это невозможно.

Обратно, вектор $\mathbf{x}$ однозначно определяется своими координатами согласно (23.2), так что соответствие между векторами $\mathbf{x}$ и совокупностями их координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ является взаимно однозначным. В частности, вектор-нуль имеет все координаты, равные нулю.

Посмотрим, как выглядят операции над векторами с точки зрения их координатного задания. Пусть даны два вектора:

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n, \qquad (23.6)$$

$$\mathbf{y}=y^1\mathbf{e}_1+\ldots+y^n\mathbf{e}_n. \qquad (23.7)$$

Складывая эти равенства почленно и преобразуя правую часть при помощи известных нам правил, получим:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x^1+y^1)\,\mathbf{e}_1+\ldots+(x^n+y^n)\,\mathbf{e}_n. \qquad (23.8)$$

Это означает, что *координаты суммы двух (и аналогично нескольких) векторов получаются сложением соответствующих координат этих векторов.*

Далее, умножая (23.6) на какое-либо число α, мы получим:

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha x^n\mathbf{e}_n. \tag{23.9}$$

Это означает, что при умножении вектора на число α каждая его координата умножается на это число.

Объединяя операции сложения и умножения на число, рассмотрим составление линейной комбинации данных векторов. Пусть нам дано m векторов:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= x_1^1\mathbf{e}_1 + x_1^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_1^n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{x}_2 &= x_2^1\mathbf{e}_1 + x_2^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_2^n\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{x}_m &= x_m^1\mathbf{e}_1 + x_m^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_m^n\mathbf{e}_n. \end{aligned}\right\} \tag{23.10}$$

Составим их линейную комбинацию $\mathbf{x}$ с произвольными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m. \tag{23.11}$$

Умножая разложения (23.10) соответственно на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и складывая почленно, убеждаемся, что координаты нашей линейной комбинации $\mathbf{x}$:

$$x^1, x^2, \ldots, x^n \tag{23.12}$$

образуют линейную комбинацию строк матрицы

$$\begin{Vmatrix} x_1^1 x_1^2 \ldots x_1^n \\ x_2^1 x_2^2 \ldots x_2^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_m^1 x_m^2 \ldots x_m^n \end{Vmatrix} \tag{23.13}$$

с теми же коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, а именно:

$$x^i = \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \ldots + \alpha_m x_m^i. \tag{23.14}$$

Пусть векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ *линейно зависимы.* Тогда коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (не обращающиеся одновременно в нуль) можно подобрать так, что будет равна нулю линейная комбинация $\mathbf{x}$, а вместе с нею и все ее координаты (23.12). Это значит, что обращается в нуль линейная комбинация строк матрицы (23.13), а следовательно, *между строками этой матрицы имеется линейная зависимость.*

Существование линейной зависимости между строками матрицы (23.13) *не только необходимо, но и достаточно для линейной зависимости векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, в чем сейчас же убеждаемся, проводя рассуждение в обратном порядке.

Мы ввели координаты для векторов; но это нетрудно теперь сделать и для точек. Пусть M — любая точка нашего пространства. Ей однозначно отвечает вектор $\overrightarrow{OM}$, где O — начало репера. Этот вектор мы будем называть *радиусом-вектором* данной точки; он, как и всякий вектор, обладает определенными координатами x^1, x^2, ..., x^n относительно нашего аффинного репера:

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OM} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n. \tag{23.15}$$

Аффинными координатами точки M относительно данного репера мы будем называть аффинные координаты x^1, ..., x^n ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно того же репера.

Очевидно, таким образом, что координаты данной точки M определяются однозначно. Обратно, при задании координат x^1, ..., x^n радиус-вектор точки M однозначно определяется согласно (23.15), а откладывая его затем от начала O, мы однозначно определим точку M.

Таким образом, задание аффинного репера влечет построение аффинной координатной системы и для векторов и для точек.

Если точки A и B имеют соответственно координаты x^i и y^i, то такие же координаты имеют и векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, а так как

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB},$$

то

$$y^i = x^i + z^i,$$

где z^i — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, и окончательно

$$z^i = y^i - x^i.$$

Аффинные координатные системы наиболее естественно связаны с геометрическими свойствами рассматриваемого нами n-мерного аффинного пространства, хотя в нем возможны и другие (криволинейные) координатные системы.

На протяжении этой главы мы будем рассматривать только аффинные координатные системы и *под словами «координатная система» всегда будем понимать аффинную координатную систему.*

§ 24. Преобразование аффинного репера

Естественно возникает вопрос, с какой степенью произвола можно выбирать аффинный репер и каким образом переходить от одного репера к другому. Мы займемся вопросом о преобразовании векторов репера $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$, так как в связи с переносом его начала O никаких вопросов не возникает: начало O можно по желанию передвигать в любое положение. Кроме того, как мы увидим, в интересующих нас вопросах выбор начала O большей частью будет безразличен. Дело в том, что мы будем пользоваться координатами не столько для точек, сколько для векторов, а в этом случае положение начала O совершенно не играет роли.

Пусть $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, ..., $\mathbf{e}_{n'}$ — это 1-й, 2-й, ..., n-й векторы некоторого нового аффинного репера, занумерованные для отличия штрихованными индексами.

Каждый из этих векторов согласно (23.2) может быть разложен по векторам старого репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Коэффициенты этих разложений мы будем обозначать буквой A с соответствующими индексами:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= A_{1'}^1\mathbf{e}_1 + A_{1'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{1'}^n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}_{2'} &= A_{2'}^1\mathbf{e}_1 + A_{2'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{2'}^n\mathbf{e}_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_{n'} &= A_{n'}^1\mathbf{e}_1 + A_{n'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{n'}^n\mathbf{e}_n, \end{aligned}\right\} \tag{24.1}$$

или, объединяя эти формулы в общей записи, можно написать:

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^1\mathbf{e}_1 + A_{i'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{i'}^n\mathbf{e}_n. \tag{24.2}$$

В этом равенстве, как и во всех дальнейших, мы будем подразумевать, что буквенному индексу, встречающемуся по одному разу в каждом одночленном выражении, можно давать любые значения 1, 2, ..., n, т. е. что фактически имеется в виду не одно, а n равенств (если такой индекс один).

В нашем случае имеется буквенный индекс i', которому, как мы подразумеваем, по очереди придаются значения $1'$, $2'$, ..., n'. В результате (24.2) означает в краткой записи то же самое, что и (24.1).

Нетрудно заметить, что при помощи знака $\sum$ можно записать (24.2) следующим образом:

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{n} A_{i'}^i\mathbf{e}_i. \tag{24.3}$$

Суммирование происходит здесь лишь по нештрихованному индексу i, в то время как индекс i' сохраняет постоянное значение. Таким образом, здесь и в аналогичных случаях дальше мы позволяем себе рассматривать буквенные индексы, обозначенные одной и той же буквой, но в одном случае штрихованной, а в другом — нештрихованной (как сейчас у нас i и i'), *как принимающие значения один независимо от другого.*

То, что индекс суммирования i встречается дважды, один раз наверху, а другой раз внизу, является, как мы дальше увидим, далеко не случайным. Такого типа суммы нам будут встречаться часто, и для сокращения записи мы условимся в этих случаях опускать знак $\sum$. Так, (24.3) мы будем записывать просто:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \tag{24.4}$$

подразумевается суммирование по i от 1 до n. Общее правило: *пусть дано выражение, записанное в виде буквы, снабженной индексами; пусть при этом какой-либо буквенный индекс встречается дважды, один раз вверху и один раз внизу; тогда мы будем считать, что написанное обозначает сумму этого рода выражений для значений* 1, 2, ..., n, *пробегаемых данным индексом. Если таких (встречающихся один раз вверху и один раз внизу) индексов несколько, то подразумевается суммирование по каждому из них.*

Например, выражение Φ^{ik}_{ikl} мы будем понимать так:

$$\Phi^{ik}_{ikl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^{ik}_{ikl}, \tag{24.5}$$

так что фактически это выражение будет зависеть лишь от одного индекса, именно l, который мы будем называть *свободным* в отличие от индексов *суммирования*.

В связи со сказанным обозначения индексов суммирования не играют, конечно, никакой роли; так, если вместо Φ^{ik}_{ikl} написать, например, Φ^{pq}_{pql}, обозначив индексы суммирования p, q вместо i, k, то по смыслу равенства (24.5) результат нисколько не изменится:

$$\Phi^{ik}_{ikl} = \Phi^{pq}_{pql}.$$

Этим обстоятельством мы часто будем впоследствии пользоваться в процессе выкладок.

Все, что было только что сказано относительно сокращенной записи суммы для выражений, обозначенных просто буквой с индексами, полностью относится и к произведениям такого рода выражений. Пример сокращенной записи в этом случае мы имеем уже в формуле (24.4).

Позже мы узнаем принципиальный смысл суммирования указанного типа и тогда уточним и употребление нашего сокращенного обозначения.

Возвращаемся теперь к вопросу преобразования аффинного репера. Векторы нового репера $\mathbf{e}_{i'}$ могут быть выбраны произвольно с единственным условием линейной независимости. Но линейная независимость векторов $\mathbf{e}_{i'}$ равносильна линейной независимости строк матрицы преобразования (24.1):

$$\begin{Vmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 & \ldots & A_{1'}^n \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 & \ldots & A_{2'}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n'}^1 & A_{n'}^2 & \ldots & A_{n'}^n \end{Vmatrix} \tag{24.6}$$

(ср. с (23.13)). Другими словами, соответствующий определитель должен быть отличным от нуля:

$$\mathrm{Det}\,|A_{i'}^i| \neq 0. \tag{24.7}$$

Это и есть единственное условие, наложенное на преобразование векторов репера (24.1). В остальном коэффициенты $A_{i'}^i$ произвольны. Тем самым матрица (24.6) допускает обратную матрицу, элементы которой мы будем обозначать $A_i^{i'}$ (штрихованный индекс наверху!):

$$\begin{Vmatrix} A_1^{1'} & A_1^{2'} & \ldots & A_1^{n'} \\ A_2^{1'} & A_2^{2'} & \ldots & A_2^{n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^{1'} & A_n^{2'} & \ldots & A_n^{n'} \end{Vmatrix}. \tag{24.8}$$

Если, обратно, выразить векторы старого репера $\mathbf{e}_i$ через векторы нового репера $\mathbf{e}_{i'}$, то придется применить преобразование, обратное преобразованию (24.1), для чего надо воспользоваться вместо матрицы (24.6) обратной матрицей (24.8). В краткой записи, аналогичной (24.4), мы получим:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}. \tag{24.9}$$

По общему соглашению здесь имеется в виду суммирование по индексу i', так что в подробной записи получаем:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{1'}\mathbf{e}_{1'} + A_i^{2'}\mathbf{e}_{2'} + \ldots + A_i^{n'}\mathbf{e}_{n'}.$$

Здесь i нужно давать поочередно значения $1, 2, \ldots, n$. То, что матрицы (24.6) и (24.8) *взаимно обратные*, означает, что их произведение, в том или другом порядке, дает единичную матрицу. Элементы единичной матрицы мы будем стандартно обозначать

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

так что связь $A_i^{i'}$ и $A_{i'}^i$ можно записать так:

$$A_k^{i'}A_{l'}^k = \delta_{l'}^{i'}, \qquad A_{k'}^i A_l^{k'} = \delta_l^i. \tag{24.10}$$

По k, равно как и по k', предполагается суммирование от 1 до n по общему соглашению.

Эти формулы можно также получить, подставляя в (24.9) выражение $\mathbf{e}_{i'}$ согласно (24.4) (заменив лишь обозначение индекса суммирования i на какое-нибудь другое, например, j), получим:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} A_{i'}^j \mathbf{e}_j.$$

В правой части подразумевается двойное суммирование: по индексам j и i'.

Так как разложение по векторам репера совершается единственным образом, то коэффициенты при $\mathbf{e}_j$ в правой части должны равняться соответствующим коэффициентам в левой части, т. е. нулю, если $j \neq i$, и единице, если $j = i$. В результате

$$A_{i'}^j A_i^{i'} = \delta_i^j,$$

что дает вторую из формул (24.10). Аналогично получается и первая из формул (24.10) — подстановкой (24.9) в (24.4).

При переходе к новому реперу каждый вектор $\mathbf{x}$ получает новые координаты, которые мы будем обозначать $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$ в отличие от старых $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Разумеется, что при этом сам вектор $\mathbf{x}$ остается прежним, и изменение координат идет лишь за счет изменения репера.

Спрашивается, как будут выражаться новые координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ через старые, и обратно.

По определению координат вектора мы имеем в старом репере

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n = x^i\mathbf{e}_i \tag{24.11}$$

и аналогично в новом репере

$$\mathbf{x} = x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \ldots + x^{n'}\mathbf{e}_{n'} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}. \tag{24.12}$$

В правых частях мы прибегли к сокращенной записи с опусканием знака суммы.

Теперь, чтобы решить нашу задачу, мы должны сравнить оба разложения, а для этого вставим в (24.11) выражение $\mathbf{e}_i$ согласно (24.9). Тогда (24.11) принимает вид

$$\mathbf{x} = x^i A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'} . \tag{24.13}$$

Здесь происходит двойное суммирование: по i и по i'.

Сравнивая разложения (24.12) и (24.13), мы должны приравнять коэффициенты при $\mathbf{e}_{i'}$ ввиду единственности разложения вектора $\mathbf{x}$ по векторам репера. Получим:

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i, \tag{24.14}$$

где по i происходит суммирование, так что в подробной записи

$$x^{i'} = A_1^{i'} x^1 + A_2^{i'} x^2 + \ldots + A_n^{i'} x^n. \tag{24.15}$$

Совершенно аналогично при помощи обратного преобразования выразятся старые координаты через новые:

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'}. \tag{24.16}$$

Весьма важно для дальнейшего сравнить формулы преобразования *векторов репера* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *и координат инвариантного вектора* $x^1, \ldots, x^n$. Для определенности рассматриваем в обоих случаях переход именно от старого репера к новому и сравниваем формулы (24.4) и (24.14). Мы видим, что матрицы этих преобразований различны, а именно матрица преобразования (24.14) есть *транспонированная обратная матрица* преобразования (24.4) (такие преобразования называются *контрагредиентными*).

Действительно, матрица преобразования (24.14) (как особенно ясно видно из записи (24.15)) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} A^{1'}_1 & A^{1'}_2 & \ldots & A^{1'}_n \\ A^{2'}_1 & A^{2'}_2 & \ldots & A^{2'}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A^{n'}_1 & A^{n'}_2 & \ldots & A^{n'}_n \end{Vmatrix}, \tag{24.17}$$

т. е. получается транспонированием (поворотом на 180° вокруг главной диагонали) матрицы (24.8), а эта последняя матрица — взаимно обратная с матрицей (24.6) преобразования (24.4).

Формулы преобразования *векторов репера и координат инвариантного вектора* при переходе от старого репера к новому

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \tag{24.18}$$

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i \tag{24.19}$$

являются фундаментальными для тензорного исчисления. Они лежат в основе всех остальных тензорных законов преобразования.

Таким образом, преобразование *векторов репера* совершается при помощи произвольной неособенной матрицы ($\mathrm{Det}|A^i_{i'}| \neq 0$), а преобразование *координат вектора* — при помощи транспонированной обратной матрицы.

Мы занимались до сих пор преобразованиями координат вектора, а не точки. Если меняются лишь векторы репера, а начало O остается неподвижным, то координаты каждой *точки* M меняются так же, как и координаты ее (неизменного в этом случае) радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, т. е. по закону (24.19). Если же, кроме того, и начало O испытывает сдвиг на вектор $\mathbf{a}$, то радиусы-векторы всех точек M изменяются вследствие этого на вектор $-\mathbf{a}$ и тем самым координаты x^i всех точек M увеличиваются на $A^{i'}$, где $A^{i'}$ — координаты вектора $-\mathbf{a}$. В результате окончательная формула для преобразования координат x^i неподвижной точки M имеет вид

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}. \tag{24.20}$$

§ 25. Задача тензорного исчисления

Прежде чем приступить к построению тензорного аппарата,— а к этому мы уже вплотную подошли,— постараемся уяснить себе в общих чертах его цели.

Исходным пунктом нашего построения n-мерного аффинного пространства послужила аксиоматика векторного исчисления (в его аффинной части). Векторное исчисление представляет собой важнейший пример прямого геометрического исчисления: и объекты его и операции носят непосредственно геометрический характер. Всякое вычисление, проводимое в векторах, может быть истолковано как геометрическое построение.

Вместе с тем большую и часто ведущую роль в геометрии играет координатный метод. Здесь геометрические образы изучаются не непосредственно геометрически, а методами алгебры (аналитическая геометрия), а затем и анализа (дифференциальная геометрия). Огромная сила этого метода основана на том, что он применяет к геометрии сильный, хорошо развитый вычислительный аппарат алгебры и анализа. В результате удается ставить и решать вопросы, лишь малая часть которых укладывается в сравнительно узкие рамки прямых геометрических методов.

Однако эти успехи достаются недаром. В основе координатного метода всегда лежит условность, заключающаяся в приписывании каждой точке (или вектору и т. п.) координат, например, аффинных координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, как сделали мы в этой главе для точек и векторов n-мерного аффинного пространства. Но сама точка (или вектор) никоим образом не порождает эти n чисел; чтобы получить такой результат, нужно, как мы видели, задаться некоторым репером, т. е. некоторой аффинной координатной системой, а аффинный репер можно выбирать с большим произволом, вне связи с изучаемыми геометрическими образами.

Аналогичным образом дело обстоит и во всех случаях применения координатного метода: *на изучаемую геометрическую картину накладывается случайный выбор координатной системы, и те аналитические данные, которые мы получаем, отражают не только то, что нас интересует (геометрическую картину), но и то, что нас вовсе не интересует (произвольный выбор координатной системы) и что без надобности усложняет результаты* *).

Приведем элементарный пример: в обычном пространстве в прямоугольных декартовых координатах вектор, соединяющий точки $M_1(1, -2, 3)$ и $M_2(2, -2, 5)$, имеет координаты $(1, 0, 2)$. В этом результате то обстоятельство, что вторая координата вектора равна

---

*) Конечно, иногда возможно вполне естественным образом приспособить выбор координатной системы к самой геометрической задаче; но, как правило, это не имеет места.

нулю, является случайным, зависящим от выбора координатной системы. Напротив, выражение $1^2+0^2+2^2$ не случайно дает 5. И в любой другой прямоугольной системе координат мы получим тот же результат, хотя координаты вектора будут уже другие. Первое обстоятельство не имеет геометрического смысла для вектора самого по себе, второе — имеет (получается квадрат длины).

Возникает потребность и в сложных построениях *научиться отделять геометрически существенно важное от случайно привнесенного выбором координатной системы.*

Решением этой задачи и занимается тензорное исчисление. Общая схема его построения такова.

Строятся прежде всего тензоры, т. е. системы величин, отражающие определенные геометрические (или физические) конструкции и преобразующиеся по некоторому простому закону при переходе от одной координатной системы к другой. Далее, между тензорами вводятся операции и соотношения инвариантного характера, т. е. сохраняющие свой вид при переходе в любую другую координатную систему. Таким образом, все соотношения пишутся в форме, годной не только в избранной, но и в любой координатной системе, а значит, эти соотношения отражают геометрические (или физические) факты, независимые от выбора определенной координатной системы; искажающее влияние случайного выбора этой системы устраняется.

Из дальнейшего будет видно, каким образом целый ряд геометрических и физических вопросов поддается именно этой трактовке.

§ 26. Понятие о ковариантном тензоре

Мы рассмотрим сначала *одновалентный ковариантный тензор.* Он появляется наиболее естественным образом в связи с линейной скалярной функцией вектора.

Пусть каждому вектору $\mathbf{x}$ *поставлено в соответствие число* φ

$$\varphi=\varphi(\mathbf{x}) \tag{26.1}$$

таким образом, что для любых двух векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$

$$\varphi(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\varphi(\mathbf{x}_1)+\varphi(\mathbf{x}_2) \tag{26.2}$$

и для любого числа α

$$\varphi(\alpha\mathbf{x})=\alpha\varphi(\mathbf{x}). \tag{26.3}$$

Тогда $\varphi(\mathbf{x})$ *называется линейной функцией вектора* $\mathbf{x}$.

Будем рассматривать $\varphi(\mathbf{x})$ в какой-нибудь координатной системе, т. е. будем задавать аргумент $\mathbf{x}$ его координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и выражать $\varphi(\mathbf{x})$ как функцию этих координат. Так как

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n,$$

то, пользуясь свойствами (26.2), (26.3), легко получаем:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n) = x^1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x^n\varphi(\mathbf{e}_n).$$

Обозначим для краткости

$$\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i). \tag{26.4}$$

Тогда окончательно

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_i x^i, \tag{26.5}$$

где подразумевается суммирование по индексу i. Итак, линейная функция вектора $\varphi(\mathbf{x})$ выражается через его координаты линейной формой. Запишем зависимость (26.5) в какой-нибудь другой координатной системе:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_{i'} x^{i'}. \tag{26.6}$$

Функция $\varphi(\mathbf{x})$ остается прежней, но так как x^i — координаты вектора-аргумента — примут преобразованные значения $x^{i'}$, то должны преобразоваться и коэффициенты φ_i линейной формы (26.5). Спрашивается, по какому закону происходит это преобразование.

Применим формулу (26.4) в новой координатной системе:

$$\varphi_{i'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'}). \tag{26.7}$$

Согласно (24.4)

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^1\mathbf{e}_1 + \ldots + A_{i'}^n\mathbf{e}_n = A_{i'}^i\mathbf{e}_i. \tag{26.8}$$

Пользуясь свойствами (26.2), (26.3), можно переписать (26.7) в виде

$$\varphi_{i'} = \varphi(A_{i'}^1\mathbf{e}_1 + \ldots + A_{i'}^n\mathbf{e}_n) = A_{i'}^1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + A_{i'}^n\varphi(\mathbf{e}_n).$$

Вспоминая (26.4), получаем окончательно

$$\varphi_{i'} = A_{i'}^i\varphi_i. \tag{26.9}$$

Сравнивая (26.9) с (26.8), мы замечаем, что закон преобразования коэффициентов φ_i в точности совпадает с законом преобразования векторов репера $\mathbf{e}_i$.

Итак, когда нам задана линейная функция вектора $\varphi(\mathbf{x})$, то в каждой координатной системе у нас возникает n чисел φ_1, φ_2, ..., φ_n, преобразующихся по тому же закону, что и векторы соответствующего репера. Мы пришли к понятию одновалентного ковариантного тензора.

Мы говорим, что нам дан одновалентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам задано n чисел a_i, занумерованных при помощи одного индекса (пробегающего значения 1, 2, ..., n) и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$a_{i'} = A_{i'}^i a_i. \tag{26.10}$$

Эти числа a_i мы будем называть *координатами тензора* в соответствующей координатной системе.

Термин «ковариантный», т. е. сопреобразующийся, выражает то обстоятельство, что закон преобразования a_i такой же, как и для векторов репера $\mathbf{e}_i$.

Коэффициенты φ_i линейной функции вектора доставляют нам важный пример одновалентного ковариантного тензора a_i, как показывает закон преобразования (26.9). Обратно, легко убедиться, что любой одновалентный ковариантный тензор a_i при желании всегда можно истолковать именно таким образом. В самом деле, *определим* $\varphi(\mathbf{x})$ по формуле $\varphi(\mathbf{x}) = a_i x^i$ в некоторой исходной координатной системе. Очевидно, $\varphi(\mathbf{x})$ будет линейно зависеть от $\mathbf{x}$ и, самое главное, ее коэффициенты φ_i будут совпадать с a_i не только в исходной координатной системе (что имеет место по определению), но и в любой другой тоже, так как φ_i и a_i подчиняются одному и тому же закону преобразования (ср. (26.9), (26.10)).

Пример. *Гиперплоскостью* мы будем называть множество всех точек, координаты которых в какой-нибудь координатной системе удовлетворяют линейному уравнению

$$a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n + a = 0. \tag{26.11}$$

Определение это имеет инвариантный смысл: вследствие линейности закона преобразования для координат x^i уравнение (26.11) остается линейным — конечно, с другими коэффициентами — и в любой другой координатной системе.

Коэффициенты уравнения (26.11) заданы с точностью до умножения на отличное от нуля число. Чтобы уничтожить эту неопределенность, приведем свободный член к -1 (предполагая, что гиперплоскость не проходит через начало O) и запишем уравнение гиперплоскости в виде

$$a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n - 1 = 0,$$

т. е.

$$a_i x^i = 1. \tag{26.12}$$

Будем рассматривать всевозможные координатные системы с фиксированным началом O.

При переходе от одной из них к другой радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ любой точки M не меняется, а следовательно, координаты точки $M(x^1, \ldots, x^n)$ преобразуются как координаты инвариантного вектора по закону (24.16):

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'}.$$

Подставляя это x^i в уравнение (26.12), получим:

$$a_i A^i_{i'} x^{i'} = 1.$$

Мы пришли к уравнению прежней гиперплоскости, но в новых координатах $x^{i'}$. Если записать это уравнение аналогично уравнению (26.12):

$$a_{i'}x^{i'} = 1, \qquad (26.13)$$

то коэффициенты $a_{i'}$, очевидно, будут иметь вид

$$a_{i'} = A^i_{i'}a_i. \qquad (26.14)$$

Закон преобразования совпадает с (26.10), и следовательно, *коэффициенты уравнения гиперплоскости*

$$a_i x^i = 1$$

ведут себя как одновалентный ковариантный тензор при всех преобразованиях координатных систем с фиксированным началом O.

Рассмотрим теперь двухвалентный ковариантный тензор. К нему лучше всего подойти, рассматривая скалярную билинейную функцию двух векторов. А именно, пусть каждой паре векторов **x**, **y**, заданных в определенном порядке, поставлено в соответствие число

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (26.15)$$

причем функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является линейной по каждому из двух аргументов. Таким образом, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по самому определению не зависит от выбора координатной системы. Выразим теперь φ через координаты векторов **x**, **y** в какой-нибудь координатной системе. Так как

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j,$$

то, пользуясь билинейным характером функции φ, получаем:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(x^i\mathbf{e}_i, y^j\mathbf{e}_j) = x^iy^j\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \qquad (26.16)$$

В этой записи, конечно, подразумевается двойное суммирование по i и j. Обозначая для краткости

$$\varphi_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \qquad (26.17)$$

получаем окончательно

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{ij}x^iy^j. \qquad (26.18)$$

Таким образом, билинейная функция двух векторов выражается билинейной формой их координат. Коэффициенты φ_{ij} этой билинейной формы зависят от выбора координатной системы и преобразуются по закону, который нетрудно установить. А именно, в новой координатной системе аналогично (26.17)

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}),$$

а так как

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{j'} = A^j_{j'}\mathbf{e}_j,$$

то

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(A^i_{i'}\mathbf{e}_i, A^j_{j'}\mathbf{e}_j) = A^i_{i'}A^j_{j'}\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = A^i_{i'}A^j_{j'}\varphi_{ij}. \qquad (26.19)$$

Закон преобразования коэффициентов φ_{ij}, который мы таким образом установили, как бы повторяет формулу (26.9) для каждого из двух индексов.

Формулируем теперь общее определение двухвалентного ковариантного тензора, пример которого мы только что получили, в виде совокупности коэффициентов φ_{ij}.

Мы говорим, что нам дан двухвалентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам заданы n^2 чисел a_{ij}, которые занумерованы при помощи двух индексов (пробегающих один независимо от другого значения 1, 2, ..., n) *и преобразуются при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}a_{ij}. \qquad (26.20)$$

Числа a_{ij} мы будем называть *координатами* нашего тензора в соответствующей координатной системе. Двухвалентный ковариантный тензор мы будем называть более коротко *дважды ковариантным тензором.*

Дословным повторением предыдущего рассуждения для одновалентного случая мы покажем и здесь, что не только коэффициенты φ_{ij} билинейной функции двух векторов образуют всегда дважды ковариантный тензор, но и обратно, координаты a_{ij} любого такого тензора всегда можно истолковать как коэффициенты φ_{ij} некоторой билинейной функции. Для этого достаточно построить $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *в какой-либо исходной координатной системе* по формуле

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{ij}x^i y^j, \qquad (26.21)$$

и тогда, поскольку, таким образом, $\varphi_{ij} = a_{ij}$ в одной координатной системе, это равенство будет соблюдаться и в любой другой (в силу одинакового характера законов преобразования (26.19) и (26.20)).

Отметим важный частный случай, когда билинейная функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будет симметрической:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \qquad (26.22)$$

В координатной записи это означает:

$$\varphi_{ij}x^i y^j = \varphi_{ij}y^i x^j.$$

Меняя обозначения индексов суммирования в правой части, получим:

$$\varphi_{ij}x^i y^j = \varphi_{ji}y^j x^i.$$

Так как это равенство должно соблюдаться тождественно относительно x^i, y^j, то из него следует:

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji}, \tag{26.23}$$

т. е. матрица коэффициентов φ_{ij} является симметрической. Тензор φ_{ij} и вообще тензор a_{ij}, удовлетворяющий условию

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{26.24}$$

называется *симметрическим*. При этом, если это условие удовлетворяется в какой-либо исходной координатной системе, то удовлетворяется и в любой другой, как без труда вытекает из закона преобразования (26.20).

Впрочем это вытекает также и из того, что функция $\varphi(x, y)$, построенная в исходной координатной системе согласно (26.21), будет в нашем случае симметрической, а это ее свойство, как мы видели, влечет за собой в любой координатной системе соотношение $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Пример. Гиперповерхность 2-го порядка, не проходящая через начало O, может быть задана уравнением вида

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_k x^k + 1 = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{26.25}$$

При всевозможных преобразованиях координатных систем с закрепленным началом O коэффициенты уравнения a_{ij} ведут себя как симметрический дважды ковариантный тензор, а a_k — как одноковариантный тензор. Это легко показать тем же путем, как и в случае гиперплоскости.

Теперь ясно, как формулировать определение ковариантного тензора в общем случае.

Мы говорим, что нам дан k-валентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам заданы n^k чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, занумерованных при помощи k индексов и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ \ldots \ A^{i_k}_{i'_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}. \tag{26.26}$$

Индексы при $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ различаются друг от друга 1-м, 2-м, ..., k-м местом записи и пробегают независимо друг от друга значения 1, 2, ..., n.

Числа $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ мы будем называть *координатами* нашего тензора в соответствующей координатной системе. Мы будем называть k-валентный ковариантный тензор также *k раз ковариантным тензором.*

Совершенно так же, как в случае билинейной скалярной функции, можно показать, что всякая полилинейная (линейная относительно всех своих аргументов) скалярная функция $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ с векторами-аргументами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ допускает координатную запись

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k) = \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k}. \tag{26.27}$$

Здесь $x_1^{i_1}$ — координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}_1$ и т. д. Аналогично предыдущему коэффициенты $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ определяются формулами

$$\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k) \tag{26.28}$$

и преобразуются по закону (26.26), т. е. образуют k раз ковариантный тензор.

Обратно, координаты всякого k раз ковариантного тензора $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ могут быть при желании истолкованы как коэффициенты $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ некоторой полилинейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ от k векторных аргументов. Все это проверяется совершенно аналогично двухвалентному случаю.

Подчеркнем, что, говоря о функции $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$, мы, как и в предыдущих случаях, имеем в виду функцию инвариантную, т. е. определенную независимо от выбора координатной системы.

§ 27. Общее понятие о тензоре

Прежде чем формулировать общее понятие о тензоре, мы займемся так называемыми контравариантными тензорами.

Важнейший пример одновалентного контравариантного тензора доставляют нам координаты x^i фиксированного вектора $\mathbf{x}$. Поскольку вектор $\mathbf{x}$ фиксирован, координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ имеют определенные численные значения в каждой координатной систете и преобразуются по закону (24.19):

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i. \tag{27.1}$$

В общем случае мы будем говорить, что нам дан одновалентный контравариантный тензор, если в каждой координатной системе нам заданы n чисел $a^1, a^2, \ldots, a^n$, занумерованных при помощи одного индекса и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$a^{i'} = A_i^{i'} a^i. \tag{27.2}$$

Числа a^i мы будем называть *координатами* нашего тензора.

В обозначении контравариантные тензоры отличаются от ковариантных записью индексов наверху. Этим соглашением мы фактически пользовались и ранее (хотя смысл его раскрывается лишь теперь) и систематически будем пользоваться в дальнейшем. Термин «контравариантный», т. е. «противопреобразующийся», напоминает о том, что координаты контравариантного тензора $a^1, a^2, \ldots, a^n$ преобразуются не так, как векторы репера $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, а при помощи (транспонированной) обратной матрицы (о чем подробно говорилось в § 24 в применении к координатам вектора $x^1, x^2, \ldots, x^n$).

Как уже отмечалось, координаты x^i любого фиксированного вектора $\mathbf{x}$ образуют одновалентный контравариантный тензор. Но верно и обратное: координаты любого одновалентного контравариантного тензора a^i можно истолковать как координаты x^i некоторого фиксированного вектора $\mathbf{x}$.

В самом деле, построим в какой-нибудь исходной координатной системе вектор $\mathbf{x}$ с координатами $x^i = a^i$. Тогда это равенство продолжает соблюдаться и в любой координатной системе ввиду одинакового характера законов преобразования (27.1) и (27.2).

Ясно, что определение k раз контравариантного тензора $a^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ может быть теперь без труда формулировано аналогично определению k раз ковариантного тензора $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ единственно с той разницей, что закон преобразования вместо (26.26) будет иметь вид

$$a^{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{i'_1}_{i_1} A^{i'_2}_{i_2} \ldots A^{i'_k}_{i_k} a^{i_1 i_2 \ldots i_k}, \tag{27.3}$$

повторяя, таким образом, для каждого из индексов закон (27.1).

Мы, однако, не будем останавливаться на этом более подробно, так как общее определение тензора, обладающего и ковариантными и контравариантными индексами в любом числе, покрывает все до сих пор перечисленные частные случаи.

Начнем с примера, в дальнейшем весьма важного.

Мы будем называть аффинором $\mathfrak{A}$ *закон, ставящий в соответствие каждому вектору* $\mathbf{x}$ *нашего пространства определенный вектор* $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \tag{27.4}$$

причем зависимость $\mathbf{y}$ *от* $\mathbf{x}$ *носит линейный характер, т. е. соблюдаются условия:*

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathfrak{A}\mathbf{x}_1 + \mathfrak{A}\mathbf{x}_2, \tag{27.5}$$

$$\mathfrak{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathfrak{A}\mathbf{x} \tag{27.6}$$

для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}, \alpha$ *(*α*—число).*

Рассмотрим аффинор $\mathfrak{A}$ в координатной записи, т. е. выразим координаты y^j вектора $\mathbf{y}$ как функции координат x^i вектора $\mathbf{x}$ в какой-нибудь координатной системе. Для этой цели разложим предварительно векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_i$ (т. е. результат действия нашего аффинора на векторы репера) по векторам репера. Коэффициенты разложения обозначим a_i^j:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = a_i^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_i^n\mathbf{e}_n = a_i^j\mathbf{e}_j. \tag{27.7}$$

Тогда, учитывая, что, как обычно,

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i,$$

и пользуясь свойством линейности аффинора $\mathfrak{A}$, мы можем написать:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A}(x^i\mathbf{e}_i) = x^i\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = x^i a_i^j\mathbf{e}_j.$$

Так как, с другой стороны,

$$\mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j,$$

то, сравнивая оба разложения, получим:

$$y^j = a_i^j x^i. \tag{27.8}$$

Таким образом, координаты вектора-функции $\mathbf{y}$ выражаются линейно через координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}$ с коэффициентами a_i^j.

Эти коэффициенты a_i^j мы будем называть *координатами аффинора* $\mathfrak{A}$. Выясним теперь закон их преобразования.

Запишем (27.7) в новой системе координат:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_{i'} = a_{i'}^{j'}\mathbf{e}_{j'}. \tag{27.9}$$

Пользуясь формулами

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_j = A_j^{j'}\mathbf{e}_{j'},$$

а также формулами (27.7), мы можем, с другой стороны, написать:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_{i'} = \mathfrak{A}\left(A_{i'}^i\mathbf{e}_i\right) = A_{i'}^i\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = A_{i'}^i a_i^j\mathbf{e}_j = A_{i'}^i a_i^j A_j^{j'}\mathbf{e}_{j'}.$$

Сравнивая это разложение с разложением (27.9), мы можем приравнять коэффициенты при одинаковых векторах нового репера. Получаем:

$$a_{i'}^{j'} = A_{i'}^i A_j^{j'} a_i^j. \tag{27.10}$$

Это и есть искомый закон преобразования координат аффинора.

Мы видим, что нижний индекс участвует в преобразовании по схеме (26.10), т. е. как ковариантный, а верхний индекс — по схеме

(27.1), т. е. как контравариантный. В связи с этим совокупность координат аффинора a_i^j, заданную в каждой координатной системе, мы будем называть *тензором один раз ковариантным и один раз контравариантным*. Как мы видим, закон преобразования для координат аффинора a_i^j существенно отличается от закона преобразования коэффициентов билинейной функции a_{ij}, хотя в обоих случаях мы имеем двухвалентный (т. е. с двумя индексами) тензор.

Заметим, что мало того, что координаты аффинора подчинены закону преобразования (27.10), но и, обратно, величины a_i^j, подчиненные этому закону, всегда представляют собой координаты некоторого аффинора $\mathfrak{A}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно определить $\mathfrak{A}$ формулами (27.8) в какой-нибудь одной исходной координатной системе. Тогда величины a_i^j продолжают служить координатами аффинора и в любой другой координатной системе, так как преобразуются по тому же закону (27.10), как и координаты аффинора.

Отметим еще важный частный случай, когда аффинор означает тождественное преобразование, т. е. когда

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} \equiv \mathbf{x},$$

а следовательно, $y^j = x^j$.

Сравнивая эти формулы с (27.8), мы замечаем, что в нашем случае в *любой координатной системе*

$$a_i^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}. \tag{27.11}$$

Таким образом, мы получаем пример тензора один раз ковариантного и один раз контравариантного, имеющего в *любой координатной системе одни и те же координаты* δ_i^j. Этот тензор мы будем называть *единичным*. То, что числа δ_i^j действительно подчиняются закону преобразования (27.10), оставаясь в то же время неизменными, легко проверить и непосредственно. В самом деле, вычисляя правую часть (27.10), получим:

$$A_{i'}^i A_j^{j'} \delta_i^j = A_{i'}^k A_k^{j'} = \delta_{i'}^{j'}.$$

Мы сначала применили соотношение (27.11) и сохранили в сумме лишь члены, где $i = j$ (обозначив их общее значение через k), а затем использовали (24.10).

Дадим, наконец, общее определение тензора.

Мы говорим, что нам дан $k+l$-валентный тензор, k раз ковариантный и l раз контравариантный, если в каждой координатной *системе нам заданы* n^{k+l} чисел $a^{j_1j_2\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}$, *занумерованных* k *индексами внизу и* l *индексами наверху и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a^{j'_1 j'_2 \ldots j'_l}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{j'_1}_{j_1} A^{j'_2}_{j_2} \ldots A^{j'_l}_{j_l} A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ldots A^{i_k}_{i'_k} a^{j_1j_2\ldots j_l}_{i_1i_2\ldots i_k}. \quad (27.12)$$

Индексы внизу отличаются друг от друга 1-м, 2-м, ..., k-м местом написания; аналогично отличаются друг от друга и верхние индексы. Все индексы пробегают значения 1, 2, ..., n независимо друг от друга. Числа $a^{j_1\ldots j_l}_{i_1\ldots i_k}$ мы будем называть *координатами тензора* в соответствующей координатной системе.

Смысл закона преобразования (27.12) состоит, очевидно, в том, что каждый нижний индекс участвует в преобразовании один раз по схеме ковариантного тензора

$$a_{i'} = A^i_{i'} a_i,$$

а каждый верхний — один раз по схеме контравариантного тензора

$$a^{j'} = A^{j'}_j a^j.$$

Общее число индексов $k+l$ будем называть *валентностью* тензора.

Числу нижних индексов k и числу верхних индексов l можно придавать любые значения 0, 1, 2, ..., одному независимо от другого. Если $k=l=0$, то, как мы будем считать, тензор имеет лишь одну координату a, совсем лишенную индексов, и сводится к *инварианту*, т. е. координата a имеет одно и то же численное значение в любой координатной системе. Кстати, в случае $k=l=0$ имеем $n^{k+l}=1$. Особое внимание следует обратить на то обстоятельство, что в правой части (27.12) происходит суммирование по всем $k+l$ нештрихованным индексам, и, таким образом, *каждая* координата тензора в новой координатной системе зависит от *всех* его координат в старой системе. Это означает, что в конечном счете тензор не сводится просто к совокупности отдельных чисел — его координат, — а представляет собой единое целое.

Последнее связано с тем, что каждый тензор, как мы видели на примерах, отражает какой-либо цельный геометрический или физический объект и «распадается» на свои координаты лишь условно, т. е. по отношению к той или иной координатной системе.

§ 28. Сложение тензоров

В ближайших параграфах мы займемся тензорной алгеброй, т. е. рассмотрим основные инвариантные операции, позволяющие по тензорам составлять новые тензоры. Этих операций четыре: сложение, умножение, свертывание тензоров и подстановка индексов у тензора.

Инвариантность тензорных операций нужно понимать в том смысле, что, примененные к данным тензорам, они дают в результате вполне определенный тензор, *не зависящий от того, в какой координатной системе происходит выкладка.* Тем самым тензорные операции отражают по существу те операции над геометрическими и физическими объектами (заданными посредством тензоров), которые имеют геометрический или физический смысл и совершаются независимо от выбора координатной системы.

В этом параграфе мы рассмотрим сложение тензоров. Пусть нам даны два тензора *одинакового строения, т. е. с одинаковым числом верхних индексов и с одинаковым числом нижних индексов*. Пусть, для примера, эти тензоры будут трижды ковариантными и дважды контравариантными:

$$a^{ij}_{pqr}, \qquad b^{ij}_{pqr}.$$

В каждой координатной системе каждую координату первого тензора сложим с соответствующей (т. е. занумерованной теми же индексами на тех же местах) координатой второго тензора, и результат примем за координату нового тензора

$$c^{ij}_{pqr} = a^{ij}_{pqr} + b^{ij}_{pqr}. \tag{28.1}$$

Координату нового тензора нумеруем, конечно, теми же индексами на тех же местах.

Однако нужно еще проверить, что c^{ij}_{pqr} действительно представляют собой координаты одного и того же тензора, независимо от того, в какой координатной системе мы их вычислили. Другими словами, нужно убедиться, что c^{ij}_{pqr} подчиняются тензорному закону преобразования:

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'} c^{ij}_{pqr}. \tag{28.2}$$

Здесь

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = a^{i'j'}_{p'q'r'} + b^{i'j'}_{p'q'r'}, \tag{28.3}$$

т. е. $c^{i'j'}_{p'q'r'}$ вычисляются в новой (как и вообще в любой) координатной системе по схеме (28.1).

Но равенство (28.2) легко вытекает из справедливости тензорного закона преобразования для a^{ij}_{pqr}, b^{ij}_{pqr}:

$$a^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'} a^{ij}_{pqr}, \tag{28.4}$$

$$b^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'} b^{ij}_{pqr}. \tag{28.5}$$

Действительно, складывая эти равенства почленно, вынося общие множители в правой части за скобки и принимая во внимание (28.1) и (28.3), мы сейчас же получаем равенство (28.2).

Очевидно, в нашем рассуждении ничего по существу не изменится, если мы будем складывать *любые* тензоры, но обязательно *одинакового строения*. В результате получается вполне определенный тензор *того же строения*. Ясно также, что если вместо двух тензоров складывать несколько тензоров одинакового строения, то все сказанное остается справедливым.

Поясним еще инвариантный характер операции сложения на примере. Допустим, что складываются два одновалентных контравариантных тензора x^i, y^i, в результате чего получается тензор того же строения z^i:

$$z^i = x^i + y^i. \tag{28.6}$$

Инвариантный характер операции сложения означает, что z^i дают нам координаты вполне определенного тензора, независимо от того, в какой координатной системе они вычислены.

Истолкуем теперь x^i, y^i как координаты фиксированных векторов, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, что, как мы знаем, всегда возможно. Поскольку z^i — координаты вполне определенного тензора, то и их можно истолковать как координаты некоторого фиксированного вектора $\mathbf{z}$. Тогда равенство (28.6) выражает геометрический факт, независимый от выбора координатной системы, именно, что вектор $\mathbf{z}$ есть сумма векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Аналогичным образом и в более сложных случаях инвариантность тензорных операций означает по существу рассмотрение геометрических и физических фактов вне зависимости от случайностей выбора координатной системы.

§ 29. Умножение тензоров

В отличие от сложения перемножать можно любые тензоры (не требуя, чтобы они были одинакового строения), но при этом обязательно указывать порядок множителей, так как результат будет зависеть не только от самих множителей, но и от их порядка.

Рассмотрим для примера перемножение тензоров a^i_{pq}, b^j_r, заданных в порядке их записи.

В каждой координатной системе каждую координату первого тензора множим на каждую координату второго тензора и полученные произведения $a^i_{pq}b^j_r$ принимаем за координаты нового тензора c^{ij}_{pqr}, причем нумеруем эти координаты так: внизу выписываем сначала нижние индексы первого множителя, а затем нижние индексы второго множителя, сохраняя в обоих случаях их прежний порядок, и аналогично поступаем с верхними индексами.

Полученный тензор c^{ij}_{pqr} мы будем называть *произведением* тензоров a^i_{pq}, b^j_r.

Если бы множителей было несколько, то мы совершенно таким же образом перенесли бы поочередно индексы 1-го, 2-го, ... и т. д. множителей на координату произведения.

Однако мы должны еще, конечно, доказать, что определенные в каждой координатной системе числа

$$c^{ij}_{pqr} = a^i_{pq} b^j_r \tag{29.1}$$

действительно являются координатами тензора. С этой целью выпишем закон преобразования для координат множителей:

$$a^{i'}_{p'q'} = A^{i'}_i A^p_{p'} A^q_{q'} a^i_{pq},$$
$$b^{j'}_{r'} = A^{j'}_j A^r_{r'} b^j_r.$$

Перемножая эти равенства почленно и принимая во внимание, что в новой (как и во всякой) координатной системе имеет место равенство (29.1), так что

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = a^{i'}_{p'q'} b^{j'}_{r'},$$

получим окончательно

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_i A^{j'}_j A^p_{p'} A^q_{q'} A^r_{r'} c^{ij}_{pqr}. \tag{29.2}$$

Этот результат показывает нам, что в какой бы координатной системе мы ни вычисляли величины c^{ij}_{pqr} согласно (29.1), они являются всегда координатами *одного и того же тензора*. Таким образом, операция умножения тензоров действительно определяет некоторый новый тензор.

Очевидно, все сказанное дословно повторяется и при перемножении любых тензоров в любом числе.

Заметим, что если мы станем перемножать те же тензоры в другом порядке, то получим другой результат. А именно, хотя координаты произведения будут, конечно, те же, но они будут иначе занумерованы индексами. Так, при изменении порядка множителей в нашем примере получаем:

$$\tilde{c}^{ij}_{pqr} = b^i_p a^j_{qr}. \tag{29.3}$$

Сравнивая это выражение с (29.1), убеждаемся, что *соответствующие* (т. е. занумерованные одинаковыми индексами на одинаковых местах) координаты тензоров c^{ij}_{pqr} и $\tilde{c}^{ij}_{pqr}$ не совпадают, хотя *совокупность* координат у этих тензоров одна и та же. Так как в понятие тензора входит и способ нумерации его координат при помощи индексов, то мы должны признать полученные тензоры различными. Более подробно см. об этом в § 31.

Отметим простой частный случай, когда из двух перемножаемых тензоров один — нулевой валентности, т. е. попросту инвариант a.

Тогда дело сводится к умножению всех координат другого множителя, например b_p^{ij}, на этот инвариант, в результате чего получается тензор того же строения:

$$c_p^{ij} = ab_p^{ij}.$$

Между прочим, в связи с этим мы не рассматриваем особо операцию вычитания тензоров (одного строения), поскольку ее всегда можно представить как сложение уменьшаемого с вычитаемым, умноженным на —1.

Пример. Перемножением одновалентных тензоров b^i и c_j получается двухвалентный тензор

$$a_j^i = b^i c_j. \tag{29.4}$$

Тензор a_j^i, как мы знаем (§ 27), всегда может быть истолкован как некоторый аффинор $\mathfrak{A}$:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \text{ т. е. } y^i = a_j^i x^j.$$

Как отзывается на аффиноре $\mathfrak{A}$ то обстоятельство, что соответствующий тензор a_j^i *мультипликативный* (т. е. получен произведением одновалентных тензоров)?

Пользуясь тем, что $a_j^i = b^i c_j$, перепишем:

$$y^i = b^i c_j x^j.$$

Мы знаем (§ 26), что $c_j x^j$ можно всегда истолковать как некоторую линейную скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x}$, так что

$$y^i = b^i \varphi(\mathbf{x}).$$

А так как b^i всегда можно истолковать как координаты некоторого фиксированного вектора $\mathbf{b}$, то окончательно

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}\varphi(\mathbf{x}).$$

Таким образом, в нашем случае действие аффинора на вектор-аргумент $\mathbf{x}$ дает произведение постоянного вектора $\mathbf{b}$ на линейную скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x})$. Аффинор $\mathfrak{A}$ в этом случае называют иногда *диадой*.

§ 30. Свертывание тензора

Операции сложения и умножения тензоров естественно переносят в тензорную область привычные нам арифметические операции. В противоположность этому операция свертывания носит специфически тензорный характер и не имеет прообраза в более элементарных разделах математики.

Пусть дан тензор произвольный, но имеющий, по крайней мере, один индекс внизу и, по крайней мере, один индекс наверху, например, a_{pq}^{ijk}. Выберем какой-нибудь индекс наверху, например, 2-й, и какой-нибудь индекс внизу, например, 1-й. Отберем те координаты тензора, для которых два выбранных индекса имеют одинаковые значения 1, 2, ..., n, и просуммируем все эти координаты при фиксированных значениях остальных индексов:

$$a_{1q}^{i1k}+a_{2q}^{i2k}+\ldots+a_{nq}^{ink}=a_q^{ik}. \tag{30.1}$$

Мы обозначили сумму a_q^{ik}, так как она зависит лишь от остальных (фиксированных) индексов. Пользуясь краткой записью суммирования, можно (30.1) переписать:

$$a_{xq}^{ixk}=a_q^{ik}. \tag{30.2}$$

Как оказывается, числа a_q^{ik}, определенные согласно (30.2) в каждой координатной системе, являются координатами одного и того же тензора, утерявшего по сравнению с исходным тензором по одному индексу вверху и внизу.

В самом деле, запишем закон преобразования координат исходного тензора:

$$a_{p'q'}^{i'j'k'}=A_i^{i'}A_j^{j'}A_k^{k'}A_{p'}^pA_{q'}^q a_{pq}^{ijk}.$$

Придадим второму индексу наверху (j') и первому внизу (p') одно и то же значение x' и по x' произведем суммирование. Получим:

$$a_{x'q'}^{i'x'k'}=A_i^{i'}A_j^{x'}A_k^{k'}A_{x'}^pA_{q'}^q a_{pq}^{ijk}.$$

В правой части происходит суммирование по шести индексам. Мы выполним сначала суммирование по x'. В силу (24.11)

$$A_j^{x'}A_{x'}^p=\delta_j^p,$$

и мы получаем:

$$a_{x'q'}^{i'x'k'}=A_i^{i'}A_k^{k'}A_{q'}^q\delta_j^p a_{pq}^{ijk}.$$

Так как $\delta_j^p=\begin{cases}0\\1\end{cases}$, то в сумме следует оставить лишь те члены, для которых $p=j$ (общее значение $p=j$ обозначим через x), причем $\delta_x^x=1$ (здесь по x суммирования не предполагается), так что множитель δ_x^x можно не писать. Получим окончательно:

$$a_{x'q'}^{i'x'k'}=A_i^{i'}A_k^{k'}A_{q'}^q a_{xq}^{ixk}. \tag{30.3}$$

Заметим, что во всех случаях, когда в выражение входит множитель δ_j^p, причем по обоим индексам происходит суммирование, этот множитель, как мы видели, следует выкинуть, а в оставшемся выражении индексам p и j придать общее значение (и по нему суммировать). Это правило нам пригодится в дальнейших выкладках.

Пользуясь обозначениями (30.2), мы можем переписать последний результат в виде

$$a_{q'}^{i'k'} = A_i^{i'} A_k^{k'} A_{q'}^{q} a_q^{ik}. \tag{30.4}$$

Эта формула показывает, что величины a_q^{ik} действительно подчиняются тензорному закону преобразования и, следовательно, дают нам вполне определенный тензор.

Мы будем говорить, что тензор a_q^{ik}, *составленный из тензора* a_{pq}^{ijk} *согласно* (30.2), *получен из него свертыванием по индексам* j *и* p, *или, точнее, по индексам второму сверху и первому снизу.*

В то время как сложение дает нам тензор той же валентности, как и слагаемые, умножение дает тензор, вообще говоря, высшей валентности, чем множители, свертывание приводит, наоборот, к снижению валентности на 2 единицы: пропадает один индекс вверху и один индекс внизу. В связи с этим свертывание является важным источником получения инвариантов: повторяя его достаточное число раз, мы можем уничтожить все индексы у тензора, если у того сначала было одинаковое число индексов внизу и вверху. Полученный в итоге тензор нулевой валентности представляет собой, как мы знаем, инвариант.

Например, тензор a_j^i, отвечающий, как всегда можно считать, некоторому аффинору $\mathfrak{A}$, порождает посредством свертывания инвариант

$$a = a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n, \tag{30.5}$$

который называется *следом* аффинора $\mathfrak{A}$.

Особенно часто применяется свертывание к тензорам, полученным перемножением данных тензоров. Например, запись линейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x})$ (§ 26)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_i x^i \tag{30.6}$$

мы можем теперь истолковать как получение инварианта $\varphi(\mathbf{x})$ путем свертывания тензора $\varphi_i x^p$ (представляющего собой произведение тензоров φ_i и x^p).

Совершенно аналогично этому и запись билинейной скалярной функции

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{ij} x^i y^j$$

нужно понимать как результат двукратного свертывания тензора $\varphi_{ij} x^p y^q$ по индексам i, p и j, q.

В подобных случаях мы для краткости будем говорить, что «тензор φ_{ij} свертывается с тензорами x^i, y^j», вместо того, чтобы говорить: «тензор φ_{ij} перемножается с тензорами x^p, y^q и в полученном результате производится свертывание по индексам i, p и j, q».

После введения операции свертывания раскрывается полностью и смысл нашего сокращенного обозначения суммирования по индексу, встречающемуся один раз наверху и один раз внизу. Это обозначение именно потому и имеет право на существование, что оно выражает важную и часто встречающуюся операцию свертывания. И действительно, во всех случаях, когда мы его применяли, оно имело именно этот смысл, хотя операция свертывания и была нам неизвестна. Исключительно этот смысл оно будет иметь и в дальнейшем.

§ 31. Операция подстановки индексов

Пусть нам дан какой-либо тензор, например, a^{ij}_{pqr}. Мы можем составить из него новый тензор того же строения b^{ij}_{pqr}, не меняя его координат самих по себе, а лишь иначе нумеруя их посредством индексов. Условимся каждую координату нумеровать теперь так, чтобы прежний первый индекс снизу стал писаться на втором месте, второй — на третьем, а третий — на первом. Формулой это можно выразить так:

$$b^{ij}_{pqr} = a^{ij}_{qrp}. \tag{31.1}$$

Так как в определение тензора входит и способ нумерации его координат посредством 1-го, 2-го, ... и т. д. индексов внизу, и то же самое наверху, то b^{ij}_{pqr} мы должны признать за тензор, отличный от a^{ij}_{pqr}.

Мы будем говорить, что тензор b^{ij}_{pqr} получен из a^{ij}_{pqr} подстановкой его индексов (в данном случае круговой подстановкой трех нижних индексов при неизменных верхних).

В общем случае можно задаться любой подстановкой нижних индексов и одновременно любой подстановкой верхних индексов (причем, как и в нашем примере, имеются в виду подстановки не численных значений индексов, а *мест их написания* при координате тензора). То, что в результате снова получается тензор и притом того же строения, легко следует из одинакового поведения всех нижних индексов при тензорном законе преобразования и равным образом из одинакового поведения всех верхних индексов.

Но, разумеется, подстановки, при которых верхние индексы могли бы переходить в нижние и наоборот, не рассматриваются, так как они не являются инвариантными операциями. Ввиду различного поведения верхних и нижних индексов при преобразовании координатной системы мы при такой подстановке не получили бы вновь тензора.

Операция подстановки индексов производит впечатление формальной и мало содержательной и действительно является такой, если ее рассматривать изолированно. Но основное ее значение сказывается в тех операциях, где она комбинируется со сложением и вычитанием, особенно в операциях *симметрирования и альтернации.*

Операция *симметрирования* производится следующим образом. Из одноименных (например, нижних) индексов данного тензора произвольно выбирается некоторое их число N, над этими индексами производятся $N!$ *всевозможных* подстановок и берется среднее арифметическое всех полученных при этом $N!$ тензоров. Результат симметрирования обозначается тем, что участвующие в симметрировании индексы берутся в круглые скобочки.

В случае $N=1$ симметрирование тривиально и не меняет тензора; подстановка только одна — тождественная.

В случае $N=2$ рассмотрим тензор a_{ij}, где явно выписаны лишь индексы, участвующие в симметрировании; остальные индексы, которых может быть сколько угодно (а может и совсем не быть), лишь подразумеваются. Подстановок здесь будет лишь две: тождественная и транспозиция 1-го и 2-го индексов. Результат симметрирования:

$$a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}). \tag{31.2}$$

В случае $N=3$ рассмотрим тензор a_{ijk} с той же оговоркой, что он может иметь и другие индексы, хотя симметрированию подлежат лишь явно выписанные. Делая все шесть подстановок и беря среднее арифметическое, получим:

$$a_{(ijk)}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}+a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji}). \tag{31.3}$$

Аналогично производим симметрирование и при любом числе симметрируемых индексов. Для верхних индексов все происходит, разумеется, точно таким же образом.

Мы называем тензор *симметрическим* по нескольким данным (обязательно одноименным) индексам, если он не меняется при транспозиции любых двух из этих индексов, а следовательно, и при любой их подстановке. Таков, например, дважды ковариантный тензор, координаты которого образуют симметрическую матрицу

$$a_{ij}=a_{ji}. \tag{31.4}$$

В результате симметрирования получается, очевидно, тензор *симметрический* по тем индексам, которые участвовали в симметрировании.

Переходим теперь к операции *альтернации.* Она производится так. Из одноименных индексов данного тензора произвольно выбирается некоторое их число N, над этими индексами производятся $N!$ всевозможных подстановок, результаты четных подстановок берутся со своим знаком, а у результатов нечетных подстановок знак меняется на обратный, и берется, наконец, среднее арифметическое всех полученных при этом $N!$ тензоров. Результат альтернации обозначается тем, что участвующие в альтернации индексы берутся в прямые скобочки.

В случае $N=1$ подстановка лишь одна, тождественная, альтернирование тривиально и не меняет тензора.

В случае $N=2$ альтернация имеет вид

$$a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji}). \tag{31.5}$$

В случае $N=3$ получаем:

$$a_{[ijk]}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{jik}-a_{kji}-a_{ikj}). \tag{31.6}$$

Кроме индексов, участвующих в альтернации, у рассматриваемых тензоров могут быть и другие, явно не выписанные индексы.

Мы называем тензор *кососимметрическим* по нескольким данным (обязательно одноименным) индексам, если он умножается на -1 при транспозиции любых двух из этих индексов (и, следовательно, умножается на -1 при любой нечетной подстановке и не меняется при четной подстановке этих индексов). Таков, например, дважды ковариантный тензор, координаты которого образуют кососимметрическую матрицу

$$a_{ij}=-a_{ji}, \tag{31.7}$$

или трижды ковариантный тензор, обладающий свойством

$$a_{ijk}=a_{jki}=a_{kij}=-a_{jik}=-a_{kji}=-a_{ikj}. \tag{31.8}$$

В результате альтернации *всегда* получается, как легко проверить, тензор кососимметрический по тем индексам, которые участвовали в альтернации.

Если тензор кососимметричен по данным индексам, то альтернация по этим индексам его не меняет. Действительно, если, например, a_{ijk} кососимметричен по трем своим индексам, т. е. обладает свойством (31.8), то в скобках (31.6) все шесть слагаемых равны между собой, и мы получаем:

$$a_{[ijk]}=a_{ijk}.$$

Отметим также, что если из тех индексов, по которым тензор кососимметричен, хотя бы два имеют одинаковые значения, то соответствующая координата обращается в нуль.

Действительно, при транспозиции этих двух индексов координата должна изменить знак в силу косой симметрии; с другой же стороны, она не изменится в силу равенства индексов. Следовательно, она равна нулю.

§ 32. Степень произвола в выборе тензора данного строения

Мы установили основы тензорной алгебры, оперируя с произвольными тензорами, однако мы, строго говоря, до сих пор не знаем, существуют ли тензоры любого строения (т. е. с любым числом индексов наверху и внизу), и если существуют, то с какой степенью произвола определяются. Ясно одно, что если координаты тензора заданы в одной координатной системе, то в силу тензорного закона преобразования они определятся и в любой координатной системе. Но всегда ли можно построить тензор, задавшись *произвольно* его координатами в какой-либо одной координатной системе? На этот вопрос мы отвечаем утвердительно и на основе вот каких соображений.

Зададимся произвольно координатами искомого тензора, например, a^i_{pq}, в какой-нибудь одной координатной системе S. *Если искомый тензор существует*, то его координаты в любой другой координатной системе S' будут определяться по тензорному закону преобразования:

$$a^{i'}_{p'q'} = A^{i'}_i A^p_{p'} A^q_{q'} a^i_{pq}. \tag{32.1}$$

Однако это еще не значит, что искомый тензор уже построен. Нужно еще убедиться, что тензорный закон преобразования действует не только при переходе от *данной к любой* координатной системе, но и при переходе от *любой к любой* координатной системе. Для этой цели рассмотрим еще одну произвольную координатную систему S''. Для нее аналогично (32.1) получаем:

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i''}_i A^p_{p'} A^q_{q''} a^i_{pq}. \tag{32.2}$$

Очевидно, по смыслу наших обозначений

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^{i'}_{i''} \mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^i_{i''} \mathbf{e}_i, \tag{32.3}$$

откуда легко следует (подстановкой из первого равенства во второе и сравнением с третьим), что

$$A^i_{i''} = A^{i'}_{i''} A^i_{i'}, \tag{32.4}$$

т. е. матрица, преобразующая $\mathbf{e}_i$ в $\mathbf{e}_{i''}$, есть произведение матриц, преобразующих $\mathbf{e}_i$ в $\mathbf{e}_{i'}$ и $\mathbf{e}_{i'}$ в $\mathbf{e}_{i''}$.

Аналогично для обратных преобразований имеем:

$$A^{i''}_i = A^{i'}_i A^{i''}_{i'}. \tag{32.5}$$

Заменяя теперь в формуле (32.2) $A^{i''}_i$, $A^p_{p''}$, $A^q_{q''}$ их значениями согласно (32.4) и (32.5), приведем ее к виду

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i'}_{i} A^{i''}_{i'} A^p_{p'} A^{p'}_{p''} A^q_{q'} A^{q'}_{q''} a^i_{pq}.$$

Пользуясь (32.1), получим окончательно

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i''}_{i'} A^{p'}_{p''} A^{q'}_{q''} a^{i'}_{p'q'}, \tag{32.6}$$

т. е. действительно тензорный закон преобразования имеет место и при переходе от любой координатной системы к любой другой.

Этим наше доказательство закончено. Основа его заключается просто в том, что наложению двух линейных преобразований над векторами репера $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ отвечает наложение соответствующих (и, очевидно, тоже линейных) преобразований над координатами тензора

§ 33. Об m-мерных плоскостях в n-мерном аффинном пространстве

Мы изложили в основных чертах тензорную алгебру и сейчас должны пополнить наши сведения по геометрии n-мерного аффинного пространства. Прежде всего мы рассмотрим в этом пространстве плоскости различных измерений.

Мы будем называть плоскостью множество точек, обладающее следующим свойством. Пусть A, B, C — произвольные точки этого множества. Построим вектор $\overrightarrow{AB}$, умножим его на произвольное число α и отложим от точки C, так что получится вектор

$$\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}. \tag{33.1}$$

Тогда точка D должна тоже принадлежать нашему множеству.

Всякий вектор $\overrightarrow{AB}$, где A и B принадлежат данной плоскости, мы будем называть вектором этой плоскости. Из определения плоскости видно, что при умножении на любое число α вектор данной плоскости (например, $\overrightarrow{AB}$) переходит в вектор той же плоскости (т. е. $\overrightarrow{CD}$), и при откладывании вектора данной плоскости из любой ее точки мы приходим в точку той же плоскости (вытекает из определения при $\alpha = 1$).

Теперь ясно, что все наши аксиомы 1°—9° имеют место для точек и векторов плоскости. Что же касается аксиомы размерности 10°, то она видоизменится: максимально возможное число m линейно независимых векторов на плоскости будет, вообще говоря, меньше n. Число m мы будем называть *размерностью данной плоскости*.

Мы видим, что m-мерная плоскость в n-мерном аффинном пространстве по свойствам своих точек и векторов представляет собой m-мерное аффинное пространство.

Пользуясь этим обстоятельством, на плоскости всегда можно выбрать аффинный репер, т. е. некоторую точку O^* и m линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Тогда радиус-вектор $\overrightarrow{O^*M}$ любой точки M на этой плоскости разлагается по векторам репера

$$\overrightarrow{O^*M} = t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^m\mathbf{a}_m, \tag{33.2}$$

где $t^1, \ldots, t^m$ — коэффициенты разложения, которые пробегают всевозможные численные значения, когда точка M описывает нашу плоскость.

Одним словом, мы повторяем построение аффинной координатной системы для m-мерного аффинного пространства, каким и является наша m-мерная плоскость.

При этом $\{O^*, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ будет репером, а $t^1, \ldots, t^m$ — соответствующими координатами.

Отсюда вытекает, что всякая m-мерная плоскость может быть построена следующим образом.

Берется некоторая точка O^* и m линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и строится множество всех точек M, для которых вектор $\overrightarrow{O^*M}$ допускает разложение по $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Последний вопрос, который нам нужно выяснить, — получим ли мы этим путем m-мерную плоскость при *любом* выборе точки O^* и m линейно независимых векторов.

Легко проверить, что ответ будет утвердительным. В самом деле, вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий любые две точки A, B из построенного нами множества, может быть записан в виде

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O^*B} - \overrightarrow{O^*A}$$

и вместе с векторами $\overrightarrow{O^*B}$ и $\overrightarrow{O^*A}$ допускает разложение по $\mathbf{a}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{a}_m$; то же остается верным и для вектора $\alpha\overrightarrow{AB}$; откладывая этот вектор от произвольной точки C нашего множества, получаем вектор $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$; так как $\overrightarrow{O^*D} = \overrightarrow{O^*C} + \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{O^*D}$ вместе с $\overrightarrow{O^*C}$ и $\overrightarrow{CD}$ разлагается по $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, а следовательно, точка принадлежит построенному множеству. Тем самым это множество представляет собой плоскость (согласно определению последней) и притом m-мерную, так как m линейно независимых векторов на ней имеются по построению, но все остальные от них линейно зависимы.

Векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ мы будем называть *направляющими векторами* данной плоскости.

Соотношения (33.2) легко позволяют записать уравнения m-мерной плоскости в n-мерном аффинном пространстве. Отнесем последнее к какому-либо аффинному реперу $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда радиус-вектор любой точки M из m-мерной плоскости может быть записан в виде

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*M} = \overrightarrow{OO^*} + t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^m\mathbf{a}_m. \tag{33.3}$$

Здесь $\overrightarrow{OO^*}$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ — постоянные векторы, а $t^1, \ldots, t^m$ — независимые переменные (аффинные координаты на плоскости), так что (33.3) можно рассматривать как параметрическое уравнение нашей плоскости в векторной форме.

Переходя в равенстве (33.3) от векторов к их координатам относительно аффинного репера $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, мы получим параметрические уравнения нашей плоскости в координатной форме:

$$x^i = a^i + t^1a_1^i + t^2a_2^i + \ldots + t^m a_m^i. \tag{33.4}$$

Здесь x^i — координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, а значит, и самой точки M, a^i — постоянные координаты вектора $\overrightarrow{OO^*}$, a_1^i — постоянные координаты вектора $\mathbf{a}_1$ и т. д.

В итоге текущие координаты x^i произвольной точки M нашей m-мерной плоскости выражаются линейными функциями m независимых параметров $t^1, \ldots, t^m$, причем все m столбцов матрицы коэффициентов линейно независимы между собой (что равносильно линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$; см. § 23).

Очевидно, что и обратно, уравнения вида (33.4) с условием максимального ранга ($= m$) для матрицы коэффициентов (т. е. с условием линейной независимости столбцов этой матрицы) всегда определяют m-мерную плоскость. Это легко проверить обратным переходом к векторной записи.

Наконец, уравнения m-мерной плоскости можно дать в неявной записи. Для этого достаточно из n уравнений (33.4) исключить m параметров $t^1, \ldots, t^m$, что всегда выполнимо в силу максимального ранга m матрицы коэффициентов. Считая, что ранговый минор матрицы образован, например, первыми m ее строками, мы можем выразить $t^1, \ldots, t^m$ через $x^1, \ldots, x^m$ из первых m уравнений ($i = 1, 2, \ldots, m$). Подставляя эти выражения в остальные уравнения ($i = m+1, \ldots, n$), мы получим:

$$\left.\begin{array}{c} x^{m+1} = b_1^{m+1}x^1 + \ldots + b_m^{m+1}x^m + b^{m+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = b_1^n x^1 + \ldots + b_m^n x^m + b^n. \end{array}\right\} \tag{33.5}$$

Коэффициенты b_q^p выражаются, конечно, через коэффициенты a_j^i, но как именно — нас сейчас не интересует.

Итак, m-мерная плоскость может быть задана $n-m$ независимыми линейными уравнениями между текущими координатами $x^1, \ldots, x^n$. Независимость полученных уравнений ясна из того, что в каждом из них выражена координата, отсутствующая в остальных.

То, что, обратно, уравнения вида (33.5) всегда определяют m-мерную плоскость, становится очевидным, если принять $x^1, \ldots, x^m$ за независимые параметры $t^1, \ldots, t^m$; тогда мы получаем частный случай параметрического задания m-мерной плоскости. Размерность плоскости m может принимать значения $0, 1, 2, \ldots, n$.

В случае $m=0$ уравнения (33.4) дают

$$x^i = a^i, \tag{33.6}$$

и плоскость сводится к точке.

В случае $m=1$

$$x^i = a^i + t^1 a_1^i, \tag{33.7}$$

и текущие координаты суть линейные функции одного параметра. Одномерную плоскость мы будем называть *прямой линией*. В векторной форме она задается начальной точкой O^* и одним направляющим вектором $\mathbf{a}_1 \neq 0$.

В случае $m=2$ мы получаем двумерную плоскость

$$x^i = a^i + t^1 a_1^i + t^2 a_2^i, \tag{33.8}$$

для которой текущие координаты суть линейные функции двух независимых параметров. В векторной форме она задается начальной точкой O^* и двумя линейно независимыми направляющими векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.

Аналогично обстоит дело и при остальных значениях m. Особо следует отметить случай $m=n-1$, когда плоскость называется *гиперплоскостью*. Гиперплоскость может быть охарактеризована тем, что она задается *одним линейным* уравнением между текущими координатами. Действительно, $n-m$ уравнений (33.5) сводятся в этом случае к одному.

Наконец, наше определение плоскости допускает и случай $m=n$. Но тогда, очевидно, плоскость просто заполняет все пространство.

Для нас будет особенно важен случай, когда все рассматриваемые плоскости принадлежат одной связке — проходят через фиксированную точку O (которую мы примем за начало координат). Тогда для задания m-мерной плоскости достаточно знать ее направляющие векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Но та же самая плоскость может быть определена и любой другой системой направляющих векторов $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ — лишь бы они тоже принадлежали плоскости и были линейно независимы. Разумеется, как здесь, так и далее индекс m' имеет то же численное значение, что и m, и лишь в записи снабжен штрихом. Связь между старыми и новыми направляющими векторами m-мерной плоскости — это в сущности связь между векторами старого и нового репера в m-мерном аффинном пространстве. Мы можем записать ее аналогично § 24:

$$\mathbf{a}_{i'} = A^1_{i'}\mathbf{a}_1 + \ldots + A^m_{i'}\mathbf{a}_m \quad (i' = 1', 2', \ldots, m') \quad (\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| \neq 0), \quad (33.9)$$

и обратное преобразование:

$$\mathbf{a}_i = A^{1'}_i \mathbf{a}_{1'} + \ldots + A^{m'}_i \mathbf{a}_{m'} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \quad (33.10)$$

Неудобство здесь заключается в том, что одна и та же плоскость связки задается весьма разнообразными системами направляющих векторов. Возникает вопрос, нельзя ли систему направляющих векторов заменить чем-то другим, что было бы уже однозначно или почти однозначно связано с плоскостью данной связки. Ответом на этот вопрос является понятие простого поливектора. Им мы займемся в §§ 34, 35.

§ 34. Бивектор и задание двумерной плоскости

Мы будем называть *бивектором* дважды контравариантный кососимметрический тензор

$$a^{ij} = -a^{ji}. \quad (34.1)$$

Бивектор мы будем называть *простым*, если он составлен из каких-нибудь двух векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ с координатами

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}_1(a_1^1, \ldots, a_1^n), \\ \mathbf{a}_2(a_2^1, \ldots, a_2^n) \end{array}\right\} \quad (34.2)$$

по формуле

$$a^{ij} = \frac{1}{2}(a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1^i & a_1^j \\ a_2^i & a_2^j \end{vmatrix}. \quad (34.3)$$

Другими словами, простой бивектор получается перемножением контравариантных тензоров a_1^i, a_2^j с последующей альтернацией:

$$a^{ij} = a_1^{[i} a_2^{j]}. \quad (34.4)$$

Очевидно, порядок перемножаемых тензоров, т. е. порядок задания векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, играет здесь важную роль: если порядок заменить на обратный, бивектор, как легко заметить из (34.3), умножается на -1.

Простой бивектор, составленный из двух заданных в определенном порядке векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ согласно (34.3), мы будем называть *косым произведением* векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и кратко обозначать $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$.

Выясним основные свойства косого произведения. Прежде всего при перестановке множителей оно, как уже отмечалось, меняет знак:

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = -[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1]. \tag{34.5}$$

Отсюда в случае $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ получаем:

$$[\mathbf{a}\mathbf{a}] = -[\mathbf{a}\mathbf{a}], \quad \text{т. е.} \quad [\mathbf{a}\mathbf{a}] = 0. \tag{34.6}$$

Далее, из *линейной* зависимости координат косого произведения $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$ от координат одного из векторов, например $\mathbf{a}_1$, очевидно, следует, что при умножении $\mathbf{a}_1$ на произвольное число α бивектор умножается на то же число:

$$[\alpha\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2], \tag{34.7}$$

а также, что при замене $\mathbf{a}_1$ суммой двух (или нескольких) векторов бивектор распадается на сумму соответствующих бивекторов:

$$[\mathbf{a}_1' + \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_2] = [\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_2] + [\mathbf{a}_1''\mathbf{a}_2]. \tag{34.8}$$

Теперь нетрудно заметить, что для *линейной зависимости векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *необходимо и достаточно обращение в нуль их косого произведения.*

В самом деле, если $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависимы, например $\mathbf{a}_2 = \alpha\mathbf{a}_1$, то

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = [\mathbf{a}_1, \alpha\mathbf{a}_1] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1] = 0.$$

Обратно, если $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = 0$, то согласно (34.3)

$$\begin{vmatrix} a_1^i & a_1^j \\ a_2^i & a_2^j \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. обращаются в нуль все миноры 2-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^n \\ a_2^1 a_2^2 \ldots a_2 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, между строками этой матрицы, а тем самым и между векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, имеется линейная зависимость.

Далее, исследуем вопрос, как меняется косое произведение векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ при их линейном преобразовании:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_{1'} &= A_{1'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a}_{2'} &= A_{2'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{a}_2. \end{aligned}\right\} \tag{34.9}$$

Составим косое произведение преобразованных векторов $\mathbf{a}_{1'}$, $\mathbf{a}_{2'}$:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'}] = [(A_{1'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{a}_2)(A_{2'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{a}_2)].$$

Раскрывая в правой части скобки, т. е. перемножая сумму на сумму почленно (согласно (34.8)), отбрасывая равные нулю косые произведения линейно зависимых векторов и вынося численные множители за знак косого произведения (согласно (34.7)), получим:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'}] = A_{1'}^1 A_{2'}^2 [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] + A_{1'}^2 A_{2'}^1 [\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1] = \begin{vmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 \end{vmatrix} [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]. \tag{34.10}$$

При последнем преобразовании мы воспользовались свойством (34.5).

Итак, косое произведение двух векторов в результате линейного преобразования этих векторов умножается на определитель линейного преобразования.

Допустим теперь, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ играют роль направляющих векторов некоторой двумерной плоскости и, следовательно, линейно независимы. Тогда линейное преобразование (34.9) с определителем, отличным от нуля, означает, очевидно, переход к любой другой паре направляющих векторов той же плоскости. Так как косое произведение $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$ приобретает при этом лишь численный множитель (не равный нулю), то мы получим следующий результат.

Косое произведение направляющих векторов двумерной плоскости, рассматриваемое с точностью до численного множителя (не равного нулю), зависит только от самой плоскости и не зависит от выбора направляющих векторов на ней.

Таким образом, каждой двумерной плоскости сопоставляется определенный с точностью до численного множителя простой бивектор $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$, который мы будем называть ее *направляющим бивектором*. Он никогда не равен 0 в силу линейной независимости $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.

Ясно, что, беря всевозможные плоскости, мы будем получать в качестве направляющих бивекторов всевозможные простые бивекторы.

Будем называть две плоскости одного числа измерений *параллельными*, если одна получается из другой сдвигом всех ее точек на постоянный вектор. Очевидно, при этом векторы одной плоскости переходят в равные им векторы другой плоскости. Следовательно, и направляющие векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ можно брать для параллельных плоскостей общими. А следовательно, в случае параллельных *двумерных* плоскостей общими будут и направляющие бивекторы.

Итак, параллельные двумерные плоскости обладают одним и тем же (определенным с точностью до численного множителя) направляющим бивектором.

Обратно, если две двумерные плоскости имеют один и тот же (определенный с точностью до численного множителя) направляющий бивектор, то эти плоскости параллельны. В самом деле, пусть одна плоскость имеет направляющий бивектор $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$, а другая — $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$. С точностью до численного множителя эти бивекторы должны совпадать, так что

$$[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2],$$

т. е. согласно (34.3)

$$\frac{1}{2}(b_1^i b_2^j - b_1^j b_2^i) = \frac{\alpha}{2}(a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i).$$

Свернем это равенство почленно с ковариантным тензором c_j, который подобран так, что

$$b_1^j c_j = 0, \quad b_2^j c_j = 1. \tag{34.11}$$

Этого, очевидно, всегда можно добиться ввиду линейной независимости направляющих векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, а следовательно, и строк матрицы

$$\begin{Vmatrix} b_1^1 & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & \ldots & b_2^n \end{Vmatrix}.$$

В результате свертывания получим $\left(\text{отбрасывая множители } \frac{1}{2}\right)$:

$$b_1^i \cdot b_2^j c_j - b_2^i \cdot b_1^j c_j = a_1^i(\alpha a_2^j c_j) - a_2^i(\alpha a_1^j c_j).$$

Учитывая равенства (34.11) и обозначая инварианты $\alpha a_2^j c_j$, $-\alpha a_1^j c_j$ через β^1, β^2, получаем окончательно:

$$b_1^i = \beta^1 a_1^i + \beta^2 a_2^i. \tag{34.12}$$

Мы видим, что тензор b_1^i оказывается линейной комбинацией тензоров a_1^i, a_2^i, т. е. вектор $\mathbf{b}_1$ разлагается по векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. То же самое, конечно, справедливо и для $\mathbf{b}_2$.

В результате направляющие векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ второй плоскости принадлежат и первой плоскости, а следовательно, могут служить и ее направляющими векторами. Таким образом, при построении обеих плоскостей разница может быть лишь в выборе начальной точки O^* (§ 33). Пусть O_1^*, O_2^* — начальные точки наших плоскостей. Тогда сдвигом на вектор $\overrightarrow{O_1^*O_2^*}$ мы приводим начальную точку O_1^* в совпадение с O_2^*, а так как направляющие векторы и без того общие, то первая плоскость придет в совпадение со второй. Следовательно, наши плоскости параллельны, и утверждение доказано.

Окончательный вывод: *для того чтобы две двумерные плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие бивекторы были одинаковы с точностью до численного множителя.*

Таким образом, направляющий бивектор характеризует целую совокупность параллельных между собой двумерных плоскостей, заполняющих все пространство, т.е., как мы будем говорить, *характеризует двумерное направление в пространстве.*

Если мы рассматриваем только плоскости некоторой связки (т. е. плоскости, проходящие через фиксированную точку O), то в нашей формулировке вместо *параллелизма* плоскостей следует говорить просто об их *совпадении.*

§ 35. Основные свойства m-векторов

Результаты предыдущего параграфа полностью переносятся с двумерного случая на случай любого числа измерений.

Тензор $a^{i_1 \dots i_m}$, m раз контравариантный и кососимметрический по всем своим индексам, мы будем называть *m-вектором (поливектором).*

m-вектор мы будем называть *простым*, если он составлен из каких-нибудь m заданных в определенном порядке векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ по формуле

$$a^{i_1 i_2 \dots i_m} = a_1^{[i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m]} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & \dots & a_1^{i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^{i_1} & a_m^{i_2} & \dots & a_m^{i_m} \end{vmatrix}. \qquad (35.1)$$

Другими словами, мы перемножаем в заданном порядке тензоры $a_1^{i_1}$, $a_2^{i_2}$, ..., $a_m^{i_m}$, образованные координатами наших векторов, и результат альтернируем по всем индексам i_1, i_2, ..., i_m.

Нужно помнить при этом, что нижние индексы здесь не тензорные, а номера заданных векторов; альтернация, разумеется, к ним относиться не может.

Правильность записи в виде определителя проверяется без труда, если сопоставить определение альтернации по m индексам с правилом составления определителя m-го порядка в виде суммы $m!$ членов. Действительно, и в том и другом случае мы должны в произведении $a_1^{i_1}a_2^{i_2}\ldots a_m^{i_m}$ (это произведение элементов по главной диагонали определителя) проделать всевозможные подстановки из индексов i_1, $i_2, \ldots, i_m$ и сложить полученные результаты, беря их со знаком $\pm$ в зависимости от четности или нечетности подстановки (в случае альтернации к этому еще присоединяется деление на $m!$).

Простой m-вектор (35.1) мы будем называть *косым произведением* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и обозначать кратко $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_m]$.

m-векторы вообще и простые в частности имеет смысл рассматривать лишь при $m=1, 2, 3, \ldots, n$. Дело в том, что при $m>n$ всякий m-вектор тождественно равен нулю.

Действительно, среди m индексов каждой его координаты обязательно должны найтись, по крайней мере, два одинаковых, а следовательно, каждая его координата равна нулю (см. конец § 31).

Полагая $m=n$, рассмотрим произвольный n-вектор $a^{i_1i_2\ldots i_n}$ (как увидим, он всегда будет простым). Всякий n-вектор имеет лишь одну существенную координату $a^{12\ldots n}$. Действительно, все остальные его координаты $a^{i_1i_2\ldots i_n}$ или равны нулю, если среди индексов i_1, $i_2, \ldots, i_n$ имеется хоть два одинаковых, или равны $\pm a^{12\ldots n}$, если все индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ различные и, следовательно, получаются из $1, 2, \ldots, n$ некоторой подстановкой ($\pm$ в зависимости от четности или нечетности этой подстановки).

В связи с этим любые два n-вектора $a^{i_1\ldots i_n}$ и $b^{i_1\ldots i_n}$ отличаются друг от друга лишь инвариантным численным множителем:

$$b^{i_1\ldots i_n}=\lambda a^{i_1\ldots i_n}, \tag{35.2}$$

если положить

$$\lambda=\frac{b^{12\ldots n}}{a^{12\ldots n}} \tag{35.3}$$

(предполагается, что $a^{12\ldots n}\neq 0$).

Действительно, λ подобрано так, что (35.2) соблюдается при $i_1i_2\ldots i_n=12\ldots n$. Но тем самым оно соблюдается и всегда, так как остальные координаты наших n-векторов или такие же, как при $i_1i_2\ldots i_n=12\ldots n$ или отличаются лишь знаком, или равны нулю. Инвариантность же коэффициента λ вытекает из того, что $a^{i_1\ldots i_n}$ и $b^{i_1\ldots i_n}$ преобразуются по одинаковому закону.

Решим теперь еще один важный вопрос, касающийся n-вектора. Так как все его координаты выражаются через координату $a^{12\ldots n}$, то закон их преобразования сводится к закону преобразования этой единственно существенной координаты.

Этот последний мы и хотим вывести. Запишем тензорный закон преобразования для нашего случая

$$a^{1'2'\ldots n'} = A^{1'}_{i_1} A^{2'}_{i_2} \ldots A^{n'}_{i_n} a^{i_1 i_2 \ldots i_n}. \tag{35.4}$$

При суммировании по $i_1, i_2, \ldots, i_n$ мы откинем все слагаемые, где среди этих индексов встречаются равные, так как в этом случае все равно $a^{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$. Остаются слагаемые, в которых $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_n$ все различны, т. е. получены некоторой подстановкой из 1, 2, ..., n. Но в таком случае

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \pm a^{12 \ldots n}, \tag{35.5}$$

знак $\pm$ выбирается в зависимости от четности или нечетности подстановки. Вставляя выражение для $a^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ из (35.5) в (35.4) и вынося $a^{12\ldots n}$ за скобки, получим:

$$a^{1'2'\ldots n'} = a^{12\ldots n} \sum \pm A^{1'}_{i_1} A^{2'}_{i_2} \ldots A^{n'}_{i_n},$$

где сумма берется по всевозможным подстановкам $12 \ldots n \to$ $\to i_1 i_2 \ldots i_n$ и представляет собой, очевидно, определитель $\operatorname{Det} | A^{i'}_{i} |$.

Окончательно получаем:

$$a^{1'2'\ldots n'} = a^{12\ldots n} \operatorname{Det} | A^{i'}_{i} |. \tag{35.6}$$

Единственная существенная координата n-вектора при переходе в новую координатную систему умножается на определитель $\operatorname{Det} |A^{i'}_{i}|$.

В связи с этим $a^{12\ldots n}$ можно назвать *относительным инвариантом веса* -1. Вообще же *относительным инвариантом веса* p (p — целое) называется величина, имеющая определенное численное значение в каждой координатной системе и при переходе от старой к новой координатной системе умножающаяся на

$$\{\operatorname{Det} | A^{i'}_{i} |\}^{-p} = \{\operatorname{Det} | A^{i}_{i'} |\}^{p}. \tag{35.7}$$

Вернемся к общему случаю простого m-вектора ($m = 2, 3, \ldots, n$)*) и установим его основные свойства. Когда в косом произведении $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$ мы меняем местами два множителя, то в определителях (35.1), выражающих его координаты, меняются местами две строки, и косое произведение умножается на -1.

Отсюда совершенно так же, как в предыдущем параграфе, вытекает, что при наличии двух одинаковых множителей косое произведение обращается в нуль.

---

*) При $m = 1$ мы получаем просто вектор.

Далее, из той же записи (35.1) виден *линейный* характер зависимости координат косого произведения от координат любого из множителей (например, множителя $\mathbf{a}_1$), m координатами которого образована первая строка определителя.

Отсюда совершенно так же, как для бивектора, вытекает

$$[\alpha\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] \tag{35.8}$$

и

$$[\mathbf{a}'_1 + \mathbf{a}''_1, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = [\mathbf{a}'_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] + [\mathbf{a}''_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]. \tag{35.9}$$

Разумеется, совершенно теми же свойствами обладает любой множитель косого произведения.

Теперь докажем теорему: *для линейной зависимости векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *необходимо и достаточно обращение в нуль их косого произведения.*

Необходимость. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, например, $\mathbf{a}_1$ разлагается по остальным векторам с коэффициентами $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m.$$

Тогда

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = [\alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = \\ = \alpha_2[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] + \ldots + \alpha_m[\mathbf{a}_m\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = 0.$$

Равенство нулю вытекает из того, что в каждом из полученных косых произведений имеется два одинаковых множителя.

Достаточность. Пусть $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = 0$; тогда обращаются в нуль все определители (35.1), т. е. все миноры m-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^1 & a_m^2 & \ldots & a_m^n \end{Vmatrix}, \tag{35.10}$$

образованной координатами наших векторов. Тем самым между строками матрицы, а следовательно, и между нашими векторами имеется линейная зависимость.

Из доказанной теоремы следует, между прочим, что простой n-вектор $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]$ в случае линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ отличен от нуля. Следовательно, *любой другой n-вектор*, отличаясь от него лишь численным множителем λ, *тоже будет простым* (множитель λ можно включить, например, в $\mathbf{a}_1$).

Заметим, кстати, что любой $n-1$-вектор тоже всегда является простым.

Выясним теперь, как преобразуется косое произведение m векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ при их произвольном линейном преобразовании в векторы $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_{1'} &= A_{1'}^1\mathbf{a}_1 + A_{1'}^2\mathbf{a}_2 + \ldots + A_{1'}^m\mathbf{a}_m = A_{1'}^{i_1}\mathbf{a}_{i_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_{m'} &= A_{m'}^1\mathbf{a}_1 + A_{m'}^2\mathbf{a}_2 + \ldots + A_{m'}^m\mathbf{a}_m = A_{m'}^{i_m}\mathbf{a}_{i_m} \end{aligned}\right\} \tag{35.11}$$

при помощи квадратной матрицы $A_{i'}^i$ порядка m. Мы позволяем себе здесь в виде исключения сокращенную запись суммирования, несмотря на то, что индексы суммирования $i_1, \ldots, i_m$ пробегают значения $1, 2, \ldots, m$, а не $1, 2, \ldots, n$.

Составим косое произведение:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = \left[A_{1'}^{i_1}\mathbf{a}_{i_1},\ A_{2'}^{i_2}\mathbf{a}_{i_2},\ \ldots,\ A_{m'}^{i_m}\mathbf{a}_{i_m}\right] = \\ = A_{1'}^{i_1}A_{2'}^{i_2} \ldots A_{m'}^{i_m}[\mathbf{a}_{i_1}\mathbf{a}_{i_2} \ldots \mathbf{a}_{i_m}].$$

Полученное выражение с формальной стороны вполне аналогично (35.4), отличаясь от него только тем, что число множителей $A_{k'}^{i_k}$ здесь m, а не n, и индексы суммирования пробегают значения $1, \ldots, m$ (а не $1, \ldots, n$), а также тем, что верхние и нижние индексы поменялись ролями. Роль $a^{i_1 \ldots i_n}$ играет сейчас $[\mathbf{a}_{i_1} \ldots \mathbf{a}_{i_m}]$, также кососимметрическое по всем своим индексам. Поэтому аналогичным образом получим:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]\,\mathrm{Det}\,|A_{i'}^i|. \tag{35.12}$$

Итак, косое произведение m векторов в результате их линейного преобразования умножается на определитель матрицы этого преобразования.

Докажем теперь следующую важную теорему.

Для того чтобы вектор $\mathbf{a}$ $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ *разлагался по линейно независимым векторам* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, *необходимо и достаточно соблюдение условия*

$$a^{[i}a^{i_1 i_2 \ldots i_m]} = 0, \tag{35.13}$$

где $a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ — *координаты косого произведения* $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$.

Разберемся прежде всего в смысле условия (35.13). В процессе альтернации мы, строго говоря, должны взять среднее арифметическое $(m+1)!$ слагаемых, полученных в результате всевозможных подстановок $m+1$ индексов (с изменением знака в случае нечетной подстановки). Однако фактически у нас будет лишь $m+1$ существенно различных слагаемых, так как каждое слагаемое встретится нам $m!$ раз. В самом деле, те $m!$ подстановок индексов в слагаемом, например, $a^i a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, которые затрагивают лишь последние m

индексов, дадут нам (в силу косой симметрии $a^{i_1 i_2 \dots i_m}$ и правила изменения знака в случае нечетной подстановки) одинаковые слагаемые. В таком случае достаточно взять среднее арифметическое лишь $m+1$ существенно различных слагаемых. В качестве таковых можно взять слагаемое $a^i a^{i_1 \dots i_m}$ и те m слагаемых, которые получаются из него поочерёдной транспозицией индекса i с $i_1, i_2, \dots, i_m$, конечно, с изменением знака (ввиду нечетности транспозиции). Получаем развернутое выражение:

$$a^{[i}a^{i_1 i_2 \dots i_m]} =$$
$$= \frac{1}{m+1}(a^i a^{i_1 i_2 \dots i_m} - a^{i_1} a^{i i_2 \dots i_m} - a^{i_2} a^{i_1 i \dots i_m} - \dots - a^{i_m} a^{i_1 i_2 \dots i}). \tag{35.14}$$

Для доказательства теоремы нам придется преобразовать условие (35.13). Координаты косого произведения имеют по определению вид

$$a^{i_1 \dots i_m} = a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]}.$$

Вставляя это выражение в (35.13), получаем:

$$a^{[i} a_1^{[i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m]]} = 0. \tag{35.15}$$

Внутреннюю альтернацию (и это общее правило) можно выкинуть, раз она покрывается внешней альтернацией. Результат от этого не изменится. В самом деле, пользуясь выражением (35.14), получаем:

$$a^{[i} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]]} =$$
$$= \frac{1}{m+1}(a^i a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]} - a^{i_1} a_1^{[i} \dots a_m^{i_m]} - \dots - a^{i_m} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i]}).$$

Осуществляя теперь оставшиеся альтернации, в каждом случае по m индексам, мы получим из каждого члена $m!$ слагаемых (с последующим делением на $m!$).

Всего мы получим $(m+1)!$ слагаемых, составленных, очевидно, по правилу альтернации выражения $a^i a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$ по всем его верхним индексам и с последующим делением на $m!\,(m+1) = (m+1)!$. Другими словами,

$$a^{[i} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]]} = a^{[i} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m]}. \tag{35.16}$$

Теперь условие (35.13) принимает вид

$$a^{[i} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m]} = 0, \quad \text{т. е.} \quad [\mathbf{a}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m] = 0. \tag{35.17}$$

Но в таком виде наше условие по выше доказанному равносильно линейной зависимости векторов $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, а так как

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно независимы, то равносильно линейной зависимости $\mathbf{a}$ от $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь какую-либо m-мерную плоскость с направляющими (и тем самым линейно независимыми) векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Косое произведение этих векторов $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$, очевидно, не равное нулю, мы будем называть *направляющим m-вектором нашей плоскости.*

При любом выборе направляющих векторов на данной плоскости ее направляющий m-вектор с точностью до численного множителя остается прежним. Это непосредственно следует из результата (35.12), если считать, что формулы (35.11) дают переход от старых к новым направляющим векторам на данной m-мерной плюскости (при этом $\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}| \neq 0$).

Обратно, *если у двух m-мерных плоскостей направляющие m-векторы отличаются лишь численным множителем*

$$[\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_m] = \alpha\,[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m], \tag{35.18}$$

то эти плоскости параллельны (т. е. получаются одна из другой сдвигом всех точек на постоянный вектор).

Действительно, пусть $a^{i_1 \ldots i_m}$ и $b^{i_1 \ldots i_m}$ — координаты направляющих m-векторов $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ и $[\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_m]$ первой и второй плоскости. Нам дано, что

$$b^{i_1 \ldots i_m} = \alpha a^{i_1 \ldots i_m}.$$

Согласно (35.13), для того чтобы вектор $\mathbf{a}$ разлагался по $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, т. е. чтобы он принадлежал первой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы его координаты удовлетворяли условию

$$a^{[i} a^{i_1 \ldots i_m]} = 0. \tag{35.19}$$

Совершенно аналогично, для того чтобы $\mathbf{a}$ принадлежал второй плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{[i} b^{i_1 \ldots i_m]} = 0. \tag{35.20}$$

Но оба последних условия равносильны вследствие (35.18). Поэтому все векторы, принадлежащие второй плоскости, принадлежат и первой плоскости, и наоборот. В частности, векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ принадлежат и первой плоскости и могут служить направляющими векторами на ней наряду с $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Теперь достаточно сделать параллельный сдвиг, переводящий какую-нибудь одну точку второй плоскости в какую-нибудь точку первой плоскости, чтобы обе плоскости совместились. Тем самым наше утверждение доказано.

Резюмируем: *для того чтобы две m-мерные плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие*

m-векторы, рассматриваемые с точностью до численного множителя, были одинаковы.

Это можно выразить и в такой форме, что направляющий m-вектор, заданный с точностью до численного множителя, характеризует *m-мерное направление в пространстве*, т. е. совокупность параллельных между собой m-мерных плоскостей, заполняющих все пространство.

Если мы ограничиваемся плоскостями некоторой связки O, то параллелизм плоскостей будет означать просто их совпадение, которое и будет равносильно совпадению направляющих m-векторов.

Наконец, последнее замечание. Вся *алгебраическая* теория, развитая здесь для кососимметрических *контравариантных* тензоров $a^{i_1 \dots i_m}$ (m-векторов), повторяется, конечно, дословно и для кососимметрических *ковариантных* тензоров $a_{i_1 \dots i_m}$ (которые мы будем называть *m-ковекторами*). Более того, можно установить своеобразный принцип двойственности, по которому каждому m-вектору взаимно однозначно сопоставляется $n-m$-ковектор, и обратно (при условии задания некоторого фиксированного n-вектора). Мы не будем останавливаться здесь на этом подробнее *). Укажем только, что совершенно аналогично (35.6) можно получить, что единственная существенная координата $a_{12 \dots n}$ n-ковектора $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ преобразуется по закону

$$a_{1'2' \dots n'} = a_{12 \dots n} \operatorname{Det} | A^i_{i'} | . \qquad (35.21)$$

Тем самым, согласно (35.7), $a_{12 \dots n}$ представляет собой относительный инвариант веса $+1$ (определители в (35.6) и (35.21) представляют собой взаимно обратные величины как определители взаимно обратных матриц). Отсюда вытекает, что произведение существенных координат n-вектора и n-ковектора $a^{12 \dots n} \cdot a_{12 \dots n}$ представляет собой инвариант.

Если, в частности,

$$a^{12 \dots n} \cdot a_{12 \dots n} = 1, \qquad (35.22)$$

то n-вектор и n-ковектор мы будем называть *взаимно сопряженными*. Ясно, что по данному n-вектору всегда можно построить сопряженный ему n-ковектор, и обратно.

Что касается *геометрического* истолкования m-ковекторов, то на нем мы останавливаться не будем. Укажем лишь, что по упомянутому принципу двойственности (кстати, имеющему непосредственное отношение к принципу двойственности в $n-1$-мерной проективной геометрии в связке O) каждое m-мерное направление в про-

*) См., например, П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М. — Л., Гостехиздат, 1947, гл. II.

странстве характеризуется $n-m$-ковектором, заданным с точностью до численного множителя. Так, например (при $m=n-1$), $n-1$-мерное направление характеризуется 1-ковектором a_i, а именно, это есть направление гиперплоскости, уравнение которой

$$a_i x^i = 0.$$

§ 36. Ориентация в n-мерном аффинном пространстве

Будем рассматривать в n-мерном *вещественном* аффинном пространстве*) всевозможные реперы $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Легко заметить, что они распадаются на два класса аналогично «правым» и «левым» реперам в обычном трехмерном пространстве. А именно, выбрав произвольно некоторый начальный репер $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, мы распределим все вообще реперы $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ на два класса по следующему принципу. Запишем разложение векторов произвольного репера по векторам начального репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i.$$

Если $\operatorname{Det}|A^i_{i'}| > 0$, то мы относим произвольно взятый репер к первому классу, если же $\operatorname{Det}|A^i_{i'}| < 0$, то — ко второму классу. Начальный репер попадет, очевидно, в первый класс (матрица $A^i_{i'}$ будет в этом случае единичной). Покажем теперь, что это распадение реперов на два класса не зависит от выбора начального репера (если не считать нумерации этих классов, которая, конечно, определяется выбором начального репера).

Для этого достаточно показать, что *любые два репера одного класса связаны между собой преобразованием с положительным определителем, а в случае разных классов — с отрицательным определителем.* Тогда действительно, исходя из любого начального репера, мы получим разбиение реперов на те же два класса (с точностью до их нумерации).

Возьмем два произвольных репера $(O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$ и $(O'', \mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''})$. Пусть они связаны с исходным репером и между собой преобразованиями:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^{i'}_{i''} \mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^i_{i''} \mathbf{e}_i. \tag{36.1}$$

Очевидно, третье преобразование есть результат наложения первых двух, так что его матрица есть произведение матриц:

$$A^i_{i''} = A^{i'}_{i''} A^i_{i'}, \tag{36.2}$$

*) Результаты главы II, за исключением §§ 36, 37, одинаково применимы и к вещественным и к комплексным аффинным пространствам.

а значит,

$$\operatorname{Det}|A^{i}_{i''}| = \operatorname{Det}|A^{i'}_{i''}| \cdot \operatorname{Det}|A^{i}_{i'}|. \tag{36.3}$$

Если взятые реперы одного класса, т. е. $\operatorname{Det}|A^{i}_{i''}|$ и $\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}|$ одного знака, то отсюда следует

$$\operatorname{Det}|A^{i'}_{i''}| > 0,$$

если же разных классов и, следовательно, указанные определители разных знаков, то

$$\operatorname{Det}|A^{i'}_{i''}| < 0.$$

Этим наше утверждение доказано.

Мы условимся говорить, что два репера имеют *одинаковую ориентацию* или *различные ориентации* в зависимости от того, принадлежат ли они к одному классу или к различным классам.

В случае $n=1$ (прямая линия) репер $(O, \mathbf{e}_1)$ имеет одну ориентацию, если вектор $\mathbf{e}_1$ направлен в данную сторону, и другую, если он направлен в противоположную сторону. Таким образом, выбор ориентации сводится к выбору определенного направления на прямой.

В случае двумерного аффинного пространства, т. е. в сущности в случае обычной плоскости, рассматриваемой в пределах ее аффинных свойств, ориентацию можно представлять себе наглядно в виде определенным образом заданного *направления вращения* на плоскости (против или по часовой стрелке).

Тогда реперами $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ данной ориентации будут те, для которых направление вектора $\mathbf{e}_1$, вращаясь около O в заданную сторону, приходит в совпадение с направлением вектора $\mathbf{e}_2$ в течение первого полуоборота.

Нужно пояснить, что в этой формулировке мы не выходим за пределы аффинных свойств, так как вращаются не целые фигуры, а лишь направления, исходящие из данной точки.

В случае $n=3$ распадение реперов на два класса вполне аналогично их распадению на «правые» и «левые» в обычном пространстве.

Мы говорим, что n-мерное аффинное пространство *ориентировано*, если из двух возможных ориентаций избрана одна определенная (т. е. избран один из двух классов реперов).

Все сказанное относится и к m-мерным плоскостям n-мерного пространства, так как они по своей геометрии являются также аффинными пространствами. Соответствующий m-мерный репер, ориентация которого будет рассматриваться, образуется какой-нибудь точкой O^* и направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ данной m-мерной плоскости. При этом не нужно забывать, что ориентация репера в той же мере зависит от нумерации его векторов, как и от выбора самих этих векторов. Составим направляющий m-вектор $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ данной m-мерной плоскости. Если мы перейдем в ней к другому реперу $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ посредством линейного преобразования с матрицей m-го порядка $\| A^i_{i'} \|$

$$\mathbf{a}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{a}_i,$$

то согласно (35.12)

$$[\mathbf{a}_{1'} \mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] \operatorname{Det} | A^i_{i'} |.$$

Если новый репер имеет ту же ориентацию, что и старый, то определитель, на который множится направляющий m-вектор, будет, как мы видим, положительным; в противном случае — отрицательным. Мы получаем следующий результат.

Все направляющие m-векторы данной m-мерной плоскости, отвечающие m-мерным реперам одинаковой ориентации, отличаются лишь положительными численными множителями; при изменении ориентации репера на обратную направляющий m-вектор приобретает отрицательный численный множитель.

Отсюда вытекает, что *если направляющий m-вектор задан нам с точностью до положительного численного множителя, то у нас определено не только m-мерное направление в пространстве, но и определенная ориентация на каждой m-мерной плоскости этого направления (т. е. из двух классов реперов на ней избран один определенный).*

§ 37. Измерение объемов

Пусть в вещественном n-мерном аффинном пространстве дано некоторое тело D. Отнесем пространство к какой-нибудь аффинной координатной системе $(x^1, \ldots, x^n)$ и составим n-кратный интеграл

$$V_D = \int\limits_D dx^1 \, dx^2 \ldots dx^n, \tag{37.1}$$

распространенный по области D. Мы будем рассматривать лишь такие области D (например, ограниченные кусочно гладкими гиперповерхностями), для которых существование этого интеграла не вызывает сомнений.

При переходе в другую координатную систему $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ получаем в силу (24.20)

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}. \tag{37.2}$$

Аналогичный интеграл имеет вид

$$V'_D = \int\limits_D dx^{1'} dx^{2'} \ldots dx^{n'} = \int\limits_D \left| \frac{\partial (x^{1'}, \ldots, x^{n'})}{\partial (x^1, \ldots, x^n)} \right| dx^1 dx^2 \ldots dx^n =$$

$$= \int\limits_D |\operatorname{Det} | A_i^{i'} || \, dx^1 \ldots dx^n = |\operatorname{Det} | A_i^{i'} || \cdot \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= |\operatorname{Det} | A_i^{i'} || \cdot V_D. \qquad (37.3)$$

Мы воспользовались здесь формулой преобразования переменных под знаком кратного интеграла, причем якобиан преобразования совпадает с $\operatorname{Det} | A_i^{i'} |$, так как из преобразования (37.2) следует, что

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = A_i^{i'}.$$

Итак, интегралы V_D для всех областей D умножаются при переходе в новую координатную систему на общий множитель $|\operatorname{Det} | A_i^{i'} ||$.

Другими словами, интеграл V_D для данного тела D можно рассматривать как относительный инвариант веса -1 с той только разницей, что его преобразование сводится к умножению не на $\operatorname{Det} | A_i^{i'} |$, а на $|\operatorname{Det} | A_i^{i'} ||$ (ср. (35.6)).

Чтобы отметить это, мы будем называть V_D *знакопостоянным относительным инвариантом веса* -1; впрочем, прилагательное «знакопостоянный» мы будем для краткости большей частью опускать.

Относительный инвариант V_D мы будем называть объемом тела D.

Таким образом, в аффинной геометрии объем данного тела не выражается каким-либо определенным числом и меняется вместе с координатной системой. Тем не менее между объемами существуют соотношения, вполне аналогичные обычным и в отличие от самого объема *инвариантные относительно выбора координатной системы.*

1. Равенство объемов двух тел

$$V_{D_1} = V_D, \qquad (37.4)$$

сохраняется при переходе в любую другую координатную систему.

2. Если объем тела D равен сумме объемов тел D_1 и D_2

$$V_D = V_{D_1} + V_{D_2} \qquad (37.5)$$

в одной координатной системе, то это верно и в любой другой.

3. Отношение объемов двух тел D и D'

$$\frac{V_D}{V_{D'}} = k \tag{37.6}$$

есть инвариант преобразования координатной системы.

Все эти утверждения очевидным образом следуют из одинакового для всех V_D закона преобразования (37.3).

Введенное нами понятие объема, вернее, те инвариантные соотношения, к которым оно приводит, хорошо согласуются с нашим обычным представлением об объеме.

Так, при параллельном сдвиге тела D на вектор **a** в положение $\tilde{D}$ его объем, как мы и ожидаем, не изменится. Действительно,

$$V_D = \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n, \quad V_{\tilde{D}} = \int\limits_{\tilde{D}} d\tilde{x}^1 \ldots d\tilde{x}^n.$$

Но при этом $\tilde{x}^i = x^i + a^i$, где a^i — постоянные координаты вектора сдвига **a**. Преобразуя интеграл $V_{\tilde{D}}$ к переменным x^i, получим, очевидно:

$$V_{\tilde{D}} = \int\limits_{\tilde{D}} d\tilde{x}^1 \ldots d\tilde{x}^n = \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n = V_D. \tag{37.7}$$

Далее, для тела D, составленного из (неперекрывающихся) тел D_1 и D_2, объем будет равен сумме объемов этих тел:

$$V_D = V_{D_1} + V_{D_2},$$

так как, очевидно:

$$\int\limits_D dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_{D_1} dx^1 \ldots dx^n + \int\limits_{D_2} dx^1 \ldots dx^n. \tag{37.8}$$

Эти и подобные им свойства объемов показывают, что хотя объем у нас — относительный инвариант и не выражается определенным числом, тем не менее он характеризует пространственную протяженность тела независимо от его формы и места расположения подобно численно выраженному объему в обычном пространстве.

Рассмотрим, в частности, *n-мерный параллелепипед*, построенный на n линейно независимых векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, исходящих из данной точки O. Так мы будем называть множество точек M, для которых радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ разлагается по векторам $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами, меняющимися от 0 до 1:

$$\overrightarrow{OM} = t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^n\mathbf{a}_n,$$

где

$$0 \leqslant t^1 \leqslant 1, \ \ldots, \ 0 \leqslant t^n \leqslant 1. \tag{37.9}$$

В случае $n=1$

$$\overrightarrow{OM} = t^1 \mathbf{a}_1, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1,$$

и получаемый при этом «одномерный параллелепипед» мы будем называть *отрезком* одномерного аффинного пространства (прямой линии).

В случае $n=2$ мы получаем «двумерный параллелепипед»

$$\overrightarrow{OM} = t^1 \mathbf{a}_1 + t^2 \mathbf{a}_2, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1,$$

который будем называть *параллелограммом* в двумерном аффинном пространстве.

Эти определения, очевидно, вполне согласуются с нашими обычными представлениями об отрезке на прямой, полученном откладыванием вектора $\mathbf{a}_1$ от точки O, и о параллелограмме на плоскости, построенном на векторах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, отложенных от точки O.

Совершенно аналогично при $n=3$ наше определение параллелепипеда вполне согласуется с обычным.

Отнесем пространство к какой-нибудь координатной системе $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и вычислим интеграл V_D для нашего n-мерного параллелепипеда. При этом всегда можно считать, что параллелепипед построен, исходя из начала O (так как V_D не меняется при параллельном сдвиге тела D).

Обозначим координаты векторов $\mathbf{a}_k$ через a^i_k, так что

$$\mathbf{a}_k = a^i_k \mathbf{e}_i. \tag{37.10}$$

Вычисление интеграла V_D мы для краткости проведем обходным путем. Примем на время $\mathbf{a}_k$ за векторы $\mathbf{e}_{k'}$ нового репера (с прежним началом O). Тогда *в новой координатной системе* коэффициенты $t^1, \ldots, t^n$ будут служить координатами, причем в пределах нашего параллелепипеда они меняются от 0 до 1. Поэтому *в новой координатной системе*

$$V'_D = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 dt^1 \ldots dt^n = 1. \tag{37.11}$$

Но V_D и V'_D согласно (37.3) связаны соотношением

$$V'_D = |\operatorname{Det} |A^{i'}_i|| \cdot V_D. \tag{37.12}$$

В нашем случае матрица $\| A^i_{i'} \|$, как видно из (37.10), совпадает с матрицей $\| a^i_k \|$, а следовательно, матрица $\| A^{i'}_i \|$ — с ее обратной матрицей, и мы получаем:

$$\mathrm{Det}\,|A_i^{i'}| = \frac{1}{\mathrm{Det}\,|a_k^i|}.$$

Теперь соотношение (37.12) дает (если учесть, что $V'_D = 1$):

$$V_D = |\mathrm{Det}\,|a_k^i||. \tag{37.13}$$

Итак, относительный инвариант V_D в случае n-мерного параллелепипеда выражается модулем определителя $\mathrm{Det}\,|a_k^i|$, составленного из координат векторов, на которых построен параллелепипед.

Между прочим, сам этот определитель является относительным инвариантом веса -1, так как согласно (35.1) он равен $n!\ a^{12\ldots n}$, где $a^{12\ldots n}$ — координата n-вектора $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n]$.

В частности, если D_0 — параллелепипед, построенный на векторах репера $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то аналогично (37.11) $V_{D_0} = 1$, так что

$$V_D : V_{D_0} = |\mathrm{Det}\,|a_k^i||. \tag{37.14}$$

Итак, отношение объемов двух n-мерных параллелепипедов, построенных соответственно на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, равно модулю определителя той матрицы, посредством которой векторы $\mathbf{a}_i$ выражаются через векторы $\mathbf{e}_i$. Этот результат получен в предположении, что векторы $\mathbf{e}_i$ совпадают с векторами репера. Но, в силу того, что отношение двух объемов есть инвариант, наш результат остается верным и в любой координатной системе.

Все сказанное до сих пор об объемах в n-мерном аффинном пространстве полностью переносится и на его m-мерные плоскости, поскольку они также представляют собой аффинные пространства. При этом m-мерные объемы тел D, расположенных на *разных* m-мерных плоскостях, вообще говоря, нельзя сравнивать друг с другом. Действительно, речь идет об относительных инвариантах V_D, меняющихся в зависимости от выбора репера $\{O^*, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, в одном случае — на одной плоскости, в другом случае — на другой. Так как выбор реперов на разных m-мерных плоскостях происходит совершенно независимо, то никаких инвариантных соотношений между значениями V_D на разных плоскостях установить нельзя.

Однако из этого правила имеется исключение. Если речь идет о *параллельных* m-мерных плоскостях, то их можно относить к одному и тому же реперу (если не обращать внимания на положение начала O^*). В самом деле, векторы репера $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, построенного на одной плоскости, можно отложить и на параллельной ей плоскости из какой-нибудь ее точки.

Относя параллельные m-мерные плоскости к одному и тому же (в указанном смысле) *реперу* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, мы можем сравнить значения m-мерных объемов V_D не только для тел D на данной плоскости, но и на различных параллельных ей плоскостях. Отношение двух таких объемов по-прежнему будет инвариантом, и, вообще, все инвариантные соотношения между объемами повторяются и в этом случае по прежним причинам.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть $m=1$; мы рассматриваем связку параллельных прямых; в качестве областей D на этих прямых берем их отрезки (a, b); «одномерные объемы»

$$V_D = \int_a^b dt^1 = b - a \quad (b > a)$$

представляют собой длины этих отрезков, вычисленные при условном выборе направляющего вектора $\mathbf{a}_1$ (общего для всех прямых связки) за единичный вектор. Однако отношения длин отрезков на параллельных прямых будут уже инвариантными, равно как и такие факты, что длина данного отрезка есть сумма длин двух параллельных ему отрезков (если это имеет место при одном выборе вектора $\mathbf{a}$), и т. д.

Пусть $m=2$; мы рассматриваем связку параллельных двумерных плоскостей; двумерные области D берутся на этих плоскостях. Их «двумерные объемы» $V_D = \iint_D dt^1\, dt^2$ — это площади, которые получатся, если условно выбрать в качестве единицы измерения площадь параллелограмма, построенного на направляющих векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ (общих для всех плоскостей связки). Однако отношения площадей параллельно расположенных плоских фигур будут уже инвариантными, равно как и такие факты, что площадь данной плоской фигуры есть сумма площадей параллельных ей плоских фигур, и т. д.

В заключение мы дадим окончательную геометрическую характеристику простого m-вектора.

Задание простого m-вектора, отличного от нуля, равносильно заданию некоторой m-мерной плоскости (с точностью до параллельного сдвига), с определенной ориентацией и с определенным объемом, указанными на ней. Это мы будем кратко называть *геометрической характеристикой* m-вектора. Переходим к доказательству нашего утверждения.

Каждый простой m-вектор, не равный нулю, можно (хотя и неоднозначно) представить в виде косого произведения $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$. Если принять $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ за направляющие векторы некоторой m-мерной плоскости, то эта плоскость определяется с точностью до параллельного сдвига, на ней определяется некоторая ориентация (т. е. ориентация репера $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$) и некоторый m-мерный объем, именно, объем параллелепипеда, построенного на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Мы получаем геометрическую характеристику нашего m-вектора. Однако нужно еще показать, что эта характеристика будет одной и той же независимо от того, каким косым произведением представлен данный m-вектор.

Пусть данный m-вектор представлен косым произведением других векторов $\mathbf{a}_{1'}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$:

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0. \tag{37.15}$$

Мы имеем два равных между собой косых произведения, т. е. можно сказать, отличающихся друг от друга численным множителем $\alpha = 1$. Такое положение вещей разбиралось в § 35 (см. (35.18)) и приводило к тому, что $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ и $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ служили направляющими векторами одной и той же m-мерной плоскости, а следовательно, могли разлагаться одни по другим. Таким образом, и в нашем случае

$$\mathbf{a}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{a}_i. \tag{37.16}$$

Теперь согласно (35.12)

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \cdot \operatorname{Det} |A^i_{i'}|. \tag{37.17}$$

Сравнивая с (37.15), получаем:

$$\operatorname{Det} |A^i_{i'}| = 1. \tag{37.18}$$

Это показывает, во-первых, что реперы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ определяют на m-мерной плоскости одну и ту же ориентацию (так как $\operatorname{Det} |A^i_{i'}| = 1 > 0$) и, во-вторых, что построенные на них параллелепипеды имеют одинаковый объем. В самом деле, отношение этих объемов согласно (37.14) равно $|\operatorname{Det} |A^i_{i'}||$, т. е. единице.

Итак, геометрическая характеристика данного m-вектора действительно не зависит от способа его записи в виде косого произведения и будет, таким образом, вполне определенной.

Теперь нужно показать, что и обратно, *данной геометрической характеристике* отвечает только один простой m-вектор.

Пусть $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ и $[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}]$ — два не равных нулю простых m-вектора с *данной* геометрической характеристикой. Поскольку, таким образом, как $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, так и $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ являются направляющими векторами *заданной* (с точностью до параллельного сдвига) m-мерной плоскости, то одни из них разлагаются по другим; мы снова получаем (37.16), а следовательно, и (37.17). Так как ориентация на m-мерной плоскости нам также задана, то $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и

$\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ должны иметь общую ориентацию, и таким образом

$$\operatorname{Det} | A^{i}_{i'} | > 0. \tag{37.19}$$

Далее, объем в m-мерной плоскости нам также задан, так что объемы параллелепипедов, построенных на $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$, должны быть одинаковыми, т. е. отношение этих объемов равно единице:

$$| \operatorname{Det} | A^{i}_{i'} | | = 1. \tag{37.20}$$

Сравнивая два последних соотношения, получаем:

$$\operatorname{Det} | A^{i}_{i'} | = 1,$$

откуда согласно (37.17) следует:

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m],$$

а это мы и хотели показать. Теперь наше утверждение доказано полностью.

§ 38. Тензорные поля

Мы изучали до сих пор отдельные тензоры. Однако эта точка зрения по существу является только подготовительной и достаточна лишь для рассмотрения простейших вопросов. Как правило, геометрические и физические задачи приводят нас к рассмотрению тензорных полей.

Мы говорим, что в n-мерном аффинном пространстве задано поле тензора $a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$, если для каждой точки M задан определенный тензор указанного строения

$$a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}(M). \tag{38.1}$$

Тензорное поле может быть задано и не во всем пространстве, а только в некоторой его n-мерной области D (и даже только на некоторой m-мерной поверхности, в частности на линии). Это значит, что точка M в (38.1) пробегает не все пространство, а только его область D (или даже m-мерную поверхность), а для остальных точек тензор $a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ не определен. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, подразумевается, что тензорное поле задано в n-мерной области D (в частности, во всем пространстве). Кстати, здесь уместно дать общее определение *n-мерной области D: это такое множество точек, что вместе с каждой точкой x^i_0 к нему принадлежат все точки x^i, для которых $| x^i - x^i_0 | < \varepsilon$, если только $\varepsilon > 0$ взято достаточно малым.* Для различных точек x_0 значения ε, вообще говоря, различны.

Нетрудно было бы показать инвариантность этого определения относительно преобразования аффинной координатной системы x^i.

Если пространство отнесено к определенной координатной системе, то (38.1) можно переписать в виде функциональной зависимости

$$a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} = a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}(x^1, \ldots, x^n), \tag{38.2}$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты точки M. Эта функциональная зависимость предполагается достаточное (для будущих выкладок) число раз непрерывно дифференцируемой.

Геометрическое и физическое значение понятия тензорного поля заключается в том, что соответствующий геометрический объект обычно меняется от точки к точке (как, например, кривизна кривой или поверхности), а физический, кроме того, зависит и от момента времени. Так, например, напряженности электрического и магнитного полей зависят от точки, где они наблюдаются, и от момента времени. В связи с этим эти напряженности задаются в теории относительности тензорным полем в четырехмерном пространстве (выражающем пространственно-временну́ю протяженность материи).

Над тензорными полями мы производим все операции тензорной алгебры, установленные нами для отдельных тензоров. Это не требует особого обоснования, так как мы подразумеваем, что эти операции производятся над тензорами наших полей в каждой точке M по отдельности (а в этом случае каждое тензорное поле представлено отдельным тензором).

Так, например, сложение двух данных тензорных полей $a_{jk}^i(M)$, $b_{jk}^i(M)$ обозначает построение нового тензорного поля

$$c_{jk}^i(M) = a_{jk}^i(M) + b_{jk}^i(M)$$

путем сложения в каждой точке M тех тензоров, которыми в этой точке представлены наши тензорные поля.

То же самое относится и ко всем другим операциям тензорной алгебры. Разумеется, тензорные поля, участвующие в операциях, предполагаются определенными в одной и той же области D, которую и пробегает точка M.

Но для тензорных полей возможна и еще одна инвариантная операция — *абсолютное дифференцирование*, вместе с которой мы переходим из области тензорной алгебры в область тензорного анализа.

Пусть в области D, где определено тензорное поле $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$, проведена кривая, т. е. дано геометрическое место точек $M = M(t)$, или в координатной записи

$$x^i = x^i(t), \tag{38.3}$$

где параметр t пробегает определенный интервал изменения. Функции $x^i(t)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, один раз. Вдоль нашей кривой координаты тензора $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ будут являться, как видно из (38.2) и (38.3), сложными функциями параметра t. Вычисляем дифференциалы этих функций

$$da^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} dx^i. \tag{38.4}$$

В правой части подразумевается суммирование по i, так что написанное неравенство есть просто формула полного дифференциала.

Мы утверждаем, что $da^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ *образуют тензор того же строения, что и* $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$; *этот тензор мы будем называть абсолютным дифференциалом тензора* $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ *(при данном бесконечно малом смещении по данной кривой).*

Проверка нашего утверждения производится просто. Выпишем закон преобразования координат тензора нашего поля при переходе в новую координатную систему

$$a^{j'_1 \dots j'_l}_{i'_1 \dots i'_k}(M) = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}(M). \tag{38.5}$$

Конечно, $A^{j'_1}_{j_1}$ и т. д. — величины постоянные, не зависящие от точки M, бегущей по кривой, а следовательно, и от параметра t. Дифференцируя по t, получим:

$$da^{j'_1 \dots j'_l}_{i'_1 \dots i'_k} = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots da^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}. \tag{38.6}$$

Этим наше утверждение доказано.

Рассмотрим теперь в каждой точке M совокупность частных производных от функций (38.2) по всем их аргументам, причем введем для них обозначения

$$\nabla_i a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i}. \tag{38.7}$$

Мы утверждаем, что $\nabla_i a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ *образуют тензор с тем же числом верхних индексов и на единицу бо́льшим числом нижних индексов, чем у исходного тензора, причем увеличение происходит за счет индекса дифференцирования* i.

Этот тензор мы будем называть *абсолютной производной* исходного тензора $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$. Так как абсолютная производная определена в каждой точке M, то она в свою очередь образует тензорное поле.

Проверку нашего утверждения проводим следующим образом. Положение точки M можно определять как старыми координатами x^i, так и новыми координатами $x^{i'}$, а потому члены равенства (38.5) можно рассматривать и как функции от x^i, и как функции от $x^{i'}$.

Дифференцируя (38.5) почленно по координате $x^{i'}$, получим:

$$\frac{\partial a^{j'_1 \ldots j'_l}_{i'_1 \ldots i'_k}}{\partial x^{i'}} = A^{j'_1}_{j_1} \ldots A^{i_1}_{i'_1} \ldots \frac{\partial a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^{i'}} = A^{j'_1}_{j_1} \ldots A^{i_1}_{i'_1} \ldots \frac{\partial a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

В последнем выражении мы использовали правило дифференцирования сложной функции (по i происходит суммирование).

Так как по общим формулам

$$x^i = A^i_{i'} \cdot x^{i'},$$

то

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A^i_{i'}$$

и предыдущий результат можно переписать (пользуясь обозначением (38.7)):

$$\nabla_{i'} a^{j'_1 \ldots j'_l}_{i'_1 \ldots i'_k} = A^{j'_1}_{j_1} \ldots A^{i_1}_{i'_1} \ldots A^i_{i'} \nabla_i a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}. \tag{38.8}$$

Мы видим, что величины $\nabla_i a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ действительно преобразуются по тензорному закону.

Заметим, что абсолютный дифференциал можно брать и в том случае, когда поле тензора задано хотя бы только вдоль той кривой, вдоль которой этот дифференциал вычисляется. Но для вычисления абсолютной производной нужно, чтобы поле тензора было задано в n-мерной области, по крайней мере, в некоторой окрестности данной точки.

ГЛАВА III

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО n ИЗМЕРЕНИЙ

§ 39. Понятие о евклидовом пространстве

Мы уже упоминали о том, что аффинная геометрия может быть построена на основе евклидовой путем отвлечения от метрических свойств пространства. Однако мы идем обратным путем: аффинную геометрию мы построили на основе самостоятельной аксиоматики, а переход к евклидовой геометрии совершим путем дополнительного включения метрических свойств. Это проще всего сделать, введя в n-мерном аффинном пространстве *скалярное произведение* векторов, что повлечет за собой и все другие метрические свойства и будет означать превращение нашего пространства в евклидово.

Для этой цели зададимся в n-мерном аффинном пространстве некоторой билинейной скалярной функцией $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ двух векторных аргументов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ (§ 26). Мы потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла *условию симметрии*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y},\mathbf{x}) \tag{39.1}$$

и условию невырожденности, которое заключается в том, что *для каждого вектора* $\mathbf{x} \neq 0$ *можно найти такой вектор* $\mathbf{y}$, *что*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq 0. \tag{39.2}$$

В остальном функцию $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ мы выбираем произвольно, но затем уже раз навсегда присваиваем ее нашему пространству и в дальнейшем менять не будем.

Евклидовым пространством n измерений мы будем называть n-мерное аффинное пространство, в котором задана раз навсегда фиксированная билинейная скалярная функция двух векторных аргументов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, *удовлетворяющая условиям симметрии и невырожденности.*

Эту функцию векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ мы будем называть их *скалярным произведением* и обозначать просто $\mathbf{xy}$ или $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (вместо $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$).

Скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$ определяется формулой

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\mathbf{x}. \tag{39.3}$$

Два вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ будут называться *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = 0. \tag{39.4}$$

Длиной вектора $\mathbf{x}$ мы будем называть $\sqrt{\mathbf{x}^2}$ и обозначать ее будем $|\mathbf{x}|$:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2}. \tag{39.5}$$

Расстоянием между двумя точками A, B мы будем называть длину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$AB = \sqrt{\mathbf{x}^2}, \text{ где } \mathbf{x} = \overrightarrow{AB}. \tag{39.6}$$

Вообще, как мы увидим, из факта существования скалярного произведения векторов можно вывести метрические свойства n-мерного евклидова пространства, причем в одном частном случае мы получим в точности обычное пространство.

Скалярное произведение, как и всякая билинейная функция двух векторов, обладает свойствами

$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), \qquad (\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

которыми мы будем широко пользоваться. Конечно, относительно второго аргумента оно обладает такими же свойствами.

Евклидовы пространства распадаются на два больших класса: *вещественные и комплексные*. В самом деле, евклидово пространство можно строить как на базе *вещественного* аффинного пространства, так и *комплексного*. Соответствующие обозначения: R_n и R_n^+, где n-размерность.

В первом случае мы сохраняем прежнее соглашение, по которому в теории вещественного аффинного пространства все рассматриваемые числа считаются вещественными. В частности, и скалярное произведение $\mathbf{x}\mathbf{y}$ двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, как мы будем подразумевать, принимает лишь вещественные численные значения. Полученное при этом евклидово пространство также будет называться *вещественным*. *Вещественные евклидовы пространства* в свою очередь разделяются на два класса: *собственно евклидовы*, в которых для любого вектора $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\theta}$:

$$\mathbf{x}^2 > 0, \tag{39.7}$$

и *псевдоевклидовы*, в которых $\mathbf{x}^2$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Собственно евклидовы пространства по своей геометрии вполне аналогичны обычному пространству и отличаются от него лишь числом измерений: при $n=3$ мы получаем в точности обычную стереометрию, равно как при $n=2$ — обычную планиметрию, а при $n=1$ — геометрию на обычной прямой.

Псевдоевклидовы пространства по характеру своей метрики обладают весьма своеобразными чертами, не имеющими аналогов в обычной геометрии. Укажем уже сейчас, что, хотя подкоренное выражение $\mathbf{x}^2$ в (39.5) и вещественное, но может принимать в псевдоевклидовом случае и положительные, и отрицательные, и нулевые значения, а значит, *длина вектора* $|\mathbf{x}|$ *может быть и вещественной, и чисто мнимой, и нулем.* Мы условимся, между прочим, в первом случае брать $|\mathbf{x}|$ положительной, а во втором случае — с положительным коэффициентом при i. Тогда умножение вектора $\mathbf{x}$ на *положительное* число означает умножение $|\mathbf{x}|$ на то же число. Таким образом, отрезки AB в псевдоевклидовом пространстве будут трех сортов: *вещественной, чисто мнимой и нулевой* длины (причем последний случай, как мы увидим, возможен и без совпадения точек A, B). Заметим, что наличие мнимых длин (расстояний) в псевдоевклидовом пространстве будет являться *единственным* нарушением нашего общего соглашения о том, что в вещественном пространстве рассматриваются лишь вещественные численные значения.

Псевдоевклидово пространство играет основную роль в теории относительности, причем разнотипность отрезков вещественной и чисто мнимой длины отражает разнотипность пространственных и временных «расстояний».

При данном числе измерений n собственно евклидово пространство будет по существу *единственным*, т. е. все другие будут с ним изоморфны. Напротив, псевдоевклидовых пространств будет целых n, различных по своим свойствам.

Во втором, комплексном, случае евклидово пространство строится на базе *комплексного* аффинного пространства. Рассматриваемые числа считаются комплексными, причем тогда, конечно, и функция $\mathbf{xy}$ принимает комплексные значения; евклидово пространство называется в этом случае *комплексным*. Расстояния AB будут комплексными числами (определенными с точностью до знака). Комплексное евклидово пространство при данном числе измерений n будет, как мы увидим, единственным (с точностью до изоморфизма).

Возвращаемся к общему случаю. Вообще задание билинейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ равносильно, как мы знаем, заданию дважды ковариантного тензора φ_{ij} ее коэффициентов

$$\varphi_{ij}=\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j), \qquad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi_{ij}x^iy^j.$$

В частности, в случае скалярного произведения $\mathbf{xy}$ тензор коэффициентов мы будем обозначать g_{ij} и называть *метрическим тензором* нашего евклидова пространства. Тогда соответственно

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \tag{39.8}$$

$$\mathbf{xy} = g_{ij}x^iy^j. \tag{39.9}$$

Координаты метрического тензора представляют собой, таким образом, попарные скалярные произведения векторов репера. В частности, в случае $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ мы получаем скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$, который выражается *квадратичной формой*

$$\mathbf{x}^2 = g_{ij}x^ix^j. \tag{39.10}$$

Условие *симметрии*, наложенное нами на скалярное произведение

$$\mathbf{xy} = \mathbf{yx},$$

равносильно, как мы знаем, симметричности тензора коэффициентов, в данном случае

$$g_{ij} = g_{ji}. \tag{39.11}$$

Условие *невырожденности*, как оно было нами формулировано, заключается в том, что для каждого вектора $\mathbf{x} \neq 0$ найдется неортогональный ему вектор $\mathbf{y}$, т. е. *не существует векторов* $\mathbf{x} \neq 0$, *ортогональных ко всем векторам пространства.*

Если на минуту допустить, что это условие не соблюдается (т. е., как мы будем говорить, происходит вырождение метрики), то существует такой вектор $\mathbf{x} \neq 0$, что

$$\mathbf{xy} = 0 \tag{39.12}$$

при любом $\mathbf{y}$; или в координатной записи:

$$g_{ij}x^iy^j = 0 \tag{39.13}$$

при любых $y^1, \ldots y^n$. Это значит, что коэффициенты при y^j должны по отдельности обращаться в нуль:

$$g_{ij}x^i = 0. \tag{39.14}$$

Так как $\mathbf{x} \neq 0$ и, значит, все x^i одновременно в нуль не обращаются, то система n однородных линейных уравнений (39.14) с n неизвестными x^i имеет ненулевые решения, а значит,

$$\operatorname{Det} | g_{ij} | = 0. \tag{39.15}$$

Обратно, если имеет место последнее равенство, то можно найти ненулевое решение $x^1, \ldots, x^n$ системы (39.14), для которого, очевидно, при любых $y^1, \ldots, y^n$ имеет место (39.13). В результате вектор $\mathbf{x}$ будет ортогонален ко всем $\mathbf{y}$, и происходит вырождение метрики.

Итак, для вырождения метрики необходимо и достаточно обращение в нуль $\mathrm{Det}\,|g_{ij}|$.

Тем самым условие невырожденности равносильно условию

$$\mathrm{Det}\,|g_{ij}| \neq 0. \tag{39.16}$$

Мы можем теперь разюмировать: *внесение в n-мерное аффинное пространство операции скалярного умножения векторов равносильно заданию в нем метрического тензора g_{ij}, удовлетворяющего условиям симметрии* (37.11) *и невырожденности* (39.16) (а в остальном выбранного произвольно).

Заметим, что достаточно потребовать соблюдения условия (39.16) в *одной* координатной системе; из нашего рассуждения видно, что отсюда следует невырожденность скалярного произведения, а тем самым соблюдение условия (39.16) в *любой* координатной системе. Впрочем, это нетрудно проверить и прямой выкладкой. В самом деле, закон преобразования g_{ij} имеет вид

$$g_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}.$$

Если считать номером строки в матрицах g_{ij}, $g_{i'j'}$ первый индекс, в матрице $A^i_{i'}$ — нижний индекс, а в матрице $A^j_{j'}$ — верхний индекс, то можно сказать, что матрица $\|g_{i'j'}\|$ получена умножением матриц $\|A^i_{i'}\|$, $\|g_{ij}\|$, $\|A^j_{j'}\|$ в порядке их записи. Но отсюда следует, что определители матриц также перемножаются, причем определители матриц $\|A^i_{i'}\|$, $\|A^j_{j'}\|$, конечно, равны. В результате

$$\mathrm{Det}\,|g_{i'j'}| = (\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|)^2 \cdot \mathrm{Det}\,|g_{ij}|. \tag{39.17}$$

Другими словами, $\mathrm{Det}\,|g_{ij}|$ *есть относительный инвариант веса* 2. Ясно, что обращение его в нуль (или, наоборот, неравенство нулю) *в одной координатной системе* влечет тот же самый результат *в любой координатной системе.*

§ 40. Тензорная алгебра в евклидовом пространстве

Все, что было сказано о тензорных операциях в аффинном пространстве, остается, разумеется, верным и для евклидова пространства. При этом появляется, однако, и кое-что новое, а именно, исчезает принципиальная разница между ковариантными и контравариантными индексами и возникает возможность переводить одни в другие.

Составим прежде всего в каждой координатной системе матрицу величин g^{ij}, обратную матрице координат g_{ij} метрического тензора. В силу условия невырожденности обратная матрица существует, а в силу условия симметрии будет симметрической вместе с матрицей g_{ij}.

Мы утверждаем, что величины g^{ij} образуют дважды контравариантный тензор, т. е. преобразуются по закону

$$g^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} g^{ij}. \tag{40.1}$$

Проще всего показать это, обратив постановку вопроса: построим матрицу g^{ij}, обратную матрице g_{ij}, *в одной координатной системе*; затем, переходя к любой другой (штрихованной) координатной системе, преобразуем g^{ij} по закону (40.1) и покажем, что полученная при этом матрица $g^{i'j'}$ будет обратной матрице $g_{i'j'}$. Тот факт, что g^{ij} есть матрица, обратная g_{ij}, мы запишем уравнениями

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \tag{40.2}$$

выражающими, что произведение наших матриц дает единичную матрицу. При переходе в новую координатную систему мы учтем, что g_{jk} — координаты дважды ковариантного тензора, g^{ij} мы условились преобразовывать как координаты дважды контравариантного тензора, а значит, у нас записано, что результат свертывания двух этих тензоров по индексу j дает единичный тензор δ_k^i. Соотношения (40.2) имеют, таким образом, инвариантный характер, так что в новой координатной системе получаем снова

$$g^{i'j'} g_{j'k'} = \delta_{k'}^{i'},$$

а это показывает, что матрица $g^{i'j'}$, полученная преобразованием (40.1), действительно оказывается обратной матрице $g_{i'j'}$.

Дважды контравариантный тензор g^{ij} мы тоже будем называть метрическим тензором, но, в отличие от g_{ij}, контравариантным.

Теперь покажем, как в евклидовом пространстве каждый контравариантный индекс можно «переделать» в ковариантный, и обратно. Начнем с одновалентного контравариантного тензора x^i. Путем свертывания с метрическим тензором его можно «переделать» в ковариантный тензор:

$$x_i = g_{ij} x^j. \tag{40.3}$$

Поскольку метрический тензор евклидова пространства задан раз навсегда, то эта операция «*опускания индекса*» у тензора x^i определена однозначно.

Обратно, любой одновалентный ковариантный тензор x_j можно «переделать» в контравариантный путем свертывания с контравариантным метрическим тензором:

$$x^i = g^{ij} x_j. \tag{40.4}$$

Эта операция «*поднятия индекса*» также однозначно определена. С алгебраической точки зрения опускание индекса представляет собой линейное преобразование x^i в x_i при помощи матрицы g_{ij}, а поднятие индекса — преобразование x_i в x^i при помощи матрицы g^{ij}. Так как матрицы g_{ij} и g^{ij} взаимно обратные, то операции опускания и поднятия индекса взаимно уничтожают друг друга. Так, например, сначала «опустив» и затем «подняв» индекс у x^i, мы возвращаемся *к прежнему* контравариантному тензору x^i.

Координаты контравариантного тензора x^i, как мы знаем, всегда можно истолковать как координаты некоторого вектора

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{40.5}$$

Спрашивается, какое отношение к вектору $\mathbf{x}$ имеет тензор x_i, полученный из тензора x^i опусканием индекса. На этот вопрос легко ответить, пользуясь (39.8) и переписав (40.3) в виде

$$x_i = g_{ij} x^j = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) x^j = (\mathbf{e}_i,\ x^j \mathbf{e}_j),$$

т. е. окончательно

$$x_i = \mathbf{x}\mathbf{e}_i. \tag{40.6}$$

Итак, опускание индекса у координат x^i вектора $\mathbf{x}$ приводит нас к скалярным произведениям этого вектора на векторы репера. Эти скалярные произведения мы будем называть ковариантными координатами x_i вектора $\mathbf{x}$.

Очевидно, ковариантные координаты x_i однозначно определяются по вектору $\mathbf{x}$, как и обратно, по ним можно однозначно определить этот вектор, перейдя предварительно к контравариантным координатам x^i поднятием индекса.

По той же схеме (40.3) и (40.4) производятся опускание и поднятие индекса (любого по выбору) у многовалентных тензоров. Единственное, что к этому нужно добавить, — это необходимость изменить нумерацию индексов у тензора в евклидовом пространстве. В самом деле, индексы тензора отличались друг от друга: контравариантные — порядком их записи наверху, а ковариантные — внизу. Но если мы, например, второй верхний индекс опускаем, то нельзя дать общего правила, на какое место его следует ставить внизу (второе место внизу может быть уже занято или внизу может и совсем не быть индексов).

Чтобы избежать связанной с этим неопределенности в обозначениях, мы часто будем *нумеровать места индексов верхних и нижних в совокупности*, так что каждому номеру отвечает лишь один индекс, стоящий или наверху или внизу. Если например, 3-й индекс стоит наверху, то третье место внизу остается «пустым», что отмечается точкой, и наоборот. Например, $a_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot k\cdot}$ обозначает тензор, у которого 1-й и 2-й индексы ковариантные, 3-й — контравариантный, 4-й — снова ковариантный. Если 1-й индекс мы захотим «поднять», то для него заготовлено свободное место наверху, и мы получаем:

$$a^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot l} = g^{ip}\, a_{pj\cdot l}^{\cdot\cdot k}. \tag{40.7}$$

Аналогично, если мы захотим опустить верхний индекс, то получим:

$$a_{ijkl} = g_{kp}\, a_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot p}. \tag{40.8}$$

Отметим важный пример: поднятие одного, например 2-го, индекса у g_{ij} дает единичный тензор:

$$g_{i\cdot}^{\cdot j} = g^{jp} g_{ip} = \delta_i^j, \tag{40.9}$$

для которого мы сохраняем прежнее обозначение.

Если мы теперь поднимаем и нижний индекс, то получим:

$$g^{ip}\delta_p^j = g^{ij},$$

так как при суммировании уцелеет лишь один член, для которого $p = j$. Итак, поднимая оба индекса у метрического тензора, мы получаем контравариантный метрический тензор.

Еще один пример: пусть аффинор $\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}$ задан посредством тензора a^i_j (§ 27), или, как мы теперь будем писать, $a^i_{\cdot j}$, считая верхний индекс первым, а нижний — вторым. Тогда $y^i = a^i_{\cdot j} x^j$. Опуская индекс i, получаем:

$$y_i = a_{ij} x^j, \quad \text{где} \quad a_{ij} = g_{ip} a^p_{\cdot j}. \tag{40.10}$$

Таким образом, аффинор $\mathfrak{A}$ можно задать и дважды ковариантным тензором a_{ij}, причем его координаты образуют матрицу преобразования *контравариантных* координат вектора-аргумента в *ковариантные* координаты вектора-функции. В частности, аффинор $\mathfrak{A}$ называется *симметрическим* или *кососимметрическим* в случае симметричности и кососимметричности тензора a_{ij}. Следует подчеркнуть, что эти определения могут быть формулированы лишь в евклидовом пространстве и не имеют никакого смысла в аффинном пространстве, где опускание индексов невозможно. Это относится и к понятию ковариантных координат вектора.

§ 41. Плоскости в n-мерном евклидовом пространстве

Мы понимаем под m-мерной плоскостью в n-мерном евклидовом пространстве то же самое, что и в n-мерном аффинном пространстве (на базе которого евклидово пространство построено). Нам известно, что такая m-мерная плоскость сама является m-мерным аффинным пространством. Но теперь на ней (как и во всем вмещающем пространстве) определено скалярное произведение **xy** для любых двух векторов **x**, **y**. Казалось бы, можно утверждать, что плоскость евклидова пространства тоже представляет собой евклидово пространство меньшего числа измерений. Однако это не всегда верно. Может случиться, что скалярное произведение на данной m-мерной плоскости *не удовлетворяет условию невырожденности* (хотя во вмещающем пространстве это условие и удовлетворяется). Другими словами, возможно, что на данной плоскости найдется вектор $\mathbf{x} \neq 0$, ортогональный *ко всем векторам этой плоскости*, но, конечно, не ко всем векторам пространства. В этом случае метрику на плоскости мы будем называть *вырожденной*, а соответствующую плоскость с такой метрикой будем называть *изотропной*.

Изотропную плоскость мы за евклидово пространство не признаем ввиду того, что в определение последнего входит условие невырожденности; здесь же оно нарушено.

Очевидно, все остальные свойства скалярного произведения в n-мерном пространстве имеют место и на любой плоскости этого пространства.

Забегая вперед, следует сказать, что изотропные плоскости представляют собой исключение; как правило, плоскости являются неизотропными, т. е. несут на себе невырожденную метрику, и, следовательно, по своей геометрии являются евклидовыми пространствами соответствующего числа измерений. Кроме того, в случае *собственно евклидова* пространства вообще не существует изотропных плоскостей; в частности, их нет в обычном пространстве, в связи с чем нам трудно дается наглядное представление об этих плоскостях.

Чтобы показать, что в собственно евклидовом пространстве все плоскости неизотропные, рассмотрим какую-нибудь m-мерную плоскость; на ней, как и во всем пространстве, соблюдается условие (39.7):

$$\mathbf{x}^2 > 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{x} \neq 0. \tag{41.1}$$

А в этом случае на плоскости невозможен вектор $\mathbf{x} \neq 0$, ортогональный ко всем векторам плоскости, так как такой вектор был бы ортогонален, в частности, и к себе и мы в противоречие с условием (41.1) имели бы

$$\mathbf{x}^2 = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0. \tag{41.2}$$

Вектор $\mathbf{x} \neq 0$, для которого $\mathbf{x}^2 = 0$ и который, следовательно, ортогонален к самому себе, называется *изотропным*. В собственно евклидовых пространствах такие векторы, как мы только что сейчас видели, невозможны, зато в псевдоевклидовых и комплексных евклидовых пространствах они встречаются обязательно.

Пусть m-мерная плоскость задана начальной точкой O^* и направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Принимая эти векторы за векторы аффинного репера в плоскости, составим их скалярные произведения:

$$g^*_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{41.3}$$

В соответствии с (39.8) $g^*_{\alpha\beta}$ можно принять за координаты метрического тензора на нашей плоскости, если только соблюдается условие невырожденности (39.16):

$$\mathrm{Det}\,|\,g^*_{\alpha\beta}\,| \neq 0. \tag{41.4}$$

В этом случае плоскость *неизотропная* и несет на себе евклидову геометрию с метрическим тензором (41.3). Если же оказывается

$$\mathrm{Det}\,|\,g^*_{\alpha\beta}\,| = 0, \tag{41.5}$$

то плоскость будет *изотропной* и несет на себе вырожденную метрику.

Пусть теперь у нас имеется прямая линия с направляющим вектором $\mathbf{a}(a^1, \ldots, a^n) \neq 0$. Рассмотрим совокупность всех векторов $\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n)$, ортогональных к данной прямой, т. е. ортогональных ко всем ее векторам. Очевидно, для этого достаточно, чтобы векторы $\mathbf{x}$ были ортогональны к $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = 0, \tag{41.6}$$

т. е.

$$g_{ij}a^i x^j = 0.$$

Обозначая через a_j ковариантные координаты вектора $\mathbf{a}$ и пользуясь (40.3) (в применении к a^i), можно записать:

$$a_j x^j = 0. \tag{41.7}$$

Таким образом, координаты x^j векторов $\mathbf{x}$ должны удовлетворять линейному уравнению (41.7). Откладывая векторы $\mathbf{x}$ от начала O, мы видим, что концы их (обладающие теми же координатами x^j) образуют *гиперплоскость* с уравнением (41.7), проходящую через начало O. *Все векторы этой гиперплоскости, очевидно, ортогональны ко всем векторам данной прямой; такую гиперплоскость мы будем называть ортогональной к данной прямой.*

Итак, через точку O (и совершенно так же через любую заданную точку) всегда можно провести гиперплоскость, ортогональную к данной прямой, и притом единственным образом. При этом нужно различать *основной случай*, когда данная прямая *неизотропная*, т. е. $\mathbf{a}^2 \neq 0$, и *исключительный случай*, когда она *изотропная*, т. е. $\mathbf{a}^2 = 0$. (Мы использовали условия (41.4) и (41.5), записанные для «одномерной плоскости», $m=1$.) Будем для простоты рассматривать прямую и ортогональную к ней гиперплоскость, проходящие через общую точку O.

В первом случае прямая линия не лежит в ортогональной к ней гиперплоскости, что, конечно, представляется нам само собой разумеющимся. Действительно, вектор $\mathbf{a}$ не может лежать в гиперплоскости, построенной согласно (41.6), так как иначе он был бы ортогонален самому себе, а это невозможно в силу $\mathbf{a}^2 \neq 0$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}$ будет линейно независимым от $n-1$ направляющих векторов гиперплоскости $b_1, \ldots, b_{n-1}$, а следовательно, все эти векторы в совокупности

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \tag{41.8}$$

можно принять за векторы аффинного репера в пространстве. Далее, наша гиперплоскость сама будет неизотропной: если допустить противное, то в гиперплоскости найдется вектор $\mathbf{x} \neq 0$, ортогональный ко всем векторам гиперплоскости, в частности, к направляющим векторам $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}$. Но, кроме того, вектор $\mathbf{x}$, как лежащий в нашей гиперплоскости, будет ортогонален и к $\mathbf{a}$, т. е. ко всем векторам репера (41.8), а тем самым и ко всем векторам пространства. Но это невозможно в силу условия невырожденности.

Итак, *если данная прямая неизотропная, то ортогональная ей гиперплоскость тоже неизотропная и не содержит данной прямой (даже при наличии у них общей точки). При этом всегда можно построить репер* (41.8), *один вектор которого принадлежит прямой, а остальные $n-1$ векторов ему ортогональны и принадлежат гиперплоскости.*

Во втором случае, когда данная прямая изотропная, ее направляющий вектор $\mathbf{a}$ входит в число векторов $\mathbf{x}$, к нему ортогональных (в силу $\mathbf{a}^2=0$), и принадлежит тем самым ортогональной гиперплоскости. Поэтому, если изотропная прямая и ортогональная к ней гиперплоскость проведены через общую точку O, то вместе с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и сама прямая принадлежит гиперплоскости. Кроме того, гиперплоскость тоже оказывается изотропной, так как содержит вектор $\mathbf{a}$, ортогональный ко всем ее векторам.

Итак, если данная прямая изотропная, то ортогональная ей гиперплоскость тоже изотропная и при наличии общей точки проходит через данную прямую.

Эта картина резко противоречит нашим привычным представлениям, воспитанным на обычной (т. е. трехмерной, собственно евклидовой) геометрии. Мы получаем здесь первое серьезное предупреждение о непригодности наших привычных представлений в области псевдоевклидовой (и комплексной евклидовой) геометрии. Правда, это относится лишь к метрическим свойствам пространства; в области аффинных свойств разницы нет, так как все типы евклидовых пространств строятся на базе одного и того же (вещественного или комплексного) аффинного пространства.

То, что было сейчас сделано для прямой линии («одномерной плоскости»), нетрудно повторить и для любой m-мерной плоскости. Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ — направляющие векторы этой плоскости. Рассмотрим совокупность всех векторов $\mathbf{x}$, ортогональных к нашей плоскости, т. е. ортогональных ко всем ее векторам. Но для этого достаточно, чтобы векторы $\mathbf{x}$ были ортогональны к ее направляющим векторам, т. е.

$$\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 0, \ \mathbf{a}_2\mathbf{x} = 0, \ \ldots, \ \mathbf{a}_m\mathbf{x} = 0. \tag{41.9}$$

Запишем эти соотношения аналогично (41.7):

$$a_{(1)j}x^j = 0, \ \ a_{(2)j}x^j = 0, \ \ldots, \ a_{(m)j}x^j = 0, \tag{41.10}$$

где индексы в скобках обозначают номера соответствующих векторов. Уравнения (41.10) линейно независимы, так как в противном случае имелась бы линейная зависимость между векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, ковариантные координаты которых служат коэффициентами уравнений, а это невозможно, так как направляющие векторы всегда берутся линейно независимыми. Откладывая векторы $\mathbf{x}$ от начала O, мы видим, что концы их (обладающие теми же координатами x^j) образуют $n-m$-мерную плоскость. В самом деле, m линейно независимых уравнений (41.10) всегда можно переписать в виде, разрешенном относительно m переменных, а такая система уравнений определяет $n-m$-мерную плоскость (§ 33).

Каждый вектор этой $n-m$-мерной плоскости ортогонален к каждому вектору у исходной m-мерной плоскости; такие плоскости мы будем называть *ортогональными между собой.*

Итак, через начало O (как и вообще через любую точку) проходит одна и только одна $n-m$-мерная плоскость, ортогональная к данной m-мерной плоскости. Будем считать для простоты, что обе эти плоскости имеют общую точку O.

Здесь имеются две возможности. Если *m-мерная плоскость — неизотропная, то $n-m$-мерная плоскость — тоже неизотропная; между собой эти плоскости не пересекаются* *), *и их направляющие векторы*

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m & (\text{для } m\text{-мерной плоскости}), \\ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m} & (\text{для } n-m\text{-мерной плоскости}) \end{array}\right\} \tag{41.11}$$

можно принять в совокупности за векторы пространственного репера.

Если же m-мерная плоскость — изотропная, то $n-m$-мерная плоскость тоже изотропная; эти плоскости пересекаются между

---

*) То есть не имеют общих точек кроме O.

собой, их направляющие векторы (в совокупности) линейно зависимы и, значит, не могут служить векторами пространственного репера.

Для доказательства этих утверждений разберем две возможности: случай непересечения и случай пересечения наших плоскостей.

В случае непересечения векторы (41.11) линейно независимы. В самом деле, если предположить линейную зависимость

$$\alpha^1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha^m\mathbf{a}_m+\beta^1\mathbf{b}_1+\ldots+\beta^{n-m}\mathbf{b}_{n-m}=0, \qquad (41.12)$$

то из нее вытекает существование не равного нулю вектора

$$\alpha^1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha^m\mathbf{a}_m=-\beta^1\mathbf{b}_1-\ldots-\beta^{n-m}\mathbf{b}_{n-m}, \qquad (41.13)$$

общего для обеих плоскостей. Отсюда вытекает существование и общей прямой, а именно проходящей через общую точку O в направлении этого общего вектора, что противоречит непересечению наших плоскостей. Следовательно, векторы (41.11) линейно независимы, и их можно принять за векторы пространственного репера. Запишем для этого репера условие невырожденности (39.16):

$$\operatorname{Det}|g_{ij}|=\operatorname{Det}|\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j|\neq 0. \qquad (41.14)$$

В нашем случае

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m=\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m; \ \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n=\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}, \qquad (41.15)$$

причем векторы $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_j$ ортогональны между собой (как принадлежащие ортогональным плоскостям). Матрица $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ имеет вид

$$\left\|\begin{array}{c|c} \mathbf{a}_p\mathbf{a}_q & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{b}_r\mathbf{b}_s \end{array}\right\|, \qquad (41.16)$$

а следовательно,

$$\operatorname{Det}|\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j|=\operatorname{Det}|\mathbf{a}_p\mathbf{a}_q|\cdot\operatorname{Det}|\mathbf{b}_r\mathbf{b}_s|, \qquad (41.17)$$

и условие невырожденности (41.14) принимает вид

$$\operatorname{Det}|\mathbf{a}_p\mathbf{a}_q|\cdot\operatorname{Det}|\mathbf{b}_r\mathbf{b}_s|\neq 0. \qquad (41.18)$$

Тем самым отличен от нуля и каждый из множителей, а значит (согласно (41.4)), обе плоскости неизотропные.

В случае пересечения, т. е. в случае существования у наших плоскостей, по крайней мере, одной общей прямой, ее направляющий вектор $\mathbf{c}$ также будет для них общим. Поэтому $\mathbf{c}$ можно разложить как по $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, так и по $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}$. Приравнивая эти разложения, получаем линейную зависимость между направляющими векторами обеих плоскостей в совокупности. Далее, так как вектор $\mathbf{c}$ принадлежит m-мерной плоскости, то он ортогонален к $n-m$-мерной плоскости, и наоборот, так как он принадлежит $n-m$-мерной плоскости, то ортогонален к m-мерной.

Итак, $\mathbf{c}$ принадлежит каждой из двух плоскостей и в то же время к ней ортогонален; отсюда вытекает, что каждая из плоскостей — изотропная.

В итоге из проведенного исследования случаев непересечения и пересечения видно, что первый имеет место тогда и только тогда, когда исходная m-мерная плоскость неизотропная, а второй — когда она изотропная.

Этим наши утверждения доказаны.

§ 42. Ортонормированный репер

В случае евклидова пространства уже не все аффинные реперы равносильны по своим геометрическим свойствам, как это было в аффинном пространстве. Среди них можно выделить теперь геометрически наиболее простые, так называемые *ортонормированные* реперы, которые в случае обычного пространства соответствуют прямоугольным декартовым координатам.

Нам понадобится следующая тривиальная лемма: *в евклидовом пространстве не могут быть изотропными все векторы,* т. е. не может быть, чтобы $\mathbf{x}^2=0$ при любом $\mathbf{x}$. Действительно, если это допустить, то, в частности, $\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right)^2=0$, $\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\right)^2=0$ при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Почленно вычитая из первого равенства второе, получим $\mathbf{xy}=0$ при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Оказывается, таким образом, что любой вектор ортогонален ко всем векторам, что противоречит условию невырожденности.

Мы начнем со случая n-мерного комплексного евклидова пространства R_n^+. В силу леммы всегда можно найти неизотропный вектор $\mathbf{x}$, так что $\mathbf{x}^2\neq 0$. Нормируем вектор $\mathbf{x}$, т. е. поделим его на его длину $\sqrt{\mathbf{x}^2}$. Это будет, вообще говоря, комплексное число, что нас не смущает, так как мы находимся в комплексном пространстве и имеем возможность умножать и делить на комплексные числа. Обозначим полученный вектор через $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}. \tag{42.1}$$

Очевидно,

$$\mathbf{e}_1^2=\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^2}=1, \tag{42.2}$$

т. е. скалярный квадрат вектора $\mathbf{e}_1$ равен единице. Такие векторы мы будем называть *единичными*.

Построим теперь гиперплоскость R^+_{n-1}, ортогональную к единичному вектору $\mathbf{e}_1$ и проходящую через фиксированную точку O. Гиперплоскость R^+_{n-1}, как ортогональная к неизотропному вектору $\mathbf{e}_1$, сама будет неизотропной (§ 41) и несет на себе $n-1$-мерную (тоже комплексную) евклидову геометрию. Поэтому на гиперплоскости R^+_{n-1} можно повторить наше построение, выбирая как-либо неизотропный вектор $\mathbf{y}$, нормируя его и получая второй единичный вектор $\mathbf{e}_2$. Обозначим далее R^+_{n-2} гиперплоскость в R^+_{n-1}, ортогональную к $\mathbf{e}_2$ и проходящую через O. Гиперплоскость R^+_{n-2} в R^+_{n-1}, ортогональная к неизотропному вектору $\mathbf{e}_2$, сама будет неизотропной и несет на себе $n-2$-мерную комплексную евклидову геометрию. Следовательно, на ней можно еще раз повторить то же самое, построив единичный вектор $\mathbf{e}_3$ и ортогональную к нему и проходящую через O гиперплоскость R^+_{n-3} и т. д. Процесс заканчивается на «одномерной плоскости» R^+_1, на которой мы берем какой-либо вектор $\mathbf{w}$ и, нормируя его, получаем единичный вектор $\mathbf{e}_n$. В итоге получаем последовательность вложенных друг в друга плоскостей убывающего числа измерений (начиная с самого пространства):

$$R^+_n \supset R^+_{n-1} \supset \ldots \supset R^+_2 \supset R^+_1 \tag{42.3}$$

и последовательность единичных векторов:

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n-1},\ \mathbf{e}_n. \tag{42.4}$$

При этом, как видно из построения, i-й вектор $\mathbf{e}_i$ принадлежит R^+_{n-i+1} и ортогонален к R^+_{n-i}. Тем самым $\mathbf{e}_i$ ортогонален и ко всем последующим векторам $\mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$, так как они принадлежат R^+_{n-i}, а так как i можно давать значения $1, 2, \ldots, n$, то ясно, что все единичные векторы попарно ортогональны:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j),$$

кроме того,

$$\mathbf{e}_i^2 = 1.$$

Эти формулы можно объединить:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \text{где } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{42.5}$$

Векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ будут линейно независимыми, что следует из способа их построения. Впрочем, это легко обнаружить и непосредственно: если допустить линейную зависимость

$$\alpha^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha^n\mathbf{e}_n = 0,$$

то, умножая левую часть скалярно на $\mathbf{e}_1$, получим (в силу (42.5)):

$$\alpha_1 = 0.$$

Совершенно аналогично убедимся в исчезновении и всех других коэффициентов, т. е. предполагаемая линейная зависимость оказалась тождеством и, следовательно, не существует.

Мы можем принять теперь n единичных и взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ за векторы некоторого репера $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Такой репер мы будем называть *ортонормированным*, а соответствующую ему координатную систему — *ортонормированной*. Векторы ортонормированного репера мы будем называть *ортами*.

В ортонормированной координатной системе происходит большое упрощение основных формул. Координаты метрического тензора приобретают вид

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{42.6}$$

Другими словами, матрица g_{ij} оказывается единичной; обратная ей матрица g^{ij} поэтому тоже будет единичной

$$g^{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{42.7}$$

Исчезает разница между контравариантными и ковариантными координатами вектора; действительно,

$$x_i = g_{ij}x^j = x^i, \tag{42.8}$$

так как в процессе суммирования отличным от нуля окажется лишь член, где $j = i$, причем $g_{ii} = 1$. На этом основании в ортонормированной системе мы будем пользоваться лишь одной записью координат вектора, именно x_i.

Скалярное произведение в координатной записи примет вид

$$\mathbf{xy} = g_{ij}x^iy^j = x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n,$$

так как в сумме сохранятся лишь члены, где $i = j$, причем $g_{ii} = 1$. В частности, скалярный квадрат запишется:

$$\mathbf{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Пользуясь (42.8), запишем окончательно:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \tag{42.9}$$

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{42.10}$$

Расстояние между точками A и B мы определяли по формуле (39.5). Если x_i — координаты точки A, а x'_i — координаты точки B, то вектор $\overrightarrow{AB}$ (как разность радиусов-векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$) имеет координаты $x'_i - x_i$, так что

$$\overrightarrow{AB}^2 = (x'_1 - x_1)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2, \tag{42.11}$$

и следовательно,

$$AB = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2}. \tag{42.12}$$

Формулы эти обнаруживают близкое родство с формулами обычной векторной алгебры:

$$\mathbf{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \tag{42.13}$$

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{42.14}$$

$$AB = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2} \tag{42.15}$$

и даже совпадают с ними в случае $n = 3$. Однако нужно помнить, что в обычном пространстве координаты вещественные, а у нас сейчас — комплексные.

Займемся теперь ортонормированным репером в вещественном евклидовом пространстве R_n. Здесь мы также начинаем с выбора неизотропного вектора $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}^2 \neq 0$), всегда существующего согласно лемме. Однако мы не всегда можем пронормировать его согласно (42.1):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}. \tag{42.16}$$

Это законно, если $\mathbf{x}^2 > 0$, причем, как и прежде, получаем:

$$\mathbf{e}_1^2 = 1. \tag{42.17}$$

Если же $\mathbf{x}^2 < 0$, то знаменатель окажется чисто мнимым, и полученное выражение не имеет смысла, так как умножение вектора на число в вещественном пространстве определено лишь для вещественных чисел. Поэтому в этом случае мы проведем нормирование вектора $\mathbf{x}$ иначе:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{-\mathbf{x}^2}}. \tag{42.18}$$

Теперь под знаком корня стоит положительная величина, делитель вещественный, и операция деления является законной. Полученный вектор, как непосредственно проверяется, обладает свойством

$$\mathbf{e}_1^2 = -1. \tag{42.19}$$

Векторы со скалярным квадратом -1 *мы будем называть мнимоединичными.* Не следует думать, что такие векторы сами являются в каком-то смысле мнимыми; это вещественные векторы вещественного псевдоевклидова пространства, обладающие тем не менее мнимой длиной $\sqrt{-1}=i$.

Построив единичный или мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_1$, мы проводим через фиксированную точку O ортогональную к нему гиперплоскость R_{n-1}. Эта гиперплоскость, как ортогональная к неизотропному вектору, сама будет неизотропной и несет на себе евклидову метрику $n-1$ измерений. Поэтому на ней снова можно найти единичный или мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_2$ и т. д. Очевидно, все построение, проведенное для комплексного случая, повторяется и для вещественного с той только разницей, что нормировка каждого из векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ происходит в одном из двух вариантов (42.16), (42.18). В результате мы получаем *ортонормированный репер* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$; так мы будем называть репер, в котором

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=0 \qquad (i\neq j), \qquad \mathbf{e}_i^2=\pm 1, \tag{42.20}$$

т. е. векторы которого, вообще говоря, частью единичные, частью мнимоединичные и все ортогональны между собой. Такие векторы мы будем называть *ортами*. Занумеруем их так, чтобы сначала шли мнимоединичные

$$\mathbf{e}_1^2=\mathbf{e}_2^2=\ldots=\mathbf{e}_k^2=-1, \tag{42.21}$$

а затем единичные

$$\mathbf{e}_{k+1}^2=\mathbf{e}_{k+2}^2=\ldots=\mathbf{e}_n^2=1. \tag{42.22}$$

Число мнимоединичных векторов k может принимать значения 0, 1, 2, ..., n. Соответственно метрический тензор $g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ в ортонормированной координатной системе примет вид

$$\left.\begin{array}{l} g_{ij}=0 \quad (i\neq j); \quad g_{11}=g_{22}=\ldots=g_{kk}=-1; \\ g_{k+1,\,k+1}=\ldots=g_{nn}=1. \end{array}\right\} \tag{42.23}$$

Связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора

$$x_i=g_{ij}x^j$$

теперь перепишется в виде

$$x_i=-x^i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k),\quad x_i=x^i\,(i=k+1,\ \ldots,\ n), \tag{42.24}$$

так что разница между контравариантными и ковариантными координатами вектора хотя, вообще говоря, и не исчезает, но становится мало значительной.

Скалярное произведение и скалярный квадрат в координатной записи теперь примут вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= g_{ij}x^i y^j = -x^1y^1 - \ldots - x^k y^k + x^{k+1}y^{k+1} + \ldots + x^n y^n, \\ \mathbf{x}^2 &= g_{ij}x^i x^j = -(x^1)^2 - \ldots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \ldots + (x^n)^2. \end{aligned}\right\} \quad (42.25)$$

Пользуясь зависимостями (42.24), эти формулы можно переписать совершенно в таком же виде для ковариантных координат:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= -x_1y_1 - \ldots - x_k y_k + x_{k+1}y_{k+1} + \ldots + x_n y_n, \\ \mathbf{x}^2 &= -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2. \end{aligned}\right\} \quad (42.26)$$

Инвариантную квадратичную форму $g_{ij}x^i x^j$, выражающую скалярный квадрат вектора через его координаты, мы будем называть *метрической квадратичной формой*.

Мы видим, что в ортонормированной координатной системе метрическая квадратичная форма $g_{ij}x^i x^j$ приводится к каноническому виду суммы-разности квадратов переменных. Верно и обратное: из (42.25) следуют, очевидно, условия (42.23), а отсюда и условия (42.20), так что метрическая квадратичная форма приводится к каноническому виду только в ортонормированных координатах.

Покажем теперь, что при любом выборе ортонормированного репера в данном пространстве число k его мнимоединичных ортов всегда одно и то же. В самом деле, допустим, что мы построили два ортонормированных репера $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $(O', \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_l, \mathbf{e}'_{l+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, причем в первом мнимоединичные орты — это первые k векторов, а во втором — первые l векторов.

Допустим, например, что $l > k$, и покажем, что это приводит нас к противоречию. В самом деле, рассмотрим в совокупности единичные орты $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ первого репера и мнимоединичные орты $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_l$ второго репера. Так как их число $> n$,

$$(n-k)+l > n,$$

то между ними обязательно должна иметь место линейная зависимость. Ее мы запишем, перенеся в одну часть члены с мнимоединичными, а в другую — с единичными ортами:

$$\alpha_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + \alpha_l\mathbf{e}'_l = \beta_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n. \qquad (42.27)$$

Это равенство возводим почленно в скалярный квадрат. Учитывая, что $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j = 0\ (i \neq j)$ и $\mathbf{e}'^2_1 = \ldots = \mathbf{e}'^2_l = -1$, а также, что $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0\ (i \neq j)$ и $\mathbf{e}^2_{k+1} = \ldots = \mathbf{e}^2_n = 1$, получим:

$$-\alpha_1^2 - \ldots - \alpha_l^2 = \beta_{k+1}^2 + \ldots + \beta_n^2.$$

Ясно, что это равенство может иметь место только при $\alpha_1 = \ldots$ $\ldots = \alpha_l = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0$ (мы находимся в вещественном евклидовом пространстве и в соответствии с общим соглашением все рассматриваемые численные величины должны быть тоже вещественными). Но тогда вопреки нашему предположению оказывается, что (42.27) есть тождество, а не линейная зависимость между рассматриваемыми векторами. Мы получили искомое противоречие.

Итак, число k мнимоединичных ортов ортонормированного репера в вещественном евклидовом пространстве, как, следовательно, и число $n-k$ его единичных ортов, не зависит от выбора этого репера. Число k, которое представляет собой важную характеристику евклидова пространства, мы будем называть *индексом евклидова пространства.*

С алгебраической точки зрения наш результат представляет собой «*закон инерции*» для вещественной квадратичной формы: при любом способе приведения ее к каноническому виду число как отрицательных, так и положительных квадратов остается без изменения.

§ 43. Собственно евклидовы пространства

Мы определили *собственно евклидовы* пространства как такие вещественные евклидовы пространства, в которых для любого вектора $\mathbf{x} \neq 0$

$$\mathbf{x}^2 > 0. \tag{43.1}$$

Построение ортонормированного репера в этом случае можно провести проще, чем в случае псевдоевклидова или комплексного евклидова пространства. Дело в том, что в собственно евклидовом пространстве, как мы знаем, все плоскости и все векторы, отличные от нуля, — неизотропные. Поэтому в процессе построения нет надобности в предосторожностях, обеспечивающих неизотропный характер векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ..., $\mathbf{w}$, и в ссылках на результаты § 41 (именно, что гиперплоскость, ортогональная к неизотропному вектору, сама неизотропная).

Далее, среди векторов репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ не может быть мнимоединичных (в силу (43.1)), так что индекс $k=0$, и все векторы $\mathbf{e}_i$ — единичные:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \ldots = \mathbf{e}_n^2 = 1. \tag{43.2}$$

Формулы (42.6) принимают вид

$$g_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad g_{ii} = 1. \tag{43.3}$$

Связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора (42.24) теперь принимает вид (учитывая, что $k=0$)

$$x_i = x^i, \tag{43.4}$$

т. е. те и другие координаты просто совпадают. Равенства (42.26) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \\ \mathbf{x}^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2. \end{aligned}\right\} \tag{43.5}$$

Таким образом, в ортонормированной координатной системе в собственно евклидовом пространстве мы получаем те же по внешнему виду формулы, что и в комплексном евклидовом пространстве. Не нужно забывать при этом, конечно, что сейчас у нас координаты точек и векторов принимают всевозможные вещественные значения, в то время как тогда они принимали всевозможные комплексные значения.

В частности, расстояние между двумя точками A, B будет выражаться (в результате совершенно аналогичного вывода) формулой (42.12):

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + \ldots + (x_n' - x_n)^2}. \tag{43.6}$$

Ясно, что у нас расстояние AB будет всегда вещественным, в то время как в формуле (42.12) оно, как правило, было комплексным.

Особо рассмотрим случай трехмерного собственно евклидова пространства, $n=3$. Формулы (43.5), (43.6) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \\ \mathbf{x}^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ AB &= \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{43.7}$$

Эти формулы уже буквально повторяют формулы векторной алгебры обычного пространства. В связи с этим нетрудно обнаружить совпадение трехмерного собственно евклидова пространства с нашим обычным пространством, точнее, их изоморфизм. Этим мы хотим сказать следующее. Отобразим построенное нами трехмерное собственно евклидово пространство на обычное пространство взаимно однозначно, а именно так, чтобы каждая точка первого пространства с координатами x_1, x_2, x_3 в ортонормированной координатной системе отобразилась в точку второго пространства с теми же координатами x_1, x_2, x_3 в прямоугольной декартовой системе. Очевидно, при этом отображении сохраняются все свойства точек и векторов трехмерного собственно евклидова пространства (в том числе и метрические), так как они в ортонормированной координатной системе выражаются совершенно так же, как соответствующие свойства точек и векторов обычного пространства в прямоугольной декартовой системе (в частности, одинаково записывается расстояние между двумя точками). Проверка этого совершенно тривиальна. Единственный вопрос, который мог бы возникнуть, — это не имеется ли у обычного пространства еще таких свойств, которые отсутствуют у трехмерного собственно евклидова пространства. Грубо говоря, этого не может быть потому, что в конечном счете все свойства обычного пространства определяются измерением расстояний между точками по формуле

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2},$$

а эта формула совпадает с аналогичной формулой (43.7) для трехмерного собственно евклидова пространства.

Однако точная проверка потребовала бы и точного определения того, что мы понимаем под свойствами обычного пространства.

Поясним, что до сих пор мы пользовались понятием «обычного пространства», имея в виду то пространство, которое изучается элементарными средствами в школьном курсе, затем средствами аналитической и дифференциальной геометрии в высшей школе и которое каждому знакомо, если и не в смысле строгого обоснования, то во всяком случае по основным свойствам. Между тем сейчас мы затронули вопрос, который для точного ответа потребовал бы и точного обоснования геометрии обычного пространства посредством той или иной ее аксиоматики. Между прочим, одной из таких аксиоматик может служить и наша аксиоматика трехмерного собственно евклидова пространства.

Вернемся к n-мерному случаю. Мы обнаружили, что *для собственно евклидова пространства индекс k* равен 0. Конечно, верно и обратное: *евклидово пространство индекса $k=0$ будет собственно евклидовым*. В самом деле, $k=0$ означает, что все векторы ортонормированного репера — единичные и, следовательно, имеют место формулы (43.2) — (43.5). Но согласно (43.5)

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

а значит, $\mathbf{x}^2 > 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \neq 0$ (так как в этом случае среди координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ хоть одна не равна нулю). Добавим, что нетрудно обнаружить *изоморфизм* любых двух собственно евклидовых пространств данного числа измерений n, отображая одно на другое тем же приемом, каким мы отображали трехмерное собственно евклидово пространство на обычное пространство.

§ 44. Двумерное псевдоевклидово пространство

Мы начнем изучение псевдоевклидовых пространств с простейшего случая двух измерений. Вообще в двумерном евклидовом пространстве ($n=2$) индекс k может принимать значения 0, 1, 2.

Случай $k=0$ приводит к двумерной собственно евклидовой геометрии, т. е. к обыкновенной планиметрии.

Случай $k=2$ отличается от предыдущего лишь формально. В самом деле, в этом случае оба вектора ортонормированного репера мнимоединичные и формулы (42.20)—(42.26) принимают вид

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = -1, \tag{44.1}$$

$$g_{11} = g_{22} = -1, \qquad g_{12} = 0, \tag{44.2}$$

$$x_1 = -x^1, \qquad x_2 = -x^2, \tag{44.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= -x_1y_1 - x_2y_2, \\ \mathbf{x}^2 &= -x_1^2 - x_2^2. \end{aligned}\right\} \tag{44.4}$$

Таким образом, скалярные произведения и скалярные квадраты *лишь знаком* отличаются от того, что мы получаем для соответствующих векторов на обычной плоскости, а следовательно, все расстояния в нашем случае отличаются от соответствующих расстояний на обычной плоскости лишь множителем $i=\sqrt{-1}$. Поэтому и разница между обеими геометриями будет лишь формальной, т. е. сводится к разнице в терминологии. В самом деле, расстояние определяется формулой

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}$$

на обычной плоскости и формулой

$$AB = i\sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}$$

в нашем случае. Таким образом, то, что мы называли расстоянием на обычной плоскости, теперь мы называем расстоянием после умножения на i. Ясно, что всякое предложение одной геометрии может быть повторено для другой в результате простой перефразировки. Такие случаи будут встречаться у нас и в дальнейшем. *Мы примем за общее правило, что если выражения скалярных произведений в ортонормированном репере различаются для двух n-мерных евклидовых геометрий лишь знаком, то эти геометрии мы не будем считать существенно различными и изучать будем лишь одну из них.*

В частности, если в ортонормированном репере скалярный квадрат вектора имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2, \tag{44.5}$$

то такую геометрию мы считаем сводящейся к собственно евклидовой. В *дальнейшем, говоря о псевдоевклидовом пространстве, мы исключаем случай* (44.5).

В частности, двумерную псевдоевклидову геометрию при $k=2$ мы считаем сводящейся к собственно евклидовой геометрии, имеющей место при $k=0$.

Остается, таким образом, лишь случай $k=1$, который заслуживает внимательного изучения. Соответствующее двумерное псевдоевклидово пространство мы будем называть кратко *псевдоевклидовой плоскостью*.

Будем обозначать — это будет удобно для дальнейшего — мнимоединичный орт ортонормированного репера через $\mathbf{e}_0$, а единичный — через $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_0^2 = -1, \qquad \mathbf{e}_1^2 = 1. \tag{44.6}$$

Соответственно координаты вектора $\mathbf{x}$ будут обозначаться x^0, x^1 и вообще тензорные индексы будут пробегать значения 0, 1 (вместо 1, 2).

По своим *аффинным* свойствам псевдоевклидова плоскость, как мы знаем, не отличается от обычной плоскости, однако по своим метрическим свойствам резко расходится с ней. Поэтому чертежам, которые мы будем делать, нужно доверять лишь в той мере, в какой речь идет об аффинных свойствах, но отнюдь не о метрических. Действительно, чертеж, сделанный на листе бумаги, отражает приблизительно геометрию обычной плоскости, мы же будем изучать псевдоевклидову плоскость. Поэтому чертеж будет «верен» лишь в тех пределах, в каких мы рассматриваем аффинные свойства, общие для обеих плоскостей. С метрическими свойствами дело будет обстоять иначе. Например, ортогональные векторы или равные отрезки псевдоевклидовой плоскости в условном изображении на чертеже (т. е. на обычной плоскости), вообще говоря, ортогональными векторами или равными отрезками выглядеть уже не будут. Не следует думать, что в этом положении вещей кроется что-то загадочное и своеобразное. По существу дело обстоит здесь совершенно так же, как и с картой земных полушарий, т. е. с изображением полусфер в виде плоских кругов. Это изображение неизбежно содержит искажения, поскольку геометрии на сфере и на плоскости существенно различны; неизбежно получается, что расстояния, равные в оригинале (т. е. на полусфере), выглядят, вообще говоря, различными в изображении (т. е. на плоском круге). Совершенно так же обстоит дело и в нашем случае, когда оригиналом является псевдоевклидова плоскость, а ее условным изображением — собственно евклидова плоскость чертежа.

Следует уточнить, как именно мы будем строить это изображение. Орты $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ какого-нибудь ортонормированного репера псевдоевклидовой плоскости мы изобразим в виде ортов на обычной плоскости; начало O изобразим в виде начала O. Далее, каждую точку M псевдоевклидовой плоскости изобразим точкой обычной плоскости с теми же координатами. Другими словами, вектор $\overrightarrow{OM}$ в изображении должен разлагаться по ортам $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ с теми же коэффициентами, как и в оригинале (рис. 7).

Заметим еще, что мы отнюдь не предполагаем, что *любой* ортонормированный в оригинале репер будет ортонормированным и в изображении: это будет верным лишь для одного первоначально выбранного ортонормированного репера, положенного в основу изображения.

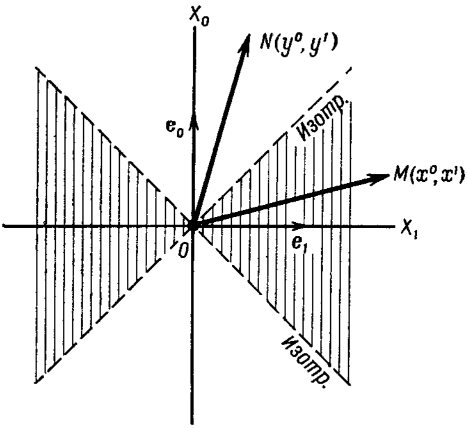

Рис. 7.

Мы так подробно останавливаемся на этом вопросе, так как в дальнейшем мы будем таким же образом изображать трехмерное псевдоевклидово пространство в обычном трехмерном пространстве, причем все сделанные замечания остаются в силе.

Итак, рассмотрим псевдоевклидову плоскость, отнесенную к ортонормированной координатной системе с векторами репера: мнимоединичным $\mathbf{e}_0$ и единичным $\mathbf{e}_1$.

Пользуясь условиями (44.6), получаем матрицу координат метрического тензора

$$\begin{Vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{44.7}$$

Очевидно, обратная матрица, т. е. матрица координат контравариантного метрического тензора, имеет тот же вид:

$$\begin{Vmatrix} g^{00} & g^{01} \\ g^{10} & g^{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{44.8}$$

Далее, зависимость между ковариантными и контравариантными координатами вектора $\mathbf{x}$,

$$x_i = g_{ij} x^j,$$

принимает, очевидно, следующий вид:

$$x_0 = -x^0, \qquad x_1 = x^1. \tag{44.9}$$

Скалярное произведение $\mathbf{xy} = g_{ij}x^i y^j$ теперь запишется так:

$$\mathbf{xy} = -x^0 y^0 + x^1 y^1. \tag{44.10}$$

В частности,

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2}. \tag{44.11}$$

Мы предпочтем здесь пользоваться *контравариантными* координатами x^0, x^1 вектора $\mathbf{x}$, так как они имеют аффинный характер (коэффициенты разложения $\mathbf{x}$ по $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$), и потому их можно без ошибок подсчитывать «по чертежу», т. е. так же, как и на обычной плоскости.

Посмотрим теперь, как будут выглядеть «на чертеже» некоторые основные конструкции псевдоевклидовой плоскости.

Для простоты рассматриваемые векторы будем откладывать от начала O; однако нужно помнить при этом, что по существу O — любая точка псевдоевклидовой плоскости. Найдем прежде всего *изотропные* векторы $\mathbf{x}$. Полагая $\mathbf{x}^2 = 0$, получим согласно (44.11)

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = 0, \qquad \text{т. е.} \quad x^0 = \pm x^1. \tag{44.12}$$

Откладывая всевозможные изотропные векторы $\mathbf{x}$ от начала O, мы видим, что их концы располагаются по двум прямым (44.12). *С точки зрения собственно евклидовой геометрии листа бумаги, на котором сделан чертеж, эти прямые являются биссектрисами координатных углов.* С точки же зрения псевдоевклидовой геометрии такое их понимание не имеет, конечно, никакого смысла.

Итак, через каждую точку O псевдоевклидовой плоскости проходят две изотропные прямые (которые испытывают, очевидно, параллельный сдвиг при сдвиге точки O в любое новое положение). Неизотропные векторы $\mathbf{x}$, откладываемые от начала O, попадают в ту или другую пару вертикальных углов, образованных изотропными прямыми. При этом под углом понимается область на плоскости, выделенная двумя полупрямыми, исходящими из общей точки (в данном случае O), а отнюдь не численная величина угла. В таком понимании угол есть аффинная конструкция, которая в псевдоевклидовой плоскости выглядит так же, как и на обычной плоскости, так что здесь мы можем довериться чертежу.

Рассмотрим сначала векторы, лежащие в одной паре вертикальных углов с ортом $\mathbf{e}_1$ («первая пара вертикальных углов»). Для этих векторов, как видно из чертежа, $|x^1| > |x^0|$, а следовательно, согласно (44.11)

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} > 0. \tag{44.13}$$

Таким образом, в первой паре вертикальных углов расположатся векторы *вещественной* длины.

В противоположность этому векторы, лежащие во второй паре вертикальных углов, характеризуются тем, что для них

$$|x^1| < |x^0|,$$

а следовательно,

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} < 0, \tag{44.14}$$

и эти векторы обладают *мнимой* длиной.

Окончательно: *векторы вещественной длины, отложенные из начала О, располагаются в первой паре вертикальных углов, векторы мнимой длины — во второй паре вертикальных углов и, наконец, изотропные векторы — по сторонам этих углов.*

Посмотрим теперь, как выглядят в нашем изображении ортогональные векторы псевдоевклидовой плоскости. Но так как для ортогональности векторов существенно лишь их направление, то мы лучше рассмотрим взаимно ортогональные прямые линии (проведенные для простоты через начало O).

Пусть $M(x^0, x^1)$, $N(y^0, y^1)$ — произвольные точки соответственно на первой и второй из этих прямых. Их радиусы-векторы $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{y} = \overrightarrow{ON}$ имеют те же координаты, что и сами точки, а условие ортогональности этих векторов имеет вид $\mathbf{xy} = 0$, т. е. согласно (44.10) $-x^0y^0 + x^1y^1 = 0$, откуда

$$y^1 : y^0 = x^0 : x^1. \tag{44.15}$$

Это означает, что *в изображении* наши прямые имеют взаимно обратные угловые коэффициенты и расположены, следовательно, симметрично относительно биссектрис координатного угла. Подчеркнем, что эта характеристика ортогональных прямых, данная с *точки зрения изображения,* не имеет ни малейшего смысла с *точки зрения оригинала,* т. е. геометрии псевдоевклидовой плоскости. Там эти прямые лишь ортогональны, и ничего более.

Из полученного результата ясно, что вопреки обычному поведению ортогональных прямых вращение одной из них вызывает *встречное* вращение другой, причем когда одна приходит в совпадение с изотропной прямой, другая совпадает с ней же. Это и неудивительно, если принять во внимание, что изотропная прямая, как направленная по изотропному вектору, ортогональна к себе самой.

Теперь, чтобы составить себе представление о метрике псевдоевклидовой плоскости, будем откладывать от начала O отрезки данной постоянной длины ρ во всех направлениях, в которых это возможно сделать. Другими словами, мы описываем окружность данного радиуса ρ с центром O. Эту окружность образуют концы наших отрезков. При этом радиус ρ может быть как вещественным, так и чисто мнимым. Запишем условие того, что вектор $\mathbf{x}$ имеет длину ρ: $\mathbf{x}^2=\rho^2$, или в координатной записи

$$-x^{0^2}+x^{1^2}=\rho^2. \qquad (44.16)$$

Если откладывать переменный вектор $\mathbf{x}$ постоянной длины ρ от начала O, то его конец опишет нашу окружность радиуса ρ с центром в O, причем (44.16) будет, очевидно, уравнением этой окружности.

Разберем теперь отдельно три случая. Пусть a обозначает какое-либо положительное число. Положим сначала $\rho=a$ (радиус окружности вещественный). Уравнение (44.16) дает

$$-x^{0^2}+x^{1^2}=a^2. \qquad (44.17)$$

Таким образом, изображением окружности с центром O и вещественным радиусом a служит на плоскости чертежа равнобочная гипербола (44.17) с центром O и действительной осью OX_1 (рис. 8).

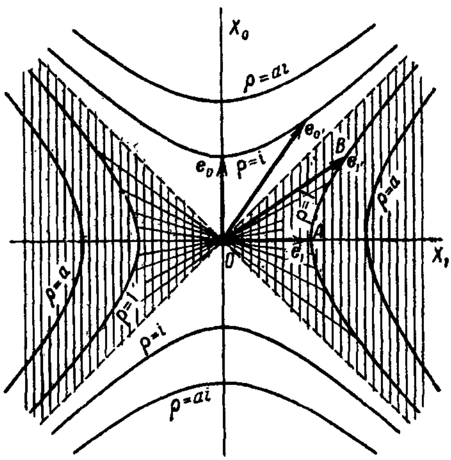

Рис. 8.

Как мы уже отмечали, не следует смущаться тем, что радиусы окружности, равные в оригинале, получились в изображении различными: это неизбежное искажение получается в результате несовпадения геометрических свойств оригинала и изображения. Далее, непривычное для нас распадение окружности на две разомкнутые ветви вытекает из свойств псевдоевклидовой метрики, непохожих на обычные.

Рассмотрим теперь случай $\rho=ai$ (радиус окружности мнимый). Тогда уравнение (44.16) дает

$$-x^{0^2}+x^{1^2}=-a^2, \qquad (44.18)$$

т. е. в этом случае изображением окружности служит равнобочная гипербола с центром O и действительной осью OX_0. Итак, в псевдоевклидовой плоскости окружности (при $\rho\neq 0$) принадлежат к числу гипербол, а не эллипсов, как в собственно евклидовой плоскости.

Наконец, в случае $\rho=0$ мы возвращаемся к уравнению (44.12), и окружность нулевого радиуса сводится к паре изотропных прямых.

§ 45. Вращение ортонормированного репера в псевдоевклидовой плоскости

Выясним, как будет выглядеть переход от одного ортонормированного репера к другому в псевдоевклидовой плоскости.

Сдвиг начала O совершается тривиальным образом, так что мы займемся лишь преобразованием ортов при неподвижном начале. Такое преобразование ортонормированного репера мы будем называть его *вращением*.

Пусть $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ — старые и $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ — новые орты. По общим формулам

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= A_{0'}^0\mathbf{e}_0 + A_{0'}^1\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= A_{1'}^0\mathbf{e}_0 + A_{1'}^1\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{45.1}$$

Заметим, что здесь $A_{0'}^0 \neq 0$. Действительно, в противном случае оказалось бы, что мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_{0'}$ лишь численным множителем отличается от единичного вектора $\mathbf{e}_1$, что после почленного возведения в скалярный квадрат приводит к противоречию (все коэффициенты $A_{i'}^i$ — вещественные ввиду вещественного характера псевдоевклидовой плоскости). По той же причине $A_{1'}^1 \neq 0$. В силу ортогональности ортов $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ мы получаем согласно (44.15)

$$A_{0'}^1 : A_{0'}^0 = A_{1'}^0 : A_{1'}^1. \tag{45.2}$$

Обозначая

$$A_{0'}^0 = a, \quad A_{1'}^1 = b, \tag{45.3}$$

а также обозначая общее значение отношений (45.2) через β, получим:

$$A_{0'}^1 = a\beta, \quad A_{1'}^0 = b\beta, \tag{45.4}$$

и преобразование (45.1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= a(\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1), \\ \mathbf{e}_{1'} &= b(\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1). \end{aligned}\right\} \tag{45.5}$$

Запишем теперь, что орт $\mathbf{e}_{0'}$ — мнимоединичный:

$$\mathbf{e}_{0'}^2 = -(A_{0'}^0)^2 + (A_{0'}^1)^2 = -a^2 + a^2\beta^2 = -1,$$

откуда

$$a = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.6}$$

Записывая аналогично, что орт $\mathbf{e}_{1'}$ — единичный, получим:

$$\mathbf{e}_{1'}^2 = -(A_{1'}^0)^2 + (A_{1'}^1)^2 = -b^2\beta^2 + b^2 = 1,$$

откуда

$$b = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.7}$$

Пользуясь последними результатами, можно окончательно переписать закон преобразования (45.5):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{45.8}$$

Ясно, что β можно давать лишь значения, по модулю меньшие единицы, иначе коэффициенты преобразования оказались бы мнимыми или (в случае $\beta = 1$) вообще не существовали бы. Итак,

$$-1 < \beta < 1. \tag{45.9}$$

Зато в этих пределах β можно давать любые значения, а также можно в каждой из двух формул (45.8) брать $\sqrt{1-\beta^2}$ с любым знаком, в одной *независимо* от другой. То, что при этом формулы (45.8) всегда переводят ортонормированный репер снова в ортонормированный, ясно и из нашего вывода, и легко устанавливается простой проверкой.

Мы получаем четыре типа вращений ортонормированного репера в зависимости от знака, с каким берется $\sqrt{1-\beta^2}$ в верхней и нижней формулах (45.8). Этот знак в верхней формуле, очевидно, совпадает со знаком $A_{0'}^{0}$, причем, если он положительный, то $\mathbf{e}_{0'}$ продолжает быть направленным «вверх» от OX_1, т. е. к той же ветви мнимоединичной окружности, что и $\mathbf{e}_0$; если же он отрицательный, то $\mathbf{e}_{0'}$ «перепрокидывается» к другой («нижней») ее ветви.

Аналогично знак $\sqrt{1-\beta^2}$, избранный нами для нижней формулы, совпадает, очевидно, со знаком $A_{1'}^{1}$. При этом $\mathbf{e}_{1'}$ остается направленным к той же, как и $\mathbf{e}_1$ («правой»), ветви единичной окружности, если этот знак положительный, и «перепрокидывается» к другой («левой») ее ветви, если этот знак отрицательный.

В результате можно следующим образом охарактеризовать четыре типа вращений ортонормированного репера:

1°. *Собственное вращение.* Так мы будем называть вращение при условии $A_{0'}^{0} > 0$, $A_{1'}^{1} > 0$. Тогда (45.8) дает

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.10}$$

В согласии со сказанным при собственном вращении концы векторов $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{0'}$ остаются на прежних ветвях единичной и соответственно мнимоединичной окружностей (рис. 8; чертеж отвечает случаю $\beta > 0$).

Векторы $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ *будут в изображении* симметричными относительно «биссектрисы координатного угла» (как и полагается ортогональным векторам). Неравноправие реперов $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ и $\{O, \mathbf{e}_{0'}, \mathbf{e}_{1'}\}$ кажущееся и связано с условностью их изображения на обычной плоскости (отчего и получается, что один как бы «настоящий», а другой «искаженный»). Мы могли бы условиться, наоборот, векторы $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ изображать ортами обычной плоскости, и тогда $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ изобразились бы более длинными векторами, образующими тупой угол (рис. 9).

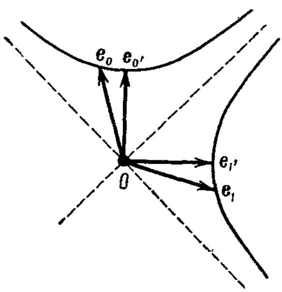

Рис. 9.

При непрерывном изменении β в допустимых для него пределах (45.9) непрерывно меняется и соответствующее собственное вращение, причем при $\beta = 0$ мы имеем тождественное преобразование. Отсюда видно, что собственное вращение репера может быть осуществлено за счет *непрерывного* процесса вращения, а именно при непрерывном изменении β от 0 до требуемого значения. Вычислим еще определитель преобразования:

$$\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} = 1. \tag{45.11}$$

Собственное вращение не меняет ориентации репера.

2°. *Несобственное вращение 1-го рода.* Так мы будем называть вращение репера при условии

$$A_{0'}^{0} > 0, \quad A_{1'}^{1} < 0.$$

Это значит, что конец единичного орта $\mathbf{e}_1$ «перепрокидывается» на другую ветвь единичной окружности, конец же орта $\mathbf{e}_0$ остается на прежней ветви мнимоединичной окружности. Формулы (45.8) принимают вид

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.12}$$

При β, непрерывно меняющемся в пределах (45.9), непрерывно меняется и несобственное вращение 1-го рода, причем, конечно, тождественное преобразование из него получить невозможно. При $\beta=0$ мы получаем:

$$\mathbf{e}_{0'}=\mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_{1'}=-\mathbf{e}_1, \tag{45.13}$$

т. е. происходит как бы зеркальное отражение репера за счет перепрокидывания оси OX_1 при неподвижной оси OX_0 (зеркальное отражение относительно оси OX_0). Нетрудно заметить, сравнивая формулы (45.12) с (45.10), что всякое несобственное вращение 1-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него зеркального отражения (45.13). Заметим еще, что в нашем случае

$$\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}|=-1, \tag{45.14}$$

и следовательно, ориентация репера меняется на обратную.

3°. *Несобственное вращение 2-го рода* определяется условием

$$A_{0'}^{0}<0, \quad A_{1'}^{1}>0.$$

Оно вполне аналогично несобственному вращению 1-го рода с той лишь разницей, что теперь конец орта $\mathbf{e}_0$ перепрокидывается на другую ветвь мнимоединичной окружности, а конец орта $\mathbf{e}_1$ остается на прежней ветви единичной окружности. Формулы преобразования будут:

$$\mathbf{e}_{0'}=-\frac{\mathbf{e}_0+\beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'}=\frac{\beta\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.15}$$

При $\beta=0$ получаем:

$$\mathbf{e}_{0'}=-\mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_{1'}=\mathbf{e}_1, \tag{45.16}$$

т. е. происходит зеркальное отражение репера относительно оси OX_1. Принципиальная разница сравнительно с (45.13) заключается в том, что зеркальное отражение происходит там относительно прямой с мнимыми расстояниями вдоль нее, а здесь относительно прямой с вещественными расстояниями.

Сравнивая формулы (45.15) с (45.10), замечаем, что несобственное вращение 2-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него зеркального отражения (45.16).

Отметим еще, что в нашем случае

$$\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}|=-1, \tag{45.17}$$

так что ориентация репера меняется на обратную.

4°. *Несобственное вращение 3-го рода* определяется условием

$$A_{0'}^{0}<0, \quad A_{1'}^{1}<0.$$

Концы обоих ортов перескакивают на другие ветви соответствующих окружностей. Формулы преобразования будут:

$$\mathbf{e}_{0'} = -\frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.18}$$

Очевидно, в этом случае

$$\operatorname{Det} | A_{i'}^{i} | = 1,$$

и ориентация репера сохраняется. При непрерывном изменении β в пределах (45.9) несобственные вращения 3-го рода меняются непрерывно; конечно, тождественное преобразование в их число не входит. При $\beta = 0$ получаем:

$$\mathbf{e}_{0'} = -\mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\mathbf{e}_1, \tag{45.19}$$

т. е. репер испытывает как бы отражение относительно начала O. Заметим, что в нашем случае нельзя получить такое преобразование непрерывным «вращением на 180°», как мы сделали бы на обычной плоскости; изотропные прямые представляют непреодолимую преграду для непрерывного вращения орта (который, оставаясь единичным или мнимоединичным вектором, не может принять изотропное направление).

Сравнивая формулы (45.18) с (45.10), мы замечаем, что несобственное вращение 3-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него отражения (45.19).

Как мы видели, вращения репера в пределах каждого из четырех типов непрерывно переходят одно в другое за счет непрерывного изменения β. Зато два вращения разных типов не могут быть непрерывным образом переведены одно в другое. В самом деле, такие вращения всегда отличаются друг от друга тем, что при одном из них конец орта $\mathbf{e}_0$ (или $\mathbf{e}_1$) остается на прежней ветви окружности, а при другом перескакивает на другую ветвь. Так как этот переход нельзя осуществить непрерывным образом, то нельзя осуществить и непрерывный переход от вращения одного типа к вращению другого типа. То же самое легко установить и из того, что $A_{0'}^{0}$ и $A_{1'}^{1}$ не могут обращаться в нуль, а следовательно, при непрерывном изменении не могут менять знака.

Мы рассматривали вращения ортонормированного репера. Но следом за вращением данного ортонормированного репера всегда можно заставить вращаться и саму псевдоевклидову плоскость. А именно, каждую точку плоскости мы будем переводить в новую точку, расположенную относительно нового репера точно так же, как прежняя точка была расположена относительно прежнего репера. Другими словами, координаты x^0, x^1 новой точки относительно нового репера должны совпадать с координатами x^0, x^1 прежней точки относительно прежнего репера. Такое преобразование псевдоевклидовой плоскости в себя мы будем называть ее *вращением* около фиксированной точки O и относить к одному из четырех типов в соответствии с характером вращения репера. При этом классификации вращений можно придать форму, независимую от выбора начального репера: при собственных вращениях каждая ветвь и единичной и мнимоединичной окружностей переходит в себя; при несобственных вращениях соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода меняются местами: 1) ветви единичной окружности, 2) ветви мнимоединичной окружности, 3) ветви обеих окружностей.

Сходство вращения псевдоевклидовой плоскости с вращениями обычной плоскости заключается, конечно, в том, что как при тех, так и при других остается неподвижной одна точка (точка O), и, главное, геометрические свойства фигур не испытывают никаких изменений. В самом деле, поскольку координаты перемещенных точек относительно повернутого репера остались прежними, а повернутый репер остался ортонормированным и обладает, следовательно, в точности прежними геометрическими свойствами, то и свойства фигур в результате вращения не меняются. Позже мы уточним сказанное здесь (§ 52).

Комбинируя произвольные вращения около точки O с произвольными параллельными сдвигами, мы получаем преобразования ортонормированного репера, а вслед за ним и преобразования плоскости в себя, которые мы будем называть *движениями* в псевдоевклидовой плоскости. Движения, очевидно, тоже сохраняют геометрические свойства фигур и, как позже мы увидим, исчерпывают все преобразования псевдоевклидовой плоскости в себя, обладающие этим свойством.

На обычной плоскости существуют движения двух сортов: собственные движения, при которых сохраняется ориентация плоскости и которые можно осуществить, переводя плоскость из начального положения в конечное непрерывным образом, и несобственные движения, которые меняют ориентацию плоскости на обратную и которые можно получить, комбинируя собственные движения с зеркальным отражением относительно какой-либо прямой.

На псевдоевклидовой плоскости движения будут уже четырех типов, в зависимости от того, какого типа будет вращение около точки O, входящее в его состав (наряду с параллельным сдвигом).

Эти четыре типа движений мы будем называть соответственно *собственными движениями* и *несобственными движениями* 1-го, 2-го и 3-го рода. Согласно ранее сказанному в пределах каждого типа возможен непрерывный переход от одного движения к другому. В частности, собственные движения включают в себя тождественное преобразование и их можно осуществлять непрерывным переходом от начального положения плоскости к конечному; несобственные же движения 1-го, 2-го и 3-го рода получаются наложением на собственные движения отражений соответственно относительно прямой с мнимыми расстояниями, относительно прямой с вещественными расстояниями и относительно точки.

В связи с этим и ортонормированные реперы распадаются на четыре класса, в зависимости от того, какого типа движением они получаются из какого-либо исходного репера: собственным движением или несобственным движением 1-го, 2-го или 3-го рода. В пределах одного класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому; между двумя различными классами он невозможен.

В терминах теории групп Ли можно сказать, что группа движений на псевдоевклидовой плоскости несвязная и состоит из четырех связных компонент. То, что движения действительно образуют группу, легко проверяется (мы сейчас не будем этим заниматься, так как затем все сказанное будет выведено в общем случае n-мерного псевдоевклидова пространства).

§ 46. Измерение площадей и углов на псевдоевклидовой плоскости

В § 37 мы определили объем произвольного тела D в n-мерном аффинном пространстве посредством интеграла

$$V_D = \int\limits_D dx^1 \dots dx^n$$

в какой-либо аффинной координатной системе. В частности, «двумерный объем», т. е. площадь в случае двумерного аффинного пространства, имеет вид

$$V_D = \iint\limits_D dx^1\, dx^2. \tag{46.1}$$

Определенная таким образом площадь (как и объем в общем случае) представляет собой лишь относительный инвариант, принимающий различные численные значения в различных координатных системах, а именно, умножающийся на $|\operatorname{Det}|A^i_{i'}||^{-1}$ при переходе от одного репера к другому:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i. \tag{46.2}$$

Но в случае двумерного *евклидова* пространства мы находимся в лучшем положении, так как у нас среди аффинных координатных систем выделены *ортонормированные* координатные системы.

Мы условимся называть площадью фигуры D в двумерном евклидовом пространстве интеграл V_D (46.1), вычисленный в ортонормированной координатной системе.

Определенная таким образом площадь будет уже *инвариантом*. В случае собственно евклидовой, т. е. обычной, плоскости хорошо известно, что интеграл V_D действительно дает площадь в обычном смысле слова, разумеется, не зависящую от той ортонормированной координатной системы, в которой она вычисляется.

В случае псевдоевклидовой плоскости матрица преобразования (46.2) при всех вращениях ортонормированного репера удовлетворяет (как мы видели в § 45) следующему условию:

$$\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| = \pm 1, \text{ следовательно, } |\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}|| = 1, \tag{46.3}$$

а отсюда следует, что интеграл (46.1) при переходе от одной ортонормированной координатной системы к другой не меняется (умножается на единицу).

Переходим теперь к измерению углов на псевдоевклидовой плоскости. Мы воспользуемся здесь следующим построением обычной планиметрии. Желая измерить данный угол, мы строим единичный круг с центром в вершине угла и берем *удвоенную площадь сектора*, вырезанного из этого круга сторонами угла. Очевидно, это и будет как раз величина угла, измеренного в естественной мере — в радианах.

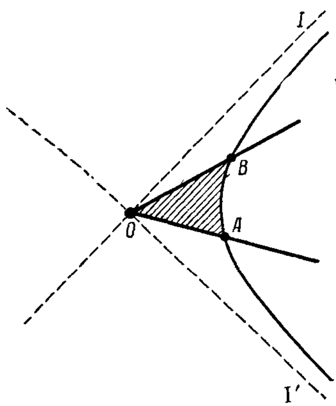

Рис. 10.

Аналогично мы будем поступать и на псевдоевклидовой плоскости. Однако здесь *мы будем измерять лишь углы, для которых все полупрямые, исходящие из вершины и проходящие внутри угла или по его сторонам, будут неизотропными.* Другими словами, если представить себе, что угол описывается вращением одной его стороны до совпадения ее с другой стороной, то мы хотим, чтобы в течение этого процесса вращающаяся сторона нигде не принимала изотропного направления. Смысл этого ограничения вскоре станет ясным. Углы, удовлетворяющие нашему условию, мы будем называть *допустимыми*.

Опишем теперь единичную и мнимоединичную окружности с центром в вершине O данного допустимого угла (рис. 10). Тогда (в силу нашего условия) стороны угла пересекутся *с одной и той же ветвью* какой-нибудь из этих окружностей. Образуется сектор AOB, *удвоенную площадь которого мы будем называть величиной угла* $\widehat{AOB}$ (или, кратко, просто углом $\widehat{AOB}$).

Из этого определения ясно, что величина угла обладает аддитивным свойством: если допустимый угол разделить полупрямой, исходящей из его вершины, на два угла, то его величина будет равняться сумме величин составляющих его углов.

Таким образом, измерение углов производится по отдельности внутри каждого из четырех «основных углов», образованных в данной точке проходящими через нее изотропными прямыми. При этом мы отказываемся измерять углы, «перекидывающиеся» из одного основного угла в другой. Причина этого станет ясна, если мы будем менять угол $\widehat{AOB}$ (рис. 10), вращая, например, его сторону OB против часовой стрелки и стремясь к совпадению с изотропным направлением OI. Тогда площадь сектора AOB стремится к бесконечности. Действительно, площадь в оригинале (на псевдоевклидовой плоскости) и площадь в изображении (на обычной плоскости) одинаково выражаются интегралом (46.1) в ортонормированной координатной системе и, следовательно, совпадают. В изображении же площадь сектора AOI как площадь, ограниченная ветвью гиперболы и ее асимптотой, является бесконечной.

Итак, величина угла $\widehat{AOB}$ стремится к бесконечности, когда хоть одна из его сторон стремится к изотропному направлению. Отсюда ясно, что угол, в котором сторона OB достигла изотропного направления OI, мы измерять не будем (его величину пришлось бы признать бесконечной) и тем более не будем измерять угол, в котором сторона OB перешла за изотропное направление OI (величина угла как бы сверхбесконечная).

Подсчитаем, в частности, угол, на который поворачивается вектор $\mathbf{e}_1$ при собственном вращении (45.10) ортонормированного репера $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ (рис. 8).

Требуется подсчитать, следовательно, площадь сектора AOB, причем это можно сделать, как мы только что отмечали, и в изображении. Воспользуемся полярными координатами, разумеется, на плоскости изображения. Тогда

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} r^2\,d\varphi. \tag{46.4}$$

Здесь r — полярный радиус — выражается через полярный угол φ из уравнения единичной окружности

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = 1.$$

Так как x^1, x^0 в изображении играют роль прямоугольных декартовых координат, то

$$x^1 = r\cos\varphi, \qquad x^0 = r\sin\varphi, \tag{46.5}$$

и мы получаем:

$$r^2(-\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=1,\qquad r^2=\frac{1}{\cos 2\varphi}. \tag{46.6}$$

Вставляя это значение в (46.4), имеем:

$$\text{пл. } AOB=\frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}=\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right). \tag{46.7}$$

Здесь α — конечное значение полярного угла φ — совпадает с углом наклона вектора $\mathbf{e}_{1'}$ к вектору $\mathbf{e}_1$ (в изображении!). Обозначим через θ псевдоевклидов угол между $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_{1'}$. Тогда по общему определению

$$\theta=2\text{ пл. } AOB=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}=\operatorname{th}\theta. \tag{46.8}$$

Итак, гиперболический тангенс угла между $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'}$ *в псевдоевклидовой плоскости равен тангенсу угла между этими векторами в плоскости изображения* (при условии, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_0$ в изображении тоже являются ортонормированными, как мы все время это и предполагаем).

При вычислении угла θ мы молчаливо приписали ему (как и площади AOB) знак, совпадающий со знаком полярного угла α. В этом смысле нужно понимать и формулу (46.8).

Из (46.8) видно еще раз, что когда направление $\mathbf{e}_{1'}$ стремится к изотропному, т. е. когда $\alpha\to\pm\frac{\pi}{4}$ и, значит, $\operatorname{tg}\alpha\to\pm 1$, то $\operatorname{th}\theta\to\pm 1$, а следовательно, $\theta\to\pm\infty$.

Таким образом, заставляя $\mathbf{e}_{1'}$ вращаться в пределах основного угла $I'OI$, мы заставляем псевдоевклидов угол θ его наклона к $\mathbf{e}_1$ меняться от $-\infty$ до $+\infty$.

Поучительно выразить формулы преобразования (45.10)

$$\mathbf{e}_{0'}=\frac{\mathbf{e}_0+\beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \mathbf{e}_{1'}=\frac{\beta\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{46.9}$$

через угол θ. Так как координаты вектора $\mathbf{e}_{1'}$ относительно репера $\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_0\}$ равны, как мы видим, $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то, пользуясь обычной геометрией на плоскости изображения, получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\beta,$$

а отсюда

$$\beta = \operatorname{th}\theta, \tag{46.10}$$

и следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} = \operatorname{ch}\theta, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \operatorname{sh}\theta.$$

Формулы собственного вращения (46.9) примут теперь вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \operatorname{ch}\theta\mathbf{e}_0 + \operatorname{sh}\theta\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \operatorname{sh}\theta\mathbf{e}_0 + \operatorname{ch}\theta\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{46.11}$$

Эти формулы по внешности напоминают формулы собственного вращения ортонормированного репера на обычной плоскости

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \cos\alpha\mathbf{e}_0 - \sin\alpha\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \sin\alpha\mathbf{e}_0 + \cos\alpha\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{46.12}$$

Но, конечно, замена тригонометрических функций гиперболическими (а также изменение знака в одном члене) сильно преобразует всю картину. В частности, в формулах (46.11) можно менять θ от $-\infty$ до $+\infty$ без периодического повторения результата, как это будет в обычных формулах (46.12).

Мы можем теперь ввести *измерение углов в любом n-мерном вещественном евклидовом пространстве*. Проводим через стороны угла двумерную плоскость. Она или несет на себе собственно евклидову геометрию (как это всегда будет в случае собственно евклидова пространства), и тогда угол измеряется как на обычной плоскости, или является псевдоевклидовой, и тогда угол измеряется так, как было только что показано, или является изотропной, и тогда измерение угла не имеет смысла.

В первом случае острый (или прямой) угол между векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ определяется обычной формулой

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{ab}|}{\sqrt{\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2}}, \tag{46.13}$$

во втором же случае формулой

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{|\mathbf{ab}|}{\sqrt{\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2}}, \tag{46.14}$$

причем здесь предполагается, что $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{ab}$ — одного знака (иначе угол не имеет смысла). В самом деле, если этот знак положительный, то можно принять:

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}} = \mathbf{e}_1, \qquad \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^2}} = \mathbf{e}_{1'}, \tag{46.15}$$

причем $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{1'} > 0$, т. е. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'}$ лежат в одном основном угле. Тогда, умножая скалярно на $\mathbf{e}_1$ второе из уравнений (46.11), получаем:

$$\mathbf{e}_{1'}\mathbf{e}_1 = \operatorname{ch}\theta$$

и, пользуясь (46.15), приходим к формуле (46.14).

Если же знак $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{ab}$ отрицательный, то положим:

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{-\mathbf{a}^2}} = \mathbf{e}_0, \qquad \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{-\mathbf{b}^2}} = \mathbf{e}_{0'}, \tag{46.16}$$

причем $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_{0'} < 0$, т. е. $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_{0'}$ лежат в одном основном угле. Умножая скалярно на $\mathbf{e}_0$ первое из уравнений (46.11), получаем:

$$\mathbf{e}_{0'}\mathbf{e}_0 = -\operatorname{ch}\theta$$

и, пользуясь (46.16), снова приходим к (46.14).

Заметим, что для данных неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ первый, второй или третий случай имеет место в зависимости от положительного, отрицательного или нулевого значения $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{ab})^2$.

§ 47. Трехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1

После евклидовых пространств индекса $k=0$, т. е. собственно евклидовых, наибольший интерес представляют евклидовы пространства индекса $k=1$ (они, конечно, принадлежат к псевдоевклидовым пространствам). Псевдоевклидова плоскость, рассмотренная нами в §§ 45, 46, — это двумерный случай такого пространства. Евклидово пространство индекса 1 представляет интерес с точки зрения теории дифференциальных уравнений (волновое уравнение с n аргументами) и особенно с точки зрения теории относительности. В последнем случае играет роль именно *четырехмерное евклидово пространство индекса* 1. Однако для наглядности мы рассмотрим сначала *трехмерный случай*. Здесь индекс k может принимать значения 0, 1, 2, 3.

При $k=0$ получаем собственно евклидово (обычное) пространство и при $k=3$ фактически снова его же. Действительно, все орты будут вместо единичных мнимоединичными, и скалярный квадрат вместо вида

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}$$

будет иметь вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2},$$

что означает лишь формальную разницу, сводящуюся к изменению знака у скалярного произведения (ср. начало § 44).

Точно такая же лишь формальная разница будет между случаем $k=1$

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}$$

и случаем $k=2$

$$\mathbf{x}^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2}.$$

Поэтому вещественное трехмерное евклидово пространство имеет смысл рассматривать лишь в случаях $k=0$ (собственно евклидово пространство) и $k=1$ (псевдоевклидово пространство).

К изучению последнего мы и переходим.

Выберем какой-либо ортонормированный репер. Так как индекс пространства равен единице, то один орт будет мнимоединичным — его мы обозначим $\mathbf{e}_0$, а два других единичными: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Итак,

$$\mathbf{e}_0^2 = -1, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1, \quad \text{кроме того,} \quad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j). \tag{47.1}$$

В соответствии с формулой $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ мы получаем:

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \tag{47.2}$$

Согласно формуле $x_i = g_{ij}x^j$ получаем связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора в виде

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2. \tag{47.3}$$

Скалярное произведение и скалярный квадрат выразятся формулами:

$$\mathbf{xy} = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2, \tag{47.4}$$

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}. \tag{47.5}$$

Выясним некоторые основные свойства нашего пространства. Прежде всего рассмотрим всевозможные изотропные векторы $\mathbf{x}$, причем для наглядности будем откладывать их от начала O (разумеется, за начало O можно принять любую точку пространства). Тогда концы векторов $\mathbf{x}$ будут иметь те же координаты x^i, что и сами векторы, а так как векторы изотропные, то $\mathbf{x}^2 = 0$, а следовательно:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = 0. \tag{47.6}$$

Как и в случае псевдоевклидовой плоскости, мы будем пользоваться изображением нашего пространства в обычном пространстве. А именно, орты $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ данного репера изобразим обыкновенными ортами, начало O — некоторой точкой обычного пространства, а все остальные точки M изобразим такими точками обычного пространства, чтобы вектор $\overrightarrow{OM}$ в изображении разлагался по $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ всегда с теми же коэффициентами, как и в оригинале.

Очевидно, аффинные свойства изображения точно передают аффинные свойства оригинала (мы имеем здесь аффинный изоморфизм), но метрические свойства будут резко различными.

Мы видим, что в изображении концы изотропных векторов располагаются на конусе 2-го порядка (47.6). Впрочем, и в оригинале поверхность (47.6) мы вправе называть конусом 2-го порядка ввиду аффинного характера этого понятия. А именно, конус 2-го порядка в трехмерном вещественном аффинном пространстве можно определить как поверхность, имеющую уравнение вида (47.6) в некоторой аффинной координатной системе.

Конус 2-го порядка, на котором располагаются концы всевозможных изотропных векторов, отложенных из данной точки O, мы будем называть изотропным конусом. В изображении изотропный конус выглядит как прямой круглый конус с осью OX_0 и с углом 45° между осью и образующей. Очевидно, при переходе в другую точку O^* изотропный конус переносится параллельным сдвигом на вектор $\overrightarrow{OO^*}$.

Будем откладывать теперь от начала O всевозможные векторы $\mathbf{x}$ мнимой длины. Для этих векторов $\mathbf{x}^2<0$, а значит, координаты их концов удовлетворяют условию

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}<0, \quad \text{т. е.} \quad |x^0|>\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}. \qquad (47.7)$$

Концы этих векторов расположены, очевидно, внутри изотропного конуса, так как в *изображении* их расстояния от оси конуса меньше расстояний от плоскости OX_1X_2 (в то время как для точек конуса эти расстояния равны). Напротив, концы векторов $\mathbf{x}$ вещественной длины ($\mathbf{x}^2>0$) удовлетворяют условию

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}>0, \quad \text{т. е.} \quad |x^0|<\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}, \qquad (47.8)$$

и располагаются вне изотропного конуса. Аналогичная картина повторяется, конечно, и при откладывании векторов $\mathbf{x}$ от любой точки пространства O^*.

Таким образом, ясно, что прямые, исходящие из данной точки, распадаются на три класса: прямые, расположенные внутри изотропного конуса (длины мнимые), вне изотропного конуса (длины вещественные) и по самому конусу (длины нулевые). Эта картина повторяется в псевдоевклидовом пространстве любого числа измерений (см. рис. 11, стр. 283). В двумерном случае роль изотропного конуса играет пара изотропных прямых.

Рассмотрим теперь двумерные плоскости трехмерного псевдоевклидова пространства, причем для простоты будем проводить их тоже через начало O. Здесь возможны три случая.

1°. *Плоскость проходит, не считая точки O, целиком вне изотропного конуса.* Тогда все ее векторы $\mathbf{x}$ (не считая вектора $\mathbf{x}=0$)

обладают положительным скалярным квадратом $\mathbf{x}^2>0$, так что плоскость обладает *собственно евклидовой геометрией* (т. е. на ней имеет место обычная планиметрия).

Примером такой плоскости может служить, очевидно, координатная плоскость X_1OX_2. Обратно, всякая собственно евклидова плоскость, проходящая через O, может быть принята за координатную плоскость X_1OX_2 при подходящем выборе ортов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ строим в плоскости, $\mathbf{e}_0$ — ортогонально к ней).

2°. *Плоскость касается изотропного конуса по одной образующей.* Заметим прежде всего, что касание плоскости с изотропным конусом по его образующей *равносильно* тому, что плоскость проходит через начало O и ортогональна к этой образующей.

В самом деле, пусть $\mathbf{u}(u^0,\ u^1,\ u^2)$ — радиус-вектор какой-либо (отличной от O) точки на образующей. Тогда, как видно из уравнения изотропного конуса, уравнение плоскости, касательной к нему, в этой точке (а следовательно, и вдоль всей образующей) будет:

$$-x^0u^0+x^1u^1+x^2u^2=0. \tag{47.9}$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\mathbf{x}\mathbf{u}=0, \tag{47.10}$$

где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор любой точки нашей плоскости. Таким образом, (47.9) равносильно тому, что радиус-вектор любой точки плоскости ортогонален к $\mathbf{u}$, т. е. что плоскость проходит через O и ортогональна к образующей. Этим наше утверждение доказано.

Теперь ясно, что *плоскость, касающаяся изотропного конуса по образующей, будет изотропной* (так как она содержит вектор $\mathbf{u}$, ортогональный ко всем ее векторам).

Обратно, *всякая изотропная плоскость, проходящая через O, будет касаться изотропного конуса по некоторой образующей.* В самом деле, прямая, ортогональная к изотропной плоскости, сама будет изотропной (вытекает из теоремы § 41 при $n=3$, $m=2$) и, следовательно, если ее провести через начало O, является образующей изотропного конуса. Таким образом, наша изотропная плоскость проходит через O и ортогональна к одной из образующих изотропного конуса, а это, как мы только что видели, равносильно касанию с изотропным конусом вдоль этой образующей.

3°. *Плоскость пересекается с изотропным конусом по двум образующим.* Тем самым случай касания с конусом устранен, а значит, плоскость неизотропная и несет на себе евклидову метрику. Остается выяснить, чему равен индекс этой метрики: 0, 1 или 2? Собственно евклидов случай ($k=0$) и сводящийся к нему ($k=2$) отпадают, так как в этих случаях на плоскости нет изотропных прямых, в то время как наша плоскость их содержит (а именно, две образующие, по которым она пересекается с изотропным конусом, и, конечно, все параллельные им прямые).

Остается случай $k=1$, т. е. наша плоскость *псевдоевклидова*. Примером такой плоскости может служить, очевидно, координатная плоскость X_0OX_1. Обратно, всякая псевдоевклидова плоскость, проходящая через O, может быть принята за плоскость X_0OX_1 при подходящем выборе ортов ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ — на плоскости, $\mathbf{e}_2$ — ортогонально к ней).

Заметим, что в случае n-мерного псевдоевклидова пространства индекса $k=1$ все наши рассуждения (проведенные для случая $n=3$) повторяются дословно; только вместо изотропного конуса нужно рассматривать *изотропный гиперконус*

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+\ldots+x^{n-1^2}=0,$$

а вместо плоскостей — гиперплоскости.

Рассмотрим теперь картину взаимно ортогональных направлений в нашем пространстве. Здесь будет более наглядным рассматривать не взаимно ортогональные прямые, а взаимно ортогональные прямую и плоскость (проходящие для простоты через начало O). Пусть прямая задана направляющим вектором $\mathbf{u}$. Тогда радиусы-векторы $\mathbf{x}$ точек плоскости удовлетворяют условию

$$\mathbf{ux}=0,$$

т. е. плоскость определяется уравнением

$$-u^0x^0+u^1x^1+u^2x^2=0. \tag{47.11}$$

С точки зрения изображения эта плоскость ортогональна к вектору $\mathbf{u}'(-u^0,\ u^1,\ u^2)$, который представляет собой зеркальное отражение вектора $\mathbf{u}$ относительно плоскости X_1OX_2. Можно сказать и так, что, проводя плоскость, ортогональную к данной прямой с *точки зрения изображения*, и беря ее зеркальное отражение относительно плоскости X_1OX_2 (тоже с точки зрения изображения!), получаем плоскость, ортогональную к данной прямой с точки зрения псевдоевклидовой геометрии. Очевидно, что, когда данная прямая вращается в направлении к изотропному конусу, ортогональная плоскость вращается ей навстречу, причем, когда прямая занимает положение образующей, ортогональная плоскость становится касательной к конусу вдоль этой образующей.

Рассмотрим еще изображения сфер нашего псевдоевклидова пространства, для простоты, с центром в O. Снова (как и для окружностей) рассмотрим случаи вещественного, мнимого и нулевого радиуса.

Вообще уравнение сферы с центром в O, т. е. уравнение геометрического места точек с постоянным расстоянием ρ от O, записывается в виде

$$\mathbf{x}^2=\rho^2, \text{ т. е. } -x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}=\rho^2. \tag{47.12}$$

Если $\rho=a$ (радиус вещественный), то получаем:

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}=a^2,$$

т. е. в нашем *изображении* сфера вещественного радиуса выглядит как однополостный гиперболоид вращения с осью вращения OX_0.

Если $\rho=ai$ (радиус чисто мнимый), то имеем:

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}=-a^2,$$

и сфера чисто мнимого радиуса выглядит в изображении как двуполостный гиперболоид вращения с осью вращения OX_0.

В обоих случаях асимптотическим конусом гиперболоидов служит изотропный конус.

Если же $\rho=0$, то уравнение (47.12) совпадает с (47.6), так что сфера нулевого радиуса совпадает с изотропным конусом, что ясно, конечно, и из его определения.

§ 48. n-мерное псевдоевклидово пространство индекса 1

Мы уже упоминали, что в n-мерном случае псевдоевклидово пространство индекса 1 будет выглядеть в основном сходно с трехмерным случаем. Действительно, мнимо единичный орт $\mathbf{e}_0$ остается по-прежнему единственным, увеличивается лишь число единичных ортов: вместо $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ мы будем иметь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$. Скалярный квадрат вектора будет теперь выражаться формулой

$$\mathbf{x}^2=-x^{0^2}+x^{1^2}+\ldots+x^{n-1^2} \tag{48.1}$$

вместо частного случая этой формулы

$$\mathbf{x}^2=-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}. \tag{48.2}$$

Нетрудно повторить все построения и выводы § 47 и для n-мерного случая. Так, *изотропный гиперконус* определяется уравнением

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+\ldots+x^{n-1^2}=0, \tag{48.3}$$

его внутренняя область определяется условием

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+\ldots+x^{n-1^2}<0, \tag{48.4}$$

а внешняя — условием

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+\ldots+x^{n-1^2}>0. \tag{48.5}$$

Наименования «внешняя» и «внутренняя» можно оправдать без апелляции к наглядности тем, что внутренняя область *всегда* содержит вместе с двумя какими-нибудь точками A, B и соединяющий их отрезок; внешняя область этим свойством не обладает.

Таким же образом и далее можно воспроизвести почти автоматически все построения § 47. Разница будет лишь в том, что в трехмерном случае мы могли широко использовать наглядное представление, построив в обычном пространстве изображение нашего псевдоевклидова пространства. При этом искажались метрические свойства, но по отношению к аффинным свойствам, в частности, к числу измерений пространства, изображение было точным. Таким образом, трудность, если таковая вообще была, заключалась лишь в непривычном характере метрики. Теперь на эту трудность накладывается и другая — многомерный характер пространства. Тем не менее мы не отказываемся и здесь от использования наглядных представлений по аналогии с трехмерным случаем. Мы будем делать чертежи, апеллирующие, конечно, к трехмерному наглядному представлению, но используемые нами по аналогии для многомерного случая.

Для дальнейшего нам будет особенно важен четырехмерный случай, когда ортонормированный репер имеет орты $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{e}_0^2 = -1, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \tag{48.6}$$

и скалярный квадрат вектора имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}. \tag{48.7}$$

Трехмерная гиперплоскость R_3, построенная на единичных ортах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и проходящая через начало O, имеет уравнение

$$x^0 = 0. \tag{48.8}$$

Положение точки на гиперплоскости R_3 определяется, очевидно, тремя координатами x^1, x^2, x^3, причем формула скалярного квадрата (48.3) принимает вид

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}.$$

Ясно, что R_3 несет на себе обычную (трехмерную собственно евклидову) геометрию. Этим же свойством будет обладать и любая трехмерная плоскость, проходящая через вершину изотропного гиперконуса и лежащая в остальном вне его (в соответствии с результатами § 47, если их повторить для четырехмерного случая).

Изучим теперь преобразование одного ортонормированного репера в другой. Орты нового репера обозначим:

$$\mathbf{e}_{0'}, \ \mathbf{e}_{1'}, \ \mathbf{e}_{2'}, \ \mathbf{e}_{3'}. \tag{48.9}$$

Начало O будем считать прежним. Плоскость R_3 для нового репера обозначим R_3'.

Вообще преобразование старых ортов в новые в четырехмерном случае — вещь достаточно громоздкая. Но мы сумеем свести его к двумерному случаю следующим приемом.

Будем называть *тривиальным вращением* репера такое его преобразование, при котором плоскость R_3 остается без изменения и, следовательно, ортогональный к ней орт $\mathbf{e}_0$ или не меняется или меняется на обратный, а орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ испытывают вращение в плоскости R_3. Это вращение, происходящее, таким образом, в обычном трехмерном пространстве (геометрию которого несет на себе R_3), изучается в элементарном курсе аналитической геометрии и никаких затруднений для нас не представляет.

И вот оказывается, что если старый и новый реперы подвергнуть предварительно тривиальному вращению, то переход от одного к другому становится очень простым.

Мы предполагаем, что плоскости R_3 и R'_3 не совпадают; в противном случае переход от старого репера к новому можно было бы совершить просто при помощи тривиального вращения.

Поскольку трехмерные плоскости R_3 и R'_3 в четырехмерном пространстве не совпадают и имеют общую точку, то они пересекаются по двумерной плоскости R_2. Это видно из того, что место их пересечения будет определяться парой независимых однородных линейных уравнений. Итак, плоскость R_2 принадлежит и R_3 и R'_3.

Выполним теперь в трехмерной плоскости R_3 такое вращение ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, чтобы орты $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ поместились на двумерную плоскость R_2. После этого в трехмерной плоскости R'_3 выполним вращение ортов $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$ таким образом, чтобы $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$ тоже поместились на R_2 и притом совпали с $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (уже помещенными на ней). Возможность всех этих операций не вызывает сомнений, так как они происходят в обычных трехмерных пространствах R_3 и R'_3.

Итак, за счет тривиальных вращений старого и нового реперов можно добиться совпадения ортов:

$$\mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3. \tag{48.10}$$

Теперь нужно рассмотреть оставшуюся часть преобразования. Плоскости ортов $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $(\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'})$ совпадают, следовательно, совпадают и ортогональные к ним псевдоевклидовы плоскости $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ и $(\mathbf{e}_{0'}, \mathbf{e}_{1'})$. Преобразование свелось, таким образом, к преобразованию репера $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ в псевдоевклидовой плоскости, а это преобразование было нами хорошо изучено и имеет вид (45.8):

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{48.11}$$

Мы считали, что начало O у старого и нового реперов общее. Но если это не так, то начала O, O' можно предварительно совместить параллельным сдвигом одного из реперов.

В результате всякое преобразование ортонормированного репера $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *с точностью до тривиальных вращений и параллельного сдвига сводится к преобразованию* (48.10), (48.11).

§ 49. Ортогональные преобразования

Выясним теперь степень произвола в выборе ортонормированного репера в евклидовом пространстве. Уже из способа построения репера ясно, что такой произвол имеется; мы хотим теперь точно определить, как в общем случае преобразуется один ортонормированный репер $\mathfrak{R}$ в другой $\mathfrak{R}'$. Ясно также, что начало O можно передвигать при этом произвольно, так что мы займемся лишь преобразованием ортов. Пусть они преобразуются по формуле

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{49.1}$$

Какова должна быть матрица $A^i_{i'}$ для того, чтобы преобразование переводило векторы ортонормированного репера снова в векторы ортонормированного репера?

Мы рассмотрим сначала случаи *комплексного евклидова и собственно евклидова* пространств и притом параллельно; будем помнить лишь, что в первом случае все рассматриваемые численные величины, вообще говоря, комплексные, а во втором — вещественные. В остальном изложение протекает одинаково.

Вслед за преобразованием репера преобразуются ковариантные и контравариантные координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ соответственно по формулам:

$$x_{i'} = A^i_{i'}x_i, \tag{49.2}$$

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i. \tag{49.3}$$

Но в силу (42.8) и (43.4) в ортонормированных реперах $x_i = x^i$, а следовательно, закон преобразования для них должен быть одинаковым*), и мы получаем:

$$A^i_{i'} = A^{i'}_i. \tag{49.4}$$

Другими словами, матрица $A^i_{i'}$ преобразования ортонормированного репера в ортонормированный репер должна *совпадать со своей транспонированной обратной матрицей* $A^{i'}_i$. Транспонирование обратной матрицы сказывается в том, что в (49.4) приравниваются элементы матриц с одинаковыми, но поменявшимися местами индексами. Матрицу со свойством (49.4) мы будем называть *ортогональной*, при

*) Тем самым для ортонормированных реперов исчезает разница между ковариантными и контравариантными индексами; в связи с этим в главе I мы все тензорные индексы писали внизу.

этом *вещественной* или *комплексной* в зависимости от характера ее элементов.

Обратно, если соблюдается условие (49.4), то, преобразуя ортонормированный репер при помощи (49.1), мы снова получаем ортонормированный репер. В самом деле, до преобразования мы в ортонормированном репере имеем для любого вектора $x_i = x^i$. Но в силу (49.4) это равенство сохраняется и в преобразованном репере, как видно из (49.2), (49.3):

$$x_{i'} = x^{i'},$$

т. е.

$$g_{i'j'}x^{j'} = x^{i'}.$$

Так как это равенство верно для любого вектора $\mathbf{x}$, то оно представляет собой тождество относительно $x^{j'}$, откуда следует:

$$g_{i'j'} = \begin{cases} 0 & (j' \neq i') \\ 1 & (j' = i') \end{cases}.$$

Тем самым преобразованный репер оказывается тоже ортонормированным.

Итак, для того чтобы матрица $A^i_{i'}$ отвечала переходу от одного ортонормированного репера к другому, необходимо и достаточно, чтобы эта матрица была ортогональной, т. е. чтобы

$$A^i_{i'} = A^{i'}_i.$$

Произведение взаимно обратных матриц в любом порядке дает единичную матрицу:

$$A^k_{i'} A^{j'}_k = \delta^{j'}_{i'}, \qquad A^j_{k'} A^{k'}_i = \delta^j_i. \tag{49.5}$$

В нашем случае

$$A^{j'}_k = A^k_{j'}, \qquad A^{k'}_i = A^i_{k'}, \tag{49.6}$$

и мы получаем:

$$\sum_k A^k_{i'} A^k_{j'} = \begin{cases} 0 & (i' \neq j') \\ 1 & (i' = j') \end{cases}, \qquad \sum_{k'} A^j_{k'} A^i_{k'} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}, \tag{49.7}$$

т. е. в ортогональной матрице произведение двух строк дает нуль, если эти строки различны, и единицу, если они совпадают; тем же самым свойством обладают и столбцы. Обратно, если такое свойство имеет место хотя бы только для строк или только для столбцов, то справедливо одно из соотношений (49.7), например, первое. Но в этом соотношении, как можно убедиться, сравнивая его с первым соотношением (49.5), роль обратной матрицы $A^{j'}_k$ играет транспонированная данная матрица, так что мы возвращаемся к условию (49.4), и наша матрица будет ортогональной.

Ортогональные матрицы обладают определителем, равным ± 1, и в соответствии с этим распадаются на два класса.

Действительно, согласно (49.4) матрицы $A^{i}_{i'}$ и $A^{i'}_{i}$ должны обладать одним и тем же определителем; но в то же время эти матрицы, как матрицы взаимно обратные, должны обладать и обратными (т. е. дающими в произведении единицу) определителями. Таким образом, определитель матрицы $A^{i}_{i'}$ должен быть обратным самому себе, т. е. равным ± 1.

Преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ при условии

$$\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}| = 1 \tag{49.8}$$

мы будем называть его *собственным движением*, в частности, при неподвижном начале O — *собственным вращением около* O. Собственные движения репера $\mathfrak{R}$, как можно было бы показать, всегда допускают непрерывный переход от одного из них к другому за счет непрерывного изменения репера $\mathfrak{R}'$ при постоянном $\mathfrak{R}$. В частности, любое из них может быть осуществлено непрерывным переходом от тождественного преобразования (которое, конечно, входит в число собственных движений). Геометрически это значит, что если в результате собственного движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$, то $\mathfrak{R}'$ можно получить непрерывным изменением $\mathfrak{R}$. При этом здесь и в дальнейшем подразумевается, конечно, что в процессе изменения репер остается ортонормированным.

Преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ при условии

$$\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}| = -1 \tag{49.9}$$

мы будем называть его *несобственным движением*. Несобственные движения легко получить из собственных, накладывая на каждое из них зеркальное отражение репера относительно одной из его гиперплоскостей: например, оставляя начало O и все орты $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ без изменения, а орт $\mathbf{e}_1$ заменяя через $-\mathbf{e}_1$. Очевидно, это элементарное преобразование, наложенное на любое собственное движение, приводит к изменению знака $\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}|$, т. е. к превращению этого движения в несобственное.

Между любыми двумя несобственными движениями возможен непрерывный переход, что вытекает из аналогичного свойства собственных движений. Но, конечно, непрерывный переход от собственного к несобственному движению невозможен, так как $\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}|$ не может непрерывным образом перейти от значения $+1$ к значению -1.

Если выбрать какой-нибудь репер $\mathfrak{R}_0$ и отнести к одному классу все реперы $\mathfrak{R}'$, получающиеся из него собственными движениями, а к другому — все реперы $\mathfrak{R}''$, получающиеся из него несобственными движениями, то все реперы распадаются на два класса, причем в пределах каждого класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому, а от одного класса к другому непрерывный переход невозможен. Полученное разбиение на реперы данной и противоположной ориентаций аналогично рассмотренному в вещественном аффинном пространстве. Разница только в том, что сейчас нас интересуют не любые аффинные, а лишь ортонормированные реперы; это приводит и в *комплексном* случае к той же картине (в то время как комплексные *аффинные* реперы на два класса не распадаются).

§ 50. Псевдоортогональные преобразования

Рассмотрим теперь случай, когда (49.1) дает преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ *в псевдоевклидовом пространстве индекса* k. Мы будем считать, что k принимает значения $1, 2, \ldots, n-1$. Случай $k=n$ исключаем, как приводящий по существу к собственно евклидову пространству (см. начало § 44); в этом случае $A^i_{i'}$ — тоже вещественная ортогональная матрица.

Пусть, как обычно, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ (соответственно $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}$) — мнимоединичные орты; остальные орты — единичные. Пусть индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ пробегают у нас значения $1, 2, \ldots, k$, а индексы $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ — значения $k+1, \ldots, n$.

Тогда разложение

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i$$

можно записать в детализированном виде, отличая единичные и мнимоединичные орты:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{\alpha'} &= A^\alpha_{\alpha'}\mathbf{e}_\alpha + A^\lambda_{\alpha'}\mathbf{e}_\lambda, \\ \mathbf{e}_{\lambda'} &= A^\alpha_{\lambda'}\mathbf{e}_\alpha + A^\lambda_{\lambda'}\mathbf{e}_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{50.1}$$

В правых частях по α и λ происходит, конечно, суммирование. Вся матрица преобразования состоит, таким образом, из четырех матриц:

$$\|A^i_{i'}\| = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{A^\alpha_{\alpha'}}}^{k} & \overbrace{\phantom{A^\lambda_{\alpha'}}}^{n-k} \end{array} \\ \left\|\begin{array}{c|c} A^\alpha_{\alpha'} & A^\lambda_{\alpha'} \\ \hline A^\alpha_{\lambda'} & A^\lambda_{\lambda'} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\,k \\ \}\,n-k \end{array}. \tag{50.2}$$

При помощи этой же матрицы преобразуются, как мы знаем, ковариантные координаты x_i произвольного вектора $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{aligned} x_{\alpha'} &= A^\alpha_{\alpha'}x_\alpha + A^\lambda_{\alpha'}x_\lambda, \\ x_{\lambda'} &= A^\alpha_{\lambda'}x_\alpha + A^\lambda_{\lambda'}x_\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{50.3}$$

Но его контравариантные координаты x^i преобразуются при помощи транспонированной обратной матрицы, а именно:

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i,$$

или, как мы теперь можем записать:

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha'} &= A^{\alpha'}_{\alpha} x^{\alpha} + A^{\alpha'}_{\lambda} x^{\lambda}, \\ x^{\lambda'} &= A^{\lambda'}_{\alpha} x^{\alpha} + A^{\lambda'}_{\lambda} x^{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{50.4}$$

Но в любом ортонормированном репере между x^i и x_i существует связь (42.24), которую мы теперь можем записать в виде

$$x_{\alpha} = -x^{\alpha}, \qquad x_{\lambda} = x^{\lambda}. \tag{50.5}$$

Заменяя согласно этим формулам ковариантные координаты через контравариантные в преобразовании (50.3), получим:

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha'} &= A^{\alpha}_{\alpha'} x^{\alpha} - A^{\lambda}_{\alpha'} x^{\lambda}, \\ x^{\lambda'} &= -A^{\alpha}_{\lambda'} x^{\alpha} + A^{\lambda}_{\lambda'} x^{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{50.6}$$

В правых частях по α и λ по-прежнему подразумевается суммирование. Матрица, посредством которой производится преобразование (50.6), отличается от матрицы (50.2) лишь изменением знака у элементов с разнородными индексами. Но преобразование (50.6) — это лишь другая запись преобразования (50.4), и матрицы у них должны совпадать:

$$\left.\begin{aligned} A^{\alpha'}_{\alpha} &= A^{\alpha}_{\alpha'}, \qquad & A^{\alpha'}_{\lambda} &= -A^{\lambda}_{\alpha'}, \\ A^{\lambda'}_{\alpha} &= -A^{\alpha}_{\lambda'}, \qquad & A^{\lambda'}_{\lambda} &= A^{\lambda}_{\lambda'}. \end{aligned}\right\} \tag{50.7}$$

Таким образом, *матрица* (50.2) *после изменения знаков элементов в правой верхней и левой нижней клетках совпадает со своей транспонированной обратной матрицей.*

Такие матрицы мы будем называть *псевдоортогональными матрицами* индекса k. Если матрица $A^i_{i'}$ псевдоортогональная, то, конечно, обратная матрица $A^{i'}_i$ тоже псевдоортогональная того же индекса k. Это видно хотя бы из полной симметрии формул (50.7) относительно обеих матриц.

Таким образом, переход от ортов старого к ортам нового репера осуществляется при помощи псевдоортогональной матрицы. Обратно, всякая псевдоортогональная матрица (индекса k) переводит любой данный ортонормированный репер (в пространстве индекса k) снова в ортонормированный репер. Это следует из того, что при наличии условий (50.7) закон преобразования контравариантных координат (50.4) можно переписать в виде (50.6); далее, сравнивая закон преобразования (50.6) с (50.3) и пользуясь соотношениями (50.5), которые имеют место в *данном ортонормированном репере*, убеждаемся, что и *в преобразованном репере* эти соотношения также справедливы:

$$x_{\alpha'} = -x^{\alpha'}, \quad x_{\lambda'} = x^{\lambda'}. \tag{50.8}$$

Сравнивая полученные формулы с общей формулой опускания индекса

$$x_{i'} = g_{i'j'}x^{j'},$$

убеждаемся, что в полученном репере

$$g_{\alpha'\alpha'} = -1, \quad g_{\lambda'\lambda'} = 1, \quad g_{i'j'} = 0 \quad (i' \neq j'),$$

т. е. что репер *ортонормированный*.

Псевдоортогональные матрицы (подобно ортогональным) можно было бы характеризовать условиями, наложенными на попарные произведения их строк, однако теперь произведение двух строк нужно понимать как сумму произведений соответствующих элементов перемножаемых строк, *причем первые k произведений берутся с обратными знаками*. Тогда произведение разных строк всегда давало бы нам нуль, а произведение одинаковых или -1 (для первых k строк) или $+1$ (для остальных).

Разумеется, все сказанное справедливо и для столбцов.

Нетрудно обнаружить, что, как и для ортогональных матриц,

$$\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| = \pm 1. \tag{50.9}$$

В самом деле, изменение знаков в правой верхней и левой нижней клетках матрицы (50.2) не меняет ее определителя, так как сводится к умножению на -1 первых k ее строк и первых k ее столбцов (а определитель умножается при этом на $(-1)^{2k} = 1$). В то же время это изменение знаков означает согласно (50.7) переход к транспонированной обратной матрице, а значит, и определитель меняет свое значение на обратное. Таким образом, $\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}|$ равен своей обратной величине, а это влечет равенство (50.9).

Однако в случае псевдоортогональных матриц их классификация по значению определителя ± 1 оказывается слишком грубой. Фактически псевдоортогональные матрицы данного порядка n и данного индекса k распадаются не на два, а на четыре класса (аналогично простейшему случаю псевдоевклидовой плоскости, когда $n = 2$, $k = 1$).

В самом деле, заметим, прежде всего, что в матрице (50.2) левая верхняя и правая нижняя клетки содержат неособенные матрицы (порядков k и $n-k$ соответственно):

$$\operatorname{Det}|A_{\alpha'}^{\alpha}| \neq 0, \quad \operatorname{Det}|A_{\lambda'}^{\lambda}| \neq 0. \tag{50.10}$$

Чтобы показать это, допустим противное, например,

$$\mathrm{Det}\,|A^{\alpha}_{\alpha'}| = 0.$$

Тогда между строками матрицы $A^{\alpha}_{\alpha'}$ (α' — номер строки) существует линейная зависимость, которую можно написать в виде

$$a^{\alpha'}A^{\alpha}_{\alpha'} = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ k); \tag{50.11}$$

по α' происходит суммирование. Умножая верхнее равенство (50.1) на $a^{\alpha'}$ и суммируя по $\alpha' = 1', \ldots, k'$, получаем (учитывая (50.11)):

$$\sum_{\alpha'} a^{\alpha'}\mathbf{e}_{\alpha'} = \sum_{\alpha'} a^{\alpha'}A^{\lambda}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\lambda}.$$

Так как коэффициенты линейной зависимости $a^{\alpha'}$ не обращаются в нуль одновременно, то скалярный квадрат левой части равенства будет отрицательным (так как $\mathbf{e}^2_{\alpha'} = -1$, $\mathbf{e}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\beta'} = 0$), а скалярный квадрат правой части будет положительным, в крайнем случае нулем (так как $\mathbf{e}^2_{\lambda} = 1$, $\mathbf{e}_{\lambda}\mathbf{e}_{\mu} = 0$). Полученное противоречие показывает справедливость нашего утверждения (50.10). В результате для определителей (50.10) возможны следующие четыре комбинации знаков, соответственно чему распадаются на четыре класса и *движения* ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ (как мы будем кратко называть переход от одного ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ к другому $\mathfrak{R}'$).

	$\mathrm{Det}\,\lvert A^{\alpha}_{\alpha'}\rvert$	$\mathrm{Det}\,\lvert A^{\lambda}_{\lambda'}\rvert$	Тип движения
1°	+	+	Собственное движение
2°	+	—	Несобственное движение 1-го рода
3°	—	+	Несобственное движение 2-го рода
4°	—	—	Несобственное движение 3-го рода

(50.12)

Простейшими примерами движений каждого из четырех типов служат:

1°. Тождественное преобразование.

$$\left.\begin{array}{llll} 2^\circ. & \mathbf{e}_n & \text{переходит в} & -\mathbf{e}_n \\ 3^\circ. & \mathbf{e}_1 & \text{»} \quad \text{»} & -\mathbf{e}_1 \\ 4^\circ. & \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n & \text{»} \quad \text{»} & -\mathbf{e}_1,\ -\mathbf{e}_n \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{остальные орты}\\ \text{и начало } O \text{ не меняются.}\end{array}$$

Так как рассматриваемые определители не могут принимать нулевых значений, то при неизменном $\mathfrak{R}$ и непрерывном изменении $\mathfrak{R}'$ движение всегда остается в пределах одного из указанных четырех типов. Можно было бы показать также (этого мы делать не будем), что в пределах одного типа всегда возможен непрерывный переход от одного движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ к любому другому $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$ в смысле *непрерывного* перехода репера $\mathfrak{R}'$ в $\mathfrak{R}''$.

В результате движения каждого типа можно характеризовать тем, что они могут быть получены непрерывным переходом от простейшего движения этого же типа. В частности, собственные движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ характеризуются тем, что их можно получить непрерывным переходом от тождественного преобразования, *т. е.* $\mathfrak{R}'$ *получается непрерывным изменением* $\mathfrak{R}$.

Отсюда вытекает также, что последовательное выполнение двух собственных движений $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}''$ дает снова собственное движение $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$. В самом деле, поскольку переход от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}'$ и от $\mathfrak{R}'$ к $\mathfrak{R}''$ происходит в результате непрерывного изменения репера, то тем же свойством обладает и переход от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}''$.

Нетрудно было бы составить таблицу, которая указывала бы, какой тип движения мы получим в результате наложения движений двух данных типов. За образец можно принять простейшие движения каждого из четырех типов; наложение их дает всегда одно из этих же простейших движений. Если перейти теперь от простейших движений к произвольным движениям *этих же типов*, то ввиду непрерывности такого перехода тип результирующего движения не изменится; таблица, составленная для простейших движений, будет пригодна во всех случаях.

Далее, так как при непрерывном изменении движения $\operatorname{Det}|A^i_{i'}|$ (равный ± 1) не меняется, то для любого движения он будет таким же, как и для простейшего движения этого же класса, т. е.

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Det}|A^i_{i'}| = 1 & \text{для движений классов} & 1^\circ,\ 4^\circ; \\ \operatorname{Det}|A^i_{i'}| = -1 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & 2^\circ,\ 3^\circ. \end{array}$$

Таким образом, наша классификация (50.12) является действительно подразделением более грубой классификации (50.9).

Нетрудно уяснить себе наглядный смысл нашей классификации движений: собственное движение не меняет ориентации не только всего репера в целом, но и отдельно его частей: $\mathbf{e}_\alpha$ (совокупность мнимоединичных ортов) и $\mathbf{e}_\lambda$ (совокупность единичных ортов); несобственное движение 1-го рода не меняет ориентации $\mathbf{e}_\alpha$, но меняет ее для $\mathbf{e}_\lambda$; несобственное движение 2-го рода ведет себя обратным образом; наконец, несобственное движение 3-го рода меняет ориентацию и для $\mathbf{e}_\alpha$, и для $\mathbf{e}_\lambda$, но не меняет ее для репера в целом.

При этом мы говорим, что векторы $\mathbf{e}_{\alpha'}$ и $\mathbf{e}_\alpha$ имеют одинаковую ориентацию тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Det}|A^\alpha_{\alpha'}| > 0, \tag{50.13}$$

и аналогично для $\mathbf{e}_{\lambda'}$ и $\mathbf{e}_\lambda$.

Чтобы это понятие об одинаковой ориентации векторов $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_{\alpha'}$ (и аналогично $\mathbf{e}_{\lambda'}$, $\mathbf{e}_\lambda$) имело смысл, нужно, конечно, чтобы оно обладало транзитивностью. Другими словами, нужно, чтобы сохранение ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ при переходе от первого репера ко второму и от второго к третьему влекло бы за собой сохранение ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ и при переходе от первого репера к третьему. Но это можно показать так: ввиду сохранения ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ оба перехода будут принадлежать к типам 1°, 2° таблицы (50.12). Наложение двух таких движений дает движение снова типа 1° или 2°, что легко усмотреть, беря для образца простейшие движения типов 1°, 2°. Таким образом, для результирующего движения условие (50.13) снова соблюдается и $\mathbf{e}_\alpha$ для первого и третьего реперов имеют снова одинаковую ориентацию.

Для $\mathbf{e}_\lambda$ проводится совершенно аналогичное рассуждение, но для типов 1°, 3°.

Обращает на себя внимание то, что, оказывается, имеет смысл говорить об одинаковой (или различной) ориентации векторов, например, $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_{\alpha'}$, несмотря на то, что они определяют различные k-мерные плоскости. Но дело в том, что эти плоскости в нашем пространстве — максимально-мерные плоскости со знакоотрицательной метрикой ($\mathbf{x}^2 < 0$), а такие плоскости, как можно было бы показать, нельзя вращать слишком свободно (иначе в них появятся $\mathbf{x}^2 > 0$), в частности, нельзя «перевертывать» и накладывать на себя с обратной ориентацией. Поэтому ориентацию, выбранную на одной из них, можно однозначно перенести, непрерывно вращая эту плоскость, и на все другие такие плоскости, — подобно тому, как это можно сделать (применяя грубое сравнение) для всех плоскостей обычного пространства, наклоненных к данной плоскости под углом не более чем, например, 20°.

Выберем какой-нибудь репер $\mathfrak{R}_0$ и разобьем все реперы пространства на четыре класса в зависимости от того, получаются ли они из $\mathfrak{R}_0$ движениями собственными или несобственными 1-го, 2-го и 3-го рода. Тогда согласно выше сказанному в пределах каждого класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому, но непрерывный переход от одного класса к другому невозможен. Очевидно, такое разбиение всех реперов $\mathfrak{R}$ на четыре класса от выбора начального репера $\mathfrak{R}_0$ не зависит (если нумерацией этих классов не интересоваться).

§ 51*. Квазиаффинная и аффинная группы преобразований

В этом и следующем параграфах мы хотим отчетливо выявить некоторые ведущие идеи, лежащие в основе аффинной, евклидовой и вообще всех «однородных» геометрий. В самом деле, однородный в каком-то смысле характер рассмотренных нами до сих пор пространств, их одинаковое строение в разных местах и в разных направлениях, с наглядной точки зрения представляется очевидным. Этой идее однородности мы придадим точную математическую форму, в этом параграфе для аффинных, а в следующем — для евклидовых пространств. Попутно мы уточним и понятие о преобразованиях репера; с этого мы даже и начнем.

Произвольный репер в n-мерном аффинном пространстве $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ определяется n^2+n независимыми параметрами в комплексном случае — комплексными, в вещественном — вещественными). Действительно, начало O и каждый из векторов $\mathbf{e}_i$ определяется n координатами. При этом из условия линейной независимости векторов репера следует, что определитель, образованный их координатами, отличен от нуля. В остальном n^2+n параметров совершенно произвольны.

Мы рассматривали до сих пор обычно преобразование одного определенного репера в другой. Сейчас мы станем на более широкую точку зрения и будем применять данное преобразование сразу ко всем ∞^{n^2+n} аффинным реперам, в результате чего каждый из них переходит в некоторый другой. А именно, *применить данное преобразование к многообразию**) *аффинных реперов это значит указать для каждого репера* $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *новый репер* $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, *имеющий заданное расположение относительно старого репера*. Другими словами, для каждого репера $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ векторы $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ и вектор сдвига $\overrightarrow{OO'}$ разлагаются по $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *с одними и теми же численными коэффициентами:*

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i}\mathbf{e}_i, \quad \overrightarrow{OO'} = A^i\,\mathbf{e}_i. \tag{51.1}$$

Произвольно взятыми численными коэффициентами $A_{i'}^{i}$, A^i (при условии $\mathrm{Det}\,|A_{i'}^{i}| \neq 0$) и характеризуется данное преобразование в многообразии реперов.

Можно также вместо коэффициентов A^i задаваться коэффициентами $A^{i'}$ (как мы делали в § 24), положив

$$\overrightarrow{OO'} = -A^{i'}\mathbf{e}_{i'}.$$

Тогда

$$A^{i'} = -A_{i}^{i'}A^{i} \text{ и, обратно, } A^{i} = -A_{i'}^{i}A^{i'}. \tag{51.2}$$

Последние соотношения легко получить, пользуясь зависимостью между $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_{i'}$.

Рассматриваемые нами в многообразии реперов преобразования (51.1) являются, очевидно, взаимно однозначными и *образуют группу*.

---

*) Множество всех аффинных реперов мы будем называть многообразием, намекая на его некоторые геометрические свойства; общая формулировка понятия многообразия будет дана позже.

Последнее означает, что совокупность наших преобразований содержит, во-первых, обратное преобразование для каждого из них и, во-вторых, результирующее преобразование для любых двух из них (а следовательно, и тождественное преобразование). Проверка этих утверждений тривиальна: достаточно убедиться, что при построении обратного и результирующего преобразований мы получаем преобразование того же вида (51.1), причем его коэффициенты $A^i_{i'}$, A^i полностью выражаются через коэффициенты исходных преобразований (и следовательно, вместе с ними имеют одни и те же численные значения для всех реперов).

Преобразования многообразия аффинных реперов в себя (51.1) *мы будем называть квазиаффинными преобразованиями, а группу этих преобразований — квазиаффинной группой.* Квазиаффинная группа в многообразии реперов является *однотранзитивной*, т. е. квазиаффинное преобразование вполне определяется заданием двух произвольно выбранных реперов $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, если потребовать, чтобы первый из них при этом переходил во второй. Действительно, коэффициенты $A^i_{i'}$, A^i вполне определятся из разложений (51.1), а тем самым определится и соответствующее квазиаффинное преобразование (путем применения формул (51.1) с теми же численными значениями $A^i_{i'}$, A^i к *каждому* реперу).

Очень важно отчетливо представлять себе, что квазиаффинная группа действует не в аффинном пространстве, а в многообразии его реперов. Более того, ее нельзя даже истолковать как группу, действующую в самом аффинном пространстве. В самом деле, попробуем истолковать квазиаффинное преобразование как точечное преобразование в аффинном пространстве. Для этого рассмотрим всевозможные реперы, имеющие общим началом какую-нибудь точку O, и подвергнем их одновременно *одному и тому же* квазиаффинному преобразованию. Векторы сдвига $\overrightarrow{OO'}$, именно потому, что они будут разлагаться в *разных реперах с одними и теми же* коэффициентами A^i, будут, вообще говоря, различными, и начала наших реперов «расползутся» из общей точки O по разным направлениям. Точка O в результате квазиаффинного преобразования не будет иметь образа.

Квазиаффинное преобразование многообразия реперов можно также рассматривать как преобразование соответствующих аффинных координатных систем; а именно, каждая координатная система преобразуется в другую согласно (24.20):

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}, \tag{51.3}$$

где $A^{i'}_i$, $A^{i'}$ имеют фиксированные значения: $A^{i'}_i$ — матрица, обратная $A^i_{i'}$; $A^{i'}$ имеет то же значение, как и в (51.2). Здесь x^i — координаты произвольной точки относительно старого репера, а $x^{i'}$ — координаты той же точки относительно преобразованного репера; коэффициенты преобразования произвольны с единственным ограничением

$$\operatorname{Det}|A_i^{i'}| \neq 0. \tag{51.4}$$

Оставим теперь квазиаффинные преобразования и займемся вопросом «об однородности» аффинного пространства. Прежде всего формулируем понятие об изоморфизме двух n-мерных аффинных пространств.

Мы называем аффинным изоморфизмом двух аффинных пространств такое взаимно однозначное отображение точек одного пространства в точки другого и векторов одного пространства в векторы другого, что: 1) *если точкам A, B первого пространства отвечают точки A^*, B^* второго пространства, то вектору $\overrightarrow{AB}$ отвечает вектор $\overrightarrow{A^*B^*}$;* 2) *если вектору* $\mathbf{x}$ *первого пространства отвечает вектор* $\mathbf{x}^*$ *второго пространства, то вектору* $\alpha\mathbf{x}$ *отвечает вектор* $\alpha\mathbf{x}^*$ *(где α — любое число, комплексное в случае комплексного пространства и вещественное в случае вещественного пространства).*

В частности, когда рассматриваемые пространства совпадают и речь идет о взаимно однозначном отображении точек и векторов аффинного пространства в точки и векторы того же пространства (с соблюдением прежних требований), то изоморфизм мы будем называть *автоморфизмом* или *аффинным преобразованием* аффинного пространства в себя.

Наше определение изоморфизма подобрано так, что, переходя от точек и векторов первого пространства к точкам и векторам второго пространства, мы не нарушаем никаких их аффинных свойств и соотношений; эти взаимоотношения в точности повторяются и после перехода. Действительно, если внимательно просмотреть нашу аксиоматику аффинного пространства, то нетрудно заметить, что в ней фигурируют по существу лишь два основных взаимоотношения между точками и векторами: что данный вектор $\mathbf{x}$ определяется парой данных точек A, B ($\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$) и что данный вектор $\mathbf{y}$ есть вектор $\mathbf{x}$, умноженный на число α ($\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$). В остальном аксиомы говорят о свойствах этих взаимоотношений, но каких-либо иных взаимоотношений не устанавливают.

Из определения изоморфизма легко получается, в частности, что вектор-нуль отображается в вектор-нуль, сумма векторов отображается в сумму отображенных векторов и т. д. Линейная зависимость между векторами, как следует отсюда, переходит в линейную зависимость с теми же коэффициентами. Поэтому размерность n, т. е. максимальное возможное число линейно независимых векторов, будет в изоморфных пространствах обязательно одинаковой.

Выберем в первом аффинном пространстве какой-либо репер $\mathfrak{R}_0\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. В силу изоморфизма ему отвечает во втором пространстве некоторый репер $\mathfrak{R}_0^*\{O^*, \mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*\}$. Каждому вектору

$$\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha \tag{51.5}$$

отвечает вектор

$$\mathbf{x}^* = x^\alpha \overset{*}{\mathbf{e}}_\alpha \tag{51.6}$$

с теми же координатами x^α в силу сохранения линейных зависимостей при изоморфизме.

В частности, радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ каждой точки M переходит в радиус-вектор $\overrightarrow{O^*M^*}$ преобразованной точки M^*, сохраняя прежние координаты x^α. Тем самым и точка M^* имеет в преобразованном репере прежние координаты.

Итак, *всякий данный изоморфизм двух аффинных пространств можно описать следующим образом. В первом пространстве задаемся произвольным репером* $\mathfrak{R}_0(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *а во втором пространстве берем соответствующий ему репер* $\mathfrak{R}_0^*(O^*, \mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*)$. *Каждой точке M (вектору* $\mathbf{x}$*) в первом пространстве ставим в соответствие точку M^* (вектор* $\mathbf{x}^*$*) во втором пространстве так, чтобы координаты M^* (вектора* $\mathbf{x}^*$*) относительно второго репера были такими же, как и координаты M (вектора* $\mathbf{x}$*) относительно первого репера.*

Обратно, задавшись реперами $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ произвольно, мы при помощи указанного построения всегда получаем изоморфизм, что обнаруживается тривиальной проверкой. Этот изоморфизм переводит $\mathfrak{R}_0$ в $\mathfrak{R}_0^*$ и определяется, очевидно, однозначным образом.

Все сказанное справедливо и для частного случая, когда оба пространства совпадают, и речь идет об *автоморфизме* — аффинном преобразовании пространства в себя.

Оба репера $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_0^*$ берутся тогда в одном и том же аффинном пространстве, и каждая его точка M переводится в некоторую точку M^* с таким расчетом, чтобы M^* относительно $\mathfrak{R}_0^*$ имела те же координаты x^i, что и точка M относительно $\mathfrak{R}_0$. Пусть $x^{i'}$ суть координаты точки M^* относительно репера $\mathfrak{R}_0$, и, следовательно, связаны с x^i формулами (51.3)

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}. \tag{51.7}$$

Но так как x^i — координаты произвольной точки M относительно репера $\mathfrak{R}_0$, $x^{i'}$ — координаты преобразованной точки M^* относительно того же репера $\mathfrak{R}_0$, то теперь формулы (51.7) дают *аффинное* *преобразование пространства в себя,* т. е. выражают координаты преобразованной точки как функции координат произвольно взятой исходной точки *в неизменной координатной системе.*

Очевидно, далее, что аффинные преобразования в данном аффинном пространстве образуют *группу.* В самом деле, из определения автоморфизма немедленно следует, что обратное к автоморфизму преобразование есть тоже автоморфизм и наложение двух автоморфизмов есть снова автоморфизм. Группу аффинных автоморфизмов мы будем называть *аффинной группой. Наличие этой группы и есть точное выражение идеи однородности аффинного пространства.*

В отличие от квазиаффинных преобразований аффинные преобразования по самому определению суть *точечные* преобразования пространства (соответствующие преобразования векторов можно при желании считать следствием точечных преобразований). Вместе с тем аффинное преобразование переводит *каждый* репер пространства снова в репер, так что мы получаем взаимно однозначное преобразование многообразия реперов в себя. Группа аффинных преобразований, рассматриваемых в многообразии реперов, является согласно сказанному выше *однотранзитивной.*

Понятие группы автоморфизмов аффинного пространства введено нами лишь на заключительном этапе его теории. Однако это не значит, что речь идет о маловажном понятии; напротив, эта группа играет огромную принципиальную роль. С ее точки зрения необходимо переосмыслить некоторые наши прежние понятия. Так, мы рассматривали до сих пор аффинные реперы как специального вида конструкции, оказавшиеся нам полезными. Теперь мы можем формулировать идею, лежащую в основе этого понятия. Пусть нам дана совокупность фигур $\mathfrak{R}$, обладающая следующим свойством: *любую фигуру $\mathfrak{R}_1$ этой совокупности можно перевести в любую фигуру $\mathfrak{R}_2$ этой же совокупности одним и только одним автоморфизмом данного пространства и любой автоморфизм пространства переводит каждую фигуру $\mathfrak{R}_1$ нашей совокупности в некоторую фигуру $\mathfrak{R}_2$ этой же совокупности. Тогда фигуры $\mathfrak{R}$ называются реперами данного пространства.*

Это определение раскрывает настоящий смысл наших аффинных реперов, но применимо не только к ним. Так же определяются реперы и в любом однородном пространстве, т. е. в пространстве, геометрические свойства которого могут быть определены как инварианты некоторой транзитивной группы взаимно однозначных преобразований этого пространства в себя (которая и будет группой его автоморфизмов).

Заметим, что из нашего определения репера не вытекает его конкретный вид, например, что аффинный репер будет именно состоять из точки и n линейно независимых векторов; здесь остается произвол, который используется в целях наибольшей простоты и удобства.

Интересно сравнить теперь группу *аффинных* и группу *квазиаффинных* преобразований в n^2+n-мерном многообразии всевозможных реперов n-мерного аффинного пространства.

Обе группы однотранзитивны, т. е. для любых двух реперов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ как в одной, так и в другой группе найдется точно одно преобразование, переводящее $\mathfrak{R}_0$ в $\mathfrak{R}_0^*$. Но характер этих преобразований существенно различный. В случае *аффинного* преобразования мы *изоморфно* отображаем аффинное пространство в себя, точки переходят в точки, векторы в векторы с сохранением всех их аффинных взаимоотношений; в частности, и реперы переходят в реперы (причем $\mathfrak{R}_0$ переходит в $\mathfrak{R}_0^*$).

В случае квазиаффинного преобразования о преобразовании точек и векторов нет смысла говорить; каждый же репер $\mathfrak{R}$ переходит в новое положение $\mathfrak{R}^*$ так, что $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}$ расположен точно так же, как $\mathfrak{R}_0^*$ относительно $\mathfrak{R}_0$. Мы уточняли это в том смысле, что векторы репера $\mathfrak{R}^*$ и смещение его начала сравнительно с началом $\mathfrak{R}$ разлагаются по векторам репера $\mathfrak{R}$ с теми же коэффициентами, как и в случае реперов $\mathfrak{R}_0^*$, $\mathfrak{R}_0$.

Но это равносильно тому, что, переводя аффинным преобразованием $\mathfrak{R}_0$ в $\mathfrak{R}$, мы заставим перейти и $\mathfrak{R}_0^*$ в $\mathfrak{R}^*$. Таким образом, геометрический смысл того утверждения, что *репер $\mathfrak{R}_0^*$ относительно $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}$ расположены одинаково, заключается в возможности перевести пару реперов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ в пару реперов $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ некоторым автоморфизмом нашего пространства.* Это определение пригодно не только в аффинном, но и в любом однородном пространстве.

Мы можем теперь формулировать следующее правило, исчерпывающее связь между *аффинными и квазиаффинными* преобразованиями в многообразии реперов.

Если четыре репера подобраны так, что

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &\to \mathfrak{R}_0^*, \\ \mathfrak{R} &\to \mathfrak{R}^* \end{aligned}\right\} \tag{51.8}$$

при одном и том же квазиаффинном преобразовании, то

$$\left.\begin{matrix} \mathfrak{R}_0, & \mathfrak{R}_0^*, \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R}^* \end{matrix}\right\} \tag{51.9}$$

при одном и том же аффинном преобразовании (и обратно).

Эту зависимость между аффинными и квазиаффинными преобразованиями в многообразии реперов можно формулировать в виде *перестановочности любого аффинного преобразования с любым квазиаффинным преобразованием.* Действительно, из (51.8), (51.9) видно, что при выполнении данного аффинного и данного квазиаффинного преобразований, *в том или другом порядке безразлично,* репер $\mathfrak{R}_0$ все равно перейдет в репер $\mathfrak{R}^*$. Обратно, из перестановочности данных преобразований следует наше правило.

Две однотранзитивные взаимно перестановочные группы преобразований в многообразии аффинных реперов представляют собой пример конструкции, играющей важную роль в геометрии и в теории групп Ли.

А именно, если в каком-либо многообразии дана однотранзитивная группа взаимно однозначных преобразований этого многообразия в себя, то единственным образом определяется вторая однотранзитивная группа, преобразования которой будут перестановочны со всеми преобразованиями первой. В самом деле, задавшись как-либо элементами многообразия A_0, A_0^*, мы передвигаем эту пару элементов всевозможными преобразованиями первой группы в положения A, A^*; в силу однотранзитивности первой группы A пробегает все многообразие, причем каждому положению A отвечает строго определенное положение A^*. Преобразование $A \to A^*$ будет перестановочным со всеми преобразованиями первой группы и, как мы видим, однозначно определяется выбором $A_0 \to A_0^*$. Совокупность таких преобразований и образует вторую, тоже однотранзитивную группу. Обе группы играют взаимно симметрическую роль.

В случае многообразия аффинных реперов все же естественно считать основной аффинную группу (группу автоморфизмов), а квазиаффинную группу — построенной дополнительно по принципу перестановочности с группой автоморфизмов.

§ 52*. Группа квазидвижений и группа движений в евклидовом пространстве

Мы проведем сейчас в евклидовом пространстве те построения, которые были выполнены в предыдущем параграфе для аффинного пространства. При этом под евклидовым пространством можно понимать как комплексное евклидово пространство, так и любое из вещественных евклидовых пространств; по внешности наши рассуждения зависеть от этого не будут. Вместо аффинных реперов соответствующую роль будут играть теперь ортонормированные реперы.

Мы подробно рассматривали в свое время переход от одного ортонормированного репера к другому; согласно (51.1) его можно записать в виде

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i}\mathbf{e}_{i}, \quad \overrightarrow{OO^*} = A^{i}\mathbf{e}_{i}, \tag{52.1}$$

так как ортонормированные реперы — частный случай аффинных. Только теперь матрица $A_{i'}^{i}$ — уже не произвольная неособенная матрица, а обязательно или комплексная ортогональная, или вещественная ортогональная, или вещественная псевдоортогональная — в зависимости от характера рассматриваемого евклидова пространства.

Рассмотрим многообразие всех ортонормированных реперов нашего пространства. Если вспомнить построение ортонормированного репера, то нетрудно подсчитать, что это многообразие будет $\frac{n(n+1)}{2}$-мерным. Действительно, произвольный выбор начала O в n-мерном пространстве дает n независимых параметров, произвольный выбор единичного (или мнимоединичного) вектора $\mathbf{e}_1$ дает $n-1$ параметров (один параметр снимается за счет нормировки), далее $\mathbf{e}_2$ выбирается уже в $n-1$-мерной плоскости R_{n-1} и зависит поэтому от $n-2$ параметров и т. д. В итоге число параметров равно:

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Разумеется, в случае комплексного пространства эти параметры будут комплексными *).

Задавшись матрицей $A_{i'}^{i}$ и коэффициентами A^{i}, мы будем производить преобразование (52.1) над *каждым* ортонормированным репером нашего евклидова пространства. Мы получаем взаимно однозначное преобразование многообразия реперов в себя, которое будем называть *квазидвижением* в многообразии реперов. Таким образом, наглядный смысл квазидвижения состоит в том, что каждый репер переходит в новый репер, расположенный относительно его вполне определенным образом. Действительно, так как мы задались определенными численными значениями $A_{i'}^{i}$ и A^{i}, то в аффинном смысле новый репер будет расположен всегда одним и тем же способом относительно старого (§ 51); то так как, кроме того, старый репер ортонормированный и обладает строго определенными метрическими свойствами, то постоянство коэффициентов означает, что и в метрическом смысле расположение нового репера относительно старого будет всегда одним и тем же.

---

*) Строго говоря, наш подсчет является лишь грубо ориентировочным: мы как бы упускаем из виду, что на самом деле многообразие *всех* ортонормированных реперов не является элементарным (§ 80) и не может быть обслужено *одной* системой $\frac{1}{2}n(n+1)$ параметров (одной координатной системой).

Так, на обычной плоскости квазидвижение можно определить, например, тем, что каждый ортонормированный репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ сдвигается на три единицы длины в направлении вектора $\mathbf{e}_1$ и поворачивается затем около O на 60° в направлении от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$.

Квазидвижение в многообразии реперов сопровождается преобразованием соответствующих им координатных систем по формуле (частный случай (51.3))

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}. \tag{52.2}$$

Как и квазиаффинные преобразования, квазидвижения суть преобразования в многообразии реперов и не могут быть истолкованы как точечные преобразования евклидова пространства.

Переходим теперь к изучению изоморфных соответствий (изоморфизмов) между евклидовыми пространствами. *Изоморфизмом между двумя евклидовыми пространствами мы будем называть аффинный изоморфизм между ними* (§ 51) *с добавочным требованием сохранения скалярного произведения,* т. е. мы требуем дополнительно, чтобы для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ первого пространства и соответствующих им векторов $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ второго пространства имело место равенство

$$\mathbf{xy} = \mathbf{x}^*\mathbf{y}^*. \tag{52.3}$$

Так как евклидово пространство мы определили как аффинное пространство с фиксированной в нем билинейной скалярной функцией двух векторов — скалярным произведением, то ясно, что изоморфизм переводит образы первого пространства в образы второго пространства с сохранением их аффинных и метрических свойств.

Изоморфное отображение евклидова пространства на себя мы будем называть *автоморфизмом или движением в евклидовом пространстве.* Всякий изоморфизм, в частности, автоморфизм переводит ортонормированный репер, очевидно, снова в ортонормированный репер, причем соответствующие точки будут иметь в этих реперах одинаковые координаты (§ 51).

Обратно, зададимся произвольными ортонормированными реперами $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_0^*$ или в разных евклидовых пространствах (но тогда обязательно одинакового числа измерений n и, в вещественном случае, одинакового индекса k), или в одном и том же евклидовом пространстве, и каждую точку M (вектор $\mathbf{x}$) с координатами x^i относительно репера $\mathfrak{R}_0$ отобразим в точку M^* (вектор $\mathbf{x}^*$) с теми же координатами x^i относительно репера $\mathfrak{R}_0^*$. Тривиальная проверка показывает, что при этом сохраняются аффинные свойства, и мы имеем, таким образом, аффинный изоморфизм; кроме того, сохраняется и скалярное произведение, так как в ортонормированном репере данного индекса k оно всегда одинаково выражается через координаты векторов $\mathbf{xy} = -x^1y^1 - \ldots - x^ky^k + x^{k+1}y^{k+1} + \ldots + x^ny^n$;

координаты же векторов x, y остаются в результате нашего преобразования неизменными, если их оценивать в преобразованном репере.

В частности, движения в данном евклидовом пространстве, согласно сказанному, однозначно определяются произвольным выбором ортонормированных реперов $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}_0^*$ и требованием, чтобы репер $\mathfrak{R}_0$ переходил в репер $\mathfrak{R}_0^*$. Мы видим, что ортонормированные реперы в евклидовом пространстве рассматриваются нами не случайно: они играют такую же роль, как аффинные реперы в аффинном пространстве. А именно, в обоих случаях каждой паре реперов отвечает один и только один автоморфизм пространства, переводящий первый репер во второй; и каждый репер любым автоморфизмом переводится снова в некоторый репер; это и есть то основное, что заключено в идее репера (см. § 51).

Совершенно аналогично § 51 мы можем истолковать одинаковое расположение ортонормированных реперов $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_0^*$ относительно $\mathfrak{R}_0$ как возможность перевести пару реперов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ в пару реперов $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ некоторым движением евклидова пространства, т. е. снова получаем схему (51.8)—(51.9). Дословно повторяются и последующие рассуждения, так что для движений и квазидвижений в многообразии ортонормированных реперов справедливо все сказанное относительно аффинных и квазиаффинных преобразований в многообразии аффинных реперов. В частности, идея *однородности* евклидова пространства находит себе точное выражение в существовании *группы движений*.

Классификация движений ортонормированных реперов, т. е. переходов $\mathfrak{R}_0 \to \mathfrak{R}_0^*$ (§§ 49, 50), полностью переносится и на вызываемые этими переходами движения всего евклидова пространства:

1) собственные движения и несобственные движения,

$$\operatorname{Det} | A_{i'}^{i} | = \pm 1, \tag{52.4}$$

в случае комплексных евклидовых или собственно евклидовых пространств;

2) собственные движения и несобственные движения 1-го, 2-го, 3-го рода:

	$\operatorname{Det} \| A_{\alpha'}^{\alpha} \|$	$\operatorname{Det} \| A_{\lambda'}^{\lambda} \|$
1°	+	+
2°	+	−
3°	−	+
4°	−	−

(52.5)

в случае псевдоевклидовых пространств.

Правда, может возникнуть следующее сомнение. Одно и то же движение в евклидовом пространстве можно задать как парой реперов $\mathfrak{R}_0 \to \mathfrak{R}_0^*$, так и парой реперов $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$, где репер $\mathfrak{R}$ выбран произвольно, а $\mathfrak{R}^*$ ему соответствует в результате движения. Нужно показать, что при данном движении переход от $\mathfrak{R}_0$ к $\mathfrak{R}_0^*$ и от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}^*$ будет принадлежать всегда к одному и тому же типу, который тем самым естественно принять и за тип движения.

Если мы непрерывно меняем репер $\mathfrak{R}$, причем, конечно, непрерывно меняется и соответствующий репер $\mathfrak{R}^*$, то тип перехода $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$ не может измениться, так как определители (52.4), (52.5), не принимая нулевых значений, не могут менять и знаков. Но непрерывным изменением репера $\mathfrak{R}$ мы можем получить, как нам известно, любой репер того же класса. (Мы имеем в виду, что все реперы в комплексном евклидовом и собственно евклидовом пространстве распадаются на два класса, а в псевдоевклидовом пространстве — на четыре класса; см. §§ 49, 50.) Таким образом, тип перехода $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$ будет одним и тем же, если реперы $\mathfrak{R}$ берутся из одного класса.

Но это же самое будет верным и при любом выборе репера $\mathfrak{R}$. В самом деле, заменим и в репере $\mathfrak{R}$, и в репере $\mathfrak{R}^*$ вектор $\mathbf{e}_1$ на $-\mathbf{e}_1$. Полученные в результате реперы $\tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{R}}^*$, очевидно, по-прежнему соответствуют друг другу при том же движении: $\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}^*$, причем тип перехода останется прежним. Действительно, в силу замены $\mathbf{e}_1 \to -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'} \to -\mathbf{e}_{1'}$ в матрицах $\|A_{i'}^{i}\|$, $\|A_{\alpha'}^{\alpha}\|$ умножаются на -1 первая строка и первый столбец, т. е. соответствующие определители не изменятся; матрица же $\|A_{\lambda'}^{\lambda}\|$ вообще не изменится.

Итак, тип перехода $\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}^*$ останется без изменения, хотя репер $\tilde{\mathfrak{R}}$ принадлежит к другому классу, чем репер $\mathfrak{R}$. В случае комплексного евклидова и собственно евклидова пространств вопрос этим исчерпывается ввиду наличия лишь двух классов реперов. В случае псевдоевклидова пространства имеется четыре класса реперов, и нужно провести совершенно аналогичное рассуждение, во-первых, с заменой $\mathbf{e}_n$ на $-\mathbf{e}_n$ и, во-вторых, с заменой $\mathbf{e}_n$ на $-\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1$ на $-\mathbf{e}_1$ одновременно. В результате мы убеждаемся, что данное движение в евклидовом пространстве, примененное к любому реперу, дает переход всегда одного и того же типа. Поэтому тип этого перехода законно принять за тип самого движения.

§ 53*. Вложение вещественных евклидовых пространств в комплексное евклидово пространство

Далеко идущая аналогия в свойствах комплексного и вещественного пространств, ранее аффинных, а теперь евклидовых, не должна, однако, вводить нас в заблуждение. Комплексное n-мерное аффинное пространство (мы начнем с него) обладает весьма своеобразной геометрией. Начать с того, что по существу это пространство обладает не n, а $2n$ измерениями. В самом деле, каждая из n комплексных координат x^p, определяющих положение точки, как и всякое комплексное число, может быть записана в виде

$$x^p = \alpha^p + i\beta^p,$$

а следовательно, положение точки определяется $2n$ независимыми вещественными параметрами, и фактически мы имеем $2n$-мерное пространство. Может показаться, что комплексное n-мерное аффинное пространство просто эквивалентно $2n$-мерному вещественному аффинному пространству, но это тоже было бы неверно.

Так, например, m-мерные плоскости в комплексном аффинном пространстве будут действительно $2m$-мерными плоскостями в вещественном $2n$-мерном пространстве с координатами α^i, β^i, но, однако, отнюдь *не любыми* такими плоскостями. В частности, прямые линии в комплексном пространстве ($m = 1$) будут по существу двумерными плоскостями в вещественном $2n$-мерном пространстве, но также не произвольными, а принадлежащими к некоторому определенному классу.

Аффинные преобразования в комплексном n-мерном аффинном пространстве зависят от $n^2 + n$ комплексных параметров, т. е. от $2(n^2 + n)$ вещественных параметров.

Между тем аффинные преобразования в соответствующем $2n$-мерном вещественном аффинном пространстве зависят от

$$(2n)^2 + 2n = 4n^2 + 2n$$

вещественных параметров и образуют более обширную группу.

Все это показывает, что формальное сходство между комплексным и вещественным аффинными пространствами не затрагивает самую геометрическую основу этих пространств. Это сказалось, между прочим, в § 37 при рассмотрении объемов в аффинном пространстве, где мы сознательно ограничились вещественным случаем. Если бы захотели рассматривать объемы в комплексном пространстве, то нам не удалось бы удержаться в рамках формальной аналогии с вещественным пространством и пришлось бы прямо трактовать n-мерное комплексное пространство как $2n$-мерное вещественное.

Все, что было сказано, остается справедливым и при переходе к евклидовым пространствам. Особенно следует подчеркнуть, что пара точек в вещественном евклидовом пространстве обладает *одним* вещественным инвариантом (расстоянием), в то время как в комплексном евклидовом пространстве таких инвариантов *два*, так как *комплексное расстояние* равносильно двум вещественным инвариантам. С этим связано и то, что группа движений в n-мерном комплексном евклидовом пространстве зависит от существенно меньшего числа параметров, чем в $2n$-мерном вещественном евклидовом пространстве (в первом случае $\frac{n(n+1)}{2}$ комплексных, а значит, $n(n+1)$ вещественных параметров, во втором случае $\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$ вещественных параметров).

Мы хотим теперь показать, что n-мерное вещественное евклидово пространство всегда можно «вложить» в n-мерное комплексное евклидово пространство, т. е. рассматривать как подпространство последнего.

Покажем это сначала для собственно евклидова пространства. *Выберем какой-либо ортонормированный репер* $\mathfrak{R}\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *в комплексном евклидовом пространстве и рассмотрим совокупность всех точек* M *и векторов* $\mathbf{x}$ *этого пространства, координаты которых* x^i *имеют вещественные значения.* Мы утверждаем, что эта совокупность точек и векторов образует n-мерное собственно евклидово пространство. В самом деле, прежде всего мы получаем таким образом n-мерное вещественное аффинное пространство, так как все соответствующие аксиомы будут у нас соблюдаться. Так, например, вектор $\overrightarrow{AB}$, «соединяющий» точки A, B с вещественными координатами, сам имеет вещественные координаты; откладывание вектора $\mathbf{x}$ с вещественными координатами от точки A с вещественными координатами приводит нас в точку B тоже с вещественными координатами; умножение вектора $\mathbf{x}$ с вещественными координатами на вещественное число α дает нам вектор $\alpha\mathbf{x}$, снова обладающий этим свойством, и т. д. Размерность полученного *вещественного* аффинного пространства будет равна n, так как n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ существует, а любой вектор $\mathbf{x}$ с вещественными координатами тем самым разлагается по ним с вещественными коэффициентами. Но, кроме того, в полученном пространстве имеется и метрика (заимствованная из вмещающего комплексного евклидова пространства)

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + \ldots + x^{n^2}.$$

Так как мы ограничиваемся векторами $\mathbf{x}$ с вещественными координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$, то это есть метрика собственно евклидова пространства.

Следует обратить внимание на то, что выделенное таким образом в n-мерном комплексном евклидовом пространстве n-мерное собственно евклидово пространство *не образует в нем плоскости*, по крайней мере, в том смысле, как мы употребляем этот термин. В самом деле, плоскость строится у нас на основе каких-то $m < n$ линейно независимых направляющих векторов, из которых составляются всевозможные линейные комбинации с *комплексными* коэффициентами (поскольку пространство комплексное); полученные векторы откладываются от фиксированной точки O^*. Мы же вместо этого взяли все n ортов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, но, составляя их линейные комбинации, искусственно ограничились лишь вещественными коэффициентами.

Почти столь же просто можно выделить в n-мерном комплексном евклидовом пространстве и псевдоевклидово пространство, тоже n-мерное и обладающее любым индексом $k=0, 1, \ldots, n$. Для этого достаточно взять за основу вместо какого-нибудь ортонормированного репера $\mathfrak{R}\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ репер

$$\tilde{\mathfrak{R}}\{O, i\mathbf{e}_1, \ldots, i\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}, \tag{53.1}$$

т. е. помножить первые k векторов на i (это вполне возможно, так как мы находимся в комплексном пространстве). Нетрудно заметить, что тем самым эти векторы из единичных превратятся в мнимоединичные.

Рассмотрим теперь совокупность точек и векторов, имеющих вещественные координаты x^i относительно репера $\tilde{\mathfrak{R}}$. Совершенно так же, как и ранее, убеждаемся, что мы получили вещественное n-мерное аффинное пространство. Кроме того, это пространство снабжено метрикой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - \ldots - x^{k^2} + x^{k+1^2} + \ldots + x^{n^2}, \tag{53.2}$$

так как вектор $\mathbf{x}$ с вещественными координатами x^i относительно репера $\tilde{\mathfrak{R}}$ имеет разложение

$$\mathbf{x} = ix^1\mathbf{e}_1 + \ldots + ix^k\mathbf{e}_k + x^{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + x^n\mathbf{e}_n, \tag{53.3}$$

откуда легко получается (53.2) почленным возведением в скалярный квадрат. Мы действительно выделили псевдоевклидово пространство индекса k.

В ряде случаев бывает полезным трактовать этим путем вещественные евклидовы пространства как подпространства комплексного евклидова пространства того же (в комплексном смысле!) числа измерений n. Конечно, такое выделение вещественных евклидовых пространств совершается бесчисленным количеством способов — при любом выборе репера $\mathfrak{R}$.

§ 54. Измерение объемов в вещественном евклидовом пространстве

Мы выражали объем какой-либо n-мерной области D в n-мерном вещественном аффинном пространстве посредством интеграла

$$V_D = \int_D dx^1\, dx^2 \ldots dx^n, \tag{54.1}$$

вычисленного в какой-либо аффинной координатной системе (§ 37). Этот интеграл не имеет, конечно, определенного численного значения и является (знакопостоянным) относительным инвариантом веса — 1, т. е. он преобразуется по закону

$$V'_D = V_D \,|\, \mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|\,|^{-1}. \qquad (54.2)$$

В случае евклидова пространства мы сужаем *определение объема*, а именно, *объемом области D мы называем интеграл V_D, вычисленный в любой ортонормированной координатной системе.*

Объем в евклидовом смысле будет уже *инвариантом*, так как при переходе от одного ортонормированного репера к другому всегда

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = \pm 1,$$

а следовательно, (54.2) дает

$$V'_D = V_D. \qquad (54.3)$$

Таким образом, теперь объем данной области D имеет вполне определенное численное значение. При этом следует иметь в виду, что задание объема в евклидовом смысле влечет его задание и в аффинном смысле: раз для данной области D известен интеграл V_D, вычисленный в ортонормированных координатах, то он будет известен и в любых аффинных координатах — достаточно воспользоваться законом преобразования (54.2), — а это и означает задание объема в аффинном смысле.

Обратно, если в евклидовом пространстве нам задан объем некоторой области D в аффинном смысле, т. е. известен интеграл V_D, вычисленный в любых аффинных и, в частности, ортонормированных координатах, то, значит, известен объем и в евклидовом смысле.

В дальнейшем будем заниматься свойствами объемов в евклидовом смысле; будем обозначать эти объемы W_D. Объем составной области $D = D_1 + D_2$, где D_1 и D_2 — неперекрывающиеся составляющие области, по элементарному свойству кратного интеграла будет равен сумме объемов этих областей:

$$W_D = W_{D_1} + W_{D_2}. \qquad (54.4)$$

Далее, если D и D^* — конгруэнтные области, т. е. переводятся одна в другую движением евклидова пространства, то их объемы одинаковы

$$W_D = W_{D^*}. \qquad (54.5)$$

В самом деле, будем вычислять интеграл (54.1) для областей D и D^*, причем в первом случае берем координаты $x^1, \ldots, x^n$ относительно какого-либо ортонормированного репера $\mathfrak{R}$, а во втором случае — относительно репера $\mathfrak{R}^*$, полученного из $\mathfrak{R}$ тем движением, которое переводит D в D^*. Координаты x^i каждой точки области D^* относительно $\mathfrak{R}^*$ будут такими же, как координаты соответствующей точки области D относительно $\mathfrak{R}$, так что переменные под знаком интеграла пробегают в обоих случаях одну и ту же область изменения, и интегралы будут равны.

В ортонормированной координатной системе объем W_D области D выражается интегралом (54.1). В произвольной же аффинной координатной системе этот интеграл меняет свое значение, а именно, ведет себя как знакопостоянный относительный инвариант веса -1, так что объема (в евклидовом смысле), вообще говоря, не выражает.

Мы хотим все-таки получить выражение объема в произвольных аффинных координатах; в таком случае удобнее всего домножить интеграл (54.1) на (тоже знакопостоянный) инвариант веса $+1$, так чтобы в результате получился бы уже настоящий инвариант, выражающий евклидов объем W_D области D в любой аффинной координатной системе.

Простейшим инвариантом веса 2, связанным с метрикой евклидова пространства, является определитель, составленный из координат метрического тензора

$$g = \mathrm{Det}\,|g_{ij}|. \tag{54.6}$$

Действительно, согласно (39.17) при переходе из одной аффинной координатной системы в другую

$$g' = (\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|)^2 \cdot g. \tag{54.7}$$

Очевидно, g и g' имеют всегда одинаковые знаки: мы находимся в вещественном евклидовом пространстве, так что $(\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|)^2 > 0$. Чтобы получить теперь относительный инвариант веса 1, достаточно взять $\sqrt{g}$, причем, чтобы не иметь дела с мнимостями, мы предпочтем взять $\sqrt{|g|}$. Беря обе части (54.7) по модулю и извлекая из них квадратные корни (со знаком $+$), получаем:

$$\sqrt{|g'|} = |\,\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|\,| \cdot \sqrt{|g|}. \tag{54.8}$$

Таким образом, $\sqrt{|g|}$ есть знакопостоянный относительный инвариант веса $+1$, и перемножая (54.2) и (54.8) почленно, получаем:

$$\sqrt{|g'|} \cdot V'_D = \sqrt{|g|} \cdot V_D, \tag{54.9}$$

т. е. произведение $\sqrt{|g|} \cdot V_D$ есть инвариант преобразования аффинных координат. Этот инвариант совпадает с W_D:

$$W_D = \sqrt{|g|} \cdot V_D = \sqrt{|g|} \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n. \tag{54.10}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно записать (54.10) *в ортонормированной* координатной системе; тогда $g_{ij}=\begin{cases} 0\ (i\neq j) \\ \pm 1\ (i=j) \end{cases}$, $g=\pm 1$, $\sqrt{|g|}=1$, и мы получаем верное равенство

$$W_D=\int\limits_D dx^1\ldots dx^n.$$

Особо следует заняться измерением объемов n-мерных параллелепипедов.

Пусть параллелепипед построен на (линейно независимых) векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Интеграл (54.1), распространенный по нашему параллелепипеду, в любой аффинной координатной системе выражается формулой (37.13):

$$V_D=|\operatorname{Det}\|a_k^i\||, \tag{54.11}$$

где a_k^i — координаты вектора $\mathbf{a}_k$. Следовательно, согласно (54.10) евклидов объем параллелепипеда выражается формулой

$$W_D=\sqrt{|g|}\cdot|\operatorname{Det}\|a_k^i\||. \tag{54.12}$$

В частности, в ортонормированной координатной системе $g=\pm 1$, и следовательно,

$$W_D=|\operatorname{Det}\|a_k^i\||.$$

Эта формула при $n=3$ хорошо известна из элементарной аналитической геометрии.

Все сказанное относительно вычисления объемов в n-мерном евклидовом пространстве остается справедливым и для его m-мерных *неизотропных* плоскостей, поскольку они также несут на себе евклидову метрику. В результате объемы плоских m-мерных областей также получают определенные *численные значения.* В связи с этим (в отличие от аффинного пространства) мы можем сравнивать m-мерные объемы областей, расположенных в каких угодно (а не только параллельных) m-мерных плоскостях. Однако плоскости эти должны быть неизотропными; для изотропных же плоскостей мы не имеем никакого прогресса сравнительно с аффинным случаем.

В § 37 было выяснено, что задание простого отличного от нуля m-вектора в вещественном аффинном пространстве равносильно заданию m-мерной плоскости R_m (с точностью до параллельного сдвига) с определенной ориентацией и с определенным объемом, указанными на ней. При этом, если простой m-вектор имел вид $[\mathbf{a}_1\ldots\mathbf{a}_m]$, то речь шла об объеме m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (линейно независимых в силу $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0$).

Применяя этот результат в нашем вещественном евклидовом пространстве, мы вправе понимать объем параллелепипеда в евклидовом смысле (если плоскость неизотропная), так как задание объема в аффинном смысле равносильно — при наличии евклидовой метрики — его заданию в евклидовом смысле.

Мы хотим выяснить теперь, как будет выражаться евклидов объем, отвечающий нашему простому m-вектору $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0$, *через его координаты* $a^{i_1 \ldots i_m}$ и, конечно, через координаты метрического тензора g_{ij} (в произвольной аффинной координатной системе).

Один из простейших инвариантов, которые можно составить из указанных тензоров, мы будем называть *скалярным квадратом* m-вектора и определять путем свертывания следующим образом:

$$I = m!\, g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \ldots g_{i_m j_m} a^{i_1 i_2 \ldots i_m} a^{j_1 j_2 \ldots j_m}. \tag{54.13}$$

Множитель $m!$ добавлен для упрощения окончательного результата. Здесь имеет смысл выделить в качестве леммы следующее предложение. *Пусть происходит свертывание тензоров* $b_{i_1 \ldots i_m}$ *и* $a^{i_1 \ldots i_m}$, *причем тензор* $a^{i_1 \ldots i_m}$ *кососимметрический. Тогда*

$$b_{i_1 \ldots i_m} a^{i_1 \ldots i_m} = b_{[i_1 i_2 \ldots i_m]} a^{i_1 i_2 \ldots i_m}, \tag{54.14}$$

т. е. результат свертывания не меняется, если тензор $b_{i_1 \ldots i_m}$ *подвергнуть предварительно альтернации и сделать, таким образом, тоже кососимметрическим.*

Чтобы проверить равенство (54.14), достаточно обнаружить, что каждая координата $a^{p_1 \ldots p_m}$ входит в правую и левую части с одинаковыми коэффициентами (после приведения подобных членов). При этом мы рассматриваем лишь координаты $a^{p_1 \ldots p_m}$, при которых все индексы $p_1, \ldots, p_m$ различны, так как все прочие координаты равны нулю.

В процессе суммирования в левой части (54.14) каждая координата $a^{p_1 \ldots p_m}$ встретится $m!$ раз, а именно, когда $i_1, \ldots, i_m$ совпадают с $p_1, \ldots, p_m$ или получаются из них произвольной подстановкой; в случае нечетной подстановки $a^{p_1 \ldots p_m}$ входит с обратным знаком. В результате коэффициент при $a^{p_1 \ldots p_m}$ будет иметь вид

$$\sum \pm b_{i_1 \ldots i_m}, \tag{54.15}$$

где суммирование идет по перестановкам $i_1 \ldots i_m$ индексов $p_1 \ldots p_m$, а знак $\pm$ берется в зависимости от четности или нечетности соответствующей подстановки. Но по определению альтернации (§ 31) сумма (54.15) после деления на $m!$ дает координату проальтернированного тензора $b_{p_1 \ldots p_m}$:

$$b_{[p_1 \ldots p_m]} = \frac{1}{m!} \sum \pm b_{i_1 \ldots i_m},$$

так что

$$\sum \pm b_{i_1 \ldots i_m} = m! b_{[p_1 \ldots p_m]}. \tag{54.16}$$

Далее мы подсчитываем коэффициент при $a^{p_1 \ldots p_m}$ в правой части равенства (54.14), который совершенно аналогично (54.15) оказывается равным

$$\sum \pm b_{[i_1 \ldots i_m]}. \tag{54.17}$$

Суммирование снова идет по перестановкам $i_1 \ldots i_m$ индексов $p_1 \ldots p_m$. При этом в силу косой симметрии тензора $b_{[i_1 \ldots i_m]}$

$$b_{[i_1 \ldots i_m]} = \pm b_{[p_1 \ldots p_m]},$$

где знак $\pm$ зависит от четности или нечетности соответствующей подстановки. Следовательно, все слагаемые под знаком суммы (54.17) равны $b_{[p_1 \ldots p_m]}$, так что

$$\sum \pm b_{[i_1 \ldots i_m]} = m! b_{[p_1 \ldots p_m]}. \tag{54.18}$$

Сравнивая равенства (54.16) и (54.18), убеждаемся, что коэффициенты при $a^{p_1 \ldots p_m}$ в правой и левой частях (54.14) равны, и следовательно, лемма доказана.

Используя эту лемму для инварианта (54.13), мы можем, не меняя ничего по существу, произвести предварительно альтернацию по индексам $i_1 i_2 \ldots i_m$ в произведении *координат метрического тензора*. Выполним сначала эту альтернацию (с умножением на $m!$):

$$m!\, g_{\underset{[}{i_1} j_1} g_{i_2 j_2} \ldots g_{\underset{]}{i_m} j_m} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} & \cdots & g_{i_1 j_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{i_m j_1} & g_{i_m j_2} & \cdots & g_{i_m j_m} \end{vmatrix} = g_{i_1 i_2 \ldots i_m;\, j_1 j_2 \ldots j_m}. \tag{54.19}$$

Запись результата альтернации в виде определителя, деленного на $m!$, получается совершенно аналогично (35.1). Из свойств определителя видно, что полученный тензор будет кососимметрическим не только по индексам $i_1 i_2 \ldots i_m$, но и по индексам $j_1 j_2 \ldots j_m$. Кратким обозначением полученного тензора будет служить $g_{i_1 i_2 \ldots i_m;\, j_1 j_2 \ldots j_m}$.

Теперь (54.13) можно переписать в виде

$$I = g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}. \tag{54.20}$$

Чтобы установить геометрический смысл этого инварианта, мы рассмотрим аффинный репер, в котором первые m векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ принадлежат m-мерной плоскости R_m нашего m-вектора $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$.

В этом репере векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ полностью разлагаются по $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$, а потому их координаты с индексами

$$i = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n$$

равны нулю. Согласно (35.1) равны нулю будут и все координаты простого m-вектора $a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, среди индексов которых встречается хоть один, больший чем m.

В результате в процессе свертывания (54.20) можно считать, что все индексы пробегают значения лишь $1, 2, \ldots, m$. Теперь нужно учесть, что $a^{i_1 \ldots i_m}$ — кососимметрический тензор, а потому при наличии двух одинаковых индексов его координаты обращаются в нуль. В сумме следует сохранить поэтому лишь те слагаемые, где все индексы $i_1 \ldots i_m$ (и аналогично $j_1 \ldots j_m$) различны между собой, т. е. получены из $1, 2, \ldots, m$ некоторыми подстановками.

В частности, в сумму (54.20) войдет слагаемое

$$g_{12 \ldots m;\, 12 \ldots m} a^{12 \ldots m} a^{12 \ldots m}, \tag{54.21}$$

для которого $i_1 i_2 \ldots i_m = 12 \ldots m$ и $j_1 j_2 \ldots j_m = 12 \ldots m$, а все остальные слагаемые будут получаться из этого всевозможными подстановками индексов $i_1 \ldots i_m$ и индексов $j_1 \ldots j_m$. Всего, таким образом, в сумме будет $(m!)^2$ слагаемых. Но в силу кососимметричности тензоров $a^{i_1 \ldots i_m}$ и $g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m}$ относительно $i_1 \ldots i_m$ произведение этих тензоров не меняется при любой подстановке индексов $i_1 \ldots i_m$ (так как или оба множителя не меняются или оба меняют знак). То же справедливо и для индексов $j_1 \ldots j_m$. Поэтому в сумме (54.20) все слагаемые равны между собой и совпадают с (54.21), а так как их число равно $(m!)^2$, то окончательно

$$I = g_{12 \ldots m;\, 12 \ldots m} (m!\, a^{12 \ldots m})^2. \tag{54.22}$$

Согласно (35.1)

$$m!\, a^{12 \ldots m} = \operatorname{Det} |a_k^i| \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{54.23}$$

В правой части мы получаем определитель, составленный из координат векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ в нашей m-мерной плоскости R_m.

Далее, согласно (54.19)

$$g_{12\ldots m;\,12\ldots m}=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{vmatrix}=\tilde{g}, \tag{54.24}$$

где $\tilde{g}$, таким образом,— определитель метрического тензора плоскости R_m.

Теперь (54.22) принимает вид

$$I=\tilde{g}\cdot(\operatorname{Det}|a_k^i|)^2. \tag{54.25}$$

Теперь мы можем установить *геометрический смысл инварианта I, который определен для какого-либо простого m-вектора* $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ *с координатами* $a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ *при помощи формул* (54.13), *или, что то же*, (54.20).

Если $I \neq 0$, *то, как видно из* (54.25), $\tilde{g} \neq 0$ *и, следовательно, плоскость R_m данного простого m-вектора неизотропная и*

$$|I|=W_D^2, \tag{54.26}$$

где W_D — евклидов объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

В самом деле, применяя к m-мерному параллелепипеду на плоскости R_m формулу (54.12), получаем:

$$W_D=\sqrt{|\tilde{g}|}\,|\operatorname{Det}|a_k^i|| \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{54.27}$$

Сравнивая эту формулу с (54.25), мы приходим к (54.26).

Если $I=0$, *то из* (54.25) *следует, что* $\tilde{g}=0$, *а следовательно, плоскость R_m данного простого m-вектора изотропная* ($\operatorname{Det}|a_k^i| \neq 0$, *так как* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *линейно независимы*).

Окончательно, объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (в неизотропной R_m), выражается через соответствующий m-вектор $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ следующим образом:

$$W_D=\sqrt{|I|},$$

т. е.

$$W_D=\sqrt{|g_{i_1\ldots i_m;\,j_1\ldots j_m}a^{i_1\ldots i_m}a^{j_1\ldots j_m}|}=$$
$$=\sqrt{m!\,|g_{i_1 j_1}\ \ldots\ g_{i_m j_m}a^{i_1\ldots i_m}a^{j_1\ldots j_m}|}. \tag{54.28}$$

Добавим сюда еще одну формулу для объема m-мерного параллелепипеда. А именно, если за векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ принять, в частности, просто $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, то

$$a_k^i=\begin{cases} 0\ (i \neq k) \\ 1\ (i=k) \end{cases}, \qquad \operatorname{Det}|a_k^i|=1,$$

и (54.25) принимает вид

$$I=\tilde{g}=\mathrm{Det}\,|g_{ij}| \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Но, как мы знаем,

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

в нашем случае, следовательно,

$$g_{ij}=\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

и мы получаем:

$$I=\mathrm{Det}\,|\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j| \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{54.29}$$

Отсюда

$$W_D=\sqrt{|\mathrm{Det}\,|\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j||}, \tag{54.30}$$

т. е. объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, равен корню квадратному из модуля определителя, составленного из попарных скалярных произведений векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Эта формула при $m=2$, 3 известна из обычной векторной алгебры.

§ 55*. Понятие о геометрическом объекте

Мы занимались до сих пор n-мерными пространствами двух видов: аффинным и евклидовым. В аффинном пространстве мы ввели аффинные реперы $\mathfrak{R}\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n\}$, в многообразии которых установили две однотранзитивные группы взаимно однозначных преобразований: аффинных и квазиаффинных преобразований. При аффинном преобразовании реперы просто увлекаются данным автоморфизмом аффинного пространства; при квазиаффинном преобразовании каждый репер $\mathfrak{R}$ переходит в новый репер $\mathfrak{R}'$, расположенный относительно него вполне определенным образом, одинаковым при любом выборе исходного репера.

Последнее означает, что векторы репера $\mathfrak{R}'$ и сдвиг его начала разлагаются по векторам репера $\mathfrak{R}$ с фиксированными численными значениями коэффициентов $A^i_{i'}$, A^i:

$$\mathbf{e}_{i'}=A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO^*}=A^i\mathbf{e}_i. \tag{55.1}$$

С понятием квазиаффинного преобразования в многообразии реперов тесно связано понятие тензора, хотя до сих пор это и не было показано у нас явно. Действительно, координаты тензора, например, V^i_{jk} имеют определенные численные значения при определенном выборе репера $\mathfrak{R}$, т. е. являются, можно сказать, функциями репера $\mathfrak{R}$:

$$V^i_{jk} = V^i_{jk}(\mathfrak{R}). \tag{55.2}$$

Однако выбор этих функций далеко не является произвольным: когда мы подвергаем реперы $\mathfrak{R}$ данному квазиаффинному преобразованию (55.1), координаты тензора подвергаются тоже вполне определенному преобразованию:

$$V^{i'}_{j'k'} = A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} V^i_{jk}. \tag{55.3}$$

Мы можем рассматривать при этом не один какой-либо тензор V^i_{jk}, а всевозможные тензоры данного строения; тогда численные значения V^i_{jk}, отвечающие данному тензору, могут быть какими угодно. В результате *вслед за каждым квазиаффинным преобразованием* (55.1) *в многообразии реперов мы получаем линейное преобразование* (55.3) *над переменными V^i_{jk} или, если угодно, линейное преобразование в n^3-мерном пространстве переменных V^i_{jk}* *).

При этом, как мы проверяли в свое время (§ 32), наложению двух преобразований (55.1) отвечает наложение соответствующих преобразований (55.3).

Пусть каждому элементу некоторой группы G однозначно сопоставлено взаимно однозначное преобразование данного множества $\mathfrak{M}$ в себя, причем перемножению элементов группы отвечает наложение соответствующих преобразований в том же порядке (а тогда единице группы отвечает тождественное преобразование и обратному элементу — обратное преобразование). В этом случае мы говорим, что нам дано *представление группы G в виде группы преобразований множества $\mathfrak{M}$ в себя.* (При этом мы, вообще говоря, не требуем, чтобы соответствие между элементами G и преобразованиями в $\mathfrak{M}$ было *взаимно* однозначным.)

В нашем случае мы имеем *линейное представление квазиаффинной группы, именно, представление в виде группы линейных преобразований* (55.3) *в n^3-мерном пространстве переменных V^i_{jk}*; это пространство играет роль множества $\mathfrak{M}$.

---

*) Заметим, что, говоря о тензоре данного строения, можно учитывать и линейные зависимости (обязательно инвариантные), наложенные, возможно, на его координаты. Так, например, можно рассматривать вместо всевозможных тензоров V^i_{jk} лишь кососимметрические по нижним индексам, т. е. удовлетворяющие линейным зависимостям $V^i_{jk} = -V^i_{kj}$. Тогда, беря всевозможные такие тензоры, мы располагаем не n^3, а $\frac{n^2(n-1)}{2}$ *независимыми* координатами и получаем линейное представление фактически в $\frac{n^2(n-1)}{2}$-мерном пространстве.

Нетрудно заметить, что задание этого *линейного представления квазиаффинной группы и есть самое существенное в понятии тензора.* В самом деле, если линейное представление (55.3) задано, то каждый отдельный тензор данного типа (в нашем примере один раз контравариантный и два раза ковариантный) можно получить следующим образом: какому-нибудь реперу $\mathfrak{R}$ сопоставляем произвольно выбранную точку (V^i_{jk}) в пространстве представления, а затем любому другому реперу $\mathfrak{R}'$ сопоставляем точку $(V^{i'}_{j'k'})$, пользуясь законом преобразования (55.3). Более подробно: берем квазиаффинное преобразование в многообразии реперов, переводящее $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}'$; ему отвечает определенное линейное преобразование (55.3) в пространстве представления; это преобразование переводит точку (V^i_{jk}) в некоторую точку $(V^{i'}_{j'k'})$, которую мы и ставим в соответствие реперу $\mathfrak{R}'$:

$$V^{i'}_{j'k'} = V^i_{jk}(\mathfrak{R}').$$

По существу мы повторили лишь в иных терминах построение тензора по наперед заданным его координатам в какой-нибудь одной координатной системе (§ 32). Но теперь перед нами открывается путь к естественному обобщению понятия тензора. В самом деле, почему линейное представление квазиаффинной группы должно иметь вид обязательно тензорного закона преобразования, как, например, (55.3)? Можно предположить, что существуют и другие линейные представления квазиаффинной группы, которые можно положить в основу определения величин, аналогичных тензорам, но с иным законом преобразования.

Пусть в N-мерном пространстве некоторых переменных

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$$

нам задано линейное представление квазиаффинной группы. Это значит, что каждому квазиаффинному преобразованию (55.1) *однозначно сопоставлено линейное преобразование переменных* φ_p $(p=1, 2, \ldots, N)$:

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p + B_{p'}, \qquad \operatorname{Det}|B^p_{p'}| \neq 0, \tag{55.4}$$

так, что результирующему преобразованию двух квазиаффинных преобразований всегда сопоставлено результирующее преобразование соответствующих линейных преобразований.

Коэффициенты $B^p_{p'}$, $B_{p'}$ являются, конечно, функциями от коэффициентов $A^{\bar{i}}_{i'}$, A^i квазиаффинного преобразования. *Эти функции мы будем предполагать непрерывными.* Заметим, между прочим (это можно было бы доказать), что тогда эти функции (по крайней мере в вещественном случае) являются обязательно непрерывно дифференцируемыми и даже аналитическими*). Нам, впрочем, это не понадобится.

Сопоставим теперь какому-нибудь реперу $\mathfrak{R}$ произвольную точку φ_p в пространстве переменных φ_p. Любому другому реперу $\mathfrak{R}'$ сопоставим точку $\varphi_{p'}$, полученную из φ_p тем линейным преобразованием (55.4), которое отвечает квазиаффинному преобразованию $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ (т. е. переводящему $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}'$).

В таком случае каждому реперу $\mathfrak{R}'$ будет сопоставлена точка

$$\varphi_{p'} = \varphi_p(\mathfrak{R}'),$$

причем при переходе от любого репера $\mathfrak{R}'$ к любому реперу $\mathfrak{R}''$ будет действовать закон преобразования (55.4):

$$\varphi_{p''} = \sum_{p'=1}^{N} B_{p''}^{p'} \varphi_{p'} + B_{p''}, \tag{55.5}$$

где коэффициенты $B_{p''}^{p'}$, $B_{p''}$ отвечают квазиаффинному преобразованию $\mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}''$.

Чтобы проверить равенство (55.5), рассмотрим его правую часть. Она представляет собой результат последовательного выполнения над φ_p линейных преобразований (55.4) и (55.5), отвечающих квазиаффинным преобразованиям $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}''$. Результирующее линейное преобразование над φ_p отвечает, следовательно, результирующему квазиаффинному преобразованию

$$\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$$

и, следовательно, согласно нашему построению дает

$$\varphi_p(\mathfrak{R}'') = \varphi_{p''}.$$

Этим (55.5) доказано.

Мы будем говорить, что нам дан линейный геометрический объект в n-мерном аффинном пространстве, если каждому реперу $\mathfrak{R}$ сопоставлены N занумерованных чисел $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, которые при переходе от репера $\mathfrak{R}$ к реперу $\mathfrak{R}'$ подвергаются линейному преобразованию (55.4), *отвечающему в данном линейном представлении квазиаффинному преобразованию $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$. Числа $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ мы будем называть координатами линейного геометрического объекта относительно данного репера.*

Таким образом, для определения линейного геометрического объекта в аффинном пространстве нужно задаться прежде всего соответствующим законом преобразования (55.4), т. е. некоторым линейным представлением квазиаффинной группы. Мы будем говорить, что это *линейное представление определяет тип линейного*

*) В комплексном случае этому заключению может помешать комплексная сопряженность, входящая в выражение функциональной зависимости.

геометрического объекта. Затем любой линейный геометрический объект данного типа можно получить, задавшись произвольно его координатами φ_p для одного какого-нибудь репера $\mathfrak{R}$.

Очевидно, тензоры являются частным случаем линейных геометрических объектов.

Можно рассматривать и нелинейные геометрические объекты, т. е. такие, для которых закон преобразования координат φ_p является нелинейным и выражает некоторое нелинейное представление квазиаффинной группы в пространстве переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$. В остальном понятие геометрического объекта в общем (нелинейном) случае строится аналогичным образом. Мы будем во всем дальнейшем заниматься лишь линейными геометрическими объектами, которые при современном состоянии теории геометрических объектов играют преобладающую роль.

В предыдущем изложении мы кое-где пользовались термином «геометрический объект» в наглядном смысле — в смысле какого-то геометрического образа или конструкции. Теперь мы будем употреблять этот термин лишь в указанном точном смысле. Однако не нужно считать, что мы существенно изменили содержание понятия «геометрический объект»; мы его лишь уточнили. Действительно, основные геометрические образы и конструкции будут характеризоваться геометрическими объектами в том смысле, как мы теперь этот термин понимаем. Возьмем, например, такой основной геометрический образ, как точка. Когда мы переходим от репера $\mathfrak{R}$ к реперу $\mathfrak{R}'$ квазиаффинным преобразованием (55.1), координаты x^i каждой фиксированной точки M подвергаются, как мы знаем, преобразованию

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}, \tag{55.6}$$

где $A_i^{i'}$ — матрица, обратная $A_{i'}^i$, а $A^{i'} = -A_i^{i'} A^i$ (см. (51.2)).

Можно считать, что формула преобразования координат (55.6) есть частный случай (55.4) (линейного представления квазиаффинной группы), а координаты точки x^i являются примером линейного геометрического объекта φ_p.

Роль коэффициентов $B_{p'}^p$, $B_{p'}$ играют $A_i^{i'}$, $A^{i'}$, которые действительно, как только что было у нас отмечено, являются функциями $A_{i'}^i$, A^i. Таким образом, точка находит себе выражение в виде линейного геометрического объекта, координаты которого совпадают с ее координатами, а закон преобразования имеет вид формулы преобразования координат (55.6).

Аналогичным образом коэффициенты уравнения данной гиперплоскости (или гиперповерхности 2-го порядка) образуют линейный геометрический объект, который, так сказать, является представителем соответствующего геометрического образа.

§ 56*. Линейные геометрические объекты в аффинном и евклидовом пространстве

Теперь естественно поставить вопрос о том, какого же вида линейные геометрические объекты возможны в аффинном пространстве. Прежде всего мы сузим постановку вопроса, а именно, ограничимся лишь теми объектами $\varphi_p(\mathfrak{R})$, которые реагируют только на изменение векторов $\mathbf{e}_i$ репера $\mathfrak{R}$, но не реагируют на сдвиг его начала. Другими словами, мы предположим, что коэффициенты преобразования (55.4) зависят только от $A^i_{i'}$, но не зависят от A^i, так что квазиаффинное преобразование, сводящееся к параллельному сдвигу репера, порождает *тождественное* линейное преобразование (55.4) и координаты объекта не меняются.

Наибольшую роль играют аффинные геометрические объекты именно этого упрощенного вида (заметим, однако, что точки уже не входят в их число).

В частности, они появляются при переходе из аффинного пространства в более простое *центроаффинное* пространство. Так называется аффинное пространство с раз навсегда фиксированной в нем точкой O—центром пространства. Группа автоморфизмов центроаффинного пространства состоит, очевидно, из аффинных преобразований, сохраняющих точку O неподвижной (центроаффинные преобразования). В качестве реперов центроаффинного пространства можно принять всевозможные аффинные реперы с общим началом в центре O. Действительно, каждый репер с началом в O переводится центроаффинным преобразованием снова в репер с началом O и каждой паре таких реперов отвечает одно и только одно центроаффинное преобразование, переводящее первый репер во второй.

Квазицентроаффинное преобразование сводится к линейному преобразованию векторов каждого репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i \tag{56.1}$$

при постоянном начале O. Линейный геометрический объект в центроаффинном пространстве определяется совершенно так же, как и в аффинном, с той только разницей, что теперь коэффициенты $B^p_{p'}$, $B_{p'}$ в законе преобразования (55.4) должны зависеть от коэффициентов квазицентроаффинного преобразования, т. е. только от $A^i_{i'}$ (ввиду отсутствия A^i в формуле квазицентроаффинного преобразования (55.1)). В результате мы приходим снова к линейным геометрическим объектам упрощенного вида, *где в закон преобразования* (55.4) *входят только* $A^i_{i'}$. *Такие линейные геометрические объекты мы будем называть центроаффинными.*

Итак, центроаффинные линейные геометрические объекты появляются в двух случаях: или мы имеем дело в аффинном пространстве с таким объектом, координаты которого не меняются при параллельном сдвиге репера (например, координаты вектора), или мы имеем дело с объектом в центроаффинном пространстве, где выделена точка O, играющая особую роль, так что естественно ограничиться реперами с началом в этой точке.

Последний случай встречается при дифференциально-геометрическом исследовании сложной конструкции в бесконечно малой окрестности любой ее точки; тогда эту точку естественно принимать за центр пространства.

Итак, в дальнейшем мы ограничимся центроаффинными линейными геометрическими объектами (для краткости мы будем называть их просто центроаффинными объектами), причем будем предполагать, кроме того, что закон преобразования (55.4) является линейным *однородным:*

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B_{p'}^{p} \varphi_p, \tag{56.2}$$

где $B_{p'}^{p}$ суть функции $A_{i'}^{i}$.

Здесь на основании теории линейных представлений групп Ли можно утверждать следующее (приводим без доказательства).

Пока мы рассматриваем унимодулярные преобразования (56.1), т. е. пока $\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| = 1$, соответствующий закон преобразования (56.2) является *в вещественном случае* по существу тензорным; точнее, величины $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ за счет линейного преобразования с постоянными коэффициентами могут быть сведены к совокупности координат одного или нескольких тензоров.

Аналогично обстоит дело *в комплексном случае*; только здесь кроме тензоров приходится рассматривать и *псевдотензоры*: так мы будем называть объекты, сходные с тензорами и отличающиеся от них лишь тем, что в законе преобразования (например, (55.3)) множители A все или частично заменяются комплексно сопряженными им величинами.

Если же брать всевозможные линейные преобразования (56.1) ($\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| \neq 0$), то здесь, кроме тензоров, могут встретиться и другие центроаффинные объекты, прежде всего *относительные тензоры*. Так мы будем называть величины, например, V_{jk}^{i}, для которых тензорный закон преобразования осложнен умножением на некоторую степень модуля определителя

$$V_{j'k'}^{i'} = A_i^{i'} A_{j'}^{j} A_{k'}^{k} V_{jk}^{i} \,|\operatorname{Det}| A_{p'}^{p} ||^{s}. \tag{56.3}$$

Показатель s мы будем называть *весом* относительного тензора. В вещественном случае s может принимать любые вещественные значения, в комплексном — любые комплексные; мы считаем при этом, что

$$|\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}||^{s}=e^{s\ln|\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}||},$$

где значение логарифма берется вещественное. Конечно, при $s=0$ относительный тензор превращается в обыкновенный тензор.

Закон преобразования относительного тензора (56.3) можно еще усложнить: в вещественном случае — домножением на -1, когда $\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|$ является отрицательным, с сохранением прежней формулы, когда $\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|$ положителен; в комплексном случае — умножением на $e^{m\alpha i}$, где m — любое целое число, а $e^{\alpha i}$ определяется из разложения

$$\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|=e^{\alpha i}\cdot|\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}||, \tag{56.4}$$

т. е. является тем комплексным числом модуля 1, на которое нужно умножить модуль $\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|$, чтобы получить сам $\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|$.

Формула (56.3) заменяется соответственно формулами:

$$\begin{aligned} V_{j'k'}^{i'} &= \operatorname{sign}\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|\cdot A_{i}^{i'}A_{j'}^{j}A_{k'}^{k}V_{jk}^{i}|\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}||^{s}= \\ &=\pm A_{i}^{i'}A_{j'}^{j}A_{k'}^{k}V_{jk}^{i}\cdot|\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}||^{s} \qquad (\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|\gtrless 0) \end{aligned} \tag{56.5}$$

в вещественном случае и

$$V_{j'k'}^{i'}=e^{m\alpha i}A_{i}^{i'}A_{j'}^{j}A_{k'}^{k}V_{jk}^{i}\cdot|\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}||^{s} \tag{56.6}$$

в комплексном случае.

Мы будем говорить, что вещественный относительный тензор с законом преобразования (56.3) *имеет вес s и показатель* 0, *а с законом преобразования* (56.5) — *вес s и показатель* 1, *а комплексный относительный тензор с законом преобразования* (56.6) *имеет вес s и показатель m.*

При $m=0$ получаем как частный случай (56.3). Формулу (56.5) также можно считать частным случаем (56.6) при $m=1$, с той только разницей, что в (56.5) мы ограничиваемся вещественными величинами, так что $e^{\alpha i}=\pm 1$.

Далее, в комплексном случае возможны «псевдотензоры», в том числе и относительные, с законом преобразования (56.6), *в котором коэффициенты A все или частично заменены комплексно сопряженными им величинами.* Возможны центроаффинные линейные объекты и более сложного типа, не играющие, впрочем, в геометрии заметной роли. На них мы останавливаться не будем. Существенно, что все возможные усложнения в законе преобразования (не считая перехода к псевдотензорам) связаны здесь с наличием $\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|\neq 1$ и исчезают в случае $\operatorname{Det}|A_{p'}^{p}|=1$.

Существенно иная картина наблюдается в евклидовом пространстве, к которому мы сейчас и переходим. В евклидовом пространстве понятие линейного геометрического объекта вводится совершенно аналогично тому, как мы делали это в аффинном пространстве. При этом вместо квазиаффинной группы в многообразии аффинных реперов *мы исходим из группы квазидвижений в многообразии ортонормированных реперов* и задаемся каким-либо ее линейным представлением в пространстве переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$. А именно, каждому квазидвижению в многообразии ортонормированных реперов) мы сопоставляем линейное преобразование переменных

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p + B_{p'} \tag{56.7}$$

с таким расчетом, что наложению квазидвижений отвечает наложение соответствующих линейных преобразований (56.7). Коэффициенты $B^p_{p'}$, $B_{p'}$ должны по-прежнему непрерывно зависеть от коэффициентов $A^i_{i'}$, A^i квазидвижения

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO'} = A^i\mathbf{e}_i, \tag{56.8}$$

где теперь, конечно, матрица $A^i_{i'}$ либо ортогональная комплексная, либо ортогональная вещественная, либо псевдоортогональная, в зависимости от того, в каком евклидовом пространстве мы находимся: в комплексном евклидовом, собственно евклидовом или псевдоевклидовом.

Задание линейного геометрического объекта в евклидовом пространстве означает сопоставление каждому *ортонормированному реперу* $\mathfrak{R}$ чисел $\varphi_1(\mathfrak{R}), \ldots, \varphi_N(\mathfrak{R})$, которые при переходе к другому ортонормированному реперу $\mathfrak{R}'$ подвергаются линейному преобразованию (56.7), отвечающему квазидвижению $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$.

Аналогично аффинному случаю и по тем же причинам мы ограничимся частным случаем линейного геометрического объекта, когда закон преобразования (56.7) не зависит от A^i, т. е. координаты объекта не меняются при параллельном сдвиге репера. Такого частного вида объекты могут быть истолкованы как объекты в *центроевклидовом пространстве,* т. е. евклидовом пространстве с фиксированной точкой O—центром пространства. В самом деле, в центроевклидовом пространстве группа движений сводится к группе вращений около центра O, а в качестве реперов достаточно брать ортонормированные реперы с началом в центре O. Соответственно, вместо группы квазидвижений в многообразии ортонормированных реперов мы можем ограничиться ее подгруппой—*группой квазивращений. Квазивращениями* мы будем называть квазидвижения, при которых начало каждого репера остается неподвижным ($A^i = 0$), так что (56.8) принимает вид

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO'} = 0. \tag{56.9}$$

Линейные геометрические объекты в центроевклидовом пространстве мы будем кратко называть *центроевклидовыми*. Их мы определяем, исходя из закона преобразования (56.7), где, однако, (56.7) есть линейное представление группы квазивращений (56.9), а не всей группы квазидвижений. Это значит, что коэффициенты в (56.7) зависят только от $A^i_{i'}$, но не от A^i, так что *центроевклидовы объекты совпадают с этим частным случаем линейных геометрических объектов в евклидовом пространстве.*

Кроме того, мы будем предполагать $B_{p'} = 0$. В результате центроевклидов объект задается следующим образом: каждому ортонормированному реперу $\mathfrak{R}$ сопоставлены N чисел $\varphi_1(\mathfrak{R}), \ldots, \varphi_N(\mathfrak{R})$, причем мы ограничиваемся реперами $\mathfrak{R}$ с фиксированным началом O; *эти числа при переходе от одного репера $\mathfrak{R}$ к другому $\mathfrak{R}'$ испытывают линейное преобразование*

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p, \tag{56.10}$$

отвечающее квазивращению $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ в некотором линейном представлении группы квазивращений.

В качестве центроевклидовых объектов могут служить прежде всего тензоры, а в комплексном случае — и псевдотензоры, рассматриваемые в ортонормированных реперах. Что же касается относительных тензоров, то мы не сможем их сконструировать ввиду того, что при ортогональном (псевдоортогональном) преобразовании $\operatorname{Det}|A^i_{i'}| = \pm 1$ и какую-либо степень модуля этого определителя бесполезно употреблять в качестве дополнительного множителя в тензорном законе преобразования. Единственное, что можно здесь сделать — это условиться о появлении дополнительного множителя $\operatorname{sign}\operatorname{Det}|A^i_{i'}|$, причем в псевдоевклидовом случае можно брать и другие множители: $\operatorname{sign}\operatorname{Det}|A^\alpha_{\alpha'}|$ или $\operatorname{sign}\operatorname{Det}|A^\lambda_{\lambda'}|$ (обозначения § 50).

Зато чрезвычайно важно, что центроевклидовы объекты не исчерпываются тензорами. Существует более широкий класс центроевклидовых объектов — так называемые *спиноры* и *спинтензоры*, играющие существенную роль в современной физике. Правда, при этом приходится несколько расширить понятие о центроевклидовом объекте, допуская его «двузначность» (см. ниже).

В последующих параграфах мы дадим изложение основ теории спиноров в *четырехмерном* евклидовом пространстве. Мы ограничимся случаем $n = 4$ по двум причинам. Во-первых, именно этот случай играет роль в физике; во-вторых, он допускает элементарное изложение, в то время как для общего случая потребовалось бы развивать довольно обширную теорию *). Для сокращения изложения мы будем вынуждены отказаться от наводящих соображений и прямо показать, как строятся спиноры и спинтензоры.

§ 57*. Спинорное пространство

Мы построим теорию спиноров сначала в *комплексном* четырехмерном евклидовом пространстве R_4^+. Пусть $\{\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_4\}$ обозначает ортонормированный репер $\tilde{\mathfrak{R}}$ в R_4^+, а x^1, x^2, x^3, x^4 — координаты вектора относительно этого репера.

Ортонормированные координатные системы в R_4^+ характеризуются тем, что скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + x^{4^2}.$$

К пространству R_4^+ мы вернемся в § 58, а на протяжении этого параграфа мы будем вести подготовительные построения в четырехмерном комплексном аффинном пространстве A_4^+, рассматриваемом параллельно с R_4^+. Прежде всего в пространстве A_4^+ мы зададим раз навсегда начало O и пару двумерных плоскостей A_2, $\hat{A}_2$, проходящих через O и не имеющих общих направлений.

Аффинный репер в A_4^+ мы условимся выбирать всегда так, чтобы начало его лежало в O, первые два вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ принадлежали плоскости A_2, а последние два, которые мы будем обозначать $\mathbf{e}_{\hat{1}}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}}$, — плоскости $\hat{A}_2$.

Таким образом, из одного репера $\mathfrak{R}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{\hat{1}}, \mathbf{e}_{\hat{2}}\}$ любой другой будет получаться преобразованием

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= \alpha_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_{1'}^2 \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_{\hat{1}'} &= \alpha_{\hat{1}'}^{\hat{1}} \mathbf{e}_{\hat{1}} + \alpha_{\hat{1}'}^{\hat{2}} \mathbf{e}_{\hat{2}}, \\ \mathbf{e}_{2'} &= \alpha_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_{2'}^2 \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_{\hat{2}'} &= \alpha_{\hat{2}'}^{\hat{1}} \mathbf{e}_{\hat{1}} + \alpha_{\hat{2}'}^{\hat{2}} \mathbf{e}_{\hat{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{57.1}$$

так как $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$ остаются в плоскости A_2, а $\mathbf{e}_{\hat{1}'}$, $\mathbf{e}_{\hat{2}'}$ — в плоскости $\hat{A}_2$.

Мы условимся (до конца главы), что греческие индексы будут пробегать у нас значения 1, 2. Тогда (57.1) можно записать кратко:

$$\mathbf{e}_{\lambda'} = \alpha_{\lambda'}^{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{\lambda}'} = \alpha_{\hat{\lambda}'}^{\hat{\lambda}} \mathbf{e}_{\hat{\lambda}}. \tag{57.2}$$

*) Она изложена в статье автора «Теория спиноров», УМН, X, вып. 2 (64) (1955).

Однако мы наложим еще ограничение на выбор допустимых реперов: все они должны получаться друг из друга при помощи *унимодулярных* преобразований как над e_1, e_2, так и над $e_{\hat{1}}$, $e_{\hat{2}}$. Унимодулярными мы называем линейные преобразования с определителем 1, так что в нашем случае:

$$\operatorname{Det}|\alpha^{\lambda}_{\lambda'}| = \begin{vmatrix} \alpha^1_{1'} & \alpha^2_{1'} \\ \alpha^1_{2'} & \alpha^2_{2'} \end{vmatrix} = 1, \qquad \operatorname{Det}|\alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'}| = \begin{vmatrix} \alpha^{\hat{1}}_{\hat{1}'} & \alpha^{\hat{2}}_{\hat{1}'} \\ \alpha^{\hat{1}}_{\hat{2}'} & \alpha^{\hat{2}}_{\hat{2}'} \end{vmatrix} = 1. \quad (57.3)$$

Так как унимодулярные линейные преобразования образуют группу, то достаточно потребовать, чтобы все рассматриваемые реперы получались унимодулярными преобразованиями в смысле (57.3) из одного начального; тогда унимодулярность автоматически имеет место и при переходе от любого репера к любому.

Итак, в A_4^+ мы рассматриваем совокупность аффинных реперов, которая замкнута относительно всевозможных преобразований (57.1), *удовлетворяющих условию* (57.3), *причем любые два репера совокупности получаются друг из друга преобразованием этого вида.* Если не считать условий (57.3), то в остальном $\alpha^{\lambda}_{\lambda'}$, $\alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'}$ — произвольные комплексные числа. Между собой матрицы $\|\alpha^{\lambda}_{\lambda'}\|$, $\|\alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}'}\|$ ничем не связаны.

Реперы этой совокупности мы будем называть *спинреперами*. Мы условимся относить векторы ψ пространства A_4^+ исключительно к тому или иному спинреперу. Координаты ψ относительно спинрепера мы будем обозначать ψ^1, ψ^2, $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$, так что $\psi = \psi^1 e_1 + \psi^2 e_2 + \psi^{\hat{1}} e_{\hat{1}} + \psi^{\hat{2}} e_{\hat{2}}$. Так как согласно (57.2) e_1, e_2 преобразуются между собой и $e_{\hat{1}}$, $e_{\hat{2}}$ — между собой, то, очевидно, ψ^1, ψ^2 и $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$ преобразуются тоже по отдельности при помощи транспонированных обратных матриц:

$$\psi^{\lambda'} = \alpha^{\lambda'}_{\lambda} \psi^{\lambda}, \qquad \psi^{\hat{\lambda}'} = \alpha^{\hat{\lambda}'}_{\hat{\lambda}} \psi^{\hat{\lambda}}, \qquad (57.4)$$

где

$$\alpha^{\lambda}_{\mu'} \alpha^{\mu'}_{\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu}, \qquad \alpha^{\hat{\lambda}}_{\hat{\mu}'} \alpha^{\hat{\mu}'}_{\hat{\nu}} = \delta^{\hat{\lambda}}_{\hat{\nu}}. \qquad (57.5)$$

Если учесть, что $\alpha^{\lambda}_{\lambda'}$ — унимодулярная матрица, то легко подсчитать, воспользовавшись уравнениями (57.5), ее обратную матрицу:

$$\begin{Vmatrix} \alpha^{1'}_1 & \alpha^{1'}_2 \\ \alpha^{2'}_1 & \alpha^{2'}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha^2_{2'} & -\alpha^1_{2'} \\ -\alpha^2_{1'} & \alpha^1_{1'} \end{Vmatrix}. \qquad (57.6)$$

Разумеется, $\alpha_{\lambda}^{\lambda'}$ — тоже унимодулярная матрица. Аналогичные соотношения имеют место и в случае индексов с крышками. Преобразования вида (57.4) с произвольными унимодулярными матрицами $\alpha_{\lambda}^{\lambda'}$, $\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'}$ образуют группу, которую мы будем называть *спинорной группой*.

Так как спинреперы есть частный случай аффинных реперов, то относительно спинреперов можно рассматривать тензоры совершенно так же, как относительно аффинных реперов вообще. Мы уже рассмотрели *один раз контравариантный спинтензор* $(\psi^{\lambda}, \psi^{\hat{\lambda}})$, образованный координатами вектора ψ. Этот тензор будем называть *спинором* (с контравариантными координатами). Аналогичным образом можно строить и любые многовалентные тензоры, которые мы будем называть *спинтензорами*. При этом каждый индекс пробегает значения 1, 2, $\hat{1}$, $\hat{2}$. В отличие от обычной тензорной алгебры разница между контра- и ковариантными индексами будет здесь мало существенной: из контравариантного спинтензора $(\psi^{\lambda}, \psi^{\hat{\lambda}})$ всегда можно получить ковариантный, положив

$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_{\hat{1}},\ \psi_{\hat{2}} = \psi^2,\ -\psi^1,\ \psi^{\hat{2}},\ -\psi^{\hat{1}}. \tag{57.7}$$

Действительно, элементарный подсчет показывает, что когда $(\psi^{\lambda}, \psi^{\hat{\lambda}})$ преобразуются по закону (57.4), полученные из них таким образом $(\psi_{\lambda}, \psi_{\hat{\lambda}})$ преобразуются по закону (57.2):

$$\psi_{\lambda'} = \alpha_{\lambda'}^{\lambda}\psi_{\lambda}, \qquad \psi_{\hat{\lambda}'} = \alpha_{\hat{\lambda}'}^{\hat{\lambda}}\psi_{\hat{\lambda}}. \tag{57.8}$$

В самом деле, если в (57.4) выразить ψ^{λ}, $\psi^{\hat{\lambda}}$ через ψ_{λ}, $\psi_{\hat{\lambda}}$ согласно (57.7), то, учитывая (57.6), приходим к соотношениям (57.8). Ковариантный спинтензор ψ_{λ}, $\psi_{\hat{\lambda}}$ мы также будем кратко называть спинором (с ковариантными координатами).

Аналогично (57.7) можно «переделывать» любой индекс спинтензора из контравариантного в ковариантный, и наоборот. Этой переделке можно придать инвариантную форму следующим образом. Дважды контравариантный спинтензор имеет, вообще говоря, координаты вида

$$c^{\lambda\mu},\quad c^{\hat{\lambda}\mu},\quad c^{\lambda\hat{\mu}},\quad c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}.$$

Рассмотрим спинтензор этого вида с такими свойствами:

$$\varepsilon^{\lambda\mu} = -\varepsilon^{\mu\lambda}, \qquad \varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = -\varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\lambda}}, \qquad \varepsilon^{\lambda\hat{\mu}} = \varepsilon^{\hat{\lambda}\mu} = 0. \tag{57.9}$$

Другими словами, этот спинтензор кососимметричен по всем индексам, причем координаты со смешанными индексами все равны нулю.

Ввиду того, что индексы 1, 2 участвуют в спинтензорном преобразовании отдельно и индексы $\hat{1}$, $\hat{2}$ тоже отдельно (согласно (57.4)), то условия (57.9) носят инвариантный характер. Кроме того, значение координаты ε^{12} является инвариантом. Действительно, мы знаем, что в двумерном случае единственная существенная координата ε^{12} кососимметрического тензора $\varepsilon^{\lambda\mu}$ является относительным инвариантом и при преобразовании умножается на $\operatorname{Det}|A_\lambda^{\lambda'}|$ (см. (35.6) при $n=2$). Но в нашем случае матрица $A_\lambda^{\lambda'}=\alpha_\lambda^{\lambda'}$ унимодулярная, так что ε^{12} будет просто инвариантом. То же справедливо, конечно, и для $\varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}$.

Выберем спинтензор (57.9) так, чтобы $\varepsilon^{12}=\varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}=1$. Итак, все координаты нашего спинтензора равны нулю кроме

$$\varepsilon^{12}=-\varepsilon^{21}=1, \qquad \varepsilon^{\hat{1}\hat{2}}=-\varepsilon^{\hat{2}\hat{1}}=1, \tag{57.10}$$

и это имеет место относительно любого спинрепера.

Совершенно аналогично строим дважды ковариантный спинтензор со всеми теми же свойствами:

$$\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=1, \qquad \varepsilon_{\hat{1}\hat{2}}=-\varepsilon_{\hat{2}\hat{1}}=1, \tag{57.11}$$

причем остальные координаты равны нулю.

Теперь соотношение (57.7) можно записать при помощи свертывания с тензором $\varepsilon_{\lambda\mu}$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\lambda &= \varepsilon_{\lambda\mu}\psi^\mu, & \psi_{\hat{\lambda}} &= \varepsilon_{\hat{\lambda}\hat{\mu}}\psi^{\hat{\mu}}, \\ \psi^\lambda &= -\varepsilon^{\lambda\mu}\psi_\mu, & \psi^{\hat{\lambda}} &= -\varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}}. \end{aligned}\right\} \tag{57.12}$$

Непосредственно проверкой убеждаемся, что и в первой, и во второй строчках повторяются формулы (57.7). Инвариантный характер этих формул виден из инвариантности тензорной операции свертывания. Правда, при этом, например, в первой формуле индекс суммирования μ должен был бы пробегать значения не только 1, 2, но и $\hat{1}$, $\hat{2}$, но фактически это является лишним, так как $\varepsilon_{\lambda\hat{\mu}}$ все равно дают нуль. Это же замечание относится и к остальным формулам.

При помощи (57.12) можно «поднимать» и «опускать» любой индекс у спинтензора наподобие того, как мы это делали в евклидовом пространстве.

Рассмотрим теперь другой частный случай дважды контравариантного спинтензора, когда

$$c^{\lambda\mu}=c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}=0, \qquad c^{\lambda\hat{\mu}}=c^{\hat{\mu}\lambda}. \tag{57.13}$$

Из закона преобразования верхних индексов (57.4), в силу которого значения 1, 2 участвуют в преобразовании по отдельности от $\hat{1}$, $\hat{2}$, видно, что условие $c^{\lambda\mu}=0$ носит инвариантный характер; то же относится к условию $c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}=0$. Оставшееся условие означает, что наш тензор симметричен. Матрица его координат имеет вид

$$\left\|\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ & & c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \\ \hline c^{\hat{1}1} & c^{\hat{1}2} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ c^{\hat{2}1} & c^{\hat{2}2} & & \end{array}\right\|.$$

В дальнейшем спинтензор этого вида мы будем называть кратко «спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$». Ясно, что здесь речь идет не о единственном спинтензоре, как в случае $\varepsilon^{\lambda\mu}$, $\varepsilon^{\hat{\lambda}\hat{\mu}}$, а о целом их классе. В силу симметрии тензора достаточно рассматривать одну из выписанных здесь матриц 2-го порядка, например, верхнюю; другая получается из нее транспонированием. Закон преобразования будет иметь вид

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'}=\alpha_{\lambda}^{\lambda'}\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}c^{\lambda\hat{\mu}}. \tag{57.14}$$

Здесь по общему соглашению индекс суммирования λ пробегает значения 1, 2 и аналогично $\hat{\mu}$ — значения $\hat{1}$, $\hat{2}$; для каждого индекса мы повторяем здесь закон преобразования (57.4). Правда, по общей схеме тензорного преобразования индекс λ должен бы был пробежать все четыре значения, т. е. еще $\hat{1}$, $\hat{2}$; но соответствующие дополнительные члены все равно обращаются в нуль, так как в (57.4) следует считать $\alpha_{\hat{\lambda}}^{\lambda'}=0$ ($\psi^{1'}$, $\psi^{2'}$ разлагаются только по ψ^1, ψ^2 без участия $\psi^{\hat{1}}$, $\psi^{\hat{2}}$). Аналогичное замечание относится, конечно, и к индексу $\hat{\mu}$.

Формулу (57.14) можно истолковать так, что матрица $c^{\lambda'\hat{\mu}'}$ получается последовательным перемножением матриц $\alpha_{\lambda}^{\lambda'}$, $c^{\lambda\hat{\mu}}$, $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$, считая *номером строки* у первой матрицы верхний индекс, у второй — первый индекс, у третьей — нижний индекс. При перемножении матриц их определители тоже перемножаются. Учитывая унимодулярность матриц $\alpha_{\lambda}^{\lambda'}$, $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$, получаем:

$$\operatorname{Det}|c^{\lambda'\hat{\mu}'}|=\operatorname{Det}|c^{\lambda\hat{\mu}}|. \tag{57.15}$$

Следовательно, наш спинтензор обладает инвариантом

$$I=\operatorname{Det}|c^{\lambda\mu}|=c^{1\hat{1}}c^{2\hat{2}}-c^{1\hat{2}}c^{2\hat{1}}. \tag{57.16}$$

§ 58*. Спиноры в четырехмерном комплексном евклидовом пространстве R_4^+

С каждым спинтензором вида $c^{\lambda\hat{\mu}}$ мы свяжем определенные линейные комбинации его координат:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{2}} + c^{2\hat{1}}), & x^2 &= \frac{1}{2i}(c^{1\hat{2}} - c^{2\hat{1}}), \\ x^3 &= \frac{1}{2}(c^{1\hat{1}} - c^{2\hat{2}}), & x^4 &= \frac{1}{2i}(c^{1\hat{1}} + c^{2\hat{2}}). \end{aligned}\right\} \tag{58.1}$$

Обратно, координаты $c^{\lambda\hat{\mu}}$ без труда выражаются через эти линейные комбинации:

$$\begin{Vmatrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^3 + ix^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & -x^3 + ix^4 \end{Vmatrix}, \tag{58.2}$$

так что x^1, x^2, x^3, x^4 можно, если угодно, рассматривать как видоизмененную форму координат спинтензора $c^{\lambda\hat{\mu}}$.

Очевидно, инвариант I (57.16) принимает при этом вид

$$I = -({x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2 + {x^4}^2). \tag{58.3}$$

Когда в результате преобразования спинрепера $c^{\lambda\hat{\mu}}$ преобразуются как координаты спинтензора, их линейные комбинации x^i испытывают линейное преобразование, сохраняющее сумму их квадратов, т. е. (комплексное) *ортогональное преобразование.*

Если мы истолкуем x^i как ортонормированные координаты в некотором R_4^+, то оказывается, что каждое преобразование спинрепера в A_4^+ влечет за собой вполне определенное преобразование ортонормированных координат в R_4^+. Очевидно, что при этом наложению спинорных преобразований (57.4) отвечает наложение соответствующих ортогональных преобразований и тождественному спинорному преобразованию отвечает тождественное ортогональное преобразование в R_4^+. Кроме того, очевидно, что матрица ортогонального преобразования непрерывно зависит от матрицы преобразования (57.4). Другими словами, спинорная группа в A_4^+ получает представление в группе ортогональных преобразований в R_4^+. Обозначим это представление φ.

Спинорная группа (57.4) будет связной, так как непрерывным изменением $\alpha_\lambda^{\lambda'}$ (и аналогично $\alpha_{\hat{\lambda}}^{\hat{\lambda}'}$), начиная от единичной матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{*}$$

и соблюдая условие унимодулярности, можно перейти к любой наперед заданной унимодулярной матрице (например, если $\alpha_1^{1'} \neq 0$, то можно непрерывно менять $\alpha_1^{1'}$, $\alpha_2^{1'}$, $\alpha_1^{2'}$ от начальных значений (*) до конечных, избегая для $\alpha_1^{1'}$ значения 0 и определяя каждый момент значение $\alpha_2^{2'}$ из условия унимодулярности).

Поэтому и в представлении φ мы получим лишь те ортогональные преобразования, которые можно достичь непрерывным переходом по ортогональной группе, начиная с тождественного преобразования; такими будут лишь собственно ортогональные преобразования (т. е. преобразования с определителем $+1$).

Заранее не ясно, дает ли представление φ *все* такие преобразования; однако это так, что мы докажем немного позже.

Очень важно, что в представлении φ спинорная группа, как говорят, дважды накрывает собственно ортогональную группу. Действительно, если все коэффициенты спинорного преобразования (57.4) умножить на -1 (условие унимодулярности при этом не нарушается!), то, очевидно, закон преобразования для $c^{\lambda\hat{\mu}}$ не меняется, а значит, и матрица ортогонального преобразования для x^i остается прежней.

Итак, два спинорных преобразования (57.4), *отличающихся лишь множителем* -1, *будут представлены одной и той же ортогональной матрицей.*

Заметим, что еще какого-нибудь третьего спинорного преобразования, дающего ту же ортогональную матрицу, не существует. Действительно, данная ортогональная матрица вполне определяет преобразование над x^i, а потому и над соответствующими $c^{\lambda\hat{\mu}}$. Следовательно, в преобразовании (57.14)

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha_\lambda^{\lambda'} \alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} c^{\lambda\hat{\mu}} \tag{58.4}$$

вполне определены все коэффициенты $\alpha_\lambda^{\lambda'} \alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$. Учитывая это, попробуем все же изменить матрицы $\alpha_\lambda^{\lambda'}$, $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$; тогда умножение какого-нибудь из элементов $\alpha_\lambda^{\lambda'}$ (в предположении, что он не равен 0) на какое-нибудь число $k \neq 0$ повлечет за собой умножение на k^{-1} всех элементов матрицы $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$, а следовательно, умножение ее определителя на k^{-2}. Но так как матрица должна остаться унимодулярной, то $k^{-2} = 1$, $k = \pm 1$. Следовательно, у нас есть лишь один способ изменить матрицу $\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'}$: умножить ее на -1; конечно, $\alpha_\lambda^{\lambda'}$ при этом тоже приходится умножить на -1, чтобы сохранить коэффициенты в (58.4). Мы возвращаемся к уже рассмотренному случаю.

Расширим теперь спинорную группу (57.4) так, чтобы в представлении φ она порождала не только собственные, но и несобственные ортогональные преобразования в R_4^+.

А именно, кроме спинреперов $\mathfrak{R}$, описанных в начале § 57, мы будем допускать и такие $\mathfrak{R}\{e_1, e_2, e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}\}$, которые отличаются от прежних переименованием e_1, e_2 в $e_{\hat{1}}, e_{\hat{2}}$, и наоборот, так что у них e_1, e_2 будут лежать в $\hat{A}_2$, а $e_{\hat{1}}$, $e_{\hat{2}}$ — в A_2. Другими словами, к преобразованиям (57.1) мы присоединяем преобразование

$$e_{1'} = e_{\hat{1}}, \quad e_{2'} = e_{\hat{2}}, \quad e_{\hat{1}'} = e_1, \quad e_{\hat{2}'} = e_2, \tag{58.5}$$

а также преобразования, полученные наложением этого преобразования на преобразования (57.1):

$$\left.\begin{aligned} e_{1'} &= \alpha_{1'}^{\hat{1}} e_{\hat{1}} + \alpha_{1'}^{\hat{2}} e_{\hat{2}}, & e_{\hat{1}'} &= \alpha_{\hat{1}'}^{1} e_1 + \alpha_{\hat{1}'}^{2} e_2; \\ e_{2'} &= \alpha_{2'}^{\hat{1}} e_{\hat{1}} + \alpha_{2'}^{\hat{2}} e_{\hat{2}}, & e_{\hat{2}'} &= \alpha_{\hat{2}'}^{1} e_1 + \alpha_{\hat{2}'}^{2} e_2. \end{aligned}\right\} \tag{58.6}$$

Мы изменили здесь обозначения коэффициентов по сравнению с (57.1), но обе матрицы 2-го порядка остались по существу прежними, т. е. произвольными унимодулярными матрицами. То же самое в краткой записи:

$$e_{\lambda'} = \alpha_{\lambda'}^{\hat{\mu}} e_{\hat{\mu}}, \qquad e_{\hat{\mu}'} = \alpha_{\hat{\mu}'}^{\lambda} e_{\lambda}. \tag{58.7}$$

Координаты спинора преобразуются при этом с помощью транспонированных обратных матриц:

$$\psi^{\lambda'} = \alpha_{\hat{\mu}}^{\lambda'} \psi^{\hat{\mu}}, \qquad \psi^{\hat{\mu}'} = \alpha_{\lambda}^{\hat{\mu}'} \psi^{\lambda}. \tag{58.8}$$

Под спинорной группой мы будем теперь понимать группу, состоящую как из преобразований (57.4), *так и из* (58.8).

Эта расширенная спинорная группа будет, очевидно, несвязной, так как переход от старых преобразований к новым связан с перескакиванием векторов e_1, e_2 со своей плоскости A_2 на плоскость $\hat{A}_2$ (аналогично и для $e_{\hat{1}}$, $e_{\hat{2}}$) и непрерывным путем осуществлен быть не может.

Покажем теперь, что спинорная группа в представлении φ покрывает (дважды) всю ортогональную группу в R_4^+ («старые» спинорные преобразования порождают собственные ортогональные матрицы, а «новые» — несобственные).

Так как любые ортогональные преобразования в R_4^+ (и вообще в R_n^+) можно осуществить наложением некоторого числа зеркальных отражений, то достаточно доказать, что в представлении φ появляется любое зеркальное отражение. Рассмотрим преобразование тензора (57.13), отвечающее спинорному преобразованию (58.8):

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'}\ (=c^{\hat{\mu}'\lambda'})=\alpha_{\lambda}^{\hat{\mu}'}\alpha_{\hat{\mu}}^{\lambda'}c^{\lambda\hat{\mu}}. \tag{58.9}$$

В частности, если взять преобразование (58.5), то обе матрицы $\alpha_{\lambda}^{\hat{\mu}'}$, $\alpha_{\hat{\mu}}^{\lambda'}$ будут единичными, и мы получим:

$$'c^{\lambda\hat{\mu}}=c^{\mu\hat{\lambda}}.$$

Здесь штрих поставлен при c, так как штрихование индексов в этом частном случае неудобно.

Итак, спинорному преобразованию (58.5) отвечает транспонирование тензора $c^{\mu\hat{\lambda}}$ в клетке 2-го порядка (58.2), а это равносильно зеркальному отражению $x^2 \longrightarrow -x^2$ при неизменных x^1, x^3, x^4.

Теперь ясно, что новые спинорные преобразования (полученные наложением преобразования (58.5) на старые спинорные преобразования) дают в представлении φ несобственные ортогональные преобразования (полученные наложением зеркального отражения $x^2 \longrightarrow -x^2$ на какие-то собственные ортогональные преобразования). Требуется доказать, что этим путем получатся, в частности, все зеркальные отражения в R_4^+.

Для этой цели возьмем произвольную комплексную унимодулярную матрицу 2-го порядка M; дальше она остается фиксированной.

Рассмотрим специальное спинорное преобразование вида (58.8), положив

$$\left\| \alpha_{\lambda}^{\hat{\mu}'} \right\| = M, \qquad \left\| \alpha_{\hat{\mu}}^{\lambda'} \right\| = M^{-1}. \tag{58.10}$$

Тогда преобразование (58.9) над произвольным спинтензором $c^{\lambda\hat{\mu}}$ можно переписать в матричной форме:

$$\left\| c^{\lambda'\hat{\mu}'} \right\|^{T} = M\cdot \left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\| \cdot (M^{-1})^T, \tag{58.11}$$

где T обозначает транспонирование матрицы. Очевидно,

$$\left(M\cdot \left\| c^{\lambda'\hat{\mu}'} \right\|\right)^{T} = \left\| c^{\lambda'\hat{\mu}'} \right\|^{T}\cdot M^T = M\cdot \left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\|,$$

в последнем равенстве использовано (58.11).

Отсюда видно, что матрица $M\cdot\left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\|$ при преобразовании (58.11) переходит в транспонированную матрицу; в частности, она не меняется, если была симметричной, и умножается на -1 в случае кососимметричности.

Комплексные матрицы 2-го порядка $M\cdot\left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\|$ при фиксированной M и всевозможных $\left\| c^{\lambda\hat{\mu}} \right\|$ образуют четырехмерное комплексное линейное пространство, причем симметрические из них образуют трехмерное подпространство, а кососимметрические — прямую (одномерное подпространство). Тем самым и среди тензоров $c^{\lambda\hat{\mu}}$ найдется трехмерное подпространство тензоров, инвариантных при (58. 11), и одномерное подпространство тензоров, умножающихся на -1. Это означает, что ортогональное преобразование над x^i, которое порождается спинорным преобразованием (58.10), оставляет в R_4^+ неподвижной некоторую трехмерную плоскость R_3^+, «перепрокидывая» некоторую прямую R_1^+. *Итак, спинорное преобразование вида* (58.10) *порождает в R_4^+ зеркальное отражение относительно некоторой (тем самым неизотропной) плоскости R_3^+.*

Остается показать, что этим путем можно получить всевозможные зеркальные отражения в R_4^+. Зададимся произвольно неизотропным вектором $\mathbf{x} \in R_4^+$ или, что то же, невырожденной матрицей $c^{\lambda\hat{\mu}}$ (ср. (58.3)). Подходящим выбором унимодулярной матрицы M всегда можно добиться, чтобы $M\|c^{\lambda\hat{\mu}}\|$ оказалось кососимметрической матрицей; тем самым тензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$, а вместе с ним и вектор $\mathbf{x}$ умножаются на -1 при спинорном преобразовании (58.11), и порождаемое им отражение в R_4^+ идет в направлении наперед заданного вектора $\mathbf{x}$.

Вместе со всевозможными отражениями расширенная спинорная группа порождает в R_4^+ все вращения, собственные и несобственные, т. е. все ортогональные матрицы, и наше утверждение доказано.

При этом группа ортогональных матриц покрывается дважды: каждой ортогональной матрице отвечают ровно два спинорных преобразования, отличающихся друг от друга множителем -1. (Это можно показать так же, как и в случае спинорных преобразований (57.4).)

Но каждое спинорное преобразование (вида (57.4) или (58.8)) влечет за собой соответствующее преобразование каждого спинтензора. В итоге ортогональному преобразованию ортонормированного репера в R_4^+ отвечает некоторое преобразование каждого спинтензора и *спинтензоры можно рассматривать как центроевклидовы объекты* в R_4^+: для одного ортонормированного репера координаты спинтензора, в частности спинора ψ^λ, $\psi^{\hat{\lambda}}$, можно выбрать произвольно; любой другой ортонормированный репер получается из данного определенным ортогональным преобразованием, соответственно которому и пересчитываются координаты спинтензора. Так как наложению спинорных преобразований отвечает наложение соответствующих ортогональных преобразований, то указанное правило преобразования координат спинтензора действует и при переходе от любого ортонормированного репера к любому другому.

Здесь необходимо сделать важное уточнение: так как ортогональное преобразование определяет соответствующее спинорное преобразование с точностью до множителя -1, то правило преобразования координат спинтензора будет вполне определенным лишь для спинтензоров четной валентности. Действительно, в этом случае в тензорный закон преобразования элементы матрицы спинорного преобразования входят множителями четное число раз. В случае же спинтензоров нечетной валентности, в частности спинора, тензорный закон преобразования будет определен с точностью до множителя -1, а потому и спинтензоры нечетной валентности, в частности спиноры, в качестве центроевклидовых объектов имеет смысл задавать лишь с точностью до множителя -1 (т. е. с точностью до одновременного умножения всех координат спинтензора на -1).

Таким образом, спинтензоры нечетной валентности оказываются двузначными центроевклидовыми объектами. Это новые объекты, конечно, не сводящиеся просто к тензорам. Зато спинтензоры четной валентности задаются однозначно и по существу не дают ничего нового по сравнению с тензорами: всякий спинтензор четной валентности после подходящего линейного преобразования его координат с постоянными коэффициентами превращается в некоторый тензор в R_4^+, и этим путем можно получить любой тензор в R_4^+. Это последнее утверждение доказать нетрудно. Сначала вспомним, что один раз контравариантный тензор x^i можно согласно (58.1) свести к спинтензору $c^{\lambda\hat{\mu}} = c^{\hat{\mu}\lambda}$, $c^{\lambda\mu} = c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0$. Характерно, что одновалентный тензор эквивалентен двухвалентному спинтензору, так что спинор ψ^λ, $\psi^{\hat{\mu}}$ нужно расценивать как нечто вроде «полувалентного» тензора.

Аналогичным образом любой m-валентный тензор $V^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ в R_4^+ можно свести к $2m$-валентному спинтензору $c^{\lambda_1\hat{\mu}_1, \lambda_2\hat{\mu}_2, \ldots, \lambda_m\hat{\mu}_m}$ с симметрией индексов внутри каждой пары (при этом предполагается, что однотипность индексов в какой-либо паре влечет обращение координаты в нуль). Для этого достаточно каждый из индексов $i_1, \ldots$ переделать в пару спинорных индексов $\lambda_1\hat{\mu}_1, \ldots$ по схеме (58.1), (58.2).

§ 59*. Спиноры в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1

Построив спиноры и спинтензоры в *комплексном* четырехмерном евклидовом пространстве R_4^+, мы уже почти автоматически получаем их и для *вещественных* четырехмерных евклидовых пространств. При этом мы ограничимся пространством $R_4^{(1)}$ индекса 1, имеющим особое значение для физики; но и в остальных случаях можно поступать аналогично.

Зададимся каким-либо определенным $R_4^{(1)}$, выделенным в R_4^+ (см. § 53). Для этого достаточно взять ортонормированный репер в R_4^+

$$\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_4\} \tag{59.1}$$

и переделать его в репер

$$\{O,\ \mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}, \tag{59.2}$$

где

$$\mathbf{e}_0 = i\mathbf{e}_4, \tag{59.3}$$

а в остальном все осталось без изменения. Тогда пространство $R_4^{(1)}$ мы определим как множество точек, координаты которых x^0, x^1, x^2, x^3 относительно репера (59.2) являются *вещественными*, а следовательно, относительно репера (59.1) имеют вид

$$x^1 = x^1, \quad x^2 = x^2, \quad x^3 = x^3, \quad x^4 = ix^0. \tag{59.4}$$

Так как

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \quad \mathbf{e}_0^2 = -1,$$

то репер (59.2) служит ортонормированным репером в $R_4^{(1)}$.

Из всевозможных (комплексных) ортогональных преобразований репера (59.1) мы в этом параграфе будем рассматривать лишь те, которые переводят $R_4^{(1)}$ в себя, т. е. оставляют вещественными x^1, x^2, x^3 и чисто мнимой x^4. Такие ортогональные преобразования в R_4^+ образуют группу, которую мы будем обозначать $\tilde{O}$. Они, очевидно, означают всевозможные псевдоортогональные преобразования репера (59.2) в $R_4^{(1)}$.

Ограничивая ортогональную группу в R_4^+ до группы $\tilde{O}$, мы соответственно сузим группу спинорных преобразований (57.4), (58.8) так, чтобы в представлении φ получались все ортогональные преобразования только лишь из группы $\tilde{O}$. Мы покажем, что для этого в случае (57.4) нужно наложить добавочно или условие комплексной сопряженности двух унимодулярных матриц, которые до сих пор были совершенно произвольными:

$$\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} = (\alpha_{\mu}^{\mu'})^*, \tag{59.5}$$

или условие их комплексной антисопряженности:

$$\alpha_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}'} = -(\alpha_{\mu}^{\mu'})^*. \tag{59.6}$$

Одна из двух матриц остается при этом произвольной комплексной унимодулярной матрицей. Звездочкой мы обозначаем переход к комплексно сопряженной величине.

Аналогичные условия накладываются и в случае (58.8): или

$$\alpha_{\hat{\mu}}^{\mu'} = (\alpha_{\mu}^{\hat{\mu}'})^*, \tag{59.7}$$

или

$$\alpha^{\mu'}_{\hat{\mu}} = -(\alpha^{\hat{\mu}'}_{\mu})^*. \tag{59.8}$$

Мы должны показать, что спинорные преобразования вида (59.5), (59.6), (59.7), (59.8) порождают в $R_4^{(1)}$ всевозможные вращения соответственно собственные и несобственные 3-го, 1-го, 2-го рода.

Переходим к доказательству. Если вектор $\mathbf{x}$ принадлежит $R_4^{(1)}$, то соответствующий спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$ будет эрмитовым (т. е. его матрица комплексно сопряжена транспонированной матрице). Это сразу видно из (58.2), если учесть, что x^1, x^2, x^3 — вещественные, а x^4 — чисто мнимая координата. Как видно из (58.1), верно и обратное, так что *для того, чтобы вектор* $\mathbf{x}$ *принадлежал* $R_4^{(1)}$, *необходимо и достаточно, чтобы соответствующий спинтензор* $c^{\lambda\hat{\mu}}$ *был эрмитовым:*

$$(c^{\lambda\hat{\mu}})^* = c^{\mu\hat{\lambda}}. \tag{59.9}$$

Какое бы из спинорных преобразований (59.5) — (59.8) ни применить к эрмитову спинтензору $c^{\lambda\hat{\mu}}$, он остается эрмитовым, так как его индексы преобразуются при помощи комплексно сопряженных матриц (в случаях (59.6), (59.8) — с добавочным умножением на —1, что не нарушает эрмитовости). Действительно, в случаях (59.5) или (59.6)

$$c^{\lambda'\hat{\mu}'} = \alpha^{\lambda'}_{\lambda}\alpha^{\hat{\mu}'}_{\hat{\mu}}c^{\lambda\hat{\mu}}$$

(ср. (57.14)); отсюда

$$(c^{\lambda'\hat{\mu}'})^* = (\alpha^{\lambda'}_{\lambda})^*(\alpha^{\hat{\mu}'}_{\hat{\mu}})^*(c^{\lambda\hat{\mu}})^* = \alpha^{\hat{\lambda}'}_{\hat{\lambda}}\alpha^{\mu'}_{\mu}c^{\mu\hat{\lambda}} = c^{\mu'\hat{\lambda}'}.$$

Это показывает, что эрмитовость спинтензора (59.9) сохраняется и после преобразования. Аналогично обстоит дело и в случаях (59.7), (59.8).

Но раз спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$ остается эрмитовым после преобразований (59.5) — (59.8), то соответствующий ему вектор x остается в пространстве $R_4^{(1)}$ после вращений, порожденных этими преобразованиями.

Итак, спинорным преобразованиям вида (59.5) — (59.8) *отвечают в* R_4^+ *вращения, переводящие* $R_4^{(1)}$ *в себя, т. е. ортогональные преобразования группы* $\tilde{O}$.

Остается показать, что этим путем мы получим *всю* группу $\tilde{O}$. Покажем прежде всего, что спинорные преобразования вида (59.7) и (59.8) порождают, в частности, все зеркальные отражения в $R_4^{(1)}$. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный единичный или мнимоединичный вектор из $R_4^{(1)}$; ему отвечает согласно (58.2) спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$. Как следует из (58.3),

$$\operatorname{Det} | c^{\lambda\hat{\mu}} | = \begin{cases} +1, & \text{если } \mathbf{x} \text{ — мнимоединичный}, \\ -1, & \text{если } \mathbf{x} \text{ — единичный}. \end{cases} \tag{59.10}$$

Подберем матрицу 2-го порядка M так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} M \cdot \| c^{\lambda\hat{\mu}} \| &= \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{в первом случае}, \\ M \cdot \| c^{\lambda\hat{\mu}} \| &= \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{во втором случае}. \end{aligned}\right\} \tag{59.11}$$

Переходя от матриц к их определителям, замечаем, что матрица M в обоих случаях унимодулярна. Спинорное преобразование, построенное согласно (58.10), порождает в R_4^+, как мы знаем, зеркальное отражение в направлении вектора $\mathbf{x}$. Это отражение, в частности, переводит $R_4^{(1)}$ в себя, так как вектор $\mathbf{x}$ принадлежит $R_4^{(1)}$.

Остается показать, что в нашем случае спинорное преобразование с матрицами (58.10) удовлетворяет или условию (59.8) (в первом случае), или условию (59.7) (во втором случае), т. е. что

$$\left.\begin{aligned} M^{-1} &= -M^* \quad \text{в первом случае}, \\ M^{-1} &= M^* \quad \text{во втором случае}. \end{aligned}\right\} \tag{59.12}$$

Любая матрица 2-го порядка C, как легко проверить, удовлетворяет равенству

$$C^T \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \operatorname{Det} C \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot C^{-1}. \tag{59.13}$$

Положим $C = \| c^{\lambda\hat{\mu}} \|$ и, пользуясь (59.10), а также эрмитовостью C, получим в первом случае:

$$C^* \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} C^{-1}.$$

Это означает, что $-M^{*-1} = M$, так как согласно (59.11) (в первом случае):

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot C^{-1}, \quad M^{*-1} = -C^* \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Итак, выполняется первое из условий (59.12).

Во втором случае получаем из (59.13):

$$C^* \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot C^{-1},$$

что означает $M^{*-1}=M$, так как согласно (59.11) (во втором случае)

$$M=i\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\cdot C^{-1}, \quad M^{*-1}=-iC^{*}\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Мы видим, что выполняется второе из условий (59.12).

Итак, спинорное преобразование (58.10) *с матрицей M, построенной согласно* (59.11), *порождает в $R_4^{(1)}$ зеркальное отражение в направлении любого наперед заданного неизотропного вектора* $\mathbf{x}$, *причем выполняется условие* (59.12), *т. е. наше спинорное преобразование будет вида* (59.8), *когда отражение 2-го рода, и* (59.7), *когда — 1-го рода.*

Так как спинорные преобразования вида (59.5)—(59.8) очевидным образом составляют *группу* преобразований и наложением зеркальных отражений в $R_4^{(1)}$ (как ранее в R_4^{+}) можно получить любое вращение, то *спинорные преобразования вида* (59.5)—(59.8) *порождают в $R_4^{(1)}$ всевозможные вращения* (*т. е. всю группу $\tilde{O}$*).

В $R_4^{(1)}$ можно рассматривать спинтензоры подобно тому, как это делалось в R_4^{+}; при этом мы ограничиваемся вращениями ортонормированного репера в $R_4^{(1)}$, т. е. группой $\tilde{O}$ и соответственно спинорными преобразованиями только вида (59.5)—(59.8)*).

§ 60*. Спинорное поле и инвариантная дифференциальная операция $D^{\lambda\hat{\mu}}$

Пусть в $R_4^{(1)}$ задано спинорное поле. Это значит, что спинор ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$ задан в каждой точке пространства (или некоторой его области), так что

$$\left.\begin{aligned} \psi_\lambda &= \psi_\lambda(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \quad (\lambda=1,\ 2); \\ \psi_{\hat{\lambda}} &= \psi_{\hat{\lambda}}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \quad (\hat{\lambda}=\hat{1},\ \hat{2}). \end{aligned}\right\} \tag{60.1}$$

Мы предпочли здесь опустить индексы у координат спинора, хотя принципиального значения это и не имеет.

Каждому вектору x^i в $R_4^{(1)}$ отвечает согласно (58.2) определенный спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$. Переписывая (58.2), мы предпочтем воспользоваться ковариантными координатами x_i, а они в $R_4^{(1)}$ имеют вид

$$x_0=-x^0, \quad x_1=x^1, \quad x_2=x^2, \quad x_3=x^3.$$

---

*) Подробное рассмотрение этих вопросов (хотя и под иным углом зрения) можно найти в книгах: М. А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958; И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.

Мы получаем:

$$\left\| \begin{matrix} c^{1\hat{1}} & c^{1\hat{2}} \\ c^{2\hat{1}} & c^{2\hat{2}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_3+x_0 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & -x_3+x_0 \end{matrix} \right\|, \tag{60.2}$$

так как $x^4 = ix^0 = -ix_0$. Все эти соотношения носят инвариантный характер и, записанные в одном ортонормированном репере, будут справедливы и в любом другом.

Рассмотрим теперь совокупность операторов частного дифференцирования по координатам точки:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3}, \tag{60.3}$$

которые можно применять к различным функциям точки в нашем пространстве, в частности, к тензорным и спинорным полям в нем. При переходе к другому реперу меняются координаты точек, меняются и операторы (60.3), причем *они ведут себя как ковариантные координаты вектора*. Действительно, по формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} = A^i_{i'} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{60.4}$$

Формулу (60.4), как и последующие операторные формулы, нужно понимать в том смысле, что мы получим верное равенство, подействовав операторами в левой и в правой частях на произвольную (дифференцируемую, конечно) функцию точки $f(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Формула (60.4) означает, что совокупность операторов (60.3) можно рассматривать как *одноковариантный тензор с операторными координатами*. Формальные выкладки, для которых играет роль лишь закон преобразования, остаются справедливыми и для таких тензоров. Но для перелицовки одноковариантного тензора x_i в спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}}$ как раз играет роль лишь закон преобразования x_i. Поэтому *тензор с операторными координатами можно аналогичным образом перелицевать по формуле* (60.2) *в спинтензор, конечно, тоже с операторными координатами*. Обозначая координаты этого спинтензора $D^{\lambda\hat{\mu}} = D^{\hat{\mu}\lambda}$, получаем

$$\left\| \begin{matrix} D^{1\hat{1}} & D^{1\hat{2}} \\ D^{2\hat{1}} & D^{2\hat{2}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x^3}+\dfrac{\partial}{\partial x^0} & \dfrac{\partial}{\partial x^1}+i\dfrac{\partial}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1}-i\dfrac{\partial}{\partial x^2} & -\dfrac{\partial}{\partial x^3}+\dfrac{\partial}{\partial x^0} \end{matrix} \right\|. \tag{60.5}$$

При этом мы будем считать (как и для спинтензора $c^{\lambda\hat{\mu}}$), что $D^{\lambda\mu} = D^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0$. Важность этого операторного спинтензора заключается в том, что он позволяет получать *инвариантные дифференциальные зависимости между спинорными полями*.

Свертывая произвольный спинтензор $c^{\lambda\hat{\mu}} = c^{\hat{\mu}\lambda}$ с произвольным спинором ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$, мы всегда получаем новый спинор $\tilde{\psi}^\lambda$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\psi}^\lambda &= c^{\lambda\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}}, \\ \tilde{\psi}^{\hat{\lambda}} &= c^{\hat{\lambda}\mu}\psi_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{60.6}$$

Соотношения эти носят строго инвариантный характер, так как с точки зрения спинрепера мы имеем здесь тензорную операцию свертывания. Заметим, что в каждой формуле индекс суммирования в принципе пробегает все четыре значения: 1, 2, $\hat{1}$, $\hat{2}$, но фактически в первой формуле берутся значения $\hat{1}$, $\hat{2}$, а во второй — 1, 2, так как у нас предполагается $c^{\lambda\mu} = c^{\hat{\lambda}\hat{\mu}} = 0$. В частности, если свернуть спинтензор с операторными координатами (60.5) со спинором поля (60.1), то в результате получается опять некоторый спинор:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\psi}^\lambda &= D^{\lambda\hat{\mu}}\psi_{\hat{\mu}}, \\ \tilde{\psi}^{\hat{\lambda}} &= D^{\hat{\lambda}\mu}\psi_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{60.7}$$

Здесь под умножением $D^{\lambda\hat{\mu}}$ на $\psi_{\hat{\mu}}$ и т. п. нужно понимать воздействие оператора $D^{\lambda\hat{\mu}}$ на функцию $\psi_{\hat{\mu}}(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Спинор $\tilde{\psi}^\lambda$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$ будет, очевидно, также функцией точки и дает новое спинорное поле. Инвариантность соотношений (60.7) вытекает из их тензорной структуры, с формальной стороны совершенно такой же, как и у (60.6), хотя по существу смысл формул (60.7), конечно, иной.

Развернем формулы (60.7), причем вторую из них берем в виде $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}} = D^{\mu\hat{\lambda}}\psi_\mu$, пользуясь равенством $D^{\hat{\lambda}\mu} = D^{\mu\hat{\lambda}}$. Получим:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\psi}^1 &= D^{1\hat{1}}\psi_{\hat{1}} + D^{1\hat{2}}\psi_{\hat{2}} = \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^1} + i\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^2}, \\ \tilde{\psi}^2 &= D^{2\hat{1}}\psi_{\hat{1}} + D^{2\hat{2}}\psi_{\hat{2}} = \frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^1} - i\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^0}, \\ \tilde{\psi}^{\hat{1}} &= D^{\hat{1}1}\psi_1 + D^{\hat{2}1}\psi_2 = \frac{\partial\psi_1}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x^0} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x^1} - i\frac{\partial\psi_2}{\partial x^2}, \\ \tilde{\psi}^{\hat{2}} &= D^{\hat{1}2}\psi_1 + D^{\hat{2}2}\psi_2 = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + i\frac{\partial\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x^3} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x^0}. \end{aligned}\right\} \tag{60.8}$$

Таким образом, при помощи дифференциальной операции (60.8) из спинорного поля ψ_λ, $\psi_{\hat{\lambda}}$ инвариантным образом возникает новое спинорное поле $\tilde{\psi}^\lambda$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$.

ГЛАВА IV

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Теория относительности возникла в результате длительного накопления опытного материала, приведшего к глубокому преобразованию наших физических представлений о формах материи и движения. После целого ряда попыток приспособить прежние понятия о пространстве, времени и других физических величинах к вновь открытым опытным фактам обнаружилось, что для этой цели требуется перестроить все эти понятия коренным образом. Эта задача была выполнена в основном А. Эйнштейном в 1905 г. (специальная теория относительности) и в 1915 г. (общая теория относительности). Впрочем, задача была выполнена лишь в том смысле, что было дано стройное формально-математическое описание нового положения вещей. Задача глубокого, подлинно физического обоснования этой математической схемы все еще стоит перед физикой.

Мы имеем здесь в виду, что теория относительности является в основном макроскопической теорией и в этом отношении (в отличие от квантовой механики) продолжает традицию классической физики. Между тем трудно сомневаться в том, что макроскопические понятия, в том числе и наши пространственно-временные представления, на самом деле уходят своими корнями в микромир. Когда-нибудь они должны быть раскрыты как некоторый статистический итог, вытекающий из закономерностей этого мира — далеко еще не разгаданных — при суммарном наблюдении огромного числа микроявлений.

По характеру этой книги основы теории относительности будут даны именно с их математической стороны в готовой, законченной форме. В частности, поучительная история накопления опытного материала, подталкивавшего шаг за шагом к созданию теории относительности, почти полностью выпадает из рамок нашего изложения. Мы говорим об этом для того, чтобы у читателя не создалось впечатления, что теория относительности была кем-то выдумана «из головы» сразу в том виде, как она будет изложена. В действительности это математическое оформление теории появилось лишь как итог долгих экспериментальных и теоретических поисков.

Из двух частей, составляющих теорию относительности (специальная и общая теория относительности), мы будем заниматься в этой главе только первой. Математический аппарат специальной теории относительности сводится к теории тензорных полей в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Между тем общая теория относительности требует более квалифицированного математического аппарата, который будет подготовлен нами лишь в последующих главах.

Значение двух частей теории относительности в современной физике не соответствует их названиям. Специальная теория относительности пронизывает собой в сущности всю современную физику, во всяком случае, когда речь идет о больших скоростях движения тел (при малых скоростях она дает практически те же результаты, что и классическая механика). Выводы специальной теории относительности, означающие огромный переворот в наших представлениях о пространстве — времени, а в связи с этим и о других физических величинах, всесторонне подтверждаются опытом.

В противоположность этому общая теория относительности, представляя собой с математической точки зрения широкое обобщение специальной теории, создана для объяснения лишь одного физического явления — явления всемирного тяготения. Опытные данные, подтверждающие ее выводы (в тех случаях, когда она заметно отклоняется от теории Ньютона), сравнительно немногочисленны и требуют весьма тонких измерений, часто лежащих на пределе доступной в настоящее время точности. В связи с этим будет разумным рассматривать общую теорию относительности в ее современном математическом оформлении скорее как эскиз теории, чем как установленную истину. Вместе с тем трудно подвергать сомнению ее основные идеи: зависимость между геометрическими свойствами пространства-времени и распределением и движением масс и вытекающее отсюда объяснение явлений тяготения. Но вполне возможно, что математическое оформление этих идей еще не окончательное.

От подлинного содержания общей теории относительности следует отличать связанный с нею большой поток исследований, не имеющих серьезного физического обоснования и представляющих собой лишь математические спекуляции на ее темы.

§ 61. Постановка задачи

В дальнейшем у нас будет играть важную роль понятие системы отсчета. Систему отсчета можно наивно представлять себе в виде подвижной «платформы» (т. е. некоторой системы неизменно скрепленных между собой твердых тел), на которой установлены движущиеся вместе с ней измерительные приборы — часы, эталоны длины и т. д., позволяющие производить измерения различных величин, как мы будем говорить, относительно данной системы отсчета.

В частности, можно «установить» прямоугольные координатные оси X, Y, Z, твердо связанные с данной системой отсчета, и отмечать координаты точек, в которых совершаются те или иные события. Можно также при помощи часов, движущихся вместе с системой отсчета, отмечать моменты совершения этих событий, отсчитывая время t от некоторого произвольно выбранного начального момента. При этом подразумевается, что все системы отсчета снабжены совершенно одинаковыми часами и эталонами длины.

В дальнейшем мы всегда будем считать, что с системой отсчета неизменно скреплены каким-либо образом выбранные координатные оси X, Y, Z и указан начальный момент для отсчета времени. Таким образом, под системой отсчета мы будем понимать, окончательно, подвижную «платформу» вместе с установленными на ней прямоугольными координатными осями X, Y, Z и выбранным начальным моментом для отсчета времени t.

Если на прежней «платформе» мы установим по-другому координатные оси или изменим начальный момент для отсчета времени, то мы будем считать, что перешли к другой системе отсчета, хотя такое преобразование системы отсчета и будет тривиальным (так мы и будем его в дальнейшем называть).

С классической точки зрения среди систем отсчета существует лишь одна система (если не считать ее тривиальных преобразований), неподвижная в каком-то абсолютном смысле, относительно которой и формулируются законы физики.

Правда, для классической механики с самого начала ее возникновения было известно, что формулировка ее законов нисколько не меняется, если покоящуюся систему заменить системой, движущейся относительно нее равномерно и прямолинейно, — такие системы мы будем называть инерциальными. В этом заключается принцип относительности Галилея.

В самом деле, пусть система S — покоящаяся, а S' — движущаяся инерциальная система. Предположим для простоты, что координатные оси X, Y, Z, связанные с S, и X', Y', Z', связанные с S', в начальный момент совпадают, причем ось X идет по направлению движения системы S'. Если (постоянную) скорость движения инерциальной системы S' обозначить через v, то спустя время t координатные оси X', Y', Z' сдвинутся относительно неподвижных координатных осей X, Y, Z на расстояние vt в направлении оси X. Поэтому, если в момент t произойдет какое-либо событие в точке с координатами x, y, z относительно системы S, то относительно системы S' эта точка будет иметь координаты:

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{61.1}$$

К этому нужно добавить, что с точки зрения классической механики время имеет абсолютный характер, т. е. промежуток времени между двумя событиями имеет всегда одну и ту же величину независимо от того, в какой системе отсчета он измеряется. Поэтому момент совершения данного события будет одинаковым с точки зрения обеих систем отсчета, и к формулам (61.1) можно присоединить еще одну:

$$t' = t. \tag{61.2}$$

Если мы прослеживаем движение материальной точки, так что x, y, z являются функциями t (и аналогично в системе x', y', z' — функциями от t'), то из формул (61.1), (61.2) сейчас же вытекает, что

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

т. е. проекции ускорения на оси будут одинаковыми для обеих систем отсчета. Теперь нужно учесть, что в классической динамике рассматривается система материальных точек, ускорения которых пропорциональны действующим на них силам, а силы зависят от взаимного расположения этих точек в каждый данный момент. Но это расположение тоже, очевидно, выглядит одинаково с точки зрения обеих систем, так как *разности* координат любых двух точек $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ будут при данном t равны $x_2' - x_1'$, $y_2' - y_1'$, $z_2' - z_1'$ (как немедленно следует из уравнений (61.1)). Теперь ясно, что уравнения движения запишутся одинаково относительно обеих систем отсчета S и S'.

Итак, наблюдая механические явления, мы не в состоянии установить, наблюдаем ли мы их с точки зрения покоящейся или с точки зрения равномерно и прямолинейно движущейся системы. Однако к началу XX века, т. е. к моменту возникновения теории относительности, теоретическая физика состояла не только из механики. Наряду с ней стояла другая, столь же важная теория, созданная в XIX веке, — электродинамика. И вот основные законы электродинамики не удовлетворяли принципу относительности (если руководствоваться «галилеевыми» преобразованиями (61.1), (61.2)). Наиболее выпукло это сказывалось в том известном результате, что скорость света (т. е. скорость распространения электромагнитных волн) в пустоте является постоянной величиной c. С классической точки зрения было ясно, что этот результат может относиться лишь к покоящейся системе отсчета, так как относительно системы отсчета, движущейся со скоростью v, скорость света будет $c - v$, если свет «догоняет» систему, и $c + v$, если он движется ей навстречу. Поэтому, естественно, считали, что можно обнаружить абсолютную скорость движения данной системы отсчета, наблюдая те отклонения от законов электродинамики, в частности, от закона постоянства скорости света, которые должны обнаружиться в этой системе, если только она не находится в абсолютном покое.

Ряд опытов, поставленных с этой целью (где в качестве движущейся системы отсчета служила Земля в ее движении по орбите), дал отрицательный результат. Оказалось, что движение системы отсчета не нарушает законов электродинамики вопреки тому, что бесспорно следовало из классической теории. Разрешение возникшего таким образом глубокого противоречия было дано специальной теорией относительности, согласно которой *не только законы механики, но и электродинамики тоже, выглядят совершенно одинаково в любой инерциальной системе; в частности, скорость света (в пустоте) постоянна и равна c в любой инерциальной системе.*

Но если дело обстоит таким образом, то теряет смысл отличать среди инерциальных систем те, которые находятся «в абсолютном покое», от тех, которые «движутся». Раз за понятием абсолютно покоящейся системы отсчета не стоит никакой физической реальности, которая отличала бы ее от остальных инерциальных систем, то это значит, что мы имеем дело с неудачной абстракцией, не оправдавшейся дальнейшим развитием науки. В дальнейшем, рассматривая инерциальные системы, мы будем считать их все равноправными и обладающими движением лишь одна относительно другой (а не абсолютным).

Итак, вместо *одной* привилегированной системы отсчета возникает привилегированный *класс инерциальных систем*, в которых законы физики формулируются одинаково и которые движутся одна относительно другой равномерно и прямолинейно. Этими свойствами класс инерциальных систем и будет описываться в специальной теории относительности (после того, как наша исходная «покоящаяся» система потеряла смысл).

§ 62. Пространство событий

Мы уже указывали на противоречие между опытом, который показал равноправие всех инерциальных систем, и классической теорией, согласно которой законы электродинамики верны лишь в «покоящейся» системе, а в остальных нарушаются. С точки зрения теории относительности это противоречие имеет своим источником в первую очередь *неправильность формул* (61.1), (61.2), пересчитывающих пространственно-временные координаты события x, y, z, t, вычисленные относительно одной инерциальной системы S, на x', y', z', t', вычисленные относительно другой инерциальной системы S' (мы вывели эти формулы, предполагая систему S покоящейся, но в них ничего не изменится, если считать S любой инерциальной системой, а S' — движущейся относительно нее со скоростью v в направлении оси X, причем в начальный момент S и S' совпадают). Согласно теории относительности эти формулы должны быть заменены новыми, которые обеспечат инвариантность уже всех физических законов; и в области механики, и в области электродинамики. Само собой ясно, что признание формул (61.1), (61.2) неправильными означает отрицание наших прежних представлений о пространстве и времени, на основании которых эти формулы легко получаются, а замена их новыми означает коренную перестройку этих представлений. В дальнейшем мы все это увидим на конкретных примерах.

Чтобы подойти к установлению новых формул с достаточно широкой точки зрения, мы должны будем рассмотреть *четырехмерное пространство событий*, которое на протяжении всей этой главы будет играть у нас основную роль и в котором будут развертываться все наши построения.

Под *событиями* мы условимся понимать элементарные события, т. е. происходящие в столь малой области пространства и в столь короткий промежуток времени, что, идеализируя положение вещей, их можно считать происходящими в одной точке и мгновенно. Само содержание события нас интересовать не будет, так что в сущности событие в нашем понимании сводится к заданию определенного места (точки) в пространстве в определенный момент времени. Таким образом, наше понятие события примерно в том же смысле представляет собой идеализацию реального физического процесса малой протяженности в пространстве и времени, в каком геометрическое понятие точки — идеализацию реального физического тела малой протяженности в пространстве.

Перед нами стоит задача установления новых формул преобразования, смысл которой можно формулировать так. Одно и то же событие может рассматриваться относительно различных инерциальных систем; рассмотрим какие-нибудь две из них, S и S'. Пусть относительно S событие произошло в точке с координатами x, y, z в момент времени t, а относительно S' в точке с координатами x', y', z' и в момент времени t'. Спрашивается, какова зависимость между координатами события в системе S и системе S' (координатами события мы будем называть числа x, y, z, t).

Прежде всего *мы предполагаем, что эта зависимость будет линейной*, т. е. t', x', y', z' выражаются линейными (вообще говоря, неоднородными) функциями от t, x, y, z.

Действительно, классическая зависимость (61.1), (61.2) является линейной как в том простейшем случае взаимного расположения осей X, Y, Z и X', Y', Z', для которого она у нас выписана, так, конечно, и в самом общем случае. Естественно попытаться решить поставленную нами задачу, видоизменяя коэффициенты этой зависимости, но не отказываясь от ее линейного характера.

Более же глубокая причина заключается в том, что лишь при линейном характере зависимости мы обеспечиваем соблюдение закона инерции в любой инерциальной системе (предполагая, что он соблюдается в одной из них).

Далее, нам нужно обеспечить, чтобы скорость распространения света была с точки зрения любой инерциальной системы одна и та же и равнялась константе c. Точнее говоря, нам нужно потребовать, чтобы *всякий сигнал, распространяющийся в каком-либо направлении со скоростью c относительно одной инерциальной системы, распространялся бы с этой же скоростью c и относительно любой другой инерциальной системы.*

В таком случае, принимая, что свет распространяется в любом направлении со скоростью c относительно хотя бы одной инерциальной системы, мы получим этот же результат и для любой другой инерциальной системы.

Будем рассуждать следующим образом.

Пусть первое событие M состоит в том, что из некоторой точки в некоторый момент времени подается сигнал, а второе событие $\tilde{M}$ — в том, что этот сигнал принимается в какой-то другой точке в другой момент времени. Координаты событий M и $\tilde{M}$ относительно системы S обозначим (t, x, y, z) и $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, а относительно системы S' — теми же буквами, но со штрихами. Тогда тот факт, что сигнал распространялся со скоростью c, относительно системы S можно записать в виде

$$\sqrt{(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2}=c\,(\tilde{t}-t),$$

т. е. путь, пройденный световым лучом, равен протекшему времени, умноженному на c. Возводя почленно в квадрат и перенося все члены налево, получим:

$$-(c\tilde{t}-ct)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2=0. \qquad (62.1)$$

Тот же самый факт, записанный с точки зрения системы S', приводит к аналогичному соотношению:

$$-(c\tilde{t}'-ct')^2+(\tilde{x}'-x')^2+(\tilde{y}'-y')^2+(\tilde{z}'-z')^2=0. \qquad (62.2)$$

Мы требуем, чтобы из того, что сигнал распространяется со скоростью c относительно одной инерциальной системы, следовала бы такая же скорость его распространения и относительно любой другой инерциальной системы. Другими словами, из соотношения (62.1) должно следовать (62.2), и обратно.

Однако мы потребуем еще большего, а именно, чтобы *для любых двух событий M, $\tilde{M}$* выражения, стоящие в левых частях равенств (62.1), (62.2), всегда были бы равны между собой:

$$-(c\tilde{t}-ct)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2\equiv$$
$$\equiv-(c\tilde{t}'-ct')^2+(\tilde{x}'-x')^2+(\tilde{y}'-y')^2+(\tilde{z}'-z')^2. \quad (62.3)$$

Ясно, что если это требование соблюдается, то из (62.1), т. е. из обращения в нуль левой части (62.3), вытекает (62.2), т. е. обращение в нуль правой части (62.3) (равно как и обратно). Однако мы требуем соблюдения (62.3) и в тех случаях, когда его правая и левая части в нуль не обращаются, что, конечно, означает дополнительное предположение. Мы как будто произвольно усилили наши требования, но дело в том, что иначе мы пришли бы к физически нелепым выводам, которые все равно вынудили бы нас сделать дополнительные предположения.

Итак, окончательно: *линейная зависимость* t', x', y', z' *от* t, x, y, z *при переходе от одной инерциальной системы к другой должна быть такова, чтобы для любых двух событий соблюдалось равенство* (62.3).

Теперь нетрудно установить связь с предшествующей математической теорией, именно с геометрией четырехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1 (§ 48). В ортонормированной координатной системе x^0, x^1, x^2, x^3 скалярный квадрат вектора выражается в этом пространстве формулой

$$\mathbf{x}^2=-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2},$$

в частности, скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}$, «соединяющего» две какие-нибудь точки $M(x^i)$, $\tilde{M}(\tilde{x}^i)$, имеет вид

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2=-(\tilde{x}^0-x^0)^2+(\tilde{x}^1-x^1)^2+(\tilde{x}^2-x^2)^2+(\tilde{x}^3-x^3)^2. \quad (62.4)$$

Выберем какую-нибудь инерциальную систему S, и пусть t, x, y, z будут координаты событий с точки зрения S.

Выберем в нашем псевдоевклидовом пространстве какую-нибудь *ортонормированную* координатную систему x^0, x^1, x^2, x^3.

Условимся изображать каждое событие $M(t, x, y, z)$ точкой $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$ в псевдоевклидовом пространстве таким образом, чтобы

$$x^0=ct, \quad x^1=x, \quad x^2=y, \quad x^3=z. \quad (62.5)$$

В результате пространство событий взаимно однозначно отобразится на наше псевдоевклидово пространство.

Допустим теперь, что события мы отнесли к другой инерциальной системе S'. Теперь каждое событие M имеет координаты

(t', x', y', z'). Но мы *уже поставили* в соответствие каждому событию M точку M псевдоевклидова пространства. Припишем этой точке следующие координаты (не предрешая вопроса о их характере с точки зрения псевдоевклидова пространства):

$$x^{0'} = ct', \qquad x^{1'} = x', \qquad x^{2'} = y', \qquad x^{3'} = z'. \tag{62.6}$$

Мы утверждаем, что координаты $x^{i'}$ будут тоже ортонормированными, В самом деле, так как t', x', y', z' линейно зависят от t, x, y, z, то координаты $x^{i'}$ линейно зависят от координат x^i. А так как эти последние — ортонормированные аффинные координаты, то $x^{i'}$ *тоже будут аффинными координатами*. Но, кроме того, для любых двух событий выполняется соотношение (62.3). Это соотношение можно переписать для соответствующих точек псевдоевклидова пространства следующим образом (пользуясь (62.5), (62.6)):

$$-(\tilde{x}^0 - x^0)^2 + (\tilde{x}^1 - x^1)^2 + (\tilde{x}^2 - x^2)^2 + (\tilde{x}^3 - x^3)^2 =$$
$$= -(\tilde{x}^{0'} - x^{0'})^2 + (\tilde{x}^{1'} - x^{1'})^2 + (\tilde{x}^{2'} - x^{2'})^2 + (\tilde{x}^{3'} - x^{3'})^2. \tag{62.7}$$

Так как левая часть выражает скалярный квадрат $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ согласно (62.4) (координаты x^i ортонормированные!), то наше равенство можно переписать в виде

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = -(\tilde{x}^{0'} - x^{0'})^2 + (\tilde{x}^{1'} - x^{1'})^2 + (\tilde{x}^{2'} - x^{2'})^2 + (\tilde{x}^{3'} - x^{3'})^2. \tag{62.8}$$

Итак, $x^{i'}$ являются аффинными координатами, в которых скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}^2$ выражается формулой (62.8), т. е. приводится к сумме-разности квадратов его координат $\tilde{x}^{i'} - x^{i'}$. Но мы знаем, что скалярный квадрат вектора имеет такое выражение в ортонормированной и *только в ортонормированной* координатной системе псевдоевклидова пространства (§ 42). Следовательно, $x^{i'}$ представляют собой *тоже ортонормированную координатную систему*.

Окончательный результат: *пространство событий можно так взаимно однозначно отобразить на четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса* 1, *что координаты событий t, x, y, z, вычисленные с точки зрения любой инерциальной системы S, будут играть роль ортонормированных координат в псевдоевклидовом пространстве* (*причем t нужно еще умножить на c*):

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z. \tag{62.9}$$

Тем самым выбор инерциальной системы S в пространстве событий равносилен выбору ортонормированной координатной системы в псевдоевклидовом пространстве, а переход от одной инерциальной системы S к другой S' равносилен переходу от одной ортонормированной координатной системы к другой. Но мы знаем, что этот последний переход совершается при помощи формул

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}, \tag{62.10}$$

где $A_i^{i'}$ — псевдоортогональная матрица 4-го порядка, индекса 1. Напомним, что это означает, что матрица $A_i^{i'}$ связана со своей обратной матрицей $A_{i'}^{i}$, как следует из соотношений (50.7), следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} A_0^{0'} & A_1^{0'} & A_2^{0'} & A_3^{0'} \\ A_0^{1'} & A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ A_0^{2'} & A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ A_0^{3'} & A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{0'}^{0} & -A_{0'}^{1} & -A_{0'}^{2} & -A_{0'}^{3} \\ -A_{1'}^{0} & A_{1'}^{1} & A_{1'}^{2} & A_{1'}^{3} \\ -A_{2'}^{0} & A_{2'}^{1} & A_{2'}^{2} & A_{2'}^{3} \\ -A_{3'}^{0} & A_{3'}^{1} & A_{3'}^{2} & A_{3'}^{3} \end{Vmatrix}. \tag{62.11}$$

Другими словами, данная матрица $A_i^{i'}$ и обратная ей $A_{i'}^{i}$ совпадают после транспонирования одной из них и умножения первой строки и первого столбца у одной из них на -1. При этом, как мы вскоре увидим, нам придется ограничиться случаем $A_0^{0'} > 0$ (следовательно, и $A_{0'}^{0} > 0$).

Так как x^i согласно (62.9) могут служить и координатами событий, то (62.10) дает нам общий вид перехода от одной инерциальной системы к другой. *Этим и решается основная задача, поставленная в этом параграфе.*

В дальнейшем мы всегда будем представлять себе, что пространство событий отображено указанным образом на псевдоевклидово пространство и восприняло его геометрию, причем инерциальные системы отсчета приняли вид ортонормированных координатных систем.

Заметим, что если два события M, $\tilde{M}$ являются одновременными относительно какой-либо системы отсчета S, то в соответствующей ортонормированной системе $\tilde{x}^0 = x^0$ формула (62.4) принимает вид

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = (\tilde{x}^1 - x^1)^2 + (\tilde{x}^2 - x^2)^2 + (\tilde{x}^3 - x^3)^2,$$

и расстояние $M\tilde{M}$ в пространстве событий совпадает с точки зрения системы S с обычным расстоянием между точками, где события произошли.

Если же относительно системы S два события M и $\tilde{M}$ произошли в одной точке,

$$\tilde{x}^1 = x^1, \quad \tilde{x}^2 = x^2, \quad \tilde{x}^3 = x^3,$$

то формула (62.4) дает

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 = -(\tilde{x}^0 - x^0)^2,$$

откуда видно, что расстояние $M\tilde{M}$ в пространстве событий будет мнимым и равно $i(\tilde{x}^0 - x^0) = ic(\tilde{t} - t)$, т. е. равно промежутку времени, протекшему между этими событиями, умноженному на ic.

Таким образом, псевдоевклидова метрика в пространстве событий носит универсальный характер и объединяет в себе измерение как пространственных, так и временных расстояний. В первом случае расстояния в этой метрике получаются вещественными, во втором — мнимыми.

§ 63. Формулы Лоренца

Разберемся теперь детально в полученном результате, именно в новых формулах перехода (62.10) от одной инерциальной системы к другой. С геометрической точки зрения речь идет о переходе от одной ортонормированной координатной системы к другой в пространстве событий, т. е. в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Этот переход изучался нами специально в § 48. Там было выяснено, что, проделав предварительно тривиальные вращения над ортонормированными реперами $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ и параллельный сдвиг одного из них, можно свести преобразование к простому виду (48.10), (48.11):

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3, \tag{63.1}$$

причем O неподвижно.

Соответствующее преобразование ортонормированных координат x^i будет иметь вид

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \beta x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{1'} = \frac{-\beta x^0 + x^1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3 \tag{63.2}$$

(см. переход от преобразования (50.1) к (50.6)). Посмотрим, что означает этот результат с точки зрения пространства событий. Прежде всего параллельный сдвиг репера, например $\mathfrak{R}$, означает, что над ортонормированными координатами x^0, x^1, x^2, x^3 произведено преобразование, заключающееся в добавлении к ним некоторых констант. Но так как координаты x^i имеют теперь в соответствующей инерциальной системе S физический смысл (62.9), то это означает, что некоторые константы добавились к t, x, y, z, т. е. изменен начальный момент отсчета времени и координатные оси X, Y, Z параллельно сдвинуты и укреплены на прежней «платформе» в новом положении. Такое изменение системы отсчета мы относили к числу тривиальных.

Далее, тривиальное вращение репера $\mathfrak{R}$ (и аналогично $\mathfrak{R}'$) заключается в том, что вектор $\mathbf{e}_0$ не меняется, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ испытывают вращение в своей плоскости, т. е. в трехмерном собственно евклидовом пространстве. Отсюда вытекает, что x^0 не меняется, а x^1, x^2, x^3 подвергаются обычному ортогональному преобразованию. Но, учитывая (62.9), мы видим, что это означает некоторый определенный поворот координатных осей X, Y, Z при прежнем отсчете времени t. Так как коэффициенты ортогонального преобразования константы от времени не зависят, то повернутые оси X, Y, Z твердо расположены относительно прежних осей X, Y, Z и укреплены на той же «платформе». Такое преобразование системы отсчета мы тоже назвали тривиальным.

Итак, за счет тривиального преобразования инерциальных систем отсчета S и S', т. е. сохраняя прежнее движение «платформ» и лишь иначе скрепляя с ними координатные оси X, Y, Z и X', Y' Z', а также, возможно, изменяя начальный момент отсчета времени, можно добиться, чтобы переход от S к S' принял вид (63.2).

Чтобы выпуклее представить этот результат, перепишем формулы (63.2), пользуясь (62.9), в следующем виде:

$$t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\pm \sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta c t + x}{\pm \sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \qquad (63.3)$$

Здесь имеется четыре варианта выбора знаков в знаменателях. Однако мы из них оставим лишь один, именно, когда оба знака положительные. В первой формуле мы делаем это на основе физических соображений: если бы знак знаменателя был отрицательным, то возрастание t вызывало бы убывание t' (считая для простоты x, y, z постоянными). Другими словами, наблюдая с точки зрения системы S' существование точки Q (x, y, z), скрепленной с системой S, мы увидели бы все события происходящими в обратной последовательности. Этот физически абсурдный результат заставляет нас отказаться от знака минус в первой формуле (63.3) и, что то же самое, в первой формуле (63.2) и по совершенно аналогичным причинам считать и в общей формуле (62.10) коэффициент $A_0^{0'}$ положительным: $A_0^{0'} > 0$. Заметим, что с точки зрения пространства событий это означает, что переход от одной инерциальной системы к другой не есть любой переход от одного ортонормированного репера к другому. Этот переход представляет собой либо собственное движение, либо несобственное движение 1-го рода (но не 2-го и не 3-го). Соответственно этому инерциальным системам будут отвечать в пространстве событий ортонормированные реперы не всех четырех, а лишь двух классов.

Что же касается случая знака минус в знаменателе второй формулы (63.3), то его устранение не связано с какими-либо принципиальными соображениями и достигается просто изменением положительного направления оси X' на обратное, вследствие чего x' меняет знак. Итак, окончательно формулы (63.3) мы будем писать в виде

$$t'=\frac{t-\frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad x'=\frac{-\beta ct+x}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad y'=y,\quad z'=z. \tag{63.4}$$

Таковы формулы перехода от одной инерциальной системы S к другой S' после упрощений, внесенных предварительным тривиальным преобразованием этих систем отсчета. Конечно, нетрудно догадаться, каков настоящий смысл этих тривиальных преобразований: мы так повернули и сдвинули координатные оси, скрепленные с каждой из платформ, и так изменили начальный момент отсчета времени на одной из них, чтобы оси Y, Z системы S в начальный момент $t=0$ совпадали с осями Y', Z' системы S' в начальный момент $t'=0$, а последующее движение S' относительно S (равно как и S относительно S') происходило вдоль общей оси X. Однако, если бы мы попытались привести формулы преобразования к упрощенному виду (63.4), исходя непосредственно из этих соображений, то могли бы легко запутаться в новых, еще неизвестных нам, пространственно-временных соотношениях.

Формулы (63.4) *представляют собой аналог формул* (61.1) и (61.2) *и призваны их заменить при переходе от классической точки зрения к релятивистской.* Уже беглое сравнение этих формул показывает глубокую разницу между ними, которая при дальнейшем исследовании станет еще более разительной.

Прежде всего нужно выяснить смысл параметра β, входящего в формулы (63.4). По аналогии с (61.1), (61.2) следует ожидать, что он должен быть связан со скоростью движения v одной инерциальной системы относительно другой, и это действительно оправдывается.

Рассмотрим точку P, закрепленную в системе S'. Ее координаты x', y', z' остаются, следовательно, постоянными; время же t' будем считать переменным, так что мы рассматриваем одну и ту же (с точки зрения системы S') точку P в разные моменты времени t'.

Как будет восприниматься поведение точки P с точки зрения системы S?

Дифференцируя почленно последние три из четырех уравнений (63.4) и учитывая, что в нашем случае $dx'=dy'=dz'=0$, получаем:

$$0=\frac{-\beta c\,dt+dx}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad 0=dy,\quad 0=dz,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \beta c, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0. \tag{63.5}$$

Эти формулы показывают, что всякая точка P, закрепленная в системе S', движется относительно системы S с постоянной скоростью βc в направлении оси X. Последний результат позволяет нам говорить, что и вообще инерциальная система S' движется относительно S поступательно с постоянной скоростью βc (в направлении оси X), имея в виду, что так движется всякая точка, скрепленная с системой S'. Обозначим скорость движения S' относительно S через v, так что

$$v = \beta c, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{63.6}$$

Так как параметр β меняется в пределах

$$-1 < \beta < 1,$$

то скорость v может принимать значения в пределах

$$-c < v < c.$$

Таким образом, относительная скорость инерциальных систем никогда не достигает скорости света. А так как мы считаем, что в принципе со всяким твердым телом можно связать систему отсчета, то в теории относительности принимается, что вообще никакие два тела не могут иметь относительной скорости, превышающей или хотя бы достигающей скорости света. Далее мы увидим, что все основные формулы приводятся к абсурду, если предположить противное: дело в том, что в них вслед за формулами (63.4) почти во всех основных формулах будет фигурировать радикал

$$\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

который становится мнимым, если предположить $v > c$. Принимается также, что никакое возмущение не может распространяться со скоростью, превосходящей c, хотя скорость c и может им достигаться, как это происходит для электромагнитного возмущения.

Теперь формулы (63.4) можно переписать в виде

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{63.7}$$

Эти формулы перехода от одной инерциальной системы S к другой S' носят название *формул Лоренца.*

Если, обратно, выразить отсюда t, x, y, z через t', x', y', z', то это обратное преобразование, как показывает элементарный подсчет, будет иметь вид

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x=\frac{vt'+x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y=y', \quad z=z', \tag{63.8}$$

т. е. отличается от прямого лишь заменой v на $-v$. Это означает, что если система S' движется относительно S со скоростью v, то S движется относительно S' со скоростью $-v$. Это, правда, представляется само собой ясным, но так как нас ждут в дальнейшем выводы, опрокидывающие многие привычные представления, то этот результат следует отметить.

§ 64. Исследование формул Лоренца

При первом взгляде на формулы (63.7) поражает их, казалось бы, полное несходство с формулами (61.1), (61.2) классической теории. А между тем мы знаем, что классические формулы практически безусловно верны, по крайней мере, с большой степенью точности. Поэтому возникает вопрос, как согласовать формулы Лоренца с классическими. Ответ очень прост. На практике мы обычно имеем дело со скоростями, весьма малыми сравнительно со скоростью света, т. е. отношение $\frac{v}{c}$ очень мало, и его квадратом практически можно пренебречь по сравнению с 1. Поэтому можно считать

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx 1. \tag{64.1}$$

Кроме того, в первой формуле (63.7) можно пренебречь величиной $\frac{v}{c^2}x$ сравнительно с временем t, так как $\frac{v}{c^2}x$ есть произведение весьма малого промежутка временем $\frac{x}{c}$ *) на весьма малую дробь $\frac{v}{c}$. В результате формулы (63.7) принимают вид

$$t'\approx t, \quad x'\approx -vt+x, \quad y'=y, \quad z'=z,$$

*) Точнее, малым предполагается $\frac{\Delta x}{c}$, где $\Delta x=x-x_0$, а x_0 — некоторая константа; она может быть большой, но дает лишь тривиальное преобразование: $t'=t-\frac{vx_0}{c^2}$.

т. е. мы возвращаемся к классическим формулам (61.1), (61.2). Таким образом, *при скоростях, малых сравнительно со скоростью света, теория относительности дает практически те же результаты, что и классическая механика.* Это будет повторяться в дальнейшем постоянно, и, естественно, так оно и должно быть — иначе теория относительности стояла бы в явном противоречии с нашим повседневным опытом. Но при больших скоростях, в повседневной практике недостижимых, появляется разногласие между обеими теориями, и опыт решает этот спор в пользу теории относительности.

Разберем теперь некоторые частные следствия формул Лоренца, которые покажут нам характерные черты новых пространственно-временных соотношений.

1°. *Сокращение продольных размеров движущихся тел.* Пусть на оси X' в инерциальной системе S' покоится стержень длиной l. Обозначим абсциссы концов этого стержня через x'_1, x'_2. Тогда

$$x'_2 - x'_1 = l. \tag{64.2}$$

Абсциссы x'_1, x'_2 остаются постоянными, но t' мы считаем переменным, т. е. рассматриваем существование стержня во времени.

Относительно системы S этот стержень вместе с системой S' движется со скоростью v в направлении оси X, вдоль которой он расположен. Заметим, что вообще оси X и X' все время совпадают в том смысле, что всякое событие, происходящее на оси X с точки зрения S, происходит с точки зрения S' на оси X'. Это сейчас же следует из того, что обращение в нуль y, z влечет обращение в нуль и y', z'.

Попробуем измерить длину нашего стержня относительно системы S. Ввиду того что он движется, нужно зафиксировать положение его концов в какой-либо определенный (один и тот же!) момент времени t, а затем найти расстояние между отмеченными точками. Пусть абсциссы этих точек будут x_1, x_2. Тогда согласно второй формуле (63.7) абсциссы концов стержня в системе S' выразятся следующим образом:

$$x'_1 = \frac{-vt + x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x'_2 = \frac{-vt + x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая почленно из второй формулы первую и учитывая, что t имеет в обоих случаях одно и то же значение, получаем:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обозначая длину отрезка с точки зрения системы S через l':

$$l' = x_2 - x_1,$$

и пользуясь (64.2), получаем:

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ т. е. } l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (64.3)$$

Таким образом, стержень, имеющий длину l в той инерциальной системе, где он покоится, имеет длину $l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ в той инерциальной системе, относительно которой он движется со скоростью v в продольном направлении.

Все сказанное относительно стержня применимо, конечно, и к любым твердым телам. Таким образом, когда относительно данной инерциальной системы S твердое тело приводится в поступательное движение с постоянной скоростью v, его размеры в направлении движения сокращаются с точки зрения системы S в отношении $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. В то же время с точки зрения системы S', связанной с самим движущимся телом, в нем не происходит ни малейших изменений. Итак, оказывается, что размеры тела не есть нечто принадлежащее только ему самому; они носят относительный характер, т. е. зависят и от той системы отсчета, к которой тело отнесено.

В дальнейшем мы обнаружим относительный характер еще ряда величин, считавшихся ранее абсолютными. Это обстоятельство нередко давало повод к идеалистическому толкованию: на нем пытались обосновать субъективный характер физических величин, именно, зависимость их от положения наблюдателя на той или иной системе отсчета. В действительности же речь идет о материальных взаимоотношениях двух физических тел: одно, например, наш стержень, другое, практически обычно более массивное и соподчиняющее себе первое,— наша инерциальная система отсчета S. Длина стержня «с точки зрения системы S»—это объективно существующий факт, результат материального взаимодействия этих двух физических тел.

Заметим кстати, что подлинная цель теории относительности не в установлении этой *относительности физических величин,* а (в известном смысле наоборот) в установлении *абсолютного характера физических законов*, одинаковых в любой инерциальной системе.

Сокращение размеров движущегося тела происходит лишь в продольном направлении (т. е. в направлении движения); поперечные же его размеры не меняются. Это видно из формул $y' = y$, $z' = z$, показывающих, что поперечные размеры тел одинаковы с точки зрения обеих инерциальных систем.

2°. *Относительный характер одновременности.* Пусть на оси X в инерциальной системе S происходят два события в точках x_1, x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = t$. Отметим моменты совершения этих событий t'_1, t'_2 в системе S'. Согласно первой формуле (63.7) получаем:

$$t'_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t'_2 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Мы замечаем, что $t'_1 \neq t'_2$, а именно:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{64.4}$$

Таким образом, два события, одновременных относительно S, оказываются разновременными относительно S' и притом с тем большим расхождением во времени, чем далее отстоят друг от друга с точки зрения системы S места, где они произошли (расстояние учитывается лишь в направлении оси X, т. е. в направлении относительного движения систем S и S'; поперечное смещение в сторону осей Y, Z не играет роли). Так, например, если с точки зрения системы S электрические лампочки, расположенные цепью вдоль оси X, вспыхнули одновременно, то с точки зрения системы S' они вспыхивали последовательно, начиная с того края, который расположен по направлению движения S' относительно S.

Этот результат разрушает наше привычное представление об абсолютном характере времени: одновременность двух событий не есть нечто, свойственное лишь самим этим событиям; она зависит еще от той системы отсчета, относительно которой устанавливается. Более того, возможно, что события, происшедшие относительно системы S в одной последовательности, наблюдаются в системе S' в обратной последовательности. Это легко показать, если, вместо того чтобы брать $t_2 = t_1$, взять $t_2 > t_1$. Тогда, считая $x_2 > x_1$, $v > 0$, мы получим, *если $t_2 - t_1$ достаточно мало*, что

$$t'_2 < t'_1.$$

На первый взгляд это кажется явным абсурдом: если в системе S причина, как и полагается, предшествовала следствию, то не значит ли это, что в системе S следствие будет предшествовать причине?

Этот парадокс разъясняется следующим образом. Прежде всего исключительно важно, что относительный характер одновременности имеет место лишь для событий, происходящих в *разных местах пространства*. В самом деле, если наши события в системе S произошли не только одновременно, но и в одной и той же точке ($x_2 = x_1$), то из (64.4) следует, что $t'_2 = t'_1$, т. е. одновременность будет наблюдаться и с точки зрения системы S'.

Но раз события произошли в разных местах пространства, то чтобы одно служило причиной, а другое следствием, нужно, чтобы некоторое возмущение, вызванное первым, пришло к месту совершения второго не позже, чем в момент его совершения. Но у нас все возмущения распространяются со скоростью, не превышающей c.

И вот оказывается следующее: когда два события таковы, что их последовательность относительно разных инерциальных систем может быть различной, возмущение, вызванное первым событием, никогда не может своевременно поспеть к месту совершения второго события (т. е. если и приходит, то уже после его совершения). Поэтому из таких двух событий *одно не может служить причиной другого*. Или, что то же самое: если одно событие способно служить причиной другого, т. е. возмущение, вызванное первым событием и распространяющееся со скоростью света, способно своевременно достичь места совершения второго события, то *последовательность таких двух событий одинакова относительно всех инерциальных систем*.

Справедливость наших утверждений будет показана в следующем параграфе, и этим парадокс устраняется.

Заметим, что, переходя от формул (63.3) к (63.4), мы опирались на то, что знак минус в знаменателе первой формулы приводит к обратному течению времени в системе S', причем *речь шла о событиях, происходящих в одной и той же точке* $Q(x, y, z)$ *в системе* S; но в этом случае события способны служить одно причиной другого, и их обратная последовательность действительно представляет абсурд.

3°. *Отставание движущихся часов.* Пусть в системе S' неподвижно укреплены часы, отсчитывающие время t'. Их пространственные координаты x', y', z' являются, следовательно, постоянными. Будем наблюдать показания этих часов с точки зрения системы S. Отмечаем с точки зрения системы S тот момент t_1, когда часы показывают время t'_1; согласно первой формуле (63.8)

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Совершенно аналогично показание часов t_2 наблюдается с точки зрения S в момент t_2:

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая почленно, получаем:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{т. е.} \quad t'_2 - t'_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,(t_2 - t_1). \qquad (64.5)$$

Итак, с точки зрения системы S прошел промежуток времени $t_2 - t_1$; если же судить по показаниям движущихся часов (точно таких же, какими измеряется время в системе S), то этот промежуток времени равен $t'_2 - t'_1$, т. е. короче в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. *Таким образом, движущиеся часы начинают отставать*, ход их замедляется в отношении $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, хотя с точки зрения той инерциальной системы S', которая движется вместе с часами, в часах не произошло абсолютно никаких изменений.

В этом примере, как и в большинстве других, отклонения от обычного положения вещей зависят от значения радикала $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Когда скорость v мала сравнительно со скоростью света c (как это и бывает в повседневной практике), радикал ничтожно мало отличается от единицы, и эти отклонения незаметны. Напротив, при скоростях, близких к скорости света, когда значение радикала приближается к нулю, создается картина, резко отличная от наших обычных представлений.

4°. *Формула сложения скоростей.* Мы уже говорили о том, что относительные скорости инерциальных систем и вообще физических тел не достигают скорости света. На первый взгляд здесь заключено противоречие: допустим, что система S' движется относительно S со скоростью $0{,}9c$ и система S'' относительно S' движется в том же направлении тоже со скоростью $0{,}9c$. Казалось бы, что тогда S'' относительно S должна двигаться со скоростью $1{,}8c$.

Но дело заключается в том, что обычная формула сложения скоростей неверна с точки зрения теории относительности и должна быть заменена новой. В самом деле, пусть некоторая материальная точка движется относительно системы S', причем составляющие ее скорости по осям X', Y', Z' равны v'_x, v'_y, v'_z:

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x, \quad \frac{dy'}{dt'} = v'_y, \quad \frac{dz'}{dt'} = v'_z. \qquad (64.6)$$

Пусть система S' движется относительно S по-прежнему со скоростью v в направлении общей оси X. Тогда, дифференцируя формулы (63.8), получаем:

$$dt=\frac{dt'+\frac{v}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad dx=\frac{v\,dt'+dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad dy=dy',\quad dz=dz',$$

откуда скорость движения точки уже относительно системы S имеет следующие составляющие по осям X, Y, Z:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{v+\frac{dx'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},$$

$$\frac{dy}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\frac{dy'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}},\qquad \frac{dz}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\frac{dz'}{dt'}}{1+\frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

Пользуясь обозначениями (64.6) и аналогичными обозначениями для системы S, запишем окончательно:

$$v_x=\frac{v+v'_x}{1+\frac{vv'_x}{c^2}},\quad v_y=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{v'_y}{1+\frac{vv'_x}{c^2}},\quad v_z=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{v'_z}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}. \tag{64.7}$$

Итак, результирующая скорость v_x в направлении оси X, полученная наложением двух скоростей — скорости v системы S' относительно S и скорости v'_x точки относительно S', — равна не просто сумме $v+v'_x$, как в классической механике, а сумме с последующим делением на

$$1+\frac{vv'_x}{c^2}.$$

Когда v и v'_x малы сравнительно с c, эта величина практически равна единице, и мы возвращаемся к классической формуле. Зато если хоть одна из слагаемых скоростей близка к скорости света, то влияние знаменателя велико, и результирующая скорость растет непропорционально мало, в частности, ни в коем случае не может превзойти скорости света c. Это особенно заметно, если взять предельный случай $v=c$. Тогда

$$v_x=\frac{c+v'_x}{1+\frac{cv'_x}{c^2}}=c,$$

т. е. когда одна из слагаемых скоростей равна c, то добавление к ней любой другой скорости ее не меняет. Это, впрочем, есть лишь перефразировка нашего исходного положения — постоянства скорости света относительно всех инерциальных систем.

До сих пор мы говорили о сложении одинаково направленных (по оси X) скоростей v и v'_x. Если же наша точка обладает относительно S' еще «поперечной» скоростью, например, v'_y, то относительно S эта скорость оказывается уже иной, именно, приобретает множитель $\dfrac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vv'_x}{c^2}}$ (конечно, весьма близкий к единице при небольших v, v'_x).

Мы начали с рассмотрения пространства событий, введения в нем псевдоевклидовой метрики и сопоставления инерциальных систем ортонормированным координатным системам в этом пространстве. Но получив отсюда формулы Лоренца, дающие связь между различными инерциальными системами, мы выводили следствия непосредственно из них, как бы забыв о псевдоевклидовой геометрии. Между тем и отдельные наши конкретные результаты имеют поучительное истолкование в псевдоевклидовой геометрии пространства событий; но для этого нам будут нужны некоторые свойства кривых в псевдоевклидовом пространстве.

§ 65. Кривые в вещественном евклидовом пространстве

В n-мерном аффинном пространстве естественно определить *кривую* как совокупность точек $M(x^i)$, зависящих от одного параметра t:

$$x^i = x^i(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{65.1}$$

Под x^i мы понимаем координаты в какой-либо аффинной координатной системе. Зависимость $x^i(t)$ предполагается достаточное число раз дифференцируемой. В частности, если эта зависимость линейная, то мы получаем прямую линию, о которой ранее уже говорилось. Мы ограничиваемся вещественным пространством и все рассматриваемые величины считаем вещественными.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки $M(t)$, очевидно, тоже будет функцией от t:

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{x}(t) = x^i(t)\,\mathbf{e}_i. \tag{65.2}$$

Продифференцируем радиус-вектор по t, определяя производную обычным образом:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{x}(t)}{\Delta t}. \tag{65.3}$$

При этом переход к пределу для вектора, например, $\mathbf{x}_0 = \lim \mathbf{x}$, мы определяем как переход к пределу для каждой его координаты, $x_0^i = \lim x^i$. Очевидно, смысл этого определения одинаков в любой аффинной координатной системе: если $x_0^i = \lim x^i$ в одной системе, то $x_0^{i'} = \lim x^{i'}$ в любой другой системе в силу одинакового линейного закона преобразования и для x^i, и для x_0^i при переходе к $x^{i'}$ и $x_0^{i'}$. В частности, непрерывность функций $x^i(t)$ равносильна непрерывности векторной функции $\mathbf{x}(t)$, т. е. соотношению $\lim \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)$ при $t \to t_0$ (в нашем случае при каждом t_0, $t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2$).

Таким образом, координаты вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ по определению получаются предельным переходом от координат вектора $\frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta t}$, а эти последние равны $\frac{\Delta x^i}{\Delta t}$ и дают в пределе $\frac{dx^i}{dt}$. Итак, $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ существует и имеет координаты $\frac{dx^i}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\,\mathbf{e}_i. \tag{65.4}$$

Предполагая, что вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ отличен от нуля, мы будем называть его *касательным* вектором к нашей кривой в данной точке $M(t)$. Такой вектор определяется с точностью до численного множителя, так как вдоль прежней кривой можно выбрать новый параметр $\tilde{t}$, и тогда

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{t}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\,\frac{dt}{d\tilde{t}}.$$

Прямую линию, проходящую через точку $M(t)$ и направленную по вектору $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, мы будем называть *касательной* к нашей кривой в точке $M(t)$.

Дифференциал радиуса-вектора определяется как произведение его производной на приращение параметра:

$$d\mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\,\Delta t = \frac{dx^i}{dt}\,\mathbf{e}_i\,dt = dx^i\mathbf{e}_i. \tag{65.5}$$

Так как t — аргумент, то можно писать dt вместо Δt. Дифференциал $d\mathbf{x}$ направлен по касательной и показывает смещение по ней из точки $M(t)$, пропорциональное приращению Δt параметра t. Сравним дифференциал $d\mathbf{x}$ с приращением $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t)$. Очевидно, $\Delta\mathbf{x}$ дает вектор смещения из точки $M(t)$ в другую точку $M(t+\Delta t)$ на кривой. Так как

$$\Delta\mathbf{x} = \Delta x^i(t)\,\mathbf{e}_i, \tag{65.6}$$

то, сравнивая с (65.5), мы видим, что соответствующие координаты векторов $\Delta\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}$ (т. е. $\Delta x^i(t)$ и dx^i) отличаются друг от друга при бесконечно малом Δt на бесконечно малые высшего порядка. Поэтому, окончательно, *смысл дифференциала $d\mathbf{x}$ заключается в том, что он выражает вектор смещения по касательной из точки касания $M(t)$, растущий пропорционально Δt и притом так, что уклонение от истинного смещения по кривой в точку $M(t+\Delta t)$ будет бесконечно малым высшего порядка относительно Δt.* Одновременно здесь содержится разъяснение геометрического смысла касательной: из всех прямых, проходящих через $M(t)$, только по касательной можно смещаться так, что уклонение от кривой будет бесконечно малым высшего порядка сравнительно с самим смещением.

Все сказанное до сих пор относится к кривым в аффинном пространстве и, разумеется, остается верным и в евклидовом пространстве. Но в этом случае добавляются и новые свойства. Прежде всего вдоль кривой вещественного евклидова пространства можно вычислять длину дуги. *Длину дуги* кривой между точками $M_1(t_1)$ и $M_2(t_2)$ проще всего определить как интеграл

$$\overset{\frown}{M_1M_2}=\int\limits_{M_1}^{M_2}|d\mathbf{x}|=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt \tag{65.7}$$

по аналогии с длиной дуги в обычном евклидовом пространстве черточки означают, что вектор берется по длине. Нетрудно заметить, что выписанный интеграл не зависит от выбора параметра t вдоль кривой. Действительно, при переходе к новому параметру τ, так что $\tau=\tau(t)$ и $t=t(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые возрастающие функции, получаем:

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right|d\tau=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|\frac{dt}{d\tau}d\tau=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt.$$

В случае псевдоевклидова пространства касательный вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ может иметь или вещественную, или мнимую, или нулевую длину. Это будет зависеть от того, будет ли скалярный квадрат вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, или, что то же, вектора $d\mathbf{x}$, положительным, отрицательным или нулем:

$$d\mathbf{x}^2>0,\quad d\mathbf{x}^2<0,\quad d\mathbf{x}^2=0. \tag{65.8}$$

Соответственно этому и наша кривая будет в любом своем куске иметь вещественную, мнимую или нулевую длину (изотропная кривая). Конечно, можно провести кривую и так, что на одном ее участке будет одно положение, а на другом другое, но таких кривых мы рассматривать не будем.

Из формулы (65.7) видно, что если отсчитывать дугу $s = \smile{M_0M}$ от некоторой начальной точки $M_0(t_0)$ до переменной точки $M(t)$ на кривой $s = \smile{M_0M}$, то ее дифференциал будет выражаться формулой

$$ds = |d\mathbf{x}| = \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| dt, \tag{65.9}$$

т. е. совпадает с подынтегральным выражением. Или, что то же,

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2. \tag{65.10}$$

Если кривая имеет вещественную длину, то s можно принять за параметр t вдоль кривой, и тогда формула (65.9) дает

$$ds = \left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right| ds, \text{ откуда } \left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right| = 1.$$

Таким образом, производная радиуса-вектора по дуге s дает *единичный касательный вектор*

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \qquad \vec{\boldsymbol{\tau}}^2 = 1. \tag{65.11}$$

Если кривая имеет мнимую длину, то s является чисто мнимой величиной

$$s = \sigma i \tag{65.12}$$

и за параметр t вдоль кривой мы примем *вещественный* коэффициент σ при мнимой единице. Тогда $ds = i\,d\sigma$, и формула (65.9) дает

$$i\,d\sigma = \left|\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}\right| d\sigma, \quad \text{откуда} \quad \left|\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}\right| = i. \tag{65.13}$$

Таким образом, производная радиуса-вектора по σ дает *мнимоединичный касательный вектор*

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}, \qquad \vec{\boldsymbol{\tau}}^2 = -1. \tag{65.14}$$

Разумеется, сам вектор $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ — вещественный, и вообще в псевдоевклидовом пространстве мы по-прежнему не рассматриваем каких-либо мнимостей кроме (в некоторых случаях) длин.

Пусть теперь кривая — изотропная, т. е. на любом участке имеет нулевую длину, что равносильно изотропности ее касательного вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ в любой ее точке

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| = 0, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 = 0. \tag{65.15}$$

В этом случае выбор дуги в качестве параметра, конечно, невозможен.

Нас будут особо интересовать псевдоевклидовы пространства индекса 1, так как пространство событий принадлежит к их числу. Для каждой точки такого пространства можно построить, как мы знаем, изотропный гиперконус с вершиной в этой точке, причем векторы вещественной длины, отложенные из данной точки, пойдут вне гиперконуса, векторы мнимой длины — внутри его, а изотропные векторы — по его образующим (рис. 11). Соответственно этому кривая вещественной длины в каждой своей точке направлена вовне изотропного конуса в этой точке, кривая мнимой длины — внутрь его, а изотропная кривая касается его образующей (но, вообще говоря, не совпадает с ней).

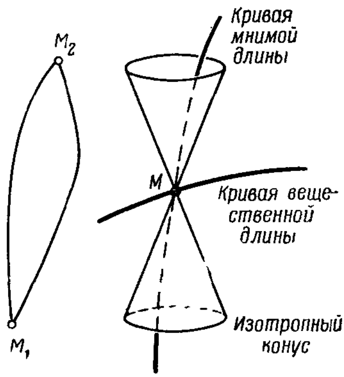

Рис. 11.

§ 66. Кинематика теории относительности в геометрическом истолковании

Рассмотрим процесс движения какой-либо материальной точки. Для этого нужно указать положения, которые занимает точка в отдельные моменты времени, т. е. совокупность событий, зависящую от одного параметра (например, от времени t измеряемого относительно какой-либо системы S). Но такая совокупность событий образует в четырехмерном пространстве событий некоторую линию. В самом деле, зададим процесс движения точки относительно какой-либо инерциальной системы S. Для этого нужно переменные координаты этой точки x, y, z выразить как функции времени:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{66.1}$$

Но ct, x, y, z можно рассматривать как ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в пространстве событий, так что наши уравнения примут вид

$$x^1 = f_1\left(\frac{x^0}{c}\right), \quad x^2 = f_2\left(\frac{x^0}{c}\right), \quad x^3 = f_3\left(\frac{x^0}{c}\right). \tag{66.2}$$

Мы получаем, следовательно, совокупность событий $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$, зависящих от одного параметра x^0, т. е. линию в пространстве событий. *Итак, процесс движения материальной точки изображается линией в пространстве событий.* Если, в частности, движение точки *равномерное и прямолинейное*, то функции (66.1) линейные, а следовательно, и x^1, x^2, x^3 линейно зависят от x^0, и *линия будет прямой*.

Кривая, отображающая в пространстве событий процесс движения материальной точки, называется ее *четырехмерной траекторией*. Впрочем, вернее было бы говорить об изображении не «процесса движения», а «истории существования» данной материальной точки. Дело в том, что движение мы рассматриваем всегда *относительно* той или иной системы отсчета S, между тем четырехмерная траектория является построением *абсолютным*, не зависящим от выбора системы отсчета S и в таком выборе вообще не нуждающимся. Действительно, грубо говоря, четырехмерная траектория есть совокупность событий, из которых состоит история существования данной материальной точки, следовательно, определяется вне связи с выбором S и представляет собой *однозначным образом определенную кривую в пространстве событий*. В связи с этим и касательный к ней мнимоединичный вектор — тоже вполне определенный вектор, инвариантный относительно выбора системы отсчета. Однако не всякая кривая в пространстве событий может служить четырехмерной траекторией материальной точки: для этого необходимо и достаточно, чтобы кривая была *мнимой длины*.

В самом деле, материальная точка может двигаться лишь со скоростью, меньшей c. Запишем это с точки зрения инерциальной системы S, в которой закон движения точки имеет вид (66.1).

Так как проекции скорости на оси X, Y, Z суть $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, то получаем:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}<c, \tag{66.3}$$

откуда

$$-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2<0, \tag{66.4}$$

или, переходя в соответствующие ортонормированные координаты в пространстве событий:

$$-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2<0. \tag{66.5}$$

Но согласно (65.5) для нашей четырехмерной траектории

$$d\mathbf{x}=dx^i\mathbf{e}_i=dx^0\mathbf{e}_0+dx^1\mathbf{e}_1+dx^2\mathbf{e}_2+dx^3\mathbf{e}_3,$$

откуда

$$d\mathbf{x}^2=-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2<0, \tag{66.6}$$

а это согласно (65.8) означает, что *четырехмерная траектория есть кривая мнимой длины в пространстве событий*. Мы будем относить ее к вещественному параметру $\sigma = \frac{s}{i}$ (§ 65), условившись отсчитывать σ в сторону возрастания x^0. Пишем ее уравнения в виде

$$x^0 = x^0(\sigma), \quad x^1 = x^1(\sigma), \quad x^2 = x^2(\sigma), \quad x^3 = x^3(\sigma). \tag{66.7}$$

При этом

$$ds = |d\mathbf{x}| = \sqrt{-dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}} = \\ = i\sqrt{dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}},$$

так что

$$d\sigma = \sqrt{dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}}. \tag{66.8}$$

Касательный вектор

$$\vec{\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}$$

будет, как мы знаем, мнимоединичным. Его координаты имеют при этом вид

$$\tau^i = \frac{dx^i}{d\sigma} = \frac{dx^i}{\sqrt{dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}}}. \tag{66.9}$$

Ясно, что и, обратно, всякая кривая мнимой длины в пространстве событий может служить четырехмерной траекторией некоторой материальной точки, так как обеспечивает скорость движения, меньшую c.

Будем представлять себе, как это делается в геометрической оптике, что свет в пустоте распространяется прямолинейными лучами наподобие частиц, движущихся прямолинейно и равномерно со скоростью c. Тогда можно говорить о четырехмерных траекториях распространения света; эти траектории будут, очевидно, *прямыми линиями* и притом *изотропными*, так как в формулах (66.3)—(66.6) придется везде изменить знак $<$ на $=$.

Пусть событие M состоит в том, что световой сигнал исходит в данный момент из данной точки; тогда картина его распространения по всевозможным направлениям изображается *в пространстве событий всевозможными образующими изотропного гиперконуса, исходящими из точки M (точнее, «верхними» полуобразующими,* так как «нижние» полуобразующие отвечают времени, предшествующему подаче сигнала).

Четырехмерные же траектории материальных точек будут представлять собой кривые, в каждой своей точке направленные *внутрь* соответствующего изотропного гиперконуса, что означает скорость движения, меньшую c.

Параметр σ (деленный на c) имеет физический смысл так называемого собственного времени материальной частицы (под которой можно понимать в известном контексте и достаточно крупное тело, например космический корабль или даже планету).

Действительно, на бесконечно малом отрезке четырехмерной траектории вычислим $dx^0 = c\,dt$ в системе отсчета S, в этот момент движущейся «вместе с частицей» или, что то же самое, в системе отсчета S, относительно которой частица в этот момент покоится:

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0.$$

Получаем согласно (66.8):

$$d\sigma = dx^0 = c\,dt.$$

Естественно принять, что внутренние процессы, происходящие в неравномерно движущейся «частице», согласуются с течением времени $t = \frac{1}{c}\sigma$; в самом деле, на каждом бесконечно малом участке четырехмерной траектории $\frac{d\sigma}{c}$ имеет смысл протекшего времени dt в системе S, движущейся в этот момент «вместе с частицей».

Если две различные частицы имеют четырехмерные траектории с общей начальной точкой M_1 и общей конечной точкой M_2, то собственное время $\frac{1}{c}\sigma$, протекшее от «начальной встречи» частиц до их «конечной встречи», имеет, вообще говоря, свое значение для каждой из частиц, так как их четырехмерные траектории, соединяющие точки M_1, M_2, могут быть весьма различными (рис. 11). При этом, как нетрудно показать, наибольшего значения протекшее время достигает в случае прямолинейной траектории (см. (103.15)).

Если одна из «частиц» — Земля, а другая — космический корабль, улетающий с Земли с очень большой скоростью, а затем на нее возвращающийся, то из сказанного следует, что космонавты по возвращении на Землю постареют меньше, чем люди, оставшиеся на Земле. Дело в том, что четырехмерную траекторию Земли приближенно можно считать прямой линией взамен «винтовой линии», сильно вытянутой в направлении оси x^0, как это на самом деле имеет место (в системе отсчета S, связанной с Солнцем).

Мы хотим теперь кинематические результаты, полученные в § 64, геометрически истолковать в пространстве событий. По-прежнему рассматриваем инерциальные системы S и S', связанные формулами Лоренца (63.7), (63.8). Но для простоты и наглядности мы будем рассматривать *лишь события, происходящие на оси X в системе S и, значит, на оси X' в системе S'.*

Другими словами, мы считаем $y = z = 0$, а значит (согласно формулам Лоренца), и $y' = z' = 0$. Так как ct, x, y, z в пространстве событий представляют собой ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3, то это означает, что все рассматриваемые события располагаются в двумерной плоскости $x^2 = x^3 = 0$ (или, что то же, $x^{2'} = x^{3'} = 0$). Это будет координатная плоскость, построенная на ортах $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ или равным образом на ортах $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$, и притом псевдоевклидова, так как $\mathbf{e}_0^2 = -1$, $\mathbf{e}_1^2 = 1$. Эту псевдоевклидову плоскость мы и будем рассматривать, выделив ее из пространства событий (рис. 12).

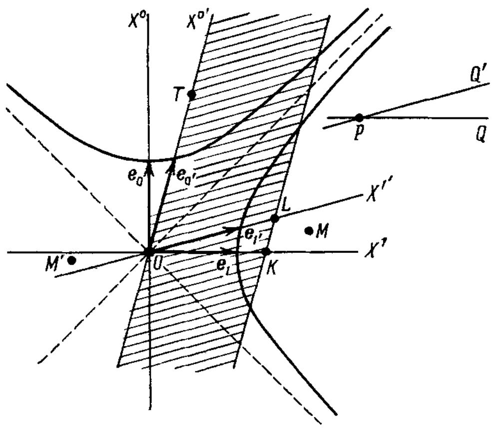

Рис. 12.

Инерциальные системы S и S' представлены в этой плоскости ортонормированными реперами ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$) и ($\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$) и соответственно координатными системами (x^0, x^1) и ($x^{0'}$, $x^{1'}$). В силу $x^2 = x^3 = 0$ мы сохраняем лишь две из формул Лоренца

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{66.10}$$

и обратные формулы

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{66.11}$$

Рассмотрим прежде всего вопрос об одновременности событий. Относительно системы S одновременными будут события с одинаковыми значениями t:

$$t = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad x^0 = \text{const}. \tag{66.12}$$

Но уравнение $x^0 = \text{const}$ определяет на нашей плоскости прямую, параллельную оси X^1, так что *одновременные относительно системы S события располагаются на одной прямой, например PQ, параллельной оси X^1*. В частности, события, происшедшие в начальный момент $t = 0$, т. е. $x^0 = 0$, изображаются точками самой оси X^1. Как известно (конец § 62), псевдоевклидовы расстояния между событиями, одновременными относительно какой-либо системы S, выражают просто расстояния между точками, где эти события произошли (тоже относительно S). На рис. 12 псевдоевклидово расстояние между событиями P, Q можно измерить, взяв отношение отрезка PQ к единице длины, отложенной в том же направлении (орт $\mathbf{e}_1$). Это отношение выражает расстояние между точками, где произошли события P, Q, с точки зрения системы S.

Совершенно аналогично события, одновременные относительно S', характеризуются условием

$$t' = \text{const}, \text{ т. е. } x^{0'} = \text{const} \tag{66.13}$$

и изображаются точками какой-либо прямой, например, PQ', параллельной оси $X^{1'}$. В частности, события, происшедшие в начальный момент $t' = 0$, изображаются точками самой оси $X^{1'}$. Ясно, что события, одновременные относительно системы S, будут разновременными относительно системы S'. Далее, изображенное на рисунке событие M расположено над осью X^1 и под осью $X^{1'}$, т. е. произошло с точки зрения системы S после начального момента $t = 0$, а с точки зрения системы S' — до начального момента $t = 0$; событие же M', наоборот, произошло с точки зрения системы S до начального момента $t = 0$, а с точки зрения системы S' — после начального момента $t' = 0$. Выходит, что относительно системы S событие M' произошло раньше, а M — позже; относительно же системы S' — наоборот.

Процесс движения какой-нибудь точки, закрепленной в системе S' (на оси X'), характеризуется тем, что $x' = \text{const}$, а t' меняется. Другими словами, мы получаем совокупность событий, характеризуемую уравнением

$$x^{1'} = \text{const} \qquad (x^{0'} \text{ — переменное})$$

и изображаемую, следовательно, прямой, параллельной $OX^{0'}$.

Прямые линии, параллельные $OX^{0'}$, представляют собой четырехмерные траектории точек, закрепленных на оси X' в системе S'.

Аналогично прямые линии, параллельные OX^0, дают четырехмерные траектории точек, закрепленных на оси X в системе S:

$$x = \text{const}, \quad \text{т. е. } x^1 = \text{const}.$$

Если мы хотим изобразить процесс движения целого стержня, покоящегося, например, в системе S' на оси X', то нужно взять совокупность четырехмерных траекторий всех его точек (стержень мы представляем себе в виде отрезка). Пусть в начальный момент $t' = 0$ стержень изображается отрезком OL оси $X^{1'}$ (ось $OX^{1'}$ в пространстве событий, как мы знаем, изображает ось X' в системе S', точнее, происходящие на этой оси события в начальный момент $t' = 0$).

Тогда в другие моменты времени t' стержень будет изображаться отрезком OL, параллельно сдвинутым в направлении оси $X^{0'}$ (см. штриховку на рисунке). Не надо забывать, что стержень покоится в системе S', и его различные изображения показывают лишь течение времени, а не перемену места: у каждой точки стержня $x^{1'} = \text{const}$, а меняется лишь $x^{0'}$.

В результате на рис. 12 история существования стержня изобразится целой заштрихованной полосой. Ее можно получить также, строя четырехмерные траектории каждой точки стержня, т. е. проводя параллели оси $X^{0'}$ через все точки отрезка OL.

Рассмотрим эту полосу с точки зрения координатной системы X^0OX^1. Здесь она уже не вытянута вдоль оси X^0, а является наклонной. Это говорит о том, что происходит не только течение времени, но и перемена места. И действительно, относительно системы S стержень движется вместе с системой S'. Желая рассмотреть этот движущийся стержень в какой-нибудь момент времени t с точки зрения системы S, например, в начальный момент, мы должны положить:

$$t = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad x^0 = 0,$$

и рассмотреть соответствующие точки полосы. В результате мы получаем отрезок OK на оси X^1, который изображает наш стержень в начальный момент $t = 0$ с точки зрения системы S. В другие моменты времени t стержень будет изображаться параллельными OK срезами полосы.

Обращает на себя внимание, что когда относительно системы S мы фиксируем движущийся стержень в определенный момент времени t (например, в виде отрезка OK при $t = 0$), то относительно системы S' мы фиксируем разные точки этого стержня *в разные моменты времени* (значения $x^{0'}$ будут для различных точек различными).

Соотношение (64.3)

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

можно было бы элементарным путем вывести из нашего рисунка. При этом, очевидно, l будет равно отношению отрезка OL к единице длины на оси $OX^{1'}$ (орт $\mathbf{e}_{1'}$), а l' — отношению OK к единице длины на OX^1 (орт $\mathbf{e}_1$). На глаз видно, что $l' < l$.

Возвращаемся в полное пространство событий и займемся вопросом, в каких случаях события M, $\tilde{M}$ могут влиять одно на другое, в частности, одно может служить причиной другого. Мы уже упоминали, что это возможно тогда, когда сигнал, распространяющийся со скоростью света, успевает дойти от места одного до места другого события за время, протекшее между этими событиями. Будем рассматривать наши события в *какой-либо инерциальной системе* S. Записываем наше условие:

$$\frac{1}{c}\sqrt{(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2} \leqslant |\tilde{t}-t|, \tag{66.14}$$

т. е. время, нужное свету, чтобы пройти соответствующее расстояние, не превышает времени, протекшего между событиями. Отсюда следует:

$$-c^2(\tilde{t}-t)^2+(\tilde{x}-x)^2+(\tilde{y}-y)^2+(\tilde{z}-z)^2 \leqslant 0,$$

т. е.

$$-(\tilde{x}^0-x^0)^2+(\tilde{x}^1-x^1)^2+(\tilde{x}^2-x^2)^2+(\tilde{x}^3-x^3)^2 \leqslant 0 \tag{66.15}$$

(так как ct, x, y, z — не что иное, как ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3). Пользуясь (62.4), получаем, наконец,

$$\overrightarrow{M\tilde{M}}^2 \leqslant 0. \tag{66.16}$$

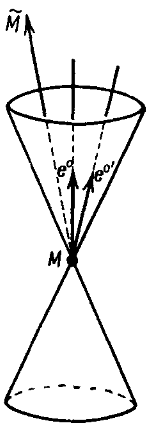

Рис. 13.

Таким образом, для того чтобы из двух событий M, $\tilde{M}$ одно могло влиять на другое, необходимо и достаточно, чтобы длина вектора $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ $\left(\text{равная } \sqrt{\overrightarrow{M\tilde{M}}^2}\right)$ была мнимой или нулевой. Это условие носит, как видим, инвариантный характер (рис. 13).

Мы не уточняли до сих пор, какое именно из двух событий влияет на другое. Допустим, что M влияет на $\tilde{M}$ и, следовательно, предшествует ему во времени, так что $x^0 < \tilde{x}^0$.

Рассмотрим те же события M, $\tilde{M}$ относительно другой инерциальной системы S'. В § 63 мы выяснили, что при переходе от S к S' в первой формуле (63.3), а следовательно, и (63.2) приходится сохранить в знаменателе лишь знак $+$. Но тогда согласно (63.2)

$$x^{0\prime} = \frac{x^0-\beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{66.17}$$

Переписывая эту же формулу для события $\tilde{M}$ и вычитая из нее (66.17), получим:

$$\tilde{x}^{0\prime} - x^{0\prime} = \frac{(\tilde{x}^0-x^0)-\beta(\tilde{x}^1-x^1)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{66.18}$$

Так как $|\beta|<1$ и, как вытекает из (66.16), $|\tilde{x}^1-x^1| \leqslant |\tilde{x}^0-x^0|$, то вычитаемое в числителе (66.18) по модулю меньше уменьшаемого, а значит, числитель имеет тот же знак, как и уменьшаемое $\tilde{x}^0 - x^0$, т. е. положителен. Таким образом, и левая часть (66.18) положительна и $\tilde{x}^{0\prime} > x^{0\prime}$.

Итак, если вектор $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ имеет мнимую или нулевую длину и если событие $\tilde{M}$ следует за M с точки зрения инерциальной системы S ($\tilde{x}^0 > x^0$), то $\tilde{M}$ следует за M и с точки зрения любой другой инерциальной системы S' ($\tilde{x}^{0\prime} > x^{0\prime}$).

Следовательно, как раз в тех случаях, когда событие M может влиять на $\tilde{M}$, временна́я последовательность этих событий является абсолютной, и $\tilde{M}$ следует за M с точки зрения любой инерциальной системы S. Это показывает, что парадокс с обращением последовательности причины и следствия в действительности места не имеет. Когда же M, $\tilde{M}$ не могут влиять друг на друга, т. е. когда вектор $\overrightarrow{M\tilde{M}}$ вещественной длины, тогда, как нетрудно показать, всегда возможно обращение последовательности событий M, $\tilde{M}$ за счет перехода к другой инерциальной системе. Но это не приводит к парадоксам ввиду отсутствия какого-либо влияния одного события на другое.

§ 67. Динамика точки

Мы будем рассматривать движение материальной точки в какой-нибудь одной инерциальной системе S, предполагая в соответствии с основной установкой теории относительности, что все сказанное справедливо и в любой другой инерциальной системе.

Еще до появления теории относительности был установлен экспериментальный факт зависимости массы тел от их скорости. А именно, если масса тела в состоянии покоя равна m_0, то при движении со скоростью u она будет равна:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{67.1}$$

При $u \to c$ масса m стремится к бесконечности, что с новой точки зрения подтверждает невозможность разогнать до скорости света тело, обладающее массой покоя.

Мы будем рассматривать материальную точку с массой покоя m_0 и переменной массой m. Вектор скорости обозначим $\mathbf{u}$, вектор силы, действующей на точку, обозначим $\mathbf{F}$.

Второй закон Ньютона записывается теперь следующим образом:

$$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{u}), \tag{67.2}$$

т. е. сила $\mathbf{F}$ равна производной от импульса $m\mathbf{u}$ по времени t. Это выражение не сводится к произведению массы m на ускорение $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$, так как масса m переменная и при дифференцировании дает дополнительный член.

В теории относительности и во всей современной физике играет исключительно важную роль *закон взаимосвязи массы и энергии*. Он состоит в том, что *наличие у данного тела энергии E означает наличие у него массы $\frac{E}{c^2}$, и наоборот, наличие массы m означает наличие энергии mc^2*:

$$E=mc^2. \tag{67.3}$$

Этот закон подтверждается физическим опытом, особенно ядерными реакциями, при которых излучение энергии связано с соответствующим уменьшением массы ядра или его остатков.

Естественно, что формально «вывести» этот закон в полной общности нельзя. Однако полезно проделать следующую выкладку, которая в значительной мере способна убедить в справедливости этого закона.

Пусть наша материальная точка движется для простоты по прямой линии, например, по оси X, под действием силы $\mathbf{F}$, тоже направленной по оси X. Подсчитаем работу, произведенную силой на каком-нибудь участке пути от точки P_1 до P_2:

$$A=\int_{P_1}^{P_2} F\,dx. \tag{67.4}$$

Формула (67.2) для движения вдоль оси X принимает вид

$$F=\frac{d}{dt}(mu), \qquad \text{где} \qquad u=\frac{dx}{dt}. \tag{67.5}$$

Преобразуем интеграл (67.4), пользуясь (67.5):

$$A=\int_{P_1}^{P_2}\frac{d}{dt}(mu)\,dx=\int_{P_1}^{P_2} d\,(mu)\frac{dx}{dt}=\int_{P_1}^{P_2} d\,(mu)\,u.$$

Мы нарочно вместо пределов в определенном интеграле указываем лишь начало P_1 и конец P_2 данного пути. Это избавляет нас от необходимости каждый раз отдавать отчет в том, что служит аргументом под знаком интеграла.

Последний из полученных интегралов берем по частям и получаем:

$$A = mu^2 \Big|_{P_1}^{P_2} - \int_{P_1}^{P_2} mu\,du.$$

Заменяя под знаком интеграла m согласно (67.1), продолжаем выкладку:

$$A = mu^2 \Big|_{P_1}^{P_2} - \int_{P_1}^{P_2} \frac{m_0 u\,du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = mu^2 \Big|_{P_1}^{P_2} + m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \Big|_{P_1}^{P_2}.$$

Заменяя, наконец, m_0 через $m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, получаем окончательно

$$A = mc^2 \Big|_{P_1}^{P_2} = (m_2 - m_1)\,c^2,$$

где m_1, m_2 — значения массы в начале и конце пути. Так как работа A, совершенная силой F над нашей материальной точкой, пошла на увеличение ее энергии (именно, *кинетической* энергии), то

$$A = E_2 - E_1,$$

где E_1, E_2 — значения энергии E нашей материальной точки в начале и конце пути. Сравнивая две последние формулы, получаем:

$$E_2 - E_1 = (m_2 - m_1)\,c^2,$$

т. е. приращение энергии нашей материальной точки равно приращению ее массы, умноженному на c^2.

Такая взаимосвязь между энергией и массой может показаться случайной, относящейся лишь к кинетической энергии. Однако на основе этого частного случая можно привести некоторые соображения в пользу универсального характера закона. В самом деле, энергия, приобретенная нашей точкой, должна быть в силу закона сохранения энергии откуда-то заимствована. Но и масса, приобретенная нашей точкой, тоже должна быть откуда-то заимствована в силу закона сохранения массы. Естественно предположить, что и энергия и масса были заимствованы у одного и того же тела K, именно того тела, которое действовало на нашу точку с силой F, чем и было вызвано приращение и массы и энергии точки («тело K» здесь нужно понимать в широком смысле; оно может включать в себя и силовое поле, под действием которого находится наша точка). Но в таком случае получается, что потеря телом K некоторого количества энергии, независимо от вида этой энергии, сопровождается потерей и соответствующего количества массы.

Разумеется, это лишь наводящие соображения, говорящие в пользу закона $E=mc^2$. Подлинным его доказательством является прямая и косвенная проверка на опыте; последняя состоит в подтверждении опытом теории относительности, одним из краеугольных камней которой является этот закон.

Запишем формулу кинетической энергии точки с массой покоя m_0 и скоростью движения u. В состоянии покоя точка обладает массой m_0 и, следовательно, энергией m_0c^2; двигаясь со скоростью u, она обладает массой $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ и, следовательно, энергией $\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Приращение энергии и составляет *кинетическую* энергию точки:

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right). \tag{67.6}$$

Эта формула как будто совсем не похожа на обычную, но когда u мало сравнительно с c, то, пренебрегая величинами порядка $\left(\frac{u}{c}\right)^4$ и выше, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\approx 1+\frac{u^2}{2c^2},$$

откуда

$$T\approx\frac{m_0u^2}{2},$$

и мы возвращаемся к обычной формуле. Разумеется, все подсчеты производятся в какой-либо инерциальной системе S.

Кроме энергии mc^2 большое значение имеет импульс движущейся точки $m\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — вектор скорости. Запишем проекции импульса на координатные оси X, Y, Z в системе S:

$$mu_x,\quad mu_y,\quad mu_z;$$

здесь

$$u_x=\frac{dx}{dt},\quad u_y=\frac{dy}{dt},\quad u_z=\frac{dz}{dt}. \tag{67.7}$$

Выразим еще скорость по абсолютной величине:

$$u=|\mathbf{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}. \tag{67.8}$$

Теперь переходим к истолкованию всех этих величин в четырехмерном пространстве событий. Процесс движения материальной точки задается четырехмерной траекторией мнимой длины, которую согласно (66.7) мы будем относить к параметру σ в какой-нибудь ортонормированной координатной системе x^i:

$$x^i = x^i(\sigma). \tag{67.9}$$

Координаты мнимоединичного касательного вектора $\vec{\tau}$ равны согласно (66.9):

$$\tau^i = \frac{dx^i}{d\sigma}, \quad \text{где} \quad d\sigma = \sqrt{dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}}. \tag{67.10}$$

Пусть наша ортонормированная координатная система в пространстве событий изображает некоторую инерциальную систему S, так что

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Тогда относительно инерциальной системы S отдельные координаты касательного вектора $\vec{\tau}$ имеют следующий смысл.

Так как

$$d\sigma = \sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \\ = c\,dt\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} - \frac{u_z^2}{c^2}} = c\,dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

то

$$\left.\begin{aligned} \tau^0 &= \frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^1 &= \frac{dx^1}{d\sigma} = \frac{u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ \tau^2 &= \frac{dx^2}{d\sigma} = \frac{u_y}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^3 &= \frac{dx^3}{d\sigma} = \frac{u_z}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{67.11}$$

Мы воспользовались здесь формулами (67.7), (67.8).

Мнимоединичный касательный к четырехмерной траектории вектор $\vec{\tau}$ никак не отражает индивидуальности рассматриваемой материальной точки. Эта индивидуальность в данной связи характеризуется массой покоя m_0, или, что то же самое, энергией покоя m_0c^2:

$$E_0 = m_0c^2. \tag{67.12}$$

Мы построим в каждой точке четырехмерной траектории касательный к ней вектор $E_0\vec{\tau}$, умножив мнимоединичный касательный *вектор $\vec{\tau}$ на энергию покоя. Этот вектор мы будем называть (четырехмерным) вектором энергии-импульса нашей материальной точки* (рис. 14). Смысл этого названия сейчас выяснится.

Вектор энергии-импульса имеет постоянную длину $E_0 i$, так как вектор $\vec{\tau}$ имеет длину i. Таким образом, вектор энергии импульса, вслед за четырехмерной траекторией, которой он касается, является инвариантным геометрическим построением в пространстве событий, *совершенно не зависящим от выбора инерциальной системы* S (энергия покоя E_0 зависит лишь от выбора самой материальной точки).

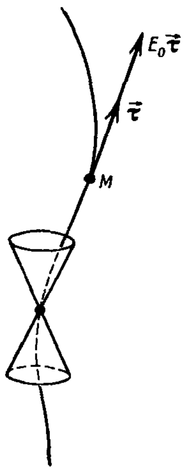

Рис. 14.

Но, конечно, ничто не мешает нам рассматривать вектор энергии-импульса и в инерциальной системе S, точнее, в соответствующей ортонормированной координатной системе x^i.

Координаты вектора энергии-импульса получатся умножением координат $\vec{\tau}$ (67.11) на $E_0 = m_0 c^2$:

$$E_0\tau^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad E_0\tau^1 = \frac{m_0 u_x c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \text{ и т. д.}$$

Пользуясь (67.1), получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} E_0\tau^0 &= mc^2, & E_0\tau^1 &= mu_x c, \\ E_0\tau^2 &= mu_y c, & E_0\tau^3 &= mu_z c. \end{aligned}\right\} \qquad (67.13)$$

Таким образом, нулевая координата вектора энергии-импульса выражает энергию материальной точки, а три другие — умноженные на c — составляющие ее импульса по осям X, Y, Z. Название вектора энергии-импульса этим оправдано: его координаты, вычисленные в *ортонормированной координатной системе* x^i, определяют энергию и три составляющие импульса материальной точки *относительно соответствующей инерциальной системы* S.

Подобно тому, как пространственная и временнáя протяженность мира изображается в четырехмерном пространстве событий единой псевдоевклидовой метрикой, так энергия и импульс материальной точки изображаются единым четырехмерным вектором. «Распадение» его на энергию и три составляющие импульса происходит лишь по отношению к той или иной инерциальной системе S.

Существование инвариантного вектора энергии-импульса с координатами (67.13) представляет интерес не только с точки зрения четырехмерного геометрического истолкования механики. Напротив, важнейшее значение этого факта в другом: до сих пор мы предполагали, что динамика точки строится одинаково в каждой инерциальной системе S, но не знали, как связаны между собой соответствующие величины для *разных* систем S, S'; *теперь же, зная энергию и импульс материальной точки в одной инерциальной системе* S, *мы можем вычислять эти величины и в любой другой инерциальной системе* S'.

В самом деле, *поскольку энергия и три составляющие импульса* (*умноженные на* c) *образуют в пространстве событий координаты инвариантного вектора* $E_0\vec{\tau}$, *то они и преобразуются соответствующим образом.* А именно, переход от одного ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ (отвечающего S) к другому, $\mathfrak{R}'$, (отвечающему S') выражается формулами

$$\mathbf{e}_{i'} = A^{i}_{i'}\mathbf{e}_{i}, \quad \overrightarrow{OO'} = -A^{i'}\mathbf{e}_{i'} \tag{67.14}$$

и влечет за собой, как мы знаем, преобразование координат точки (т. е. события)

$$x^{i'} = A^{i'}_{i}x^{i} + A^{i'} \tag{67.15}$$

и преобразование координат вектора

$$x^{i'} = A^{i'}_{i}x^{i}. \tag{67.16}$$

При этом матрица $A^{i'}_{i}$ (как и обратная ей матрица $A^{i}_{i'}$) должна быть в нашем случае псевдоортогональной 4-го порядка, индекса 1 с добавочным условием $A^{0'}_{0} > 0$ (см. (62.11)). *Таким образом, чтобы получить закон преобразования координат* x^0, x^1, x^2, x^3 *инвариантного вектора, достаточно отбросить свободные члены в формулах* (67.15), *выражающих преобразование координат события* $x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z$ *при переходе от инерциальной системы* S *к инерциальной системе* S'. Таков будет, в частности, и закон преобразования координат вектора энергии-импульса $E_0\tau^{i}$.

Простейший пример преобразования (67.15) дают формулы Лоренца (63.7), которые можно переписать в виде

$$x^{0'} = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x^{1'} = \frac{-\frac{v}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3. \tag{67.17}$$

Здесь свободных членов нет, так что эти же формулы дают и закон преобразования (67.16) координат вектора. В частности, подставляя сюда $E_0\tau^i$ вместо x^i, мы получаем *закон преобразования энергии и трех составляющих импульса материальной точки (умноженных на c) при переходе от S к S'.*

Возвращаясь к общему преобразованию (67.16), заметим, что каждая новая координата вектора зависит, вообще говоря, от всех старых, так что энергия в новой системе S' зависит не только от энергии, но и от импульса в системе S; равным образом, и импульс в системе S' зависит не только от импульса, но и от энергии в системе S. В этом и заключается реальный физический смысл объединения энергии и импульса материальной точки в один четырехмерный вектор.

§ 68. Плотность масс, плотность заряда, вектор плотности тока

Чтобы не загромождать последующее изложение деталями, мы произведем в этом параграфе некоторые нужные нам подсчеты.

Когда мы имеем не отдельную частицу, а поток большого числа частиц, то в идеализированном виде представляем себе его как поток непрерывно распределенных в пространстве масс. Обозначим плотность этих масс относительно какой-нибудь инерциальной системы S через μ. Конечно, плотность μ будет различной в разных точках и в разные моменты времени:

$$\mu = \mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z). \qquad (68.1)$$

Далее, в каждой точке и в каждый момент времени поток масс имеет определенный вектор скорости

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^0, x^1, x^2, x^3). \qquad (68.2)$$

Мы должны ожидать, что плотность μ относительно различных инерциальных систем S будет различной, хотя бы мы измеряли ее в том же месте и в тот же момент времени. При этом есть одна инерциальная система, которая будет играть в этом измерении особую роль: это система S_0, движущаяся вместе с потоком, т. е. такая, с точки зрения которой массы покоятся. Разумеется, подобрать систему S_0 так, чтобы относительно системы S_0 покоились вообще все рассматриваемые массы, невозможно, если только мы не берем в качестве потока очень частный случай равномерного и прямолинейного движения твердого тела. Но для *данной точки и данного момента времени* всегда можно подобрать систему S_0, заставив ее двигаться относительно системы S со скоростью $\mathbf{u}$, которую имеет поток в этой точке и в этот момент времени. Тогда элемент массы dm, заключенный в элементе объема $d\omega$ и движущийся вместе с потоком со скоростью $\mathbf{u}$, будет в этот момент покоиться относительно системы S_0 (для краткости мы позволим себе говорить об «элементах» массы и объема без детальных уточнений; по существу речь идет о массе и объеме, заключенных в бесконечно малой окрестности данной точки и рассматриваемых с точностью до бесконечно малых высшего порядка; в частности, тогда массу и объем можно считать пропорциональными между собой).

Относительно системы S_0 наш элемент объема имеет уже другую величину, которую мы обозначим $d\omega_0$. Действительно, поскольку с точки зрения системы S_0 элемент объема покоится, а с точки зрения системы S движется со скоростью $\mathbf{u}$, его продольные размеры с точки зрения системы S сократятся в отношении $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, поперечные же размеры не изменяются. В результате объем сократится в отношении $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, и мы получаем:

$$d\omega=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,d\omega_0. \tag{68.3}$$

Пусть с точки зрения системы S_0 наш элемент массы имеет значение dm_0. Поскольку в системе S_0 он покоится, а относительно системы S имеет скорость $\mathbf{u}$, получаем согласно (67.1)

$$dm=\frac{dm_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{68.4}$$

Обозначим через μ_0 плотность масс в данной точке и в данный момент времени с точки зрения системы S_0 (плотность покоя). Конечно, μ_0 зависит от выбранной точки и от выбранного момента времени

$$\mu_0=\mu_0(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \tag{68.5}$$

но в отличие от μ является инвариантом — не зависит от выбора инерциальной системы S. По смыслу понятия плотности

$$\mu_0=\frac{dm_0}{d\omega_0},\qquad \mu=\frac{dm}{d\omega}.$$

Вставляя в последнюю формулу выражения (68.3) и (68.4), получаем

$$\mu=\frac{\mu_0}{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{68.6}$$

Такова важная формула, связывающая плотности масс в системе S_0, где они покоятся, и в системе S, относительно которой они движутся со скоростью $\mathbf{u}$.

Посмотрим теперь, как выглядит картина потока масс с точки зрения пространства событий.

Каждая частица массы, вернее, каждая точка, движущаяся вместе с потоком, обладает четырехмерной траекторией в пространстве событий. Если представлять себе в идеализированном виде, что поток масс заполняет все наше пространство, то *четырехмерные траектории его частиц заполняют все пространство событий, причем через каждую точку пространства событий проходит одна и только одна траектория.*

Действительно, в любой точке и в любой момент времени мы находим частицу массы, движущейся с нашим потоком; вполне определенный процесс ее дальнейшего (и предшествующего) движения изображается вполне определенной четырехмерной траекторией в пространстве событий. Но «любая точка и любой момент времени» означают выбор произвольной точки в пространстве событий, через которую и пройдет эта (единственным образом определенная) траектория.

Построим мнимоединичный касательный вектор $\vec{\tau}$ к каждой четырехмерной траектории потока в каждой ее точке. В результате вектор $\vec{\tau}$ будет построен в каждой точке M пространства событий, и мы получаем *векторное поле в пространстве событий*

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(M), \quad \tau^i = \tau^i(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{68.7}$$

Очевидно, по этому векторному полю можно, обратно, восстановить совокупность четырехмерных траекторий потока масс. Связь между координатами τ^i вектора $\vec{\tau}$ в пространстве событий и координатами u_x, u_y, u_z вектора $\mathbf{u}$ (68.2) в обычном пространстве дается формулами (67.11).

Обращает на себя внимание, что в полученной нами картине не нашла себе отражения такая важная характеристика потока, как плотность его масс. Но к этому мы вернемся позже, когда будем заниматься тензором энергии-импульса.

Переходим теперь к другому, хотя и сходному вопросу: рассмотрим поток частиц, несущих электрические заряды; масса частиц интересовать нас не будет. Идеализируя эту картину, можно рассматривать движение непрерывно распределенного в пространстве электрического заряда. Плотность этого заряда, рассматриваемая с точки зрения какой-либо инерциальной системы S, является функцией места и времени:

$$\rho = \rho(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{68.8}$$

Аналогично (68.2) обозначим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{68.9}$$

вектор скорости потока электричества с точки зрения системы S. Теперь аналогично предыдущему подберем для данной точки и данного момента времени систему S_0, движущуюся вместе с потоком электричества. Плотность электрического заряда в этой точке и в этот момент времени, измеренную в системе S_0, обозначим ρ_0 (плотность покоя). Конечно, плотность покоя также есть функция места и времени:

$$\rho_0 = \rho_0(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{68.10}$$

и аналогично μ_0 представляет собой инвариант (не зависит от выбора инерциальной системы S). По-прежнему для элемента объема имеет место соотношение (68.3) между его величиной $d\omega$ с точки зрения S и его величиной $d\omega_0$ с точки зрения S_0. Обозначим через de элемент заряда, заключенный в этом элементе объема. Элемент заряда будет одинаковым и с точки зрения S и с точки зрения S_0, так как *теория относительности сохраняет классическую точку зрения на заряд как на инвариант, значение которого не зависит от выбора инерциальной системы.*

Плотность электрического заряда с точек зрения систем S и S_0 имеет соответственно значения

$$\rho = \frac{de}{d\omega}, \quad \rho_0 = \frac{de}{d\omega_0},$$

откуда при помощи (68.3) следует:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{68.11}$$

Так меняется плотность электрического заряда при переходе от системы S_0, относительно которой он покоится, к системе S, относительно которой он движется со скоростью $\mathbf{u}$.

Переходя к геометрическому истолкованию в четырехмерном пространстве событий, воспроизводим прежнюю картину четырехмерных траекторий, но теперь уже для частиц заряда, вернее, для точек, движущихся вместе с потоком электричества. По-прежнему через каждую точку пространства событий проходит одна и только одна четырехмерная траектория, и ее мнимоединичный касательный вектор $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ образует поле (68.7) в этом пространстве. Связь с вектором скорости $\mathbf{u}$ (68.9) по-прежнему дается формулами (67.11). Но теперь мы пойдем дальше. Умножим вектор $\vec{\tau}$ на плотность покоя ρ_0 и обозначим полученный вектор через $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = \rho_0 (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) \vec{\tau} (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \qquad (68.12)$$

Подчеркнем, что векторное поле $\mathbf{s}$ в пространстве событий является инвариантным, т. е. не зависит от выбора инерциальной системы S, так как инвариантны оба множителя, при помощи которых оно получено.

Вектор $\mathbf{s}$ *мы будем называть четырехмерным вектором плотности тока.* Смысл этого названия выяснится, если рассмотреть *координаты вектора в ортонормированном репере* $\mathfrak{R}$, *изображающем какую-нибудь систему* S.

Пользуясь (67.11), получаем:

$$s^0 = \rho_0 \tau^0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad s^1 = \rho_0 \tau^1 = \frac{\rho_0 u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{и т. д.},$$

а пользуясь (68.11), получаем окончательно:

$$s^0 = \rho, \quad s^1 = \rho \frac{u_x}{c}, \qquad s^2 = \rho \frac{u_y}{c}, \qquad s^3 = \rho \frac{u_z}{c}. \qquad (68.13)$$

Таким образом, нулевая координата вектора $\mathbf{s}$ *выражает плотность заряда, а три остальные (после умножения на* c*) — значения плотности тока в направлениях координатных осей* X, Y, Z *— все это относительно данной инерциальной системы* S.

Плотностью тока, например, в направлении оси X мы называем количество электричества, протекающее за бесконечно малый промежуток времени ε через бесконечно малую площадку dS, ортогональную к оси X, отнесенное к единице площади и к единице времени и взятое в пределе. Плотность тока мы считаем положительной, если ток течет в положительную сторону оси X. Легко подсчитать, что поскольку плотность электричества ρ, а движется оно в направлении оси X со скоростью u_x, то плотность тока в направлении оси X равна ρu_x и аналогично для других осей. Очевидно, ρu_x зависит от момента времени и от места, где выбрана площадка dS, т. е. от x^0, x^1, x^2, x^3.

Итак, плотность заряда и три значения плотности тока в направлениях осей X, Y, Z (деленные на c) оказались координатами одного инвариантного четырехмерного вектора.

Реальный физический смысл этого утверждения заключается в том, что мы можем указать закон преобразования этих четырех величин при переходе от одной инерциальной системы к другой. Здесь можно повторить все сказанное в конце § 67 относительно координат вектора энергии-импульса.

§ 69. Электромагнитное поле

В этом параграфе мы покажем, как электромагнитное поле находит изображение в пространстве событий в виде определенного тензорного поля. Начнем с того, что будем наблюдать электромагнитное поле (в пустоте) относительно какой-нибудь инерциальной системы S. Пусть $\mathbf{E}\,(E_x, E_y, E_z)$ будет напряженность электрического и $\mathbf{H}\,(H_x, H_y, H_z)$ — напряженность магнитного поля. Для простоты будем считать эти векторы постоянными в рассматриваемой малой области пространства и за малый промежуток времени.

Если у нас имеется частица, несущая заряд e и движущаяся со скоростью $\mathbf{u}$, то в электромагнитном поле на нее действует сила по закону Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\,[\mathbf{u}\mathbf{H}]. \tag{69.1}$$

Согласно общей установке теории относительности мы предполагаем, что этот закон действует в любой инерциальной системе.

Пусть наша частица имеет (переменную) массу m. Тогда, пользуясь вторым законом Ньютона в форме (67.2), можно записать:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{u}\mathbf{H}]\right\}. \tag{69.2}$$

Проектируя это равенство почленно на координатные оси, получим:

$$\frac{d}{dt}(mu_x) = e\left\{E_x + \frac{1}{c}\,(u_yH_z - u_zH_y)\right\}$$

и две аналогичные формулы, получаемые из этой круговой подстановкой x, y, z.

Умножая почленно на $c\,dt$ и учитывая, что $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$, получим:

$$d\,(mu_xc) = e\,\{E_xc\,dt + dy\,H_z - dz\,H_y\} \tag{69.3}$$

и две аналогичные формулы.

Переходим теперь в пространство событий, где нашей инерциальной системе S отвечает ортонормированная координатная система x^0, x^1, x^2, $x^3 = ct$, x, y, z. При этом движение частицы изображается четырехмерной траекторией с мнимоединичным касательным вектором $\vec{\tau}$, при помощи которого мы составляли вектор энергии-импульса $E_0\vec{\tau}$, где E_0 — энергия покоя. Согласно (67.13)

$$mu_x c = E_0\tau^1 \text{ и т. д.,}$$

так что (69.3) и две аналогичные формулы можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} d(E_0\tau^1) &= e\{E_x dx^0 + H_z dx^2 - H_y dx^3\}, \\ d(E_0\tau^2) &= e\{E_y dx^0 - H_z dx^1 + H_x dx^3\}, \\ d(E_0\tau^3) &= e\{E_z dx^0 + H_y dx^1 - H_x dx^2\}. \end{aligned}\right\} \tag{69.4}$$

К этим формулам следует прибавить еще одну, выражающую дифференциал энергии частицы,— пока мы выразили лишь дифференциалы трех проекций ее импульса (умноженные на c). Но дифференциал энергии mc^2 равен элементу работы, совершенной над частицей силами поля:

$$d(mc^2) = e\{E_x dx + E_y dy + E_z dz\}. \tag{69.5}$$

Обращает на себя внимание, что в правой части записана работа, произведенная лишь силами электрического поля; это потому, что магнитное поле, как видно из (69.1), дает силу, ортогональную к направлению движения частицы (к вектору скорости $\mathbf{u}$), и потому работы не производит.

Пользуясь формулами (67.12), запишем окончательно:

$$d(E_0\tau^0) = e\{E_x dx + E_y dy + E_z dz\}. \tag{69.6}$$

Теперь объединим формулы (69.4), (69.6), поставив на первое место (69.6). Мы видим, что эти формулы выражают линейную зависимость координат вектора $d(E_0\vec{\tau})$ от координат dx^i вектора $d\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — текущий радиус-вектор четырехмерной траектории частицы в пространстве событий. Оба дифференциала $d\mathbf{x}$, $d(E_0\vec{\tau})$ берутся при бесконечно малом смещении по четырехмерной траектории.

Формулы (69.6), (69.4) становятся более прозрачными, если перейти к *ковариантным* координатам вектора $d(E_0\vec{\tau})$.

Согласно (42.24) для любого вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированной координатной системе в пространстве событий мы имеем:

$$x_0 = -x^0, \qquad x_\lambda = x^\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3), \tag{69.7}$$

так как в этом случае $\mathbf{e}_0^2 = -1$, $\mathbf{e}_\lambda^2 = 1$. Применяя эти формулы к $E_0\vec{\tau}$, мы перепишем (69.6), (69.4) в виде

$$\left.\begin{aligned} d(E_0\tau_0) &= e\{\qquad\qquad -E_x dx^1 - E_y dx^2 - E_z dx^3\}, \\ d(E_0\tau_1) &= e\{E_x dx^0 \qquad\qquad + H_z dx^2 - H_y dx^3\}, \\ d(E_0\tau_2) &= e\{E_y dx^0 - H_z dx^1 \qquad\qquad + H_x dx^3\}, \\ d(E_0\tau_3) &= e\{E_z dx^0 + H_y dx^1 - H_x dx^2 \qquad\qquad\}. \end{aligned}\right\} \tag{69.8}$$

Мы замечаем, что матрица линейного преобразования dx^i в $d(E_0\tau_i)$ является *кососимметрической* и, если отбросить множитель e и обозначить ее элементы через F_{ij}, имеет следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{Vmatrix}. \tag{69.9}$$

Очевидно, $F_{ij} = -F_{ji}$. Пользуясь индексными обозначениями, формулы (69.8) можно переписать в виде

$$d(E_0\tau_i) = eF_{ij}\,dx^j. \tag{69.10}$$

Разберемся в смысле полученного результата. При бесконечно малом смещении по четырехмерной траектории заряженной частицы (рис. 15) мы рассмотрим дифференциал $d\mathbf{x}$ радиуса-вектора $\mathbf{x}$ (его контравариантные координаты dx^i) и дифференциал $d(E_0\vec{\tau})$ вектора энергии-импульса $E_0\vec{\tau}$ (его ковариантные координаты $d(E_0\tau_i)$).

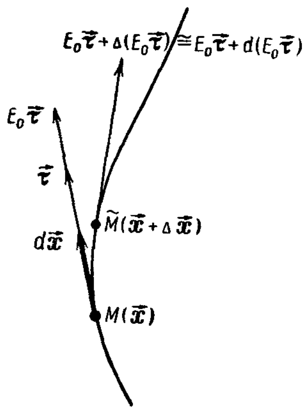

Рис. 15.

Причиной того, что $d(E_0\vec{\tau})$ вообще существует (т. е. не равен нулю), является электромагнитное поле, действующее на заряженную частицу; если бы частица не подвергалась действию сил, то мы имели бы

$$d(E_0\vec{\tau}) = 0,$$

т. е. вектор энергии-импульса $E_0\vec{\tau}$ оставался бы постоянным, и четырехмерная траектория, как легко следует из $\vec{\tau} = \text{const}$, была бы прямолинейной. При этом *в одном и том же электромагнитном поле* мы можем заставить заряженную частицу двигаться по разным направлениям с раз-ными скоростями, т. е. можем *варьировать четырехмерную траекторию. Тогда вектор* $d\mathbf{x}$ *будет принимать различные значения, а* $d(E_0\vec{\tau})$ *будет меняться в зависимости от* $d\mathbf{x}$. Так как координаты вектора $d(E_0\vec{\tau})$ при этом линейно зависят от координат вектора $d\mathbf{x}$, то $d(E_0\vec{\tau})$ получается из $d\mathbf{x}$ действием некоторого аффинора (§ 3), который, отбрасывая множитель e, мы обозначим $\mathfrak{F}$. Итак,

$$d(E_0\vec{\tau}) = e\mathfrak{F}\,d\mathbf{x}. \tag{69.11}$$

Формулы (69.10) выражают зависимость *ковариантных координат* вектора-функции от контравариантных координат вектора-аргумента, так что коэффициенты F_{ij} аффинора $\mathfrak{F}$ образуют согласно (40.10) дважды ковариантный (и при этом кососимметрический) тензор. *Тензор* F_{ij} *называется тензором электромагнитного поля. Таким образом, составляющие электрического и магнитного полей, рассматриваемые относительно какой-либо инерциальной системы* S, *образуют по схеме* (69.9) *координаты дважды ковариантного кососимметрического тензора* F_{ij}, *вычисленные в соответствующей ортонормированной системе координат в пространстве событий.*

Реальный физический смысл этого результата заключается в том, что он дает возможность пересчитывать электромагнитное поле, заданное в одной инерциальной системе S, на любую другую инерциальную систему S'. Для этого составляющие электромагнитного поля, записанные по схеме (69.9), нужно подвергнуть преобразованию по тензорному закону

$$F_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}F_{ij}. \tag{69.12}$$

Здесь $A^i_{i'}$ — псевдоортогональная матрица (см. (62.11)), выражающая переход от ортонормированной системы, отвечающей S, к системе, отвечающей S':

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i.$$

Если нам задан переход от S к S' формулами

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}$$

(где $x^0, x^1, x^2, x^3 = ct, x, y, z$), то обратную матрицу $A^i_{i'}$ мы сейчас же получаем согласно (62.11). В простейшем случае, когда переход задается формулами Лоренца (67.17), эта матрица имеет

вид

$$\left\|\begin{matrix} A^{0}_{0'} & A^{1}_{0'} & A^{2}_{0'} & A^{3}_{0'} \\ A^{0}_{1'} & A^{1}_{1'} & A^{2}_{1'} & A^{3}_{1'} \\ A^{0}_{2'} & A^{1}_{2'} & A^{2}_{2'} & A^{3}_{2'} \\ A^{0}_{3'} & A^{1}_{3'} & A^{2}_{3'} & A^{3}_{3'} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|. \qquad (69.13)$$

Применяя ее в формуле (69.12), получаем, например:

$$E'_y = F_{2'0'} = A^{i}_{2'}A^{j}_{0'}F_{ij} = A^{2}_{2'}A^{0}_{0'}F_{20} + A^{2}_{2'}A^{1}_{0'}F_{21} =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}E_y + 1\cdot\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(-H_z) = \frac{E_y - \frac{v}{c}H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (69.14)$$

В процессе суммирования по i, j мы не выписывали членов, равных нулю. Аналогично можно вычислить любую составляющую электромагнитного поля относительно системы S'.

Мы рассматривали электромагнитное поле для простоты в малом участке пространства и в течение малого промежутка времени, т. е. в малой области четырехмерного пространства событий, и считали его в этой области постоянным. В действительности же напряженности электрического и магнитного полей зависят от места и времени, так что тензор F_{ij} должен быть задан в каждой точке пространства событий, и мы получаем тензорное поле

$$F_{ij} = F_{ij}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \qquad (69.15)$$

Этим тензорным полем мы и будем в дальнейшем заниматься.

§ 70. Уравнения Максвелла

Еще до появления теории относительности краеугольным камнем электродинамики служили *уравнения Максвелла*. Пусть $\mathbf{E}(t, x, y, z)$, $\mathbf{H}(t, x, y, z)$ будут соответственно электрическое и магнитное векторные поля, рассматриваемые относительно «покоящейся» системы отсчета S. Тогда первая группа уравнений Максвелла связывает эти поля друг с другом

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (70.1)$$

а вторая группа связывает их, кроме того, с распределением и движением электричества в пространстве:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{u}. \tag{70.2}$$

Здесь

$$\rho = \rho(t, x, y, z)$$

есть плотность электрического заряда, а

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$$

— вектор скорости его движения в данной точке и в данный момент времени. Уравнения Максвелла записаны у нас для пустоты.

Как уже указывалось, законы электродинамики, т. е. в основном уравнения Максвелла, *с классической точки зрения неинвариантны относительно перехода от одной инерциальной системы к другой* и должны нарушаться в «движущейся» системе S'. Опыт же показал противное, и теория относительности возникла как разрешение этого противоречия. Сейчас мы покажем, что, действительно, *с точки зрения теории относительности имеет место инвариантность уравнений Максвелла,* т. е. если эти уравнения справедливы в одной инерциальной системе S, то они справедливы и в любой другой системе S'.

Для этой цели мы должны истолковать уравнения Максвелла с точки зрения четырехмерного пространства событий как ограничения, наложенные на выбор тензорных полей F_{ij} (электромагнитное поле) и s^i (поле вектора четырехмерной плотности тока). Займемся сначала первой группой уравнений Максвелла (70.1). Дадим эти уравнения в развернутой координатной записи (проектируя второе из них на координатные оси X, Y, Z):

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t},$$

и еще две формулы, получающиеся из последней круговой подстановкой x, y, z. Пользуясь теперь таблицей (69.9), а также обозначениями x^0, x^1, x^2, $x^3 = ct$, x, y, z, получаем:

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = 0, \tag{70.3}$$

$$\frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{20}}{\partial x^3} = -\frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} \tag{70.4}$$

и еще две формулы, получающиеся из последней круговой подстановкой 1, 2, 3.

Пользуясь косой симметрией $F_{ij} = -F_{ji}$, можно записать (70.4) в более симметричном виде, перенося все члены в левые части:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} = 0, \\ \frac{\partial F_{10}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^0} = 0, \\ \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{70.5}$$

Мы замечаем, что четыре формулы (70.5), (70.3), к которым свелась первая группа уравнений Максвелла, имеют однотипное строение и допускают общую запись с буквенными индексами:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0. \tag{70.6}$$

Заметим, что левая часть этого уравнения кососимметрична по всем трем своим индексам: если переставить между собой, например, индексы k, i, то последний член меняет знак, первый член превращается во второй и наоборот, в обоих случаях с изменением знака (все это в силу косой симметрии тензора F_{ij}). При этом формулы (70.5), (70.3) исчерпывают *все случаи*, когда i, j, k представляют собой тройку *различных* индексов из числа индексов 0, 1, 2, 3. В самом деле, задавшись индексами, например, 1, 2, 3 и написав соответствующее уравнение (70.3), сделаем в нем над индексами 1, 2, 3 какую-нибудь подстановку, в силу косой симметрии левая часть или не меняется или меняет лишь знак, и смысл уравнения не изменится. Если же среди индексов i, j, k имеются хотя бы два одинаковых, то в силу косой симметрии левой части (70.6) она тождественно обращается в нуль, и (70.6) вместо уравнения дает тождество.

Таким образом, уравнения (70.5), (70.3) равносильны уравнениям (70.6), рассматриваемым при всех комбинациях индексов.

Первая группа уравнений Максвелла в четырехмерном пространстве событий записывается в виде дифференциальных уравнений (70.6), *наложенных на тензорное поле* F_{ij}.

Теперь тензорный характер, а вместе с ним и инвариантность этих уравнений становятся очевидными. Действительно, в § 38 мы выяснили, что в результате частного дифференцирования тензора поля по координатам точки получается поле нового тензора с добавочным ковариантным индексом. В нашем случае частные производные $\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}$ образуют трижды ковариантный тензор

$$F_{ijk} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k},$$

вследствие чего образуют тензор и величины

$$\Lambda_{ijk}=F_{ijk}+F_{jki}+F_{kij}.$$

Действительно, тензор Λ_{ijk} получается сложением трех трижды ковариантных тензоров (отличающихся друг от друга лишь круговыми подстановками индексов). Теперь уравнения (70.6) принимают вид

$$\Lambda_{ijk}=0.$$

Но по характеру тензорного закона преобразования обращение тензора Λ_{ijk} (т. е. всех его координат) в нуль в одной координатной системе влечет то же самое и в любой другой координатной системе. Поэтому уравнения (70.6), установленные в одной координатной системе, будут справедливы и в любой другой. При этом можно брать не обязательно ортонормированные, но и любые аффинные координатные системы. Однако для нас важны именно ортонормированные системы, так как инвариантность при их преобразовании означает инвариантность при переходе от одной инерциальной системы S к любой другой S'.

Теперь займемся второй группой уравнений Максвелла (70.2). Перепишем их в развернутой форме:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=4\pi\rho,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\rho u_x$$

и еще два уравнения, получающихся из последнего круговой подстановкой x, y, z.

Пользуясь таблицей (69.9) и формулами (68.13), получаем:

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{20}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{30}}{\partial x^3}=4\pi s^0, \tag{70.7}$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2}-\frac{\partial F_{31}}{\partial x^3}=\frac{\partial F_{10}}{\partial x^0}+4\pi s^1 \tag{70.8}$$

и еще два уравнения, получающихся в результате круговой подстановки 1, 2, 3. Перенося все производные в левую часть и пользуясь косой симметрией F_{ij}, можно написать вместо (70.8)

$$-\frac{\partial F_{10}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^3}=4\pi s^1 \tag{70.9}$$

и еще два уравнения, получающихся из этого круговой подстановкой 1, 2, 3.

Итак, вторая группа уравнений Максвелла свелась к (70.7) и (70.9). Однако тензорный характер наших уравнений в этой записи еще неясен. Чтобы его обнаружить, нужно перейти к контравариантной записи тензора F_{ij}, подняв оба его индекса при помощи контравариантного метрического тензора g^{ij} (§ 40):

$$F^{ij}=g^{ip}g^{jq}F_{pq}. \tag{70.10}$$

Здесь по p и q происходит суммирование. Очевидно, косая симметрия сохранится и после поднятия индексов.

В самом деле, переставив индексы i, j в формуле (70.10), мы можем также поменять и обозначения индексов суммирования p, q, что не играет никакой роли для результата. Получим:

$$F^{ji}=g^{jq}g^{ip}F_{qp}.$$

Сравнивая с (70.10), получаем:

$$F^{ji}=-F^{ij},$$

так как $F_{qp}=-F_{pq}$. В пространстве событий для ортонормированного репера все координаты метрического тензора $g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ равны нулю кроме

$$g_{00}=-1, \quad g_{\lambda\lambda}=1 \quad (\lambda=1,\ 2,\ 3). \tag{70.11}$$

Координаты контравариантного метрического тензора g^{ij} образуют матрицу, обратную матрице g_{ij}, следовательно, в данном случае просто с ней совпадающую:

$$g^{00}=-1, \quad g^{\lambda\lambda}=1 \quad (\lambda=1,\ 2,\ 3); \quad g^{ij}=0 \ (i\neq j). \tag{70.12}$$

Поэтому при суммировании по p, q в (70.10) следует сохранить лишь слагаемые, где $p=i$, $q=j$, и мы получаем:

$$F^{ij}=g^{ii}g^{jj}F_{ij} \quad \text{(без суммирования)}. \tag{70.13}$$

Это значит, согласно (70.12), что если оба индекса i, j равны нулю или оба отличны от нуля, то $g^{ii}g^{jj}=1$ и $F^{ij}=F_{ij}$; если же один из них нуль, а другой отличен от нуля, то $g^{ii}g^{jj}=-1$ и $F^{ij}=-F_{ij}$. Итак,

$$F^{00}=F_{00}, \quad F^{\lambda\mu}=F_{\lambda\mu}, \quad F^{0\lambda}=-F_{0\lambda} \quad (\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ 3). \tag{70.14}$$

Перепишем теперь уравнение (70.7), заменяя $F_{\lambda 0}$ через $-F_{0\lambda}$, а затем через $F^{0\lambda}$:

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1}+\frac{\partial F^{02}}{\partial x^2}+\frac{\partial F^{03}}{\partial x^3}=4\pi s^0. \tag{70.15}$$

В уравнении (70.9) заменяем $-F_{10}$ через F^{10}; F_{12}, F_{13} заменяются просто через F^{12}, F^{13}. Получаем, присоединяя еще два уравнения, получающихся круговой подстановкой 1, 2, 3:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial F^{13}}{\partial x^3}&=4\pi s^1,\\ \frac{\partial F^{20}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{23}}{\partial x^3}+\frac{\partial F^{21}}{\partial x^1}&=4\pi s^2,\\ \frac{\partial F^{30}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{31}}{\partial x^1}+\frac{\partial F^{32}}{\partial x^2}&=4\pi s^3. \end{aligned}\right\} \qquad (70.16)$$

Итак, вторая группа уравнений Максвелла сводится к (70.15), (70.16). Эти четыре уравнения можно объединить в тензорной записи:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}=4\pi s^i. \qquad (70.17)$$

В левой части происходит суммирование по j. Легко проверить, что, действительно, при $i=0$, 1, 2, 3 мы получаем соответственно формулы (70.15) и (70.16). Для этого достаточно написать в каждом случае суммирование по j в развернутом виде, учитывая, что в каждой сумме выпадает один член, равный нулю (именно, при $j=i$, когда $F^{ii}=0$).

Так как частные производные дважды контравариантного тензора $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^k}$ образуют тензор дважды контравариантный и один раз ковариантный, то суммирование по j можно рассматривать как свертывание тензора $\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^k}$ по второму верхнему и нижнему индексам. Но в результате свертывания тензора получается снова тензор, в нашем случае с одним верхним индексом i. Таким образом (70.17) означает равенство двух контравариантных тензоров 1-й валентности. Но такое равенство, справедливое в одной координатной системе, будет справедливо и в любой другой ввиду одинакового закона преобразования левой и правой частей. Тем самым, и вторая пара уравнений Максвелла имеет место в любой инерциальной системе S, если она имеет место в одной из них.

Таким образом, мы показали, как теория относительности выполняет свою основную задачу — обеспечить инвариантность уравнений Максвелла (70.6), (70.17), т. е. *инвариантность законов электродинамики, установленную ранее на опыте.*

Из (70.17) и из кососимметричности F^{ij} легко следует, что

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i}=0,$$

т. е. четырехмерная дивергенция векторного поля s^i равна нулю. Физический смысл этого соотношения — закон сохранения заряда;

приращение заряда в какой-либо трехмерной области ω, выделенной в какой-нибудь инерциальной системе S, всегда равно заряду, втекшему за то же время через границу Π области ω (вывод совершенно такой же, как и в случае (72.8)).

Отметим без доказательства, что из уравнений (70.6) следует существование один раз ковариантного тензорного поля

$$f_i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3),$$

такого, что

$$F_{ij}=\frac{\partial f_j}{\partial x^i}-\frac{\partial f_i}{\partial x^j}. \tag{70.18}$$

Тензор f_i можно геометрически представить в виде вектора $\mathfrak{f}$ с ковариантными координатами f_i, так что поле тензора f_i истолкуется как векторное поле $\mathfrak{f}$. *Вектор* $\mathfrak{f}$ *называется четырехмерным потенциалом электромагнитного поля*; напряженность электромагнитного поля F_{ij} получается из него, как мы видим, операцией, сходной с построением ротора данного векторного поля в обычном пространстве. Но теперь дело происходит в четырехмерном пространстве, и мы получаем в результате не вектор, а бивектор (кососимметрический тензор) F_{ij}. Впрочем и в обычном пространстве при построении ротора мы получаем по существу сначала бивектор (кососимметрический аффинор, см. § 5), который уже затем условно переделываем в вектор, для чего существенно используется трехмерный характер пространства.

Обратно, из формул (70.18) немедленно вытекают уравнения (70.6), в чем легко убедиться прямой проверкой.

Заметим еще, что четырехмерный потенциал f_i данного электромагнитного поля определяется неоднозначно: из вида формул (70.18) легко вытекает, что к f_i можно добавлять любой *градиентный тензор*

$$\varphi_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i},$$

где φ — произвольное скалярное поле. Действительно, формулы (70.18) при этом не нарушаются.

Произвол в выборе четырехмерного потенциала существенно уменьшается, если на него наложить, как обычно делают, инвариантное добавочное условие

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^i}=0. \tag{70.19}$$

Здесь по i происходит суммирование, так что нулю приравнивается инвариант, полученный полным свертыванием тензора $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$. Под f^i мы понимаем тензор, полученный поднятием индекса у тензора f_i, или, что то же, контравариантные координаты вектора $\mathfrak{f}$.

§ 71. Тензор энергии-импульса

Допустим, что нас интересует общая картина распределения и движения энергии и импульса в пространстве и времени. Как мы далее увидим, для ее описания мы должны построить в четырехмерном пространстве событий соответствующим образом подобранный дважды контравариантный симметрический тензор T^{ij} — *тензор энергии-импульса.*

Этот тензор задается в каждой точке пространства событий, так что получается тензорное поле

$$T^{ij} = T^{ij}(M). \tag{71.1}$$

Конечно, этим еще ничего не сказано о том, как тензор энергии-импульса строится и как он связан с распределением и движением энергии и импульса. Но мы начнем с рассмотрения *частного случая* тензора энергии-импульса, общее же его определение дадим потом.

1°. *Тензор энергии-импульса потока масс.* Рассмотрим поток масс так, как мы это делали в § 68, и сохраняя все прежние обозначения. В каждой точке M пространства событий мы имеем мнимоединичный касательный вектор $\vec{\tau}$ (68.7) к четырехмерной траектории потока и плотность покоя μ_0 (68.5):

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(M), \quad \mu_0 = \mu_0(M). \tag{71.2}$$

Координаты τ^i вектора $\vec{\tau}$ образуют один раз контравариантный тензор. Перемножая этот тензор с самим собой и с инвариантом $c^2\mu_0$, мы получим симметрический дважды контравариантный тензор, который обозначим

$$T^{ij} = \mu_0 c^2 \tau^i \tau^j \tag{71.3}$$

и будем называть *тензором энергии-импульса потока масс.* Что мы хотим сказать этим названием, станет ясным, если *рассмотреть координаты тензора T^{ij} в какой-либо ортонормированной системе x^0, x^1, x^2, x^3 и раскрыть их физический смысл с точки зрения соответствующей инерциальной системы S.* Подразумевается, что T^{ij} берутся в определенной точке пространства событий, и соответственно их физический смысл истолковывается в определенный момент времени и в определенной точке обычного пространства (с точки зрения системы S).

Для этой цели нам будут нужны формулы (67.11), дающие связь между координатами τ^i и скоростью движения масс $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$

относительно системы S:

$$\left.\begin{aligned} \tau^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^1 &= \frac{u_x}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ \tau^2 &= \frac{u_y}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, & \tau^3 &= \frac{u_z}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{71.4}$$

Кроме того, мы используем формулу (68.6):

$$\mu = \frac{\mu_0}{1-\frac{u^2}{c^2}}, \tag{71.5}$$

дающую связь между плотностью покоя μ_0 и плотностью μ с точки зрения S.

Вычисляем T^{00}:

$$T^{00} = \mu_0 c^2 \tau^0 \tau^0 = \frac{\mu_0 c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \mu c^2. \tag{71.6}$$

Так как μ есть плотность масс, то μc^2 *выражает, следовательно, плотность энергии в нашем потоке.* Здесь и в дальнейшем все физические величины измеряются относительно системы S.

Вычисляем теперь $T^{01} = T^{10}$:

$$T^{01} = \mu_0 c^2 \tau^0 \tau^1 = \mu_0 c^2 \frac{u_x}{c\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \mu u_x c.$$

Аналогичные выражения получаем и для T^{02}, T^{03}. В результате

$$T^{01} = \mu u_x c, \quad T^{02} = \mu u_y c, \quad T^{03} = \mu u_z c. \tag{71.7}$$

Физический смысл этого результата двоякий. Во-первых, раз плотность масс μ, а скорость их движения $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, то *плотность импульса будет равна* $\mu\mathbf{u}$. Этим мы хотим сказать, что, умножая $\mu\mathbf{u}$ на элемент объема $d\omega$, мы получаем (пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка) импульс, заключенный в $d\omega$. Действительно, $\mu\, d\omega$ дает, по определению плотности, массу, заключенную в $d\omega$, а следовательно, $\mu\, d\omega\, \mathbf{u}$ дает соответствующий импульс (пренебрегая в обоих случаях бесконечно малыми высшего порядка). Аналогично плотности проекций импульса на оси X, Y, Z будут равны:

$$\mu u_x, \; \mu u_y, \; \mu u_z. \tag{71.8}$$

Этим мы хотим сказать, что, умножая, например, μu_x на $d\omega$, мы получаем проекцию импульса, заключенного в $d\omega$, на ось X. Действительно, $\mu u_x d\omega$ есть проекция вектора $\mu\, d\omega\, \mathbf{u}$ на ось X.

Таким образом, координаты $T^{0\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$) *совпадают с умноженными на с плотностями проекций импульса на оси* X, Y, Z.

Во-вторых, координатам $T^{0\lambda}$ можно дать такое истолкование Пусть в данной точке помещена бесконечно малая площадка dS, направленная ортогонально к оси X. Назовем *плотностью потока энергии* в направлении оси X (в данной точке и в данный момент времени) количество энергии, протекшее через dS за бесконечно малый промежуток времени ε, *отнесенное к единице площади и к единице времени и взятое в пределе*. Этой плотности приписывается знак плюс, если энергия течет в положительную сторону оси, и минус — в противном случае. Так как плотность энергии μc^2, а движется она в направлении оси X со скоростью u_x, то плотность ее потока в этом направлении будет равна $\mu c^2 u_x$, как легко показать элементарным подсчетом. Аналогичным образом определяется и вычисляется плотность потока и любой другой физической величины, распределенной в пространстве и переносимой вместе с нашим потоком масс.

Итак, значения плотности потока энергии в направлениях координатных осей равны:

$$\mu c^2 u_x, \quad \mu c^2 u_y, \quad \mu c^2 u_z, \tag{71.9}$$

и следовательно, они совпадают с

$$cT^{01}, \ cT^{02}, \ cT^{03}. \tag{71.10}$$

В этом состоит второе истолкование координат $T^{0\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$).

Для дальнейшего важно отметить следующий результат. *Вычисленный в данный момент* t *поток векторного поля* $\mu c^2 \mathbf{u}$ *через какую-нибудь (двустороннюю) поверхность* Π *равен скорости* q^0 *протекания энергии через эту поверхность в этот же момент* t:

$$q^0 = \iint\limits_{\Pi} \mu c^2 \, \mathbf{un} \, dS. \tag{71.11}$$

При этом q^0 мы называем скоростью протекания энергии через Π в данный момент t, если *за бесконечно малый промежуток времени* ε, *начиная от данного момента* t, *количество энергии, протекшей через* Π *в сторону* $+\mathbf{n}$, *равно* εq^0 *(пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка)*. Грубый вывод этого результата получается совершенно так же, как и в случае (16.3) с заменой лишь плотности жидкости ρ плотностью энергии μc^2. Правда, в случае (16.3) движение было стационарным, чего в данном случае не предполагается. Но для вывода это не играет роли, так как в нем рассматривается лишь бесконечно малый промежуток времени ε. Скорость протекания энергии через Π q^0 будет в нашем случае, вообще говоря, зависеть от времени; в стационарном случае она будет постоянной.

В дальнейшем мы будем говорить о скорости протекания через поверхность П и пользоваться формулой (71.11) и для других физических величин совершенно аналогично тому, как сейчас мы делали это для энергии (предполагая, что эти величины тоже с известной плотностью распределены в пространстве и перемещаются вместе с нашим потоком масс).

Переходим теперь к истолкованию координат $T^{\lambda\mu}$ (λ, $\mu = 1, 2, 3$). Рассмотрим для примера T^{12}. Пользуясь (71.3), (71.4), (71.5), получаем:

$$T^{12} = \mu_0 c^2 \tau^1 \tau^2 = \mu_0 c^2 \frac{u_x u_y}{c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = \mu u_x u_y. \qquad (71.12)$$

Другие координаты $T^{\lambda\mu}$ имеют аналогичный вид. Рассмотрим те из них, для которых $\lambda = 1$:

$$T^{11} = \mu u_x u_x, \quad T^{12} = \mu u_x u_y, \quad T^{13} = \mu u_x u_z. \qquad (71.13)$$

Мы замечаем, что величины (71.13) получаются из μu_x, т. е. из *плотности проекции импульса на ось X*, последовательным умножением на u_x, u_y, u_z, т. е. совершенно аналогично тому, как величины (71.9) получаются из μc^2, т. е. из *плотности энергии*. Но величины (71.9) выражают плотность потока *энергии* в направлениях X, Y, Z; значит, (71.13) играют такую же роль для *проекции импульса на ось X*. Итак, *для проекции импульса на ось X плотность потока в направлении осей X, Y, Z будет* T^{11}, T^{12}, T^{13}. Для плотности потока проекций импульса на оси Y, Z такую же роль играют вторая и третья строки матрицы $T^{\lambda\mu}$. Конечно, все это легко получить и непосредственно, не ссылаясь на (71.9).

Рассмотрим теперь скорость протекания *проекции импульса на ось X* через какую-либо поверхность П. Совершенно аналогично (71.11) получаем, что эта скорость — обозначим ее q^1 — равняется вычисленному в данный момент потоку векторного поля $\mu u_x \mathbf{u}$ через поверхность П:

$$q^1 = \iint\limits_{\Pi} \mu u_x \, \mathbf{un} \, dS. \qquad (71.14)$$

Скорости протекания через П проекций импульса на ось Y и на ось Z выражаются аналогичными формулами:

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= \iint\limits_{\Pi} \mu u_y \, \mathbf{un} \, dS, \\ q^3 &= \iint\limits_{\Pi} \mu u_z \, \mathbf{un} \, dS. \end{aligned}\right\} \qquad (71.15)$$

Формулы (71.11), (71.14), (71.15), которые вскоре нам понадобятся, мы объединим в общей записи. А именно, обозначая проекции $\mathbf{n}$ на оси X, Y, Z

$$n_x, \ n_y, \ n_z = n_1, \ n_2, \ n_3$$

и развертывая скалярное произведение

$$\mathbf{un} = u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3,$$

можно переписать эти формулы в следующем виде:

$$q^0 = \iint\limits_{\Pi} \mu c^2 (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = c \iint\limits_{\Pi} (T^{01} n_1 + T^{02} n_2 + T^{03} n_3)\, dS. \tag{71.16}$$

$$\left.\begin{aligned} q^1 &= \iint\limits_{\Pi} \mu u_x (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\ &\qquad = \iint\limits_{\Pi} (T^{11} n_1 + T^{12} n_2 + T^{13} n_3)\, dS, \\ q^2 &= \iint\limits_{\Pi} \mu u_y (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\ &\qquad = \iint\limits_{\Pi} (T^{21} n_1 + T^{22} n_2 + T^{23} n_3)\, dS, \\ q^3 &= \iint\limits_{\Pi} \mu u_z (u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3)\, dS = \\ &\qquad = \iint\limits_{\Pi} (T^{31} n_1 + T^{32} n_2 + T^{33} n_3)\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{71.17}$$

Мы воспользовались здесь формулами (71.7), (71.13) и им аналогичными.

Формулы (71.17) можно объединить:

$$q^{\nu} = \iint\limits_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{\nu\lambda} n_{\lambda}\, dS \qquad (\nu = 1, \ 2, \ 3). \tag{71.18}$$

Выясним теперь нашу общую установку в отношении тензора энергии-импульса. Мы рассмотрели тензор энергии-импульса, отвечающий потоку масс. Однако в дальнейшем мы будем считать, что и *всякому физическому процессу, протекающему в сплошной среде, отвечает в пространстве событий определенный тензор энергии-импульса $T^{ij}(M)$, который имеет аналогичный физический смысл.*

А именно, если вычислить координаты T^{ij} в какой-либо ортонормированной координатной системе, то относительно соответствующей инерциальной системы S они будут представлять собой:

T^{00} — плотность энергии;

$T^{0\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$) — умноженную на c плотность проекции импульса на λ-ю ось или деленную на c плотность потока энергии в направлении λ-й оси;

$T^{\nu\lambda}$ ($\lambda, \nu = 1, 2, 3$) — плотность потока проекции импульса на ν-ю ось в направлении λ-й оси (или наоборот).

В этих формулировках оси X, Y, Z в системе S именуются 1-й, 2-й, 3-й осями. Из этого физического истолкования вытекает, в частности, что формулы (71.16), (71.17) остаются верными и для любого физического процесса.

Допущение о существовании тензора энергии-импульса у всякого физического процесса очень важно. Конечно, суть его не в том, что определенные физические величины обозначены в виде элементов симметрической матрицы, а в том, что они *предполагаются координатами дважды контравариантного тензора и, следовательно, имеют вполне определенный закон преобразования при переходе от одной инерциальной системы S к другой S'*:

$$T^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} T^{ij}.$$

Здесь $A_i^{i'}$ имеет тот же смысл, как и в (67.15). Таким образом, существо нашего допущения в том, что для любого физического процесса оно устанавливает закон преобразования плотности энергии, плотности импульса и плотности потока импульса при переходе от S к S'. Какие имеются основания перенести тензорный характер этих величин, установленный для потока масс, на общий случай?

Математического вывода здесь, разумеется, дать нельзя, но физические основания достаточно веские. Энергия и импульс способны переходить из одной формы в другую, например, из механической в электромагнитную, *количественно не меняясь*. Поэтому после такого перехода плотность энергии и плотность импульса должны преобразовываться от S к S' *по прежнему закону*. Правда, в действительности закон преобразования охватывает, кроме того, и плотности потока импульса. Все же естественно принять, что и этот усложненный закон преобразования не должен нарушаться, когда энергия и импульс переходят из одной формы в другую.

Рассмотрим теперь другой важный частный случай тензора энергии-импульса.

2°. *Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.* Пусть электромагнитное поле задано тензорным полем F_{ij} в пространстве событий. Составим из тензора F_{ij} и метрического тензора g_{ij} новый тензор по следующей формуле:

$$T^{ij} = -\frac{g^{ij}}{16\pi} F^{pq}F_{pq} + \frac{1}{4\pi} F^{ip}F^{jq}g_{pq}. \tag{71.19}$$

По p и q происходит свертывание. Очевидно, тензор T^{ij} будет симметрическим и дважды контравариантным. Этот тензор и принимается за *тензор энергии-импульса электромагнитного поля.*

На первый взгляд кажется, что такой выбор тензора энергии-импульса является совершенно произвольным и ничем не обоснованным. Однако вскоре мы убедимся, что это не так; выбор именно этого выражения почти полностью продиктован законами сохранения энергии и импульса. Мы только не сможем излагать здесь все наводящие соображения и пойдем путем простой проверки.

Как было сказано, мы приписываем координатам тензора энергии-импульса определенный физический смысл. Это значит, что, выбрав для электромагнитного поля определенный тензор энергии-импульса, мы приписали тем самым электромагнитному полю определенное распределение и перемещение энергии и импульса. А это, разумеется, нужно сделать в соответствии с действительностью и прежде всего так, чтобы соблюдался закон сохранения энергии и импульса. При этом нужно учитывать, что энергия и импульс электромагнитного поля могут не только перемещаться, но и переходить в другую (механическую) форму. Мы увидим позже (§ 73), что выражение (71.19) подобрано действительно так, что оно удовлетворяет поставленным условиям.

Чтобы увидеть конкретный смысл формул (71.19), запишем их в развернутом виде в ортонормированной координатной системе. При этом мы будем пользоваться таблицей (69.9) и соотношениями (70.14).

Вычислим сначала инвариант $F^{pq}F_{pq}$, т. е. сумму произведений соответствующих элементов матриц F^{pq} и F_{pq}. Эти элементы согласно (70.14) или равны или отличаются лишь знаком; последнее имеет место в случае $F^{0\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3$). Заменяя соответственно F^{pq} через $\pm F_{pq}$ и учитывая косую симметрию матрицы F_{pq}, получаем:

$$\begin{aligned} F^{pq}F_{pq} &= 2\left(-F_{01}^2 - F_{02}^2 - F_{03}^2 + F_{12}^2 + F_{23}^2 + F_{31}^2\right) = \\ &= 2\left(-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2\right) = 2\left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right). \end{aligned} \tag{71.20}$$

Далее, учитывая, что

$$g_{00} = -1, \quad g_{\lambda\lambda} = 1, \quad g_{pq} = 0 \quad (p \neq q),$$

получим

$$F^{ip}F^{jq}g_{pq} = -F^{i0}F^{j0} + \sum_{\lambda=1}^{3} F^{i\lambda}F^{j\lambda}. \tag{71.21}$$

В частности,

$$F^{0p}F^{0q}g_{pq}=\sum_{\lambda=1}^{3}(F^{0\lambda})^2=E_x^2+E_y^2+E_z^2=\mathbf{E}^2, \tag{71.22}$$

$$F^{0p}F^{1q}g_{pq}=\sum_{\lambda=1}^{3}F^{0\lambda}F^{1\lambda}=E_yH_z-E_zH_y. \tag{71.23}$$

Вычисляем теперь T^{00} из (71.19), пользуясь (71.20) и (71.22), а также учитывая, что $g^{00}=-1$:

$$T^{00}=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2)+\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}^2=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2). \tag{71.24}$$

Такой вид имеет, следовательно, *плотность энергии электромагнитного поля*. Далее, находим T^{01}, T^{02}, T^{03}, пользуясь (71.19) и (71.23) и учитывая, что $g^{ij}=0\,(i\neq j)$, в частности, $g^{01}=0$:

$$\left.\begin{aligned} T^{01}&=\frac{1}{4\pi}(E_yH_z-E_zH_y),\\ T^{02}&=\frac{1}{4\pi}(E_zH_x-E_xH_z),\\ T^{03}&=\frac{1}{4\pi}(E_xH_y-E_yH_x). \end{aligned}\right\} \tag{71.25}$$

Таким образом, проекции вектора $\frac{1}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ на координатные оси X, Y, Z совпадают с T^{01}, T^{02}, T^{03}. Согласно физическому смыслу этих величин вектор $\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]$ дает *плотность импульса электромагнитного поля*, а вектор $\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ — *плотность потока энергии электромагнитного поля*. Проекции последнего вектора на оси X, Y, Z дают плотности потока энергии в направлениях этих осей.

Аналогичным образом можно было бы вычислить и плотности потока импульса.

3°. Рассмотрим еще пример, хотя и далеко не столь общего значения, как первые два. Пусть в инерциальной системе S *покоится* тело, находящееся в напряженном состоянии, возникшем, например, в результате упругой деформации. Ввиду того, что тело покоится, плотность импульса равна нулю:

$$T^{0\lambda}=0 \quad (\lambda=1,\ 2,\ 3).$$

Матрица T^{ij} состоит по существу из элемента T^{00} (плотности энергии) и из матрицы третьего порядка $T^{\nu\lambda}$ (ν, $\lambda=1$, 2, 3).

Оказывается, что в нашем примере *эта часть тензора энергии-импульса лишь знаком отличается от трехмерного тензора напряжений* $f_{\nu\lambda}$ (§ 14). В самом деле, в произвольной точке рассматриваемого тела установим бесконечно малую площадку dS, ортогональную к оси X. Тогда на единицу площади этой площадки согласно (14.10) действует сила

$$\mathbf{P}(f_{11},\ f_{12},\ f_{13}), \tag{71.26}$$

а на всю площадку — сила $\mathbf{P}\,dS\,(f_{11}\,dS,\ f_{12}\,dS,\ f_{13}\,dS)$. Точнее, эта сила действует через площадку на часть тела, расположенную за площадкой (т. е. в сторону $-X$). За время ε этой части тела будет сообщен тем самым импульс

$$\mathbf{P}\,dS\varepsilon\,(f_{11}\,dS\varepsilon,\ f_{12}\,dS\varepsilon,\ f_{13}\,dS\varepsilon),$$

который, таким образом, протек через площадку в сторону $-X$. Чтобы установить *плотность потока импульса* в направлении $-X$, достаточно отнести протекший импульс к единице площади и к единице времени, т. е. поделить на dS и ε. Получаем снова (71.26). Таким образом, напряжения f_{11}, f_{12}, f_{13} равны плотностям потока трех проекций импульса в направлении $-X$, а следовательно, лишь знаком отличаются от T^{11}, T^{12}, T^{13}, которые выражают то же самое, но в направлении $+X$. Это же справедливо и для других координатных осей, так что окончательно

$$T^{\nu\lambda} = -f_{\nu\lambda} \quad (\nu,\ \lambda = 1,\ 2,\ 3). \tag{71.27}$$

Конечно, мы предполагали в этом рассуждении, что, кроме напряжений в теле, нет других причин для появления потока импульса.

Если перейти в другую инерциальную систему S', то тензор энергии-импульса пересчитывается по закону (71.20). Как отсюда можно заключить, на плотность энергии и импульса, наблюдаемых в системе S', имеет влияние не только плотность энергии, наблюдавшаяся в системе S (плотность импульса была равна нулю), *но и напряжения, наблюдавшиеся в системе* S. Если в системе S покоятся два тела с одинаковой плотностью энергии (и нулевой плотностью импульса), но одно находящееся в напряженном состоянии, а другое нет, то в системе S' они будут обладать различными (вообще говоря) плотностями энергии и импульса.

Таким образом, объединение плотностей энергии, импульса и потока импульса в один четырехмерный тензор не является лишь формальностью; совокупность этих величин образует единую физическую сущность, и это проявляется в том, что одни из них способны «переходить» в другие, когда мы меняем инерциальную систему.

§ 72. Закон сохранения энергии и импульса

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос, каким образом обеспечиваются законы сохранения энергии и импульса, когда распределение и перемещение энергии и импульса задается тензором T^{ij}. Будем вести рассмотрение относительно какой-либо инерциальной системы S, пользуясь соответствующими ей ортонормированными координатами x^i в пространстве событий. Выделим покоящуюся относительно системы S трехмерную область ω, ограниченную поверхностью Π. Будем наблюдать втекание и вытекание энергии через поверхность Π, причем говорить будем только о вытекании (втекание оцениваем как отрицательное вытекание). Согласно (71.16) скорость этого вытекания будет равна:

$$q^0 = c \iint\limits_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{0\lambda} n_\lambda \, dS. \tag{72.1}$$

Преобразуем это выражение по теореме Остроградского (18.2):

$$q^0 = c \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^\lambda} d\omega. \tag{72.2}$$

За бесконечно малый промежуток времени ε количество вытекшей через Π энергии будет равно:

$$q^0 \varepsilon = \varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^\lambda} d\omega. \tag{72.3}$$

Здесь и в дальнейшем бесконечно малыми высшего порядка мы пренебрегаем. С другой стороны, увеличение количества энергии в области ω за время ε можно подсчитать следующим образом. Общее количество энергии в пределах области ω выражается в каждый момент времени t интегралом

$$\iiint\limits_{\omega} T^{00} \, d\omega, \tag{72.4}$$

так как T^{00} есть плотность энергии. При этом не нужно забывать, что тензор энергии импульса T^{ij} образует поле в пространстве событий, так что, в частности, T^{00} есть функция от x^i, т. е. от x, y, z и времени t. Но по x, y, z в (72.4) произведено интегрирование, так что интеграл есть функция только от времени t. Увеличение количества энергии за время ε можно подсчитать как дифференциал этой функции:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \iiint\limits_{\omega} T^{00} \, d\omega = \varepsilon \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} d\omega. \tag{72.5}$$

Таким образом, за время ε внутри области ω появилось дополнительное количество энергии (72.5), и еще некоторое количество энергии (72.3) вытекло за пределы области. Складывая эти два выражения, мы получаем *то количество энергии, которое возникло за время* ε *внутри области* ω:

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \left(\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial T^{00}}{c\,\partial t} \right) d\omega. \tag{72.6}$$

Учитывая, что $\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} = \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0}$, так как $ct = x^0$, получаем окончательно:

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} d\omega, \tag{72.7}$$

где под знаком интеграла происходит суммирование по $j = 0, 1, 2, 3$. Спрашивается, каким образом возникла энергия (72.7)?

Если рассматриваемый нами тензор энергии-импульса является *частичным*, т. е. связан с одним лишь видом явлений (например, электромагнитным полем), то такое возникновение энергии *данного вида* возможно за счет исчезновения энергии *другого вида* (например, механической) и означает лишь переход одного вида энергии в другой. Если же T^{ij} есть *полный* тензор энергии-импульса, т. е. исчерпывает всю картину *распределения и перемещения энергии-импульса*, то посторонние источники энергии отсутствуют и *количество возникшей энергии* (72.7) *должно всегда равняться нулю (закон сохранения энергии)*.

Итак, в случае *полного тензора энергии-импульса*

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} d\omega = 0$$

при любом выборе области ω и в любой момент времени. Это возможно только в случае тождественного обращения в нуль подынтегрального выражения

$$\frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} = 0. \tag{72.8}$$

Так записывается закон сохранения энергии с точки зрения данной инерциальной системы S.

То, что сделано сейчас для *энергии*, мы дословно повторим для импульса. Согласно (71.18) скорость вытекания ν-й проекции импульса через поверхность Π, ограничивающую область ω, выражается формулой

$$q^\nu = \iint\limits_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{\nu\lambda} n_\lambda \, dS = \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} d\omega.$$

Последнее выражение получено по теореме Остроградского. Следовательно, скорость вытекания самого импульса равна:

$$\sum_{\nu=1}^{3} q^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}}\, d\omega.$$

За бесконечно малое время ε через П вытечет импульс

$$\varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} q^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} = \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}}\, d\omega. \tag{72.9}$$

С другой стороны, импульс, заключенный в ω в данный момент времени t, равен:

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} T^{\nu 0}\, d\omega,$$

так как ν-я проекция плотности импульса ($\nu = 1, 2, 3$) равна $\frac{1}{c} T^{\nu 0}$, а значит, сама плотность импульса имеет вид $\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} T^{\nu 0}$. Увеличение импульса в области ω за время ε можно подсчитать аналогично (72.5). Получаем:

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} T^{\nu 0}\, d\omega\right) = \frac{\varepsilon}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu 0}}{\partial t}\, d\omega =$$
$$= \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu 0}}{\partial x^{0}}\, d\omega. \tag{72.10}$$

Объединяя (72.9) и (72.10), т. е. импульс, вытекший через П, и импульс, дополнительно обнаруженный в ω, получаем *общее количество импульса, возникшего в области* ω *за время* ε:

$$\varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^{j}}\, d\omega. \tag{72.11}$$

Здесь по $j = 0, 1, 2, 3$ происходит суммирование. Как и в случае энергии, возникший в области ω импульс (72.11) может быть отличен от нуля, только если T^{ij} — частичный тензор энергии-импульса и речь идет об импульсе частного вида. Если же T^{ij} — полный тензор энергии-импульса, то импульс, возникший в области ω, должен равняться нулю (закон сохранения импульса). Мы получаем, следовательно:

$$\sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu \iiint_\omega \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j}\, d\omega = 0.$$

Отсюда коэффициенты при $\mathbf{e}_\nu$ по отдельности равны нулю:

$$\iiint_\omega \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j} = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3).$$

А так как это равенство верно для любой области ω и любого момента времени t, то подынтегральное выражение тождественно равно нулю:

$$\frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j} = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3). \tag{72.12}$$

Так выглядит *закон сохранения импульса* с точки зрения инерциальной системы S. Объединяя его с законом сохранения энергии (72.8), пишем:

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{72.13}$$

В этой форме закон *сохранения энергии-импульса имеет вид инвариантного тензорного соотношения в пространстве событий.*

В самом деле, совокупность частных производных $\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}$ для любого дважды контравариантного тензорного поля T^{ij} образует, как мы знаем (§ 38), поле тензора, дважды контравариантного и один раз ковариантного. Тогда $\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}$, где по j происходит свертывание, дает снова тензор (один раз контравариантный), который мы обозначим T^i:

$$T^i = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}. \tag{72.14}$$

Этот тензор естественно назвать *дивергенцией тензора T^{ij} в четырехмерном пространстве событий.* Теперь (72.13) принимает вид

$$T^i = 0. \tag{72.15}$$

Таким образом, закон сохранения энергии-импульса записывается в виде обращения в нуль дивергенции полного тензора энергии-импульса. Ясно, что если координаты тензора T^i равны нулю в одной координатной системе, то то же имеет место и в любой другой. Поэтому и закон сохранения энергии-импульса имеет инвариантный характер и, будучи установлен в одной инерциальной системе S, соблюдается и в любой другой S'. Закон сохранения энергии-импульса (72.13), как мы видим, накладывает существенное ограничение на допустимый выбор полного тензора энергии-импульса. Разумеется, если тензор энергии-импульса является частичным, то его дивергенция T^i не обязана обращаться в нуль.

§ 73. Дивергенция тензора энергии-импульса электромагнитного поля

Пусть теперь T^{ij} является *частичным* тензором энергии-импульса, а именно, отвечает электромагнитному полю согласно (71.19):

$$T^{ij} = -\frac{g^{ij}}{16\pi} F^{pq} F_{pq} + \frac{1}{4\pi} F^{ip} F^{jq} g_{pq}. \qquad (73.1)$$

Тогда в области ω за время ε возникают (за счет перехода из других форм) некоторые количества энергии и импульса электромагнитного поля, которые выражаются согласно (72.7) и (72.11). Пользуясь дивергенцией тензора энергии-импульса (72.14), эти выражения энергии и импульса можно переписать в виде

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} T^0 \, d\omega, \qquad \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu \iiint\limits_{\omega} T^\nu \, d\omega. \qquad (73.2)$$

Подсчитаем теперь дивергенцию тензора (73.1). Заметим предварительно, что при дифференцировании выражения $F^{pq}F_{pq}$ можно дифференцировать лишь второй множитель и затем результат удваивать. В самом деле, дифференцирование первого множителя дает тот же результат, что и дифференцирование второго

$$\frac{\partial F^{pq}}{\partial x^k} F_{pq} = F^{pq} \frac{\partial F_{pq}}{\partial x^k}. \qquad (73.3)$$

Чтобы убедиться в этом, выражаем F^{pq} как результат поднятия индексов у F_{ij}:

$$F^{pq} = g^{pi} g^{qj} F_{ij}$$

и вставляем в обе части проверяемого равенства (73.3). Получим (учитывая, что g_{ij} и g^{ij} — константы):

$$g^{pi} g^{qj} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} F_{pq} = g^{pi} g^{qj} F_{ij} \frac{\partial F_{pq}}{\partial x^k},$$

а это — тождество, в чем легко убедиться, переставляя в одной из частей равенства обозначения индексов суммирования p, i и q, j.

Теперь вычисляем дивергенцию:

$$T^i=\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}=$$
$$=-\frac{g^{ij}}{16\pi}\cdot 2F^{pq}\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ip}}{\partial x^j}F^{jq}g_{pq}+\frac{1}{4\pi}F^{ip}\frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j}g_{pq}. \quad (73.4)$$

Полученное выражение можно значительно упростить. В первом члене мы заменяем множитель $\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}$, пользуясь уравнениями Максвелла (70.6):

$$\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}=-\frac{\partial F_{qj}}{\partial x^p}-\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}. \quad (73.5)$$

Получаем:

$$-\frac{g^{ij}}{16\pi}\cdot 2F^{pq}\frac{\partial F_{pq}}{\partial x^j}=\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{qj}}{\partial x^p}+\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}. \quad (73.6)$$

Оба слагаемых здесь равны, в чем легко убедиться, заменяя в первом из них обозначения индексов суммирования p на q, и наоборот. Тогда первое слагаемое примет вид

$$\frac{g^{ij}}{8\pi}F^{qp}\frac{\partial F_{pj}}{\partial x^q}$$

и совпадет со вторым (так как перестановка индексов у F^{pq}, F_{jp} дважды меняет знак выражения). Поэтому в (73.6) мы сохраняем лишь удвоенное второе слагаемое и, подставляя в (73.4), получаем:

$$T^i=\frac{g^{ij}}{4\pi}F^{pq}\frac{\partial F_{jp}}{\partial x^q}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ip}}{\partial x^j}F^{jq}g_{pq}+\frac{1}{4\pi}F^{ip}\frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j}g_{pq}. \quad (73.7)$$

Первые два члена в правой части взаимно уничтожаются. Действительно, в первом члене происходит поднятие первого индекса у F_{jp}, так что его можно переписать в виде

$$\frac{1}{4\pi}F^{pq}\frac{\partial F^{i\cdot}_{\cdot p}}{\partial x^q}.$$

Во втором члене происходит опускание второго индекса у F^{ip}, так что этот член принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{i\cdot}_{\cdot q}}{\partial x^j}F^{jq}.$$

Заменяя здесь обозначения индексов суммирования q, j на p, q, убеждаемся, что это выражение отличается от предыдущего лишь знаком (так как $F^{qp}=-F^{pq}$).

Итак, (73.7) принимает вид

$$T^i = \frac{1}{4\pi} F^{ip} \frac{\partial F^{jq}}{\partial x^j} g_{pq}. \tag{73.8}$$

Воспользуемся уравнениями Максвелла (70.17):

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 4\pi s^i \quad \left(\text{а следовательно, } \frac{\partial F^{ji}}{\partial x^j} = -4\pi s^i\right).$$

Теперь (73.8) дает окончательно

$$T^i = -F^{ip} s^q g_{pq}. \tag{73.9}$$

Выясним физический смысл тензора T^i с точки зрения какой-либо инерциальной системы S, рассматривая координаты T^i в соответствующей ортонормированной координатной системе x^i (заметим, что все тензоры и тензорные соотношения, которые у нас встречаются, можно рассматривать в любой аффинной координатной системе, но физическое истолкование они получают лишь в ортонормированных системах). Тогда $g_{00} = -1$, $g_{\lambda\lambda} = 1$ $(\lambda = 1, 2, 3)$, остальные $g_{pq} = 0$, так что (73.9) приобретает вид

$$T^i = F^{i0}s^0 - F^{i1}s^1 - F^{i2}s^2 - F^{i3}s^3. \tag{73.10}$$

Пользуясь таблицей (69.9) и соотношениями (70.14), получаем:

$$\left.\begin{array}{lll} F^{10} = -E_x, & F^{20} = -E_y, & F^{30} = -E_z, \\ F^{12} = H_z, & E^{23} = H_x, & F^{31} = H_y. \end{array}\right\} \tag{73.11}$$

При этом $F^{ii} = 0$ и $F^{ji} = -F^{ij}$. Кроме того, согласно (68.13)

$$s^0 = \rho, \quad s^1 = \rho\frac{u_x}{c}, \quad s^2 = \rho\frac{u_y}{c}, \quad s^3 = \rho\frac{u_z}{c}. \tag{73.12}$$

Теперь окончательно подсчитываем T^i при $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{array}{l} T^0 = -\frac{\rho}{c}(E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z) = -\frac{\rho}{c}\,\mathbf{uE}, \\ T^1 = -\frac{\rho}{c}(cE_x + H_z u_y - H_y u_z) \end{array}\right\} \tag{73.13}$$

и далее круговой подстановкой x, y, z. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{\nu=1}^{3} T^\nu \mathbf{e}_\nu = -\rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{uH}]\right). \tag{73.14}$$

Здесь ρ есть плотность заряда, а $\mathbf{u}$ — скорость его движения.

Подсчитаем теперь первое из выражений (73.2):

$$\varepsilon c \int\int\int_{\omega} T^0\, d\omega = -\int\int\int_{\omega} \varepsilon \mathbf{u}\mathbf{E}\rho\, d\omega. \qquad (73.15)$$

Так как $\rho\, d\omega$ — заряд, заключенный в элемент объема $d\omega$, то $\mathbf{E}\rho\, d\omega$ — сила электрического поля, действующая на этот заряд; $\varepsilon\mathbf{u}$ — вектор бесконечно малого смещения за время ε; следовательно, стоящее под знаком интеграла скалярное произведение дает работу, совершаемую электромагнитным полем над элементом заряда за время ε (магнитное поле работы не производит). Сам же интеграл в правой части означает *работу, произведенную электромагнитным полем в пределах области ω за время ε над частицами, несущими электрические заряды.* Эта работа идет на приращение механической энергии частиц. Но так как правая часть (73.15) содержит интеграл с обратным знаком, то она выражает *убыль* механической энергии частиц.

Окончательно, равенство (73.15) означает, что *возникновение энергии в электромагнитном поле (левая часть) происходит за счет убыли такого же количества механической энергии заряженных частиц (правая часть).*

Таким образом, во взаимоотношениях электромагнитного поля и движущихся в нем заряженных частиц *соблюдается закон сохранения энергии.*

Теперь подсчитаем второе выражение (73.2), пользуясь соотношением (73.14):

$$\varepsilon \int\int\int_{\omega} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu T^\nu\, d\omega = -\int\int\int_{\omega} \varepsilon \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{H}]\right) \rho\, d\omega. \qquad (73.16)$$

В круглых скобках стоит сила, действующая в электромагнитном поле на единицу заряда, движущегося со скоростью $\mathbf{u}$; после умножения на элемент заряда $\rho\, d\omega$ получаем действующую на него силу, а после умножения на ε — импульс, который сообщается электромагнитным полем элементу заряда за время ε. Сам же интеграл в правой части означает, следовательно, *механический импульс, сообщенный электромагнитным полем в пределах области ω за время ε частицам, несущим электрические заряды.* Так как правая часть (73.16) содержит интеграл с обратным знаком, то она выражает *убыль* механического импульса частиц.

Окончательно смысл равенства (73.16) состоит в том, что *возникновение импульса электромагнитного поля (левая часть) происходит за счет убыли такого же количества механического импульса заряженных частиц.* Таким образом, в балансе электромагнитного и механического импульса соблюдается закон сохранения импульса.

Напомним, что мы говорили до сих пор об энергии, импульсе и потоке энергии и импульса в электромагнитном поле, *предполагая,* что его тензор энергии-импульса имеет вид (73.1). Лишь теперь это предположение оправдано в том смысле, что оно правильно описывает переход энергии и импульса из электромагнитной формы в механическую и обратно: закон сохранения энергии-импульса при этом соблюдается.

§ 74*. Волновое уравнение Дирака для свободного электрона

В этом параграфе мы рассмотрим один вопрос релятивистской (т. е. согласованной с теорией относительности) квантовой механики. Изменение состояния электрона с течением времени описывается в ней спинорным полем в пространстве событий

$$\psi_\lambda = \psi_\lambda (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \quad \psi_{\hat\lambda} = \psi_{\hat\lambda} (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{74.1}$$

Здесь, как обычно,

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3 = ct,\ x,\ y,\ z \tag{74.2}$$

в некоторой инерциальной системе отсчета. Так как пространство событий представляет собой псевдоевклидово пространство $R_4^{(1)}$, то все, сказанное относительно спинорных полей в § 60, применимо и в нашем случае.

Закон изменения состояния электрона с течением времени выражается системой дифференциальных уравнений, наложенных на функции (74.1) и имеющих одинаковый (инвариантный) вид в любой инерциальной системе отсчета. Эти уравнения согласно Дираку будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} m_0 c \psi^\lambda &= \hbar D^{\lambda\hat\mu} \psi_{\hat\mu}, \\ m_0 c \psi^{\hat\lambda} &= \hbar D^{\hat\lambda\mu} \psi_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{74.3}$$

Здесь m_0 — масса покоя электрона, c — скорость света, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, где h — *постоянная Планка*. Величины ψ^λ, $\psi^{\hat\lambda}$, стоящие в левых частях уравнений, это контравариантные координаты того же самого спинора ψ_λ, $\psi_{\hat\lambda}$, который входит в правые части. Операторы $D^{\lambda\hat\mu} = D^{\hat\mu\lambda}$ имеют тот же смысл, что и в § 60.

Инвариантный характер уравнений (74.3) виден из того, что их правые части согласно (60.7) представляют собой также контравариантные координаты некоторого спинора и преобразуются, следовательно, одинаково с левыми частями. Напишем теперь уравнения (74.3) в развернутом виде при $\lambda = 1,\ 2,\ \hat\lambda = \hat 1,\ \hat 2$, причем правые части развернем согласно (60.8), а в левых частях контравариантные координаты нашего спинора выразим через ковариантные согласно (57.7). Получим:

$$\left.\begin{aligned}
-m_0c\psi_2 &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^0}+\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^1}+i\,\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^2}\right),\\
m_0c\psi_1 &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^1}-i\,\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x^0}\right),\\
-m_0c\psi_{\hat{2}} &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x^0}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x^1}-i\,\frac{\partial\psi_2}{\partial x^2}\right),\\
m_0c\psi_{\hat{1}} &= \hbar\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x^1}+i\,\frac{\partial\psi_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x^3}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x^0}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(74.4)$$

Это и есть *волновые уравнения Дирака для свободного электрона.* Мы здесь не имеем возможности вдаваться в физический смысл этих уравнений и хотели лишь показать их инвариантный характер на основе предыдущей теории спиноров. Заметим только, что из уравнений Дирака можно без труда выразить частные производные по времени $\frac{\partial\psi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial t}$ через сами функции ψ_1, ψ_2, $\psi_{\hat{1}}$, $\psi_{\hat{2}}$, и их частные производные по пространственным координатам x, y, $z=x^1$, x^2, x^3 $\left(\text{не нужно забывать, что } \frac{\partial\psi_1}{\partial x^0}=\frac{1}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} \text{ и т. д.}\right)$. Получим:

$$\left.\begin{aligned}
\hbar\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial t} &= -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial z}+\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial x}+i\,\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial y}\right)-m_0c^2\psi_2,\\
\hbar\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial t} &= -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial x}-i\,\frac{\partial\psi_{\hat{1}}}{\partial y}-\frac{\partial\psi_{\hat{2}}}{\partial z}\right)+m_0c^2\psi_1,\\
\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-i\,\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)-m_0c^2\psi_{\hat{2}},\\
\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= -\hbar c\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+i\,\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)+m_0c^2\psi_{\hat{1}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(74.5)$$

Это означает, что по начальному состоянию электрона при данном значении t мы можем, интегрируя систему уравнений Дирака, определить его состояние при любом значении t *). Со спинорным полем электрона связано векторное поле *плотности тока.* Не вдаваясь в разъяснение его физического смысла, покажем, как оно возникает

---

*) Уравнения Дирака в этой форме см., например, В. А. Фок, Начала квантовой механики, КУБУЧ, 1932, стр. 182, формула (19); при этом нужно иметь в виду, что наши ψ_1, ψ_2, $\psi_{\hat{1}}$, $\psi_{\hat{2}}$ совпадают с ψ_1, ψ_2, $-i\psi_3$, $-i\psi_4$ в обозначениях В. А. Фока.

из нашего спинорного поля ψ^{λ}, $\psi^{\hat\lambda}$. С каждым спинором ψ^{λ}, $\psi^{\hat\lambda}$ можно связать *сопряженный спинор* $\tilde\psi^{\lambda}$, $\tilde\psi^{\hat\lambda}$, составленный следующим образом:

$$\tilde\psi^{\lambda} = (\psi^{\hat\lambda})^*, \quad \tilde\psi^{\hat\lambda} = (\psi^{\lambda})^*. \tag{74.6}$$

Здесь звездочка по-прежнему означает комплексную сопряженность. Покажем, что построение сопряженного спинора этим путем имеет инвариантный смысл в нашем псевдоевклидовом пространстве $R_4^{(1)}$, если ограничиться вращениями лишь собственными и несобственными 1-го рода. Последние связаны с зеркальными отражениями репера в пространственном смысле, без изменения ориентации на оси времени $x^0 = ct$. Поэтому наше ограничение с физической точки зрения является вполне естественным, так как системы отсчета с обращенным течением времени в природе не существуют. Рассмотрим сначала случай, когда репер $\mathfrak{R}$ в $R_4^{(1)}$ испытывает собственное вращение. Тогда ψ^1, ψ^2 преобразуются в $\psi^{1'}$, $\psi^{2'}$ при помощи некоторой унимодулярной матрицы, а значит, $(\psi^1)^*$, $(\psi^2)^*$ преобразуются при помощи комплексно сопряженной матрицы, т. е. так же, как вторая пара координат спинора $\psi^{\hat 1}$, $\psi^{\hat 2}$ (см. (59.5)). Таким образом, $\tilde\psi^{\hat 1}$, $\tilde\psi^{\hat 2}$, совпадающие с $(\psi^1)^*$, $(\psi^2)^*$ согласно (74.6), преобразуются так, как подобает координатам спинора. Аналогичным образом показываем это и для $\tilde\psi^1$, $\tilde\psi^2$.

Пусть теперь репер испытывает несобственное вращение 1-го рода; приходим к тому же результату, используя вместо (59.5) формулы (59.7).

Составим из данного спинора ψ^{λ}, $\psi^{\hat\lambda}$ и ему сопряженного $\tilde\psi^{\lambda}$, $\tilde\psi^{\hat\lambda}$ спинтензор $c^{\lambda\hat\mu} = c^{\hat\mu\lambda}$ по формуле

$$c^{\lambda\hat\mu} = \psi^{\lambda}\tilde\psi^{\hat\mu} + \tilde\psi^{\lambda}\psi^{\hat\mu}, \quad c^{\hat\mu\lambda} = \psi^{\hat\mu}\tilde\psi^{\lambda} + \tilde\psi^{\hat\mu}\psi^{\lambda}. \tag{74.7}$$

Другими словами, мы перемножили наши спиноры как одновалентные спинтензоры, в результате чего по общему правилу перемножения тензоров получился двухвалентный спинтензор. Перемножение мы выполнили при одном и при другом порядке множителей и результаты сложили. Наконец, мы откинули (положили равными нулю) координаты $c^{\lambda\mu}$, $c^{\hat\lambda\hat\mu}$ и сохранили лишь $c^{\lambda\hat\mu}$, $c^{\hat\mu\lambda}$. Здесь мы воспользовались уже специфическими свойствами спинтензоров, в силу которых координаты этих двух типов преобразуются по отдельности и образуют как бы два подтензора в составе каждого двухвалентного спинтензора. Наш спинтензор допускает истолкование в виде вектора в $R_4^{(1)}$ согласно (58.1). Учитывая, что $x^4 = ix^0$, и заменяя $c^{\lambda\hat\mu}$

согласно (74.7), а $\tilde{\psi}^{\lambda}$, $\tilde{\psi}^{\hat{\lambda}}$ согласно (74.6), получаем:

$$
\begin{aligned}
x^0 &= -\frac{1}{2}\left(c^{1\hat{1}} + c^{2\hat{2}}\right) = -\frac{1}{2}\{\psi^1(\psi^1)^* + \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{1}})^* + \\
&\qquad\qquad + \psi^2(\psi^2)^* + \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{2}})^*\},\\
x^1 &= \frac{1}{2}\left(c^{1\hat{2}} + c^{2\hat{1}}\right) = -\frac{1}{2}\{-\psi^1(\psi^2)^* - \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{1}})^* - \\
&\qquad\qquad - \psi^2(\psi^1)^* - \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{2}})^*\},\\
x^2 &= \frac{1}{2i}\left(c^{1\hat{2}} - c^{2\hat{1}}\right) = -\frac{1}{2}\{i\psi^1(\psi^2)^* + i\psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{1}})^* - \\
&\qquad\qquad - i\psi^2(\psi^1)^* - i\psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{2}})^*\},\\
x^3 &= \frac{1}{2}\left(c^{1\hat{1}} - c^{2\hat{2}}\right) = -\frac{1}{2}\{-\psi^1(\psi^1)^* - \psi^{\hat{1}}(\psi^{\hat{1}})^* + \\
&\qquad\qquad + \psi^2(\psi^2)^* + \psi^{\hat{2}}(\psi^{\hat{2}})^*\}.
\end{aligned}
$$

Обозначая $A^i = -2x^i$ и переходя в правых частях к ковариантным координатам спинора, согласно (57.7) получаем:

$$
\left.
\begin{aligned}
A^0 &= \psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{1}}^* + \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{2}}^*.\\
A^1 &= \psi_2\psi_1^* + \psi_1\psi_2^* + \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{1}}^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{2}}^*,\\
A^2 &= -i\psi_2\psi_1^* + i\psi_1\psi_2^* + i\psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{1}}^* - i\psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{2}}^*,\\
A^3 &= \psi_1\psi_1^* - \psi_2\psi_2^* + \psi_{\hat{1}}\psi_{\hat{1}}^* - \psi_{\hat{2}}\psi_{\hat{2}}^*.
\end{aligned}
\right\}
\tag{74.8}
$$

Этот вектор и есть вектор плотности тока, инвариантно связанный со всяким спинорным полем (74.1). При этом мы устранили несобственные вращения репера 2-го и 3-го родов; если бы их рассмотреть, то оказалось бы, что при них вектор плотности тока не остается инвариантным, а умножается на -1 *).

---

*) Заметим что наши A^i совпадают с A_i ($i=0, 1, 2, 3$) в «Началах квантовой механики» В. А. Фока, стр. 189, если учесть указанную выше связь обозначений.

ГЛАВА V

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В АФФИННОМ И ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВАХ

До сих пор мы рассматривали n-мерные аффинные и евклидовы пространства лишь в аффинных координатах, т. е. таких, которые наиболее естественно связаны с геометрическими свойствами этих пространств.

В этой главе продолжаем заниматься теми же пространствами, но уже с более широкой точки зрения — относя их к произвольным криволинейным координатам. Это играет роль и для геометрии самих этих пространств (например, для изучения криволинейных образов в них), однако главное назначение этой главы — служить переходным этапом к *пространствам аффинной связности* (обобщение аффинного пространства) и к *римановым пространствам* (обобщение евклидова пространства).

Начиная с этой главы и до конца книги, мы будем заниматься исключительно вещественными пространствами, и все встречающиеся в дальнейшем переменные величины и отдельные числа считаем вещественными, если не оговорено противное.

§ 75. Криволинейные координаты в аффинном пространстве

Имея аффинный репер $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ в n-мерном аффинном пространстве, мы относили каждой точке M координаты x^i, разлагая ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам репера

$$\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{75.1}$$

От одной аффинной координатной системы к другой мы переходили линейным преобразованием

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}, \tag{75.2}$$

где коэффициенты выбираются произвольно с единственным условием

$$\operatorname{Det} | A_i^{i'} | \neq 0.$$

При этом новые векторы репера разлагались по старым векторам

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i}\mathbf{e}_{i}, \tag{75.3}$$

где $A_{i'}^{i}$ и $A_{i}^{i'}$ — взаимно обратные матрицы, а координаты *инвариантного* вектора $\mathbf{x}$ испытывали преобразование

$$x^{i'} = A_{i}^{i'}x^{i}. \tag{75.4}$$

Мы введем криволинейные координаты, обобщая преобразование координат (75.2), а именно, заменяя в правой части линейные функции координат x^i их «произвольными» функциями, конечно, с известными ограничениями.

Но сначала дадим некоторые определения. *Арифметическим пространством* n измерений называется множество всевозможных последовательностей вида $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, где $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — произвольные вещественные числа; отдельные последовательности $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ называются *точками* арифметического пространства, а числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — *координатами* точек.

Областью (открытым множеством) в арифметическом пространстве называется такое множество его точек, что вместе с каждой своей точкой $x = (x^1, \ldots, x^n)$ оно содержит и любую точку $y = (y^1, \ldots, y^n)$, для которой

$$|y^i - x^i| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где δ — некоторое положительное число (выбор которого зависит от точки x).

Иными словами, область характеризуется тем, что вместе с каждой своей точкой она обязательно содержит и охватывающий эту точку многомерный куб, если только этот куб имеет достаточно малые размеры. Разумеется, вместо куба можно брать (многомерный) шар и т. п.

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — независимые переменные, и пусть системы значений, которые они способны принимать, образуют область в арифметическом пространстве; тогда эту область мы будем называть областью изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$.

Множество Ω точек n-мерного аффинного пространства мы назовем областью, если последовательность $(x^1, \ldots, x^n)$ аффинных координат точки $M \in \Omega$ описывает область в арифметическом пространстве.

Нетрудно показать, что смысл этого определения не меняется при переходе к другой аффинной системе координат, хотя область в арифметическом пространстве становится, конечно, иной.

Мы будем обычно предполагать, что рассматриваемые области являются связными, т. е. что любые две точки области:

$a=(a^1,\ldots,a^n)$, $b=(b^1,\ldots,b^n)$ — могут быть соединены непрерывным путем, проходящим по области: $x^i=f^i(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$; $f^i(0)=a^i, f^i(1)=b^i$, где $f^i(t)$ — непрерывные функции.

Пусть в некоторой n-мерной связной области Ω аффинного пространства заданы n непрерывно дифференцируемых однозначных функций аффинных координат $f_k(x^1,\ldots,x^n)$ $(k=1,\ldots,n)$. Введем новые переменные $x^{1'}, x^{2'},\ldots,x^{n'}$ посредством уравнений

$$x^{i'}=f_i(x^1,\ldots,x^n); \tag{75.5}$$

пусть они пробегают область изменения Ω'. Мы наложим, далее, на функции f_i требование, чтобы преобразование (75.5) *было обратимым, точнее, чтобы из уравнений* (75.5) *можно было бы, обратно, однозначно выразить x^i как непрерывно дифференцируемые функции от $x^{i'}$:*

$$x^i=g_i(x^{1'},\ldots,x^{n'}) \tag{75.6}$$

во всей области Ω' изменения переменных $x^{i'}$.

В этом случае переменные $x^{i'}$ мы будем называть *криволинейными координатами в области Ω аффинного пространства. Коротко говоря, переменные $x^{i'}$ с областью изменения Ω' называются криволинейными координатами в области Ω, если они связаны с аффинными координатами в области Ω обратимым и в обе стороны однозначным и непрерывно дифференцируемым преобразованием.*

Тем самым, в частности, системы значений $x^{1'},\ldots,x^{n'}$ из области Ω' взаимно однозначно отвечают точкам области Ω, что и оправдывает название *координат* для переменных $x^{i'}$. Область Ω может, в частности, совпадать и со всем пространством, но это для нас мало существенно и вот почему. Дальнейшие исследования будут носить большей частью дифференциально геометрический характер, т. е. относиться к бесконечно малой окрестности точки, а для этого достаточно иметь координатную систему $x^{i'}$ в некоторой области Ω, содержащей эту точку.

Мы предположили, что функции f_i, g_i непрерывно дифференцируемы, т. е. имеют непрерывные частные производные до некоторого порядка N включительно. При этом в §§ 75, 76 достаточно ограничиться $N=1$, а начиная с § 77 и до конца главы, мы будем предполагать $N=2$. Позже понадобится $N=3$ и больше. Мы не будем в каждом случае оговаривать это особо, а просто факт записи производных данного порядка будет означать предположение о существовании и непрерывности этих производных. Значение $N=\infty$ также допустимо (когда рассматриваемые функции имеют непрерывные производные любого порядка).

Важно отметить, что якобианы обоих преобразований — прямого и обратного — отличны от нуля:

$$\operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|\neq 0, \quad \operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\neq 0, \tag{75.7}$$

причем соответствующие матрицы взаимно обратные. Это легко получить, рассматривая x^i как сложную функцию от $x^1, \ldots, x^n$: x^i зависит от $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ согласно (75.6), а эти переменные зависят от $x^1, \ldots, x^n$ в силу (75.5). Тогда частная производная от x^i по одному из аргументов $x^1, \ldots, x^n$ вычисляется по известному правилу:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \quad (\text{по } k' \text{ — суммирование}).$$

Но, с другой стороны, производная от одного аргумента по другому равна нулю, если аргументы различные, и равна единице, если они совпадают: $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$.

Итак,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j, \tag{75.8}$$

т. е. произведение матриц $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right\|$ и $\left\| \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \right\|$ дает единичную матрицу. *Таким образом, эти матрицы взаимно обратные и тем самым неособенные.*

Заметим, что если бы мы откинули условие обратимости (75.6), а потребовали бы вместо него необращение в нуль якобиана

$$\operatorname{Det}\left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right| \neq 0, \tag{75.9}$$

то мы не достигли бы нашей цели. Если даже условие (75.9) соблюдается во всей области Ω, то это гарантирует однозначную обратимость лишь в некоторой окрестности каждой точки области, но не во всей области Ω в целом. Так, например, пусть область Ω (в трехмерном случае) имеет вид распухшей буквы C, причем отображение на область Ω' состоит в том, что Ω сдавливается в вертикальном направлении, так что просвет справа исчезает, и отросток, спускающийся сверху, входит в отросток, поднимающийся снизу. Такое отображение Ω на Ω' уже не будет *взаимно* однозначным, хотя при этом всегда можно обеспечить условие (75.9) и взаимную однозначность в *малом*.

Переход от одной криволинейной системы координат $x^{i'}$ к другой $x^{i''}$ в той же области Ω удовлетворяет тем же условиям, что и переход от аффинных координат x^i к криволинейным $x^{i'}$.

В самом деле, согласно нашим требованиям $x^{i''}$ суть непрерывно дифференцируемые функции от x^i, а x^i — от $x^{i'}$, так что $x^{i''}$ оказываются непрерывно дифференцируемыми функциями от $x^{i'}$, и обратно; Ω', область изменения $x^{i'}$, и Ω'', область изменения $x^{i''}$, будут находиться во взаимно однозначном соответствии.

Ясно также, что если от криволинейных координат $x^{i'}$ (с областью изменения Ω') перейти к новым переменным $x^{i''}$ (с областью изменения Ω'') при помощи обратимого и в обе стороны непрерывно дифференцируемого преобразования, то $x^{i''}$ будут тоже служить криволинейными координатами в той же области Ω. Действительно, переменные $x^{i''}$ посредством координат $x^{i'}$ будут связаны с аффинными координатами x^i обратимым и в обе стороны непрерывно дифференцируемым преобразованием, а именно в этом случае мы и называем $x^{i''}$ криволинейными координатами в данной области. Во всех этих формулировках имеется в виду непрерывная дифференцируемость того же порядка, что и в определении криволинейных координат.

В случае обычного евклидова пространства простейшими примерами криволинейных координат могут служить цилиндрические и полярные координаты. Заметим, что, желая обеспечить *взаимно* однозначный характер их соответствия с точками, мы должны рассматривать их не во всем пространстве, а в области Ω, полученной удалением из пространства одной полуплоскости, краем которой служит ось Z (при обычном расположении чертежа), причем ось Z удаляется тоже.

Выражая в формуле (75.1) x^i через $x^{i'}$, мы получаем зависимость радиуса-вектора точки M от ее криволинейных координат:

$$\overrightarrow{OM} = g_1(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\,\mathbf{e}_1 + \ldots + g_n(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\,\mathbf{e}_n. \qquad (75.10)$$

Обозначая кратко $\overrightarrow{OM}$ через $\mathbf{x}$, мы будем писать:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^{1'}, \ldots, x^{n'}). \qquad (75.11)$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций g_i эта векторная функция будет такое же число раз непрерывно дифференцируемой согласно § 65. Правда, там мы дифференцировали вектор по единственному аргументу и один раз, но для частных производных и притом любого порядка все рассуждения повторяются дословно. Отметим еще — это для нас будет важно, — что частные производные $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{1'}}, \ldots, \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{n'}}$ будут в каждой точке *линейно независимыми векторами*. Действительно, дифференцируя (75.10) по $x^{i'}$, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}_n \quad (i' = 1', 2', \ldots, n'). \qquad (75.12)$$

Матрица коэффициентов $\left\| \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right\|$ неособенная, следовательно, $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}}$ линейно независимы.

§ 76. Тензоры в криволинейных координатах

Мы будем рассматривать область Ω аффинного пространства, отнесенную к криволинейным координатам x^i (сейчас мы обозначаем их без штрихов). Радиус-вектор $\mathbf{x}$ произвольной точки M области Ω, отсчитываемый от фиксированной точки O, будет выражаться согласно (75.11) функцией

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n), \tag{76.1}$$

достаточное число раз непрерывно дифференцируемой (для этого параграфа довольно одного раза). В дальнейшем мы предполагаем, что все рассматриваемые точки принадлежат области Ω.

Для ориентации в строении данной координатной системы весьма полезны *координатные линии*. Так мы будем называть кривые, вдоль которых меняется лишь одна из координат x^i, а остальные остаются постоянными. Рассмотрим, например, координатную линию x^1. Это значит, что $x^2, \ldots, x^n$ закреплены на постоянных значениях, так что радиус-вектор $\mathbf{x}$ (76.1) остается функцией одного лишь x^1; мы получаем кривую, отнесенную к параметру x^1.

Через каждую точку M пройдет одна и только одна координатная линия x^1, именно, если $x^2, \ldots, x^n$ закрепить на значениях, которые они имеют в точке M. Частная производная $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^1}$ дает касательный вектор к координатной линии x^1 (§ 65). Все сказанное справедливо и для любых координатных линий, так что через каждую точку M проходят n координатных линий с касательными векторами $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}$. Эти векторы мы будем обозначать кратко

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}. \tag{76.2}$$

Они, как мы знаем, всегда линейно независимы, и потому *в каждой точке M могут быть приняты за векторы аффинного репера* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Таким образом, *задание криволинейных координат в области Ω влечет появление в каждой ее точке M вполне определенного аффинного репера* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Этот *аффинный репер* мы будем называть *локальным репером в точке M*.

Когда в качестве частного случая криволинейных координат мы берем аффинные координаты, функция (76.1) принимает прежний вид (75.1):

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \text{так что} \quad \mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i, \tag{76.3}$$

и локальный репер в каждой точке M имеет те же векторы, что и основной репер, на котором построена данная аффинная координатная система.

Для рассмотрения локальных реперов имеются глубокие основания. Именно вспомним те простые свойства, которыми обладали аффинные координаты точек: приращения этих координат при переходе из точки $M(x^i)$ в точку $L(y^i)$ выражали координаты вектора смещения $\overrightarrow{ML}$:

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=(y^i-x^i)\,\mathbf{e}_i,$$

поскольку

$$\overrightarrow{OM}=x^i\mathbf{e}_i,$$
$$\overrightarrow{OL}=y^i\mathbf{e}_i$$

(говоря о координатах вектора, мы всегда будем иметь в виду его *аффинные* координаты; криволинейные координаты для векторов не имеют смысла). В этом, можно сказать, и состояла сущность аффинных координат точек.

Для криволинейных координат x^i эти простые свойства теряются. Однако мы находим их снова, *если рассматривать криволинейные координаты в бесконечно малой окрестности данной точки M.*

Смещаясь из точки $M(x^i)$ в бесконечно близкую точку $L(x^i+\Delta x^i)$, мы находим вектор смещения $\overrightarrow{ML}$, как приращение радиуса вектора $\mathbf{x}$ точки M:

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=\mathbf{x}(x^i+\Delta x^i)-\mathbf{x}(x^i).$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, заменяем приращение полным дифференциалом и получаем:

$$\overrightarrow{ML}\approx \mathbf{x}_1\Delta x^1+\ldots+\mathbf{x}_n\Delta x^n. \tag{76.4}$$

Это значит, что вектор смещения $\overrightarrow{ML}$ в локальном репере $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ имеет координаты, равные приблизительно приращениям Δx^i.

Итак, для бесконечно малых смещений из точки M приращения криволинейных координат Δx^i снова выражают координаты вектора смещения $\overrightarrow{ML}$, если эти последние вычислять в локальном репере в точке M, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка.

Таким образом, при помощи локального репера криволинейным координатам возвращаются свойства аффинных координат, правда, теперь уже лишь в бесконечно малой окрестности данной точки.

Можно сказать также, что *приращения Δx^i криволинейных координат в бесконечно малой окрестности точки M совпадают* *с точностью 1-го порядка с аффинными координатами относительно локального репера, построенного в точке M.*

Естественно, что, занимаясь геометрией аффинного пространства в криволинейных координатах, мы постоянно будем сталкиваться с локальными реперами.

Выясним теперь, что происходит с локальными реперами, когда криволинейные координаты подвергаются преобразованию

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \tag{76.5}$$

которое предполагается однозначно обратимым и непрерывно дифференцируемым в обе стороны (§ 75). Выражая, обратно,

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \tag{76.6}$$

мы можем считать в уравнении (76.1) радиус-вектор $\mathbf{x}$ сложной функцией от $x^{i'}$. Частная производная по $x^{i'}$ выразится тогда по известной формуле:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

В правой части по i, конечно, происходит суммирование. Заметим, что мы будем без стеснения прилагать обычные формулы дифференцирования к выражениям, содержащим векторы, так как справедливость этих формул устанавливается тривиальным образом: достаточно свести дифференцирование векторов к дифференцированию их координат (§ 65).

Окончательно получаем:

$$\mathbf{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{x}_i. \tag{76.7}$$

Итак, преобразование криволинейных координат влечет за собой преобразование локального репера в каждой точке M, причем векторы нового локального репера разлагаются по векторам старого с коэффициентами $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$; $\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right| \neq 0$. Сравнивая с нашей прежней записью преобразования аффинного репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i,$$

мы видим, что (76.7) представляет собой ее частный случай, когда

$$A^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \tag{76.8}$$

а роль векторов $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{i'}$ играют $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i'}$.

Рассмотрим теперь произвольное тензорное поле, например, $V^i_{jk}(M)$ (§ 38). Точка M может при этом пробегать всю область Ω или только некоторую поверхность в ней, или даже линию в зависимости от того, где тензорное поле задано.

Координаты тензора V^i_{jk} можно вычислять относительно любого аффинного репера. Однако в дальнейшем мы всегда будем считать, что аффинное пространство (по крайней мере в пределах области Ω) отнесено к каким-либо криволинейным координатам x^i. Тогда в каждой точке M возникает локальный репер, и координаты тензора $V^i_{jk}(M)$ мы будем брать относительно именно этого репера. Эти координаты мы будем кратко называть координатами тензора $V^i_{jk}(M)$ в данной системе криволинейных координат x^i.

Когда в дальнейшем мы будем говорить о тензорном поле

$$V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n), \tag{76.9}$$

то всегда будем подразумевать сказанное выше.

Если тензорное поле задано не во всей области Ω, а лишь на некоторой поверхности (линии), то в уравнениях (76.9) V^i_{jk} нужно задавать, конечно, как функции параметров этой поверхности (линии). Тензорное поле может выродиться и в задание тензора V^i_{jk} в одной только точке M.

Вслед за преобразованием криволинейных координат происходит преобразование локального репера в каждой точке M, а значит, и преобразование координат тензора $V^i_{jk}(M)$ по обычному тензорному закону:

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = A^{i'}_i A^j_{j'} A^k_{k'} V^i_{jk}(M). \tag{76.10}$$

При этом, как мы видели, матрица $A^i_{i'}$ совпадает с матрицей $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, а следовательно, обратная матрица $A^{i'}_i$ — с матрицей $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$:

$$A^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{76.11}$$

Следовательно, закон преобразования (76.10) принимает вид

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)\,V^i_{jk}(M). \tag{76.12}$$

Таким образом, переход от одних криволинейных координат к другим, влечет за собой преобразование координат тензорного поля

$V^i_{jk}(M)$ по закону (76.12). При этом частные производные $x^{i'}$ по x^i и обратно берутся в той же точке M, как и координаты тензора, что и отмечено в записи.

Все тензорные операции алгебраического характера автоматически переносятся и на тензорные поля, как это было показано в § 38. Правда, там мы относили все тензорное поле к *одному* реперу $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, теперь же у нас в *каждой точке имеется свой локальный репер* $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Но это не меняет наших рассуждений, так как алгебраические операции над тензорами совершаются *по отдельности в каждой точке* M.

Зато с абсолютным дифференцированием тензорных полей в криволинейных координатах дело будет обстоять совсем не так просто. В этой главе мы не будем им заниматься, так как в главе VII мы получим соответствующие результаты в более общем виде.

Отметим, в частности, что любой вектор ξ, заданный в точке M, мы будем всегда относить к локальному реперу в точке M и под его координатами ξ^i понимать координаты относительно локального репера. Таким образом, ξ^i определяются из разложения

$$\xi = \xi^i \mathbf{x}_i. \tag{76.13}$$

Координаты инвариантного вектора образуют, как мы знаем, контравариантный тензор относительно любого аффинного репера, в частности, и относительно локального репера, так что закон преобразования ξ^i будет иметь вид

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i. \tag{76.14}$$

Обратно, если нам задан в точке M один раз контравариантный тензор с координатами ξ^i, то разложение (76.13) определяет инвариантный вектор ξ, как тоже известно из общей теории (§ 24). Задание векторного поля $\xi(M)$ равносильно вследствие этого заданию тензорного поля $\xi^i(M)$.

§ 77. Параллельное перенесение

Одним из важнейших свойств аффинного пространства является возможность откладывать данный вектор из любой точки. Возникает вопрос, как это реализовать, когда рассматриваемая область Ω отнесена к криволинейным координатам x^i. Вектор ξ_0 мы будем предполагать заданным его координатами ξ_0^i в некоторой точке M_0; отложить его мы хотим из другой точки M_1. Разумеется, если отложить в M_1 вектор с теми же координатами ξ_0^i, то это не достигнет цели, так как локальные реперы в M_0 и M_1 различны. Нам нужно установить, как следует изменить ξ_0^i, чтобы в локальном репере в точке M_1 они определяли прежний вектор ξ_0.

Однако решение этой задачи не приводит к чему-либо интересному, если переносить вектор ξ_0 из M_0 в M_1 одним скачком. Интерес представляет непрерывное перенесение вектора ξ_0 по какой-либо кривой $\overset{\frown}{M_0M_1}$, причем мы рассматриваем ход непрерывного изменения его координат ξ^i *на каждом бесконечно малом участке пути*. Именно это упрощение задачи и приводит к содержательным результатам.

Пусть путь $\overset{\frown}{M_0M_1}$ задан параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{77.1}$$

где $x^i(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Заметим, что $\overset{\frown}{M_0M_1}$ есть кривая в смысле § 65: если $x^i(t)$ подставить в (76.1), то радиус-вектор $\mathbf{x}$ оказывается функцией от t. В каждой точке $M(t)$ этого пути мы откладываем постоянный вектор ξ_0, координаты которого ξ^i, однако, меняются от точки к точке ввиду изменения от точки к точке локального репера. Таким образом, координаты ξ^i зависят от t:

$$\xi^i = \xi^i(t), \tag{77.2}$$

и мы хотим выяснить, по какому закону будут меняться эти функции хотя бы на бесконечно малом участке пути.

Так как функции $x^i(t)$ — непрерывно дифференцируемые, мы сейчас же получаем, что вдоль пути векторы локального репера $\mathbf{x}_i(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, а значит, и ξ^i являются непрерывно дифференцируемыми функциями t (предполагая $N = 2$; смысл N см. § 75).

Относя вектор ξ_0 к локальному реперу в точке $M(t)$, пишем:

$$\xi_0 = \xi^i(t)\,\mathbf{x}_i(x^1,\ \ldots,\ x^n). \tag{77.3}$$

Здесь имеется в виду, что аргументы $x^1,\ \ldots,\ x^n$ сами зависят от t согласно параметрическим уравнениям пути. Дифференцируя по t почленно и учитывая, что $\xi_0 = \text{const}$, получим:

$$0 = d\xi^i\mathbf{x}_i + \xi^i d\mathbf{x}_i. \tag{77.4}$$

Чтобы разобраться в этом результате, нам нужно векторы $d\mathbf{x}_i$ разложить по векторам локального репера.

По формуле полного дифференциала

$$d\mathbf{x}_i(x^1,\ \ldots,\ x^n) = \mathbf{x}_{ij}dx^j, \tag{77.5}$$

где

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Векторы $\mathbf{x}_{ij}$, вполне определенные *для каждой точки области* Ω (а не только вдоль рассматриваемого пути), можно разложить по векторам локального репера $\mathbf{x}_i$ в этой точке:

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k. \tag{77.6}$$

Через Γ_{ij}^k мы обозначили коэффициенты разложения; по k происходит, конечно, суммирование. Очевидное равенство

$$\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_{ji}$$

влечет за собой

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{77.7}$$

ввиду однозначности разложения по векторам репера. Конечно, Γ_{ij}^k зависят от точки, где производится разложение (77.6), так что

$$\Gamma_{ij}^k(M) = \Gamma_{ij}^k(x^1, \ldots, x^n). \tag{77.8}$$

Величины Γ_{ij}^k, определенные таким образом в данной системе криволинейных координат x^i для каждой точки M области Ω, мы будем называть коэффициентами связности.

Смысл этого названия вскоре выяснится. Коэффициенты связности впоследствии (в обобщенном виде) будут играть у нас исключительно важную роль.

Возвращаемся к нашей задаче. Вставляя разложение (77.6) в (77.5), получаем:

$$d\mathbf{x}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k dx^j,$$

после чего равенство (77.4) принимает вид

$$0 = d\xi^k \mathbf{x}_k + \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k \xi^i dx^j.$$

В первом члене правой части мы изменили лишь обозначение индекса суммирования на k. Ввиду линейной независимости векторов $\mathbf{x}_k$ обращение в нуль их линейной комбинации означает обращение в нуль и всех ее коэффициентов; следовательно,

$$d\xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j = 0,$$

или, что то же,

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^j dx^i. \tag{77.9}$$

(Ввиду симметрии Γ_{ij}^k по нижним индексам безразлично, свертывается ли ξ^i с первым, а dx^i — со вторым его индексом или наоборот). Это и есть *формула параллельного перенесения вектора* в бесконечно малом. Она решает следующую задачу: *если в данной точке $M(x^i)$ вектор имеет координаты ξ^k, то какие координаты будет иметь тот же вектор в бесконечно близкой точке $M'(x^i+dx^i)$?*

Конечно, эту задачу мы решаем не точно, а пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка. Вернее, мы выражаем не приращения, а дифференциалы координат ξ^k при переходе из M в M'.

Как мы видим, $d\xi^k$ линейно зависят и от данных координат ξ^j и от дифференциалов dx^i координат точки. Коэффициентами служат Γ^k_{ij}; мы видим, что при их помощи связываются векторы в M и векторы в M', откуда и происходит название «коэффициенты связности».

Мы как будто забыли о том пути M_0M_1, по которому двигались, или, точнее, ограничились его произвольным бесконечно малым кусочком.

Если же мы захотели бы применить полученную формулу (77.9) к перенесению вектора по конечному пути M_0M_1, то нам пришлось бы интегрировать соответствующую систему дифференциальных уравнений. Здесь мы на этом не останавливаемся, так как позже будем заниматься этим вопросом в обобщенном виде.

В частном случае, когда координаты x^i аффинные,

$$\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n) = x^i\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{x}_{ij} = 0,$$

и из (77.6) следует:

$$\Gamma^k_{ij} = 0. \tag{77.10}$$

Обратно, если в какой-нибудь системе криволинейных координат $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ тождественно обращаются в нуль, то из (77.6) следует:

$$\mathbf{x}_{ij} = 0, \qquad \mathbf{x}_i = \mathbf{const}.$$

Обозначая $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$, получим наконец

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i + \mathbf{x}_0.$$

Такое выражение для радиуса-вектора (где $\mathbf{x}_0 = \mathbf{const}$) показывает, что x^i — аффинные координаты (с началом в точке $\mathbf{x}_0$).

Итак, для того чтобы криволинейные координаты в рассматриваемой области Ω оказались, как частный случай, просто аффинными, необходимо и достаточно, чтобы в этих координатах тождественно обращались в нуль Γ^k_{ij}.

§ 78. Объект связности

Мы ввели коэффициенты связности Γ_{ij}^k в некоторой системе криволинейных координат x^i в каждой точке M области Ω.

Допустим, что мы перешли в другую систему криволинейных координат $x^{i'}$ и там вычислили Γ_{ij}^k; по какому закону будут преобразовываться Γ_{ij}^k в $\Gamma_{i'j'}^{k'}$?

Как оказывается, этот закон не будет тензорным, хотя индексные обозначения коэффициентов связности как будто наталкивают на эту мысль. Исходя из разложения (77.6), определяющего Γ_{ij}^k, нетрудно этот закон найти. В старых и соответственно в новых координатах мы имеем:

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k, \qquad \mathbf{x}_{i'j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'} \mathbf{x}_{k'}. \tag{78.1}$$

Мы хотим, пользуясь первым разложением, подсчитать коэффициенты второго разложения, что и даст искомый закон.

Дифференцирование $\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n)$ как сложной функции от $x^{i'}$ приводит нас к (76.7):

$$\mathbf{x}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{x}_i. \tag{78.2}$$

Еще раз дифференцируем, теперь по $x^{j'}$, снова рассматривая $\mathbf{x}_i(x^1, \ldots, x^n)$ как сложную функцию от $x^{j'}$. Так как

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \mathbf{x}_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

то мы получаем, дифференцируя (78.2) по $x^{j'}$,

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \mathbf{x}_i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \mathbf{x}_{ij}. \tag{78.3}$$

В первом члене правой части меняем обозначение индекса суммирования i на k и, пользуясь первым разложением (78.1), переписываем:

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \right) \mathbf{x}_k. \tag{78.4}$$

Пользуясь, далее, формулой (78.2), записанной с переменой ролей старых и новых координат:

$$\mathbf{x}_k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \mathbf{x}_{k'}, \tag{78.5}$$

получаем окончательно:

$$\mathbf{x}_{i'j'} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \mathbf{x}_{k'}.$$

Сравнивая со вторым разложением (78.1), мы видим, что

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\, \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k. \tag{78.6}$$

Это и есть искомый закон преобразования коэффициентов связности. Этот закон совпал бы с тензорным, если в правой части оставить лишь последний член. Но наличие дополнительного члена, содержащего, между прочим, вторые производные старых координат по новым, принципиально меняет дело.

Если в данной точке M для каждой системы криволинейных координат x^i нам указана система чисел Γ_{ij}^k, преобразующихся по закону (78.6) *при переходе от одной системы к другой системе криволинейных координат, то мы говорим, что в точке M задан объект связности.* При этом подразумевается, что частные производные в (78.6) вычислены в точке M. Обычно объект связности рассматривается не в одной точке M, а в каждой точке области Ω:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(M) = \Gamma_{ij}^k(x^1, \ldots, x^n), \tag{78.7}$$

так что мы имеем поле объекта связности $\Gamma_{ij}^k(M)$. Для краткости мы в дальнейшем под «объектом связности» будем понимать именно *поле объекта связности.*

Мы видим, что коэффициенты связности $\Gamma_{ij}^k(M)$ в нашем аффинном пространстве образуют определенный объект связности, который мы назовем *объектом связности нашего аффинного пространства.* Но *произвольно взятый* объект связности, вообще говоря, не является объектом связности нашего пространства. Более того, он не является объектом связности и вообще какого-либо аффинного пространства. Точный смысл этого замечания выяснится позже.

Объект связности есть частный случай *дифференциально-геометрического объекта класса* 2. *Мы говорим, что в точке M дан дифференциально-геометрический объект класса* 2, *если в каждой системе криволинейных координат x^i нам дано s чисел $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, причем при переходе от координат x^i к новым координатам $x^{i'}$ новые значения $\varphi_{1'}, \varphi_{2'}, \ldots, \varphi_{s'}$ выражаются как определенные* (*непрерывно дифференцируемые*) *функции старых значений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ и частных производных новых координат $x^{i'}$ по старым x^i до* 2-*го порядка включительно*; *эти производные предполагаются вычисленными в точке M**). В закон преобразования могут входить,

*) Обычно предполагают, кроме того, что это преобразование обладает групповым характером, т. е. последовательное его выполнение для переходов от x^i к $x^{i'}$ и от $x^{i'}$ к $x^{i''}$ дает это же преобразование для перехода от x^i к $x^{i''}$. Однако групповой характер можно вывести из нашего определения (хотя и без изменения объекта по существу, но, может быть, с изменением формальной записи закона его преобразования).

конечно, производные и старых координат по новым, но мы об этом не упоминаем, так как их всегда можно выразить при желании через производные новых координат по старым.

Совершенно аналогично определяется дифференциально-геометрический объект любого класса v; в частности, тензоры являются примером дифференциально-геометрических объектов класса 1, так как в закон их преобразования входят лишь первые частные производные новых координат по старым.

Важнейшее значение объекта связности аффинного пространства состоит в том, что *он определяет всю геометрию аффинного пространства*, точнее, той его области Ω, в которой объект связности задается.

Это можно формулировать в виде следующей теоремы.

Пусть нам известно, что переменные $x^1, \ldots, x^n$, пробегающие данную связную область изменения Ω^*, служат криволинейными координатами в какой-то (неизвестной) области Ω аффинного пространства, причем коэффициенты связности в этих криволинейных координатах нам заданы функциями

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n). \tag{78.8}$$

Тогда мы можем восстановить всю геометрию области Ω.

Подчеркнем, что в условии теоремы нам *не дано ка́к именно и в какой области* Ω введены криволинейные координаты x^i, а известно лишь, что *как-то* это сделано. Таким образом, заранее мы не знаем, как именно сопоставлены наши координаты точкам аффинного пространства, и должны это обнаружить на основе знания коэффициентов связности.

Чтобы доказать теорему, достаточно суметь перейти в области Ω от криволинейных координат x^i к каким-нибудь аффинным координатам, которые мы обозначим $x^{i'}$.

Действительно, *в аффинной координатной системе* мы без труда можем определить все соотношения между точками и векторами и осуществить все конструкции, которые перечислены в аксиоматике аффинного пространства. Тем самым и вся геометрия аффинного пространства будет восстановлена (в нашем случае в пределах области Ω).

Для того чтобы $x^{i'}$ служили аффинными координатами в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$ (конец § 77). Поэтому мы будем искать такие формулы преобразования

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n),$$

чтобы этого добиться в преобразованных координатах $x^{i'}$.

Используем закон преобразования (78.6), написав его для обратного перехода от $x^{i'}$ к x^i:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{i'j'}^{k'} . \tag{78.9}$$

Очевидно, требование $\Gamma_{i'j'}^{k'} = 0$ влечет за собой

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} . \tag{78.10}$$

Обратно, отсюда следует $\Gamma_{i'j'}^{k'} = 0$. Правда, непосредственно при подстановке (78.10) в (78.9) получаем обращение в нуль $\Gamma_{i'j'}^{k'}$, *подвергнутых преобразованию по тензорному закону*, но это влечет обращение в нуль и самих $\Gamma_{i'j'}^{k'}$.

Перепишем теперь (78.10) в более удобном виде. Умножая почленно на $\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}$ и суммируя по k, получим:

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} \delta_{k'}^{l'} = \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} . \tag{78.11}$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k (x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} . \tag{78.12}$$

Таким образом, для того чтобы преобразование криволинейных координат x^i

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$$

давало бы нам аффинные координаты $x^{i'}$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ *удовлетворяли системе дифференциальных уравнений второго порядка* (78.12).

А так как функции $\Gamma_{ij}^k(x^1, \ldots, x^n)$ нам заданы, то мы можем фактически написать уравнения (78.12) и среди систем криволинейных координат $x^{i'}$ выделить те, которые этим уравнениям удовлетворяют. Это будут аффинные координатные системы; по любой из них мы можем восстановить и всю геометрию области Ω. Теорема доказана. Заметим, что существование решений у системы дифференциальных уравнений (78.12) в нашем случае сомнений не вызывает, так как в области Ω наверняка существуют аффинные координаты $x^{i'}$; вопрос состоял лишь в том, как $x^{i'}$ выразить через x^i.

Доказанная теорема наводит на следующий вопрос, исключительно важный для дальнейшего.

Пусть в области изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$, *которую мы обозначим* Ω^*, *заданы какие-то функции* $\Gamma_{jk}^i(x^1, \ldots, x^n)$, *и притом* *во всей области* Ω^* $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$; *всегда ли можно истолковать переменные* $x^1, \ldots, x^n$ *как криволинейные координаты в некоторой области* Ω *аффинного пространства так, чтобы наперед заданные функции* $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ *выражали коэффициенты связности в области* Ω?

Ответ на этот вопрос будет, как мы позже увидим, *отрицательным*, даже если вместо всей области Ω^* брать сколь угодно малые ее куски. Требуемое истолкование возможно лишь в весьма частном случае, когда Γ^i_{jk} удовлетворяют определенной системе дифференциальных уравнений в частных производных. Заметим, что этот отрицательный результат не противоречит доказанной теореме: действительно, возможность истолковать функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ как коэффициенты связности в криволинейных координатах x^i *входила в условие теоремы*.

Теперь возникает следующий вопрос: мы знаем, что в некоторых частных случаях функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$, заданные в области изменения переменных x^i, *определяют в этой области аффинную геометрию* (именно, если истолкование Γ^i_{jk} как коэффициентов связности в криволинейных координатах x^i удается). *Нельзя ли считать, что и в общем случае функции* $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ *все-таки определяют в рассматриваемой области некоторую геометрию, которая, естественно, является обобщением аффинной*? Ответом на этот вопрос служит понятие *о пространстве аффинной связности*, которым мы будем заниматься в главе VII (§ 89).

§ 79. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве

Так как евклидово пространство получается из аффинного лишь дополнительным введением метрики (в форме скалярного произведения векторов; § 39), то все сказанное о криволинейных координатах в §§ 75—78 остается верным, и повторять этого мы не будем. В частности, за *объект связности евклидова пространства* мы принимаем объект связности Γ^k_{ij} аффинного пространства, на базе которого оно построено. Но наличие метрики означает появление дополнительных вопросов, которые мы также хотим рассмотреть в криволинейных координатах. Как мы знаем, задание метрики сводится к заданию метрического тензора g_{ij}, который можно относить к любому аффинному реперу. При этом имеет место формула

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \tag{79.1}$$

В соответствии с общим соглашением (§ 76) мы, рассматривая тензор g_{ij} *в криволинейных координатах* x^i, относим его в каждой точке M к соответствующему локальному реперу $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Его координаты будут при этом выражаться скалярными произведениями

$$g_{ij}(M) = \mathbf{x}_i(M)\,\mathbf{x}_j(M) \tag{79.2}$$

согласно (79.1).

В этой трактовке метрический тензор нужно рассматривать уже как тензорное поле; его координаты будут являться функциями точки

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{79.3}$$

хотя по существу в каждой точке задается все-таки один и тот же тензор. При переходе к новым криволинейным координатам g_{ij} преобразуются по закону

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

Мы вскоре увидим, что задание в криволинейных координатах x^i метрического тензора $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ играет для евклидова пространства такую же роль, как задание объекта связности $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ для аффинного пространства, т. е. полностью определяет его геометрию. Но пока мы просто выведем некоторые свойства евклидова пространства на основе задания метрического тензора g_{ij} в криволинейных координатах. При этом ясно само собой, что для локального репера в произвольной точке M и соответствующего метрического тензора $g_{ij}(M)$ можно повторить все сказанное в §§ 39—41.

Рассмотрим прежде всего параметрически заданную кривую (см. 77.1)):

$$x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{79.4}$$

Радиус-вектор любой точки выражается функцией ее криволинейных координат

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n),$$

причем вдоль кривой сами $x^1, \ldots, x^n$ зависят от t. Отсюда касательный вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ в произвольной точке M нашей кривой имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{x}_i, \tag{79.5}$$

а значит, обладает в локальном репере координатами $\frac{dx^i}{dt}$. Эти координаты образуют, следовательно, один раз контравариантный тензор, что легко проверяется и непосредственно: при переходе к новым криволинейным координатам $x^{i'}$ получаем:

$$\frac{dx^{i'}}{dt}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{dx^{i}}{dt}$$

по правилу дифференцирования сложной функции. Но это выражает в то же время тензорный закон преобразования для $\frac{dx^i}{dt}$.

Аналогично, рассматривая вместо производной дифференциал радиуса-вектора при бесконечно малом смещении по нашей кривой, получаем по формуле полного дифференциала:

$$d\mathbf{x}=\mathbf{x}_i dx^i. \tag{79.6}$$

Мы видим, что координатами $d\mathbf{x}$ служат dx^i. Следовательно, dx^i образуют один раз контравариантный тензор, и это легко проверяется непосредственно:

$$dx^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}dx^i.$$

Все дифференциалы берутся при бесконечно малом смещении. Здесь и в дальнейшем *мы будем понимать под этим, что они берутся как дифференциалы функций от параметра t при его бесконечно малом приращении dt.*

Скалярный квадрат вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ можно вычислить по общей формуле (39.9), пользуясь ею в локальном репере:

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2=g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}. \tag{79.7}$$

Отсюда

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2}=\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}. \tag{79.8}$$

Мы знаем, что длина кривой определяется формулой (65.7):

$$\overset{\frown}{M_1M_2}=\int\limits_{M_1}^{M_2}|d\mathbf{x}|=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt$$

и, следовательно,

$$\overset{\frown}{M_1M_2}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt. \tag{79.9}$$

Не нужно забывать, что в подынтегральном выражении g_{ij} — функции от $x^1, \ldots, x^n$ согласно (79.3), а $x^1, \ldots, x^n$ — функции от t согласно (79.4), так что подынтегральное выражение зависит в конечном счете от t.

Итак, если в криволинейных координатах x^i в области Ω нам задан метрический тензор $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, то длину любой кривой (79.4) *можно вычислить по формуле* (79.9).

Вместо того чтобы задавать длину дуги интегралом, можно выразить ее дифференциал, совпадающий, конечно, с подынтегральным выражением:

$$ds = |d\mathbf{x}| = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j},$$

или, что то же,

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j. \tag{79.10}$$

Квадрат дифференциала дуги при любом бесконечно малом смещении по любой кривой выражается дифференциальной квадратичной формой (79.10) *от криволинейных координат* (вообще дифференциальной квадратичной формой от переменных $x^1, \ldots, x^n$ называется квадратичная форма от их дифференциалов $dx^1, \ldots, dx^n$ с коэффициентами — функциями от $x^1, \ldots, x^n$).

Эту квадратичную форму мы будем называть *метрической*. Она инвариантна относительно преобразования криволинейных координат x^i; это видно как по ее геометрическому смыслу, так и по алгебраической структуре: она представляет результат двойного свертывания метрического тензора g_{ij} с контравариантным тензором dx^i.

Покажем теперь — и это важный факт, — что *объект связности $\Gamma^i_{jk}(M)$ евклидова пространства можно вычислить, зная метрический тензор $g_{ij}(M)$ в какой-нибудь криволинейной системе координат.*

Согласно (77.6) коэффициенты связности подсчитываются из разложения

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_k. \tag{79.11}$$

Теперь, имея в пространстве евклидову метрику, мы можем по-новому подойти к этому подсчету. Умножая (79.11) на $\mathbf{x}_l$ скалярно, получим:

$$\mathbf{x}_l\mathbf{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\, g_{lk}, \tag{79.12}$$

так как

$$\mathbf{x}_l\mathbf{x}_k = g_{lk}. \tag{79.13}$$

Мы видим, что правая часть (79.12) получается из Γ^k_{ij} опусканием верхнего индекса (правда, опускание индексов мы рассматривали лишь для тензоров, в то время как Γ^k_{ij} — не тензор; однако формальная сторона дела от этого не меняется). Соответственно этому обозначим:

$$\Gamma_{l,ij}=g_{lk}\Gamma_{ij}^{k}. \tag{79.14}$$

Обратно, Γ_{ij}^{k} получаются из $\Gamma_{l,ij}$ поднятием первого нижнего индекса:

$$\Gamma_{ij}^{k}=g^{kl}\Gamma_{l,ij}. \tag{79.15}$$

Ясно, что для вычисления Γ_{ij}^{k} достаточно вычислить $\Gamma_{l,ij}$. Согласно (79.12)

$$\Gamma_{l,ij}=\mathbf{x}_{l}\mathbf{x}_{ij}. \tag{79.16}$$

При этом, очевидно,

$$\Gamma_{l,ij}=\Gamma_{l,ji}.$$

Эти величины и есть те неизвестные, которые требуется выразить посредством метрического тензора g_{ij}. Для этой цели дифференцируем равенство (79.13) по x^m почленно. Получим:

$$\mathbf{x}_{lm}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{x}_{l}\mathbf{x}_{km}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}},$$

т. е.

$$\Gamma_{k,lm}+\Gamma_{l,km}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}}. \tag{79.17}$$

Мы имеем здесь (при фиксированных k, l, m) одно уравнение с двумя неизвестными. Однако, если переписать это уравнение, сделав над k, l, m круговую подстановку, сначала один раз, а потом еще раз, то уравнений будет уже три, а неизвестное добавится лишь одно. Получаем:

$$\Gamma_{l,mk}+\Gamma_{m,lk}=\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^{k}},$$

$$\Gamma_{m,kl}+\Gamma_{k,ml}=\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{l}}.$$

Учитывая симметрию $\Gamma_{l,ij}$ по индексам i, j, мы замечаем, что в левых частях у нас имеется фактически лишь три неизвестные величины, попарные суммы которых заданы:

$$\Gamma_{k,lm}+\Gamma_{l,mk}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}},$$

$$\Gamma_{l,mk}+\Gamma_{m,kl}=\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^{k}},$$

$$\Gamma_{m,kl}+\Gamma_{k,lm}=\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{l}}.$$

Такую систему можно решить элементарным приемом, складывая почленно первые два уравнения и вычитая третье. Получим:

$$2\Gamma_{l, mk}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}$$

и окончательно

$$\Gamma_{l, mk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\right). \qquad (79.18)$$

Вставляя этот результат в (79.15), мы приходим к решению нашей задачи:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \qquad (79.19)$$

Полученные выражения для $\Gamma_{l, mk}$ и Γ_{ij}^k называются *Христоффелями (символами Христоффеля) соответственно 1-го и 2-го рода.*

Если, в частности, x^i — аффинные координаты, то

$$\mathbf{x}=x^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}_i=\mathbf{e}_i=\text{const}, \quad g_{kl}=\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l=\text{const},$$

все частные производные $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}$ обращаются в нуль. Этим еще раз подтверждается, что в аффинных координатах $\Gamma_{kj}^l=0$.

Докажем теперь теорему, показывающую фундаментальную роль метрического тензора g_{ij} для евклидовой геометрии.

Пусть нам известно, что переменные $x^1, \ldots, x^n$, пробегающие данную связную область изменения Ω^*, служат криволинейными координатами в какой-то (неизвестной) области Ω евклидова пространства, причем координаты метрического тензора в этой системе криволинейных координат нам заданы:

$$g_{ij}=g_{ij}(x^1, \ldots, x^n). \qquad (79.20)$$

Тогда мы можем восстановить всю геометрию области Ω.

В самом деле, пользуясь (79.19), мы находим коэффициенты связности Γ_{ij}^k тоже как функции $x^1, \ldots, x^n$ и, исходя отсюда, совершаем переход в какую-нибудь аффинную координатную систему $x^{i'}$ так же, как в § 78. В этой координатной системе находим координаты метрического тензора по формуле преобразования

$$g_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}g_{ij}.$$

Так как $x^{i'}$ — аффинные координаты, то $g_{i'j'}=\text{const}$, т. е. от выбора точки не зависят. В результате мы нашли в области Ω аффинную координатную систему $x^{i'}$ (что позволяет восстановить всю аффинную геометрию области Ω) и метрический тензор $g_{i'j'}$ в ней, что позволяет выразить скалярное произведение любых двух векторов, а тем самым полностью восстановить евклидову метрику области Ω. Теорема доказана.

Снова возникает вопрос: *пусть в области изменения переменных* x^i *каким-либо образом заданы функции* $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, $g_{ij}=g_{ji}$, $\mathrm{Det}\,|g_{ij}|\neq 0$. *Всегда ли можно истолковать* x^i *как криволинейные координаты в некоторой области* Ω *евклидова пространства так, чтобы* $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ *выражали координаты метрического тензора в этой области в криволинейных координатах* x^i?

Ответ снова будет отрицательным: такое истолкование возможно лишь в очень частном случае, именно, когда функции $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ удовлетворяют определенной системе дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка (которой мы будем заниматься позже). Лишь тогда задание $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ позволяет установить евклидову геометрию в области изменения x^i. Но здесь естественно спросить: нельзя ли и в общем случае задания функций $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ связать с ними определенную геометрию в области изменения переменных x^i наподобие этой евклидовой геометрии?

Ответом на этот вопрос служит понятие *римановой геометрии*, которой мы будем заниматься в главе VII.

ГЛАВА VI

МНОГООБРАЗИЯ

Мы собираемся перейти к основным для этой книги понятиям *пространства аффинной связности и риманова пространства*. В рамках этих понятий мы будем затем оставаться до конца книги. Как уже указывалось в § 79, мы приходим к ним путем обобщения соответственно понятий об аффинном и евклидовом пространствах. В грубых чертах указывался и путь этого обобщения: мы рассматриваем некоторую область изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ и геометризируем ее в первом случае путем введения функций $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, которые используются аналогично коэффициентам связности аффинного пространства, во втором случае путем введения функций $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, которые должны служить чем-то вроде координат метрического тензора g_{ij} евклидова пространства.

Однако геометризацию области изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ нужно начинать с более раннего этапа, именно, с превращения ее *в многообразие*, еще независимо от задания функций Γ^k_{ij} или g_{ij}. В настоящей главе мы этим и займемся.

§ 80. Элементарное многообразие

Начнем с наводящих соображений. Связную область в аффинном пространстве мы можем относить к различным системам криволинейных координат, любые две из которых связаны между собой преобразованием взаимно однозначным и в обе стороны N раз непрерывно дифференцируемым:

$$x^{i'} = f_i(x^1, \ldots, x^n) \text{ и, обратно, } x^i = g_i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}). \quad (80.1)$$

При этом x^i пробегают область изменения Ω, $x^{i'}$ — область изменения Ω' (определение области см. § 75). При соблюдении всех этих условий преобразование (80.1) переменных x^i в переменные $x^{i'}$ мы будем называть кратко преобразованием класса N.

То, что мы имеем область именно в аффинном пространстве, сказывается в том, что среди координатных систем выделены особые, аффинные координатные системы с точностью уже до *линейных* преобразований. Перейдя в какую-нибудь из аффинных координатных систем, мы очевидным образом можем установить все аффинные свойства области Ω. Представим себе теперь, что *мы отказались от выделения среди координатных систем некоторых особенных* (аффинных), а считаем все эти системы равноправными. Тогда мы теряем аффинные свойства рассматриваемой области, она перестает быть куском аффинного пространства и становится некоторым множеством, элементы которого мы называем точками в сущности лишь по инерции. Однако это множество, как мы сейчас увидим, все же сохраняет некоторые геометрические свойства, правда, очень бедные. Этим самым мы и приходим к понятию *многообразия* в простейшем частном случае (элементарное многообразие).

Мы можем теперь дать следующее определение. *Элементарным многообразием (n измерений и класса N) мы будем называть любое множество $\mathfrak{M}$, для которого задано взаимно однозначное отображение на связную область изменения n переменных $x^1, \ldots, x^n$, но задано лишь с точностью до произвольного преобразования этих переменных в новые переменные по схеме* (80.1) *(включая условие непрерывной дифференцируемости порядка N).*

Обозначая область изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ через Ω, а элементы множества через M, можно записать отображение в виде

$$M \leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n) \in \Omega. \tag{80.2}$$

Область Ω предполагается *связной*. Самым важным в определении многообразия является то, что отображение (80.2) задается с точностью до всевозможных преобразований класса N над переменными $x^1, \ldots, x^n$, т. е. с точностью до перехода к любому другому отображению

$$M \leftrightarrow (x^{1'}, \ldots, x^{n'}) \in \Omega' \tag{80.3}$$

при единственном условии, что $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ получаются из $x^1, \ldots, x^n$ (и обратно) непрерывно дифференцируемым преобразованием класса N (80.1). Другими словами, задается не одно отображение (80.2), а бесчисленное множество таких отображений, причем любые два из них, например, (80.2), (80.3), связаны преобразованием класса N (80.1), и, обратно, любое преобразование класса N (80.1), примененное к одному из заданных отображений, снова приводит к одному из заданных отображений.

Поскольку отображение (80.2) задано, таким образом, с огромной степенью неопределенности, то можно подумать, что оно ничего не может и дать для геометрии многообразия. Но это не совсем так. Будем называть элементы многообразия M *точками*, заданные нам отображения (80.2) *координатными системами* в многообразии $\mathfrak{M}$ и, наконец, значения $x^1, \ldots, x^n$, отвечающие точке M в отображении (80.2),— *ее координатами* в соответствующей координатной системе. Геометрические свойства многообразия нам приходится извлекать только из отображений (80.2), так как элементам множества $\mathfrak{M}$ самим по себе никаких свойств не приписывается. Если бы при этом отображении (80.2) были бы заданы с точностью до *произвольных* взаимно однозначных преобразований области Ω в область Ω', то отсюда было бы нельзя ничего извлечь. Но потому, что эти отображения заданы с точностью до непрерывно дифференцируемых преобразований класса N, многообразие приобретает некоторые, хотя и скудные, геометрические свойства. Прежде всего в многообразии можно определить понятие предельной точки. Мы будем говорить, что переменная точка M стремится (например, по счетной последовательности положений) к предельной точке M_0, если координаты точки M стремятся к соответствующим координатам точки M_0 хотя бы в одной координатной системе x^i (т. е. хотя бы при одном из заданных отображений (80.2)). Но так как переход к другой координатной системе $x^{i'}$ совершается при помощи функций, во всяком случае непрерывных (даже при $N=0$), то наше определение *имеет смысл, независимый от выбора координатной системы.* Аналогично обстоит дело и с понятием области (открытого множества) $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, которое определяется посредством координатной системы так же, как и область в арифметическом пространстве в § 75. Далее, пользуясь снова какой-нибудь координатной системой в многообразии, нетрудно определить в нем кривые, их касание между собой того или иного порядка, поверхности и еще ряд геометрических конструкций; мы не останавливаемся на всем этом более подробно, так как дальше будем заниматься этим систематически. Оказывается, что такого рода определения формулируются так, что их смысл не зависит от той координатной системы, которой мы в данный момент пользуемся, и тем самым наши конструкции определены действительно для самого *многообразия.*

Резюмируя, можно сказать, что элементарное многообразие (класса N) воплощает в себе те свойства области изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$, которые инвариантны при любом взаимно однозначном и непрерывно дифференцируемом преобразовании (класса N) этих переменных в новые переменные $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ *). Чем больше N, тем меньшее количество преобразований мы допускаем, тем большим количеством свойств обладает многообразие. Все, что имеет место для многообразия данного класса, и подавно имеет место для многообразия высшего класса. Многообразие наиболее бедное свойствами мы получаем при $N=0$, т. е. когда

---

*) Абсолютно недопустимо и лишено смысла «подсовывать» многообразию то, что ему по определению не принадлежит, например, строить вектор, соединяющий две данные точки, и т. п., только потому, что так делается в аффинном (или евклидовом) пространстве.

от взаимно однозначных преобразований x^i в $x^{i'}$ требуется лишь непрерывность. В этом случае мы имеем многообразие в топологическом смысле. В этой и следующих главах достаточно потребовать, чтобы многообразие было, по крайней мере, 2-го класса; в главе VIII класс придется повысить до $N=3$, а в некоторых ее параграфах и еще больше. Допускается и значение $N=\infty$.

Все, что до сих пор было сказано, относилось к многообразиям простейшего вида, которые мы назвали *элементарными*. Не давая пока точных определений (см. § 84), мы постараемся составить хотя бы грубо наглядное представление о многообразии вообще.

Начнем с двумерного случая $N=2$. Моделями различных двумерных многообразий могут служить поверхности в обычном евклидовом пространстве, например, эллиптический параболоид, сфера, тор, полусфера и т. д. Если рассматриваемая поверхность имеет край, то он в поверхность не включается. Например, полусфера берется без ограничивающей ее окружности большого круга.

Когда мы рассматриваем поверхность, как модель многообразия, мы, конечно, игнорируем ее обычные геометрические свойства и вообще интересуемся этой поверхностью лишь с точностью до ее непрерывно дифференцируемого преобразования определенного класса N; действительно такое преобразование переносит координатные системы (класса N) с одной поверхности на другую. Таким образом, целая плоскость, внутренность круга, полусфера, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид и т. п. *как многообразия* между собой эквивалентны. Действительно, все эти поверхности допускают взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение друг на друга. В частности, они отображаются на целую плоскость XOY, т. е. на область изменения переменных x, y, $-\infty < x$, $y < +\infty$. Тем самым перечисленные многообразия являются *элементарными* двумерными многообразиями; существуют и не эквивалентные им (например, кольцо между двумя концентрическими окружностями на плоскости представляет собой существенно иное, хотя тоже элементарное многообразие).

Но многообразие, моделью которого служит сфера, будет уже неэлементарное многообразие, так как сфера не допускает взаимно однозначного и непрерывного отображения ни на какой кусок плоскости, т. е. ни на какую область изменения двух переменных x, y. Это равносильно тому, что сферу в целом нельзя отнести к какой-либо координатной системе x^1, x^2 при обычных предположениях взаимной однозначности и непрерывности соответствия.

Однако сферу можно склеить из двух полусфер, которые представляют собой элементарные многообразия и допускают каждая координатную систему x^1, x^2. При этом, чтобы не выпала окружность большого круга, по которой полусферы должны склеиваться, но которая им не принадлежит, мы одну из полусфер возьмем несколько продолженной за ее границу посредством пояска, наставленного по ее краю, причем этот поясок будет наклеиваться на соответствующую часть второй полусферы. Аналогичным образом и многообразие, представленное тором (и, конечно, тоже неэлементарное), можно склеить, например, из заходящих один на другой четырех кусков в виде искривленных и деформированных прямоугольников, которые по отдельности представляют собой, конечно, элементарные многообразия.

Из этих наглядных примеров можно почерпнуть общую идею: произвольное двумерное многообразие можно определить как результат последовательного склеивания заходящих одно на другое элементарных двумерных многообразий. Двумерное многообразие, полученное в результате такого склеивания, ведет себя в малом, в окрестности каждой точки, совершенно так же, как и элементарное многообразие. Это видно хотя бы из того, что достаточно малая окрестность точки принадлежит одному из составляющих элементарных многообразий. Но в целом неэлементарное многообразие своими топологическими свойствами существенно отличается от элементарного.

Совершенно аналогичная идея лежит в основе понятия n-мерного многообразия. Оно составляется по существу путем склеивания (т. е. частичного отождествления) заходящих одно в другое элементарных n-мерных многообразий. Для неэлементарного многообразия в целом нельзя ввести координатную систему $x^1, \ldots, x^n$ с обычными требованиями взаимной однозначности и непрерывности соответствия; но это можно делать по отдельности для тех элементарных кусков, из которых оно составлено.

Конечно, грубые описания, которые нами даны, не содержат точного определения многообразия. Однако мы не очень пострадаем, если ограничимся ими, по следующей причине.

Мы будем в дальнейшем заниматься *дифференциальной* геометрией многообразия, а для этого достаточно каждый раз иметь в своем распоряжении лишь некоторую окрестность рассматриваемой точки. В пределах же такой окрестности многообразие всегда можно считать элементарным. *Поэтому дальнейшие построения мы обычно будем вести так, как если бы многообразие было элементарным, в частности, пользоваться координатными системами $x^1, \ldots, x^n$, где $x^1, \ldots, x^n$ пробегают некоторую область изменения* Ω. При этом нужно помнить, однако, что мы имеем в виду координаты, введенные в отдельных составляющих элементарных многообразиях. В тех частях, где эти многообразия накладываются одно на другое, соответствующие координаты связаны зависимостью (80.1) класса N. Точное определение (неэлементарного) многообразия мы дадим позже (§ 84).

§ 81. Тензоры в многообразии

Переходя к геометрии многообразия, необходимо хорошо понять, что по сравнению с аффинным (и, тем более, евклидовым) пространством мы очень много потеряли. В нашем распоряжении нет больше векторов, которые можно было строго определенным образом переносить из точки в точку, что придавало пространству строго оформленный, жесткий характер. Теперь у нас нечто аморфное и пластичное, так как вся геометрия многообразия должна быть извлечена лишь из задания в нем множества координатных систем (80.2):

$$M \leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n) \in \Omega,$$

связанных между собой произвольными взаимно однозначными и N раз непрерывно дифференцируемыми преобразованиями.

Тем не менее, понятие *тензора в данной точке многообразия* без труда копируется с соответствующего понятия для аффинного пространства в криволинейных координатах.

Мы говорим, что в данной точке M задан тензор, например, один раз контравариантный и два раза ковариантный, если в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ нам задана система чисел $V^i_{jk}(M)$, преобразующихся при переходе к другим координатам $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ по закону

$$V^{i'}_{j'k'}(M) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)V^i_{jk}(M), \tag{81.1}$$

где частные производные вычислены в точке M (именно в этом и проявляется то обстоятельство, что тензор задан в точке M).

Большей частью нам придется рассматривать не отдельный тензор, а *тензорное поле*, когда тензор данного строения, например, V^i_{jk}, задан в каждой точке M многообразия (или, по крайней мере, в каждой точке некоторой поверхности или линии в нем). Тогда координаты тензора в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ являются определенными функциями точки

$$V^i_{jk} = V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n), \tag{81.2}$$

причем здесь и везде далее эти функции мы считаем $N-1$ раз непрерывно дифференцируемыми. При переходе в новую координатную систему действует закон преобразования (81.1). Мы знаем, что $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$, равно как и $x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, суть N раз непрерывно дифференцируемые функции; отсюда следует, что условие $N-1$-кратной непрерывной дифференцируемости для V^i_{jk} сохраняется и при переходе к $V^{i'}_{j'k'}$ (так как оно имеет место для множителей $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, появляющихся при преобразовании (81.1)).

Мы видим, что задание тензорного поля в многообразии с формальной стороны вполне совпадает с заданием тензорного поля в криволинейных координатах аффинного пространства (§ 76). И в том и в другом случае в данной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ координаты тензора задаются как функции точки, и в том и в другом случае они преобразуются по закону (81.1) (который представляет собой повторение закона (76.12)).

Разница лишь в том, что в аффинном пространстве мы могли трактовать $V^i_{jk}(M)$ как координаты тензора, *вычисленные относительно локального аффинного репера в точке* M. В многообразии это невозможно, так как в нем не существует векторов, а тем самым и аффинных реперов, в том числе и локальных. Поэтому, давая наши определения тензора в точке и тензорного поля *для многообразия*, мы были вынуждены скопировать именно формальную сторону дела. Если угодно, роль локальных реперов в точке M играют у нас сами координатные системы $x^1, \ldots, x^n$, *рассматриваемые в бесконечно малой окрестности точки* M. В следующем параграфе мы геометризируем понятие о координатной системе $x^1, \ldots, x^n$, рассматриваемой в бесконечно малом вблизи M, в виде *локального репера в касательном пространстве.*

Для того чтобы задать тензор данного строения в определенной точке M, достаточно произвольно задаться его координатами V^i_{jk} в одной какой-либо координатной системе x^i. Тогда в любой другой координатной системе $x^{i'}$ координаты тензора $V^{i'}_{j'k'}$ определятся по закону (81.1), причем этот же закон преобразования уже автоматически будет действовать и при переходе от любой координатной системы $x^{i'}$ к любой координатной системе $x^{i''}$. Последнее выводится совершенно так же, как и в § 32; разница лишь в обозначениях, а именно, роль взаимно обратных матриц $\|A^{i'}_i\|$ и $\|A^i_{i'}\|$ играют у нас $\left\|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right\|$, $\left\|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right\|$. При этом соотношения $A^i_{i''} = A^i_{i'}A^{i'}_{i''}$, $A^{i''}_i = A^{i''}_{i'}A^{i'}_i$, используемые при выводе, имеют место и у нас:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}, \qquad \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{81.3}$$

Действительно, это не что иное, как формулы дифференцирования сложных функций x^i от $x^{i''}$ (и наоборот) при промежуточных аргументах $x^{i'}$. Если нам нужно задать тензор не в одной лишь точке, а целое тензорное поле, то в соответствии со сказанным можно задаться произвольными $N-1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями

$$V^i_{jk}(M) = V^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n) \tag{81.4}$$

в данной координатной системе x^i. Тем самым в каждой точке M будет определен тензор поля, координаты которого в любой другой координатной системе $x^{i'}$ определяются теми же формулами (81.1). Аналогичным образом можно поступать и в тех случаях, когда тензорное поле задается в многообразии лишь на некоторой поверхности или линии.

Все операции тензорной алгебры со всеми их свойствами, установленные нами в главе II, переносятся дословно и на тензоры, заданные *в одной и той же точке* нашего многообразия. Действительно, расхождение с главой II будет здесь лишь в обозначениях: роль $A^i_{i'}$, $A^{i'}_i$ в тензорном законе преобразования будут играть $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(M)$ и $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)$.

Зато тензоры, заданные *в разных* точках многообразия, отделены друг от друга, так сказать, пропастью: их нельзя даже сравнивать между собой, не говоря уже о том, чтобы производить над ними совместно какие-либо операции.

В самом деле, желая сравнить два тензора, заданных в разных точках M_1 и M_2, мы должны были бы каким-то образом в окрестности M_1 и в окрестности M_2 согласовать координатные системы, в которых вычисляются координаты этих тензоров. Но для такого согласования в *многообразии* нельзя указать никакого приема. Ввиду широкого произвола в допустимых преобразованиях координат $x^1, \ldots, x^n$ из задания координатной системы в окрестности M_1 нельзя извлечь никаких указаний на построение координатной системы в окрестности M_2.

Эту же мысль можно выразить и так: допустим, что два тензора в точках M_1 и M_2 имеют одинаковые координаты в данной координатной системе x^i:

$$V^i_{jk}(M_1) = V^i_{jk}(M_2).$$

Тем не менее эти тензоры не могут считаться равными, так как при переходе к новым координатам $x^{i'}$ указанное равенство, вообще говоря, нарушится. Это произойдет потому, что в законе преобразования (81.1) в первом случае будут фигурировать $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M_1)$, а во втором случае $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M_2)$, вообще говоря, не равные между собой.

Операции тензорной алгебры переносятся также и на тензорные поля в многообразии, а именно, операции над полями определяются как операции над тензорами этих полей, *производимые в каждой точке M по отдельности*. Так, сложение тензорных полей (одинакового строения), например, $V^{ij}_k(M)$ и $U^{ij}_k(M)$, определяется как составление нового тензорного поля

$$W^{ij}_k(M) = V^{ij}_k(M) + U^{ij}_k(M);$$

умножение тензорных полей, например, $V^i_p(M)$, $U^{jk}_q(M)$, определяется как составление нового тензорного поля

$$W^{ijk}_{pq}(M) = V^i_p(M)\,U^{jk}_q(M);$$

свертывание тензорного поля, например, $W^{ijk}_{pq}(M)$, по второму верхнему и первому нижнему индексам означает построение нового тензорного поля

$$W^{ik}_q(M) = W^{isk}_{sq}(M);$$

наконец, подстановка индексов означает переход от тензорного поля, например, $W^{ijk}_{pq}(M)$, к тензорному полю того же строения $Z^{ijk}_{pq}(M)$, например, следующим образом:

$$Z^{ijk}_{pq}(M) = W^{jki}_{qp}(M).$$

Именно потому, что операции над тензорными полями сводятся таким образом к операциям над тензорами, *взятыми каждый раз в одной и той же точке M, эти операции сохраняют все свои обычные свойства*. Для краткости мы в дальнейшем часто будем говорить просто «тензор», имея в виду тензорное поле.

В противоположность алгебраическим операциям операция абсолютного дифференцирования тензорного поля в многообразии не существует. В процессе дифференцирования нужно прежде всего брать приращение тензора при переходе из данной точки в бесконечно близкую, т. е. вычитать тензор в одной точке из тензора в другой точке, а это в многообразии не имеет никакого смысла. Если же попробовать обойти это формальным дифференцированием координат тензора поля, например, $V^i_{kj}(x^1, \ldots, x^n)$, по координатам точки, то полученные величины $\frac{\partial V^i_{kj}}{\partial x^p}$ *не образуют тензора.* В самом деле, продифференцируем закон преобразования (81.1) почленно по $x^{p'}$ и получим тем самым величины $\frac{\partial V^{i'}_{k'j'}}{\partial x^{p'}}$ в новых координатах; тогда в правых частях придется дифференцировать, кроме множителя V^i_{kj}, множители $\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}$ и т. д., что приводит к дополнительным членам, портящим тензорный закон преобразования для $\frac{\partial V^i_{kj}}{\partial x^p}$. Более того, $\frac{\partial V^{i'}_{k'j'}}{\partial x^{p'}}$ зависят не только от $\frac{\partial V^i_{kj}}{\partial x^p}$ но и от самих V^i_{kj}.

§ 82. Касательное аффинное пространство

Опираясь на то, что в каждой точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$ можно построить тензоры с обычными свойствами, мы постараемся геометризировать понятие многообразия, насколько это возможно. Особое значение в этом смысле будут иметь один раз контравариантные тензоры ξ^i. В аффинном пространстве такой тензор определил бы нам вектор; но в многообразии у нас пока векторов нет, да в настоящем смысле слова никогда и не будет. Но мы все же постараемся связать *с каждым тензором* ξ^i *в данной точке* M *нашего многообразия вектор* $\boldsymbol{\xi}$ *в некотором условном смысле.* А именно, возьмем экземпляр n-мерного аффинного пространства A_n с отмеченной в нем точкой O. *Отобразим каждый тензор* ξ^i *в данной точке* M *в некоторый вектор* $\boldsymbol{\xi}$ *пространства* A_n *так, чтобы умножению тензора* ξ^i *на число и сложению двух тензоров* ξ^i *и* η^i *отвечали такие же операции над соответствующими векторами:*

$$\textit{если}\ \eta^i=\alpha\xi^i, \qquad \textit{то}\ \boldsymbol{\eta}=\alpha\boldsymbol{\xi}, \tag{82.1}$$

$$\textit{если}\ \zeta^i=\xi^i+\eta^i, \qquad \textit{то}\ \boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}. \tag{82.2}$$

Кроме того, мы требуем, чтобы *в этом отображении получались все векторы* $\boldsymbol{\xi}$ *пространства* A_n, а не происходило бы, например, отображение всех тензоров ξ^i в вектор-нуль.

Искомое отображение нетрудно построить следующим образом. Выберем среди тензоров ξ^i в точке M n линейно независимы.

$$\xi^i_{(1)},\quad \xi^i_{(2)},\quad \ldots,\quad \xi^i_{(n)},$$

т. е. удовлетворяющих условию

$$\mathrm{Det}\,|\xi^i_{(j)}|\neq 0.$$

Тогда любой тензор ξ^i можно разложить по этим с некоторыми коэффициентами

$$\xi^i=\alpha^{(1)}\xi^i_{(1)}+\ldots+\alpha^{(n)}\xi^i_{(n)} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{82.3}$$

где коэффициенты $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ без труда определяются из выписанной системы n уравнений с n неизвестными.

Теперь в A_n выберем произвольно n линейно независимых векторов

$$\boldsymbol{\xi}_{(1)},\ \boldsymbol{\xi}_{(2)},\ \ldots,\ \boldsymbol{\xi}_{(n)}$$

и каждому тензору ξ^i (82.3) сопоставим вектор $\boldsymbol{\xi}$, в A_n определяемый формулой

$$\boldsymbol{\xi}=\alpha^{(1)}\boldsymbol{\xi}_{(1)}+\ldots+\alpha^{n}\boldsymbol{\xi}_{(n)}. \tag{82.4}$$

Ясно, что отображение будет взаимно однозначным с соблюдением условий (82.1), (82.2). Следует подчеркнуть, что наше отображение относится именно *к тензорам* независимо от того, в какой координатной системе x^i они рассматриваются, и носит, таким образом, инвариантный характер.

Мы условимся, кроме того, отображать данную точку M многообразия $\mathfrak{M}_n$ в точку O пространства A_n; можно даже для наглядности представлять себе их отождествленными, так что пространство A_n «пришпилено» к многообразию $\mathfrak{M}_n$ в данной его точке M.

Итак, для каждой точки M многообразия $\mathfrak{M}_n$ мы строим аффинное пространство A_n, имеющее с многообразием одну общую точку M, причем тензоры ξ^i в точке M с сохранением линейных зависимостей между ними изображаются векторами $\boldsymbol{\xi}$ в A_n. Такое пространство A_n называется *касательным аффинным пространством*, *а его векторы $\boldsymbol{\xi}$ — касательными векторами в данной точе M многообразия $\mathfrak{M}_n$*. Впрочем мы будем кратко называть векторы $\boldsymbol{\xi}$ просто *векторами в данной точке M*, подразумевая, что они принадлежат касательному пространству в этой точке. На первый взгляд кажется, что касательное пространство привязано к многообразию внешне и искусственно и с геометрической стороны ничем не может его оживить. В действительности, однако, связь здесь более глубокая.

Рассмотрим кривую, проходящую через данную точку M многообразия $\mathfrak{M}_n$. Под кривой в многообразии мы будем понимать множество точек, заданных параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t), \tag{82.5}$$

причем будем предполагать, что $\frac{dx^i}{dt}$ не обращаются в нуль одновременно; функции $x^i(t)$ N раз непрерывно дифференцируемы.

Пусть при данном значении t мы находимся в точке M, а при $t+dt$ попадаем в бесконечно близкую точку M'. Дифференциалы координат $dx^i = dx^i(t)$ образуют в точке M один раз контравариантный тензор. Действительно, при переходе в многообразии к новым координатам

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n) \tag{82.6}$$

мы для того же бесконечно малого смещения по нашей кривой получаем по формуле полного дифференциала

$$dx^{i'}(t) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\, dx^i(t), \tag{82.7}$$

а это означает тензорный закон преобразования для dx^i. Но в таком случае в касательном аффинном пространстве тензору $\xi^i = dx^i(t)$ должен отвечать (бесконечно малый) вектор, который мы обозначим $d\mathbf{x}$.

Итак, бесконечно малому смещению из точки M по кривой в многообразии $\mathfrak{M}_n$ отвечает бесконечно малый вектор $d\mathbf{x}$ в касательном пространстве A_n в точке M. Этот вектор играет примерно ту же роль, что и дифференциал $d\mathbf{x}$ радиуса-вектора $\mathbf{x}$ в аффинном пространстве (§ 65). Но разница в том, что кривая теперь лежит в многообразии, радиуса-вектора $\mathbf{x}$ (как и вообще векторов) в многообразии не существует, и аналог вектора $d\mathbf{x}$ удается построить лишь в касательном в данной точке аффинном пространстве A_n.

Как и в § 65, вектор $d\mathbf{x}$ определяет отвечающее ему бесконечно малое смещение лишь с точностью 1-го порядка, так как задание $d\mathbf{x}$ равносильно заданию $dx^i(t)$, для самого же смещения нужно было бы знать $\Delta x^i(t)$.

Тем не менее полученная геометрическая картина имеет большое значение. Представим себе, что *из точки M по всевозможным направлениям берутся бесконечно малые смещения в многообразии. Все эти смещения находят себе изображение в виде вполне определенных бесконечно малых смещений (векторов $d\mathbf{x}$) из той же точки M в касательном пространстве, правда, если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка.* Тем самым касательное пространство не только «пришпилено» к многообразию в точке M, но и как бы «сливается с ним» в бесконечно малой окрестности точки M, однако лишь с точностью 1-го порядка. Теперь ясна аналогия между касательным пространством и касательной плоскостью, например, к обыкновенной поверхности. Смещаясь из данной точки M на поверхности в бесконечно близкую точку M' по какой-либо кривой, мы можем, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, выразить это смещение бесконечно малым вектором в касательной плоскости. Таким же свойством обладает касательное пространство по отношению к многообразию (однако при этом не обязательно мыслить их вложенными в некоторое объемлющее пространство).

В дальнейшем мы будем говорить кратко «вектор ξ^i в точке M», имея в виду соответствующий вектор $\boldsymbol{\xi}$ в касательном пространстве A_n в точке M. В частности, под «вектором dx^i» мы будем понимать вектор $d\mathbf{x}$. Следует подчеркнуть, что *касательные пространства A_n, взятые в разных точках многообразия $\mathfrak{M}_n$, не имеют между собой ничего общего.* У нас нет никаких данных для того, чтобы вектор, взятый в точке M_1 каким-либо мотивированным образом, отложить в точке M_2. Мы увидим далее, что устранение этого пробела будет означать превращение многообразия в пространство аффинной связности.

Вернемся к кривой (82.5). Рассмотрим вместо дифференциалов dx^i производные $\frac{dx^i}{dt}$ в данной точке M. Они, очевидно, тоже образуют тензор. Действительно, считая, что в (82.6) x^i зависят от t согласно (82.5), и дифференцируя по t, получаем:

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}, \tag{82.8}$$

т. е. $\frac{dx^i}{dt}$ подчиняются тензорному закону преобразования. Следовательно, тензору $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ должен в касательном пространстве отвечать определенный вектор ξ, который мы *будем называть касательным вектором к нашей кривой в точке* M $\left(\text{или просто «вектором } \frac{dx^i}{dt}\text{»}\right)$. Конечно, касательный вектор определяется неоднозначно; при непрерывно дифференцируемом и обратимом преобразовании параметра

$$\tau = \tau(t), \quad t = t(\tau)$$

этот вектор умножается на $\frac{dt}{d\tau}$:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

Таким образом, он будет определен в данной точке для данной кривой с точностью до численного множителя $\frac{dt}{d\tau}$. Другими словами, все касательные векторы в данной точке M данной кривой коллинеарны, а потому они указывают в касательном пространстве вполне определенную проходящую через точку M прямую; ее мы будем называть *касательной* к нашей кривой. Итак, касательная к кривой, заданной в многообразии, лежит не в многообразии, а в касательном пространстве в соответствующей точке M.

Отметим, наконец, что утраченный нами в многообразии *локальный аффинный репер* возрождается снова в касательном пространстве. А именно, задавшись в многообразии координатной системой x^i, рассмотрим в какой-нибудь точке M тензоры $\xi^i_{(1)}, \xi^i_{(2)}, \ldots, \xi^i_{(n)}$, имеющие в *данной координатной системе* x^i следующие координаты:

$$\left.\begin{array}{l} \xi^1_{(1)}, \ \xi^2_{(1)}, \ \ldots, \ \xi^n_{(1)} = 1, \ 0, \ \ldots, \ 0, \\ \xi^1_{(2)}, \ \xi^2_{(2)}, \ \ldots, \ \xi^n_{(2)} = 0, \ 1, \ \ldots, \ 0, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \xi^1_{(n)}, \ \xi^2_{(n)}, \ \ldots, \ \xi^n_{(n)} = 0, \ 0, \ \ldots, \ 1. \end{array}\right\} \tag{82.9}$$

В краткой записи

$$\xi^i_{(j)} = \delta^i_j.$$

Отвечающие этим тензорам векторы *в касательном пространстве* A_n обозначим соответственно $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и будем называть репер

$\{M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в A_n локальным репером в данной точке M и в *данной координатной системе* x^i. Значение локального репера основано на следующем факте: *если тензору* ξ^i *в точке* M *отвечает в касательном пространстве вектор* ξ, *то его координаты относительно локального репера совпадают* с ξ^i. При этом предполагается, что координаты тензора ξ^i берутся в той же координатной системе x^i, в которой построен локальный репер. В самом деле, как видно из таблицы (82.9), всякий тензор ξ^i может быть разложен по тензорам $\xi^i_{(1)}, \ldots, \xi^i_{(n)}$ с коэффициентами $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Соответственно этому при переходе к векторам касательного пространства получаем:

$$\xi = \xi^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \xi^n\mathbf{e}_n, \qquad (82.10)$$

откуда и вытекает, что координаты вектора ξ относительно локального репера равны $\xi^1, \ldots, \xi^n$.

Из определения локального репера видно, что он зависит от той координатной системы x^i, к которой отнесено многообразие. Можно даже уточнить это: вектор $\mathbf{e}_k$ есть касательный вектор к координатной линии x^k, отнесенной к параметру $t = x^k$. Действительно, вычисляем касательный вектор при $k = 1$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x^1} = \delta^i_1,$$

а значит, этот касательный вектор совпадает с $\mathbf{e}_1$.

При переходе к новой координатной системе $x^{i'}$ векторы локального репера в каждой точке M преобразуются по закону

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(M)\,\mathbf{e}_i \qquad (82.11)$$

(т. е. так же, как и в криволинейных координатах в аффинном пространстве). В самом деле, поскольку координаты ξ^i любого вектора ξ относительно локального репера совпадают с координатами соответствующего тензора ξ^i, то они преобразуются по закону

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\,\xi^i, \qquad (82.12)$$

а следовательно, векторы репера $\mathbf{e}_i$ должны преобразоваться при помощи транспонированной обратной матрицы, т. е. согласно (82.11). Конечно, эту формулу нетрудно проверить и непосредственно, если учесть, что $\mathbf{e}_{i'}$ имеют координаты $\delta^{k'}_{i'}$ в новом локальном репере. Тем самым в старом локальном репере они имеют координаты $\xi^k_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\delta^{k'}_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}$, а именно это и выражает разложение (82.11).

Из формул (82.11), (82.12) следует общий результат, окончательно выясняющий роль локальных реперов в точке M. Координаты тензора, например V^i_{jk}, заданного в точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$, ведут себя в то же время как координаты тензора в касательном пространстве, взятые относительно локального репера. Действительно, преобразование координат x^i влечет за собой преобразование локального репера (82.11). Рассмотрим тензор, например V^i_{jk}, *в касательном пространстве, отнесенный к локальному реперу;* закон преобразования его координат будет:

$$V^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(M)\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(M)\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(M)\, V^i_{jk},$$

так как (82.11) дает образец преобразования для ковариантных индексов, а (82.12) — два контравариантных. Но этот же вид имеет закон преобразования (81.1) для координат тензора в данной точке M многообразия $\mathfrak{M}_n$. *Поэтому безразлично, сказать ли, что V^i_{jk} суть координаты тензора в многообразии $\mathfrak{M}_n$ в данной его точке M относительно координатной системы x^i или в касательном аффинном пространстве A_n в точке M относительно соответствующего локального репера.* Закон преобразования в обоих случаях будет один и тот же.

§ 83. Поверхности в многообразии

Под элементарной *m-мерной поверхностью* $\mathfrak{M}_m$ в n-мерном элементарном многообразии $\mathfrak{M}_n$ мы будем понимать множество точек, заданных параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{83.1}$$

где $u^1, \ldots, u^m$ — независимые переменные (параметры), пробегающие некоторую связную m-мерную область изменения Ω_u. При этом мы будем предполагать функции $x^i(u^1, \ldots, u^m)$ непрерывно дифференцируемыми N раз (N — класс многообразия) и удовлетворяющими условию *регулярности поверхности:*

$$\text{ранг матрицы} \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \frac{\partial x^2}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^m} \end{matrix}\right\| \text{ равен } m, \tag{83.2}$$

т. е. строки этой матрицы линейно независимы. Элементарная выкладка показывает, что это условие инвариантно относительно любого преобразования координат x^i в $\mathfrak{M}_n$.

Число измерений m нашей поверхности может принимать значения $1, 2, \ldots, n-1$. При $m=1$ мы возвращаемся к *кривой* (82.5), причем условие (83.2) в этом случае означает, что состоящая из одной строки матрица

$$\left\| \frac{\partial x^1}{\partial t} \frac{\partial x^2}{\partial t} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial t} \right\| \tag{83.3}$$

имеет ранг 1, т. е. выписанные производные не обращаются в нуль одновременно (это мы предполагали и для кривой (82.5)). В случае $m=n-1$ поверхность называется *гиперповерхностью*; условие (83.2) принимает вид

$$\text{ранг матрицы} \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{matrix} \right\| \text{ равен } n-1. \tag{83.4}$$

Смысл условия (83.2) состоит в том, чтобы предотвратить появление особых точек на поверхности и, особенно, ее вырождение в образ меньшего числа измерений. Так, если функции, стоящие в правых частях (83.1), являются константами, то, конечно, условия дифференцируемости соблюдаются прекрасно; но поверхность вырождается в точку. Условие (83.2) делает, однако, невозможным как этот, так и другие не столь грубые случаи вырождения (например, когда при $m=5$ поверхность оказывается фактически двумерной и т. п.).

Более точно, условие (83.2) означает следующее. Допустим для простоты, что в данной точке ранговый минор образован первыми m столбцами:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial u^m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда функциональная зависимость первых m текущих координат x^1 от $u^1, \ldots, u^m$

$$x^1 = x^1(u^1, \ldots, u^m), \ldots, \quad x^m = x^m(u^1, \ldots, u^m)$$

обладает якобианом, отличным от нуля, и поэтому ее в окрестности данной точки можно обратить:

$$u^1 = u^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, \quad u^m = u^m(x^1, \ldots, x^m).$$

Вставляя эти (тоже N раз непрерывно дифференцируемые) функции вместо $u^1, \ldots, u^m$ в остальные уравнения (81.1) ($i = m+1, m+2, \ldots \ldots, n$), мы получим уравнения поверхности в виде

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} = f_{m+1}(x^1, \ldots, x^m), \\ x^{m+2} = f_{m+2}(x^1, \ldots, x^m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = f_n(x^1, \ldots, x^m). \end{array}\right\} \qquad (83.5)$$

Итак, в окрестности каждой данной точки уравнения поверхности (с точностью до нумерации координат x^i) можно записать в виде (83.5). Здесь роль независимых параметров $u^1, \ldots, u^m$ играют координаты $x^1, \ldots, x^m$, а потому все m параметров являются здесь существенными в том смысле, что любое их изменение влечет за собой смещение точки поверхности. Вырождение m-мерной поверхности в образ низшего числа измерений, т. е. возможность задать ее при помощи меньшего числа параметров, здесь, очевидно, отпадает; особые точки также становятся невозможными.

Элементарную поверхность всегда можно рассматривать как m-мерное элементарное многообразие. Действительно, не меняя поверхности, можно подвергать параметры u^α на ней взаимно однозначному и в обе стороны N раз непрерывно дифференцируемому преобразованию

$$u^{\alpha'} = f_\alpha(u^1, \ldots, u^m), \quad u^\alpha = g_\alpha(u^{1'}, \ldots, u^{m'}). \qquad (83.6)$$

Здесь $u^1, \ldots, u^m$ пробегают область изменения Ω_u, а $u^{1'}, \ldots, u^{m'}$ — некоторую область изменения Ω'_u. Ясно, что после такого преобразования параметров уравнения поверхности можно снова записать в виде

$$x^i = x^i(u^{1'}, \ldots, u^{m'}),$$

где новые функции $x^i(u^{1'}, \ldots, u^{m'})$ удовлетворяют прежним условиям, в том числе и (83.2), как можно показать после простой выкладки. Рассматривая параметры u^α как координаты на поверхности, заданные с точностью до указанного преобразования, мы вправе считать нашу поверхность m-мерным элементарным многообразием $\mathfrak{M}_m$ согласно определению последнего (§ 80). В связи с этим все построения, сделанные нами для многообразия $\mathfrak{M}_n$ в координатах $x^1, \ldots, x^n$, повторяются и для нашей поверхности в координатах $u^1, \ldots, u^m$. Все сказанное относится к элементарной поверхности. В общем же случае m-мерную поверхность в n-мерном многообразии $\mathfrak{M}_n$ можно определить как множество точек в $\mathfrak{M}_n$, взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны отображенное на некоторое многообразие $\mathfrak{M}_m$, и притом так, что отдельные элементарные многообразия $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, из которых $\mathfrak{M}_m$ «склеено», отображаются в элементарные поверхности (83.1). Тем самым любую поверхность в некоторой окрестности любой ее точки можно считать элементарной поверхностью. Так как нас дальше будут интересовать только локальные свойства, то фактически мы можем ограничиться лишь элементарными поверхностями. Так мы и будем поступать.

На поверхности можно рассматривать тензоры как в отдельных точках M, так и тензорные поля. При этом координаты тензора, например $V^{\alpha}_{\beta\gamma}$, подчинены закону преобразования

$$V^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(M)=\frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^{\alpha}}(M)\,\frac{\partial u^{\beta}}{\partial u^{\beta'}}(M)\,\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial u^{\gamma'}}(M)\,V^{\alpha}_{\beta\gamma}. \tag{83.7}$$

Кривую на поверхности мы будем задавать уравнениями

$$u^1=u^1(t),\quad \ldots,\quad u^m=u^m(t), \tag{83.8}$$

где функции $u^{\alpha}(t)$ N раз непрерывно дифференцируемые, и $\frac{du^{\alpha}}{dt}$ не обращаются в нуль одновременно. Вставляя функции (83.8) в (83.1), мы получаем функциональную зависимость x^i от t, что действительно определяет кривую в нашем многообразии. Правда, еще нужно проверить условие (83.3). Найдем касательный вектор $\frac{dx^i}{dt}$ к этой кривой, дифференцируя x^i как сложные функции:

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}}\,\frac{du^{\alpha}}{dt}\,. \tag{83.9}$$

Здесь имеется в виду суммирование по $\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Вообще мы условимся считать, что греческие индексы относятся к параметрам на поверхности и пробегают значения $1,\ 2,\ \ldots,\ m$ в то время как латинские пробегают значения $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и относятся к многообразию $\mathfrak{M}_n$. Заметим, что согласно (83.9) строка, составленная из производных

$$\frac{dx^1}{dt},\ \frac{dx^2}{dt},\ \ldots,\ \frac{dx^n}{dt},$$

представляет собой линейную комбинацию строк матрицы (83.2) с коэффициентами $\frac{du^{\alpha}}{dt}$. Эти коэффициенты, как было оговорено, не все равны нулю, а следовательно, в силу линейной независимости строк матрицы (83.2) элементы строки (83.3) не могут обращаться в нуль одновременно. Условие (83.3) проверено.

Важный геометрический смысл (83.9) состоит в том, что это соотношение «переводит» тензор $\frac{du^{\alpha}}{dt}$ на поверхности $\mathfrak{M}_m$ в тензор

$\frac{dx^i}{dt}$ в многообразии $\mathfrak{M}_n$. Связь между этими двумя тензорами является, очевидно, инвариантной и заключается в том, что они получены дифференцированием текущих координат соответственно u^α и x^i *по одному и тому же параметру вдоль одной и той же кривой в одной и той же точке*. Тем самым каждый тензор $\frac{du^\alpha}{dt}$ через посредство тензора $\frac{dx^i}{dt}$ изображается некоторым вектором в $\mathfrak{M}_n$ (т. е. в касательном пространстве A_n).

Будем проводить теперь по поверхности через данную ее точку M всевозможные кривые (83.8). Для всех этих кривых строим в точке M касательные векторы (83.9). Тогда под видом $\frac{du^\alpha}{dt}$ мы будем получать всевозможные тензоры ξ^α в $\mathfrak{M}_m$ (в данной его точке M). Им соответствуют векторы $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ в $\mathfrak{M}_n$ согласно (83.9):

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \xi^\alpha. \tag{83.10}$$

Они представляют собой, следовательно, *всевозможные* линейные комбинации m векторов

$$\xi^i_{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \quad \ldots, \quad \xi^i_{(m)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^m}, \tag{83.11}$$

линейно независимых в силу (83.2).

В результате векторы ξ^i, отвечающие всевозможным тензорам ξ^α в данной точке многообразия $\mathfrak{M}_m$, заполняют в касательном пространстве A_n m-мерную плоскость A_m, проходящую через M (предполагается, что векторы ξ^i откладываются от M).

Плоскость A_m можно рассматривать как *касательное пространство к многообразию* $\mathfrak{M}_m$ в точке M, так как векторы ξ^i плоскости A_m служат изображением всевозможных тензоров ξ^α *в данной точке* M многообразия $\mathfrak{M}_m$ (с сохранением линейных зависимостей между ними).

С другой стороны, векторы $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ суть всевозможные касательные векторы к поверхности $\mathfrak{M}_m$ в данной точке M, т. е. касательные к всевозможным кривым на $\mathfrak{M}_m$ в этой точке. Поэтому порожденную ими плоскость A_m можно рассматривать *как касательную плоскость к поверхности* $\mathfrak{M}_m$.

Первая точка зрения на A_m является, так сказать, внутренней, вторая — внешней. (Пользуясь рис. 16, нужно помнить, что изображенные на нем векторы и плоскость A_m на самом деле не принадлежат многообразию $\mathfrak{M}_n$, в котором расположена поверхность $\mathfrak{M}_m$, и, строго говоря, должны были бы изображаться отдельно в касательном пространстве A_n.)

Векторы (83.11), на которых строится A_m, являются касательными векторами к координатным линиям $u^1, \ldots, u^m$ (под координатной линией u^α мы понимаем кривую на поверхности, вдоль которой меняется лишь данный параметр u^α при постоянных значениях остальных параметров). В самом деле, если в (83.8) положить, в частности,

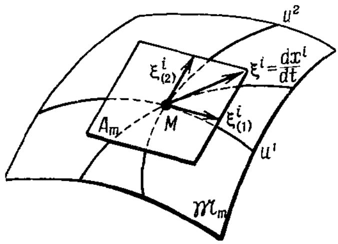

Рис. 16.

$$u^1 = t, \quad u^2 = \text{const}, \quad \ldots, \quad u^m = \text{const},$$

т. е. рассмотреть координатную линию u^1, то (83.9) дает

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1},$$

что и показывает, что $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}$ есть вектор, касательный к линии u^1. С точки зрения многообразия $\mathfrak{M}_m$ векторы (83.11) образуют локальный репер, что легко обнаружить подсчетом их координат в $\mathfrak{M}_m$: например, координаты первого из них будут $\xi^\alpha = \delta^\alpha_1$, и т. д.

§ 84. Понятие о многообразии

В этом параграфе мы дадим точное определение понятия многообразия, пользуясь уже установленным нами понятием элементарного многообразия.

Мы будем называть *n-мерным многообразием класса N множество $\mathfrak{M}$, в котором задана конечная или счетная система подмножеств* $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, удовлетворяющая следующим условиям (элементы множества $\mathfrak{M}$ будем называть точками).

1°. Каждое подмножество $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ есть элементарное n-мерное многообразие класса N.

2°. Каждая точка M множества $\mathfrak{M}$ входит, по крайней мере, в одно $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$.

3°. Если два подмножества $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ пересекаются по некоторому непустому множеству $\mathfrak{N}$, то оно образует (вообще говоря, несвязную) *область* как в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, так и в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$; при этом, когда точка M пробегает $\mathfrak{N}$, ее координаты y^i в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ являются N раз непрерывно дифференцируемыми однозначными функциями от ее координат x^i в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, равно как и обратно.

4°. Если M_1 и M_2 — две *различные* точки $\mathfrak{M}$, причем $M_1 \in \mathfrak{M}_{(\alpha_1)}$, $M_2 \in \mathfrak{M}_{(\alpha_2)}$ (допускается, в частности, и совпадение $\alpha_1 = \alpha_2$), то в

$\mathfrak{M}_{(\alpha_1)}$ найдется область $\mathfrak{N}_1 \ni M_1$ и в $\mathfrak{M}_{(\alpha_2)}$ — область $\mathfrak{N}_2 \ni M_2$, не пересекающиеся между собой.

5°. Любые два подмножества $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ можно связать конечной цепочкой последовательно пересекающихся между собой подмножеств $\mathfrak{M}_{(\gamma)}$; точнее, существует конечная последовательность $\mathfrak{M}_{(\gamma_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, причем $\mathfrak{M}_{(\gamma_i)}$ и $\mathfrak{M}_{(\gamma_{i+1})}$ всегда между собой пересекаются и, кроме того, $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ пересекается с $\mathfrak{M}_{(\gamma_1)}$, а $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ — с $\mathfrak{M}_{(\gamma_s)}$.

Смысл этих условий следующий. Условия 1° и 2° означают, что $\mathfrak{M}$ «склеено» из конечного или счетного запаса элементарных многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, частью, возможно, не имеющих общих точек, частью налегающих друг на друга или даже заключающих одно другое. Впрочем в последнем случае $\mathfrak{M}_{(\beta)}$, входящее в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, является по существу лишним и может быть изъято без ущерба для дела.

Условие 3° требует, чтобы (непустое) пересечение $\mathfrak{N}$ элементарных многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ было областью (открытым множеством) и в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$. Это значит, что если точка $M \in \mathfrak{M}_{(\alpha)}$ склеена с какой-то точкой $L \in \mathfrak{M}_{(\beta)}$, то и некоторая окрестность точки M в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ тоже подклеивается к $\mathfrak{M}_{(\beta)}$, т. е. не может быть так, чтобы $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ до какого-то места были подклеены друг к другу, а дальше отходили бы одно от другого. Другими словами, склеенное из $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ многообразие $\mathfrak{M}$ не должно «ветвиться» вследствие неаккуратной, неполной подклейки многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ друг к другу.

Далее, условие 3° требует, чтобы в склеенных местах многообразий $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ их дифференцируемая структура была одинаковой, т. е. координаты в одном и в другом многообразии были связаны N раз непрерывно дифференцируемыми преобразованиями. Действительно, если бы этого не было, то мы не знали бы, какую дифференцируемую структуру приписать многообразию $\mathfrak{M}$ в области $\mathfrak{N}$: заимствованную из $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ или из $\mathfrak{M}_{(\beta)}$? При наличии же нашего условия это становится безразличным. Координатной системой в $\mathfrak{M}$ мы будем называть любую координатную систему в любом $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$.

Если нас интересуют лишь чисто локальные свойства многообразия $\mathfrak{M}$, т. е. его поведение в некоторой окрестности произвольной точки M, то для этого перечисленных требований 1°—3°, в сущности, достаточно. Однако если ограничиться этим, то мы допустим существование многообразий, весьма неприятных в некоторых отношениях. Прежде всего, несмотря на условие 3°, все еще возможно «ветвление» многообразия $\mathfrak{M}$. Рассмотрим простой пример: пусть $n = 1$ и $\mathfrak{M}$ склеивается из двух одномерных элементарных многообразий $\mathfrak{M}_{(1)}$, $\mathfrak{M}_{(2)}$, представляющих собой интервалы $(-1, 1)$ на осях x^1, x^2 соответственно: $\mathfrak{M}_{(1)}\{-1 < x^1 < 1\}$,

$\mathfrak{M}_{(2)}\{-1 < x^2 < 1\}$. Образуем $\mathfrak{M}$, склеивая $\mathfrak{M}_{(1)}$ и $\mathfrak{M}_{(2)}$ следующим образом: точки x^1 при $-1 < x^1 < 0$ отождествляются с точками x^2 при $-1 < x^2 < 0$ по принципу равенства координат $x^1 = x^2$; точки x^1 при $0 \leqslant x^1 < 1$ и точки x^2 при $0 \leqslant x^2 < 1$ не склеиваются ни с чем.

В результате $\mathfrak{M}$ будет состоять из интервала $-1 < x < 0$ (это будет область пересечения $\mathfrak{N}$) и примыкающего к нему *раздвоенного* полуинтервала $0 \leqslant x < 1$, т. е. $\mathfrak{M}$ будет ветвиться.

Между тем условие 3°, как легко проверить, полностью соблюдается: ветвление этого типа оно неспособно устранить, хотя и устраняет ветвление более грубого характера, например, если бы мы составили $\mathfrak{M}$ из полуинтервала $-1 < x \leqslant 0$ и из примыкающего к нему *раздвоенного* интервала $0 < x < 1$ (действительно, в этом случае $\mathfrak{N}\{-1 < x \leqslant 0\}$ не будет областью).

Чтобы устранить не только такие, но и более тонкие случаи ветвления $\mathfrak{M}$, подобные приведенному выше примеру, мы вводим условие 4° (*аксиому Хаусдорфа*). Теперь и первый наш пример становится невозможным, так как условие 4° в нем нарушено для точек $x^1 = 0$ и $x^2 = 0$ (в $\mathfrak{M}$ — это различные точки). Действительно, какими бы интервалами ни окружать эти точки в $\mathfrak{M}_{(1)}$ и $\mathfrak{M}_{(2)}$ соответственно, эти интервалы всегда будут иметь общие точки в склеенной части $-1 < x < 0$.

Наконец, мы не хотим, чтобы многообразие $\mathfrak{M}$ состояло из отдельных, ничем не связанных между собой кусков. Условие 5° (условие связности многообразия) устраняет эту возможность и превращает многообразие в единое целое, не распадающееся на не пересекающиеся между собой многообразия.

Отметим, что в многообразии $\mathfrak{M}$, естественно, определяется понятие области (открытого множества): это множество точек, содержащее вместе с каждой своей точкой $M_0(x_0^i)$ и все точки $M(x^i)$, для которых разности $x^i - x_0^i$ по модулю меньше некоторого $\delta > 0$ (δ зависит от M_0); под x^i понимается какая-либо координатная система в каком-нибудь элементарном многообразии $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ содержащем M_0. Нетрудно показать, что смысл определения не зависит от того или иного выбора этой координатной системы.

Определенный таким образом класс открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства, специальным случаем которого и является многообразие.

Далее, мы говорим, что переменная точка M стремится к точке M_0 (стремится или по последовательности положений M_k ($k = 1, 2, \ldots$) или как функция $M(t)$ непрерывно растущего (убывающего) параметра $t \to t_0$), если точка M с некоторого момента находится в области действия координатной системы, включающей точку M_0, и координаты x^i точки M стремятся к координатам x_0^i точки M_0

(если сказанное имеет место для одной координатной системы, включающей M_0, то и для любой другой — тоже).

В силу условия 4° наша *переменная точка M не может стремиться одновременно к двум различным точкам M_0, M_0'.*

Мы называем *кривой* «параметризованное» множество точек $M(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, если при достаточно малых изменениях любого данного значения t точка $M(t)$ остается в пределах одной координатной системы, причем ее текущие координаты $x^i(t)$ — N раз непрерывно дифференцируемые функции.

Далее мы говорим, что в $\mathfrak{M}$ задано тензорное поле, например V^i_{jk}, если в $\mathfrak{M}$ в каждой точке M и в каждой координатной системе x^i (действующей в области, содержащей точку M) задана система чисел $V^i_{jk}(M)$, которые $N-1$ раз непрерывно дифференцируемым образом зависят от координат $x^1, \ldots, x^n$ точки M и преобразуются (при преобразовании координатной системы) согласно (81.1).

Аналогично определяется тензорное поле, заданное лишь в некоторой области $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ или на поверхности $\mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$.

Наше определение многообразия дает нам все нужное, но страдает тем недостатком, что дает и кое-что лишнее; а именно, в нашем определении способ склеивания многообразия из элементарных многообразий рассматривается наряду с его окончательным результатом — готовым многообразием. Между тем нас интересует лишь последнее, и мы не будем считать два экземпляра одного и того же многообразия различными, если они по-разному разбиты на элементарные многообразия. Например, сферу можно составить, как уже указывалось, склеиванием двух (слегка продолженных за края) полусфер, а можно составить и склеиванием внутренностей нескольких сферических треугольников, заходящих один на другой. Тем не менее сфера в обоих случаях представляет одно и то же многообразие. Поэтому наше определение нужно несколько дополнить. С этой целью дадим определение диффеоморфизма двух многообразий.

Два многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ одного числа измерений n и одного класса N называются диффеоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, обладающее следующим свойством: пусть $M \in \mathfrak{M}$ и $M' \in \mathfrak{M}'$ — любые две отвечающие друг другу точки и пусть M принадлежит некоторому элементарному многообразию $\mathfrak{M}_{(\alpha)} \subset \mathfrak{M}$ с координатной системой x^i, а M' — элементарному многообразию $\mathfrak{M}_{(\alpha')} \subset \mathfrak{M}'$ с координатной системой $x^{i'}$; тогда соответствие между точками многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ можно записать в виде

$$x^{i'} = f_i(x^1, \ldots, x^n), \quad x^i = g_i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}),$$

по крайней мере, в пределах некоторой области изменения x^i, *заключающей точку* M, *и соответствующей ей области изменения* $x^{i'}$, *заключающей точку* M', *причем функции* f_i, g_i N *раз непрерывно дифференцируемые.*

Под областью изменения x^i здесь подразумевается не обязательно область изменения, которую пробегают x^i, когда M пробегает $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, а, вообще говоря, некоторая ее подобласть; аналогично и для $x^{i'}$.

Коротко говоря, диффеоморфизм многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ есть взаимно однозначное соответствие, N раз непрерывно дифференцируемое в обе стороны в тех пределах, в каких его удается записать в виде функциональной зависимости между координатами x^i в многообразии $\mathfrak{M}$ и $x^{i'}$ в многообразии $\mathfrak{M}'$, причем это должно удаваться, по крайней мере, вблизи любой пары соответствующих точек M и M'.

Теперь к нашему определению многообразия следует добавить только, что *всякое многообразие будет интересовать нас лишь с точностью до замены диффеоморфным многообразием.* Этим мы отвлекаемся от ненужных по сути дела подробностей, именно от способа составления данного многообразия из элементарных кусков.

ГЛАВА VII

РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

§ 85. Риманово пространство

Многообразие является той основой, на которой строится риманово пространство — важнейшее понятие этой книги. Пути для этого мы уже наметили в конце § 79. Чтобы превратить многообразие в риманово пространство, нужно внести в него метрику. Это мы осуществляем заданием в многообразии метрического тензора, аналогичного метрическому тензору евклидова пространства в криволинейных координатах. Дадим точное определение.

Римановым пространством V_n *мы будем называть многообразие* $\mathfrak{M}_n$, *в котором задано поле тензора*

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{85.1}$$

два раза ковариантного, симметрического и невырожденного:

$$\operatorname{Det}|g_{ij}| \neq 0, \qquad g_{ij} = g_{ji}. \tag{85.2}$$

В остальном тензор $g_{ij}(M)$ выбирается произвольно; это значит, что на одно и то же многообразие $\mathfrak{M}_n$ можно по-разному накладывать риманову метрику. Тензор $g_{ij}(M)$ мы будем называть *метрическим*; его мы кладем в основу построения римановой геометрии по аналогии с евклидовой геометрией, вполне определяемой своим метрическим тензором (§ 79). В этой главе многообразие $\mathfrak{M}_n$ имеет класс $N \geqslant 2$ и, соответственно, функции (85.1) непрерывно дифференцируемы $N-1$ раз.

Мы начнем с рассмотрения касательного аффинного пространства A_n к нашему многообразию в какой-нибудь точке M. Векторы ξ этого пространства служат геометрическим изображением тензоров ξ^i в данной точке M. Располагая тензорным полем $g_{ij}(M)$, *мы превратим каждое касательное пространство из аффинного* A_n *в евклидово* R_n, *вводя в нем скалярное произведение любых двух* *векторов* ξ, η *по формуле*

$$\xi\eta = g_{ij(M)}\xi^i\eta^j. \tag{85.3}$$

В сущности говоря, к этому и сводится геометрическое осмысливание тензора $g_{ij}(M)$; все остальное будет уже отсюда вытекать. Можно было бы даже сказать, что риманово пространство V_n — это многообразие $\mathfrak{M}_n$, в котором в каждое касательное пространство A_n внесена евклидова метрика; нужно было бы лишь обеспечить достаточно гладкое ее изменение от точки к точке (что у нас обеспечивается непрерывной дифференцируемостью функций $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$).

В силу полного свертывания в правой части (85.3) скалярное произведение $\xi\eta$ представляет собой инвариант. Очевидно, $\xi\eta$ линейно зависит от ξ и от η, обладает симметрией

$$\xi\eta = \eta\xi$$

в силу симметрии тензора g_{ij} и дает невырожденную евклидову метрику в силу условия (85.1). Все это показывается дословно так же, как в § 39.

Мы будем называть риманово пространство *собственно римановым* или *псевдоримановым* в зависимости от того, будут ли его касательные пространства собственно евклидовыми или псевдоевклидовыми (мы рассматриваем только вещественные пространства). Все, сказанное для евклидовых пространств, будет, конечно, само собой справедливо для касательных пространств R_n в каждой точке M риманова пространства V_n. В частности, длина вектора ξ выражается формулой

$$|\xi| = \sqrt{\xi^2} = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}. \tag{85.4}$$

При этом собственно риманово пространство характеризуется тем, что квадратичная форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ будет положительно определенной.

Пусть в какой-нибудь точке M риманова пространства задан тензор, например, $V^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}$. Его можно рассматривать одновременно и как тензор в касательном пространстве R_n относительно локального репера. При этом $g_{ij}(M)$ служит в R_n метрическим тензором. Составим контравариантный метрический тензор $g^{ij}(M)$, координаты которого образуют матрицу, обратную $\|g_{ij}(M)\|$. Как мы знаем, в евклидовом пространстве R_n разница между верхними и нижними индексами является несущественной в том смысле, что верхние индексы можно переводить в нижние и, наоборот, при помощи метрического тензора. Так, например, индекс r у нашего тензора можно «поднять», т. е. составить тензор

$$V^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s} = g^{rp}V^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}. \tag{85.5}$$

Обратно, у полученного тензора индекс r можно «опустить», причем мы возвращаемся к прежнему тензору:

$$V^{i..}_{.rs} = g_{rp} V^{ip.}_{..s}. \tag{85.5'}$$

Эти взаимно обратные операции «поднятия» и «опускания» данного индекса можно рассматривать и для тензорных полей $V^{i..}_{.rs}(M)$, $V^{ir.}_{..s}(M)$, подразумевая, что формулы (85.5), (85.5′) имеют место в каждой точке рассматриваемой области.

Рассмотрим теперь в римановом пространстве кривую

$$x^i = x^i(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{85.6}$$

Бесконечно малому смещению по этой кривой отвечает бесконечно малый вектор $dx^i(t)$ в касательном пространстве (§ 82). Но теперь мы можем измерить длину этого вектора, чего раньше (в многообразии) нельзя было сделать. Получим:

$$|d\mathbf{x}| = \sqrt{d\mathbf{x}^2} = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}.$$

По аналогии с евклидовым пространством *мы принимаем длину вектора $d\mathbf{x}$ за дифференциал дуги ds вдоль нашей кривой, так что*

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j. \tag{85.7}$$

Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — координаты той точки M, из которой производится бесконечно малое смещение по кривой. Таким образом, квадрат дифференциала дуги выражается *дифференциальной квадратичной формой* от координат x^i. При преобразовании координат x^i эта квадратичная форма инвариантна, так как представляет собой скалярный квадрат вектора dx^i, или, что то же, результат полного свертывания тензора g_{ij} с дважды взятым тензором dx^i. Квадратичную форму $g_{ij}dx^i dx^j$ мы будем называть *метрической*.

В определении риманова пространства можно заменить задание тензорного поля $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ заданием метрической квадратичной формы (или, как говорят еще, линейного элемента риманова пространства). Тогда определение будет звучать так:

Римановым пространством V_n называется многообразие $\mathfrak{M}_n$, в котором задана инвариантная дифференциальная квадратичная форма

$$g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i dx^j, \tag{85.8}$$

где g_{ij} $N-1$ раз непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию

$$\operatorname{Det}|g_{ij}| \neq 0 \qquad (g_{ij} = g_{ji}). \tag{85.9}$$

Из инвариантности квадратичной формы будет следовать, что g_{ij} образуют тензорное поле, так что мы возвращаемся к прежнему определению. В самом деле, запишем инвариантность формы (85.8) при переходе к новым координатам $x^{i'}$:

$$g_{i'j'}dx^{i'}\,dx^{j'}=g_{ij}\,dx^i\,dx^j.$$

Подставляя в правую часть

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,dx^{i'},$$
$$dx^j=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,dx^{j'},$$

получаем тождественное равенство двух квадратичных форм относительно переменных $dx^{1'}, \ldots, dx^{n'}$:

$$g_{i'j'}dx^{i'}\,dx^{j'}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,dx^{i'}\,dx^{j'}.$$

Отсюда, учитывая, что $g_{ij}=g_{ji}$, $g_{i'j'}=g_{j'i'}$, получим:

$$g_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,g_{ij},$$

т. е. тензорный закон преобразования для g_{ij}. Мы вернулись к первому определению.

За *длину кривой* (85.6) мы принимаем интеграл от дифференциала дуги

$$s=\int_a^b\sqrt{g_{ij}dx^i\,dx^j}=$$
$$=\int_a^b\sqrt{g_{ij}(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t))\frac{dx^i(t)}{dt}\frac{dx^j(t)}{dt}}\,dt. \quad (85.10)$$

В последнем выражении мы выносим dt из-под знака радикала и везде явно выписываем окончательный аргумент t, чтобы строение подынтегральной функции было видно полностью. Инвариантный характер интеграла относительно преобразования координат x^i ясен из инвариантности квадратичной формы под знаком радикала (полное свертывание); инвариантность относительно преобразования параметра t вдоль кривой проверяется очевидным образом.

Собственно риманово пространство характеризуется тем, что в нем метрическая квадратичная форма будет положительно определенной, а ds — всегда вещественным. Напротив, в псевдоримановом пространстве ds может быть вещественным, чисто мнимым и нулем. При этом радикал в (85.10) мы условимся брать положительным или с положительным коэффициентом при i. Кривые у нас будут, следовательно, трех сортов: вещественной длины, мнимой длины и изотропные.

Рассмотрим теперь в римановом пространстве V_n поверхность $\mathfrak{M}_m$

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m),$$

сохраняя все обозначения и предположения § 83.

Вычислим дифференциал дуги при произвольном бесконечно малом смещении при произвольной кривой на $\mathfrak{M}_m$. Пользуясь снова формулой (85.7) и учитывая, что теперь

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha \tag{85.11}$$

$\left(\text{и аналогично } dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^\beta} du^\beta\right)$, получаем:

$$ds^2 = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Обозначим:

$$G_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{85.12}$$

Очевидно, $G_{\alpha\beta}$ представляет собой скалярные произведения векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, $\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$, касательных к координатным линиям u^α, u^β.

Учитывая, что $G_{\alpha\beta}$ зависят от точки на $\mathfrak{M}_m$, т. е. от $u^1, \ldots, u^m$, записываем окончательно:

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m) du^\alpha du^\beta. \tag{85.13}$$

Итак, на поверхности $\mathfrak{M}_m$ возникает дифференциальная квадратичная форма от переменных $u^1, \ldots, u^m$, выражающая квадрат дифференциала дуги и, следовательно, инвариантная (линейный элемент поверхности $\mathfrak{M}_m$). Используя второе определение риманова пространства, мы вправе утверждать, что поверхность $\mathfrak{M}_m$ представляет собой m-мерное риманово пространство V_m с метрическим тензором $G_{\alpha\beta}$, *если только соблюдается условие*

$$\mathrm{Det}\,|G_{\alpha\beta}| \neq 0. \tag{85.14}$$

Что касается условия $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$, то оно очевидным образом следует из формулы (85.12) и условия $g_{ij} = g_{ji}$.

Условие (85.14) не обязано соблюдаться само собой, хотя, грубо говоря, большей частью оно соблюдается. Здесь положение такое же, как с плоскостями в евклидовом пространстве: большей частью они бывают неизотропными и несут на себе евклидову метрику, но могут быть и изотропными — с вырожденной метрикой.

Если условие (85.14) соблюдается, то поверхность мы будем называть *неизотропной*; она несет на себе риманову метрику, и в дальнейшем мы обозначаем ее V_m, т. е. как m-мерное риманово пространство. Обозначение V_m мы будем употреблять только в случае неизотропной поверхности.

Если же условие (85.14) не соблюдается,

$$\operatorname{Det} | G_{\alpha\beta} | = 0, \tag{85.15}$$

то поверхность мы называем *изотропной* и сохраняем для нее обозначение $\mathfrak{M}_m$. Квадратичная форма (85.13) имеет на ней неполный ранг, и метрика вырождается. Как правило, изотропными поверхностями мы интересоваться не будем. В случае *собственно риманова* пространства все поверхности неизотропные, так как условие (85.14) вытекает из положительной определенности формы $ds^2 = G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$. Правда, непосредственно нам дана положительная определенность лишь для формы $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. Но если принять, что не все du^α равны нулю, то из условия (83.2) следует, что соответствующие $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha$ тоже не могут быть все равны нулю, а следовательно,

$$G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \, (= g_{ij} dx^i dx^j) > 0.$$

Рассмотрим теперь *касательную плоскость* A_m к поверхности $\mathfrak{M}_m$. Эта плоскость лежит в касательном пространстве A_n, которое сейчас у нас является евклидовым, причем ее векторы ξ^i в силу (83.11) имеют вид

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \xi^\alpha, \tag{85.16}$$

где ξ^α — всевозможные тензоры в $\mathfrak{M}_m$ в данной точке M.

Скалярное произведение любых двух векторов ξ, η плоскости A_m мы получаем, вставляя в (85.3) выражения для ξ^i, η^j согласно (85.16):

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \xi^\alpha, \qquad \eta^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \eta^\beta.$$

В результате

$$\xi\eta = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \xi^\alpha \eta^\beta = G_{\alpha\beta}(M) \, \xi^\alpha \eta^\beta. \tag{85.17}$$

Пусть соблюдается условие (85.14). Плоскость A_m будет неизотропной и несет евклидову метрику. Для многообразия $\mathfrak{M}_m$ и тем самым для риманова пространства V_m плоскость A_m служит касательным пространством, так как все тензоры ξ^α находят себе изображение в виде ее векторов согласно (85.16). Формула (85.17) для V_m повторяет формулу (85.3) для V_n. Метрическим тензором служит теперь $G_{\alpha\beta}$.

Мы будем называть *нормальной плоскостью* к поверхности V_m в данной точке M $n-m$-мерную плоскость B_{n-m} в касательном к V_n евклидовом пространстве A_n, ортогональную к касательной плоскости A_m и проходящую через M. В случае гиперповерхности V_{n-1} нормальная плоскость B_1 будет одномерной, т. е. представляет собой просто прямую (нормаль).

В трехмерном римановом пространстве V_3 (в частности, в обычном евклидовом пространстве) можно рассматривать одномерные поверхности V_1, т. е. кривые и двумерные поверхности V_2. В согласии с элементарной дифференциальной геометрией в случае V_1 нормальная плоскость имеет $n-m=2$ измерения, а в случае V_2 она представляет собой просто нормаль к поверхности $(n-m=1)$.

§ 86. Евклидово пространство R_n как частный случай риманова

Мы видели в § 79, что евклидово пространство (вообще говоря, рассматриваемое в пределах некоторой области Ω) обладает, как и риманово, полем метрического тензора $g_{ij}(M)$, причем этот тензор определяет всю его геометрию. Следовательно, мы можем рассматривать евклидово пространство как частный случай риманова. В чем же выражается особенность этого частного случая?

В евклидовом пространстве всегда можно перейти в такую специальную координатную систему, именно, в любую аффинную, в которой координаты метрического тензора становятся константами:

$$g_{ij}(M) = \text{const}.$$

Между тем в произвольном римановом пространстве этого, вообще говоря, сделать нельзя. Как бы мы ни подбирали новую координатную систему $x^{i'}$, нам не удастся добиться, чтобы в ней координаты метрического тензора

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$$

оказались бы константами. Таким образом, в римановом пространстве не существует, вообще говоря, специальных «прямолинейных» координатных систем наподобие аффинных. Поэтому мы здесь говорим просто о координатных системах без прилагательного «криволинейные»: они все по необходимости являются криволинейными в силу «кривого» характера самой метрики.

Возникает вопрос, как узнать фактически, возможен ли в данном римановом пространстве V_n переход к таким координатам x^i с некоторой областью изменения Ω, в которых

$$g_{ij}(M) = \text{const},$$

т. е. можно ли отождествить V_n с некоторой областью Ω в евклидовом пространстве, заданном в аффинных координатах. Но на этот вопрос мы сможем ответить лишь в главе VIII.

Если в римановом пространстве V_n в целом мы, возможно, не в состоянии подобрать таких координат x^i, чтобы в них $g_{ij}(M)$ были константами, *но можем сделать это по отдельности в некоторой окрестности каждой его точки, то пространство V_n называется локально евклидовым.* Так, например, если отождествить в квадрате точки каждой стороны с соответствующими точками противоположной стороны, то квадрат «склеится» в двумерное многообразие, устроенное наподобие тора. При этом все четыре вершины склеятся в одну точку, в которой сойдутся все четыре угла квадрата. Если сохранить в этом многообразии прежнюю метрику, то мы получаем пример локально евклидова пространства двух измерений (разумеется, это пространство приходится рассматривать абстрактно, не пытаясь реализовать его в виде тора в обычном пространстве: в последнем случае метрика не может быть локально евклидовой). Здесь мы имеем дело с неэлементарным многообразием; но и элементарное многообразие может нести на себе локально евклидову метрику, не будучи областью евклидова пространства. Так, последовательно подклеивая друг к другу листы бумаги, нетрудно сделать так, что последний лист будет заходить на первый (причем мы их оставим несклеенными). Мы получим локально евклидово двумерное многообразие, не являющееся в то же время областью евклидовой плоскости.

В евклидовом пространстве нет надобности в каждой точке M строить касательное пространство, как мы делали в римановом пространстве общего вида. Действительно, каждый контравариантный тензор ξ^i в евклидовом пространстве, заданный в криволинейных координатах в какой-нибудь точке M, изображается вполне определенным вектором

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^i \mathbf{x}_i$$

в этом же пространстве (см. (76.13)). Поэтому евклидово пространство служит, как мы будем считать, само к себе касательным в любой точке M. Отдельных от него касательных пространств рассматривать не будем.

Мы выяснили, что поверхность V_m в римановом пространстве V_n сама является римановым пространством.

В частности, *в качестве вмещающего пространства V_n можно взять евклидово пространство R_n.*

Простейший пример такого рода доставляет теория поверхностей в обычном евклидовом пространстве R_3. На поверхности, отнесенной к параметрам u, v, появляется первая основная квадратичная форма, выражающая квадрат дифференциала дуги

$$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2. \tag{86.1}$$

Тем самым поверхность можно считать двумерным римановым пространством с метрической квадратичной формой (86.1) и соответственно с метрическим тензором

$$g_{11} = E, \qquad g_{12} = g_{21} = F, \qquad g_{22} = G. \tag{86.2}$$

Риманова геометрия, порождаемая на поверхности метрической квадратичной формой (86.1), носит название *внутренней геометрии* поверхности; она инвариантна при изгибании поверхности.

Аналогичным образом и в многомерных евклидовых (в том числе и псевдоевклидовых) пространствах R_n мы можем рассматривать любые поверхности V_m, получая на них каждый раз определенную риманову геометрию (при условии (85.14)).

По сравнению с изучением поверхностей V_m в произвольном римановом пространстве V_n мы получаем здесь ряд преимуществ. Прежде всего будем считать, что уравнения поверхности V_m

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m) \tag{86.3}$$

записаны в аффинных координатах x^i. Тогда можно перейти к параметрическому уравнению поверхности в векторной форме, выразив радиус-вектор $\mathbf{x}$ произвольной точки поверхности как функцию параметров:

$$\mathbf{x} = x^i(u^1, \ldots, u^m)\,\mathbf{e}_i, \text{ или, коротко, } \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \ldots, u^m). \tag{86.4}$$

Касательный вектор к произвольной кривой

$$u^\alpha = u^\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{86.5}$$

на нашей поверхности мы находим, дифференцируя радиус-вектор $\mathbf{x}$ по t:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}.$$

Проводя через данную точку M всевозможные кривые по поверхности, мы получаем в качестве $\frac{du^\alpha}{dt}$ всевозможные тензоры ξ^α на V_m, а в качестве $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ — всевозможные векторы $\boldsymbol{\xi}$, касательные к V_m

в данной точке. Итак,

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \xi^\alpha. \tag{86.6}$$

В результате касательные векторы $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, откладываемые от точки M, заполняют m-мерную плоскость A_m, построенную на векторах

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^m}, \tag{86.7}$$

касательных к координатным линиям. Линейная независимость этих векторов видна из условия (83.2). В отличие от риманова пространства все рассматриваемые векторы и плоскость A_m (касательная плоскость) принадлежат тому же евклидову пространству, в котором расположена поверхность (а не специально построенному в каждой точке M касательному пространству A_n). Этому же евклидову пространству принадлежит и нормальная плоскость B_{n-m}, ортогональная к касательной плоскости A_m. В частности, для гиперсферы S_{n-1} с центром в начале O радиус-вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{x}^2 = \text{const}.$$

Дифференцируя $\mathbf{x}^2$ вдоль любой кривой на гиперсфере, получим:

$$2\mathbf{x}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} \perp \mathbf{x}.$$

Таким образом, все касательные к гиперсфере S_{n-1} векторы в данной точке (а значит, и касательная гиперплоскость A_{n-1}) ортогональны к радиусу-вектору данной точки.

Наконец, линейный элемент на поверхности V_m можно найти, применяя формулу (65.10):

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2$$

к произвольной кривой на поверхности V_m. Так как

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} du^\alpha,$$

то

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta. \tag{86.8}$$

Сравнивая с (85.13), получаем:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\beta}. \tag{86.9}$$

Мы получили выражение координат метрического тензора в римановом пространстве V_m (предполагаем, что $\operatorname{Det} | G_{\alpha\beta} | \neq 0$). Возникает вопрос, любое ли наперед заданное риманово пространство V_m можно реализовать таким образом на некоторой поверхности в R_n. Можно было бы доказать (хотя и совсем не простым образом), что ответ будет утвердительным, если вмещающее евклидово пространство R_n взять достаточно большего числа измерений, а именно:

$$n=\frac{m(m+1)}{2}. \qquad (86.10)$$

Разумеется, иногда V_m можно реализовать и в евклидовом пространстве меньшего числа измерений, но чтобы провести реализацию во всех случаях, нужно взять указанное значение n. При этом наше утверждение носит локальный характер, т. е. мы можем гарантировать реализацию V_m в виде поверхности в R_n, беря V_m не в целом, а лишь в некоторой окрестности любой его точки. Кроме того, функции $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ предполагаются аналитическими, и уравнения поверхности получаются тоже аналитическими. Если же V_m псевдориманово пространство, то R_n должно быть псевдоевклидовым и притом подходящего индекса.

Интересно отметить, что в случае $m=2$ формула (86.10) дает $n=3$, т. е. любое двумерное риманово пространство локально реализуется на некоторой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

В 1956 г. Нэш показал, что собственно риманово V_m *в целом* может быть реализовано в собственно евклидовом R_n при достаточно большом n.

§ 87. Неевклидовы пространства

Мы хотим сейчас рассмотреть важный частный случай поверхности V_m в R_n, именно, когда эта поверхность является гиперсферой S_{n-1}. *Гиперсферой* S_{n-1} мы называем множество всевозможных точек в R_n, находящихся на постоянном расстоянии (вещественном, чисто мнимом или нулевом) от фиксированной точки. Римановы геометрии, возникающие на гиперсферах S_{n-1} в R_n, обладают рядом замечательных свойств; эти геометрии мы будем называть *неевклидовыми*, а гиперсферы S_{n-1}, рассматриваемые как римановы пространства, — *неевклидовыми пространствами*. Чтобы оценить важность неевклидовых геометрий, достаточно принять во внимание, что *геометрия Лобачевского* принадлежит к их числу (хотя и была получена самим Лобачевским совершенно иным путем). Заметим, что приходится говорить о неевклидовых пространствах во множественном числе, потому что даже при данном числе измерений n евклидовы пространства R_n могут обладать различными индексами $k=0, 1, 2, \ldots, n$, в связи с чем гиперсферы S_{n-1} будут представлять собой существенно различные римановы пространства. Вещественное или чисто мнимое значение радиуса гиперсферы тоже играет роль. Нулевого же значения мы не допускаем, так как S_{n-1} в этом случае будет изотропной поверхностью, именно *изотропным гиперконусом*, или даже просто сводится к точке (для собственно евклидовых пространств при $k=0$ или n).

Пусть в евклидовом пространстве R_n индекса k, отнесенном к ортонормированному реперу, рассматривается гиперсфера S_{n-1} вещественного радиуса ρ с центром в начале O. Ее уравнение будет:

$$-x^{1^2}-\ldots-x^{k^2}+x^{k+1^2}+\ldots+x^{n^2}=\rho^2, \qquad (87.1)$$

если считать, что скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$ имеет вид

$$\mathbf{x}^2=-x^{1^2}-\ldots-x^{k^2}+x^{k+1^2}+\ldots+x^{n^2}. \qquad (87.2)$$

Заметим, что то же уравнение (87.1) можно переписать в виде

$$x^{1^2}+\ldots+x^{k^2}-x^{k+1^2}-\ldots-x^{n^2}=-\rho^2 \qquad (87.3)$$

и истолковать как уравнение гиперсферы S_{n-1} мнимого радиуса ρi в евклидовом пространстве R_n индекса $n-k$, в котором

$$\mathbf{x}^2=x^{1^2}+\ldots+x^{k^2}-x^{k+1^2}-\ldots-x^{n^2}. \qquad (87.4)$$

Так как при этом изменился знак метрической квадратичной формы в R_n, то то же самое произойдет и на S_{n-1}, вследствие чего риманова метрика на S_{n-1} испытает тривиальное преобразование: все длины умножатся на i.

Итак, гиперсфера радиуса ρ в R_n данного индекса k несет на себе такую же риманову метрику, как и гиперсфера радиуса ρi в R_n дополнительного индекса $n-k$, если не считать умножения всех длин на i.

Вычислим теперь фактически метрическую квадратичную форму на гиперсфере S_{n-1} вещественного радиуса $\rho>0$. При этом случай $k=n$ исключаем, так как тогда гиперсфера вещественного радиуса ρ невозможна (как видно из уравнения (87.1)). Это позволяет нам считать, что в метрической квадратичной форме (87.2) x^{n^2} входит всегда с плюсом.

Мы должны прежде всего ввести какую-либо координатную систему на S_{n-1}. Один из удобнейших способов для этого дает *стереографическая проекция* гиперсферы S_{n-1} на гиперплоскость R_{n-1}; особенностью стереографической проекции является то, что *центр проектирования P выбирается на самой S_{n-1}, а плоскость проекций R_{n-1} проходит ортогонально к радиусу OP* (т. е. параллельно касательной гиперплоскости к S_{n-1} в точке P). Разумеется, R_{n-1} не проходит через P.

Всем этим условиям можно удовлетворить, взяв в качестве центра проектирования точку $P(0, 0, \ldots, 0, \rho)$, а в качестве плоскости проекций R_{n-1} — координатную плоскость $x^n = 0$.

Допустим, что, проектируя точку $M(x^1, \ldots, x^n)$ гиперсферы из P на R_{n-1}, мы попадаем в некоторую точку $L(u^1, \ldots, u^{n-1}, 0)$ плоскости R_{n-1}, где через $u^1, \ldots, u^{n-1}$ обозначены $x^1, \ldots, x^{n-1}$ в точке L.

На рис. 17 изображен случай $n = 3$, причем уравнение S_2 имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -{x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2 = \rho^2,$$

точка P имеет координаты $(0, 0, \rho)$, а u^1, u^2 совпадают с координатами x^1, x^2 точки L на координатной плоскости R_2.

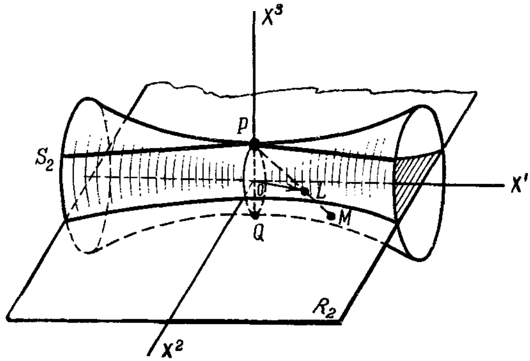

Рис. 17.

В случае обычного пространства $n = 3$, $k = 0$, и мы получаем обычную стереографическую проекцию.

Примем $u^1, \ldots, u^{n-1}$ за параметры на S_{n-1} и выразим $x^1, \ldots, x^n$ через них; это даст нам параметрические уравнения гиперсферы S_{n-1}. Точку M мы будем брать на S_{n-1} где угодно, однако при условии

$$x^n \neq \rho. \tag{87.5}$$

В самом деле, при $x^n = \rho$ мы берем точку M на пересечении S_{n-1} с гиперплоскостью R'_{n-1} $(x^n = \rho)$, параллельной R_{n-1} и проходящей через P. Тогда проектирующий луч PM тоже параллелен R_{n-1} и проекции L не существует. Заметим, что плоскость R'_{n-1} имеет направляющими векторами орты $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$, тем самым ортогональна к радиусу-вектору $\overrightarrow{OP}$, идущему по оси X^n, и, следовательно, служит *касательной гиперплоскостью к гиперсфере* S_{n-1} в точке P.

Пересечение R'_{n-1} и S_{n-1} определяется уравнением гиперплоскости $x^n = \rho$ и уравнением гиперсферы (87.1); это последнее можно переписать, пользуясь $x^n = \rho$, в виде

$$-(x^1)^2 - \ldots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \ldots + (x^{n-1})^2 = 0. \tag{87.6}$$

Отсюда видно, что в гиперплоскости R'_n мы получаем изотропный конус с вершиной в P. В самом деле, $x^1, \ldots, x^{n-1}$ при $x^n = \rho$

играют роль ортонормированных координат на R'_n с началом в P, причем левая часть уравнения служит метрической квадратичной формой. В случае собственно евклидовой геометрии на плоскости R_{n-1} (и тем самым и на R'_{n-1}) изотропный конус вырождается в точку P, которая, таким образом, лишь одна не имеет проекции на R_{n-1} (как это и имеет место в обычной стереографической проекции). На рис. 17 изотропный конус в R'_2 представлен парой прямолинейных образующих поверхности S_2, проходящих через P. Так как за точку P можно принять любую точку гиперсферы S_{n-1} (если пустить через эту точку ось X^n), то отметим полученный нами попутно общий результат: *гиперсфера S_{n-1} пересекается со своей касательной плоскостью R'_{n-1} по ее изотропному конусу с вершиной в точке касания.*

Теперь переходим к выкладке, предполагая, что в точке M $x^n \neq \rho$. Так как точки P, M, L расположены на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{PL}$ должны быть коллинеарны. Записывая пропорциональность координат этих векторов, получаем:

$$\frac{x^\alpha}{u^\alpha} = \frac{x^n - \rho}{-\rho},$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда

$$x^\alpha = u^\alpha \left(1 - \frac{x^n}{\rho}\right). \tag{87.7}$$

Вставляя в уравнение гиперсферы (87.1), имеем:

$$\left(1 - \frac{x^n}{\rho}\right)^2 [-u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2}] + x^{n^2} = \rho^2.$$

Перенеся x^{n^2} в правую часть, получаем выражение

$$\rho^2 - x^{n^2} = \rho^2 \left(1 - \frac{x^n}{\rho}\right)\left(1 + \frac{x^n}{\rho}\right).$$

Так как $x^n \neq \rho$ и, значит, $1 - \frac{x^n}{\rho} \neq 0$, то, сокращая на $1 - \frac{x^n}{\rho}$, получим:

$$\left(1 - \frac{x^n}{\rho}\right)[-u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2}] = \\ = \rho^2 \left(1 + \frac{x^n}{\rho}\right). \tag{87.8}$$

Обозначим через $\mathbf{u}$ радиус-вектор OL точки L; он вместе с L имеет координаты $u^1, \ldots, u^{n-1}, 0$ и, как видно из (87.2), его скалярный квадрат можно записать в виде

$$\mathbf{u}^2 = -u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2}. \tag{87.9}$$

Вставляя в (87.8) $\mathbf{u}^2$ вместо прямой скобки и разрешая это уравнение относительно x^n, приходим к выражению

$$x^n = \rho \frac{\mathbf{u}^2 - \rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2} = \rho \left(1 - \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2}\right). \tag{87.10}$$

Вставляя это значение x^n в (87.7), придадим последнему следующий вид:

$$x^\alpha = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2} u^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{87.11}$$

Мы получили параметрические уравнения (87.10), (87.11) гиперсферы S_{n-1} с параметрами $u^1, \ldots, u^{n-1}$. В то же время это есть выражение координат x^i точки M на гиперсфере S_{n-1} через координаты u^α ее стереографической проекции L на гиперплоскости R_{n-1}.

В случае *собственно евклидовой геометрии на* R_{n-1} имеем $\mathbf{u}^2 \geqslant 0$, и знаменатели в наших уравнениях всегда положительны, *параметрам* u^α *можно давать любые значения*, так что их область изменения состоит из всей гиперплоскости R_{n-1}, причем на S_{n-1} мы получаем, как уже указывалось, тоже *все точки за исключением центра проекций* P.

Хуже обстоит дело в случае псевдоевклидовой геометрии на R_{n-1}; тогда выбор значений u^α нужно ограничить условием

$$\mathbf{u}^2 + \rho^2 \neq 0,$$

где $\mathbf{u}^2$ имеет значение (87.9). Поэтому область изменения состоит из гиперплоскости R_{n-1} с выкинутой из нее поверхностью (сферой радиуса ρi) $\mathbf{u}^2 + \rho^2 = 0$. Точки этой области изменения (которая будет несвязной) взаимно однозначно отвечают точкам гиперсферы S_{n-1} с выкинутым из нее изотропным конусом с вершиной в P. Точки этого конуса в нашем параметрическом представлении получаться не будут. Это связано с тем, что S_{n-1} не является элементарным многообразием и *одной* координатной системой не может быть обслужена. Но двух уже будет достаточно (то же построение с центром проекций $Q\,(0, \ldots, 0, -\rho)$ дает вторую координатную систему).

Запишем наше параметрическое представление в векторной форме, обозначая через $\mathbf{x}$ радиус-вектор точки M, а через $\mathbf{u}$ — по-прежнему радиус-вектор точки L. Греческие индексы пробегают значения $1, 2, \ldots, n-1$. Тогда

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha + x^n \mathbf{e}_n = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2} u^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \rho \left(1 - \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2}\right) \mathbf{e}_n.$$

Так как

$$u^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{u},$$

то окончательно

$$\mathbf{x} = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2} \mathbf{u} + \rho \left(1 - \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2 + \rho^2}\right) \mathbf{e}_n. \tag{87.12}$$

Вычислим теперь квадрат дифференциала дуги ds^2 для произвольной кривой на S_{n-1}, пользуясь формулой

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 \tag{87.13}$$

(см. (65.10)). Для этого вычислим сначала

$$d\mathbf{x} = \frac{2\rho^2}{\mathbf{u}^2+\rho^2}\,d\mathbf{u} - \frac{2\rho^2 \cdot 2\mathbf{u}\,d\mathbf{u}}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,\mathbf{u} + \rho\,\frac{2\rho^2 \cdot 2\mathbf{u}\,d\mathbf{u}}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,\mathbf{e}_n.$$

Возводим в скалярный квадрат, выписывая сначала квадраты слагаемых, а потом их удвоенные произведения, и помня при этом, что $\mathbf{e}_n \perp R_{n-1}$, так что $\mathbf{e}_n\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{e}_n d\mathbf{u} = 0$, и из трех удвоенных произведений два пропадут; кроме того, $\mathbf{e}_n^2 = 1$. Получим:

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = \frac{4\rho^4}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2}\,d\mathbf{u}^2 + \frac{16\rho^4(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^4}\,\mathbf{u}^2 + \frac{16\rho^6(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^4} - \frac{16\rho^4(\mathbf{u}\,d\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^3}.$$

Три последних члена взаимно уничтожаются, и мы имеем окончательно:

$$ds^2 = \frac{4\rho^4\,d\mathbf{u}^2}{(\mathbf{u}^2+\rho^2)^2} = \frac{4\rho^4\left[-du^{1^2} - \ldots - du^{k^2} + du^{k+1^2} + \ldots + du^{n-1^2}\right]}{\left[-u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2} + \rho^2\right]^2}. \tag{87.14}$$

Это — метрическая квадратичная форма (линейный элемент) на гиперсфере S_{n-1}, записанная в параметрах $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Метрический тензор $G_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^{n-1})$ имеет, очевидно, в этих параметрах следующие координаты:

$$\left.\begin{aligned} &G_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \\ &G_{\alpha\alpha} = \mp \frac{4\rho^4}{\left[-u^{1^2} - \ldots - u^{k^2} + u^{k+1^2} + \ldots + u^{n-1^2} + \rho^2\right]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{87.15}$$

Таким образом, мы получили метрику неевклидова пространства как частный случай римановой метрики.

Следует обратить внимание на свойственный стереографической проекции *конформный характер отображения S_{n-1} на R_{n-1}*. Действительно, пользуясь (87.13), получаем для линейного элемента на гиперплоскости

$$\tilde{d}s^2 = d\mathbf{u}^2.$$

Вставляя в (87.14), приходим к соотношению

$$ds^2 = \frac{4}{\left(1+\frac{\mathbf{u}^2}{\rho^2}\right)^2}\,\tilde{d}s^2, \tag{87.16}$$

которое показывает, что *метрические квадратичные формы на S_{n-1} и R_{n-1} для соответствующих бесконечно малых смещений отличаются* *множителем, зависящим лишь от точки.* Другими словами, координаты метрических тензоров в соответствующих точках M и L пропорциональны между собой. В этом случае взаимно однозначное соответствие между двумя римановыми пространствами называется *конформным.* Грубо говоря, это означает, что в бесконечно малой окрестности каждой данной точки на S_{n-1} линейные размеры фигур меняются при отображении на R_{n-1} пропорционально, так что в пределах этой окрестности отображение сводится как бы к преобразованию подобия (разумеется, если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка).

Вернемся к формуле (87.14). Пользуясь ею, не нужно забывать, что мы рассматривали ρ только вещественные. Но чтобы учесть случай чисто мнимых ρ, достаточно в рассмотренной задаче *умножить метрическую квадратичную форму в R_n на -1, вследствие чего, во-первых, умножится на -1 и метрическая квадратичная форма на S_{n-1} и, во-вторых, S_{n-1} станет гиперсферой мнимого радиуса ρi.* При этом индекс k евклидова пространства R_n заменится на $n-k$.

Таким образом, мы имеем $2n$ вариантов $n-1$-мерной неевклидовой геометрии: во-первых, гиперсферы S_{n-1} вещественного радиуса ρ в R_n индекса $k=0, 1, \ldots, n-1$; метрика задается согласно (87.14); во-вторых, гиперсферы S_{n-1} мнимого радиуса ρi в R_n индекса $n-k=n, n-1, \ldots, 1$; метрика задается согласно (87.14) *с обратным знаком.*

Среди различных неевклидовых пространств особенно важны пространства *с собственно римановой метрикой*, т. е. с положительно определенной метрической квадратичной формой. При данном n такие пространства мы получим лишь в двух случаях: когда в (87.14) все квадраты положительны, т. е. $k=0$, или наоборот, когда они все отрицательны, $k=n-1$; в последнем случае нужно еще умножить метрическую квадратичную форму в R_{n-1} (а значит, и на S_{n-1}) на -1.

Первый случай, $k=0$. Пространство R_n собственно евклидово. Уравнение гиперсферы S_{n-1} имеет вид

$$x^{1^2}+\ldots+x^{n^2}=\rho^2. \tag{87.17}$$

Область изменения u^α — вся плоскость R_{n-1}; параметрическое представление (87.12) дает всю гиперсферу S_{n-1} за исключением центра проекций P. При этом к точке P на S_{n-1} мы неограниченно приближаемся при $u^{1^2}+\ldots+u^{n-1^2}\to\infty$. Метрическая квадратичная форма на S_{n-1} принимает вид

$$ds^2=4\,\frac{du^{1^2}+\ldots+du^{n-1^2}}{\left[1+\dfrac{u^{1^2}+\ldots+u^{n-1^2}}{\rho^2}\right]^2}. \tag{87.18}$$

Полученное неевклидово пространство называется *сферическим пространством Римана* в данном случае $n-1$ измерений (не смешивать с римановым пространством). Сферическая геометрия двух измерений, $n=3$, $n-1=2$, есть, очевидно, внутренняя геометрия обыкновенной сферы. Следует отметить родственное сферическому *эллиптическое пространство Римана.* Оно получается из сферического путем *отождествления диаметрально противоположных точек сферы* S_{n-1}. Таким образом, эллиптическое пространство есть как бы «сложенное вдвое» сферическое пространство. Хотя такая конструкция представляется искусственной, но фактически оказывается, что эллиптическое пространство обладает более простыми свойствами, чем сферическое, т. е. последнее целесообразно рассматривать именно «сложенным вдвое». Конечно, в пределах не слишком больших кусков эллиптическое пространство обладает той же геометрией, как и сферическое. Эллиптическое пространство можно получить, ограничившись в нашем параметрическом представлении лишь теми значениями u^α, которые удовлетворяют условиям

$$u^{1^2}+u^{2^2}+\ldots+u^{n-1^2}\leqslant\rho^2, \tag{87.19}$$

причем в полученном $n-1$-мерном шаре в плоскости R_{n-1} нужно отождествить диаметрально противоположные точки его граничной сферы S_{n-2}:

$$u^{1^2}+u^{2^2}+\ldots+u^{n-1^2}=\rho^2. \tag{87.20}$$

Тем самым $n-1$-мерный шар превращается в замкнутое $n-1$-мерное многообразие; в это многообразие вносится риманова метрика согласно (87.18), и полученное риманово пространство как раз и будет эллиптическим $n-1$-мерным пространством.

В самом деле, ограничение (87.19) означает, что мы рассматриваем лишь нижнюю половину гиперсферы S_{n-1}, срезанную плоскостью R_{n-1} (коэффициент при $\mathbf{e}_n$ в (87.12) $\leqslant 0$); далее на срезе, который как раз совпадает с S_{n-2}, мы отождествляем диаметрально противоположные точки, а это и означает построение эллиптического пространства, причем, вместо того чтобы отождествлять точки верхней половины S_{n-1} с диаметрально противоположными точками нижней половины, мы просто их (точки верхней половины) выкинули и провели указанное отождествление лишь по срезу.

Второй случай, $k=n-1$. Напишем уравнение гиперсферы радиуса ρ

$$-x^{1^2}-\ldots-x^{n-1^2}+x^{n^2}=\rho^2 \tag{87.21}$$

и параметрическое представление (87.12) (учитывая (87.9)):

$$\mathbf{x}=\frac{2\rho^2}{-u^{1^2}-\ldots-u^{n-1^2}+\rho^2}\,\mathbf{u}+\rho\left(1-\frac{2\rho^2}{-u^{1^2}-\ldots-u^{n-1^2}+\rho^2}\right)\mathbf{e}_n. \tag{87.22}$$

Меняем знак метрической квадратичной формы в R_n, после чего она принимает вид

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} - x^{n^2}. \tag{87.23}$$

Вследствие этого меняется знак и у метрической квадратичной формы на S_{n-1}, так что (87.14) запишется теперь

$$ds^2 = \frac{4\rho^4\,(du^{1^2} + \ldots + du^{n-1^2})}{[\rho^2 - u^{1^2} - \ldots - u^{n-1^2}]^2} = 4\,\frac{du^{1^2} + \ldots + du^{n-1^2}}{\left[1 - \dfrac{u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2}}{\rho^2}\right]^2}. \tag{87.24}$$

При этом, хотя гиперсферу S_{n-1} мы оставляем прежней, но в результате изменения метрики в R_n ее радиус становится мнимым, ρi вместо ρ.

Итак, мы имеем дело с гиперсферой мнимого радиуса ρi *в псевдоевклидовом пространстве индекса* 1. Такая гиперсфера с *аффинной точки зрения* представляет собой двухполостный гиперболоид. При этом в параметрическом представлении (87.22) мы получаем нижнюю полость, когда коэффициент при $\mathbf{e}_n$ отрицателен:

$$1 - \frac{2\rho^2}{\rho^2 - u^{1^2} - \ldots - u^{n-1^2}} < 0,$$

что равносильно неравенству

$$u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} < \rho^2. \tag{87.25}$$

Таким образом, на нижнюю полость S_{n-1} отображается внутренность шара радиуса ρ в плоскости R_{n-1}; аналогично на верхнюю полость S_{n-1} (за исключением точки P) отображается внешняя по отношению к этому шару часть плоскости R_{n-1}:

$$u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} > \rho^2 \tag{87.26}$$

(точки на граничной сфере $u^{1^2} + \ldots + u^{n-1^2} = \rho^2$ образов на S_{n-1} не имеют). Достаточно рассмотреть нижнюю полость S_{n-1}, так как верхняя полость в силу симметрии несет на себе точно такую же риманову геометрию, хотя формула (87.22) и дает для разных полостей разные параметрические представления (в том смысле, что параметры $u^1, \ldots, u^{n-1}$ пробегают разные области изменения). Но это уже связано с избранным нами способом параметризации.

Итак, нижняя полость гиперсферы S_{n-1}, *рассматриваемая как риманово пространство, задается метрической квадратичной формой* (87.24) *в области изменения параметров* (87.25). В отличие от сферического и эллиптического пространств полученное пространство представляет собой *элементарное* многообразие.

Каждая полость гиперсферы мнимого радиуса ρi *в псевдоевклидовом пространстве индекса* 1 *несет на себе собственно риманову геометрию, совпадающую с геометрией Лобачевского соответствующего числа измерений.*

Эту формулировку можно при желании рассматривать как определение геометрии Лобачевского; если же исходить из другого, например, аксиоматического построения геометрии Лобачевского, то это предложение можно доказать как теорему.

Мы получили пространство Лобачевского во взаимно однозначном отображении на внутренность шара в евклидовом пространстве R_{n-1}; это отображение называется интерпретацией Пуанкаре.

Возвращаясь к общему случаю неевклидова пространства S_{n-1}, отметим, что оно обладает *свободной подвижностью* так же, как и евклидово пространство. Этим мы хотим сказать, что в S_{n-1} точку с ортонормированным локальным репером в ней всегда можно перевести движением S_{n-1} (т. е. его изометрическим отображением на себя) *в любую другую точку с любым ортонормированным локальным репером в ней.* Покажем это.

При нашем понимании неевклидовой геометрии как римановой геометрии на гиперсфере S_{n-1} в R_n движения в S_{n-1} также наглядно изображаются *вращениями в* R_n *около начала* O. Ясно, что при этом гиперсфера S_{n-1} переходит в себя с сохранением всех ее геометрических свойств, в том числе и римановой геометрии на ней. При этом путем вращения R_n около O можно заставить ортонормированный репер $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ перейти в любой другой ортонормированный репер $\{O, \tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$. С точки зрения S_{n-1} это означает, что вектор $\rho\mathbf{e}_n$, идущий из O в точку P*), превращается в вектор $\rho\tilde{\mathbf{e}}_n$, идущий в другую точку $\tilde{P}$ той же гиперсферы S_{n-1}, причем $\tilde{P}$ можно выбирать произвольно (так как при желании $\tilde{\mathbf{e}}_n$ всегда можно направить по $O\tilde{P}$). Далее, векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ ортогональны к $\rho\mathbf{e}_n = \overrightarrow{OP}$ и потому принадлежат касательной гиперплоскости R'_{n-1} к S_{n-1} в точке P, образуя *ортонормированный локальный репер для* S_{n-1}. При задании точки P определяется орт $\mathbf{e}_n$, направленный по $\overrightarrow{OP}$, но орты $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ в ортогональной к $\mathbf{e}_n$ плоскости R'_{n-1} остаются произвольными и образуют произвольный ортонормированный локальный репер в точке P. Поэтому возможность перевести векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ вращением R_n около O в соответствующие векторы любого другого ортонормированного репера означает с точки зрения гиперсферы S_{n-1}, что не только точка P

*) Для определенности рассматриваем S_{n-1} вещественного радиуса ρ.

переходит в любую другую точку $\tilde{P}$, но и ортонормированный локальный репер в P переходит в любой ортонормированный локальный репер в $\tilde{P}$.

В связи с этим ясно, что произвол в выборе движений в неевклидовом пространстве (т. е. число независимых параметров, определяющих движение) должен быть таким же, как и в евклидовом пространстве. Это можно проверить и прямым подсчетом. В евклидовом n-мерном пространстве R_n движение зависит от $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров; следовательно, в R_{n-1} — от $\frac{(n-1)n}{2}$ параметров. Заметим, что под «числом параметров», строго говоря, нужно понимать здесь размерность группы движений, как некоторого (неэлементарного) многообразия. Движения в S_{n-1} порождаются вращениями R_n около O и, следовательно, тоже зависят от $\frac{(n-1)n}{2}$ параметров.

Свободная подвижность неевклидовых пространств показывает, что они обладают столь же высокой степенью однородности, как и евклидовы пространства. С этим связано и богатство их геометрических свойств, развертывающихся в последовательности, напоминающей евклидову геометрию, но совершенно своеобразных. Как и евклидово пространство, они допускают исследование элементарно геометрическими средствами, особенно эллиптическая геометрия и геометрия Лобачевского. Последняя этим путем и была впервые получена Лобачевским.

Исследование элементарно геометрическими средствами тесно связано со свободной подвижностью пространства. Действительно, важнейшей основой элементарной геометрии является возможность переносить данную фигуру из одного места пространства в другое и поворачивать ее без изменения геометрических свойств. Но это означает по существу свободную подвижность пространства. Отсюда вытекает понятие о конгруэнтных (равных) фигурах, как переводимых одна в другую посредством движения; на основе свободной подвижности фигур доказываются важнейшие теоремы, например, о равенстве треугольников; даже процесс измерения отрезка другим отрезком, принятым за эталон длины, требует свободной подвижности этого эталона. Конечно, в элементарной геометрии в ее школьном изложении свойство свободной подвижности принимается просто как очевидное, но при аксиоматическом построении оно должно быть точно охарактеризовано соответствующими аксиомами (или прямо, или косвенно через понятие конгруэнтности).

Другие римановы пространства свободной подвижностью уже не обладают; более того, произвольно взятое риманово пространство, *вообще говоря*, совершенно неоднородно и никаких движений не допускает.

§ 88. Измерение объемов в римановом пространстве V_n

Мы хотим ввести измерение объемов в римановом пространстве. Изложим сначала некоторые наводящие соображения. Рассмотрим бесконечно малый координатный параллелепипед, стягивающийся в данную точку $M(x^i)$. Вообще под *координатным параллелепипедом* мы понимаем область, состоящую из точек $\tilde{M}$ $(\tilde{x}^i)$, для которых

$$a^i \leqslant \tilde{x}^i \leqslant b^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{88.1}$$

В данном случае координатный параллелепипед определяется неравенствами

$$x^i \leqslant \tilde{x}^i \leqslant x^i + dx^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{88.2}$$

где $dx^i \to 0$.

«Ребра» этого параллелепипеда состоят из бесконечно малых отрезков координатных линий. Так, на координатной линии x^1 соответствующий отрезок заключен между данной точкой $M(x^1, \ldots, x^n)$ и точкой $M_1(x^1 + dx^1, x^2, \ldots, x^n)$. В касательном евклидовом пространстве бесконечно малому смещению MM_1 отвечает бесконечно малый вектор с координатами

$$\xi^1 = dx^1, \ \xi^2 = \ldots = \xi^n = 0 \tag{88.3}$$

(координаты берутся относительно локального репера). Аналогично обстоит дело и с бесконечно малыми смещениями по другим координатным линиям.

Подменим координатный параллелепипед соответствующим параллелепипедом в касательном евклидовом пространстве, построенном на бесконечно малых векторах вида (88.3). Согласно (54.11) объем параллелепипеда в евклидовом пространстве выражается формулой

$$W_D = \sqrt{|g|}\,|\operatorname{Det}|a_k^i||,$$

где $g = \operatorname{Det}|g_{ij}|$, a_k^i — координаты k-го вектора из числа векторов, на которых построен параллелепипед. В нашем случае

$$a_k^i = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ dx^i & (i = k) \end{cases}, \text{ так что } \operatorname{Det}|a_k^i| = dx^1 \ \ldots \ dx^n,$$

и мы получаем:

$$dW = \sqrt{|g|}\,dx^1 \ldots dx^n. \tag{88.4}$$

Оценим грубо объем какой-либо области D риманова пространства как составленный из объемов элементарных координатных параллелепипедов, на которые мы область D разбиваем, причем мы их подменяем параллелепипедами в касательных евклидовых пространствах. Суммирование таких объемов в пределе сводится к интегрированию элемента объема dW (88.4) по области D, и мы получаем:

$$W_D = \int_D \sqrt{|g|}\, dx^1 \ldots dx^n. \tag{88.5}$$

Мы не станем уточнять приведенное выше грубое рассуждение, а предпочтем принять формулу (88.5) за *определение объема в римановом пространстве*. Чтобы это определение было законным, нужно показать его инвариантность при преобразовании координат x^i. Для этой цели вычислим

$$W'_D = \int_D \sqrt{|g'|}\, dx^{1'} \ldots dx^{n'}, \tag{88.6}$$

где $g' = \operatorname{Det}|g_{i'j'}|$, и покажем что $W'_D = W_D$.

По тензорному закону преобразования

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij},$$

откуда аналогично (39.17) получаем:

$$\operatorname{Det}|g_{i'j'}| = \left(\operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\right)^2 \operatorname{Det}|g_{ij}|,$$

так что

$$\sqrt{|g'|} = \left|\operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\right| \sqrt{|g|}. \tag{88.7}$$

Вставляя последний результат в (88.6) и пользуясь формулой замены переменных под знаком кратного интеграла, получим:

$$W'_D = \int_D \sqrt{|g|} \left|\operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\right| dx^{1'} \ldots dx^{n'} = \int_D \sqrt{|g|}\, dx^1 \ldots dx^n = W_D,$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, по свойствам кратного интеграла объем обладает аддитивным характером, т. е. объем составной области равен сумме объемов составляющих областей. Далее, в частном случае евклидова пространства (88.5) дает объем в евклидовом пространстве. Действительно, если $x^1, \ldots, x^n$ — ортонормированные координаты в евклидовом пространстве, то $|g| = 1$, и мы получаем:

$$W_D = \int_D dx^1 \ldots dx^n,$$

а это согласуется с определением объема в евклидовом пространстве (54.1).

Пусть в римановом пространстве V_n дана поверхность V_m, также несущая на себе риманову геометрию (§ 85). На этой поверхности мы можем, следовательно, измерять объемы m-мерных областей по формуле (88.5):

$$W_D = \int\limits_D \sqrt{|G|}\, du^1 \ldots du^m, \tag{88.8}$$

где

$$G = \operatorname{Det} |G_{\alpha\beta}|, \quad G_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{88.9}$$

В частности, в случае двумерной поверхности V_2 мы получаем:

$$G = G_{11}G_{22} - G_{12}^2,$$

так что «двумерные объемы», т. е. площади на поверхности, выражаются формулой

$$W_D = \int\limits_D \sqrt{|G_{11}G_{22} - G_{12}^2|}\, du^1 du^2.$$

Если речь идет о поверхности в обычном евклидовом пространстве R_3, то G_{11}, G_{12}, G_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы на поверхности. При этом $G_{11}G_{22} - G_{12}^2 > 0$, так что знак модуля под радикалом можно устранить.

Как видно из (88.9), $G_{\alpha\beta}$ представляют собой попарные скалярные произведения m векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, касательных к координатным линиям u^α на поверхности V_m. Поэтому подынтегральная функция $\sqrt{|G|}$, т. е. $\sqrt{|\operatorname{Det}|G_{\alpha\beta}||}$, представляет собой объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m)$ в касательном евклидовом пространстве. Но этот же объем выражается формулой (54.28), так что

$$\sqrt{|G|} = \sqrt{|g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}|}. \tag{88.10}$$

Здесь $a^{i_1 \ldots i_m}$ — координаты простого m-вектора, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, т. е.

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^m} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial x^{i_m}}{\partial u^m} \end{vmatrix}, \tag{88.11}$$

а $g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m}$ выражаются согласно (54.19):

$$g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_1 j_m} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_{i_m j_1} \cdots g_{i_m j_m} \end{vmatrix}. \qquad (88.12)$$

В то время как формула (88.8) дает нам объем области D на поверхности V_m с «внутренней» точки зрения, можно записать тот же результат с «внешней» точки зрения, заменив $\sqrt{|G|}$ согласно (88.10). Получим:

$$W_D = \int\limits_D \sqrt{|g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}|}\, du^1 \ldots du^m. \qquad (88.13)$$

В частности, получаем выражение площади какой-либо области D на двумерной поверхности V_2 в виде

$$W_D = \frac{1}{2} \int\limits_D \sqrt{\begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} \\ g_{i_2 j_1} & g_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial u^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{j_1}}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^{j_2}}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x^{j_1}}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^{j_2}}{\partial u^2} \end{vmatrix}}\, du^1\, du^2. \qquad (88.14)$$

Подкоренное выражение предполагается взятым по модулю (после суммирования по всем индексам).

§ 89. Пространство аффинной связности

Мы на время оставим в стороне римановы пространства и займемся другим вариантом геометрии, которую можно получить на базе данного n-мерного многообразия $\mathfrak{M}_n$. Именно, если вместо поля метрического тензора $g_{ij}(M)$ внести в $\mathfrak{M}_n$ поле объекта связности $\Gamma^i_{jk}(M)$, то вместо римановой геометрии мы получим в $\mathfrak{M}_n$ *геометрию аффинной связности*, превратив $\mathfrak{M}_n$ *в пространство аффинной связности* L_n.

Подобно тому как образцом для построения риманова пространства V_n служило у нас евклидово пространство R_n в криволинейных координатах, так теперь такую же роль будет играть аффинное пространство A_n тоже в криволинейных координатах. Определение объекта связности, которое было дано в § 78 для аффинного пространства, легко переносится на многообразие $\mathfrak{M}_n$.

Если в данной точке M в $\mathfrak{M}_n$ для каждой координатной системы x^i, область действия которой включает точку M, задана система *чисел Γ^k_{ij}, преобразующихся при переходе от одной к другой координатной системе по закону*

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}, \tag{89.1}$$

то мы говорим, что в точке M задан объект связности. Все частные производные в (89.1) предполагаются вычисленными в точке M.

Пространством аффинной связности L_n мы назовем многообразие $\mathfrak{M}_n$, в котором задано поле объекта связности

$$\Gamma^k_{ij}(M) = \Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{89.2}$$

т. е. объект связности задан в каждой точке M, причем функции (89.2) $N-2$ *раза непрерывно дифференцируемы* *). При этом в отличие от объекта связности аффинного пространства, вообще говоря,

$$\Gamma^k_{ij} \neq \Gamma^k_{ji}.$$

Покажем прежде всего, что для задания объекта связности (как мы будем кратко называть поле объекта связности) в элементарном $\mathfrak{M}_n$ достаточно произвольно *задаться функциями* (89.2) *в одной какой-нибудь координатной системе x^i*. Тогда в любой другой координатной системе $x^{i'}$ координаты $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ объекта связности определятся по закону преобразования (89.1). Однако при этом объект связности еще нельзя считать построенным: нужно проверить, что закон преобразования (89.1) действует не только при переходе от x к $x^{i'}$, где x^i — начальная координатная система, но и при переходе от $x^{i'}$ к $x^{i''}$, где $x^{i'}$, $x^{i''}$ — любые координатные системы. Координаты объекта связности в системе $x^{i''}$ выражаются аналогично (89.1):

$$\Gamma^{k''}_{i''j''} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij}. \tag{89.3}$$

Нам требуется проверить, следовательно, что, подвергая $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ преобразованию по тому же закону при переходе от $x^{i'}$ к $x^{i''}$, мы получим $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Другими словами, требуется проверить, что выражение

$$\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{i''} \partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}} \Gamma^{k'}_{i'j'} \tag{89.4}$$

---

*) Здесь N — класс многообразия $\mathfrak{M}_n$; при преобразовании (89.1) сохраняется $(N-2)$-дифференцируемость Γ^k_{ij} (но не выше!). Правая часть (89.2) имеет смысл, разумеется, лишь в области действия каждой данной координатной системы x^i.

дает нам $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Для этого вставим сюда $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ из (89.1) и рассмотрим сначала член, содержащий Γ^k_{ij}. Этот член в (89.1) имеет такой вид, как если бы Γ^k_{ij} подвергались *тензорному* закону преобразования при переходе от x^i к $x^{i'}$; при подстановке в (89.4) этот член еще раз подвергается *тензорному* закону преобразования при переходе от $x^{i'}$ к $x^{i''}$; в результате Γ^k_{ij} испытают преобразование по тензорному закону при переходе от x^i к $x^{i''}$ (см. § 81, (81.3)), и мы получим:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}. \tag{89.5}$$

Теперь рассмотрим свободные от Γ^k_{ij} члены в (89.4) (после подстановки из (89.1)). Получаем (обозначая в первом члене индекс суммирования j' вместо k'):

$$\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

Так как во втором члене

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}=\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k},$$

а в первом члене

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{j'}}=\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}},$$

то, вынося $\dfrac{\partial x^{k''}}{\partial x^k}$ за скобки, получаем:

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\,dx^{j'}}\right)=\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}}. \tag{89.6}$$

То, что круглая скобка равна $\dfrac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i''}\partial x^{j''}}$, легко получить, дифференцируя x^k как сложную функцию от $x^{1''}, \ldots, x^{n''}$ при промежуточных аргументах $x^{j'}$. В результате (89.4) состоит из членов (89.5) и (89.6), т. е. совпадает с правой частью (89.3) и дает, действительно, $\Gamma^{k''}_{i''j''}$. Проверка окончена.

Закон преобразования (89.1) можно записать в несколько ином виде, удобном для некоторых выкладок. Умножаем (89.1) почленно на $\dfrac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}$ и суммируем по k'. Так как

$$\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}=\delta^l_k,$$

то получаем:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}=\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\delta^l_k+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\delta^l_k,$$

а после суммирования по k получаем окончательно:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}=\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\,\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^l_{ij}. \tag{89.7}$$

Заметим, что эта формула вполне эквивалентна закону преобразования (89.1), так как он из нее обратно следует. Достаточно умножить (89.7) почленно на $\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}$ (с суммированием по l) и учесть, что в левой части $\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}=\delta^{l'}_{k'}$, чтобы вернуться к (89.1).

Будет полезным записать формулу (89.7), поменяв ролями координаты x^i и $x^{i'}$. Получим:

$$\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k}=\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i\,\partial x^j}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\Gamma^{l'}_{i'j'}. \tag{89.8}$$

Мы уже отмечали, что, вообще говоря,

$$\Gamma^k_{ij}\neq\Gamma^k_{ji}.$$

Обозначим:

$$S^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}. \tag{89.9}$$

Величины S^k_{ij} образуют тензор, что легко показать следующим образом. Перепишем (89.1), переставив между собой индексы i', j' и поменяв местами обозначения индексов суммирования i, j. Получим:

$$\Gamma^{k'}_{j'i'}=\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\,\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ji}. \tag{89.10}$$

Вычитая это равенство почленно из (89.1) и пользуясь обозначением (89.9) как в старых, так и в новых координатах, получаем:

$$S^{k'}_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}S^k_{ij}.$$

Свободные члены при вычитании уничтожились, и мы получили тензорный закон преобразования для S^k_{ij}. Тензор $S^k_{ij}(M)$ называется *тензором кручения* данного пространства аффинной связности. Его геометрический смысл выяснится позже. Если тензор кручения S^k_{ij} равен нулю, т. е. если

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji},$$

то мы говорим, что нам дано *пространство аффинной связности без кручения;* обозначаем его L^0_n. Обращение в нуль тензора S^k_{ij} (как и всякого тензора) есть факт, инвариантный относительно преобразования координат x^i, а потому, если $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$ в одной координатной системе, то то же имеет место и в любой другой.

Переходим теперь к геометрическому истолкованию объекта связности, а вместе с тем к установлению основной конструкции геометрии аффинной связности — *параллельного перенесения векторов*. Мы воспользуемся при этом аналогией с § 77, где параллельное перенесение вектора *в криволинейных координатах в аффинном пространстве* задавалось при помощи объекта связности формулой (77.9):

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j\,dx^i.$$

Аналогичным образом мы определим параллельное перенесение в пространстве аффинной связности L_n.

Пусть вдоль некоторой кривой

$$x^i = x^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $x^i(t)$ непрерывно дифференцируемое, дано векторное поле

$$\xi^i = \xi^i(t). \tag{89.11}$$

Мы будем говорить, что вектор $\xi^i(t)$ параллельно переносится вдоль кривой, если при каждом бесконечно малом смещении по кривой координаты вектора $\xi^i(t)$ меняются по закону

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{89.12}$$

Речь идет, конечно, не о приращениях, а о дифференциалах координат $\xi^i(t)$. Аналогично dx^i — дифференциалы функции $x^i(t)$; Γ^k_{ij} — координаты объекта связности. Напомним еще, что ξ^i — это по буквальному смыслу один раз контравариантный тензор; мы говорим о векторе ξ^i, имея в виду истолкование ξ^i в виде вектора *в касательном аффинном пространстве* A_n (§ 82).

Если вдуматься в смысл нашего определения параллельного перенесения, то оно перестает казаться столь произвольным, как кажется с первого взгляда. В самом деле, мы хотим установить какой-то определенный закон, по которому вектор ξ^i из данной точки x^i переносится в бесконечно близкую точку x^i+dx^i (рассуждение ведем с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Спрашивается, каковы будут при этом приращения $d\xi^i$ координат нашего вектора. Простейшее предположение на этот счет, которое можно сделать, заключается в том, что $d\xi^i$ линейно зависят и от начальных координат вектора ξ^i и от координат вектора бесконечно малого смещения dx^i. Но по существу это предположение и записано в виде формулы (89.12), причем через Γ^k_{ij} обозначены коэффициенты соответствующих билинейных функций. Конечно, выбор коэффициентов $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ остается произвольным, и это означает, что на данное многообразие $\mathfrak{M}_n$ можно по-разному наложить аффинную связность.

Таким рассуждением мы оправдываем наше определение с его содержательной стороны. Но оно нуждается в оправдании и с формальной стороны. А именно, необходимо показать его инвариантный характер: *если вектор $\xi^i(t)$ параллельно переносится вдоль данной кривой с точки зрения одной координатной системы x^i, то это же верно и с точки зрения любой другой координатной системы $x^{i'}$*. Другими словами, если условие (89.12) соблюдается в координатах x^i, то оно будет соблюдаться и в координатах $x^{i'}$.

Чтобы проверить это, мы вычислим $d\xi^{k'}(t)$ при бесконечно малом смещении по нашей кривой. Согласно тензорному закону преобразования

$$\xi^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\xi^k.$$

Поэтому

$$d\xi^{k'} = \left(d\,\frac{\partial x^{k'}}{dx^k}\right)\xi^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,d\xi^k = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^k\,\partial x^i}dx^i\,\xi^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,d\xi^k.$$

Обозначая в первом члене индекс суммирования k через j и заменяя $d\xi^k$ согласно (89.12), получаем:

$$d\xi^{k'} = \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\,\partial x^i} - \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,\Gamma^k_{ij}\right)\xi^j dx^i. \tag{89.13}$$

Пользуясь формулой (89.8) (заменив в ней l' на k'), мы получаем для круглой скобки выражение

$$-\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\,\Gamma^{k'}_{i'j'}.$$

Учитывая, наконец, что

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,dx^i = dx^{i'},\quad \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\,\xi^j = \xi^{j'},$$

приводим (89.13) к виду

$$d\xi^{k'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}\,\xi^{j'}\,dx^{i'}. \tag{89.14}$$

Таким образом, предполагая, что для векторного поля вдоль данной кривой соблюдается (89.12), мы получили, что соблюдается и (89.14), т. е. наше определение параллельного перенесения инвариантно относительно преобразования координат x^i. Важнейшим местом нашей выкладки является *использование закона преобразования для* Γ^k_{ij} в форме (89.8). Можно сказать, что закон преобразования Γ^k_{ij} подобран именно так, чтобы параллельное перенесение вектора, определенное согласно (89.12), было *инвариантным* относительно преобразования координат x^i. И действительно, если потребовать эту инвариантность (для перенесения любого вектора вдоль любой кривой), то наш закон преобразования для Γ_{ij}^k получается как следствие. В этом можно убедиться следующим образом. В силу инвариантности данного параллельного перенесения формулы (89.12), (89.14) должны вытекать одна из другой. По-прежнему преобразуем (89.12) к виду (89.13), а в (89.14) подставляем

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \qquad \xi^{i'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \xi^j.$$

Так как полученные формулы должны вытекать одна из другой, то их правые части тождественно равны; приравнивая коэффициенты при dx^i, ξ^j, возвращаемся к формуле (89.8), т. е. к прежнему закону преобразования для Γ_{ij}^k.

Заметим, что в случае аффинного пространства мы не нуждались в доказательстве инвариантности параллельного перенесения; там оно имело непосредственный геометрический смысл и, в отличие от того, что мы делаем сейчас, *не определялось, а лишь записывалось* формулой (89.12).

Мы определили параллельное перенесение вектора вдоль кривой, однако не знаем еще, когда можно такое перенесение осуществлять и будет ли оно совершаться однозначно. Обращаясь к формулам (89.12), мы перепишем их, поделив на dt:

$$\frac{d\xi^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k (x^1(t), \ \ldots, \ x^n(t)) \xi^j \frac{dx^i(t)}{dt}. \tag{89.15}$$

Так как Γ_{ij}^k в данном пространстве и в данной координатной системе нам известны как функции от x^i, а x^i вдоль данной кривой известны как функции от t, то в уравнениях (89.15) все функции от t можно считать известными кроме $\xi^k(t)$, которые мы будем считать искомыми. Для этих n функций мы имеем нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений; производная каждой неизвестной функции $\xi^k(t)$ линейно выражена через сами неизвестные функции ξ^k, причем коэффициентами служат известные функции от t (при наших предположениях во всяком случае непрерывные).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что такая система имеет решение $\xi^k(t)$ при любых начальных условиях вида

$$\xi^k = \xi_0^k \quad (k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n) \text{ при } t = t_0, \tag{89.16}$$

причем это решение определяется единственным образом и существует на всем интервале изменения t.

тождественно равнялся единице. Для этого достаточно положить:

$$\tau = \int \alpha(t)\,dt, \text{ так что } d\tau = \alpha(t)\,dt, \tag{90.2}$$

после чего (90.1) принимает вид:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \xi^i. \tag{90.3}$$

Параметр τ на геодезической, для которого $\frac{dx^i}{d\tau}$ есть параллельно переносимый касательный вектор, мы будем называть каноническим параметром. Как мы показали, переход к каноническому параметру всегда возможен. При этом канонический параметр выбирается с точностью до произвольного линейного преобразования с постоянными коэффициентами

$$\tau^* = A\tau + B, \quad A \neq 0. \tag{90.4}$$

Действительно, если τ — канонический параметр, то и τ^* тоже, так как

$$d\tau^* = A\,d\tau, \quad \frac{dx^i}{d\tau^*} = \frac{1}{A}\frac{dx^i}{d\tau} \quad \left(\frac{1}{A} = \text{const}\right)$$

и вектор $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ будет вместе с $\frac{dx^i}{d\tau}$ *параллельно переносимым* касательным вектором.

С другой стороны, *формула* (90.4) *исчерпывает все возможные способы выбора канонического параметра.* В самом деле, если τ и τ^* — два канонических параметра, то векторы $\frac{dx^i}{d\tau}$, $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ оба параллельно переносятся вдоль кривой, а следовательно, в равенстве

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{d\tau^*}\frac{d\tau^*}{d\tau}$$

коэффициент $\frac{d\tau^*}{d\tau}$ должен быть постоянным (линейные зависимости между параллельно переносимыми векторами сохраняются). Отсюда следует, что зависимость τ^* от τ обязательно будет линейной.

Мы дали определение геодезических линий, но не знаем еще, существуют ли они, с каким произволом их можно выбирать и как фактически их строить. На эти вопросы дают ответ *дифференциальные уравнения геодезических линий.*

Будем искать параметрические уравнения геодезических линий с каноническим параметром τ:

$$x^i = x^i(\tau). \tag{90.5}$$

Запишем требование, чтобы вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ параллельно переносился вдоль искомой кривой; это будет означать одновременно, что кривая геодезическая и что параметр τ на ней канонический.

Далее, если в начальной точке $\zeta_0^i = \xi_0^i + \eta_0^i$, то в процессе параллельного перенесения этих трех векторов сохраняется зависимость

$$\zeta^i(t) = \xi^i(t) + \eta^i(t). \tag{89.20}$$

В самом деле, складывая почленно (89.18) и (89.19), убеждаемся, что вектор $\xi^i + \eta^i$ тоже удовлетворяет формуле параллельного перенесения и, следовательно, переносится параллельно вместе с ξ^i и η^i. Поскольку вектор ζ^i тоже переносится параллельно, то равенство между ζ^i и $\xi^i + \eta^i$, имеющее место в начальной точке, сохраняется все время, и мы приходим к (89.20).

Так как все линейные зависимости между векторами сводятся к рассмотренным простейшим (89.17) и (89.20), то все они сохраняются при параллельном перенесении.

§ 90. Геодезические линии в L_n

Геодезические линии в пространстве аффинной связности играют приблизительно такую же роль, как прямые линии в аффинном пространстве. Именно, они обладают тем же основным свойством — *постоянством направления*. Для прямых линий это свойство выражается в том, что вектор, направленный по данной прямой линии в какой-нибудь ее точке, будет направлен по ней и в любой другой ее точке. Аналогично этому мы формулируем определение геодезической линии.

Кривая в пространстве аффинной связности называется геодезической, если всякий вектор ξ_0^i ($\neq 0$), касательный к этой кривой в какой-нибудь ее точке M_0, остается к ней касательным при параллельном перенесении вдоль нее.

Пусть геодезическая задана уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $x^i(t)$ — по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемые функции, и пусть параллельно переносимый касательный вектор вдоль геодезической будет $\xi^i(t)$. В силу коллинеарности касательных векторов в каждой точке кривой можно написать:

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha \xi^i, \tag{90.1}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ зависит от точки на кривой и нигде не обращается в нуль, так как иначе $\frac{dx^i}{dt}$ обращались бы в нуль одновременно, что мы исключаем. При желании всегда можно перейти к такому параметру τ вдоль геодезической, чтобы коэффициент α

тождественно равнялся единице. Для этого достаточно положить:

$$\tau = \int \alpha(t)\, dt, \text{ так что } d\tau = \alpha(t)\, dt, \tag{90.2}$$

после чего (90.1) принимает вид:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \xi^i. \tag{90.3}$$

Параметр τ на геодезической, для которого $\frac{dx^i}{d\tau}$ есть параллельно переносимый касательный вектор, мы будем называть каноническим параметром. Как мы показали, переход к каноническому параметру всегда возможен. При этом канонический параметр выбирается с точностью до произвольного линейного преобразования с постоянными коэффициентами

$$\tau^* = A\tau + B, \quad A \neq 0. \tag{90.4}$$

Действительно, если τ — канонический параметр, то и τ^* тоже, так как

$$d\tau^* = A\,d\tau, \quad \frac{dx^i}{d\tau^*} = \frac{1}{A}\frac{dx^i}{d\tau} \quad \left(\frac{1}{A} = \mathrm{const}\right)$$

и вектор $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ будет вместе с $\frac{dx^i}{d\tau}$ *параллельно переносимым* касательным вектором.

С другой стороны, *формула* (90.4) *исчерпывает все возможные способы выбора канонического параметра.* В самом деле, если τ и τ^* — два канонических параметра, то векторы $\frac{dx^i}{d\tau}$, $\frac{dx^i}{d\tau^*}$ оба параллельно переносятся вдоль кривой, а следовательно, в равенстве

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{d\tau^*}\frac{d\tau^*}{d\tau}$$

коэффициент $\frac{d\tau^*}{d\tau}$ должен быть постоянным (линейные зависимости между параллельно переносимыми векторами сохраняются). Отсюда следует, что зависимость τ^* от τ обязательно будет линейной.

Мы дали определение геодезических линий, но не знаем еще, существуют ли они, с каким произволом их можно выбирать и как фактически их строить. На эти вопросы дают ответ *дифференциальные уравнения геодезических линий.*

Будем искать параметрические уравнения геодезических линий с каноническим параметром τ:

$$x^i = x^i(\tau). \tag{90.5}$$

Запишем требование, чтобы вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ параллельно переносился вдоль искомой кривой; это будет означать одновременно, что кривая геодезическая и что параметр τ на ней канонический.

Применяя формулу параллельного перенесения (89.12) к вектору $\frac{dx^i}{d\tau}$, получаем:

$$d\,\frac{dx^k}{d\tau} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^j}{d\tau}dx^i$$

и, деля на $d\tau$, приходим к дифференциальным уравнениям геодезических

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}, \tag{90.6}$$

отнесенных к каноническому параметру.

Как было уже сказано, $x^k(\tau)$ мы рассматриваем как неизвестные функции. Вторая производная каждой неизвестной функции $x^k(\tau)$ выражена здесь через сами неизвестные функции (входящие как аргументы под знак $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$) и через их первые производные. Мы имеем здесь, таким образом, частный случай канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, решение такой системы единственным образом определяется заданием начальных значений неизвестных функций и всех их производных порядка более низкого, чем порядок старших производных, выраженных в дифференциальных уравнениях. При этом необходимо сделать определенные предположения относительно гладкости функций, входящих в правые части уравнений; в нашем случае эти предположения вполне покрываются непрерывной дифференцируемостью функций $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$. В соответствии со сказанным мы можем произвольно задаться начальными значениями неизвестных функций x^k и их первых производных $\frac{dx^k}{d\tau}$ при каком-либо начальном значении параметра:

$$(x^i)_{\tau=\tau_0} = a^i, \quad \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_0} = b^i, \tag{90.7}$$

где b^i одновременно в нуль не обращаются. Тогда по общей теореме существования мы можем утверждать, что *в некоторой окрестности значения* $\tau=\tau_0$ *существуют и единственным образом определяются функции* $x^i(\tau)$, *удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений* (90.6) *и начальным условиям* (90.7).

Полученное решение, таким образом, зависит от начальных условий и в развернутом виде записывается:

$$x^i = x^i(\tau;\ a^1, \ldots, a^n;\ b^1, \ldots, b^n), \tag{90.8}$$

причем, как доказывается в теории дифференциальных уравнений, эти функции по всем своим аргументам будут непрерывно дифференцируемыми такое же число раз, как и функции $\Gamma(x^1, \ldots, x^n)$, а по аргументу τ — даже на 2 единицы выше. В переводе на геометрический язык наш результат означает, что всегда можно провести геодезическую линию и притом только одну через наперед заданную точку $A(a^i)$ и с наперед заданным касательным вектором b^i в этой точке. Заметим, что существенно при этом задание не самого касательного вектора b^i, а лишь касательной прямой, по которой он направлен. В самом деле, если b^i заменить любым коллинеарным вектором, например, $-5b^i$, то *геодезическая от этого не изменится*: достаточно на прежней геодезической взять вместо канонического параметра τ другой канонический параметр $\tau^* = -\frac{1}{5}\tau$. Тогда в прежней начальной точке

$$\frac{dx^i}{d\tau^*} = -5\frac{dx^i}{d\tau} = -5b^i.$$

Точно так же полученная геодезическая не зависит от начального значения τ_0 параметра τ, так как, не меняя самой кривой, можно принять на ней за канонический параметр $\tau + C$, где C — любая константа. Тогда начальное значение $\tau_0 + C$ может быть сделано каким угодно.

Мы видим, что произвол в выборе геодезических в пространстве аффинной связности такой же, как и произвол в выборе прямых в аффинном пространстве: *через каждую точку по каждому направлению проходит одна и только одна геодезическая.*

В случае аффинного пространства A_n *прямые линии являются геодезическими,* как сразу видно из определения геодезических. Теперь мы можем утверждать и обратное: *всякая геодезическая в A_n является прямой линией.* Действительно, через данную точку по данному направлению проходит лишь одна геодезическая, которая должна, таким образом, совпадать с прямой линией, проведенной через ту же точку по тому же направлению.

Возвращаемся к произвольному L_n.

Общая теорема существования гарантирует нам существование функций $x^i(\tau)$ лишь в некоторой окрестности данного значения $\tau = \tau_0$, т. е. существование лишь некоторого кусочка геодезической около данной точки $A(a^i)$. После небольшого дополнительного рассуждения мы сможем утверждать больше. А именно, обозначим через $\tau_1 > \tau_0$ такое значение τ, что: 1) при τ, меняющемся между τ_0 и τ_1 $(\tau_0 \leqslant \tau < \tau_1)$, функции $x^i(\tau)$, удовлетворяющие (90.6), (90.7), существуют, но 2) при τ, меняющемся от τ_0 до $\tau_1 + \delta$, они уже не существуют, сколь бы малым ни брать $\delta > 0$. При этом мы допускаем случай $\tau_1 = \infty$; тогда, конечно, последнее требование 2) излишне и даже не имеет смысла. Другими словами, τ_1 — верхняя грань всех тех значений канонического параметра τ, которые можно достичь, продолжая нашу геодезическую столько, сколько это возможно.

Итак, меняя τ в сторону возрастания, начиная от τ_0, мы неограниченно приближаемся к τ_1, но не превосходим этого значения.

Как сейчас будет показано, мы даже не достигаем значения τ_1; более того, при $\tau \to \tau_1$ (имеется в виду непрерывное изменение τ) *точка* $M(\tau)$ *на геодезической не может стремиться к какому-либо предельному положению* M_1. В самом деле, допустим противное:

$$M(\tau) \underset{\tau \to \tau_1}{\longrightarrow} M_1. \tag{90.9}$$

Окружим M_1 очень малой окрестностью U, так что заключенные в ней маленькие кусочки геодезических будут иметь, грубо говоря, почти линейные уравнения $x^i \approx a^i\tau + b^i$ и будут вести себя почти как кусочки прямых (если координаты x^i представить себе на минуту как аффинные координаты в аффинном пространстве). Ясно, что те геодезические отрезочки в U, которые не проходят через точку M_1, не могут к ней и неограниченно приближаться (это нетрудно было бы показать и с полной строгостью). Наша геодезическая в силу (90.9) войдет в окрестность U и будет в ней оставаться, начиная с некоторого значения τ. Следовательно, она должна в этой части совпасть с одним из геодезических отрезочков, заключенных в окрестности U, а именно с одним из отрезочков, проходящих через M_1, — иначе (90.9) не могло бы иметь места. Но тем самым наша геодезическая не только дойдет до точки M_1, но и пройдет через нее, а значит, параметр τ не только достигнет значения τ_1, но и превзойдет его, а это невозможно.

Наше предложение доказано. Смысл его в том, что, продолжая геодезическую, мы не можем вдруг остановиться, упереться в некоторую точку; если даже возрастание канонического параметра ограничено значением $\tau_1 < \infty$, геодезическая в пределах нашего пространства продолжается неограниченно. Этому не противоречит такое, например, положение вещей: пусть наше пространство представляет собой ограниченную область Ω аффинного пространства A_n. Тогда при продолжении геодезических линий (т. е. прямых) мы часто будем останавливаться, упираясь в границу области Ω. Однако граница области Ω не принадлежит рассматриваемому многообразию, и с точки зрения самой области Ω геодезическая продолжается неограниченно (см. определение области; § 75).

Мы все время говорим о продолжении геодезических линий; при этом важно, что *продолжать геодезическую можно лишь одним способом*. В самом деле, допустим, что геодезическая линия при ее продолжении с некоторого момента раздваивается; пусть при этом τ^* — верхняя грань значений $\tau \geqslant \tau_0$, при которых обе геодезические еще совпадают. Тогда они будут совпадать и при значении $\tau = \tau^*$, так как в обоих случаях

$$M(\tau) \to M(\tau^*) \text{ при } \tau \to \tau^* \quad (\tau_0 \leqslant \tau < \tau^*),$$

где точки $M(\tau)$ — общие для обеих геодезических; действительно, в силу условия 4° (§ 84) $M(\tau)$ при $\tau \to \tau^*$ не может стремиться одновременно к двум различным предельным точкам $M_1(\tau^*)$, $M_2(\tau^*)$. Исходя теперь из точки $M(\tau^*)$, можно продолжить общий отрезок $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau^*$ двух геодезических линий и на значения $\tau > \tau^*$ (вблизи τ^*), и притом единственным образом по уже использованной теореме существования и единственности. Мы вступаем в противоречие с определением τ^*, и этим доказывается наше утверждение.

Пространство аффинной связности L_n называется *полным*, если на любой его геодезической канонический параметр τ можно менять от $-\infty$ до $+\infty$. Таково, например, аффинное пространство A_n.

Рассмотрим еще некоторые свойства геодезических. *Если в пространствах аффинной связности нас интересуют лишь их геодезические, то мы можем ограничиться пространствами без кручения. А именно объект связности Γ^k_{ij} определяет в данном многообразии те же геодезические, что и объект связности без кручения $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, полученный его симметрированием:*

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}\right).$$

Убедимся прежде всего, что $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, таким образом полученные, действительно образуют объект связности. Для этого достаточно почленно сложить и разделить на 2 формулы преобразования (89.1) и (89.10). Заменяя как в старых, так и в новых координатах полусумму Γ^k_{ij} и Γ^k_{ji} через $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, получаем для $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ закон преобразования вида (89.1), а это означает, что $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ — тоже объект связности. Очевидно, эта связность без кручения, так как $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ симметричен по нижним индексам.

Теперь покажем, что геодезические для обеих связностей будут общие. Пишем дифференциальные уравнения геодезических для связности $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$:

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\tilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = -\frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ji}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}.$$

Меняя обозначения индексов суммирования во втором члене правой части (i на j и наоборот), убеждаемся, что он равен первому члену, в результате в правой части остается удвоенный первый член, и мы получаем: $\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}$, а это есть дифференциальные уравнения геодезических связности Γ^k_{ij}.

Таким образом, геодезические для обеих связностей действительно общие.

Будем рассматривать теперь *геодезические для связностей без кручения*. Поставим следующую задачу. *Пусть в многообразии заданы две связности без кручения* Γ^k_{ij}, G^k_{ij}; *в каком случае они имеют общие геодезические?*

Допустим, что нам *дано, что геодезические у обеих связностей общие*. Рассмотрим для какой-либо геодезической касательный вектор ξ^i, параллельно переносимый в первой связности, и касательный вектор η^i, параллельно переносимый во второй связности. Так как оба вектора касательные, то

$$\eta^k = \alpha\xi^k, \tag{90.10}$$

где коэффициент α, вообще говоря, переменный; $\alpha \neq 0$. Запишем формулы параллельного перенесения:

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i, \tag{90.11}$$

$$d\eta^k = -G^k_{ij}\eta^j dx^i. \tag{90.12}$$

Вставляя в последнюю формулу η^k из (90.10), получим:

$$d\alpha\,\xi^k + \alpha\,d\xi^k = -G^k_{ij}\alpha\xi^j dx^i.$$

Деля почленно на α и вставляя сюда $d\xi^k$ из (90.11), получим:

$$\frac{d\alpha}{\alpha}\xi^k - \Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i = -G^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{90.13}$$

Параллельно переносимый касательный вектор ξ^i согласно (90.3) можно записать: $\xi^i = \frac{dx^i}{d\tau}$, где τ — канонический параметр по отношению к первой связности. Тогда (90.13) после почленного деления на $d\tau$ принимает вид

$$\frac{d\ln\alpha}{d\tau}\xi^k = \left(\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij}\right)\xi^j\xi^i. \tag{90.14}$$

Так как геодезические линии можно проводить через любую точку по любому направлению, то это равенство *должно быть верно в любой точке и для любого вектора* ξ^i. При этом $\frac{d\ln\alpha}{d\tau}$ имеет, конечно, каждый раз свое численное значение, которое зависит от выбора точки и вектора ξ^i.

Обозначим для краткости

$$\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij} = T^k_{ij}. \tag{90.15}$$

Отметим, что составленная таким образом *разность двух объектов связности дает всегда тензор, один раз контравариантный и дважды* *ковариантный*. Это легко проверить, выписав закон преобразования (89.1) для Γ^k_{ij} и параллельно для G^k_{ij} и вычитая почленно из первого равенства второе. Тогда члены со вторыми производными взаимно уничтожаются, и для разностей T^k_{ij} мы получаем тензорный закон преобразования. Это верно, разумеется, для любых связностей Γ^k_{ij}, G^k_{ij} в том числе и с кручением. В нашем случае связности без кручения; отсюда следует $T^k_{ij}=T^k_{ji}$. Теперь (90.14) можно переписать:

$$T^k_{ij}\xi^i\xi^j=\frac{d\ln\alpha}{d\tau}\xi^k. \tag{90.16}$$

Из этого соотношения мы должны сделать выводы относительно строения тензора T^k_{ij}.

Для этой цели исключим неизвестный нам множитель $\frac{d\ln\alpha}{d\tau}$ следующим образом: умножаем (90.16) почленно на ξ^l и альтернируем по индексам k и l. Получим:

$$\xi^{[l}T^{k]}_{ij}\xi^i\xi^j=0. \tag{90.17}$$

Пользуясь единичным тензором δ^l_m, можно записать тождество

$$\xi^l=\delta^l_m\xi^m.$$

Вставляя это выражение в (90.17), получим:

$$\delta^{[l}_m T^{k]}_{ij}\xi^m\xi^i\xi^j=0. \tag{90.18}$$

Так как это равенство должно иметь место *тождественно* относительно $\xi^1, \ldots, \xi^n$, то после приведения подобных членов все коэффициенты кубичной формы в левой части должны обратиться в нуль. Член с произведением $\xi^p\xi^q\xi^r$ будет встречаться при суммировании по m, i, j шесть раз (если p, q, r все различны), именно, когда m, i, j принимают значения p, q, r в их всевозможных перестановках. Соответствующий суммарный коэффициент при $\xi^p\xi^q\xi^r$, который мы должны приравнять нулю, легко вычисляется из (90.18):

$$2\left(\delta^{[l}_p T^{k]}_{qr}+\delta^{[l}_q T^{k]}_{rp}+\delta^{[l}_r T^{k]}_{pq}\right)=0. \tag{90.19}$$

Ввиду симметрии T^k_{ij} по нижним индексам среди шести коэффициентов будут три пары одинаковых. Аналогичным подсчетом соотношение (90.19) получается и при наличии среди p, q, r одинаковых индексов.

Запишем альтернацию в (90.19) в развернутом виде:

$$\delta^l_p T^k_{qr}+\delta^l_q T^k_{rp}+\delta^l_r T^k_{pq}-\delta^k_p T^l_{qr}-\delta^k_q T^l_{rp}-\delta^k_r T^l_{pq}=0.$$

Произведем теперь свертывание по индексам l, r. Учитывая свойства тензора δ^i_j, в частности, что

$$\delta^l_l = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \ldots + \delta^n_n = n,$$

получим:

$$T^k_{qp} + T^k_{qp} + nT^k_{pq} - \delta^k_p T^l_{ql} - \delta^k_q T^l_{lp} - T^k_{pq} = 0,$$

откуда

$$T^k_{pq} = \frac{1}{n+1} (\delta^k_p T^l_{ql} + \delta^k_q T^l_{pl}). \tag{90.20}$$

Обозначим через p_i одноковариантный тензор, полученный свертыванием тензора T^k_{ij} и последующим умножением на $\frac{2}{n+1}$:

$$p_i = \frac{2}{n+1} T^l_{il}. \tag{90.21}$$

Теперь (90.20) можно записать окончательно:

$$T^k_{ij} = \frac{1}{2} (p_i \delta^k_j + p_j \delta^k_i), \tag{90.22}$$

т. е.

$$T^k_{ij} = p_{(i} \delta^k_{j)}. \tag{90.23}$$

Мы выяснили строение тензора T^k_{ij}. Формулируем теперь теорему, которая является ответом на поставленный нами вопрос.

Для того чтобы два объекта связности без кручения обладали общими геодезическими, необходимо и достаточно, чтобы они отличались на тензор вида

$$T^k_{ij} = p_{(i} \delta^k_{j)}.$$

Правда, нами доказана лишь необходимость этого признака. Но достаточность его проверяется легко. Пусть нам дано, что

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2} (p_i \delta^k_j + p_j \delta^k_i), \tag{90.24}$$

где p_i — некоторое тензорное поле. Пусть дана какая-нибудь линия, геодезическая в связности Γ^k_{ij}, с каноническим параметром τ и с параллельно переносимым касательным вектором ξ^i. Покажем, что, подобрав некоторый (переменный) множитель α, мы можем добиться, чтобы вектор $\eta^i = \alpha \xi^i$ *оказался параллельно переносимым уже в связности* G^k_{ij}. Тем самым будет показано, что наша геодезическая будет геодезической и в связности G^k_{ij}. Записывая, что ξ^k переносится параллельно в связности Γ^k_{ij}, получим снова (90.11). Требуем, далее, чтобы $\eta^k = \alpha \xi^k$ переносился параллельно в связности G^k_{ij}: записываем (90.12) и после прежних преобразований получаем (90.14). Пользуясь (90.24), вставляем сюда $\frac{1}{2}(p_i\delta_j^k+p_j\delta_i^k)$ вместо $\Gamma_{ij}^k-G_{ij}^k$ и получаем:

$$\frac{d\ln\alpha}{d\tau}\xi^k=p_i\xi^i\xi^k,$$

т. е. наше требование принимает вид

$$\frac{d\ln\alpha}{d\tau}=p_i\xi^i.$$

Так как вдоль нашей кривой $p_i\xi^i$ есть вполне определенная функция параметра τ, то отсюда после интегрирования найдем $\ln\alpha$ с точностью до постоянного слагаемого, а само α — с точностью до постоянного множителя. Тем самым найден и вектор $\eta^i=\alpha\xi^i$, и всякая геодезическая в связности Γ_{ij}^k оказывается геодезической и в связности G_{ij}^k. Теорема доказана.

Заметим, что если бы мы потребовали для двух связностей без кручения совпадения не только геодезических, но и канонических параметров на них, то и сами связности совпали бы. Действительно вдоль общей геодезической и для общего канонического параметра τ удовлетворяются дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}=-\Gamma_{ij}^k\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau},\quad \frac{d^2x^k}{d\tau^2}=-G_{ij}^k\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau},$$

откуда

$$\Gamma_{ij}^k\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}=G_{ij}^k\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau},$$

а так как геодезические линии проходят через любую точку по любому направлению, то здесь мы имеем тождество относительно x^i и $\frac{dx^i}{d\tau}$. Из него следует (учитывая симметрию Γ_{ij}^k и G_{ij}^k по нижним индексам):

$$\Gamma_{ij}^k=G_{ij}^k. \tag{90.25}$$

Наше утверждение доказано.

Добавление к какому-либо объекту связности любого тензора вида (90.23) называется *геодезическим преобразованием аффинной связности*; геодезические при этом не меняются.

Пространство аффинной связности L_n^0 с объектом связности $\Gamma_{jk}^i(=\Gamma_{kj}^i)$ называется *проективно евклидовым*, если в некоторой окрестности каждой его точки можно перейти в такую координатную систему x^i, в которой геодезические линии задаются линейными параметрическими уравнениями

$$x^i=a^it+b^i\qquad(a^i,\ b^i=\text{const}). \tag{90.26}$$

Это значит, что они ведут себя как геодезические аффинного (или евклидова) пространства в аффинных координатах, т. е. как прямые линии.

Тем самым геодезические линии, определяемые нашим объектом связности Γ^i_{jk}, определяются и объектом связности G^i_{jk} аффинного пространства, а следовательно, согласно (90.24)

$$G^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-p_{(i}\delta^k_{j)}, \tag{90.27}$$

где p_i — некоторое тензорное поле (все это в пределах рассматриваемой окрестности).

Чтобы L_n^0 с объектом связности Γ^k_{ij} было проективно евклидовым, необходимо и достаточно существование в пределах некоторой окрестности любой его точки такого тензорного поля p_i, что $\Gamma^k_{ij}-\delta^k_{(i}p_{j)}$ можно было бы отождествить с объектом связности G^k_{ij} в некоторой области аффинного пространства.

Необходимость этого признака только что была показана: достаточность же обнаруживается переходом к аффинным координатам в аффинном пространстве, после чего уравнения геодезических (общих для обеих связностей) можно записать, очевидно, в виде (90.26).

§ 91. Геодезические координаты в пространствах аффинной связности без кручения L_n^0

Среди пространств аффинной связности имеют наибольшее значение и обладают наилучшими геометрическими свойствами пространства без кручения, для которых

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}. \tag{91.1}$$

Их мы сейчас и будем рассматривать. Важность их основывается прежде всего на том, что к их числу принадлежит аффинное пространство. Действительно, мы видели (§§ 77, 78), что объект связности аффинного пространства симметричен по нижним индексам. Кроме того, аффинное пространство (или, более общо, область Ω в аффинном пространстве) можно рассматривать как частный случай пространства аффинной связности, так как вся аффинная геометрия области Ω вполне определяется заданием в ней объекта связности (§ 78). Таким образом, *область в аффинном пространстве есть частный случай пространства аффинной связности без кручения.*

Возникает вопрос, как узнать, не является ли данное пространство аффинной связности просто некоторой областью аффинного пространства (которая, в частности, может заполнять и все пространство). Прежде всего при этом имеет смысл рассматривать лишь пространства без кручения — для пространств с кручением вопрос сразу решается отрицательно. Затем вопрос сводится к такому: *можно ли перейти в такую координатную систему* $x^{i'}$, *действующую во всем пространстве, в которой все коэффициенты связности* $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ *тождественно обращаются в нуль.*

В самом деле, мы знаем, что коэффициенты связности аффинного пространства равны нулю в аффинных координатах и только в них. Поэтому если в пространстве аффинной связности $\overset{0}{L}_n$, отнесенном к координатной системе $x^{i'}$ с областью изменения координат Ω', оказывается

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0, \tag{91.2}$$

то мы вправе отождествить это пространство с куском аффинного пространства, заданным в аффинных координатах $x^{i'}$ в пределах той же области изменения Ω'. Действительно, коэффициенты связности $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ в обоих случаях одинаковы (равны нулю), а следовательно, одинакова и геометрия, определяемая объектом связности.

В некоторых случаях нельзя, может быть, добиться обращения в нуль $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ во всем пространстве одновременно, но можно это сделать в некоторой окрестности каждой его точки. Тогда пространство аффинной связности мы называем *локально аффинным* (аналогично локально евклидову; § 86). В некоторой окрестности любой своей точки локально аффинное пространство представляет собой «кусок аффинного пространства» и лишь в целом отличается от него.

Возвращаемся к общей теории. Вообще говоря, пространство аффинной связности, даже с нулевым кручением, аффинным пространством не является, и ни в какой координатной системе $x^{i'}$, хотя бы в пределах малой окрестности данной точки M, $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ не удается обратить в нуль тождественно.

Однако в случае нулевого кручения без труда можно обратить $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ *в нуль в самой данной точке* M. В самом деле, переходя от координат x^k к координатам $x^{k'}$, зададимся значениями $\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ в данной точке M произвольно (разумеется, матрица должна быть неособенной), а значения $\dfrac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}$ в той же точке подберем так, чтобы $\Gamma^{k'}_{i'j'}(M)$ обратились в нуль. Для этого, как видно, из (89.1), достаточно потребовать:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} = 0. \tag{91.3}$$

Все величины предполагаются вычисленными в данной точке M. Можно взять вместо (91.3) равносильное соотношение

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{91.4}$$

используя закон преобразования (89.1) в форме (89.8)

Таким образом, переходя от координат x^i к координатам $x^{i'}$, мы можем добиться обращения $\Gamma_{i'j'}^{k'}$ в нуль в наперед заданной точке M. Для этого достаточно подобрать функции $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ так, чтобы их вторые частные производные в точке M выражались через их первые частные производные и Γ_{ij}^k в той же точке M согласно (91.4), а это можно сделать бесчисленным количеством способов. Зададимся, например, неособенной числовой матрицей $a_i^{l'}$ и введем новые координаты $x^{l'}$ посредством формул

$$x^{l'} = a_i^{l'}(x^i - x_M^i) + \frac{1}{2} a_k^{l'} \Gamma_{ij}^k(M)(x^i - x_M^i)(x^j - x_M^j). \tag{91.5}$$

Здесь x_M^i, $\Gamma_{ij}^k(M)$ — определенные числа, так что $x^{l'}$ выражаются через x^i квадратичными многочленами. Дифференцируя (91.5) по x^i, а потом по x^j почленно и полагая $x^i = x_M^i$, получаем:

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}(M) = a_i^{l'}, \qquad \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}(M) = a_k^{l'} \Gamma_{ij}^k(M),$$

так что (91.4) соблюдается, а значит, $\Gamma_{i'j'}^{l'} = 0$. Полученная координатная система $x^{i'}$ пригодна, по крайней мере, в некоторой окрестности данной точки M.

В качестве матрицы $a_i^{l'}$ можно взять и просто единичную матрицу. Точкой M можно задаваться произвольно. Однако каждый раз переход к координатам $x^{i'}$ приходится делать по-своему, и каждый раз мы получаем, что $\Gamma_{i'j'}^{k'} = 0$ лишь для одной точки M. Если бы захотели указанным приемом добиться *тождественного* обращения $\Gamma_{i'j'}^{k'}$ в нуль, то нам нужно было бы обеспечить равенство (91.4) *в каждой точке M*, т. е. проинтегрировать соответствующую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$. Однако эта система, вообще говоря, несовместна. К этому вопросу мы вернемся в главе IX.

Напомним, что мы рассматриваем пространство без кручения. Это очень существенно, так как в случае $\Gamma_{ij}^k \neq \Gamma_{ji}^k$ вторые частные производные нельзя было бы вычислять по формуле (91.4)

Если в данных координатах $x^{i'}$ в данной точке M имеет место $\Gamma_{i'j'}^{k'}(M) = 0$, то координаты $x^{i'}$ называются геодезическими в точке M.

Значение геодезических координат состоит в том, что они вблизи точки M подражают аффинным координатам, насколько это возможно в нашем пространстве. Действительно, формула параллельного перенесения (89.18) в точке M и в соответствующих геодезических координатах $x^{i'}$ дает

$$d\xi^{k'} = 0.$$

Это означает, что координаты параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ хоть и не являются постоянными, как в аффинных координатах, но все же являются стационарными в точке M. Точнее, это значит, что при бесконечно малом смещении из точки M по любому пути координаты параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ получают приращения $\Delta\xi^{k'}$ бесконечно малые высшего порядка (ввиду $d\xi^{k'} = 0$). В остальных точках пространства координаты $x^{i'}$, геодезические в точке M, никакими преимуществами не обладают.

Заметим, что линейное преобразование геодезических координат

$$x^{i''} = A^{i''}_{i'} x^{i'} + A^{i''}$$

оставляет их геодезическими в данной точке. Действительно, так как в этом случае $\dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''} \partial x^{k''}} = 0$, то закон преобразования $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ принимает тензорный характер $\Gamma^{i''}_{j''k''} = A^{i''}_{i'} A^{j'}_{j''} A^{k'}_{k''} \Gamma^{i'}_{j'k'}$, и из $\Gamma^{i'}_{j'k'}(M) = 0$ следует $\Gamma^{i''}_{j''k''}(M) = 0$.

Итак, если пространство без кручения, то для каждой точки M можно построить координаты $x^{i'}$, геодезические в этой точке.

Этот результат можно значительно усилить: *преобразованием координат x^i можно добиться обращения Γ^k_{ij} в нуль не только в любой наперед заданной точке, но и вдоль любой наперед заданной кривой C.* Кривая C предполагается несамопересекающейся; координаты x^i задаются в некоторой окрестности этой кривой *).

Предварительным преобразованием координат всегда можно добиться, чтобы наша кривая оказалась некоторым отрезком координатной линии x^1, т. е. чтобы $x^2, \ldots, x^n$ вдоль нее оставались постоянными. Для простоты всегда можно принять, ничего не теряя в общности, что вдоль кривой

$$x^2 = \ldots = x^n = 0, \quad 0 \leqslant x^1 \leqslant 1. \tag{91.6}$$

Предположим, что нам удалось перейти к искомым новым координатам $x^{i'}$, так что вдоль нашей кривой $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$. Тем самым в каждой точке нашей кривой должно соблюдаться соотношение (91.4).

*) Конец этого параграфа можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего.

Вдоль нашей кривой значения $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ будут функциями от x^1, что мы обозначим так:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = a_i^{i'}\,(x^1). \tag{91.7}$$

Тогда (91.4) дает

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k\,(x^1)\,a_k^{i'}\,(x^1), \tag{91.8}$$

где Γ_{ij}^k вдоль нашей кривой тоже являются функциями x^1. Отсюда легко вытекает, что функции $a_i^{i'}\,(x^1)$ не могут быть произвольными: дифференцируя (91.7) по x^1 почленно и сравнивая с (91.8) при $j=1$, получим для $a_i^{i'}\,(x^1)$ нормальную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_i^{i'}\,(x^1)}{dx^1} = \Gamma_{1i}^k(x^1)\,a_k^{i'}\,(x^1). \tag{91.9}$$

Все полученные до сих пор соотношения лишь необходимы, так как мы рассуждали, предполагая задачу решенной. Теперь откинем это предположение и перейдем к фактическому отысканию новых координат $x^{i'}$. Для этой цели интегрируем систему (91.9), произвольно задавшись начальными значениями $a_i^{i'}\,(0)$ функций $a_i^{i'}\,(x^1)$ при условии неособенности матрицы $a_i^{i'}\,(0)$. Как известно, решение $a_i^{i'}\,(x^1)$ в этом случае существует (причем матрица $a_i^{i'}\,(x^1)$ остается неособенной).

Далее, напишем соотношение (91.7) при $i=1$

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} = a_1^{i'}\,(x^1). \tag{91.10}$$

Интегрируя его при произвольных начальных значениях $x^{i'} = x^{i'}\,(0)$, находим $x^{i'}$ как функции от x^1 вдоль нашей кривой:

$$x^{i'} = x^{i'}\,(0) + \int_0^{x^1} a_1^{i'}\,(x^1)\,dx^1 = f^{i'}\,(x^1). \tag{91.11}$$

Теперь мы введем новые координаты $x^{i'}$ в окрестности нашей кривой по формулам

$$x^{i'} = f^{i'}\,(x^1) + a_\alpha^{i'}\,(x^1)\,x^\alpha + \frac{1}{2}\,\Gamma_{\alpha\beta}^k(x^1)\,a_k^{i'}\,(x^1)\,x^\alpha x^\beta. \tag{91.12}$$

Здесь α, β пробегают значения 2, 3 ..., n.

По существу мы получаем здесь новые координаты $x^{i'}$ в виде разложения в ряд Тейлора по степеням старых координат $x^2, x^3, \ldots$ $\ldots, x^n$ при каждом значении x^1, $0 \leqslant x^1 \leqslant 1$. Для простоты обрываем ряд на членах второй степени. Выражения для вторых частных производных заимствованы из (91.8).

Остается проверить, что вдоль кривой (91.6) удовлетворяются уравнения (91.4), а для этого достаточно проверить (91.7) и (91.8). Дифференцируя (91.12) по x^γ ($\gamma=2,\ 3,\ \ldots,\ n$), имеем:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\gamma}=a_\gamma^{i'}(x^1)+\Gamma_{\alpha\gamma}^k(x^1)\,a_k^{i'}(x^1)\,x^\alpha. \tag{91.13}$$

В последнем члене мы дифференцировали по x^γ только x^β, а потом удвоили результат, так как дифференцирование x^α дает то же самое. Так как речь идет о кривой (91.6), то $x^\alpha=0$, и

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\gamma}=a^{i'}_\gamma(x^1),$$

так что (91.7) имеет место при $i=2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Чтобы проверить (91.7) при $i=1$, дифференцируем (91.12) по x^1 и, полагая затем $x^\alpha=0$, приходим вдоль нашей кривой к выражению

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1}=\frac{df^{i'}(x^1)}{dx^1}=a_1^{i'}(x^1),$$

где последнее равенство следует из (91.11). Итак, (91.7) проверено полностью.

Продифференцируем (91.13) по x^δ ($\delta=2,\ 3,\ \ldots,\ n$) почленно:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\delta\partial x^\gamma}=\Gamma_{\delta\gamma}^k(x^1)\,a_k^{i'}(x^1),$$

и значит, (91.8) соблюдается при $i,\ j=2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Далее, дифференцируя (91.13) по x^1 и полагая $x^\alpha=0$, имеем:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^1\partial x^\gamma}=\frac{da_\gamma^{i'}(x^1)}{dx^1}.$$

Заменяя правую часть согласно (91.9), убеждаемся, что (91.8) соблюдается вдоль нашей кривой при $i=1,\ j=2,\ 3,\ \ldots,\ n$.

Наконец, дифференцируя (91.12) два раза по x^1 и полагая $x^\alpha=0$, получим:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^1\partial x^1}=\frac{d^2 f^{i'}(x^1)}{\partial x^1\partial x^1}=\frac{da_1^{i'}(x^1)}{dx^1}=\Gamma_{11}^k(x^1)\,a_k^{i'}(x^1).$$

В этой выкладке мы использовали (91.10) и (91.9). Итак, соотношение (91.8) проверено полностью. *В результате вдоль нашей кривой соблюдается и* (91.4), *и тем самым* $\Gamma_{i'j'}^{k'}=0$. *Координаты* $x^{i'}$ *со свойством* $\Gamma_{i'j'}^{k'}=0$ *вдоль данной кривой мы будем называть геодезическими вдоль этой кривой.*

Координаты $x^{i'}$, геодезические вдоль данной кривой, обладают вблизи нее свойствами как бы аффинных координат; при бесконечно малом смещении из любой точки M нашей кривой дифференциалы координат параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ равны нулю, так что $\Delta\xi^{i'}$ суть бесконечно малые высшего порядка. Таким образом, при параллельном перенесении вектора в бесконечной близости нашей кривой его координаты остаются «почти постоянными». Это справедливо при любом бесконечно малом смещении не только по нашей кривой, но и «вбок» от нее.

Если же, в частности, *смещение происходит вдоль самой кривой, то все время*

$$d\xi^{i'} = 0$$

и координаты параллельно переносимого вектора просто остаются постоянными:

$$\xi^{i'} = \text{const}.$$

Конечно, наш способ введения координат $x^{i'}$, геодезических вдоль данной кривой, отнюдь не является единственным; мы его выбрали лишь как наиболее простой. Результат не изменился бы, например, если бы мы в (91.12) добавили еще какие угодно многочлены с членами степени >2 относительно $x^2, \ldots, x^n$ и с коэффициентами, зависящими от x^1.

Наше предположение, что кривая не самопересекается, существенно: иначе она содержала бы замкнутый контур, при обнесении по которому вектор $\xi^{k'}$, вообще говоря, должен был бы измениться, а потому и нельзя было бы подобрать таких координат $x^{i'}$, чтобы вдоль кривой координаты вектора $\xi^{k'}$ оставались постоянными.

Но и сейчас не исключено, что $x^{i'}$ будут принимать *одинаковые* значения в *разных* точках кривой C; в этом случае $x^{i'}$ играют роль координат лишь локально — в некоторой окрестности каждой точки кривой C.

§ 92*. Изображение кривой в L_n в виде кривой в A_n

Рассмотрим в пространстве аффинной связности L_n произвольную несамопересекающуюся кривую C

$$x^i = x^i(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{92.1}$$

вдоль которой мы параллельно переносим всевозможные векторы

$$\xi^i = \xi^i(t), \tag{92.2}$$

так что

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{92.3}$$

Одновременно с пространством L_n будем рассматривать аффинное пространство A_n.

Мы ставим себе следующую задачу: *данную кривую C и всевозможные векторы ξ^i в каждой ее точке M изобразить кривой C^* и векторами $\boldsymbol{\xi}$ в пространстве A_n таким образом, что:*

1°. *Все аффинные свойства (линейные зависимости) векторов ξ^i в данной точке M сохраняются в изображении.*

2°. *Вектор бесконечно малого смещения dx^i вдоль кривой C изображается вектором соответствующего бесконечно малого смещения $d\mathbf{x}$ вдоль кривой C^* (где $\mathbf{x}$ — скользящий радиус-вектор кривой C^*).*

3°. *Параллельно переносимый вдоль C вектор $\xi^i(t)$ изображается вектором $\boldsymbol{\xi}$, параллельно переносимым в A_n, т. е. постоянным.*

Таким образом, мы хотим получить в аффинном пространстве A_n как бы модель кривой C с параллельно переносимыми вдоль нее векторами $\xi^i(t)$ и притом такую, чтобы она правильно передавала все существенные свойства оригинала (однако для C^* мы уже не требуем несамопересечения). Очевидно, что в этой модели касательные аффинные пространства в разных точках M кривой C все отождествятся с пространством A_n.

Чтобы облегчить себе задачу, выберем из бесконечного множества параллельно переносимых векторов $\xi^i(t)$ n линейно независимых векторов

$$\xi^i_{(1)}(t),\ \xi^i_{(2)}(t),\ \ldots,\ \xi^i_{(n)}(t). \tag{92.4}$$

Тогда в силу сохранения линейных зависимостей при параллельном перенесении любой параллельно переносимый вектор $\xi^i(t)$ разлагается по векторам (92.4) с *постоянными* коэффициентами:

$$\xi^i(t) = \lambda^1\xi^i_{(1)}(t) + \ldots + \lambda^n\xi^i_{(n)}(t). \tag{92.5}$$

Изобразим векторы (92.4) в согласии с 3° постоянными векторами

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n \tag{92.6}$$

в пространстве A_n. Эти векторы выбираются произвольно при условии их линейной независимости. *Теперь любой вектор ξ^i, заданный в точке $M(t)$, будет изображаться в согласии* с 1°

$$\boldsymbol{\xi} = \lambda^1\mathbf{e}_1 + \lambda^2\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda^n\mathbf{e}_n, \tag{92.7}$$

где λ — коэффициенты разложения ξ^i по векторам $\xi^i_{(1)}(t), \ldots, \xi^i_{(n)}(t)$. Очевидно, что при таком изображении все линейные зависимости между векторами ξ^i в данной точке $M(t)$ переходят и на векторы $\boldsymbol{\xi}$. Если вектор ξ^i параллельно переносится вдоль кривой, то его изображение — вектор $\boldsymbol{\xi}$ — остается постоянным, так как согласно (92.5) коэффициенты не меняются. Применим изображение (92.7), в частности, к вектору бесконечно малого смещения dx^i в данной точке $M(t)$. Разлагая $\frac{dx^i}{dt}$ по $\xi^i_{(1)}(t), \ldots, \xi^i_{(n)}(t)$:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \mu^1(t)\,\xi^i_{(1)}(t) + \ldots + \mu^n(t)\,\xi^i_{(n)}(t)$$

и используя полученные коэффициенты $\mu^i(t)$ в (92.7), мы получим изображение вектора $\frac{dx^i}{dt}$, которое согласно 2° совпадает с $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mu^1(t)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + \mu^n(t)\,\mathbf{e}_n. \tag{92.8}$$

Интегрируя почленно, найдем радиус-вектор $\mathbf{x}$ как функцию от t:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t). \tag{92.9}$$

Это и будет параметрическое уравнение искомое кривой C^* в A_n. Из построения видно, что все поставленные требования соблюдены, и наша задача решена. Заметим, что самопересечение C^* у нас не исключается.

Искомое изображение получилось как будто со значительным произволом: произвольно выбраны линейно независимые векторы $\mathbf{e}_i$, и функция $\mathbf{x}(t)$ получилась с точностью до добавления произвольного постоянного вектора.

Но это неудивительно: заранее можно было предвидеть, что нашу модель можно подвергать любому аффинному преобразованию в A_n, так как оно не нарушает ни одного из ее свойств 1°, 2°, 3°. Но с точностью до аффинного преобразования наша модель будет единственной: если у двух моделей векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ будут различными, то их можно отождествить аффинным преобразованием одной из моделей; если, далее, $\mathbf{x}(t)$ будут отличаться на постоянный вектор, то их можно отождествить параллельным сдвигом одной из моделей. В результате наши модели совпадут.

Таким образом, решение нашей задачи с точки зрения аффинной геометрии в A_n будет единственным, т. е. все решения будут в аффинном смысле эквивалентными.

Заметим, что для случая связности без кручения мы фактически решили эту задачу уже в § 91, установив координатную систему $x^{i'}$, геодезическую вдоль данной кривой C. В координатах $x^{i'}$ вдоль кривой C мы имеем:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0. \tag{92.10}$$

Введем в том же многообразии новую связность G^k_{ij}, такую, что в тех же координатах $x^{i'}$

$$G^{k'}_{i'j'} \equiv 0, \tag{92.11}$$

т. е. обращение $G_{i'j'}^{k'}$ в нуль происходит не только вдоль C, но и во всей области изменения $x^{i'}$. Многообразие с такой связностью можно рассматривать как аффинное пространство в аффинных координатах (вообще говоря, в пределах некоторой области).

Таким образом, кривую C можно одновременно рассматривать как кривую C^* в аффинном пространстве со связностью $G_{i'j'}^{k'}$ в аффинных координатах $x^{i'}$. Возможно, C^* самопересекается (см. конец § 91), но это мы допускаем. В силу (92.10), (92.11) оба объекта связности совпадают вдоль C, и параллельное перенесение вдоль C происходит в обоих случаях одинаково. Это можно истолковать (при желании) как отображение кривой C в аффинное пространство вместе со всеми векторами, построенными в ее точках, причем параллельное перенесение векторов вдоль C *реализуется в виде их параллельного перенесения в аффинном пространстве,* а это и есть решение задачи этого параграфа. Однако результат § 91 более сильный, так как там реализуется параллельное перенесение не только вдоль C, но и «вбок» от кривой C (в бесконечно малом). Зато этот результат относится только к пространствам без кручения, в то время как более слабый результат этого параграфа справедлив для всех пространств аффинной связности.

Докажем еще следующую простую теорему.

Для того чтобы кривая C была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее изображение C^* было прямой линией (или ее отрезком).

В самом деле, то, что кривая C геодезическая, равносильно существованию на ней такого параметра τ, что вектор $\xi^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ параллельно переносится вдоль C. Но последнее равносильно тому, что соответствующий ему в изображении вектор $\boldsymbol{\xi} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ будет параллельно переносимым вдоль C^*, т. е. постоянным:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{const}, \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}\tau + \mathbf{x}_0. \tag{92.12}$$

Полученное параметрическое уравнение линии C^* означает, что это — прямая, и требуемое доказано.

Произведем в связи с этим некоторые подсчеты.

Пусть отрезок геодезической PQ изображается в виде прямолинейного отрезка P^*Q^* и пусть в точке P (и соответственно P^*) канонический параметр имеет значение нуль, а в точке Q (и соответственно Q^*) — значение τ. Обозначим далее ξ_P^i касательный вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ в точке P:

$$\xi_P^i = \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)_P, \tag{92.13}$$

а через ξ — соответствующий ему вектор в изображении. Вектор в точке P

$$\xi_P^i \tau = \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)_P \tau$$

мы будем называть *вектором геодезического смещения* PQ. Этот вектор зависит лишь от самого геодезического отрезка PQ и не зависит от выбора канонического параметра вдоль него. Действительно, если, например, мы умножим канонический параметр τ на 5, то вектор геодезического смещения одновременно умножится и разделится на 5.

В изображении этому вектору отвечает вектор $\boldsymbol{\xi}\tau$. Как видно из (92.12),

$$\mathbf{x}_{Q^*} = \boldsymbol{\xi}\tau + \mathbf{x}_0, \quad \text{где } \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{P^*}, \quad \text{так что } \overrightarrow{P^*Q^*} = \mathbf{x}_{Q^*} - \mathbf{x}_{P^*} = \boldsymbol{\xi}\tau.$$

Итак, вектору геодезического смещения PQ в оригинале отвечает вектор $\overrightarrow{P^*Q^*}$ в изображении. Беря теперь τ бесконечно малым (так что $Q \to P$, $Q^* \to P^*$), вычислим приращения координат при переходе из P в Q:

$$x_Q^k - x_P^k = \xi_P^k \tau - \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^k \xi_P^i \xi_P^j \tau^2 + \ldots \tag{92.14}$$

Мы воспользовались здесь разложением в ряд Маклорена по степеням τ с точностью 2-го порядка, причем $\left(\frac{dx^k}{d\tau}\right)_P$ мы заменили согласно (92.13), а $\left(\frac{d^2x^k}{d\tau^2}\right)_P$ — из дифференциальных уравнений геодезических. Величины Γ_{ij}^k взяты в точке P.

Соответствующее смещение $\overrightarrow{P^*Q^*}$ в изображении задается, как мы видели, вектором

$$\overrightarrow{P^*Q^*} = \boldsymbol{\xi}\tau. \tag{92.15}$$

Эти результаты нам вскоре понадобятся.

У нас не было до сих пор геометрического истолкования для кручения данной аффинной связности. Сейчас мы можем его дать. Будем рассматривать изображение какой-нибудь кривой C в виде кривой C^* в аффинном пространстве. Пусть начало и конец кривой C совпадают между собой; тогда в изображении они, вообще говоря, разойдутся и кривая C^* уже не будет замкнутой.

Наоборот, когда кривая C^* окажется замкнутой, то C, вообще говоря, будет разомкнутой. *Оказывается, что это нарушение замкнутости при переходе от оригинала к изображению и наоборот определяется в случае бесконечно малых контуров в основном* *тензором кручения* S^k_{ij} *в соответствующей точке* («в основном» — это значит, что речь идет о главной части того бесконечно малого зазора, который появляется в ранее замкнутом бесконечно малом контуре).

Точный смысл этого утверждения мы сейчас раскроем.

Пусть кривая C^* образует параллелограмм $P^*Q^*R^*S^*T^*$ (рис. 18), причем начальная ее точка P^* совпадает с конечной точкой T^*.

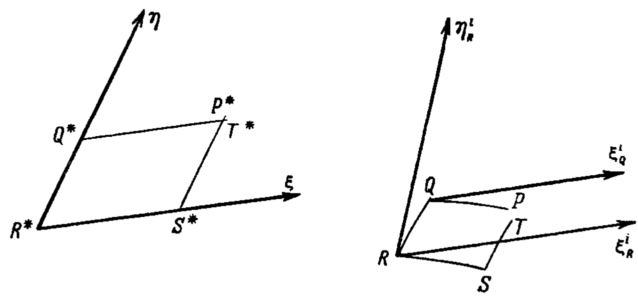

Рис. 18.

Тогда кривая C представляет собой ломаную $PQRST$, состоящую из отрезков геодезических. Концы ломаной P и T, в общем случае, уже не совпадают.

Правда, мы до сих пор не рассматривали изображений кусочно гладких кривых, но они осуществляются без труда: прежнее построение повторяется дословно, и вся разница будет в том, что функции $\mu^k(t)$ в угловых точках терпят разрыв непрерывности.

Обозначим через ξ, η постоянные векторы, направленные по R^*S^*, R^*Q^*, причем будем считать:

$$\overrightarrow{R^*S^*} = \xi\tau, \tag{92.16}$$

$$\overrightarrow{R^*Q^*} = \eta\tau, \tag{92.17}$$

где $\tau \to 0$ (при неподвижной точке R^*). Мы будем рассматривать, таким образом, бесконечно малый параллелограмм, стягивающийся в точку R^*. Аналогично в оригинале ломаная $PQRST$ стягивается в точку R. *Оценим теперь с точностью 2-го порядка относительно* τ *зазор* TP, *образовавшийся при переходе от параллелограмма в изображении к ломаной в оригинале.* Для этого мы подсчитаем разности координат $x^k_P - x^k_T$:

$$x^k_P - x^k_T = \left\{(x^k_P - x^k_Q) - (x^k_S - x^k_R)\right\} - \left\{(x^k_T - x^k_S) - (x^k_Q - x^k_R)\right\}. \tag{92.18}$$

Обозначим ξ^i_R, η^i_R векторы в точке R, касательные соответственно к $\smile{RS}$ и $\smile{RQ}$ и имеющие своим изображением векторы ξ и η.

Так как (92.16) вполне аналогично (92.15), то, применяя (92.14), пишем:

$$x^k_S - x^k_R = \xi^k_R\tau - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\xi^i_R\xi^j_R\tau^2 + \ldots \tag{92.19}$$

Здесь и в дальнейшем Γ^k_{ij} вычисляются в точке R. Совершенно аналогично

$$x^k_Q - x^k_R = \eta^k_R\tau - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\eta^i_R\eta^j_R\tau^2 + \ldots \tag{92.20}$$

Теперь для аналогичного подсчета $x^k_P - x^k_Q$ мы снова можем применить (92.14), учитывая, что

$$\overrightarrow{Q^*P^*}\,(=\overrightarrow{R^*S^*}) = \xi\tau$$

вполне аналогично (92.15). Только теперь исходной точкой будет служить уже не P, а Q. Соответственно этому в (92.14) в качестве ξ^i_P нужно взять вектор ξ^i_Q, касательный к $\smile{QP}$ в точке Q и имеющий своим изображением по-прежнему ξ. Такой вектор ξ^i_Q легко получить параллельным перенесением ξ^i_R из точки R в точку Q по пути $\smile{RQ}$, так как при этом изображение ξ^i_R тоже переносится параллельно, т. е. остается вектором ξ. С точностью 1-го порядка можно записать формулу параллельного перенесения

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j\,dx^i$$

в виде

$$\xi^k_Q - \xi^k_R = -\Gamma^k_{ij}\xi^j_R\left(x^i_Q - x^i_R\right) + \ldots,$$

подменив дифференциалы приращениями. Заменяя с той же точностью $x^i_Q - x^i_R$ из (92.20), имеем окончательно:

$$\xi^k_Q = \xi^k_R - \Gamma^k_{ij}\xi^j_R\eta^i_R\tau + \ldots \tag{92.21}$$

Применяя теперь (92.14) для подсчета $x^k_P - x^k_Q$, получаем:

$$x^k_P - x^k_Q = \xi^k_Q\tau - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\xi^i_Q\xi^j_Q\tau^2 + \ldots \tag{92.22}$$

Здесь, собственно, Γ^k_{ij} следовало бы брать в точке Q. Однако мы будем брать их по-прежнему в точке R, учитывая, что в Γ^k_{ij} при этом будет допущена ошибка бесконечно малая 1-го порядка, а после умножения на τ^2 — уже 3-го порядка (которым мы пренебрегаем). Вставляем теперь в правую часть равенства (92.22) ξ^k_Q из (92.21), причем в первом члене происходит умножение на τ, и точность 1-го порядка превращается в точность 2-го порядка, а во втором ввиду умножения на τ^2 достаточно вставить вместо ξ^k_Q лишь его главную часть ξ^k_R. В результате имеем:

$$x^k_P - x^k_Q = \xi^k_R \tau - \Gamma^k_{ij} \xi^j_R \eta^i_R \tau^2 - \frac{1}{2} \Gamma^k_{ij} \xi^i_R \xi^j_R \tau^2 + \ldots \qquad (92.23)$$

Вычитая почленно (92.19) из (92.23), получим первую фигурную скобку в (92.18):

$$\left\{(x^k_P - x^k_Q) - (x^k_S - x^k_R)\right\} = -\Gamma^k_{ij} \xi^j_R \eta^i_R \tau^2 + \ldots$$

Вычисление второй фигурной скобки должно проходить совершенно симметричным образом лишь с переменой ролей векторов ξ^i_R, η^i_R. В результате приходим к выражению

$$(x^k_T - x^k_S) - (x^k_Q - x^k_R) = -\Gamma^k_{ij} \eta^j_R \xi^i_R \tau^2 + \ldots$$

Вычитая почленно это равенство из предыдущего, мы согласно (92.18) найдем искомый зазор:

$$x^k_P - x^k_T = \Gamma^k_{ij} \xi^i_R \eta^j_R \tau^2 - \Gamma^k_{ij} \xi^j_R \eta^i_R \tau^2 + \ldots$$

Меняя в последнем члене обозначения индексов суммирования i на j и наоборот и пользуясь определением тензора кручения

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji},$$

получаем окончательно:

$$x^k_P - x^k_T = S^k_{ij} \xi^i_R \eta^j_R \tau^2 + \ldots \qquad (92.24)$$

Таким образом, мы можем резюмировать:

Приращения координат x^i, которыми характеризуется зазор TP, с точностью 2-го порядка получаются в результате свертывания в точке R тензора кручения S^k_{ij} с векторами $\xi^i_R \tau$, $\eta^i_R \tau$, выражающими геодезические смещения RS, RQ (и дающими в изображении векторы $\overrightarrow{R^*S^*}$, $\overrightarrow{R^*Q^*}$).

Итак, «зазор» в своей главной части выражается посредством тензора кручения в той точке R, к которой стягивается наш «разомкнутый параллелограмм». В этом и состоит геометрическое истолкование тензора кручения. Если связность будет без кручения, то «зазор» оказывается бесконечно малым уже не 2-го, а 3-го порядка относительно τ.

Подчеркнем, что эта роль нулевого кручения сказывается лишь в бесконечно малом. В случае конечных размеров и при нулевом кручении обнаруживаются те же явления «размыкания» замкнутых контуров. Наконец, следует отметить, что мы брали в качестве замкнутого контура параллелограмм лишь для упрощения выкладок. Аналогичные результаты можно получить для любого бесконечно малого контура, стягивающегося в данную точку и расположенного в данной двумерной плоскости пространства A_n. Можно было бы исходить также — обратно тому, что мы делали, — из контуров, замкнутых в L_n и размыкающихся в A_n. Оценка зазора получилась бы по существу такой же.

§ 93*. Пространства L_n с абсолютным параллелизмом

В этом параграфе мы решим такую задачу: *найти всевозможные пространства аффинной связности L_n с абсолютным параллелизмом векторов.* Так мы будем называть пространства, в которых результат параллельного перенесения произвольного вектора ξ^i из точки P в точку Q при любом выборе этих точек не зависит от пути перенесения $\breve{PQ}$. Это значит, что по какому бы пути ни совершать переход из P в Q, мы придем в Q с одним и тем же вектором. Следовательно, мы получаем возможность вектор, заданный в какой-нибудь точке P, как бы откладывать из любой точки пространства. В результате возникает целое векторное поле. Очевидно, любой вектор этого поля можно принять за исходный и считать, что все другие векторы поля получены его параллельным перенесением. Такое векторное поле мы будем называть *однородным.*

Один пример L_n с абсолютным параллелизмом нам известен — это аффинное пространство A_n. Требуется выяснить, существуют ли и другие L_n с абсолютным параллелизмом и какие именно.

Допустим, что нам дано L_n с абсолютным параллелизмом. Выберем в какой-либо начальной точке M_0 n линейно независимых векторов

$$\xi^i_{(1)}, \ldots, \xi^i_{(n)}$$

и путем их параллельного перенесения в любую точку M нашего пространства получаем n однородных векторных полей

$$\xi^i_{(1)}(M), \ldots, \xi^i_{(n)}(M). \tag{93.1}$$

В силу абсолютного характера параллелизма эти векторы будут в каждой точке M вполне определенными; при этом их линейная независимость при параллельном перенесении сохранится. Параллельное перенесение любого вектора ξ^i из одной точки M в другую M' совершается теперь, очевидно, так: разложим вектор ξ^i по векторам $\xi^i_{(p)}(M)$ в данной точке M; так как при параллельном перенесении линейные зависимости сохраняются, то параллельно перенесенный вектор ξ^i разлагается в точке M' по векторам $\xi^i_{(p)}(M')$ с теми же самыми коэффициентами. Этим перенесение определится.

Теперь ясно, что, обратно, задавая, в каком-либо многообразии $\mathfrak{M}_n$ n произвольно выбранных полей линейно независимых векторов *)

$$\xi^i_{(1)}(M), \ \ldots, \ \xi^i_{(n)}(M), \tag{93.2}$$

мы можем превратить $\mathfrak{M}_n$ в L_n с абсолютным параллелизмом. Действительно, мы можем тогда определить в $\mathfrak{M}_n$ абсолютное перенесение любого вектора ξ^i так, как это было только что описано. Может, однако, возникнуть сомнение, подходит ли это перенесение под наше общее определение, т. е. под формулу параллельного перенесения с определенным объектом связности Γ^i_{ij}. Покажем, что действительно всегда можно подобрать такой объект связности Γ^k_{ij}, для которого наши наперед заданные векторы $\xi^i_{(p)}(M)$ будут параллельно переносимыми векторами при любом бесконечно малом смещении из любой точки. Тем самым и все их линейные комбинации с постоянными коэффициентами будут тоже параллельно переносимыми векторами, и построенную нами связность с абсолютным параллелизмом можно будет считать порожденной объектом Γ^k_{ij}. Запишем, что каждый из $\xi^i_{(p)}$ при любом бесконечно малом смещении из любой точки M должен удовлетворять формуле параллельного перенесения

$$d\xi^k_{(p)} = -\Gamma^k_{ij}\,\xi^j_{(p)}\,dx^i,$$

где Γ^k_{ij} — искомый объект связности. Так как $\xi^k_{(p)}$ есть функция от $x^1, \ldots, x^n$ (которая предполагается непрерывно дифференцируемой), то левую часть можно развернуть как полный дифференциал, и мы получаем:

$$\frac{\partial \xi^k_{(p)}}{\partial x^i}\,dx^i = -\Gamma^k_{ij}\,\xi^j_{(p)}\,dx^i.$$

Так как это есть тождество относительно dx^i, то имеем окончательно:

$$\frac{\partial \xi^k_{(p)}}{\partial x^i} = -\Gamma^k_{ij}\,\xi^j_{(p)}. \tag{93.3}$$

Фиксируя на время k, i и давая p значения $1, 2, \ldots, n$, мы получаем здесь n линейных уравнений с n неизвестными $\Gamma^k_{i1}, \Gamma^k_{i2}, \ldots, \Gamma^k_{in}$. Определитель этой системы отличен от нуля в силу линейной независимости векторов (93.2), и следовательно, Γ^k_{ij} находятся однозначно. То, что при этом Γ^k_{ij} удовлетворяют обычному закону преобразования, видно из единственности определяемого ими перене-

*) Это всегда можно сделать в элементарном многообразии, но далеко не всегда в многообразии общего вида; многообразия, где это можно сделать, называются *параллелизуемыми*.

сения, а также может быть проверено формальной выкладкой, исходя из (93.3).

Таким образом, мы получили довольно обширный класс связностей с абсолютным параллелизмом. *Однако все они будут обладать кручением за исключением лишь случая (локально) аффинного пространства A_n.*

В самом деле, покажем, что *в случае L_n с абсолютным параллелизмом и без кручения можно, по крайней мере, в некоторой окрестности любой точки M, перейти к аффинным координатам $x^{i'}$, т. е. добиться $\Gamma^{k'}_{i'j'} \equiv 0$; тем самым наше L_n будет (локально) аффинным пространством.*

Для этого будем искать функциональную зависимость между x^i и $x^{i'}$ из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}} = \xi^k_{(m)}(x^1, \ldots, x^n) \quad (k, m = 1, 2, \ldots, n). \qquad (93.4)$$

Здесь x^k ищутся, таким образом, как функции от $x^{m'}$, причем частная производная каждой неизвестной функции по каждому аргументу выражена через сами неизвестные функции.

Геометрический смысл уравнений (93.4) состоит в следующем: мы ищем новые координаты $x^{m'}$ так, чтобы векторы $\frac{\partial x^i}{\partial x^{m'}}$, касательные к координатным линиям $x^{m'}$, совпадали с наперед заданными векторами $\xi^i_{(m)}$, т. е. обладали абсолютным параллелизмом. Легко видеть, что это требование соответствует свойствам аффинных координат. Следует отметить также инвариантный характер уравнений (93.4) относительно преобразования координат x^i, так как в левой и правой частях стоят одинаково преобразующиеся контравариантные тензоры (при фиксированном m). Составим условия интегрируемости этой системы. Дифференцируем (93.4) по $x^{l'}$ и частные производные, получающиеся в правой части, заменяем согласно (93.4):

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'} \partial x^{l'}} = \frac{\partial \xi^k_{(m)}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} = \frac{\partial \xi^k_{(m)}}{\partial x^i} \cdot \xi^i_{(l)}.$$

Условия интегрируемости получаются, как известно, если мы запишем, что правая часть этого равенства должна быть (вслед за левой) симметрична относительно m, l:

$$\frac{\partial \xi^k_{(m)}}{\partial x^i} \xi^i_{(l)} = \frac{\partial \xi^k_{(l)}}{\partial x^i} \xi^i_{(m)}. \qquad (93.5)$$

Если бы у нас было пространство с кручением, то условия интегрируемости не удовлетворялись бы тождественно, мы получили бы зависимость между $x^1, \ldots, x^n$, т. е. противоречие. Система (93.4) оказалась бы несовместной. Но в нашем случае дело обстоит иначе. В самом деле, умножая (93.3) на $\xi^i_{(q)}$ и свертывая по i, получим:

$$\frac{\partial \xi^k_{(p)}}{\partial x^i}\xi^i_{(q)} = -\Gamma^k_{ij}\xi^i_{(q)}\xi^j_{(p)}.$$

Из условия $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ вытекает, что *перестановка индексов* p, q в правой части равносильна перестановке обозначений индексов суммирования i, j и, следовательно, результата не меняет. Значит, и левая часть симметрична относительно p, q и условия интегрируемости (93.5) выполняются тождественно (при любых $x^1, \ldots, x^n$).

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что в этом случае система (93.4) имеет решение и притом единственное при любых начальных условиях вида

$$x^k = x^k_0 \ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \text{ при } x^{m'} = x^{m'}_0 (m' = 1',\ 2',\ \ldots,\ n'), \quad (93.6)$$

по крайней мере, в некоторой окрестности точки $x^{m'}_0$ *). В этой окрестности можно считать зависимость $x^k(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ обратимой, так как в силу линейной независимости векторов $\xi^k_{(m)}$ из уравнений (93.4) следует неравенство нулю якобиана:

$$\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(x^{1'}, \ldots, x^{n'})} \neq 0. \quad (93.7)$$

Таким образом, $x^{m'}$ можно принять за новые координаты в некоторой окрестности произвольной точки $M(x^1_0, \ldots, x^n_0)$. Новые координаты $x^{m'}$ подобраны, следовательно, специальным образом, в то время как старые x^k были произвольными. В частности, можно взять x^k совпадающими с $x^{m'}$; тогда (93.3), (93.4) дают

$$\frac{\partial \xi^{k'}_{(p)}}{\partial x^{i'}} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}\xi^{j'}_{(p)}, \qquad \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{m'}} = \xi^{k'}_{(m)}.$$

Из второго равенства получаем:

$$\xi^{k'}_{(m)} = \delta^{k'}_{m'},$$

и, вставляя в первое, приходим к искомому результату

$$0 = -\Gamma^{k'}_{i'p'}, \text{ т. е. } \Gamma^{k'}_{i'p'} = 0.$$

Следовательно, $x^{m'}$ действительно служат аффинными координатами в некоторой окрестности данной точки M, и наше пространство является (локально) аффинным.

*) См., например, П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.—Л., Гостехиздат, 1947. § 26.

§ 94. Аффинная связность в римановом пространстве

До сих пор мы рассматривали отдельно риманову геометрию порождаемую метрическим тензором $g_{ij}(M)$, и геометрию аффинной связности, порождаемую объектом связности $\Gamma^k_{ij}(M)$. Наиболее содержательная геометрическая картина получается при объединении той и другой геометрии, причем это можно сделать вполне естественным путем. *А именно, в римановом пространстве всегда можно построить и притом единственным образом связность* $\Gamma^k_{ij}(M)$, *обладающую следующими двумя свойствами.*

1°. *Кручение равно нулю*

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{94.1}$$

2°. *Всякий раз, когда вдоль какого-либо пути одновременно переносятся параллельно два вектора* ξ, η, *их скалярное произведение не меняется.*

Из условия 2° следует, в частности, что скалярные квадраты параллельно переносимых векторов также остаются постоянными. Таким образом, мы хотим подобрать связность Γ^k_{ij} так, чтобы всевозможные векторы ξ, η, ..., заданные в какой-нибудь точке M, вели себя в процессе параллельного перенесения *как одно твердое тело*: не только аффинные, но и все их метрические свойства должны оставаться неизменными, в частности, не должны меняться их длины и углы между ними (все это вытекает из постоянства скалярных произведений $\xi\eta$). Это требование должно приблизить нас к положению вещей в евклидовом пространстве, где параллельное перенесение векторов, очевидно, сохраняет все их метрические свойства.

Условие 1° имеет аналогичное назначение: аффинная связность в евклидовом (или, что то же самое, в аффинном) пространстве имеет кручение нуль. Вводя связность в римановом пространстве, мы стараемся сохранить и это свойство.

Переходим к доказательству нашего утверждения. *Будем искать связность* Γ^k_{ij}, *удовлетворяющую условиям* 1°, 2°. Скалярное произведение векторов ξ, η записывается согласно (85.3) в виде

$$\xi\eta = g_{ij}\xi^i\eta^j.$$

Требование постоянства $\xi\eta$ при параллельном перенесении вдоль какого-либо пути можно записать в виде равенства нулю дифференциала

$$d(\xi\eta) = d(g_{ij}\xi^i\eta^j) = 0, \tag{94.2}$$

или

$$dg_{ij}\xi^i\eta^j + g_{ij}d\xi^i\eta^j + g_{ij}\xi^i d\eta^j = 0. \tag{94.3}$$

Так как векторы ξ, η переносятся параллельно, то

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{pi}\xi^i\,dx^p, \qquad d\eta^k = -\Gamma^k_{pj}\eta^j\,dx^p,$$

где Γ^k_{ij} — коэффициенты *искомой* связности, а dx^p — дифференциалы координат точки при бесконечно малом смещении по пути. Кроме того,

$$dg_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\,dx^p.$$

Вставляем все это в (94.3), изменив предварительно в этом равенстве обозначения индексов суммирования: во втором члене i на k, в третьем члене j на k. Получим:

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} - g_{kj}\Gamma^k_{pi} - g_{ik}\Gamma^k_{pj}\right)\xi^i\eta^j\,dx^p = 0.$$

Так как ξ^i, η^j, dx^p мы можем выбирать совершенно произвольно, т. е. любые векторы можем переносить по любому пути, то равенство должно представлять собой тождество относительно ξ^i, η^j, dx^p. Отсюда вытекает обращение в нуль всех коэффициентов при этих величинах:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} - g_{kj}\Gamma^k_{pi} - g_{ik}\Gamma^k_{pj} = 0. \tag{94.4}$$

Из этих уравнений и из условия 1° и подлежат определению искомые Γ^k_{ij}. Очевидно, от соотношений (94.4) можно обратной выкладкой вернуться к (94.2), так что эти соотношения не только необходимы, но и достаточны для соблюдения условия 2°.

Обозначим аналогично (79.14):

$$\Gamma_{l,ij} = g_{lk}\Gamma^k_{ij}. \tag{94.5}$$

Ясно, что обратным поднятием индекса через величины $\Gamma_{l,ij}$ можно выразить Γ^k_{ij}:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{l,ij}. \tag{94.6}$$

При этом в силу условия 1° как Γ^k_{ij}, так и $\Gamma_{l,ij}$ симметричны по индексам i, j.

Теперь уравнения (94.4) перепишутся в виде

$$\Gamma_{j,pi} + \Gamma_{i,pj} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}. \tag{94.7}$$

Но эти уравнения по форме вполне совпадают с (79.17) и решаются таким же образом. Получаем (аналогично (79.18)):

$$\Gamma_{l,mk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\right) \tag{94.8}$$

и согласно (94.6)

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \tag{94.9}$$

Формулы (94.9) *дают решение поставленной задачи, как мы видим, единственное.* Мы нашли связность без кручения, сохраняющую скалярное произведение любых двух параллельно переносимых векторов; оказалось, что она будет только одна.

Ранее полученную формулу (79.19) по внешности совершенно такую же, как формула (94.9), нужно рассматривать как частный случай последней. Действительно, формула (79.19), решает *для евклидова пространства* по существу ту же самую задачу, которую мы решили сейчас для более общего случая *риманова пространства.*

Может показаться, что нужно проверить, образуют ли Γ^k_{ij}, найденные в различных координатных системах x^i, один и тот же объект связности, т. е. удовлетворяют ли они закону преобразования (89.1). Однако это можно утверждать и без проверки. Действительно, в силу *инвариантного* характера требований 1°, 2° безразлично, в каких координатах x^i искать нашу связность; она будет получаться всегда одной и той же. Но это и означает, что Γ^k_{ij}, вычисленные в любых координатах, образуют один и тот же объект связности. Конечно, это можно проверить и непосредственной выкладкой, исходя из (94.9) и пользуясь законом преобразования метрического тензора g_{ij}.

Полученную связность в римановом пространстве мы будем называть римановой связностью. В дальнейшем будем всегда считать, что риманово пространство снабжено этой связностью.

В заключение покажем геометрический смысл нашего параллельного перенесения в том случае, когда риманово пространство V_m реализовано в виде поверхности в евклидовом пространстве R_n:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \ldots, u^m) \tag{94.10}$$

(см. § 86 (86.4)). Разложим вторые частные производные $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2\mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$ на составляющие по касательной плоскости A_m $\left(\text{т. е. по ее направляющим векторам } \mathbf{x}_\alpha = \dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\right)$ и по нормальной плоскости B_{n-m}:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^\delta_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\delta + \mathbf{y}_{\alpha\beta}, \tag{94.11}$$

где $\tilde{\Gamma}^\delta_{\alpha\beta}$ — некоторые коэффициенты разложения, очевидно, симметричные по нижним индексам, а $\mathbf{y}_{\alpha\beta}$ — вектор в B_{n-m}, так что

$$\mathbf{y}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\gamma = 0. \tag{94.12}$$

Покажем, что $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *совпадают с коэффициентами связности* $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *в римановом пространстве* V_m. Умножая для этого (94.11) на $\mathbf{x}_\nu$ скалярно и учитывая (94.12), получаем:

$$\mathbf{x}_\gamma \mathbf{x}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\delta \mathbf{x}_\gamma.$$

Так как согласно (86.9)

$$\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta = G_{\alpha\beta}, \tag{94.13}$$

то

$$\mathbf{x}_\gamma \mathbf{x}_{\alpha\beta} = G_{\gamma\delta}\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}, \tag{94.14}$$

где $\tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}$ обозначает результат опускания индекса.

Дифференцируя (94.13) по u^γ, получаем:

$$\mathbf{x}_{\alpha\gamma}\mathbf{x}_\beta + \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_{\beta\gamma} = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma},$$

т. е.

$$\tilde{\Gamma}_{\beta,\gamma\alpha} + \tilde{\Gamma}_{\alpha,\gamma\beta} = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}. \tag{94.15}$$

Эти уравнения в применении к V_m совпадают с уравнениями (94.7), а следовательно, $\tilde{\Gamma}_{\gamma,\alpha\beta}$ совпадают с $\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$. Отсюда, поднимая первый индекс, убеждаемся и в совпадении $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ с $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$. *Окончательно разложение* (94.11) *принимает вид*

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\delta + \mathbf{y}_{\alpha\beta}. \tag{94.16}$$

Здесь принципиально важно, что коэффициенты $\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ вполне определяются из римановой метрики $G_{\alpha\beta}$ на поверхности V_m вне зависимости от способа ее вложения в R_n.

Пусть теперь на поверхности V_m задана кривая

$$u^\alpha = u^\alpha(t),$$

а вдоль этой кривой мы строим поле вектора $\boldsymbol{\xi}(t)$, касательного к V_m. Тем самым согласно (86.6) имеет место разложение

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha(t) = \mathbf{x}_\alpha \xi^\alpha(t), \tag{94.17}$$

где $\xi^\alpha(t)$ — координаты вектора $\boldsymbol{\xi}$ в многообразии V_m. Рассмотрим дифференциал вектора $\boldsymbol{\xi}$ при бесконечно малом смещении по кривой:

$$d\boldsymbol{\xi} = d\mathbf{x}_\alpha \xi^\alpha + \mathbf{x}_\alpha d\xi^\alpha = \mathbf{x}_{\alpha\beta}du^\beta \xi^\alpha + \mathbf{x}_\alpha d\xi^\alpha.$$

В последнем члене заменяем обозначение индекса суммирования на δ, а $\mathbf{x}_{\alpha\beta}$ выражаем согласно (94.16). Получим:

$$d\boldsymbol{\xi} = (\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}\,du^\beta \xi^\alpha + d\xi^\delta)\,\mathbf{x}_\delta + \mathbf{y}_{\alpha\beta}\,du^\beta \xi^\alpha. \tag{94.18}$$

Мы хотим, чтобы вектор $\xi(t)$ при переходе от точки t к точке $t+dt$ по нашей кривой *изменялся возможно наименьшим образом*. Мы не можем требовать, чтобы он совсем не менялся, так как касательная плоскость A_m к V_m, в которой он расположен, вообще говоря, поворачивается при переходе от точки к точке. Если ξ в точке t задан, то при переходе в точку $t+dt$ мы можем распоряжаться лишь значениями $d\xi^\delta$. При этом мы можем уничтожить в разложении (94.18) первый член, направленный по касательной плоскости A_m в точке t, если положим:

$$\Gamma^\delta_{\alpha\beta}\, du^\beta \xi^\alpha + d\xi^\delta = 0, \text{ т. е. } d\xi^\delta = -\Gamma^\delta_{\beta\alpha}\xi^\alpha\, du^\beta. \tag{94.19}$$

Мы заменили здесь $\Gamma^\delta_{\alpha\beta}$ через $\Gamma^\delta_{\beta\alpha}$ по свойству римановой связности. Что же касается второго члена, направленного по нормальной плоскости B_{n-m}, то мы не в состоянии его как-либо варьировать, так как он $d\xi^\delta$ не содержит. Поэтому наилучшего возможного результата в смысле малости $d\xi$ мы добиваемся, уничтожая его касательную составляющую, т. е. перенося вектор ξ из точки t в точку $t+dt$ согласно (94.19). Но это есть параллельное перенесение согласно римановой связности на V_m.

Таким образом, параллельное перенесение вектора ξ в римановом пространстве V_m при вложении V_m в R_n в качестве поверхности получает следующее геометрическое истолкование: с точки зрения объемлющего пространства R_n вектор ξ переносится так, чтобы касательная составляющая $d\xi$ все время была равна нулю, т. е. чтобы $d\xi$ был нормален к V_m, $d\xi \perp A_m$. Как мы только что видели, для вектора ξ, касательного к поверхности V_m, этот способ перенесения есть наилучшее приближение к идеальному случаю, когда переносимый вектор просто не меняется. Тем самым введенное нами параллельное перенесение в римановом пространстве получает дополнительное геометрическое обоснование.

Как побочный результат получается следующая теорема. При любом способе вложения данного V_m в R_n перенесение касательного вектора ξ по полученной поверхности с соблюдением условия $d\xi \perp A_m$ всегда имеет один и тот же смысл, так как совпадает с параллельным перенесением согласно римановой связности на V_m.

ГЛАВА VIII

АППАРАТ АБСОЛЮТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В пространстве аффинной связности L_n, в частности, в римановом пространстве V_n, естественным путем возникает аппарат *абсолютного дифференцирования*. Смысл его заключается в следующем. Желая исследовать какое-нибудь тензорное поле, например, $U^{ij}_{klm}(M)$, в бесконечно малой окрестности данной точки M, мы рассматриваем, как обычно, полные дифференциалы dU^{ij}_{klm} функций $U^{ij}_{klm}(x^1, \ldots, x^n)$. Однако эти дифференциалы уже не образуют тензора и преобразуются по более сложному закону с участием самих U^{ij}_{klm}. Это мешает выявлению инвариантных результатов и не позволяет пользоваться аппаратом тензорной алгебры. Делу можно помочь тем, что, прежде чем вычислять дифференциалы dU^{ij}_{klm}, мы параллельно переносим тензор поля $U^{ij}_{klm}(M')$ *из бесконечно близкой точки M' в данную точку M* и уже после этого вычитаем из него тензор U^{ij}_{klm} в данной точке. Главная линейная часть полученной разности и будет *абсолютным дифференциалом* DU^{ij}_{klm} тензора U^{ij}_{klm}. Это будет снова тензор того же строения, как и U^{ij}_{klm}. Что касается параллельного перенесения тензоров, то оно легко определяется на основе параллельного перенесения векторов, как будет показано в ближайшем параграфе.

Тензорная алгебра, дополненная аппаратом абсолютного дифференцирования, образует *тензорный анализ*.

§ 95. Параллельное перенесение тензоров в L_n

Пусть пространство аффинной связности L_n отнесено к координатной системе x^i, и пусть в некоторой точке M задан тензор, например, U^{ij}_{lm}. Мы знаем, что координаты этого тензора относительно координатной системы x^i можно рассматривать в то же время и как его координаты относительно локального репера $\{M, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в касательном пространстве A_n в точке M (§ 82).

Зададимся в A_n аффинным репером $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ суть n произвольных линейно независимых векторов. Если координаты вектора ξ_k обозначить ξ_k^i, то, очевидно,

$$\xi_k = \xi_k^i \mathbf{e}_i, \tag{95.1}$$

так как координаты вектора ξ_k в координатной системе x^i суть в то же время его координаты относительно соответствующего локального репера (§ 82).

Вообще при переходе от одного аффинного репера к другому тензор U_{lm}^{ij} преобразуется по закону

$$U_{l'm'}^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} A_{l'}^l A_{m'}^m U_{lm}^{ij}, \tag{95.2}$$

причем

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i \mathbf{e}_i. \tag{95.3}$$

Мы хотим в записи закона преобразования ограничиться лишь матрицей $A_{i'}^i$ и не прибегать к обратной матрице $A_i^{i'}$. Для этого умножаем соотношение (95.2) почленно на $A_{i'}^p A_{j'}^q$ и производим суммирование по i', j'. В правой части получим:

$$A_{i'}^p A_i^{i'} = \delta_i^p, \quad A_{j'}^q A_j^{j'} = \delta_j^q,$$

так что

$$A_{i'}^p A_{j'}^q U_{l'm'}^{i'j'} = \delta_i^p \delta_j^q A_{l'}^l A_{m'}^m U_{lm}^{ij} = A_{l'}^l A_{m'}^m U_{lm}^{pq};$$

и окончательно, меняя для симметрии обозначения индексов суммирования i', j' на p', q', получим:

$$A_{p'}^p A_{q'}^q U_{l'm'}^{p'q'} = A_{l'}^l A_{m'}^m U_{lm}^{pq}. \tag{95.4}$$

В результате закон преобразования (95.2) записан с участием лишь одной матрицы $A_{i'}^i$, зато в виде, не разрешенном ни относительно старых, ни относительно новых координат тензора. Ясно, что, обратно, соотношения (95.4) влекут за собой (95.2); чтобы убедиться в этом, достаточно умножить (95.4) почленно на $A_p^{i'} A_q^{j'}$ и произвести в левой части свертывание по p, q.

Для примера мы взяли тензор, два раза ковариантный и два раза контравариантный; но запись (95.4) применяется очевидным образом и для тензора произвольного строения: в левой части пишется по одному множителю вида $A_{i'}^i$ для каждого верхнего, а в правой — для каждого нижнего индекса.

Возвращаясь к нашей задаче, обозначим через $\tilde{U}_{rs}^{pq}$ координаты тензора U_{lm}^{ij} относительно репера $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Когда мы переходим к этому реперу от локального репера $\{M, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$

согласно (95.1), роль матрицы $A^i_{i'}$ играет матрица ξ^i_k. Поэтому закон преобразования (95.4) принимает вид

$$\xi^i_p \xi^j_q \tilde{U}^{pq}_{rs} = \xi^l_r \xi^m_s U^{ij}_{lm}. \tag{95.5}$$

Так связаны координаты тензора U^{ij}_{lm} в координатной системе x^i с его координатами $\tilde{U}^{pq}_{rs}$ относительно произвольного репера $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ в касательном пространстве A_n.

Допустим теперь, что векторы этого репера параллельно переносятся, в то время как точка M описывает некоторый путь в L_n. Мы будем говорить, что тензор U^{ij}_{lm} параллельно переносится вдоль данного пути, если он задается в каждой точке этого пути и притом так, что его координаты $\tilde{U}^{ij}_{lm}$ относительно параллельно переносимого репера сохраняют постоянные значения:

$$\tilde{U}^{pq}_{rs} = \text{const}. \tag{95.6}$$

Это определение параллельного перенесения тензора не зависит от выбора параллельно переносимого репера $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$. В самом деле, пусть $\{M, \xi_{1'}, \ldots, \xi_{n'}\}$ — другой репер, параллельно переносимый вдоль того же пути в L_n. Разлагая векторы $\xi_{i'}$ по векторам ξ_i,

$$\xi_{i'} = A^i_{i'} \xi_i,$$

мы замечаем, что $A^i_{i'}$ остаются постоянными, так как в процессе параллельного перенесения линейные зависимости между векторами сохраняются (§ 89). Поэтому, записывая закон преобразования (95.2), убеждаемся, что $\tilde{U}^{p'q'}_{r's'}$ остаются постоянными вместе с $\tilde{U}^{pq}_{rs}$ и $A^i_{i'}$, т. е. наш тензор имеет постоянные (хотя и различные) координаты относительно *любого* параллельно переносимого вдоль данного пути репера.

Таким образом, определенное нами параллельное перенесение тензора совершается вдоль данного пути строго единственным образом. В частности, если в данной точке тензор был равен нулю, то в результате параллельного перенесения он, очевидно, остается равным нулю.

Теперь выясним, как записать закон параллельного перенесения тензора, заданного своими координатами U^{ij}_{lm} *относительно координатной системы* x^i. Для этой цели дифференцируем почленно соотношение (95.5) вдоль рассматриваемого пути, учитывая постоянство $\tilde{U}^{pq}_{rs}$. Получим:

$$d\xi^i_p \xi^j_q \tilde{U}^{pq}_{rs} + \xi^i_p \, d\xi^j_q \tilde{U}^{pq}_{rs} = d\xi^l_r \xi^m_s U^{ij}_{lm} + \xi^l_r \, d\xi^m_s U^{ij}_{lm} + \xi^l_r \xi^m_s \, dU^{ij}_{lm}. \tag{95.7}$$

Так как все векторы репера переносятся параллельно, то

$$d\xi_p^i = -\Gamma_{kt}^i \xi_p^t \, dx^k. \tag{95.8}$$

Прежде чем вставлять это выражение для $d\xi_p^i$ в предыдущую формулу, можно сделать предположение, сильно упрощающее выкладку. Предположим, что параллельно переносимый репер $\{M, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ выбран так, что *в той точке пути*, в которой в данный момент производится дифференцирование, он совпадает с локальным репером $\{M, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Мы знаем, что на параллельном перенесении тензора это не отразится. Тогда *в данной точке в силу совпадения реперов* мы имеем $\tilde{U}_{rs}^{ij} = U_{rs}^{ij}$; кроме того, как видно из (95.1), $\xi_k^i = \delta_k^i$, и (95.8) принимает вид

$$d\xi_p^i = -\Gamma_{kp}^i \, dx^k. \tag{95.9}$$

Аналогичные упрощения за счет $\xi_k^i = \delta_k^i$ произойдут и в (95.7), так что (учитывая $\tilde{U}_{rs}^{ij} = U_{rs}^{ij}$) получим:

$$d\xi_p^i \, U_{rs}^{pj} + d\xi_q^j U_{rs}^{iq} = d\xi_r^l U_{ls}^{ij} + d\xi_s^m U_{rm}^{ij} + dU_{rs}^{ij}.$$

Заменяем здесь $d\xi_p^i$ и т. д. согласно (95.9). Это дает нам

$$-\Gamma_{kp}^i \, dx^k U_{rs}^{pj} - \Gamma_{kq}^j \, dx^k U_{rs}^{iq} = -\Gamma_{kr}^l \, dx^k U_{ls}^{ij} - \Gamma_{ks}^m \, dx^k U_{rm}^{ij} + dU_{rs}^{ij}.$$

Выражая отсюда dU_{rs}^{ij}, вынося dx^k за скобку и обозначая все индексы суммирования (кроме k) через p, получим окончательно:

$$dU_{rs}^{ij} = \{-\Gamma_{kp}^i U_{rs}^{pj} - \Gamma_{kp}^j U_{rs}^{ip} + \Gamma_{kr}^p U_{ps}^{ij} + \Gamma_{ks}^p U_{rp}^{ij}\} \, dx^k. \tag{95.10}$$

Мы получили дифференциалы координат параллельно переносимого вдоль данного пути тензора U_{rs}^{ij}, выраженные через сами координаты этого тензора и, конечно, через дифференциалы координат точки и объект связности. Координаты тензора берутся теперь относительно лишь координатной системы x^i (т. е. локального репера); параллельно переносимый репер сыграл свою роль и больше ни в чем не участвует.

Запутанность полученной формулы лишь кажущаяся; в действительности она составлена строго закономерно и по простой схеме. А именно, каждому верхнему индексу тензора (например, i) в правой части формулы отвечает определенный член (в данном случае первый), составленный следующим образом: данный индекс переходит на объект связности, причем на освободившееся место ставится индекс суммирования (в данном случае p), который свертывается со вторым индексом внизу у объекта связности. Остальные индексы у тензора переписываются без изменения. Первый индекс у объекта связности (в нашем случае k) всегда свертывается с дифференциалами координат точки. Все выражение берется с обратным знаком. В нашем примере тензор имеет два верхних индекса, и в правой части формулы мы получаем два отвечающих им по этому правилу члена. Но весь проделанный нами вывод дословно повторяется и для тензора с любым числом индексов наверху, причем в правой части формулы появляются составленные по указанному правилу члены по одному для каждого индекса.

Для каждого нижнего индекса (например, r) в правой части формулы также имеется соответствующий член (в данном случае третий), составленный по несколько иному правилу. Данный индекс переходит на объект связности на второе место внизу; на освободившееся место ставится индекс суммирования (в нашем случае p), который свертывается с верхним индексом объекта связности. Остальные индексы у тензора переписываются без изменения. Первый индекс у объекта связности по-прежнему свертывается с дифференциалами координат точки. Все выражение берется со своим знаком. В нашем случае мы имеем в правой части два члена такого типа соответственно двум нижним индексам. Но весь вывод повторяется и при любом числе нижних индексов. Поэтому на (95.10) нужно смотреть как на схему записи дифференциалов координат любого параллельно переносимого тензора.

Эта схема станет более отчетливой, если выделить два основных случая: когда параллельно переносимый тензор один раз контравариантный (U^i) и когда он один раз ковариантный (U_r). В первом случае в правой части формулы (95.10) мы помещаем лишь один член, отвечающий индексу i:

$$dU^i = -\Gamma^i_{kp} U^p \, dx^k. \tag{95.11}$$

Мы, как и следовало ожидать, вернулись к формуле параллельного перенесения вектора U^i.

Во втором случае в правой части формулы (95.10) нужно поместить лишь один член, отвечающий нижнему индексу r:

$$dU_r = \Gamma^p_{kr} U_p \, dx^k. \tag{95.12}$$

Такова формула параллельного перенесения один раз ковариантного тензора (ковектора). Если теперь вернуться к общей схеме (95.10), то можно сказать, что *для каждого верхнего индекса параллельно переносимого тензора в правой части формулы составляется член согласно* (95.11), *а для каждого нижнего индекса — согласно* (95.12), *в обоих случаях так, как если бы данный индекс был единственным; при этом нужно лишь приписывать каждый раз остальные индексы без каких-либо изменений по сравнению с левой частью.*

Таким образом, в общем случае формула (95.10) будет иметь вид

$$dU^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} = \{ -\Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} - \\ -\Gamma^{i_2}_{kp} U^{i_1 p \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} - \ldots - \Gamma^{i_u}_{kp} U^{i_1 i_2 \ldots p}_{r_1 r_2 \ldots r_v} + \Gamma^{p}_{kr_1} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{p r_2 \ldots r_v} + \\ + \Gamma^{p}_{kr_2} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 p \ldots r_v} + \ldots + \Gamma^{p}_{kr_v} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots p} \} \, dx^k. \quad (95.13)$$

В частности, когда тензор лишен индексов, т. е. представляет собой просто инвариант U, в правой части не будет ни одного члена, и формула принимает вид

$$dU = 0,$$

т. е.

$$U = \text{const}.$$

Параллельное перенесение инварианта, как и следовало ожидать, сохраняет его численное значение.

§ 96. Абсолютный дифференциал и абсолютная производная

Пусть точка M в пространстве аффинной связности L_n пробегает некоторый путь

$$x^i = x^i(t), \quad (96.1)$$

причем в каждой точке этого пути задан тензор определенного строения, например U^{ij}_{rs}:

$$U^{ij}_{rs} = U^{ij}_{rs}(t). \quad (96.2)$$

Другими словами, нам задано тензорное поле, по крайней мере, вдоль данного пути. Как обычно, функциональные зависимости предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Переходя из данной точки пути t в его бесконечно близкую точку $t + dt$, мы находим в ней тензор поля с координатами

$$U^{ij}_{rs}(t + dt) \approx U^{ij}_{rs}(t) + dU^{ij}_{rs}(t). \quad (96.3)$$

Здесь мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка относительно dt, заменив приращения функций $U^{ij}_{rs}(t)$ их дифференциалами. С той же степенью точности мы будем вести выкладку и далее. Однако, желая оценить, насколько изменился тензор поля $U^{ij}_{rs}(t)$ при переходе из точки t в точку $t + dt$, мы не должны ориентироваться на дифференциалы его координат $dU^{ij}_{rs}(t)$. В самом деле, U^{ij}_{rs} и $U^{ij}_{rs} + dU^{ij}_{rs}$ — это тензоры, заданные *в разных точках, именно* *в точках* t *и* $t+dt$, а значит, отнесенные к *разным локальным реперам*. При преобразовании координатной системы x^i эти локальные реперы испытывают преобразование вида (82.11):

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}_i,$$

где матрицы $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ *вычислены в разных точках и, следовательно, являются различными*. Поэтому не имеет смысла сравнивать между собой тензоры $U^{ij}_{rs}(t)$ и $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, отнесенные к различным и различно преобразующимся реперам. Другое дело, если мы предварительно перенесем параллельно тензор $U^{ij}_{rs}(t+dt)$ в ту же точку t, в которой задан тензор $U^{ij}_{rs}(t)$. Тогда оба тензора будут заданы в общей точке t, а значит, отнесены к общему локальному реперу. Вычитание из первого тензора второго будет иметь инвариантный смысл и даст нам снова тензор в точке t. Главную линейную часть этого тензора мы и назовем *абсолютным дифференциалом* $DU^{ij}_{rs}(t)$ тензора $U^{ij}_{rs}(t)$. Проделаем соответствующие выкладки.

Обозначим через $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ тензор $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, параллельно перенесенный из точки $t+dt$ в точку t. Это значит, что, обратно, $U^{ij}_{rs}(t+dt)$ получается параллельным перенесением $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ из точки t в точку $t+dt$. Пользуясь формулой (95.10), можно записать:

$$U^{ij}_{rs}(t+dt) \approx \\ \approx \tilde{U}^{ij}_{rs} + \{-\Gamma^i_{kp}\tilde{U}^{pj}_{rs} - \Gamma^j_{kp}\tilde{U}^{ip}_{rs} + \Gamma^p_{kr}\tilde{U}^{ij}_{ps} + \Gamma^p_{ks}\tilde{U}^{ij}_{rp}\}\,dx^k. \tag{96.4}$$

Мы поставили знак приближенного равенства, так как формула (95.10) дает нам лишь дифференциалы, а не приращения координат параллельно переносимого тензора, так что в равенстве допускается ошибка на бесконечно малые высшего порядка.

Как видно из (96.4), $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ отличается от $U^{ij}_{rs}(t+dt)$, а следовательно, и от $U^{ij}_{rs}(t)$, на бесконечно малую величину. Поэтому с принятой степенью точности можно заменить в фигурной скобке $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ через $U^{ij}_{rs}(t)$. Действительно, фигурные скобки множатся еще на dx^k, так что ошибка получается бесконечно малой высшего порядка. По той же причине можно заменить $U^{ij}_{rs}(t+dt)$ через $U^{ij}_{rs}(t)+dU^{ij}_{rs}(t)$. Выражая теперь $\tilde{U}^{ij}_{rs}$ из (96.4), получаем

$$\tilde{U}^{ij}_{rs} \approx U^{ij}_{rs}(t) + dU^{ij}_{rs}(t) + \\ + \{\Gamma^i_{kp}U^{pj}_{rs}(t) + \Gamma^j_{kp}U^{ip}_{rs}(t) - \Gamma^p_{kr}U^{ij}_{ps}(t) - \Gamma^p_{ks}U^{ij}_{rp}(t)\}\,dx^k. \tag{96.5}$$

Мы называем абсолютным (ковариантным) дифференциалом $DU_{rs}^{ij}(t)$ *главную линейную часть разности* $\tilde{U}_{rs}^{ij}-U_{rs}^{ij}(t)$ *между тензором* $U_{rs}^{ij}(t+dt)$, *параллельно перенесенным из точки* $t+dt$ *в точку* t, *и тензором* $U_{rs}^{ij}(t)$.

Очевидно, DU_{rs}^{ij} совпадает с тем выражением, которое в правой части (96.5) добавляется к $U_{rs}^{ij}(t)$. Действительно, из (96.5) видно, что это выражение лишь на бесконечно малую высшего порядка отличается от разности $\tilde{U}_{rs}^{ij}-U_{rs}^{ij}(t)$ (т. е. составляет главную часть этой разности) и в то же время линейно зависит от dt (вместе с $dU_{rs}^{ij}(t)$ и $dx^k(t)$). Итак,

$$DU_{rs}^{ij}(t)=dU_{rs}^{ij}(t)+$$
$$+\{\Gamma_{kp}^{i}U_{rs}^{pj}(t)+\Gamma_{kp}^{j}U_{rs}^{ip}(t)-\Gamma_{kr}^{p}U_{ps}^{ij}(t)-\Gamma_{ks}^{p}U_{rp}^{ij}(t)\}\,dx^k. \quad (96.6)$$

Совершенно аналогично мы приходим к формуле абсолютного дифференциала и в случае самого общего тензора:

$$DU_{r_1r_2\ldots r_v}^{i_1i_2\ldots i_u}=dU_{r_1r_2\ldots r_v}^{i_1i_2\ldots i_u}+\{\Gamma_{kp}^{i_1}U_{r_1r_2\ldots r_v}^{pi_2\ldots i_u}+$$
$$+\Gamma_{kp}^{i_2}U_{r_1r_2\ldots r_v}^{i_1p\ldots i_u}+\ldots+\Gamma_{kp}^{i_u}U_{r_1r_2\ldots r_v}^{i_1i_2\ldots p}-\Gamma_{kr_1}^{p}U_{pr_2\ldots r_v}^{i_1i_2\ldots i_u}-$$
$$-\Gamma_{kr_2}^{p}U_{r_1p\ldots r_v}^{i_1i_2\ldots i_u}-\ldots-\Gamma_{kr_v}^{p}U_{r_1r_2\ldots p}^{i_1i_2\ldots i_u}\}\,dx^k. \quad (96.7)$$

Здесь $U_{r_1r_2\ldots r_v}^{i_1i_2\ldots i_u}$ — тензорное поле, заданное, по крайней мере, вдоль рассматриваемого пути. При выводе нужно воспользоваться конечно, вместо формулы параллельного пересечения (95.10) общей формулой (95.13).

Таким образом, абсолютный дифференциал тензора (тоже тензор) имеет координаты, которые вычисляются следующим образом: берутся дифференциалы координат данного тензора и к ним приписываются дополнительные члены с участием объекта связности, по одному для каждого индекса тензора. Закон составления этих членов ясен из формулы (96.7).

Впрочем, он был описан и словесно в предыдущем параграфе в связи с формулой параллельного перенесения тензора. Это описание вполне применимо и теперь, лишь с изменением знаков всех членов на обратные.

В частном случае, когда тензор U лишен индексов и является просто инвариантом, так что вдоль пути задано скалярное поле $U(t)$, дополнительные члены в (96.7) отсутствуют, и абсолютный дифференциал совпадает с обыкновенным:

$$DU(t)=dU(t). \quad (96.8)$$

Для тензора, один раз контравариантного, формула (96.7) принимает

вид

$$DU^i(t) = dU^i(t) + \Gamma^i_{kp} U^p(t)\, dx^k. \tag{96.9}$$

Аналогичным образом для тензора, один раз ковариантного:

$$DU_r(t) = dU_r(t) - \Gamma^p_{kr}\, U_p(t)\, dx^k. \tag{96.10}$$

Можно сказать, что в общем случае формулы (96.7) для каждого верхнего индекса составляется дополнительный член по образцу (96.9) и для каждого нижнего — по образцу (96.10), причем каждый раз все остальные индексы тензора переписываются без изменений.

Параллельное перенесение векторов, а следовательно, и тензоров, имеющее место в пространстве аффинной связности L_n, обладает инвариантностью относительно выбора координатной системы. Поэтому наше построение абсолютного дифференциала $DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$, проведенное с помощью параллельного перенесения тензоров, также обладает инвариантностью, т. е. приводит всегда к одному и тому же тензору, независимо от той координатной системы x^i, в которой проводились выкладки.

Но для желающих можно проверить этот факт и прямым подсчетом, исходя непосредственно из формулы (96.7).

Мы хотим показать, что величины $DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$, *составленные по формуле* (96.7), *преобразуются по тензорному закону при переходе от координатной системы* x^i *к* $x^{i'}$.

Для этой цели запишем закон преобразования тензора $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$:

$$U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}} \cdots \frac{\partial x^{i_u}}{\partial x^{i'_u}} \frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial x^{r'_2}}{\partial x^{r_2}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} U^{i'_1 i'_2 \ldots i'_u}_{r'_1 r'_2 \ldots r'_v}. \tag{96.11}$$

Мы пишем закон преобразования для перехода от штрихованных координат к нештрихованным, что ничего не меняет по существу, а для выкладки будет удобнее.

Составим теперь $DU^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v}$ по формуле (96.7), причем вычисляем дифференциал $dU^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v}$, используя выражение (96.11).

Все полученные при этом члены разобьем на три группы. Во-первых, запишем член, полученный при дифференцировании множителя $U^{i'_1 i'_2 \ldots i'_u}_{r'_1 r'_2 \ldots r'_v}$ в (96.11):

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\, dU^{i'_1 \ldots i'_u}_{r'_1 \ldots r'_v}. \tag{96.12}$$

Во-вторых, для каждого верхнего индекса, например, i_1, мы выделяем член, полученный дифференцированием соответствующего множителя в (96.11), в данном случае $\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$, причем этот член объединяем с дополнительным членом в (96.7), отвечающим этому же индексу. Получим для i_1:

$$\left(d\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\right)\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}}\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}U^{i'_1\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}+\Gamma^{i_1}_{kp}U^{p\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}\,dx^k \tag{96.13}$$

и аналогично для каждого верхнего индекса. В-третьих, поступая совершенно так же и с нижними индексами, получаем, например, для r_1, выражение

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\left(d\frac{\partial x^{r'_1}}{\partial x^{r_1}}\right)\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}U^{i'_1\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}-\Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1\ldots i_u}_{p\ldots r_v} \tag{96.14}$$

и аналогично для каждого нижнего индекса. Очевидно, выражение (96.12), сложенное с выражениями (96.13) для всех верхних индексов и с выражениями (96.14) для всех нижних индексов, дает нам $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$. Теперь мы должны заняться преобразованием выражений (96.13) и (96.14), *пользуясь законом преобразования* Γ^k_{ij}. В этом и будет заключаться принципиальная часть нашей выкладки.

Перепишем (96.13), заменяя в первом члене $d\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$ через $\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}\partial x^{k'}}dx^{k'}$, а во втором члене dx^k через $\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}dx^{k'}$. Кроме того, заменяем $U^{p\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ по формуле (96.11), причем индекс суммирования i'_1 в первом множителе обозначаем p'. Получим:

$$\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}}\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\left(\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial x^{p'}\partial x^{k'}}+\Gamma^{i_1}_{kp}\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)U^{p'\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}\,dx^{k'}.$$

Пользуясь теперь законом преобразования Γ^k_{ij} в виде (89.7), мы заменяем скобку выражением $\Gamma^{i'_1}_{p'k'}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}$, и окончательно (96.13) принимает вид

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i'_2}}\cdots\frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}}\Gamma^{i'_1}_{p'k'}U^{p'\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}\,dx^{k'}. \tag{96.15}$$

Аналогичным образом преобразуем выражение (96.14), заменяя $d\,\dfrac{\partial x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}}$ через $\dfrac{\partial^2 x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}\partial x^k}dx^k$, обозначая индекс суммирования r_1' через p' и выражая $U^{i_1\ldots i_u}_{p\ldots r_v}$ согласно (96.11). Получим:

$$\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_u}}{\partial x^{i_u'}}\frac{\partial x^{r_2'}}{\partial x^{r_2}}\cdots\frac{\partial x^{r_v'}}{\partial x^{r_v}}\left(\frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^{r_1}\partial x^k}-\Gamma^p_{kr_1}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p}\right)U^{i_1'\ldots i_u'}_{p'\ldots r_v'}dx^k.$$

Множители перед скобкой те же, что и в (96.11), с пропуском лишь $\dfrac{\partial x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}}$. Пользуясь законом преобразования Γ^k_{ij} в форме (89.8), мы можем заменить скобку через $-\Gamma^{p'}_{k'r_1'}\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}}$, после чего получаем окончательно:

$$-\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{r_v'}}{\partial x^{r_v}}\Gamma^{p'}_{k'r_1'}U^{i_1'\ldots i_u'}_{p'\ldots r_v'}dx^{k'}. \tag{96.16}$$

Здесь $dx^{k'}$ появился в результате объединения множителей dx^k и $\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ с последующим суммированием по k. Множители перед $\Gamma^{p'}_{k'r_1'}$ теперь те же, что и в (96.11), так как имевшийся пробел заполнен множителем $\dfrac{\partial x^{r_1'}}{\partial x^{r_1}}$. По самому ходу нашей выкладки выражение (96.12), выражения (96.15) для каждого верхнего индекса и выражения (96.16) для каждого нижнего индекса дают те слагаемые, на которые распался $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$. С другой стороны, вынося за скобки общие во всех этих выражениях множители $\dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\dfrac{\partial x^{r_v'}}{\partial x^{r_v}}$, мы получаем в скобках $DU^{i_1'\ldots i_u'}_{r_1'\ldots r_v'}$, составленный в точности по формуле (96.7) (только все индексы штрихованные). В результате

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}=\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{r_v'}}{\partial x^{r_v}}DU^{i_1'\ldots i_u'}_{r_1'\ldots r_v'}. \tag{96.17}$$

Это значит, что тензорный закон преобразования (96.11) в точности переносится и на абсолютный дифференциал рассматриваемого тензора. *Абсолютный дифференциал тензора представляет собой, таким образом, тензор того же строения.*

Мы рассматривали до сих пор тензорное поле, заданное вдоль некоторого пути, и абсолютный дифференциал $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ брали вдоль этого пути. Если тензорное поле задано во всем пространстве или, по крайней мере, в некоторой n-мерной его области, то абсолютный дифференциал тензора можно брать вдоль любого пути в этой области. При этом, так как координаты тензора в данной координатной системе будут функциями точки

$$U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}(x^1, \ldots, x^n), \tag{96.18}$$

то

$$dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = \frac{\partial U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}}{\partial x^k}\,dx^k \tag{96.19}$$

и основная формула (96.7) принимает вид

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = \nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}\,dx^k, \tag{96.20}$$

где через $\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ обозначены коэффициенты при dx^k в правой части (96.7) после подстановки туда $dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ из (96.19):

$$\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = \frac{\partial}{\partial x^k} U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} + \Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2\ldots i_u}_{r_1 r_2\ldots r_v} + \ldots + \Gamma^{i_u}_{kp} U^{i_1 i_2\ldots p}_{r_1 r_2\ldots r_v} -$$
$$- \Gamma^{p}_{k r_1} U^{i_1 i_2\ldots i_u}_{p r_2\ldots r_v} - \ldots - \Gamma^{p}_{k r_v} U^{i_1 i_2\ldots i_u}_{r_1 r_2\ldots p}. \tag{96.21}$$

Эти коэффициенты образуют тензор, имеющий один дополнительный ковариантный индекс сравнительно с тензором $U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ (индекс дифференцирования k). В самом деле, вставим в (96.17) разложение абсолютного дифференциала (96.20)) как в старой, так и в новой координатной системе. Получим:

$$\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}\,dx^k = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} \nabla_{k'} U^{i'_1\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v}\,dx^{k'}.$$

Вставим в правую часть $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,dx^k$ вместо $dx^{k'}$ и сравним коэффициенты при dx^k в левой и правой частях. Так как dx^k сейчас у нас произвольны, то равенство должно удовлетворяться тождественно относительно dx^k, и эти коэффициенты должны быть равны. Получаем:

$$\nabla_k U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{r'_v}}{\partial x^{r_v}} \nabla_{k'} U^{i'_1\ldots i'_u}_{r'_1\ldots r'_v} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}. \tag{96.22}$$

Легко заметить, что для $\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ имеет место тензорный закон преобразования при контравариантных индексах $i_1, \ldots, i_u$ и ковариантных индексах $k, r_1, \ldots, r_v$. Тензор $\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ называется *абсолютной (или ковариантной) производной* тензора $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$. Впрочем, мы иногда будем называть *абсолютными производными* и отдельные координаты тензора $\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$. Очевидно, абсолютные производные тензора $U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$ играют по отношению к его абсолютному дифференциалу ту же роль, как обыкновенные частные производные по отношению к обыкновенному полному дифференциалу.

Рассмотрим частные случаи. Если нам дано скалярное поле $U(x^1, \ldots, x^n)$ (тензор лишен индексов), то в (96.21) дополнительные члены отсутствуют, и мы получаем абсолютную производную

$$\nabla_k U = \frac{\partial U}{\partial x^k}. \tag{96.23}$$

Конечно, легко проверить и непосредственно, что $\frac{\partial U}{\partial x^k}$ образуют один раз ковариантный тензор. Такой тензор мы будем называть *градиентом скалярного поля* U.

Далее, пусть дано поле один раз контравариантного тензора U^i. Тогда

$$\nabla_k U^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp} U^p, \tag{96.24}$$

абсолютная производная представляет собой тензор, один раз ковариантный и один раз контравариантный.

Наконец, пусть дано поле одноковариантного тензора U_r. Тогда

$$\nabla_k U_r = \frac{\partial U_r}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kr} U_p. \tag{96.25}$$

Мы получаем два раза ковариантный тензор. Если тензор U_r — градиент, $U_r = \nabla_r U = \frac{\partial U}{\partial x^r}$, то получаем:

$$\nabla_k \nabla_r U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^k \, \partial x^r} - \Gamma^p_{kr} \frac{\partial U}{\partial x^p}. \tag{96.26}$$

Если пространство аффинной связности L_n является просто аффинным пространством A_n (в частности, евклидовым пространством R_n), то *в аффинной координатной системе* все $\Gamma^k_{ij} = 0$, дополнительные члены в формулах (96.7), (96.21) пропадают, и мы имеем:

$$DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = dU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}, \tag{96.27}$$

$$\nabla_k U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = \frac{\partial}{\partial x^k} U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}. \tag{96.28}$$

Другими словами, абсолютный дифференциал тензора совпадает с обыкновенным дифференциалом, а абсолютные производные — с обыкновенными частными производными. В частности, пусть нам задано вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ поле тензора $\xi^i(t)$, а следовательно, и векторное поле $\xi(t) = \xi^i(t)\,\mathbf{e}_i$. Тогда абсолютный дифференциал $D\xi^i$ отвечает вектору

$$D\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i = d\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i = d\,(\xi^i(t)\,\mathbf{e}_i) = d\xi(t).$$

Таким образом, *абсолютное дифференцирование тензора* ξ^i *означает дифференцирование соответствующего вектора* ξ *в прямом геометрическом смысле этого слова*:

$$d\xi(t) = \xi'(t)\,dt, \quad \text{где} \quad \xi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\xi(t)}{\Delta t}.$$

Результат был выведен в аффинных координатах в A_n (или в R_n), но в силу тензорного характера абсолютного дифференциала $D\xi^i$ он дает координаты того же вектора $d\xi$ и в любой криволинейной системе координат (в локальном репере, § 76).

Не нужно забывать, что упрощенные формулы (96.27), (96.28) верны лишь в аффинных координатах. Если рассматривать аффинное пространство A_n *в криволинейных координатах*, то приходится пользоваться общими формулами (96.7), (96.21), так как Γ^k_{ij} отличны от нуля.

§ 97. Техника абсолютного дифференцирования

Чтобы свободно обращаться с операцией абсолютного дифференцирования, мы должны установить правила, по которым она комбинируется с операциями тензорной алгебры. Другими словами, мы должны дать правила, по которым мы сможем находить абсолютные дифференциалы от суммы тензоров, от произведения тензоров и от свернутого тензора. Говоря о тензорах, мы имеем в виду тензорные поля, заданные, по крайней мере, вдоль того пути, по которому берется абсолютный дифференциал.

Пусть тензор $W^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$ представляет собой сумму двух или нескольких тензоров того же строения

$$W^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v} = U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v} + V^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}. \tag{97.1}$$

Тогда

$$DW^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v} = DU^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v} + DV^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}. \tag{97.2}$$

Действительно, выпишем формулу (96.7) для тензора $U^{i_1 \dots i_u}_{r_1 \dots r_v}$ и совершенно такую же формулу для тензора $V^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$:

$$DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = dU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + \left\{ \Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} + \ldots - \Gamma^{p}_{k r_1} U^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{p r_2 \ldots r_v} - \ldots \right\} dx^k,$$

$$DV^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = dV^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + \left\{ \Gamma^{i_1}_{kp} V^{p i_2 \ldots i_u}_{r_1 r_2 \ldots r_v} + \ldots - \Gamma^{p}_{k r_1} V^{i_1 i_2 \ldots i_u}_{p r_2 \ldots r_v} - \ldots \right\} dx^k.$$

Складываем эти формулы почленно, объединяя соответствующие члены их правых частей и заменяя везде сумму тензоров U и V через W согласно (97.1). Кроме того, учитываем, что

$$dU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + dV^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = dW^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}.$$

В результате в правой части мы получаем для W в точности такое же выражение, какие были выписаны для U и V, т. е. $DW^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}$. Итак,

$$DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + DV^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} = DW^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v},$$

а это нам и требовалось доказать. Мы приходим к правилу дифференцирования суммы тензоров:

$$D\left(U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + V^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}\right) = DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} + DV^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v}. \tag{97.3}$$

Пусть теперь тензор $W^{i_1 \ldots i_u j_1 \ldots j_x}_{r_1 \ldots r_v s_1 \ldots s_y}$ представляет собой произведение двух тензоров:

$$W^{i_1 \ldots i_u j_1 \ldots j_x}_{r_1 \ldots r_v s_1 \ldots s_y} = U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} V^{j_1 \ldots j_x}_{s_1 \ldots s_y}. \tag{97.4}$$

Тогда

$$DW^{i_1 \ldots i_u j_1 \ldots j_x}_{r_1 \ldots r_v s_1 \ldots s_y} = DU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} V^{j_1 \ldots j_x}_{s_1 \ldots s_y} + U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} DV^{j_1 \ldots j_x}_{s_1 \ldots s_y}. \tag{97.5}$$

Другими словами, *абсолютный дифференциал произведения тензоров получается по обычному правилу: абсолютный дифференциал первого множителя, умноженный на второй множитель, плюс первый множитель, умноженный на абсолютный дифференциал второго.* При этом существен именно такой порядок перемножения. В формуле он обеспечен расстановкой индексов (в каком же порядке перемножать *координаты* тензоров, например, $DU^{i_1 \ldots}_{r \ldots}$ и $V^{j_1 \ldots}_{s_1 \ldots}$, конечно, безразлично).

Переходим к выводу формулы (97.5). Запишем развернутое выражение абсолютного дифференциала в ее левой части. В него войдет прежде всего обыкновенный дифференциал

$$dW^{i_1 \ldots j_x}_{r_1 \ldots s_y} = dU^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} V^{j_1 \ldots j_x}_{s_1 \ldots s_y} + U^{i_1 \ldots i_u}_{r_1 \ldots r_v} dV^{j_1 \ldots j_x}_{s_1 \ldots s_y}, \tag{97.6}$$

а затем дополнительные члены, по одному для каждого индекса. *Объединим первый член правой части* (97.6) *с теми дополнительными членами, которые отвечают индексам* $i_1 \ldots i_u, r_1 \ldots r_v$, *т. е. индексам, «снятым» с первого множителя.* Эти дополнительные члены будут составлены по схеме (96.7). Получим:

$$dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y} +$$
$$+ \left(\Gamma^{i_1}_{kp} W^{p i_2\ldots i_u j_1\ldots j_x}_{r_1 r_2\ldots r_v s_1\ldots s_y} + \ldots - \Gamma^{p}_{k r_1} W^{i_1 i_2\ldots i_u j_1\ldots j_x}_{p r_2\ldots r_v s_1\ldots s_y} - \ldots\right) dx^k.$$

Члены в скобке составлены по очереди для индексов $i_1, \ldots, i_u$, $r_1, \ldots, r_v$, так что индексы $j_1, \ldots, j_x$, $s_1, \ldots, s_y$ во всех случаях переписываются без изменения. Заменяя W произведением U на V согласно (97.4) и вынося за скобку общий для всех членов множитель $V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}$, получим:

$$\left\{dU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} + \left(\Gamma^{i_1}_{kp} U^{p i_2\ldots i_u}_{r_1 r_2\ldots r_v} + \ldots - \Gamma^{p}_{k r_1} U^{i_1 i_2\ldots i_u}_{p r_2\ldots r_v} - \ldots\right) dx^k\right\} V^{j_1\ldots j_x}_{s_1\ldots s_y}.$$

Но в фигурной скобке стоит, очевидно, $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$, так что мы получаем первый член правой части в (97.5).

Совершенно аналогично, *объединяя второй член правой части* (97.6) *с теми дополнительными членами, которые отвечают индексам* $j_1, \ldots, j_x$, $s_1, \ldots, s_y$, мы получим второй член правой части (97.5). Этим формула (97.5) доказана.

Абсолютный дифференциал произведения любого числа тензоров вычисляется следующим образом: множители этого произведения поочередно заменяются своими абсолютными дифференциалами с сохранением прежнего места в произведении, и полученные результаты складываются. Это легко доказать, переходя от N к $N+1$ (где N — число множителей в произведении) путем применения формулы (97.5).

Теперь переходим к абсолютному дифференцированию *свернутого тензора.* Рассмотрим тензор $U^{i_2\ldots i_u}_{r_2\ldots r_v}$, полученный свертыванием тензора $U^{i_1 i_2\ldots i_u}_{r_1 r_2\ldots r_v}$, например, по первому верхнему и первому нижнему индексам:

$$U^{i_2\ldots i_u}_{r_2\ldots r_v} = U^{s i_2\ldots i_u}_{s r_2\ldots r_v}.$$

Запись абсолютного дифференциала от свернутого тензора $DU^{s i_2\ldots i_u}_{s r_2\ldots r_v}$ является, в сущности, двусмысленной: неясно, произведено ли здесь сначала свертывание, а от результата взят абсолютный дифференциал, или сначала взят абсолютный дифференциал $DU^{i_1 i_2\ldots i_u}_{r_1 r_2\ldots r_v}$, а затем произведено свертывание по индексам i_1, r_1. Мы покажем, однако, что *оба истолкования приводят к одному и тому же выражению, т. е. операция свертывания перестановочна с операцией абсолютного дифференцирования.* В этом и будет заключаться наш результат.

Начнем с вычисления $DU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}$, истолкованного во втором смысле. Тогда мы должны положить в формуле (96.7) $i_1=r_1=s$ и по s произвести суммирование. Покажем, что при этом в правой части взаимно уничтожатся дополнительные члены, отвечающие индексам i_1 и r_1. В самом деле, эти члены суть

$$\left(\Gamma^{i_1}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}-\Gamma^{p}_{kr_1}U^{i_1i_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}\right)dx^k,$$

а после того как мы положим $i_1=r_1=s$, они примут вид

$$\left(\Gamma^{s}_{kp}U^{pi_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}-\Gamma^{p}_{ks}U^{si_2\ldots i_u}_{pr_2\ldots r_v}\right)dx^k,$$

т. е. взаимно уничтожаются, так как в скобке уменьшаемое равно вычитаемому (разница только в обозначениях индексов суммирования: p вместо s, и наоборот).

В результате формула (96.7) принимает вид

$$DU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}=dU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}+\left\{\Gamma^{i_2}_{kp}U^{sp\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}+\ldots+\Gamma^{i_u}_{kp}U^{si_2\ldots p}_{sr_2\ldots r_v}-\right.$$
$$\left.-\Gamma^{p}_{kr_2}U^{si_2\ldots i_u}_{sp\ldots r_v}-\ldots-\Gamma^{p}_{kr_v}U^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots p}\right\}dx^k.$$

В левой части мы произвели свертывание в абсолютном дифференциале $DU^{i_1i_2\ldots i_u}_{r_1r_2\ldots r_v}$. Присмотревшись же к правой части, мы замечаем, что она представляет собой абсолютный дифференциал от свернутого тензора $U^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}$, составленный по общей схеме (96.7). При этом индекс s, конечно, в счет не идет — по нему произведено суммирование — и индексами здесь служат лишь $i_2, \ldots, i_u$; $r_2, \ldots, r_v$. Им как раз и отвечают сохранившиеся дополнительные члены. Итак, полученное равенство можно переписать в виде

$$DU^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}=D\left(U^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}\right), \tag{97.7}$$

где в левой части свертывание производится после дифференцирования, а в правой — до дифференцирования, что отмечено скобкой. Итак, *оба истолкования записи* $D^{si_2\ldots i_u}_{sr_2\ldots r_v}$ *имеют по существу один и тот же смысл.* А это мы и хотели установить.

В технике абсолютного дифференцирования этот результат находит наибольшие применения в случае свертывания между собой двух или нескольких тензоров. Пусть, например, требуется найти $D(a_{ij}\xi^i\eta^j)$, где a_{ij}, ξ^p, η^q — некоторые тензорные поля. Абсолютный дифференциал берется здесь от выражения $a_{ij}\xi^i\eta^j$, которое нужно понимать, как произведение наших тензоров $a_{ij}\xi^p\eta^q$, свернутое затем по индексам i и p, j и q. Но свертывание можно выполнить и после абсолютного дифференцирования. В результате мы должны продифференцировать $a_{ij}\xi^p\eta^q$, как произведение тензоров, а затем выполнить свертывание. Получаем:

$$D(a_{ij}\xi^i\eta^j) = (Da_{ij})\,\xi^i\eta^j + a_{ij}(D\xi^i)\,\eta^j + a_{ij}\xi^i D\eta^j. \qquad (97.8)$$

Таким образом, правило дифференцирования произведения тензоров формально сохраняется и при наличии свертывания.

Заметим, что в левой части равенства, мы имеем (в нашем примере) абсолютный дифференциал от инварианта, так что с равным правом можем писать $d(a_{ij}\xi^i\eta^j)$.

Полученные нами в этом параграфе правила абсолютного дифференцирования (97.3), (97.5), (97.7) автоматически переносятся и на абсолютные производные простой заменой знака D на знак ∇_k.

Действительно, заменяя в любой из этих формул символы абсолютного дифференциала D через $dx^k\nabla_k$ согласно (96.20) и принимая во внимание, что дифференциалы dx^k совершенно произвольны, мы имеем право приравнять коэффициенты при dx^k в правой и левой частях формулы, а это и означает замену символа D символом ∇_k.

В заключение нужно вернуться *к связи между параллельным перенесением и абсолютным дифференцированием*. Мы начали с параллельного перенесения и на его основе установили абсолютное дифференцирование. Этот путь геометрически наиболее поучителен. Однако возможен обратный, хотя и весьма формальный, но зато короткий способ изложения, а именно, задавшись объектом связности Γ^i_{jk}, можно *определить* абсолютный дифференциал непосредственно формулой (96.7), показать его тензорный характер (так, как это было у нас сделано), установить технику абсолютного дифференцирования, а затем *определить* параллельное перенесение тензора $U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$ вдоль произвольного пути условием

$$DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v} = 0. \qquad (97.9)$$

Или подробно: *будем говорить, что тензор $U^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$, заданный в каждой точке некоторого пути, параллельно переносится вдоль него, если абсолютный дифференциал этого тензора при любом бесконечно малом смещении вдоль пути равен нулю.*

Легко видеть, что это *определение равносильно прежнему*. Действительно, приравнивая нулю абсолютный дифференциал $DU^{i_1\ldots i_u}_{r_1\ldots r_v}$, записанный согласно (96.7), мы возвращаемся к формуле параллельного перенесения (95.13). Этого, конечно, и нужно было ожидать, так как абсолютный дифференциал есть главная линейная часть приращения тензора *по сравнению со случаем его параллельного перенесения на данном бесконечно малом участке пути*. Поэтому обращение абсолютного дифференциала в нуль естественно означает параллельное перенесение тензора. В частности, приравнивая нулю $D\xi^i$:

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{kp}\xi^p\,dx^k,$$

мы получаем формулу параллельного перенесения вектора: $d\xi^i = -\Gamma^i_{kp}\xi^p\,dx^k$.

Формальная характеристика параллельного перенесения (97.9) удобна для разного рода выкладок. Так, например, легко можно получить теорему: *при одновременном параллельном перенесении нескольких тензоров по данному пути параллельно переносятся и тензоры, полученные из них операциями тензорной алгебры.*

В самом деле, пусть, например,

$$W^{ijk}_{rs} = U^{ij}_r V^k_s, \tag{97.10}$$

причем тензоры U, V параллельно переносятся вдоль данного пути. Это означает, что

$$DU^{ij}_r = 0, \quad DV^k_s = 0.$$

Отсюда следует:

$$D(U^{ij}_r V^k_s) = DU^{ij}_r \cdot V^k_s + U^{ij}_r \cdot DV^k_s = 0,$$

т. е. произведение тензоров $U^{ij}_r V^k_s$ тоже переносится параллельно. Аналогичным образом легко показать, что параллельно переносятся и суммы параллельно переносимых тензоров и тензоры, полученные их свертыванием.

Конечно, эти теоремы нетрудно получить и непосредственно из определения параллельного перенесения тензора (§ 95).

§ 98. Абсолютное дифференцирование в римановом пространстве V_n

Все сказанное в §§ 96, 97 справедливо, конечно и для связности Γ^k_{ij} в римановом пространстве. Но при этом абсолютное дифференцирование приобретает и некоторые новые свойства. Прежде всего вычислим абсолютную производную от *метрического тензора* g_{rs} *по общей схеме* (96.21):

$$\nabla_k g_{rs} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{kr} g_{ps} - \Gamma^p_{ks} g_{rp}.$$

Пользуясь (94.4), мы замечаем, что

$$\nabla_k g_{rs} = 0. \tag{98.1}$$

Таким образом, абсолютная производная метрического тензора тождественно равна нулю. Тем самым тождественно равен нулю и абсолютный дифференциал метрического тензора:

$$Dg_{rs}=0. \qquad (98.2)$$

Рассмотрим теперь поле единичного тензора δ^i_j, считая, что в каждой точке M и в любой координатной системе x^i его координаты определены соотношениями

$$\delta^i_j=\begin{cases} 0 & (i\neq j) \\ 1 & (i=j) \end{cases}. \qquad (98.3)$$

Мы знаем, что, действительно, тензорный закон преобразования не меняет этих численных значений. Вычислим абсолютную производную этого тензора:

$$\nabla_k\delta^i_j=\frac{\partial}{\partial x^k}\delta^i_j+\Gamma^i_{kp}\delta^p_j-\Gamma^p_{kj}\delta^i_p.$$

Частная производная от константы δ^i_j дает нуль, а остальные члены в результате суммирования по p приводятся к виду

$$\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{kj}=0.$$

Итак,

$$\nabla_k\delta^i_j=0, \quad \text{и тем самым } D\delta^i_j=0. \qquad (98.4)$$

Этот результат верен, разумеется, не только в римановом пространстве V_n, но и в любом пространстве аффинной связности L_n.

Теперь покажем, что и для контравариантного метрического тензора g^{ij} абсолютный дифференциал тождественно равен нулю:

$$Dg^{ij}=0, \quad \text{или, что то же,} \quad \nabla_k g^{ij}=0. \qquad (98.5)$$

Для доказательства запишем основное соотношение, выражающее, что матрицы g_{ij} и g^{ij} взаимно обратные и при перемножении дают единичную матрицу:

$$g^{ip}g_{pj}=\delta^i_j. \qquad (98.6)$$

Берем почленно абсолютные дифференциалы (от левой части — как от произведения тензоров, выполняя свертывание по p после дифференцирования):

$$Dg^{ip}\cdot g_{pj}+g^{ip}\cdot Dg_{pj}=D\delta^i_j.$$

В силу (98.2) и (98.4) получаем:

$$Dg^{ip}\cdot g_{pj}=0,$$

т. е. тензор Dg^{ip} равен нулю после опускания индекса p; следовательно, он и сам равен нулю, и (98.5) доказано.

Пусть теперь в римановом пространстве заданы два тензорных поля, например, $V^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}$ и $V^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}$, причем первое получается из второго опусканием индекса r, а следовательно, второе из первого — его поднятием (см. (85.5), (85.6)):

$$V^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}=g_{rp}V^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s},\qquad V^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}=g^{rp}V^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}. \tag{98.7}$$

Берем почленно абсолютные дифференциалы, причем правые части дифференцируются как произведения (с выполнением свертывания после дифференцирования):

$$DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}=(Dg_{rp})V^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s}+g_{rp}DV^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s},\quad DV^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}=(Dg^{rp})\,V^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}+g^{rp}DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}.$$

Так как

$$Dg_{rp}=Dg^{rp}=0,$$

то мы получаем:

$$DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot rs}=g_{rp}DV^{ip\cdot}_{\cdot\cdot s},\quad DV^{ir\cdot}_{\cdot\cdot s}=g^{rp}DV^{i\cdot\cdot}_{\cdot ps}. \tag{98.8}$$

Формулы (98.8) показывают, что операции опускания и поднятия индексов перестановочны с операцией абсолютного дифференцирования.

Проверим еще при помощи абсолютного дифференцирования известный нам факт, что при одновременном параллельном перенесении векторов ξ^i, η^j по данному пути их скалярное произведение $g_{ij}\xi^i\eta^j$ не меняется. Очевидно,

$$D(g_{ij}\xi^i\eta^j)=(Dg_{ij})\,\xi^i\eta^j+g_{ij}\,(D\xi^i)\,\eta^j+g_{ij}\xi^iD\eta^j=0,$$

так как Dg_{ij} всегда равен нулю, а $D\xi^i$, $D\xi^j$ равны нулю в силу параллельного перенесения этих векторов. Абсолютный дифференциал от инварианта совпадает с обыкновенным, так что получаем:

$$d\,(g_{ij}\xi^i\eta^j)=0,\quad \text{т. е.}\quad g_{ij}\xi^i\eta^j=\mathrm{const},$$

что мы и хотели показать. Мы видим, что геометрический смысл соотношения $Dg_{ij}=0$ — это неизменность скалярного произведения параллельно переносимых векторов.

Заметим, что в римановом пространстве нетрудно ввести основные понятия векторного анализа по аналогии с обычным пространством.

Так, каждому скалярному полю

$$\varphi=\varphi\,(x^1,\ \ldots,\ x^n)$$

отвечает поле *вектора-градиента*

$$\varphi_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i},$$

который можно задать и контравариантными координатами, подняв индекс i:

$$\varphi^i = g^{ij}\varphi_j.$$

Каждому векторному полю

$$\xi^i = \xi^i (x^1, \ldots, x^n)$$

отвечает *дивергенция* — инвариантное скалярное поле $\nabla_i \xi^i$. Дивергенция от градиента скалярного поля φ называется *оператором Лапласа* от φ:

$$\Delta\varphi = \nabla_i (g^{ij}\varphi_j) = g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi.$$

Все эти понятия, очевидно, принимают обычный вид, если рассматривать обычное пространство в прямоугольных координатах.

Сложнее обстоит дело с *ротором* векторного поля ξ^i, который в n-мерном случае приходится определить как *бивектор*:

$$\xi_{ij} = \nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i = \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j},$$

где ξ_i — ковариантные координаты вектора ξ^i. Инвариантное истолкование этого бивектора как вектора v^i возможно лишь *в трехмерном случае*. Оно производится по формулам

$$v^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{23}, \quad v^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{31}, \quad v^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\xi_{12},$$

причем мы ограничиваемся координатными системами некоторой данной ориентации.

Следует отметить еще, что в частном случае, *когда риманово пространство является евклидовым*, абсолютный дифференциал в *криволинейных координатах* выглядит по внешнему виду не проще, чем в общем случае риманова пространства. Его более простой характер выступает явно лишь при переходе к *аффинным координатам*. Тогда коэффициенты связности обращаются в нуль, дополнительные члены пропадают и абсолютное дифференцирование дает тот же результат, как и обыкновенное. Для любого тензора, например Z^p_{ij}, мы в этом случае имеем:

$$DZ^p_{ij} = dZ^p_{ij}, \quad \nabla_k Z^p_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} Z^p_{ij}.$$

В главе I, рассматривая *обычное евклидово пространство в прямоугольных координатах*, мы вводили абсолютное дифференцирование именно этим путем. Все полученные там тензорные соотношения с участием абсолютных дифференциалов или производных имеют место *и в любых криволинейных координатах*, если, разумеется, выполнять абсолютное дифференцирование так, как в этом случае полагается (с участием Γ_{ij}^k). Впрочем, при переходе к криволинейным координатам нужно произвести еще расстановку индексов у тензоров — часть их поместить наверх, — в то время как в главе I мы все индексы писали внизу, пользуясь тем, что в ортонормированном репере в собственно евклидовом пространстве ко- и контравариантные индексы ведут себя одинаково.

§ 99. Кривые в римановом пространстве V_n

В этом параграфе мы ограничимся такими свойствами кривых в римановом пространстве V_n, для которых существенно лишь параллельное перенесение векторов, а метрика не играет роли. Поэтому все сказанное будет справедливо и для кривых в пространстве аффинной связности L_n (только касательное пространство A_n не будет в этом случае евклидовым пространством R_n).

Рассмотрим параметрически заданную кривую

$$x^i = x^i(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{99.1}$$

где x^i предполагаются n раз непрерывно дифференцируемыми функциями параметра, причем производные $\frac{dx^i(t)}{dt}$ ни в одной точке не обращаются в нуль одновременно. В каждой точке кривой составляем касательный вектор ξ^i:

$$\xi^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}. \tag{99.2}$$

Так как вдоль нашей кривой $\xi^i(t)$ образуют тензорное поле, то в любой ее точке можно вычислить абсолютный дифференциал

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma_{kp}^i \xi^p dx^k \tag{99.3}$$

при бесконечно малом смещении из точки t в точку $t+dt$. Разделив (99.3) на dt почленно, получаем:

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{kp}^i \xi^p \frac{dx^k}{dt}. \tag{99.4}$$

Один раз контравариантный тензор, в частности, $\frac{D\xi^i}{dt}$, всегда имеет истолкование в касательном евклидовом пространстве R_n в виде вектора. Вектор $\frac{D\xi^i(t)}{dt}$ мы будем называть *производной вектора* ξ^i по параметру t. От этого векторного поля можно в свою очередь вычислить производную $\frac{D\left(\frac{D\xi^i}{dt}\right)}{dt}$, которую мы будем обозначать $\frac{D^2\xi^i}{dt^2}$, и т. д. Выпишем последовательность векторов

$$\xi^i(t), \quad \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \quad \frac{D^2\xi^i(t)}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{D^{n-1}\xi^i(t)}{dt^{n-1}} \tag{99.5}$$

в какой-нибудь точке $M(t)$ на кривой.

Вообще говоря, эти n векторов будут в каждой точке линейно независимыми. Рассмотрим *этот случай, который мы будем называть основным (кривая основного типа). Плоскость в касательном пространстве R_n, проходящая через точку M и построенная на первых p векторах* (99.5), *называется p-й соприкасающейся плоскостью R_p*. В частности, первая соприкасающаяся плоскость R_1 совпадает просто с касательной. Соприкасающиеся плоскости имеет смысл рассматривать, кончая R_{n-1}:

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_p \subset R_{p+1} \subset \ldots \subset R_{n-1}. \tag{99.6}$$

Действительно, R_n совпадает уже со всем касательным пространством.

На данной кривой параметр t можно выбирать по-разному, в зависимости от чего будут меняться векторы последовательности (99.5). Однако плоскости R_p последовательности (99.6) от этого меняться не будут, так что *понятие соприкасающейся плоскости R_p носит инвариантный характер*. В самом деле, можно утверждать, что при переходе к новому параметру τ каждый вектор $\frac{D^p\xi^i(\tau)}{d\tau^p}$ разлагается по первым $p+1$ векторам последовательности (99.5). Начнем с $p=0$:

$$\xi^i(\tau) = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad \xi^i(t) = \frac{dx^i}{dt},$$

откуда

$$\xi^i(\tau) = \xi^i(t)\frac{dt}{d\tau}. \tag{99.7}$$

Заметим, что при наших предположениях относительно кривой и выбора параметра на ней τ будет n раз непрерывно дифференцируемой функцией от t, равно как и обратно.

Берем почленно абсолютный дифференциал:

$$D\xi^i(\tau) = D\xi^i(t)\frac{dt}{d\tau} + \xi^i(t)\,D\frac{dt}{d\tau}.$$

Так как $\frac{dt}{d\tau}$ — величина скалярная, то $D\frac{dt}{d\tau} = d\frac{dt}{d\tau}$. Делим почленно на $d\tau$:

$$\frac{D\xi^i(\tau)}{d\tau} = \frac{D\xi^i(t)}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \xi^i(t)\frac{d^2t}{d\tau^2}. \tag{99.8}$$

Таким образом, $\xi^i(\tau)$ разлагается по $\xi^i(t)$ согласно (99.7); $\frac{D\xi^i(\tau)}{d\tau}$ разлагается по $\xi^i(t)$, $\frac{D\xi^i(t)}{dt}$ согласно (99.8); продолжая дифференцировать почленно, мы докажем наше утверждение для любого p:

$$\frac{D^p\xi^i(\tau)}{d\tau^p} = \alpha_{pp}\frac{D^p\xi^i(t)}{dt^p} + \alpha_{p,\,p-1}\frac{D^{p-1}\xi^i(t)}{dt^{p-1}} + \ldots + \alpha_{p,\,0}\xi^i(t), \tag{99.9}$$

где α_{pp}, $\alpha_{p,\,p-1}$, ..., $\alpha_{p,\,0}$ — некоторые скалярные коэффициенты, строением которых мы не интересуемся. Чтобы сделать рассуждение совершенно строгим и в то же время не затруднять себя фактическим дифференцированием до произвольного порядка p, достаточно доказывать формулу (99.9) от p к $p+1$. Тогда, беря от (99.9) абсолютный дифференциал D почленно и деля результат на $d\tau$, легко убеждаемся, что $\frac{D^{p+1}\xi^i(\tau)}{d\tau^{p+1}}$ разлагается по первым $p+2$ векторам (99.5). Это значит, что формула (99.9) верна для номера $p+1$, если она верна для номера p, а так как для $p=0$ (а также $p=1$) она уже проверена, то в результате она установлена при любом p. Разумеется, совершенно аналогичная формула имеет место и при обратном переходе от параметра τ к параметру t.

Итак, векторы

$$\xi^i(\tau), \quad \frac{D\xi^i(\tau)}{d\tau}, \; \ldots, \; \frac{D^p\xi^i(\tau)}{d\tau^p} \tag{99.10}$$

разлагаются по векторам

$$\xi^i(t), \quad \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \; \ldots, \; \frac{D^p\xi^i(t)}{dt^p}, \tag{99.11}$$

равно как и обратно. Следовательно, плоскость R_{p+1} будет в обоих случаях одна и та же, что мы и хотели показать.

В частности, при $p=n-1$ отсюда следует, что векторы (99.5), подсчитанные для нового параметра τ, остаются линейно независимыми, так что наше определение *кривой основного типа* инвариантно относительно выбора параметра t.

Рассмотрим теперь различные случаи *уплощенной кривой* *); так мы будем называть кривую, в каждой точке которой векторы (99.5) линейно зависимы. Нарушение линейной независимости в отдельных точках мы рассматривать не будем. Пусть при этом первые m среди них

$$\xi^i(t), \quad \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{D^{m-1}\xi^i(t)}{dt^{m-1}} \tag{99.12}$$

еще линейно независимы, а следующий за ними вектор $\frac{D^m\xi^i(t)}{dt^m}$ уже линейно зависит от предыдущих (в каждой точке кривой). Дифференцируя эту линейную зависимость, мы легко убеждаемся, что *не только* $\frac{D^m\xi^i(t)}{dt^m}$, *но и последующие производные линейно зависят от* (99.12), *т. е. лежат в соприкасающейся плоскости* R_m. Поэтому соприкасающиеся плоскости имеет смысл рассматривать лишь от R_1 до R_m: $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_m$. Число m может принимать различные значения от 1 до $n-1$. Чем меньше m, тем сильнее «уплощение» кривой. При $m=1$ «уплощение» наибольшее, и кривая, как мы вскоре увидим, является геодезической. При $m=n$ «уплощение» исчезает, так как тогда векторы (99.5) линейно независимы, и мы возвращаемся к основному случаю.

Покажем, что максимально-мерная соприкасающаяся *плоскость* R_m *параллельно переносится вдоль кривой*, т. е. что ее векторы при параллельном перенесении вдоль кривой продолжают оставаться в этой плоскости (разумеется, в каждой точке кривой — своя плоскость R_m). Абсолютные дифференциалы векторов (99.12) имеют вид

$$\frac{D\xi^i}{dt}\,dt, \quad \frac{D^2\xi^i}{dt^2}\,dt, \quad \ldots, \quad \frac{D^m\xi^i}{dt^m}\,dt$$

и, следовательно, линейно зависят от самих этих векторов. Обозначая для краткости векторы (99.12) через $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_m^i$, мы можем записать:

$$D\xi_p^i = (\alpha_p^1\xi_1^i + \alpha_p^2\xi_2^i + \ldots + \alpha_p^m\xi_m^i)\,dt \quad (p=1, 2, \ldots, m), \tag{99.13}$$

где α_p^q — коэффициенты соответствующих разложений; $\alpha_p^q = \alpha_p^q(t)$. Составим косое произведение:

$$\xi^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \xi_1^{[i_1}\xi_2^{i_2} \ldots \xi_m^{i_m]} \tag{99.14}$$

*) Конец этого параграфа можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего.

и вычислим его абсолютный дифференциал

$$D\xi^{i_1 i_2 \ldots i_m} =$$
$$= D\xi_1^{[i_1}\xi_2^{i_2} \ldots \xi_m^{i_m]} + \xi_1^{[i_1}D\xi_2^{i_2} \ldots \xi_m^{i_m]} + \ldots + \xi_1^{[i_1}\xi_2^{i_2} \ldots D\xi_m^{i_m]}. \quad (99.15)$$

В первом слагаемом правой части заменяем $D\xi_1^{i_1}$ его разложением согласно (99.13) (при $p=1$). Учитывая, что при наличии одинаковых множителей косое произведение векторов обращается в нуль, мы можем сохранить в разложении $D\xi_1^i$ лишь член с ξ_1^i, т. е. $\alpha_1^1\xi_1^i\,dt$. В результате первое слагаемое принимает вид $\alpha_1^1\xi_1^{[i_1}\xi_2^{i_2} \ldots \xi_m^{i_m]}$. Поступая аналогичным образом с остальными слагаемыми в правой части (99.15), мы приводим это равенство к виду

$$D\xi^{i_1 i_2 \ldots i_m} = (\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^m)\,dt\,\xi^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \alpha\,dt\,\xi^{i_1 i_2 \ldots i_m}, \quad (99.16)$$

где мы обозначили для краткости

$$\alpha = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^m. \quad (99.17)$$

Соотношение (99.16) *означает, что m-мерная плоскость R_m, построенная на векторах $\xi_1^i, \ldots, \xi_m^i$, параллельно переносится вдоль нашей кривой.*

В самом деле, m-вектор $\xi^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ всегда можно пронормировать так, что его абсолютный дифференциал будет равен нулю. Для этого умножим (99.16) почленно на скалярную функцию

$$\varphi(t) = e^{-\int \alpha(t)\,dt} \neq 0.$$

Так как $D\varphi(t) = d\varphi(t) = -e^{-\int \alpha(t)\,dt}\alpha(t)\,dt$, то получаем:

$$\varphi(t)\,D\xi^{i_1 \ldots i_m} = -D\varphi(t)\,\xi^{i_1 \ldots i_m},$$

откуда

$$D(\varphi(t)\,\xi^{i_1 \ldots i_m}(t)) = 0, \quad (99.18)$$

так что *m-вектор $\varphi(t)\,\xi^{i_1 \ldots i_m}(t)$ параллельно переносится вдоль нашей кривой.*

Пусть теперь η^i — вектор, также параллельно переносимый вдоль нашей кривой. Тогда альтернированное произведение

$$\eta^{i_1 \ldots i_m i} = \varphi \cdot \xi^{[i_1 \ldots i_m}\eta^{i]} \quad (99.19)$$

будет также параллельно переносимым $m+1$-вектором. Отсюда следует, что если $\eta^{i_1 \ldots i_m i}$ равно нулю в одной точке кривой, то это же имеет место и в любой ее точке. Но обращение $\eta^{i_1 \ldots i_m i}$ в нуль означает согласно (35.13) линейную зависимость вектора η^i от векторов $\xi_1^i, \ldots, \xi_m^i$, т. е. принадлежность η^i нашей плоскости R_m. Таким образом, *если параллельно переносимый вдоль кривой вектор η^i принадлежит R_m в одной точке кривой, то это же имеет место и в любой ее точке*. Это свойство мы и имеем в виду, когда говорим, что плоскость R_m параллельно переносится вдоль кривой. Наше утверждение доказано.

В частности, когда $m=1$, параллельно переносится касательная R_1, т. е. всякий вектор η^i, касательный в данной точке кривой, остается касательным и в процессе параллельного перенесения вдоль кривой. Но это есть определение *геодезической линии*, которая, таким образом, является наиболее «уплощенной» из всех кривых в V_n.

В случае, когда в качестве V_n берется евклидово пространство R_n, уплощенная кривая просто лежит в своей соприкасающейся плоскости R_m, общей для всех точек кривой.

§ 100. Кривые в римановом пространстве (окончание)

В этом параграфе мы ограничимся кривой *основного типа*, причем будем предполагать, кроме того, что в каждой ее точке *M все соприкасающиеся плоскости*

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_p \subset R_{p+1} \subset \ldots \subset R_{n-1} \qquad (100.1)$$

являются неизотропными плоскостями в касательном евклидовом пространстве R_n. В случае собственно риманова пространства это условие соблюдается автоматически.

При этих предположениях с каждой точкой кривой можно естественным образом связать *ортонормированный репер*. А именно, выбираем единичные или мнимоединичные векторы

$$\nu_0^i,\ \nu_1^i,\ \ldots,\ \nu_{p-1}^i,\ \nu_p^i,\ \ldots,\ \nu_{n-1}^i \qquad (100.2)$$

следующим образом:

ν_0^i направлен по касательной R_1 и совпадает, следовательно, с пронормированным касательным вектором $\frac{dx^i}{dt}$;

ν_1^i построен в двумерной плоскости R_2 ортогонально к R_1:

. . . .

ν_p^i построен в R_{p+1} ортогонально к R_p;

. . . .

ν_{n-1}^i ортогонален к R_{n-1}.

В каждом случае идет речь о построении в евклидовом пространстве R_{p+1} направления, ортогонального к его гиперплоскости R_p, что выполняется единственным образом. Вследствие неизотропности R_p это направление будет также неизотропным и гиперплоскости R_p не принадлежит (§ 41). Вектор v_p^i, идущий в этом направлении, может быть, следовательно, пронормирован, т. е. умножением на подходящее число сведен *к единичному или мнимоединичному вектору*. После этого он будет вполне определен с точностью до умножения на -1.

Поскольку v_p^i ортогонален к R_p, то он ортогонален ко всем предшествующим векторам $v_0^i, \ldots, v_{p-1}^i$, а значит, векторы (100.2) вообще попарно ортогональны, а так как, кроме того, они пронормированы (единичные или мнимоединичные), то мы получаем вполне определенный (с точностью возможных замен v_p^i на $-v_p^i$) *ортонормированный репер, связанный с каждой точкой нашей кривой. Его мы будем называть сопровождающим репером нашей кривой.* Очевидно, векторы $v_0^i, v_1^i, \ldots, v_p^i$ при любом $p=0, 1, 2, \ldots, n-1$ определяют соприкасающуюся плоскость R_{p+1}. Прямые, проходящие в касательном пространстве R_n через данную точку кривой в направлениях ортов $v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{n-1}^i$, мы будем называть 1-й, 2-й, ..., $n-1$-й *нормалями* к нашей кривой.

Орт v_0^i направлен по касательной.

Так как касательная R_1 неизотропная, то скалярный квадрат касательного вектора $\frac{dx^i}{dt}$ не равен нулю:

$$g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \neq 0. \tag{100.3}$$

Вычислим длину дуги нашей кривой от некоторой начальной точки t_0 до переменной точки t по формуле (85.10):

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt, \qquad ds = \sqrt{g_{ij}\,dx^i\,dx^j}\,.$$

Пусть сначала подкоренное выражение остается все время положительным. Тогда кривая имеет вещественную длину, и при $t > t_0$ мы получаем положительные значения s, при $t < t_0$ — отрицательные. Так как производная $\frac{ds}{dt}$ все время положительная, то зависимость $s=s(t)$ допускает обращение, и *s можно принять за новый параметр вдоль кривой.* Так мы и поступим.

Положительное направление отсчета дуги s такое же, как и первоначального параметра t, т. е. выбирается по существу произвольно. Касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ будет единичным, так как его скалярный квадрат имеет вид

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 1. \tag{100.4}$$

Следовательно, можно принять $\frac{dx^i}{ds}$ за вектор v_0^i:

$$v_0^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{100.5}$$

Обратно, если для некоторого параметра s вдоль кривой вектор $\frac{dx^i}{ds}$ оказывается единичным, то имеет место (100.4) и, следовательно, $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, так что параметр s оказывается длиной дуги.

Пусть теперь *подкоренное выражение остается все время отрицательным, так что радикал чисто мнимый,* и мы имеем кривую чисто мнимой длины. Мы запишем:

$$s = \sigma i$$

и за *новый параметр вдоль кривой будем принимать вещественный коэффициент* σ. За вектор v_0^i мы примем вектор $\frac{dx^i}{d\sigma}$, причем он будет уже мнимоединичным. В самом деле, его скалярный квадрат имеет вид

$$g_{ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} = -g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = -1, \text{ так как } ds^2 = -d\sigma^2.$$

Итак,

$$v_0^i = \frac{dx^i}{d\sigma}. \tag{100.6}$$

Обратно, если для некоторого параметра σ вдоль кривой вектор $\frac{dx^i}{d\sigma}$ оказывается мнимоединичным, то $g_{ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma} = -1$, откуда $d\sigma^2 = -ds^2$, так что длина дуги кривой оказывается чисто мнимой и имеет вид $s = \sigma i$.

Мы хотим теперь установить для ортов v_p^i сопровождающего репера *формулы Френе.* Другими словами, мы хотим выяснить, как разлагаются производные этих ортов $\frac{Dv_p^i}{ds}$ $\left(\text{или } \frac{Dv_p^i}{d\sigma}\right)$ по самим этим ортам. Для определенности будем говорить о параметре s, имея в виду, что все сказанное будет справедливо и в случае параметра σ.

Заметим прежде всего, что $\frac{Dv_p^i}{ds}$ *всегда принадлежит плоскости* R_{p+2}, т. е. *вполне разлагается по ортам* $v_0^i, v_1^i, \ldots, v_{p+1}^i$. В самом деле, v_p^i принадлежит плоскости R_{p+1}, т. е. разлагается по векторам (99.11):

$$\xi^i(t),\ \frac{D\xi^i(t)}{dt},\ \ldots,\ \frac{D^p\xi^i(t)}{dt^p}.$$

Ясно, что при дифференцировании этого разложения порядок входящих в него производных повышается не более чем на единицу, так что $D\nu_p^i$ будет разлагаться по векторам

$$\xi^i(t), \quad \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \ \ldots, \ \frac{D^{p+1}\xi^i(t)}{dt^{p+1}},$$

определяющим плоскость R_{p+2}. Итак, $\frac{D\nu_p^i}{ds}$ принадлежит плоскости R_{p+2} и разлагается по $\nu_0^i, \nu_1^i, \ldots, \nu_{p+1}^i$, а следовательно, *ортогонален к* $\nu_{p+2}^i, \ldots, \nu_{n-1}^i$:

$$g_{ij}\nu_q^i \frac{D\nu_p^j}{ds} = 0 \text{ при } q > p+1. \tag{100.7}$$

Используем теперь ортогональность векторов ν_p^i, ν_q^i:

$$g_{ij}\nu_q^i\nu_p^j = 0.$$

Беря почленно абсолютный дифференциал и учитывая, что $Dg_{ij} = 0$, получаем:

$$g_{ij}(D\nu_q^i)\,\nu_p^j + g_{ij}\nu_q^i D\nu_p^j = 0.$$

Деля почленно на ds и пользуясь (100.7), получаем окончательно:

$$g_{ij}\frac{D\nu_q^i}{ds}\nu_p^j = 0 \text{ при } q > p+1.$$

Нам будет удобнее поменять в этой формуле обозначения p и q:

$$g_{ij}\frac{D\nu_p^i}{ds}\nu_q^j = 0 \text{ при } p > q+1 \tag{100.8}$$

(т. е. при $q < p-1$). Сопоставляя формулы (100.7) и (100.8), можно сказать, что *вектор* $\frac{D\nu_p^i}{ds}$ *ортогонален ко всем ортам* ν_q^i *кроме, может быть, ортов*

$$\nu_{p-1}^i, \ \nu_p^i, \ \nu_{p+1}^i.$$

Однако оказывается, что вектор $\frac{D\nu_p^i}{ds}$ ортогонален и к орту ν_p^i. В самом деле, скалярный квадрат вектора ν_p^i равен ± 1:

$$g_{ij}\nu_p^i\nu_p^j = \pm 1.$$

Дифференцируя это соотношение, получим:

$$g_{ij}(Dv_p^i)\, v_p^j + g_{ij} v_p^i D v_p^j = 0,$$

т. е.

$$2g_{ij} \cdot v_p^i D v_p^j = 0, \tag{100.9}$$

а это означает ортогональность Dv_p^i к v_p^i.

В итоге разложение вектора $\frac{Dv_p^i}{ds}$ по ортам $v_0^i, v_1^i, \ldots, v_{n-1}^i$ может содержать лишь v_{p-1}^i и v_{p+1}^i. Запишем:

$$\frac{Dv_p^i}{ds} = \varkappa_{p,\,p-1}\, v_{p-1}^i + \varkappa_{p,\,p+1} v_{p+1}^i, \tag{100.10}$$

где через $\varkappa_{p,\,p-1}$, $\varkappa_{p,\,p+1}$ обозначены соответствующие коэффициенты. Разумеется, в случае $p=0$ в правой части имеется лишь второй член (v_{-1}^i не существует), а в случае $p=n-1$ — лишь первый член (v_n^i не существует).

Покажем, наконец, что существенно различных коэффициентов $\varkappa_{p,\,q}$ в действительности вдвое меньше, чем кажется с первого взгляда. Умножая (100.10) скалярно на орт v_{p-1}^i, мы получаем:

$$g_{ij}\frac{Dv_p^i}{ds} v_{p-1}^j = \varkappa_{p,\,p-1}\, \varepsilon_{p-1}, \tag{100.11}$$

где ε_{p-1} равно скалярному квадрату орта v_{p-1}^i, т. е. 1, *если этот орт единичный, и* -1, *если он мнимоединичный.* Аналогичным образом, умножая (100.10) на v_{p+1}^i скалярно, получаем:

$$g_{ij}\frac{Dv_p^i}{ds} v_{p+1}^j = \varkappa_{p,\,p+1}\, \varepsilon_{p+1}. \tag{100.12}$$

С другой стороны, записав ортогональность ортов v_p^i, v_{p+1}^i

$$g_{ij} v_p^i v_{p+1}^j = 0 \quad (p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2)$$

и дифференцируя это соотношение, получаем:

$$g_{ij}\frac{Dv_p^i}{ds} v_{p+1}^j + g_{ij} v_p^i \frac{Dv_{p+1}^j}{ds} = 0.$$

Заменяя в (100.11) p на $p+1$ и используя, кроме того, (100.12), мы видим, что наше равенство можно переписать в виде

$$\varkappa_{p,\,p+1}\, \varepsilon_{p+1} + \varkappa_{p+1,\,p}\, \varepsilon_p = 0. \tag{100.13}$$

Это значит, что $\varkappa_{p,\,p+1}$ *и* $\varkappa_{p+1,\,p}$ *равны, если орты* $\mathbf{v}_p^i$, $\mathbf{v}_{p+1}^i$ *разноименные (один единичный, другой мнимоединичный), и отличаются лишь знаком, если эти орты одноименные (оба единичные или оба мнимоединичные).* Обозначим:

$$\varkappa_{p,\,p+1}=\varkappa_{p+1}, \text{ тогда } \varkappa_{p+1,\,p}=\pm\varkappa_{p+1}, \tag{100.14}$$

где знак плюс отвечает случаю разноименных, а минус — случаю одноименных ортов $\mathbf{v}_p^i$, $\mathbf{v}_{p+1}^i$.

Формулы (100.10) принимают теперь окончательный вид

$$\frac{D\mathbf{v}_p^i}{ds}=\pm\varkappa_p\mathbf{v}_{p-1}^i+\varkappa_{p+1}\mathbf{v}_{p+1}^i, \tag{100.15}$$

где знак плюс отвечает случаю разноименных, а минус — случаю одноименных ортов $\mathbf{v}_{p-1}^i$, $\mathbf{v}_p^i$.

В собственно римановом пространстве, где все орты одноименные (единичные), в первом члене правой части всегда стоит знак минус.

Выпишем формулы (100.15) подробнее — при $p=0, 1, \ldots, n-1$:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D\mathbf{v}_0^i}{ds}&= \qquad\qquad\quad \varkappa_1\mathbf{v}_1^i,\\
\frac{D\mathbf{v}_1^i}{ds}&=\pm\varkappa_1\mathbf{v}_0^i \qquad +\varkappa_2\mathbf{v}_2^i,\\
\frac{D\mathbf{v}_2^i}{ds}&=\pm\varkappa_2\mathbf{v}_1^i \qquad +\varkappa_3\mathbf{v}_3^i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{D\mathbf{v}_{n-2}^i}{ds}&=\pm\varkappa_{n-2}\mathbf{v}_{n-3}^i+\varkappa_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}^i,\\
\frac{D\mathbf{v}_{n-1}^i}{ds}&=\pm\varkappa_{n-1}\mathbf{v}_{n-2}^i.
\end{aligned}\right\} \tag{100.16}$$

Это и есть формулы Френе для кривой в римановом пространстве. Коэффициенты $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$ *называются первой, второй, ..., $n-1$-й кривизной кривой в данной точке.* При наших предположениях они отличны от нуля. Действительно, если бы, например, $\varkappa_3$ равнялось нулю, то $\mathbf{v}_0^i$, $\frac{D\mathbf{v}_0^i}{ds}$, $\frac{D^2\mathbf{v}_0^i}{ds^2}$, $\frac{D^3\mathbf{v}_0^i}{ds^3}$ разлагались бы по $\mathbf{v}_0^i$, $\mathbf{v}_1^i$, $\mathbf{v}_2^i$ и были бы, следовательно, линейно зависимы, а это противоречит предположению, что кривая основного типа. *Кривизны* $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ *всегда можно сделать положительными за счет окончательного выбора сопровождающего репера.* В самом деле, будем считать, что *кривая задана вместе с положительным направлением отсчета дуги s (или σ).* Будем определять тогда орт $\mathbf{v}_0^i$ согласно (100.5) или (100.6); остальные же орты остаются определенными с точностью до умножения на -1. Теперь, если в первой формуле Френе $\varkappa_1 > 0$, то оставляем орт ν_1^i без изменения; если же $\varkappa_1 < 0$, то меняем направление ν_1^i на обратное; тогда кривизна $\varkappa_1$ становится положительной. Далее, если во второй формуле Френе $\varkappa_2 > 0$, то оставляем орт ν_2^i без изменения; если же $\varkappa_2 < 0$, то меняем направление ν_2^i на обратное, и кривизна $\varkappa_2$ становится положительной, и т. д. *В результате мы окончательно выбираем сопровождающий репер и в то же время добиваемся того, что все кривизны $\varkappa_p$ станут положительными.*

Заметим, что если изменить направление отсчета дуги на обратное, то, как легко убедиться из (100.5) и формул Френе, орты $\nu_1^i, \nu_3^i, \nu_5^i, \ldots$ остаются прежними, а $\nu_0^i, \nu_2^i, \nu_4^i, \ldots$ меняют направление на обратное. При этом подразумевается, что по установленному соглашению кривизны $\varkappa_p$ остаются положительными (и тем самым не меняются). В качестве важного частного случая нашей теории рассмотрим *кривые в евклидовом пространстве R_n*. Пространство R_n является само к себе касательным в любой своей точке (§ 86), и векторы сопровождающего репера ν_p^i принадлежат самому R_n. Мы будем обозначать их $\mathbf{v}_p$. Абсолютные дифференциалы в формулах Френе означают дифференцирование векторов $\mathbf{v}_p$ в геометрическом смысле (§ 96), так что формулы Френе примут вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}_0}{ds} &= \qquad\qquad \varkappa_1\mathbf{v}_1, \\
\frac{d\mathbf{v}_1}{ds} &= \pm\varkappa_1\mathbf{v}_0 \qquad + \varkappa_2\mathbf{v}_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\mathbf{v}_{n-2}}{ds} &= \pm\varkappa_{n-2}\mathbf{v}_{n-3} + \varkappa_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}, \\
\frac{d\mathbf{v}_{n-1}}{ds} &= \pm\varkappa_{n-1}\mathbf{v}_{n-2}.
\end{aligned}\right\} \tag{100.17}$$

В частности, в трехмерном евклидовом пространстве

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{ds} = \varkappa_1\mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{v}_1}{ds} = \pm\varkappa_1\mathbf{v}_0 + \varkappa_2\mathbf{v}_2, \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{ds} = \pm\varkappa_2\mathbf{v}_1. \tag{100.18}$$

В обычном пространстве, т. е. в собственно евклидовом R_3, в последних двух формулах, как мы знаем, нужно выбрать из знаков $\pm$ знак $-$. Мы получаем формулы Френе в их обычной записи, где $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — орты, направленные соответственно по касательной, главной нормали и бинормали к кривой, а $\varkappa_1, \varkappa_2$ — соответственно *кривизна* и *кручение*. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что в нашей теории $\varkappa_1, \varkappa_2$ всегда положительны, в то время как обычно принято приписывать кручению $\varkappa_2$ знак $\pm$ в зависимости от «правой» или «левой» закрученности кривой. Это связано с тем, что в нашей теории сопровождающий репер будет правым для «право-закрученной» кривой и левым для «лево-закрученной»; обычно же сопровождающий репер выбирается во всех случаях правым; это и вызывает появление отрицательного кручения $\varkappa_2$ в случае «лево-закрученной» кривой.

Имеет место следующая теорема: пусть произвольным образом заданы непрерывные, положительные функции некоторого аргумента s

$$\varkappa_1(s), \quad \varkappa_2(s), \ \ldots, \ \varkappa_{n-1}(s), \ s_0 \leqslant s \leqslant s_1. \tag{100.19}$$

Кроме того, в каком-нибудь R_n *задан ортонормированный репер* $\{M_0, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}\}$, *где* $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ — *единичные и мнимоединичные векторы, чередующиеся произвольным образом. Тогда в этом* R_n *всегда существует кривая, и притом единственная, вдоль которой кривизны* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$ *выражаются наперед заданными функциями через длину дуги* s *(в случае* $\mathbf{e}_0^2=1$*) или через параметр* $\sigma=\frac{s}{i}$ *(в случае* $\mathbf{e}_0^2=-1$*) и сопровождающий репер которой при* $s=s_0$ *совпадает с наперед заданным репером.*

Докажем теорему сначала в случае $\mathbf{e}_0^2=1$. Будем рассматривать (100.17) как систему линейных дифференциальных уравнений с аргументом s с неизвестными функциями $\mathbf{v}_0(s), \ldots, \mathbf{v}_{n-1}(s)$.

Коэффициентами $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ служат при этом наперед заданные функции (100.19). Знак $\pm$ в каждом из уравнений

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{ds}=\pm\varkappa_p\mathbf{v}_{p-1}+\varkappa_{p+1}\mathbf{v}_{p+1}$$

выбирается следующим образом: плюс, если орты $\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_{p-1}$ разноименные, и минус, если они одноименные. Кроме того, на неизвестные функции $\mathbf{v}_0(s), \ldots, \mathbf{v}_{p-1}(s)$ мы накладываем начальные условия

$$\mathbf{v}_0(s_0)=\mathbf{e}_0, \ \mathbf{v}_1(s_0)=\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ \mathbf{v}_{n-1}(s_0)=\mathbf{e}_{n-1}. \tag{100.20}$$

Тогда, как известно из теории дифференциальных уравнений, система допускает решение, существующее на всем интервале изменения s (от s_0 до s_1) и при этом единственное. Нас не должно смущать, что неизвестные функции $\mathbf{v}_p(s)$ являются векторами: каждую из них можно заменить n скалярными функциями, именно, координатами вектора $\mathbf{v}_p(s)$, и соответственно каждое векторное уравнение системы (100.17) заменить n скалярными уравнениями. Теорему существования и единственности решения мы применяем тогда к системе n^2 линейных дифференциальных уравнений с n^2 неизвестными функциями, теперь уже скалярными.

Построив таким образом вектор-функции $\mathbf{v}_p(s)$, *мы должны показать, что они образуют ортонормированный репер при любом значении* s (а не только при $s=s_0$, когда они совпадают с ортами $\mathbf{e}_p$).

Покажем это прежде всего для случая собственно евклидова пространства R_n. Тогда в уравнениях (100.17) вместо $\pm$ везде стоит $-$. Пусть $\mathbf{a}$ — произвольный *постоянный* вектор в R_n. Обозначим через $a_i(s)$ скалярные произведения.

$$a_i(s) = \mathbf{a}\mathbf{v}_i(s). \tag{100.21}$$

Умножая почленно уравнения (100.17) на $\mathbf{a}$ скалярно, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da_0}{ds} &= \qquad\qquad \varkappa_1 a_1,\\
\frac{da_1}{ds} &= -\varkappa_1 a_0 + \varkappa_2 a_2,\\
\frac{da_2}{ds} &= -\varkappa_2 a_1 + \varkappa_3 a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{da_{n-1}}{ds} &= -\varkappa_{n-1} a_{n-2}.
\end{aligned}\right\} \tag{100.22}$$

Очевидно, a_0, a_1, ..., a_{n-1} можно рассматривать как *ковариантные* координаты вектора $\mathbf{a}$ относительно *переменного* репера $\{\mathbf{v}_0(s),\ \mathbf{v}_1(s),\ \ldots,\ \mathbf{v}_{n-1}(s)\}$. Будет ли этот репер ортонормированным, пока не предрешается. Заметим, что векторы $\mathbf{v}_p(s)$ во всяком случае линейно независимы: косое произведение $[\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_{n-1}]$ остается постоянным (что легко получить из уравнений (100.17), вычисляя $\frac{d}{ds}[\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_{n-1}] = 0$), а, обращаясь к начальным условиям (100.20), получаем $[\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_{n-1}] = [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\ldots\mathbf{e}_{n-1}] \neq 0$.

Составим сумму квадратов координат $a_p(s)$ и покажем, что она остается постоянной в процессе изменения $\mathbf{v}_p(s)$. Для этой цели вычислим ее производную:

$$\frac{d}{ds}(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2) =$$
$$= 2\left(a_0\frac{da_0}{ds} + a_1\frac{da_1}{ds} + a_2\frac{da_2}{ds} + \ldots + a_{n-1}\frac{da_{n-1}}{ds}\right) = 0.$$

Равенство нулю немедленно вытекает из (100.22). Итак, сумма квадратов координат a_p остается постоянной, а так как при $s = s_0$ наш переменный репер совпадает с ортонормированным репером (100.20), то эта сумма квадратов выражает скалярный квадрат вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}^2 = a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2.$$

В результате скалярный квадрат *произвольного* вектора $\mathbf{a}$ выражается в нашем переменном репере суммой квадратов ковариантных координат вектора $\mathbf{a}$, а это означает, что переменный репер является ортонормированным, что мы и хотели доказать.

В случае псевдоевклидова пространства R_n доказательство проводится совершенно аналогичным образом. Конечно, вместо суммы квадратов координат a_p нужно брать

$$\varepsilon_0 a_0^2 + \varepsilon_1 a_1^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} a_{n-1}^2,$$

где ε_p равно ± 1 в зависимости от того, является ли $\mathbf{e}_p$ единичным или мнимоединичным вектором. Вместо уравнений (100.22) мы будем иметь уравнения вида

$$\frac{da_p}{ds} = -\varepsilon_p \varepsilon_{p-1} \varkappa_p a_{p-1} + \varkappa_{p+1} a_{p+1}.$$

В остальном ход рассуждения не меняется.

Установив, что вектор-функции $\mathbf{v}_p(s)$ образуют ортонормированный репер, мы строим искомую кривую, выражая ее скользящий радиус-вектор как функцию от s:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \int_{s_0}^{s} \mathbf{v}_0(s)\, ds, \tag{100.23}$$

где $\mathbf{x}_0$ обозначает радиус-вектор точки M_0. Тогда при $s = s_0$ мы попадаем в точку M_0. Кроме того, из (100.23) следует:

$$\mathbf{x}'(s) = \mathbf{v}_0(s). \tag{100.24}$$

Но вектор $\mathbf{v}_0(s)$ *единичный*, так как при $s = s_0$ он совпадает с единичным вектором $\mathbf{e}_0$. Таким образом, производная радиуса-вектора по параметру s будет единичным вектором, *откуда следует, что s играет роль дуги вдоль построенной кривой* (заранее мы этого не знаем). Установив, что $\mathbf{v}_0(s)$ — единичный касательный вектор, и пользуясь соотношениями (100.17), которым удовлетворяют функции $\mathbf{v}_p(s)$, мы без труда убеждаемся, что векторы $\mathbf{v}_p(s)$ образуют для построенной кривой сопровождающий репер, а наперед заданные функции $\varkappa_p(s)$ играют роль кривизн. Этим теорема доказана. Правда, в теореме еще утверждается единственность искомой кривой, но это легко получить из следующих соображений. Для ортов $\mathbf{v}_p(s)$ сопровождающего репера искомой кривой *необходимо* имеют место уравнения (100.17), т. е. формулы Френе, так что, учитывая еще начальные условия, функции $\mathbf{v}_p(s)$ можно получить только тем способом, как это было сделано. При этом для касательного орта $\mathbf{v}_0(s)$ *необходимо* имеет место соотношение (100.24), интегрируя которое мы приходим к (100.23). Таким образом, полученная нами кривая единственно возможная.

Мы провели доказательство в случае $\mathbf{e}_0^2 = 1$. В случае $\mathbf{e}_0^2 = -1$ оно производится дословно так же, только обозначение параметра s нужно везде заменить на σ. Формула (100.24) получится у нас

в виде
$$\mathbf{x}'(\sigma)=\mathbf{v}_0(\sigma), \tag{100.25}$$
причем $\mathbf{v}_0(\sigma)$ будет (вместе со своим начальным значением $\mathbf{e}_0$) *мнимоединичным ортом*. Это говорит о том, что кривая имеет чисто мнимую длину дуги s, причем $s=\sigma i$.

Из доказанной теоремы вытекает следующее. *Когда для искомой кривой в R_n наперед заданы «натуральные уравнения», т. е. зависимость кривизн $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$ от дуги s при $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ (или, аналогично от параметра σ), и, кроме того, указано, какие из векторов сопровождающего репера $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ должны быть единичными и какие—мнимоединичными*[1]*, то кривая определяется с точностью до движений в R_n.* Действительно, в этом случае произвол сводится лишь к выбору начального ортонормированного репера $\{M_0, \mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}\}$, причем заранее известно, какие из его векторов должны быть единичными и какие—мнимоединичными, тогда начальный репер, а вместе с ним и кривая определяются с точностью до движения в R_n.

§ 101. Геодезические линии в римановом пространстве

Мы рассматривали в § 90 геодезические линии в пространстве аффинной связности L_n, в частности, в пространстве L_n^0 (без кручения). Все, сказанное там, справедливо и для геодезических в римановом пространстве V_n, так как риманова связность есть частный случай аффинной связности без кручения. Но в связи с наличием метрики у геодезических линий появляются новые свойства, которые мы и хотим сейчас рассмотреть.

Отметим прежде всего, что для неизотропной геодезической длина дуги s (или σ) служит *каноническим* параметром (§ 90), так что все остальные канонические параметры τ будут отличаться от s лишь постоянным множителем. В самом деле, касательный единичный вектор $\frac{dx^i}{ds}$, взятый в какой-нибудь точке геодезической и затем параллельно переносимый вдоль нее, остается касательным (по определению геодезической) и сохраняет длину 1 (по свойствам римановой связности), т. е. остается вектором $\frac{dx^i}{ds}$, а это значит, что дуга s служит каноническим параметром. Поэтому для геодезических, отнесенных к параметру s, имеют место дифференциальные уравнения (90.6):
$$\frac{d^2x^k}{ds^2}=-\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}. \tag{101.1}$$

---

[1]) Число последних, конечно, должно совпадать с индексом k пространства $R_n\,(=R_n^{(k)})$.

Совершенно аналогично обстоит дело в случае геодезической мнимой длины $s=\sigma i$, когда за параметр мы принимаем σ. Тогда $\frac{dx^i}{d\sigma}$ аналогично $\frac{dx^i}{ds}$ будет параллельно переносимым вдоль геодезической касательным вектором (только не единичным, а мнимоединичным), параметр σ будет каноническим, и снова имеют место дифференциальные уравнения (101.1) с заменой параметра s на σ.

В собственно римановых V_n все геодезические — неизотропные (и вещественной длины) и их всегда можно относить к дуге s как к параметру. Но в случае псевдоримановых V_n обязательно существуют и изотропные геодезические.

Имеет место следующая теорема:

Геодезическая линия, проведенная через данную точку M_0 в изотропном направлении, будет изотропной на всем своем протяжении. В самом деле, касательный вектор ξ^i к геодезической в точке M_0 будет изотропным, т. е. имеет нулевую длину, будучи сам отличен от нуля. При параллельном перенесении вдоль геодезической этот вектор остается к ней касательным и в то же время сохраняет нулевую длину по общим свойствам римановой связности. Таким образом, наша геодезическая и в любой своей точке будет идти в изотропном направлении.

На изотропных и геодезических нельзя принять за параметр длину дуги s (или σ) ввиду ее тождественного обращения в нуль. Но, разумеется, можно рассматривать канонический параметр τ (§ 90).

Рассмотрим теперь задачу: *вычислить вариацию длины дуги какой-либо неизотропной кривой в V_n*. Вопрос ставится так. Данная кривая

$$x^i=x^i(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \tag{101.2}$$

варьируется, т. е. включается в некоторое семейство кривых

$$x^i=x^i(t, \alpha) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{101.3}$$

зависящих от параметра α. Таким образом, при некотором определенном значении α уравнения (101.3) совпадают с (101.2). Мы будем считать, что при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и в том интервале изменения, который пробегает α, функции $x^i(t, \alpha)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Вычислим длину кривой семейства согласно (85.10):

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt.$$

Так как x^i зависят не только от t, но и от α, то под знаком корня следовало бы писать частные производные по t с круглыми ∂. Но мы условимся обозначать частные дифференциалы по t символом d, а частные дифференциалы по α — символом δ.

Полученная длина s кривой семейства зависит, конечно, от выбора этой кривой, т. е. от параметра α. С формальной стороны это сказывается в том, что α входит как параметр в подынтегральное выражение через $x^i(t, \alpha)$, от которых зависят $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, и через $\frac{dx^i(t, \alpha)}{dt}$.

Вычислим теперь вариацию длины кривой s, т. е. ее дифференциал δs по аргументу α:

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \delta \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)}{2\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}}\, dt. \qquad (101.4)$$

Предположение о неизотропности кривой, длину дуги которой мы варьируем, как мы видим, весьма существенно: иначе знаменатель подынтегрального выражения, равный $2\frac{ds}{dt}$, обращался бы в нуль. Обыкновенный дифференциал δ от инварианта $g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$ можно заменить соответствующим абсолютным дифференциалом $\tilde{D}$ (тоже при бесконечно малом смещении по линии α при постоянном t):

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right) = \tilde{D}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right) = g_{ij}\tilde{D}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} + g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} =$$

$$= 2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\tilde{D}\frac{dx^j}{dt}. \qquad (101.5)$$

Мы воспользовались здесь равенствами $\tilde{D}g_{ij} = 0$ и $g_{ij} = g_{ji}$; последнее позволило объединить два полученных члена.

Запишем в развернутом виде $\tilde{D}\frac{dx^j}{dt}$:

$$\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} = \delta\frac{dx^j}{dt} + \Gamma^j_{kp}\frac{dx^p}{dt}\delta x^k = \frac{d}{dt}\delta x^j + \Gamma^j_{pk}\delta x^k\frac{dx^p}{dt} = \frac{D\delta x^j}{dt}.$$

В процессе преобразования мы изменили порядок частных дифференцирований d и δ, а также переставили нижние индексы у Γ^j_{kp};

это законно, так как риманова связность без кручения. Через D мы обозначаем абсолютный дифференциал, отвечающий бесконечно малому смещению dt по кривой семейства (при постоянном α). Теперь (101.5) принимает вид

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)=2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{D\delta x^j}{dt}.$$

Возвращаясь к (101.4), заменяем числитель полученным выражением, а знаменатель — через $2\frac{ds}{dt}$. В результате имеем:

$$\delta s=\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}\frac{dx^i}{ds}D\delta x^j. \tag{101.6}$$

Распространяя действие символа D на все подынтегральное выражение и вычитая возникающие вследствие этого лишние члены, получаем:

$$\delta s=\int_{t_1}^{t_2} D\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right)-\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j. \tag{101.7}$$

Под знаком первого интеграла стоит абсолютный дифференциал D от инварианта. Его можно заменить, следовательно, обыкновенным дифференциалом d; производя интегрирование, получим:

$$\delta s=\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_2-\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_1-\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j. \tag{101.8}$$

Значки 1, 2 указывают, что соответствующее выражение вычисляется при $t=t_1$ и при $t=t_2$, т. е. в начальной и конечной точках кривой. В формуле (101.8) длина дуги s может быть как вещественной, так и чисто мнимой: $s=\sigma i$. Для определенности мы будем заниматься лишь первым случаем, имея в виду, что второй можно трактовать совершенно аналогично. Нужно только поделить обе части равенства на i, после чего в левой части δs заменится на $\delta\sigma$, а в правой части ds (в знаменателях) заменится на $-d\sigma$. Тем самым мнимые величины будут исключены, и вместо s мы будем рассматривать σ.

Когда мы от данной кривой семейства с определенным значением параметра α переходим к бесконечно близкой кривой $\alpha+\delta\alpha$, причем каждая точка кривой α переходит в точку кривой $\alpha+\delta\alpha$ с прежним значением t, то векторы соответствующих бесконечно малых смещений суть $\delta x^i(t, \alpha)$.

Поэтому проинтегрированные члены представляют собой проекции вектора бесконечно малого смещения δx^j на единичный касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ в начале и конце кривой (собственно говоря, в прямых скобках стоят скалярные произведения, но скалярное произведение какого-либо вектора на единичный вектор равно его проекции на направление этого единичного вектора). Нетрудно уяснить себе из наглядных соображений, что такого рода проекция в конце кривой дает, действительно, удлинение кривой, вызванное смещением ее конца; то же самое имеет место и в начале кривой, только проекцию нужно взять с обратным знаком.

Если концы варьируемой кривой закреплены, т. е.

$$x^i(t_1, \alpha) = \text{const}, \quad x^i(t_2, \alpha) = \text{const}, \tag{101.9}$$

при переменном α, то δx^i на концах кривой обращаются в нуль. Проинтегрированные члены исчезают, и (101.8) принимает вид

$$\delta s = -\int_{t_1}^{t_2} g_{ij} D \frac{dx^i}{dt} \delta x^j. \tag{101.10}$$

Предположим, что рассматриваемая кривая (101.2) *стационарной длины*. Под этим мы будем понимать, что, варьируя эту кривую любым образом, однако при условии неподвижности ее концов, мы всегда будем получать $\delta s = 0$. Тогда (101.10) дает

$$\int_{t_1}^{t_2} g_{ij} D \frac{dx^i}{ds} \delta x^j = 0$$

при любом выборе $\frac{\delta x^j}{\delta \alpha}$ как непрерывно дифференцируемых функций от t. По основной лемме вариационного исчисления отсюда следует обращение в нуль тех функций от t, которые служат коэффициентами при δx^j под знаком интеграла:

$$g_{ij} D \frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Поскольку, таким образом, тензор $D\frac{dx^i}{ds}$ равен нулю после опускания индекса, то, поднимая индекс обратно, мы получаем:

$$D \frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Это равенство означает, что касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ параллельно переносится вдоль нашей кривой. Отсюда следует (§ 90), что *наша кривая является геодезической, а длина дуги s служит вдоль нее каноническим параметром.*

Обратно, пусть кривая (101.2) — *неизотропная геодезическая.* Тогда $\frac{dx^i}{ds}$ есть параллельно переносимый вдоль геодезической касательный вектор, так что

$$D\frac{dx^i}{ds}=0 \tag{101.11}$$

и (101.10) дает нам при любых δx^j

$$\delta s=0.$$

Таким образом, вариация длины геодезической линии с закрепленными концами всегда равна нулю. В итоге мы получаем теорему: *для того чтобы неизотропная линия в римановом пространстве обладала стационарной длиной, необходимо и достаточно, чтобы она была геодезической* (в частности, в евклидовом пространстве R_n — чтобы она была прямой).

Следовательно, неизотропные геодезические получили у нас новую характеристику, как неизотропные линии стационарной длины. В случае собственно риманова V_n все линии неизотропные, так что стационарность длины может служить определением геодезической линии.

Отметим, что для (неизотропной) геодезической формула (101.8) принимает простой вид

$$\delta s=\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_2-\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_1, \tag{101.12}$$

если принять во внимание (101.11).

Итак, вариация длины геодезической вполне определяется векторами бесконечно малых смещений ее концов. При этом не нужно думать, что при вариации геодезической мы требуем, чтобы она переходила снова в геодезическую: семейство, в которое она включается, остается произвольным.

В заключение будет интересно рассмотреть формулу (101.10) уже не специально для геодезической линии, а для кривой общего вида (основного типа, §§ 99, 100). Тогда

$$\frac{dx^i}{ds}=v_0^i$$

и по первой формуле Френе

$$\frac{Dv_0^i}{ds}=\varkappa_1 v_1^i,$$

так что

$$D\frac{dx^i}{ds} = \varkappa_1 \nu_1^i \, ds.$$

Теперь (101.10) принимает вид

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \varkappa_1(s) g_{ij} \nu_1^i \delta x^j \, ds. \tag{101.13}$$

Ввиду появления ds под знаком интеграла нам пришлось указать пределы изменения тоже для s. *Итак, вариация длины дуги кривой с закрепленными концами получается следующим образом: проекция вектора бесконечно малого смещения δx^j на первую нормаль ν_1^i умножается на первую кривизну $\varkappa_1$ и на ds, интегрируется по всей кривой, и результат берется с обратным знаком* (если ν_1^i — единичный вектор; если же он мнимоединичный, то формулировка несколько меняется).

§ 102*. Геодезически параллельные гиперповерхности

Для изучения геодезических линий в римановом пространстве V_n и самого V_n в ряде случаев приносят пользу специальные, связанные с геодезическими линиями геометрические конструкции. В частности, они позволяют строить координатные системы в V_n с наиболее простыми свойствами. Конечно, вообще говоря, в V_n нельзя построить такие простые координатные системы, какими являются, например, ортонормированные координатные системы в R_n, но частично все же можно приблизиться к их свойствам.

Выберем в V_n произвольную *неизотропную* гиперповерхность V_{n-1}:

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}), \tag{102.1}$$

где параметры u^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ пробегают некоторую связную область изменения Ω_u, а функции $x^i(u^\alpha)$ (по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемые в Ω_u и на ее границе) удовлетворяют условию (83.4)

$$\text{ранг матрицы} \quad \begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{Vmatrix} \quad \text{равен } n-1. \tag{102.2}$$

В каждой точке $M \in V_{n-1}$ имеется вполне определенная неизотропная нормаль (в касательном пространстве R_n; см. § 85), единичный (или мнимоединичный) вектор которой мы обозначим η^i (рис. 19). Правда, такой вектор можно построить с точностью до умножения на -1, так что в одной точке гиперповерхности V_{n-1} мы выберем его направление произвольно, а во всех остальных — по принципу непрерывности.

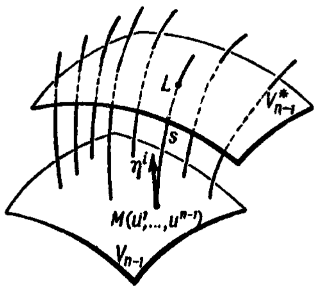

Рис. 19.

Через каждую точку M гиперповерхности V_{n-1} проведем геодезическую линию в направлении нормали, т. е. вектора η^i. Эту геодезическую мы будем называть нормальной к V_{n-1}. Отнесем ее к параметру s, если она вещественной длины, и к параметру σ, если она мнимой длины (изотропной эта геодезическая быть не может, так как касательный к ней вектор η^i неизотропный). Точку M принимаем за начальную точку отсчета $s=0$ (или $\sigma=0$). Положительное направление отсчета параметра выбираем в сторону η^i, т. е. так, чтобы в точке M касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ $\left(\text{или } \frac{dx^i}{d\sigma}\right)$ совпадал с η^i (а не с $-\eta^i$). Для определенности рассматриваем в дальнейшем случай вещественной длины.

Если мы зададимся определенными значениями параметров u^α из области Ω_u и определенным значением s, не слишком большим по модулю, то этим определится некоторая точка L в нашем римановом пространстве, а именно, параметры u^α определяют точку M на V_{n-1}, а значение s — определенную точку L на нормальной геодезической, проведенной через M, так что

$$\breve{ML}=s.$$

В частности, при $s=0$ мы попадаем в точку M на V_{n-1}. При переменном s и постоянных u^α мы, очевидно, движемся по нормальной к V_{n-1} геодезической. Поскольку точка L однозначно определяется значениями u^α, s, ее координаты x^i являются однозначными функциями этих переменных:

$$x^i=x^i(u^1,\ \ldots,\ u^{n-1},\ s), \tag{102.3}$$

где u^α пробегают область изменения Ω_u, а s — некоторый интервал изменения, включающий нуль. При этом от параметров u^α непрерывно дифференцируемым образом зависят начальные условия, определяющие геодезическую: координаты ее начальной точки M на V_{n-1} и координаты ее начального касательного вектора η^i в точке M. Из теории дифференциальных уравнений следует, что в этом случае решение дифференциальных уравнений геодезической (101.1) тоже непрерывно дифференцируемым образом зависит как от аргумента s, так и от параметров u^α.

Наша конструкция обладает одним важным свойством. *Отметим на каждой нормальной к V_{n-1} геодезической точку L так, чтобы длина дуги*

$$\overset{\smile}{ML} = s$$

была во всех случаях одной и той же. Геометрическое место точек L образует, вообще говоря, поверхность, которую мы будем называть геодезически параллельной к V_{n-1} поверхностью.

Параметрические уравнения этой поверхности мы, очевидно, получим, закрепив в уравнениях (102.3) переменное s на каком-либо постоянном значении $s = a$. Это и будет значить, что каждая точка M гиперповерхности V_{n-1} сдвинута по нормальной геодезической на постоянное расстояние a (разумеется, a может иметь любой знак).

Полученное геометрическое место

$$x^i = x^i(u^1, \ \ldots, \ u^{n-1}, \ a) \tag{102.4}$$

будет, вообще говоря, гиперповерхностью, для которой однако возможны особенности и даже случаи вырождения ее в поверхность низшего числа измерений (даже в точку). Действительно, мы не можем гарантировать, что при любом значении a у нас будет соблюдаться условие (102.2); возможно, следовательно, что не все параметры u^α будут существенными, т. е. x^i смогут быть выражены через меньшее число параметров, так что поверхность (102.4) будет иметь фактически число измерений r, меньшее $n-1$ (мы будем предполагать при этом выполнение условия (83.2), где $m = r$). Однако при достаточно малых a условие (102.2) соблюдается по соображениям непрерывности (действительно, при $a = 0$, т. е. на V_{n-1}, оно имеет место), и мы получаем гиперповерхность.

Мы утверждаем, что геодезические, нормальные к V_{n-1}, будут нормальными и к любой геодезически параллельной к V_{n-1} поверхности $\overset{*}{V}_r$ (как при $r = n-1$, так и при $r < n-1$).

Для доказательства рассмотрим отрезок $\overset{\smile}{ML}$ нормальной к V_{n-1} геодезической, конец которого M скользит по V_{n-1}, а конец L — по геодезически параллельной ей поверхности $\overset{*}{V}_r$. Длина s отрезка $\overset{\smile}{ML}$ остается постоянной по построению, $s = a$. Вычислим теперь вариацию длины отрезка $\overset{\smile}{ML}$ при его бесконечно малом смещении, причем мы можем пользоваться формулой (101.12), поскольку $\overset{\smile}{ML}$ — отрезок геодезической:

$$\delta s = \left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j\right]_L - \left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j\right]_M. \tag{102.5}$$

Очевидно, $\delta s = 0$, так как s остается постоянной. Далее, $\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_M$ выражает скалярное произведение вектора $\frac{dx^i}{ds}$, касательного к $\smile{ML}$ в начальной точке M, на вектор δx^j бесконечно малого смещения точки M по V_{n-1}. Так как $\frac{dx^i}{ds} = \eta^i$ вектор, нормальный к V_{n-1}, а δx^j — вектор, касательный к V_{n-1}, то это скалярное произведение равно нулю.

Теперь равенство (102.5) принимает вид

$$\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_L = 0, \tag{102.6}$$

т. е. равно нулю скалярное произведение вектора $\frac{dx^i}{ds}$, касательного к $\smile{ML}$ в точке L, на вектор δx^j бесконечно малого смещения точки L по поверхности V_r^*. Так как, варьируя отрезок $\smile{ML}$, мы можем произвольно двигать его конец L по поверхности V_r^*, то δx^j — *произвольный* касательный к этой поверхности вектор в точке L. Отсюда следует, что *вектор* $\frac{dx^i}{ds}$, *касательный к геодезической* $\smile{ML}$ *в точке* L, *направлен по нормали к поверхности* V_r^*. Этим наше утверждение доказано.

Чтобы не загромождать доказательства, мы не вводили явно параметра α, по которому берется вариация, и не строили явно семейства кривых, включающих отрезок $\smile{ML}$, или, вернее, выполнили это построение в виде наглядной картины «движения» отрезка.

Ясно, что наше доказательство без всяких затруднений можно повторить в формально безупречных терминах.

Полученный результат лишает исходную гиперповерхность V_{n-1} ее особой роли. В самом деле, рассмотрим геодезически параллельную ей гиперповерхность V_{n-1}^* $(r = n-1)$. Нормальные к V_{n-1}^* геодезические будут те же самые, что и для V_{n-1}. При этом, так как они неизотропные, ортогональная к ним гиперповерхность V_{n-1}^* будет тоже неизотропной.

В результате геодезический параллелизм (неизотропных) гиперповерхностей V_{n-1}, V_{n-1}^* *означает, что между ними сохраняется постоянное расстояние по общим нормальным геодезическим.* Отсюда ясно, что всякая поверхность, геодезически параллельная V_{n-1}, будет геодезически параллельна и V_{n-1}^*, и обратно. Поэтому V_{n-1} и V_{n-1}^* порождают одно и то же семейство геодезически параллельных поверхностей, так что за исходную поверхность можно принять V_{n-1}^* вместо V_{n-1}. Более детальное рассмотрение показало бы, что за исходную поверхность можно принять неизотропную поверхность V_r^*, геодезически параллельную V_{n-1}, и в том случае, когда ее число измерений $r < n-1$.

Дело в том, что хотя положение точки на V_r^* зависит лишь от r параметров, но нормальная плоскость к V_r^* будет зато не одномерной, а $n-r$-мерной, так что в каждой точке нормальное направление зависит от $n-r-1$ параметра. В результате, проводя геодезическую линию через каждую точку $M^* \in V_r^*$ по каждому нормальному направлению (по крайней мере, внутри некоторого конуса в нормальной плоскости), мы снова получаем семейство геодезических от $n-1$ параметров; откладывая на них отрезки одинаковой длины $s=a$, мы получаем геодезически параллельные гиперповерхности, те же самые, что и порожденные гиперповерхностью V_{n-1}.

Итак, мы пришли к следующему результату:

Всякая неизотропная гиперповерхность V_{n-1} включается и притом единственным образом в однопараметрическое семейство геодезически параллельных гиперповерхностей. Эти гиперповерхности (тоже неизотропные) обладают общими нормальными геодезическими и взятые попарно высекают на этих геодезических отрезки постоянной длины. При отдельных значениях параметра гиперповерхность семейства может вырождаться в поверхность меньшего числа измерений (более трудные случаи появления особенностей мы исключаем).

В частности, в обычном пространстве всякая поверхность включается в однопараметрическое семейство «параллельных» ей поверхностей, обладающих общими с ней нормалями и попарно отстоящих друг от друга на постоянном расстоянии, если измерять это расстояние по общим нормалям.

В качестве примера рассмотрим в обычном пространстве *семейство круглых цилиндров с общей осью.* Эти поверхности («гиперповерхности» с точки зрения обычного пространства) образуют семейство от одного параметра и обладают общими нормальными геодезическими.

Действительно, всевозможные перпендикуляры, восстановленные к оси во всевозможных ее точках, служат общими нормалями ко всем цилиндрам семейства. Отрезки общих нормалей между двумя цилиндрами остаются по длине постоянными. Строя поверхности, геодезически параллельные данному цилиндру семейства, мы всегда будем получать другие цилиндры семейства, с одним лишь исключением: если по внутренним нормалям к цилиндру откладывать постоянный отрезок, равный радиусу его основания, то геодезически параллельная поверхность вырождается в линию — в ось цилиндра. Аналогичные явления возможны, конечно, и в многомерном случае (поверхность V_r^*).

Мы уже указывали коротко, как восстановить семейство геодезически параллельных гиперповерхностей не только по любой его гиперповерхности V_{n-1}^*, но и в случае ее вырождения в поверхность V_r^* меньшего числа измерений. Совершенно таким же образом можно и заново построить семейство геодезически параллельных гиперповерхностей, задавшись некоторой неизотропной поверхностью V_r, которая должна будет войти в это семейство в качестве вырожденной гиперповерхности. Мы рассмотрим эту задачу в важном частном случае, *когда заданная поверхность будет нулевого измерения и представляет собой просто точку* V_0.

В этом случае любое направление, исходящее из точки V_0, будет нормальным по отношению к «поверхности» V_0. Поэтому геодезические мы будем проводить через V_0 по всевозможным направлениям за исключением, однако, изотропных направлений. При этом нужно рассматривать отдельно геодезические вещественной и мнимой длины. Откладываем от V_0 по геодезическим вещественной длины отрезки постоянной длины $s=a$; концы этих отрезков образуют гиперповерхность, которую мы будем называть *геодезической гиперсферой радиуса* a *с центром в* V_0.

Аналогичным образом, откладывая от V_0 по геодезическим мнимой длины отрезки постоянной длины $s=ai$, мы получаем гиперповерхность, которую будем называть *геодезической гиперсферой радиуса* ai *с центром* V_0. В случае собственного риманова пространства существуют геодезические гиперсферы лишь вещественного радиуса, которые полностью охватывают точку V_0, так что в них упираются геодезические, исходящие из V_0 по всем направлениям. В случае псевдориманова пространства геодезические гиперсферы вещественного и мнимого радиусов строятся в основных чертах сходно с гиперсферами S_{n-1} в соответствующем псевдоевклидовом пространстве R_n. Для определенности мы ограничимся в дальнейшем геодезическими гиперсферами вещественного радиуса.

Мы утверждаем, что геодезические вещественной длины, исходящие из точки V_0, *служат нормальными геодезическими для геодезических гиперсфер* V_{n-1}^* *вещественного радиуса с центром* V_0.

Нам требуется доказать, таким образом, что геодезическая, соединяющая центр V_0 гиперсферы V_{n-1}^* с произвольной ее точкой L, направлена по нормали к V_{n-1}^* в точке L. Для этого мы повторяем прежние рассуждения, а именно, вычисляем вариацию длины геодезического отрезка $\breve{ML}$, где точка M закреплена в центре гиперсферы V_0, а L скользит по гиперсфере V_{n-1}^*. На прежних основаниях пользуемся формулой (102.5), причем

$$\delta s=0,$$

так как $s=\smile{ML}$ остается постоянным, а

$$\left[g_{ij}\frac{dx^i}{dx}\delta x^j\right]_M=0,$$

так как $[\delta x^j]_M=0$ в силу неподвижности точки M. Снова приходим к (102.6), что и означает ортогональность геодезической $\smile{ML}$ к гиперсфере в точке L.

Таким образом, геодезические гиперсферы вещественного радиуса с данным центром V_0 образуют однопараметрическое семейство геодезически параллельных гиперповерхностей с общими нормальными геодезическими, сходящимися в общем центре V_0. При этом центр V_0 можно рассматривать как гиперповерхность семейства, выродившуюся в точку.

Совершенно аналогичный результат справедлив, разумеется, и для семейства концентрических геодезических гиперсфер мнимого радиуса.

§ 103. Полугеодезические координатные системы

Зависимость (102.3), установленная нами в § 102, наталкивает на мысль принять переменные $u^1, \ldots, u^{n-1}, s$ за новые координаты хотя бы в той области нашего пространства, которую заполняют нормальные к V_{n-1} геодезические. Однако для этого необходимы еще некоторые оговорки. Дело в том, что эти геодезические, исходящие из разных точек V_{n-1}, могут пересекаться между собой, так что *различным* параметрам u^α, s может отвечать *одна и та же* точка L. Чтобы обеспечить *взаимную однозначность* соответствия между параметрами u^α, s и точками рассматриваемой области, ее, возможно, придется ограничить не слишком обширной окрестностью гиперповерхности V_{n-1}. В общем случае можно утверждать лишь, что в некоторой окрестности любой точки гиперповерхности V_{n-1} переменные u^α, s способны служить координатами в V_n. В самом деле, вычислим частные производные $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial x^i}{\partial s}$ функций (102.3) в точке M на V_{n-1} (т. е. при $s=0$). В силу общих предположений (102.2) векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}$ — направляющие векторы касательной гиперплоскости — линейно независимы между собой. Кроме того, направленный по нормали и, следовательно, ортогональный к ним единичный вектор $\eta^i=\frac{\partial x^i}{\partial s}$ также от них линейно не зависит. Следовательно, определитель, образованный координатами векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial x^i}{\partial s}$, будет отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial s} & \frac{\partial x^2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial s} \end{vmatrix} = \frac{\partial (x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial (u^1, \dots, u^{n-1}, s)} \neq 0. \qquad (103.1)$$

Это показывает, что зависимость (102.3) обратима, по крайней мере, в некоторой окрестности рассматриваемой точки M, так что $u^1, \dots, u^{n-1}, s$ можно выразить однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями старых координат x^i. В результате переменные $u^1, \dots, u^{n-1}, s$, по крайней мере, в этой окрестности можно принять за новые координаты.

В дальнейшем мы перейдем к координатам $u^1, \dots, u^{n-1}, s$; *будем обозначать их просто* $x^1, \dots, x^{n-1}, x^n$. Очевидно, эти координаты обладают следующими свойствами: *координатные линии* x^n *суть геодезические, вдоль которых* x^n *служит длиной дуги (или, в случае мнимого* s, *параметром* σ), *причем эти геодезические ортогонально секут координатные гиперповерхности* $x^n = \text{const}$. Действительно, гиперповерхности $s = \text{const}$ геодезически параллельны между собой, а координатные линии x^n служат нормальными к ним геодезическими.

Координатную систему x^i с указанными свойствами мы будем называть *полугеодезической*. Полугеодезическую систему координат мы получим, в частности, следующим образом. Выберем какую-нибудь точку V_0 и рассмотрим выходящие из нее геодезические вещественной длины. Эти геодезические ортогонально пересекают геодезические гиперсферы вещественного радиуса с центром в V_0. Рассмотрим на одной из этих гиперсфер какую-нибудь область, отнесенную к параметрам $u^1, \dots, u^{n-1}$, и к этим же параметрам будем относить геодезические, соединяющие центр гиперсферы V_0 с точками рассматриваемой области. При этом мы берем геодезическую каждый раз лишь по одну сторону точки V_0, т. е. рассматриваем геодезические лучи, исходящие из точки V_0. Положение произвольной точки L на геодезическом луче мы будем характеризовать длиной дуги $s = V_0L$. Очевидно, что *тогда переменные* $u^1, \dots, u^{n-1}$, s *образуют полугеодезическую систему координат в области, заполненной рассматриваемыми геодезическими лучами, т. е. во внутренности некоторого «геодезического гиперконуса»* (точка V_0 исключается). Впрочем, нужно еще оговорить, что все построение происходит в достаточной близости точки V_0, чтобы исходящие из V_0 геодезические лучи не могли иметь общих точек кроме V_0. Разумеется, аналогичное построение можно произвести и с геодезическими мнимой длины.

Выясним строение метрического тензора g_{ij} в произвольной полугеодезической координатной системе.

Пусть dx^i и δx^i — векторы бесконечно малых смещений из какой-либо точки L соответственно по координатной линии x^n и по гиперповерхности $x^n = \text{const}$. Тогда

$$dx^1 = \ldots = dx^{n-1} = 0; \quad \delta x^n = 0. \tag{103.2}$$

В силу ортогональности координатных линий x^n и гиперповерхностей $x^n = \text{const}$ скалярное произведение векторов dx^i, δx^i должно давать нуль:

$$g_{ij} dx^i \delta x^j = 0,$$

т. е.

$$(g_{n1}\delta x^1 + g_{n2}\delta x^2 + \ldots + g_{n,n-1}\delta x^{n-1})\, dx^n = 0.$$

Так как $dx^n \neq 0$, δx^1, δx^2, ..., δx^{n-1} произвольны, то получаем:

$$g_{n1} = g_{n2} = \ldots = g_{n,n-1} = 0. \tag{103.3}$$

Очевидно, это условие, обратно, достаточно для ортогональности координатных линий x^n гиперповерхностям $x^2 = \text{const}$.

Далее, записывая общее выражение линейного элемента

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{103.4}$$

и применяя его для бесконечно малого смещения вдоль координатной линии x^n, получаем:

$$ds^2 = g_{nn}(dx^n)^2,$$

а так как вдоль линии x^n, в случае вещественной длины, $ds = dx^n$, то окончательно

$$g_{nn} = 1. \tag{103.5}$$

Итак, в полугеодезической координатной системе координаты метрического тензора подчинены условиям (103.3), (103.5), *так что линейный элемент принимает вид*

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + dx^{n^2} \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{103.6}$$

В случае, когда координатные линии x^n — геодезические мнимой длины и x^n играет роль параметра σ вдоль них, мы приходим к тем же результатам с той лишь разницей, что условие (103.5) имеет вид $g_{nn} = -1$ и соответственно в (103.6) вместо dx^{n^2} стоит $-dx^{n^2}$.

Обратно, указанное строение линейного элемента, т. е. соблюдение условий (103.3), (103.5), *достаточно для того, чтобы данная координатная система x^i была полугеодезической.*

В самом деле, условие (103.3) означает, что координатные линии x^n ортогональны к координатным гиперповерхностям $x^n = \text{const}$, а из условия (103.5) следует, что вдоль линий x^n

$$ds^2 = g_{nn}(dx^n)^2 = dx^{n^2},$$

т. е. dx^n совпадает с дифференциалом дуги, и x^n служит длиной дуги. Остается показать, что линии x^n — геодезические. Для этого выпишем дифференциальные уравнения геодезических (101.1):

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}. \tag{103.7}$$

Подсчитаем коэффициенты связности вида Γ^k_{nn}. Пользуясь соотношением (94.8), пишем:

$$\Gamma_{l,\,nn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ln}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nn}}{\partial x^l}\right) = 0,$$

так как g_{ln}, g_{nn} суть константы (0 или 1). Далее, согласно (94.6)

$$\Gamma^k_{nn} = g^{kl}\Gamma_{l,\,nn} = 0. \tag{103.8}$$

Теперь нетрудно проверить, что линии x^n будут геодезическими, т. е. для этих линий удовлетворяются дифференциальные уравнения (103.7). Действительно, вдоль линий x^n мы имеем $s = x^n$ и следовательно,

$$\frac{dx^k}{ds} = \begin{cases} 0 & (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ 1 & (k = n), \end{cases} \tag{103.9}$$

так что $\frac{d^2x^k}{ds^2} = 0$. Правая же часть уравнения (103.7) в силу (103.9) принимает вид Γ^k_{nn}, а значит, тоже равна нулю. Уравнения (103.7) удовлетворяются, и наше предложение доказано. Аналогично обстоит дело и в том случае, когда линии x^n мнимой длины и условие (103.5) имеет вид $g_{nn} = -1$.

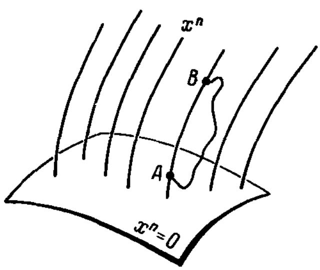

Рис. 20.

Мы установили (§ 101), что неизотропные геодезические — линии стационарной длины. *Естественно поставить вопрос, не будут ли они линиями экстремальной длины наподобие прямых в обычном пространстве, которые дают кратчайшее расстояние между двумя точками.*

Рассмотрим сначала *собственно риманово пространство, отнесенное к полугеодезической координатной системе*, так что линейный элемент имеет вид (103.6).

Так как линейный элемент ds^2 в нашем случае положительно определенный, то, в частности, он будет положительно определенным и на гиперповерхности $x^n = \text{const}$. При этом $dx^n = 0$, и мы получаем:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta > 0 \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \qquad (103.10)$$

если только dx^α не обращаются в нуль одновременно.

Покажем, что всякий отрезок AB геодезической линии x^n короче любой другой кривой $\overset{\smile}{AB}$, соединяющей его концы (и лежащей в той области, где определена наша полугеодезическая координатная система; рис. 20).

Длина отрезка AB геодезической x^n равна, очевидно, $x^n_B - x^n_A$, где $x^n_A < x^n_B$ — значения координаты x^n в точках A и B.

Проведем теперь произвольную другую гладкую кривую $\overset{\smile}{AB}$, соединяющую те же точки A, B. Вычислим ее длину

$$s = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \sqrt{g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta + dx^{n^2}}.$$

Интеграл берется по кривой $\overset{\smile}{AB}$, причем предполагается, что она отнесена к какому-то параметру t, который нет надобности явно выписывать. В силу (103.10)

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta + dx^{n^2}} \geqslant |dx^n|, \qquad (103.11)$$

причем хотя бы на отдельных участках имеет место знак $>$ (иначе $dx^\alpha \equiv 0$, и кривая $\overset{\smile}{AB}$ совпадает с отрезком AB геодезической x^n). В результате

$$s > \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} |dx^n| \geqslant \Bigl|\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} dx^n\Bigr|.$$

Последнее неравенство написано в силу известного свойства определенных интегралов. Так как

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} dx^n = x^n_B - x^n_A > 0,$$

то окончательно получаем:

$$s > x^n_B - x^n_A, \qquad (103.12)$$

что мы и хотели показать.

Таким образом, отрезок геодезической AB действительно дает кратчайшее расстояние между точками A, B по сравнению с кривыми $\overset{\smile}{AB}$, лежащими в некоторой окружающей его области, *если только его можно включить в координатную линию x^n полугеодезической координатной системы.* А между тем это не всегда можно сделать. Действительно, пусть геодезический отрезок AB нам задан. Чтобы построить полугеодезическую координатную систему, в которой данный отрезок принадлежал бы координатной линии x^n, естественно поступить так. Проводим какую-нибудь гиперповерхность V_{n-1} через точку A ортогонально к геодезической AB. Разумеется, условие ортогональности определяет лишь касательную гиперплоскость к V_{n-1} в точке A; в остальном V_{n-1} проводится произвольно. Примем гиперповерхность V_{n-1} за исходную для построения полугеодезической координатной системы $x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n = u^1, \ldots, u^{n-1}, s$; нормальная к V_{n-1} геодезическая AB включится в число координатных линий x^n. Однако, как мы знаем, *переменные* $u^1, \ldots, u^{n-1}$, *s наверняка дают полугеодезическую координатную систему лишь в некоторой окрестности точки* A; при дальнейшем продолжении нормальных к V_{n-1} геодезических они, возможно, начинают пересекаться и тем самым становятся неспособными служить координатными линиями x^n. Поэтому мы не можем утверждать, что обязательно весь отрезок AB включается в координатную линию x^n нашей полугеодезической системы; это можно утверждать лишь для некоторого отрезка AB', составляющего часть отрезка AB. Тем самым, *не всякий вообще отрезок геодезической дает кратчайшее расстояние между своими концами хотя бы в некоторой окружающей его области*; *но всякий отрезок геодезической*, *отложенный от произвольно взятой ее точки* A *и не слишком большой по длине*, *этим свойством обладает*. Для более точной оценки тех пределов, в которых можно менять длину этого отрезка, необходимо было бы прибегнуть к более тонким методам вариационного исчисления.

Простым примером может служить двумерная собственно риманова геометрия на обычной сфере. Геодезическими являются окружности больших кругов, причем дуга AB, меньшая полуокружности, дает кратчайшее расстояние между точками A, B на сфере; дуга же AB, бóльшая полуокружности, не дает кратчайшего расстояния даже в сколь угодно узкой окружающей ее области на сфере.

Положение вещей сильно меняется *в случае псевдориманова пространства*. Будем для определенности рассматривать геодезические вещественной длины и сравнивать их с линиями тоже только вещественной длины. Прежде всего в псевдоримановом пространстве будет неверным соотношение (103.10), а следовательно, падает и весь вывод, приводящий к (103.12). Так как теперь $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ может быть, вообще говоря, и отрицательным и положительным, то длина s кривой $\smile{AB}$ может быть и больше и меньше длины геодезического отрезка AB. Геодезические линии даже в малых кусках теряют свои экстремальные свойства и остаются лишь линиями стационарной длины. Исключением является случай, когда линейный элемент на гиперповерхностях $x^n = \text{const}$ будет *отрица-*

тельно определенным:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta < 0. \tag{103.13}$$

Рассмотрим этот случай подробнее.

Так как геодезические линии x^n по нашему предположению имеют вещественную длину и вдоль них $ds^2 > 0$, то речь идет, очевидно, о псевдоримановом пространстве индекса $n-1$. В этом случае, сравнивая отрезок AB геодезической линии x^n с гладкой кривой $\smile{AB}$ тоже вещественной длины, получаем вместо (103.11)

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + dx^{n^2}} \leqslant |dx^n|. \tag{103.14}$$

При движении по $\smile{AB}$ от точки A к точке B все время

$$dx^n > 0.$$

Действительно, так как $x_B^n > x_A^n$, то dx^n не может все время оставаться отрицательным; если допустить для dx^n отрицательные значения, то, переходя от них к положительным значениям, dx^n принимал бы значение нуль в силу гладкости кривой $\smile{AB}$.

В этих точках мы имели бы согласно (103.6)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta < 0$$

вопреки предположению о вещественной длине кривой $\smile{AB}$*). Итак, $dx^n > 0$, и (103.13) можно переписать в виде

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + dx^{n^2}} \leqslant dx^n.$$

Интегрируя это неравенство по кривой $\smile{AB}$ и учитывая, что, по крайней мере, на некоторых участках неравенство является строгим, мы получаем:

$$s < x_B^n - x_A^n. \tag{103.15}$$

Следовательно, в псевдоримановом пространстве индекса $n-1$ отрезок AB геодезической вещественной длины дает длиннейшее расстояние между точками A, B, предполагая, что этот отрезок можно включить в координатную линию x^n полугеодезической координатной системы и что для сравнения берутся гладкие кривые $\smile{AB}$ вещественной длины из области, где определена эта координатная система.

Как и раньше, включение AB в координатную линию x^n можно гарантировать лишь для не слишком больших AB.

---

*) Строго говоря, эти рассуждения следовало бы вести не с dx^n, а с производной $\frac{dx^n}{dt}$, где t — параметр, монотонно растущий вдоль кривой $\smile{AB}$, причем $\frac{dx^i}{dt}$ одновременно в нуль не обращаются.

В случае псевдоевклидова пространства R_n индекса $n-1$ эта оговорка отпадает: всякую прямую вещественной длины можно принять за ось x^n ортонормированной координатной системы x^1, x^2, ..., x^{n-1}, x^n, в которой скалярный квадрат вектора имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - \ldots - x^{n-1^2} + x^{n^2}.$$

Поэтому любой прямолинейный отрезок AB вещественной длины будет служить длиннейшим расстоянием между точками A и B, если для сравнения брать гладкие кривые $\smile{AB}$ тоже вещественной длины.

Совершенно аналогичным образом в R_n индекса 1 прямолинейный отрезок AB мнимой длины будет служить длиннейшим расстоянием между точками A и B по сравнению со всевозможными гладкими кривыми $\smile{AB}$ тоже мнимой длины.

§ 104*. Динамика системы в обычном пространстве как динамика точки в римановом пространстве

В этом параграфе мы рассмотрим сначала *динамику точки в собственно римановом пространстве* V_n, а затем покажем, как истолковать в этом смысле обычную динамику системы.

Мы будем рассматривать в V_n подвижную точку M, обладающую массой единица и находящуюся под действием силового поля

$$f^k = f^k(x^1, \ldots, x^n; t). \tag{104.1}$$

Здесь f^k — вектор, заданный в каждой точке и в каждый момент времени t и выражающий силу, действующую на M, если M попадает в эту точку в этот момент времени.

Все понятия механики в римановом пространстве мы будем трактовать по аналогии с механикой в обычном пространстве. Пусть закон движения точки M задается уравнениями

$$x^i = x^i(t),$$

где t — время. Естественно принять вектор

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

за вектор скорости, а вектор $\frac{D\dot{x}^i}{dt}$ — за вектор ускорения точки M. Тогда дифференциальные уравнения движения точки M будут:

$$\frac{D\dot{x}^k}{dt} = f^k, \tag{104.2}$$

или в развернутом виде

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = f^k(x^1, \ldots, x^n; t). \tag{104.3}$$

Если $f^k \equiv 0$, т. е. движение совершается по инерции, мы получаем дифференциальные уравнения геодезических линий, которые и служат в этом случае траекториями движения; при этом время t играет роль канонического параметра. Для дальнейшего будет полезно перейти к другой форме этих дифференциальных уравнений, а именно, опуская индекс k (как обычно, при помощи метрического тензора g_{ij}) в уравнении (104.2), получаем:

$$\frac{D\dot{x}_i}{dt} = f_i,$$

где $\dot{x}_i = g_{ij}\dot{x}^j$, $f_i = g_{ij}f^j$ — ковариантные координаты векторов скорости и силы. В развернутом виде

$$\frac{d\dot{x}_i}{dt} - \Gamma^p_{ki}\dot{x}_p \frac{dx^k}{dt} = f_i.$$

Заменяя здесь $\frac{dx^k}{dt}$ через $\dot{x}^k$ и $\dot{x}_p$ через $g_{pl}\dot{x}^l$, получаем:

$$\frac{d\dot{x}_i}{dt} - \Gamma_{l,\,ki}\dot{x}^l\dot{x}^k = f_i, \tag{104.4}$$

где, как обычно,

$$\Gamma_{l,ki} = g_{pl}\Gamma^p_{ki}.$$

Вспоминая выражение для $\Gamma_{l,\,ki}$

$$\Gamma_{l,ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}\right),$$

свертывая его с $\dot{x}^l\dot{x}^k$, получаем $\frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\dot{x}^l\dot{x}^k$, так как второй и третий члены взаимно уничтожаются. Теперь (104.4) можно переписать в виде

$$\frac{d\dot{x}_i}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\dot{x}^l\dot{x}^k = f_i. \tag{104.5}$$

За кинетическую энергию T точки M естественно принять произведение массы (которая равна единице) на половину квадрата скорости; при этом квадрат скорости можно подсчитать как скалярный квадрат вектора $\dot{x}^i$. Получаем:

$$T = \frac{1}{2} g_{lk}(x^1, \ldots, x^n)\dot{x}^l\dot{x}^k. \tag{104.6}$$

Рассматривая T как функцию $2n$ переменных, именно, x^i, $\dot{x}^i$, вычислим частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\dot{x}^l\dot{x}^k, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = g_{ik}\dot{x}^k = \dot{x}_i.$$

В последнем случае дифференцируем по $\dot{x}^i$ сначала множитель $\dot{x}^l$, затем $\dot{x}^k$, причем оба раза получается одно и то же выражение. В результате (104.5) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^i}=f_i. \qquad (104.7)$$

Рассмотрим теперь механическую систему в обычном пространстве со склерономными и голономными связями. Это значит, что связи, во-первых, не зависят от времени и, во-вторых, носят конечный (не дифференциальный) характер. В таком случае кинетическая энергия системы T, записанная в обобщенных координатах q^i $(i=1, 2, \ldots, n)$, имеет вид положительно определенной квадратичной формы относительно $\dot{q}^i$ с коэффициентами, зависящими от q^i:

$$T=\frac{1}{2}a_{ik}(q^1, \ldots, q^n)\dot{q}^i\dot{q}^k. \qquad (104.8)$$

Запишем дифференциальные уравнения движения системы (*уравнения Лагранжа 2-го рода*):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (104.9)$$

Здесь $Q_i(q^1, \ldots, q^n; t)$ — обобщенные силы соответственно по координатам q^i.

Рассмотрим n-мерное многообразие положений механической системы, отнесенное к координатам q^i. Превратим это многообразие в собственно риманово пространство V_n, вводя в нем линейный элемент

$$ds^2=a_{ij}(q^1, \ldots, q^n)\,dq^i\,dq^j \qquad (104.10)$$

с коэффициентами, заимствованными из выражения кинетической энергии. Из механического смысла этой квадратичной формы, именно, $ds^2=2T\,dt^2$, вытекает ее инвариантный характер (относительно преобразования обобщенных координат q^i). Метрический тензор имеет вид $g_{ij}=a_{ij}$. Движение системы можно теперь истолковать как движение точки M единичной массы в римановом пространстве V_n. Уравнения движения системы (104.9) мы истолкуем тогда как уравнения движения точки (104.7), причем обобщенные силы Q_i будут играть роль ковариантных координат f_i той силы, которая действует на точку M.

Допустим теперь, что на нашу систему наложены кроме голономных и *неголономные связи* вида

$$\overset{(k)}{b}_1 dq^1+\ldots+\overset{(k)}{b}_n dq^n=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, p), \qquad (104.11)$$

где $\overset{(k)}{b}_i$ — функции от $q^1, \ldots, q^n$. Эти p уравнений предполагаются линейно независимыми.

С точки зрения риманова пространства V_n уравнения (104.11) означают следующее. В каждой точке q^i задается проходящая через нее $n-p$-мерная плоскость касательного пространства, векторы которой ξ^i удовлетворяют уравнениям

$$\overset{(k)}{b}_i \xi^i = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p), \tag{104.12}$$

где $\overset{(1)}{b}_i, \ldots, \overset{(p)}{b}_i$ — ковариантные тензоры.

Как видно из (104.11), допустимыми являются лишь те движения точки M, при которых вектор скорости $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$ в каждой точке траектории принадлежит плоскости (104.12). Эту плоскость мы будем называть допустимой, а ее векторы ξ^i — допустимыми.

Однако лишь кинематическая формулировка не исчерпывает значения неголономных связей (как, впрочем, и голономных). *Точный механический смысл связей* (104.11) *заключается в появлении при каждом движении точки M силы реакции, ортогональной к допустимой плоскости и подобранной так, чтобы обеспечить допустимый характер движения.*

Обозначим ковариантные координаты силы реакции через φ_i. Для того чтобы она была ортогональна ко всем векторам ξ^i допустимой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы тензор φ_i представлял собой линейную комбинацию тензоров $\overset{(k)}{b}_i$:

$$\varphi_i = \lambda_1 \overset{(1)}{b}_i + \ldots + \lambda_p \overset{(p)}{b}_i. \tag{104.13}$$

Здесь $\overset{(k)}{b}_i$ — известные нам функции точки, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — неизвестные функции времени t, подлежащие определению особо для каждого движения точки M.

Теперь движение точки M мы ищем следующим образом. Неизвестными функциями от t являются $q^1, \ldots, q^n$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Дифференциальные уравнения движения (104.9) ввиду появления силы реакции примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i + \lambda_1 \overset{(1)}{b}_i + \ldots + \lambda_p \overset{(p)}{b}_i, \tag{104.14}$$

причем сюда нужно присоединить вследствие (104.11) еще уравнения

$$\overset{(k)}{b}_i \dot{q}^i = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p). \tag{104.15}$$

Всего мы имеем $n+p$ дифференциальных уравнений для определения $n+p$ неизвестных функций от t. При этом $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ входят конечным образом и могут быть исключены из наших уравнений путем свертывания (104.14) поочередно с $n-p$ линейно независимыми допустимыми векторами

$$\xi^i_{(1)},\ \xi^i_{(2)},\ \ldots,\ \xi^i_{(n-p)}.$$

Окончательно мы получим $n-p$ дифференциальных уравнений 2-го порядка и p уравнений 1-го порядка (104.15) относительно неизвестных функций $q^i(t)$. Эта система будет иметь одно и только одно решение, если как-либо задаться в начальный момент $t=t_0$ точкой $(q^i)_0$ и вектором скорости $\left(\frac{dq^i}{dt}\right)_0$, лежащим в допустимой плоскости.

Механику системы можно связать с римановой геометрией и существенно иным образом — через принцип наименьшего действия.

Будем рассматривать на этот раз систему не только склерономную и голономную, но и консервативную, т. е. обладающую потенциалом сил $U(q^1, \ldots, q^n)$, так что

$$Q_i=\frac{\partial U}{\partial q^i}.$$

Полная энергия $E=T-U$ при действительном движении такой системы остается постоянной. Мы будем рассматривать движения системы лишь с фиксированным значением энергии E:

$$E=\text{const}.$$

Введем в n-мерном многообразии положений системы риманову метрику иначе, чем раньше, а именно, положим:

$$ds^2=2\,(U+E)\,a_{ij}\,dp^i\,dq^j, \tag{104.16}$$

где $a_{ij}(q^1, \ldots, q^n)$ имеют прежний смысл. Траектория всякого движения системы изображается кривой в этом римановом пространстве. Пусть движение началось с положения A и кончилось положением B. Тогда соответствующая кривая начинается в точке A и кончается точкой B. Длина этой кривой имеет вид

$$\int\limits_{\smile AB} ds=\int\limits_{\smile AB}\sqrt{2\,(U+E)}\,\sqrt{a_{ij}\,dq^i\,dq^j}\,.$$

Согласно принципу наименьшего действия в форме Якоби траектория действительного движения системы между положениями A *и B дает стационарное значение этого интеграла, т. е. геодезическую линию в римановом пространстве. Итак, траектории действительных движений системы с фиксированным значением энергии изображаются геодезическими линиями в римановом пространстве с метрикой* (104.16).

ГЛАВА IX

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

До сих пор мы занимались римановым пространством V_n и пространством аффинной связности L_n, в сущности, лишь в той мере, в какой первое из них напоминало евклидово пространство R_n, а второе — аффинное пространство A_n. Мы по мере возможности переносили свойства этих простых пространств в более общие и сложные пространства V_n и L_n.

Теперь нам предстоит рассмотреть теорию кривизны пространств V_n и L_n, причем под кривизной мы здесь понимаем, грубо говоря, уклонение геометрии этих пространств от геометрии их прообразов, R_n и A_n (правда, в случае L_n с кручением уклонение от геометрии в A_n выражается также и кручением). Это уклонение мы будем оценивать в бесконечно малой окрестности произвольной точки M, где оно, как мы увидим, будет выражаться в главной своей части определенным четырехвалентным тензором, заданным в точке M, — *тензором кривизны* (*тензором Римана — Христоффеля*). Поэтому во всем дальнейшем тензор кривизны будет играть у нас основную роль.

§ 105. Тензор кривизны в L_n

Мы начнем с построения тензора кривизны в L_n, затем рассмотрим его в частном случае L_n^0 (L_n без кручения) и затем в еще более частном случае V_n. При переходе от L_n к L_n^0 и от L_n^0 к V_n тензор кривизны обогащается каждый раз новыми важными свойствами, которые требуют особого рассмотрения.

К тензору кривизны в L_n мы придем сначала в результате некоторых формальных выкладок, а геометрический его смысл покажем позже.

Пусть в L_n дано одноковариантное тензорное поле

$$u_i = u_i(x^1, \ \ldots, \ x^n). \qquad (105.1)$$

Вычислим абсолютный дифференциал Du_i тензора u_i при бесконечно малом смещении из данной точки M в каком-либо направлении; от этого дифференциала, который снова представляет собой одноковариантный тензор в точке M, вычислим абсолютный дифференциал $\tilde{D}$ при бесконечно малом смещении из точки M в какой-нибудь *другом* направлении (знак $\sim$ отмечает, что направление смещения теперь другое). Получим тензор $\tilde{D}Du_i$. С другой стороны, вычислим тензор $D\tilde{D}u_i$, отличающийся от предыдущего лишь порядком абсолютных дифференцирований. Как оказывается, эти тензоры будут, вообще говоря, различны; мы хотим уяснить себе, какова будет их разность.

Прежде всего нужно уточнить постановку вопроса, так как, строго говоря, неясно, что значит взять дифференциал $\tilde{D}$ от дифференциала Du_i. Мы это уточним следующим образом.

Рассмотрим в L_n двумерную поверхность $\mathfrak{M}_2$:

$$x^i = x^i(\alpha, \beta), \tag{105.2}$$

отнесенную к параметрам α, β. Впрочем, здесь не возбраняется и вырождение поверхности $\mathfrak{M}_2$ в линию или даже точку. Мы имеем в виду, следовательно, просто совокупность точек, определяемых уравнениями (105.2), без каких-либо условий (кроме того, что функции $x^i(\alpha, \beta)$ дважды непрерывно дифференцируемы).

Всегда можно выбрать поверхность $\mathfrak{M}_2$ так, чтобы она проходила через данную точку M, а ее координатные линии α и β шли по наперед заданным направлениям в точке M.

Пусть D, $\tilde{D}$ — символы абсолютных дифференциалов, вычисленных в произвольной точке $\mathfrak{M}_2$ при бесконечно малых смещениях по координатным линиям соответственно α, β и пусть d, $\tilde{d}$ — символы обыкновенных частных дифференциалов по α и β. Тогда

$$\left.\begin{aligned} Du_i &= du_i - \Gamma^p_{ki} u_p\, dx^k, \\ \tilde{D}u_i &= \tilde{d}u_i - \Gamma^p_{ki} u_p\, \tilde{d}x^k. \end{aligned}\right\} \tag{105.3}$$

Заметим, что, оставаясь на поверхности $\mathfrak{M}_2$, мы можем считать функциями от α, β не только текущие координаты $x^i(\alpha, \beta)$, но и зависящие от них координаты тензора u_i. Формулы (105.3) можно переписать, явно выражая участвующие в них частные дифференциалы:

$$\left.\begin{aligned} Du_i &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} - \Gamma^p_{ki} u_p \frac{\partial x^k}{\partial \alpha}\right) d\alpha, \\ \tilde{D}u_i &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial \beta} - \Gamma^p_{ki} u_p \frac{\partial x^k}{\partial \beta}\right) d\beta. \end{aligned}\right\} \tag{105.4}$$

Теперь ясно, что мы вправе рассматривать Du_i, $\tilde{D}u_i$ как функции от α, β, т. е. как тензорные поля на поверхности $\mathfrak{M}_2$, а значит, можем по обычным формулам вычислять от них абсолютные дифференциалы при бесконечно малых смещениях по $\mathfrak{M}_2$. При этом мы рассматриваем $d\alpha$ и $d\beta$ как постоянные множители (точнее, как величины, не зависящие от α и β). Вычислим теперь фактически $\tilde{D}Du_i$. Для краткости записи мы будем пользоваться формулами (105.3), не упуская, однако, из виду их точный смысл (105.4). Вставляя во вторую формулу (105.3) Du_i вместо u_i, получим:

$$\tilde{D}Du_i=\tilde{d}\,(Du_i)-\Gamma^p_{ki}\,Du_p\,\tilde{d}x^k.$$

Теперь вместо Du_i вставим его выражение из первой формулы (105.3):

$$\begin{aligned}\tilde{D}Du_i=\tilde{d}\,(du_i-\Gamma^p_{ki}u_p\,dx^k)-\Gamma^p_{ki}\,(du_p-\Gamma^q_{lp}u_q\,dx^l)\,\tilde{d}x^k=\\ =\tilde{d}\,du_i-\tilde{d}\Gamma^p_{ki}\cdot u_p\,dx^k-\Gamma^p_{ki}\,\tilde{d}u_p\,dx^k-\Gamma^p_{ki}u_p\tilde{d}\,dx^k-\\ -\Gamma^p_{ki}\,du_p\,\tilde{d}x^k+\Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lp}u_q\,dx^l\,\tilde{d}x^k.\end{aligned}\qquad(105.5)$$

При вычислении $D\tilde{D}u_i$ мы получим тот же результат с той лишь разницей, что символы d и $\tilde{d}$ в окончательном выражении поменяются местами. При этом первый и четвертый члены не изменятся, так как результат частных дифференцирований d и $\tilde{d}$ не зависит от их порядка. Кроме того, третий и пятый члены поменяются лишь местами, и сумма их останется прежней. Следовательно, при вычитании $D\tilde{D}u_i$ из $\tilde{D}Du_i$ перечисленные члены уничтожаются, и мы должны выписать лишь второй и шестой члены выражения (105.5), затем переставить в них символы d и $\tilde{d}$ и результат вычесть. Получим (изменяя во втором члене обозначение индекса суммирования p на q):

$$\begin{aligned}\tilde{D}Du_i-D\tilde{D}u_i=-\tilde{d}\Gamma^q_{ki}u_q\,dx^k+\Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lp}u_q\,dx^l\,\tilde{d}x^k+\\ +d\Gamma^q_{ki}u_q\,\tilde{d}x^k-\Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lp}u_q\,\tilde{d}x^l\,dx^k.\end{aligned}\qquad(105.6)$$

Учитывая, что Γ^q_{ki} — функция от $x^1, \ldots, x^n$, можно записать:

$$d\Gamma^q_{ki}=\frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l}\,dx^l,\qquad \tilde{d}\Gamma^q_{ki}=\frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l}\,\tilde{d}x^l.$$

Вставляя эти выражения в (105.6) и поменяв местами обозначения индексов суммирования k и l во втором и третьем членах правой части, получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{D}Du_i-D\tilde{D}u_i=\\ =\left(-\frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l}+\Gamma^p_{li}\Gamma^q_{kp}+\frac{\partial\Gamma^q_{li}}{\partial x^k}-\Gamma^p_{ki}\,\Gamma^q_{lp}\right)u_q\,\tilde{d}x^l\,dx^k.\end{aligned}\qquad(105.7)$$

Введем обозначение

$$R_{ik,\,l.}{}^{q}=\frac{\partial\Gamma^{q}_{li}}{\partial x^{k}}+\Gamma^{q}_{kp}\Gamma^{p}_{li}-\frac{\partial\Gamma^{q}_{ki}}{\partial x^{l}}-\Gamma^{q}_{lp}\Gamma^{p}_{ki}. \tag{105.8}$$

Тогда (105.6) примет вид

$$\tilde{D}Du_i-D\tilde{D}u_i=R_{ik,\,i}{}^{q}u_q\,\tilde{d}x^l\,dx^k. \tag{105.9}$$

Формулы (105.8), (105.9) являются окончательными, и мы должны в них разобраться. Левую часть (105.9) можно назвать *альтернированным вторым абсолютным дифференциалом тензора* u_i *для бесконечно малых смещений* dx^i, $\tilde{d}x^i$. Действительно, при рассматриваемом нами бесконечно малом смещении $d\alpha$ по координатной линии α (или $d\beta$ по координатной линии β) дифференциалы координат точки равны dx^i (или соответственно $\tilde{d}x^i$). Мы видим из (105.9), что этот *альтернированный второй абсолютный дифференциал тензора* u_i *линейно зависит от* u_i, dx^i *и* $\tilde{d}x^i$. Коэффициенты этой трилинейной функции обозначены нами $R_{ik,\,i}{}^{q}$ и, как видно из (105.8), зависят лишь от точки, в которой вычисляется альтернированный дифференциал (так как $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}(x^1,\ \ldots,\ x^n)$). *Эти коэффициенты образуют четырехвалентный тензор, трижды ковариантный и один раз контравариантный в соответствии с расстановкой его индексов.*

В самом деле, левая часть (105.9) представляет собой одноковариантный тензор по основному свойству абсолютного дифференцирования. Следовательно, правая часть по отношению к индексу i также преобразуется по ковариантному закону:

$$R_{l'k',\,i'}{}^{q'}u_{q'}\tilde{d}x^{l'}\,dx^{k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}R_{lk,\,i}{}^{q}u_q\,\tilde{d}x^l\,dx^k.$$

Так как

$$\tilde{d}x^l=\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\tilde{d}x^{l'},\qquad dx^k=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}dx^{k'},\qquad u_q=\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q}u_{q'},$$

то, делая в правой части соответствующую замену, получаем:

$$R_{l'k',\,i'}{}^{q'}u_{q'}\,\tilde{d}x^{l'}\,dx^{k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}R_{lk,\,i}{}^{q}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q}u_{q'}\,\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\tilde{d}x^{l'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}dx^{k'}.$$

Мы можем рассматривать любое тензорное поле u_i и произвольные бесконечно малые смещения dx^i, $\tilde{d}x^i$ из данной точки M. Полученная формула остается верной и, значит, представляет собой тождество относительно $u_{q'}$, $\tilde{d}x^{l'}$, $dx^{k'}$. Сравнивая коэффициенты при этих величинах в левой и правой частях, мы получаем:

$$R_{i'k', i'}{}^{q'}{}_{.} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q} R_{lk, i}{}^{q}{}_{.} . \tag{105.10}$$

Это показывает нам, что $R_{lk, i}{}^{q}{}_{.}$ действительно образуют тензор трижды ковариантный и один раз контравариантный.

Тензор $R_{lk.i}{}^{q}{}_{.}$, *составленный из объекта связности* Γ^k_{ij} *согласно* (105.8), *называется тензором кривизны (или тензором Римана — Христоффеля) пространства аффинной связности* L_n. Очевидно, тензор кривизны определен вместе с $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ в каждой точке пространства L_n и образует в нем тензорное поле:

$$R_{lk, i}{}^{q}{}_{.} = R_{lk, i}{}^{q}{}_{.}(x^1, \ldots, x^n).$$

Тензор кривизны *кососимметричен* по первым двум индексам:

$$R_{lk, i}{}^{q}{}_{.} = -R_{kl, i}{}^{q}{}_{.} \tag{105.11}$$

Это легко усмотреть из формулы (105.8), которую можно переписать в виде

$$R_{lk, i}{}^{q}{}_{.} = A^q_{k, li} - A^q_{l, ki}, \tag{105.12}$$

где мы для краткости обозначили

$$A^q_{k, li} = \frac{\partial \Gamma^q_{li}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{kp} \Gamma^p_{li}.$$

Легко заметить, что в аффинном (или хотя бы локально аффинном) пространстве A_n тензор кривизны тождественно равен нулю. Действительно, в этом случае можно перейти в аффинную координатную систему (хотя бы в окрестности каждой точки), в которой, как мы знаем, $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$, а следовательно, $R_{kl, i}{}^{q}{}_{.} \equiv 0$.

Естественно поставить теперь вопрос об *альтернированном втором абсолютном дифференциале одноконтравариантного тензорного поля* $v^i(x^1, \ldots, x^n)$. Другими словами, мы хотим вычислить $\tilde{D}Dv^i - D\tilde{D}v^i$, где символы D и $\tilde{D}$ имеют прежний смысл. Конечно, эту выкладку можно провести прямым путем подобно предыдущей выкладке для одноковариантного поля u_i. Но для краткости мы предпочтем искусственный прием с использованием уже полученной формулы (105.9), а именно, составим инвариант $v^i u_i$ путем свертывания *данного* тензора $v^i(x^1, \ldots, x^n)$ *с произвольным* тензором $u_i(x^1, \ldots, x^n)$.

По известному нам правилу (ср. (97.8)) вычислим абсолютный дифференциал D от этого инварианта:

$$D(v^i u_i) = Dv^i \cdot u_i + v^i \cdot Du_i.$$

От полученного результата вычислим абсолютный дифференциал $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}D(v^i u_i) = \tilde{D}Dv^i \cdot u_i + Dv^i \cdot \tilde{D}u_i + \tilde{D}v^i \cdot Du_i + v^i \cdot \tilde{D}Du_i. \quad (105.13)$$

В этой формуле мы поменяем местами символы D и $\tilde{D}$. Левая часть при этом не изменится, так как абсолютные дифференциалы D и $\tilde{D}$, взятые от инварианта, совпадают с обыкновенными дифференциалами d и $\tilde{d}$, т. е. с перестановочными между собой частными дифференциалами по параметрам α и β. В правой части поменяются местами второй и третий члены, так что сумма их не изменится. Вычитая почленно из (105.13) формулу, полученную из (105.13) взаимной перестановкой D и $\tilde{D}$, мы приходим, следовательно, к такому результату:

$$0 = (\tilde{D}Dv^i - D\tilde{D}v^i)\, u_i + v^i\, (\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i).$$

Обозначая в первом члене индекс суммирования q вместо i и делая во втором члене замену согласно (105.9), получим:

$$(\tilde{D}Dv^q - D\tilde{D}v^q)\, u_q + v^i R_{lk,\,i\cdot}^{\;\;\;\;\;\cdot q} u_q\, \tilde{d}x^l\, dx^k = 0.$$

Учитывая, что u_q — *произвольное* тензорное поле, мы должны рассматривать полученное равенство как тождество относительно u_q. Поэтому коэффициенты при u_q должны быть по отдельности равны нулю. Отсюда получаем:

$$\tilde{D}Dv^q - D\tilde{D}v^q = -R_{lk,\,i\cdot}^{\;\;\;\;\;\cdot q} v^i\, \tilde{d}x^l\, dx^k. \quad (105.14)$$

Мы получили, таким образом, формулу, аналогичную (105.9), но для поля одноконтравариантного тензора.

Вычислим, наконец, альтернированный второй абсолютный дифференциал для произвольного тензорного поля, например, $Z^p_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$.

Для этой цели мы прибегнем к сходному приему, а именно, свернем каждый ковариантный индекс данного тензора с произвольным одноковариантным тензором, а каждый контравариантный индекс — с произвольным одноковариантным тензором. В нашем примере мы получаем этим путем инвариант

$$I = Z^p_{ij} u_p v^i w^j, \quad (105.15)$$

где u_p, v^i, w^j — произвольные тензорные поля. Вычислим затем $\tilde{D}DI - D\tilde{D}I$. Дифференцируя дважды правую часть (105.15), мы можем не выписывать все получающиеся при этом члены: *достаточно сохранить лишь те, в которых оба дифференцирования падают на один и тот же множитель.* В самом деле, те члены, в которых D действует на один множитель, а $\tilde{D}$ на другой, будут одинаковы как в $\tilde{D}DI$, так и в $D\tilde{D}I$ и при вычитании уничтожатся (как второй и третий члены в (105.13)). В результате получаем:

$$\tilde{D}DI - D\tilde{D}I = (\tilde{D}DZ^p_{ij} - D\tilde{D}Z^p_{ij})\, u_p v^i w^j + Z^p_{ij}\,(\tilde{D}Du_p - D\tilde{D}u_p)\, v^i w^j +$$
$$+ Z^p_{ij} u_p\,(\tilde{D}Dv^i - D\tilde{D}v^i)\, w^j + Z^p_{ij} u_p v^i\,(\tilde{D}Dw^j - D\tilde{D}w^j).$$

Левая часть равна нулю, так как по отношению к инварианту I D и $\tilde{D}$ превращаются в обыкновенные частные дифференциалы по α и β. В правой части заменяем круглые скобки (кроме первой) согласно (105.9) и (105.14). Получаем:

$$0 = (\tilde{D}DZ^p_{ij} - D\tilde{D}Z^p_{ij})\, u_p v^i w^j +$$
$$+ Z^p_{ij}\,\{R_{lk,}{}^{\cdot\cdot}{}_{p\cdot}^{\cdot q} u_q v^i w^j - R_{lk,}{}^{\cdot\cdot}{}_{m\cdot}^{\cdot i} u_p v^m w^j - R_{lk,}{}^{\cdot\cdot}{}_{m\cdot}^{\cdot j} u_p v^i w^m\}\, \tilde{d}x^l\ dx^k.$$

Так как u_p, v^i, w^j — произвольные тензорные поля, то мы имеем здесь тождество относительно u_p, v^i, w^j, а поэтому коэффициенты при произведениях $u_p v^i w^j$ должны быть после приведения подобных членов равны нулю. Соберем коэффициенты при произведении $u_r v^s w^t$, считая индексы r, s, t как-нибудь фиксированными. Тогда в первом члене нужно положить p, i, $j = r$, s, t, во втором члене q, i, $j = r$, s, t, в третьем p, m, $j = r$ s, t и в четвертом p, i, $m =$ $= r$, s, t. Перенося все члены кроме первого в другую часть равенства, получим:

$$\tilde{D}DZ^r_{st} - D\tilde{D}Z^r_{st} =$$
$$= \{-R_{lk,}{}^{\cdot\cdot}{}_{p\cdot}^{\cdot r} Z^p_{st} + R_{lk,}{}^{\cdot\cdot}{}_{s}^{\cdot i} Z^r_{it} + R_{lk,}{}^{\cdot\cdot}{}_{t\cdot}^{\cdot j} Z^r_{sj}\}\, \tilde{d}x^l\, dx^k. \qquad (105.16)$$

Итак, проальтернированный второй абсолютный дифференциал от произвольного тензора представляет собой сумму членов, составленных поочередно для каждого из его индексов, причем для каждого верхнего индекса соответствующий член составляется по схеме (105.14), *а для каждого нижнего — по схеме* (105.9). При составлении члена, отвечающего данному индексу, остальные индексы переписываются без изменения. В нашем случае первый член составлен для верхнего индекса r, второй — для нижнего индекса s, третий — для нижнего индекса t.

Хотя мы имели дело с тензором частного вида, но совершенно аналогичный вывод можно повторить и для любого тензора, так что формулированное выше правило справедливо в общем случае.

§ 106. Геометрический смысл тензора кривизны

Мы хотим показать, что тензор кривизны в каждой данной точке пространства L_n позволяет определить, насколько уклонится от своего первоначального значения вектор, произвольно выбранный в этой точке и параллельно обнесенный по какому-нибудь бесконечно малому замкнутому контуру (мы учитываем, конечно, лишь главную часть этого уклонения).

Покажем прежде всего, что, для того чтобы пространство L_n обладало абсолютным параллелизмом, необходимо и, в случае односвязного L_n, *достаточно тождественное обращение в нуль тензора кривизны.*

Необходимость. Пусть дано, что L_n обладает абсолютным параллелизмом (§ 93). Тогда произвольный вектор $\xi^i(M_0)$, заданный в какой-нибудь точке M_0, в результате его параллельного перенесения в каждую точку M пространства L_n порождает однородное векторное поле $\xi^i(M)$. Вектор этого поля $\xi^i(M)$ при параллельном перенесении по любому пути в любую точку M' переходит в вектор того же поля $\xi^i(M')$. Отсюда следует, что при любом бесконечно малом смещении из точки M вектор поля $\xi^i(M)$ имеет абсолютный дифференциал, равный нулю:

$$D\xi^i \equiv 0. \tag{106.1}$$

Знак тождества подчеркивает, что равенство имеет место в любой точке M и для любого бесконечно малого смещения. Придадим символам D и $\tilde{D}$ тот же смысл, как и в § 105. Тогда согласно (106.1) имеют место равенства

$$D\xi^i = 0, \quad \tilde{D}\xi^i = 0.$$

Действуя на первое из них посредством $\tilde{D}$, на второе — посредством D и вычитая из первого второе почленно, получим:

$$\tilde{D}D\xi^i - D\tilde{D}\xi^i = 0.$$

Согласно (105.14) отсюда следует:

$$R_{kl,p.}^{\cdot\cdot\ \cdot i}\xi^p \tilde{d}x^k\, dx^l = 0.$$

Так как однородное векторное поле можно получить, задавшись произвольным вектором $\xi^p(M_0)$ в произвольной точке M_0, то мы имеем здесь тождество относительно ξ^p. Кроме того, это тождество и относительно $\tilde{d}x^k$ и dx^l, которые можно брать совершенно произвольными. Следовательно,

$$R_{kl,p.}^{\cdot\cdot\ \cdot i} = 0$$

в каждой точке пространства L_n. Необходимость нашего признака доказана.

Прежде чем переходить к доказательству достаточности, выведем одну формулу, представляющую и самостоятельный интерес.

Рассмотрим в произвольном L_n какую-нибудь кривую

$$x^i = x^i(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{106.2}$$

соединяющую точки $P(x^i_P)$ и $Q(x^i_Q)$. Эту кривую мы будем варьировать, т. е. включим ее в семейство кривых

$$x^i = x^i(t, \alpha) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{106.3}$$

где параметр α меняется, например, от 0 до 1. Пусть при этом

$$x^i(t, 0) = x^i(t),$$

т. е. при $\alpha = 0$ мы получаем исходную кривую. Предположим, кроме того, что концы кривой P и Q закреплены, так что при любом α

$$x^i(t_1, \alpha) = x^i_P, \quad x^i(t_2, \alpha) = x^i_Q. \tag{106.4}$$

Зададимся в начальной точке P каким-либо вектором ξ^i_P и будем его параллельно переносить вдоль каждой кривой семейства. Тогда в каждой точке t каждой кривой α определится вектор, который мы обозначим $\xi^i(t, \alpha)$. Так как вдоль каждой кривой семейства этот вектор переносится параллельно, то

$$D\xi^i(t, \alpha) = 0, \tag{106.5}$$

где D — символ абсолютного дифференциала при бесконечно малом смещении $t \to t + dt$ при постоянном α (заметим, что из теории дифференциальных уравнений следует, что $\xi^i(t, \alpha)$ будут достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми функциями t, α, поскольку, как мы предполагаем, это верно для функций $x^i(t, \alpha)$).

Пусть, далее, $\tilde{D}$ — символ абсолютного дифференциала при бесконечно малом смещении $\alpha \to \alpha + d\alpha$ при постоянном t. Перепишем для векторного поля $\xi^i(t, \alpha)$ формулу (105.14):

$$\tilde{D}D\xi^i - D\tilde{D}\xi^i = -R_{kl,p}^{\cdot\cdot\,\cdot i}\xi^p \tilde{d}x^k dx^l,$$

где d — символ частного дифференциала по аргументу t, а $\tilde{d}$ — по аргументу α. Так как $D\xi^i = 0$, то получаем окончательно:

$$D\tilde{D}\xi^i = R_{kl,p}^{\cdot\cdot\,\cdot i}\xi^p \tilde{d}x^k dx^l. \tag{106.6}$$

Эту формулу мы и хотели получить. Теперь *применим ее к пространству L_n, в котором тензор кривизны тождественно равен нулю.* Мы получаем:

$$D\tilde{D}\xi^i = 0,$$

т. е. *вектор* $\tilde{D}\xi^i(t, \alpha)$ *параллельно переносится вдоль каждой кривой семейства.*

В подробной записи $\tilde{D}\xi^i$ имеет вид

$$\tilde{D}\xi^i = \tilde{d}\xi^i + \Gamma^i_{kp}\xi^p \tilde{d}x^k. \tag{106.7}$$

Ввиду закрепленности концов P и Q их координаты x^i_P и x^i_Q остаются постоянными, так что

$$\tilde{d}x^i_P = \tilde{d}x^i_Q = 0.$$

Поэтому в точках P и Q формула (106.7) дает

$$\tilde{D}\xi^i_P = \tilde{d}\xi^i_P, \quad \tilde{D}\xi^i_Q = \tilde{d}\xi^i_Q, \tag{106.8}$$

где ξ^i_P — постоянный вектор, заданный в точке P, а $\xi^i_Q = \xi^i(t_2, \alpha)$ — результат его параллельного перенесения по кривой α в точку Q. Ввиду постоянства ξ^i_P мы имеем $\tilde{d}\xi^i_P = 0$, а следовательно, и $\tilde{D}\xi^i_P = 0$. Далее, так как вектор $\tilde{D}\xi^i(t, \alpha)$ параллельно переносится вдоль каждой кривой семейства, причем в начальной точке P кривой $\tilde{D}\xi^i = 0$, то тем самым и в каждой точке кривой

$$\tilde{D}\xi^i(t, \alpha) = 0.$$

В частности, в конечной точке Q

$$\tilde{D}\xi^i_Q = 0,$$

а значит, в силу (106.8)

$$\tilde{d}\xi^i_Q = 0.$$

Так как $\tilde{d}$ — символ частного дифференциала по аргументу α, то это показывает, что с изменением α вектор ξ^i_Q остается постоянным, *т. е. что результат параллельного перенесения вектора ξ^i_P из точки P в точку Q не зависит от той кривой семейства, по которой это перенесение совершалось.*

Если ограничиться односвязными пространствами L_n, то для любых двух путей, ведущих из точки P в точку Q, возможен непрерывный переход от одного к другому, т. е. включение их в одно семейство вида (106.3). При этом можно обеспечить и непрерывную дифференцируемость функций $x^i(t, \alpha)$ того же порядка, какая предполагается для функций $x^i(t)$, дающих параметрическое представление того и другого пути, а значит вектор ξ^i_Q, полученный перенесением вектора ξ^i_P из точки P в точку Q по любому из данных двух путей, будет одним и тем же. *Этим доказана и достаточность нашего признака.*

Аффинное пространство A_n, обладая абсолютным параллелизмом, имеет тензор кривизны, тождественно равный нулю; кроме того, его тензор кручения тоже равен нулю. Равенство нулю кривизны и кручения, очевидно, справедливо и для локально аффинного пространства.

Обратно, если пространство L_n без кручения, т. е.

$$S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk} = 0,$$

и, кроме того, без кривизны, т. е.

$$R_{kl,p.}^{\cdot\cdot\ \cdot i} = 0,$$

то это пространство будет (по крайней мере, локально) аффинным.

В самом деле, из $R_{kl,p.}^{\cdot\cdot\ \cdot i} = 0$ следует по вышедоказанному, что L_n обладает абсолютным параллелизмом, по крайней мере, в каждом односвязном куске.

Но в § 93 было показано, что L_n с абсолютным параллелизмом и без кручения является (локально) аффинным пространством. Таким образом, каждый односвязный кусок нашего L_n, а вследствие этого и само L_n, оказывается локально аффинным пространством.

Итак, для того чтобы пространство аффинной связности было (локально) аффинным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало нулевой кривизной и нулевым кручением.

Возвращаемся к общему случаю L_n. Так как обращение в нуль тензора кривизны равносильно наличию абсолютного параллелизма в данном пространстве (в его односвязных кусках), то естественно ожидать, что отличный от нуля тензор кривизны в каком-то смысле характеризует уклонение от абсолютного параллелизма. Мы будем оценивать это уклонение следующим образом. Исходя из произвольной точки M, проделаем параллельное обнесение вектора по замкнутому пути с возвращением в прежнюю точку M. В случае абсолютного параллелизма мы возвращаемся в точку M с прежним значением вектора. (Действительно, перенесение от пути в этом случае не зависит, так что результат обнесения по замкнутому контуру будет таким же, как и тогда, когда весь этот контур стянут в одну точку M и когда, следовательно, переносимый вектор просто остается на месте.)

Уклонение же параллельно обнесенного вектора от прежнего значения будет связано, таким образом, с нарушением абсолютного параллелизма. Это уклонение мы и будем рассматривать и покажем, что для бесконечно малого контура оно (в своей главной части) характеризуется тензором кривизны в точке M.

§ 107. Геометрический смысл тензора кривизны (окончание)

Мы будем рассматривать различные кусочно гладкие кривые, выходящие из какой-нибудь точки $M(x^i_M)$ пространства L_n. Эти кривые мы относим к параметру s, значение которого для каждой точки Q на кривой определяется по формуле

$$s = \int\limits_{\breve{MQ}} \sqrt{dx^{1^2} + dx^{2^2} + \ldots + dx^{n^2}}. \qquad (107.1)$$

Здесь интеграл берется по отрезку кривой от точки M до точки Q. В точке M параметр s, очевидно, равен нулю, а по мере удаления точки Q от M он принимает возрастающие положительные значения. (Координатная система x^i в окрестности точки M временно фиксирована.) Мы будем рассматривать кривые, для которых s меняется в пределах

$$0 \leqslant s \leqslant S, \qquad (107.2)$$

где значение S фиксировано. Такие кривые располагаются (при достаточно малом S) в некоторой окрестности точки M, именно определяемой условием

$$(x^1 - x^1_M)^2 + \ldots + (x^n - x^n_M)^2 < S^2. \qquad (107.3)$$

Только эту область мы и будем рассматривать. Параметрические уравнения рассматриваемых кривых мы будем писать в виде

$$x^i = x^i(s),$$

причем под Q будем понимать в дальнейшем подвижную точку с координатами $x^i(s)$. Согласно (107.1)

$$ds = \sqrt{dx^{1^2} + \ldots + dx^{n^2}}. \qquad (107.4)$$

Отметим, что отсюда следует:

$$\left| \frac{dx^i}{ds} \right| \leqslant 1. \qquad (107.5)$$

Параметр s не обладает, конечно, инвариантностью относительно преобразования координат x^i. Однако было бы нетрудно показать, *что для точки Q, стремящейся в точку M, значение параметра s будет бесконечно малым всегда одного и того же порядка независимо от выбора координатной системы x^i*. Для дальнейшего будет иметь значение лишь это свойство параметра s.

Зададимся в точке M каким-либо вектором ξ^i_M и будем его параллельно переносить по какой-нибудь из рассматриваемых кривых. Координаты ξ^i параллельно переносимого вектора будут зависеть от точки его приложения, т. е. от параметра s:

$$\xi^i = \xi^i(s). \tag{107.6}$$

Мы хотим изучить поведение этих функций при s бесконечно малом с точностью 2-го порядка относительно s. Полученный результат мы применим затем к частному случаю замкнутого пути.

Функции $\xi^i(s)$ удовлетворяют закону параллельного перенесения

$$d\xi^i = -\Gamma^i_{kl}\xi^l\,dx^k, \text{или, что то же, } \frac{d\xi^i}{ds} = -\Gamma^i_{kl}\xi^l\frac{dx^k}{ds}, \tag{107.7}$$

а также начальным условиям

$$\xi^i(0) = \xi^i_M. \tag{107.8}$$

Вдоль всех рассматриваемых кривых сумма квадратов координат ξ^i, $\sigma = \sum_{i=1}^{n}\xi^i(s)^2$, остается ограниченной одной и той же константой C_1. Это почти очевидно; для интересующихся приводим детальный вывод. В самом деле,

$$\frac{d\sigma}{ds} = 2\sum_{i=1}^{n}\xi^i(s)\frac{d\xi^i(s)}{ds} = -2\sum_{i=1}^{n}\Gamma^i_{kl}\xi^l\xi^i\frac{dx^k}{ds}.$$

Так как функции $\Gamma^i_{kl}(x^1, \ldots, x^n)$ в рассматриваемой области (107.3) ограничены

$$|\Gamma^i_{kl}| \leqslant C_0, \tag{107.9}$$

то, учитывая (107.5), получаем:

$$\left|\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\right| \leqslant nC_0,$$

так что

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| \leqslant 2nC_0\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|\xi^l||\xi^i| \leqslant 2n^2C_0\sigma. \tag{107.10}$$

Мы использовали здесь, что $|\xi^l||\xi^i| \leqslant \frac{1}{2}(\xi^{l^2} + \xi^{i^2})$, так что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|\xi^l||\xi^i| \leqslant n\sum_{i=1}^{n}\xi^{i^2} = n\sigma.$$

Из (107.10) следует, что

$$\left|\frac{d\ln\sigma}{ds}\right| \leqslant 2n^2C_0, \text{ т. е. } \ln\sigma \leqslant \ln\sigma_M + 2n^2C_0 s,$$

где σ_M — начальное значение σ в точке M при $s=0$. Учитывая (107.2), получаем окончательно:

$$\sigma \leqslant C_1,$$

где

$$C_1 = \sigma_M e^{2n^2 C_0 S}.$$

Константа C_1 не зависит от выбора кривой. Из полученного неравенства следует и подавно

$$|\xi^i(s)| \leqslant \sqrt{C_1} \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{107.11}$$

вдоль всех рассматриваемых кривых. Это мы и хотели получить.

Интегрируем (107.7) почленно:

$$\int_0^s \frac{d\xi^i}{ds}\,ds = -\int_0^s \Gamma^i_{kl}\xi^l \frac{dx^k}{ds}\,ds.$$

Левую часть можно записать в конечном виде

$$\Delta\xi^i = \xi^i(s) - \xi^i_M = -\int_0^s \Gamma^i_{kl}\xi^l \frac{dx^k}{ds}\,ds. \tag{107.12}$$

В силу (107.5), (107.9), (107.11) подынтегральная функция в правой части ограничена, так что

$$|\Delta\xi^i| \leqslant C_2 s, \tag{107.13}$$

где C_2 — одинаковая для всех кривых константа.

Подсчитаем $\Delta\xi^i$ из (107.12) сначала с точностью 1-го порядка относительно s. Для этого мы заменим Γ^i_{kl} его начальным значением $(\Gamma^i_{kl})_M$, а ξ^l — его начальным значением ξ^l_M. При этом мы допускаем в подынтегральном выражении ошибку, по модулю меньшую $\tilde{C}s$, где $\tilde{C}$ — некоторая константа, одинаковая для всех кривых. В самом деле, в множителе Γ^i_{kl} мы делаем ошибку

$$\Delta\Gamma^i_{kl} = (\Gamma^i_{kl})_Q - (\Gamma^i_{kl})_M = \left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\right)_{M'} \Delta x^m. \tag{107.14}$$

Последнее выражение написано на основании теоремы о конечном приращении в применении к функции $\Gamma^i_{kl}(x^1, \ldots, x^m)$; точка M' — промежуточная между начальной точкой M и рассматриваемой точкой Q на кривой (вообще говоря, M' на кривой не лежит). Под Δx^m мы понимаем соответствующие приращения аргументов:

$$\Delta x^m = x^m(s) - x^m_M = \int_0^s \frac{dx^m}{ds}\,ds.$$

Учитывая (107.5), получаем отсюда

$$|\Delta x^m| < s.$$

Далее функции $\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}$ ограничены в рассматриваемой области (107.3):

$$\left|\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\right| \leqslant C_3,$$

где C_3 — некоторая константа. В результате (107.14) дает

$$|\Delta \Gamma^i_{kl}| \leqslant C_3 s. \tag{107.15}$$

Таким образом, заменяя константами $(\Gamma^i_{kl})_M$ и ξ^i_M первые два множителя в подынтегральном выражении (107.12), мы делаем в них ошибки, допускающие оценки (107.13) и (107.15). Если принять во внимание еще (107.5), то легко получаем, что ошибка во всей подынтегральной функции также допускает по модулю оценку вида $\tilde{C}s$, где константа $\tilde{C}$ от выбора кривой не зависит. После указанной замены формулы (107.12) дают приближенно:

$$\Delta \xi^i \approx -\int_0^s (\Gamma^i_{kl})_M \xi^l_M \frac{dx^k}{ds}\, ds = -(\Gamma^i_{kl})_M \xi^l_M \Delta x^k. \tag{107.16}$$

Ошибка здесь возникает из ошибки в подынтегральной функции, по модулю меньшей $\tilde{C}s$, в результате умножения подынтегральной функции на ds и интегрирования в пределах от 0 до s. Следовательно, в полученном выражении для $\Delta\xi^i$ мы будем иметь ошибку, по модулю меньшую $\frac{1}{2}\tilde{C}s^2$. В связи с этим мы говорим, что формула (107.16) верна с точностью 1-го порядка относительно s.

Мы хотим сделать второй и последний шаг нашей выкладки: подсчитать $\Delta\xi^i$ с точностью 2-го порядка, т. е. так, чтобы ошибка была уже бесконечно малой 3-го порядка при $s \to 0$.

Для этого мы снова вставим под знак интегралов (107.12) приближенные значения множителей Γ^i_{kl}, ξ^i, однако не столь грубые, как ранее, когда мы просто брали их начальные значения; теперь, учитывая, что $\xi^l(s) = \xi^l_M + \Delta\xi^l$, и пользуясь формулой (107.16), мы полагаем:

$$\xi^l(s) \approx \xi^l_M - (\Gamma^l_{mp})_M \xi^p_M \Delta x^m, \tag{107.17}$$

$$\Gamma^i_{kl} \approx (\Gamma^i_{kl})_M + \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\right)_M \Delta x^m. \tag{107.18}$$

В первом из этих равенств допущена ошибка, меньшая по модулю $\frac{1}{2}\tilde{C}s^2$. Аналогичным образом во втором равенстве откинуты члены ряда Тейлора, начиная со второй степени относительно Δx^i. Учитывая, что $|\Delta x^m| < s$, легко получаем, что отброшенные члены по модулю $\leqslant C_4 s^2$, где константа C_4 с выбором кривой не связана. Очевидно, в подынтегральном выражении мы получим ошибку того же порядка, а именно, не превосходящую по модулю $C_5 s^2$, где C_5 — некоторая константа, не зависящая от выбора кривой.

Кроме того, перемножая (107.17) и (107.18), мы можем откинуть члены 2-й степени относительно Δx^m, так как возникающая при этом ошибка также допускает оценку вида Cs^2 и может быть включена в ранее допущенную ошибку.

Теперь (107.12) принимает вид

$$\Delta\xi^i \approx -\int_0^s \left\{(\Gamma^i_{kl}\xi^l)_M - (\Gamma^i_{kl}\Gamma^l_{mp}\xi^p)_M\,\Delta x^m + \left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\,\xi^l\right)_M \Delta x^m\right\}\frac{dx^k}{ds}\,ds.$$

В среднем члене фигурной скобки обозначения индексов суммирования p и l переставляем между собой, а интеграл от первого члена вычисляем фактически. Получаем:

$$\Delta\xi^i \approx -(\Gamma^i_{kl}\xi^l)_M\Delta x^k + \left[-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right]_M \xi^l_M \int_0^s \Delta x^m \frac{dx^k}{ds}\,ds. \tag{107.19}$$

Так как в подынтегральной функции была допущена ошибка, по модулю меньшая $C_5 s^2$, то после умножения на ds и интегрирования от 0 до s *мы получаем ошибку, по модулю меньшую* $\frac{1}{3}C_5 s^3$. *В связи с этим мы говорим, что формула* (107.19) *верна с точностью* 2*-го порядка относительно* s.

Эта формула представляла собой нашу первую цель. Теперь нужно применить ее к случаю, когда рассматриваемая кривая при некотором значении $s = s_1$ возвращается в точку M и образует *замкнутый контур* (остальная часть этой кривой интересовать нас не будет). Тогда при $s = s_1$ (107.19) принимает вид

$$\Delta\xi^i \approx \left[-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right]_M \xi^l_M \int_0^{s_1} \Delta x^m \frac{dx^k}{ds}\,ds, \tag{107.20}$$

так как при возвращении в прежнюю точку M приращение $\Delta x^k = 0$. При этом ошибка по модулю меньше $\frac{1}{3}C_5 s_1^3$. Специализируем несколько наше построение, а именно, предположим, что рассматриваемый контур расположен на двумерной поверхности $\mathfrak{M}_2$

$$x^i = x^i(u^1, u^2), \tag{107.21}$$

произвольным образом проведенной через точку M при обычных наших предположениях; в частности, матрица

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \ldots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \ldots & \frac{\partial x^n}{\partial u^2} \end{matrix} \right\|$$

имеет ранг 2. Будем считать для определенности

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{107.22}$$

Контур предполагаем несамопересекающимся.

В таком случае параметрические уравнения контура на поверхности можно писать в виде

$$u^1 = u^1(s),$$
$$u^2 = u^2(s),$$

так что вдоль контура

$$\frac{dx^k}{ds} = \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial x^k}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds}. \tag{107.23}$$

Вставляя это выражение под знак интеграла в (107.20) и записывая этот интеграл как криволинейный интеграл по контуру, получим:

$$\Delta\xi^i \approx \left[-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml} \right]_M \xi^l_M \oint \Delta x^m \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial x^k}{\partial u^2}du^2 \right). \tag{107.24}$$

Параметры u^1, u^2 мы занумеруем таким образом, чтобы направление вращения от координатной линии u^1 к координатной линии u^2 (если брать положительные направления на этих линиях) совпадало бы с направлением обхода. Строго говоря, это значит, что нумерация u^1, u^2 выбирается так, чтобы интеграл $\oint u^1 du^2$ при обходе контура в данном направлении имел положительное значение. Этого всегда можно достичь, так как $\oint u^2 du^1 = -\oint u^1 du^2$. По формуле Грина, которая в этом случае имеет вид:

$$\oint (P_1(u^1, u^2)\, du^1 + P_2(u^1, u^2)\, du^2) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P_2}{\partial u^1} - \frac{\partial P_1}{\partial u^2} \right) du^1\, du^2$$

преобразуем в правой части (107.24) интеграл по контуру к двойному интегралу по области D, охваченной этим контуром. При этом подынтегральная функция будет иметь вид

$$\frac{\partial P_2}{\partial u^1} - \frac{\partial P_1}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\Delta x^m \frac{\partial x^k}{\partial u^2} \right) - \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\Delta x^m \frac{\partial x^k}{\partial u^1} \right) = \frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}.$$

Теперь (107.24) принимает вид:

$$\Delta\xi^i \approx \left[-\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml} \right]_M \xi^l_M \iint\limits_D \left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2} \right) du^1\, du^2. \tag{107.25}$$

Заставим теперь s_1 стремиться к нулю, так что контур стягивается в точку M, скользя по неизменной поверхности $\mathfrak{M}_2$. Выясним, как будет вести себя при этом «площадь»

$$\sigma = \iint\limits_D du^1\, du^2, \tag{107.26}$$

охваченная на поверхности $\mathfrak{M}_2$ стягивающимся контуром. Мы берем слово «площадь» в кавычки, так как введенная этим путем она не имеет инвариантного характера и зависит от выбора параметров u^1, u^2 на поверхности. Почти очевидно, что $\sigma \to 0$ как бесконечно малая второго или высшего порядка относительно s_1. Для интересующихся приводим детальный вывод. В силу (107.22) в некоторой окрестности точки M на поверхности $\mathfrak{M}_2$ можно принять за параметры x^1, x^2 вместо u^1, u^2. Преобразуя двойной интеграл к новым переменным, получаем:

$$\sigma = \iint\limits_D du^1\, du^2 = \iint\limits_D \left| \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x^1, x^2)} \right| dx^1\, dx^2.$$

Так как непрерывная функция $\left| \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x^1, x^2)} \right|$ остается ограниченной в некоторой окрестности точки M, т. е. $\leqslant C$, то

$$\sigma \leqslant C \iint\limits_D dx^1\, dx^2. \tag{107.27}$$

Поскольку при обходе всего контура параметр s получает приращение s_1, а $|dx^1| \leqslant ds$, $|dx^2| \leqslant ds$, то x^1 и x^2 в любой точке контура имеют приращения (сравнительно с x^1_M, x^2_M) тоже не превосходящие s_1. Тем самым и внутренность контура в плоскости переменных x^1, x^2 подчинена тем же условиям, т. е. располагается внутри «квадрата»

$$x^1_M - s_1 \leqslant x^1 \leqslant x^1_M + s_1,$$

$$x^2_M - s_1 \leqslant x^2 \leqslant x^2_M + s_1,$$

а так как $\iint dx^1\, dx^2$, распространенный по внутренности этого «квадрата», равен $4s_1^2$, то $\iint\limits_D dx^1\, dx^2 < 4s_1^2$ и (107.27) окончательно перепишется в виде

$$\sigma < 4Cs_1^2.$$

Итак, «площадь» σ области D стремится к нулю вместе с s_1 как бесконечно малая 2-го или высшего порядка относительно s_1. Мы будем предполагать, кроме того, что σ будет бесконечно малой точно 2-го порядка (не выше) относительно s_1. Более детальное исследование показало бы нам, что, как правило, это предположение оправдывается. Исключение представляют лишь искусственные случаи, когда, например, при стягивании контура в точку M он одновременно неограниченно сплющивается, так что размеры области D «в ширину» являются бесконечно малыми *высшего порядка* сравнительно с ее размерами «в длину». Тогда «площадь» σ будет бесконечно малой не 2-го, а более высокого порядка относительно s_1.

Возвращаемся к формуле (107.25). Допущенная в ней ошибка, как мы знаем, по модулю меньше $\frac{1}{3} C_5 s_1^3$ и, следовательно, представляет собой бесконечно малую высшего порядка сравнительно с «площадью» σ (ради этого мы и должны были предположить, что σ точно 2-го порядка малости относительно s_1). В дальнейшем мы так же будем учитывать в (107.25) лишь члены одного порядка малости сравнительно с σ и пренебрегать малыми высшего порядка. В связи с этим мы можем заменить подынтегральную функцию $\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}$ ее начальным значением в точке M. Действительно, ввиду непрерывности этой функции ее значения внутри данного контура уклоняются в ту или другую сторону от значения в точке M меньше чем на некоторое положительное число ε, где $\varepsilon \to 0$, когда контур стягивается в точку. Поэтому ошибка в интеграле будет по модулю меньше чем

$$\iint\limits_D \varepsilon\, du^1\, du^2 = \varepsilon\sigma.$$

Эта ошибка будет, таким образом, бесконечно малой высшего порядка сравнительно с σ, и ею мы пренебрегаем.

Итак, заменив подынтегральную функцию ее значением в точке M и вынося эту постоянную за знак интеграла получим:

$$\Delta\xi^i \approx \left(-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right)_M \xi^l_M \left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}\right)_M \iint\limits_D du^1\, du^2.$$

Все выражения, стоящие за знаком интеграла, вычислены в точке M. В дальнейшем мы будем это подразумевать, не выписывая значки M явно. Итак:

$$\Delta\xi^i \approx \left(-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right)\xi^l\, 2x^{mk}\sigma, \tag{107.28}$$

где

$$x^{mk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}\right). \tag{107.29}$$

Простой бивектор x^{mk} представляет собой косое произведение векторов

$$a^i_{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \quad a^i_{(2)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^2}.$$

Эти векторы заданы в касательном пространстве A_n в точке M и определяют касательную к $\mathfrak{M}_2$ плоскость A_2 (играя роль векторов (83.11) для поверхности $\mathfrak{M}_2$). Поэтому их косое произведение x^{mk} характеризует двумерное направление касательной плоскости A_2 и, обратно, определяется этим двумерным направлением с точностью до численного множителя (направляющий бивектор двумерной плоскости; § 34). Кроме того, бивектор x^{mk} определяет в плоскости A_2 ориентацию репера, образованного векторами $a^i_{(1)}$, $a^i_{(2)}$. Ориентацию в двумерной плоскости (§ 36) можно наглядно представлять себе как направление вращения по кратчайшему пути от первого ко второму вектору репера в данном случае от $a^i_{(1)}$ к $a^i_{(2)}$. Поскольку векторы $a^i_{(1)}$, $a^i_{(2)}$ направлены по координатным линиям u^1, u^2 в положительных направлениях, то в силу нашего соглашения это будет направление обхода контура.

Таким образом, бивектор x^{mk} характеризует и двумерное направление касательной плоскости A_2 в A_n, и направление обхода контура.

В скобке в (107.28) стоит как бы «кусок тензора кривизны». Однако на самом деле в полученном результате тензор кривизны присутствует полностью, что легко обнаружить, если учесть кососимметрический характер бивектора x^{mk}. А именно, перепишем наше равенство, поменяв между собой обозначения индексов суммирования m и k:

$$\Delta\xi^i \approx \left(-\frac{\partial\Gamma^i_{ml}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mp}\Gamma^p_{kl}\right)\xi^l 2x^{km}\sigma.$$

Сложим полученные равенства и разделим их почленно на 2. Кроме того, во втором из них заменяем x^{km} на $-x^{mk}$. Мы приходим к следующему результату:

$$\Delta\xi^i \approx \left(\frac{\partial\Gamma^i_{ml}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} - \Gamma^i_{mp}\Gamma^p_{kl}\right)\xi^l x^{mk}\sigma.$$

Сравнивая с (105.8), мы замечаем, что в скобке стоит тензор кривизны $R_{mk,\ l\cdot}^{\cdot\cdot\ \ i}$. Окончательно получаем:

$$\Delta\xi^i \approx R_{mk,\ l\cdot}^{\cdot\cdot\ \ i}\xi^l x^{mk}\sigma. \tag{107.30}$$

Итак, вектор ξ^i, параллельно обнесенный по бесконечно малому контуру, лежащему на какой-либо двумерной поверхности и стягивающемуся в точку M, уклоняется от своего первоначального значения ξ^i на вектор $\Delta\xi^i$. Этот вектор в своей главной части билинейно зависит от первоначального вектора ξ^i и от простого бивектора x^{mk}, характеризующего двумерное направление поверхности в точке M, а также направление обхода контура и убывает пропорционально «площади» σ, охваченной контуром на поверхности. Коэффициентами этой билинейной зависимости (от ξ^l и x^{mk}) служат координаты тензора кривизны в точке M. Главная часть вектора $\Delta\xi^i$ берется в том смысле, что мы пренебрегаем слагаемыми, бесконечно малыми высшего порядка сравнительно с σ, и сохраняем лишь члены, пропорциональные σ. В связи с этим приближенное равенство (107.30) всегда можно записать и в форме точного равенства

$$\Delta\xi^i = R_{mk,\ l\cdot}^{\cdot\cdot\ \ i}\, x^{mk}\xi^l\sigma + \varepsilon^i\sigma, \tag{107.31}$$

где ε^i стремится к нулю вместе с σ.

В случае пространства L_n с абсолютным параллелизмом параллельно обнесенный вектор не испытывает отклонения, и $\Delta\xi^i = 0$. Это соответствует обращению в нуль тензора кривизны в правой части равенства. Чем больше отличаются координаты тензора кривизны от нулевых значений, тем резче отклоняется параллельно обнесенный вектор $\xi^i + \Delta\xi^i$ от первоначального вектора ξ^i при прочих равных условиях. В этом смысле тензор кривизны характеризует в геометрии данного L_n степень нарушения абсолютного параллелизма.

Необходимо заметить еще, что разделение множителей x^{mk} и σ в полученной формуле является условным и зависит от выбора координат u^1, u^2 на поверхности. При переходе к другим координатам $u^{1'}$, $u^{2'}$ на той же поверхности бивектор приобретает некоторый численный множитель, причем «площадь» на этот множитель делится (если пренебречь изменениями, бесконечно малыми высшего порядка относительно σ). Инвариантным образованием является по существу лишь бесконечно малый простой бивектор σx^{mk}. Впоследствии в случае риманова пространства V_n мы сможем употребить в качестве множителя σ настоящую *площадь*, охватываемую контуром, а в качестве x^{mk} *единичный* простой бивектор. Тогда разделение множителей x^{mk} и σ приобретает инвариантный смысл.

§ 108. Тензор кривизны в L_n^0

В этом параграфе и далее до конца книги мы будем рассматривать исключительно пространства аффинной связности без кручения L_n^0, т. е. будем считать

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{108.1}$$

Разумеется, все сделанное выше в пространстве L_n остается верным, в частности, и в $L^0{}_n$. Но тензор кривизны приобретает в этом случае и новые свойства, которыми мы и займемся. Напомним прежде всего результат, полученный в конце § 106, который можно формулировать так:

Для того чтобы пространство $L^0{}_n$ было (локально) аффинным, необходимо и достаточно тождественное обращение в нуль его тензора кривизны,

$$R_{kl,\ p\cdot}^{\ \ \ \ i} = 0.$$

Действительно, в L_n^0 тензор кручения S_{ij}^k равен нулю, и если, кроме того, $R_{kl,\ p\cdot}^{\ \ \ \ i} = 0$, то согласно § 106 мы имеем (локально) аффинное пространство. Обратно, аффинное (или хотя бы локально аффинное) пространство представляет собой частный случай L_n^0, причем его тензор кривизны тождественно равен нулю.

Далее выведем некоторые формальные свойства тензора кривизны в L_n^0, отсутствующие в общем случае.

1°. *Тождество Риччи.* Перепишем формулу (105.12):

$$R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = A^q_{k,\,li} - A^q_{l,\,ki}, \tag{108.2}$$

где

$$A^q_{l,\,ki} = \frac{\partial \Gamma^q_{ki}}{\partial x^l} + \Gamma^q_{lp}\Gamma^p_{ki}. \tag{108.3}$$

Но теперь в силу (108.1) $A^q_{l,\,ki}$ симметрично по индексам k, i

$$A^q_{l,\,ki} = A^q_{l,\,ik}. \tag{108.4}$$

Подвергнем $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ *циклированию* по нижним индексам, т. е. произведем над этими индексами круговую подстановку, потом еще раз круговую подстановку, и полученные тензоры сложим с $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$. Мы утверждаем, что в итоге получится нуль:

$$R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + R_{ki,\,l}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + R_{il,\,k}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = 0. \tag{108.5}$$

В самом деле, в результате круговых подстановок индексов равенство (108.2) принимает вид:

$$R_{ki,\,l}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = A^q_{i,\,kl} - A^q_{k,\,il},$$

$$R_{il,\,k}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = A^q_{l,\,ik} - A^q_{i,\,lk}.$$

Складывая (108.2) с двумя последними равенствами почленно и принимая во внимание (108.4), мы замечаем, что в правой части каждое вычитаемое взаимно уничтожится с уменьшаемым из следующего по порядку равенства (порядок считаем круговым, так что за последним равенством следует (108.2)). Этим и доказывается соотношение (108.5) — *тождество Риччи.*

2°. *Тождество Бианки—Падова.* Для абсолютных производных тензора кривизны $\nabla_m R_{kl,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ имеет место следующее тождество:

$$\nabla_m R_{kl,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + \nabla_k R_{lm,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + \nabla_l R_{mk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = 0. \tag{108.6}$$

Другими словами, *циклирование* по индексу дифференцирования m и первым двум индексам тензора кривизны k, l всегда дает нуль.

Для упрощения доказательства перейдем к координатам x^i, геодезическим в рассматриваемой точке, т. е. к таким, что в *рассматриваемой точке*

$$\Gamma^k_{ij} = 0. \tag{108.7}$$

В случае L_n^0 это всегда можно сделать (§ 91). Тогда в *рассматриваемой точке* абсолютные производные от любого тензора совпадают с обыкновенными частными производными, так как дополнительные члены, содержащие Γ^k_{ij}, обращаются в нуль. В частности,

$$\nabla_m R_{kl,\,i}^{\cdot\cdot\;\;\,q} = \frac{\partial}{\partial x^m} R_{kl,\,i}^{\cdot\cdot\;\;\,q} = \frac{\partial}{\partial x^m} A^q_{l,\,ki} - \frac{\partial}{\partial x^m} A^q_{k,\,li}, \tag{108.8}$$

где последнее выражение получено с помощью (108.2). При этом, как легко получить, дифференцируя (108.3) почленно,

$$\frac{\partial}{\partial x^m} A^q_{l,\,ki} = \frac{\partial^2 \Gamma^q_{ki}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

Мы отбросили здесь результат дифференцирования членов с произведениями Γ, так как он равен нулю. В самом деле, после дифференцирования в каждом члене остается непродифференцированный множитель Γ, который обращает произведение в нуль. Теперь (108.8) можно переписать в виде

$$\nabla_m R_{kl,\,i}^{\cdot\cdot\;\;\,q} = \frac{\partial^2 \Gamma^q_{ki}}{\partial x^l\, \partial x^m} - \frac{\partial^2 \Gamma^q_{li}}{\partial x^k\, \partial x^m}.$$

Циклируя по индексам m, k, l, легко убеждаемся в справедливости соотношения (108.6)—*тождества Бианки—Падова*. Правда, оно выведено нами в специальной координатной системе—геодезической в рассматриваемой точке. Но в силу своего тензорного характера оно будет справедливо и в любой координатной системе (если тензор равен нулю в одной координатной системе, то из тензорного закона преобразования следует его равенство нулю и в любой координатной системе).

3°. *Альтернированная вторая абсолютная производная.* Вернемся к формуле (105.9), в которой впервые появился у нас тензор кривизны:

$$\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i = R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\;\;\,p} u_p \tilde{d}x^l\, dx^k. \tag{108.9}$$

Мы хотим детальнее расшифровать эту формулу, выразив абсолютные дифференциалы через абсолютные производные. При этом мы сохраняем предположения § 105, а именно, D и $\tilde{D}$ остаются символами абсолютных дифференциалов, а d и $\tilde{d}$—символами частных дифференциалов по параметрам α и β на произвольной поверхности $\mathfrak{M}_2$

$$x^i = x^i(\alpha,\ \beta).$$

В частности,

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} d\alpha, \quad \tilde{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \beta} \tilde{d}\beta. \tag{108.10}$$

Очевидно, $\frac{\partial x^i}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x^i}{\partial \beta}$ представляют собой одноконтравариантные тензорные поля, заданные на нашей поверхности. Как видно из (108.10), можно считать dx^i, $\tilde{d}x^i$ тоже тензорными полями, причем множители $d\alpha$, $\tilde{d}\beta$ рассматриваются как независимые переменные, имеющие одинаковые значения во всех точках поля. От полей dx^i, $\tilde{d}x^i$ можно вычислить абсолютные дифференциалы:

$$\tilde{D}dx^i = \tilde{d}\, dx^i + \Gamma^i_{kp}\, dx^p\, \tilde{d}x^k,$$
$$D\tilde{d}x^i = d\, \tilde{d}x^i + \Gamma^i_{pk}\, \tilde{d}x^k\, dx^p.$$

Вследствие отсутствия кручения и перестановочности символов d и $\tilde{d}$ получаем отсюда

$$\tilde{D}\, dx^i = D\,\tilde{d}x^i. \tag{108.11}$$

Далее, как мы знаем, абсолютный дифференциал тензора произвольного поля (заданного в некоторой n-мерной области пространства) можно разложить по абсолютным производным. Например

$$Du_i = dx^p \nabla_p u_i, \qquad \tilde{D}u_i = \tilde{d}x^p \nabla_p u_i.$$

Эти формулы, очевидно, остаются справедливыми и при подстановке вместо u_i любого другого тензорного поля, заданного в некоторой n-мерной области пространства. Поэтому можно записать символически:

$$D = dx^q \nabla_q, \qquad \tilde{D} = \tilde{d}x^q \nabla_q. \tag{108.12}$$

Теперь вычислим $\tilde{D}Du_i$:

$$\tilde{D}Du_i = \tilde{D}\,(dx^p \nabla_p u_i) = \tilde{D}dx^p \cdot \nabla_p u_i + dx^p \tilde{D}\,(\nabla_p u_i).$$

Аналогично получаем:

$$D\tilde{D}u_i = D\tilde{d}x^p \cdot \nabla_p u_i + \tilde{d}x^p D\,(\nabla_p u_i).$$

Отсюда, учитывая (108.11), получаем:

$$\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i = dx^p \tilde{D}\,(\nabla_p u_i) - \tilde{d}x^p D\,(\nabla_p u_i).$$

Раскрываем в правой части символы D и $\tilde{D}$ согласно (108.12), причем индексы суммирования p, q заменяем в первом члене на k, l, а во втором — на l, k. Получаем:

$$\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i = dx^k \tilde{d}x^l\,(\nabla_l \nabla_k u_i - \nabla_k \nabla_l u_i). \tag{108.13}$$

Ввиду произвола в выборе функций $x^i(\alpha, \beta)$ значения dx^k, $\tilde{d}x^k$ в любой наперед заданной точке можно брать произвольно. Сравнивая (108.13) с (108.9) и учитывая, что правые части равны тождественно (при любых dx^k, $\tilde{d}x^l$), мы приходим к выводу

$$\nabla_l \nabla_k u_i - \nabla_k \nabla_l u_i = R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot p} u_p. \tag{108.14}$$

Мы получили формулу для альтернированной второй абсолютной производной тензорного поля u_i. Если нам дано тензорное поле произвольного строения, например, Z^p_{ij}, то поступаем совершенно таким же образом. Прежде всего формула (108.13) остается верной при замене u_i любым тензорным полем, так как ее вывод повторяется дословно (одноковариантный характер тензора никакой роли не играет).

Таким образом,

$$\tilde{D}DZ^r_{st} - D\tilde{D}Z^r_{st} = dx^k \tilde{d}x^l (\nabla_l \nabla_k Z^r_{st} - \nabla_k \nabla_l Z^r_{st}).$$

Сравнивая с (105.16), мы снова убеждаемся в тождественном (относительно dx^k, $\tilde{d}x^l$) равенстве правых частей, а следовательно, можем приравнять соответствующие коэффициенты:

$$\nabla_l \nabla_k Z^r_{st} - \nabla_k \nabla_l Z^r_{st} = -R_{lk,\,p}^{\cdot\cdot\,\cdot r} Z^p_{st} + R_{lk,\,s}^{\cdot\cdot\,\cdot p} Z^r_{pt} + R_{lk,\,t}^{\cdot\cdot\,\cdot p} Z^r_{sp}. \tag{108.15}$$

Индексы суммирования во всех членах правой части обозначены через p. В частности, для одноконтравариантного тензорного поля

$$\nabla_l \nabla_k v^r - \nabla_k \nabla_l v^r = -R_{lk,\,p}^{\cdot\cdot\,\cdot r} v^p. \tag{108.16}$$

Формулы (108.14), (108.16) *являются основными*. Действительно, в общей формуле (108.15) правая часть содержит столько членов, сколько индексов у данного тензора, причем для *каждого нижнего индекса соответствующий член составляется по схеме* (108.14), *а для каждого верхнего — по схеме* (108.16). Остальные индексы переписываются каждый раз без изменений.

Полученные формулы показывают, что вторые ковариантные производные зависят, вообще говоря, от порядка дифференцирования, так что символы ∇_k, ∇_l нельзя переставлять между собой, не компенсируя эту перестановку внесением добавочных членов согласно (108.15). В технике тензорных выкладок это обстоятельство играет большую роль. Только в случае обращения тензора кривизны в нуль, т. е. в случае аффинного (или, по крайней мере, локально аффинного) пространства, правая часть (108.15) равна нулю, и символы ∇_k, ∇_l перестановочны между собой. Это, впрочем, видно уже из того, что в этом случае можно перейти (хотя бы локально) к аффинным координатам, в которых $\Gamma^k_{ij} = 0$ и символ ∇_k означает просто частное дифференцирование по x^k.

Для вывода формулы (108.15) существенно отсутствие кручения в нашем пространстве, т. е. симметрия Γ^k_{ij} по нижним индексам:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

На основе этого было получено равенство (108.11), использованное в нашем выводе. В случае L_n с кручением наши формулы значительно усложнились бы.

§ 109*. Проективно евклидовы пространства

В конце § 90 мы получили необходимый и достаточный признак того, что пространство L^0_n с объектом связности Γ^k_{ij} является *проективно евклидовым. Этот признак заключается в существовании такого тензора P_i в окрестности каждой точки M, что после преобразования объекта связности Γ^k_{ij} по формуле*

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + P_i\delta^k_j + P_j\delta^k_i \tag{109.1}$$

эта окрестность становится окрестностью аффинного пространства A_n. Для удобства выкладок мы обозначили прежнее p_i через $-2P_i$:

$$P_i = -\frac{p_i}{2}. \tag{109.2}$$

Этот признак неэффективен, так как неясно, каким путем установить существование (или несуществование) такого тензора P_i. Пользуясь тензором кривизны, мы сможем решить этот вопрос, так как наша задача принимает следующий вид. *Требуется выяснить, существует ли для данной связности Γ^k_{ij} в некоторой окрестности каждой точки M такой тензор P_i, что связность* (109.1) *обладает нулевым тензором кривизны.* В самом деле, обращение в нуль тензора кривизны для связности G^k_{ij} равносильно тому, что эта связность определяет обыкновенную аффинную геометрию, по крайней мере, в окрестности точки M.

Прежде всего проведем следующую выкладку.

Подсчитаем тензор кривизны для связности

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij}, \tag{109.3}$$

где Γ^k_{ij} — *данная связность*, а T^k_{ij} — *данное тензорное поле* (напомним, что теперь у нас всегда $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$).

Тензор кривизны $\tilde{R}_{ik,\,l}^{\cdot\cdot\cdot q}$ для связности $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ можно вычислить по формуле

$$\tilde{R}_{ik,\,l}^{\cdot\cdot\cdot q} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^q_{li}}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^q_{ks}\tilde{\Gamma}^s_{li}\,[l,\,k], \tag{109.4}$$

где символ $[l, k]$ означает требование произвести альтернацию по индексам k, l, однако без деления на 2.

Вставляя сюда $\tilde{\Gamma}^k_{li} = \Gamma^k_{li} + T^k_{li}$ и раскрывая скобки, мы получим члены трех родов.

1°. Члены, содержащие только Γ^k_{ij} и их производные; они образуют, очевидно, тензор кривизны $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ для связности Γ^k_{ij}.

2°. Члены, содержащие только T^k_{ij} и их производные:

$$\frac{\partial T^q_{li}}{\partial x^k} + T^q_{ks} T^s_{li}\,[l,\ k]. \tag{109.5}$$

3°. Смешанные члены:

$$\Gamma^q_{ks} T^s_{li} + T^q_{ks}\Gamma^s_{li}\,[l,\ k].$$

Нетрудно заметить, что эти члены можно записать и так:

$$\Gamma^q_{ks} T^s_{li} - \Gamma^s_{ki} T^q_{ls} - \Gamma^s_{kl} T^q_{si}\,[l,\ k]. \tag{109.6}$$

Действительно, первый член не изменился, второй член дает после альтернации по k, l то же самое, что и раньше, а третий член при альтернации пропадает. Запись (109.6) подобрана так, чтобы, объединяя ее с (109.5), мы получили:

$$\nabla_k T^q_{li} + T^q_{ks} T^s_{li}\,[l,\ k],$$

где абсолютная производная берется по связности Γ^k_{ij}.

Теперь (109.4) принимает окончательный вид

$$\tilde{R}_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + \nabla_k T^q_{li} + T^q_{ks} T^s_{li} - \nabla_l T^q_{ki} - T^q_{ls} T^s_{ki}. \tag{109.7}$$

Эта формула показывает, как преобразуется тензор кривизны, когда к объекту связности Γ^k_{ij} добавляется произвольный тензор T^k_{ij}.

Применим этот результат к случаю (109.1), когда

$$T^k_{ij} = P_i\delta^k_j + P_j\delta^k_i.$$

Очевидно,

$$\nabla_k T^q_{li} = \nabla_k P_l \cdot \delta^q_i + \nabla_k P_i \cdot \delta^q_l$$

(согласно (98.4) $\nabla_k \delta^i_j = 0$). Кроме того,

$$T^q_{ks} T^s_{li} = (P_k\delta^q_s + P_s\delta^q_k)\ (P_l\delta^s_i + P_i\delta^s_l) = \delta^q_i P_k P_l + \delta^q_l P_k P_i + 2\delta^q_k P_i P_l.$$

Мы воспользовались здесь очевидными соотношениями

$$\delta^q_s\delta^s_i = \delta^q_i, \qquad P_s\delta^s_l = P_l \text{ и т. п.}$$

Вставляя полученные выражения в (109.7), мы приходим к тензору кривизны для связности G^k_{ij}:

$$\tilde{R}_{ik,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = R_{ik,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + \delta^q_l(\nabla_k P_i - P_k P_i) - \delta^q_k(\nabla_l P_i - P_l P_i) + \delta^q_i(\nabla_k P_l - \nabla_l P_k).$$

Введем обозначение

$$P_{ki} = \nabla_k P_i - P_k P_i. \tag{109.8}$$

Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\tilde{R}_{ik,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = R_{ik,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + \delta^q_l P_{ki} - \delta^q_k P_{li} + \delta^q_i (P_{kl} - P_{lk}). \tag{109.9}$$

Переходим к выводу необходимых признаков проективно евклидовой связности. Пусть связность Γ^k_{ij} *проективно евклидова, т. е. можно подобрать такой тензор* P_i, *что связность* $G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + P_i \delta^k_j + P_j \delta^k_i$ *имеет кривизну нуль:*

$$\tilde{R}_{ik,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = R_{ik,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + \delta^q_l P_{ki} - \delta^q_k P_{li} + \delta^q_i (P_{kl} - P_{lk}) = 0.$$

В таком случае

$$R_{ik,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = \delta^q_k P_{li} - \delta^q_l P_{ki} + \delta^q_i (P_{lk} - P_{kl}), \tag{109.10}$$

причем

$$P_{ki} = \nabla_k P_i - P_k P_i. \tag{109.11}$$

Это значит прежде всего, что тензор кривизны для связности Γ^k_{ij} должен иметь специальную алгебраическую структуру (109.10). *Возникает вопрос, как установить для данного тензора кривизны* $R_{ik,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ *имеет ли он такую структуру и, если имеет, как найти по нему тензор* P_{ik}.

Эта задача решается следующим образом.

Из тензора кривизны можно составить дважды ковариантный тензор R_{ki} путем свертывания верхнего индекса с первым нижним:

$$R_{ki} = R_{sk,\,i.}^{\cdot\cdot\,\cdot s}. \tag{109.12}$$

Полученный таким образом тензор R_{ki} мы будем называть *тензором Риччи*. Если тензор кривизны имеет строение (109.10), то после свертывания по индексам q, l получаем:

$$R_{ki} = P_{ki} - nP_{ki} + P_{ik} - P_{ki} = -nP_{ki} + P_{ik}. \tag{109.13}$$

Из этого соотношения нетрудно выразить обратно P_{ki} через R_{ki}, R_{ik}. Для этого перепишем (109.13), поменяв местами индексы k, i:

$$R_{ik} = -nP_{ik} + P_{ki}.$$

Два полученных уравнения решаем относительно двух «неизвестных» P_{ik}, P_{ki}, умножая первое уравнение на n и складывая со вторым почленно. Это дает нам

$$nR_{ki} + R_{ik} = -(n^2 - 1) P_{ki},$$

откуда

$$P_{ki} = -\frac{nR_{ki}+R_{ik}}{n^2-1}. \qquad (109.14)$$

Таким образом, если тензор кривизны имеет строение (109.10), то тензор P_{ki} необходимо выражается через тензор Риччи вполне определенным образом. *Поэтому тензор кривизны имеет строение* (109.10) *в том и только в том случае, когда, подставляя* P_{ki} *из* (109.14) *в* (109.10), *мы приходим к тождеству, т. е. когда имеет место равенство*

$$R_{lk,\ i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q} = -\frac{1}{n^2-1}\delta_k^q(nR_{li}+R_{il}) +$$
$$+\frac{1}{n^2-1}\delta_l^q(nR_{ki}+R_{ik}) - \frac{\delta_i^q}{n+1}(R_{lk}-R_{kl}). \qquad (109.15)$$

Заметим, что при $n=2$ тензор $R_{lk,\ i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q}$ *всегда* имеет строение (109.10), так что условие (109.15) *всегда* представляет собой тождество.

Действительно, отличные от нуля координаты тензора $R_{lk,\ i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q}$ мы получаем лишь в случае $l, k=1, 2$ (или $l, k=2, 1$, но этот случай дает разницу лишь в знаке координаты). В результате мы имеем только четыре существенно различные координаты, например, такие:

$$R_{12,\ 1\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 1},\quad R_{12,\ 1\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 2},\quad R_{12,\ 2\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 1},\quad R_{12,\ 2\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 2}.$$

Для них равенство (109.10) примет вид

$$R_{12,\ 1\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 1} = P_{12} - 2P_{21},$$
$$R_{12,\ 1\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 2} = P_{11},$$
$$R_{12,\ 2\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 1} = P_{22},$$
$$R_{12,\ 2\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 2} = -P_{21} + 2P_{12}.$$

Очевидно, полученные уравнения всегда совместны относительно P_{ij}, а следовательно, тензор кривизны всегда можно представить в виде (109.10).

Возвращаемся к случаю произвольного $n>1$. Согласно (109.11)

$$\nabla_k P_i = P_k P_i + P_{ki}. \qquad (109.16)$$

Возьмем почленно абсолютную производную ∇_l, причем в правой части $\nabla_l P_k$, $\nabla_l P_i$ заменяем снова из (109.16). Получим:

$$\nabla_l\nabla_k P_i = (\nabla_l P_k)P_i + P_k\nabla_l P_i + \nabla_l P_{ki} =$$
$$= P_l P_k P_i + P_{lk}P_i + P_k P_l P_i + P_k P_{li} + \nabla_l P_{ki}.$$

Альтернируя по l, k (без деления на 2), получаем согласно (108.14)

$$R_{lk,\ i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q} P_q = (P_{lk}-P_{kl})P_i + P_k P_{li} - P_l P_{ki} + \nabla_l P_{ki} - \nabla_k P_{li}.$$

Вставляя, наконец, в левую часть выражения для $R_{ik,\,i}^{\cdot\,\cdot\,q}$ из (109.10) и выполняя суммирование по q, получаем окончательно:

$$0=\nabla_l P_{ki}-\nabla_k P_{li}. \tag{109.17}$$

Итак, для того чтобы связность Γ_{ij}^k *была проективно евклидовой, необходимо, чтобы тензор кривизны имел строение* (109.10), *где тензор* P_{li} *удовлетворяет условию* (109.17).

Докажем, что эти условия являются и достаточными. Пусть нам дано, что для некоторой связности Γ_{ij}^k имеют место равенства (109.10) и (109.17). Будем искать тензор P_i из системы дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $P_i(x^1, \ldots, x^n)$:

$$\nabla_k P_i = P_k P_i + P_{ki}. \tag{109.18}$$

Если подробно выписать абсолютную производную, то эти уравнения примут вид

$$\frac{\partial P_i}{\partial x^k}=\Gamma_{ki}^p P_p + P_k P_i + P_{ki}, \tag{109.19}$$

т. е. каждая частная производная 1-го порядка от каждой неизвестной функции P_i выражена через самые неизвестные функции (а также через известные функции Γ_{ki}^p, P_{ki}). Условия интегрируемости такой системы составляются, как известно, следующим образом: дифференцируем (109.19) почленно по x^l, заменяем возникающие в правой части производные $\frac{\partial P_j}{\partial x^l}$, используя снова (109.19), а затем альтернируем по индексам k, l. В левой части получается нуль, а в правой части некоторое выражение, содержащее неизвестные функции P_i в конечном виде. Если полученное соотношение удовлетворяется тождественно (при любых P_i и любых x^i), то мы говорим, что *условия интегрируемости удовлетворяются тождественно.*

В нашем случае мы эту же по существу выкладку предпочтем провести в абсолютных производных, а именно, возьмем общее уравнение системы в виде (109.18), подействуем на него посредством ∇_l, заменим в правой части производные $\nabla_l P_i$, снова используя (109.18), и, наконец, проальтернируем по k, l. Но все это мы уже выполнили, исходя из уравнения (109.16), причем пришли в результате к условиям интегрируемости (109.17). Но сейчас нам дано, что равенство (109.17) имеет место. *Следовательно, условия интегрируемости для системы* (109.18) *выполняются тождественно.* Отсюда мы заключаем (см. сноску к § 93, стр. 442), что система (109.18) имеет решение при любых начальных значениях неизвестных функций

$$P_i=(P_i)_0,$$

заданных для какой-нибудь точки $x^i = x_0^i$. Это решение существует по крайней мере, в некоторой окрестности точки x_0^i. Построим теперь связность

$$G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + P_i\delta_j^k + P_j\delta_i^k$$

и вычислим для нее тензор кривизны $\tilde{R}_{lk,i}^{\cdot\cdot,q}$. Он выражается, как мы знаем, формулой (109.9), причем тензор P_{ki} в этой формуле имеет вид

$$P_{ki} = \nabla_k P_i - P_k P_i,$$

т. е., как видно из (109.18), совпадает с рассматриваемым нами тензором P_{ki}. Учитывая, что, кроме того, имеет место (109.10), мы убеждаемся, что $\tilde{R}_{lk,i}^{\cdot\cdot,q} = 0$, а это означает, что связность Γ_{ij}^k проективно евклидова.

Итак, необходимый и достаточный признак проективно евклидовой связности состоит в том, что тензор кривизны для нее имеет вид

$$R_{lk,i}^{\cdot\cdot,q} = \delta_k^q P_{li} - \delta_l^q P_{ki} + \delta_i^q (P_{lk} - P_{kl}), \tag{109.20}$$

причем тензор P_{ki} удовлетворяет условию

$$\nabla_l P_{ki} - \nabla_k P_{li} = 0. \tag{109.21}$$

Заметим, что при этом тензор P_{ki} необходимо выражается через тензор кривизны формулой (109.14):

$$P_{ki} = -\frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2 - 1}. \tag{109.22}$$

Мы уже отмечали, что при $n = 2$ условие (109.20) выполняется для любого тензора кривизны, *так что необходимым и достаточным признаком остается лишь условие* (109.21). *Наоборот, при $n > 2$ достаточно ограничиться условием* (109.20), *так как условие* (109.21) *является его следствием.*

Чтобы показать это, используем тождество Бианки—Падова:

$$\nabla_m R_{lk,i}^{\cdot\cdot,q} + \nabla_l R_{km,i}^{\cdot\cdot,q} + \nabla_k R_{ml,i}^{\cdot\cdot,q} = 0. \tag{109.23}$$

Три слагаемых получаются последовательно одно из другого круговой подстановкой индексов m, l, k. Подставляя сюда вместо тензора кривизны его выражение (109.20), мы получаем $\left(\text{если еще умножить левую часть на } \frac{1}{6}\right)$:

$$\delta_{[k}^q \nabla_m P_{l]i} + \delta_i^q \nabla_{[m} P_{lk]} = 0. \tag{109.24}$$

В этом нетрудно убедиться, если фактически выполнить указанные здесь альтернации по индексам m, k, l. Свернем левую часть

(109.24) по индексам q, i. Получим:

$$\delta^i_{[k}\nabla_m P_{l]i} + \delta^i_i \nabla_{[m} P_{lk]} = 0.$$

Первый член дает $\nabla_{[m}P_{lk]}$, второй $n\nabla_{[m}P_{lk]}$ (так как $\delta^i_i = n$), так что в результате

$$\nabla_{[m} P_{l\, k]} = 0.$$

Теперь (109.24) принимает упрощенный вид

$$\delta^q_{[k}\nabla_m P_{l]i} = 0.$$

Возьмем индексы k, m, l различными. Это возможно, так как $n>2$. Положим $q=k$. Тогда $\delta^q_k = 1$, $\delta^q_m = \delta^q_l = 0$, и в результате альтернации получаем $\left(\text{опуская коэффициент } \frac{1}{6}\right)$:

$$\nabla_m P_{li} - \nabla_l P_{mi} = 0.$$

Мы действительно вывели условие (109.21) из условия (109.20).

В произвольном $\overset{0}{L}_n$ можно составить тензор

$$P_{ik.i.}^{\cdot\cdot\,q} = R_{ik.i.}^{\cdot\cdot\,q} + \delta^q_k \frac{nR_{li}+R_{il}}{n^2-1} - \delta^q_l \frac{nR_{ki}+R_{ik}}{n^2-1} + \delta^q_i \frac{R_{lk}-R_{kl}}{n+1}, \quad (109.25)$$

который называется *тензором проективной кривизны*. Его обращение в нуль, равносильное условию (109.20), необходимо и достаточно, следовательно, для того, чтобы $\overset{0}{L}_n$ (при $n>2$) было проективно евклидовым.

Отметим, что при геодезическом преобразовании связности в любом $\overset{0}{L}_n$

$$\Gamma^k_{ij} \to \Gamma^k_{ij} + P_i\delta^k_j + P_j\delta^k_i$$

с любым тензорным полем P_i *тензор проективной кривизны остается инвариантным.*

§ 110. Тензор кривизны в римановом пространстве V_n

Начиная с этого параграфа и до конца книги, мы будем рассматривать только римановы пространства (исключение составляет лишь часть § 113). Как мы знаем, каждое риманово пространство снабжено определенной связностью без кручения (риманова связность). Под $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ мы будем понимать коэффициенты этой связности. Все сказанное выше о тензоре кривизны в пространствах аффинной связности L_n и, в частности, в пространствах $\overset{0}{L}_n$ (§ 108) применимо, таким образом, и к римановой связности. Соответствующий тензор кривизны $R_{ik.i.}^{\cdot\cdot\,q}$ мы будем называть *тензором кривизны риманова пространства*. При этом тензор кривизны риманова пространства обладает рядом важных свойств, которые не имеют места в L_n^0 (и тем более в L_n общего вида).

Чтобы обнаружить эти свойства, мы рассмотрим *ковариантный тензор кривизны*, опустив верхний индекс при помощи метрического тензора:

$$R_{lk,\,ij} = R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} g_{qj}. \tag{110.1}$$

Этот тензор отличается высокой симметрией своего строения. Чтобы раскрыть ее, мы вычислим его координаты. Вставляя вместо $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ выражение (105.8), получаем:

$$R_{lk,\,ij} = \left(\frac{\partial \Gamma_{li}^q}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^q \Gamma_{li}^p\right) g_{qj}\,[k,\,l], \tag{110.2}$$

где символ $[k,\,l]$ означает требование произвести альтернацию по индексам k, l без деления на 2.

Выражение в скобках, если фиксировать индексы l, i и обозначить $\Gamma_{li}^q = \Gamma^q$, *формально* имеет вид абсолютной производной $\nabla_k \Gamma^q$; наружный множитель g_{qj} вызывает опускание верхнего индекса q, которое можно выполнить и под знаком абсолютного дифференцирования (см. (98.8)), так что получится

$$\nabla_k \Gamma_j = \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^k} - \Gamma_{kj}^p \Gamma_p.$$

После возвращения на место индексов l, i получаем:

$$R_{lk,\,ij} = \left(\frac{\partial \Gamma_{j,\,li}}{\partial x^k} - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{p,\,li}\right)[k,\,l],$$

где, согласно (94.5), (94.8),

$$\Gamma_{j,\,li} = g_{qj} \Gamma_{li}^q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}\right). \tag{110.3}$$

Конечно, фактически Γ^q не является тензором, однако проведенная выкладка законна, так как в каждой *данной* координатной системе можно рассмотреть и тензор с координатами Γ^q в *этой* системе.

Вставляя (110.3) в предыдущую формулу и выполняя альтернацию, получаем окончательно:

$$R_{lk,\,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^j}\right) + \\ + g_{pq}\left(\Gamma_{lj}^p \Gamma_{ki}^q - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{li}^q\right). \tag{110.4}$$

Обратим внимание на закон составления *первой скобки*. Дифференцируем координату метрического тензора g_{lj}, взятую с индексами, крайними у $R_{lk,\,ij}$ по x^k, x^i, где k, i — средние индексы $R_{lk,\,ij}$.

Получаем:

$$\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i},$$

альтернируем по первой паре индексов у $R_{lk,\,ij}$, т. е. по l, k; полученный результат альтернируем по второй паре индексов у $R_{lk,\,ij}$, т. е. по i, j, и получаем первую скобку в (110.4). Можно было бы альтернировать сначала по второй паре индексов, а потом по первой; результат от этого не меняется.

Вторая скобка в (110.4) получается после альтернирования по индексам первой пары l, k или по индексам второй пары i, j выражения

$$g_{pq}\Gamma^p_{lj}\Gamma^q_{ki},$$

в котором на один множитель Γ перешли индексы, крайние у $R_{lk,\,ij}$, а на другой — средние.

Отсюда ясно, что первая и вторая пары индексов у $R_{lk,\,ij}$ играют совершенно симметричную роль, так что

$$R_{lk,\,ij}=R_{ij,\,lk}. \tag{110.5}$$

Ковариантный тензор кривизны не меняется при перестановке между собой первой и второй пар индексов (при сохранении порядка индексов внутри каждой пары).

Разумеется, это правило легко проверить и непосредственным подсчетом, пользуясь формулой (110.4).

Далее, отсюда следует, что тензор кривизны кососимметричен по индексам второй пары так же, как и по индексам первой пары. В самом деле, еще при первом своем появлении в произвольном L_n тензор кривизны обладал косой симметрией по индексам первой пары

$$R^{\cdot\cdot\cdot q}_{lk,\,i\cdot}=-R^{\cdot\cdot\cdot q}_{kl,\,i\cdot}.$$

При опускании индекса q это свойство, очевидно, сохраняется:

$$R_{lk,\,ij}=-R_{kl,\,ij}. \tag{110.6}$$

Переставляя теперь между собой индексы k и l в равенстве (110.5), мы замечаем, что левая часть равенства меняет знак, а следовательно, меняет знак и правая часть. Но для правой части равенства перестановка происходит во второй паре индексов, так что мы получаем:

$$R_{ij,\,lk}=-R_{ij,\,kl}. \tag{110.7}$$

Итак, ковариантный тензор кривизны кососимметричен как по индексам первой пары, так и по индексам второй пары.

В произвольном L_n^0 и, в частности, в V_n тензор кривизны удовлетворяет тождеству Риччи (§ 108)

$$R_{lk,\, i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q} + R_{ki,\, l\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q} + R_{il,\, k\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q} = 0.$$

Опустив индекс q, мы получаем *тождество Риччи для ковариантного тензора кривизны*

$$R_{lk,\, ij} + R_{ki,\, lj} + R_{il,\, kj} = 0. \qquad (110.8)$$

Здесь циклирование происходит по первым трем индексам. *Однако тождество остается верным, если производить циклирование по любым трем индексам ковариантного тензора кривизны.*

В самом деле, какие бы три индекса в $R_{lk,\, ij}$ ни выбрать, всегда можно добиться, пользуясь (110.5)—(110.7) и производя соответствующую подстановку индексов, чтобы избранные индексы заняли три первых места и при этом численное значение координаты $R_{lk,\, ij}$ не изменилось. Применяя затем тождество Риччи с циклированием по первым трем индексам, мы убеждаемся, что тождество будет верным и для первоначального (произвольного) положения этих индексов.

Ряд тождественных (имеющих место в любом V_n) линейных зависимостей, связывающих между собой координаты тензора кривизны, естественно, наводит на мысль подсчитать, *сколько существенных координат имеет тензор кривизны.*

Тензор кривизны $R_{ij,\, kl}$ как тензор четвертой валентности имеет, собственно говоря, n^4 координат, так как каждый из четырех индексов может принимать n значений.

Мы ставим вопрос: сколько координат тензора R можно задавать произвольно *), с тем чтобы остальные координаты тождественно выражались через них.

Подсчитаем число этих существенных координат.

1. Рассмотрим те координаты, в которых только два различных индекса, например, 1 и 2. Независимая координата только одна, так как $R_{12,\,12}$, $R_{12,\,21}$, $R_{21,\,12}$, $R_{21,\,21}$ либо равны, либо отличаются знаками. Остальные же координаты равны нулю.

Таких пар индексов будет C_n^2 и каждая пара дает одну существенную координату (C_n^m — число сочетаний из n по m).

Следовательно, существенных координат, имеющих только два различных индекса, будет $C_n^2 \cdot 1$.

2. Пусть координата имеет три различных индекса, например, 1, 2, 3. Существенные координаты суть $R_{12,\,13}$, $R_{21,\,23}$, $R_{31,\,32}$, остальные либо нули, либо равны этим, либо отличаются только знаками, что нетрудно проверить. Так как выбрать три индекса

*) Рассматривая, разумеется, тензор R для произвольной римановой метрики данного числа измерений n.

из n можно C_n^3 способами, то число существенных координат с тремя различными индексами будет:

$$C_n^3 \cdot 3.$$

3. Пусть все четыре индекса различны, например, 1, 2, 3, 4. Возьмем компоненты: $R_{12,\,34}$, $R_{23,\,14}$, $R_{31,\,24}$. На основании алгебраических свойств тензора $R_{ij,\,kl}$ все остальные координаты с индексами 1, 2, 3, 4 можно выразить через эти. Но и эти координаты не все существенны, ибо их сумма равна нулю на основании тождества Риччи. Среди этих трех координат независимых, следовательно, только две.

Число существенных координат с четырьмя различными индексами будет:

$$C_n^4 \cdot 2.$$

Всего существенных координат

$$N = C_n^2 \cdot 1 + C_n^3 \cdot 3 + C_n^4 \cdot 2 = \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2} \cdot 1 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot 3 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot 2.$$

Итак:

$$N = \frac{n^2\,(n^2-1)}{12}. \tag{110.9}$$

Отметим, что отношение числа существенных координат N к их общему числу n^4 при неограниченном возрастании n стремится к $\frac{1}{12}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N}{n^4} = \frac{1}{12}. \tag{110.10}$$

До сих пор мы выяснили только то, что все n^4 координат тензора R могут быть тождественно выражены через N из них. Собственно, нужно еще показать, что эти N координат уже все существенны, т. е. что между ними нет никаких тождественных зависимостей. Другими словами, пусть заданы эти N координат совершенно произвольно, а остальные выражены через них. Тогда всегда можно построить риманову метрику так, что в данной точке этот наперед заданный тензор R будет служить тензором кривизны. На доказательстве этого останавливаться не будем.

Применим формулу (110.9) для частных случаев:

1) $n=2$, $N=1$; 2) $n=3$, $N=6$.

Заметим, что для трехмерного пространства тензор кривизны имеет столько же существенных координат, сколько и основной метрический тензор g_{ij}.

Рассмотрим, наконец, тензор Риччи

$$R_{ki} = R_{qk,\,i}^{\;\cdot\;\cdot\;\;q}. \tag{110.11}$$

в случае риманова пространства. Как видно из (110.1), поднимая последний индекс у $R_{lk,ij}$, мы получим $R_{lk,i}^{\cdot\cdot\ \cdot q}$:

$$R_{lk,i}^{\cdot\cdot\ \cdot q} = g^{qj}R_{lk,ij}.$$

Подставляя это значение в (110.11), получим:

$$R_{ki} = g^{qj}R_{qk,ij}. \tag{110.12}$$

Легко заметить, что *тензор Риччи в римановом пространстве будет симметричным*:

$$R_{ki} = R_{ik}. \tag{110.13}$$

В самом деле, по свойствам ковариантного тензора кривизны

$$R_{qk,ij} = R_{ji,kq}$$

(мы сделали перестановку индексов внутри каждой пары и, кроме того, перестановку пар между собой). Теперь (110.12) можно переписать в виде

$$R_{ki} = g^{qj}R_{ji,kq} = R_{ik}.$$

В римановом пространстве с тензором кривизны связан еще скалярный инвариант — *скалярная кривизна* R, которая получается в результате свертывания тензора Риччи с метрическим тензором

$$R = g^{ij}R_{ij}. \tag{110.14}$$

§ 111. Кривизна риманова пространства в данной точке и данном двумерном направлении

Мы вернемся к построению § 107, выполненному в произвольном L_n. Полученный результат, а именно формула (107.30), верен, в частности, и в римановом пространстве:

$$\Delta\xi^i \approx R_{mk,\,l}^{\cdot\cdot\ \cdot i}\xi^l x^{mk}\sigma. \tag{111.1}$$

Однако теперь эта формула может быть уточнена: в то время как «площадь» σ в L_n не имела инвариантного смысла и вводилась условно, в V_n можно будет понимать под σ настоящую площадь, охваченную рассматриваемым контуром на поверхности $\mathfrak{M}_2$. Одновременно уточнится и выбор направляющего бивектора x^{mk}: он станет *единичным бивектором*.

Чтобы избежать оговорок о неизотропном характере поверхности $\mathfrak{M}_2$, *мы предположим сначала, что V_n — собственно риманово пространство*. Тогда поверхность $\mathfrak{M}_2$ — всегда неизотропная и несет на себе тоже собственно риманову геометрию.

В § 107 мы согласовали нумерацию координат u^1, u^2 на $\mathfrak{M}_2$ с направлением обхода контура. *Специализируем эти координаты еще* *и в том отношении, чтобы площади на $\mathfrak{M}_2$ выражались интегралами*

$$\sigma = \iint\limits_D du^1 du^2, \tag{111.2}$$

т. е. по внешности так же, как на обычной плоскости в прямоугольных координатах. Это нетрудно сделать. В самом деле, площади на $\mathfrak{M}_2$ можно вычислять по формуле (88.9):

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{G}\, du^1 du^2,$$

причем

$$G = \operatorname{Det}|G_{\alpha\beta}| = G_{11}G_{22} - G_{12}^2 > 0.$$

где $G_{\alpha\beta}$ — метрический тензор на поверхности $\mathfrak{M}_2$. Чтобы эта формула приняла вид (111.2) достаточно добиться тождественного обращения $\sqrt{G}$ в единицу, что можно сделать за счет преобразования координат u^1, u^2 на поверхности. Обозначим через $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$ искомые координаты на поверхности. Тогда согласно (88.7)

$$\sqrt{G} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \sqrt{\tilde{G}}.$$

Пусть $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$ связаны с u^1, u^2 уравнениями

$$\tilde{u}^1 = \varphi(u^1,\ u^2),\quad \tilde{u}^2 = u^2,$$

где $\varphi(u^1,\ u^2)$ — пока неопределенная функция. Тогда

$$\sqrt{G} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \sqrt{\tilde{G}} = \frac{\partial \varphi}{\partial u^1}\sqrt{\tilde{G}}. \tag{111.3}$$

Теперь выберем функцию $\varphi(u^1,\ u^2)$

$$\varphi(u^1,\ u^2) = \int \sqrt{G(u^1,\ u^2)}\, du^1.$$

В таком случае $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u^1} = \sqrt{G}$ и, следовательно, из (111.3) получаем:

$$\sqrt{\tilde{G}} = 1.$$

В дальнейшем переходим к координатам $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$, причем обозначаем их просто u^1, u^2. Итак, теперь

$$\sqrt{G} = 1 \tag{111.4}$$

и площади выражаются формулой (111.2). Далее, в координатах u^1, u^2 бивектор

$$x^{mk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2}-\frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}\right) \qquad (111.5)$$

будет *единичным*. Это значит, что отвечающая ему площадь, а именно, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}$, $\frac{\partial x^i}{\partial u^2}$, будет равна единице (напомним, что касательное пространство в данной точке M, в котором расположены эти векторы, будет теперь евклидовым пространством R_n). В самом деле, согласно (85.12) $G_{\alpha\beta}$ представляют собой скалярные произведения векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, $\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}$ (сейчас у нас α, $\beta=1$, 2), а следовательно, площадь нашего параллелограмма выразится формулой

$$W=\sqrt{\operatorname{Det}|G_{\alpha\beta}|}=\sqrt{G}.$$

Эта формула относится в сущности к обычной геометрии (и даже планиметрии) и легко может быть получена из обычной векторной алгебры. Кроме того, она получается как частный случай при $m=2$ из (54.30). Сравнивая с (111.4), убеждаемся, что $W=1$.

Вернемся к формуле (111.1). Так как величина σ в ней определялась по формуле (111.2), а бивектор x^{mk} — по формуле (111.5), то *теперь σ выражает площадь, охваченную контуром на поверхности $\mathfrak{M}_2$, а бивектор x^{mk}, определяющий двумерное касательное направление к $\mathfrak{M}_2$ и направление обхода контура, является единичным*.

Заметим, что двумерным направлением, определенным выбором ориентации и величиной площади (в данном случае равной единице), простой бивектор x^{mk} вполне определяется (см. § 37, геометрическая характеристика простого поливектора). *Поэтому в окончательном итоге мы можем забыть о специальном выборе координат u^1, u^2 на $\mathfrak{M}_2$ и рассматривать уклонение $\Delta\xi^i$ параллельно обнесенного вектора просто в зависимости от первоначального вектора ξ^i, от единичного бивектора x^{mk}, отвечающего двумерному касательному к $\mathfrak{M}_2$ направлению и ориентированного по направлению обхода контура, и от охваченной контуром площади σ на поверхности*. При этом вектор $\Delta\xi^i$ (в своей главной части) меняется пропорционально площади σ. В римановом пространстве мы всегда будем понимать формулу (111.1) в этом смысле.

Опираясь на формулу (111.1), можно ввести понятие кривизны риманова пространства в данной точке и данном двумерном направлении.

Рассмотрим прежнее построение с той лишь разницей, что исходный вектор ξ^i возьмем единичным и лежащим в касательной плоскости к поверхности $\mathfrak{M}_2$ в точке M (рис. 21).

В результате обхода мы вернемся в точку M с вектором $\xi^i+\Delta\xi^i$, который, вообще говоря, уже не будет лежать в касательной плоскости.

Спроектируем $\xi^i+\Delta\xi^i$ на касательную плоскость; пусть проекция будет $\xi^i+\Delta_1\xi^i$; это — вектор, лежащий в касательной плоскости и отличающийся от вектора $\xi^i+\Delta\xi^i$ на перпендикулярную к касательной плоскости составляющую $\Delta_2\xi^i$. Итак:

$$\xi^i+\Delta\xi^i=\xi^i+\Delta_1\xi^i+\Delta_2\xi^i. \tag{111.6}$$

Обозначим через φ угол поворота от ξ^i к $\xi^i+\Delta_1\xi^i$. Углу мы припишем знак плюс, если поворот идет в том же направлении (принятом за положительное), что и обход по контуру, и знак минус, — если в обратном направлении.

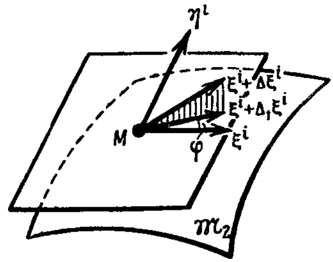

Рис. 21.

Построим единичный вектор η^i, лежащий в касательной плоскости и повернутый на прямой угол в положительном направлении по отношению к вектору ξ^i (рис. 21). Построим на единичных векторах ξ^i, η^i бивектор, который по общему правилу будет иметь вид

$$\tilde{x}^{ij}=\frac{\xi^i\eta^j-\xi^j\eta^i}{2}.$$

Бивектор этот характеризует нам единицу площади (так как ξ^i, η^i единичные и взаимно перпендикулярные), лежащую в касательной плоскости, и направление вращения от ξ^i к η^i, т. е. совпадающее с направлением обхода контура. Другими словами, $\tilde{x}^{ij}$ совпадает с бивектором x^{ij}, фигурирующим в формуле (111.1):

$$x^{ij}=\frac{1}{2}(\xi^i\eta^j-\xi^j\eta^i). \tag{111.7}$$

Приступим к вычислению угла φ. Выкладку ведем, пренебрегая в $\Delta\xi^i$ и $\Delta_1\xi^i$ бесконечно малыми высшего порядка относительно σ. Покажем прежде всего, что $\Delta_1\xi^i\perp\xi^i$. Из (111.6) мы получаем:

$$\Delta\xi^i=\Delta_1\xi^i+\Delta_2\xi^i. \tag{111.8}$$

Очевидно, $\Delta_2\xi^i$, будучи ортогонален к касательной плоскости, ортогонален по самому определению и к любому лежащему в ней вектору, в частности, к ξ^i. Остается показать, что $\Delta\xi^i$ тоже ортогонален к ξ^i.

Составим скалярное произведение $\Delta\xi^i$ и ξ^i, пользуясь формулой (111.1):

$$g_{ij}\xi^j\Delta\xi^i \approx g_{ij}\xi^j R_{mk,\,l}{}^{\cdot\cdot}{}^{i}_{\cdot}\, x^{mk}\xi^l\sigma = R_{mk,\,lj}x^{mk}\xi^l\xi^j\sigma = 0.$$

Действительно, координаты $R_{mk,\,lj}$ антисимметричны по индексам l и j и, следовательно, при свертывании с $\xi^l\xi^j$, симметричными по тем же индексам, дают нуль. Чтобы убедиться в этом, поменяем обозначение индексов суммирования l и j. С одной стороны, сумма от этого не меняется, с другой стороны, она изменит знак, так как $\xi^l\xi^j$ не изменится, а $R_{mk,\,lj}$ изменит знак. Это возможно лишь в случае равенства нулю.

Итак, $\Delta_2\xi^i$ и $\Delta\xi^i \perp \xi^i$, значит, $\Delta_1\xi^i$ тоже перпендикулярен к ξ^i. Но так как $\Delta_1\xi^i$ лежит в касательной плоскости, то он будет коллинеарен с единичным вектором η^i, именно, равен $\eta^i \operatorname{tg}\varphi$, как легко видеть из прямоугольного треугольника с катетом — вектором ξ^i и гипотенузой — вектором $\xi^i + \Delta_1\xi^i$. Отсюда скалярное произведение единичного вектора η^i на коллинеарный с ним $\Delta_1\xi^i$ будет равно $\operatorname{tg}\varphi$ (учитывая и знак):

$$\operatorname{tg}\varphi \approx g_{ij}\Delta_1\xi^i\eta^j.$$

Равенство не нарушится, если мы заменим здесь $\Delta_1\xi^i$ через $\Delta\xi^i$, т. е. добавим к $\Delta_1\xi^i$ вектор $\Delta_2\xi^i$, ортогональный к касательной плоскости и дающий потому нуль в скалярном произведении с η^i. Итак,

$$\operatorname{tg}\varphi \approx g_{ij}\Delta\xi^i\eta^j.$$

Мы видим, что $\operatorname{tg}\varphi$ вместе с $\Delta\xi^i$ является бесконечно малым порядка σ; пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно заменить $\operatorname{tg}\varphi$ через φ, а вместо $\Delta\xi^i$ подставить его выражение из (111.1). Получаем:

$$\varphi \approx g_{ij}\eta^j R_{mk,\,l}{}^{\cdot\cdot}{}^{i}_{\cdot}\,\xi^l x^{mk}\sigma$$

или, суммируя по i:

$$\varphi \approx R_{mk,\,lj}x^{mk}\xi^l\eta^j\sigma. \tag{111.9}$$

Перепишем то же самое, изменив обозначения индексов суммирования: l на j и j на l:

$$\varphi \approx R_{mk,\,jl}x^{mk}\xi^j\eta^l\sigma = -R_{mk,\,lj}x^{mk}\xi^j\eta^l\sigma.$$

Складывая с (111.9) и деля на 2, получим:

$$\varphi \approx R_{mk,\,lj}x^{mk}\,\frac{\xi^l\eta^j - \xi^j\eta^l}{2}\,\sigma$$

и, принимая во внимание (111.7), пишем окончательно:

$$\varphi \approx R_{mk,\,lj}x^{mk}x^{lj}\sigma. \tag{111.10}$$

Можно заменить здесь приближенное равенство точным, явно записав ошибку, которая аналогично (107.31) будет вида $\varepsilon\sigma$:

$$\varphi = R_{mk,\, lj} x^{mk} x^{lj} \sigma + \varepsilon\sigma, \tag{111.11}$$

где $\varepsilon \to 0$ при стягивании контура в точку M. Отсюда следует

$$\frac{\varphi}{\sigma} = R_{mk,\, lj} x^{mk} x^{lj} + \varepsilon,$$

а значит

$$\lim \frac{\varphi}{\sigma} = R_{mk,\, lj} x^{mk} x^{lj}. \tag{111.12}$$

Уясним смысл этой формулы.

Со стороны алгебраической в правой части мы имеем инвариант как результат свертывания двух тождественных бивекторов x^{mk}, x^{lj}, одного с первой парой индексов тензора кривизны, другого — со второй парой. При этом геометрически x^{mk} зависит лишь от направления двумерной касательной плоскости к поверхности $\mathfrak{M}_2$ и направления обхода в ней, а $R_{mk,\, lj}$ — лишь от точки M.

Этими данными вполне определяется, как показывает левая часть (111.12), значение угла поворота φ, приходящееся на единицу охваченной обходом площади, взятое в пределе для бесконечно малого обхода.

При этом «угол поворота» φ есть угол между исходным вектором ξ^i, взятым в касательной плоскости, и проекцией $\xi^i + \Delta_1\xi^i$ обнесенного вектора $\xi^i + \Delta\xi^i$ на эту плоскость. *Величина*

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma} = R_{mk,\, lj} x^{mk} x^{lj} \tag{111.13}$$

называется кривизной риманова пространства V_n в данной точке M и в данном двумерном направлении (характеризуемом единичным бивектором x^{mk}).

Очевидно, что направление самого обхода роли не играет, так как при изменении его на обратное меняется знак у всех координат x^{mk} и кривизна, как видно из (111.13), остается прежней.

Бивектор x^{mk} был у нас единичным, т. е. он определял единичную площадь. Можно задать плоскость и направление обхода, пользуясь для этого и не единичным бивектором ξ^{ij}, построенным на двух произвольных векторах этой плоскости.

Мы хотим выразить через ξ^{ij} кривизну K пространства V_n в соответствующем двумерном направлении.

Для этой цели превратим ξ^{ij} в единичный бивектор путем нормирования, т. е. деления его на определяемую им площадь S. Очевидно, что плоскость и ориентация бивектора от этого не изменятся, площадь же станет единичной, т. е. ξ^{ij} превратится в x^{ij}:

$$x^{ij} = \frac{\xi^{ij}}{S}.$$

Подставляя это выражение в (111.13), получим:

$$K = R_{mk,\,lj} \frac{\xi^{mk}\xi^{lj}}{S^2}.$$

Но S^2 — квадрат площади, определяемой бивектором ξ^{ij}, — равен согласно (54.28) (при $m=2$)

$$S^2 = g_{i_1i_2,j_1j_2}\xi^{i_1i_2}\xi^{j_1j_2} = \begin{vmatrix} g_{i_1j_1} & g_{i_1j_2} \\ g_{i_2j_1} & g_{i_2j_2} \end{vmatrix} \xi^{i_1i_2}\xi^{j_1j_2}$$

и, следовательно:

$$K = \frac{R_{i_1i_2,j_1j_2}\xi^{i_1i_2}\xi^{j_1j_2}}{\begin{vmatrix} g_{i_1j_1} & g_{i_1j_2} \\ g_{i_2j_1} & g_{i_2j_2} \end{vmatrix} \xi^{i_1i_2}\xi^{j_1j_2}}. \tag{111.14}$$

Так обобщается (111.12) на случай, когда двумерное направление (и направление обхо́да) задано произвольным бивектором.

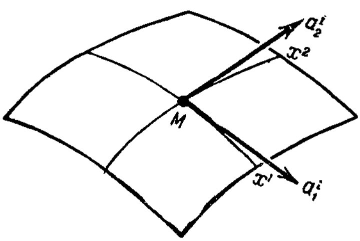

Рис. 22.

Определитель, стоящий в знаменателе, есть четырежды ковариантный тензор с теми же алгебраическими свойствами, что и тензор кривизны.

Применим формулу (111.14) к одному частному случаю. Вычислим кривизну в данной точке M по направлению координатной поверхности x^1, x^2 (рис. 22).

Векторы a_1^i и a_2^i, касательные соответственно к координатным линиям x^1, x^2, имеют координаты $a_1^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^1}$, $a_2^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^2}$, или

$$a_1^i\,(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$a_2^i\,(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Плоскость, построенная на этих векторах, и будет касательной к координатной поверхности x^1, x^2. Составим соответствующий бивектор $\xi^{ij} = \frac{1}{2}(a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i)$. Его координаты могут отличаться от нуля только при i и j, принимающих значения 1, 2. Так как $\xi^{11} = \xi^{22} = 0$, то отличным от нуля остаются только

$$\xi^{12} = -\xi^{21}.$$

Формула (111.14) для нашего случая примет вид

$$K = \frac{4R_{12,12}\,\xi^{12}\,\xi^{12}}{4\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}\xi^{12}\,\xi^{12}}.$$

При суммированиях в правой части мы оставили только отличные от нуля члены. Коэффициенты 4 появились потому, что возможны четыре комбинации индексов ($i_1 = 1$, $i_2 = 2$ или наоборот комбинируются с $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ или наоборот), дающие одинаковые члены. Остальные комбинации дают нуль. Окончательно:

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma} = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \tag{111.15}$$

Результаты этого параграфа можно повторить во всем существенном и для псевдориманова пространства, но только ограничиваясь неизотропными $\mathfrak{M}_2$, т. е. неизотропными двумерными направлениями в данной точке M. Не вдаваясь в особенности геометрического истолкования кривизны K в этом случае, мы будем просто считать, что K определяется формулой (111.14).

§ 112. Тензор кривизны в случае двумерного риманова пространства V_2

Разберем частный случай риманова пространства, именно $n = 2$.

Внутренняя геометрия поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, определяемая первой квадратичной формой Гаусса:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

представляет образец такой геометрии. В наших обозначениях

$$u,\ v = x^1,\ x^2, \quad E,\ F,\ G = g_{11},\ g_{12},\ g_{22}.$$

Риманов тензор кривизны в этом случае будет иметь только одну существенную координату $R_{12,12}$, так как среди отличных от нуля координат все или равны этой, или отличаются от нее лишь знаком.

Выясним, как преобразуется $R_{12,12}$ при переходе к новой координатной системе. По общему закону преобразования для $R_{ij,kl}$ получаем:

$$R_{1'2',1'2'} = \frac{\partial x^i}{\partial u^{1'}}\frac{\partial x^j}{\partial u^{2'}}\frac{\partial x^k}{\partial u^{1'}}\frac{\partial x^l}{\partial u^{2'}}R_{ij,kl}.$$

При суммировании в правой части отличны от нуля только те члены, где $i = 1$, $j = 2$ или наоборот, иначе $R_{ij,kl} = 0$. Запишем суммирование по i и j в развернутом виде, причем вместо $R_{21,kl}$

пишем — $R_{12,kl}$; получим:

$$R_{1'2',1'2'}=\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}-\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\right)R_{12,kl}\frac{\partial x^k}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{2'}}.$$

Поступая аналогично с другой парой индексов k и l, найдем окончательно:

$$R_{1'2',1'2'}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\end{vmatrix}^2 R_{12,12}. \qquad (112.1)$$

Итак, при преобразовании координат координата $R_{12,12}$ умножается на квадрат якобиева определителя преобразования. Другими словами, $R_{12,12}$ является относительным инвариантом веса 2.

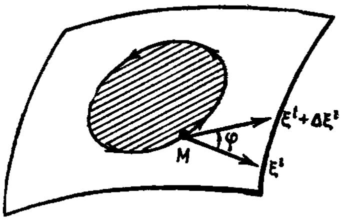

Рис. 23.

Теперь посмотрим, как обстоит дело с кривизной в нашем случае. Так как само пространство всего двух измерений, то всякая поверхность $\mathfrak{M}_2$ в нем совпадает с ним самим (по крайней мере в некоторой окрестности каждой своей точки), и в каждой точке будет лишь единственная двумерная плоскость, заполняющая все «касательное пространство» в этой точке. Отсюда: *кривизна пространства будет зависеть только от выбора точки.*

Применим формулу (111.15) к поверхности x^1, x^2, которая совпадает в нашем случае с самим пространством V_2.

Обозначая кривизну в данной точке через K, получим:

$$K=\frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22}-g_{22}^2}. \qquad (112.2)$$

С алгебраической точки зрения определенное таким образом K представляет собой инвариант преобразования координат в качестве частного двух относительных инвариантов, каждый веса 2.

Займемся геометрическим смыслом кривизны K. Мы замечаем, что построения предыдущего параграфа (мы по-прежнему ограничиваемся собственно римановым случаем) теперь упрощаются. Излишне, во-первых, задавать поверхность, так как она обязательно совпадает с пространством. Излишне оговаривать, что вектор ξ^i берется в касательной плоскости к поверхности, так как касательная плоскость совпадает со всем евклидовым пространством R_2, «касательным» в данной точке, и, следовательно, автоматически заключает любой вектор ξ^i в этой точке. По этой же причине обнесенный вектор $\xi^i+\Delta\xi^i$ лежит в касательной плоскости, и проектировать его на нее также излишне. Угол φ получается непосредственно как угол поворота любого вектора, параллельно обнесенного вокруг некоторой области нашего двумерного пространства (рис. 23)*). Если σ — площадь этой охваченной обходом области, то согласно (111.15)

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma}, \tag{112.3}$$

где K — кривизна в той точке, куда в пределе стягивается область, охваченная обходом.

Если наша двумерная риманова геометрия получена, в частности, как внутренняя геометрия поверхности в классическом смысле, то кривизна K (как будет показано в § 117) совпадает с полной или гауссовой кривизной поверхности. Это значит, что кривизна K может быть определена и внешним путем.

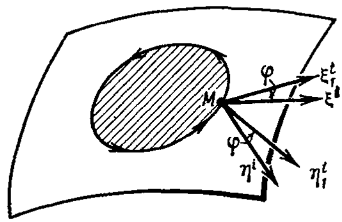

Рис. 24.

А именно, если взять внутреннюю геометрию на поверхности, которой придана вполне определенная форма во вмещающем евклидовом пространстве, то гауссова кривизна K в каждой точке поверхности равна произведению главных кривизн $k_1 k_2$ (т. е. кривизн тех двух нормальных сечений, для которых кривизна достигает экстремума). Если поверхность изгибать, т. е. деформировать, оставляя на ней неизменной внутреннюю геометрию, то гауссова кривизна K не меняется, хотя по отдельности главные кривизны k_1 и k_2, конечно, меняются.

Рассмотрим параллельное перенесение вектора в V_2 по конечному замкнутому контуру. До сих пор мы рассматривали в сущности лишь бесконечно малый контур, для которого согласно (112.3)

$$\varphi = K\sigma + \varepsilon\sigma, \tag{112.4}$$

где $\varepsilon \to 0$ вместе с $\sigma \to 0$. Теперь, оставаясь по-прежнему в римановом пространстве двух измерений, рассмотрим конечный замкнутый контур обхода, являющийся границей некоторой односвязной **) области D. Для большой простоты и наглядности продолжаем ограничиваться случаем собственно риманова пространства.

1) Прежде всего для угла поворота φ безразлично, какой вектор взят в начальной точке M, ξ^i или любой другой η^i (рис. 24).

*) Напомним, что углу φ мы приписываем знак плюс, если поворот вектора происходит в том же направлении, что и обход, и минус — если в обратном.

**) Это значит, что область D может быть обслужена одной координатной системой x^1, x^2 и ограничена одним кусочно-гладким и несамопересекающимся контуром.

В самом деле, при параллельном перенесении углы между векторами ξ^i и η^i не меняются, т. е.

$$\widehat{(\xi^i,\ \eta^i)} = \widehat{(\xi_1^i,\ \eta_1^i)},$$

где ξ_1^i и η_1^i — наши векторы после обхода. Далее векторы ξ^i, ξ_1^i, η^i, η_1^i в точке M лежат в евклидовом пространстве, «касательном» в этой точке, т. е. в одной двумерной плоскости, так как у нас пространство двух измерений. Отсюда ясно, что раз угол между ξ^i и η^i не изменился, то оба вектора повернулись на один и тот же угол.

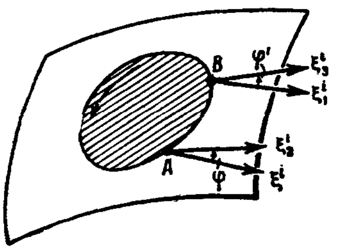

Рис. 25.

2) Угол поворота φ не зависит от выбора начальной точки обхода на данном контуре. Это прямо следует из свойств параллельного перенесения.

Параллельно переносим вектор ξ^i, начиная обход контура из точки A (рис. 25). Пусть в точку B вектор пришел с координатами ξ_1^i, далее после полного обхода вернулся в A с координатами ξ_2^i и, наконец, при дальнейшем перенесении вновь пришел в B с координатами ξ_3^i. Легко видеть, что угол φ равен углу φ', так как ξ_1^i и ξ_3^i суть соответственно ξ^i и ξ_2^i, параллельно перенесенные из A в B, а угол при параллельном перенесении сохраняет свое значение. С другой стороны, φ есть угол поворота при обходе с начальной точкой A и начальным вектором ξ^i, а φ' — угол поворота с начальной точкой B и вектором ξ_1^i. Так как $\varphi = \varphi'$, то требуемое доказано: φ зависит только от контура обхода.

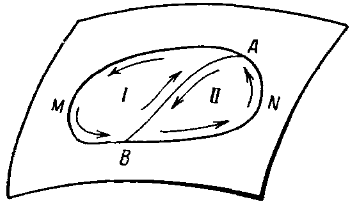

Рис. 26.

3) Предположим, что область D, охваченная обходом, разбита на две составляющие области I и II (рис. 26). Тогда угол поворота φ при обнесении вектора вокруг области равен сумме углов поворота φ_1 и φ_2 при обнесении составляющих областей, при условии, что обходы совершаются в одном направлении. Действительно, исходя из точки A и обнося какой-нибудь вектор вокруг области I (обход $AMBA$), мы приходим в A с вектором, повернутым на угол φ_1: после дальнейшего обхода $ABNA$ около области II мы возвращаемся в A с новым поворотом вектора на угол φ_2. В итоге вектор повернулся на $\varphi_1 + \varphi_2$. Но сделанный нами обход $AMBABNA$ заключает отрезок AB, пройденный сначала в направ-

лении BA и сейчас же в обратном направлении AB, в результате чего мы возвращаемся в точку B с прежним значением переносимого вектора. Поэтому, не меняя окончательного результата обхода, из нашего обхода можно выкинуть отрезки BA и AB. Получается обход $AMBNA$, т. е. обход около составной области, а угол поворота вектора остается прежним, т. е. $\varphi_1+\varphi_2$. Таким образом, доказано, что угол поворота обнесенного вектора есть аддитивная функция областей с данной ориентацией. Свойство это доказано для двух составляющих областей, но оно, как это легко следует отсюда, будет верно и для любого числа составляющих областей.

Исходя из этих свойств, легко вывести и интегральную формулу угла поворота φ при обходе по контуру, охватывающему конечную область D.

Разобьем нашу область на бесконечно возрастающее число бесконечно малых частей, хотя бы, например, бесконечно сгущающейся сеткой координатных линий. Пусть $\Delta\sigma$ — площадь какой-нибудь элементарной области, $\Delta\varphi$ — угол поворота вектора при ее обходе. Мы предполагаем, что разбиение это произведено так, что, выписывая формулу (112.4) для элементарных областей

$$\Delta\varphi = K\,\Delta\sigma + \varepsilon\,\Delta\sigma,$$

мы будем иметь *равномерное* стремление к нулю бесконечно малого коэффициента ε для всех этих областей в совокупности. Как можно показать, в случае, например, разбиения бесконечно сгущающейся координатной сеткой, эта равномерность стремления ε к нулю будет следовать автоматически из непрерывности и дифференцируемости нужное число раз всех рассматриваемых нами в данной области функций.

Согласно доказанному полный угол поворота φ равен сумме углов $\Delta\varphi$, полученных при обходе составляющих областей: $\varphi=\sum\Delta\varphi$, где $\sum$ распространена на все элементарные области разбиения, или

$$\varphi=\sum(K\,\Delta\sigma+\varepsilon\,\Delta\sigma).$$

Итак, φ уклоняется от $\sum K\,\Delta\sigma$ на $\sum\varepsilon\,\Delta\sigma$; оценим последнее выражение по модулю. Очевидно, что

$$\left|\sum\varepsilon\,\Delta\sigma\right| < |\varepsilon_m|\sum\Delta\sigma, \tag{112.5}$$

где ε_m — наибольшее из всех ε по модулю. Сделанное предположение о равномерности стремления к нулю всех ε в совокупности равносильно стремлению к нулю максимального из них ε_m. Так как $\sum\Delta\sigma$ дает, очевидно, площадь σ всей области D, т. е. величину постоянную, то вместе с ε_m, как видно из (112.5), стремится к нулю и уклонение φ от $\sum K\,\Delta\sigma$. Переходим к пределу. В пределе $\sum K\,\Delta\sigma$ становится равным φ, обращаясь в то же время в двойной интеграл, взятый по области D. Итак, окончательно:

$$\varphi = \iint\limits_D K\,d\sigma. \tag{112.6}$$

Эта формула выражает угол поворота φ при обходе односвязной области D в зависимости от ее площади и распределения значений K на ней.

Случай $K = \text{const}$. Применим основную формулу (112.6) к частному случаю, когда кривизна K нашего двумерного пространства

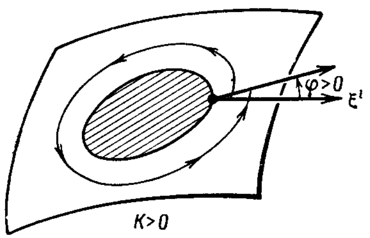

Рис. 27.

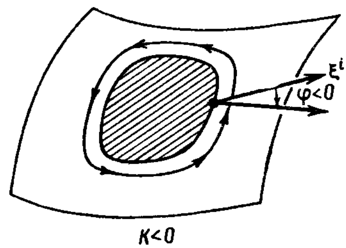

Рис. 28.

остается постоянной для всех его точек. (В случае классической дифференциальной геометрии мы рассматриваем, следовательно, внутреннюю геометрию поверхности постоянной кривизны.)

Формула (112.6) принимает вид

$$\varphi = K \iint\limits_D d\sigma = K\sigma, \tag{112.7}$$

иначе говоря, *угол поворота* φ *пропорционален площади обхода, причем коэффициентом пропорциональности служит кривизна* K. Различаем следующие три случая.

1. $K = 0$. Угол поворота $\varphi = 0$, что и понятно, так как геометрия является евклидовой.

2. $K > 0$. Следовательно, и $\varphi > 0$, т. е. обнесенный вектор оказывается повернутым в направлении обхода (рис. 27).

3. $K < 0$; $\varphi < 0$, поворот совершается в обратном направлении (рис. 28).

Отметим, что если, в частности, проделать обход по геодезическому треугольнику ABC (т. е. такому, стороны которого суть отрезки геодезических), то угол φ будет равен сумме внутренних углов минус π. Таким образом, для геодезического треугольника

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi+K\sigma.$$

Здесь K — постоянная кривизна пространства и σ — площадь треугольника (рис. 29). При выводе формулы мы берем исходный вектор ξ^i касательным к геодезической AB, а затем, перенося его из вершины в вершину, используем постоянство угла, образуемого геодезической с вектором, параллельно переносимым вдоль нее. Последнее вытекает из того, что вектор, касательный к геодезической, тоже является вектором, параллельно переносимым вдоль нее.

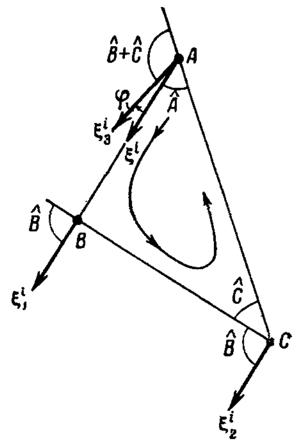

Рис 29.

§ 113. Римановы координаты *)

В § 103 мы рассмотрели полугеодезические координатные системы в V_n. К ним близко примыкают по своим свойствам так называемые *римановы координатные системы.* Их можно было бы рассмотреть в том же месте, но мы предпочтем это сделать теперь в связи с некоторыми применениями к тензору кривизны.

Римановы координаты можно строить не только в римановом пространстве V_n, но и в любом пространстве аффинной связности. Так мы и поступим, причем ограничимся пространством аффинной связности без кручения L_n^0.

Пусть L_n^0 отнесено к произвольной координатной системе x^i в окрестности произвольной точки $M_0(x_0^i)$. Далее, проведем через M_0 по всем направлениям геодезические линии. Каждая из них задается начальным касательным вектором ξ^i, произвольно выбранным в точке M_0.

В этом случае параметрические уравнения геодезической

$$x^i=x^i(\tau), \tag{113.1}$$

где τ — канонический параметр, вполне определяются (§ 90) из ее дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}=-\Gamma_{ij}^k\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} \tag{113.2}$$

*) Оставшаяся часть этой главы не обязательна для понимания главы X.

и начальных условий

$$[x^i]_{\tau=0}=x_0^i, \quad \left[\frac{dx^i}{d\tau}\right]_{\tau=0}=\xi^i. \tag{113.3}$$

Для простоты мы полагаем $\tau=0$ в точке M_0. Тогда произвол в выборе канонического параметра τ на данной геодезической сводится лишь к его умножению на произвольное число $A\neq 0$ (см. (90.4)):

$$\tau^*=A\tau. \tag{113.4}$$

Каждой точке M на произвольной геодезической, проведенной через M_0, мы сопоставим n чисел

$$y^i=\xi^i\tau, \tag{113.5}$$

где τ — значение канонического параметра в точке M. *Эти числа мы и будем называть римановыми координатами точки M.* Очевидно, в точке M_0

$$y^i=0.$$

Наглядно, y^i будут координаты того вектора $\overrightarrow{M_0M'}$ в касательном пространстве A_n в точке M_0, в который превратится отрезок геодезической M_0M, если эту геодезическую изобразить в A_n в виде прямой, сохраняя прежний канонический параметр τ (и прежний начальный касательный вектор ξ^i).

Отметим прежде всего, что y^i *не зависят от выбора канонического параметра τ на данной геодезической.* В самом деле, при переходе к новому параметру $\tau^*=A\tau$ мы получаем:

$$\overset{*}{\xi}{}^i=\left[\frac{dx^i}{d\tau^*}\right]_0=\frac{1}{A}\left[\frac{dx^i}{d\tau}\right]_0=\frac{1}{A}\,\xi^i,$$

а следовательно,

$$\overset{*}{y}{}^i=\overset{*}{\xi}{}^i\tau^*=\xi^i\tau=y^i,$$

т. е. y^i не меняются. Однако мы не можем утверждать, что каждой точке M отвечают вполне определенные y^i, так как, быть может, в ту же точку M можно прийти из M_0 по другой геодезической.

Но можно доказать, что y^i действительно способны служить координатами в L_n^0, по крайней мере, в некоторой окрестности точки M_0.

Пусть нам даны численные значения y^i (не равные нулю одновременно). Положим $\xi^i=\frac{y^i}{a}$, где a — произвольная константа, не равная нулю, построим по начальным условиям (113.3) соответствующую геодезическую, проходящую через M_0, а на ней точку M, отвечающую $\tau = a$. Это будет, как видно из (113.5), точка с наперед заданными римановыми координатами y^i.

Чтобы точка M действительно нашлась на геодезической, придется, возможно, ограничить выбор значений y^i некоторой окрестностью нуля.

Найденная точка M будет вполне определенной, несмотря на произвол в выборе константы a: если, например, константу a умножить на 2, то ξ^i разделится, а τ умножится на 2. Это означает лишь, что на прежней геодезической произведено преобразование канонического параметра

$$\tau^* = 2\tau,$$

причем точка M остается без изменения.

Координаты x^i точки M будут тем самым вполне определенными функциями от y^i:

$$x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n). \tag{113.6}$$

Так как x^i согласно (90.8) — непрерывно дифференцируемые функции параметра τ и начальных значений ξ^i, то $\left(\text{полагая } \xi^i = \frac{y^i}{a},\ \tau = a = \text{const}\right)$ убеждаемся, что функции (113.6) также непрерывно дифференцируемые. Остается показать, что

$$\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)} \neq 0, \tag{113.7}$$

по крайней мере, в точке M_0. Это гарантирует однозначную разрешимость уравнений (113.6) относительно $y^1, \ldots, y^n$:

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n), \tag{113.8}$$

по крайней мере, в некоторой окрестности точки M_0, а следовательно, возможность принять y^i за новые координаты в пределах этой окрестности. Геометрически это означает, что в пределах этой окрестности в каждую точку M можно провести *одну и только одну геодезическую* из точки M_0 (по координатам x^i однозначно определяются y^i, а значит, и геодезическая, идущая из M_0 в M).

Чтобы доказать (113.7), вычислим производные $\frac{dx^i}{d\tau}$ вдоль произвольной геодезической, проходящей через M_0. Так как x^i зависят от $y^1, \ldots, y^n$ согласно (113.6), а y^i зависят от τ согласно (113.5), то мы получаем:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{d\tau} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\xi^j.$$

Применим это равенство в точке M_0. Пользуясь (113.3), получаем:

$$\xi^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_0 \xi^j.$$

Так как ξ^i выбираются произвольно, то это равенство показывает, что $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_0$ есть единичная матрица

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_0 = \delta^i_j, \qquad (113.9)$$

а тем самым

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_0 = 1 \neq 0.$$

Это мы и хотели показать.

Построенные нами римановы координаты y^i зависят, конечно, от выбора начала M_0 и от выбора исходных координат x^i. Но зависимость от этих последних не очень существенна: *как бы ни преобразовывать координаты x^i, соответствующие римановы координаты y^i подвергаются линейному преобразованию*

$$y^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_0 y^i, \qquad (113.10)$$

т. е. точно так же, как координаты контравариантного вектора в точке M_0. Это вытекает из того, что ξ^i и в самом деле есть контравариантный вектор в точке M_0 а y^i получаются из ξ^i умножением на значение τ (которое есть инвариант преобразования координат x^i).

Согласно (113.5) *параметрические уравнения геодезических, проходящих через начало M_0, в римановых координатах y^i становятся линейными по отношению к каноническому параметру τ:*

$$y^i = \xi^i \tau, \qquad (113.11)$$

где коэффициенты ξ^i — постоянные для данной геодезической.

Очевидно, это свойство и *достаточно для того, чтобы координаты y^i были римановыми.* Действительно, если оно имеет место, то вдоль данной геодезической

$$\frac{dy^i}{d\tau} = \xi^i = \text{const}. \qquad (113.12)$$

В частности, это справедливо и для точки M_0, так что

$$\left(\frac{dy^i}{d\tau}\right)_0 = \xi^i.$$

Мы видим, что ξ^i в (113.11), так же как и в (113.5), представляют собой координаты начального касательного вектора. Тем самым из (113.11) следует, что y^i — римановы координаты (точнее, что римановы координаты, построенные, исходя из координат y^i, совпадают с ними самими).

Очевидно, римановы координаты в L_n^0 строятся весьма сходно с аффинными координатами в аффинном пространстве A_n, причем роль радиусов-векторов, идущих во все стороны из начала M_0, играют геодезические отрезки. Однако в A_n в аффинных координатах *все* прямые определяются линейными параметрическими уравнениями (если параметр канонический), а в L_n^0 в римановых координатах этим свойством обладают, вообще говоря, лишь геодезические, *проходящие через начало* M_0.

В частном случае, когда L_n^0 представляет собой A_n, римановы координаты, как легко проверить, просто совпадают с аффинными.

Выясним теперь, какими особенностями будут обладать коэффициенты связности Γ_{ij}^k *в римановых координатах* y^i. Рассмотрим геодезическую (113.11) и запишем, что текущие координаты удовлетворяют дифференциальному уравнению геодезических

$$\frac{d^2y^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dy^i}{d\tau}\frac{dy^j}{d\tau}. \tag{113.13}$$

Так как $\frac{dy^i}{d\tau} = \xi^i$, $\frac{d^2y^i}{d\tau^2} = 0$, то мы получаем:

$$\Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j = 0. \tag{113.14}$$

Умножая почленно на τ^2, получаем окончательно:

$$\Gamma_{ij}^k y^i y^j = 0. \tag{113.15}$$

Итак, в римановых координатах y^i *функции* $\Gamma_{ij}^k(y^1, \ldots, y^n)$ *удовлетворяют* n *соотношениям* (113.15). *Соотношения* (113.15) *являются и достаточными для того, чтобы координаты* y^i *были римановыми.* Действительно, пусть эти соотношения имеют место. Рассмотрим кривые, определяемые параметрическими уравнениями

$$y^i = \xi^i \tau, \tag{113.16}$$

где τ — некоторый параметр, а ξ^i — произвольные постоянные (не равные нулю одновременно). Мы утверждаем, что эти кривые будут геодезическими. В самом деле, подставляя $y^i = \xi^i \tau$ в дифференциальные уравнения геодезических, получаем:

$$0 = -\Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j.$$

Перепишем это равенство, пользуясь (113.16) (и исключив точку M_0, так что $\tau \neq 0$):

$$0 = -\frac{1}{\tau^2}\Gamma_{ij}^k y^i y^j.$$

Мы получили тождество, так как соотношения (113.15) у нас соблюдаются. Итак, кривые $y^i=\xi^i\tau$ — геодезические, отнесенные к каноническому параметру τ. Так как ξ^i — произвольные константы, то это будут геодезические, проходящие через начало M_0 во всевозможных направлениях. Но мы уже знаем, что когда уравнения таких геодезических имеют вид $y^i=\xi^i\tau$, то y^i — римановы координаты. Тем самым наше утверждение доказано.

Римановы координаты всегда являются в то же время геодезическими координатами относительно своего начала M_0. Для доказательства достаточно рассмотреть соотношение (113.14) в точке M_0:

$$(\Gamma^k_{ij})_0\,\xi^i\xi^j=0.$$

Так как геодезические $y^i=\xi^i\tau$ проходят через M_0 по любому направлению, то ξ^i можно брать в этом случае произвольно, и мы получаем тождество относительно ξ^i. Учитывая, что в L^0_n

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji},$$

мы должны аннулировать коэффициенты, т. е. положить:

$$(\Gamma^k_{ij})_0=0.$$

Это и значит, что координаты y^i — геодезические в точке M_0.

Обратное, конечно, неверно: римановы координаты гораздо более специализированы и выбираются с гораздо меньшим произволом, чем геодезические координаты.

Все сказанное выше будет справедливо, в частности, *для риманова пространства* V_n. Но при этом можно сделать ряд добавлений.

Для геодезических вещественной длины, проходящих через начало M_0, в качестве канонического параметра τ можно брать длину дуги s, отсчитываемую от M_0. *Тогда формулы* (113.5), *определяющие римановы координаты* y^i, *примут вид*

$$y^i=\xi^i s, \tag{113.17}$$

где

$$\xi^i=\left[\frac{dx^i}{ds}\right]_0 \tag{113.18}$$

— *единичный касательный вектор к геодезической в начале* M_0. Для геодезических мнимой длины, проходящих через M_0, можно положить:

$$\tau=\sigma\left(=\frac{s}{i}\right),$$

и наши формулы примут вид

$$y^i=\xi^i\sigma, \tag{113.19}$$

где

$$\xi^i = \left[\frac{dx^i}{d\sigma}\right]_0 \qquad (113.20)$$

— *мнимоединичный* касательный вектор к геодезической в точке M_0. Лишь для изотропных геодезических канонический параметр τ остается по-прежнему неспециализированным.

Для простоты ограничимся собственным римановым пространством, когда все геодезические вещественной длины; формулы (113.17) можно считать уравнениями исходящих из M_0 геодезических в римановых координатах.

Так как ξ^i в (113.17) — единичный вектор в точке M_0, то

$$1 = g^0_{ij}\xi^i\xi^j. \qquad (113.21)$$

Здесь g^0_{ij} — метрический тензор в точке M_0. Заметим кстати, что координаты всех тензоров в точке M_0 не меняются при переходе от первоначальных координат x^i к соответствующим римановым координатам y^i. Это легко следует из (113.9).

Умножая (113.21) на s^2, получаем:

$$s^2 = g^0_{ij}y^iy^j. \qquad (113.22)$$

Таким образом, квадрат геодезического расстояния $s = M_0M$ *выражается квадратичной формой от римановых координат* y^i *точки* M *с коэффициентами* g^0_{ij}.

Полагая здесь $s = \text{const}$, мы получаем уравнение геодезической гиперсферы в римановых координатах. В самом деле, геодезическая гиперсфера с центром в M_0 строится следующим образом: по всем геодезическим, исходящим из M_0, мы откладываем отрезки M_0M постоянной длины $s > 0$ и рассматриваем геометрическое место их концов M. При этом геодезические, исходящие из M_0, ортогонально пробивают гиперсферу (§ 102). Используем этот результат, чтобы охарактеризовать метрический тензор g_{ij} в римановых координатах.

Пусть δy^i обозначают дифференциалы координат y^i при произвольном бесконечно малом смещении из данной точки M по гиперсфере, а dy^i — по геодезической M_0M. В силу ортогональности геодезической к гиперсфере векторы δy^i и dy^i всегда ортогональны, так что

$$g_{ij}dy^i\delta y^j = 0,$$

где g_{ij} вычислены в точке M. Так как согласно (113.17) $dy^i = \xi^i ds$, то отсюда следует:

$$g_{ij}\xi^i\delta y^j = 0. \qquad (113.23)$$

С другой стороны, дифференцируя почленно (113.22) при бесконечно малом смещении по гиперсфере ($s = \text{const}$), мы получаем:

$$0 = 2g^0_{ij}y^i\delta y^j,$$

откуда после деления на $2s$ следует:

$$g^0_{ij}\xi^i\delta y^j = 0. \tag{113.24}$$

Так как δy^j связаны лишь этой линейной зависимостью, вытекающей из уравнения гиперсферы, то линейная зависимость (113.23) должна быть ее следствием. Это означает пропорциональность коэффициентов

$$g_{ij}\xi^i = \lambda g^0_{ij}\xi^i, \tag{113.25}$$

где λ — коэффициент пропорциональности. Нетрудно обнаружить, что $\lambda = 1$. Для этого достаточно свернуть полученное равенство с ξ^j почленно. Получим:

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = \lambda g^0_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Так как вдоль геодезической (113.17) касательный вектор

$$\frac{dy^i}{ds} = \xi^i$$

является *в каждой точке M единичным*, то

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = 1. \tag{113.26}$$

Учитывая, кроме того, (113.21), получаем, что $\lambda = 1$. Теперь (113.25) принимает вид

$$g_{ij}\xi^i = g^0_{ij}\xi^i, \tag{113.27}$$

т. е. вдоль геодезической (113.17) *остаются постоянными не только* ξ^i, *но и* $\xi_j = g_{ij}\xi^i$.

Умножая почленно на s, получаем окончательно:

$$g_{ij}y^i = g^0_{ij}y^i. \tag{113.28}$$

Итак, функции $g_{ij}(y^1, \ldots, y^n)$, вычисленные в римановых координатах, тождественно удовлетворяют n соотношениям (113.28) (*где $g^0_{ij} = g_{ij}(0, \ldots, 0)$*). *Покажем, что эти соотношения являются и достаточными для того, чтобы координаты y^i были римановыми.*

В самом деле, пусть в некоторой координатной системе соотношения (113.28) имеют место. Покажем, что в этом случае имеют место и соотношения (113.15), откуда и будет следовать, что координаты y^i римановы.

Дифференцируя (113.28) по y^k почленно, получим:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^i + g_{kj} = g^0_{kj}.$$

Свернем полученное равенство поочередно с y^j и y^k. Получим соответственно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^i y^j = 0, \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^i y^k = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (113.29)$$

При этом мы отбросили в правой и левой частях члены, равные в силу (113.28). Последнее равенство перепишем два раза с другими обозначениями индексов:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} y^i y^j = 0, \qquad \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} y^i y^j = 0.$$

Складывая полученные равенства почленно и вычитая из них первое из (113.29), мы приходим (в силу (94.8)) к соотношению

$$\Gamma_{k,ij} y^i y^j = 0.$$

Поднимая индекс k при помощи метрического тензора, мы возвращаемся к (113.15). Требуемое доказано.

Мы упоминали о связи римановых координат с полугеодезическими. Эту связь легко обнаружить, если ввести новые переменные

$$u^1 = \frac{y^1}{y^n}, \quad u^2 = \frac{y^2}{y^n}, \ \ldots, \ u^{n-1} = \frac{y^{n-1}}{y^n},$$

предполагая, что мы ограничиваемся областью, где $y^n > 0$. Очевидно, вдоль геодезических, исходящих из начала M_0, значения $u^1, \ldots, u^{n-1}$ остаются постоянными, и обратно, эти геодезические вполне определяются значениями $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Присоединим к параметрам $u^1, \ldots, u^{n-1}$ еще путь $s = \overset{\frown}{M_0 M} > 0$, пройденный по геодезической из M_0 в произвольную точку M (в области $y^n > 0$). Тогда $u^1, \ldots, u^{n-1}$, s в совокупности определяют положение точки M и являются частным случаем полугеодезических координат (§ 103).

Разумеется, все сделанное в этом параграфе может быть повторено (с соответствующими оговорками и уточнениями) и для псевдориманова пространства.

§ 114. Кривизна риманова пространства в данной точке и данном двумерном направлении как кривизна геодезической поверхности

Мы дадим еще одно геометрическое истолкование кривизны многомерного пространства V_n. Для простоты ограничимся собственно римановым случаем.

Берем какую-нибудь точку M_0 и двумерную плоскость A_2, через нее проходящую, т. е. множество векторов, линейно зависящих от двух, неколлинеарных векторов, заданных в точке M_0. По направлению каждого такого вектора проведем через M_0 геодезическую. Геометрическое место этих геодезических дает двумерную поверхность $\mathfrak{M}_2$, которая называется геодезической поверхностью с центром M_0 (рис. 30). Очевидно, что $\mathfrak{M}_2$ имеет A_2 касательной плоскостью в точке M_0.

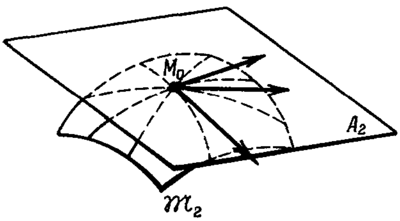

Рис. 30.

Вычислим в точке M_0 кривизну $\mathfrak{M}_2$ как двумерного риманова пространства. Мы утверждаем, что эта кривизна совпадает с кривизной пространства V_n в той же точке в направлении плоскости A_2.

Воспользуемся римановыми координатами x^i с началом в точке M_0 (§ 113). В них, как известно, уравнения геодезических имеют вид

$$x^i = \xi^i s,$$

где ξ^i — единичный касательный вектор в точке M_0. Так как римановы координаты в точке M_0 будут и геодезическими, то имеем:

$$(\Gamma^k_{ij})_0 = 0,$$

и значит (согласно (94.5) и (94.7)):

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)_0 = 0. \qquad (114.1)$$

Возьмем теперь в качестве A_2 плоскость векторов с координатами (ξ^1, ξ^2, 0, ..., 0), где ξ^1, ξ^2 произвольны. Все эти векторы линейно зависят от двух из них, например, от (1, 0, 0, ..., 0) и (0, 1, 0, ..., 0). Такой выбор A_2 не нарушает общности выводов. В самом деле, линейным преобразованием с постоянными коэффициентами $x^{i'} = a^{i'}_i x^i$ мы переводим римановы координаты снова в римановы. В то же время этим преобразованием всегда можно добиться, что любые два вектора получат координаты $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ и $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, и следовательно, построенная на них плоскость A_2 превратится в плоскость векторов с координатами $(\xi^1, \xi^2, 0, \ldots, 0)$.

Строим теперь геодезическую поверхность, касающуюся в точке M_0 плоскости A_2. С этой целью проводим геодезическую по направлению каждого вектора ξ^i плоскости A_2. Но тогда все $\xi^i = 0$ кроме ξ^1 и ξ^2. Следовательно, согласно уравнениям геодезических $x^i = \xi^i s$, вдоль них все $x^i = 0$ кроме x^1, x^2, т. е. наши геодезические все лежат на координатной поверхности x^1, x^2, с которой и совпадает построенная нами геодезическая поверхность $\mathfrak{M}_2$ (по крайней мере в окрестности точки M_0).

Переходим к вычислению внутренней кривизны поверхности x^1, x^2. Мы будем рассматривать ее как двумерное риманово пространство, отнесенное к координатам x^1, x^2 (игнорируя остальные координаты, все время равные на ней нулю). Мы утверждаем теперь, что x^1, x^2 будут служить римановыми координатами с точки зрения внутренней геометрии этой поверхности. Действительно, поверхность образована геодезическими, уравнения которых были

$$x^i = \xi^i s,$$

при $\xi^3 = \xi^4 = \ldots = \xi^n = 0$. Это — геодезические, т. е. линии стационарной длины во вмещающем пространстве V_n, а следовательно, они и подавно обладают этим свойством на поверхности $\mathfrak{M}_2$. Итак, геодезические на поверхности $\mathfrak{M}_2$, выходящие из начала M_0, имеют уравнения:

$$x^1 = \xi^1 s, \qquad x^2 = \xi^2 s,$$

где ξ^1, ξ^2 — постоянные вдоль каждой из них, а это и означает, что координаты x^1, x^2 — римановы для поверхности $\mathfrak{M}_2$ (§ 113).

Возьмем теперь линейный элемент вмещающего пространства V_n при бесконечно малом смещении по поверхности x^1, x^2. Так как при этом $dx^3 = dx^4 = \ldots = dx^n = 0$, то от квадратичной формы $g_{ij} dx^i dx^j$ в пространстве остается лишь

$$ds^2 = g_{11} dx^{1^2} + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^{2^2}. \qquad (114.2)$$

Эта квадратичная форма и определяет, таким образом, внутреннюю геометрию на поверхности x^1, x^2. Кривизна этой геометрии согласно (112.2) равна

$$\frac{\tilde{R}_{12,\,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

где $\tilde{R}_{12,\,12}$ — координата тензора кривизны, составленного для квадратичной формы (114.2).

Нам нужно доказать совпадение в точке M_0 этой кривизны поверхности с кривизной вмещающего пространства V_n в направлении этой же поверхности. Так как последняя кривизна равна $\frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$ согласно (111.15), то остается доказать равенство

$$\tilde{R}_{12,12}=R_{12,12}.$$

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ для всего пространства и x^1, x^2 для поверхности суть римановы координаты, значит, коэффициенты связности Γ_{ij}^k в обеих геометриях обращаются в нуль в начале координат M_0. Следовательно, формула (110.4) для $R_{lk,ij}$ упрощается, так как отпадают члены с Γ_{ij}^k. Выписав эту формулу для $R_{12,12}$, получаем:

$$(R_{12,12})_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\partial x^2}\right).$$

Но если выписать эту же формулу для $\tilde{R}_{12,12}$, то результат будет буквально тот же, так как g_{11}, g_{12}, g_{22} на поверхности те же самые, что и в пространстве, если вычислять их в точках поверхности; частные производные от них берутся по тем же переменным x^1, x^2.

Итак,

$$(\tilde{R}_{12,12})_0=(R_{12,12})_0,$$

а вместе с тем *кривизна геодезической двумерной поверхности в ее центре M_0 дает кривизну пространства в этой точке в касательном к поверхности направлении.*

§ 115. Смешанные тензоры на гиперповерхности V_{n-1} в V_n

В римановом пространстве V_n можно развить теорию гиперповерхностей V_{n-1}, весьма схожую с теорией поверхностей в обычном пространстве. Это объясняется тем, что поверхность в обычном пространстве есть частный случай гиперповерхности. Напротив, теория поверхностей V_m любого числа измерений m имеет значительно более сложный вид; ее мы не будем касаться.

Говоря о гиперповерхности V_{n-1}, мы подразумеваем, что она неизотропная и, следовательно, также несет на себе риманову геометрию (§ 85) (в собственно римановом случае эта оговорка является излишней). Пусть V_{n-1} задана уравнениями

$$x^i=x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}), \tag{115.1}$$

причем согласно нашим прежним предположениям (см. § 83) матрица $\left\|\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right\|$ имеет ранг $n-1$. Линейно независимые векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}$

определяют в каждой точке M гиперповерхности V_{n-1} касательную гиперплоскость A_{n-1} (лежащую в касательном пространстве A_n в точке M). Прямая B_1, ортогональная к A_{n-1} в A_n и проходящая через M, называется *нормалью*. Нормаль не принадлежит A_{n-1}, так как иначе A_{n-1} была бы изотропной гиперплоскостью вопреки нашим предположениям.

Метрический тензор на гиперповерхности V_{n-1} имеет вид (85.12):

$$G_{\alpha\beta}=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}g_{ij} \tag{115.2}$$

(греческие индексы здесь и в дальнейшем пробегают значения $1, 2, \ldots, n-1$). Тензору $G_{\alpha\beta}$ отвечает инвариантная квадратичная форма $G_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$, которую мы будем называть первой основной квадратичной формой на гиперповерхности V_{n-1} и которая согласно (85.13) выражает ds^2:

$$ds^2=G_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^{n-1})\,du^\alpha\,du^\beta.$$

Как и в обычной теории поверхностей, нам дальше придется наряду с первой рассматривать вторую основную квадратичную форму.

Подготовим теперь аппарат смешанных тензоров, которым будем пользоваться в дальнейшем. Рассмотрим систему величин

$$\xi^i_\alpha=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, n \\ \alpha=1, 2, \ldots, n-1\end{pmatrix} \tag{115.3}$$

в произвольной точке M гиперповерхности V_{n-1}. Эти величины занумерованы двумя индексами. Из них латинский индекс относится к вмещающему пространству V_n и реагирует на преобразование координат x^i в нем как контравариантный индекс:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial u^\alpha}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \xi^{i'}_\alpha=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\xi^i_\alpha.$$

Греческий индекс относится к гиперповерхности V_{n-1} и реагирует на преобразование координат u^α на ней как ковариантный индекс:

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha'}}=\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \text{ т. е. } \xi^i_{\alpha'}=\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}}\xi^i_\alpha.$$

Индекс α не реагирует на преобразование координат x^i в V_n, равно как индекс i не реагирует на преобразование координат u^α на V_{n-1}.

Систему величин ξ^i_α *мы будем называть смешанным тензором одноконтравариантным в* V_n *и одноковариантным в* V_{n-1}.

Совершенно аналогичным образом в точках V_{n-1} могут быть определены смешанные тензоры любого строения, например, $Z^{ij\alpha}_{\beta k}$. Мы будем подразумевать при такой записи, что индексы i, j, k ведут себя как тензорные индексы при преобразовании координат x^i в V_n (и не реагируют на преобразование координат u^α), а индексы α, β ведут себя как тензорные индексы при преобразовании координат u^α на V_{n-1} (и не реагируют на преобразование x^i в V_n). «Чистые» тензоры, например, Z^i_{jk} или Z^α_β, мы будем рассматривать как частный случай смешанных; первый из них ведет себя как инвариант при преобразованиях u^α, а второй — при преобразованиях x^i.

Таким образом, смешанный тензор имеет частью индексы, относящиеся к риманову пространству V_n (латинские индексы, реагирующие на преобразование координат x^i), частью индексы, относящиеся к риманову пространству V_{n-1} (греческие индексы, реагирующие на преобразование координат u^α). Операции тензорной алгебры — сложение, умножение, свертывание тензоров — очевидным образом переносятся и на смешанные тензоры. Все рассуждения повторяются дословно, и нужно лишь учитывать, что индексы будут относиться частью к одному пространству, частью к другому.

Пусть теперь нам дано поле смешанного тензора на V_{n-1}, например,

$$Z^{i\alpha}_\beta = Z^{i\alpha}_\beta (u^1, \ \ldots, u^{n-1}). \tag{115.4}$$

В таком случае при бесконечно малом смещении по V_{n-1} мы определяем абсолютный дифференциал этого тензора по формуле

$$DZ^{i\alpha}_\beta = dZ^{i\alpha}_\beta + \Gamma^i_{kp} Z^{p\alpha}_\beta dx^k + \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\varkappa\pi} Z^{i\pi}_\beta du^\varkappa - \overset{*}{\Gamma}{}^\pi_{\varkappa\beta} Z^{i\alpha}_\pi du^\varkappa. \tag{115.5}$$

Для наглядности мы выписали абсолютный дифференциал тензора частного вида, но формулу (115.5) нужно понимать в смысле общего правила: *абсолютный дифференциал любого смешанного тензора получается путем добавления к обыкновенному дифференциалу дополнительных членов, составленных по одному для каждого индекса данного тензора по ранее известным нам правилам. Однако при этом члены, отвечающие греческим индексам, составляются при помощи* $\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ *(а не* Γ^k_{ij}*), где* $\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ *— коэффициенты связности, вычисленные в римановом пространстве* V_{n-1} *(исходя из метрического тензора* $G_{\alpha\beta}$*). Соответственно свертывание в этих членах происходит с* $du^\varkappa$ *(а не с* dx^k*).* Очевидно, в случае «чистого» тензора, например, Z^{ij}_k или $Z^{\alpha\beta}_\gamma$, мы получаем *абсолютный дифференциал в прежнем смысле*:

в первом случае вычисленный в римановом пространстве V_n, а во втором случае — в римановом пространстве V_{n-1}. В общем же случае, когда смешанный тензор снабжен и латинскими (относящимися к V_n) и греческими (относящимися к V_{n-1}) индексами, определенное нами абсолютное дифференцирование происходит как бы частью в V_n (по латинским индексам), частью в V_{n-1} (по греческим индексам).

Нужно, конечно, убедиться, что определенный таким образом абсолютный дифференциал представляет собой тензор. Рассмотрим для этой цели сначала преобразование координат x^i. Первые два члена в правой части (115.5) представляют собой абсолютный дифференциал тензора $Z^{i\alpha}_{\beta}$ в V_n, если индексы α, β произвольно фиксировать, а тензорным индексом считать лишь i. Оставшиеся члены каждый по отдельности тоже ведут себя при этих условиях как тензоры с контравариантным индексом i.

Таким образом, $DZ^{i\alpha}_{\beta}$ представляет собой (при фиксированных α, β) одноконтравариантный тензор в V_n.

Теперь рассмотрим преобразование координат u^α на V_{n-1}. Тогда, объединяя $dZ^{i\alpha}_{\beta}$ с последними двумя членами, мы получаем абсолютный дифференциал тензора $Z^{i\alpha}_{\beta}$ в римановом пространстве V_{n-1} (если считать индекс i произвольно фиксированным). Следовательно, при нашем преобразовании индексы α, β в полученной сумме ведут себя как тензорные индексы. Так же они ведут себя и в пропущенном нами втором члене. Следовательно, $DZ^{i\alpha}_{\beta}$ при произвольно фиксированном i представляет собой тензор с точки зрения пространства V_{n-1}.

Этим мы проверили, что $DZ^{i\alpha}_{\beta}$ — тензор того же строения, что и $Z^{i\alpha}_{\beta}$.

В точности то же рассуждение применимо и для смешанного тензора $Z^{\cdots}_{\cdots}$ любого строения: при преобразовании x^i мы объединяем $dZ^{\cdots}_{\cdots}$ с дополнительными членами, отвечающими латинским индексам, а при преобразовании u^α — с дополнительными членами, отвечающими греческим индексам. В обоих случаях обнаруживается, что $DZ^{\cdots}_{\cdots}$ преобразуется по тензорному закону.

Установленные нами правила абсолютного дифференцирования суммы, произведения, свертки тензоров без труда переносятся и на смешанные тензоры повторением прежних рассуждений.

От абсолютного дифференциала нетрудно перейти к абсолютным производным смешанного тензора по $u^\varkappa$. Дифференцируя (115.4) и (115.1), получаем:

$$dZ^{i\alpha}_{\beta} = \frac{\partial Z^{i\alpha}_{\beta}}{\partial u^\varkappa}\, du^\varkappa, \quad dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^\varkappa}\, du^\varkappa = \xi^k_\varkappa\, du^\varkappa.$$

Теперь (115.5) принимает вид

$$DZ^{i\alpha}_{\beta}=\left(\frac{\partial Z^{i\alpha}_{\beta}}{\partial u^{\varkappa}}+\xi^{k}_{\varkappa}\Gamma^{i}_{kp}Z^{p\alpha}_{\beta}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\varkappa\pi}Z^{i\pi}_{\beta}-\overset{*}{\Gamma}{}^{\pi}_{\varkappa\beta}Z^{i\alpha}_{\pi}\right)du^{\varkappa}.$$

Коэффициенты при $du^{\varkappa}$ мы будем называть абсолютными производными смешанного тензора по $u^{\varkappa}$; в нашем примере

$$\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{i\alpha}_{\beta}=\frac{\partial Z^{i\alpha}_{\beta}}{\partial u^{\varkappa}}+\xi^{k}_{\varkappa}\Gamma^{i}_{kp}Z^{p\alpha}_{\beta}+\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\varkappa\pi}Z^{i\pi}_{\beta}-\overset{*}{\Gamma}{}^{\pi}_{\varkappa\beta}Z^{i\alpha}_{\pi}. \tag{115.6}$$

Мы сопровождаем символ абсолютной производной $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}$ звездочкой, потому что она берется по координатам $u^{\varkappa}$ в V_{n-1} (а не по x^k в V_n). Формулу (115.6), выписанную для частного случая, нужно понимать в смысле общего правила: обыкновенная частная производная $\frac{\partial Z^{\cdots}_{\cdots}}{\partial u^{\varkappa}}$ дополняется членами, по одному для каждого индекса тензора $Z^{\cdots}_{\cdots}$; для греческих индексов эти члены составляются так же, как при абсолютном дифференцировании в V_{n-1}, а для латинских — как при абсолютном дифференцировании в V_n, причем в последнем случае индекс дифференцирования k свертывается с $\xi^{k}_{\varkappa}$.

Из тензорного характера $DZ^{i\alpha}_{\beta}$ легко следует, что абсолютная производная $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{i\alpha}_{\beta}$ тоже представляет собой тензор, причем по сравнению с исходным тензором она обладает лишним ковариантным греческим индексом. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать:

$$DZ^{i\alpha}_{\beta}=du^{\varkappa}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{i\alpha}_{\beta} \tag{115.7}$$

и применить при преобразовании координат u^{α} то же рассуждение, что и при выводе (96.22). При преобразовании же координат x^i тензорный характер $DZ^{i\alpha}_{\beta}$ позволяет нам записать:

$$DZ^{i'\alpha}_{\beta}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}DZ^{i\alpha}_{\beta},\ \text{т. е.}\ du^{\varkappa}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{i'\alpha}_{\beta}=du^{\varkappa}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{i\alpha}_{\beta},$$

а так как $du^{\varkappa}$ совершенно произвольны, то отсюда вытекает:

$$\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{i'\alpha}_{\beta}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{i\alpha}_{\beta},$$

т. е. при преобразовании x^i $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{i\alpha}_{\beta}$ тоже ведет себя как тензор (по отношению к латинским индексам). Разумеется, все сказанное без труда переносится на тензор $Z^{\cdots}_{\cdots}$ любого строения.

Займемся теперь альтернированным вторым абсолютным дифференциалом (§ 105). На гиперповерхности V_{n-1} зададимся (по образцу (105.2)) произвольной двумерной поверхностью $\mathfrak{M}_2$

$$u^\mu = u^\mu(\alpha, \beta),$$

причем, как и в § 105, бесконечно малым смещениям по координатной линии α отвечают символы дифференциалов d и D, а по координатной линии β — символы $\tilde{d}$ и $\tilde{D}$.

Пусть на V_{n-1} заданы «чистые» тензорные поля U_i и W^q.

Индексы у них латинские, т. е. реагируют на преобразование координат x^i в V_n. Применяя формулы (105.9) и (105.14), можно записать:

$$\tilde{D}DU_i - D\tilde{D}U_i = R_{lk,i\cdot}^{\cdot\cdot\cdot q}U_q\tilde{d}x^l\,dx^k, \tag{115.8}$$

$$\tilde{D}DW^q - D\tilde{D}W^q = -R_{lk,\,i\cdot}^{\cdot\cdot\cdot q}W^i\tilde{d}x^l\,dx^k. \tag{115.9}$$

Пусть, далее, на V_{n-1} заданы «чистые» тензорные поля p_ϱ, q^σ. Индексы у них греческие, т. е. реагируют на преобразование координат u^λ на V_{n-1}. Так как в этом случае абсолютные дифференциалы D и $\tilde{D}$ имеют смысл абсолютных дифференциалов в римановом пространстве V_{n-1}, то мы можем снова применить формулы (105.9), (105.14) уже в V_{n-1}:

$$\tilde{D}Dp_\varrho - D\tilde{D}p_\varrho = \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\varrho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}p_\sigma\tilde{d}u^\lambda\,du^\varkappa, \tag{115.10}$$

$$\tilde{D}Dq^\sigma - D\tilde{D}q^\sigma = -\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\varrho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}q^\varrho\,\tilde{d}u^\lambda\,du^\varkappa. \tag{115.11}$$

Здесь через $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\varrho\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$ обозначен тензор кривизны пространства V_{n-1}.

Если теперь на V_{n-1} задать поле произвольного смешанного тензора, например, $Z_j^{i\alpha}$, то для него мы получаем:

$$\tilde{D}DZ_j^{i\alpha} - D\tilde{D}Z_j^{i\alpha} = -R_{lk,\,p\cdot}^{\cdot\cdot\cdot i}Z_j^{p\alpha}\tilde{d}x^l\,dx^k + \\ + R_{lk,\,j\cdot}^{\cdot\cdot\cdot p}Z_p^{i\alpha}\tilde{d}x^l\,dx^k - \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\pi\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}Z_j^{i\pi}\tilde{d}u^\lambda\,du^\varkappa. \tag{115.12}$$

Эту формулу нужно понимать в смысле общего правила: *альтернированный второй абсолютный дифференциал смешанного тензора выражается суммой членов, составленных по одному для каждого из его индексов: для латинских — по схеме* (115.8) *или* (115.9) (*в зависимости от ко- или контравариантного характера индекса*), *для греческих — по схеме* (115.10) *или* (115.11). Остальные индексы переписываются каждый раз без изменения.

Вывод этой формулы совершается по образцу § 105, а именно, заданный смешанный тензор, например, $Z_\beta^{i\alpha}$, превращаем (аналогично (105.15)) в инвариант I путем свертывания с произвольными одновалентными тензорными полями:

$$I = Z_\beta^{i\alpha}v_i p_\alpha q^\beta.$$

Здесь v_i, p_α, q^β — произвольные тензорные поля на V_{n-1}. Повторяя дальнейший вывод § 105 и пользуясь формулами (115.8) — (115.11), приходим к (115.12).

Наконец, нам нужно получить еще *формулы для альтернированной второй абсолютной производной смешанного тензора*. Здесь мы будем поступать по образцу § 108 — вывод формулы (108.14) (разумеется, Γ^k_{ij} и $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ как коэффициенты связности в римановых пространствах удовлетворяют условию (108.1) — симметрии по нижним индексам).

Прежде всего записываем (115.7) для произвольного смешанного тензора $Z^{\cdots}_{\cdots}$:

$$DZ^{\cdots}_{\cdots} = du^\varkappa \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots}.$$

Действуем почленно посредством $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}DZ^{\cdots}_{\cdots} = \tilde{D}\,du^\varkappa \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots} + du^\varkappa \tilde{d}u^\lambda \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots}. \qquad (115.13)$$

Во втором члене $\tilde{D}\overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots}$ заменено на основании той же формулы (115.7). Так как

$$\tilde{D}\,du^\varkappa = \tilde{d}\,du^\varkappa + \overset{*}{\Gamma}{}^\varkappa_{\lambda\pi}\,du^\pi \tilde{d}u^\lambda,$$
$$D\tilde{d}u^\varkappa = d\,\tilde{d}u^\varkappa + \overset{*}{\Gamma}{}^\varkappa_{\lambda\pi}\tilde{d}u^\pi\,du^\lambda,$$

то совершенно аналогично (108.11) получаем:

$$\tilde{D}\,du^\varkappa = D\tilde{d}u^\varkappa. \qquad (115.14)$$

Теперь в (115.13) меняем местами символы D и $\tilde{D}$ (и соответственно d и $\tilde{d}$) и результат почленно вычитаем. Учитывая (115.14), получаем:

$$\tilde{D}DZ^{\cdots}_{\cdots} - D\tilde{D}Z^{\cdots}_{\cdots} = du^\varkappa \tilde{d}u^\lambda \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots} - \tilde{d}u^\varkappa du^\lambda \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots} =$$
$$= du^\varkappa \tilde{d}u^\lambda (\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots} - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z^{\cdots}_{\cdots}). \qquad (115.15)$$

Последнее выражение получено за счет перестановки обозначений $\varkappa$ и λ в вычитаемом.

Применим полученный результат к тензору $Z^{i\alpha}_j$. Подставим в (115.12)

$$\tilde{d}x^l = \frac{\partial x^l}{\partial u^\lambda}\tilde{d}u^\lambda = \xi^l_\lambda \tilde{d}u^\lambda, \quad dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^\varkappa}du^\varkappa = \xi^k_\varkappa du^\varkappa.$$

Приравнивая затем правые части (115.15) и (115.12) и учитывая, что равенство имеет место при любых $\tilde{d}u^\lambda$, $du^\varkappa$, получим:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{i\alpha}_j - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z^{i\alpha}_j =$$
$$= -R_{lk,\,p\cdot}^{\cdot\cdot\;\cdot i} Z^{p\alpha}_j \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa + R_{lk,\,j\cdot}^{\cdot\cdot\;\cdot p} Z^{i\alpha}_p \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa - \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\pi\cdot}^{\cdot\cdot\;\cdot\alpha} Z^{i\pi}_j, \qquad (115.16)$$

т. е. соответствующие коэффициенты при $\tilde{d}u^\lambda$, $du^\varkappa$ тоже должны быть равны. Полученную формулу нужно понимать как правило составления *альтернированной второй абсолютной производной от произвольного смешанного тензора.* А именно, каждому латинскому индексу тензора в правой части отвечает член, составленный по схеме (108.14) в случае нижнего и по схеме (108.16) в случае верхнего индекса, причем индексы дифференцирования подвергаются еще свертыванию с $\xi^k_\varkappa \xi^l_\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^i - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z^i &= -R_{ik.\,p}^{\;\;\;\,.\,i} Z^p \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa, \\ \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z_j - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z_j &= R_{ik.\,j}^{\;\;\;\,.\,p} Z_p \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa. \end{aligned}\right\} \qquad (115.17)$$

Каждому греческому индексу отвечает член, составленный тоже по схеме (108.14) или (108.16), но уже в применении к риманову пространству V_{n-1}.

Это отражается в записи заменой латинских индексов греческими, а также тем, что тензор кривизны, взятый в V_{n-1}, отмечается звездочкой:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^\alpha - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z^\alpha &= -\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\pi}^{\;\;\;\,.\,\alpha} Z^\pi, \\ \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z_\beta - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z_\beta &= \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\beta}^{\;\;\;\,.\,\pi} Z_\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (115.18)$$

Мы выписали формулы для одновалентных тензоров. Правило (115.16) означает, что для каждого индекса смешанного тензора нужно составить в правой части член по одной из схем (115.17), (115.18), причем остальные индексы тензора переписываются каждый раз без изменения.

Все сделанное нами в этом параграфе для гиперповерхностей V_{n-1} без изменений переносится на поверхности V_m любого числа измерений. Мы ограничились гиперповерхностями, так как намерены заниматься именно их дифференциальной геометрией.

§ 116. Теория гиперповерхностей V_{n-1} в V_n

Сохраняя предположения и обозначения § 115, применим развитый там аппарат смешанных тензоров к дифференциальной геометрии гиперповерхностей V_{n-1}.

В каждой точке M гиперповерхности V_{n-1} построим репер, состоящий из n векторов:

$$\xi^i_1, \; \ldots, \; \xi^i_{n-1}, \; \nu^i, \qquad (116.1)$$

где $\xi^i_1, \; \ldots, \; \xi^i_{n-1}$ — линейно независимые касательные векторы (115.3), а вектор ν^i — единичный (или мнимоединичный) нормальный вектор. Этот вектор линейно независим от векторов $\xi^i_1, \; \ldots, \; \xi^i_{n-1}$, так как в противном случае нормаль ν^i лежала бы в касательной гиперплоскости A_{n-1}, что исключено (см. начало § 115). Таким образом, векторы (116.1) действительно образуют репер, который мы будем называть *сопровождающим репером* гиперповерхности. Сопровождающий репер зависит, конечно, от выбора координат u^α на V_{n-1}.

Для изучения гиперповерхности V_{n-1} важно проследить, как меняется сопровождающий репер от точки к точке. Мы сделаем это при бесконечно малом смещении данной точки M по V_{n-1}, т. е. будем дифференцировать величины ξ^i_α, ν^i и притом в следующей инвариантной форме. Вычислим прежде всего абсолютную производную от смешанного тензора ξ^i_α (по схеме (115.6)):

$$\overset{*}{\nabla}_\beta \xi^i_\alpha = \frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial u^\beta} + \xi^k_\beta \Gamma^i_{kp}\, \xi^p_\alpha - \overset{*}{\Gamma}{}^\pi_{\beta\alpha}\, \xi^i_\pi.$$

Так как $\dfrac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial u^\beta} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta}$, а Γ^i_{kp}, $\overset{*}{\Gamma}{}^\pi_{\beta\alpha}$ симметричны по нижним индексам, то, очевидно,

$$\overset{*}{\nabla}_\beta \xi^i_\alpha = \overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta. \tag{116.2}$$

При фиксированных α, β $\overset{*}{\nabla}_\beta \xi^i_\alpha$ представляет собой одноконтравариантный тензор, т. е. вектор в V_n. Мы утверждаем, что этот вектор ортогонален ко всем векторам ξ^i_σ, т. е. направлен по нормали к V_{n-1}. В самом деле, согласно (115.2)

$$G_{\alpha\beta} = \xi^i_\alpha\, \xi^j_\beta g_{ij}. \tag{116.3}$$

Вычисляя почленно абсолютный дифференциал, получим:

$$DG_{\alpha\beta} = (D\xi^i_\alpha)\, \xi^j_\beta g_{ij} + \xi^i_\alpha\, (D\xi^j_\beta)\, g_{ij} + \xi^i_\alpha\, \xi^j_\beta Dg_{ij}.$$

Так как $DG_{\alpha\beta}$ совпадает с абсолютным дифференциалом в V_{n-1}, а Dg_{ij} — с абсолютным дифференциалом в V_n, то оба они равны нулю (как абсолютные дифференциалы от метрических тензоров). Заменяя $D\xi^i_\alpha$ через $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\alpha\, du^\varkappa$ и учитывая, что $du^\varkappa$ произвольны, получаем:

$$(\overset{*}{\nabla}_\varkappa\, \xi^i_\alpha)\, \xi^j_\beta g_{ij} + (\overset{*}{\nabla}_\varkappa\, \xi^j_\beta)\, \xi^i_\alpha g_{ij} = 0.$$

Присоединим сюда еще два соотношения, полученных из этого круговой подстановкой индексов:

$$(\overset{*}{\nabla}_\alpha\, \xi^i_\beta)\, \xi^j_\varkappa g_{ij} + (\overset{*}{\nabla}_\alpha\, \xi^j_\varkappa)\, \xi^i_\beta g_{ij} = 0,$$

$$(\overset{*}{\nabla}_\beta\, \xi^i_\varkappa)\, \xi^j_\alpha g_{ij} + (\overset{*}{\nabla}_\beta\, \xi^j_\alpha)\, \xi^i_\varkappa g_{ij} = 0.$$

Учитывая (116.2), мы замечаем, что здесь приравниваются нулю три попарные суммы *трех* величин, а следовательно, каждая из этих величин равна нулю:

$$(\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta)\, \xi^j_\varkappa g_{ij} = 0.$$

Итак, вектор $\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta$ ортогонален ко всем векторам $\xi^j_\varkappa$ и направлен по нормали к V_{n-1}. Мы можем записать, таким образом,

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta = b_{\alpha\beta} \nu^i. \qquad (116.4)$$

Коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ образуют дважды ковариантный тензор на V_{n-1}, так как при преобразовании координат u^α индексы α, β в левой части равенства ведут себя как ковариантные тензорные индексы. Кроме того, в силу (116.2)

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}.$$

Тензор $b_{\alpha\beta}$ мы будем называть вторым основным тензором гиперповерхности V_{n-1} (считая первым метрический тензор $G_{\alpha\beta}$), а отвечающую ему инвариантную квадратичную форму $b_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$ — второй основной квадратичной формой на V_{n-1}.

Итак, мы выразили при помощи тензора $b_{\alpha\beta}$ абсолютные производные $\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta$; выразим теперь $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i$. Для этой цели запишем ортогональность ν^i к любому касательному вектору ξ^i_α

$$g_{ij} \nu^i \xi^j_\alpha = 0. \qquad (116.5)$$

Беря почленно абсолютную производную $\overset{*}{\nabla}_\varkappa$ и учитывая, что $\overset{*}{\nabla}_\varkappa g_{ij} = 0$ (так как $D g_{ij} = \overset{*}{\nabla}_\varkappa g_{ij}\, du^\varkappa = 0$), получим:

$$g_{ij} (\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i)\, \xi^j_\alpha + g_{ij} \nu^i \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^j_\alpha = 0.$$

Заменяя $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^j_\alpha$ согласно (116.4) и учитывая, что вектор ν^i единичный или мнимоединичный, т. е.

$$g_{ij} \nu^i \nu^j = \pm 1, \qquad (116.6)$$

получаем:

$$g_{ij} (\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i)\, \xi^j_\alpha = \mp b_{\varkappa\alpha} \qquad (116.7)$$

(во всех дальнейших выкладках верхний знак будет соответствовать единичному, а нижний — мнимоединичному вектору ν^i). Дифференцируя аналогичным образом (116.6), получаем:

$$g_{ij} \overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i \nu^j + g_{ij} \nu^i \overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^j = 0,$$

а так как оба члена левой части равны между собой, то окончательно:

$$g_{ij}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\nu^i\nu^j = 0. \tag{116.8}$$

Это показывает, что вектор $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\nu^i$ (где $\varkappa$ фиксировано) ортогонален к вектору ν^i, расположен в касательной гиперплоскости и может быть разложен по векторам $\xi^i_1, \ldots, \xi^i_{n-1}$:

$$\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\nu^i = c^{\sigma}_{\varkappa}\xi^i_{\sigma}. \tag{116.9}$$

Здесь $c^{\sigma}_{\varkappa}$ — некоторые коэффициенты, которые нетрудно подсчитать. Вставляя это разложение в (116.7) и пользуясь (116.3), получаем:

$$G_{\sigma\alpha}c^{\sigma}_{\varkappa} = \mp b_{\varkappa\alpha},$$

или, что то же,

$$c^{\sigma}_{\varkappa} = \mp b^{\sigma}_{\varkappa},$$

где $b^{\sigma}_{\varkappa}$ получается из $b_{\varkappa\alpha}$ поднятием индекса α при помощи метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ на V_{n-1}. Теперь (116.9) принимает окончательный вид

$$\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\nu^i = \mp b^{\sigma}_{\varkappa}\xi^i_{\sigma}. \tag{116.10}$$

Присоединим сюда и формулы (116.4):

$$\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\xi^i_{\beta} = b_{\varkappa\beta}\nu^i. \tag{116.11}$$

Формулы (116.10), (116.11) *называются деривационными формулами теории гиперповерхностей; они выражают абсолютные производные от тензоров* ξ^i_{α}, ν^i *через сами эти тензоры, или, говоря геометрически, характеризуют в бесконечно малом изменение векторов сопровождающего репера, отнесенное к самому этому реперу.*

Мы можем вывести теперь весьма важные соотношения, связывающие первую и вторую квадратичные формы на гиперповерхности, т. е. тензоры $G_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$. А именно, *рассматривая деривационные формулы как систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций* $\xi^i_{\beta}(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $\nu^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, *мы составим для нее условия интегрируемости.* При этом остальные функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$, входящие в эти уравнения, мы будем рассматривать как известные.

Мы видим, что уравнения (116.10), (116.11) позволяют выразить каждую частную производную 1-го порядка от каждой неизвестной функции ν^i, ξ^i_{β} через сами эти функции. Действительно, абсолютные производные $\overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i$, $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta$ имеют в своем составе частные производные $\dfrac{\partial v^i}{\partial u^\varkappa}$, $\dfrac{\partial \xi^i_\beta}{\partial u^\varkappa}$ (а также дополнительные члены, содержащие v^i, ξ^i_β), так что из (116.10), (116.11) можно выразить все производные

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial u^\varkappa} &= \ldots, \\ \frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial u^\varkappa} &= \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (116.12)$$

Многоточиями обозначены правые части полученных дифференциальных уравнений, содержащие неизвестные функции v^i, ξ^i_β лишь в конечном виде. Мы знаем, что для составления условий интегрируемости этой системы нужно продифференцировать почленно ее уравнения по u^λ, заменить появившиеся в правых частях частные производные от неизвестных функций согласно (116.12) и проальтернировать по $\varkappa$, λ. Левые части обращаются в нуль, и мы получаем конечные зависимости, наложенные на неизвестные функции. Это и будут условия интегрируемости. Мы предпочтем, однако, провести эту выкладку инвариантным путем и вместо частных производных иметь дело с абсолютными производными. Возьмем от (116.11) почленно абсолютную производную $\overset{*}{\nabla}_\lambda$:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta = \overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} \cdot v^i + b_{\varkappa\beta} \overset{*}{\nabla}_\lambda v^i.$$

Заменим в правой части $\overset{*}{\nabla}_\lambda v^i$ согласно (116.10), т. е. из уравнений самой системы:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta = \overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} \cdot v^i \mp b_{\varkappa\beta} b^\sigma_\lambda \xi^i_\sigma.$$

Теперь меняем местами индексы λ, $\varkappa$ и полученное равенство почленно вычитаем из данного. В левой части мы теперь уже не получим нуля; альтернированная вторая абсолютная производная смешанного тензора выражается по схеме (115.16). Мы приходим к конечным зависимостям, наложенным на неизвестные функции ξ^i_α, v^i:

$$\begin{aligned} -R_{lk,\,p\cdot}^{\;\;\;\;\;\;\,i}\,\xi^p_\beta \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa + \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\cdot}^{\cdot\cdot\;\;\;\;\sigma}\,\xi^i_\sigma &= \\ &= (\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} - \overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}) v^i \mp (b_{\varkappa\beta} b^\sigma_\lambda - b_{\lambda\beta} b^\sigma_\varkappa) \xi^i_\sigma. \qquad (116.13) \end{aligned}$$

Это и будут условия интегрируемости в части, касающейся уравнений (116.11). Заметим, что использование абсолютных производных вместо частных изменило выкладки лишь по форме. По существу мы получили бы то же самое, исходя и из уравнений (116.12), но только значительно более сложным путем. Действительно, в обоих случаях смысл выкладки остается прежним: исключить из продифференцированных уравнений системы вторые частные производные, заменить первые частные производные из уравнений самой системы и этим путем получить конечные зависимости между неизвестными функциями ξ^i_α, v^i.

Теперь составим условия интегрируемости уравнений (116.10). Возьмем почленно абсолютную производную $\overset{*}{\nabla}_\lambda$:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i = \mp \overset{*}{\nabla}_\lambda b^\sigma_\varkappa \cdot \xi^i_\sigma \mp b^\sigma_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda \xi^i_\sigma.$$

Заменяя $\overset{*}{\nabla}_\lambda \xi^i_\sigma$ согласно (116.11), т. е. из уравнений самой системы, получим:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i = \mp \overset{*}{\nabla}_\lambda b^\sigma_\varkappa \cdot \xi^i_\sigma \mp b^\sigma_\varkappa b_{\lambda\sigma} v^i.$$

Альтернируем по индексам λ, $\varkappa$ и левую часть заменяем согласно (115.16):

$$-R_{lk,\,p}^{\cdot\cdot\,\cdot i}{}_{\cdot} v^p \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa = \mp (\overset{*}{\nabla}_\lambda b^\sigma_\varkappa - \nabla_\varkappa b^\sigma_\lambda) \xi^i_\sigma. \qquad (116.14)$$

Последний член при альтернации исчез, так как тензор

$$b^\sigma_\varkappa b_{\lambda\sigma} = G^{\tau\sigma} b_{\varkappa\tau} b_{\lambda\sigma}$$

симметричен по индексам $\varkappa$ и λ.

Условия интегрируемости (116.13), (116.14) можно записать в более четкой форме. Фиксируя в (116.13) индексы λ, $\varkappa$, β и оставляя переменным лишь индекс i, можно считать, что члены левой и правой части — векторы в V_n. Умножая обе части равенства скалярно на каждый из векторов сопровождающего репера (116.1), получим n равенств, очевидно, равносильных прежним. Умножая скалярно на ξ^j_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$), т. е. свертывая с $g_{ij}\xi^j_\alpha$, получим (пользуясь (116.3), (116.5), (116.6) и замечая, что у тензора кривизны R индекс i опускается при помощи g_{ij}, а у $\overset{*}{R}$ индекс σ — при помощи $G_{\sigma\alpha}$):

$$-R_{lk,\,pj} \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa \xi^p_\beta \xi^j_\alpha + \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha} = \mp (b_{\varkappa\beta} b_{\lambda\alpha} - b_{\lambda\beta} b_{\varkappa\alpha}),$$

или окончательно:

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha} = R_{lk,\,pj} \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa \xi^p_\beta \xi^j_\alpha \pm (b_{\lambda\beta} b_{\varkappa\alpha} - b_{\varkappa\beta} b_{\lambda\alpha}). \qquad (116.15)$$

Умножая (116.13) скалярно на ν^j, т. е. свертывая с $g_{ij}\nu^j$, получим:

$$-R_{lk,\,pj}\xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa \xi^p_\beta \nu^j = \pm(\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} - \overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}). \qquad (116.16)$$

Теперь поступим так же с уравнениями (116.14). Свертывая с $g_{ij}\xi^j_\beta$, приходим к соотношению

$$-R_{lk,\,pj}\xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa \nu^p \xi^j_\beta = \mp(\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} - \overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}).$$

Это соотношение отличается от (116.16) лишь тем, что обе его части умножены на -1 (чтобы убедиться в этом, достаточно в левой части переставить обозначения индексов суммирования p, j; тогда $R_{lk,\,jp} = -R_{lk,\,pj}$, в остальном же левые части будут одинаковы).

Далее, свертывая (116.14) почленно с $g_{ij}\nu^j$, приходим к тождеству, так как в обеих частях получаются нули (в самом деле, $R_{lk,\,pj}\nu^p\nu^j = 0$ в силу косой симметрии $R_{lk,\,pj}$ по индексам p, j). *Итак, условия интегрируемости системы* (116.10), (116.11) *исчерпываются уравнениями* (116.15), (116.16). Из них (116.15) называются *уравнениями Гаусса*, а (116.16) — *Петерсона — Кодацци*. Смысл уравнений Гаусса заключается в том, что они обнаруживают структуру тензора кривизны $\overset{*}{R}$ на гиперповерхности V_{n-1}, а именно, этот тензор состоит из двух слагаемых: одно представляет собой как бы «проекцию» на V_{n-1} тензора кривизны R во вмещающем пространстве V_n; в этой части кривизна римановой метрики на V_{n-1} вынуждена просто тем обстоятельством, что V_{n-1} вмещено в обладающее кривизной пространство V_n. Другое слагаемое выражается через второй основной тензор гиперповерхности $b_{\alpha\beta}$, и в этой части кривизна римановой метрики связана с искривленностью самой гиперповерхности V_{n-1} в V_n.

Что касается уравнений Петерсона—Кодацци, то они показывают, как связано уклонение тензора $\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta}$ от симметрии по всем индексам (по индексам $\varkappa$, β он симметричен) с кривизной вмещающего пространства.

Формально мы получили уравнения Гаусса и Петерсона—Кодацци как условия интегрируемости системы (116.10), (116.11). Однако с геометрической точки зрения рассмотрение такой системы с неизвестными функциями $\xi^i_\beta(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $\nu^i(u_1, \ldots, u^{n-1})$ не имеет смысла. В самом деле, для этого нужно считать *известными* функциями от $u^1, \ldots, u^{n-1}$ не только $G_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, но и входящие в состав абсолютных производных $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i$, $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta$ коэффициенты связности Γ^k_{ij} *вмещающего пространства* V_n. Но чтобы знать вдоль гиперповерхности V_{n-1} коэффициенты Γ^k_{ij} как функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$, нужно знать, как именно V_{n-1} вложено в V_n, а тогда и ξ^i_β, ν^i приходится считать известными функциями, и задача теряет смысл. *Поэтому с геометрической точки зрения выделение в уравнениях* (116.10), (116.11) ξ^i_β, ν^i *как неизвестных функций носит условный характер и никакой геометрической задачи не выражает.*

Однако в важном частном случае, когда вмещающее пространство V_n является евклидовым, дело обстоит иначе. К этому случаю мы сейчас и переходим.

§ 117. Теория гиперповерхностей V_{n-1} в R_n

Если вмещающее пространство V_n является евклидовым пространством R_n, то его тензор кривизны тождественно равен нулю:

$$R_{kl,\,pj}=0. \tag{117.1}$$

Уравнения Гаусса (116.15) и *Петерсона — Кодацци* (116.16) принимают простой вид

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha}=\pm(b_{\lambda\beta}b_{\varkappa\alpha}-b_{\varkappa\beta}b_{\lambda\alpha}), \tag{117.2}$$

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta}=\overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}. \tag{117.3}$$

Таким образом, тензор кривизны на гиперповерхности V_{n-1} полностью выражается через второй основной тензор гиперповерхности, а тензор $\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta}$ будет симметричен по всем индексам. Замечательно, что в рассматриваемом случае условия интегрируемости не содержат неизвестных функций ξ^i_α, ν^i.

В частности, при $n=3$ мы имеем дело с двумерной поверхностью V_2 в R_3; из числа уравнений (117.2) будет лишь одно существенное

$$\overset{*}{R}_{12,\,12}=\pm(b_{11}b_{22}-b_{12}^2), \tag{117.4}$$

а остальные или будут его следствиями, или обращаются в тождества (греческие индексы могут принимать значения лишь 1, 2). Если R_3 — собственно евклидово (т. е. обычное) пространство, то ν^i всегда единичный (а не мнимоединичный) вектор, и в (117.4) следует брать знак $+$. Пользуясь формулой (112.2) в применении к двумерной римановой геометрии на V_2, мы получаем:

$$\overset{*}{K}=\frac{\overset{*}{R}_{12,\,12}}{G_{11}G_{22}-G_{12}^2}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{G_{11}G_{12}-G_{12}^2}. \tag{117.5}$$

Таким образом, кривизна $\overset{*}{K}$ двумерного риманова пространства V_2 совпадает с отношением дискриминантов второй и первой квадратичных форм на V_2. Как показывается в курсах дифференциальной геометрии, это означает, что кривизна $\overset{*}{K}$ совпадает с полной (или гауссовой) кривизной поверхности V_2 и может быть определена внешним образом как произведение главных кривизн поверхности V_2 в данной точке.

Возвращаемся к общему случаю $V_{n-1} \subset R_n$. Уравнения (117.2), (117.3) выражают зависимость, необходимо имеющую место между тензорами $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ на V_{n-1}. При этом не нужно забывать, что $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\beta\alpha}$ есть тензор кривизны для римановой метрики $G_{\alpha\beta}$ и, следовательно, выражается через координаты $G_{\alpha\beta}$ и их частные производные 1-го и 2-го порядков. В результате (117.2) представляют собой относительно $G_{\alpha\beta}$ дифференциальные уравнения 2-го порядка, причем $b_{\alpha\beta}$ входят в них в конечном виде. Равным образом (117.3) представляют собой относительно $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ дифференциальные уравнения 1-го порядка, причем $G_{\alpha\beta}$ входят через коэффициенты связности $\overset{*}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ в абсолютных производных.

Как оказывается, уравнения (117.2), (117.3) не только необходимы, но и *достаточны* для того, чтобы тензоры $G_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ способны были служить первым и вторым основными тензорами некоторой гиперповерхности V_{n-1}. Говоря точнее, имеет место следующая теорема.

Пусть в некотором $n-1$-мерном римановом пространстве V_{n-1}, представляющем собой односвязное элементарное многообразие и отнесенном к координатам $u^1, \ldots, u^{n-1}$, задан помимо метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ тензор $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, удовлетворяющий соотношениям (117.2), (117.3) (где $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\beta\alpha}$ — тензор кривизны, а $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}$ — символ абсолютного дифференцирования в V_{n-1}). *Тогда V_{n-1} можно реализовать в виде гиперповерхности в некотором евклидовом пространстве R_n, так что $G_{\alpha\beta}$ будет служить на этой гиперповерхности первым, а $b_{\alpha\beta}$ — вторым основным тензором. Эта гиперповерхность определяется с точностью до движений в R_n.* Характер самого R_n определяется тем, что в его ортонормированном репере по сравнению с ортонормированным репером в V_{n-1} будет на единицу больше *единичных* векторов, если в (117.2) имеет место знак $+$, и *мнимоединичных* векторов, если имеет место знак $-$.

Переходя к доказательству, *предположим* сначала, что искомая гиперповерхность существует. Отнесем евклидово пространство R_n к аффинным координатам x^i. В таком случае во всех точках

$$\Gamma^k_{ij} = 0. \tag{117.6}$$

Перепишем уравнения (116.10), (116.11):

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_{\varkappa} \nu^{i} &= \mp b_{\varkappa}^{\sigma} \xi_{\sigma}^{i}, \\ \overset{*}{\nabla}_{\varkappa} \xi_{\beta}^{i} &= b_{\varkappa\beta} \nu^{i}. \end{aligned}\right\} \tag{117.7}$$

Вследствие $\Gamma_{ij}^{k}=0$ в составе абсолютных производных выпадают члены, отвечающие индексу i:

$$\overset{*}{\nabla}_{\varkappa} \nu^{i} = \frac{\partial \nu^{i}}{\partial u^{\varkappa}}, \quad \overset{*}{\nabla}_{\varkappa} \xi_{\beta}^{i} = \frac{\partial \xi_{\beta}^{i}}{\partial u^{\varkappa}} - \overset{*}{\Gamma}{}_{\varkappa\beta}^{\sigma} \xi_{\sigma}^{i}. \tag{117.8}$$

Будем рассматривать в уравнениях (117.7) ν^{i}, ξ_{β}^{i} как неизвестные функции от $u^{1}, \ldots, u^{n-1}$. Тогда, записывая абсолютные производные в развернутом виде (117.8), мы убеждаемся, что все остальные функции, входящие в уравнения, т. е. $b_{\varkappa\beta}$, $b_{\varkappa}^{\sigma}$, $\overset{*}{\Gamma}{}_{\varkappa\beta}^{\sigma}$, нам известны, так как выражаются через заданные нам по условию теоремы тензоры $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$.

Условия интегрируемости системы (117.7) мы первоначально получили в виде (116.15), (116.16), но учитывая, что сейчас у нас $\Gamma_{ij}^{k}=0$, а следовательно, и $R_{kl,\,pj}=0$, мы получаем упрощенные условия интегрируемости (117.2), (117.3). По условию теоремы нам дано, что они удовлетворяются, и притом, очевидно, тождественно относительно неизвестных функций ν^{i}, ξ_{β}^{i} (поскольку эти функции вовсе в них не входят).

В результате система (117.7) является *вполне интегрируемой*, т. е. допускает решение с произвольно заданными начальными значениями неизвестных функций

$$\xi_{\beta}^{i} = (\xi_{\beta}^{i})_{0}, \quad \nu^{i} = (\nu^{i})_{0} \quad \text{при} \quad u^{\alpha} = u_{0}^{\alpha}, \tag{117.9}$$

где u_{0}^{α} — произвольно выбранная точка области изменения переменных u^{α}. В силу общей теории можно утверждать существование решения лишь в некоторой окрестности начальных значений аргументов u_{0}^{α}. Но учитывая, что система (117.7) является сверх всего прочего *линейной* (относительно неизвестных функций и их производных), можно показать, что решение, определяемое начальными значениями (117.9), существует во всей области изменения переменных $u^{1}, \ldots, u^{n-1}$. При этом играет важную роль односвязность пространства V_{n-1} (а следовательно, и области изменения $u^{1}, \ldots, u^{n-1}$), оговоренная в условии теоремы. Действительно, в противном случае решение могло бы оказаться многозначным, т. е. зависеть в некоторых случаях от пути перехода из начальной точки u_{0}^{α} в произвольную точку u^{α}. В случае односвязности V_{n-1} два любых таких пути можно непрерывным образом перевести один в другой, а при этом для вполне интегрируемой системы значения искомых функций в конечной точке пути не меняются.

Начальные значения (117.9) необходимо подчинить — в силу (116.3), (116.5), (116.6) — соотношениям

$$g_{ij}(\xi^i_\alpha)_0(\xi^j_\beta)_0 = (G_{\alpha\beta})_0, \quad g_{ij}(\nu^i)_0(\xi^j_\alpha)_0 = 0, \quad g_{ij}(\nu^i)_0(\nu^j)_0 = \pm 1, \qquad (117.10)$$

где g_{ij} — *постоянные* координаты метрического тензора во вмещающем евклидовом пространстве R_n (в аффинных координатах x^i).

Для простоты возьмем в качестве аффинного репера в R_n сопровождающий репер $\xi^i_1, \ldots, \xi^i_{n-1}, \nu^i$ в начальной точке $M_0(u^\alpha_0)$ искомой гиперповерхности V_{n-1}. Это означает, что координаты векторов $(\xi^i_1)_0, \ldots, (\xi^i_{n-1})_0, (\nu^i)_0$ будут равны единице или нулю в зависимости от того, совпадает или нет номер координаты с номером вектора:

$$(\xi^i_\alpha)_0 = \delta^i_\alpha, \quad (\nu^i)_0 = \delta^i_n.$$

Тогда соотношения (117.10) принимают вид

$$g_{\alpha\beta} = (G_{\alpha\beta})_0, \quad g_{\alpha n} = 0, \quad g_{nn} = \pm 1, \qquad (117.11)$$

т. е. мы получаем в нашем репере определенные значения координат метрического тензора g_{ij} во вмещающем евклидовом пространстве R_n.

Начальные условия (117.9) можно теперь переписать:

$$\xi^i_\alpha = \delta^i_\alpha, \quad \nu^i = \delta^i_n \quad \text{при} \quad u^\alpha = u^\alpha_0. \qquad (117.12)$$

Так как, кроме того, начало координат помещено в точке $M_0(u^\alpha_0)$, то текущие координаты $x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$ удовлетворяют начальным условиям

$$x^i = 0 \quad \text{при} \quad u^\alpha = u^\alpha_0. \qquad (117.13)$$

Мы рассуждали до сих пор *предположительно*, считая, что искомая гиперповерхность существует. Мы убедились, что для такой гиперповерхности функции $\nu^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $\xi^i_\beta(u^1, \ldots, u^{n-1})$ необходимо удовлетворяют вполне интегрируемой системе (117.7). Кроме того, за счет выбора аффинного репера во вмещающем пространстве R_n всегда можно добиться, чтобы имели место начальные условия (117.12), (117.13); при этом метрический тензор в R_n принимает вид (117.11).

Теперь мы отбрасываем предположение о существовании искомой гиперповерхности V_{n-1} и фактически ее строим. Прежде всего зададимся евклидовым пространством R_n и в нем таким аффинным репером, чтобы координаты метрического тензора имели вид (117.11).

Для этого достаточно выбрать в аффинном пространстве A_n произвольный аффинный репер, а затем превратить A_n в евклидово пространство R_n, вводя метрический тензор с координатами (117.11) относительно этого репера. В этом пространстве мы и будем строить гиперповерхность V_{n-1}.

Ищем ξ^i_β, ν^i как функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$, удовлетворяющие системе (117.7) и начальным условиям (117.12). Ввиду полной интегрируемости системы эти функции существуют и определяются единственным образом. Кроме того, в силу линейности системы и односвязности V_{n-1} они будут однозначно определены во всей области изменения $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Итак, в R_n построены векторы $\xi^i_1, \ldots \xi^i_{n-1}$, ν^i как функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$.

Ищем теперь параметрические уравнения гиперповерхности

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}).$$

В случае существования искомой гиперповерхности функции $x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$ необходимо должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \xi^i_\alpha(u^1, \ldots, u^{n-1}) \qquad (117.14)$$

по самому определению величин ξ^i_α. Чтобы система (117.14) была совместной, необходимо и достаточно соблюдение условий интегрируемости, которые в данном случае имеют тривиальный вид:

$$\frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial u^\beta}. \qquad (117.15)$$

Очевидно, эти условия соблюдаются: функции ξ^i_β удовлетворяют уравнениям (117.7), а так как $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, то

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta = \overset{*}{\nabla}_\beta \xi^i_\alpha.$$

Записывая абсолютные производные в развернутом виде (117.8) и принимая во внимание симметрию $\overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\alpha\beta}$ по нижним индексам, легко убеждаемся в справедливости соотношений (117.15).

Следовательно, функции $x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, удовлетворяющие (117.14), существуют (и тоже, как легко показать, во всей области изменения $u^1, \ldots, u^{n-1}$). При этом они определяются с точностью до аддитивных констант, которые, однако, мы найдем из начальных условий (117.13). Остается проверить, что уравнения

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}) \qquad (117.16)$$

действительно определяют *искомую* гиперповерхность. Покажем прежде всего, что функции $\xi^i_\alpha(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $\nu^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$

удовлетворяют соотношениям

$$g^{ij} = \xi^i_\alpha \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} \pm \nu^i \nu^j. \tag{117.17}$$

Действительно, в начальной точке u^α_0 эти соотношения имеют место, так как (после подстановки $\xi^i_\alpha = \delta^i_\alpha$, $\nu^i = \delta^i_n$) они принимают вид

$$g^{\lambda\mu} = (G^{\lambda\mu})_0, \quad g^{\lambda n} = 0, \quad g^{nn} = \pm 1, \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

а эти равенства имеют место как следствие (117.11).

Теперь достаточно показать, что правые части (117.17) представляют собой константы: так как равенства (117.17) имеют место в начальной точке u^α_0 и их левые части тоже константы, то равенства будут верны в этом случае в любой точке.

Вычислим абсолютную производную от правой части (117.17):

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa (\xi^i_\alpha \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} \pm \nu^i \nu^j) = \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\alpha \cdot \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} + \xi^i_\alpha \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} \pm \overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i \cdot \nu^j \pm \nu^i \nabla_\varkappa \nu^j =$$
$$= b_{\varkappa\alpha} \nu^i \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} + b_{\varkappa\beta} \nu^j \xi^i_\alpha G^{\alpha\beta} - b^\alpha_\varkappa \xi^i_\alpha \nu^j - b^\beta_\varkappa \xi^j_\beta \nu^i = 0.$$

Мы воспользовались здесь уравнениями (117.7), которым удовлетворяют функции ξ^i_α, ν^i.

Так как правая часть (117.17) представляет собой дважды контравариантный тензор в R_n (индексы i, j), вычисленный в *аффинных* координатах x^i, то ее абсолютные производные $\overset{*}{\nabla}_\varkappa$ совпадают с частными производными $\frac{\partial}{\partial u^\varkappa}$ (индексам i, j отвечают дополнительные члены с Γ^k_{ij}, которые в данном случае исчезают вследствие $\Gamma^k_{ij} = 0$). В результате все ее частные производные оказываются равными нулю и мы имеем константу. Это мы и хотели показать. Итак, соотношения (117.17) имеют место. Мы хотим теперь привести их к виду (117.11).

Для этого заметим, что при переходе от одного аффинного репера к другому

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i$$

контравариантные координаты метрического тензора g^{ij} связаны соотношениями

$$g^{ij} = A^i_{i'} A^j_{j'} g^{i'j'}. \tag{117.18}$$

Истолкуем соотношения (117.17) как частный случай (117.18), положив

$$\left.\begin{aligned} A^i_{\alpha'} = \xi^i_\alpha, \quad A^i_{n'} = \nu^i, \\ g^{\alpha'\beta'} = G^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha' n'} = 0, \quad g^{n'n'} = \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{117.19}$$

Тогда соотношения (117.18) совпадут с соотношениями (117.17). Так как $\operatorname{Det}|g^{ij}|\neq 0$, то из (117.18) вытекает (от противного), что и $\operatorname{Det}|A^i_{i'}|\neq 0$, т. е. векторы

$$\xi^i_1, \ \ldots, \ \xi^i_{n-1}, \ \nu^i$$

линейно независимы. Это для нас важно, так как линейная независимость векторов $\xi^i_\alpha=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ входит в определение гиперповерхности. Только теперь мы можем утверждать, что уравнения (117.16) определяют некоторую гиперповерхность (хотя еще неизвестно, будет ли она искомой).

Как мы знаем, тензорное преобразование (117.18) контравариантных координат g^{ij} метрического тензора сопровождается соответствующим преобразованием его ковариантных координат g_{ij} (т. е. элементов обратной матрицы):

$$g_{i'j'}=A^i_{i'}A^j_{j'}g_{ij}. \tag{117.20}$$

Из (117.19) легко следует, что

$$g_{\alpha'\beta'}=G_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha'n'}=0, \quad g_{n'n'}=\pm 1.$$

Теперь (117.20) принимают вид (если i', j' придавать значения сначала α', β', затем α', n' и n', n'):

$$G_{\alpha\beta}=\xi^i_\alpha\xi^j_\beta g_{ij}, \quad 0=\xi^i_\alpha\nu^j g_{ij}, \quad \pm 1=\nu^i\nu^j g_{ij}. \tag{117.21}$$

Первое из этих равенств показывает, что *наперед заданный тензор $G_{\alpha\beta}$ действительно служит метрическим тензором на построенной нами гиперповерхности, второе — что вектор ν^j ортогонален ко всем ξ^i_α и направлен, следовательно, по нормали к этой гиперповерхности;* наконец, последнее равенство показывает, что вектор ν^j *единичный или мнимоединичный.*

Так как функции ξ^i_α, ν^i удовлетворяют уравнениям (117.7), то из второго из этих уравнений заключаем, что *наперед заданный тензор $b_{\alpha\beta}$ действительно служит вторым основным тензором на построенной нами гиперповерхности.* Теорема доказана; остается лишь показать, что все гиперповерхности, удовлетворяющие условиям теоремы, определяются в R_n с точностью до движения.

Аффинный репер, к которому мы отнесли вмещающее пространство R_n, был выбран при условии, чтобы в нем координаты метрического тензора g_{ij} имели значения (117.11). Другими словами, нам были наперед заданы попарные скалярные произведения (и скалярные квадраты) векторов репера. Очевидно, такой репер определяется с точностью до движения в R_n. Так как аналитическая сторона выкладок, из которых были определены функции $x^i(u^1, \ldots, u^n)$, ни в чем не меняется, будем ли мы относить R_n к одному или к другому такому реперу, то уравнения (117.16) будут в обоих случаях иметь один и тот же вид. Это значит, что то же движение, которое переводит первый репер во второй, переводит гиперповерхность V_{n-1}, построенную, исходя из первого репера, в некоторую гиперповерхность V'_{n-1}, построенную, исходя из второго репера. Этим наше утверждение доказано.

§ 118. Пространство постоянной кривизны

Мы переходим к изучению отдельных частных случаев римановых пространств. Из них наиболее замечательными являются *пространства постоянной кривизны*. Достаточно сказать, что к числу пространств постоянной кривизны принадлежат, кроме евклидова пространства, пространство Лобачевского, а также эллиптическое (и сферическое) пространство. Основной особенностью пространств постоянной кривизны является их однородность, столь же полная, как и у евклидова пространства. Эта однородность выражается в существовании группы движений от такого же числа параметров, как и в евклидовом пространстве $\left(\text{т. е. } \frac{n(n+1)}{2} \text{ в } n\text{-мерном случае}\right)$. Из однородной структуры этих пространств проистекает и богатство их геометрических свойств.

Мы будем говорить, что *данное риманово пространство* V_n *) *есть пространство постоянной кривизны, если в каждой точке кривизны его по возможным двумерным направлениям одинаковы.* (Мы не требуем, чтобы в различных точках кривизны были одинаковы.) Итак, основной идеей пространства постоянной кривизны является его однородность по всем направлениям в каждой точке.

Выясним, какой вид имеет тензор кривизны $R_{ij,\,kl}$ в пространстве постоянной кривизны. Перепишем формулу (111.14):

$$\frac{R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi^{\alpha\beta}\,\xi^{\gamma\delta}}{(g_{\alpha\gamma}\,g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}\,g_{\beta\gamma})\,\xi^{\alpha\beta}\,\xi^{\gamma\delta}}=K. \tag{118.1}$$

Здесь греческие индексы пробегают у нас значения 1, 2, ..., n (как и латинские). В нашем случае кривизна K постоянна для всех двумерных направлений в данной точке и, следовательно, не зависит от выбора бивектора $\xi^{\alpha\beta}$, который характеризует направление.

Освободимся от знаменателя и перенесем все члены в левую часть; тогда, введя обозначение

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}=R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}-K\,(g_{\alpha\gamma}\,g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}\,g_{\beta\gamma}), \tag{118.2}$$

мы можем переписать (118.1) в виде

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\xi^{\alpha\beta}\xi^{\gamma\delta}=0. \tag{118.3}$$

---

*) Мы берем $n>2$, исключая из рассмотрения 2-мерные пространства.

Как и (118.1), равенство (118.3) имеет место для любого двумерного направления. Мы хотим показать, что отсюда следует:

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = 0. \qquad (118.4)$$

Здесь мы должны преодолеть некоторую трудность, заключающуюся в следующем: если бы $\xi^{\alpha\beta}$ был произвольным бивектором, то из тождества (118.3) немедленно следовало бы обращение в нуль коэффициентов $R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$. Но у нас $\xi^{\alpha\beta}$ характеризует двумерное направление и потому обязательно *простой бивектор*, т. е. имеет строение:

$$\xi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\xi_1^\alpha \xi_2^\beta - \xi_1^\beta \xi_2^\alpha\right), \qquad (118.5)$$

где ξ_1^α и ξ_2^α — два произвольных вектора, определяющих то двумерное направление (плоскость), о котором идет речь. После подстановки (118.5) в (118.3) последнее равенство, имеющее место для любого двумерного направления, должно обратиться в тождество относительно координат ξ_1^α, ξ_2^α. Сделав частичную подстановку, получим:

$$\frac{1}{2} R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\left(\xi_1^\alpha\, \xi_2^\beta - \xi_1^\beta\, \xi_2^\alpha\right) \xi^{\gamma\delta} = 0,$$

или после раскрытия скобок

$$\frac{1}{2} R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, \xi_1^\alpha\, \xi_2^\beta \xi^{\gamma\delta} - \frac{1}{2} R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, \xi_1^\beta\, \xi_2^\alpha \xi^{\gamma\delta} = 0.$$

Во втором члене поменяем обозначения индексов суммирования α и β; заменяя далее, $R'_{\beta\alpha,\,\gamma\delta}$ через $-R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$ *), получим:

$$\frac{1}{2} R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, \xi_1^\alpha\, \xi_2^\beta \xi^{\gamma\delta} + \frac{1}{2} R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, \xi_1^\alpha\, \xi_2^\beta \xi^{\gamma\delta} = 0,$$

или

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, \xi_1^\alpha\, \xi_2^\beta \xi^{\gamma\delta} = 0.$$

Поступая аналогично с $\xi^{\gamma\delta}$, получим:

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, \xi_1^\alpha\, \xi_2^\beta\, \xi_1^\gamma\, \xi_2^\delta = 0. \qquad (118.6)$$

Здесь многочлен четвертой степени относительно ξ_1^α, ξ_2^β тождественно обращается в нуль, а следовательно, все его коэффициенты после приведения подобных членов должны равняться нулю. Фиксируя на время индексы i, j, k, l, отберем члены, содержащие ξ_1^i, ξ_2^j, ξ_1^k, ξ_2^l. Члены такого вида, как видно из (118.6), получаются лишь при

*) Как легко проверить непосредственно из (118.2), $R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$ обладает всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны.

следующих значениях индексов α, β, γ, δ соответственно

$$1)\ i,\ j,\ k,\ l; \qquad 3)\ i,\ l,\ k,\ j;$$
$$2)\ k,\ j,\ i,\ l; \qquad 4)\ k,\ l,\ i,\ j.$$

(Впрочем, эти комбинации индексов будут различны лишь при $i \neq k$ и $j \neq l$. Если $i = k$ (или $j = l$), остается лишь две такие комбинации, если же $i = k$ и $j = l$, то только одна.) После приведения этих подобных между собой членов коэффициент при $\xi_1^i \xi_2^j \xi_1^k \xi_2^l$, равный сумме коэффициентов, должен обратиться в нуль:

$$R'_{ij,\,kl} + R'_{kj,\,il} + R'_{il,\,kj} + R'_{kl,\,ij} = 0. \tag{118.7}$$

На основании тождества $R'_{ij,\,kl} = R'_{kl,\,ij}$ первый член тождествен с четвертым, а второй с третьим, и (118.7) переходит в

$$R'_{ij,\,kl} + R'_{kj,\,il} = 0. \tag{118.8}$$

В случае $j = l$ мы непосредственно вместо (118.7) получаем (118.8), но так как в этом случае оба члена в (118.8) равны, то сразу $R'_{ij,\,kl} = 0$. Аналогично и при $i = k$.

Перепишем (118.8), поменяв местами индексы i и j и умножая почленно на -1. Получим:

$$-R'_{ji,\,kl} - R'_{ki,\,jl} = 0, \text{ т. е. } R'_{ij,\,kl} + R'_{ik,\,jl} = 0.$$

Наконец, выпишем тождество

$$R'_{ij,\,kl} + R'_{ji,\,kl} = 0$$

и сложим последние три равенства почленно. В силу тождества Риччи (110.8) вторые члены дают в сумме нуль, и мы получаем:

$$3R'_{ij,\,kl} = 0.$$

Итак, во всех случаях

$$R'_{ij,\,kl} = 0.$$

Отсюда согласно (118.2) получаем следующее строение тензора $R_{ij,\,kl}$ для пространства постоянной кривизны:

$$R_{ij,\,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \tag{118.9}$$

В каждой точке координаты $R_{ij,\,kl}$ зависят только от координат метрического тензора g_{ij} и от кривизны K, постоянной для всех направлений в данной точке. Легко проверить подстановкой (118.9) в (118.1), что (118.1) обратно является следствием (118.9).

Теорема Шура. *В пространстве V_n $(n > 2)$ постоянной кривизны (т. е. при кривизне, одинаковой по всем направлениям в каждой данной точке) кривизна сохраняет постоянное значение и от точки к точке.*

Другими словами, нужно показать, что в выведенной нами формуле (118.9) кривизна K остается постоянной для всех точек, хотя непосредственно этого из наших предположений не видно и пока мы должны считать K некоторой функцией координат точки:

$$K=K(x^1, \ldots, x^n).$$

Дифференцируя (118.9) почленно, получаем:

$$\nabla_m R_{ij,\,kl}=(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})K_m. \tag{118.10}$$

Здесь $K_m=\frac{\partial K}{\partial x^m}=\nabla_m K$; частные, производные от инварианта совпадают, как мы знаем, с абсолютными; что же касается g_{ij}, то они ведут себя при абсолютном дифференцировании как постоянные, т. е.

$$\nabla_m g_{ij}=0.$$

Мы хотим показать, что частные производные K_m все равны нулю, откуда $K=\text{const}$.

Используем тождество Бианки—Падова. Циклируем (118.10) по индексам m, i, j, т. е. делаем над m, i, j два раза круговую подстановку:

$$\nabla_i R_{jm,\,kl}=(g_{jk}g_{ml}-g_{jl}g_{mk})K_i,$$
$$\nabla_j R_{mi,\,kl}=(g_{mk}g_{il}-g_{ml}g_{ik})K_j$$

и результаты сложим почленно с (118.10). Согласно тождеству Бианки—Падова сумма левых частей равна нулю. Итак, получаем:

$$0=K_m(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})+K_i(g_{jk}g_{ml}-g_{jl}g_{mk})+K_j(g_{mk}g_{il}-g_{ml}g_{ik}).$$

Помножим на g^{lm} и просуммируем по l и m. Тогда, так как

$$g^{ip}g_{jp}=\delta^i_j=\begin{cases} 0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}$$

и, следовательно,

$$g^{lm}g_{lm}=\delta^l_l=n, \qquad g_{il}g_{mk}g^{ml}=g_{il}\delta^l_k=g_{ik},$$
$$K_m g^{ml}g_{il}=K_m\delta^m_i=K_i,$$

мы получаем:

$$g_{ik}K_j-g_{jk}K_i+ng_{jk}K_i-g_{jk}K_i+g_{ik}K_j-ng_{ik}K_j=0.$$

Приведя подобные члены, найдем:

$$(g_{jk}K_i-g_{ik}K_j)(n-2)=0. \tag{118.11}$$

Так как случай $n=2$ нами исключен из рассмотрения, то $n-2\neq 0$, и следовательно:

$$g_{jk}K_i - g_{ik}K_j = 0. \tag{118.12}$$

Умножив (118.12) на g^{jk} и просуммировав по j и k, получим:

$$K_i(n-1) = 0,$$

а следовательно, так как $n > 2$ и $n-1 \neq 0$,

$$K_i = 0,$$

откуда

$$K = \text{const}.$$

Итак, если число измерений пространства больше двух, то достаточно потребовать постоянства кривизны по всем направлениям в каждой данной точке, чтобы утверждать, что кривизна одна и та же и во всех точках пространства.

Теперь рассмотрим оставленный в стороне случай $n = 2$. Для всякого двумерного пространства двумерное направление в каждой точке только одно и кривизна единственная, так что прежнее требование не может служить определением пространства постоянной кривизны: оно удовлетворяется автоматически. В связи с этим в каждой точке всегда имеет место равенство (118.9):

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

как это видно уже из (112.2). Действительно, для справедливости (118.9) достаточно, чтобы оно имело место для единственной существенной компоненты $R_{12,12}$. Зато теперь (118.9) уже не имеет своим следствием $K = \text{const}$, так как (118.11) удовлетворяется тождественно в силу $n = 2$.

В случае $n = 2$ пространство постоянной кривизны мы определим непосредственно требованием $K = \text{const}$ для всех его точек.

§ 119. Пространство постоянной кривизны V_{n-1} как гиперсфера в R_n

Мы хотим показать, что метрику риманова пространства *постоянной кривизны* (отличной от нуля) всегда можно реализовать, по крайней мере, локально, на гиперсфере в евклидовом пространстве на единицу большего числа измерений. Чтобы согласовать обозначения с § 117, обозначим число измерений *пространства постоянной кривизны* через $n-1$, его метрический тензор через $G_{\alpha\beta}$, тензор кривизны через $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\beta\alpha}$ и операцию абсолютного дифференцирования $\overset{*}{\nabla}_\varkappa$. Греческие индексы будут пробегать значения $1, 2, \ldots, n-1$, латинские 1, 2, ..., n. Согласно (118.9)

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\beta\alpha} = K\,(G_{\lambda\beta}G_{\varkappa\alpha} - G_{\lambda\alpha}G_{\varkappa\beta}), \tag{119.1}$$

причем, как мы знаем,

$$K = \text{const}.$$

Мы будем предполагать при этом $K \neq 0$. Действительно, в случае $K = 0$ пространство постоянной кривизны не нуждается в исследовании: оно является просто евклидовым пространством или, по крайней мере, локально евклидовым в силу обращения в нуль тензора кривизны.

Мы хотим доказать следующую теорему.

Если пространство постоянной кривизны V_{n-1} представляет собой односвязное элементарное многообразие (отнесенное к координатам $u^1, \ldots, u^{n-1}$ в некоторой области их изменения), то его можно реализовать (с сохранением метрики) в виде некоторой области на гиперсфере S_{n-1} в евклидовом пространстве R_n. Не исключено при этом, что эта область будет многолистной, т. е. что V_{n-1} многократно покроет ту или иную часть гиперсферы.

Если же пространство постоянной кривизны топологически устроено как угодно, то указанное в теореме свойство можно гарантировать лишь локально, т. е. для некоторой окрестности любой точки M (достаточно взять эту окрестность в виде односвязного элементарного многообразия).

Переходя к доказательству, *рассмотрим отдельно случай $K > 0$.* Построим тензор

$$b_{\alpha\beta} = \sqrt{K}\,G_{\alpha\beta}. \tag{119.2}$$

Тогда (119.1) можно переписать в виде

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\beta\alpha} = b_{\lambda\beta}b_{\varkappa\alpha} - b_{\lambda\alpha}b_{\varkappa\beta}. \tag{119.3}$$

Кроме того, так как $\overset{*}{\nabla}_\varkappa G_{\alpha\beta} = 0$, $\sqrt{K} = \text{const}$, то

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\alpha\beta} = 0. \tag{119.4}$$

Мы видим, что тензоры $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, заданные в V_{n-1}, удовлетворяют условиям (117.2), (117.3) (причем в (117.2) берется верхний знак). По основной теореме § 117 отсюда следует, что V_{n-1} можно реализовать в виде гиперповерхности в R_n, на которой $G_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ будут служить первым и вторым основными тензорами. При этом нормальный вектор ν^i будет единичным (а не мнимоединичным), так как в (117.2) берется верхний знак $(+)$, а следовательно, $g_{ij}\nu^i\nu^j = +1$.

Остается показать, что построенная гиперповерхность будет гиперсферой. Предполагая, что R_n отнесено к аффинным координатам x^i, перепишем первое из уравнений (117.7) (причем, как и в (117.2), берем верхний знак):

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i = -b_\varkappa^\sigma \xi_\sigma^i.$$

Но в силу (119.2)

$$b_\varkappa^\sigma = G^{\sigma\varrho} b_{\varkappa\varrho} = \sqrt{K} G^{\sigma\varrho} G_{\varkappa\varrho} = \sqrt{K} \delta_\varkappa^\sigma,$$

и следовательно,

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i = -\sqrt{K} \xi_\varkappa^i.$$

Так как $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i = \dfrac{\partial \nu^i}{\partial u^\varkappa}$ (см. (117.8)) и $\xi_\varkappa^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa}$, то окончательно

$$\frac{\partial \nu^i}{\partial u^\varkappa} = -\sqrt{K} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa}, \text{ т. е. } \frac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa} = \frac{\partial}{\partial u^\varkappa}\left(-\frac{\nu^i}{\sqrt{K}}\right).$$

Это означает, что x^i лишь на константы отличаются от $-\dfrac{\nu^i}{\sqrt{K}}$; сдвигая начало координат, можно добиться, чтобы

$$x^i = -\frac{1}{\sqrt{K}} \nu^i. \tag{119.5}$$

Так как ν^i — единичный вектор, то радиус-вектор x^i имеет постоянную длину $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$, а следовательно, построенная нами гиперповерхность образует кусок гиперсферы S_{n-1} радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ с центром в начале координат.

Теперь рассмотрим случай $K < 0$. Построим тензор

$$b_{\alpha\beta} = \sqrt{-K} G_{\alpha\beta} \tag{119.6}$$

и перепишем (119.1) в виде

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha} = -(b_{\lambda\beta} b_{\varkappa\alpha} - b_{\lambda\alpha} b_{\varkappa\beta}). \tag{119.7}$$

По-прежнему

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\alpha\beta} = 0, \tag{119.8}$$

и следовательно, тензоры $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условиям (117.2), (117.3), причем в (117.2) берется нижний знак. Последнее означает, что нормальный вектор ν^i к гиперповерхности, в виде которой реализуется V_{n-1}, будет мнимоединичным, $g_{ij}\nu^i\nu^j = -1$. Далее, записываем первое из уравнений (117.7) (беря теперь нижний знак):

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i = b^\sigma_\varkappa \xi^i_\sigma$$

и совершенно аналогичной выкладкой получаем:

$$x^i = \frac{1}{\sqrt{-K}} \nu^i. \tag{119.9}$$

Так как ν^i — мнимоединичный вектор, то радиус-вектор x^i имеет постоянную длину $\frac{i}{\sqrt{-K}}$. Мы получаем кусок гиперсферы S_{n-1} чисто мнимого радиуса $\frac{i}{\sqrt{-K}}$.

Если обозначить радиус гиперсферы через ρ в первом и через ρi во втором случае, то мы получим соответственно

$$K = \frac{1}{\rho^2}, \quad K = -\frac{1}{\rho^2}. \tag{119.10}$$

Несмотря на то, что для пространств постоянной кривизны мы доказали важную теорему о реализации их на гиперсферах, мы, строго говоря, до сих пор не знаем, *существуют ли такие пространства* (за исключением евклидова случая $K = 0$). Действительно, при доказательстве теоремы существование этих пространств мы *предполагали*.

Чтобы показать, что они существуют, достаточно обнаружить, что риманова метрика на всякой гиперсфере ненулевого радиуса $S_{n-1} \subset R_n$ обладает постоянной кривизной. Отнесем вмещающее пространство R_n к аффинным координатам x^i с началом в центре гиперсферы S_{n-1}. Тогда радиус-вектор x^i, проведенный в какую-либо точку гиперсферы S_{n-1}, направлен по нормали к ней (§ 86), а значит, отличается от нормального вектора ν^i (единичного или мнимоединичного) лишь численным множителем

$$x^i = \rho \nu^i. \tag{119.11}$$

Если при этом ν^i — единичный вектор, то S_{n-1} имеет радиус ρ, а если мнимоединичный, то ρi. Выпишем первую формулу (117.7), принимая во внимание (117.8) (эти формулы имеют место для любой гиперповерхности $V_{n-1} \subset R_n$):

$$\frac{\partial \nu^i}{\partial u^\varkappa} = \mp b^\sigma_\varkappa \xi^i_\sigma.$$

Так как $\nu^i = \frac{x^i}{\rho}$, а $\xi^i_\sigma = \frac{\partial x^i}{\partial u^\sigma}$, то

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa} = \mp b^\sigma_\varkappa \frac{\partial x^i}{\partial u^\sigma}.$$

В силу линейной независимости векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\sigma}$ отсюда следует, что коэффициенты при них в правой и левой частях равенства совпадают, т. е.

$$\mp b_\varkappa^\sigma = \frac{1}{\rho} \delta_\varkappa^\sigma.$$

Опуская индекс σ при помощи метрического тензора $G_{\lambda\sigma}$, получаем:

$$\mp b_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{\rho} G_{\varkappa\lambda}.$$

Вставляя полученное выражение для $b_{\varkappa\lambda}$ в формулы Гаусса (117.2), имеем:

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha} = \pm \frac{1}{\rho^2} (G_{\lambda\beta} G_{\varkappa\alpha} - G_{\varkappa\beta} G_{\lambda\alpha}).$$

Таким образом, на S_{n-1} имеют место соотношения (119.1), где

$$K = \pm \frac{1}{\rho^2},$$

плюс в случае радиуса ρ и минус в случае радиуса ρi. Это показывает, что *риманова метрика на S_{n-1} имеет постоянную кривизну.*

Итак, образцом римановых пространств V_{n-1} постоянной кривизны можно считать *неевклидовы пространства*, метрика которых полностью совпадает с метрикой гиперсфер $S_{n-1} \subset R_n$. Но и любые пространства постоянной кривизны, по крайней мере, локально, обладают такой же метрикой, как было показано в этом параграфе. Отсюда на любые пространства постоянной кривизны переносится (по крайней мере, в локальном смысле) свойство свободной подвижности, установленное в § 87 для неевклидовых пространств; а именно, некоторую окрестность произвольной точки M данного пространства всегда можно отобразить с сохранением метрики на окрестность другой произвольной точки M' и притом так, чтобы ортонормированный репер, заданный в M, перешел в произвольно выбранный ортонормированный репер в M'.

Точно так же в произвольном пространстве постоянной кривизны имеет место (по крайней мере, локально) то выражение для метрической квадратичной формы $ds^2 = G_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$, которое было подсчитано в § 87 для гиперсферы S_{n-1}. Разумеется, нужно брать ту гиперсферу, на которую данное пространство способно изометрически налагаться.

В частности, отсюда следует, что *пространства постоянной кривизны (по крайней мере, локально) конформно евклидовы.*

§ 120. Проективно евклидовы пространства в метрическом случае

В § 109 были установлены необходимые и достаточные признаки для того, чтобы пространство аффинной связности без кручения L_n^0 было проективно евклидовым. Эти признаки заключались в том, что тензор кривизны должен иметь строение (109.10):

$$R_{ik,\ l}^{\cdot\cdot\ \cdot q} = \delta_k^q P_{li} - \delta_l^q P_{ki} + \delta_i^q (P_{lk} - P_{kl}), \tag{120.1}$$

где тензор P_{ki} удовлетворяет условиям (109.17):

$$\nabla_l P_{ki} = \nabla_k P_{li}. \tag{120.2}$$

Из (120.1) следует, что P_{ki} необходимо имеет вид (109.14):

$$P_{ki} = -\frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2 - 1}. \tag{120.3}$$

Выпишем эти признаки в случае риманова пространства V_n $(n \geqslant 2)$. Как мы знаем [(110.13)], тензор Риччи будет в этом случае симметричным:

$$R_{ki} = R_{ik}. \tag{120.4}$$

Заметим, что класс пространств L_n^0 с симметрическим тензором Риччи значительно шире класса римановых пространств V_n. Это будут так называемые *пространства эквиаффинной связности*. Они, вообще говоря, не обладают метрикой, но тем не менее в их касательных пространствах A_n можно ввести измерение объемов так, что объем n-мерного параллелепипеда, построенного на n векторах, *сохраняется при параллельном перенесении этих векторов по любому пути*. Это свойство можно принять за определение пространств эквиаффинной связности; тогда условие $R_{ki} = R_{ik}$ будет служить их необходимым и достаточным признаком. Доказательства мы не приводим.

В силу симметрии тензора Риччи (120.3) принимает упрощенный вид

$$P_{ki} = -\frac{1}{n-1} R_{ki}. \tag{120.5}$$

Очевидно,

$$P_{ki} = P_{ik}.$$

Перепишем (120.1), опустив индекс q путем свертывания с g_{qj} (и приняв во внимание $P_{ki} = P_{ik}$):

$$R_{ik,\ lj} = g_{kj} P_{li} - g_{lj} P_{ki}. \tag{120.6}$$

Свертывая (120.6) с g^{ki}, мы получаем (переставив у $R_{lk,\,ij}$ индексы внутри каждой пары):

$$g^{ki}R_{kl,\,ji}=\delta^i_j P_{li}-g_{lj}P, \quad \text{где} \quad P=P_{ki}g^{ki},$$

или окончательно

$$R_{lj}=P_{lj}-g_{lj}P.$$

Заменяя здесь R_{lj} согласно (120.5) через $-(n-1)\,P_{lj}$, мы получаем:

$$nP_{lj}=g_{lj}P, \quad \text{или} \quad P_{lj}=Kg_{lj}, \tag{120.7}$$

где $K=\frac{1}{n}P$.

Вставляя эти значения P_{lj} в (120.6), получаем:

$$R_{lk,\,ij}=K(g_{li}g_{kj}-g_{lj}g_{ki}), \tag{120.8}$$

а это в случае $n>2$ означает, что наше пространство — постоянной кривизны (§ 118). В случае же $n=2$ мы используем условие (120.2), которое в силу (120.7) принимает вид

$$\nabla_l K\cdot g_{ki}=\nabla_k K\cdot g_{li}.$$

Мы пришли к соотношению (118.12), из которого следует, как мы видели, $K=\text{const}$. Мы снова получаем пространство постоянной кривизны.

Итак, проективно евклидово риманово пространство необходимо является пространством постоянной кривизны.

Верно и обратное: всякое пространство постоянной кривизны будет проективно евклидовым. В самом деле, поскольку тензор кривизны имеет строение (120.8), где $K=\text{const}$, то, положив

$$P_{ij}=Kg_{ij},$$

мы убеждаемся, что условия (120.2), (120.6) (а тем самым и (120.1)) имеют место, а это обеспечивает проективно евклидов характер пространства постоянной кривизны.

Впрочем, тот же результат можно получить наглядным геометрическим путем. Пространство V_{n-1} постоянной кривизны (по крайней мере, локально) реализуется на гиперсфере $S_{n-1}\subset R_n$. Геодезические линии будут совпадать при этом с сечениями гиперсферы S_{n-1} двумерными плоскостями A_2, проходящими через ее центр. (Очевидно, в случае неизотропной A_2 такое сечение представляет собой окружность на собственно евклидовой или псевдоевклидовой плоскости A_2.) В самом деле, построим в какой-нибудь точке сечения касательный к нему вектор ξ и будем параллельно переносить его вдоль этого сечения с точки зрения римановой метрики на S_{n-1}. Мы хотим показать, что ξ остается касательным вектором (рис. 31). Покажем прежде всего, что ξ остается в плоскости сечения. Согласно § 94 при параллельном перенесении ξ его дифференциал $d\xi$ во вмещающем пространстве R_n направлен ортогонально к гиперплоскости, касательной к S_{n-1}, т. е. коллинеарно радиусу-вектору каждой данной точки. Так как радиусы-векторы всех точек сечения лежат в его плоскости A_2, то $d\xi$ также лежит все время в плоскости A_2, а следовательно, ξ остается в этой плоскости (в начальный момент ξ как вектор, касательный к плоскому сечению, лежит, конечно, в его плоскости A_2).

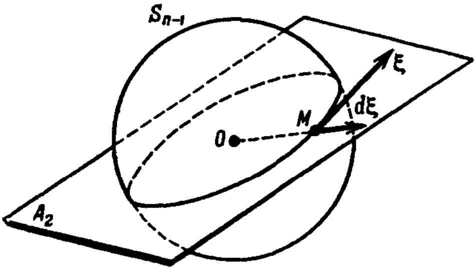

Рис. 31.

Оставаясь в плоскости A_2 и в то же время принадлежа S_{n-1} (т. е. касаясь этой гиперповерхности), вектор ξ остается касательным к сечению S_{n-1} плоскостью A_2. Этим показано, что такие сечения являются геодезическими линиями на S_{n-1}. (Заметим, что нашим наглядным геометрическим соображениям нетрудно придать и строгую аналитическую форму.)

Так как сечение S_{n-1} плоскостью A_2 можно провести через любую точку на S_{n-1} и в любом направлении на ней, то эти сечения исчерпывают все геодезические линии на S_{n-1}.

Проектируем теперь гиперсферу S_{n-1} из ее центра O на произвольную гиперплоскость A_{n-1} в R_n (не проходящую через O). Тогда геодезические на S_{n-1} проектируются проходящими через них плоскостями A_2 в прямые линии на A_{n-1}. Тем самым метрика на S_{n-1} будет проективно евклидовой.

§ 121. Конформное соответствие римановых пространств

Сначала рассмотрим вопрос более общего характера. Пусть независимо друг от друга даны два каких-либо римановых пространства, оба с одним и тем же числом измерений n. В каждом из этих пространств имеется своя система координат и своя метрика:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

в первом и

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, d\bar{x}^\alpha\, d\bar{x}^\beta$$

во втором.

Предположим для простоты, что соответствующие многообразия $D(x^1, \ldots, x^n)$ и $\overline{D}(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)$ — элементарные. Пусть, далее, между точками области D и области $\overline{D}$ установлено взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое соответствие. Тогда в сущности излишне строить самостоятельную систему координат в каждом пространстве, а именно, имея систему координат x^i в области D, можно «перенести» ее в область $\overline{D}$ следующим очевидным образом. Каждой точке $\overline{M}$ в области $\overline{D}$ приписываем те же координаты x^i, какие уже имеет в области D соответствующая ей точка M. Итак, теперь для соответствующих точек M и $\overline{M}$ у нас $\overline{x}^i = x^i$. Тем не менее метрика обоих пространств остается, вообще говоря, различной, так что и для соответствующих точек $\overline{g}_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}$ *).

С точки зрения аналитической можно сказать, что имеется одно элементарное многообразие $D(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, причем в нем заданы две квадратичные формы, определяющие две различные римановы метрики:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \\ d\overline{s}^2 &= \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (121.1)$$

До сих пор речь шла вообще о взаимно однозначном соответствии двух различных римановых пространств. Теперь мы займемся частным случаем этого соответствия — *конформным отображением.*

Мы скажем, что многообразия D и $\overline{D}$ *конформно отображены* друг на друга, если квадратичная форма $d\overline{s}^2$ отличается от ds^2 множителем a, зависящим лишь от выбора точки $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и не зависящим, следовательно, от направления бесконечно малого смещения $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$:

$$d\overline{s}^2 = a\, ds^2, \qquad (121.2)$$

где $a = a(x^1, \ldots, x^n)$.

Условие (121.2) можно записать иначе, вставив выражение для $d\overline{s}^2$ и ds^2 из (121.1). Так как (121.2) должно удовлетворяться тождественно, в частности, относительно $dx^1, \ldots, dx^n$, то координаты тензоров $\overline{g}_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ оказываются пропорциональными в каждой точке с коэффициентом пропорциональности a:

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = a g_{\alpha\beta}. \qquad (121.3)$$

*) В частном случае может оказаться $\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. Тогда соответствие называется изометрическим, метрика в D и $\overline{D}$ оказывается одной и той же.

Геометрически условие (121.2) означает следующее: дифференциалы всех дуг, выходящих из данной точки M области D, при переходе в соответствующую точку $\overline{M}$ области $\overline{D}$ изменяются в одном и том же отношении независимо от их направления. Отношение это, очевидно, равное $\sqrt{a}$, будет иметь свое определенное значение в каждой точке (рис. 32).

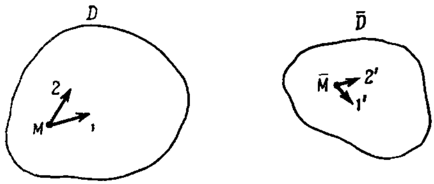

Рис. 32.

Действительно, поскольку точки M и $\overline{M}$ — соответствующие значения их координат x^i — общие, а поскольку бесконечно малые смещения 1 и $1'$ — соответствующие, они определяются одними и теми же dx^i. Условие (121.2) при данных x^i и dx^i выражает, следовательно, что отношение дифференциалов дуг $1'$ и 1 равно $\sqrt{a}$. Как следствие получаем отсюда сохранение углов при нашем отображении. Ограничимся случаем собственно риманова пространства. Пусть направления 1 и 2 в точке M задаются соответственно дифференциалами координат dx^i, δx^i. Теми же дифференциалами задаются и соответствующие направления $1'$ и $2'$ в точке $\overline{M}$. По известной формуле

$$\cos(\widehat{1,\ 2}) = \frac{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \delta x^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta}\ \sqrt{g_{\alpha\beta}\delta x^\alpha \delta x^\beta}} \qquad \left(\text{т. е. } \frac{d\mathbf{x}\,\delta\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|\,|\delta\mathbf{x}|}\right).$$

Вычисляя аналогичным образом $\cos(\widehat{1',\ 2'})$ в области $\overline{D}$, мы видим, что $\cos(\widehat{1',\ 2'}) = \cos(\widehat{1,\ 2})$, так как dx^i и δx^i остаются без изменения, а все $g_{\alpha\beta}$ меняются в одном и том же отношении.

Итак, наше соответствие является в бесконечно малом соответствием подобия, если пренебречь бесконечно малыми второго порядка.

В этом и заключается геометрический смысл конформного отображения.

Введем обозначение: $a = e^{2\sigma}$; это можно сделать, предполагая $a > 0$ (в противном случае мы изменили бы знак у $\overline{ds^2}$, что означает лишь тривиальное преобразование метрики). Удобство этого обозначения обнаружится в дальнейшем.

Итак, если в одном и том же многообразии (в общем случае не обязательно элементарном) заданы две римановых метрики, связанные зависимостью

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}, \tag{121.4}$$

где $\sigma=\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ — непрерывно дифференцируемая функция точки, то этим самым даны два римановых пространства, приведенных в конформное соответствие друг с другом.

Выделим предварительно лемму, относящуюся к тензорному анализу, которая будет для нас важна в дальнейшем.

Лемма. Предположим, что нам дано риманово пространство V_n, в котором тензор кривизны имеет особое строение, а именно:

$$R_{ij,\,kl}=g_{ik}S_{jl}-g_{jk}S_{il}-g_{il}S_{jk}+g_{jl}S_{ik}, \tag{121.5}$$

где g_{ij} — метрический, а S_{ij} — некоторый другой симметрический тензор *). Составим в нашем пространстве дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\sigma=\sigma(x^1, \ldots, x^n)$:

$$\nabla_j\sigma_k-\sigma_j\sigma_k+\frac{1}{2}g_{jk}g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta=S_{jk}, \tag{121.6}$$

где $\sigma_k=\nabla_k\sigma=\dfrac{\partial\sigma}{\partial x^k}$. Мы утверждаем, что *условия интегрируемости* этой системы дифференциальных уравнений будут:

$$\nabla_i S_{jk}-\nabla_j S_{ik}=0. \tag{121.7}$$

Доказательство. Введем сокращенное обозначение $\Delta_1\sigma$ для инвариантного выражения

$$\Delta_1\sigma=g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta=\sigma_\alpha\sigma^\alpha=g_{\alpha\beta}\sigma^\alpha\sigma^\beta \qquad (\sigma^\alpha=g^{\alpha\beta}\sigma_\beta), \tag{121.8}$$

которое называется *первым дифференциальным параметром скаляра* σ. Запишем дифференциальное уравнение (121.6) в виде, разрешенном относительно второй ковариантной производной скаляра:

$$\nabla_j\sigma_k=\sigma_j\sigma_k-\frac{1}{2}g_{jk}g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta+S_{jk}. \tag{121.9}$$

Можно писать здесь $\nabla_j\sigma_k$ и в развернутом виде:

$$\nabla_j\sigma_k=\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^j\,\partial x^k}-\Gamma^\alpha_{kj}\sigma_\alpha,$$

рассматривая (121.9) как систему n^2 дифференциальных уравнений ($j, k=1, 2, \ldots, n$) в частных производных 2-го порядка относительно неизвестной σ. Как известно, для получения условий интегрируемости мы дифференцируем (121.9) почленно по x^i и альтернируем по i и j. При этом производные 3-го порядка от σ уничтожаются, производные 2-го порядка можно заменить из самой

*) Правая часть получается из своего первого члена путем альтернирования по индексам i и j и вторичного альтернирования результата по индексам k и l.

системы (121.9), и условия интегрируемости, получаемые в результате, могут содержать лишь σ и σ_k. Все эти операции мы проделаем в ковариантных производных, что, конечно, нисколько не меняет их сущности. Итак, (121.9) мы подвергаем ковариантному дифференцированию ∇_i. Во втором члене справа g_{jk}, $g_{\alpha\beta}$ ведут себя как постоянные, дифференцирование же σ_α и затем σ_β дает одинаковый результат (разница лишь в обозначениях индексов суммирования), так что оба полученных члена объединяем в один. Получаем:

$$\nabla_i\nabla_j\sigma_k = (\nabla_i\sigma_j)\,\sigma_k + \sigma_j\nabla_i\sigma_k - g_{jk}g^{\alpha\beta}(\nabla_i\sigma_\alpha)\,\sigma_\beta + \nabla_i S_{jk}. \tag{121.10}$$

Теперь произведем альтернацию по индексам i и j (без деления на 2). Выясним, что получается в *правой части*. Так как

$$\nabla_i\sigma_j = \sigma_{ij} - \Gamma^\alpha_{ij}\sigma_\alpha$$

симметрично относительно индексов i и j, то при альтернации первый член правой части выпадает. В остальных членах заменяем вторые производные от σ из (121.9) и (пользуясь обозначением (121.8)) получаем:

$$\sigma_j\left(\sigma_i\sigma_k - \frac{1}{2}g_{ik}\Delta_1\sigma + S_{ik}\right) - \\ - g_{jk}\sigma^\alpha\left(\sigma_i\sigma_\alpha - \frac{1}{2}g_{i\alpha}\Delta_1\sigma + S_{i\alpha}\right) + \nabla_i S_{jk}\ [ij]\ ^{*)}.$$

Раскроем здесь скобки. Сумма членов второго, четвертого и пятого образует симметричное относительно i и j выражение

$$-\frac{1}{2}\sigma_j g_{ik}\Delta_1\sigma - \sigma_i g_{jk}\Delta_1\sigma + \frac{1}{2}\sigma_i g_{jk}\Delta_1\sigma = -\frac{1}{2}\Delta_1\sigma\,(g_{ik}\sigma_j + g_{jk}\sigma_i),$$

которое, равно как и первый член, исчезает при альтернировании. Остаются члены

$$\sigma_j S_{ik} - g_{jk}S_{i\alpha}\sigma^\alpha + \nabla_i S_{jk}\,[ij]. \tag{121.11}$$

Левая часть (121.10) согласно (108.14) принимает после альтернации следующий вид:

$$\nabla_i\nabla_j\sigma_k - \nabla_j\Delta_i\sigma_k = R_{ij,\,k}{}^{\beta}\sigma_\beta = R_{ij,\,k\alpha}g^{\alpha\beta}\sigma_\beta = R_{ij,\,k\alpha}\sigma^\alpha.$$

Используем теперь особое строение тензора кривизны в нашем пространстве, подставляя сюда его выражение из (121.5):

$$(g_{ik}S_{j\alpha} - g_{jk}S_{i\alpha} - g_{i\alpha}S_{jk} + g_{j\alpha}S_{ik})\,\sigma^\alpha = \sigma_j S_{ik} - g_{jk}S_{i\alpha}\sigma^\alpha\,[ij]. \tag{121.12}$$

Приравниваем теперь, чтобы получить искомые условия интегри-

---

*) Как всегда, символ $[ij]$ после многочлена означает требование проальтернировать все его члены по индексам i и j (без деления на 2).

руемости, левую и правую части равенства (121.10) после альтернации, т. е. (121.11) и (121.12). Одинаковые члены сокращаются, и остается:

$$0 = \nabla_i S_{jk} [ij],$$

или более подробно

$$\nabla_i S_{jk} = \nabla_j S_{ik}.$$

Лемма доказана.

Установим теперь связь между тензорами кривизны двух римановых пространств, находящихся в конформном соответствии.

Согласно (121.4) в соответствующих точках мы имеем:

$$\bar{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}.$$

Отсюда легко получить и $\bar{g}^{ij}$, т. е. элементы матрицы, обратной $\bar{g}_{ij}$:

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}. \qquad (121.13)$$

Действительно, поскольку все элементы матрицы g_{ij} умножились на $e^{2\sigma}$, то, очевидно, элементы обратной матрицы разделятся на то же выражение.

Выясним теперь, как при переходе от метрики g_{ij} к метрике $\bar{g}_{ij}$ изменяются коэффициенты параллельного перенесения. Имеем:

$$\bar{\Gamma}_{i,\,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\sigma}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{2} e^{2\sigma}\,(g_{ik} 2\sigma_j + g_{ij} 2\sigma_k - g_{jk} 2\sigma_i),$$

или

$$\bar{\Gamma}_{i,\,jk} = e^{2\sigma}\Gamma_{i,\,jk} + e^{2\sigma}\,(\sigma_j g_{ik} + \sigma_k g_{ij} - \sigma_i g_{jk}).$$

Для нас более важна аналогичная формула для $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ с поднятым индексом. Вычислим:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \bar{g}^{i\alpha}\bar{\Gamma}_{\alpha,\,jk} = e^{-2\sigma} g^{i\alpha}\,(\Gamma_{\alpha,\,jk} + \sigma_j g_{\alpha k} + \sigma_k g_{\alpha j} - \sigma_\alpha g_{jk})\, e^{2\sigma},$$

или

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_k \sigma_j + \delta^i_j \sigma_k - \sigma^i g_{jk}. \qquad (121.14)$$

Формула (121.14) дает преобразование коэффициентов параллельного перенесения при конформном преобразовании метрики. Вычислим теперь тензор кривизны $\bar{R}_{ik,\,i}{}^{q}$ для преобразованной метрики $\bar{g}_{ij}$. Перепишем (121.14) в виде

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}, \quad \text{где} \quad T^i_{jk} = \delta^i_k \sigma_j + \delta^i_j \sigma_k - g_{jk}\sigma^i.$$

Тензор кривизны $\overline{R}_{lk,\,i}{}^{q}$ будет выражаться в таком случае согласно (109.7):

$$\overline{R}_{lk,\,i}{}^{q} - R_{lk,\,i}{}^{q} = \nabla_k T^q_{li} + T^q_{ks} T^s_{li}\,[lk]. \qquad (121.15)$$

Мы знаем, что в случае $T^i_{jk} = \delta^i_k \sigma_j + \delta^i_j \sigma_k$ мы получаем формулу (109.9) (в которой нужно заменить, конечно, P_i на σ_i). Но сейчас у нас T^i_{jk} содержит дополнительный член $-\sigma^i g_{jk}$. Этот член порождает в $\nabla_k T^q_{li}$ дополнительное слагаемое $-\nabla_k \sigma^q g_{li}$ и в $T^q_{ks} T^s_{li}$ дополнительные слагаемые:

$$-(\delta^q_k \sigma_s + \delta^q_s \sigma_k)\,\sigma^s g_{li} - \sigma^q g_{ks}(\delta^s_l \sigma_i + \delta^s_i \sigma_l) + \sigma^q g_{ks} \sigma^s g_{li} =$$
$$= -\Delta_1 \sigma \delta^q_k g_{li} - \sigma^q \sigma_k g_{li} - \sigma^q \sigma_i g_{kl} - \sigma^q \sigma_l g_{ki} + \sigma^q \sigma_k g_{li}.$$

Второй и пятый члены взаимно уничтожаются, третий пропадет при альтернации. Переписываем (121.15), пользуясь формулой (109.9) и присоединяя в правой части дополнительные слагаемые:

$$\overline{R}_{lk,\,i}{}^{q} = R_{lk,\,i}{}^{q} + \delta^q_l P_{ki} - \delta^q_k P_{li} + \delta^q_i (P_{kl} - P_{lk}) - \nabla_k \sigma^q g_{li} +$$
$$+ \nabla_l \sigma^q g_{ki} - \Delta_1 \sigma \delta^q_k g_{li} + \Delta_1 \sigma \delta^q_l g_{ki} - \sigma^q \sigma_l g_{ki} + \sigma^q \sigma_k g_{li}. \qquad (121.16)$$

При этом

$$P_{ki} = \nabla_k \sigma_i - \sigma_k \sigma_i;$$

очевидно, $P_{ki} = P_{ik}$ $\left(\text{так как } \nabla_k \sigma_i = \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x^k \partial x^i} - \Gamma^\alpha_{ki} \sigma_\alpha\right)$. Свертываем (121.16) почленно с равенством

$$\overline{g}_{qj} = e^{2\sigma} g_{qj}.$$

Получим:

$$\overline{R}_{lk,\,ij} = e^{2\sigma}\{R_{lk,\,ij} + g_{lj} P_{ki} - g_{kj} P_{li} - g_{li}(\nabla_k \sigma_j - \sigma_k \sigma_j) +$$
$$+ g_{ki}(\nabla_l \sigma_j - \sigma_l \sigma_j) + \Delta_1 \sigma (g_{lj} g_{ki} - g_{kj} g_{li})\}.$$

Отсюда окончательно

$$\overline{R}_{lk,\,ij} = e^{2\sigma}\{R_{lk,\,ij} + g_{lj} S_{ki} + g_{ki} S_{lj} - g_{li} S_{kj} - g_{kj} S_{li}\}, \qquad (121.17)$$

где

$$S_{jk} = \nabla_j \sigma_k - \sigma_j \sigma_k + \frac{1}{2} g_{kj} \Delta_1 \sigma. \qquad (121.18)$$

Так преобразуется тензор кривизны при конформном преобразовании римановой метрики. Заметим, что члены фигурной скобки, содержащие тензор S_{ki}, составляются следующим образом: сначала берется член $g_{lj}S_{ki}$, в котором при g стоят крайние, а при S — средние индексы тензора кривизны, а затем этот член подвергается двойной альтернации (без деления) по индексам i, j и l, k, т. е. по индексам каждой пары. Порядок этих альтернаций безразличен.

§ 122. Конформно евклидовы пространства

Мы займемся изучением особого класса римановых пространств, а именно, допускающих конформное отображение на локально евклидово пространство.

Такие римановы пространства называются *конформно евклидовыми*.

Пусть $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ определяет метрику конформно евклидова пространства. Согласно определению мы можем конформно отобразить это пространство на локально евклидово, т. е. каждой его точке $M(x^1, \ldots, x^n)$ поставить в соответствие точку $\overline{M}$ в локально евклидовом пространстве так, что соответствующие дифференциалы дуг будут в каждой точке отличаться лишь множителем e^{σ}, $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$.

Пусть $d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}\,dx^i\,dx^j$ — квадрат соответствующего дифференциала дуги в локально евклидовом пространстве, тогда

$$d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2. \tag{122.1}$$

Итак, для того чтобы метрика ds^2 была конформно евклидовой, необходимо и достаточно существование такой функции точки $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$, что $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2$ определяет локально евклидову метрику.

При изучении конформно евклидовой метрики возникают следующие два вопроса:

1) по каким признакам можно узнать, является ли данное риманово пространство конформно евклидовым, и, если является,

2) найти его отображение на евклидово, т. е. найти множитель $e^{2\sigma}$, превращающий метрику ds^2 в локально евклидову метрику $d\overline{s}^2$.

Оба эти вопроса мы будем решать совместно. Итак, нам дана метрика $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$. Возьмем функцию точки σ, пока произвольную, и составим новую квадратичную форму $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2$. Для того чтобы метрика $d\overline{s}^2$ определяла (хотя бы локально) евклидову метрику, необходимо и достаточно, как мы знаем, обращение в нуль ее тензора кривизны $\overline{R}_{ij,\,kl}$. Другими словами, левая часть (121.17) должна обращаться в нуль, следовательно, скобка в правой части — тоже, что равносильно тому, что $R_{ij,\,kl}$ имеет

вид

$$R_{ij,\,kl} = g_{ik}S_{jl} + g_{jl}S_{ik} - g_{jk}S_{il} - g_{il}S_{jk}, \tag{122.2}$$

где S_{jk} выражается через σ согласно (121.18).

Следовательно, *если пространство конформно евклидово, его тензор кривизны имеет строение* (122.2) *при условии* (121.18). *Обратно: если существует такое σ, что выполняется* (122.2) *при условии* (121.18), *то, вычислив для метрики $d\bar{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2$ тензор кривизны, получим нуль, а значит, данная метрика ds^2 конформно евклидова.*

Итак, если пространство конформно евклидово, то существует скаляр σ, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (121.18) при условии (122.2), следовательно, условия интегрируемости уравнений (121.18) должны удовлетворяться. Но согласно лемме § 121 они имеют вид

$$\nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik} = 0. \tag{122.3}$$

Итак, необходимым признаком конформно евклидова пространства является у нас *существование симметрического тензора S_{ik}, удовлетворяющего уравнениям* (122.2) *и* (122.3). В этой формулировке σ не играет никакой роли и, как мы видим, даже не упоминается. Докажем, что *этот признак и достаточен*, правда, лишь в локальном смысле. Итак, пусть дано, что тензор кривизны имеет вид (122.2), где S_{ik} — некоторый симметрический тензор, удовлетворяющий уравнению (122.3).

Прежде всего выпишем дифференциальные уравнения (121.18) относительно σ, рассматривая σ как неизвестную функцию точки. Так как условия интегрируемости (122.3) выполняются тождественно, то при любых начальных значениях в фиксированной точке M_0

$$\sigma = \sigma_0 \quad \text{и} \quad \sigma_i = (\sigma_i)_0$$

решение уравнений (121.18) существует, а так как (122.2) также имеет место, то по предыдущему пространство конформно евклидово. Конечно, существование решения $\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ мы можем гарантировать лишь в некоторой окрестности произвольно выбранной начальной точки M_0, а значит, конформно евклидовым наше пространство будет *лишь локально*; и лишь в этом смысле признак (122.2), (122.3) является и достаточным.

Найденный необходимый и достаточный признак еще не является вполне эффективным.

Позже мы покажем, как фактически установить, существует ли симметрический тензор S_{ik}, удовлетворяющий (122.2) и (122.3). Но и в этой форме из нашего признака можно извлечь некоторые следствия.

Пространство постоянной кривизны обязательно конформно евклидово (по крайней мере, локально).

Для пространства постоянной кривизны, как мы знаем:

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

где

$$K = \text{const}.$$

Перепишем несколько иначе:

$$R_{ij,kl} = g_{jl}\frac{Kg_{ik}}{2} + g_{ik}\frac{Kg_{jl}}{2} - g_{jk}\frac{Kg_{il}}{2} - g_{il}\frac{Kg_{jk}}{2}. \tag{122.4}$$

Положим:

$$S_{jk} = \frac{Kg_{jk}}{2}. \tag{122.5}$$

Тогда, как видно из (122.4), условие (122.2) выполняется, и условие (122.3) тоже, так как из (122.5) следует:

$$\nabla_l S_{jk} = 0.$$

Итак, для пространства постоянной кривизны существует тензор, удовлетворяющий (122.2) и (122.3).

Впрочем, это видно и из того, что метрика постоянной кривизны реализуется на гиперсфере $S_n \subset R_{n+1}$, а конформно евклидов характер метрики на S_n показан в § 87.

Выведем окончательный вид необходимого и достаточного признака конформно евклидова пространства. Выделим случай $n = 2$. Здесь о нашем признаке не приходится говорить, так как все двумерные римановы пространства конформно евклидовы. Действительно, в теории поверхностей доказывается, что на поверхности (локально) всегда можно выбрать изотермические координаты, в которых линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2),$$

где

$$\lambda = \lambda(u, v),$$

а это и доказывает, что любая метрика V_2 будет (локально) конформно евклидовой; достаточно положить $e^{2\sigma} = \frac{1}{\lambda}$, $d\bar{s}^2 = du^2 + dv^2$. Аналогичное предложение можно доказать и в псевдоримановом случае.

В дальнейшем будем предполагать, что $n > 2$.

Поставим задачу: допустив, что (122.2) удовлетворяется, вычислить отсюда тензор S_{ij}.

Прежде всего найдем R_{jk}, свертывая (122.2) с g^{il} почленно (см. (110.12)):

$$R_{jk}=R_{ij,kl}g^{il}=\delta_k^l S_{jl}+\delta_j^i S_{ik}-g_{jk}S-nS_{jk},$$

так как $g^{il}g_{ik}=\delta_k^l$, $g^{il}g_{il}=\delta_l^l=n$; при этом мы обозначили $S=g^{il}S_{il}$. Окончательно

$$R_{jk}=-Sg_{jk}-(n-2)S_{jk}. \tag{122.6}$$

Отсюда мы еще не в состоянии определить S_{jk}, так как нам неизвестно S. Произведем почленно свертывание с g^{jk}; получим слева так называемую скалярную кривизну R (см. (110. 14)):

$$R=-Sn-(n-2)S=-2(n-1)S,$$

откуда

$$S=-\frac{R}{2(n-1)}.$$

Теперь из (122.6) вычислим S_{jk}:

$$S_{jk}=-\frac{R_{jk}}{n-2}+\frac{Rg_{jk}}{2(n-1)(n-2)}. \tag{122.7}$$

Итак, если тензор S_{jk}, удовлетворяющий (122.2), существует, то он обязательно имеет вид (122.7).

Теперь уже легко проверить, существует ли действительно тензор, удовлетворяющий условиям (122.2) и (122.3). Для этого нужно подставить выражение S_{jk} из (122.7) в (122.2) и (122.3). Если эти уравнения обратятся в тождества (чего в общем случае не будет), то данное пространство конформно евклидово (по крайней мере, локально), и обратно.

Теперь искомый признак получен в достаточно эффективной форме. Остается только внести сюда некоторые уточнения. Рассмотрим два случая.

1. $n=3$. В этом случае тензоры $R_{ij,kl}$ и S_{jk} имеют по шесть существенно различных координат, и, рассматривая (122.2) как шесть линейных уравнений с шестью неизвестными S_{jk}, естественно ожидать, что такие S_{jk} всегда можно найти. Как показало бы более детальное исследование, дело обстоит действительно так. Следовательно, S_{jk}, удовлетворяющие (122.2), существуют при $n=3$ в любом пространстве, а так как они обязательно имеют вид (122.7), то остается проверить, удовлетворится ли (122.3) при подстановке S_{jk} из (122.7). Таким образом, из двух условий остается лишь (122.3), так как (122.2) удовлетворяется тождественно.

2. $n>3$. Здесь, наоборот, является достаточным уже одно условие (122.2). Что же касается (122. 3), то оно является следствием (122.2), так что его не приходится оговаривать особо.

Кратко наметим доказательство. Возьмем тождество Бианки (108.6), причем оба индекса, не участвующие в циклировании, поднимем наверх:

$$\nabla_m R_{ij\cdot\cdot}^{\cdot\cdot kl} + \nabla_i R_{jm\cdot\cdot}^{\cdot\cdot kl} + \nabla_j R_{mi\cdot\cdot}^{\cdot\cdot kl} = 0.$$

Как легко получить из (122.2), $R_{ij\cdot\cdot}^{\cdot\cdot kl} = \delta_{[i}^{k} S_{j]}^{l} - \delta_{[i}^{l} S_{j]}^{k}$ (альтернация без деления на 2), а следовательно, тождество Бианки примет вид

$$\nabla_m S_{[i}^{[k} \delta_{j]}^{l]} + \nabla_i S_{[j}^{[k} \delta_{m]}^{l]} + \nabla_j S_{[m}^{[k} \delta_{i]}^{l]} = 0.$$

Положим здесь $l = i$, а в остальном индексы пусть будут различны между собой*). По свойствам δ_q^p получаем $\nabla_j S_m^k - \nabla_m S_j^k = 0$ при k, m, j, различных между собой. Положим теперь $l = i$, $k = j$; в остальном индексы различны. Получаем (без суммирования!)

$$-\nabla_{[m} S_{j]}^{j} - \nabla_{[m} S_{i]}^{i} = 0$$

при любых i, j, m, различных между собой. При фиксированном m даем i и j значения последовательно p, q; q, r; r, p; из полученных трех уравнений с тремя неизвестными вытекает, что каждое слагаемое есть нуль:

$$\nabla_{[m} S_{i]}^{i} = 0.$$

Итак, всегда $\nabla_{[m} S_{j]}^{k} = 0$, т. е. (122.3) доказано.

Нашим результатам можно придать следующую форму. В произвольном римановом пространстве построим тензор конформной кривизны $C_{ij,kl}$, определяемый следующим образом:

$$C_{ij,kl} = R_{ij,kl} + \frac{1}{n-2}\left(R_{ik} g_{jl} + R_{jl} g_{ik} - R_{il} g_{jk} - R_{jk} g_{il}\right) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{jk} g_{il} - g_{jl} g_{ik}\right). \qquad (122.8)$$

Легко проверить, что если в (122.2) перенести все члены в левую часть, причем подставить вместо S_{jk} его значение из (122.7), то в левой части мы получим как раз тензор $C_{ij,kl}$.

Отсюда следует, что (122.2) можно записать в виде

$$C_{ij,kl} = 0.$$

Итак, *тензор конформной кривизны* $C_{ij,kl}$ существует в любом римановом пространстве, причем его обращение в нуль в данном пространстве есть необходимый и достаточный признак того, что

*) Здесь мы пользуемся условием $n > 3$, т. е. тем, что всегда можно взять четыре различных индекса.

данное пространство (локально) конформно евклидово, если только $n > 3$. В случае же $n = 3$ условие (122.2) удовлетворяется всегда, и, следовательно, $C_{ij,kl}$ всегда равен нулю.

Тензор $C_{ij,kl}$, как легко проверить, обладает всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны.

При произвольном конформном преобразовании произвольной римановой метрики согласно (121.4) тензор $C_{ij,kl}$ испытывает преобразование

$$\overline{C}_{ij,kl} = e^{2\sigma} C_{ij,kl}, \qquad (122.9)$$

что проверяется на основе (121.17). Отсюда, используя (121.13), получаем, что *тензор* $C_{ij,k}{}^{p}$ $(= C_{ij,kl}g^{lp})$ *инвариантен при конформном преобразовании римановой метрики.*

ГЛАВА X

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 123. Пространство событий в общей теории относительности

Мы уже упоминали о том, что физическое содержание общей теории относительности сводится к объяснению одного лишь явления — явления всемирного тяготения. Несмотря на это, общая теория относительности требует по сравнению со специальной весьма широкого обобщения математического аппарата, а именно, перехода от четырехмерного *псевдоевклидова* пространства событий к четырехмерному же *псевдориманову* пространству. В пространстве событий специальной теории относительности в ортонормированной координатной системе x^0, x^1, x^2, x^3 скалярный квадрат вектора выражался формулой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}.$$

Рассматривая это псевдоевклидово пространство как частный случай риманова, мы можем записать его метрическую квадратичную форму в виде

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}. \qquad (123.1)$$

При этом x^0, x^1, x^2, x^3 имеют физический смысл ct, x, y, z в некоторой инерциальной системе отсчета. Ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в этой главе мы будем называть *галилеевыми.*

Первая гипотеза, положенная в основу общей теории относительности, заключается в том, что описанное положение вещей имеет место лишь в некотором приближении. В действительности же *метрика в пространстве событий является не псевдоевклидовой, а псевдоримановой*, хотя и весьма мало отличающейся от псевдоевклидовой. В связи с этим в пространстве событий *не существует галилеевых координат, в которых метрическая квадратичная форма принимала бы вид* (123.1), но зато существуют координаты, близкие по своим свойствам к галилеевым.

В этих координатах метрическая квадратичная форма имеет запись, близкую к (123.1):

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \qquad (123.2)$$

Здесь $\gamma_{ij} dx^i dx^j$ — некоторая добавочная квадратичная форма; ее коэффициенты представляют собой функции от x^0, x^1, x^2, x^3:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \qquad (123.3)$$

абсолютные значения которых весьма малы по сравнению с единицей: $|\gamma_{ij}| \ll 1$.

Так как $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, где g_{ij} — координаты метрического тензора, то, сравнивая с (123.2), получаем:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \gamma_{ij}, \qquad (123.4)$$

где

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = 0 \ (i \neq j), \ \overset{\circ}{g}_{00} = -1, \ \overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} = 1. \qquad (123.5)$$

(Греческие индексы здесь и в дальнейшем пробегают значения 1, 2, 3, а латинские 0, 1, 2, 3.)

Координаты x^i, близкие к галилеевым, не отличаются такой же определенностью выбора, как галилеевы координаты. Действительно, галилеевы (т. е. ортонормированные) координаты в псевдоевклидовом пространстве специальной теории относительности выбираются с точностью до линейного, а именно, псевдоортогонального преобразования, отвечающего переходу от одного ортонормированного репера к другому. Возможность такого преобразования остается, очевидно, и для наших координат x^i, близких к галилеевым (при условии, что коэффициенты преобразования не слишком велики), но, кроме того, мы можем делать над x^i и любые (нелинейные) малые преобразования:

$$x^{i'} = x^i + \xi^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \qquad (123.6)$$

Под малостью этого преобразования мы подразумеваем, что

$$\left|\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right| \ll 1, \qquad (123.7)$$

т. е. абсолютные значения $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$ весьма малы по сравнению с единицей. На значения самих $\xi^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ мы ограничений не накладываем. Для нас существенно лишь, чтобы они *медленно менялись* при изменении x^i, если же при этом они сами по себе имеют большие значения, то это можно отнести за счет тривиального преобразования — добавления констант к координатам x^i:

$$x^{i'} = x^i + c^i.$$

При условии (123.7) координаты x^i, близкие к галилеевым, сохраняют это свойство и после преобразования. Действительно, запишем преобразование, обратное (123.6):

$$x^i = x^{i'} + \xi^{i'}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \tag{123.8}$$

при условии

$$\left|\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{j'}}\right| \ll 1. \tag{123.9}$$

В таком случае

$$dx^i = dx^{i'} + \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{j'}} dx^{j'}.$$

Вставляя эти выражения в (123.2), мы получаем:

$$ds^2 = -(dx^{0'})^2 + (dx^{1'})^2 + (dx^{2'})^2 + (dx^{3'})^2 + \gamma_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'},$$

где в квадратичной форме $\gamma_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'}$ объединены все оставшиеся члены. Коэффициенты при всех этих членах будут весьма малы сравнительно с единицей, так как они обязательно будут содержать множителем или $\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{j'}}$ или γ_{ij}, или то и другое одновременно (переход от γ_{ij} к $\gamma_{i'j'}$ не носит тензорного характера). Следовательно, мы получаем снова

$$|\gamma_{i'j'}| \ll 1.$$

Итак, координаты x^i, близкие к галилеевым, сохраняют это свойство не только при псевдоортогональных преобразованиях (таких же, как в специальной теории относительности), но и при любых малых преобразованиях (123.6). Это создает гораздо большую неопределенность в их выборе.

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать пространство событий в координатах x^i, близких к галилеевым, не оговаривая этого каждый раз особо.

Пространственно-временная геометрия в наших координатах по сравнению с пространственно-временной геометрией в галилеевых координатах специальной теории относительности будет выглядеть искаженной. Это искажение частью обусловливается тем, что сама метрика у нас теперь не псевдоевклидова, а псевдориманова, частью выбором координат x^i. В общем случае нет возможности каким-либо строго определенным образом отделить одну причину от другой. В самом деле, наши координаты x^i (близкие к галилеевым) можно подвергать, в частности, малым преобразованиям (123.6), и среди различных таких координатных систем нет оснований одну предпочесть другой. Между тем в каждой из них искажение пространственно-временной геометрии выражается по-своему.

Однако это искажение во всяком случае настолько мало (вследствие малости γ_{ij}), что непосредственными пространственно-временными измерениями установлено быть не может. Забегая вперед, скажем, что оно физически проявится в виде *поля тяготения*, наблюдаемого в данной системе отсчета x^i. В этом и будет заключаться объяснение явлений тяготения, даваемое общей теорией относительности.

§ 124. Локально галилеевы координаты

Хотя мы и не можем теперь подобрать координат x^i, которые были бы галилеевыми во всем пространстве событий, но можем сделать это для бесконечно малой окрестности любой точки M этого пространства. Для этого мы перейдем в систему координат x^i, геодезическую в данной точке M, т. е. такую, что

$$|\Gamma^k_{ij}|_M = 0. \tag{124.1}$$

В § 91 было показано, что это можно сделать в любом пространстве аффинной связности без кручения L^0_n, а значит, в частности, и в любом римановом пространстве V_n. Кроме того, будем считать для простоты, что точка M служит началом координат, $x^i_M = 0$. Чтобы этого добиться, достаточно сделать тривиальное преобразование координат x^i, вычитая из них начальные значения x^i_M. Далее, мы будем предполагать, что метрический тензор g_{ij} имеет в точке M «галилеев» вид (123.5):

$$[g_{ij}]_M = \overset{\circ}{g}_{ij}. \tag{124.2}$$

Этого нетрудно добиться линейным преобразованием геодезических координат

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i,$$

где константы $A^{i'}_i$ подобраны так, чтобы квадратичная форма $[g_{ij}]_M\, dx^i dx^j$ была приведена к виду $\overset{\circ}{g}_{ij} dx^i dx^j$, т. е. к каноническому виду $-dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}$. Линейное преобразование не меняет геодезического характера координат (§ 91).

Координаты x^i со свойствами (124.1), (124.2) мы будем называть *локально галилеевыми* в точке M. Значение этих координат заключается в том, что в бесконечно малой окрестности точки M эти координаты приближаются по своим свойствам к галилеевым. В самом деле, в силу (124.1) Γ^k_{ij} остаются в пределах этой окрестности если и не равными нулю, то во всяком случае величинами бесконечно малыми.

Далее, согласно (94.5)

$$[\Gamma_{l,ij}]_M = [g_{kl}\Gamma^k_{ij}]_M = 0,$$

а согласно (94.7)

$$\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\right]_M = [\Gamma_{j,\,pi}]_M + [\Gamma_{i,\,pj}]_M = 0. \qquad (124.3)$$

Это показывает, что значения $[g_{ij}]_M = \overset{\circ}{g}_{ij}$ являются стационарными в точке M, т. е. при смещении в бесконечно близкую точку M' приращения $g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}$ будут разлагаться в ряд Тейлора по степеням x^i, начиная со второй степени (члены же первой степени пропадут в силу (124.3)).

Пренебрегая бесконечно малыми 2-го порядка, можно, следовательно, считать, что g_{ij} в бесконечно малой окрестности точки M сохраняют постоянные значения $\overset{\circ}{g}_{ij}$, т. е. именно те, которые они должны были бы иметь в галилеевых координатах.

Таким образом, в бесконечно малой окрестности точки мы в известном смысле получаем возможность вернуться к галилеевым координатам — их роль будут играть локально галилеевы координаты. При этом мы позволим себе рассматривать локально галилеевы координаты не только в бесконечно малой, но и в конечной окрестности точки M. Нужно только брать эту окрестность достаточно малой, чтобы практически — с точки зрения физических приложений — наши локально галилеевы координаты оставались неотличимыми от галилеевых, в частности, *чтобы Γ^k_{ij} оставались в них практически равными нулю.*

В пределах этой окрестности мы возвращаемся (практически) к тому положению, которое существовало в специальной теории относительности. В связи с этим мы придаем локально галилеевым координатам x^0, x^1, x^2, x^3 и прежнее их физическое истолкование как величин ct, x, y, z в некоторой инерциальной системе отсчета. Существенная разница с прежним будет, однако, в том, что это истолкование применимо лишь в некоторой ограниченной пространственно-временной области (и не является совершенно точным, а лишь практически удовлетворительным). Поскольку инерциальные системы отсчета строятся теперь лишь для отдельных малых кусков пространства событий, мы будем называть эти системы *локально инерциальными.*

Таким образом, хотя построение инерциальной системы отсчета (т. е. галилеевых координат) и невозможно для всего пространства событий в целом, но практически возможно для любого отдельного его куска, не слишком большого по размерам. Локально инерциальным системам мы будем приписывать (в пределах области их действия) все те свойства, которыми обладали инерциальные системы в специальной теории относительности. В частности, при условии, что пространственные координаты x, y, z и время t измеряются во всех локально инерциальных системах при помощи одних и тех же единиц измерения, скорость света c будет одинакова во всех этих системах. При переходе от одной локальной инерциальной системы к другой (с общей областью действия) формулы Лоренца применимы так же, как и в специальной теории относительности, и имеют то же физическое истолкование. Позже мы выясним полностью смысл локально инерциальных систем с физической точки зрения. Пока для ориентации в этом вопросе укажем только, что можно представлять себе локально инерциальную систему как свободно летящую в поле тяготения, существующем в данном месте и в данное время. Свободный полет мы понимаем в том смысле, что на систему и на ее отдельные части не действует никаких сил, кроме сил тяготения. При этом в начальный момент системе может быть сообщена какая угодно скорость поступательного движения (заметим, что при наших условиях система не может вращаться: иначе на ее части действовали бы центростремительные силы, препятствующие им «разлететься»). Тогда с точки зрения этой системы, *если она достаточно мала по размерам,* поле тяготения исчезает. Этим обстоятельством и характеризуется локально инерциальная система.

Так, например, с точки зрения свободно летящего космического корабля поле тяготения отсутствует (явление невесомости). Действительно, любой предмет, помещенный в воздухе внутри корабля, будет лететь вместе с ним с одинаковым ускорением, а потому относительно корабля будет оставаться неподвижным. Если сообщить этому предмету толчок, то его движение относительно корабля будет равномерным и прямолинейным. Мы имеем здесь характерный пример локально инерциальной системы. На этом же примере хорошо виден ее именно локальный характер. Действительно, если в летящем космическом корабле удается устранить поле тяготения, то существенную роль играют здесь малые размеры корабля сравнительно, например, с земным шаром. Если бы мы захотели подобрать локально инерциальную систему, охватывающую весь земной шар, то это нам не удалось бы: поле земного тяготения, силы которого направлены в основном радиально к центру земли, нельзя было бы устранить никаким выбором системы отсчета.

Заметим, что хотя в § 123 мы тоже рассматривали координаты x^i, близкие к галилеевым, тем не менее между ними и локально галилеевыми координатами есть принципиальная разница. Эта разница заключается в том, что в случае локально галилеевых координат их отличием от галилеевых практически можно полностью пренебречь; в случае же § 123 этим отличием пренебречь нельзя: хотя оно и мало (в смысле непосредственных пространственно-временных измерений), но не настолько, чтобы не выражаться косвенно в виде весьма заметных физических явлений — явлений тяготения. Разумеется, этот «более удачный» выбор локально галилеевых координат достигается за счет малой области их применения; между тем в § 123 мы рассматривали координаты x^i, пригодные в больших областях пространства событий.

§ 125. Тензор энергии-импульса в общей теории относительности

Распределение и движение энергии и импульса в пространстве описываются в общей теории относительности так же, как и в специальной, симметрическим тензором энергии-импульса:

$$T^{ij} = T^{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{125.1}$$

Разница лишь в том, что пространство событий, в котором задается это тензорное поле, уже не псевдоевклидово, а псевдориманово. Мы имели ранее (§ 71) физическое истолкование тензора энергии-импульса в галилеевых координатах: T^{00} — плотность энергии в соответствующей инерциальной системе и т. д.

Такое же истолкование мы приписываем тензору энергии-импульса теперь в локально галилеевых координатах: T^{00} — *плотность энергии* в соответствующей локально инерциальной системе и т. д. Конечно, и в координатах x^i, близких к галилеевым (§ 123), тензор T^{ij} имеет с известным приближением, практически удовлетворительным, то же физическое истолкование. При этом мы считаем, что тензор энергии-импульса T^{ij} учитывает суммарное распределение и движение всех видов энергии и импульса *за исключением энергии и импульса гравитационного происхождения*. Мы выделяем, таким образом, явления тяготения в особый разряд; это связано с тем, что физическое содержание общей теории относительности как раз и сводится к объяснению этих явлений.

Как и в специальной теории относительности, мы требуем, чтобы тензор T^{ij} был подчинен закону сохранения энергии-импульса. Этот закон в *специальной теории относительности* в галилеевых координатах имел вид (72.13):

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, 3). \tag{125.2}$$

Если бы мы захотели записать его в виде, пригодном для любой координатной системы, то нам пришлось бы заменить частные производные абсолютными:

$$\nabla_i T^{ij} = 0. \tag{125.3}$$

Действительно, в такой записи мы получаем инвариантное соотношение, так как оно выражает обращение в нуль некоторого тензора.

В общей теории относительности мы не имеем в своем распоряжении галилеевых координат и *накладываем поэтому на тензор* T^{ij}

соответствующее условие сразу в инвариантном виде (125.3). При этом в локально галилеевых координатах мы возвращаемся к записи (125.2) ввиду того, что Γ^k_{ij} будут в этом случае практически равны нулю. Отсюда следует, что в локально галилеевых координатах можно повторить все выкладки § 72 и обнаружить снова, что наложенное на T^{ij} условие действительно выражает закон сохранения энергии-импульса.

В произвольной координатной системе, где величинами Γ^k_{ij} пренебрегать нельзя, условие (125.3) нельзя переписать в виде (125.2) и истолковать по образцу § 72 как закон сохранения энергии-импульса. Это объясняется тем, что *энергия и импульс гравитационного происхождения не учитываются тензором* T^{ij}. Между тем закон сохранения энергии-импульса будет справедлив, разумеется, лишь при учете энергии и импульса любого происхождения. Поэтому для записи закона сохранения приходится присоединять к тензору T^{ij} еще особый дифференциально-геометрический объект t^{ij} (не тензор!), описывающий распределение и перемещение энергии и импульса гравитационного происхождения. Здесь мы сталкиваемся со слабым пунктом теории, так как ввести t^{ij} удается лишь весьма формальным и искусственным путем. В локально галилеевых координатах это усложнение излишне, потому что гравитационные явления практически отсутствуют, и тензор T^{ij} полностью описывает поведение энергии-импульса (а t^{ij} обращается практически в нуль).

Вторая основная гипотеза общей теории относительности состоит в следующем. В отличие от специальной теории относительности, где тензор энергии-импульса T^{ij} *накладывается на пространство событий в качестве дополнительной конструкции*, мы принимаем теперь, что тензор энергии-импульса вытекает из самой псевдоримановой геометрии этого пространства, а именно, определяется формулой

$$-\varkappa T_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}. \tag{125.4}$$

Здесь T_{ij} — тензор энергии-импульса с опущенными (при помощи метрического тензора g_{ij}) индексами; R_{ij} — тензор Риччи и R — скалярная кривизна в псевдоримановом пространстве событий:

$$R_{jk} = R_{ij,\,kl}\, g^{il} = R^{i}_{j,\,ki}, \quad R_{jk} = R_{kj}, \quad R = R_{jk} g^{jk}. \tag{125.5}$$

Наконец, $\varkappa$ — некоторая положительная константа, значение которой будет найдено позже.

Заметим, что, указывая основные гипотезы общей теории относительности, мы обращаем внимание не на те ее стороны, которые повторяют специальную теорию, а на те, которыми она существенно отличается.

Общий смысл гипотезы (125.4) заключается в том, что геометрия пространства событий тесно связана с распределением и перемещением энергии-импульса. Формально при этом тензор энергии-импульса T_{ij} определяется через геометрию пространства событий, именно через его тензор кривизны и метрический тензор. Однако с физической точки зрения более естественно трактовать эту связь в обратном порядке: *распределение и движение масс в физическом пространстве отражаются определенным образом на псевдоримановой геометрии пространства событий.* В грубых чертах уже сейчас видно, что чем больше будет концентрация масс в данном месте и в данное время, тем интенсивнее будет отклоняться псевдориманова геометрия от псевдоевклидовой на соответствующем участке пространства событий: действительно, с увеличением координат тензора T_{ij} должны увеличиваться и координаты тензора Риччи R_{ij}, а следовательно, в каком-то смысле и координаты тензора кривизны $R_{ij,kl}$.

Заметим, что вместо распределения и движения энергии-импульса мы стали говорить о распределении и движении масс. Это законно, если принять во внимание, что всякому запасу энергии E отвечает масса $\frac{E}{c^2}$ и обратно; что же касается импульса, то его распределение описывается теми же координатами тензора T^{ij}, что и перемещение масс; перемещение же импульса практически не будет играть роли в создании поля тяготения (а как раз в этом с физической точки зрения выразится влияние тензора T_{ij} на пространственно-временную геометрию).

Однако все еще остается неясным, из каких соображений тензор T_{ij} связан с метрикой пространства событий именно формулой (125.4). Здесь можно сделать следующие пояснения.

Мы хотим установить зависимость между T_{ij} и метрикой пространства событий, приравняв T_{ij} некоторому симметрическому тензору, связанному с этой метрикой. Конечно, этот тензор вместе с T_{ij} должен удовлетворять закону сохранения (125.3). Простейшим из таких тензоров будет, как мы сейчас увидим, $R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}$, стоящий в правой части (125.4). К этому тензору можно присоединить постоянный множитель, не нарушая его свойств; это мы и делаем (множитель $-1/\varkappa$). Заметим, что сам метрический тензор g_{ij} также обладает требуемыми свойствами и еще более прост, но явно непригоден для наших целей.

Разумеется, приведенные соображения никак нельзя считать доказательством того, что тензор энергии-импульса действительно имеет вид (125.4). Настоящим оправданием этой гипотезы является вытекающая из нее теория тяготения, как мы увидим ниже, хорошо согласующаяся с опытом.

Проверим теперь, что симметрический тензор $R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}$ действительно удовлетворяет закону сохранения. Для этой цели используем тождество Бианки—Падова (108.6), имеющее место в любом L_n^0 и, в частности, в любом римановом пространстве:

$$\nabla_m R_{kl,\,i.}^{\cdot\cdot\,\,\,q}+\nabla_k R_{lm,\,i.}^{\cdot\cdot\,\,\,q}+\nabla_l R_{mk,\,i.}^{\cdot\cdot\,\,\,q}=0.$$

Произведем здесь свертывание по индексам k, q; получим:

$$\nabla_m R_{li}+\nabla_k R_{lm,\,i.}^{\cdot\cdot\,\,\,k}-\nabla_l R_{mi}=0.$$

Прежде чем производить свертывание, мы в последнем члене переставили индексы m, k, компенсировав это изменением знака. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\nabla_m R_{li}+g^{kj}\nabla_k R_{lm,\,ij}-\nabla_l R_{mi}=0.$$

Напомним, что под знак абсолютного дифференцирования можно вносить (и выносить из-под него) метрический тензор, стоящий множителем; в частности, поднятие и опускание индексов можно производить под знаком абсолютного дифференцирования. В среднем члене переставим i и j, компенсировав это изменением знака, и свертываем наше равенство с g^{li}. Получим:

$$\nabla_m R-g^{kj}\nabla_k R_{mj}-g^{li}\nabla_l R_{mi}=0.$$

Замечая, что второй и третий члены отличаются лишь обозначениями индексов суммирования, и внося метрический тензор под знак абсолютной производной, получаем окончательно:

$$\nabla_m R=2\nabla_k R_{m.}^{\cdot k}. \tag{125.6}$$

Это тождество, имеющее место в любом римановом пространстве, как раз и выражает, что тензор

$$\overset{*}{R}_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}$$

удовлетворяет закону сохранения. В самом деле, поднимая индекс j, получаем: $\overset{*}{R}_{i.}^{\cdot j}=R_{i.}^{\cdot j}-\frac{1}{2}R\delta_i^j$.

Вычисляем теперь:

$$\nabla_j\overset{*}{R}_{i.}^{\cdot j}=\nabla_j R_{i.}^{\cdot j}-\frac{1}{2}\nabla_j R\delta_i^j=\nabla_j R_{i.}^{\cdot j}-\frac{1}{2}\nabla_i R=0.$$

Равенство нулю имеет место в силу (125.6). Поднимая индекс i, получим окончательно:

$$\nabla_j\overset{*}{R}^{ij}=0,$$

а это и есть закон сохранения (в силу симметрии тензоров $\overset{*}{R}_{ij}$ и $\overset{*}{R}^{ij}$ безразлично, какой из двух верхних индексов участвует в свертывании).

§ 126. Движение частицы в поле тяготения

Мы уже несколько раз упоминали о том, что уклонение метрики пространства событий от евклидовой и, следовательно, невозможность подобрать в этом пространстве событий галилеевы координаты физически проявляются в первую очередь в виде поля тяготения. Сейчас мы выясним механизм появления этого поля.

Рассмотрим поток частиц (обладающих каждая определенной массой покоя), перенося в общую теорию относительности построение § 68. В идеализированном виде мы рассматриваем этот поток частиц как поток непрерывно распределенных масс. Каждая частица, меняя с течением времени свое положение, описывает в пространстве событий четырехмерную траекторию

$$x^i = x^i(\sigma) \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{126.1}$$

которая, как и в специальной теории относительности, будет кривой чисто мнимой длины. Последнее видно уже из того, что отдельные (малые) куски траектории можно рассматривать в локально галилеевой системе координат, в которой практически имеют место все результаты специальной теории относительности, в частности, четырехмерные траектории частиц — кривые чисто мнимой длины.

Обозначая длину дуги вдоль четырехмерной траектории (отсчитываемую от какой-нибудь начальной точки) через

$$s = \sigma i,$$

мы принимаем за параметр вещественный коэффициент σ. Тогда касательный к траектории вектор

$$\tau^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$$

будет мнимоединичным:

$$g_{ij}\tau^i\tau^j = \frac{g_{ij}\,dx^i\,dx^j}{d\sigma^2} = \frac{ds^2}{d\sigma^2} = -1. \tag{126.2}$$

Через каждую точку M пространства событий проходит определенная четырехмерная траектория, а потому вектор τ^i определен в каждой точке M:

$$\tau^i = \tau^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{126.3}$$

С каждой точкой M четырехмерной траектории частицы можно связать локально галилееву координатную систему, относительно которой частица будет в данный момент покоящейся. В самом деле, выбрав сначала произвольную локально галилееву координатную систему x^{i}

в окрестности точки M, мы подвергнем ее (совершенно так же, как в специальной теории относительности) псевдоортогональному преобразованию (62.10) с таким расчетом, чтобы координатная линия x^0 в точке M имела вектор τ^i касательным вектором, т. е. чтобы

$$\tau_M^0 = 1, \quad \tau_M^1 = \tau_M^2 = \tau_M^3 = 0.$$

Обозначим через μ_0 плотность *масс покоя* относительно нашей локально галилеевой системы отсчета, «*увлекаемой потоком*». В каждой точке пространства событий μ_0 имеет, вообще говоря, свое значение, так что

$$\mu_0 = \mu_0(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{126.4}$$

Чтобы не усложнять дела, мы предположим, что в процессе движения частицы не испытывают никаких превращений, масса покоя каждой из них остается без изменения, так что суммарная масса покоя удовлетворяет закону сохранения (заметим, что в общем случае этого утверждать нельзя; например, при так называемой аннигиляции электрона и позитрона масса покоя возникающих при этом фотонов равна нулю). Условие сохранения массы покоя имеет вид

$$\nabla_i(\mu_0\tau^i) = 0, \tag{126.5}$$

т. е. четырехмерная дивергенция векторного поля

$$s^i = \mu_0(x^0, x^1, x^2, x^3)\,\tau^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

равна нулю. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть условие (126.5) в локально галилеевой координатной системе, т. е. с точки зрения *некоторой локально инерциальной системы отсчета* *). Так как в этом случае Γ_{ij}^k практически равны нулю, то условие (126.5) принимает вид

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = \frac{\partial(\mu_0\tau^i)}{\partial x^i} = 0. \tag{126.6}$$

Вектор s^i составлен по образцу (68.12), где нужно лишь заменить *плотность заряда плотностью массы покоя*. Масса покоя имеет с зарядом то общее свойство, что она инвариантна относительно выбора инерциальной (в нашем случае локально инерциальной) системы отсчета. Поэтому в нашем случае мы совершенно таким же путем, как и в § 68, приходим к формулам (68.13):

$$s^0 = \tilde{\mu}_0, \quad s^1 = \tilde{\mu}_0\frac{u_x}{c}, \quad s^2 = \tilde{\mu}_0\frac{u_y}{c}, \quad s^3 = \tilde{\mu}_0\frac{u_z}{c}, \tag{126.7}$$

*) Уже не связанной каким-либо образом с потоком.

где $\tilde{\mu}_0$ — плотность масс покоя и u_x, u_y, u_z — составляющие скорости *с точки зрения нашей локально инерциальной системы отсчета* (*плотность* масс покоя уже *не инвариантна*). При этом ct, x, y, $z = x^0$, x^1, x^2, x^3. Теперь (126.6) принимает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\mu}_0}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_x)}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_y)}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_z)}{\partial z}=0. \tag{126.8}$$

Рассмотрим какую-нибудь область ω, ограниченную замкнутой поверхностью П, которая покоится с точки зрения нашей локально инерциальной системы. Умножим равенство (126.8) почленно на элемент объема $d\omega$ и проинтегрируем по области ω. Получим $\left(\text{отбрасывая множитель } \frac{1}{c}\right)$:

$$\iiint\limits_{\omega}\frac{\partial\tilde{\mu}_0}{\partial t}\,d\omega+\iiint\limits_{\omega}\left\{\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_z)}{\partial z}\right\}d\omega=0.$$

Вынося в первом интеграле дифференцирование по t за знак интеграла и преобразуя второй интеграл к поверхностному интегралу по формуле Остроградского, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\omega}\tilde{\mu}_0\,d\omega=-\iint\limits_{\Pi}\tilde{\mu}_0\,\mathbf{u}\mathbf{n}\,dS. \tag{126.9}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — *вектор скорости потока масс*, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали поверхности П.

Если умножить полученную формулу почленно на dt, то она будет означать, что приращение массы покоя, заключенной в ω, за время dt равно количеству массы покоя, втекшей через границу области dt за то же время (ср. (16.3); знак минус у интеграла в правой части означает, что мы оцениваем именно *втекание* массы покоя). Мы, действительно, получаем условие сохранения массы покоя. Конечно, обратным переходом мы можем от (126.9) вернуться к (126.6) (используя, между прочим, что (126.9) имеет место для *любой* области ω). Итак, смысл условия (126.5) теперь ясен.

Допустим, что поток частиц движется под влиянием *только* лишь сил тяготения (в частности, по инерции), так что в области, занятой потоком, отсутствуют какие-либо иные физические факторы, способные влиять на движение частиц. Тогда в этой области тензор энергии-импульса будет выражаться формулой (71.3):

$$T^{ij}=\mu_0 c^2\tau^i\tau^j. \tag{126.10}$$

Действительно, эта формула выражает тензор энергии-импульса, отвечающий потоку масс; но ввиду того что поле тяготения не порождает тензора энергии-импульса, а другие физические факторы, как мы предполагаем, отсутствуют, то мы получаем здесь полный тензор энергии-импульса (в области, занятой потоком).

Формулу (71.3) мы, строго говоря, можем применять лишь в локально галилеевых координатах, так как в них мы возвращаемся практически к специальной теории относительности. Но в силу тензорного характера этой формулы она будет иметь тот же вид и в любой криволинейной координатной системе. В этом смысле мы ее и будем понимать.

Тензор энергии-импульса должен удовлетворять закону сохранения энергии-импульса:

$$\nabla_i T^{ij} = 0,$$

который в силу (126.10) можно записать в виде

$$c^2 \nabla_i (\mu_0 \tau^i) \tau^j + c^2 \mu_0 \tau^i \nabla_i \tau^j = 0.$$

Вследствие (126.5) первый член исчезает, и мы получаем окончательно:

$$\tau^i \nabla_i \tau^j = 0.$$

Так как $\tau^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$, то отсюда следует:

$$dx^i \nabla_i \tau^j = 0, \text{ т. е. } D\tau^j = 0, \tag{126.11}$$

где абсолютный дифференциал берется вдоль четырехмерной траектории частицы $\left(\text{как и производные } \frac{dx^i}{d\sigma}\right)$. Мы получили, следовательно, что касательный к четырехмерной траектории вектор τ^j переносится вдоль нее параллельно; эта траектория есть, таким образом, геодезическая. *Итак, четырехмерные траектории потока частиц, движущихся под действием только лишь поля тяготения (в частности, по инерции), суть геодезические линии чисто мнимой длины.*

Отдельное физическое тело, движущееся при тех же условиях, мы тоже рассматриваем как поток составляющих его частиц и применяем к нему полученный результат. Практически здесь наиболее важно, что, пренебрегая размерами этого тела и представляя его себе как *точку, можно считать, что закон его движения выражается в пространстве событий геодезической четырехмерной траекторией чисто мнимой длины.*

Аналогичным образом мы принимаем, что распространение световых лучей (в пустоте) происходит с точки зрения пространства событий также *по геодезическим четырехмерным траекториям, но при этом, в отличие от предыдущего, изотропным.*

В самом деле, с точки зрения локально галилеевых координат можно считать Γ_{ij}^k равными нулю, и мы возвращаемся практически к псевдоевклидову пространству специальной теории относительности. Тогда в пределах нашей локально галилеевой координатной системы геодезические принимают вид прямых, в частности, изотропные геодезические — вид изотропных прямых, которые и служат четырехмерными траекториями световых лучей, а это вполне согласуется с положением вещей в специальной теории относительности.

Более глубоким обоснованием нашего утверждения мы здесь заниматься не можем.

§ 127. Основная идея общей теории относительности

Если мы находимся в локально галилеевой координатной системе, то геодезические линии практически принимают вид прямых, а следовательно, движение частиц под действием поля тяготения совершается с точки зрения этой координатной системы равномерно и прямолинейно; другими словами, движение в поле тяготения сводится к движению по инерции, так что поле тяготения по существу отсутствует. Однако если мы интересуемся такой областью пространства событий, в которой нельзя ввести локально галилеевых координат (или, хотя и можно, но нецелесообразно), то мы прибегаем к координатам x^i, лишь близким к галилеевым (§ 123). В них уже даже с практической точки зрения нельзя считать геодезические линии «прямыми» (т. е. задавать x^1, x^2, x^3 линейными функциями x^0), так как в дифференциальных уравнениях геодезических

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2}+\Gamma_{jk}^i\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma}=0 \qquad (127.1)$$

уже нельзя считать $\Gamma_{jk}^i=0$. Криволинейный характер геодезических означает нелинейную зависимость x^1, x^2, x^3 от x^0, т. е. неравномерный и криволинейный характер движения частиц под влиянием поля тяготения. Таким образом, поле тяготения в этом случае фактически имеет место (не равно нулю).

Итак, поле тяготения, наблюдаемое относительно данной (близкой к галилеевой) координатной системы x^i, характеризуется поведением геодезических линий в координатах x^i. Говоря грубо, чем более геодезические линии отличаются при этом от «прямых», тем сильнее будет поле тяготения, наблюдаемое в данной системе отсчета. В разных координатных системах x^i уравнения геодезических будут иметь различный вид, а потому и поле тяготения будет выглядеть по-разному. Так, в неподвижно висящем лифте наблюдается такое же поле тяготения, как и на поверхности земли; в ускоренно движущемся лифте поле тяготения будет иным; с точки зрения свободно падающего лифта оно совершенно исчезает. Однако было бы ошибочным утверждать, что поле тяготения целиком относительно и зависит лишь от выбора системы отсчета. Последнее верно лишь в искусственно ограниченных малых участках пространства событий, в которых можно перейти в локально галилеевы координаты и тем самым (практически) полностью устранить поле тяготения. В общем же случае нельзя уничтожить поле тяготения за счет подходящего выбора координатной системы.

Так, если мы рассматриваем поле тяготения Земли не в пределах малой области (какова, например, внутренность лифта), а в пределах, охватывающих весь земной шар, то никаким преобразованием координат (системы отсчета) нам не удастся его аннулировать. Здесь мы имеем дело с существенным, неустранимым полем тяготения, порожденным массой Земли, хотя в различных координатных системах это поле будет наблюдаться в различных (в известной мере) вариантах.

Ясно, что любая теория тяготения должна прежде всего установить, каким образом распределение масс порождает это реальное поле тяготения. Классическим ответом на этот вопрос является ньютонова теория, которая утверждает (правда, без всякого объяснения), что масса, сосредоточенная в точке, сообщает любой свободной частице ускорение по направлению к себе, пропорциональное величине этой массы и обратно пропорциональное квадрату расстояния. При этом коэффициент пропорциональности k — *гравитационная константа* — во всех случаях одинаков. Релятивистская теория тяготения не допускает столь же элементарной формулировки. Ее сущность состоит в следующем.

С одной стороны, поле тяготения характеризуется, как мы видели, ходом четырехмерных геодезических в пространстве событий, причем геодезические могут быть найдены, конечно, исходя из псевдоримановой метрики этого пространства.

С другой стороны, распределение и движение масс, выражаемые тензором T^{ij}, связаны с нашей псевдоримановой метрикой (согласно второй основной гипотезе) формулой (125.4).

В результате тензор T^{ij}, т. е. распределение и движение масс через посредство псевдоримановой метрики пространства событий влияет на ход геодезических линий, т. е. на поле тяготения.

В этом и заключается основная идея новой теории тяготения. При первом знакомстве она представляется весьма неопределенной и лишенной конкретного содержания. Однако мы вскоре увидим, что на ее основе при вполне естественных дополнительных предположениях можно производить точные численные расчеты.

Весьма важно правильное понимание идейного содержания общей теории относительности. Как уже отмечалось, наиболее существенную роль играет в ней гипотеза (125.4) о связи между тензором энергии-импульса и геометрией псевдориманова пространства событий.

По существу эту гипотезу следует рассматривать (независимо от субъективных намерений ее автора А. Эйнштейна) как попытку конкретной математической разработки материалистического принципа, согласно которому пространство и время суть формы существования материи, а следовательно, должны рассматриваться в связи с ее остальными свойствами (в том числе в связи с распределением и движением энергии-импульса). Конечно, это не значит, что излагаемая здесь теория является последним словом в этом отношении. Скорее, наоборот, ее следует рассматривать именно как одну из попыток, за которыми по мере развития экспериментальных данных последует ряд других. Ясно лишь одно, что в будущем развитии науки пространственно-временная протяженность материи будет рассматриваться в неотрывной связи с ее другими, прежде всего механическими, свойствами.

Как уже упоминалось, физический смысл общей теории относительности сводится именно к созданию новой теории тяготения. Правда, сам автор теории А. Эйнштейн и ряд его последователей придерживаются иной точки зрения. Они считают, что общая теория относительности помимо этого (и в первую очередь) устанавливает принцип равноправия всех систем отсчета, т. е. всех координатных систем x^i в пространстве событий (наподобие того как в специальной теории относительности такое равноправие устанавливается для ортонормированных систем). С этой точкой зрения, однако, трудно согласиться, так как при этом равноправие систем отсчета с точки зрения формально-математического аппарата незаконно истолковывается как их равноправие и по физическому существу дела. Между тем нетрудно разработать математический аппарат, с точки зрения которого будут формально равноправны всевозможные системы отсчета *и в классической теории*; это не может, однако, устранить того факта, что одна из систем отсчета (покоящаяся) будет выделяться своими особыми физическими свойствами.

Аналогично этому и в общей теории относительности вовсе не все системы отсчета равноправны по своим физическим свойствам. Прежде всего выделяются локально галилеевы системы, в которых отсутствует поле тяготения. Но и тогда, когда в данной пространственно-временной области поле тяготения является неустранимым, обычно всегда можно указать системы отсчета, наиболее естественно и закономерно связанные с данным распределением масс и приводящие поле тяготения в основном к его «неустранимому остатку». Напротив, вполне произвольный выбор системы отсчета (например, быстро вращающийся) сказывается в появлении фантастически больших полей тяготения, которые исчезают при переходе к более естественным системам отсчета. Следовательно, утверждение о равноправии всех систем отсчета следует рассматривать как формальное и по существу бессодержательное. В связи с этим приходится практически отличать реальное, неустранимое поле тяготения, вызванное распределением масс, от «фиктивного», вызванного неудачным выбором системы отсчета. Правда, мы в общем случае не умеем провести границу между ними, так как ведут они себя одинаково, но не исключено, что в каком-то смысле и это может быть достигнуто *).

§ 128. Приближенная теория

Как известно, ньютонова теория тяготения с величайшей точностью объясняет движения небесных тел, и огромный опытный материал, накопленный в течение столетий, хорошо укладывается в ее рамки. Поэтому от новой теории тяготения мы должны прежде всего потребовать, чтобы она была не хуже старой, т. е. чтобы она приводила практически к тем же или почти тем же результатам, что и ньютонова теория. Мы увидим в этом параграфе, что дело именно так и обстоит: *в первом приближении новая теория тяготения приводит к ньютоновой теории.* Расхождение же между этими теориями оказывается чрезвычайно незначительным и в большинстве случаев находится за пределами опыта. Существует лишь ограниченное число экспериментов, при которых может быть фактически наблюдено и измерено то ничтожное отклонение от ньютоновой теории, к которому приводит новая теория тяготения. Эти эксперименты говорят в ее пользу.

Мы займемся теперь исследованием хода геодезических, т. е. изучением поля тяготения в некоторой координатной системе x^i, близкой к галилеевой. Метрика пространства событий будет иметь вид (123.2):

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} + \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j. \qquad (128.1)$$

При этом согласно (123.5)

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \gamma_{ij}. \qquad (128.2)$$

Мы будем считать, что величинами γ_{ij}, $\dfrac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}$ *можно пренебрегать сравнительно с единицей; кроме того, мы считаем их малыми одного («первого») порядка, так что произведениями этих величин мы будем пренебрегать по сравнению с самими этими величинами.*

---

*) В качестве попытки в этом направлении см. книгу В. А. Фока, Теория пространства, времени и тяготения, 2-е изд., М., 1961.

Это значит, что мы будем полагать, например,

$$\frac{1}{2}+\gamma_{00}\approx\frac{1}{2},\quad \gamma_{00}+\gamma_{11}\gamma_{22}\approx\gamma_{00}\ \text{и т. п.}$$

Это будет *первое наше упрощающее предположение* *).

Коэффициенты связности Γ^k_{ij} вычисляются по формуле

$$\Gamma^k_{ij}=g^{kl}\Gamma_{l,\,ij},\tag{128.3}$$

где

$$\Gamma_{l,\,ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial \gamma_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^l}\right).\tag{128.4}$$

Ясно, что $\Gamma_{l,\,ij}$ в силу наших предположений будут малыми 1-го порядка. Поэтому в (128.3) можно заменить g^{kl} через $\overset{\circ}{g}{}^{kl}$, откинув добавочные члены, которые в произведении с $\Gamma_{l,\,ij}$ дают малые величины 2-го порядка. Действительно, так как $g_{kl}=\overset{\circ}{g}_{kl}+\gamma_{kl}$, то отсюда легко следует, что g^{kl} отличается от $\overset{\circ}{g}{}^{kl}$ тоже на малые 1-го порядка. Итак, сохраняя в (128.3) лишь малые 1-го порядка, получаем

$$\Gamma^k_{ij}=\overset{\circ}{g}{}^{kl}\Gamma_{l,\,ij}=\pm\Gamma_{k,\,ij}\left(\begin{matrix}k=1,\ 2,\ 3\\ k=0\end{matrix}\right).\tag{128.5}$$

Выпишем дифференциальные уравнения геодезических

$$\frac{d^2x^k}{d\sigma^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}=0.$$

В силу (128.5) их можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x^0}{d\sigma^2}-\Gamma_{0,\,ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}=0,\\ &\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}+\Gamma_{\alpha,\,ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}=0.\end{aligned}\right\}\tag{128.6}$$

Греческие индексы будут пробегать у нас значения 1, 2, 3. При пространственно-временных измерениях с принятой точностью можно считать, что x^0, x^1, x^2, x^3 имеют смысл ct, x, y, z (см. сноску),

---

*) Не следует забывать, что равенства, верные с принятой степенью точности, вообще говоря, *нельзя почленно дифференцировать*; вследствие этого мы не возвращаемся к псевдоевклидову случаю, хотя (128.1) с принятой степенью точности имеет вид

$$ds^2\approx-dx^{0^2}+dx^{1^2}+dx^{2^2}+dx^{3^2}.$$

так что согласно (67. 11)

$$\left.\begin{aligned}
&d\sigma = c\,dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}, \\
&\frac{dx^0}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad \frac{dx^1}{d\sigma}=\frac{1}{c}\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\
&\frac{dx^2}{d\sigma}=\frac{1}{c}\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad \frac{dx^3}{d\sigma}=\frac{1}{c}\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{128.7}$$

Мы будем предполагать, что скорости движения рассматриваемых в поле тяготения свободных частиц малы сравнительно со скоростью света. Более точно, *мы будем пренебрегать сравнительно с единицей квадратами (и произведениями) этих скоростей, отнесенных к скорости света:*

$$\frac{dx}{c\,dt}\frac{dy}{c\,dt}\ll 1, \quad \frac{u^2}{c^2}\ll 1 \quad \text{и т. п.}$$

В этом будет состоять наше второе (и последнее) упрощающее предположение. Теперь формулы (128. 7) принимают вид

$$d\sigma\approx c\,dt, \quad \frac{dx^0}{d\sigma}\approx 1, \quad \frac{dx^1}{d\sigma}\approx\frac{1}{c}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx^2}{d\sigma}\approx\frac{1}{c}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dx^3}{d\sigma}\approx\frac{1}{c}\frac{dz}{dt}. \tag{128.8}$$

Имея в виду перейти в дифференциальных уравнениях (128. 6) от аргумента σ к аргументу x^0, подсчитаем $\frac{d^2x^\alpha}{dx^{0^2}}$ по известной формуле замены аргумента:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{0^2}}=\frac{\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}\frac{dx^0}{d\sigma}-\frac{d^2x^0}{d\sigma^2}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}}{\left(\frac{dx^0}{d\sigma}\right)^3}=\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}-\frac{d^2x^0}{d\sigma^2}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}.$$

С принятой нами степенью точности мы положили $\frac{dx^0}{d\sigma}\approx 1$ согласно (128. 8). Вставляя в полученное выражение вторые производные из (128. 6), мы приходим к формуле

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{0^2}}=-\Gamma_{\alpha,ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}-\Gamma_{0,ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}.$$

Так как произведениями скоростей, отнесенных к скорости света, мы сравнительно с единицей пренебрегаем, то в первом члене правой части исчезают слагаемые с произведениями $\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\left(\approx\frac{1}{c^2}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}\right)$ и сокраняются лишь слагаемые, где $i=j=0$ или $i=0$, $j=\beta$, или $i=\beta$, $j=0$. Во втором же члене мы по тем же причинам сохраняем лишь одно слагаемое, где $i=j=0$. Итак,

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{0^2}}=-\Gamma_{\alpha,00}\frac{dx^0}{d\sigma}\frac{dx^0}{d\sigma}-2\Gamma_{\alpha,\beta 0}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^0}{d\sigma}-\Gamma_{0,00}\frac{dx^0}{d\sigma}\frac{dx^0}{d\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}.$$

Пользуясь (128. 8), (128. 4), получаем окончательно:

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\alpha}\right)-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}+\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{1}{c}\frac{dx^\beta}{dt}-$$
$$-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t}\frac{dx^\alpha}{dt},$$

или

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=-c\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial t}+\frac{c^2}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dx^\beta}{dt}+$$
$$+c\left(\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t}\frac{dx^\alpha}{dt}. \tag{128.9}$$

Таким образом, свободная частица в поле тяготения получает ускорение, проекции которого на координатные оси выражаются согласно (128. 9). Это ускорение зависит, как мы видим, от местоположения частицы и от момента времени (так как γ_{ij} суть функции x^0, x^1, x^2, x^3), а также от ее скорости. Действительно, в правую часть формулы входят $\frac{dx^\beta}{dt}$ — проекции скорости частицы на координатные оси.

Формула (128. 9) в явном виде показывает нам, как поле тяготения, наблюдаемое с точки зрения данной координатной системы x^i, выражается через γ_{ij}, т. е. через отклонение метрического тензора от галилеевой формы $\overset{\circ}{g}_{ij}$.

Запишем теперь в нашей приближенной теории основную гипотезу (125. 4):

$$-\varkappa T_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}. \tag{128.10}$$

Заметим прежде всего, что это соотношение можно переписать в виде

$$R_{ij}=-\varkappa\left(T_{ij}-\frac{1}{2}Tg_{ij}\right), \tag{128.11}$$

где

$$T=g^{ij}T_{ij}. \tag{128.12}$$

В самом деле, свертывая (128.10) с g^{ij}, мы получаем:

$$-\varkappa T = R - \frac{1}{2} R g_{ij} g^{ij} = -R, \tag{128.13}$$

так как в четырехмерном пространстве

$$g_{ij} g^{ij} = \delta_l^l = 4.$$

Вставляя в (128.10) $\varkappa T$ вместо R, мы немедленно получаем (128.11). Столь же легко и обратно из (128.11) получить (128.10).

Теперь подсчитаем R_{ij}. Согласно (110.4) мы получаем (пренебрегая с принятой нами степенью точности произведениями Γ):

$$R_{ij,kl} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 \gamma_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \gamma_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}\right).$$

Далее, свертывая почленно с g^{il}, мы (по тем же соображениям) можем положить $g^{il} \approx \overset{\circ}{g}{}^{il}$, так что

$$R_{jk} \approx R_{ij,kl} \overset{\circ}{g}{}^{il} = \frac{1}{2}\left(\Box \gamma_{jk} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \gamma_j^l}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \gamma_k^l}{\partial x^j \partial x^l}\right), \tag{128.14}$$

где

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}}, \quad \gamma = \gamma_{il} \overset{\circ}{g}{}^{il}, \quad \gamma_j^l = \gamma_{ji} \overset{\circ}{g}{}^{il}. \tag{128.15}$$

Общая схема исследования будет иметь такой вид. *Задаемся тензором T_{ij}, т. е. распределением и движением масс. Тем самым нам будет известна правая часть соотношения* (128.11) (*с принятой нами точностью g_{ij} заменяем через $\overset{\circ}{g}_{ij}$*). *В левую часть вместо R_{ij} вставляем его выражение* (128.14) *и получаем систему* 10 *дифференциальных уравнений 2-го порядка с* 10 *неизвестными функциями* $\gamma_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3)$. *При некоторых дополнительных предположениях эти функции могут быть однозначно определены, а вместе с ними согласно* (128.9) *определится и поле тяготения.* Однако осуществление этой программы в общем виде довольно сложно и требует некоторой специализации координатной системы x^i. Поэтому *мы ограничимся стационарным случаем, т. е. предположим, что в пространстве событий можно выбрать такую координатную систему, с точки зрения которой массы, порождающие поле тяготения, практически находятся в покое. Тензор энергии-импульса имеет тем самым лишь одну координату, отличную от нуля, именно:*

$$T_{00} = \mu c^2, \tag{128.16}$$

где μ — плотность масс*). Плотность же импульса и его потока практически равна нулю, что связано с обращением в нуль остальных координат T_{ij}. Конечно, при этом из закона сохранения энергии-импульса следует, что плотность μ не меняется с течением времени и зависит лишь от точки

$$\mu = \mu(x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{128.17}$$

Естественно считать, что при стационарном распределении масс порождаемое ими поле тяготения также является стационарным. Чтобы обеспечить это, *мы предположим, что стационарной является метрика пространства событий, т. е.* γ_{ij} от времени не зависят:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{128.18}$$

В таком случае в формуле (128.14) оператор $\Box$ можно заменить оператором Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}},$$

так как дифференцирование по x^0 все равно дает нуль.

Далее, пользуясь обращением в нуль всех T_{ij} кроме $T_{00} = \mu c^2$, мы подсчитываем:

$$T = g^{ij}T_{ij} = g^{00}T_{00} = -\mu c^2.$$

С принятой нами степенью точности мы заменили здесь: $g^{00} \approx \approx \overset{\circ}{g}{}^{00} = -1$. Теперь, очевидно,

$$T_{ij} - \frac{1}{2}Tg_{ij} \approx \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ \frac{1}{2}\mu c^2 & (i = j). \end{cases} \tag{128.19}$$

Используя теперь (128.11) при $i = \alpha$ $(= 1,\ 2,\ 3)$, $j = 0$, получаем:

$$R_{\alpha 0} = 0,$$

или согласно (128.14)

$$\Delta\gamma_{\alpha 0} - \frac{\partial^2 \gamma_0^l}{\partial x^\alpha\, \partial x^l} = 0.$$

Члены, где имеется дифференцирование по x^0, мы отбросили. Дифференцируя по x^β почленно и альтернируя по α, β, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\Delta\gamma_{\alpha 0} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Delta\gamma_{\beta 0} = 0,$$

---

*) Мы знаем, что $T^{00} = \mu c^2$. Но $T_{00} = g_{0i}g_{0j}T^{ij} \approx \overset{\circ}{g}_{0i}\overset{\circ}{g}_{0j}T^{ij} = \overset{\circ}{g}_{00}\overset{\circ}{g}_{00}T^{00} = T^{00} = \mu c^2$.

т. е.

$$\Delta\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^{\alpha}}\right)=0. \tag{128.20}$$

Мы будем считать, что массы, порождающие поле тяготения, расположены в некоторой ограниченной области пространства. В таком случае естественно предположить, что γ_{ij} вместе со своими частными производными стремятся к нулю в бесконечности, что обеспечивает нам исчезновение поля тяготения в бесконечности. Искажение евклидовой метрики, вызванное присутствием масс, ослабевает по мере удаления от них, и в очень удаленных областях координаты x^i являются практически галилеевыми. Это допущение вполне оправдано с точки зрения приложений. Так, например, поле тяготения солнечной системы практически исчезает в удаленных областях пространства (однако не столь удаленных, чтобы начало сказываться поле тяготения ближайших звезд). В идеализированном виде, отвлекаясь от поля тяготения звезд, мы можем рассматривать, следовательно, поле тяготения, исчезающее в бесконечности.

Считая, что γ_{ij}, $\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}$ при $r\to\infty$ стремятся к нулю ($r=\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}}$), можно утверждать, что уравнение Лапласа (128.20) допускает лишь нулевое решение, и мы получаем:

$$\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^{\alpha}}=0. \tag{128.21}$$

Используем теперь (128.11), (128.19) при $i=j=0$. Получаем: $R_{00}=-\frac{\varkappa}{2}\mu c^2$, откуда, сравнивая с (128.14) при $j=k=0$, имеем

$$\frac{1}{2}\Delta\gamma_{00}=-\frac{\varkappa}{2}\mu c^2$$

(все дифференцирования по x^0 дают нуль). Полученное здесь уравнение Пуассона для γ_{00} имеет, как известно, решение

$$\gamma_{00}(x^1,\ x^2,\ x^3)=\frac{\varkappa c^2}{4\pi}\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3, \tag{128.22}$$

где $\rho=\sqrt{(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2+(x^3-y^3)^2}$, а интеграл распространен по области распределения масс. При наших предположениях ($\gamma_{00}\to 0$ при $r\to\infty$) это решение будет единственным. Рассмотрим теперь поле тяготения, отвечающее данному распределению масс. Прежде всего перепишем формулу (128.9) для стационарного случая вообще (когда γ_{ij} не зависят от t). Получим:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2}=\frac{c^2}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^{\alpha}}+c\left(\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^{\beta}}\right)\frac{dx^{\beta}}{dt}. \tag{128.23}$$

Пользуясь (128.21) и (128.22), получаем окончательно:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=\frac{\varkappa c^4}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3. \qquad (128.24)$$

Остальных γ_{ij}, не играющих роли для поля тяготения, мы вычислять не будем.

Мы замечаем, что ускорение частицы в поле тяготения будет в точности таким же, как и в ньютоновой теории, если выбрать константу $\varkappa$ (до сих пор не определенную) из условия $\frac{\varkappa c^4}{8\pi}=k$, т. е. положить:

$$\varkappa=\frac{8\pi k}{c^4}, \qquad (128.25)$$

где k — *ньютонова гравитационная константа*. В таком случае

$$\frac{\varkappa c^4}{8\pi}\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3=k\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3$$

дает *ньютонов гравитационный потенциал*, и (128.24) есть основная формула ньютоновой теории тяготения.

Итак, общая теория относительности в рассмотренном нами первом приближении приводит к ньютоновой теории тяготения. Теперь мы отказываемся от приближенной точки зрения и переходим к точной теории, которая приводит уже к несколько иным результатам. Однако фактически проинтегрировать уравнения (125.4), т. е. найти метрический тензор g_{ij} по тензору энергии-импульса T_{ij}, удается лишь в исключительных случаях (в левых частях уравнений (125.4) мы должны представлять себе R_{ij} выраженными через g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l}$, так что у нас будет 10 уравнений с частными производными 2-го порядка относительно 10 функций g_{ij} $(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$).

В дальнейшем мы будем заниматься лишь одним, правда, очень важным случаем, когда поле тяготения создается массами, сосредоточенными в малой области, так что поле тяготения за пределами этой области естественно считать центрально симметрическим. Очевидно, сюда относятся поля тяготения, создаваемые отдельными небесными телами.

§ 129. Центрально симметрическое поле тяготения

Мы предположим, что в пространстве событий можно выбрать такую координатную систему y^i (как всегда у нас, близкую к галилеевой), что соблюдаются следующие условия.

1°. Метрическая квадратичная форма $ds^2 = \tilde{g}_{ij}\,dy^i\,dy^j$ будет инвариантной относительно всевозможных ортогональных преобразований над координатами y^1, y^2, y^3 при неизменной y^0.

2°. Координаты метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$ не зависят от времени, т. е. от y^0:

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}(y^1,\ y^2,\ y^3),$$

так что поле тяготения стационарное. При этих двух условиях поле тяготения мы будем называть *центрально симметрическим*.

Гиперповерхности $y^0 = \mathrm{const}$ мы для наглядности будем рассматривать как обычные евклидовы пространства, отнесенные к прямоугольным декартовым координатам y^1, y^2, y^3. Соответствующая евклидова метрика будет играть у нас вспомогательную роль и с «настоящей» метрикой гиперповерхности не совпадает. Введем вместо «прямоугольных декартовых» координат y^1, y^2, y^3 «полярные» координаты x^1, x^2, x^3, где x^1 — полярный радиус:

$$x^1 = r = \sqrt{{y^1}^2 + {y^2}^2 + {y^3}^2},$$

$x^2 = \frac{\pi}{2} - \theta$, где θ — широта, $x^3 = \varphi$, где φ — долгота. При этом r, θ, φ определены обычным образом относительно вспомогательной евклидовой метрики, так что

$$y^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3,\quad y^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3,\quad y^3 = x^1 \cos x^2.$$

Положив еще $x^0 = y^0$, мы переходим в пространстве событий к координатам x^0, x^1, x^2, x^3.

Квадратичная форма

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

согласно условию 1° должна оставаться инвариантной, когда в каждой гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$ производится одно и то же (произвольное) «вращение» около начала O. В дальнейшем под вращениями мы понимаем «вращения» именно этого рода.

Пусть $M\left(\overset{0}{x}_M,\ \overset{1}{x}_M,\ \overset{2}{x}_M,\ \overset{3}{x}_M\right)$ — произвольная точка одной из этих гиперповерхностей; в каждой из гиперповерхностей $x^0 = \mathrm{const}$ ей отвечает точка $M'\left(\overset{0'}{x}_M,\ \overset{1}{x}_M,\ \overset{2}{x}_M,\ \overset{3}{x}_M\right)$ с теми же значениями x^1, x^2, x^3. Производим вращение вокруг прямой OM в этой гиперповерхности *и одновременно такие же вращения вокруг соответствующих прямых $O'M'$ в каждой гиперповерхности* $x^0 = \mathrm{const}$.

Рассмотрим в точке M двумерные направления $dx^0 = dx^1 = 0$ и $dx^2 = dx^3 = 0$. Первое из этих направлений, очевидно, касается двумерной сферы $x^0 = \overset{0}{x}_M$, $x^1 = \overset{1}{x}_M$, описанной в гиперповерхности

$x^0 = x^0_M$ из начала O как из центра и проходящей через M. При вращении вокруг OM эта сфера скользит по себе и первое двумерное направление вращается в себе самом. Второе двумерное направление касается двумерной поверхности $x^2 = x^2_M$, $x^3 = x^3_M$ — геометрического места осей вращения $O'M'$ (взятых по одной в каждой гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$). В процессе вращения это двумерное направление тем самым остается неизменным; более того, все принадлежащие ему векторы остаются неподвижными. Последнее видно из того, что в процессе вращения x^0, x^1, а значит, и dx^0, dx^1 не меняют своих значений.

Каждый неподвижный вектор второго двумерного направления в процессе вращения сохраняет постоянный угол (точнее, постоянное скалярное произведение) с вращающимся вектором первого двумерного направления. Но это возможно лишь в случае ортогональности неподвижного вектора ко второму двумерному направлению. В результате оба двумерных направления будут взаимно ортогональны, что равносильно тому, что в метрическом тензоре

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0 \text{ *)}. \tag{129.1}$$

Тем самым метрическая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = g_{00}\,dx^{0^2} + 2g_{01}\,dx^0\,dx^1 + g_{11}\,dx^{1^2} + \\ + g_{22}\,dx^{2^2} + 2g_{23}\,dx^2\,dx^3 + g_{33}\,dx^{3^2}. \tag{129.2}$$

В частности, на двумерной сфере $x^0 = \mathrm{const}$, $x^1 = \mathrm{const}$:

$$ds^2 = g_{22}dx^{2^2} + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}dx^{3^2}. \tag{129.3}$$

При всевозможных вращениях сферы эта квадратичная форма должна оставаться инвариантной. Но инвариантной остается при этом и форма

$$dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}, \tag{129.4}$$

совпадающая с первой квадратичной формой на единичной сфере обычного пространства $\left(\text{напомним: } x^2 = \frac{\pi}{2} - \theta,\ x^3 = \varphi\right)$. Отношение форм (129.3) и (129.4), которое мы обозначим k, зависит лишь от линейного элемента на сфере $\left(x^2, x^3, \frac{dx^3}{dx^2}\right)$. Но так как обе формы инвариантны при вращениях сферы, а вращения способны переводить любой линейный элемент сферы в любой, то k представляет собой

*) Так, например, $g_{02} = 0$ означает ортогональность бесконечно малого вектора $dx^0 = dx^1 = dx^3 = 0$, $dx^2 \neq 0$ в первом двумерном направлении к вектору $dx^0 \neq 0$, $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ — во втором двумерном направлении.

для данной сферы константу. В результате

$$ds^2 = k\,(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}), \tag{129.5}$$

где k может зависеть лишь от x^0, x^1. Но так как по нашему предположению g_{ij} от x^0 не зависят, то

$$k = k\,(x^1). \tag{129.6}$$

Теперь в (129.2) последние три слагаемые имеют вид (129.5), и их сумма при вращениях остается, очѐвидно, инвариантной (равно как и вся форма (129.2)). Тем самым сумма и первых трех слагаемых остается инвариантной, а так как, кроме того, dx^0, dx^1 инвариантны по отдельности, то коэффициенты g_{00}, g_{01}, g_{11} также должны оставаться инвариантными *). Тем самым они не могут зависеть от x^2, x^3, а значит, зависят только от x^1. Мы получаем:

$$ds^2 = g_{00}\,(x^1)\,dx^{0^2} + 2g_{01}\,(x^1)\,dx^0 dx^1 + g_{11}\,(x^1)\,dx^{1^2} + \\ + k\,(x^1)\,(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \tag{129.7}$$

Мы можем упростить это выражение, изменив начальный момент отсчета времени в разных точках пространства по-разному, а именно, первые три члена можно переписать в виде

$$g_{00}\left[dx^0 + \frac{g_{01}}{g_{00}}\,dx^1\right]^2 + \left(g_{11} - \frac{g_{01}^2}{g_{00}}\right) dx^{1^2}.$$

Положим:

$$x^{0\prime} = x^0 + \int \frac{g_{01}\,(x^1)}{g_{00}\,(x^1)}\,dx^1.$$

В таком случае (обозначая $x^{0\prime}$ снова через x^0) мы можем переписать (129.7) в виде

$$ds^2 = g_{00} dx^{0^2} + \left(g_{11} - \frac{g_{01}^2}{g_{00}}\right) dx^{1^2} + k\,(x^1)\,(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \tag{129.8}$$

Если бы мы имели дело с пространством специальной теории относительности, то у нас было бы

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + x^{1^2}\,(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \tag{129.9}$$

Действительно, то, что добавляется к $-dx^{0^2}$, представляет собой метрическую квадратичную форму обычного пространства в полярных координатах.

По нашим общим предположениям коэффициенты формы (129.8) лишь немного отличаются от коэффициентов формы (129.9).

*) Учитывая, что сумма первых трех слагаемых остается инвариантной при *произвольных* dx^0, dx^1.

В частности, функция $k(x^1)$ близка к x^{1^2}. Можно добиться и их полного совпадения, если ввести вместо x^1 новую координату

$$x^{1'} = \sqrt{k(x^1)}.$$

Мы не нарушаем при этом никаких предположений, сделанных в начале этого параграфа. Теперь (129.8) примет вид

$$ds^2 = l(x^1)\,dx^{0^2} + h(x^1)\,dx^{1^2} + x^{1^2}(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}),$$

где $x^{1'}$ обозначено просто через x^1, а $l(x^1)$ и $h(x^1)$ — некоторые его функции (явным выражением которых мы не интересуемся). При этом $l(x^1)$ близко к -1, а $h(x^1)$ — к 1, так что мы будем писать их в виде

$$l(x^1) = -e^{\nu(x^1)}, \quad h(x^1) = e^{\lambda(x^1)},$$

где $\nu(x^1)$, $\lambda(x^1)$ близки к нулю. Итак,

$$ds^2 = -e^{\nu}dx^{0^2} + e^{\lambda}dx^{1^2} + x^{1^2}(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \qquad (129.10)$$

Отсюда

$$g_{00} = -e^{\nu}, \quad g_{11} = e^{\lambda}, \quad g_{22} = x^{1^2}, \quad g_{33} = x^{1^2}\sin^2 x^2,$$

остальные $g_{ij} = 0$.

$$g^{00} = -e^{-\nu}, \quad g^{11} = e^{-\lambda}, \quad g^{22} = \frac{1}{x^{1^2}}, \quad g^{33} = \frac{1}{x^{1^2}\sin^2 x^2}.$$

Подсчитывая Γ^k_{ij} по обычным формулам, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin x^2 \cos x^2, \\ &\Gamma^1_{22} = -x^1 e^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{x^1}, \\ &\Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg} x^2, \quad \Gamma^1_{33} = -x^1 \sin^2 x^2 e^{-\lambda}; \end{aligned}\right\} \qquad (129.11)$$

остальные $\Gamma^k_{ij} = 0$.

Теперь, пользуясь формулой (105.8):

$$R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = \frac{\partial\Gamma^q_{li}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{kp}\Gamma^p_{li} - \frac{\partial\Gamma^q_{kl}}{\partial x^l} - \Gamma^q_{lp}\Gamma^p_{kl}$$

и производя свертывание по индексам l, q, находим тензор Риччи:

$$R_{ki} = R_{qk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = \frac{\partial\Gamma^q_{qi}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{kp}\Gamma^p_{qi} - \frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^q} - \Gamma^q_{qp}\Gamma^p_{ki}.$$

Так как тензор Риччи R_{ki} вместе с метрическим тензором должен быть инвариантен при рассматриваемых нами вращениях, то совершенно аналогично предыдущему (формулы (129.1)) получаем:

$$R_{02}=R_{03}=R_{12}=R_{13}=0, \tag{129.12}$$

а также убеждаемся, что квадратичная форма

$$R_{22}dx^{2^2}+2R_{23}dx^2dx^3+R_{33}dx^{3^2}$$

должна иметь вид

$$dx^{2^2}+\sin^2 x^2 dx^{3^2}$$

с точностью до скалярного множителя. Это значит, что

$$R_{33}=R_{22}\sin^2 x^2, \quad R_{23}=0. \tag{129.13}$$

Пользуясь (129.11), подсчитаем теперь отличные от нуля координаты тензора R_{ij}. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} R_{00}&=e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'}{x^1}\right),\\ R_{11}&=\frac{\nu''}{4}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\lambda'}{x^1},\\ R_{22}&=-1+e^{-\lambda}\left(1-x^1\lambda'+\frac{\lambda'+\nu'}{2}x^1\right). \end{aligned}\right\} \tag{129.14}$$

Что же касается R_{01}, то подсчет показывает, что $R_{01}=0$.

§ 130. Центрально симметрическое поле тяготения (окончание)

Мы предположим теперь, что тензор энергии-импульса T_{ij} отличен от нуля лишь в некоторой узкой «трубке», окружающей ось x^0, т. е. при условии $x^1\leqslant r_0$, где r_0 — некоторая постоянная. За пределами же этой «трубки» T_{ij} равен нулю:

$$T_{ij}=0 \quad \text{при} \quad x^1>r_0. \tag{130.1}$$

С точки зрения физической системы отсчета, в которой мы находимся, это значит, что массы, порождающие поле тяготения, расположены в сфере радиуса r_0 с центром в начале координат, за пределами же этой сферы отсутствуют. Внутри сферы распределение масс должно быть, конечно, центрально симметрическим (поскольку тензор T_{ij} обладает этим свойством). Получается картина, близкая к полю тяготения, порожденному одним небесным телом (Солнцем, звездой или планетой).

Это поле тяготения будет интересовать нас лишь за пределами самого небесного тела, т. е. при условии $x^1>r_0$. В таком случае $T_{ij}=0$, а это согласно (128.11) и (128.10) равносильно тому, что $R_{ij}=0$. Чтобы удовлетворить этому требованию, мы должны приравнять нулю три выражения (129.14). Тогда R_{33} обратится в нуль в силу (129.13), а остальные R_{ij} и без того равны нулю. Мы приходим к дифференциальным уравнениям:

$$-\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'}{x^1}=0, \tag{130.2}$$

$$\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\lambda'}{x^1}=0, \tag{130.3}$$

$$-1+e^{-\lambda}\left(1-x^1\lambda'+\frac{\lambda'+\nu'}{2}x^1\right)=0. \tag{130.4}$$

Итак, для того, чтобы метрика (129.10)

$$ds^2=-e^{\nu(x^1)}dx^{0^2}+e^{\lambda(x^1)}dx^{1^2}+x^{1^2}(dx^{2^2}+\sin^2 x^2 dx^{3^2}) \tag{130.5}$$

удовлетворяла условию отсутствия масс, $T_{ij}=0$, *при* $x^1>r_0$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $\nu(x^1)$, $\lambda(x^1)$ *удовлетворяли (при* $x^1>r_0$*) выписанной выше системе дифференциальных уравнений.*

Эту систему нетрудно проинтегрировать. Складывая почленно первые два уравнения, мы приходим к соотношению

$$\nu'+\lambda'=0. \tag{130.6}$$

Третье уравнение дает теперь

$$-1+e^{-\lambda}(1-x^1\lambda')=0,$$

т. е.

$$-1+(x^1e^{-\lambda})'=0,$$

откуда

$$x^1e^{-\lambda}=x^1+a,$$

где a — некоторая константа. Окончательно

$$e^{-\lambda}=1+\frac{a}{x^1},\qquad e^{\lambda}=\frac{1}{1+\frac{a}{x^1}}. \tag{130.7}$$

Из (130.6) следует, что ν от $-\lambda$ отличается лишь постоянным слагаемым, а следовательно, e^{ν} от $e^{-\lambda}$ лишь постоянным множителем:

$$e^{\nu}=Ce^{-\lambda}=C\left(1+\frac{a}{x^1}\right). \tag{130.8}$$

Множитель C близок к единице, поскольку близки к единице величины e^{ν} и e^{λ}. Вставляя (130.7), (130.8) в (130.5), мы относим множитель C к dx^{0^2} и принимаем для простоты $\sqrt{C}x^0$ за новую координату x^0. Тогда (130.5) принимает вид

$$ds^2 = -\left(1+\frac{a}{x^1}\right)dx^{0^2} + \frac{dx^{1^2}}{1+\frac{a}{x^1}} + x^{1^2}\left(dx^{2^2} + \sin^2 x^2\, dx^{3^2}\right). \tag{130.9}$$

Такой вид имеет метрика в случае центрального симметрического поля тяготения в области $x^1 > r_0$, свободной от гравитирующих масс. Теперь окончательно

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1+\frac{a}{x^1}, \qquad \nu = -\lambda. \tag{130.10}$$

Из уравнений (130.2), (130.3) мы использовали лишь их следствие (130.6), однако найденные нами функции $\nu(x^1)$, $\lambda(x^1)$ удовлетворяют этим уравнениям, как показывает непосредственная проверка.

Константа a зависит от той суммарной массы m, которая сосредоточена в окрестности начала (в области $x^1 \leqslant r_0$) и порождает рассматриваемое поле тяготения. Зависимость между a и m можно найти из следующих соображений. Рассмотрим метрику (130.9) при очень больших x^1. Тогда коэффициенты при dx^{0^2}, dx^{1^2} очень мало отличаются соответственно от -1, 1 и метрика почти не отличается от псевдоевклидовой. В таком случае мы имеем право применять выводы приближенной теории § 128 для стационарного случая, в частности, формулу (128.23). Для этого нужно было бы вернуться от наших координат x^1, x^2, x^3 (приблизительно полярных) к координатам y^1, y^2, y^3 (приблизительно прямоугольным декартовым). У нас, как видно из (130.9), $g_{\alpha 0} = 0$. Это равенство сохраняется, очевидно, при любом преобразовании «пространственных» координат x^1, x^2, x^3 между собой, в частности, при возвращении к (приблизительно) прямоугольным декартовым координатам y^1, y^2, y^3. Поэтому в этих последних $\gamma_{\alpha 0} = g_{\alpha 0} = 0$, и формула (128.23) принимает вид

$$\frac{d^2 y^\alpha}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\gamma_{00}c^2}{2}.$$

Таким образом, поле тяготения обладает потенциальной функцией $\frac{\gamma_{00}c^2}{2}$.

Мы знаем, что $g_{00} = -1 + \gamma_{00}$, причем в нашем случае $g_{00} = -\left(1+\frac{a}{r}\right)$ (так как в (130.9) x^1 играет (приблизительно) роль полярного расстояния r). Следовательно, $\gamma_{00} = -\frac{a}{r}$ и

$$\frac{\gamma_{00}c^2}{2} = -\frac{ac^2}{2r}. \tag{130.11}$$

Но согласно приближенной теории мы должны получить ньютонову потенциальную функцию, равную $\frac{km}{r}$, где k — гравитационная константа. Сравнивая с (130.11), получаем:

$$a = -\frac{2km}{c^2}.$$

Теперь (130.9) принимает окончательный вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2km}{c^2 x^1}\right) dx^{0^2} + \frac{dx^{1^2}}{1 - \frac{2km}{c^2 x^1}} + x^{1^2}(dx^{2^2} + \sin^2 x^2\, dx^{3^2}); \quad (130.12)$$

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2km}{c^2 x^1}. \quad (130.13)$$

Напомним, что при этом предполагается, что $x^1 > r_0$; r_0 нужно считать не слишком малым, так, чтобы $\frac{2km}{c^2 r_0}$ было мало сравнительно с единицей и, следовательно, чтобы метрика (130.12) мало отличалась от псевдоевклидовой.

При выводе формулы (130.12) мы предполагали, что кроме массы m, сосредоточенной вблизи начала координат, других гравитирующих масс нет. Поэтому, применяя формулу (130.12), например, к полю тяготения, порождаемому Солнцем (и пренебрегая полем тяготения планет), мы можем ею пользоваться лишь до тех пор, пока не начнет сказываться поле тяготения звезд. Следовательно, формулу (130.12) имеет смысл применять хотя и при очень больших полярных радиусах x^1 (сравнимых с расстоянием до ближайшей звезды), но не при $x^1 \to \infty$. И вообще, как указывалось, мы не предъявляем никаких претензий на установление геометрических свойств всего пространства событий. Экспериментальный материал, которым в настоящее время обладает наука, не дает еще возможности сделать какие-либо обоснованные выводы в этом отношении.

В противоположность этой точке зрения многие авторы пытались построить геометрию четырехмерного пространства событий в целом. Лишенные экспериментальной базы, эти попытки представляют собой лишь фантазии, хотя и облеченные в математическую форму.

§ 131. Геодезические линии в случае центрально симметрического поля тяготения

Чтобы изучить движение свободной частицы в центрально симметрическом поле тяготения, нужно найти геодезические линии метрики (130.12). При этом геодезические линии дают, как мы знаем, четырехмерные траектории: в случае мнимой длины — для частиц с ненулевой массой покоя, а в случае ненулевой длины — для световых лучей.

Пусть геодезическая линия задана начальной точкой и направлением в ней. В четырехмерном пространстве событий всегда можно найти трехмерную «плоскость», уравнение которой имеет вид

$$A_1 y^1 + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0 \tag{131.1}$$

(так что «плоскость» проходит через ось y^0) и которая проходит через данную точку и данное направление (здесь y^i имеют тот же смысл, как и в начале § 129). Так как координаты y^1, y^2, y^3 задаются с точностью до ортогонального преобразования, то всегда можно добиться, чтобы уравнение «плоскости» имело простой вид

$$y^3 = 0.$$

Геодезическая, для которой начальная точка и начальное направление лежат в этой плоскости, и сама в ней лежит. В самом деле, при зеркальном отражении в пространстве событий, когда

$$y^0 \to y^0, \quad y^1 \to y^1, \quad y^2 \to y^2, \quad y^3 \to -y^3,$$

метрика (130.12) в силу ее симметрического характера остается инвариантной и ее геодезические переходят снова в геодезические. При этом плоскость $y^3 = 0$ и лежащие в ней точки с направлением переходят в себя, следовательно, переходят в себя и определяемые ими геодезические. Но это при нашем зеркальном отражении возможно лишь в том случае, если эти геодезические целиком лежат в плоскости $y^3 = 0$.

Итак, геодезические линии метрики (130.12) *располагаются в трехмерных «плоскостях» вида* (131.1).

Все эти плоскости равноценны в том смысле, что любую из них можно перевести в любую ортогональным преобразованием над y^1, y^2, y^3, причем метрика (130.12) сохраняется и геодезические переходят в геодезические. Поэтому достаточно изучить геодезические в какой-нибудь одной из этих «плоскостей». Мы рассмотрим «плоскость» $y^3 = 0$, которая в «полярных» координатах определится, очевидно, уравнением

$$x^2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{т. е. широта } \theta = 0). \tag{131.2}$$

На «плоскости» остаются в качестве координат x^0, x^1, x^3, и метрика принимает вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2km}{c^2 x^1}\right) dx^{0^2} + \frac{dx^{1^2}}{1 - \frac{2km}{c^2 x^1}} + x^{1^2} dx^{3^2}. \tag{131.3}$$

Составим дифференциальные уравнения геодезических, лежащих в этой «плоскости». Геодезические, отнесенные к каноническому параметру τ, вообще определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}=0. \tag{131.4}$$

В нашем случае Γ^k_{ij} имеют вид (129.11), причем в силу $x^2=\frac{\pi}{2}$ обращаются в нуль Γ^2_{33} и Γ^3_{23}. Остальные отличные от нуля Γ^k_{ij} мы перепишем, учитывая, что (согласно (130.10)) $\nu=-\lambda$, а также $\sin x^2=1$:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^0_{10}=-\frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^1_{22}=-x^1e^{-\lambda},\quad \Gamma^1_{00}=-\frac{\lambda'}{2}e^{-2\lambda},$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{x^1},\quad \Gamma^1_{33}=-x^1e^{-\lambda}.\quad \text{Остальные } \Gamma^k_{ij}=0.$$

Выпишем теперь уравнения (131.4) при $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$, причем будем помнить, что $x^2=\frac{\pi}{2}$, а следовательно, $\frac{dx^2}{d\tau}=\frac{d^2x^2}{d\tau^2}=0$. Получим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x^0}{d\tau^2}-\lambda'\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}&=0,\\
\frac{d^2x^1}{d\tau^2}-\frac{\lambda'}{2}e^{-2\lambda}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2+\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2-x^1e^{-\lambda}\left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2&=0,\\
0&=0,\\
\frac{d^2x^3}{d\tau^2}+\frac{2}{x^1}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{131.5}$$

Умножая почленно первое из этих уравнений на $e^{-\lambda(x^1)}$, а последнее на x^{1^2}, мы приводим их к виду

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\lambda}\frac{dx^0}{d\tau}\right)=0,\quad \frac{d}{d\tau}\left(x^{1^2}\frac{dx^3}{d\tau}\right)=0,$$

откуда

$$e^{-\lambda}\frac{dx^0}{d\tau}=a,\quad x^{1^2}\frac{dx^3}{d\tau}=b, \tag{131.6}$$

где a, b — некоторые константы (для данной геодезической); мы будем считать $b\neq 0$, оставляя в стороне тривиальный случай радиального движения частицы. Кроме того, касательный вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ (при каноническом параметре τ) параллельно переносится вдоль геодезической, так что сохраняет постоянную длину. Обозначим его постоянный скалярный квадрат через C. Так как у нас согласно (129.10), (130.13)

$$g_{00}=-e^{\nu}=-e^{-\lambda},\quad g_{11}=e^{\lambda},\quad g_{22}=x^{1^2},\quad g_{33}=x^{1^2}\sin^2 x^2=x^{1^2}$$

(остальные g_{ij} равны нулю), то скалярный квадрат вектора $\frac{dx^i}{d\tau}$ $\left(\text{принимая во внимание, что } x^2=\frac{\pi}{2},\ \frac{dx^2}{d\tau}=0\right)$ можно записать в виде

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2+e^{\lambda}\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2+x^{1^2}\left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2=C. \tag{131.7}$$

Соотношения (131.6) вместе с (131.7) дают нам все, что нужно (неиспользованное второе уравнение (131.5) является их следствием). Мы хотим исключить из них τ и x^0, чтобы получить дифференциальное уравнение между x^1, x^3. Исключив x^0, т. е. время, мы переходим к рассмотрению траектории частицы (или светового луча) в обычном чисто пространственном смысле в координатах x^1, x^2, x^3. Так как при этом x^1, x^2, x^3 играют роль полярных координат в пространстве, то x^1, x^3 играют роль полярных координат ($x^1=r$, $x^3=\varphi$) на рассматриваемой нами «экваториальной» плоскости $x^2=\frac{\pi}{2}$ (широта $\theta=0$). Зависимость между x^1, x^3 определяет в этой плоскости траекторию частицы (или светового луча) в обычном смысле слова.

Конечно, x^1, x^3 лишь приблизительно играют роль обычных полярных координат, так как метрика рассматриваемой плоскости лишь приблизительно является евклидовой.

Действительно, полагая в (131.3) $x^0=\text{const}$, $x^1=r$, $x^3=\varphi$, получаем:

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2km}{c^2r}}+r^2\,d\varphi^2.$$

Возвращаемся к выкладке. Заменяя в (131.7) $\frac{dx^0}{d\tau}$ через ae^{λ} и $\frac{dx^3}{d\tau}$ через $\frac{b}{x^{1^2}}$ (согласно (131.6)), получим:

$$-a^2e^{\lambda}+e^{\lambda}\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2+\frac{b^2}{x^{1^2}}=C,\ \text{т. е.}\ \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2=a^2+e^{-\lambda}\left(C-\frac{b^2}{x^{1^2}}\right).$$

Деля почленно это уравнение на второе из равенств (131.6), возведенное в квадрат, получим окончательно:

$$\left(\frac{1}{x^{1^2}}\frac{dx^1}{dx^3}\right)^2=\frac{1}{b^2}\left\{a^2+e^{-\lambda}\left(C-\frac{b^2}{x^{1^2}}\right)\right\}.$$

Это и есть дифференциальное уравнение искомой траектории в полярных координатах x^1, $x^3=r$, φ в плоскости $x^2=\frac{\pi}{2}$.

Переходя к обозначениям r, φ и полагая

$$\frac{a^2}{b^2}=A,\quad \frac{C}{b^2}=B, \tag{131.8}$$

получим:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = A + e^{-\lambda}\left(B - \frac{1}{r^2}\right). \tag{131.9}$$

Для выкладок будет удобнее пользоваться обратной величиной полярного радиуса. Мы положим:

$$\sigma = \frac{1}{r}.$$

Тогда, согласно (130.13)

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2km}{c^2 r} = 1 - \frac{2km}{c^2}\sigma, \tag{131.10}$$

и (131.9) принимает вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = A + \left(1 - \frac{2km}{c^2}\sigma\right)(B - \sigma^2). \tag{131.11}$$

В это дифференциальное уравнение, связывающее φ, σ, входят две произвольные константы A и B. При этом, как видно из (131.8), $A \geqslant 0$, $B \leqslant 0$. Действительно, скалярный квадрат C вектора $\frac{dx^i}{d\sigma}$ будет отрицательным в случае траектории частицы (с ненулевой массой покоя) и равным нулю в случае траектории светового луча.

Отсюда $B < 0$ в первом случае и $B = 0$ во втором случае.

Мы предпочтем заменить дифференциальное уравнение 1-го порядка (131.11) эквивалентным ему дифференциальным уравнением 2-порядка, исключив при этом одну из произвольных постоянных. Для этого мы просто почленно продифференцируем уравнение по φ; аддитивная константа A исчезнет. Получаем:

$$2\frac{d\sigma}{d\varphi}\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\frac{2km}{c^2}\frac{d\sigma}{d\varphi}(B - \sigma^2) + \left(1 - \frac{2km}{c^2}\sigma\right)\left(-2\sigma\frac{d\sigma}{d\varphi}\right). \tag{131.12}$$

При обратном интегрировании константа A появляется снова. При этом, если учесть, что $B \leqslant 0$, то из самого вида уравнения (131.11) следует, что $A \geqslant 0$.

Итак, дифференциальные уравнения (131.11), (131.12) действительно эквивалентны. Деля (131.12) на $2\frac{d\sigma}{d\varphi}$ почленно, получаем:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\frac{kmB}{c^2} - \sigma + \frac{3km}{c^2}\sigma^2. \tag{131.13}$$

Все случаи $\sigma = \text{const}$, которые мы как будто потеряли, сокращая на $\frac{d\sigma}{d\varphi}$, мы полностью находим среди решений уравнения (131.13), подбирая B так, чтобы правая часть была равна 0 (при $\sigma = \text{const}$). Поэтому вопрос полностью сводится к интегрированию уравнения (131.13).

§ 132. Вращение планетных орбит

Мы знаем, что $B \leqslant 0$. Рассмотрим особо случай, когда $B < 0$, т. е. когда в центрально симметрическом поле тяготения движется частица, обладающая ненулевой массой покоя. Сюда относится, например, движение планет в поле тяготения Солнца. Обозначая

$$-\frac{c^2}{kmB}=p>0, \quad \alpha=\frac{3km}{c^2}, \tag{132.1}$$

перепишем (131.13) в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma+\alpha\sigma^2. \tag{132.2}$$

Член $\alpha\sigma^2$ весьма мал вследствие малости коэффициента α. Если его откинуть, то мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma, \tag{132.3}$$

вытекающее из ньютоновой теории тяготения. Таким образом, уточнение, вносимое здесь теорией относительности, заключается в появлении дополнительного члена $\alpha\sigma^2$.

Мы будем интегрировать уравнение (132.2) приближенно. В качестве первого приближения мы берем решение уравнения (132.3), которое обозначаем $\sigma_0(\varphi)$. Очевидно,

$$\sigma_0(\varphi)=\frac{1}{p}+L\cos\varphi+M\sin\varphi,$$

где L и M — произвольные постоянные. Поворотом полярной оси всегда можно добиться, чтобы $M=0$, $L>0$, и тогда, обозначая Lp через e, получаем:

$$\sigma_0(\varphi)=\frac{1}{p}(1+e\cos\varphi). \tag{132.4}$$

Так как $\sigma=\frac{1}{r}$, то полярное уравнение траектории будет:

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}, \tag{132.5}$$

т. е. мы имеем коническое сечение с фокусом в начале, эксцентриситетом e и параметром p.

Переходя ко второму приближению, ищем решение уравнения (132.2) в виде

$$\sigma(\varphi)=\sigma_0(\varphi)+\sigma_1(\varphi).$$

При этом добавку $\sigma_1(\varphi)$ в решении, возникающую за счет малой добавки $\alpha\sigma^2$ в уравнении, считаем весьма малой сравнительно с $\sigma_0(\varphi)$. Вставляя $\sigma=\sigma_0+\sigma_1$ в (132.2) и учитывая, что σ_0

удовлетворяет уравнению (132.3), получаем:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} = -\sigma_1 + \alpha(\sigma_0 + \sigma_1)^2.$$

Пренебрегая внутри круглой скобки σ_1 сравнительно с σ_0, мы приближенно ищем σ_1 из уравнения

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} = -\sigma_1 + \alpha\sigma_0^2,$$

которое перепишем в развернутом виде:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \frac{\alpha}{p^2}(1 + 2e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi) =$$
$$= \frac{\alpha}{p^2}\left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\right). \quad (132.6)$$

Предположим, что из скобки выкинут член $2e\cos\varphi$. В таком случае, как следует из элементарных выкладок, решение σ_1 будет периодическим (с периодом 2π), так что уточненная орбита планеты остается замкнутой (мы предполагаем, что $e < 1$, так что орбита, рассматриваемая в первом приближении (132.5), представляет собой эллипс). Что же касается члена $\frac{2\alpha e}{p^2}\cos\varphi$ в правой части (132.6), то ему отвечает непериодическое частное решение

$$\sigma_1(\varphi) = \frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi. \quad (132.7)$$

Мы будем учитывать только эту добавку к первому приближению $\sigma = \sigma_0(\varphi)$, так как только она нарушает замкнутый характер орбиты, что выражается, как можно считать, в медленном вращении орбиты в ее плоскости. В самом деле, уточненная орбита согласно сказанному имеет вид

$$\sigma = \sigma_0(\varphi) + \sigma_1(\varphi) = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi) + \frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi =$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\left(\cos\varphi + \frac{\alpha}{p}\varphi\sin\varphi\right) \approx \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)\varphi.$$

Мы произвели замену по приближенной формуле $\cos\varphi - \Delta\varphi\sin\varphi \approx \approx \cos(\varphi + \Delta\varphi)$, считая $\Delta\varphi = -\frac{\alpha}{p}\varphi$ весьма малой величиной. Мы видим, что теперь прежнее значение σ будет повторяться не при полном обороте полярного радиуса, т. е. не при увеличении φ на 2π, а при повороте на немного больший угол, именно на угол

$$\frac{2\pi}{1 - \frac{\alpha}{p}} \approx 2\pi + \frac{2\pi\alpha}{p}.$$

Это можно понимать в том смысле, что за время обхода планетой своей орбиты сама орбита успевает повернуться в том же направлении на угол

$$\varepsilon=\frac{2\pi\alpha}{p}. \tag{132.8}$$

Этот угол (весьма малый для планет солнечной системы) составляет наиболее заметную величину для Меркурия; его значение, предсказываемое теорией относительности, хорошо согласуется с опытом. Заметим еще, что, прибавляя $\sigma_1(\varphi)$ к $\sigma_0(\varphi)$, мы откинули периодическую часть $\sigma_1(\varphi)$, но ввиду малости $\sigma_1(\varphi)$ сравнительно с $\sigma_0(\varphi)$ это дает при подсчете угла ε весьма малую относительную ошибку, которой мы пренебрегаем.

§ 133. Искривление световых лучей в поле тяготения

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (131.13) в случае $B=0$, когда оно определяет, как мы знаем, траектории световых лучей:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=-\sigma+\alpha\sigma^2, \quad \text{где} \quad \alpha=\frac{3km}{c^2}. \tag{133.1}$$

В порядке первого приближения мы отбрасываем член $\alpha\sigma^2$ и интегрируем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=-\sigma.$$

Получаем:

$$\sigma_0(\varphi)=L\cos\varphi+M\sin\varphi, \tag{133.2}$$

где L и M — произвольные постоянные. За счет поворота полярной оси нетрудно добиться, чтобы решение имело вид $\sigma_0(\varphi)=$ $=L\cos\varphi$, $L>0$, или, полагая $R=\frac{1}{L}$,

$$\sigma_0(\varphi)=\frac{\cos\varphi}{R}. \tag{133.3}$$

Так как $\sigma=\frac{1}{r}$, то соответствующее полярное уравнение траектории будет:

$$r=\frac{1}{\sigma_0(\varphi)}=\frac{R}{\cos\varphi}.$$

Мы получаем «прямую», проходящую на расстоянии R от начала координат. Точнее, полученная траектория была бы прямой, если бы r, φ были полярными координатами на обычной евклидовой плоскости.

Итак, в первом приближении световой луч распространяется «прямолинейно».

Переходя ко второму приближению, ищем решение дифференциального уравнения (133.1) в виде

$$\sigma(\varphi)=\sigma_0(\varphi)+\sigma_1(\varphi).$$

Вставляя это приближение в уравнение (133.1), получаем:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma_1+\alpha(\sigma_0+\sigma_1)^2.$$

Как и в § 132, считаем добавку σ_1 малой сравнительно с σ_0 — главной частью решения, так что пишем полученное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma_1+\alpha\sigma_0^2,$$

т. е.

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma_1+\frac{\alpha\cos^2\varphi}{R^2}.$$

Решение этого уравнения будет:

$$\sigma_1=\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi). \qquad (133.4)$$

Правда, мы выписали здесь лишь частное решение; но члены вида $A\cos\varphi+B\sin\varphi$ (A, B — произвольные постоянные), которые нужно присоединить сюда, чтобы получить общее решение, мы объединяем с $\sigma_0=\frac{1}{R}\cos\varphi$. При добавлении к σ_0 этих членов решение сохраняет вид (133.2), траектория остается «прямолинейной» и испытывает лишь весьма малое смещение и поворот (ввиду малости добавляемых членов). Искривление светового луча в поле тяготения, которое сейчас нас интересует, происходит, следовательно, лишь при добавлении частного решения (133.4). Поэтому мы этим частным решением и ограничимся*). Итак,

$$\sigma=\sigma_0+\sigma_1=\frac{\cos\varphi}{R}+\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi). \qquad (133.5)$$

В случае $\sigma=\frac{\cos\varphi}{R}$ мы имеем прямую линию, причем когда мы пробегаем ее, полярный угол φ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, так что полярный радиус поворачивается на угол π. Значения $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ дают $\sigma=0$, т. е. $r=\infty$, и определяют направления, параллельные нашей прямой. Переходя к траектории (133.5), мы вносим в уравнение

*) Несколько более детальный подсчет показал бы, что мы делаем при этом весьма малую относительную ошибку в окончательном результате.

дополнительный член $\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi)$, вызывающий ее искривление (весьма малое ввиду малости этого члена). Теперь, когда полярный угол φ достигает значения $\frac{\pi}{2}$, σ еще остается положительным (хотя и будет очень малым), так что кривая еще не уходит в бесконечность. Это происходит при дальнейшем (весьма малом) увеличении угла φ, когда $\frac{\cos\varphi}{R}$ принимает отрицательное значение, уничтожающееся в сумме с добавочным членом. Пусть $\frac{\pi}{2}+\delta$ (где δ весьма мало) будет значение φ, при котором $\sigma=0$, $r=\infty$, и кривая уходит в бесконечность. Подставим в (133.5) $\varphi=\frac{\pi}{2}+\delta$, причем в добавочном члене мы полагаем $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)=1-\frac{\delta^2}{2}+\ldots\approx 1$, пренебрегая весьма малой величиной δ^2 сравнительно с единицей. Получаем:

$$0=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)}{R}+\frac{2\alpha}{3R^2}\approx-\frac{\delta}{R}+\frac{2\alpha}{3R^2}.$$

Отсюда

$$\delta\approx\frac{2\alpha}{3R}. \tag{133.6}$$

Итак, при $\varphi\to\frac{\pi}{2}+\delta$ и, в силу симметрии относительно полярной оси, при $\varphi\to-\frac{\pi}{2}-\delta$ кривая уходит в бесконечность. Нетрудно показать, что при этом кривая имеет асимптоты: проекция $\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\sigma}$ полярного радиуса r на полярную ось, повернутую на угол δ, при $\varphi\to\frac{\pi}{2}+\delta$ стремится к конечному пределу (что легко получается по правилу Лопиталя). Тем самым имеется одна асимптота, идущая под углом $\frac{\pi}{2}+\delta$ к полярной оси и, конечно, вторая, симметричная с первой. Таким образом, наш световой луч приходит из бесконечности, имея первоначальное (предельное) направление под углом $\frac{\pi}{2}-\delta$ к полярной оси, и уходит в бесконечность под углом $\frac{\pi}{2}+\delta$ (разумеется, практически имеется в виду луч, идущий из одной достаточно удаленной точки в другую, тоже достаточно удаленную). *Уклонение луча от первоначального направления составляет, таким образом, угол*

$$2\delta\approx\frac{4\alpha}{3R}=\frac{4km}{c^2R}. \tag{133.7}$$

Когда идущие от звезд лучи проходят вблизи Солнца, т. е. в сильном центрально симметрическом поле тяготения, действительно наблюдается отклонение лучей от первоначального направления, достаточно хорошо согласующееся с полученной формулой (такие наблюдения возможны при солнечных затмениях).

§ 134. Красное смещение спектральных линий. Заключение

Есть еще третий случай, когда отклонения от ньютоновой теории, предсказываемые теорией относительности, доступны опытной проверке, несмотря на свою малую величину.

Пусть в центрально симметрическом поле тяготения (130.12) из некоторой точки M_1 с полярным радиусом $x^1 = r_1$ и в момент времени x_1^0 подается световой сигнал, который принимается затем в точке M_2 с полярным радиусом $x^1 = r_2$ и в момент времени x_2^0. При этом мы будем считать, что r_1 сравнительно мало, так что точка M_1 находится вблизи гравитирующей массы m, а r_2, наоборот, очень велико, так что в точке M_2 наше поле тяготения фактически не ощущается. Ввиду стационарного характера поля ясно, что, если повторить сигнал спустя некоторое время, он будет распространяться в точности таким же образом, как и в первый раз. Если второй сигнал был отправлен после первого спустя время Δx^0, то он и принят будет после первого спустя время Δx^0.

Теперь необходимо обратить внимание на то, что x^0, как мы знаем, лишь приблизительно играет роль времени ct, поскольку мы находимся в координатах, лишь близких к галилеевым, но не галилеевых (x^0 — «среднее» или «мировое» время). Координата x^0 практически будет совпадать с временем ct, если мы перейдем *в локально галилеевы координаты*, что можно сделать лишь по отдельности в окрестности точки M_1 и в окрестности точки M_2. Пусть $\tilde{x}^0$ — локально галилеева координата в окрестности точки M_1. В таком случае dx^{0^2} должно входить в ds^2 с коэффициентом — 1, а для этого мы должны положить, как видно из (130.12): $d\tilde{x}^0 = dx^0 \sqrt{1 - \frac{2km}{c^2 r_1}} \approx dx^0 \left(1 - \frac{km}{c^2 r_1}\right)$, откуда следует аналогичное соотношение и для приращений: $\Delta\tilde{x}^0 \approx \Delta x^0 \left(1 - \frac{km}{c^2 r_1}\right)$. Обозначая через t_1 время в локально галилеевых координатах в окрестности M_1, так что $\tilde{x}^0 = ct_1$, мы получаем, следовательно, $c\Delta t_1 = \Delta x^0 \left(1 - \frac{km}{c^2 r_1}\right)$. Аналогичную формулу мы пишем и для времени t_2 в окрестности M_2 с заменой r_1 на r_2; но ввиду того, что r_2 очень велико, мы получаем: $c\Delta t_2 = \Delta x^0$. Отсюда следует: $\Delta t_2 \approx \frac{\Delta t_1}{1 - \frac{km}{c^2 r_1}} \approx \Delta t_1 \left(1 + \frac{km}{c^2 r_1}\right)$, т. е. «истинное время» между двумя сигналами в месте приема оказывается длиннее, чем в месте отправления в отношении $1+\frac{km}{c^2r_1}$

Частота колебаний ν, отвечающая данной спектральной линии данного химического элемента, будет одной и той же в любом месте пространства, если, конечно, при ее подсчете пользоваться «истинным временем», т. е. временем в локально галилеевых координатах *в том месте, где происходит излучение* (в нашем случае в окрестности точки M_1). Но при приеме светового сигнала в точке M_2 продолжительность одного колебания увеличивается, как мы видим, в отношении $1+\frac{km}{c^2r_1}$, а следовательно, частота в том же отношении уменьшается. В результате все спектральные линии наблюдаются сдвинутыми к красному концу спектра, причем величина сдвига точно предсказывается. Практически такое положение вещей имеет место, когда свет испускается с поверхности звезды, создающей сильное поле тяготения, а принимается на Земле, где это поле тяготения практически равно нулю (поле тяготения самой Земли создает при этом обратный эффект, но он слишком слаб, чтобы его следовало принимать во внимание). В этом случае предсказания теории также находятся в достаточно хорошем согласии с опытом. В последние годы явление красного смещения было установлено и в земных условиях (применение «эффекта Мёссбауэра»).

Как мы уже указывали, теория относительности, связывая пространственно-временную геометрию с распределением и движением масс, делает тем самым существенный шаг в сторону физической расшифровки понимания пространства и времени как форм существования материи.

Само собой разумеется, что этот принцип далеко не исчерпывается тем, что дает теория относительности, и дальнейшее развитие науки будет с новых и новых сторон раскрывать его физическое содержание. Возможно, что и сам четырехмерный пространственно-временной континуум с его геометрическими свойствами окажется в конечном счете образованием, имеющим статистический характер и возникающим на основе большого числа простейших физических взаимодействий элементарных частиц. Но, конечно, подходы к этому вопросу должны носить совсем иной характер, поскольку они должны базироваться на квантовой механике — теории совершенно иного стиля, чем теория относительности.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ