

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
РАЗЛОЖЕНИЯ
ИНТЕГРАЛОВ

Том 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗИНАТНЕ»
РИГА 1977

Асимптотические разложения интегралов, т. 2. Р и е к с т ы н ь ш Э. Я. Рига, «Зинатне», 1977. 464 с.

Во втором томе монографии для построения асимптотических разложений интегралов используются понятия критических точек и деформирования пути интегрирования в комплексной плоскости. В частности, рассматриваются разные обобщения метода перевала. Большое внимание уделяется деформированию пути с учетом расположения особых точек подынтегральной функции. Исследуются интегралы обращения преобразований Лапласа и Меллина и их обобщения. Приведены исторические и библиографические сведения, а также обзор имеющейся литературы.

Ил. 37, библиогр. 384 назв.

по решению Редакционно-издательского
совета Академии наук Латвийской ССР
от 29 апреля 1976 года

Предисловие

Книга является непосредственным продолжением монографии «Асимптотические разложения интегралов», т. 1. В ней для построения асимптотических разложений интегралов используются рассмотренные в первом томе методы. При этом учитывается расположение критических точек и исследуются различные возможности применения деформирования пути интегрирования в комплексной плоскости, что приводит к расширению понятия «критические точки».

Для сохранения единства изложения материала и для удобства ссылки на главы и параграфы первого тома в настоящей книге продолжается их нумерация. Ссылка на литературу, помещенную в первом томе, затруднила бы чтение. Поэтому часть литературных источников из первого тома повторяется во втором.

В третьем томе монографии предполагается рассмотреть применение методов, приведенных во втором томе, к построению асимптотики коэффициентов разложений и функций, определяемых рядами. Кроме того, намечено исследовать и остальные методы построения асимптотических разложений интегралов: применение интегральных преобразований и преобразований рядов, специальных соотношений и теории нейтрис. Последняя глава тома будет посвящена изучению вопроса о более тонкой оценке остатка асимптотического ряда.

Несколько слов о терминологии. Известно, что предложенные авторами наименования понятий, теорем или формул не влияют на математическую сущность вопроса, однако при введении новых терминов разумно придерживаться некоторых общих принципов: названия понятий должны соответствовать математическому смыслу, наименования должны быть исторически оправданными, а сами понятия следует выбирать исходя из их целесообразности. Кроме того, надо учитывать существующую терминологию, которая, к сожалению, не всегда со-

ПРЕДИСЛОВИЕ

ответствует указанным принципам. В связи с этим у автора данной монографии иногда возникали затруднения. Вполне возможно, что часть читателей не будет согласна с автором относительно некоторых терминов.

Автор выражает искреннюю благодарность доктору наук Р. Риделю и канд. физ.-мат. наук Т. Т. Цирулису за ценные критические замечания, способствовавшие улучшению рукописи; профессору, доктору фил. наук Ф. В. Ольверу за предоставление отписок работ, недоступных автору; Я. В. Янсону за выполнение расчетов при изготовлении рисунков, а также М. Я. Екабсоне и И. А. Хенине за техническую помощь при подготовке рукописи к изданию.

Э. Риекстыньш

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 16. МЕТОДЫ ЛАПЛАСА И СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ И ИХ МОДИФИКАЦИИ

16.1. Критические точки и асимптотические вычеты

16.1.1. Согласно формуле (12.15) для любого $a > 0$ при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ имеем разложение

$$\Omega(z) = \int_0^a e^{-zt} h(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma(\lambda_k + 1) z^{-\lambda_k - 1}, \quad (16.1)$$

если при $t \rightarrow +0$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\lambda_k}, \quad -1 < \lambda_k \uparrow +\infty \quad (16.2)$$

и функция $h(t)$ интегрируема в $[0, a]$. Если $a = \infty$, то $h(t) = O(e^{bt})$ при $t \rightarrow +\infty$. Из (16.1) следует, что асимптотическое разложение для $\Omega(z)$ определяется лишь поведением подынтегральной функции в некоторой окрестности начала. Асимптотическое разложение (10.21) интеграла Фурье $\int_a^b e^{ixt} h(t) dt$, полученное интегрированием по частям, содержит значения подынтегральной функции лишь на концах промежутка интегрирования.

Указанные примеры свидетельствуют о том, что иногда асимптотику интегралов определяет поведение подынтегральной функции лишь в окрестности некоторых точек промежутка интегрирования. Назовем такие точки *критическими* для данного интеграла (точнее — *возможными критическими*). Для интеграла (16.1) критической точкой является $t=0$, для интеграла Фурье — $t=a$ и $t=b$. По существу, в методах, рассмотренных в гл. II и III, уже использовано понятие критических точек: при интегрирова-

нии по частям ими являются концы промежутка; при разложении подынтегральной функции в ряд — точки, в окрестностях которых справедливо разложение. В данной главе применение критических точек исследуется более подробно.

Критичность точки $t=0$ для (16.1) объясняется тем, что $\max_{t \geq 0} |e^{-zt}| = 1$ достигается при $t=0$ и по лемме 2.3 для любого

фиксированного $\varepsilon > 0 \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-zt} h(t) dt = O(e^{-\varepsilon z}) = o(z^{-N})$. Критичность

точек $t=a$ и $t=b$ для интеграла Фурье при действительной функции $h(t)$ можно объяснить следующим образом. Разобьем подынтегральную функцию в (10.21) на $f_1(x, t) = \cos xth(t)$ и $f_2(x, t) = \sin xth(t)$. При большом числе x их графиками будут быстро осциллирующие кривые. Разобьем интегралы от функций $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$ на части так, чтобы в отдельных интервалах подынтегральные функции сохранили знак, который для смежных интервалов чередуется. Тогда можно априори утверждать, что при большом числе x смежные интегралы почти взаимно уничтожаются, так как непрерывная функция $h(t)$ в этих малых интервалах мало изменяется. Без компенсации остаются только интегралы по окрестностям концов a и b . Однако при разрывной функции $h(t)$ это рассуждение в общем неверно. На самом деле в таком случае интеграл Фурье имеет другое асимптотическое разложение. Это означает, что как точки разрыва, так и в общем точки негладкости функции $h(t)$ тоже следует причислять к критическим точкам.

16.1.2. Поскольку понятие окрестности, входящее в определение критической точки, следует уточнить, так как окрестность может зависеть от параметра, то данное определение нельзя считать точным. В дальнейшем будут перечислены возможные критические точки для отдельных типов интегралов.

Рассмотрим вопрос о нахождении критических точек для интеграла

$$\Omega(z) = \int_a^b e^{-zg(t)} h(t) dt, \quad (16.3)$$

где функция $g(t)$ принимает действительные значения, а $h(t)$ — в общем комплекснозначная функция. Чтобы при отыскании критических точек внутри промежутка интегрирования исключить влияние концов промежутка, применим симметричный нейтрализатор $v_s(t) \in NS[a, b]$, введенный в п. 6.3. Будут применяться также левый нейтрализатор $v_l(t) \in NL[a, b]$ и правый нейтрализатор $v_r(t) \in NR[a, b]$, причем область их влияния особо не указывается.

Лемма 16.1. Если $h(t) \in C^\infty[a, b]$, $g(t) \in C^\infty[a, b]$, $g'(t) \neq 0$ при $t \in [a, b]$, $v_s(t) \in NS[a, b]$, то при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi/2$ имеет место соотношение

$$\Omega_0(z) = \int_a^b e^{-zg(t)} h(t) v_s(t) dt = O(e^{-zg(\tau)} z^{-N}), \quad (16.4)$$

где $\tau = a$, если $g'(t) > 0$, и $\tau = b$, если $g'(t) < 0$. Формула (16.4) справедлива также при $|\arg z| \in (\pi/2, \pi]$, только выражения для τ надо поменять местами.

Доказательство. Применяя n раз интегрирование по частям, получаем равенство

$$\Omega_0(z) = z^{-n} \int_a^b e^{-zg(t)} \sum_{k=0}^n h_{kn}(t) v_s^{(k)}(t) dt,$$

где функции $h_{kn}(t)$ ограничены в $[a, b]$. Пусть $\operatorname{Re} z \geq 0$. Тогда

$$|\Omega_0(z)| \leq M |z|^{-n} \int_a^b e^{-\operatorname{Re} z g(t)} dt \leq M_1 |z|^{-n} \exp[-\operatorname{Re} z \min_{t \in [a, b]} g(t)].$$

При $\operatorname{Re} z = 0$ последний множитель равен единице и $|e^{-zg(\tau)}| = 1$, поэтому в (16.4) можно брать любой $\tau \in [a, b]$. В противном случае следует учитывать, что $\min_{t \in [a, b]} g(t) = g(a)$, если $g'(t) > 0$, и $\min_{t \in [a, b]} g(t) = g(b)$, если $g'(t) < 0$. При $\operatorname{Re} z < 0$ \min следует заменить на \max . В силу произвола n лемма доказана.

Из сказанного в п. 16.1.1 и леммы 16.1 следует, что для интеграла (16.3) можно выделить следующие типы возможных критических точек:

- 1°. Точки, в которых $g'(t) = 0$.
- 2°. Концы промежутка интегрирования.
- 3°. Точки негладкости функции $g(t)$.
- 4°. Точки негладкости функции $h(t)$.

Ниже будет показано, что все перечисленные типы возможных критических точек при построении полного асимптотического разложения интеграла нужны лишь тогда, когда $\operatorname{Re} z = 0$. Для остальных $\operatorname{Re} z$ обычно достаточно брать точки, в которых $g(t)$ принимает экстремальное значение, т. е. точки, в которых $g'(t) = 0$ (1°) или же $g(t)$ не имеет производной (3°). Если внутри (a, b) таких точек нет, то асимптотику определяет один из концов промежутка интегрирования. В исключительных случаях на асимптотику может влиять также поведение функции $h(t)$ (см. § 18). Сказанное подтверждает

Лемма 16.2. Если 1) $K(t) \geq 0$ в $[a, b]$; 2) $K(c)$ — абсолютный максимум функции $K(t)$ в $[a, b]$, $K(c) > 0$, $c \in (a, b)$; 3) существует ε , $0 < \varepsilon \leq \min(c-a, b-c)$, такое, что при $t \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$

$K(t) : K(c) \leq g(\varepsilon) < 1$; 4) $K(t)$ интегрируема, а $h(t)$ абсолютно интегрируема в $[a, b]$, то при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$ справедливы оценки

$$\int_a^{c-\varepsilon} [K(t)]^k h(t) dt = o([K(c)]^k z^{-N}),$$

$$\int_{c+\varepsilon}^b [K(t)]^k h(t) dt = o([K(c)]^k z^{-N}).$$
(16.5)

При $c=b$ утверждение относится к первому из интегралов (16.5), при $c=a$ — ко второму.

Доказательство леммы почти очевидно. Оно дано в п. 12.4.1.

Относительно выполнения условия 3) леммы 16.2 имеет место

Лемма 16.3. Если 1) при $t \in [a, b]$, $t \neq c$, выполняется неравенство $0 \leq K(t) : K(c) < 1$; 2) $K(t)$ в $[a, b]$ непрерывна и имеет конечное число экстремумов, то для любого фиксированного достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно найти такие $q < 1$ и $\delta > 0$, что $K(t) : K(c) \leq q$ и $K(c) - K(t) \geq \delta$ при $t \in [a, c - \varepsilon]$ или $t \in [c + \varepsilon, b]$.

Доказательство. Согласно свойствам непрерывных функций $K(c)$ является абсолютным максимумом для $K(t)$ в $[a, b]$. Пусть $K(t)$ кроме c имеет локальные максимумы еще в точках $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ и $M = \max_{1 \leq i \leq n} K(t_i)$; в силу условия 1) имеем

$M < K(c)$. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы $t_i \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ и $M_0 = \max[K(c - \varepsilon), K(c + \varepsilon), M, K(a), K(b)]$. Тогда вне $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ $K(t) \leq M_0$ и $q = M_0 : K(c)$. Выбор величины q сохраняется также в случае, если несколько t_i находится в $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Поскольку

$$K(c) - K(t) = K(c) \left[1 - \frac{K(t)}{K(c)} \right] \geq K(c)[1 - q] \text{ и } \frac{K(t)}{K(c)} = \frac{K(t) - K(c)}{K(c)} + 1 \leq 1 - \frac{\delta}{K(c)},$$

то утверждения леммы эквивалентны. ■

При $K(t) = e^{-g(t)}$ точка c определяется из условия, что $g(t)$ в c имеет минимальное значение. Если $g(t)$ дифференцируема и $c \neq a$, $c \neq b$, то имеем $g'(c) = 0$. Поэтому для определения абсолютного минимума нужно еще сравнить значения $g(t)$ в стационарных точках с $g(a)$ и $g(b)$. Возможно, что также $g'(a) = 0$ или $g'(b) = 0$. Пример, рассмотренный в п. 12.4.2, показывает, что $g'(t)$ в точке c может и не существовать.

Ввиду сказанного можно утверждать, что для интеграла (16.3) при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ единственной критической точкой является та, в которой функция $\exp[-g(t)]$ в $[a, b]$ имеет максимальное значение. Если таких точек несколько, то интеграл сле-

дует разбить на такие части, чтобы в каждой из них находилась только одна критическая точка.

16.1.3. Целесообразно ввести некоторую дополнительную терминологию.

Определение 16.1. Если асимптотическое разложение данной функции состоит из нескольких рядов, то такое разложение называется *составным* (*compound*). Каждый из рядов назовем *асимптотической составляющей*. Если некоторый из этих рядов не входит в любой остаток других разложений, то он называется *существенной частью разложения*. Ряд, входящий в данной области в любой остаток другой составляющей, называется *поглощенным* (*absorbed*). Асимптотическое разложение, все коэффициенты которого равны нулю, назовем *пустым*, или *немым* (*dummy*).

Определение 16.2. Интеграл от подынтегральной функции в (16.3) по некоторой части $[a_1, b_1]$ сегмента $[a, b]$, содержащей одну критическую точку интеграла (16.3), называется *асимптотическим вычетом*, или *асимптотическим вкладом*, от критической точки в интеграл (16.3). Если асимптотическое разложение асимптотического вклада совпадает с разложением для (16.3) или дает одну или несколько его существенных частей, то вклад называется *существенным*. При этом излишнее влияние одного или же обоих концов сегмента $[a_1, b_1]$, которые, в свою очередь, являются *критическими для асимптотического вычета*, в случае необходимости устраняется введением под знак интеграла соответствующего нейтрализатора. Обычно a_1 и b_1 выбираются так, чтобы разность $b_1 - a_1$ была малой, но асимптотическое разложение вклада сохранилось. Если критическая точка c находится внутри (a_1, b_1) , то сумма вкладов по сегментам $[c, b_1]$ и $[a_1, c]$ называется *полным вкладом* от точки c .

Определение 16.3. Критическую точку интеграла (16.3), находящуюся в сегменте $[a_1, b_1]$, который определяет существенный асимптотический вычет, назовем *существенно критической* для интеграла (16.3). Одновременно эта точка является существенно критической для асимптотического вычета. Существенно критической точкой может быть также $\pm \infty$, если $a_1 = -\infty$ или $b_1 = +\infty$. Если в сегменте $[a, b]$ имеется несколько существенно критических точек, то те из них, которые дают первый член асимптотического выражения интеграла, назовем *доминирующими*.

Определение 16.4. Внутренние критические точки, в которых $g(t)$ принимает экстремальное значение, назовем *стационарными критическими точками*, остальные типы критических точек — *нестационарными*. Если t_0 — стационарная критическая точка или конец промежутка интегрирования и $g(t) =$

$= |t - t_0|^{\rho} g_0(t)$, $g_0(t_0) \neq 0$, то ρ назовем *порядком критической точки*. Расположение точки t_0 может зависеть от некоторого параметра, и при изменении его стационарная критическая точка может выйти из промежутка интегрирования. В таких случаях будем применять термин «*внешняя критическая точка*».

В случае интеграла с ядром $K(zg(t))$ к возможным критическим точкам надо присоединить также

5°. Точки, в которых $g(t) = 0$.

К такому выводу приводит следующее априорное утверждение: в окрестности этих точек $|zg(t)|$ при $z \rightarrow \infty$ принимает все возможные значения, а при $|g(t)| \geq \eta > 0$ $|zg(t)|$ при достаточно большом $|z|$ — только большие значения. Подробнее это будет пояснено в конце параграфа.

Если имеем общую подынтегральную функцию $G(z, t) = K(z, t)h(z, t)$ и исследуем асимптотику интеграла при $z \rightarrow z_0$, то надо иметь в виду, что подбор возможных критических точек может зависеть от разбиения G на множители K и h . Часто ядро выбирается в виде $K(z^l g(z, t))$. Тогда в качестве возможных

критических точек следует считать: 1) точки, в которых $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$; 2) концы промежутка интегрирования; 3) точки негладкости $G(z, t)$ и 4) точки, в которых $g(z, t) = 0$.

Следует иметь также в виду, что критические точки и пределы a_1, b_1 в асимптотическом вычете в общем зависят от параметра z и разность $b_1 - a_1$ иногда приходится брать весьма большой, чтобы интеграл стал асимптотическим вычетом. В таких случаях лучше использовать выражение «*асимптотический вклад от окрестности критической точки*». Имеются случаи, когда $a_1 = a, b_1 = b$ (см. § 18). Кроме того, в $[a_1, b_1]$ может находиться несколько существенно критических точек. Если при $z \rightarrow z_0$ они неограниченно приближаются друг к другу (или все стремятся к бесконечности), то назовем их *сливающимися*, а в противном случае — *изолированными*. Более подробно о них будет сказано в § 17 и 18.

Существуют такие типы ядер вида $K(z, g(t))$, для которых $a_1 = a$ и $b_1 = b$, т. е. асимптотическое разложение интеграла зависит от всего промежутка интегрирования, но интегралы обладают еще следующим характерным свойством: если верхний предел интеграла брать переменным и стремящимся к бесконечности, то асимптотика интеграла частично не зависит от верхнего предела. Примеры таких интегралов рассмотрены в первом томе монографии (см. п. 11.2.4, 14.2.5 и 14.4). Ядра этих интегралов названы *размытыми*. Однако и для интегралов с ядрами указанного типа целесообразно ввести понятие критических точек.

Часто в случае размытого ядра $K(x, t)$ существует точка $t=t_0$, в окрестности которой при больших x значения ядра резко меняются, так же как значения ядра e^{-xt} в окрестности $t=0$. Например, в случае ядер $(e^{at} + x)^{-\beta} = x^{-\beta}(1 + x^{-1}e^{at})^{-\beta}$, $\beta > 0$, и $(1 + tx^{-1})^{-x+\beta}$, $t \in [0, \infty)$, такой точкой является $t=\infty$, а в случае ядра $(1 + xt)^{-\beta}$, $\beta > 0$, — $t=0$. Такие точки назовем *слабо критическими* для размытого ядра.

Если ядро состоит из нескольких множителей и для каждого из них $t=t_0$ является критической точкой с разными характеристиками критичности, то t_0 назовем *критической точкой смешанного типа*.

Отметим также, что не для всех типов интегралов легко выделить критические точки. Например, при $n \rightarrow \infty$ для интеграла $\int_{-1}^1 P_n(t)h(t)dt$, $P_n(t)$ — полином Лежандра, расположение критических точек зависит также от свойств функции $h(t)$ [25].

16.2. Метод Лапласа

16.2.1. Из леммы 16.3 следует, что для разложения при $z \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Omega(z) = \int_a^b [K(t)]^z h(t) dt, \quad (16.6)$$

где $K(t) \geq 0$, следует искать точку, в которой $K(t)$ имеет максимум. Эту идею в частном случае, когда $z=n \in N$, первым высказал Лаплас в 1778 г. [107], поэтому рассматриваемый метод называется *методом Лапласа*, а интеграл (16.6) — *интегралом типа Лапласа*. Обычно метод Лапласа применяется при $K(t) = e^{-g(t)}$. Если $\min_{t \in [a, b]} g(t) = g(c)$, $c \in (a, b)$, то интеграл следует раз-

бить на две части и для каждой из них с помощью подстановки промежутков интегрирования привести к $[0, a_i]$, $i=1, 2$, чтобы $\min g(t)$ достигался на одном из концов промежутка. Асимптотическое разложение интеграла рассмотрено в п. 12.4.2, но ввиду важности его сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 16.1. Пусть 1) функция $h(t)$ абсолютно интегрируема в $[0, a]$, $a < \infty$; 2) при $t \rightarrow +0$ $h(t)$ обладает разложением (16.2); 3) $g(t) = d_0 + g_1(t)$, причем при $t \rightarrow +0$

$$g_1(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{\mu_k}, \quad 0 < \mu_k \uparrow +\infty, \quad d_1 > 0, \quad (16.7)$$

d_k — действительные числа; 4) разложение (16.7) можно почленно дифференцировать; 5) для каждого $\eta > 0$ можно найти такое $\delta(\eta) > 0$, что $g_1(t) \geq \delta(\eta) > 0$ при $t \geq \eta$; 6) функция $e^{-zg(t)}$ интегрируема в $[0, a]$ при каждом $z \in S \left[R, \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right]$. Тогда при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$ имеет место разложение

$$\int_0^a e^{-zg(t)} h(t) dt \sim e^{-dz} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma(\nu_k + 1) z^{-\nu_k - 1}, \quad (16.8)$$

где c_k и ν_k определяются разложением

$$G(\tau) = h(t(\tau)) t'(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{\nu_k}, \quad \tau \rightarrow +0, \quad (16.9)$$

и $t(\tau)$ — функция, обратная $g_1(t)$ в некоторой окрестности $[0, t_0]$.

Доказательство теоремы дано в п. 12.4.2. Оно легко следует из леммы Ватсона (12.15). Существование обратной функции $t(\tau)$ обеспечивается условиями 3) и 4). Согласно им при $t \rightarrow +0$ $g_1'(t) \sim d_1 \mu_1 t^{\mu_1 - 1}$, поэтому в некоторой окрестности $[0, t_0]$ $g_1'(t)$ сохраняет знак и функция $g_1(t)$ непрерывна и монотонна. Следовательно, она имеет обратную функцию. По теореме 4.9 и ее дополнениям, $t(\tau)$ обладает асимптотическим разложением при $\tau \rightarrow +0$, которое почленно дифференцируемо, и $t(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{1/\mu_1})$, $t'(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{1/\mu_1 - 1})$. Так как при $t \rightarrow +0$ $h(t) = \mathcal{O}(t^{\lambda_0})$, $\lambda_0 > -1$, то $h(t(\tau)) = \mathcal{O}(\tau^{\lambda_0/\mu_1})$ и $\nu_0 = \frac{\lambda_0 + 1}{\mu_1} - 1 > -1$; $c_0 = a_0 \mu_1^{-1} d_1^{-(\lambda_0 + 1)/\mu_1}$. Условие 6) не является излишним, так как дифференцируемость функции $g(t)$ доказана лишь при $t \in [0, t_0]$. ■

Примечания. 1°. Иногда функции $g_1(t)$ и $h(t)$ заданы в менее точной асимптотической форме, а именно:

$$g_1(t) = \sum_{k=1}^n d_k t^{\mu_k} + o(t^{\mu_n}), \quad (16.10)$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^{\lambda_k} + o(t^{\lambda_m}).$$

Если при этом условии 4) сохраняется, то получаем соотношение

$$\int_0^a e^{-zg(t)} h(t) dt = e^{-zd_0} \left[\sum_{k=0}^p c_k \Gamma(\nu_k + 1) z^{-\nu_k - 1} + o(z^{-\nu_p - 1}) \right], \quad (16.11)$$

где $p \geq \min(m, n - 1)$.

2°. При $g(t) \equiv t$ можно допускать, что λ_k в (16.2) зависит от z , если функции $\Gamma[\lambda_k(z) + 1] z^{-\lambda_k(z)-1}$ образуют шкалу. В случае, когда $\lambda_k = \lambda(z) + k\alpha$ и $\lambda(z) \rightarrow \infty$, шкала образуется при $\lambda(z) z^{-1} = o(1)$.

16.2.2. Часто практически разложение (16.9) для $G(t)$ можно найти разными способами, частично рассмотренными в первом томе настоящей монографии. Укажем важнейшие из них.

1°. Применение метода неопределенных коэффициентов и составление дифференциального уравнения или другого функционального соотношения для $t(\tau)$, из которого можно найти рекуррентную формулу для коэффициентов разложения.

2°. Применение теоремы Лагранжа—Бюрмана 5.5 либо для функции $t(\tau)$, либо для $h(t(\tau))$.

3°. Пусть $\mu_k = \mu + \nu_k$, $\mu > 0$, $\nu_k \in N$, $\nu_1 = 0$, $g_1(t) = t^\mu \varphi(t)$; $\lambda_k = \lambda + \kappa_k$, $\kappa_k \in N$, $\kappa_0 = 0$, $h(t) = t^\lambda f(t)$ и ряды (16.2) и (16.7) сходятся при $|t| \leq \varepsilon$. Число ε можем выбрать так, чтобы в круге

$|t| \leq \varepsilon$ $\varphi(t) \neq 0$ и при $|t| = \varepsilon$ $|\arg \varphi^{1/\mu}(t)| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$. Тогда можно

применить подстановку $g_1(t) = u^\mu$. Отсюда $t(u) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u^k$, $u^\lambda G(u) =$

$= h(t(u)) t'(u) = u^\lambda \sum_{k=1}^{\infty} c_k u^k$. По формуле Коши имеем

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\varepsilon} G(u) u^{-k-1} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} \frac{f(t) dt}{t^{k+1} [\varphi(t)]^{(k+1+\lambda)/\mu}} = \\ &= \frac{\mu}{\Gamma\left(\frac{k+\lambda+1}{\mu}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} dt \int_0^\infty \frac{f(t) e^{-u^\mu} u^{k+\lambda} du}{t^{k+1} [\varphi(t)]^{(k+1+\lambda)/\mu}} = \\ &= \frac{\mu}{\Gamma\left(\frac{k+\lambda+1}{\mu}\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \exp(-v^\mu d_1) v^{k+\lambda} dv \times \\ &\quad \times \int_{|t|=\varepsilon} f(t) \exp[-v^\mu(\varphi - d_1)] t^{-k-1} dt. \end{aligned}$$

Если $f(t) \exp[-v^\mu(\varphi - d_1)] = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(v^\mu) t^j$, то

$$c_k = \frac{\mu}{\Gamma\left(\frac{k+1+\lambda}{\mu}\right)} \int_0^\infty \exp(-v^\mu d_1) v^{k+\lambda} B_k(v^\mu) dv. \quad (16.12)$$

Для коэффициентов $B_k(\tau)$ можно составить рекуррентную формулу. В формуле (16.8) следует брать $\nu_{k+1} = (\lambda + k + 1)/\mu$ и добавлять множитель $1/\mu$.

4°. Если $\mu_k \in N_1$ и ряд (16.7) сходится в некоторой окрестности $[0, \varepsilon]$, то разложение (16.8) можно получить непосредственно по лемме Ватсона, не прибегая к подстановке. При этом a следует заменить на ε . Используем преобразование

$$\begin{aligned} \exp[-zg_1(t)] &= \exp(-zd_1 t^{\mu_1}) \exp\left[-z \sum_{k=2}^{\infty} d_k t^{\mu_k}\right] = \\ &= \exp(-zd_1 t^{\mu_1}) \sum_{k=0}^{\infty} D_k(z) t^k. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Для коэффициентов $D_k(z)$ с помощью соотношений

$$e^{-f(t)} = S(t), \quad -f'(t)S(t) = S'(t) \quad (16.14)$$

можно найти рекуррентную формулу; D_k являются полиномами от z . Далее следует перемножить ряды (16.2) и $\sum_{k=0}^{\infty} D_k(z) t^k$.

После подстановки $t^{\mu_1} = \tau$ и почленного интегрирования получаем ряд, в котором члены еще следует перегруппировать по убывающим степеням z .

5°. Имеются модификации предыдущего метода. Положим в (16.13) $\mu_2 = m$ и введем обозначения $tz^{1/m} = u$, $zt^{\mu_1} = v$. Тогда

$$\begin{aligned} \exp\left[-z \sum_{k=2}^{\infty} d_k t^{\mu_k}\right] &= \\ = \exp\left[-v \sum_{k=2}^{\infty} d_k t^{\mu_k - \mu_1}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k(v) t^k, \end{aligned} \quad (16.15_1)$$

или

$$\begin{aligned} \exp\left[-z \sum_{k=2}^{\infty} d_k t^{\mu_k}\right] &= \\ = \exp\left[-\sum_{k=2}^{\infty} d_k u^{\mu_k} z^{-\mu_k/m+1}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k^*(u) z^{-k/m}. \end{aligned} \quad (16.15_2)$$

Для коэффициентов $B_k(v)$ и $B_k^*(u)$ можно найти рекуррентные формулы согласно (16.14), причем для нахождения $B_k^*(u)$ сле-

дует дифференцировать по z ; $B_k(v)$ и $B_k^*(u)$ являются полиномами.

Модификация (16.15₁) была предложена Буркхардом [52], поэтому ее применение назовем *методом Буркхарда*. Некоторые авторы этот метод применяли для доказательства теоремы 16.1. Это будет рассмотрено в доказательстве теоремы 16.5. Модификация (16.15₂) предложена в работах [109, 110], а применение формулы (16.12) — в [108].

Действия в п. 4° и 5° формально выполнимы и тогда, когда ряд (16.7) расходится. Они применимы также, если μ_k не являются целыми числами, однако в этом случае нахождение $D_k(z)$ и $B_k(v)$ затруднительно. Пример вычисления приведен в [110].

6°. Если имеется ядро $[K(t)]^z$, $K(t) \geq 0$, $K(0) = \max_{t \in [0, a]} K(t) > 0$, то $g(t) = -\ln K(t)$. Пусть при $t \rightarrow +0$ справедливо разложение

$$K(t) = K(0) + f(t) \sim K(0) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k t^k, \quad (16.16)$$

которое можно почленно дифференцировать. Тогда можно найти разложение

$$\ln K(t) \sim \ln K(0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^k, \quad (16.17)$$

пользуясь формальным равенством

$$f'(t) = [K(0) + f(t)] \sum_{k=1}^{\infty} d_k k t^{k-1},$$

откуда следует

$$d_1 = \frac{D_1}{K(0)}, \quad d_{k+1} = \frac{D_{k+1}}{K(0)} - \frac{1}{(k+1)K(0)} \sum_{j=1}^k j d_j D_{k+1-j}, \quad k \geq 1. \quad (16.18)$$

Если $K(t)$ еще удовлетворяет условию 3) леммы 16.2, то можно применить теорему 16.1.

Вместо (16.16) допускается также более общее разложение

$$K(t) \sim K(0) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k t^{\beta_k}, \quad \beta_k \uparrow +\infty. \quad (16.16')$$

В разложении

$$\ln K(t) \sim \ln K(0) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{\mu_k} \quad (16.17')$$

μ_k и d_k можно найти методом неопределенных коэффициентов и показателей степени (см. доказательство теоремы 4.9).

16.2.3. Рассмотрим случай, когда $a = \infty$.

1°. Если $0 \leq g(t) \leq M$, то сходимость интеграла

$$\Omega(z) = \int_0^{\infty} e^{-zg(t)} h(t) dt \quad (16.19)$$

обеспечивается условием $\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty$. Тогда интеграл (16.19) сходится для всех z и теорема 16.1 сохраняется.

2°. Если $g(t) \rightarrow +\infty$, то условия на $h(t)$ можно ослабить. Поскольку при $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$ $|e^{-zg(t)} h(t)| \leq |e^{-z_0 g(t)} h(t)|$, то из абсолютной сходимости интеграла при $z = z_0$ следует его абсолютная сходимость при $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$. Пусть $g(t) \sim At^\alpha$ при $t \rightarrow +\infty$, $A > 0$, $\alpha > 0$. Тогда теорема 16.1 сохраняется, если $h(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$ и $h(t) = O(e^{\beta t^\alpha})$, $\beta \geq 0$, при $t \rightarrow +\infty$. Действительно, тогда вместо леммы 16.2 согласно условию 5) теоремы 16.1 следует применить оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\eta}^{\infty} e^{-zg(t)} h(t) dt \right| \leq e^{-\operatorname{Re} z g(0)} \int_{\eta}^{\omega} e^{-\operatorname{Re} z \delta} |h(t)| dt + \\ & + M e^{-\operatorname{Re} z g(0)} \int_{\omega}^{\infty} \exp \{ -\operatorname{Re} z [g(t) - g(0)] + \beta t^\alpha \} dt \leq o(e^{-zg(0)} z^{-N}) + \\ & + M e^{-\operatorname{Re} z g(0)} \int_{\omega}^{\infty} \exp(-\operatorname{Re} z \gamma t^\alpha) dt = o(e^{-zg(0)} z^{-N}). \quad (16.20) \end{aligned}$$

Мы не проводим более глубокого анализа в случае, когда при $t \rightarrow +\infty$ $g(t)$ — медленно изменяющаяся функция. Тогда соответственно нужно усилить требования относительно $h(t)$. Ограничимся только частным случаем, приведенным в п. 3°.

3°. Рассмотрим в $S \left[R, \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right]$ интеграл

$$\Omega(z) = \int_0^{\infty} [K(t)]^\varepsilon h(t) dt, \quad (16.21)$$

где $\max_{t \geq 0} K(t) = K(0) > 0$. При $z = n$ можно допустить также, что $K(t) < 0$. Важно лишь, чтобы $\max_{t \geq 0} |K(t)| = |K(0)| > 0$. Пусть $K(t) = O(t^{-\alpha})$ при $t \rightarrow +\infty$, $\alpha > 0$. Покажем, что теорема 16.1 сохраняется, если $h(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$ и $h(t) = O(t^\beta)$ при $t \rightarrow +\infty$, $\beta \geq 0$. Выберем $\gamma \in (0, \alpha)$ и такое $z \in S$, что $\operatorname{Re} \gamma z - \beta \geq x_0 > 1$. Из оценки для $K(t)$ следует, что при $t \geq \omega_0$ $K(t) < mt^{-\alpha}$. Выберем $\omega \geq \omega_0$ такое, чтобы $m\omega^{\gamma-\alpha} = qK(0)$, $q \in (0, 1)$. Тогда в оценке (16.20) последний интеграл можно заменить на

$$\left| \int_{\omega}^{\infty} [K(t) t^{\gamma}] z^{t-\gamma z} h(t) dt \right| < M \int_{\omega}^{\infty} (mt^{\gamma-\alpha})^{\operatorname{Re} z} t^{-(\operatorname{Re} \gamma z - \beta)} dt < \\ < M (m\omega^{\gamma-\alpha})^{\operatorname{Re} z} \int_{\omega}^{\infty} t^{-x_0} dt = o([K(0)]^{\operatorname{Re} z} z^{-N})$$

и (16.20) сохраняется.

Отметим также, что $g(t)$ в (16.19) и $K(t)$ в (16.21) (или $|K(t)|$ при $z = n$) на бесконечном интервале могут иметь бесконечное число экстремумов, если сохраняются условия теоремы 16.1. В практическом использовании асимптотического разложения при небольших $\operatorname{Re} z$ иногда приходится учитывать также влияние второго наибольшего максимума $K(t)$, чтобы повысить точность расчетов, хотя разложение, относящееся ко второму максимуму, входит в любой остаток основного ряда. В таких случаях следует выбирать другую шкалу, чтобы охватывать в одном разложении оба максимума, в особенности тогда, когда значение ядра в экстремальной точке зависит от некоторого параметра и при разных значениях параметра доминирующая роль экстремумов может измениться. Это продемонстрировано на примере $K(t) = \sin t/t$, $z = n$, $h(t) \equiv 1$ в работе [117].

16.2.4. Рассмотрим некоторые модификации и частные случаи теоремы 16.1.

1°. Если $g(t)$ имеет минимум в точке $t = a$ и вместо (16.7) при $t \rightarrow a - 0$ имеется разложение

$$g_1(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} d_k (a-t)^{\mu_k}, \quad 0 < \mu_k \uparrow +\infty, \quad d_1 > 0, \quad (16.22)$$

и $g_1(t) \geq \delta(\varepsilon) > 0$ при $t \in [0, a - \varepsilon]$, а

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (a-t)^{\lambda_k}, \quad -1 < \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (16.23)$$

то после подстановки $a - t = \tau$ получаем разложение (16.8).

2°. Пусть $g(t)$ имеет минимум в точке $t=c \in (a, b)$ и в окрестности этой точки справедливы разложения

$$g_1(t) \sim \sum_{k=2m}^{\infty} d_k (t-c)^k, \quad d_{2m} > 0, \quad m \in N_1; \quad (16.24)$$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-c)^k. \quad (16.25)$$

Тогда к интегралу \int_c^{c+c} можно применить теорему 16.1, а к интегралу $\int_{c-\eta}^c$ — 16.2.4, 1°, причем надо учитывать, что в последнем случае имеем другую обратную функцию. Из соотношения

$$\tau^{1/2m} \sim \pm (t-c) \left[\sum_{k=2m}^{\infty} d_k (t-c)^{k-2m} \right]^{1/2m}$$

следует, что $t_1(\tau) \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \tau^{k/2m}$, если $t_1 \geq c$, и $t_2(\tau) \sim c + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k D_k \tau^{k/2m}$, если $t_2 \leq c$. Поэтому имеем $G_1(\tau) \sim \tau^{1/2m-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{k/2m}$, $G_2(\tau) \sim \tau^{1/2m-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \tau^{k/2m}$. Учитывая эти особенности, получаем

$$\int_a^b \exp[-zg(t)] h(t) dt \sim 2e^{-d_0 z} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right) z^{-\frac{2k+1}{2m}}, \quad (16.26)$$

$$c_0 = (1/2m!) a_0 d_{2m}^{-1/2m}.$$

3°. Часто функция $g_1(t)$ в некоторой окрестности точки $t=c$ является аналитической и ряд (16.24) сходится. Тогда имеем $d_{2m} = \frac{g^{(2m)}(c)}{(2m)!}$. Если $c=a$ или $c=b$, то можно непосредственно пользоваться теоремой 16.1 или п. 12.3, 1°; μ_1 в этом случае не обязательно четное число. Если $c=a$, $\mu_1 = m > 1$, $\lambda_k = k$, то $d_1 = \frac{g^m(a)}{m!}$ и в (16.8) $c_0 = \frac{1}{m} a_0 \left(\frac{g^{(m)}(a)}{m!}\right)_{-1/m}$, $\nu_k + 1 = \frac{k+1}{m}$.

4°. Возможен случай, когда функция $g(t)$ в критической точке a имеет разрыв первого рода и $\lim_{t \rightarrow a+0} g(t) = g(a+0) \neq g(a)$. Напри-

мер, $g(t) = t - [1 - t]$; при $a = 0$ $g(0) = -1$, $\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = 0$. Тогда надо

иметь в виду, что значение интеграла не изменится, если значение подынтегральной функции изменить в одной точке. Поэтому если принять, что $g(a) = g(a+0)$, то получим прежний интеграл.

5°. Возможен также случай, когда $g(t) = \min_{t \in [a, b]} g(t)$ при $t \in [a_1, b_1] \subset (a, b)$. Тогда по теореме 16.1 и п. 16.2.4, 1° разложим интегралы по сегментам $[a, a_1]$ и $[b_1, b]$ и добавим интеграл $e^{-zg(a)} \int_{a_1}^{b_1} h(t) dt$.

6°. Пусть $\mu_k = \mu + k\gamma$, $\gamma > 0$, и под знаком интеграла (16.8) добавлен множитель $\ln^p t$, $p \in N_1$. Тогда можно применить подстановку $g_1(t) = u^\mu$. При $u \rightarrow +0$ получим

$$t(u) \sim u \sum_{k=0}^{\infty} A_k u^{k\gamma}, \quad A_0 > 0,$$

$$\ln^p t \sim \left[\ln u + \ln \sum_{k=0}^{\infty} A_k u^{k\gamma} \right]^p =$$

$$= \sum_{j=0}^p \ln^j u \sum_{k=0}^{\infty} D_{kj} u^{k\gamma}.$$

При разложении $\ln^p t$ используется (16.17). Затем применяются результаты п. 12.3.6.

16.2.5. Метод, использованный в п. 16.2.1, 4°, дает основание ожидать, что условие 4) теоремы 16.1 является излишним и дифференцируемость функции $g(t)$ не требуется. Покажем, что это соображение действительно имеет место. Сначала докажем вспомогательные теоремы.

Теорема 16.2. Если 1) $h(t)$ абсолютно интегрируема в $[0, a]$, $a < \infty$; 2) $\lim_{t \rightarrow +0} h(t) = A \neq 0$, то при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \vartheta$, $\vartheta > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$

$$I(z) = \int_0^a \exp(-zt^\alpha) t^{\lambda-1} h(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) z^{-\lambda/\alpha} [1 + o(1)]. \quad (16.27)$$

Доказательство. Если $h(0) \neq A$, то в силу сказанного в п. 16.2.4, 4° можно $h(t)$ заменить на $h_0(t) = A$ при $t = 0$ и $h_0(t) =$

$=h(t)$ при $t>0$. Поэтому будем считать, что $h(0)=A$, и при фиксированном $\varepsilon>0$ найдем такое $\eta>0$, что при $t\in[0, \eta]$ $h(t)=A+\rho(t)$, где $|\rho(t)|<\varepsilon$, т. е. $h(t)=A+o(1)$. Затем можно пользоваться леммой 2.4, в которой $f(t)=[h(t^{1/\alpha})-A]t^{(\lambda/\alpha)-1}$, $g(t)=t^{\lambda/\alpha-1}$, так как $G(x)=\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)x^{-\lambda/\alpha}$, $G(z)=\mathcal{O}(G(x))$ при $|\arg z|\leq\frac{\pi}{2}-\vartheta$. Тот факт, что в лемме 2.4 верхний предел равен бесконечности, не имеет существенного значения, так как

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\eta}^a \exp(-zt^\alpha) t^{\lambda-1} h(t) dt \right| \leq \\ & \leq \exp(-\operatorname{Re} z \eta^\alpha) \int_0^a t^{\lambda-1} |h(t)| dt \leq \\ & \leq M \exp(-|z| \eta^\alpha \sin \vartheta) = O(z^{-N}). \end{aligned}$$

При $z=x$ теорема следует из теоремы 6.1, если брать $L_0(t) \equiv 1$. ■

Теорема 16.3. Если 1) $g(t)=t^\alpha G(t)$, где $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t)=B>0$; 2) для любого $\eta>0$ можно найти такое $\delta>0$, что $g(t) \geq \delta$ при $t \geq \eta$; 3) функция $e^{-xg(t)}$ интегрируема в $[0, a]$ при каждом $x \geq x_0>0$; 4) $h(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 16.2, то при $x \rightarrow +\infty$, $\lambda>0$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \int_0^a e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h(t) dt = \\ &= \frac{A}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} [1+o(1)]. \end{aligned} \quad (16.28)$$

Доказательство. Снова примем, что $G(0)=B$, $h(0)=A$. Сначала допустим, что $h(t)$ принимает действительные значения. Без ограничения общности будем считать, что $A>0$. Тогда можно найти такое $\eta_1>0$, что $h(t) \geq 0$ при $t \in [0, \eta_1]$. Положим $G(t) = B[1+\psi(t)]$. Для данного $\varepsilon>0$ можно найти такое $\eta_2>0$, что $|\psi(t)|<\varepsilon$ при $t \in [0, \eta_2]$. Берем $\eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2)$ и получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\eta_0}^a e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h(t) dt \right| \leq \\ & \leq e^{-x\delta} \int_0^a t^{\lambda-1} |h(t)| dt = O(e^{-x\delta}). \end{aligned} \quad (16.29)$$

Потом используем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{\eta_0} \exp[-xBt^\alpha(1+\varepsilon)]t^{\lambda-1}h(t) dt < \\ & < \int_0^{\eta_0} e^{-xg(t)}t^{\lambda-1}h(t) dt < \int_0^{\eta_0} \exp[-xBt^\alpha(1-\varepsilon)]t^{\lambda-1}h(t) dt. \end{aligned}$$

В силу соотношений

$$(1-\varepsilon)^{-\mu} \leq 1 + \mu 2^{\mu+1} \varepsilon \quad \text{при } \mu > 0, \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \quad (16.30)$$

$$(1+\varepsilon)^{-\mu} \geq 1 - \mu \varepsilon \quad \text{при } \mu > 0, \varepsilon \geq 0, \quad (16.31)$$

которые доказываются элементарными средствами анализа, по теореме 16.2 имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\eta_0} \exp[-xBt^\alpha(1-\varepsilon)]t^{\lambda-1}h(t) dt = \frac{1}{\alpha} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} (1- \\ & - \varepsilon)^{-\frac{\lambda}{\alpha}} [1 + o(1)] \leq \frac{1}{\alpha} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} + \\ & + \frac{\hat{\lambda}}{\alpha^2} 2^{\frac{\lambda}{\alpha}+1} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \varepsilon + o\left(x^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\right); \\ & \int_0^{\eta_0} \exp[-xBt^\alpha(1+\varepsilon)]t^{\lambda-1}h(t) dt \geq \frac{1}{\alpha} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} - \\ & - \frac{\hat{\lambda}}{\alpha^2} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \varepsilon + o\left(x^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Пусть

$$\Delta(x) = \Omega(\alpha) - \frac{1}{\alpha} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Тогда из полученных неравенств следует, что

$$\Delta(x) \leq \frac{\hat{\lambda}}{\alpha^2} 2^{\frac{\lambda}{\alpha}+1} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \varepsilon + o\left(x^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\right) + O(e^{-x\delta}),$$

$$\Delta(x) \geq -\frac{\hat{\lambda}}{\alpha^2} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) x^{-\frac{\lambda}{\alpha}} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} \varepsilon + o\left(x^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\right) + O(e^{-x\delta}),$$

и поэтому для каждого $\varepsilon_0 > 0$ можно найти такое ω , что при $x > \omega$ будем иметь $|\Delta(x)| < \varepsilon_0 \frac{\lambda}{\alpha^2} A \Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) 2^{\frac{\lambda}{\alpha} + 1} B^{-\frac{\lambda}{\alpha}} x^{-\frac{\lambda}{\alpha}}$, т. е. $\Delta x = o\left(x^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\right)$.

Если $h(t)$ принимает комплексные значения, то возьмем $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$. При $\lim_{t \rightarrow +0} h_1(t) \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow +0} h_2(t) \neq 0$ для отдельных $h(t)$ сохраняется прежнее доказательство. Если $\lim_{t \rightarrow +0} h_2(t) = 0$, то для второй части интеграла используется оценка

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &= \left| \int_0^{\eta_0} e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h_2(t) dt \right| < \varepsilon_0 \int_0^{\eta_0} e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} dt < \\ &< \varepsilon_0 \int_0^{\eta_0} \exp[-xBt^\alpha(1-\varepsilon)] t^{\lambda-1} dt, \end{aligned}$$

которая показывает, что $I_2(x) = o\left(x^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\right)$. ■

Примечания. 1°. Если $g'(0) = 0$, $g''(0) > 0$, $h(t)$ в точке $t=0$ непрерывна, то из (16.28) следуют формулы

$$\begin{aligned} &\int_0^a e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) h(0) \left[\frac{1}{2} g''(0) \right]^{-\frac{\lambda}{2}} e^{-xg(0)} x^{-\frac{\lambda}{2}} [1 + o(1)]; \quad (16.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^a [K(t)]^\kappa t^{\lambda-1} h(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) h(0) \left[-\frac{1}{2} K''(0) \right]^{-\frac{\lambda}{2}} [K(0)]^{\kappa + \frac{\lambda}{2}} x^{-\frac{\lambda}{2}} [1 + o(1)]. \quad (16.33) \end{aligned}$$

В силу примечания 1° к теореме 16.1 эти формулы справедливы при $|\arg x| \leq \frac{\pi}{2} - \vartheta$. Если $g(t)$ имеет минимум в точке $c \in (a, b)$, то функции h , g , g'' , K , K'' в правых частях формул (16.32) и (16.33) следует вычислить при $t=c$ и добавить множитель 2.

2°. Теорема 16.3 остается справедливой, если $\lambda = \lambda(t)$ и функция $\lambda(t)$ обладает следующими свойствами: 1) при $t \rightarrow +0$ $\lambda(t) = \lambda(0) + O(t^\rho)$, $\rho > 0$, $\lambda(0) > 0$; 2) $\lambda(t)$ ограничена в $[0, a]$; 3) $t^{\lambda(t)}$ интегрируема в $[0, a]$. Поскольку $t^{\lambda(t)-1} = t^{\lambda(0)-1} t^{\lambda(t)-\lambda(0)}$ и $t^{\lambda(t)-\lambda(0)} = \exp[(\lambda(t) - \lambda(0)) \ln t] \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +0$, можно в интеграле (16.28) $\lambda(t)$ заменить на $\lambda(0)$ и $t^{\lambda(t)-\lambda(0)}$ присоединить к $h(t)$.

3°. Формула (16.29) имеет место для любого $\eta_0 > 0$ и любой функции $g(t)$, удовлетворяющей только условиям 2) и 3) теоремы 16.3. Пусть еще дополнительно к этим условиям $g(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$ и $h(t) > 0$ при $t \in [0, \eta_0]$. Тогда можно найти такое $\eta_2 < \eta_0$, что при $t \in [0, \eta_2]$ $g(t) < \frac{\delta}{2}$ и

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta_0} e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h(t) dt &= \int_0^{\eta_2} e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h(t) dt + \int_{\eta_2}^{\eta_0} e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h(t) dt > \\ &> \exp\left(-\frac{x\delta}{2}\right) \int_0^{\eta_2} t^{\lambda-1} h(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при перечисленных условиях для любого фиксированного $\eta \in (0, a)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет место

$$\int_0^a e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h(t) dt \sim \int_0^{\eta} e^{-xg(t)} t^{\lambda-1} h(t) dt. \quad (16.34)$$

Теорема 16.4. Теорема 16.1 остается справедливой, если в ней отбросить условие 4), причем функция $t(\tau)$, обратная $g(t)$, и $t'(\tau)$ в (16.9) получаются формальным путем.

Доказательство. 1°. Пусть в формуле (16.7) бесконечно много $d_k \neq 0$. Без ограничения общности будем считать $d_0 = 0$. Имеем представление

$$g(t) = \sum_{k=1}^n d_k t^{\mu_k} + d_{n+1} t^{\mu_{n+1}} (1 + \rho_{n+1}), \quad d_{n+1} \neq 0.$$

Обозначим $\sum_{k=1}^n d_k t^{\mu_k} = g_n(t)$. Если в теореме 16.1 заменить $g(t)$ на $g_n(t)$, то теорема будет иметь место. Обозначим обратную функцию через $t_n(\tau)$, а соответствующую функцию в (16.9) — через $G_n(\tau)$. Пусть в выражении для $g_n'(t)$ первые m членов совпадают с членами, которые получаем, формально дифференцируя разложение для $g(t)$. Тогда в разложении для $G_n(\tau)$ и

формальном разложении для $G(\tau)$ совпадает тоже по меньшей мере m членов. Выберем такое η , чтобы $|\rho_{n+1}(t)| \leq \delta < 1$ при $t \in [0, \eta]$. Очевидно, мы должны оценить только интеграл по сегменту $[0, \eta]$.

2°. Пусть $d_{n+1} > 0$. В силу обвертывающего свойства для e^{-z} согласно лемме 3.5 и теореме 16.1 имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\eta} e^{-zg(t)} h(t) dt - \int_0^{\eta} e^{-zg_n(t)} h(t) dt \right| \leq \\ & \leq \int_0^{\eta} \exp(-\operatorname{Re} zg_n(t)) |1 - \exp[-zd_{n+1}t^{\mu_{n+1}}(1 + \rho_{n+1})]| |h(t)| dt \leq \\ & \leq M|z|d_{n+1} \int_0^{\eta} \exp(-\operatorname{Re} zg_n(t)) t^{\mu_{n+1}}(1 + \delta) t^{\lambda_0} dt = \\ & = |z| \mathcal{O}(z^{-(\lambda_0 + \mu_{n+1})/\mu_1}); \int_0^{\eta} e^{-zg(t)} h(t) dt = \sum_{h=0}^{m-1} c_h \Gamma(\nu_h + 1) z^{-\nu_h - 1} + \\ & \quad + O(z^{-\nu_m - 1}) + O\left(z^{-\frac{\lambda_0 + \mu_{n+1}}{\mu_1} + 1}\right). \end{aligned}$$

Эта оценка доказывает утверждение теоремы.

3°. Пусть $d_{n+1} < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\eta} e^{-zg(t)} h(t) dt - \int_0^{\eta} e^{-zg_n(t)} h(t) dt \right| \leq \\ & \leq \int_0^{\eta} e^{-\operatorname{Re} zg(t)} |1 - \exp[zd_{n+1}t^{\mu_{n+1}}(1 + \rho_{n+1})]| |h(t)| dt \leq \\ & \leq M|z| |d_{n+1}| (1 + \delta) \int_0^{\eta} e^{-\operatorname{Re} zg(t)} t^{\mu_{n+1}} t^{\lambda_0} dt. \end{aligned}$$

Поскольку $g(t) = t^{\mu_1}[d_1 + o(1)]$, то по теореме 16.3 получаем прежнюю оценку.

4°. Пусть $g(t) = g_n(t) + o(t^N)$. Поскольку случай, когда $g(t) \equiv g_n(t)$, является тривиальным, то допустим, что $g(t) \not\equiv g_n(t)$, и докажем, что при разложении $\Omega(z)$ все же можно $g(t)$ заменить на $g_n(t)$. Выберем $M > n$ и рассмотрим функцию $g_M(t) = g_n(t) -$

$-t^M$. Для любого фиксированного $m \in N$ можно найти такое M , что в разложениях, которые получаем, заменяя в $\Omega(z)$ $g(t)$ на $g_n(t)$ и на $g_M(t)$, первые m членов совпадают. Положим $g(t) = g_n(t) + t^M \rho(t)$ и выберем η так, чтобы при $t \in [0, \eta]$ $|\rho(t)| \leq \delta < 1$. Поскольку $g(t) - g_M(t) = t^M [1 + \rho(t)]$, то дальше можно поступать как в п. 2°. ■

В случае, когда $g(t) = g_n(t) + e^{-1/t} \sin e^{2/t}$, условие 4) в теореме 16.1 не выполняется и нельзя применить подстановку $g(t) = \tau$, однако теорема 16.4 остается верной.

16.2.6. Рассмотрим доказательство модифицированной теоремы 16.4 в случае, когда разложение строится по методу Буркхарда.

Теорема 16.5. Пусть 1) функция $h(t)$ абсолютно интегрируема в $[0, a]$; 2) при $t \rightarrow +0$ $h(t)$ обладает разложением (16.2); 3) $G(t, z)$ интегрируема и равномерно ограничена относительно $z \in S \left[R, \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right]$, $\varepsilon > 0$, при $t \in [0, a]$; 4) при $t \rightarrow +0$ для каждого $n \in N$ имеет место

$$G(t, z) = \sum_{k=0}^n G_k(t^\beta z) t^{\mu_k} + O(t^{\mu_{n+1}}), \quad (16.35)$$

где $G_k(\tau)$ — аналитические функции при $|\tau| \leq d$, $|\arg \tau| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $-1 < \mu_k \uparrow +\infty$, $\mu_0 + \lambda_0 > -1$, $\beta > \alpha$, и оценка в (16.35) равномерна относительно $z \in S$. Тогда при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$ имеет место разложение

$$\Omega(z) = \int_0^a \exp(-zt^\alpha) G(t, z) h(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-\nu_k}, \quad (16.36)$$

где метод, по которому можно вычислить c_k и ν_k , указан в доказательстве, $c_0 = \frac{1}{\alpha} a_0 G_0(0)$, $\nu_0 = -\frac{1}{\alpha} (\mu_0 + \lambda_0 + 1)$.

Доказательство. Можно найти такое $\delta > 0$, что $\alpha + \delta < \beta$. Согласно условиям имеем

$$\left| \int_0^a \exp(-zt^\alpha) G(t, z) h(t) dt \right| < \\ |z|^{-1/(\alpha+\delta)} \\ < M \exp[-\operatorname{Re} z |z|^{-\alpha/(\alpha+\delta)}] \int_0^a |h(t)| dt = o(z^{-N}),$$

поэтому достаточно исследовать разложение интеграла по сегменту $[0, |z|^{-1/(\alpha+\delta)}]$. В силу (16.35) и (16.2) получаем

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \sum_{k=0}^n |z|^{-1/(\alpha+\delta)} \int_0^{|z|^{-1/(\alpha+\delta)}} \exp(-zt^\alpha) G_k(t^\beta z) t^{\mu_k} h(t) dt + \\ &+ \int_0^{|z|^{-1/(\alpha+\delta)}} \exp(-zt^\alpha) \rho_n(t, z) h(t) dt + o(z^{-N}); \quad (16.37) \\ &\left| \int_0^{|z|^{-1/(\alpha+\delta)}} \exp(-zt^\alpha) \rho_n(t, z) h(t) dt \right| < \\ &< M \int_0^{|z|^{-1/(\alpha+\delta)}} \exp(-\operatorname{Re} zt^\alpha) t^{\mu_{n+1}+\lambda_0} dt = \\ &= M (\operatorname{Re} z)^{-(\mu_{n+1}+\lambda_0+1)/\alpha} \int_0^{|z|^{\delta/(\alpha+\delta)} \cos \varphi} e^{-\tau |z|^{(\mu_{n+1}+\lambda_0+1)/\alpha}} d\tau = \\ &= O(z^{-(\mu_{n+1}+\lambda_0+1)/\alpha}). \end{aligned}$$

Найдем разложение для интегралов в сумме (16.37). Имеем

$$\begin{aligned} I_k(z) &= \int_0^{|z|^{-1/(\alpha+\delta)}} \exp(-zt^\alpha) G_k(t^\beta z) t^{\mu_k} h(t) dt = \\ &= \sum_{j=0}^n a_j |z|^{-1/(\alpha+\delta)} \int_0^{|z|^{-1/(\alpha+\delta)}} \exp(-zt^\alpha) G_k(t^\beta z) t^{\mu_k+\lambda_j} dt + O(z^{-(\mu_k+\lambda_{n+1}+1)/\alpha}); \end{aligned} \quad (16.38)$$

$$\begin{aligned} J_{jk}(z) &= \int_0^{|z|^{-1/(\alpha+\delta)}} \exp(-zt^\alpha) G_k(t^\beta z) t^{\mu_k+\lambda_j} dt = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{G_k^{(m)}(0)}{m!} |z|^{-1/(\alpha+\delta)} \int_0^{|z|^{-1/(\alpha+\delta)}} \exp(-zt^\alpha) t^{\beta m + \mu_k + \lambda_j} dt \sim \end{aligned}$$

$$\sim \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta m + \mu_k + \lambda_j + 1}{\alpha}\right)}{m!} G_h^{(m)}(0) z^{-\frac{(\beta-\alpha)m + \mu_k + \lambda_j + 1}{\alpha}}. \quad (16.39)$$

Следовательно, функции $I_{jk}(z)$ при фиксированной паре (k, j) имеют разложение в степенной ряд. $I_{jk}(z) = \tilde{O}(z^{-(\mu_k + \lambda_j + 1)/\alpha})$, поэтому функции $I_k(z)$ образуют шкалу и $I_k(z) = \frac{1}{\alpha} a_0 \Gamma\left(\frac{\mu_k + \lambda_0 + 1}{\alpha}\right) \times \times G_h(0) z^{-(\mu_k + \lambda_0 + 1)/\alpha} [1 + o(1)]$. Подставляя (16.39) в (16.38), а потом в (16.37), после перегруппировки членов получаем (16.36). Последовательно можно определить c_k и ν_k . ■

Примечания. 1°. Можно доказать подобную теорему в случае, когда $G(t, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} G_k(t^\beta z) z^{-\mu_k}$, $\mu_k \uparrow \infty$, т. е. можно обосновать применение формулы (16.15₂). Этим получаем некоторое обобщение теоремы 14.1. Для слабоасимптотических разложений такая теорема при других условиях дана в [69].

2°. Как видно из (16.39), теорема сохраняет силу, если в (16.35) коэффициенты имеют вид $G_k(t^\beta z^\nu)$, где $\beta - \alpha \nu > 0$.

Используем теперь теорему 16.5 для другого доказательства теоремы 16.4 в случае, когда $\mu_k \in N$, ряд (16.7) сходится при $t \in [0, \eta_1]$ и можно найти такие $\sigma > 0$, $\eta_2 > 0$, что $g_1(t) \geq \sigma t^m$ при $t \in [0, \eta_2]$. Пусть $\mu_2 = m + l$, $l \in N_1$, $\mu_k = m + l + k - 2$, $k \geq 3$. Применим модификацию Буркхарда (16.15₁) при обозначении $zt^{\mu_2} = v$. Тогда при $t \in [0, \eta_1]$

$$\begin{aligned} \exp\left[-z \sum_{k=2}^{\infty} d_k t^{\mu_k}\right] &= \exp\left[-v \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+2} t^k\right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k(v) t^k = G(t, z), \end{aligned} \quad (16.40)$$

где

$$B_0(v) = \exp(-v d_2), \quad -v \sum_{j=0}^n B_j d_{n+3-j} (n+1-j) = (n+1) B_{n+1}.$$

Из сходимости ряда (16.7) следует, что можно найти такое $\kappa > 0$, что $|d_{k+2} k| < \kappa^k$; κ выберем так, чтобы при $|v| \leq 1$, $\operatorname{Re} v \geq 0$ $|B_0(v)| < \kappa$. При указанных значениях v методом индукции легко доказать, что $|B_k(v)| \leq |v| \kappa^{k+1}$.

В силу условия 5) теоремы 16.1 достаточно рассмотреть

интеграл по сегменту $[0, \eta]$, $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. В сегменте $[0, |z|^{-1/(m+\delta)}]$ остаток ряда (16.35) имеет оценку

$$|\rho_n(t, z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k t^k \right| \leq |v| \sum_{k=n+1}^{\infty} \kappa^{k+1} t^k = \frac{|v| \kappa^{n+2} t^{n+1}}{1 - \kappa t} < M t^{n+1},$$

так как $R = |z|$ можно брать столь большим, чтобы $|v| < 1$, $\kappa R^{-1/(m+\delta)} < 1$. Таким образом, условие 4) теоремы 16.5 удовлетворено и интеграл по $[0, |z|^{-1/(m+\delta)}]$ имеет разложение (16.36). Поскольку условие 3) теоремы 16.5 в данном случае не всегда выполнено, то оценку интеграла по сегменту $[|z|^{-1/(m+\delta)}, \eta]$ получим непосредственно:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|z|^{-1/(m+\delta)}}^{\eta} e^{-zg_1(t)} h(t) dt \right| \leq \\ & \leq \int_{|z|^{-1/(m+\delta)}}^{\eta} \exp(-\operatorname{Re} z \sigma t^m) |h(t)| dt = o(z^{-N}). \end{aligned}$$

Этим теорема 16.4 при данных дополнительных условиях доказана. Хотя эти условия немного сужают теорему 16.4, последний метод доказательства оказывается более удобным в случае более сложных интегралов, которые рассмотрены в гл. V. Если выбирать $z t^{\mu_1} = v$, т. е. непосредственно (16.15₁), то нельзя сослаться на теорему 16.5, так как по этой теореме должно быть $\beta > \alpha$. Обоснование метода Буркхарда в этом случае в более общей форме дано в п. 19.2.5. Некоторые примеры к теореме 16.5 приведены в п. 12.1.3 и 14.1.3.

16.2.7. Возможности обобщения метода Лапласа далеко не исчерпаны, так как в литературе рассмотрены только наиболее простые случаи, когда $h(t)$ и $g(t)$ разлагаются в степенные ряды. Однако можно использовать разные ряды по другим шкалам. В этой связи напомним теорему Бекеша 6.3. Укажем еще некоторые особые случаи применения степенных рядов.

1°. Обобщая содержание теорем 16.2 и 16.3, можно поставить следующий вопрос: при каких условиях относительно $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ из $g_1(t) \sim g_2(t)$, $h_1(t) \sim h_2(t)$ при $t \rightarrow +0$ имеет место соотношение

$$\Omega_1(z) = \int_0^a e^{-zg_1(t)} h_1(t) dt \sim \int_0^a e^{-zg_2(t)} h_2(t) dt = \Omega_2(z), \quad (16.41)$$

если $z \rightarrow +\infty$? Из примеров $g_1(t) \equiv g_2(t) = t$, $h_1(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(iat^{-1}) + 1 \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(iat^{-1}) = h_2(t)$, $\Omega_1(x) = 1/x + \sqrt{\pi/x} \times$

$\times \exp[-(1-i)\sqrt{2\alpha x}] \sim \frac{1}{x}$, $\Omega_2(x) = \Omega_1(x) - \frac{1}{x}$ и $h_1(t) \equiv h_2(t) \equiv 1$,
 $g_1(t) = L(t) \in \mathcal{L}_0$, $g_2(t) = L(\alpha t)$, $\alpha > 1$, $L(t) = o(1)$ при $t \rightarrow +0$,

$$\int_0^a e^{-xL(\alpha t)} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{a/\alpha} e^{-xL(\tau)} d\tau \sim \frac{1}{\alpha} \int_0^a e^{-xL(\tau)} d\tau,$$

приведенных в работах [33, 47], вытекает, что соотношение (16.41) не всегда верно. Последнее соотношение следует из (16.34).

В случае $g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv t$ ответ на поставленный вопрос вытекает из леммы 2.4. Модификация этой леммы имеются в работах [34, 40, 47]. При $h_1(t) \equiv h_2(t) \equiv 1$ некоторые условия приведены в [33]. Например, (16.41) имеет место при $z = x$, если к условиям в примечании 3° к теореме 16.3 относительно $g_1(t)$ и $g_2(t)$ добавим еще следующие условия: 1) $g_1(t) \sim g_2(t)$ при $t \rightarrow +0$ и 2) можно найти такую постоянную $c \in (0, 1)$, что $\limsup_{t \rightarrow +0} \frac{g_2(ct)}{g_2(t)} < 1$.

2°. Может быть, что для интеграла (16.21) $K(t) < \lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = K(\infty)$. Из предыдущего следует, что асимптотический вычет интеграла равен $\int_{\omega}^{\infty} [K(t)]^{\omega} h(t) dt$, где ω — достаточно большое число, и что разложение этого интеграла можно построить по теореме 16.1 или 16.4 с помощью подстановки $K(t) = K(\infty)e^{-\tau}$. Однако не всегда $K(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеет асимптотическое разложение в степенной ряд, а обращение более сложного разложения может вызвать серьезные затруднения. Рассмотрим пример,

когда $K(t) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf} t]$, где

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-u^2) du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf} t.$$

В силу формулы (8.9) из подстановки $K(t) = e^{-\tau}$ следует $t^2 = -\ln \tau + \ln \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \ln t + f(t^2)$, $f(u) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u^{-k}$ при $u \rightarrow +\infty$. Со-

гласно формуле (4.46) при $x = \ln \frac{1}{2\tau\sqrt{\pi}}$ имеем

$$t^2 \sim x - \frac{1}{2} \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{\ln x} \right) \left(\frac{\ln x}{x} \right)^k, \quad x \rightarrow +\infty,$$

а в силу теоремы 4.6

$$t \sim \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} B_k (1/\ln x) (\ln x/x)^k.$$

Найдем для интеграла (16.21) при данном $K(t)$ только асимптотическое выражение (подобный пример более подробно рассмотрен в п. 24.2.1). Интеграл сходится, если при $t \rightarrow +\infty$ $h(t) \sim At^{-\lambda}$, $\lambda > 1$. Тогда при $a \geq 0$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ согласно (13.46) имеем

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} [K(t)]^{\lambda} h(t) dt &\sim \int_{\omega}^{\infty} [K(t)]^{\lambda} h(t) dt \sim \\ &\sim \frac{A}{2} \int_0^{\ln[1/K(\omega)]} \exp(-\tau z) \frac{d\tau}{\tau (\ln 1/\tau)^{(\lambda+1)/2}} = \\ &= \frac{A}{2} \left[o(z^{-N}) + \frac{2}{\lambda-1} z \int_0^{\ln[1/K(\omega)]} e^{-z\tau} (\ln 1/\tau)^{-(\lambda-1)/2} d\tau \right] \sim \\ &\sim \frac{A}{\lambda-1} (\ln z)^{-(\lambda-1)/2}. \end{aligned} \quad (16.42)$$

Если же $h(t) \sim Ae^{-t^2}$, λ — любое действительное число, то аналогично получаем

$$\int_a^{\infty} [K(t)]^{\lambda} h(t) dt \sim A \sqrt{\pi} z^{-1} (\ln z)^{\lambda/2}. \quad (16.43)$$

Этот случай приведен в [66, 148] при $h(t) = t \exp(-t^2)$.

Гораздо проще разложить при $n \rightarrow \infty$ интеграл

$$T_m(x, n) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \operatorname{sech}^m t \operatorname{th}^n t dt,$$

имеющий аналогичное ядро $\operatorname{th}^n t$, так как в данном случае имеется формула [32]

$$\begin{aligned} T_m(x, n) &= 2^{m/2 - x/2 - 1} B(x/2 + m/2, n+1) \\ &{}_2F_1 \left(\frac{x}{2} + \frac{m}{2}, \frac{x}{2} + 1 - \frac{m}{2}; \frac{x}{2} + \frac{m}{2} + n + 1; \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Из нее разложение находится непосредственно. Имеем

$$T_m(x, n) \sim 2^{m-1} (2n)^{-m/2-x/2} \Gamma\left(\frac{x}{2} + \frac{m}{2}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

3°. Возможно, что $\max K(t) = +\infty$, если $K(t)$ — медленно изменяющаяся функция. Пример, когда $K(t) = \ln t$, $z = n$, рассмотрен в п. 12.5.4. Иной метод в этом случае применен в п. 18.4.2, 3°.

4°. Имеются разные случаи, когда один из пределов интеграла тоже зависит от параметра. Отметим следующие возможности.

А. Интеграл

$$\Omega(x) = \int_{f(x)}^{\eta} e^{-xg(t)} h(t) dt, \quad (16.44)$$

где $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $g(t) = o(1)$ при $t \rightarrow +0$, подстановкой можно привести к интегралу

$$\Omega(x) = \int_{f_1(x)}^{\eta_1} e^{-x\tau} H(\tau) d\tau, \quad f_1(x) \rightarrow 0.$$

Его асимптотика исследована в п. 12.3.4. В зависимости от того, как быстро $f_1(x) \rightarrow 0$, могут быть разные подслучаи. В п. 12.3.4 рассмотрены только те из них, когда $f_1(x)$ при $x \rightarrow +0$ имеет степенную асимптотику, но рассмотренный метод применим и в других случаях.

Б. Нижний предел интеграла может являться независимым параметром. Иногда приходится искать равномерную асимптотику относительно этого параметра. В качестве простого примера рассмотрим

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \int_a^{\infty} \frac{\exp[-z(1+t^2)]}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \exp[-z(1+a^2)] \int_0^{\infty} \frac{e^{-zv}}{(a^2+1+v)\sqrt{a^2+v}} dv, \end{aligned}$$

где $a \in [0, a_0]$.

При $a > 0$ и $a = 0$ можно применить лемму Ватсона, но получим разные разложения. Равномерное разложение получается с помощью способа, изложенного в п. 12.3.2. Имеем

$$\Omega(z) \sim \frac{1}{2} \exp[-z(1+a^2)] \times$$

$$\times \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h k!}{(a^2+1)^h} a^{2h+1} \psi \left(k+1; k+\frac{3}{2}; a^2 z \right). \quad (16.45)$$

Отсюда в силу формулы (8.36) при $a^2 z \rightarrow \infty$ и соотношения [1]

$$a^{2h+1} \psi \left(k+1; k+\frac{3}{2}; a^2 z \right) \sim \frac{\Gamma \left(k+\frac{1}{2} \right)}{k! z^{\frac{k+1}{2}}} \text{ при } a \rightarrow +0 \text{ можно найти}$$

указанные разложения. Если $a^2 z \sim c \neq 0$, то $a^2 \sim cz^{-1}$ и ряд (16.45) тоже дает асимптотическое разложение.

В. Разложение интеграла

$$\int_0^{f(|z|)} e^{-zg(t)} h(t) dt \quad (16.46)$$

совпадает с разложением (16.8), если $\min g(t) = g(0)$ и $f(|z|) \geq a > 0$ при $|z| \geq R$. Однако может быть, что $f(|z|) \rightarrow \infty$ при $|z| \rightarrow \infty$, но функция $g(t)$ при достаточно большом t монотонно убывает и всегда имеет минимум на правом конце сегмента интегрирования, т. е. при $t=f(|z|)$ для каждого z . Если $f(|z|)$ также изменяется монотонно, то с помощью подстановки задачу о разложении можно привести к п. А. Могут также появиться новые модификации.

При $g(t) = \frac{-t^2}{1+t^2}$ подстановка $\frac{1}{1+t^2} = \tau$ приводит интеграл (16.46) к п. 12.3.4, если $f(|z|)$ при $|z| \rightarrow \infty$ имеет степенную асимптотику. Можно рассматривать также более общую функцию $g(t)$, которая при $t \rightarrow \infty$ разлагается по степеням t^{-1} . При $g(t) = e^{-t}$ подстановка $e^{-t} = \tau$ приводит (16.46) к интегралу, разложение которого получаем, немного расширяя теоремы, изложенные в п. 13.3. В работе [8] рассмотрено несколько конкретных примеров интеграла $\int_a^{f(n)} [K(t)]^n h(t) dt$, причем в зависимости от дополнительных параметров максимум функции $K(t)$ достигается либо при $t=f(n)$, либо внутри промежутка интегрирования.

Асимптотика интеграла (16.46) пока не исследована в случае, когда $g(t)$ при всех t имеет колебательный характер, но $g(t) > g(\infty)$.

5°. Можно исследовать асимптотику интеграла (16.6) при $z = n$ с ядром $[K_n(t)]^n$, где $\max K_n(t) = K_n(\tau_n)$, $\tau_n \rightarrow \tau \in (a, b)$. Некоторые данные по этому вопросу содержатся в работе [93].

6°. Весьма сложными являются случаи, когда $g(t)$ имеет бесконечно много одинаковых минимумов. Пример, когда $g(t) = \cos t$, рассмотрен в п. 12.5.3, 5°. Однако в общем случае метод, использованный в этом пункте, неприменим. Например, неизвестен способ разложения интеграла (16.19), если $g(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$. Неизвестен также метод асимптотического разложения интеграла (16.46) при подобных функциях $g(t)$, если $f(|z|) \rightarrow \infty$.

16.3. Интегралы Фурье и метод стационарной фазы

16.3.1. Разложения, полученные в п. 16.2, справедливы при $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$. При $|\arg z| \in [\pi/2 + \varepsilon, \pi]$ можно применить теорию, изложенную в п. 16.1 и 16.2, если ищем точку, в которой $g(t)$ имеет максимум. Но при $\arg z = \pm \pi/2$ поведение ядра резко изменяется и следует учитывать все виды критических точек, перечисленных в п. 16.1.2. Основной член асимптотического разложения нередко получают из асимптотического вычета от точки, в которой $g'(t) = 0$. По геометрическим (см. п. 16.1.1) и физическим (см. [7]) соображениям Кельвин этот факт выразил как *принцип стационарной фазы*, состоящий в следующем. Асимптотику интеграла (16.47) определяют те точки, в которых $g'(t) = 0$. Пусть $g'(t_0) = 0$, $g'(t) \neq 0$ при $t \neq t_0$. Тогда асимптотическое выражение интеграла

$$\int_a^b \exp[\pm i x g(t)] h(t) dt \quad (16.47)$$

получается, если $h(t)$ заменить на $h(t_0)$ и $g(t)$ на $1/2(t-t_0)^2 \times \times g''(t_0) + g(t_0)$, а интервал интегрирования расширить до $(-\infty, \infty)$.

Название Кельвина употребляют и в настоящее время при асимптотическом разложении интеграла (16.47) при $x \rightarrow +\infty$, хотя доминирующей критической точкой для (16.47) может быть и нестационарная критическая точка. Кроме того, для получения полного разложения приходится учитывать все критические точки. Поэтому название Кельвина нельзя считать удачным применительно к выводу асимптотического разложения интеграла (16.47). Мы в своей работе этот термин не употребляем и в дальнейшем будем говорить о разложении *интеграла Фурье* (16.47).

При $g(t) \equiv t$ асимптотическое разложение интеграла (16.47) подробно рассмотрено в п. 10.2.1 и 10.2.2. Обобщение формулы (10.21) дано в (12.104). В п. 10.2.3 рассмотрены случаи, когда $g(t) = (t-a)^\lambda$, $\lambda > 0$ и $g(t) \in C^\infty[a, b]$. Ниже дано некоторое

обобщение полученных результатов, объединяющее упомянутые случаи.

Промежуток интегрирования следует разбить на такие части, чтобы критические точки находились только на концах промежутка. Асимптотические вычеты от концов отделяются с помощью нейтрализатора. Для $g(t)$ допустим только простейшие негладкости вида $|t-a|^\lambda$, $\lambda \in N$.

Теорема 16.6. Пусть 1) функция $g(t)$ принимает действительные значения и $g(t) \in C^\infty(a, b)$, $g'(t) \neq 0$ при $t \in (a, b)$; 2) $h(t) \in C^\infty(a, b)$; 3) при $t \rightarrow a+0$

$$g(t) = a_0 + g_1(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (t-a)^{\alpha_k}, \quad 0 < \alpha_k \uparrow +\infty, \quad a_1 > 0; \quad (16.48)$$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k (t-a)^{\beta_k}, \quad -1 < \beta_k \uparrow +\infty; \quad (16.49)$$

4) при $t \rightarrow b-0$

$$g(t) = b_0 + g_2(t) \sim b_0 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k (b-t)^{\gamma_k}, \quad 0 < \gamma_k \uparrow +\infty, \quad b_1 > 0; \quad (16.50)$$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k (b-t)^{\delta_k}, \quad -1 < \delta_k \uparrow +\infty; \quad (16.51)$$

5) все рассмотренные разложения можно сколь угодно раз почленно дифференцировать. Тогда при $x \rightarrow +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$ имеет место разложение

$$\begin{aligned} \Omega(x) = \int_a^b e^{\pm i x g(t)} h(t) dt \sim e^{\pm i x a_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{\pm \frac{i\pi}{2} (\lambda_k + 1)} \Gamma(\lambda_k + 1) x^{-\lambda_k - 1} + \\ + e^{\pm i x b_0} \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{\mp \frac{i\pi}{2} (\mu_k + 1)} \Gamma(\mu_k + 1) x^{-\mu_k - 1}, \end{aligned} \quad (16.52)$$

где определение c_k , C_k , λ_k и μ_k указано в доказательстве.

Доказательство. С помощью нейтрализатора $v_l(t) \in NL[a, b]$ разобьем $\Omega(x)$ на две части: $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$. В каждом из полученных интегралов применим подстановку $g_j(t) = (-1)^{j-1} \tau$, $j = 1, 2$. В силу условий теоремы имеем разложения

$$t_1(\tau) \sim a + \sum_{k=1}^{\infty} l_k \tau^{\rho_k}, \quad \rho_1 = 1/\alpha_1, \quad l_1 = a_1^{-1/\alpha_1};$$

$$t_2(\tau) \sim b - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \tau^{\lambda_k}, \quad \lambda_1 = 1/\gamma_1, \quad L_1 = b_1^{-1/\gamma_1};$$

$$h(t_1(\tau)) t'_1(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{\lambda_k}, \quad c_0 = A_0 L_1^{\beta_0+1} \rho_1, \quad \lambda_0 = \frac{\beta_0+1}{\alpha_1} - 1 > -1; \quad (16.53)$$

$$h(t_2(\tau)) t'_2(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k \tau^{\mu_k}, \quad C_0 = B_0 L_1^{\delta_0+1} \chi_1, \quad \mu_0 = \frac{\delta_0+1}{\gamma_1} - 1 > -1. \quad (16.54)$$

Далее к отдельным интегралам $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$ можно применить формулу (12.104), что непосредственно дает (16.52). ■

Примечания. 1°. Условие $a_1 > 0$ вместе с $g'(t) \neq 0$ означает, что $g(t)$ в $[a, b]$ монотонно возрастает, поэтому нужно требовать $b_1 > 0$. Если $a_1 < 0$, $b_1 < 0$, то в формуле (16.52) следует писать $\exp\left[\mp \frac{i\pi}{2}(\lambda_k + 1)\right]$ и $\exp\left[\pm \frac{i\pi}{2}(\mu_k + 1)\right]$.

2°. К подынтегральной функции можно присоединить еще множитель, который на концах сегмента интегрирования медленно изменяется, например $[-\ln(t-a)]^\sigma$. В таком случае целесообразно сочетать формулу (12.104) с теоремой 10.1.

Если такой множитель добавить к ряду (16.48), то обращение этого ряда заметно усложнится. Асимптотика таких интегралов пока не исследована.

3°. При условиях теоремы разложение (16.52) справедливо в секторе $|\arg x| \leq \pi$. Действительно, $\max |e^{\pm i x g(t)}|$ при $\arg x \neq 0$ достигается на одном из концов интервала интегрирования (на каком именно — это зависит от знаков $\arg x$ и a_1) и одно из разложений в (16.52) при $\arg x \neq 0$ получается по теореме 16.1, а другое входит в любой остаток первого. Очевидно, это примечание сохраняется, если интеграл разбивается на несколько частей.

4°. Если $g_1^{(k)}(a) = 0$, $k < m$, $g_1^{(m)}(a) > 0$, $m \geq 2$, то $\Omega_1(x) = \mathcal{O}(e^{\pm i x a_0} x^{-(\beta_0+1)/m})$; при $g'_1(a) > 0$ имеем $m = 1$. Аналогично получаем $\Omega_2(x) = \mathcal{O}(e^{\pm i x b_0} x^{-(\delta_0+1)/m_1})$. Рассмотрим случай, когда при $t = a$ $m \geq 2$ (имеется стационарная точка), а при $t = b$ $m_1 = 1$ (нет стационарной точки). Очевидно, стационарная точка дает основное асимптотическое выражение лишь тогда, когда $\frac{\beta_0+1}{m} < \delta_0+1$. Это

условие поясняет сказанное в начале пункта о методе стационарной фазы.

5°. Пусть для $g(t)$ сохраняются условия примечания 4°, а в (16.49) $\beta_k = k$. Тогда с помощью рассуждений, подобных

высказанным в п. 16.2.4, 3°, при четном m и $x \rightarrow +\infty$ получаем разложение

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \exp[\pm i x g(t)] h(t) v_s(t) dt \sim \frac{2}{m} \exp[\pm i x g(a)] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^* \exp\left[\pm \frac{i\pi(2k+1)}{2m}\right] \Gamma\left(\frac{2k+1}{m}\right) x^{-\frac{2k+1}{m}}, \quad (16.55)$$

где $v_s(t)$ — симметрический нейтрализатор с центром a , $v_s(a \pm \varepsilon) = 0$. Если $g^{(m)}(a) < 0$, то согласно примечанию 1° имеем множитель $\exp\left[\mp \frac{i\pi(2k+1)}{2m}\right]$; $c_0^* = A_0 \left[\frac{m!}{|g^{(m)}(a)|}\right]^{1/m}$. При нечетном m и $g^{(m)}(a) > 0$ вместо (16.55) получаем разложение

$$\frac{1}{m} \exp[\pm i x g(a)] \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* \left[\exp\left(\pm \frac{i\pi(k+1)}{2m}\right) + \right. \\ \left. + (-1)^k \exp\left(\mp \frac{i\pi(k+1)}{2m}\right) \right] \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) x^{-\frac{k+1}{m}}. \quad (16.56)$$

16.3.2. Рассмотрим отдельно случай, когда $b = \infty$.

1°. Пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = b_0 \neq \pm \infty$ и при $t \rightarrow +\infty$

$$g(t) = b_0 - g_2(t) \sim b_0 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{-\nu_k}, \quad 0 < \nu_k \uparrow +\infty, \quad b_1 > 0. \quad (16.57)$$

Тогда точка $t = \infty$ также является существенно критической и дает существенный асимптотический вклад. Пусть еще при $t \rightarrow +\infty$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^{-\delta_k}, \quad 1 < \delta_k \uparrow +\infty. \quad (16.58)$$

Требование $\delta_0 > 1$ обеспечивает сходимость интеграла (16.47), так как при фиксированном $x \cos xg(t)$ и $\sin xg(t)$ вблизи $t = \infty$ не колеблются. Подстановкой $g_2(t) = \tau \Omega_2(x)$ приводим к теореме 16.6 и в итоге получаем разложение (16.52), причем $C_0 = B_0 L_1^{-\delta_0+1} \chi_1$, $\chi_1 = \frac{1}{\gamma_1}$, $\mu_0 = \frac{\delta_0 - 1}{\gamma_1} - 1$.

2°. Пусть при $t \rightarrow +\infty$

$$g(t) \sim \sum_{h=1}^{\infty} b_h t^{-\nu_h}, \quad \nu_1 < 0, \quad \nu_h \uparrow +\infty. \quad (16.59)$$

Тогда в соотношении $\tau = g(t)$ $\tau \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Если в (16.58) $\delta_0 > 1 + \nu_1$, то в (16.54) $\mu_h < 0$ и из соотношения $\int_{a_1}^{\infty} e^{\pm i x \tau} \tau^{-\alpha \nu_r}(\tau) d\tau = o(x^{-N})$, $\nu_r \in NR[a_1, \infty)$, при $\alpha > 0$ следует, что $\Omega_2(x) = o(x^{-N})$, и в разложении (16.52) имеем только первую сумму. Это означает, что ∞ не является существенно критической точкой.

3°. Если в разложении (16.48) $\alpha_1 < 0$, то подстановка $g_1(t) = \tau$ приводит к случаю 2°. Это означает, что в (16.52) первая сумма отпадает. Если также в (16.50) $\nu_1 < 0$, то $\Omega(x) = o(x^{-N})$. Но это будет лишь в случае, когда $g(t)$ в $[a, b]$ монотонно изменяется от $+\infty$ до $-\infty$ или же наоборот. Разложение интеграла в этом случае рассмотрено в § 21.

16.3.3. Если искать только асимптотическое поведение интеграла (16.47) при $x \rightarrow +\infty$, то возникнет вопрос о том, какие минимальные условия следует предъявлять к функциям $g(t)$ и $h(t)$. Основное внимание при этом уделяется исследованию интеграла

$$\Omega(x) = \int_0^b e^{ixt} t^{\lambda-1} h_0(t) dt, \quad \lambda > 0. \quad (16.60)$$

Уже Бромвич в работе [51] в качестве задачи привел следующий результат: если $h_0(t)$ — функция ограниченной вариации в $[0, b]$, то при $x \rightarrow +\infty$ имеет место формула

$$\Omega(x) = \Gamma(\lambda) \exp(i\lambda\pi/2) x^{-\lambda} [h_0(+0) + o(1)]. \quad (16.61)$$

Теорема Бромвича является непосредственным следствием более общей теоремы Жордана 16.7.

Теорема 16.7. Пусть 1) $h(t)$ — функция ограниченной вариации в $[0, b]$, $h(+0) \neq 0$; 2) $K(x, t)$ интегрируема по $t \in [0, a]$, $a \in (0, b]$, для каждого $x \geq x_0$, и при этих x существует такая постоянная $M > 0$, что $|\int_0^a K(x, t) dt| < M$; 3) для каждого фиксированного $c \in (0, b]$ имеет место

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^c K(x, t) dt = A. \quad (16.62)$$

Тогда при $x \rightarrow +\infty$ справедлива формула

$$\int_0^b K(x, t) h(t) dt = Ah(+0)[1 + o(1)]. \quad (16.63)$$

Доказательство этой теоремы, по существу, не отличается от доказательства теоремы о сходимости ряда Фурье для функции ограниченной вариации. Поскольку каждая функция этого класса — разность двух монотонно возрастающих функций, то в качестве $h(t)$ достаточно брать монотонно возрастающую функцию. Фиксируем $\varepsilon > 0$, а потом такое $c > 0$, что $h(t) - h(+0) < \varepsilon$ при $t \in (0, c]$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b K(x, t) h(t) dt - Ah(+0) \right| &\leq \left| \int_0^c K(x, t) [h(t) - h(+0)] dt \right| + \\ &+ \left| \int_c^b K(x, t) h(t) dt \right| + |h(+0)| \left| \int_c^b K(x, t) dt \right|. \end{aligned}$$

Легко доказать, что формула (16.62) сохраняет силу и тогда, когда $c = c(x) \geq c_0 > 0$. Поэтому при фиксированном $c > 0$ и любом $\tau \geq c \int_{\tau}^b K(x, t) dt = o(1)$. Если к среднему интегралу в правой части предыдущего неравенства применить вторую теорему о среднем, то для этой части получим оценку

$$M\varepsilon + |h(b)|o(1) + |h(+0)|o(1). \blacksquare$$

Теорема Жордана получила разносторонние обобщения. Многие теоремы подобного типа приведены в работе [19]. Наиболее общие результаты относительно асимптотического поведения интеграла $\int_0^{\infty} K(x, t) t^{-a} h(t) dt$ при $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow +\infty$ изложены в [143]. К этому интегралу относится также лемма 16.6.

16.3.4. Рассмотрим несколько случаев, когда ядро интеграла имеет более сложный вид.

1°. Иногда при $x \rightarrow +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$ приходится оценивать интеграл

$$\int_a^b \exp[\pm ix(g_1(t) + f(x)g_2(t))] h(t) dt, \quad (16.64)$$

где $g_1(t) \in C^\infty[a, b]$, $g_1'(t) \neq 0$ при $t \in [a, b]$, $g_2(t) \in C^\infty[a, b]$, $h(t) \in C^\infty[a, b]$, $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. С помощью подстановки $g_1(t) = \tau$ интеграл приводим к виду

$$\Omega(x) = \int_{g_1(a)}^{g_1(b)} \exp(\pm i x \tau) \exp(i \varphi(x) G(\tau)) H(\tau) d\tau, \quad (16.65)$$

где $\varphi(x) = o(x)$, $G(\tau) \in C^\infty[a, b]$, $H(\tau) \in C^\infty[a, b]$. Интегрированием по частям при $x \rightarrow +\infty$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & \sum_{k=0}^n (\pm i)^{k+1} \exp[\pm i(xg_1(a) + \varphi(x)g_2(a))] H_k(a, x) x^{-k-1} - \\ & - \sum_{k=0}^n (\pm i)^{k+1} \exp[\pm i(xg_1(b) + \varphi(x)g_2(b))] \times \\ & \times H_k(b, x) x^{-k-1} + O\left[\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^{n+1}\right], \end{aligned} \quad (16.66)$$

где

$$H_k(t, x) = \sum_{j=0}^k H_{jk}(t) \varphi^j(x), \quad H_{kj}(t) \in C^\infty[a, b], \quad H_0(t, x) = H(t). \quad (16.67)$$

Из соотношения (16.66) следует, что при конкретном $\varphi(x)$ можно образовать асимптотическую шкалу и получить асимптотическое разложение. Если $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ — медленно изменяющаяся функция, то в качестве шкалы можно взять $\left\{\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^k\right\}$ и вместо классического разложения получить сильноасимптотическое. При $\varphi(x) \equiv 1$, $f(x) = x^{-1}$ имеем случай, рассмотренный в теореме 16.6.

2°. Если $g_1^{(k)}(a) = 0$, $k \leq m-1$, $g_1^{(m)}(a) > 0$, то применим нейтрализатор и в $\Omega_1(x)$ используем подстановку $g_1(t) = g_1(a) + \tau^m$, $\tau \in [0, \tau_0]$. После этого применим метод, указанный в п. 10.2.3, 1°. При этом допускается $H(\tau) = \tau^{\alpha-1} H_0(\tau)$, $H_0(\tau) \in C^\infty[a, b]$, $\alpha > 0$. Тогда по формулам (10.32) и (10.16) при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\begin{aligned} \Omega_1(x) = & e^{\pm i x g_1(a)} \times \\ & \times \int_0^{a_1} \exp(\pm i x \tau^m) \exp(i \varphi(x) G(\tau)) \tau^{\alpha-1} H_0(\tau) v_i^*(\tau) d\tau \sim \end{aligned}$$

$$\sim \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\pm \frac{i\pi}{2m} (k+\alpha) \right] \frac{\Gamma[(k+\alpha)/m]}{k!} \times \\ \times \exp [\pm i(xg_1(a) + \varphi(x)g_2(a))] H_k(0, x) x^{-(k+\alpha)/m}. \quad (16.68)$$

При конкретном $\varphi(x)$ в данном случае можно также образовать асимптотическую шкалу. Если $g_1^{(m)}(a) < 0$, то следует применять подстановку $g_1(t) = g_1(a) - \tau^m$. Тогда в (16.68) будем иметь множитель $\exp \left[\mp \frac{i\pi}{2m} (k+\alpha) \right]$. Отметим, что ни в (16.66), ни в (16.68) не требуется учитывать стационарные точки функции $G(\tau)$.

Для $g_1(t)$ допустимо также более общее разложение (16.48) и применение теоремы 16.6, но в этом случае разложение при общих функциях $g_2(t)$, $h(t)$ и $\varphi(x)$ станет необозримым.

3°. Асимптотику интеграла (16.64) можно исследовать также при $b = \infty$. Рассмотрим только более простой интеграл

$$\Omega(x) = \int_a^{\infty} \exp[\pm i(xt + ct^\alpha)] t^{-\lambda} dt, \quad a > 0, \quad \lambda > 0, \quad (16.69)$$

c — действительное число.

А. Если $\alpha < 1$, то непосредственным интегрированием по частям по формуле (8.23) при $x \rightarrow +\infty$ получим

$$\Omega(x) \sim e^{\pm i\alpha x} \sum_{k=0}^{\infty} (\pm i)^{k+1} H_k(a) x^{-k-1}, \quad (16.70)$$

$H_k(t) = \frac{d^k}{dt^k} [\exp(\pm ict^\alpha) t^{-\lambda}]$, так как $H_k(\infty) = 0$. Разложение (16.70) при $c=0$ является частным случаем (8.23).

Если $\alpha=1$, то x следует заменить на $x+c$ и $H_k(t) = (-1)^k (\lambda)_k t^{-\lambda-k}$. При $a=0$ интеграл (16.69) существует, если $\lambda \in (0, 1)$. С помощью формулы (12.23) при $\alpha \in (0, 1)$ его можно привести к интегралу

$$\exp \left[\pm \frac{i\pi(1-\lambda)}{2} \right] \int_0^{\infty} \exp[-x\tau + c\tau^\alpha (\pm i)^{\alpha+1}] \tau^{-\lambda} d\tau, \quad (16.69')$$

разложение которого получаем по лемме Ватсона. Случай, когда $\alpha < 0$, $c > 0$, приводится к (16.78), а при $\alpha < 0$, $c < 0$ путь интегрирования в (16.69) можно повернуть на подходящий угол и пользоваться формулой (12.80).

Для разложения интеграла

$$I_{\mu}(x) = \int_a^{\infty} \exp[\pm i(xt + ct^{\alpha})] t^{-\lambda} (t-a)^{\mu-1} v_l(t) dt, \quad (16.71)$$

$\mu > 0$, $a > 0$, можно применить комплексное интегрированное ядро, как в п. 10.2. По формуле (10.21) при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$I_{\mu}(x) \sim e^{\pm ixa} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\mu)}{k!} \exp\left[\pm \frac{i\pi}{2}(k+\mu)\right] H_k(a) x^{-k-\mu}. \quad (16.72)$$

Если $\mu_j \uparrow +\infty$, то функции $I_{\mu_j}(x)$ образуют шкалу, поэтому при

$$h(t) \in C^{\infty}(a, a_1), \quad a_1 > a, \quad h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-a)^{\mu_k-1}, \quad 0 < \mu_k \uparrow +\infty, \quad (16.73)$$

имеем при $x \rightarrow +\infty$ разложение

$$\int_a^{a_1} \exp[\pm i(xt + ct^{\alpha})] t^{-\lambda} h(t) v_l(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k I_{\mu_k}(x), \quad (16.74)$$

которое с учетом (16.72) можно перегруппировать и получить разложение по степенной шкале.

Б. Если $\alpha > 1$, то начиная с некоторого k $|H_k(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. При $c > 0$ можно интегрировать по частям иначе, непосредственно используя интеграл (16.69). При $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\Omega(x) \sim \exp[\pm i(ax + ca^{\alpha})] \sum_{k=0}^{\infty} (\pm i)^{k+1} H_k^*(a, x) x^{-k-1}, \quad (16.75)$$

где $H_k^*(a, x)$ — ограниченные функции от x .

В. При $c = -\gamma < 0$, $\alpha > 1$ в интервале интегрирования находится стационарная точка $t_0 = \left(\frac{x}{\alpha\gamma}\right)^{1/(\alpha-1)}$, поэтому формула (16.75) неприменима. Поскольку $t_0 \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, то одновременно получаем пример для случая сливающихся критических точек t_0 и ∞ . Однако с помощью подстановки $t = \left(\frac{x}{\alpha\gamma}\right)^{1/(\alpha-1)} \tau$ их можно

разделить и перейти к конечной критической точке. При $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\Omega(x) = \left(\frac{x}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{-\lambda+1}{\alpha-1}} \int_a^{\infty} \exp\left[\mp i\left(\frac{x^\alpha}{\alpha\gamma}\right)^{1/(\alpha-1)} (-\tau + \frac{1}{\alpha}\tau^\alpha)\right] \tau^{-\lambda} d\tau = \Omega_1(x) + \Omega_2(x), \quad (16.76)$$

где интегралы взяты по промежуткам $\left[a\left(\frac{\alpha\gamma}{x}\right)^{1/(\alpha-1)}, 1\right]$ и $[1, \infty)$.

Разбивая каждый из них с помощью нейтрализаторов, получаем $\Omega_{11}(x)$, $\Omega_{12}(x)$, $\Omega_{21}(x)$ и $\Omega_{22}(x)$.

Разложение для $\Omega_{11}(x)$ можно получить интегрированием по частям. Легко видеть, что в данном случае приходим к такому же результату, как и при выделении левого интеграла в (16.69), т. е. к разложению (16.75), где $c = -\gamma$. Разложение для $\Omega_{12}(x) + \Omega_{21}(x)$ находим по формуле (16.55), где $m=2$, а x заменяется на $\left(\frac{x^\alpha}{\alpha\gamma}\right)^{1/(\alpha-1)}$. Для вычисления коэффициентов c_k можно вывести

несколько рекуррентных формул таким же путем, как и в п. 12.5.3, 3°. $\Omega_{22}(x)$ соответствует условиям п. 16.3.2, 2°, поэтому $\Omega_{22}(x) = o(x^{-N})$. Таким образом, при $x \rightarrow +\infty$ имеем разложение

$$\begin{aligned} \Omega(x) \sim \exp[\pm i(ax - \gamma\alpha^\alpha)] \sum_{k=0}^{\infty} (\pm i)^{k+1} H_k^*(a, x) x^{-k-1} + \\ + \left(\frac{x}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{1-\lambda}{\alpha-1}} \exp\left[\pm i\left(\frac{x^\alpha}{\alpha\gamma}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha}\right] \times \\ \times \sum_{h=0}^{\infty} C_{2h} \exp\left[\mp \frac{i\pi}{4}(2h+1)\right] \Gamma\left(h + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x^\alpha}{\alpha\gamma}\right)^{-\frac{h+1/2}{\alpha-1}}. \quad (16.77) \end{aligned}$$

Если $\lambda + \frac{\alpha}{2} < 1$, то $|\Omega(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

4°. Встречаются также случаи, когда в интеграле (16.64) $g_2(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow a+0$ и в интервале интегрирования находится стационарная точка, сливающаяся с концом промежутка. Тогда

имеем такую же ситуацию, как в п. 3°, В. Поскольку общий случай является необозримым, то рассмотрим только интеграл

$$\Omega(x) = \int_0^a \exp[\pm i(xt + \varphi(x)t^{-\beta})] t^{\lambda-1} dt, \quad (16.78)$$

где $\beta > 0$, $\lambda > 0$, $\varphi(x) = o(x)$, $\varphi(x) > 0$. После подстановки $t = \left(\frac{\beta\varphi(x)}{x}\right)^{1/(1+\beta)}$ τ получаем

$$\Omega(x) = \left(\frac{\beta\varphi}{x}\right)^{\lambda/(1+\beta)} \int_0^a \left(\frac{x}{\beta\varphi}\right)^{1/(1+\beta)} \exp\left[\pm i(\beta x \beta \varphi)^{1/(\beta+1)} \left(\tau + \frac{1}{\beta} \tau^{-\beta}\right)\right] \tau^{\lambda-1} d\tau. \quad (16.79)$$

Далее рассмотрим отдельные случаи.

А. Пусть $(\beta x \beta \varphi)^{1/(\beta+1)} = y \rightarrow \infty$. Как и в п. 3°, В, разобьем интеграл (16.79) на суммы $\Omega_{11} + \Omega_{12}$ и $\Omega_{21} + \Omega_{22}$ по сегментам $[0, 1]$, $[1, a\xi]$, $\xi = \left(\frac{x}{\beta\varphi}\right)^{1/(1+\beta)}$. $\Omega_{11}(x)$ с помощью подстановки приводим к п. 16.3.2, 2°, поэтому $\Omega_{11}(x) = o(x^{-N})$. Для разложения $\Omega_{12}(x) + \Omega_{21}(x)$ применим формулу (16.55), а разложение для $\Omega_{22}(x)$ получим интегрированием по частям (16.78) с учетом только верхнего предела, т. е. как в формуле (16.75). В итоге при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega(x) &\sim \left(\frac{\beta\varphi}{x}\right)^{\frac{\lambda}{1+\beta}} \exp\left[\pm i(\beta x \beta \varphi)^{\frac{1}{\beta+1}} \frac{\beta+1}{\beta}\right] \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}^* \exp\left[\pm \frac{i\pi}{4}(2k+1)\right] \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) (\beta x \beta \varphi)^{-\frac{k+1/2}{\beta+1}} - \\ &- \exp[\pm i(xa + \varphi(x)a^{-\beta})] \sum_{k=0}^{\infty} H_k^*(a, x) x^{-k-1} (\pm i)^{k+1}, \quad (16.80) \end{aligned}$$

где $H_k^*(a, x)$ определяется, как в (16.67), $c_0^* = \sqrt{\frac{2}{\beta+1}}$.

Б. Пусть $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Разобьем интеграл (16.79) на две части по сегментам, как в п. А. Имеем

$$\Omega_1(x) = \int_0^1 \exp\left[\pm iy \left(\tau + \frac{1}{\beta} \tau^{-\beta}\right)\right] \tau^{\lambda-1} d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^n}{n!} y^n \int_0^1 \exp\left(\pm \frac{iy}{\beta} \tau^{-\beta}\right) \tau^{n+\lambda-1} d\tau. \quad (16.81)$$

Подстановкой $\pm \frac{iy}{\beta} \tau^{-\beta} = -v$ интеграл в правой части приводится к неполной гамма-функции. Для его разложения можно применить формулы (12.37) и (12.38). После этого в (16.81) следует перегруппировать члены. При $\frac{\lambda+n}{\beta} \in N_1$ и $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\Omega_1(x) \sim \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(\pm i\pi n/2)}{n!} \left[\frac{\exp(\pm i\pi/2)}{\beta} \right]^{\frac{\lambda+n}{\beta}} \times \\ \times \Gamma\left(-\frac{\lambda+n}{\beta}\right) y^{\frac{\lambda+n}{\beta}} - \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \exp(\pm(i\pi n/2)) y^n, \quad (16.82)$$

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{\beta^{n-k} [n-k - (\lambda+k)/\beta]}.$$

Если при некотором n $\frac{\lambda+n}{\beta} \in N_1$, то (16.82) несколько изменится. Рассмотрим еще

$$\Omega_2(x) = \int_1^{a\xi} \exp\left[\pm iy \left(\tau + \frac{1}{\beta} \tau^{-\beta}\right)\right] \tau^{\lambda-1} d\tau = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^n}{\beta^n n!} y^n \int_1^{a\xi} \exp(\pm iy\tau) \tau^{\lambda-n\beta-1} d\tau. \quad (16.83)$$

Для разложения

$$I_n(y, x) = \int_1^{a\xi} \exp(\pm iy\tau) \tau^{\lambda-n\beta-1} d\tau = \\ = y^{n\beta-\lambda} \int_y^{ax} \exp(\pm iv) v^{\lambda-n\beta-1} dv \quad (16.84)$$

применим нейтрализатор и разобьем интеграл на две части. Каждый из вновь полученных интегралов интегрируем по частям, причем в первом из них дифференцируем $\exp(\pm i\nu)$, а во втором — $\nu^{\lambda-n\beta-1}$. После преобразований при $|\lambda-n\beta| \in N$ и $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$I_n(y, x) \sim -\Gamma(\lambda-n\beta) \left[e^{\pm iy} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mp i)^k y^k}{\Gamma(\lambda-n\beta+k+1)} + y^{n\beta-\lambda} e^{\pm iax} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^{k+1} (ax)^{\lambda-n\beta-k-1}}{\Gamma(\lambda-n\beta-k)} \right]. \quad (16.85)$$

Затем подставим (16.85) в (16.83) и перегруппируем члены. В результате этого приходим к разложению для $\Omega_2(x)$.

В. Пусть $\varphi(x) = cx^{-\beta}$. Тогда $y = (\beta c)^{1/(\beta+1)} = \gamma$ и

$$\Omega(x) = \left(\frac{\gamma}{x} \right)^\lambda \int_0^{ax/\gamma} \exp \left[\pm i\gamma \left(\tau + \frac{1}{\beta} \tau^{-\beta} \right) \right] \tau^{\lambda-1} d\tau.$$

Если $\lambda \in (0, 1)$, то $\int_0^{ax/\gamma} = \int_0^1 - \int_1^{ax/\gamma}$ и последний интеграл разлагается интегрированием по частям, причем дифференцировать надо функцию $\exp \left[\pm \frac{i\gamma}{\beta} \tau^{-\beta} \right] \tau^{\lambda-1}$. Если $\lambda \geq 1$, то $\int_0^{ax/\gamma} = \int_0^1 + \int_1^{ax/\gamma}$ и второй интеграл вначале следует несколько раз интегрировать по частям, чтобы получить предыдущий случай, когда $\lambda < 1$. В обоих случаях при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\Omega(x) \sim \left(\frac{\gamma}{x} \right)^\lambda \left\{ C(\lambda) - \gamma^{-\lambda} \exp [\pm i(ax + c(ax)^{-\beta})] \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=0}^{\infty} (\pm i)^{k+1} (ax)^{\lambda-1-k} h_k \left(\frac{ax}{\gamma} \right) \right\}, \quad (16.86)$$

где $h_k(u)$ — ограниченные при $u \rightarrow \infty$ функции.

16.4. Интегралы с более общими ядрами

16.4.1. В данном пункте рассмотрим критические точки для интегралов

$$\int_a^b K(zt) h(t) dt \quad (16.87)$$

и

$$\int_a^b K(zg(t))h(t)dt \quad (16.88)$$

в случае, когда $K(\tau)$ аналитична в $S(0, \varphi_1, \varphi_2]$ и при $\tau \rightarrow \infty$ в S имеет разложение

$$K(\tau) \sim \exp(c\tau^\nu) \sum_{h=0}^{\infty} a_h \tau^{-\lambda_h}, \quad (16.89)$$

$c \neq 0$, $\nu > 0$, $\lambda_h \uparrow +\infty$, $0 \leq a < b \leq \infty$. Члены ряда в качестве множителей могут содержать также медленно изменяющиеся функции.

Из разложения (16.89) получаем критические точки для интеграла (16.87), так как при больших $|z|$ и $a > 0$ (16.89) определяет поведение $K(zt)$ во всем промежутке интегрирования, а при $a = 0$ приходится исключать только некоторую малую окрестность точки a . Поэтому из п. 16.2 следует, что при тех $z \in S$, при которых $\operatorname{Re}(cz^\nu) < 0$, существенно критической является точка a , а при $\operatorname{Re}(cz^\nu) > 0$ — точка b .

1°. При $\operatorname{Re}(cz^\nu) < 0$ можно ввести новый параметр $\xi = e^{i\alpha z} \in S^*$, а a и S^* выбрать такими, чтобы в (16.89) можно было c заменить на $-|c|$. Тогда для разложения (16.87) следует применить одну из теорем 8.1, 10.2, 10.3, 12.1, 12.2. При этом функцию $h(t)$ в окрестности $t = a$ можно разложить не только по степенной шкале, но и по другим шкалам и пользоваться результатами § 13. В частности, к ряду (16.89) в качестве множителя можно добавить медленно изменяющуюся функцию.

Для интеграла (16.88) при $g(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$, критической является точка, в которой $g(t)$ имеет минимальное значение. При его разложении можно пользоваться результатами п. 12.4.3. Если же $g(t) < 0$ в некоторой части сегмента $[a, b]$, то следует учитывать то обстоятельство, что $K(\tau)$ приходится рассматривать в другом секторе, в котором свойства функции $K(\tau)$ неизвестны. Если же $K(\tau)$ в этом секторе сохраняет прежние свойства, то знак функции $g(t)$ не имеет значения. Пример $K(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{1+\tau^3}$ при $g(t) = t-1$, $t \in [0, \infty)$, $z = x$ показывает, что при $g(t) < 0$ может получиться расходящийся интеграл. В примере, когда $K(\tau) = \operatorname{Erfc}\sqrt{\tau}$, а z , $g(t)$ и t прежние, из формулы (8.9) следует, что $K(xg(t))$ при $g(t) < 0$ имеет другую асимптотику и $[0, \infty)$ приходится разбить на $[0, 1]$ и $[1, \infty)$. В этом смысле точки, в которых $g(t) = 0$, тоже надо причислить к критическим, так как

при наличии их необходимо проводить дополнительные исследования.

2°. При $\operatorname{Re}(cz^\nu) > 0$ и прежнем выборе $\zeta \in S^*$ в (16.89) c можно заменить на $|c| > 0$. В этом случае применима теорема 9.2, но удобнее использовать другие теоремы. Подстановкой $t^\nu = \tau$, $\zeta = y^{1/\nu}$, $K(zl) = K^*(y\tau)$ (16.87) приводится к интегралу

$$\Omega(y) = \int_{a_1}^{b_1} K^*(y\tau) H(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} y > 0, \quad (16.90)$$

где $a_1 = a^\nu$, $b_1 = b^\nu$, $H(\tau) = (1/\nu) h(\tau^{1/\nu}) \tau^{1/\nu-1}$. Поскольку при $u \rightarrow \infty$

$$K^*(u) \sim e^{\alpha u} \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^{-\lambda_k/\nu}, \quad (16.91)$$

то в (16.90) можно применить обозначение $K^*(u) = e^{\alpha u} G(u)$ и пользоваться теоремой 10.2 и примечанием к ней 4°.

Однако (16.90) целесообразнее привести к лемме Ватсона, чтобы к функции $H(\tau)$ можно было предъявлять меньше требований. Имеем

$$\Omega(y) = e^{\alpha y b_1} \int_0^{b_1 - a_1} e^{-\alpha y u} G[y(b_1 - u)] H(b_1 - u) du. \quad (16.92)$$

При $a_1 = 0$ заменим $b_1 - a_1$ на $\eta < b_1 - a_1$, допуская при этом погрешность $O(e^{-\alpha y \eta} y^{-\lambda_0/\nu})$, чтобы $b_1 - u > 0$ во всем промежутке интегрирования. Далее к $G[y(b_1 - u)]$ применим разложение (16.91) и к каждому полученному интегралу — лемму Ватсона, если $H(b_1 - u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^{\mu_k}$ при $u \rightarrow +0$.

Поскольку при $u \rightarrow +0$ имеем разложение

$$(b_1 - u)^{-\lambda_k/\nu} H(b_1 - u) \sim \sum_{j=0}^{\infty} B_{jk} u^{\nu_j}, \quad \nu_0 = \mu_0, \quad B_{0k} = b_1^{-\lambda_k/\nu} c_0,$$

то при $y \rightarrow \infty$, $|\arg y| \leq \pi/2 - \varepsilon$ получаем

$$\int_0^{\eta} e^{-\alpha y u} (b_1 - u)^{-\lambda_k/\nu} H(b_1 - u) du \sim \sum_{j=0}^{\infty} B_{jk} \Gamma(\nu_j + 1) (\alpha y)^{-\nu_j - 1}.$$

Кроме того, приходится еще перегруппировать члены по функциям шкалы.

Имеем окончательное разложение

$$\Omega(y) \sim \exp(\alpha \zeta^{\nu} b^{\nu}) \sum_{k=0}^{\infty} d_k \zeta^{-\kappa_k}, \quad \zeta = y^{1/\nu}. \quad (16.93)$$

Очевидно, и к ряду (16.91) можно добавить множитель — медленно изменяющуюся функцию.

При $K(\tau) = I_{\nu}(\tau)$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$, $\mu_k = \nu_k = k + \lambda$, $\lambda > -1$, $a = 0$, $b = 1$ в силу (10.64) получаем разложение

$$\int_0^1 I_{\nu}(zt) h(t) dt \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda-1/2-1} e^z \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} \quad (16.94)$$

где

$$A_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_{k-j, j} 2^{-j} \Gamma(\lambda + 1 + k - j) (\nu, j);$$

$$C_{jk} = \sum_{m=0}^j (-1)^m \binom{-k-1/2}{m} c_{j-m};$$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1-t)^{k+\lambda}.$$

Для интеграла (16.88) критической является точка, в которой $g(t)$ имеет максимальное значение. Подстановкой $g(t) = \tau$ в окрестности этой точки интеграл (16.88) приводится к (16.87). Критическими в смысле, указанном в п. 1°, являются также точки, в которых $g'(t) = 0$.

3°. Существуют ядра $K(zt)$, для которых можно найти такую последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \uparrow +\infty$, что $\mu(\lambda_n) = \int_0^{\infty} K(\tau) \tau^{\lambda_n} d\tau = 0$.

Если пользоваться теоремой 12.1 и при $t \rightarrow +0$ $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\lambda_k}$, то $\Omega(z) = o(z^{-N})$. Такие ядра назовем *ядрами типа Стильбеса*, так как первым на существование ядра такого типа на примере $K(xt) = e^{-xt} \sin xt$ и $\lambda_n = 4nm + 3$, $m \in N_1$, указал Стильбес [18].

Легко убедиться в том, что при $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} \mu(\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \sin[(\operatorname{tg}(\pi/2\alpha)) t] t^{\alpha} dt = \\ &= \cos^{\alpha+1}(\pi/2\alpha) \Gamma(\alpha+1) \sin[\pi(\alpha+1)/2\alpha], \end{aligned}$$

поэтому $\mu(2m\alpha - 1) = 0$ при $m \in N_1$ и $K(t) = e^{-t} \sin[(\operatorname{tg}(\pi/2\alpha))t]$ является ядром типа Стильтеса.

Асимптотические выражения интегралов с ядрами типа Стильтеса существенно зависят от поведения функции нагрузки также в том случае, когда при всех $n \in N$ $\mu(\lambda_n) = 0$ и для построения разложения используются другие методы. Обычно применяется метод деформирования пути в комплексной плоскости.

Рассмотрим пример, когда $K(t) = e^{-t} \sin t$, $h_1(t) = (1 + t^4)^{-1} t^{4m+3}$, $h_2(t) = e^{-t} t^{4m+3}$. В случае $h_1(t)$ поворотом пути на угол $\pi/2$ можно установить, что $\Omega_1(x) = (-1)^m (\pi/4) e^{-x\sqrt{2}}$. Во втором случае множитель e^{-t} следует присоединить к ядру и применить метод перевала (см. п. 19.5.5, 6°). Получаем $\Omega_2(x) = \bar{O} \left(x^{(4m+2)/3} \exp \left[-\frac{3}{4} x^{2/3} \right] \right)$, $x \rightarrow +\infty$. Очевидно, асимптотика для $\Omega_2(x)$ иная, чем для $\Omega_1(x)$. К $\Omega_2(x)$ приводится исследование об асимптотическом разложении интеграла Лапласа

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) \exp(-t^{1/4}) \sin t^{1/4} t^n dt$$

при $p \rightarrow 0$, $|\arg p| \leq \pi/2 - \varepsilon$, $n \in N$.

Было бы желательно более глубоко изучить асимптотические разложения интегралов с ядрами типа Стильтеса.

4°. Иногда приходится исследовать асимптотику при $z \rightarrow \infty$ также более общих интегралов

$$\Omega(z) = \int_a^{\infty} K(z, t) h(t) dt, \quad a \geq 0, \quad (16.95)$$

когда интеграл $\int_a^{\infty} K(z, t) t^{\lambda} dt$ существует при всех $\lambda \geq \lambda_0$. Некоторые тривиальные условия, обеспечивающие применение леммы Ватсона к (16.95), при $z = x \rightarrow +\infty$, $K(x, t) > 0$ указаны в [99].

В работах [58, 120] исследовано асимптотическое поведение интеграла (16.95) при $x \rightarrow +\infty$ в случае, когда $K(x, t) = K_0(x, t - \tau)$, где $K_0(x, t)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка. Рассмотрены случаи, когда при $x \rightarrow +\infty$ $\Omega(x) \rightarrow \alpha h(\tau - 0) + \beta h(\tau + 0)$, $\alpha + \beta = 1$.

16.4.2. Случай, когда $\operatorname{Re}(cz^\nu) = 0$, требует особого рассмотрения. Пусть $c = i\alpha$, α — действительное число, $\alpha \neq 0$, $z = x$. Тогда для интеграла (16.87) согласно п. 16.3 критическими являются концы промежутка и точки негладкости функции $h(t)$. Предположим, что $h(t) \in C^\infty(a, b)$. При $a > 0$ непосредственно применя-

Теорема 16.8. Пусть 1) $K(xt)$ интегрируема при $t \in [a, b]$, $0 < a < b < \infty$, $x > 0$; 2) при $t \rightarrow \infty$

$$K(t) \sim \exp(i\alpha t^\gamma) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k}, \quad (16.96)$$

где α — действительное число, $\alpha \neq 0$, $\gamma > 0$, $\lambda_k \uparrow +\infty$; 3) $h(t) \in C^\infty(a, b)$; 4) имеют место разложения

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t-a)^{\mu_k}, \quad t \rightarrow a+0, \quad h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k (b-t)^{\nu_k}, \quad t \rightarrow b-0, \quad (16.97)$$

которые можно сколь угодно раз почленно дифференцировать, $-1 < \mu_k \uparrow +\infty$, $-1 < \nu_k \uparrow +\infty$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \Omega(x) = \int_a^b K(xt) h(t) dt \sim \exp[i\alpha x^\gamma a^\gamma] \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-\rho_k} + \\ + \exp[i\alpha x^\gamma b^\gamma] \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{-\sigma_k}, \end{aligned} \quad (16.98)$$

где вычисление A_k , ρ_k , B_k , σ_k пояснено в доказательстве.

Доказательство. Имеем равенство

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{-\lambda_k} \int_a^b \exp(i\alpha x^\gamma t^\gamma) t^{-\lambda_k} h(t) dt + O(x^{-\lambda_{n+1}}). \quad (16.99)$$

Поскольку функции $t^{-\lambda_k} h(t)$ имеют разложения типа (16.97), то каждый из интегралов в (16.99) имеет разложение (16.52), причем эти разложения отличаются друг от друга только коэффициентами и обладают оценкой $\exp(i\alpha x^\gamma a^\gamma) \mathcal{O}(x^{-(\mu+1)\gamma}) + \exp(i\alpha x^\gamma b^\gamma) \mathcal{O}(x^{-(\nu+1)\gamma})$. Подставив эти разложения в (16.99) и перегруппировав члены, при новом обозначении коэффициентов и показателей степени получим равенство

$$\begin{aligned} \Omega(x) = \exp(i\alpha x^\gamma a^\gamma) \left[\sum_{j=0}^{m_1} A_j x^{-\rho_j} + O(x^{-\lambda_{n+1}}) \right] + \\ + \exp(i\alpha x^\gamma b^\gamma) \left[\sum_{j=0}^{m_2} B_j x^{-\sigma_j} + O(x^{-\lambda_{n+1}}) \right], \end{aligned}$$

которое с учетом произвола в выборе n эквивалентно (16.98). ■

Примечания. 1°. При разложении отдельных интегралов в (16.99) можно применить формулы

$$\int_a^b \exp(\pm i\alpha x^\nu t^\nu) (t-a)^{\mu\nu} v_l(t) dt \sim \frac{a^{\mu+1}}{(\mu+1)\gamma^{\mu+1}} \exp(\pm i x^\nu \alpha a^\nu) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} D_k \Gamma(k+\mu+2) \exp[\pm i\pi(k+\mu+1)/2] (\alpha a^\nu x^\nu)^{-(k+\mu+1)};$$

$$\int_a^b \exp(\pm i x^\nu \alpha t^\nu) (b-t)^{\mu\nu} v_r(t) dt \sim$$

$$\sim \frac{b^{\mu+1}}{(\mu+1)\gamma^{\mu+1}} \exp(\pm i\alpha x^\nu b^\nu) \sum_{k=0}^{\infty} D_k \Gamma(k+\mu+2) \times$$

$$\times \exp\left[\mp \frac{i\pi}{2} (\mu+1-k)\right] (\alpha b^\nu x^\nu)^{-(k+\mu+1)}, \quad (16.101)$$

которые следуют из (16.52) и (12.104). Коэффициенты $D_k = D_k\left(\frac{1}{\gamma}, 0, \mu+1\right)$ определены в п. 12.4.3, 2°.

2°. Если $b = \infty$ и в (16.97) при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-\kappa_k}, \quad 1 - \lambda_0 - \gamma < \kappa_k \uparrow + \infty, \quad (16.102)$$

то интеграл (16.98) сходится и асимптотический вычет от $t = \infty$ имеет оценку $o(x^{-N})$. Поэтому в (16.98) второй ряд следует отбросить и

$$\Omega(x) \sim \exp(i\alpha a^\nu x^\nu) \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-\rho_k}. \quad (16.98')$$

Если в разложении (16.102) имеется еще множитель $\exp(ict^\beta)$, c — действительное число, $\beta > 0$, то следует использовать анализ интеграла (16.69). При $\beta > \gamma$ разложение (16.98') не изменяется. При $\beta \leq \gamma$ оно также не изменяется, если $\text{sign } \alpha c = +1$, а при $\text{sign } \alpha c = -1$ приходится еще учитывать дополнительную стационарную точку $t_0 = \left(-\frac{\alpha\gamma}{c\beta} x^\nu\right)^{1/(\beta-\gamma)}$. Тогда вместо (16.98') получим разложение типа (16.77).

3°. Теорема 16.8 остается справедливой также в случае, когда b — комплексное число, $\arg b = \psi$, $0 < \psi \operatorname{sign} \alpha \leq \min\left(\pi, \frac{\pi}{\gamma}\right)$ и на пути интегрирования сохраняется разложение (16.96), а функция $h(t)$ аналитична. Тогда вместо использования формулы (16.52) к отдельным интегралам в (16.99) применяется интегрирование по частям. При $\psi \operatorname{sign} \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\gamma}\right)$ второй ряд в (16.98) поглощается первым рядом.

4°. Если в точке $d \in (a, b)$ функция $h^{(p)}(t)$ терпит разрыв, то интеграл следует разбить по промежуткам $[a, d]$, $[d, b]$. Пусть
$$h(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^{(k)}(d)}{k!} (t-d)^k + h_1(t) = h_0(t) + h_1(t). \text{ Поскольку } h_0(t) \in C^\infty[a_1, b_1], \text{ } a < a_1 < d < b_1 < b, \text{ то при } \nu_r \in NR[a_1, d], \nu_l \in NL[d, b_1] \text{ имеем}$$

$$\int_{a_1}^d K(xt) h_0(t) \nu_r(t) dt + \int_d^{b_1} K(xt) h_0(t) \nu_l(t) dt = o(x^{-N}), \quad (16.103)$$

так как при интегрировании по частям члены взаимно уничтожаются. Поэтому при дальнейшем разложении надо использовать только интеграл, содержащий функцию $h_1(t)$. Пример, в котором $h(t) = \operatorname{arctg} \frac{1}{t-d}$, показывает, что функция $h(t)$ может быть разрывной, но ее производные в точке $t=d$ имеют устранимую особенность.

Отметим также, что функция $h(t)$ может быть негладкой, однако ее асимптотическое разложение в окрестности соответствующей критической точки может удовлетворять условию 4) теоремы 16.8 и эта теорема применима. Например, при $\lambda \in (0, 1)$, $\mu \in (0, 1)$, $c > 1$, $t \in (1, 2)$ функция

$$h(t) = \frac{(t-1)^\lambda}{(t-1)^\mu + c} = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1/c)^k (t-1)^{\lambda+k\mu}$$

удовлетворяет этому условию, но $h'(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 1+0$. В данном примере c можно заменить на аналитическую в окрестности $t=1$ функцию $g(t)$, $g(1) > 0$.

5°. Разложение при $x \rightarrow +\infty$ интеграла $\int_x^\infty K(t) h(t) dt$, если $K(t)$ обладает разложением (16.96), а $h(t)$ — (16.102), $\alpha_0 > 1 - \lambda_0 - \gamma$, получаем подстановкой (16.102) под знак интеграла и почленным интегрированием, так как функции $\Omega_h(x) = \int_x^\infty K(t) t^{-\alpha_h} dt$

согласно лемме 8.4 образуют шкалу. Легко показать, что остаток имеет требуемую оценку.

В частном случае для интеграла $Ji(\lambda, \nu, x) = \int_x^\infty t^{-\lambda} J_\nu(t) dt$ двукратным интегрированием по частям получаем соотношение

$$Ji(\lambda, \nu, x) = -x^{-\lambda} J_{\nu+1} + \\ + (\lambda + \nu + 1)[x^{-\lambda-1} J_\nu + (\nu - \lambda - 1) Ji(\lambda + 2, \nu, x)]. \quad (16.104)$$

Повторное применение этой формулы дает возможность для интеграла получить разложения, содержащие множители $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$. Такое разложение удобнее, чем (9.84), которое содержит бесконечно много различных функций Бесселя. Данный метод применен в [59, 115, 142].

Если $h(t)$ обладает разложением (16.102), то при разложении интеграла $\int_x^\infty J_\nu(t) h(t) dt$ сначала можно применить почленное интегрирование, а потом каждый член шкалы разложить согласно (16.104) и после этого перегруппировать члены. Этим же методом можно разложить интегралы

$$\int_x^\infty \exp(i\alpha t^\nu) J_\nu(t) h(t) dt \text{ и } \int_x^\infty \exp(-\alpha t^\nu) J_\nu(t) h(t) dt, \quad \alpha > 0.$$

16.4.3. Случай $a=0$ приходится рассматривать отдельно и для разложения интеграла применять иные методы. Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением интеграла

$$\Omega(x) = \int_0^b K(xt) h(t) \nu_i(t) dt, \quad \nu_i \in NL[0, b], \quad (16.105)$$

так как асимптотический вычет от точки b получается по теореме 16.8. Можно непосредственно применить теоремы 10.3, 12.6, 13.6, а также 11.4 с учетом п. 11.2.2, 1°. В данном пункте расширим метод, изложенный в работе [116]. Метод, разработанный в [76], будет рассмотрен в третьем томе монографии. Имеются еще и другие методы.

Лемма 16.4. Если 1) функция $K(t)t^\mu$ локально интегрируема в $[0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +\infty$ $K(t)$ имеет разложение (16.96), то при $t \rightarrow +\infty$

$$I(t, \mu) = \int_0^t K(\tau) \tau^\mu d\tau \sim C(\mu, \gamma) + \exp(i\alpha t^\nu) \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{-\beta_k}, \quad (16.106)$$

где вычисление A_k и β_k пояснено в доказательстве, $C(\mu, \gamma)$ определяется по формулам (16.113) и (16.116), $\beta_k \neq 0$.

Доказательство. Применим подстановку $\tau^\gamma = u$. Тогда

$$I(t, \mu) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{t^\gamma} K\left(u^{\frac{1}{\gamma}}\right) u^{\frac{\mu+1}{\gamma}-1} du. \quad (16.107)$$

Если интеграл (16.107) сходится при $t = \infty$, то

$$I(t, \mu) = \int_0^\infty K(u) u^\mu du - \frac{1}{\gamma} \int_{t^\gamma}^\infty K\left(u^{\frac{1}{\gamma}}\right) u^{\frac{\mu+1}{\gamma}-1} du. \quad (16.107')$$

В противном случае можно найти такое m , что $\frac{\mu+1-\lambda_m}{\gamma} - 1 \geq 0$, но $\frac{\mu+1-\lambda_{m+1}}{\gamma} - 1 < 0$. Тогда существует $\int_0^\infty K^*(u) du$, где

$$\begin{aligned} K^*(u) &= \left[K\left(u^{\frac{1}{\gamma}}\right) - e^{i\alpha u} \sum_{k=0}^m a_k u^{-\frac{\lambda_k}{\gamma}} \right] u^{\frac{\mu+1}{\gamma}-1} \sim \\ &\sim e^{i\alpha u} \sum_{k=m+1}^\infty a_k u^{\frac{1+\mu-\lambda_k}{\gamma}-1}; \end{aligned} \quad (16.108)$$

$$\begin{aligned} I(t, \mu) &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty K^*(u) du - \frac{1}{\gamma} \int_t^\infty K^*(u) du + \\ &+ \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m a_k \int_0^{t^\gamma} e^{i\alpha u} u^{\frac{\mu+1-\lambda_k}{\gamma}-1} du. \end{aligned} \quad (16.109)$$

Преобразуем интегралы, которые суммируются в последней сумме формулы (16.109). Для каждого интеграла можно найти такое $p_k \in \mathbb{N}$, что $-q_k = \frac{\mu+1-\lambda_k}{\gamma} - 1 - p_k \in (-1, 0]$. При $q_k > 0$ используется соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\alpha u} u^{-q_k} du &= \exp\left[\frac{i\pi}{2}(1-q_k)\right] \int_0^\infty e^{-\alpha v} v^{-q_k} dv = \\ &= \exp\left[\frac{i\pi}{2}(1-q_k)\right] \Gamma(1-q_k) \alpha^{-1+q_k}, \end{aligned} \quad (16.110)$$

а при $q_k=0$ — также $\int_0^{t^\gamma} e^{i\alpha u} du = \frac{1}{i\alpha} (e^{i\alpha t^\gamma} - 1)$. Поэтому каждый из упомянутых интегралов можно p_k раз интегрировать по частям и из полученного результата выделить постоянный член \int_0^∞ . Получаем равенство

$$\int_0^t K(\tau) \tau^\mu d\tau = C(\mu, \gamma) + \exp(i\alpha t^\gamma) \sum_{k=0}^{m_1} A_k t^{-\beta_k} + \\ + \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m a_k B_k \int_{t^\gamma}^\infty e^{i\alpha u} u^{-q_k} du - \frac{1}{\gamma} \int_{t^\gamma}^\infty K^*(u) du. \quad (16.111)$$

К последним двум слагаемым с учетом (16.108) можно применить лемму 8.4. Легко видеть, что окончательный результат получаем, если сумму $e^{i\alpha u} \sum_{k=0}^\infty a_k u^{\frac{\mu+1-\lambda_k}{\gamma}-1}$ подставляем под знак

интеграла (16.107), каждый член интегрируем неограниченное число раз по частям, учитываем только верхний предел t^γ , а затем перегруппировываем члены по функциям шкалы. В результате получаем ряд в формуле (16.106), где $A_0 = \frac{1}{i\gamma\alpha} a_0$, $-\beta_0 = \mu + 1 - \lambda_0 - \gamma$. Суммируя постоянные члены, после преобразований с учетом (16.110) получаем выражение

$$C(\mu, \gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty K^*(u) du + \\ + \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m a_k \exp \left[\frac{i\pi}{2} \left(\frac{\mu+1-\lambda_k}{\gamma} \right) \right] \alpha^{-\frac{(\mu+1-\lambda_k)}{\gamma}} \Gamma \left(\frac{\mu+1-\lambda_k}{\gamma} \right),$$

которое целесообразно упростить. Согласно (16.108) имеем

$$\int_0^\infty K^*(u) du = \lim_{p \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{-pu} K^*(u) du = \\ = \lim_{p \rightarrow +0} \left[\mathcal{K}(p, \mu, \gamma) - \sum_{k=0}^m a_k (p - i\alpha)^{-\frac{(\mu+1-\lambda_k)}{\gamma}} \Gamma \left(\frac{\mu+1-\lambda_k}{\gamma} \right) \right].$$

Поскольку предел при $p \rightarrow +0$ существует в левой части равенства и также для суммы в его правой части, то существует $\lim_{p \rightarrow +0} \bar{K}(p, \mu, \gamma)$, где

$$\bar{K}(p, \mu, \gamma) = \int_0^{\infty} e^{-p u} K(u^{1/\gamma}) u^{(\mu+1)/\gamma-1} du. \quad (16.112)$$

После сокращения членов в итоге получаем

$$C(\mu, \gamma) = \frac{1}{\gamma} \lim_{p \rightarrow +0} \bar{K}(p, \mu, \gamma). \quad (16.113)$$

Функцию $\bar{K}(p, \mu, \gamma)$ не всегда легко найти в явном виде. Иногда это возможно при некотором μ_0 . Если $\mu/\gamma - \mu_0/\gamma = n \in \mathbb{N}$, то согласно теории преобразования Лапласа [2] имеем

$$C(\mu, \gamma) = \frac{(-1)^n}{\gamma} \lim_{p \rightarrow +0} \frac{d^n}{dp^n} \bar{K}(p, \mu_0, \gamma), \quad (16.114)$$

а правую часть в (16.114) можно найти из разложения для $\bar{K}(p, \mu_0, \gamma)$ в окрестности $p=0$.

Можно дать другую интерпретацию формуле (16.113). Пусть при $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$ сходится интеграл

$$D(\kappa, \gamma) = \int_0^{\infty} K(u^{1/\gamma}) u^{\kappa-1} du. \quad (16.115)$$

Этот интеграл называется *преобразованием Меллина* от $K(u^{1/\gamma})$. $D(\kappa, \gamma)$ — аналитическая функция от κ в полосе $\text{Re } \kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$.

При $\frac{\mu+1}{\gamma} \in (\kappa_1, \kappa_2)$ согласно (16.112) и (16.115) имеем равенство

$$\frac{1}{\gamma} D((\mu+1)/\gamma, \gamma) = \frac{1}{\gamma} \lim_{p \rightarrow +0} \bar{K}(p, \mu, \gamma) = C(\mu, \gamma). \quad (16.116)$$

Поскольку $\bar{K}(p, \mu, \gamma)$ является аналитической функцией от μ при $\text{Re } \mu > -1$, то формула (16.116) указывает на существование аналитического продолжения для функции $D(\kappa, \gamma)$ при $\text{Re } \kappa \geq \kappa_2$. Пользуясь таблицами для преобразования Меллина [2], соотношение (16.116) также можем использовать для вычисления $C(\mu, \gamma)$. ■

Примечания. 1°. Если в (16.96) имеется более общее разложение

$$K(t) \sim \sum_{j=1}^p e^{i\alpha_j t^\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} t^{-\lambda_{kj}}, \quad \alpha_j \neq 0, \quad (16.96')$$

то в (16.106) соответственно изменяется второй член, но выражения (16.113) и (16.116) для $C(\mu, \gamma)$ остаются прежними.

2°. Лемма 16.4 остается верной, если в разложении (16.96) α — комплексное число и $\operatorname{Re}(i\alpha) < 0$ (или же в (16.96') $\operatorname{Re}(i\alpha_j) \leq 0$, $j=1, \dots, p$). Тогда имеет место непосредственно (16.107') и разложение второго интеграла в этом равенстве подстановкой $u = t^v$ приводится к п. 16.4.1. Сохраняется также формула (16.116).

3°. В равенстве (16.111) можно обе части дифференцировать по μ . При этом следует иметь в виду, что A_k, β_k, B_k и q_k являются функциями от μ . Учитывая формулу

$$\begin{aligned} & \int_t^\infty e^{i\alpha u} u^{-q} (\ln u)^n du = \\ & = i e^{i\alpha t} t^{-q+1} \int_0^\infty e^{-\alpha t \tau} [\ln t + \ln(1+i\tau)]^n (1+i\tau)^{-q} d\tau \sim \\ & \sim \frac{i}{\alpha} e^{i\alpha t} t^{-q} \sum_{k=0}^\infty P_{kn}(\ln t) (\alpha t)^{-k}, \end{aligned} \quad (16.117)$$

где $P_{kn}(u)$ — полином степени n , после действий, как в доказательстве леммы, при $t \rightarrow +\infty$ получаем разложение

$$\int_0^t K(\tau) \tau^\mu (\ln \tau)^n d\tau \sim \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} C(\mu, \gamma) + e^{i\alpha t} \sum_{k=0}^\infty P_{kn}^*(\ln t) t^{-\beta_k}. \quad (16.118)$$

Лемма 16.5. Если 1) функция $K(\tau)\tau^\mu$ локально интегрируема при $\tau \in [0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +\infty$ $K(t)$ имеет разложение (16.96), где $\operatorname{Re}(i\alpha) \leq 0$, то при $v_l(t) \in NL[0, b]$, $x \rightarrow +\infty$ имеет место соотношение

$$\Omega(x) = \int_0^b K(xt) t^\mu v_l(t) dt = C(\mu, \gamma) x^{-\mu-1} + o(x^{-N}). \quad (16.119)$$

Доказательство. Пусть $v_l(t) \equiv 1$ при $t \in [0, b_1]$, $b_1 < b$. Интегрируя (16.119) по частям, получаем

$$\Omega(x) = - \int_0^b v_l'(t) dt \int_0^t K(x\tau) \tau^\mu d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= -x^{-\mu-1} \int_{b_1}^b v_l'(t) dt \int_0^{xt} K(u) u^\mu du = -x^{-\mu-1} C(\mu, \gamma) \int_{b_1}^b v_l'(t) dt - \\
&\quad - x^{-\mu-1} \int_{b_1}^b v_l'(t) F(xt) dt, \quad (16.120)
\end{aligned}$$

где $F(t)$ определяется в (16.106). По теореме 16.8 (или же по лемме 2.3 при $\operatorname{Re}(i\alpha) < 0$), последний интеграл имеет оценку $o(x^{-N})$, так как $v_l^{(k)}(t) = 0$, $k \in N_1$, при $t = b_1$ и $t = b$. Первый интеграл в правой части (16.120) равен $v_l(b_1) = 1$. Отсюда и следует формула (16.119). Из (16.120) и (16.118) следует также

$$\begin{aligned}
&\int_0^b K(xt) t^\mu (\ln t)^n v_l(t) dt = -x^{-\mu-1} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (\ln x)^j \times \\
&\quad \times \int_{b_1}^b v_l'(t) dt \int_0^{xt} K(u) u^\mu (\ln u)^{n-j} du = \\
&= x^{-\mu-1} \sum_{k=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (\ln x)^j \frac{\partial^{n-j}}{\partial \mu^{n-j}} C(\mu, \gamma) + o(x^{-N}). \quad (16.121)
\end{aligned}$$

16.4.4. Теорема 16.9. Пусть 1) функция $K(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеет разложение (16.96), где $\operatorname{Re}(i\alpha) \leq 0$; 2) существует интервал (κ_1, κ_2) такой, что интеграл (16.115) сходится при $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$; 3) $h(t) \in C^\infty(0, b)$; 4) при $t \rightarrow +0$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{\mu_k}, \quad \mu_k \uparrow +\infty, \quad (16.122)$$

причем разложение (16.122) можно сколь угодно раз почленно дифференцировать, и 5) $\int_0^b K(t) t^{\mu_0} dt$ сходится. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ имеют место разложения

$$\Omega_0(x) = \int_0^b K(xt) h(t) v_l(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k C(\mu_k, \gamma) x^{-\mu_k-1}; \quad (16.123)$$

$$\Omega_p(x) = \int_0^b K(xt) (\ln t)^p h(t) v_l(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k Q_{kp}(\ln x) x^{-\mu_k-1}, \quad (16.124)$$

где

$$Q_{kp}(u) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \frac{\partial^{p-j}}{\partial \mu_k^{p-j}} C(\mu_k, \gamma) u^j. \quad (16.125)$$

Доказательство. Положим

$$\rho_m(t) = h(t) - \sum_{k=0}^m b_k t^{\mu_k} = O(t^{\mu_{m+1}}).$$

Из условий 3) и 4) следует, что $\rho_m(t) \in C[\mu_{m+1}] (0, b)$ и $\rho_m^{(j)}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$ и $j \leq [\mu_{m+1}] - 1$. Согласно лемме 16.5 имеем

$$\Omega_0(x) = \sum_{k=0}^m b_k C(\mu_k, \gamma) x^{-\mu_k-1} + o(x^{-N}) + R_m(x); \quad (16.126)$$

$$R_m(x) = \int_0^b K(xt) \rho_m(t) v_l(t) dt. \quad (16.127)$$

Для оценки $R_m(x)$ применим подстановку $t = u^{1/\gamma}$ и введем функцию $\rho_m^*(u) = \frac{1}{\gamma} \rho_m(u^{1/\gamma}) u^{1/\gamma - \kappa} = O\left(u^{\frac{\mu_{m+1}+1}{\gamma} - \kappa}\right)$, где $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ число m можно выбрать так, чтобы $\frac{\mu_{m+1}+1}{\gamma} - \kappa \geq n$. Тогда $\rho_m^*(u) \in C^n(0, b)$ и $\frac{d^j}{du^j} \rho_m^*(u) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow +0$, если $j \leq n-1$. Интегрируя (16.127) n раз по частям и пользуясь интегрированными ядрами (см. п. 8.2.2)

$$K_{-1}(t) = - \int_t^\infty K(\tau^{1/\gamma}) \tau^{\kappa-1} d\tau, \quad K_{-k-1}(t) = - \int_t^\infty K_{-k}(\tau) d\tau, \quad k \geq 1;$$

$$K_{-1}(x, t) = x^{-\kappa\gamma} K_{-1}(x^\gamma t), \quad K_{-k}(x, t) = x^{-\gamma(k+\kappa-1)} K_{-k}(x^\gamma t), \quad k > 1,$$

получаем

$$R_m(x) = (-1)^n x^{-\gamma(n+\kappa-1)} \int_0^{b^\gamma} K_{-n}(x^\gamma u) \frac{d^n}{du^n} [\rho_m^*(u) v_l^*(u)] du.$$

Из леммы 8.4 следует, что $|K_{-n}(x^\gamma u)| < M_n$, $u \in [0, \infty)$, поэтому $R_m(x) = O(x^{-\gamma(n+\kappa-1)})$. Эта оценка вместе с (16.126) доказывает формулу (16.123).

Доказательство формулы (16.124) отличается от предыдущего лишь тем, что вместо (16.119) применяется (16.121) и $\rho_m^*(u)$ заменяется на $\rho_m^*(u) \left(\frac{1}{\gamma} \ln u\right)^p$. Однако эти замены оценку остатка $R_m(x)$ существенно не меняют. ■

Примечания. 1°. Можно брать $b = \infty$ и заменять $v_l(t)$ на 1, если функция $h(t)$ удовлетворяет условиям, указанным в примечании 2° к теореме 16.8. Тогда асимптотический вычет от $t = \infty$ имеет оценку $o(x^{-N})$ и правые части формул (16.123) и (16.124) остаются без изменений. Новые члены могут появиться, если в разложении (16.102) содержится множитель $\exp(ict^\beta)$, $\beta > \gamma$, и $\operatorname{sign} \alpha c = -1$. Например, они появляются в разложении интеграла $\int_0^\infty J_\nu(xt) \sin t^2 dt$. В этом случае ядро $\exp[\pm i(xt - t^2)]$ имеет еще стационарную критическую точку $t_0 = x/2$. К разложению (16.123) следует добавить разложение типа (16.77).

2°. Если $\operatorname{Re}(i\alpha) < 0$, то условием почленного дифференцирования ряда (16.122) можно пренебречь, так как в этом случае при оценке остатка можно применить соотношение

$$\int_0^b K(xt) t^{\nu} o(1) dt = o(x^{-\nu-1}). \quad (16.128)$$

Докажем его справедливость. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $b_0 > 0$, что $|o(1)| < \varepsilon$ при $t \in [0, b_0]$. Согласно лемме 2.3 с погрешностью $o(x^{-N})$ в (16.128) можно b заменить на b_0 , а потом $K(xt)$ на $|K(xt)|$. После этого применим (16.120), где b заменено на b_0 и $F(xt) = \int_{xt}^\infty |K(u)| u^\nu du$.

Для справедливости формулы (16.128) достаточно того, что известно асимптотическое поведение функции $K(\tau)$. Эта формула в некотором смысле обобщает теорему 16.2.

3°. Из сравнения формулы (16.123) с (16.98) следует, что случаи, когда $a > 0$ и $a = 0$, отличаются друг от друга не только методами вывода асимптотических разложений, но и асимптотическими шкалами. Сущность этого различия проще объяснить на примере ядра $\exp(i\alpha x^\gamma t^\nu)$, $\gamma \neq 1$. Если $a > 0$, то из подстановки $t^\nu = a^\nu + \tau$ независимо от величины γ получаем $t \sim a + c\tau$ при $\tau \rightarrow +0$ и поэтому имеем разложение по степеням $x^{-\nu}$. При $a = 0$ применяется подстановка $t^\nu = \tau$, $t = \tau^{1/\nu}$, и разложение содержит степени от $(x^\nu)^{-1/\nu} = x^{-1}$, поэтому величина γ не появляется в шкале. Она содержится только в коэффициентах $C(\mu, \gamma)$. Лишь при $\gamma = 1$ в обоих случаях получаем одинаковые шкалы.

4°. В формулах (16.123) и (16.124) требуется найти только $C(\mu, \nu)$, для чего можно применить формулу (16.116) и таблицы [1, 2]. Укажем несколько примеров.

№ п/п	$K(t)$	$D(\kappa, 1)$
1	$J_\nu(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{2^{\kappa-1} \Gamma\left(\frac{\kappa+\nu}{2}\right)}{\alpha^\kappa \Gamma\left(\frac{\nu-\kappa}{2}+1\right)}, \operatorname{Re} \kappa > -\operatorname{Re} \nu$
2	$Y_\nu(\alpha t), \alpha > 0$	$-2^{\kappa-1} \alpha^{-\kappa} \pi^{-1} \Gamma\left(\frac{\kappa+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\kappa-\nu}{2}\right) \cos \pi(\kappa-\nu)/2$ $\operatorname{Re} \kappa > \operatorname{Re} \nu $
3	$c(t, \alpha) = \int_t^\infty \tau^{\alpha-1} \cos \tau d\tau$	$\kappa^{-1} \Gamma(\kappa+\alpha) \cos \frac{\pi}{2}(\kappa+\alpha)$
4	$s(t, \alpha) = \int_t^\infty \tau^{\alpha-1} \sin \tau d\tau$	$\kappa^{-1} \Gamma(\kappa+\alpha) \sin \frac{\pi}{2}(\kappa+\alpha)$
		$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \kappa > 0, \\ \operatorname{Re}(\alpha+\kappa) > 0 \end{array} \right\}$
5	$J_\mu(r t) J_\nu(t),$ $0 < r < 1$	$\frac{2^{\kappa-1} r^\mu \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\kappa}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\kappa}{2}+1\right)} {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+\kappa}{2}, \frac{\mu+\kappa-\nu}{2}; \mu+1; r^2\right), \operatorname{Re} \kappa > -\operatorname{Re}(\mu+\nu)$
6	$J_\mu(r t) J_\nu(t), r > 1$	$\frac{2^{\kappa-1} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\kappa}{2}\right)}{r^{\nu-\mu+1} \Gamma(\nu+1) \Gamma\left(\frac{\mu-\kappa-\nu}{2}+1\right)} {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+\kappa}{2}, \frac{\kappa+\nu-\mu}{2}; \nu+1; \frac{1}{r^2}\right), \operatorname{Re} \kappa > -\operatorname{Re}(\mu+\nu)$

При $\alpha=0$ из 3 и 4 получаем формулы для $\operatorname{ci} t$ и $-\operatorname{si} t$, при $\alpha = \frac{1}{2}$ — для интегралов Френеля.

5°. Если $K(\tau) = K_1(\tau)K_2(\tau)$ и каждый из сомножителей имеет разложение вида (16.96), то $K(\tau)$ не всегда обладает таким разложением. В качестве примера приводим функцию $J_\nu(t) \sin t$, асимптотическое разложение которой содержит также чисто степенной ряд. В таком случае теорема 16.9 не имеет места и следует применить другие методы, например те, которые рассмотрены в п. 11.2.2 и 15.2. Вычисление коэффициентов разложения тогда будет более сложным.

6°. Разложение (16.123) по форме не отличается от разложения (12.3), которое получено для интеграла с быстро убывающим ядром. Отличия в обоих случаях следующие: 1) при доказательстве (16.123) предъявлены более сильные требования к функции нагрузки $h(t)$; 2) в (12.3) коэффициенты $\mu(\lambda_k)$ определяются по формуле (12.4) непосредственно как преобразование Меллина от ядра, а $C(\mu_k, \gamma)$ в (16.123) — как аналитическое продолжение этого преобразования. Формулы (12.3), (16.123), (16.92) и (16.98) совместно описывают асимптотические разложения интеграла $\int_0^b K(zt)h(t)dt$ при разных $\arg z$ в секторе, в котором при $z \rightarrow \infty$

$$K(z) \sim \sum_{j=1}^p \exp(\alpha_j z^\nu) \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^{-\lambda_k}, \quad \alpha_j \neq 0, \quad \lambda_k \uparrow +\infty,$$

если $h(t)$ (или же $h(b-t)$) обладает разложением (16.122).

16.4.5. Теорему 16.9 можем модифицировать, допустив для $h(t)$ при $t \rightarrow +0$ разложение

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k g_k(t), \quad (16.129)$$

где функции $g_k(t)$ образуют шкалу, эквивалентную степенной шкале $\{t^{\mu_k}\}$, $\mu_k \uparrow +\infty$. Для этого надо модифицировать также лемму 16.5.

Лемма 16.6. Пусть 1) при некотором $\eta > 0$ функция $K(\tau)$ аналитична в секторе $|\arg \tau| \leq \eta$ и обладает в нем при $\tau \rightarrow \infty$ разложением (16.96); 2) функция $g(\tau)$ аналитична в этом секторе и обладает при $\tau \rightarrow \infty$ оценкой $|g(\tau)| < M \exp(c|\tau|^\nu)$, $c \geq 0$; 3) $\psi = \min(\eta, \pi/2\nu)$, $\exp[i\psi \operatorname{sign} \alpha] = \kappa$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^b K(xt)g(t)v_1(t)dt = \int_0^{\infty \kappa} K(x\tau)g(\tau)d\tau + o(x^{-N}), \quad (16.130)$$

если интеграл при нижнем пределе сходится.

Доказательство опирается на равенство

$$\int_0^b K(xt)g(t)v_l(t)dt = \int_0^{\infty x} K(x\tau)g(\tau)d\tau + \\ + \int_{b_1}^b v_l'(t)dt \int_t^{tx} K(x\tau)g(\tau)d\tau + \int_{b_1}^b v_l'(t)dt \int_{tx}^{\infty x} K(x\tau)g(\tau)d\tau.$$

Последний интеграл по лемме 2.3 имеет оценку $O(\exp[-|\alpha| \sin \psi \gamma (b_1 x)^\nu] x^{-\nu}) = o(x^{-N})$, а для оценки второго интеграла применяются замечание 3° к теореме 16.8 и интегрирование по частям так же, как в доказательстве леммы 16.5. ■

Теорема 16.10. Пусть 1) функция $K(\tau)$ удовлетворяет условию 1) леммы 16.6; 2) при $t \rightarrow +0$ $h(t)$ обладает асимптотическим разложением (16.129), которое можно сколь угодно раз почленно дифференцировать; 3) $\int_0^b K(t)t^{\mu_0} dt$ сходится; 4) функции $g_k(t)$ удовлетворяют условию 2) леммы 16.6; 5) существует последовательность $\{\mu_k\}$, $\mu_k \uparrow +\infty$, такая, что в секторе $|\arg t| \leq \eta$ шкалы $\{g_k^{(m)}(t)\}$ и $\{(t^{\mu_k})^{(m)}\}$ эквивалентны при всех $m \in N$. Тогда при $0 < b < +\infty$ и $x \rightarrow +\infty$ для любого $n \in N$ имеет место соотношение

$$\int_0^b K(xt)h(t)v_l(t)dt = \\ = \sum_{h=0}^n b_h \int_0^{\infty x} K(x\tau)g_h(\tau)d\tau + o(x^{-\mu_n-1}), \quad (16.131)$$

где величина κ определена в лемме 16.6.

Доказательство. Оценка остатка получается аналогично, как в доказательстве теоремы 16.9. Условие 5) можно ослабить, но это осложнит доказательство. При оценке отдельных членов в каждом интеграле путь интегрирования можем разбить от 0 до $b\kappa$ и от $b\kappa$ до ∞ . Последний интеграл, как в лемме 16.6, имеет оценку $o(x^{-N})$, а первый преобразуется в

$$\kappa \int_0^b K(x\kappa u)g_h(\kappa u)v_l(u)du + \kappa \int_0^b K(x\kappa u)g_h(\kappa u)v_r(u)du.$$

Второй интеграл снова имеет оценку $o(x^{-N})$, а первый согласно условию 5) при $m=0$ и формуле (16.128) — $O(x^{-\mu_k-1})$. Однако такая оценка не означает, что члены ряда (16.131) образуют шкалу. Поэтому пока доказан только слабоасимптотический характер ряда. При конкретной системе $\{g_k(t)\}$ часто можно получить более точную оценку. ■

16.4.6. Рассмотрим разложение интеграла (16.88), когда $K(\tau)$ имеет разложение (16.96). Критическими точками являются концы промежутка интегрирования и точки, в которых $g'(t) = 0$ или $g(t) = 0$, поэтому промежуток интегрирования следует разбить так, чтобы эти точки стали концами промежутка. Если $g(t)$ на концах промежутка обладает разложениями (16.48) и (16.50) и $g(t) \in C^\infty(a, b)$, то с помощью подстановки $g(t) = \tau$ задачу о разложении приводим к теоремам 16.8 и 16.9. При $g(t) > 0$ можем также непосредственно подставить под знак интеграла разложение (16.96) и для каждого члена пользоваться теоремой 16.6. Отметим некоторые особенности особенности критической точки $t_0 \in (a, b)$, если $g(t_0) = 0$.

1°. Может быть, что $g(t)$ в точке t_0 не меняет знака. Тогда обычно и $g'(t_0) = 0$, и в таком случае t_0 одновременно является стационарной точкой. Пусть $g^{(k)}(t_0) = 0$, $k < 2m$, $g^{(2m)}(t_0) \neq 0$, $m \geq 1$, $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^k$ при $t \rightarrow t_0$. Тогда справедлива следующая формула, обобщающая (16.55):

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} K(xg(t)) h(t) v_s(t) dt \sim \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} C\left(\frac{2k+1}{2m}, \gamma\right) x^{-\frac{2k+1}{2m}}, \quad (16.132)$$

где

$$H(\tau) = h(t(\tau)) t'(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{\frac{k+1}{2m} - 1} \quad \text{при } \tau \rightarrow +0. \quad (16.133)$$

2°. Пусть $g(t) > 0$ при $t > t_0$, $g(t) < 0$ при $t < t_0$. Возможно, что функция $K(\tau)$ при $\tau < 0$ не существует или же имеет другую асимптотику, чем при $\tau > 0$. В качестве примера для первого случая приведем $\text{si } t = -\int_t^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau$, если при $t < 0$ интеграл не пони-

мается в смысле главного значения, а для второго случая $-\sin \sqrt{t}$ или $\text{si } t = -\int_t^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$, так как $\text{si}(-t) = -\pi - \text{si } t$. Во втором

случае разложение интеграла по сегменту $[a, t_0]$ часто приходится искать другим методом, а в первом случае интеграл по этому сегменту не существует.

3°. Пусть $K(t) = K_1(t) + K_2(t)$, где $K_1(t)$ — четная функция,

а $K_2(t)$ — нечетная, $h(t_0) \neq 0$ и $g(t)$ удовлетворяет условиям п. 2°, $g'(t_0) \neq 0$, $g(t) \in C^\infty(a, b)$. Обозначим величину (16.113) для $K_1(t)$ через $C_1(\mu, \gamma)$, а для $K_2(t)$ — через $C_2(\mu, \gamma)$. В отдельных сегментах $[a, t_0]$ и $[t_0, b]$ применим нейтрализатор и подстановку $g(t) = \tau$. Если имеет место (16.133), то, применяя к отдельным интегралам теорему 16.9, получаем разложения

$$\int_a^b K_1(xg(t))h(t)v_s(t)dt \sim 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}C_1(2k, \gamma)x^{-2k-1}; \quad (16.134)$$

$$\int_a^b K_2(xg(t))h(t)v_s(t)dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}C_2(2k+1, \gamma)x^{-2k-2}, \quad (16.135)$$

где $v_s(t)$ — симметрический нейтрализатор с центром t_0 . Отсюда видно, что лишь в случае, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ $C_1(2k, \gamma) = 0$, $C_2(2k+1, \gamma) = 0$, точка t_0 не является существенно критической точкой. Такой случай имеет место для $K(t) = \sin \alpha t$, когда

$$D(\kappa, 1) = \alpha^{-\kappa} \Gamma(\kappa) \sin \frac{\pi \gamma}{2}, \quad C_2(2k+1, 1) = D(2k+2, 1) = 0,$$

и для $K(t) = \cos \alpha t$, когда $D(\kappa, 1) = \alpha^{-\kappa} \Gamma(\kappa) \cos \frac{\pi \kappa}{2}$, $C_1(2k, 1) = D(2k+1, 1) = 0$. Однако этот случай не имеет места уже для $K(t) = \sin t^2$. Это ясно также из примечания 3° к теореме 16.9.

16.4.7, 1°. В качестве примера к теореме 16.9 приводим интеграл

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} t^\lambda J_\mu(rt) J_\nu(t) \exp\left(-\frac{t^2 a}{x + \sqrt{x^2 + t^2}}\right) dt,$$

где $r > 0$, $\lambda > -(\mu + \nu + 1)$, $a > 0$, $x \rightarrow +\infty$. При $\alpha > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= x^{\lambda+1} \int_0^{\infty} \tau^\lambda J_\mu(xr\tau) J_\nu(x\tau) \exp\left(-\frac{x\tau^2 a}{1 + \sqrt{1 + \tau^2}}\right) d\tau = \\ &= x^{\lambda+1} \int_0^{\alpha} \tau^\lambda J_\mu(xr\tau) J_\nu(x\tau) \exp\left(-\frac{x\tau^2 a}{1 + \sqrt{1 + \tau^2}}\right) v_l(\tau) d\tau + \\ &\quad + o(x^{-N}) = x^{\lambda+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k x^k}{k!} \times \\ &\times \int_0^{\alpha} \tau^{\lambda+2k} J_\mu(xr\tau) J_\nu(x\tau) (1 + \sqrt{1 + \tau^2})^{-k} v_l(\tau) d\tau + o(x^{-N}). \end{aligned} \quad (16.136)$$

Каждый интеграл в (16.136) имеет ядро, обладающее разложением (16.96'), поэтому все они разлагаются по формуле (16.123), где $\nu=1$ и $C(\mu_k, 1)$ определяется по формулам 5 и 6 из п. 16.4.4. Следует различать случаи, когда $r \in (0, 1)$ или же $r > 1$. После перегруппировки членов получаем

$$\Omega(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\lambda, r, \mu, \nu, a) x^{-k}, \quad B_0 = C(\lambda, 1). \quad (16.137)$$

Для коэффициентов B_k можно найти явное выражение.

При $r=1$ (16.137) не имеет места, но можем применить некоторую модификацию теоремы 12.1, используя формулу [5]

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \tau^\lambda J_\mu(x\tau) J_\nu(x\tau) \exp(-p^2\tau^2) d\tau = \\ & = \frac{x^{\mu+\nu}}{2^{\mu+\nu+1} p^{\lambda+\mu+\nu+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \times \\ & \times {}_3F_3\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2}, \frac{\lambda+\mu+\nu+1}{2}; \right. \\ & \left. \mu+1, \nu+1, \mu+\nu+1; -\frac{x^2}{p^2}\right), \quad (16.138) \end{aligned}$$

$\lambda+\mu+\nu > -1$, $p > 0$. Для этого разделим интеграл без помощи нейтрализатора, взяв $\alpha=1/2$. При $\tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ применим разложение

$$\exp\left(-\frac{x\tau^2 a}{1+\sqrt{1+\tau^2}}\right) = \exp\left(-\frac{x\tau^2 a}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} D_k(xa) \tau^{2k}, \quad (16.139)$$

$D_0=1$, $D_1=0$, $D_2=\frac{ax}{8}$, $D_k = O((ax)^{[k/2]})$, которое получено по образцу, приведенному в п. 16.2.2, 4°. После подстановки (16.139) в (16.136) и почленного интегрирования ряда верхний предел интеграла $\alpha=1/2$ заменим на ∞ и к каждому члену применим (16.138), где $p=\sqrt{ax/2}$. Кроме того, необходимо разложить функцию ${}_3F_3$ и перегруппировать члены. Разложение для ${}_pF_p$ дано в (23.51).

Асимптотическую оценку для $\Omega(x)$ в общем случае указать трудно. Если для ${}_3F_3$ разности между верхними и нижними па-

раметрами не являются целыми числами, то $\Omega(x) = \bar{O}(x^{\lambda/2})$ при $\lambda > 0$, $\Omega(x) = \bar{O}(\ln x)$ при $\lambda = 0$ и $\Omega(x) = \bar{O}(1)$ при $\lambda < 0$. Пусть $r = 1 + \varepsilon(x)$. При $\varepsilon(x) \sim cx^{-\beta}$, $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, остается справедливой формула (16.137), в которой коэффициенты B_k зависят от x , и поэтому следует еще перегруппировать члены. Если $\varepsilon(x) = o(x^{-1/2})$, то $J_\mu(xr\tau)$ можно разложить согласно формуле Тейлора по степеням $\varepsilon(x)$ и к каждому члену применить (16.138).

2°. Данный пример еще раз свидетельствует о том, что иногда решающее значение имеет удачно подобранная формула. Рассмотрим другие примеры [3]:

$$\int_{-1}^1 e^{xt} J_n(x\sqrt{1-t^2}) (1-t^2)^{n/2} dt = \frac{2x^n}{(2n+1)!!}; \quad (16.140)$$

$$\int_0^1 J_n^2(x\sqrt{1-t^2}) dt = \frac{1}{x} \int_0^x J_{2n}(2t) dt. \quad (16.141)$$

По этим соотношениям для интегралов, стоящих в левых частях формул, можем непосредственно найти асимптотические разложения при $x \rightarrow +\infty$, которые нельзя построить с помощью методов, рассмотренных в п. 16.4. Формула (16.140) дает результат, противоположный ожидаемому: чем сильнее аннулируется подынтегральная функция в критической точке $t=1$, тем быстрее стремится интеграл к ∞ при $x \rightarrow +\infty$. Разложение для правой части (16.141) можно построить также согласно примечанию 5° к теореме 16.8.

Интегралы с осциллирующими ядрами, модули которых экспоненциально убывают, часто разлагаются по теореме 12.1. Например, при $x \rightarrow \infty$, $|\Theta| < \pi/2$, $\operatorname{Re} \nu > -1$ по этой теореме в силу формулы [5]

$$\begin{aligned} \psi_\nu(\Theta, \nu) &= \int_0^\infty J_\nu(t \sin \Theta) \exp(-t \cos \Theta) t^{\nu-1} dt = \\ &= \frac{(\sin \Theta/2)^\nu \Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\nu + 1)} {}_2F_1\left(\frac{\mu + \nu}{2}, \frac{1 - \mu + \nu}{2}; \nu + 1; \sin^2 \Theta\right) \end{aligned}$$

получаем [118]

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_\nu(xt \sin \Theta) \exp(-xt \cos \Theta) h(t) dt \sim \\ &\sim \sum_{k=0}^\infty \psi_{k+1}(\Theta, \nu) \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^{-k-1}. \end{aligned} \quad (16.142)$$

§ 17. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

17.1. Область и радиус влияния

17.1.1. В случае ядра $K(z, t)$ построение асимптотического разложения интеграла усложняется тем, что критические точки в общем зависят от параметра и изменение расположения этих точек вместе с изменением параметра может вызвать различные осложнения. Исследуем подробнее асимптотику интеграла

$$\int_a^b e^{-g(x,t)} h(x,t) dt \quad (17.1)$$

при $x \rightarrow x_0$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$; $g(x, t)$, $h(x, t)$ — действительные функции двух переменных. Очевидно, $e^{-g(x,t)} \geq 0$. Параметр x выбирается действительным потому, что при комплексном x часть критических точек может быть комплексной, но t действительное. Пределы интеграла в этом параграфе в общем зависят от x , т. е. $a = a(x)$, $b = b(x)$. Если пределы постоянны, то обозначим их через α и β .

Стремление x к x_0 может быть как односторонним, так и двухсторонним (если $x_0 \neq \pm \infty$). В каждом конкретном случае оно будет уточнено. Мы рассмотрим изменение x на множестве $U(x_0)$, $x_0 \in \bar{U}(x_0)$, которое условно назовем *окрестностью* x_0 . Обычно окрестность берется достаточно узкой.

Частный случай интеграла (17.1), когда $g(x, t) = xg_1(t)$, $x \rightarrow +\infty$, рассматривался в § 16. В этом параграфе и в первом томе монографии уже можно было обнаружить некоторые особенности, характерные для ядра $e^{-g(x,t)}$. Исследуем их подробнее.

1°. Рассмотрим следующий вопрос: какое условие требуется наложить на $f(x)$, $f(x) > 0$, чтобы разложения интегралов

$$\int_0^{f(x)} e^{-xt} h(t) dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} e^{-xt} h(t) dt \quad (17.2)$$

при одной и той же функции $h(t)$ совпали? Существенно критической является точка $t=0$. При $f(x) = \beta > 0$ для обоих интегралов (17.2) по лемме Ватсона получаем одно и то же разложение. Такое же разложение получаем, если $f(x) \rightarrow \beta > 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Но при $f(x) \rightarrow 0$ разложения для обоих интегралов в общем различаются. Например, если $f(x) = \alpha x^{-1}$, $\alpha > 0$, и $h(t) \geq m > 0$ при $t > 0$, то $|\int_0^{\infty} e^{-xt} h(t) dt| \geq m e^{-\alpha x^{-1}}$ и этот интеграл имеет такой же

порядок, как $\int_0^{\alpha x^{-1}} e^{-xt} h(t) dt$, если $0 < h(t) < M$ в $[0, \alpha x^{-1}]$. Поэтому в силу леммы 16.1 для первого интеграла (17.2) прежнее разложение не имеет места. Если $|h(t)| < Me^{xt}$ при $t \geq 0$ и $f(x) = \alpha (\ln x)^\gamma x^{-1}$, $\gamma > 1$, то

$$\left| \int_{f(x)}^{\infty} e^{-xt} h(t) dt \right| < M \int_{f(x)}^{\infty} e^{-(x-\kappa)t} dt = \\ = \frac{M}{x-\kappa} \exp \{-\alpha(x-\kappa) (\ln x)^\gamma x^{-1}\} = o(x^{-N})$$

и лемма Ватсона для первого интеграла в (17.2) сохраняется.

Из рассмотренного примера следует, что небольшое отличие в выборе функции $f(x)$ уже может иметь существенное значение. Для оформления этого отличия целесообразно ввести соответствующую терминологию.

Определение 17.1. Пусть $\sigma(x) \in [a, b]$ — существенно критическая точка интеграла (17.1) при $x \rightarrow x_0$, $x \in U(x_0)$, $x_0 \in \bar{U}(x_0)$, и сегмент, по которому взятый интеграл является асимптотическим вкладом интеграла (17.1) от окрестности точки $\sigma(x)$, обозначен через I , $\sigma(x) \in I$. Любой сегмент $[\sigma(x) - \eta(x), \sigma(x) + \eta(x)]$, который при $x \rightarrow x_0$ не является достаточно широким при построении асимптотического выражения для (17.1), т. е. не содержит I , назовем *внутренней областью влияния*. Сегмент $[\sigma(x) - \rho(x), \sigma(x) + \rho(x)]$, содержащий I при $x \rightarrow x_0$, назовем *внешней областью влияния*. Величина $\eta(x)$ называется *внутренним*, а $\rho(x)$ — *внешним радиусом влияния* (мы сохраним обозначения $\eta(x)$ и $\rho(x)$ для соответствующих радиусов во всем параграфе).

Иногда целесообразно в определении брать сегменты $[\sigma(x) - \eta_l(x), \sigma(x) + \eta_r(x)]$ и $[\sigma(x) - \rho_l(x), \sigma(x) + \rho_r(x)]$ и различать *левые* и *правые радиусы влияния*. Если $\sigma(x)$ является концом промежутка интегрирования, то рассматриваются только левые или правые радиусы влияния.

Радиусы не определяются однозначно; в частности, обычно соответствующими радиусами служат также $\alpha \eta(x)$ и $\alpha \rho(x)$, $\alpha > 0$. В общем нельзя указать максимальный внутренний и минимальный внешний радиусы, но для уточнения характеристики асимптотического поведения интеграла следует найти по возможности большой радиус $\eta(x)$ и малый $-\rho(x)$. Однако в общем эта задача нелегкая, и впредь укажем некоторые, наиболее просто находимые радиусы $\eta(x)$ и $\rho(x)$. Чтобы определение радиусов влияния не зависело от $U(x_0)$, всегда будем x брать достаточно близким к x_0 .

Для интегралов (17.2) имеем $\sigma(x) = 0$, $\eta_r(x) = \alpha x^{-1}$, $\rho_r(x) = \alpha (\ln x)^\gamma x^{-1}$, $\alpha > 0$, $\gamma > 1$. Другие примеры рассмотрены далее.

2°. В первом томе нашей монографии уже были рассмотрены примеры, когда при использовании теоремы 12.1 $\max |K(xt)|$ не достигается в той точке, в окрестности которой разлагается $h(t)$. Например, $\max |e^{-xt} \sin xt|$ достигается при $t = \pi/4x$, а $h(t)$ разлагается по степеням t , т. е. критической точкой считается $t=0$. В случае интеграла (17.1) часто приходится критическую точку $\sigma(x)$ заменять на некоторую другую, ей близкую точку $s(x)$. Часто это делается потому, что точное расположение критической точки указать нельзя. Назовем $s(x)$ *аппроксимирующей критической точкой*. Очевидно, $s(x)$ тоже не определяется однозначно. Обычно $s(x)$ выбирают так, чтобы при $x \rightarrow x_0$ имело место $\sigma(x) \sim s(x)$ и, кроме того, функция $s(x)$ была по возможности простой. Мы в дальнейшем сохраним обозначения $\sigma(x)$ и $s(x)$.

Если $\sigma(x)$ заменяем на $s(x)$, то такую же замену следует сделать в определении 17.1. Сохраним при этом прежние обозначения $\eta(x)$ и $\rho(x)$ и их названия. Очевидно, при такой замене $\eta(x)$ и $\rho(x)$ могут только увеличиваться; на сколько — это зависит от выбора $s(x)$ и характера критической точки $\sigma(x)$. Ниже убедимся, что нахождение точки $s(x)$ и радиуса $\rho(x)$ является основной задачей при построении асимптотического выражения для интеграла (17.1).

17.1.2. Имеются следующие возможности существования радиусов $\eta(x)$ и $\rho(x)$: а) $\rho(x) \rightarrow 0$; б) $\rho(x)$ и $\eta(x)$ конечны; в) $\rho(x) \rightarrow +\infty$, $\eta(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow x_0$. Соответственно этому разделению $\rho(x)$ назовем *коротким, конечным или длинным внешним радиусом влияния*. При этом может быть, что $\sigma(x)$ остается конечным, $\sigma(x) \rightarrow \pm\infty$ или же $\sigma(x)$ не имеет предела при $x \rightarrow x_0$. Поэтому возможны случаи, когда при значениях x , достаточно близких к x_0 , $\sigma(x)$ выходит из промежутка интегрирования и критической точкой становится конец промежутка. Возможны также случаи, когда весь промежуток интегрирования находится во внутренней области влияния. Иногда в таком случае ядро будет размытым (см. определение в § 16).

Согласно п. 16 возможными критическими точками для интеграла (17.1) будут либо концы промежутка интегрирования, либо те внутренние точки, в которых $g(x, t)$ принимает минимальное значение, как уже было указано; их расположение в общем зависит от x . В § 17, 18 будем рассматривать только *достаточно гладкие относительно t функции $g(x, t)$* , поэтому в последних критических точках

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, t) = g_1(x, t) = 0. \quad (17.3)$$

Для краткости далее введем обозначения $\frac{\partial^n}{\partial t^n} g(x, t) = g_n(x, t)$.

В п. 17.1.1 приведен пример короткого радиуса $\rho(x)$. Метод, примененный для его нахождения, можно использовать и в более общем случае.

Лемма 17.1. Пусть при $x \rightarrow x_0$

$$\int_a^b e^{-g(x,t)} h(x,t) dt \sim e^{-g(x,\sigma(x))} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x). \quad (17.4)$$

Если

$$\int_{\sigma(x)+\gamma(x)}^b e^{-g(x,t)} h(x,t) dt \asymp \int_{\sigma(x)}^{\sigma(x)+\gamma(x)} e^{-g(x,t)} h(x,t) dt \quad (17.5)$$

или же при фиксированном m

$$\int_{\sigma(x)+\gamma(x)}^b e^{-g(x,t)} h(x,t) dt \asymp e^{-g(x,\sigma(x))} \varphi_m(x), \quad (17.6)$$

то $\gamma(x) = \eta_r(x)$ для интеграла (17.1). Если

$$\int_{\sigma(x)+\gamma(x)}^b e^{-g(x,t)} h(x,t) dt = o(e^{-g(x,\sigma(x))} \varphi_N(x)), \quad (17.7)$$

то $\gamma(x) = \rho_r(x)$ для интеграла (17.1). Аналогично можно сформулировать лемму для левых радиусов.

Доказательство леммы следует из определения 17.1 и леммы 16.1. ■

При асимптотической оценке интегралов часто используется только m -я частичная сумма разложения (17.4), $m \geq 0$. Чтобы охарактеризовать асимптотический вклад, дающий эту сумму, целесообразно модифицировать определение 17.1 и ввести величину $\rho_{rm}(x)$, которую назовем *внешним радиусом влияния m -го приближения*. Аналогично определим и назовем величины $\rho_{lm}(x)$, $\eta_{rm}(x)$ и $\eta_{lm}(x)$. Радиус $\rho_{rm}(x)$ можем выбрать согласно лемме 17.1, если в (17.7) $\varphi_N(x)$ заменить на $\varphi_m(x)$. Рассмотрим в качестве примера применения этой леммы интеграл

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dt \asymp e^{-x} x^{x+1/2}.$$

Имеем $-g(x,t) = -t + x \ln t$, $\sigma(x) = x$. Согласно п. 12.5.3, 2° и (14.52)

$$\int_{x+a}^{\infty} e^{-tx} dt = \Gamma(x+1, x+a) \asymp (x+a)^{x+1/2} e^{-x-a} \asymp e^{-x} x^{x+1/2},$$

поэтому $\eta_r(x)$ можем брать любой постоянной. Отсюда следует, что $\rho_r(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Пользуясь формулами (14.87) и (14.88), легко установить, что применим также радиус $\eta_r(x) = Ax^\gamma$, $A > 0$, $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. С другой стороны, при $\varphi(x) \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_{x+\sqrt{x}\varphi(x)}^{\infty} e^{-t} t^{x+2} t^{-2} dt &< \exp[-(x+\sqrt{x}\varphi(x))] [x+\sqrt{x}\varphi(x)]^{x+1} = \\ &= e^{-x} x^{x+1/2} x^{1/2} \exp[-\sqrt{x}\varphi(x) + x \ln(1+\varphi(x)x^{-1/2})] [1+o(1)] = \\ &= e^{-x} x^{x+1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\varphi^2(x) - \ln x)\right] [1+o(1)] = e^{-x} x^{x+1/2} o(x^{-N}), \end{aligned}$$

если $\exp\left[-\frac{1}{2}(\varphi^2(x) - \ln x)\right] = o(x^{-N})$. Это условие выполняется, например, при $\varphi(x) = A \ln x$, $A > 0$, или же $\varphi(x) = x^{\gamma-1/2}$, $\gamma > 1/2$.

Поэтому $\rho_r(x) = A\sqrt{x} \ln x$. Оценивая аналогично $\int_0^{x-B\sqrt{x} \ln x} e^{-t} t^x dt$, $B > 0$, можно доказать, что $\rho_l(x) = B\sqrt{x} \ln x$. В частности, из полученных оценок при $a(x) \leq x - B\sqrt{x} \ln x$ следует соотношение

$$\Gamma(x+1, a(x)) = \int_{a(x)}^{\infty} e^{-t} t^x dt \sim \Gamma(x+1). \quad (17.8)$$

Из дальнейших результатов этого параграфа следует, что (17.8) сохраняется при более слабом условии: $\sqrt{x} = o(x - a(x))$.

Отметим, что при фиксированном x может иметь место неравенство $A_1 x^{\gamma_1} > A_2 x^{\gamma_2}$, где $\gamma_1 < 1/2$, $\gamma_2 > 1/2$. Это неравенство иллюстрирует примечание, сделанное в конце определения 17.1, что понятия радиусов влияния имеют смысл только при x , достаточно близких к x_0 .

17.1.3. Иногда целесообразно случай, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = \infty$, с помощью подстановки привести к случаю, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) \neq \infty$.

Например, подстановка $t = \tau x$ $\Gamma(x+1)$ приводит к $x^{x+1} \int_0^{\infty} (e^{-t})^x dt$.

В последнем интеграле $\sigma(x) = 1$ и $\rho(x) = Ax^{-\gamma}$, $\gamma \in [0, 1/2)$, $A > 0$. Подобным образом с помощью подстановки обычно удастся отделить сливающиеся критические точки. В качестве примера рассмотрим

$$g(x, t) = x^3 t - 6x^2 \ln t - 11xt^{-1} + 3t^{-2}, \quad t \in (0, 1].$$

Уравнение (17.3) имеет корни $t_1=x^{-1}$, $t_2=2x^{-1}$, $t_3=3x^{-1}$; $g(x, t)$ достигает минимума в точках t_1 и t_3 . Подстановкой $t=\tau x^{-1}$ приводим их к критическим точкам $\tau_1=1$ и $\tau_2=3$. При этом $g(x, \tau x^{-1}) = x^2[\tau - 6 \ln \tau - 11\tau^{-1} + 3\tau^{-2}] + 6x^2 \ln x$. Если отделить множитель $\exp(6x^2 \ln x) = x^{6x^2}$, то с помощью леммы 17.1 нетрудно показать, что для обеих точек можно выбрать $\rho(x) = \alpha \in (0, 1/2)$.

Более тонкое исследование $\rho(x)$ в данном случае затруднительно, так как из леммы 17.1 не вытекает формальных правил для нахождения $\rho(x)$. Кроме того, при ее использовании сначала следует построить формальное асимптотическое разложение для (17.1), чтобы определить шкалу. В дальнейшем ограничимся применением только первого члена разложения и исследованием оценок для $\rho_{10}(x)$ и $\rho_{r0}(x)$. Но и в этом случае также необходимо знать структуру первого члена, поэтому сначала рассмотрим вопрос об асимптотических представлениях некоторых вспомогательных интегралов.

17.2. Асимптотические представления основных интегралов

17.2.1. Если функция $h(x, t)$, встречающаяся под знаком интеграла (17.1), с изменением t мало меняется, то можно ожидать, что она будет оказывать мало влияние на асимптотическую оценку интеграла. Об этом свидетельствует

Лемма 17.2. Пусть существуют $\sup_{t \in [a, b]} h(x, t) = \bar{h}(x)$ и $\inf_{t \in [a, b]} h(x, t) = \underline{h}(x)$. Если

$$\bar{h}(x) \sim \underline{h}(x) \sim h(x, s(x)), \quad s(x) \in [a, b], \quad (17.9)$$

то

$$\int_a^b e^{-g(x,t)} h(x, t) dt \sim h(x, s(x)) \int_a^b e^{-g(x,t)} dt. \quad (17.10)$$

Доказательство леммы следует из неравенств

$$\underline{h}(x) \int_a^b e^{-g(x,t)} dt \leq \int_a^b e^{-g(x,t)} h(x, t) dt \leq \bar{h}(x) \int_a^b e^{-g(x,t)} dt$$

и (17.9). ■

В силу леммы 17.2 сначала рассмотрим только интеграл

$$\Omega(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} e^{-g(x,t)} dt. \quad (17.11)$$

Предполагается, что $g(x, t) \in C^m[a, b]$ относительно t при значениях x , достаточно близких к x_0 ; m выбирается в каждом конкретном случае достаточно большим.

Пусть $g_1(x, \sigma(x)) = 0$, $\sigma(x) \in (a(x), b(x))$, $g_2(x, t) > 0$ при $t \in [a, b]$, т. е. $g(x, t)$ имеет минимум при $t = \sigma(x)$. Рассмотрим

$$\Omega_{r0}(x) = \int_{\sigma(x)}^{\sigma(x)+\omega(x)} e^{-g(x,t)} dt \quad (17.12)$$

и выясним зависимость асимптотики интеграла от выбора $\omega(x) \leq b(x) - \sigma(x)$. Функцию $\omega(x)$ назовем *амплитудой*, а $\Omega_{r0}(x)$ — *правым основным интегралом*. По формуле Тейлора имеем

$$g(x, t) = g(x, \sigma(x)) + \frac{1}{2} [t - \sigma(x)]^2 g_2(x, \xi), \quad \xi \in (0, 1),$$

$$\xi = \sigma(x) + \vartheta [t - \sigma(x)], \quad \vartheta \in (0, 1),$$

$$\Omega_{r0}(x) = e^{-g(x, \sigma(x))} \int_{\sigma(x)}^{\sigma(x)+\omega(x)} \exp \left[-\frac{1}{2} (t - \sigma(x))^2 g_2(x, \xi) \right] dt.$$

Очевидно, оценка интеграла зависит от поведения функции $g_2(x, t)$. Простейшим является случай, когда при $x \rightarrow x_0$ и $\xi \in [\sigma, \sigma + \omega]$ $g_2(x, \xi) = g_2(x, \sigma(x)) [1 + o(1)]$, причем оценка $o(1)$ равномерна относительно ξ . Тогда с помощью подстановки $[t - \sigma(x)] \sqrt{g_2(x, \sigma)} = u$ получаем

$$\Omega_{r0}(x) = \frac{e^{-g(x, \sigma(x))}}{\sqrt{g_2(x, \sigma(x))}} \int_0^{\omega(x) \sqrt{g_2(x, \sigma)}} \exp \left[-\frac{1}{2} u^2 (1 + o(1)) \right] du. \quad (17.13)$$

Если при $x \rightarrow x_0$ $\omega \sqrt{g_2} \rightarrow \kappa > 0$, то можно ожидать, что интеграл в (17.13) стремится к $\int_0^{\kappa} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2} \operatorname{Erf}(\kappa/\sqrt{2})$. При изменении амплитуды $\omega(x)$ в связи с добавлением некоторого численного коэффициента изменится также число κ , поэтому $\Omega_{r0}(x)$ не может служить асимптотическим выражением для интеграла

$$\Omega_r(x) = \int_{\sigma(x)}^{b(x)} e^{-g(x,t)} dt \quad (17.14)$$

при $b(x) > \sigma(x) + \omega(x)$, т. е. $\omega(x) = \eta_r(x)$. Интеграл $\Omega_r(x)$ назовем *правым интегралом*.

Если, напротив, $\omega(x)$ выбрано так, что при $x \rightarrow x_0$ $\omega \sqrt{g_2} \rightarrow +\infty$, то можно надеяться, что интеграл в (17.13) стремится к

$$\int_0^{\infty} e^{-1/2 u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad \text{Полученное число не зависит от выбора}$$

$\omega(x)$ (если $\omega \sqrt{g_2} \rightarrow +\infty$), и можно ожидать, что

$$\Omega_r(x) \sim \Omega_{r0}(x) \sim \frac{e^{-g(x, \sigma(x))}}{\sqrt{g_2(x, \sigma(x))}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (17.15)$$

Предельный переход в интеграле (17.13) будет обоснован ниже. При этом, конечно, необходимо учитывать требование $\omega(x) < b(x) - \sigma(x)$. Если это требование не будет соблюдаться, то следует брать $\omega(x) = b(x) - \sigma(x)$. Тогда в (17.13) получим интеграл с верхним пределом $c(x) = [b(x) - \sigma(x)] \sqrt{g_2(x, \sigma)}$. Если при $x \rightarrow x_0$ $c(x) \rightarrow \kappa > 0$, то можно ожидать асимптотическое равенство

$$\Omega_{r0}(x) \sim \frac{e^{-g(x, \sigma(x))}}{\sqrt{g_2(x, \sigma(x))}} \sqrt{2} \operatorname{Erf}(\kappa/\sqrt{2}). \quad (17.16)$$

Ниже будет рассмотрен случай, когда $\kappa = 0$.

Аналогично исследуется *левый основной интеграл*

$$\Omega_{l0}(x) = \int_{\sigma(x) - \omega(x)}^{\sigma(x)} e^{-g(x, t)} dt.$$

В общем случае для $\Omega_{l0}(x)$ следует применить другую функцию $\omega(x)$, чем для $\Omega_{r0}(x)$. Поэтому будем различать *правую* и *левую амплитуды*: $\omega_r(x)$ и $\omega_l(x)$.

В частном случае, когда $g(x, t) = xG(t)$, $\sigma(x) = 0$, $G'(0) = 0$, $G''(0) > 0$, для справедливости (17.15), что соответствует (16.11), получаем условие $\omega(x) \sqrt{x} \rightarrow \infty$.

17.2.2. Встречаются и более сложные случаи, чем рассмотренные в п. 17.2.1. Приведем некоторые из них.

1°. Как уже было отмечено в п. 17.1, довольно часто нельзя точно найти корень уравнения $g_1(x, t) = 0$ и приходится использовать приближенный корень $s(x)$. Возьмем в (17.12) $s(x)$ вместо $\sigma(x)$. Тогда

$$g(x, t) = g(x, s) + (t-s)g_1(x, s) + \frac{1}{2}(t-s)^2 g_2(x, \xi);$$

$$\Omega_{r0}(x) = e^{-g(x,s)} \int_0^{s+\omega} \exp \left[- (t-s) g_1(x, s) - \frac{1}{2} (t-s)^2 g_2(x, s) (1+o(1)) \right] dt.$$

С помощью подстановки $(t-s)\sqrt{g_2(x, s)} = u$ в квадратных скобках получаем слагаемое $-ug_1(x, s)/\sqrt{g_2(x, s)}$. В итоге придем к прежнему результату, если $g_1(x, s) = o(\sqrt{g_2(x, s)})$, или же к некоторому обобщению, если при остальных прежних условиях $g_1(x, s) = c\sqrt{g_2(x, s)} [1+o(1)]$, $c \neq 0$:

$$\Omega_{r0}(x) \sim \frac{e^{-g(x,s(x))}}{\sqrt{g_2(x, s(x))}} \int_0^x \exp \left[-cu - \frac{1}{2} u^2 \right] du. \quad (17.17)$$

2°. Другую, более общую модификацию (*модификацию Риделя* [128]) при $g_1(x, s(x)) \neq 0$ получим, если обозначим $g_1(x, s)/\sqrt{g_2(x, s)} = \gamma(x)$ и применим формулу

$$\int_0^a \exp \left(-\gamma u - \frac{1}{2} u^2 \right) du = \sqrt{2} e^{1/2\gamma^2} \left[\operatorname{Erfc} \frac{\gamma}{\sqrt{2}} - \operatorname{Erfc} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (17.18)$$

Согласно (17.18) при $x \rightarrow x_0$ можно ожидать соотношение

$$\Omega_{r0}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{g_2(x, s)}} \exp \left[-g(x, s) + \frac{1}{2} \gamma^2(x) \right] \times \left[\operatorname{Erfc} \frac{\gamma}{\sqrt{2}} - \operatorname{Erfc} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\omega\sqrt{g_2} + \gamma) \right) \right]. \quad (17.19)$$

При $\omega\sqrt{g_2} + \gamma \rightarrow \kappa_1 \neq \infty$, $\gamma \rightarrow \kappa_2 \neq \infty$ в (17.19) следует подставить эти пределы, а при $\kappa_1 = \infty$, $\kappa_2 \neq \infty$ приходим к соотношению

$$\Omega_{r0}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{g_2(x, s)}} \exp \left[-g(x, s) + \frac{1}{2} \gamma^2(x) \right] \operatorname{Erfc} \left(\frac{\gamma(x)}{\sqrt{2}} \right). \quad (17.20)$$

Формулы (17.19) и (17.20) удобны в случае, когда γ или $\omega\sqrt{g_2} + \gamma$ не имеет предела при $x \rightarrow x_0$; γ может быть также отри-

цательным числом. Кроме того, (17.15) — (17.17) следуют из них как частные случаи.

3°. Имеются случаи, когда $s(x) = \sigma(x)$ и $g_k(x, \sigma(x)) = 0$, $k \leq n-1$, $g_n(x, t) > 0$, $t \in [\sigma, b]$. Если $g_n(x, \xi) = g_n(x, s)[1 + o(1)]$, то

$$g(x, t) = g(x, s) + \frac{1}{n!} (t-s)^n g_n(x, s)[1 + o(1)],$$

и после подстановки $(t-s)\sqrt[n]{g_n(x, s)} = u$ получаем

$$\Omega_{r0}(x) = \frac{e^{-g(x,s)}}{\sqrt[n]{g_n(x, s)}} \int_0^{\omega\sqrt[n]{g_n(x,s)}} \exp\left[-\frac{u^n}{n!}(1+o(1))\right] du.$$

Для определения асимптотического выражения интеграла (17.14) $\omega(x)$ следует выбрать так, чтобы $\omega(x)\sqrt[n]{g_n(x, s)} \rightarrow +\infty$.

В силу $\int_0^\infty e^{-u^n/n!} du = \sqrt[n]{n!} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ можно ожидать соотношение

$$\Omega_{r0}(x) \sim \frac{e^{-g(x,s)}}{\sqrt[n]{g_n(x, s)}} \sqrt[n]{n!} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (17.21)$$

4°. Рассмотрим случай, когда $g(x, t)$ достигает минимума на одном из концов промежутка. Пусть это будет при $t = a(x)$ и $g_1(x, a(x)) \neq 0$. Из предыдущих соображений следует, что при $\omega(x)g_1(x, a(x)) \rightarrow +\infty$ и $g_1(x, \xi) \sim g_1(x, a(x))$, $\xi \in [a(x), a(x) + \omega(x)]$, можно ожидать соотношение

$$\int_{a(x)}^{a(x)+\omega(x)} e^{-g(x,t)} dt \sim g_1^{-1}(x, a(x)) \exp[-g(x, a(x))]. \quad (17.22)$$

17.2.3. Рассмотренные в п. 17.2.1 и 17.2.2, 1°, 3°, 4° случаи можно объединить в одну теорему и тем самым дать обоснование всем ожидаемым формулам. В доказательстве этой теоремы следует обосновать предельный переход, который выполняется в интеграле $\Omega_{r0}(x)$ после применения формулы Тейлора (эти два шага и составляют все доказательство). Поэтому сначала рассмотрим леммы о предельном переходе, которые применимы и при исследовании асимптотики интегралов иного типа. В формулировке лемм x изменяется в $U(x_0)$ (см. п. 17.1.1).

Лемма 17.3. Пусть 1) функция $K(x, t)$ определена при $t \in [a(x), b(x)]$, $x \in U(x_0)$, и интегрируема по t для каждого $x \in U(x_0)$;

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = \beta, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} K(x, t) = K_0(t); \quad (17.23)$$

3) функция $K_0(t)$ интегрируема в $[\alpha', \beta']$, $\alpha' = \inf_{x \in U(x_0)} a(x)$, $\beta' = \sup_{x \in U(x_0)} b(x)$; 4) существуют функции $M_1(x)$ и $M_2(t)$ такие, что при указанных t и x

$$|K(x, t) - K_0(t)| < M_1(x) \frac{d}{dt} M_2(t); \quad (17.24)$$

$$5) M_1(x)M_2(c(x)) = O(\gamma(x)) \text{ при } c(x) = a(x) \text{ и } c(x) = b(x), \quad x \rightarrow x_0, \\ \gamma(x) = o(1). \quad (17.25)$$

Тогда при $x \rightarrow x_0$

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} K_0(t) dt + O(\gamma(x)) = \int_{\alpha}^{\beta} K_0(t) dt + o(1). \quad (17.26)$$

Доказательство следует из оценок

$$\left| \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} K_0(t) dt \right| \leq M_1(x) \int_{a(x)}^{b(x)} M_2'(\tau) d\tau + \\ + \left| \int_{a(x)}^{\alpha} K_0(t) dt \right| + \left| \int_{\beta}^{b(x)} K_0(t) dt \right| = O(\gamma(x)) + o(1) = o(1).$$

При конкретных $a(x)$ и $b(x)$ первая формулировка в (17.26) может привести к более точной оценке, чем вторая формулировка. Допускается, что $\alpha' = -\infty$, $\beta' = +\infty$. ■

Лемма 17.4. Если в лемме 17.3 условия 4) и 5) заменить на

$$|K(x, t)| \leq M_0(t), \quad x \in U(x_0), \quad t \in [a(x), b(x)],$$

где функция $M_0(t)$ интегрируема в $[\alpha', \beta']$, то сохраняется вторая формулировка в (17.26).

Лемма следует из более общей теоремы Лебега о предельном переходе в интеграле Лебега [26].

Лемма 17.5. Пусть 1) функция $K(x, t)$ определена и сохраняет знак при $t \in [a(x), b(x)] = I(x)$, $x \in U(x_0)$, и интегрируема по t для каждого $x \in U(x_0)$; 2) $h(t, z)$ непрерывна по $z \in [z_0, z_1]$, $z_0 <$

$<1, z_1>1$, равномерно относительно $t \in [\alpha', \beta']$; 3) функция $v(x, t)$ ограничена в $U(x_0)[\alpha', \beta']$, и $v(x, t) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0$ равномерно относительно $t \in [\alpha', \beta']$; 4) $h(t, v(x, t))$ интегрируема по $t \in I(x)$ при каждом $x \in U(x_0)$. Тогда при $x \rightarrow x_0$ справедливо соотношение

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) h(t, v(x, t)) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) h(t, 1) dt + o(1) \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) dt. \quad (17.27)$$

Доказательство. Пусть $K(x, t) \geq 0$. Для заданного достаточно малого $\varepsilon > 0$ согласно 3) можно найти такое δ , что при $t \in [\alpha', \beta']$ и $|v - 1| < \delta$ будем иметь $|h(t, v) - h(t, 1)| < \varepsilon$. Из условия 3) следует, что можно найти $U_1(x_0) \subset U(x_0)$, чтобы при $t \in [\alpha', \beta']$ и $x \in U_1(x_0)$ $v(x, t) \in [z_0, z_1]$ и $|v(x, t) - 1| < \delta$. Поэтому

$$\left| \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) h(t, v(x, t)) dt - \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) h(t, 1) dt \right| < \varepsilon \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) dt,$$

откуда следует (17.27). ■

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) dt \neq \infty$, то последний член в (17.27) можно писать как $o(1)$.

17.2.4. Теорема 17.1. Пусть

1) $g_k(x, s(x)) \sim c_k g_n^{k/n}(x, s(x))$ при $x \rightarrow x_0$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$; (17.28)

2) можно найти такую функцию $\omega(x) > 0$, что при $x \rightarrow x_0$

$$\omega(x) \sqrt[n]{g_n(x, s)} \rightarrow \kappa, \quad 0 \leq \kappa \leq \infty; \quad (17.29)$$

3) $g_n(x, \xi) = g_n(x, s)[1 + o(1)]$ при $\xi \in [s(x), s(x) + \omega(x)]$, (17.30)

где $o(1)$ равномерно относительно ξ . Тогда при $x \rightarrow x_0$, $\kappa > 0$, $c_n = 1$, $n \geq 1$,

$$\Omega_{r_0}(x) = \int_{s(x)}^{s(x) + \omega(x)} e^{-g(x, t)} dt \sim \frac{e^{-g(x, s(x))}}{\sqrt[n]{g_n(x, s(x))}^0} \int_0^{\kappa} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k!} u^k \right] du, \quad (17.31)$$

причем при $n=1$ условие (17.28) следует заменить на

$$g_1(x, s) > 0. \quad (17.28')$$

Если $\kappa=0$, то вместо (17.31) имеем

$$\Omega_{r0}(x) \sim e^{-g(x, s(x))\omega}(x). \quad (17.32)$$

Доказательство. Из (17.29) и (17.30) следует, что $g_n(x, s) > 0$, $g_n(x, \xi) > 0$. По формуле Тейлора имеем

$$g(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} g_k(x, s(x)) (t-s)^k + \frac{1}{n!} g_n(x, \xi) (t-s)^n. \quad (17.33)$$

Если подставить это выражение под знак интеграла в левой части (17.31) и применить подстановку $u = (t-s)\sqrt[n]{g_n(x, s)}$, то следует еще обосновать асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \Omega_{r0}^*(x) &= \int_0^{\omega \sqrt[n]{g_n}} \exp \left[- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} g_k(x, s) g_n^{-\frac{k}{n}}(x, s) u^k - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n!} g_n(x, \xi) g_n^{-1}(x, s) u^n \right] du \sim \int_0^x \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k!} u^k \right] du. \end{aligned}$$

В силу (17.28) и (17.30) подынтегральная функция в левой части этого соотношения в $[0, \infty)$ имеет интегрируемую мажорантную функцию $\exp \left[\sum_{k=1}^{n-1} 2|c_k| u^k - \frac{1}{2n!} u^n \right]$ и требуемое соотношение следует из леммы 17.4.

При $\kappa=0$ применим лемму 17.5, в которой $K(x, u) = \exp \left[- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} g_k(x, s) g_n^{-\frac{k}{n}}(x, s) u^k \right]$, $h(u, v) = \exp \left[- \frac{1}{n!} v u^n \right]$, $v(x, u) = g_n(x, \xi) g_n^{-1}(x, s) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0$. Легко проверить, что выполнены условия 1)–3) леммы, а интегрируемость функции $h(u, v(x, u))$ следует из равенства

$$\begin{aligned} \exp \left[- \frac{1}{n!} v u^n \right] &= \exp \left[- g(x, s + u \sqrt[n]{g_n(x, s)}) \right] \times \\ &\times \exp \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{k!} g_k(x, s) g_n^{-\frac{k}{n}}(x, s) \right]. \end{aligned}$$

Поэтому по формуле (17.27) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{r_0}^*(x) &= \int_0^{\omega\sqrt[n]{g_n}} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} g_k(x, s) g_n^{-\frac{k}{n}}(x, s) u^k \right] du + \\ &+ o(1) \int_0^{\omega\sqrt[n]{g_n}} \exp \left[- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u^k}{k!} g_k(x, s) g_n^{-\frac{k}{n}}(x, s) \right] du. \end{aligned} \quad (17.34)$$

Поскольку $\omega\sqrt[n]{g_n} \rightarrow 0$, то подынтегральные функции в (17.34) имеют вид $1 + O(u)$, где $O(u)$ равномерно относительно $x \in U(x_0)$, а интегралы имеют оценку $\omega\sqrt[n]{g_n} + O((\omega\sqrt[n]{g_n})^2)$. Следовательно, $\Omega_{r_0}^*(x) \sim \omega\sqrt[n]{g_n}$. Отсюда получаем (17.32). ■

Примечания. 1°. Из теоремы 17.1 как частные случаи получаем большинство предыдущих ожидаемых формул. Если $g_k = o(g_n^{k/n})$, $k \leq n-1$, $\kappa = \infty$, то в (17.28) можно взять $c_k = 0$ и получить формулу (17.21). При $n=2$ имеем формулы (17.15) — (17.17), при $n=1$ — (17.22).

2°. Для исследования модификации Риделя (17.19), (17.20) при $n=2$ следует применять формулу (17.34), которая справедлива для любого $\omega\sqrt[n]{g_n}$. Отсюда с учетом (17.18) при условии (17.30) непосредственно следует (17.19), если $\omega\sqrt{g_2} \geq \varepsilon > 0$. При $\omega\sqrt{g_2} \rightarrow 0$ используем (17.32).

Обоснование (17.20) при условии (17.30) и

$$\omega\sqrt{g_2} + \gamma \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow x_0, \quad \gamma = g_1/\sqrt{g_2}, \quad (17.35)$$

следует из (17.34) при $n=2$, если использовать формулу (17.18) и применить асимптотическое разложение Erfc функции (8.9), согласно которому

$$\exp(\gamma^2/2) \text{Erfc}[(\omega\sqrt{g_2} + \gamma)/\sqrt{2}] \sim \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (\omega^2 g_2 + 2\omega g_1) \right]}{\sqrt{2}(\omega\sqrt{g_2} + \gamma)}.$$

При $\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) \neq \infty$ отсюда следует (17.20). Однако при $\gamma(x) \rightarrow \infty$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega\sqrt{g_2} \neq \infty$ асимптотические выражения в (17.34) и (17.19) надо применять осторожно, так как при малых значениях ω формула (17.20) может оказаться неверной (см. пример 17.4, 9°). Очевидно, для применимости (17.20) достаточно, если

$$\omega^2 g_2 + 2\omega g_1 = \omega\sqrt{g_2}(\omega\sqrt{g_2} + 2\gamma) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Модифицируя доказательство, справедливость формулы (17.20) можно доказать [47,128], если условие (17.35) заменить на

$$\omega(g_1 + c\sqrt{g_2}) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow x_0, \quad c > 0. \quad (17.36)$$

Неравенство

$$\frac{g_1}{\sqrt{g_2}} + \omega\sqrt{g_2} + c \geq 2 \sqrt{\left(\frac{g_1}{\sqrt{g_2}} + c\right) \omega\sqrt{g_2}} = 2 \sqrt{\omega(g_1 + c\sqrt{g_2})}$$

свидетельствует о том, что из (17.36) следует (17.35). Но в вышеуказанных двух частных случаях из (17.35) следует также (17.36). Действительно, при $\lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) \neq \infty$ $g_1 = O(\sqrt{g_2})$ и $\omega\sqrt{g_2} \rightarrow \infty$, поэтому (17.36) имеет место при достаточно большом $c > 0$. При $\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = \infty$ имеем $\sqrt{g_2} = o(g_1)$, $\omega\sqrt{g_2} = o(\omega g_1)$, поэтому из $\omega^2 g_2 + 2\omega g_1 \rightarrow \infty$ следует $\omega g_1 \rightarrow \infty$ и (17.36) удовлетворено при любом $c > 0$. Как следует из 17.4, 9°, в общем случае соотношения (17.36) и (17.35) неэквивалентны. Если имеет место (17.35), а (17.36) не выполнено, то надо провести еще исследования согласно (17.19).

Кроме модификации Риделя возможны также другие модификации теоремы 17.1 [47].

3°. Важное практическое значение имеет выбор числа n , которое не может быть произвольным. Если $s(x)$ является концом промежутка интегрирования, то обычно $n=1$, за исключением случаев, когда $g_1(x, s) = 0$ (см. 17.4, 2°). Если $s(x) \in (a, b)$ и условие (17.28) при $k=2$, $n > 2$ не выполнено, то следует выбрать $n=2$. Об этом свидетельствует также то, что при $n=2$ выполняется (17.30). Если (17.28) имеет место при $k=2$, 3 и $n=4$, то берем $n=4$ и т. д. Последние случаи означают, что равноценное значение в соотношении (17.33) имеют члены, образующие некоторую группу, или же определяющим является член с индексом $k > 2$. При $g_2(x, s) = o(\sqrt{g_4(x, s)})$, $g_3(x, s) \sim c_3 g_4^{3/4}(x, s)$ применение теоремы 17.1 в случае $n=2$ привело бы к неверному результату, так как из $g_2 = o(\sqrt{g_4})$ следует $(\sqrt{g_4})^{-1} = o(g_2^{-1/2})$. При $n > 2$ появляются некоторые особенности, которые будут указаны в п. 4°. Практические указания для применения теоремы 17.1 даны в начале п. 17.4.

4°. Пусть $n=2m$, $m \geq 2$, $s = \sigma$. Если выполнены условия теоремы 17.1, то знаки коэффициентов c_2, \dots, c_{2m-1} не имеют значения. Поэтому может быть, что $c_2 < 0$ и в точке $t = \sigma(x)$ функция $g(x, t)$ имеет локальный максимум. Однако формула (17.31) при соответствующем выборе $\omega(x)$ сохраняется. Может быть

также, что на сегменте $[\sigma(x), \sigma(x) + \omega(x)]$ функция $g(x, t)$ имеет несколько минимумов, т. е. уравнение $g_1(x, t) = 0$ имеет несколько корней, но построение асимптотического выражения интеграла возможно без их отделения. При $n=2$ в таком объединении не выполняется условие (17.30), так как при переходе от одного минимума к другому $g_2(x, t)$ меняет знак (см. пример, рассмотренный в п. 17.1.3). Поэтому, если нужно объединить несколько минимумов, то приходится либо в теореме 17.1 брать $n \geq 4$, либо задавать разные дополнительные условия, при которых в формуле (17.31) можно оставить $n=2$, а условие (17.30) выполнить лишь при $n \geq 4$ [153, 47] (см. пример 17.4, 6°).

5°. Условие (17.30) является только достаточным. Однако пример

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} t^{\alpha} dt = \Gamma(\alpha+1) x^{-\alpha-1}, \quad s(x) = \alpha x^{-1}, \quad x \rightarrow 0,$$

$$g_2(x, s) = \alpha^{-1} x^2, \quad \omega(x) = \varphi(x) x^{-1},$$

где $1 = o(\varphi(x))$, показывает, что теорема 17.1 может быть неверной, если (27.30) не выполнено.

6°. В формуле (17.31) не дана оценка погрешности. В работах [6, 41] при $n=2$ и дополнительных предположениях относительно $g(x, t)$ даны некоторые оценки остатка. В следующем параграфе рассмотрим асимптотические разложения, из которых, в частности, следуют требуемые оценки.

7°. В частных случаях применяются и другие методы для вывода асимптотического представления интеграла (17.11) и для оценки остатка. Например, в [161] при $n=2$ вводится подстановка $g(x, s) - g(x, t) = \tau^2$ и оценивается погрешность асимптотического выражения для нового интеграла, имеющего вид $\int_{\alpha}^{\beta_1} e^{-\tau^2} H(x, \tau) d\tau$.

8°. Было бы интересно исследовать также асимптотику интеграла (17.31) в случаях, когда удовлетворены не все условия теоремы 17.1.

17.2.5, 1°. Может случиться, что условие (17.9) леммы 17.2 не выполнено и формула (17.10) неверна. Простейшие случаи таковы, что $h(x, t) = H(x, t) h_0(x, t)$, где $h_0(x, t)$ удовлетворяет (17.9), а $H(x, t) = [t - s(x)]^{\alpha} [\ln |t - s(x)|]^m$, $\alpha > -1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $H(x, t)$ целесообразно присоединить к ядру $e^{-g(x, t)}$ и исследовать асимптотическое поведение интеграла (17.1) с ядром $K(x, t) = e^{-g(x, t)} H(x, t)$. Легко видеть, что результаты будут существенно отличаться от тех, которые даны в теореме 17.1. Они при-

ведены в работах [47, 127, 130]. В частности, при $H(x, t) = [t - s(x)]^\alpha$, $\alpha > -1$, вместо (17.31) и (17.10) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{s(x)}^{s(x)+\omega(x)} e^{-g(x, t)} h_0(x, t) [t - s(x)]^\alpha dt \sim \\ & \sim e^{-g(x, s(x))} h_0(x, t) g_n^{-\frac{\alpha+1}{n}}(x, s(x)) \int_0^x u^\alpha \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k!} u^k \right] du. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Эта формула свидетельствует о том, что аннулирование подынтегральной функции в точке $s(x)$ не обязательно служит причиной того, что $s(x)$ нельзя брать в качестве критической точки, так как максимум подынтегральной функции достигается в другой точке (см. также п. 16.1, 2°). При $\kappa = \infty$ в [130] показано, что обе части (17.37) можно $m \in \mathbb{N}$ раз дифференцировать по α , притом также в случае обобщений, указанных ниже в п. 3°, 4°.

2°. Условие (17.9) не выполняется также тогда, когда $h(x, t)$ имеет нули в $(s, s + \omega)$. Возможны разные модификации условий. Пусть $h(x, t) = A(x, t)B(x, t)$, где $A(x, t)$ удовлетворяет (17.9), а $B(x, t)$ осциллирует, причем $B(x, s) = O(1)$, $B_1(x, \xi) = O\left(\frac{1}{\omega(x)}\right)$ равномерно относительно $\xi \in [s, s + \omega]$ и удовлетворены условия теоремы 17.1 при $\kappa = \infty$. Тогда согласно (17.37) с учетом формулы конечного приращения имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_s^{s+\omega} e^{-g(x, t)} A(x, t) [B(x, t) - B(x, s)] dt \right| \leq \\ & \leq \frac{M}{\omega} \int_s^{s+\omega} e^{-g(x, t)} |A(x, t)| (t - s) dt \sim \\ & \sim M |A(x, s)| e^{-g(x, s)} g_n^{-\frac{1}{n}}(x, s) (\omega g_n^{\frac{1}{n}})^{-1} \int_0^\infty u \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k!} u^k \right] du \end{aligned}$$

и поэтому с учетом (17.10) получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_s^{s+\omega} e^{-g(x, t)} A(x, t) B(x, t) dt \sim \\ & \sim A(x, s) e^{-g(x, s)} g_n^{-\frac{1}{n}}(x, s) \int_0^\infty \exp \left[- \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k!} u^k \right] du [B(x, s) + o(1)]. \end{aligned} \quad (17.38)$$

Доказательство формулы (17.38) сохраняется, если условие относительно $B_1(x, \xi)$ заменить на $B_1(x, \xi) = o(\sqrt[n]{g_n(x, s)})$ [47].

В частном случае, когда $F'(t)$ — ограниченная функция в рассматриваемой области и s и ω такие, что $(s + \theta\omega)^{-1} = O(\omega^{-1})$, $\theta \in [0, 1]$, допускается $B(t) = F(\mu \ln t)$, $\mu \neq 0$.

Рассмотрим еще другие возможные обобщения.

3°. Можно допустить, что $g_n(x, t)$ имеет особенность при $t = s(x)$ вида $g_n(x, t) = [t - s(x)]^\beta g_n^*(x, t)$, $\beta \in (-1, 0)$. Тогда формула Тейлора применяется с остатком в форме Лапласа.

4°. Нижний предел интеграла (17.37) можно заменить на $a(x)$. Если $a(x) < s(x)$, то следует брать $|t - s(x)|^\alpha$.

Обобщения 3° и 4° приведены в [127, 130]. Если в этих случаях $g_1(x, s(x)) = 0$, то все же $\exp[-g(x, s(x))]$ обычно не является максимумом ядра $K(x, t)$, но только некоторым достаточно хорошим приближением его. Правильную асимптотику интеграла обеспечивает дополнительный множитель к $\exp[-g(x, s(x))]$.

5°. Результаты можно расширить, допустив комплексные значения функции $g(x, t)$, причем $|\arg g_n(x, s)| \leq \pi/2 - \varepsilon$, а также применив вместо интеграла Римана интеграл Стильтеса. Соответствующие результаты приведены в [129, 130]. Это же примечание относится к модификации Риделя.

17.3. Оценки для радиусов влияния

17.3.1. Можно ожидать, что в теореме 17.1 требование (17.30) будет выполнено при малых $\omega(x)$. Вообще функция $\omega(x)$ характеризует в некоторой мере то, насколько сильным является максимум ядра. Однако требование (17.29) при $\kappa = \infty$ будет выполнено всегда при достаточно быстро растущем $\omega(x)$. Поэтому имеются случаи, когда оба требования вообще или же при $t \in [s(x), b(x)]$, $b(x) < \infty$, совместить нельзя. Если причиной несовместимости условий служит узость промежутка интегрирования, то следует отдать предпочтение условию (17.30), так как на нем основано доказательство теоремы 17.1. В таком случае можно выбрать $\omega(x) = b(x) - s(x)$ с $\kappa < \infty$. Это встречается всегда, когда функция $b(x)$ достаточно близка к $s(x)$. Условие (17.30), в частности, не выполняется тогда, когда $g_n(x, \xi)$ при данных ξ меняет знак, т. е. существует ξ_0 , при котором $g_n(x, \xi_0) = 0$.

При конечном κ и $\omega(x) = b(x) - s(x)$ нет смысла говорить о радиусах влияния, так как тогда существенное значение имеет весь промежуток интегрирования.

1°. Рассмотрим случай, когда можно найти такое $\omega(x)$, что при $x \rightarrow x_0$

$$\omega^n(x) g_n(x, s(x)) \rightarrow +\infty, \quad b(x) \geq s(x) + \omega(x) \quad (17.39)$$

и выполняется условие (17.30). Из (17.39) следует: если $g_n(x, s(x)) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, то можно выбрать $\omega(x) = [g_n(x, s(x))]^{-\alpha/n}$, $\alpha \in (0, 1)$, и $\omega(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Если же $g_n(x, s(x)) \rightarrow x_0 \neq \infty$, то обязательно $\omega(x) \rightarrow \infty$. Поэтому с помощью теоремы 17.1 нельзя построить пример, в котором амплитуда $\omega(x)$ обязательно должна быть конечной. Но иногда ради простоты $\omega(x)$ берем конечной, хотя можно было бы брать $\omega(x) \rightarrow 0$.

При $s(x) \rightarrow 0$ или же $s(x) \rightarrow \infty$ можно ожидать, что $\omega(x) = O(s(x))$ или $\omega(x) = o(s(x))$. Поскольку из (17.39) следует, что $g_n^{-1/n} = o(\omega)$, то должно быть также $g_n^{-1/n} = o(s)$ или же

$$s^n(x) g_n(x, s(x)) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow x_0. \quad (17.40)$$

Следовательно, условие (17.40) необходимо для того, чтобы $\omega(x) = O(s(x))$. Но не всегда такое соотношение имеет место.

Например, при $g(x, t) = \frac{t^2}{x^2 \ln t} - \frac{2t}{x \ln t} + \frac{t}{x \ln^2 x}$, $a(x) = x$ имеем

$$g_1(x, t) = \frac{2t}{x^2 \ln t} - \frac{t}{x^2 \ln^2 t} - \frac{2}{x \ln x} + \frac{1}{x \ln^2 x}, \quad s(x) = \sigma(x) = x, \quad g_2(x, s) \sim \frac{2}{x^2 \ln x},$$

и условие (17.40) не выполнено. Можно доказать, что условия (17.29), (17.30) выполнены при $\omega(x) = x \ln x$.

2°. Возможны разные достаточные условия, при которых выполняется (17.30). Одно из них заключается в следующем: 1) существуют такие функции $\beta(x)$ и $\gamma(t)$, что при $t \in [s(x), s(x) + \omega(x)]$

$$g_n(x, t) = \beta(x) \gamma(t) + r(x, t), \quad (17.41)$$

где $r(x, \theta s(x)) = o(\beta(x) \gamma(s(x)))$ равномерно относительно $\theta \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, и 2) $\gamma(s(x) + \theta_1 \omega(x)) \sim \gamma(s(x))$, $\theta_1 \in [0, 1]$. Действительно, из этих условий следует, что при значениях x , достаточно близких x_0 ,

$$g_n(x, s(x)) = \beta(x) \gamma(s) + o(\beta(x) \gamma(s)), \quad g_n(x, t) \sim \beta(x) \gamma(s).$$

При $\omega(x) = o(s(x))$ в качестве $\gamma(t)$ допустима функция $t^\alpha L(t)$, где $L(t)$ — медленно изменяющаяся функция. Это — единственное условие в случае, когда $r(x, t) \equiv 0$.

3°. При $n=2$ условия (17.29) и (17.30) выполняются, если при $x \rightarrow x_0$

$$g_2(x, s) g_4^{-1/2}(x, s) \rightarrow +\infty, \quad g_2(x, s) g_3^{-1}(x, s) \sqrt[4]{g_4(x, s)} \rightarrow +\infty \quad (17.42)$$

и для $g_4(x, \xi)$ имеет место (17.30).

Действительно, тогда можно выбрать $\omega(x) = Ag_4^{-1/4}(x, s)$, $A > 0$, так как согласно (17.42)

$$\begin{aligned} g_2(x, s + \vartheta\omega) &= g_2(x, s) + g_3(x, s)\vartheta\omega + \frac{1}{2}g_4(x, \xi)\vartheta^2\omega^2 = \\ &= g_2(x, s)[1 + \vartheta g_3(x, s)g_2^{-1}(x, s)\omega + \\ &+ \frac{\vartheta^2}{2}g_2^{-1}(x, s)g_4(x, \xi)\omega^2] = g_2(x, s)[1 + o(1)]. \end{aligned}$$

17.3.2. Воспользуемся теоремой 17.1. Чтобы правый интеграл $\Omega_r(x) = \int_{s(x)}^{b(x)} e^{-g(x, t)} dt$ при условиях (17.39) имел асимптотическое представление (17.31), где $x \rightarrow \infty$, необходимо еще установить условия, при которых справедливо соотношение

$$\Omega_{r1}(x) = \int_{s(x) + \omega(x)}^{b(x)} e^{-g(x, t)} dt = o(e^{-g(x, s(x))} g_n^{-\frac{1}{n}}(x, s(x))). \quad (17.43)$$

Этим будет решен также вопрос о нахождении некоторого $\rho_{r0}(x)$.

Интеграл $\Omega_{r1}(x)$ назовем *крайним правым интегралом*. Можно задавать разные достаточные условия.

Теорема 17.2. *Если при $t \in [s(x), s(x) + \omega(x)]$ выполнены условия теоремы 17.1, справедливо (17.39) и*

$$\Omega_{r1}(x) = O(e^{-g(x, s+\omega)} g_1^{-1}(x, s+\omega)) \text{ при } x \rightarrow x_0, \quad (17.44)$$

то имеет место (17.43), т. е. $\rho_{r0}(x) = \omega(x)$.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора (17.30) для $g(x, s + \omega)$ и соотношений $g_k \omega^k \sim c_k (g_n^{1/n} \omega)^k = o(g_n \omega^n)$, $k \leq n-1$, которые следуют из (17.28) и (17.39), имеем

$$\begin{aligned} g(x, s + \omega) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{k!} g_k(x, s) + \frac{\omega^n}{n!} g_n(x, \xi) = \\ &= g(x, s) + \frac{\omega^n}{n!} g_n(x, s) [1 + o(1)], \end{aligned}$$

поэтому

$$\exp[-g(x, s + \omega)] = e^{-g(x, s)} O(\exp[-c\omega^n g_n(x, s)]) = e^{-g(x, s)} o(1),$$

$$c = \frac{1}{2n!} \quad (17.45)$$

Аналогично из формулы Тейлора для $g_1(x, s+\omega)$ при $n > 1$ получаем

$$g_1(x, s+\omega) = \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} g_n(x, s) [1 + o(1)] \sim \frac{(\omega \sqrt[n]{g_n})^{n-1}}{(n-1)!} \sqrt[n]{g_n(x, s)}, \quad (17.45A)$$

$$\frac{1}{g_1(x, s+\omega)} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{g_n(x, s)}} \frac{(n-1)!}{(\omega \sqrt[n]{g_n})^{n-1}} = o\left(\frac{1}{\sqrt[n]{g_n(x, s)}}\right).$$

При $n=1$ из (17.28') и (17.30) следует $\frac{1}{g_1(x, s+\omega)} \sim \frac{1}{g_1(x, s)}$. Подставляя полученные оценки в (17.44), приходим к (17.43). ■

Существуют разные достаточные признаки, при которых выполнено условие (17.44). Отметим простейшие из них.

1°. Можно найти такую постоянную $\gamma > 0$, что

$$g_1(x, t) \geq \gamma g_1(x, s+\omega) > 0 \quad \text{при } t \in [s+\omega, b]. \quad (17.46)$$

Действительно, имеем

$$\int_{s+\omega}^b e^{-g(x, t)} dt \leq \frac{1}{\gamma g_1(x, s+\omega)} \int_{s+\omega}^b e^{-g(x, t)} g_1(x, t) dt \leq \frac{1}{\gamma} \frac{e^{-g(x, s+\omega)}}{g_1(x, s+\omega)}.$$

В частном случае левая часть (17.46) будет выполнена, если $g_1(x, t)$ при $t \geq s+\omega$ монотонно возрастает (*признак Шуберта* [37]), так как тогда $\gamma=1$. Последнее свойство обеспечивается неравенством

$$g_2(x, t) \geq 0 \quad \text{при } t \geq s+\omega. \quad (17.47)$$

2°. Условие (17.47) можно ослабить. Достаточно, если при $t \in [s+\omega, b]$ $g_1(x, t) > 0$ и найдется такая постоянная $c < 1$, что

$$g_2(x, t) \geq -c g_1^2(x, t). \quad (17.48)$$

С помощью (17.48) легко доказать, что функция $e^{-cg(x, t)} g_1^{-1}(x, t)$ монотонно убывает. Поэтому

$$\int_{s+\omega}^b e^{-g(x, t)} dt \leq \frac{e^{-cg(x, s+\omega)}}{g_1(x, s+\omega)} \int_{s+\omega}^b e^{-(1-c)g(x, t)} g_1(x, t) dt \leq$$

$$\leq \frac{e^{-g(x, s+\omega)}}{(1-c)g_1(x, s+\omega)}.$$

Можно также задавать признаки, из которых непосредственно следует (17.43). Приведем один из них.

3°. Существует такая функция $\lambda(t) > 0$, что

$$g(x, t) \geq g(x, s) + \lambda(t) \quad \text{при } t \in [s + \omega, b] \quad (17.49)$$

и

$$\int_{s+\omega}^b e^{-\lambda(t)} dt = o\left(g_n^{-\frac{1}{n}}(x, s)\right) \quad \text{при } x \rightarrow x_0. \quad (17.50)$$

Действительно,

$$\int_{s+\omega}^b e^{-g(x,t)} dt \leq e^{-g(x,s)} \int_{s+\omega}^b e^{-\lambda(t)} dt = o\left(e^{-g(x,s)} g_n^{-\frac{1}{n}}(x, s)\right).$$

В (17.49) $\lambda(t)$ можно заменить на $\lambda(x, t)$ или же при конечном $b(x)$ на $\lambda(x)$. Другие признаки приведены в работах [37, 39, 44, 47, 127].

17.3.3, 1°. Можно задавать также достаточные признаки для модификации Риделя, при которых вместо (17.43) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{s+\omega}^b e^{-g(x,t)} dt = \\ & = o\left\{g_2^{-\frac{1}{2}}(x, s(x)) \exp\left[-g(x, s) + \frac{1}{2}\gamma^2(x)\right] \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma(x)\right)\right\}. \end{aligned} \quad (17.51)$$

Простейший из них: условия (17.30), (17.36) и монотонное возрастание функции $g_1(x, t)$ при $t \geq s(x)$ [128], в частности $g_2(x, t) \geq 0$.

2°. Часто при оценке интеграла $\int_{s+\omega}^b e^{-g(x,t)} h(x,t) dt$ обнаруживается, что при $t > s + \omega$ лемма 17.2 не имеет места, так как условие (17.9) не выполнено. В таком случае можно использовать представление $h(x, t) = e^{\kappa(x,t)}$, если $h(x, t) \geq 0$, и к интегралу с ядром $e^{-G(x,t)}$, $G(x, t) = g(x, t) - \kappa(x, t)$, применять теорему 17.2. Однако можно задавать различные признаки.

Пользуясь доказательством признака 17.3.2, 1°, нетрудно доказать, что для данного интеграла при условиях теоремы 17.1 справедлива оценка

$$\int_{s+\omega}^b e^{-g(x,t)} h(x, t) dt = o\left(h(x, s) e^{-g(x,s)} g_n^{-\frac{1}{n}}(x, s)\right), \quad (17.52)$$

если при $t \in [s, s + \omega]$ сохраняется (17.9) и

$$0 < \frac{h(x, t)}{g_1(x, t)} \leq \gamma \frac{h(x, s + \omega)}{g_1(x, s + \omega)} \quad \text{при } t \in [s + \omega, b], \quad \gamma > 0. \quad (17.53)$$

3°. Из доказательства формулы (17.52) следует, что (17.38) также сохраняет силу при верхнем пределе $b(x)$, если при $t \geq s + \omega$ $A(x, t)$ удовлетворяет (17.53), а $B(x, t) = O(1)$.

17.3.4. До сих пор мы рассматривали лишь правую часть $\Omega_r(x)$ интеграла (17.1). При $a(x) < s(x)$ следует еще искать асимптотику *левого интеграла* $\Omega_l(x) = \int_{a(x)}^{s(x)} e^{-g(x, t)} dt$.

1°. Рассмотрим вначале *основной левый интеграл* $\Omega_{l0}(x)$ по сегменту $[s - \omega, s]$. Исследование проводится аналогично, как в предыдущих пунктах, если учесть следующее обстоятельство: функция $g(x, t)$ имеет минимум при $t = \sigma(x)$, поэтому обычно $g(x, t)$ является убывающей функцией относительно t при $t \in [s - \omega, s]$. Как видно из формулы Тейлора, для этого достаточно, чтобы

$$(-1)^n g_n(x, \xi) > 0, \quad \xi \in [s - \omega, s]. \quad (17.54)$$

Теорема 17.1'. Если условие (17.30) выполняется при $\xi \in [s(x) - \omega(x), s(x)]$, то теорема 17.1 при $\kappa > 0$ и остальных прежних условиях, в которых g_n заменено на $(-1)^n g_n$, сохраняется в виде

$$\begin{aligned} \Omega_{l0}(x) &= \int_{s(x) - \omega(x)}^{s(x)} e^{-g(x, t)} dt \sim e^{-g(x, s(x))} |g_n(x, s(x))|^{-\frac{1}{n}} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \exp \left[- \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k c_k}{k!} u^k \right] du, \end{aligned} \quad (17.55)$$

где $c_n = (-1)^n$. При $\kappa = 0$ имеем

$$\Omega_{l0}(x) \sim e^{-g(x, s(x))} \omega(x). \quad (17.56)$$

Интеграл в (17.55) можно писать также с подынтегральной функцией (17.31) по сегменту $[-\kappa, 0]$. Эта теорема позволяет определить $\eta_{l0}(x)$.

Аналогично можем модифицировать примечания к теореме 17.1 и п. 17.2.5. В формулах, соответствующих (17.19) и (17.20), $\gamma(x)$ следует заменить на $-\gamma(x)$.

2°. Соответственно можно модифицировать теорему 17.2 и примечания к ней, а также п. 17.3.3. Интеграл $\Omega_{l1}(x)$ по сегменту $[a, s - \omega]$ назовем *крайним левым интегралом*. Имеет место

Теорема 17.2'. Если $a(x) < s(x) - \omega(x)$, выполнены условия теоремы 17.1',

$$\Omega_{l1}(x) = O(e^{-g(x, s-\omega)} g_1^{-1}(x, s-\omega)) \text{ при } x \rightarrow x_0 \quad (17.44')$$

и справедливы (17.39), (17.54), причем в (17.39) имеем $|g_n(x, s)|$, то

$$\Omega_{l1}(x) = \int_a^{s-\omega} e^{-g(x,t)} dt = o\left(e^{-g(x, s(x))} |g_n(x, s(x))|^{-\frac{1}{n}}\right). \quad (17.43')$$

В доказательстве вместо (17.45) и (17.45A) имеем

$$\exp[-g(x, s-\omega)] = e^{-g(x, s)} O(\exp[-c\omega^n |g_n(x, s)|]); \quad (17.45')$$

$$g_1(x, s-\omega) = \frac{(-\omega)^{n-1}}{(n-1)!} g_n(x, s) [1 + o(1)]. \quad (17.45B)$$

Условие, при котором справедливо (17.44'), одно из следующих.

$$1^\circ. g_1(x, t) \leq \gamma g_1(x, s-\omega) < 0 \text{ при } t \in [a, s-\omega], \quad \gamma > 0, \quad (17.46')$$

в частности условие Шуберта

$$g_1(x, t) < 0, \quad g_2(x, t) \geq 0 \text{ при } t \leq s-\omega. \quad (17.47')$$

$$2^\circ. \text{ При } t \in [a, s-\omega] \quad g_1(x, t) < 0 \text{ и справедливо (17.48).}$$

$$3^\circ. \text{ При } t \in [a, s-\omega] \text{ имеет место (17.49) и}$$

$$\int_a^{s-\omega} e^{-\lambda(t)} dt = o\left(g_n^{-\frac{1}{n}}(x, s)\right). \quad (17.50')$$

17.3.5. Рассмотрим интеграл (17.1). При разбиении его на левый и правый интегралы прежде всего следует иметь в виду, что условие (17.54) с условием $g_n(x, \xi) > 0$ при $\xi > s$ и $g_n(x, s) \neq 0$ совместимы лишь тогда, когда n — четное число, $n = 2p$, что и впредь будем предполагать. В отдельных интегралах при необходимости целесообразно применять разные амплитуды: $\omega_r(x)$ и $\omega_l(x)$. Иногда приходится выбирать $\omega_l(x) = s(x) - a(x)$ и $\omega_l^n(x) g_n(x, s(x)) \rightarrow \chi_l^n \neq \infty$. В таких случаях асимптотическое представление левого интеграла задается формулой (17.55) или (17.56) и нет смысла говорить о левых радиусах влияния, однако может существовать правый внешний радиус влияния $\rho_{r0}(x)$.

Из полученных результатов вытекают следующие две теоремы.

Теорема 17.3. Если $x_l = \infty$, $x_r = \infty$ и выполнены условия теорем 17.2 и 17.2', $n = 2p$, то имеет место асимптотическое соотношение

$$\int_{a(x)}^{b(x)} e^{-g(x,t)} dt \sim \frac{e^{-g(x,s(x))}}{\sqrt[n]{g_n(x,s(x))}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k!} u^k\right) du, \quad (17.57)$$

где $c_n = 1$. При $c_k = 0$, $k \leq n-1$, получаем множитель $2^n \sqrt[n]{n!} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Теорема 17.4. Пусть для функции $h(x, t)$ при $t \in [s-\omega, s+\omega]$ выполнено условие (17.9), а при остальных t — (17.53) и его соответствующая модификация, если $t \in [a, s-\omega]$. Тогда согласно (17.10) и (17.37) при $m \in \mathbb{N}$ имеем формулу

$$\begin{aligned} & \int_{a(x)}^{b(x)} e^{-g(x,t)} (t-s(x))^m h(x, t) dt \sim \\ & \sim e^{-g(x,s(x))} h(x, s(x)) [g_n(x, s(x))]^{-\frac{m+1}{n}} \int_{-\infty}^{\infty} u^m \exp\left[-\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k!} u^k\right] du. \end{aligned} \quad (17.58)$$

Соотношение (17.58) заметно обобщает (16.28). При $c_{2k-1} = 0$ и нечетном m интеграл обращается в нуль и получаем лишь оценку

$$\int_{a(x)}^{b(x)} e^{-g(x,t)} (t-s(x))^{2m-1} h(x, t) dt = e^{-g(x,s)} h(x, s) g_n^{-\frac{2m}{n}}(x, s) o(1). \quad (17.59)$$

Без условия (17.53) формула (17.58) справедлива при $a = s - \omega$, $b = s + \omega$.

17.4. Примеры

Примеры сгруппированы по разным возможностям условий в теореме 17.1, а не по типам интегралов. Промежуточные выкладки опущены. Другие примеры читатель может найти в работах [47, 127, 128].

При построении асимптотических представлений интегралов использованы теоремы 17.1—17.4. Для этого надо соблюдать следующие правила.

1°. Найти $g_1(x, t)$ и определить $s(x)$ как точный или приближенный корень уравнения $g_1(x, t) = 0$.

2°. Найти остальные необходимые функции $g_k(x, t)$, $k > 1$, и определить амплитуды $\omega_r(x)$ и $\omega_l(x)$ так, чтобы выполнялись условия (17.29) или же (17.39) и (17.30) в теоремах 17.1 и 17.1'. Амплитуды часто можно выразить в виде произведения $s(x)$ на некоторый множитель, который выбирается после нескольких попыток. Иногда применяются признаки, указанные в п. 17.3.1. Для проверки выполнения условий (17.30) используется оценка функции $g_n(x, s + \theta\omega)$ при $|\theta| \leq 1$. Часто целесообразно учитывать сказанное в конце п. 17.3.1, 2°.

3°. Проверить выполнение условий теорем 17.2 и 17.2'. Для этого нередко используется простейший достаточный признак Шуберта: $\text{sign}(t-s)g_1(x, t) > 0$ и $g_2(x, t) \geq 0$ вне $(s-\omega, s+\omega)$, в частности $g_2(x, t) \geq 0$ для всех t .

17.4.1. Рассмотрим вначале случай, когда $s(x) = a(x)$.

1°. $\Gamma(x+1, a(x)) = \int_{a(x)}^{\infty} e^{-t} t^x dt$, $\sqrt{x} = o(a-x)$, $a > x$. Имеем

$g(x, t) = t - x \ln t$, $g_1(x, t) = 1 - \frac{x}{t} > 0$, $g_2(x, t) = \frac{x}{t^2} > 0$. Условия (17.39) и (17.30) при $n=1$ выполнены для любого $\omega(x) = \rho_{r0}(x)$, который стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, причем $\omega(x) = o(x)$; $\eta_{r0}(x)$ — любая постоянная. Нетрудно показать, что из условия $\sqrt{x} = o(a-x)$ следует, что $a(x)$ лежит вне внутренней области влияния для $\Gamma(x+1)$. По теоремам 17.1, 17.2 получаем

$$\Gamma(x+1, a(x)) \sim (a(x) - x)^{-1} e^{-a(x)} [a(x)]^{x+1}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (17.60)$$

2°. $\Omega(x) = \int_x^{b(x)} \exp(2t - t^2/2x) t^{-x} dt$, $b(x) \geq \beta x$, $\beta > 1$.

Имеем $g(x, t) = t^2/2x - 2t + x \ln t$, $g_1(x, t) = t/x - 2 + x/t$, $s(x) = x$, $g_1(x, x) = 0$, $g_2(x, t) = \frac{1}{x} - \frac{x}{t^2} \geq 0$, $g_2(x, x) = 0$, $g_3(x, t) = \frac{2x}{t^3} > 0$. Условия (17.28), (17.39), (17.30) при $n=3$ удовлетворены при $\omega(x) = \rho_{r0}(x) = Ax^\alpha$, $A > 0$, $\alpha \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$; $\eta_{r0}(x) = Bx^{2/3}$, $B > 0$. По теоремам 17.1, 17.2 при $c_1 = c_2 = 0$ получаем

$$\Omega(x) \sim \sqrt[3]{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) e^{3x/2} x^{-x+2/3} \sim \sqrt[3]{2\pi} \sqrt[3]{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \frac{e^{x/2} x^{7/6}}{\Gamma(x+1)}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (17.61)$$

17.4.2. Переходим к случаям, когда $s(x) \in (a(x), b(x))$ и $n = 2$.

$$3^\circ. \Omega(x) = \int_{a(x)}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \ln^\alpha t\right) t^\lambda dt, \quad \alpha > 3, \quad 1 \leq a(x) \leq x^\lambda,$$

где λ — любое фиксированное положительное число. Имеем

$$g(x, t) = \frac{1}{\alpha} \ln^\alpha t - x \ln t, \quad g_1(x, t) = t^{-1} (\ln^{\alpha-1} t - x),$$

$$s(x) = \sigma(x) = \exp x^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad g_2(x, t) = t^{-2} [(\alpha-1) \ln^{\alpha-2} t + x - \ln^{\alpha-1} t],$$

$$g_2(x, s) = (\alpha-1) x^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} \exp\left(-2x^{\frac{1}{\alpha-1}}\right).$$

Условия (17.39), (17.30) выполнены при $\omega(x) = Bx^{-\beta} s(x)$, $B > 0$, $\beta \in \left(0, \frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}\right)$; $\eta(x) = Bx^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}} s(x)$. При $t \leq s$ $g_2(x, t) > 0$, поэтому теорема 17.2' имеет место. Труднее проверить применимость теоремы 17.2. Можно показать, что $G(x, t) = g(x, t) - A \ln t$, $A > 0$, является монотонно возрастающей функцией при $t \geq s(x)$ и $G(x, s + \omega) = g(x, s) + \frac{\alpha-1}{2} B^2 x^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1} - 2\beta} - Ax^{\frac{1}{\alpha-1}} + o(1)$. Если выбрать $\beta \leq \frac{\alpha-3}{2(\alpha-1)} = \beta_1$, то при любом фиксированном $A > 0$ можно найти такое B , что при достаточно большом x $G(x, s + \omega) > g(x, s)$. Выберем $A = 2$. Тогда при $t \geq s + \omega$ выполнено неравенство (17.49). Согласно п. 17.3.2, 2° условия теоремы 17.2 удовлетворены. Имеем асимптотическое представление

$$\Omega(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha-1}} x^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}} \exp\left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) x^{\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}}\right], \quad x \rightarrow +\infty, \quad (17.62)$$

так как при достаточно большом x $s(x) - \omega(x) > x^\lambda$. Можно указать $\rho_{10}(x) = B\omega(x)$, а $\rho_{r0}(x) = B\omega(x)$ при $\beta = \beta_1$, $B^2 > \frac{4}{\alpha-1}$. При четном α допускается $a(x) \geq 0$, так как интеграл по $[0, 1]$ существует. При других $\alpha > 1$ и $a(x) = 1$ разложение для $\Omega(x)$ представлено в (17.75).

4°. $\Omega(x) = \int_{a(x)}^{\infty} \exp(-t + ct^\alpha) t^\lambda dt$, $c \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $0 \leq a(x) \leq \gamma x$, $\gamma < 1$. Имеем $g(x, t) = t - ct^\alpha - x \ln t$, $g_1(x, t) = 1 - \alpha ct^{\alpha-1} - xt^{-1}$,

$g_2(x, t) = \alpha(1 - \alpha)ct^{\alpha-2} + xt^{-2} > 0$. $\sigma(x)$ находим из уравнения $t = \alpha ct^\alpha + x$, которое после подстановки $t = x\tau$ переходит в $\tau = 1 + \alpha c\tau^{\alpha-1}x^\alpha$. Отсюда согласно теореме 4.9 при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\sigma(x) \sim x \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k(1-\alpha)} \right] = x[1 + o(1)] > x, \quad (17.63)$$

$a_1 = \alpha c$, $a_2 = \alpha^3 c^2$. Так как $g_2(x, \sigma) \sim x^{-1}$, то условия (17.39), (17.30) выполнены при $\omega(x) = x^\beta$, $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Удовлетворены также условия теорем 17.2 и 17.2', поэтому при $x \rightarrow +\infty$

$$\Omega(x) \sim \exp[-\sigma(x) + c\sigma^\alpha(x)] \sigma^x(x) \sqrt[2]{2\pi x}. \quad (17.64)$$

Кроме того, $\rho_0(x) = B\omega(x)$, $\eta_0(x) = B\sqrt{x}$, $B > 0$.

Поскольку $\sigma(x)$ при $c > 0$ нельзя найти точно, то желательно в (17.64) $\sigma(x)$ заменить на некоторое его приближение согласно (17.63). Однако если $\sigma(x)$ заменим на $s_0(x) = x$, то условие (17.28) при $k=1$ будет удовлетворено лишь при $\alpha \leq \frac{1}{2}$, причем $c_1 = 0$ при $\alpha < \frac{1}{2}$ и $c_1 = -\alpha c$ — при $\alpha = \frac{1}{2}$. При $\alpha \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$ для выполнения (17.28) следует брать $s_1(x) = x + \alpha c x^\alpha$ и т. д. Если при $\alpha < \frac{3}{4}$ в (14.64) $\sigma(x)$ заменить на $s_1(x)$ и результат преобразовать согласно (14.45), то при $x \rightarrow +\infty$ получим

$$\Omega(x) \sim \Gamma(x+1) \exp \left[cx^\alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 c^2 x^{2\alpha-1} + \frac{1}{6} \alpha^3 c^3 (3\alpha-1) x^{3\alpha-2} \right]. \quad (17.65)$$

При $\alpha < \frac{2}{3}$ можно отбросить последний член в квадратных скобках, при $\alpha < \frac{1}{2}$ — также предпоследний.

Примеры 3° и 4° характерны тем, что интегралы в них получены из интеграла для $\Gamma(x+1, a)$ заменой e^{-t} на функции, убывающие медленнее, чем e^{-t} .

17.4.3. Рассмотрим случаи нескольких минимумов.

5°. Пусть $a(x) \leq -Ax^{-\lambda}$, $b(x) \geq Bx^{-\lambda}$, $A, B > 0$, $\lambda < 1$, $g(x, t) = = x^4 t^4 - \frac{1}{3} x^3 t^3 + \frac{1}{2} x t^2$, $g_1(x, t) = 4x^4 t^3 - x^3 t^2 + xt$. Отсюда $\sigma_1(x) = 0$,

$$\sigma_2(x) = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{x}} \right) \sim \frac{1}{4x}. \quad \text{Выберем } s(x) = 0. \quad \text{Тогда}$$

$g_2(x, s) = x$, $g_3(x, s) = -2x^3$, $g_4(x, s) = 24x^4$ и в (17.28) при $n=4$ имеем $c_2=0$, $c_3=-2 \cdot 24^{-3/4}$. Условия (17.39), (17.30) выполнены при $\omega(x) = x^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1)$, причем $\beta > \lambda$. Поскольку $g_2(x, t) > 0$ при $t < 0$ и $t > \frac{1}{2}x^{-1}$, то по теореме 17.3 при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \exp[-x^4 t^4 + \frac{1}{3}x^3 t^3 - \frac{1}{2}x t^2] dt \sim x^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\frac{1}{3}u^3 - u^4) du, \quad (17.66)$$

$$\eta_0 = A_1 x^{-1}, \quad \rho_0 = B_1 x^{-\beta}, \quad A_1 > 0, \quad B_1 > 0.$$

Выбрать $s(x) = \sigma_1(x)$ и объединить минимумы можно потому, что $g(x, \sigma_2(x)) \sim \frac{1}{768}$ при $x \rightarrow +\infty$ и функции $\exp[g(x, \sigma_1(x))]$ и $\exp[g(x, \sigma_2(x))]$ имеют одинаковый порядок.

6°. Пусть при прежнем $a(x)$ и $b(x) = +\infty$ $g(x, t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}x^2 t^3 + \frac{1}{2}x^3 t^2$. Тогда $g_1(x, t) = t^3 - 2x^2 t^2 + x^3 t$ и $\sigma_1(x) = 0$, $\sigma_2(x) = x^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right) \sim 2x^2$. Поскольку $g_2(x, \sigma_1) = x^3$, $g_2(x, \sigma_2) \sim 4x^4$,

$g_4(x, t) \equiv 6$, то условие (17.28) при $n=4$ не удовлетворено ни для σ_1 , ни для σ_2 и теорему 17.1 можно использовать только при $n=2$. Имеем $g(x, \sigma_1) = 0$, $g(x, \sigma_2) \sim -\frac{4}{3}x^8$, поэтому выберем $s(x) = \sigma_2(x)$. Нельзя ограничиться приближением $s(x) = 2x^2$, так как $g_1(x, 2x^2) = 2x^5$ и условие (17.28) при $k=1$ не имеет места. Условие (17.39) удовлетворено при $\omega(x) = x^{-\beta}$, $\beta \in [0, 2)$. Поскольку $g_2(x, t) > 0$ при $t \geq \frac{4}{3}x^2$, то сначала по теореме 17.3 получаем разложение при $a(x) \in \left[\frac{4}{3}x^2, \gamma x^2\right]$, $\gamma < 2$. Далее нетрудно показать, что интеграл по $\left[a(x), \frac{4}{3}x^2\right]$ входит в остаток, поэтому при $a(x) \leq \gamma x^2$ и $x \rightarrow +\infty$ имеем соотношение

$$\int_{a(x)}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}x^2 t^3 - \frac{1}{2}x^3 t^2\right] dt \sim \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{2x^2} \exp[-g(x, \sigma_2(x))]. \quad (17.67)$$

Используя соответствующую теорему из [153], минимумы можно объединять и рассматривать интеграл по $(-\infty, \infty)$ (см. примечание 4° к теореме 17.1).

7°. Пусть $g(x, t) = x[t^2 - \alpha^2(x)]^2$, $\alpha(x) \geq 0$. Тогда $g_1(x, t) = 4xt(t^2 - \alpha^2)$, $\sigma_1(x) = \alpha(x)$, $\sigma_2(x) = -\alpha(x)$, $g_2(x, \sigma_i) = 8x\alpha^2$, $g_3(x, \sigma_i) = (-1)^{i-1}24x\alpha$, $g_4(x, t) = 24x > 0$. Далее следует различать два случая.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x^{1/4} = \lambda$, $0 \leq \lambda < \infty$. При $s(x) = \alpha(x)$ имеем $c_2 = \frac{4}{\sqrt[4]{6}} \lambda^2$, $c_3 = \sqrt[4]{24} \lambda$. Условие (17.39) удовлетворено при $\omega = x^{-\beta}$, $\beta < 1/4$, поэтому $\eta(x) = Ax^{-1/4}$, $\rho(x) = Bx^{-\beta}$, $A > 0$, $B > 0$, и при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \int_{-a(x)}^{b(x)} \exp[-x(t^2 - \alpha^2(x))^2] dt \sim \\ &\sim x^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-v^2(v + 2\lambda)^2] dv, \end{aligned} \quad (17.68)$$

где $a(x) \geq A_1 x^{-\beta}$, $b(x) \geq B_1 x^{-\beta}$, $A_1 > 1$, $B_1 > 1$.

2. $\lambda = \infty$. Тогда условие (17.28) при $n=4$ не удовлетворено и минимумы приходится отделять, хотя они могут быть сливающимися (при $\alpha(x) = o(1)$). Ввиду четности подынтегральной функции достаточно рассматривать интеграл по $[0, b(x)]$. Поскольку $x\alpha^2 = \sqrt{x}(\alpha x^{1/4})^2 \rightarrow +\infty$, то можно брать $\omega(x) = x^{-\beta}$, $\beta \in [0, 1/4]$. Условие (17.39) для $n=2$ выполняется при $\omega = o(\alpha)$, так как тогда $(\alpha + \theta\omega)^2 \sim \alpha^2$. Поскольку $x^{-1/4} = o(\alpha)$, то можно взять прежнюю функцию $\omega(x)$ и получить соотношение

$$\Omega(x) \sim \alpha^{-1} \sqrt{\pi/x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (17.69)$$

где $a(x) \geq A_1 \alpha(x)$, $b(x) \geq B_1 \alpha(x)$, $A_1 > 1$, $B_1 > 1$. Нетрудно указать соответствующие выражения для $\eta_0(x)$ и $\rho_0(x)$ при конкретном $\alpha(x)$.

17.4.4. Рассмотрим еще примеры к формулам (17.19), (17.20).

8°. Исследуем $\Gamma(x+1, a(x))$ при условии $a(x) \geq x - \alpha\sqrt{x}$, $\alpha > 0$. Поскольку согласно п. 17.1.2 $\eta_{10}(x) > \alpha\sqrt{x}$, где $\eta_{10}(x)$ взят для $\Gamma(x+1)$, то не вся внешняя область влияния принадлежит промежутку интегрирования. Берем в формуле (17.20) $s(x) = a(x)$. Тогда $\gamma(x) = \frac{a-x}{\sqrt{x}}$. При проверке выполнения (17.36) следует различать два случая.

1. $a(x) = \beta x + o(x)$, $\beta \geq 1$. Имеем $\delta(x) = g_1(x, s) + c\sqrt{g_2(x, s)} = \frac{a-x}{a} + \frac{c\sqrt{x}}{a} \geq \frac{(c-\alpha)\sqrt{x}}{a} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, поэтому при $c > \alpha$ можно

брать такую амплитуду $\omega(x)$, чтобы $x^{1/2} = o(\omega(x))$, например $\omega(x) = \sqrt{x} \ln x$. Этим удовлетворено также условие (17.30).

2. $x = o(a(x))$. Тогда $\delta(x) = 1 + o(1)$ и можно брать любую функцию $\omega(x) \rightarrow \infty$, лишь бы удовлетворялось (17.30). Поскольку $g_2(x, t) > 0$, то при $x \rightarrow \infty$ имеем формулу

$$\Gamma(x+1, a(x)) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} a^{x+1} \exp\left[-a + \frac{(a-x)^2}{2x}\right] \operatorname{Erfc}\left(\frac{a-x}{\sqrt{2x}}\right) \quad (17.70)$$

Общность формулы (17.70) заключается в том, что $a(x)$ может меняться нерегулярно при $x \rightarrow +\infty$, и допускается даже, что при изменении x появляются оба рассмотренных случая. Например, $a(x) = x^2 \sin^2 x + x \cos^2 x$ и $a-x$ не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$. Кроме того, из (17.70) получаем следующие частные случаи.

А. При $\sqrt{x} = o(a-x)$ в силу (8.9) приходим к (17.60).

Б. При $a-x = \lambda(x) = O(\sqrt{x})$ согласно равенству $-x - \lambda + (x+1) \ln(x+\lambda) + \frac{\lambda^2}{2x} = -x + (x+1) \ln x + O(1)$ получаем

$$\Gamma(x+1, a(x)) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x+1) \operatorname{Erfc} \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2x}}. \quad (17.71)$$

Здесь $\lambda(x)$ тоже может не иметь предела при $x \rightarrow +\infty$.

В. Если $\lambda(x) = o(\sqrt{x})$, то

$$\Gamma(x+1, a(x)) \sim \frac{1}{2} \Gamma(x+1). \quad (17.72)$$

$$9^\circ. \Omega(x) = \int_0^{b(x)} \exp[-xt - xt^2 - x^2 t^3] dt.$$

Имеем $s(x) = 0$, $g(x, 0) = 0$, $g_1(x, 0) = x$, $g_2(x, 0) = 2x$, $\nu(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$. Условие (17.30) при $n=1$ и $n=2$ выполнено, если $\omega(x) = o(x^{-1})$, но при таком $\omega(x)$ не имеет места (17.36). Поэтому от применения формулы (17.20) следует отказаться при любом $b(x)$. Если $b(x) = o(x^{-1})$, то можно брать $\omega(x) = b(x)$, и по формуле (17.32) при $n=1$ имеем

$$\Omega(x) \sim b(x), \quad b(x) = o(x^{-1}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (17.73)$$

Поскольку (17.35) выполнено при любом $\omega(x)$, то можно пользоваться также формулой (17.19). После преобразования приходим к (17.73). Из рассмотренного примера видно, что соотношения (17.35) и (17.36) неэквивалентны.

При $b(x) \geq \alpha x^{-1}$, $\alpha > 0$, условие (17.30) не выполнено. Подстановкой $t = x\tau$ получаем

$$\Omega(x) = \frac{1}{x} \int_0^{bx} \exp \left[-\tau - \frac{1}{x} (\tau^2 + \tau^3) \right] d\tau.$$

Если $bx \leq \beta < \infty$, то легко получим

$$\Omega(x) \sim \frac{1}{x} (1 - e^{-bx}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (17.74)$$

Это соотношение сохраняется при $bx \leq x^{1/4}$, а при $bx > x^{1/4}$ интеграл по $\{x^{1/4}, bx\}$ имеет оценку $o(x^{-N})$. Поэтому при $bx \rightarrow +\infty$ $\Omega(x) \sim \frac{1}{x}$. Все частные случаи объединяются в (17.74).

17.4.5. Последний пример, а также многие другие, рассмотренные в предыдущих параграфах, показывают, что часто проблеме заметно упрощает подходящая подстановка. Нередко применяется подстановка $t = \tau s(x)$. Укажем еще несколько примеров подстановок, характерных для данного параграфа.

10°. Интегралы

$$\int_1^{\infty} x^t (et^{-1})^t t^{\alpha} dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} x^t t^{-\alpha} dt, \quad \alpha > 0,$$

с помощью подстановок $t = \tau x$ и $t = \tau x^{1/\alpha} = \tau y$ приводятся к (16.23).

11°. Теорема 17.3 из-за (17.30) неприменима к интегралу

$$\Omega(x) = \int_1^{\infty} \exp[-\alpha \ln t + x \ln \ln t] dt, \quad \alpha > 1,$$

но после подстановок $\ln t = \tau$, $(\alpha - 1)\tau = u$ получаем $\Omega(x) = (\alpha - 1)^{-x-1} \Gamma(x+1)$.

12°. Еще более наглядным является пример 3° при $a(x) = 1$.

Подстановкой $y = x+1$, $\ln t = \tau$ приводим его к $\int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{\alpha} \tau^{\alpha} + \tau y \right] d\tau$. При $\alpha > 1$ к этому интегралу можно применить теорему

17.3. В итоге при $x \rightarrow +\infty$ получаем соотношение

$$\Omega(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha-1}} \exp \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (x+1)^{\alpha/(\alpha-1)} \right] (x+1)^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha-1)}}, \quad (17.75)$$

которое при $\alpha > 2$ совпадает с (17.62). Однако можно воспользоваться более простым приемом: с помощью новой подстановки $y^{\alpha/(\alpha-1)} = z$, $\tau = y^{1/(\alpha-1)} v^{1/\alpha}$ получаем интеграл

$$\Omega(x) = 1/\alpha y^{1/(\alpha-1)} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{z}{\alpha} (v - \alpha v^{1/\alpha}) \right] v^{(1/\alpha)-1} dv,$$

асимптотическое разложение которого можно строить согласно п. 12.5.3, 3° (см. (12.83)).

17.5. Интегралы с осциллирующими ядрами

Поскольку при некоторых других ядрах методы исследования асимптотики близки к исследованию интеграла (17.1), то рассмотрим вкратце некоторые дополнения к п. 17.1—17.3.

17.5.1. Исследуем асимптотику интеграла

$$\Omega(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} e^{ig(x,t)} dt \quad (17.76)$$

в случае, когда доминирующей критической точкой является единственный корень $s(x)$ уравнения $g_1(x,t) = 0$, $s(x) \in (a, b)$. При $b = +\infty$ или $a = -\infty$ предполагается сходимость интеграла.

1°. Вначале при условии

$$\omega^2(x, s) g_2(x, s) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0 \quad (17.77)$$

рассмотрим оценку основного интеграла по сегменту $[s - \omega, s + \omega]$. Она проходит аналогично, как в доказательстве теоремы 17.1 при $n=2$; отличие появляется только при оценке выражения

$$\delta(x, u) = \left| \exp(i/2 g_2(x, s) u^2) \left\{ 1 - \exp \left[\frac{i u^2}{2} (g_2(x, \xi) - g_2(x, s)) \right] \right\} \right|.$$

Поскольку в силу обвертывающего свойства $|1 - e^{i\alpha}| \leq |\alpha|$, то разность $g_2(x, \xi) - g_2(x, s)$ надо оценить точнее, чем это сделано

только для одного из интегралов, например по промежутку $[s+\omega, b]$. Применим соотношение $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, разобьем интеграл на две части и снова рассмотрим только один из интегралов. В силу $g_1(x, s) = 0$ и монотонности функции $g_1(x, t)$, а также $g_1^{-1}(x, t)$ при $t \geq s + \omega$ сохраняют знак. Согласно второй теореме о среднем имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{s+\omega}^b \cos g(x, t) dt \right| &= \left| g_1^{-1}(x, s+\omega) \int_{s+\omega}^{\xi} \cos g(x, t) g_1(x, t) dt + \right. \\ &+ \left. g_1^{-1}(x, b) \int_{\xi}^b \cos g(x, t) g_1(x, t) dt \right| \leq 2[|g_1(x, s+\omega)|^{-1} + \\ &+ |g_1(x, b)|^{-1}] \leq 4|g_1(x, s+\omega)|^{-1}, \end{aligned}$$

так как независимо от того, будет ли $g_1(x, t) > 0$ (g_1 монотонно возрастает), или $g_1(x, t) < 0$ (g_1 монотонно убывает), справедливо $|g_1(x, s+\omega)|^{-1} \geq |g_1(x, b)|^{-1}$. Поскольку при $\xi \in [s, s+\omega]$ с учетом (17.78)

$$\begin{aligned} g_1(x, s+\omega) &= g_2(x, \xi)\omega = g_2(x, s)\omega + o(\omega^{-2}g_2^{-1/2}) = \\ &= \sqrt{g_2}(\omega\sqrt{g_2}) + \sqrt{g_2}o(\omega^{-2}g_2^{-1}) = \sqrt{g_2}[\omega\sqrt{g_2} + o(1)], \end{aligned}$$

то $g_1^{-1}(x, s+\omega) = o(g_2^{-1/2})$ и поэтому

$$\int_{s+\omega}^b e^{ig(x, t)} dt = o(g_2^{-1/2}(x, s)).$$

Условие Шуберта выполняется, если имеет место (17.47).

Теорема 17.5. Если при $\omega(x) < \min(b(x) - s(x), s(x) - a(x))$, где $g_1(x, s) = 0$, $s \in (a, b)$, выполнены условия (17.77) и (17.78), а также при $t \leq s - \omega$, $t \geq s + \omega$ условие Шуберта, то при $x \rightarrow x_0$ имеет место соотношение

$$\int_{a(x)}^{b(x)} e^{ig(x, t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(x, s)}} \exp i \left[g(x) + \frac{\pi}{4} \right] [1 + o(1)]. \quad (17.84)$$

Примечания. 1°. Можно расширить теорему 17.5 по образцу теоремы 17.1, взяв $n > 2$ и $\kappa \leq \infty$. Но если в (17.28) $c_h \neq 0$, то численным множителем будет интеграл, который вычислить в общем значительно труднее, чем интеграл в (17.31). В качестве $s(x)$ можно брать также некоторое приближение для $\sigma(x)$. Некоторое расширение теоремы рассмотрено в [383].

2°. Если в (17.84) отделить действительную и мнимую части, то в полученных формулах нельзя оставить множитель $[1+o(1)]$, так как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ [\cos \alpha + i \sin \alpha][1+o_1(1) + io_2(1)] \} = \\ = \cos \alpha [1+o_1(1)] - \sin \alpha o_2(1) = \cos \alpha + o(1). \end{aligned}$$

Поэтому следует писать $\cos \left[g(x, s) + \frac{\pi}{4} \right] + o(1)$ и $\sin \left[g(x, s) + \frac{\pi}{4} \right] + o(1)$.

17.5.2. Пусть под знак интеграла (17.76) включен еще множитель $h(x, t)$. Тогда вместо $\delta(x, u)$ следует оценить

$$\begin{aligned} \delta_1(x, u) = \left| e^{\frac{i}{2} u^2 g_2(x, \xi)} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{i u^2}{2} (g_2(x, \xi) - g_2(x, s)) \right] \right\} \times \right. \\ \left. \times h(x, s+u) h^{-1}(x, s) \right|. \end{aligned}$$

Если условие (17.9) заменить на

$$h(x, \xi) = h(x, s) [1 + o(\omega^{-1} g_2^{-1/2})], \quad \xi \in [s - \omega, s + \omega], \quad (17.85)$$

где оценка равномерна относительно ξ , то $\delta_1(x, u) \leq \delta(x, u) + o(\omega^{-1} g_2^{-1/2})$ и, так же как в п. 17.5.1, 1°,

$$\int_{s-\omega}^{s+\omega} e^{ig(x, t)} h(x, t) dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(x, s)}} h(x, s) \exp i \left[g(x, s) + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (17.86)$$

Вне сегмента $[s - \omega, s + \omega]$ оценки крайних интегралов получаем по образцу п. 17.5.1, 2°, если $h(x, t) g_1^{-1}(x, t)$ монотонна при $t \leq s - \omega$ и $t \geq s + \omega$, причем $|h(x, t) g_1^{-1}(x, t)|$ возрастает в первом промежутке и убывает во втором. Тогда асимптотическое представление (17.86) имеет место также для интеграла $\int_{a(x)}^{b(x)} e^{ig(x, t)} h(x, t) dt$. Поэтому формула (17.86) при данных условиях оправдывает принцип стационарной фазы.

Но последнее условие можно ослабить. Достаточно, если $h(x, t)$ кусочно монотонна и $h(x, t) = O(1)$ вне $(s - \omega, s + \omega)$, а $h(x, s) \neq o(1)$. Тогда вторую теорему о среднем можно применить в отдельных промежутках монотонности $h(x, t)$. Если знак функции известен, то эта теорема применяется в упрощенной форме. Покажем этот прием на примере.

Возьмем [5]

$$J_n^{(2k)}(\alpha n) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \cos n(t - \alpha \sin t) \sin^{2k} t dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Исследуем асимптотику интеграла при $n \rightarrow \infty$, $\alpha > 1$. Имеем $g_1(n, t) = n(1 - \alpha \cos t)$, $s = \arccos \frac{1}{\alpha} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $g_2(n, t) = n\alpha \sin t$, $g_2(n, s) = n \operatorname{tg} s$. Если выбрать $\omega = n^{-\gamma}$, то (17.77) будет иметь место при $\gamma < \frac{1}{2}$, (17.78) — в силу $g_3(n, s + \omega) = nO(1)$ и (17.81) — при $\gamma > \frac{3}{8}$. Пусть $\gamma = \frac{2}{5}$. Рассмотрим оценку правого крайнего интеграла, причем сегмент интегрирования разобьем на $\left[s + \omega, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{s+\omega}^{\pi/2} \cos g(n, t) \sin^{2k} t dt \right| = \\ & = \left| g_1^{-1}(n, s + \omega) \int_{s+\omega}^{\xi} \cos g(n, t) g_1(n, t) \sin^{2k} t dt \right| = \\ & = \left| g_1^{-1}(n, s + \omega) \sin^{2k} \xi \int_{\xi_1}^{\xi} \cos g(n, t) g_1(n, t) dt \right| < \\ & < 2g_1^{-1}(n, s + \omega) = o(g_2^{-1/2}(n, s)). \end{aligned}$$

Подобным образом оцениваются интегралы по сегментам $[0, s - \omega]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. В результате при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} J_n^{(2k)}(\alpha n) = & (-1)^k \sin^{2k} s \sqrt{\frac{2}{n\pi \operatorname{tg} s}} \left[\cos \left(n(\operatorname{tg} s - s) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\pi}{4} \right) + o(1) \right], \quad \alpha = 1/\cos s. \end{aligned} \quad (17.87)$$

При $k=0$ получим известную формулу [5], и нетрудно согласно (16.52) найти асимптотическое разложение, следует только учесть остальные критические точки — концы промежутка.

17.5.3. Исследуем возможности обобщения теоремы 17.5 при замене ядра $e^{ig(x, t)}$ на $K(g(x, t))$ и

$$g_1(x, s) = 0, \quad s \in (a(x), b(x)), \quad g(x, s) \rightarrow +\infty; \quad (17.88)$$

$$K(t) = At^{-\beta} e^{i\alpha t} [1 + O(t^{-\gamma})] \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad (17.89)$$

где $\beta \geq 0$, $A \neq 0$, α — действительное число, $\alpha \neq 0$. Допустим, что найдется такая амплитуда $\omega(x)$, что будут выполнены условия (17.77), (17.78) теоремы 17.5 и $s - \omega \geq a$, $s + \omega \leq b$. Тогда в основной интеграл по $[s - \omega, s + \omega]$ вместо $K(g(x, t))$ следует подставить выражение (17.89) и функцию $g^{-\beta}(x, t)$ считать в качестве $h(x, t)$. Чтобы эта функция удовлетворяла (17.85) и можно было использовать формулу (17.86), зададим дополнительное условие

$$\omega^2(x) g_2(x, s) = o(g^{2/3}(x, s)). \quad (17.90)$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= g(x, s) + \frac{1}{2} \omega^2 g_2(x, \xi_1) \sim g(x, s) + \frac{1}{2} \omega^2 g_2(x, s) = \\ &= g(x, s) [1 + o((\omega \sqrt{g_2})^{-1})], \quad \xi \in [s - \omega, s + \omega]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$g(x, \xi) \sim g(x, s) \quad \text{и} \quad g^{-\beta}(x, \xi) = g^{-\beta}(x, s) [1 + o((\omega \sqrt{g_2})^{-1})].$$

Это означает также, что применение формулы (17.89) в $[s - \omega, s + \omega]$ оправдано. Согласно (17.86)

$$\begin{aligned} \Omega^*(x) &= \int_{s-\omega}^{s+\omega} K(g(x, t)) dt = \\ &= A \int_{s-\omega}^{s+\omega} e^{i\alpha g(x, t)} [1 + O(g^{-\gamma}(x, t))] g^{-\beta}(x, t) dt = \\ &= A g^{-\beta}(x, s) \left[\sqrt{\frac{2\pi}{g_2(x, s)}} e^{i\alpha g(x, s)} (1 + o(1)) + O(g^{-\gamma}(x, s) \omega(x)) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $g^{-\gamma} \omega = g_2^{-1/2} g^{-\gamma} \omega g_2^{1/2} = g_2^{-1/2} g^{-\gamma} o(g^{1/3}) = g_2^{-1/2} o(1)$, если $\gamma \geq 1/3$, то

$$\begin{aligned} \Omega^*(x) &= A g^{-\beta}(x, s) \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(x, s)}} e^{i\alpha g(x, s)} [1 + o(1)] = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(x, s)}} K(g(x, s)) [1 + o(1)]. \quad (17.91) \end{aligned}$$

При оценке крайних интегралов следует иметь в виду, что (17.89) в данном случае в общем неприменимо. Но если в $[a(x), b(x)]$ $g_1(x, t)$ монотонно возрастает, то в силу $g_1(x, s) = 0$

в $[a, s]$ и $(s, b]$ $g(x, t)$ также возрастает и $g(x, t) \rightarrow +\infty$ при $t \in [a, b]$, если $x \rightarrow +\infty$. Поэтому с учетом (8.17) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{s+\omega}^b K(g(x, t)) g_1(x, t) dt = \int_{g(x, s+\omega)}^{g(x, b)} K(\tau) d\tau = \\ & = A \int_{g(x, s+\omega)}^{g(x, b)} e^{i\alpha\tau} \tau^{-\beta} d\tau + A \int_{g(x, s+\omega)}^{g(x, b)} \tau^{-\beta-\gamma} e^{i\alpha\tau} O(1) d\tau = \\ & = O(g^{-\beta}(x, s)) + O(g^{-\beta-\gamma+1}(x, s)). \end{aligned}$$

При $\beta + \gamma > 1$ имеем оценку $O(1)$. Аналогично, как в п. 17.5.1, 2°, получаем

$$\int_{s+\omega}^b K(g(x, t)) dt = o(g_2^{-1/2}(x, s)) O(1).$$

Подобные оценки имеем при $t \in [a, s - \omega]$.

Теорема 17.6. Пусть 1) функция $K(g(x, t))$ удовлетворяет условиям (17.88), (17.89), где $\beta \geq 0$, $\gamma \geq \frac{1}{3}$, $\beta + \gamma > 1$; 2) можно найти такую функцию $\omega(x) < \min(b(x) - s(x), s(x) - a(x))$, что будут иметь место (17.77), (17.78) и (17.90); 3) $g_1(x, t)$ монотонно возрастает в $[a(x), b(x)]$. Тогда при $x \rightarrow x_0$ справедливо соотношение

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(g(x, t)) dt = \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(x, s)}} K(g(x, s)) [1 + o(1)]. \quad (17.92)$$

Формула (17.92) дает обобщение принципа стационарной фазы.

Примечания. 1°. Функция $g(x, t) = xG(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 17.6, если $G(t) > 0$, $G'(t_0) = 0$, $t_0 \in (a, b)$, $G''(t) > 0$ при $\omega = x^{-2/5}$.

2°. Теорему 17.6 можно обобщить, если $K(t) = \sum_{k=1}^p K_k(t)$, где функции $K_k(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ обладают представлением (17.89). При сложении отдельных разложений следует учитывать примечание 2° к теореме 17.5. В частности, в качестве $K(t)$ можно брать $J_n(t)$.

3°. Примечанием 2° можем воспользоваться и тогда, когда γ не удовлетворяет условию 1), а вместо (17.89) дано асимптотическое разложение по степенной шкале и в нем можно брать такое количество членов, чтобы для остатка условие 1) удовлетворялось. Поэтому в случае существования асимптотического

разложения для $K(t)$ (17.92) всегда справедливо при выполнении остальных условий.

4°. Если функция $g_1(x, t)$ не является монотонно возрастающей, то возможны разные модификации теоремы. Под знак интеграла (17.92) можно включить еще множитель $h(x, t)$, обладающий определенными свойствами.

§ 18. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

18.1. Основные теоремы

18.1.1. Рассмотрим асимптотическое разложение при $x \rightarrow x_0$, $x \in U(x_0)$ интеграла

$$\Omega(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) h(x, t) dt, \quad (18.1)$$

если единственной существенно критической точкой интеграла является $s(x) \in (a(x), b(x))$. Случай, когда $s(x)$ совпадает с одним из концов промежутка интегрирования, исследуется аналогично. Он будет рассмотрен при конкретных $K(x, t)$.

Нетрудно видеть, что согласно сказанному в п. 16.1 $h(x, t)$ следует разложить в асимптотический ряд в окрестности $s(x)$, а потом ряд формально интегрировать почленно. Рассмотрим применение только ряда Тейлора, т. е. представим $h(x, t)$ в виде $h(x, t) = h_0(x, t) (t-s)^p$, $p \in \mathbb{N}$, $h_0(x, s) \neq 0$, где при любом $n \in \mathbb{N}$

$$h_0(x, t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} h_k(x, s) (t-s)^k + \frac{1}{n!} \int_s^t h_{n+1}(x, \tau) (t-\tau)^n d\tau. \quad (18.2)$$

При этом предполагается, что относительно t $h(x, t) \in C^\infty[a(x), b(x)]$.

Подставляя (18.2) в (18.1), получаем

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} h_k(x, s) \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) (t-s)^{k+p} dt + \\ & + \frac{1}{n!} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) (t-s)^p dt \int_s^t h_{n+1}(x, \tau) (t-\tau)^n d\tau. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Обозначим

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) (t-s)^k dt = \psi_k(x). \quad (18.4)$$

В (18.3) имеем асимптотическое разложение при выполнении следующих требований.

1°. Функции $h_k(x, s)\psi_{k+p}(x) = \lambda_k(x)$ образуют асимптотическую шкалу.

2°. Остаток в (18.3) имеет оценку $o(\lambda_{m_n}(x))$, $m_n \uparrow +\infty$, $m_n \leq n$. Рассмотрим некоторые общие соображения о выполнении этих требований.

1°. Асимптотическую оценку функций $\psi_{k+p}(x)$ при $K(x, t) = \exp[-g(x, t)]$ можно получить по формуле (17.58), в которой положено $h(x, t) \equiv 1$, если выполнены условия теорем 17.1—17.2'. При $\kappa < \infty$ приходится непосредственно использовать теоремы 17.1 и 17.1'. В силу того что $a-s < 0$, $b-s > 0$ и при нечетном $k+p$ $(t-s)^{k+p}$ меняет знак в точке s , точную оценку всегда получаем только при $p+k=2m$. При $p+k=2m-1$ она следует из (17.58) лишь тогда, когда хотя бы один из c_{2k-1} не равен нулю.

Ради удобства без умаления общности положим

$$\psi_{k+p}(x) \sim A_k \Phi(x) \varphi_k(x). \quad (18.5)$$

В силу сказанного функции $\varphi_{2m}(x)$ и $\varphi_{2m-1}(x)$ могут иметь разные асимптотики при $x \rightarrow x_0$. Не исключено, что $\psi_{2m-1}(x) = o(\psi_{2m}(x))$. В таких случаях (18.3) целесообразно разбить на две части и построить сумму двух разложений с четными и нечетными индексами. Обычно имеем одну из двух возможностей: либо один ряд входит в любой остаток второго ряда и им можно пренебречь, либо после перегруппировки членов возможно смешивание шкал и образование одного разложения. Имеются случаи, когда $\psi_{2m-1}(x) \equiv 0$.

Если при $K(x, t) = \exp[-g(x, t)]$ в (17.58) $g_n(x, s) \rightarrow +\infty$, $c_{2k-1} \neq 0$, то функции $\psi_{k+p}(x)$ образуют шкалу. Однако это свойство не является необходимым, а также недостаточным, так как шкалу должны образовать функции $\lambda_k(x)$. Без умаления общности положим

$$h_k(x, s(x)) \sim H(x) \chi_k(x), \quad x \rightarrow x_0, \quad H(x) \neq 0. \quad (18.6)$$

Тогда достаточно требовать, чтобы системы $\{\mu_{2k}(x)\}$ и $\{\mu_{2k+1}(x)\}$, где

$$\mu_k(x) = \varphi_k(x) \chi_k(x), \quad (18.7)$$

при $x \rightarrow x_0$ образовали шкалу. Это требование в дальнейшем будем называть *условием шкалы*. Если некоторые $\chi_k(x)$ равны нулю, то соответствующие $\mu_k(x)$ из последовательности надо исключить. В частности, условие шкалы будет выполнено, если

$$\begin{aligned} \chi_k(x) &\sim a_k \chi^k(x), \quad \varphi_{2k}(x) \sim b_k \varphi^k(x), \quad \chi^2(x) \varphi(x) = o(1), \\ \varphi_{2k+1}(x) &\sim b_k^* [\varphi^*(x)]^k, \quad \chi^2(x) \varphi^*(x) = o(1). \end{aligned} \quad (18.8)$$

2°. Оценка остатка получается весьма просто, если при всех $k \geq k_0 \in N$ и $\xi \in [a, b]$

$$|h_k(x, \xi)| \leq M_k |h_k(x, s)|, \quad x \in U(x_0), \quad (18.9)$$

и

$$K(x, t) \geq 0, \quad t \in [a, b], \quad x \in U(x_0). \quad (18.10)$$

Тогда в (18.3) при $n \geq k_0$ имеем

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{1}{n!} \left| \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) (t-s)^p dt \int_s^t h_{n+1}(x, \tau) (t-\tau)^n d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\tau \in [a, b]} |h_{n+1}(x, \tau)| \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) |t-s|^{n+1+p} dt \leq \\ &\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |h_{n+1}(x, s)| \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) |t-s|^{n+p+1} dt. \end{aligned}$$

Отсюда при $n+p+1=2m$ следует $R_n(x) = O(\lambda_{n+1}(x))$. Для оценки $R_{n+1}(x)$ при указанном n сначала применим соотношение

$$h_{n+1}(x, \tau) = h_{n+1}(x, s) + \int_s^\tau h_{n+2}(x, u) du.$$

Тогда после изменения порядка интегрирования получим

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(2m+1)!} \lambda_{n+2}(x) + O(\lambda_{n+3}(x)).$$

Второе слагаемое правой части этого равенства можно присоединить к ряду с четными индексами. Следовательно, остаток при $n \geq k_0$ имеет требуемую оценку. Если выполнено условие шкалы, то из доказанного требуемая оценка следует также при $n < k_0$.

18.1.2. Резюмируем полученные результаты.

Теорема 18.1. Пусть 1) справедливы соотношения (18.5) и (18.6); 2) выполнено условие шкалы; 3) имеют место условия (18.9) и (18.10). Тогда при $x \rightarrow x_0$ имеем разложение

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) h(x, t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h_k(x, s(x)) \psi_{k+p}(x) \quad (18.11)$$

относительно шкал $\{\Phi(x)H(x)\mu_{2k}(x)\}$ и $\{\Phi(x)H(x)\mu_{2k+1}(x)\}$.

Примечания. 1°. Ряд (18.11) часто можно писать как сильноасимптотическое разложение, представив $\mu_k(x)$ в виде $\mu_k(x) = c_k(x)\gamma_k(x)$, где $c_k(x) = O(1)$ и $\{\gamma_{2k}(x)\}, \{\gamma_{2k+1}(x)\}$ образуют шкалы.

2°. Теорема остается верной, если $a(x) = s(x)$ или $b(x) = s(x)$. В этих случаях также допускается, что $p \in \mathbb{N}$, $p > -1$, причем при $t \leq s(x)$ следует рассматривать интеграл с подынтегральным множителем $(s-t)^p$. Разбиение разложения на сумму двух разложений тогда излишне.

3°. Если при $x \rightarrow x_0$ $s(x) \rightarrow s_0$, то разложение можно упростить, разлагая $h(x, t)$ не по степеням $t - s(x)$, а по степеням $t - s_0$ (при $s_0 = \infty$ по степеням t^{-1}). Некоторые авторы в таких случаях s_0 называют критической точкой, но мы ее назовем *предельно критической*, так как иногда при каждом фиксированном x s_0 находится вне области влияния. Обычно эти разные приемы допускают относительно $h(x, t)$ разные условия, причем, как правило, более слабые условия получаем при разложении по степеням $t - s(x)$. Это и понятно, так как в таком случае в большей мере учитывается расположение критической точки. Далее при конкретных $K(x, t)$ параллельно рассмотрены оба приема.

18.1.3. К сожалению, условие (18.9) обычно имеет место лишь в некоторой части промежутка интегрирования $[s(x) - \omega(x), s(x) + \omega(x)] \subset [a(x), b(x)]$. Поэтому теорему 18.1 при выполнении остальных условий можно применить лишь к интегралу

$$\Omega_0(x) = \int_{s-\omega}^{s+\omega} K(x, t) h(x, t) dt, \quad (18.12)$$

который назовем *основным интегралом*. Однако часто удается доказать, что *крайние интегралы* $\Omega_l(x)$ и $\Omega_r(x)$ по промежуткам $[a, s - \omega]$ и $[s + \omega, b]$ входят в любой остаток разложения (18.11). Из доказательства одновременно следует также выражение для внешнего радиуса влияния: $\rho(x) = \omega(x)$.

Возникает также другой вопрос. Поскольку $\omega(x)$ обычно выбирается с некоторым произволом, то функции $\psi_k(x)$, которые в данном случае определяются как

$$\psi_k(x) = \int_{s-\omega}^{s+\omega} K(x, t) (t-s)^k dt, \quad (18.13)$$

целесообразно заменить на интегралы с фиксированными пределами

$$\Psi_k(x) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} K(x, t) (t-s)^k dt, \quad (18.14)$$

где $\alpha_0 < s - \omega$ и $\beta_0 > s + \omega$ фиксируются так, чтобы функции $\Psi_k(x)$ имели по возможности простой вид. Часто $\Psi_k(x) = A_k \Phi(x) \varphi_k(x)$. Очевидно, такая замена выполнима лишь тогда, когда $K(x, t)$ имеет абсолютный максимум в $[s - \omega, s + \omega]$. Она целесообразна также в теореме 18.1, если условие (18.9) выполнено во всем промежутке интегрирования. Исследуем подробнее эти две задачи.

Для краткости изложения дадим несколько определений.

Определение 18.1. Класс функций, которые при $x \rightarrow x_0$ асимптотически эквивалентны некоторой степенной функции, обозначим через $\Pi(x_0)$. В этот класс входят также постоянные, кроме нуля.

Определение 18.2. Если функции $g(x, t)$ и $\omega(x)$ удовлетворяют условиям теорем 17.1 и 17.1' при $n=2p$, $p \in \mathbb{N}_1$ и $x = +\infty$, то будем говорить, что выполнено *основное условие*.

18.1.4. Чтобы в (18.11) можно было $\psi_k(x)$ заменить на $\Psi_k(x)$, при всех $k \in \mathbb{N}$ должны иметь место соотношения

$$\psi_k(x) = \Psi_k(x) + o(\Phi(x) \chi_N(x) \varphi_N(x) \chi_k^{-1}(x)), \quad (18.15)$$

причем в общем случае они рассматриваются отдельно для четных и нечетных индексов. Поскольку число p при оценке (18.15) не имеет значения, то в этом пункте примем $p=0$.

Если выполнено (18.10), то без уменьшения общности можно брать ядро в виде $\exp[-g(x, t)]$, $g(x, t) = -\ln K(x, t)$. Поскольку согласно (17.58) имеем $\Phi(s) = \exp[-g(x, s)]$, то при оценке крайних интегралов для $\Psi_k(x)$ можно использовать формулы (17.45) и (17.45'). Перепишем их в виде

$$\exp[-g(x, s \pm \omega)] = e^{-g(x, s)} \exp \left[-\frac{1}{2n!} \omega^n(x) g_n(x, s) \right] o(1) \quad (18.16)$$

при $x \rightarrow x_0$. Но данные функции должны удовлетворять еще дополнительным условиям, которые можно выбрать по-разному.

А. Лемма 18.1. Пусть выполнено основное условие и

$$\omega(x) \in \Pi(x_0), \quad g_n(x, s) \in \Pi(x_0); \quad (18.17)$$

$$\chi_k(x) \in \Pi(x_0), \quad \varphi_k(x) \in \Pi(x_0); \quad (18.18)$$

$$g(x, t) \geq g(x, s - \omega) \quad \text{при } t \leq s - \omega,$$

$$g(x, t) \geq g(x, s + \omega) \quad \text{при } t \geq s + \omega; \quad (18.19)$$

$$\alpha(x) \in \Pi(x_0), \quad \beta(x) \in \Pi(x_0), \quad \alpha(x) < s - \omega, \quad \beta(x) > s + \omega. \quad (18.20)$$

Тогда при $x \rightarrow x_0$ имеем

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} e^{-g(x, t)} (t-s)^k dt = \psi_k(x) + e^{-g(x, s)} o(\chi_N(x) \varphi_N(x) \chi_k^{-1}(x)). \quad (18.21)$$

Доказательство леммы следует из условий, если в крайних интегралах в силу (18.19) $e^{-g(x, t)}$ заменить на $\exp[-g(x, s \pm \omega)]$ и учесть (18.16). Получим множитель $o((x-x_0)^N)$ или $o(x^{-N})$ при $x_0 = \infty$, что эквивалентно оценке в (18.21). ■

Примечания. 1°. Лемма содержит много условий, но все они легко проверяемы в ходе исследования $\Psi_k(x)$. Для $\varphi_k(x)$ из (18.17) и (17.58) следует, что условие (18.18) при четных k выполняется всегда, а при нечетных — в том случае, если хотя бы один из c_{2j-1} не равен нулю.

2°. Условия леммы можно ослабить, допустив, что все функции, принадлежащие $\Pi(x_0)$, помножены на медленно изменяющиеся функции. Следует только требовать $\omega^n(x) g_n(x, s) \in \Pi(x_0)$, так как тогда согласно $\omega^n g_n \rightarrow +\infty$ в (18.16) имеем $\omega^n g_n \asymp (x-x_0)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, или при $x_0 = \infty$ $\omega^n g_n \sim |x|^\alpha$, $a > 0$.

3°. Если $\Psi_{2k-1}(x) = 0$, то членами с нечетными индексами можно пренебречь.

При $a = -\infty$ или $b = +\infty$ для установления (18.15) еще следует оценить интегралы по $(-\infty, \alpha(x))$ и $(\beta(x), \infty)$. Это обычно легко осуществить, пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} g(x, t) &\geq g(x, s - \omega) + f_l(t) \quad \text{при } t \leq \alpha(x), \\ g(x, t) &\geq g(x, s + \omega) + f_r(t) \quad \text{при } t \geq \beta(x), \end{aligned} \quad (18.22)$$

где $f_l(t)$ и $f_r(t)$ строятся так, чтобы была обеспечена сходимость интегралов после оценки подынтегрального выражения. Если $K(x, t)$ достаточно быстро убывает, то функции $f_l(t)$ и $f_r(t)$ в неравенствах (18.22) обычно найти нетрудно. Иногда вместо леммы 18.1 вне $[s - \omega, s + \omega]$ проще непосредственно применить оценки (18.22).

Б. Вместо (18.19) можно задавать более сильное условие: $g_1(x, t)$ в $[a, b]$ монотонно возрастает (условие Шуберта). Тогда можно применить еще (17.45А) и (17.45В) и получить оценку для $\Psi_k(x)$ независимо от $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. При $t \geq s + \omega$ имеем

$$\begin{aligned} g(x, t) - g(x, s + \omega) &= g_1(x, \xi) (t - s - \omega) \geq g_1(x, s + \omega) (t - s - \omega) \geq \\ &\geq \frac{1}{2(n-1)!} \omega^{-1}(x) \omega^n(x) g_n(x, s) (t - s - \omega) = A(x) (t - s - \omega); \\ &\int_{s+\omega}^b e^{-g(x,t)} (t-s)^k dt \leq \\ &\leq e^{-g(x,s+\omega)} \int_{s+\omega}^b \exp[-A(t-s-\omega)] (t-s)^k dt < \\ &< e^{-g(x,s+\omega)} \int_0^\infty e^{-A\tau} (\tau+\omega)^k d\tau < \\ &< e^{-g(x,s+\omega)} A^{-k-1} (A\omega)^{k+1} \int_0^\infty e^{-u} (u+1)^k du = \\ &= e^{-g(x,s)} \exp\left[-\frac{1}{2n!} \omega^n g_n\right] \omega^{k+1} o(1). \end{aligned} \quad (18.23)$$

Подобную оценку получаем для интеграла по $[a, s - \omega]$, так как согласно (17.45В) при $n = 2p$

$$\begin{aligned} -g_1(x, s - \omega) &= \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} g_n(x, s) [1 + o(1)] > A(x), \quad t - s + \omega \leq 0; \\ -g(x, t) + g(x, s - \omega) &\leq -g_1(x, s - \omega) (t - s + \omega) \leq A(x) (t - s + \omega). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Psi_k(x) = \psi_k(x) + e^{-g(x,s)} \exp\left[-\frac{1}{2n!} \omega^n g_n\right] \omega^{k+1} o(1). \quad (18.24)$$

Лемма 18.2. Пусть 1) функции $g(x, t)$ и $\omega(x)$ удовлетворяют основному условию; 2) $g_1(x, t)$ удовлетворяет условию Шуберта; 3) можно найти такое γ , что при $k \in N_1$

$$\chi_{k-1}(x) = O\left(\chi_k(\omega^n g_n)^\gamma g_n^{-\frac{1}{n}}\right). \quad (18.25)$$

Тогда для любого $v \in N$

$$\Psi_k(x) = \psi_k(x) + e^{-g(x,s)} g_n^{-\frac{v+1}{n}} \chi_k^{-1} \chi_v O(1), \quad (18.26)$$

что при данных условиях эквивалентно (18.15).

Доказательство леммы следует из (18.24) и (18.25) с учетом соотношений

$$1 = \chi_k^{-1} \chi_k = O\left(\chi_k^{-1} \chi_v (\omega^n g_n)^{\gamma(v-k)} g_n^{-\frac{v+1}{n}} g_n^{\frac{k+1}{n}}\right),$$

$$(\omega^n g_n)^{\gamma(v-k) + \frac{k+1}{n}} \exp\left[-\frac{1}{2n!} \omega^n g_n\right] \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0. \blacksquare$$

Примечания. 1°. Вместо (18.25) можно задавать также условие

$$\chi_{k-1}(x) = O(\chi_k (\omega^n g_n)^{\gamma\omega}), \quad (18.25')$$

поскольку $\omega^{v-k} = \omega^{-k-1} g^{-\frac{v+1}{n}} (\omega^n g)^{\frac{v+1}{n}}$.

2°. При выполнении условий (18.17) и (18.18) леммы 18.1 обычно можно найти такое γ , чтобы имело место (18.25).

3°. При $k=2m$, $m \in N$, в силу $\omega^{k+1} = g_n^{-\frac{k+1}{n}} (g_n \omega^n)^{\frac{k+1}{n}}$ и (17.58) в (18.24) имеем $\Psi_k(x) \sim \psi_k(x)$. Однако при $k=2m-1$ этого утверждать не можем. Если второй член правой части (18.24) является определяющим, то в разложении (18.11) членами, содержащими $\psi_{2m-1}(x)$, можно пренебречь (см. примечание 3° к лемме 18.1).

В. Исследование асимптотики $\Psi_{2k-1}(x)$ вообще весьма сложно, так как имеется много факторов, которые влияют на эту асимптотику. Для ознакомления с некоторыми из них рассмотрим случай, когда $n=2$. Положим

$$G(x, t) = g(x, s) + \frac{1}{2} g_2(x, s) (t-s)^2, \quad \kappa(x, t) = G(x, t) - g(x, t);$$

$$\exp[-G(x, t) + \kappa(x, t)] = e^{-g(x,t)}. \quad (18.27)$$

Применяя теорему 18.1, где $h_0(x, t) = e^{\kappa(x,t)}$, получаем

$$\psi_{2k-1}(x) = -e^{-g(x,s)} \left(\sqrt{\frac{2}{g_2(x,s)}}\right)^{2k+1} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \left\{ g_1(x, s) + \frac{1}{6} [g_1^3(x, s) + g_3(x, s)] (2k+1) g_2^{-1}(x, s) + R_3^*(x) \right\}.$$

При $g_1(x, s) \neq 0$, $g_1(x, s) = o(\sqrt{g_2(x, s)})$ определяющим может быть любой из членов в правой части предыдущего равенства. Если $g_1(x, s) = 0$, то можно задавать условия, при которых $R_3^*(x) = g_3(x, s)g_2^{-1}(x, s)o(1)$ [47]. Но в этом нет необходимости, так как в каждом конкретном случае функцию $\Psi_k(x)$ приходится исследовать подробнее, и в частности ее асимптотику.

18.1.5, 1°. Оценки крайних интегралов $\Omega_l(x)$ и $\Omega_r(x)$ получаем аналогично, как в п. 18.1.4, если вне $[s - \omega, s + \omega]$ имеем

$$|h_0(x, t)| \leq Me^{\tau(x, t)}, \quad (18.28)$$

а в $[s - \omega, s + \omega]$ $h_0(x, t)$ удовлетворяет условию (18.9). Тогда во многих случаях можно использовать лемму 18.1 для представления интеграла (18.21) при $k=0$, если $g(x, t)$ заменить на

$$\gamma(x, t) = g(x, t) - \tau(x, t). \quad (18.29)$$

Оценка интегралов по $(-\infty, \alpha(x)]$ и $[\beta(x), \infty)$ обычно выполняема с помощью соотношений (18.22). Однако при оценке крайних интегралов следует иметь в виду, что необходимо еще выделить множитель $H(x)$. Если $H(x) \in \Pi(x_0)$, то используем лемму 18.1. Но может быть, что

$$H(x) = \exp[\tau(x, s(x))] \notin \Pi(x_0). \quad (18.30)$$

Тогда иногда приходится выполнять более тонкие оценки. При конкретных $K(x, t)$ и $h_0(x, t)$ в оценке остатка, приведенного в (18.3), иногда можно изменить порядок интегрирования, т. е. применить формулу

$$\int_{s+\omega}^b dt \int_s^t \Phi_n(x, t, \tau) d\tau = \int_s^{s+\omega} d\tau \int_{s+\omega}^b \Phi_n dt + \int_{s+\omega}^b d\tau \int_{\tau}^b \Phi_n dt.$$

В таком случае от функции $h_0(x, t)$ вне $[s - \omega, s + \omega]$ требуется лишь локальная интегрируемость. В окрестности концов промежутка интегрирования $h_0(x, t)$ может быть неинтегрируемой. Это свойство будет показано при оценке (18.28) соответствующим выбором $\tau(x, t)$.

2°. Если $h_0(x, t) \geq 0$, то случай (18.30) можно анализировать подробнее, положив

$$h_0(x, t) = \exp[\tau(x, t)], \quad H(x) = \exp[\tau(x, s)], \quad \chi_0(x) = 1. \quad (18.31)$$

Имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= h_0 \tau_1, & h_2 &= h_0(\tau_1^2 + \tau_2), & h_3 &= h_0(\tau_1^3 + 3\tau_1\tau_2 + \tau_3), \\ h_4 &= h_0(\tau_1^4 + 6\tau_1^2\tau_2 + 3\tau_2^2 + 4\tau_1\tau_3 + \tau_4) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (18.32)$$

Для h_n в скобках имеем линейную комбинацию произведений

$$\prod_{j=1}^n \tau_j^{\alpha_j}, \sum_{j=1}^n j \alpha_j = n, \alpha_j \in N.$$

Эти выражения позволяют уточнить условия шкалы, если $\chi_k(x)$ заданы в виде (18.8). Из (18.8) и (18.32) имеем $\chi_1(x) = a_1 \chi(x) = \tau_1(x, s)$, следовательно, при $a_1 \neq 0$ должно быть $\chi(x) = \tau_1(x, s)$. Методом индукции можно установить, что $\chi_k(x) = a_k \tau_1^k(x, s)$, если

$$\tau_n(x, s) = O(\tau_1^n(x, s)). \quad (18.33)$$

Из (17.58) имеем $\varphi(x) = g_n^{-1/n}(x, s)$, поэтому условие шкалы перепишем в виде

$$\tau_1(x, s) g_n^{-\frac{1}{n}}(x, s) = o(1) \quad \text{или} \quad \tau_1(x, s) \omega(x) = O(1). \quad (18.34)$$

Если $\chi_1(x) = \dots = \chi_{m-1}(x) = 0$, $\chi_m(x) \neq 0$, то из этих равенств и (18.32) следует $\tau_1(x, s) = \dots = \tau_{m-1}(x, s) = 0$, $\tau_m(x, s) \neq 0$. Имеем соотношения $\chi_k(x) = a_k \tau_m^{k/m}(x, s)$, если

$$\tau_k(x, s) = O(\tau_m^{k/m}(x, s)), \quad k > m. \quad (18.33')$$

Тогда условие шкалы принимает вид

$$\tau_m(x, s) g_n^{-1/n}(x, s) = o(1) \quad \text{или} \quad \tau_m(x, s) \omega^m(x) = O(1). \quad (18.34')$$

3°. Теорема 18.2. Пусть 1) удовлетворены условия 1) и 3) леммы 18.2; 2) выполнены условия теоремы 18.1 в $[s-\omega, s+\omega]$; 3) функция $\gamma_1(x, t)$, где $\gamma(x, t)$ определена в (18.29) и (18.31), монотонно возрастает в $[a, b]$ вне $(s-\omega, s+\omega)$; 4) $\tau_1(x, s+\omega) = o(\omega^{n-1} g_n(x, s))$. Тогда при $x \rightarrow x_0$ справедливо разложение (18.11).

Доказательство. Необходимо показать, что $\Omega_r(x)$ и $\Omega_l(x)$ входят в любой остаток разложения (18.11), т. е. доказать для них оценку $\Phi(x) H(x) \varphi_\nu(x) \chi_\nu(x) o(1)$ при любом $\nu \in N$. Достаточно брать четное ν . Согласно условию 1) и (17.58) имеем

$\Phi(x) = e^{-g(x, s)}$, $H(x) = e^{\tau(x, s)}$, $\varphi_\nu(x) = g_n^{-\frac{\nu+1+p}{n}}$. Используем при $t > s + \omega$ неравенство

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) &= \gamma(x, s + \omega) + \gamma_1(x, \xi) (t - s - \omega) \geq \\ &\geq \gamma(x, s + \omega) + \gamma_1(x, s + \omega) (t - s - \omega). \end{aligned}$$

Согласно (18.23) и условию 4)

$$\gamma_1(x, s + \omega) = g_1(x, s + \omega) - \tau_1(x, s + \omega) \geq \frac{\omega^{n-1}}{2(n-1)!} g_n(x, s),$$

$$\Omega_r(x) = \int_{s+\omega}^b e^{-\nu(x,t)} (t-s)^p dt = \exp[-g(x, s) + \tau(x, s)] \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2n!} \omega^n g_n \right] \omega^{p+1} o(1).$$

Далее используем конец доказательства леммы 18.1 при $k=0$, так как $\chi_0(x) = 1$. Получаем $\Omega_r(x) = \Phi(x) H(x) \varphi_\nu(x) \chi_\nu(x) o(1)$. Такую же оценку можно доказать для $\Omega_l(x)$. ■

Примечания. 1°. В теореме 18.2 имеется много условий, но большинство из них необходимо проверить, исследуя основной интеграл и свойства $\Psi_k(x)$.

2°. Если выполнено еще условие 2) леммы 18.2 или условия леммы 18.1, то в (18.11) $\psi_{k+p}(x)$ можно заменить на $\Psi_{k+p}(x)$.

18.1.6. В дальнейших пунктах этого параграфа рассмотрены случаи конкретных ядер. Поскольку в теореме 18.2 требование (18.31) сильно ограничивает класс допустимых функций нагрузки, так как должно быть $h_0(x, t) \geq 0$, то часто этой теоремой пользоваться не будем. Кроме того, ради простоты рассмотрим функцию нагрузки $h(t)$, которая не требует дополнительных условий. Однако результаты следующих пунктов § 18 нетрудно обобщить, взяв функцию нагрузки $h(x, t)$, удовлетворяющую соответствующим условиям. Иногда полученные разложения остаются справедливыми также при комплексном x , $|\arg x| \leq \alpha$. Кроме того, в примерах, приведенных далее, результаты можно легко обобщить, взяв такие переменные пределы, чтобы внешняя область влияния лежала в области интегрирования.

Перечислим основные действия, выполняемые при построении разложений.

1°. Исследование свойств функции $\Psi_k(x)$ и обоснование замены $\psi_k(x)$ на $\Psi_k(x)$. Обычно вначале ищется разложение интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} K(x, t) t^k dt$, которое часто можно получить с помощью соответствующей подстановки и теоремы 16.1. Далее $\Psi_k(x)$ удобно исследовать, пользуясь соотношением

$$\Psi_k(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t) (t-s)^k dt = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} s^j \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t) t^{k-j} dt. \quad (18.35)$$

2°. Проверка условий теоремы 18.1 для основного интеграла. Иногда оказывается, что шкала не является равномерной относительно индекса. Это означает, что для каждого фиксирован-

ного k и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую окрестность $U_h(x_0, \varepsilon)$, что при $x \in U_h(x_0, \varepsilon)$ $|\lambda_{k+1}(x)| < \varepsilon |\lambda_k(x)|$, но нельзя найти окрестность $U(x_0, \varepsilon)$, чтобы неравенство имело место одновременно при всех k . Кроме того, можно найти такие $k(x)$, что $\lambda_{k(x)+1}(x) \neq \neq 0(\lambda_{k(x)}(x))$ при $x \rightarrow x_0$. Такую шкалу назовем *сильно неравномерной* (см. п. 18.4).

В некоторых случаях можно получить шкалу только после объединения членов по группам (см. п. 18.5.3 и 18.5.4) или после их перегруппировки.

Для краткости выражений целесообразно также

Определение 18.3. Пусть 1) $h(t)$ удовлетворяет условиям (18.6) и (18.9), которые перепишем в виде

$$h_k(s) \sim H(s)\chi_k(s), \quad |h_k(s + \vartheta\omega)| \leq M_k |h_k(s)|, \quad |\vartheta| \leq 1; \quad (18.36)$$

2) $\chi_k(s)$ удовлетворяют условию (18.18) или (18.25); 3) $\chi_k(s)$ при данных $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условиям шкалы (допускается также сильно неравномерная шкала). Тогда будем говорить, что $h(t)$ *удовлетворяет условиям разложения*.

3°. Оценка крайних интегралов $\Omega_l(x)$ и $\Omega_r(x)$. Для этого используем приемы, указанные в п. 18.1.5. Выкладки обычно опускаются.

18.2. Преобразование Лапласа

18.2.1, 1°. Асимптотическое разложение интеграла Лапласа

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} h(t) dt \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (18.37)$$

в простейших случаях можно получить непосредственно по лемме Ватсона, а также по теоремам 13.1 и 13.2. Если $h(t) = = t^\alpha h_0(t)$, где $h_0(t)$ обладает разложением (12.2), то при добавлении под знак интеграла (18.37) множителя $(\ln t)^m$, $m \in \mathbb{N}$, соответствующее разложение получается m -кратным дифференцированием по α из предыдущего разложения. Это утверждение можно обосновать доказательством леммы Ватсона, внося в него небольшие изменения. Можно использовать также формулу (12.48), в которой $K(\tau) = e^{-\tau}$.

Если же m — дробное число, то разложение можно построить по функциям (13.49) [121, 162] или с помощью логарифмической шкалы согласно теореме 13.3.

Рассмотрим примеры, когда при $t \rightarrow +0$ $h(t)$ стремится к нулю быстрее любой степени t . В таких случаях от функции на-

грузки следует отщепить соответствующий множитель $F(t)$, присоединить его к e^{-xt} , образовать новое ядро и искать критическую точку $s(x)$.

2°. Пусть $F(t) = \exp(-t^{-\beta})$, $\beta > 0$. Тогда $s(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma = \frac{1}{1+\beta} \in (0, 1)$. Поскольку $s(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то можно непосредственно применить результаты, полученные в гл. III. Если при $t \rightarrow +0$ $h_0(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\lambda_k}$, $\lambda_k \uparrow +\infty$, и $h_0(t)$ удовлетворяет условиям 2) и 3) леммы Ватсона, то согласно (12.80), (13.81)–(13.83) имеем разложение

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-\beta xt - t^{-\beta}) h_0(t) dt &\sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^{\infty} \exp(-\beta xt - t^{-\beta}) t^{\lambda_k} dt \sim \\ &\sim 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\beta(1+\beta)}} x^{-\frac{1}{2}[1+\gamma(2\lambda_0+1)]} \exp[-(1+\beta)x^{1-\gamma}] \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-\mu_k}, \end{aligned} \quad (18.38)$$

$\mu_0 = 0$, $\mu_k \uparrow +\infty$, $b_0 = c_0$. При $\beta = 1$ согласно п. 13.1.2, 9° разложение можно писать также в виде [67]

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\beta x)^{-\frac{\lambda_k+1}{2}} K_{\lambda_k+1}(2\sqrt{\beta x}). \quad (18.39)$$

Случай, когда $t^{-\beta}$ заменено на $\alpha t^{-\beta}$, $\alpha > 0$, с помощью подстановки приводится к (18.38).

3°. Ищем разложение интеграла

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-xt - \frac{1}{\alpha} \ln^{\alpha} t\right) h_0(t) dt, \quad \alpha = 2m, \quad m \in N_1.$$

Пользуясь теоремами 17.1–17.2', докажем сначала соотношение

$$\begin{aligned} D(x, \lambda) &= \int_0^{\infty} \exp\left(-xt - \frac{1}{\alpha} \ln^{\alpha} t\right) t^{\lambda} dt \sim \\ &\sim \sqrt{2\pi} \exp\left(-xs - \frac{1}{\alpha} \ln^{\alpha} s\right) (\ln x)^{(\alpha-1)(\lambda+1/2)} x^{-\lambda-1}, \end{aligned} \quad (18.40)$$

где $s(x)$ определяется из уравнения $x + s^{-1} \ln^{\alpha-1} s = 0$, $s(x) = x^{-1} \ln^{\alpha-1} x [1 + o(1)]$. Доказательство (18.40) рассмотрим при

$\lambda \geq 0$. Имеем $g_2(s) = x^2 \ln^{1-\alpha} x [1 + O(\ln^{-1} x \ln \ln^{\alpha-1} x)]$, $\omega(x) = x^{-1} \ln^{\alpha-1/2} x$. Интеграл по сегменту $[0, s - \omega]$ оцениваем по признаку Шуберта, используя неравенство $t^\lambda < s^\lambda$. Для интеграла по сегменту $[s + \omega, 1]$ можно применить неравенства

$$g(x, t) \geq g(x, s + \omega) = xs + \frac{1}{\alpha} \ln^\alpha s + x\omega + o(1),$$

$$e^{-g(x, t)} \leq M \exp\left(-xs - \frac{1}{\alpha} \ln^\alpha s\right) \exp[-\ln^{\alpha-1/2} x].$$

При $\alpha \geq 4$ последний множитель согласно (6.15) имеет оценку $o(x^{-N})$. Если $\alpha = 2$, то эта оценка применима на сегменте $[s + \omega, s + (\lambda + 1)x^{-1} \ln x]$, так как $t^\lambda \leq [s + (\lambda + 1)x^{-1} \ln x]^\lambda$ и $\exp(-\ln^{2/2} x) \ln^{1/2} x = o(1)$. На сегменте $[s + (\lambda + 1)x^{-1} \ln x, 1]$ t^λ заменим на 1 и используем неравенство

$$e^{-g(x, t)} \leq M \exp\left(-xs - \frac{1}{2} \ln^2 s\right) x^{-\lambda-2} \ln x.$$

Для интеграла по промежутку $[1, \infty)$ из леммы 2.3 следует оценка $O(e^{-x})$. Полное асимптотическое разложение интеграла (18.40) можно получить методом, рассмотренным в п. 4°, однако в силу того что $s(x)$ нельзя заменить на $x^{-1} \ln^{\alpha-1} x$, разложение получается довольно сложным.

Соотношение (18.40) свидетельствует о том, что функции $D(x, \lambda_k)$ образуют шкалу. Поэтому, как и в п. 2°, при прежних условиях относительно $h_0(t)$ получаем

$$\int_0^\infty \exp\left(-xt - \frac{1}{\alpha} \ln^\alpha t\right) h_0(t) dt \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^\infty c_k \int_0^\infty \exp\left(-xt - \frac{1}{\alpha} \ln^\alpha t\right) t^{\lambda_k} dt. \quad (18.41)$$

Аналогично как для $D(x, \lambda)$, по теоремам 17.1—17.2' можно найти асимптотическую оценку интеграла

$$\int_0^a \exp\left(-xt - \frac{1}{\alpha} \ln^\alpha t\right) t^\lambda |\ln t|^\beta dt, \quad a > 0,$$

но его разложение не следует из (18.41), так как $h_0(t) = |\ln t|^\beta$ не обладает требуемым разложением при $t \rightarrow +0$.

4°. Можно ослабить условия в (18.38) относительно $h_0(t)$ при $t \rightarrow +0$, если используем разложение для $h_0(t)$ по степеням $(t-x^{-\gamma})^k$. Выберем $\omega = Ax^{-\alpha}$, $\alpha \in \left(\gamma, \frac{\gamma+1}{2}\right)$, и рассмотрим основной интеграл $\Omega_0(x)$ по $[s-\omega, s+\omega]$; $\psi_h(x)$ заменим на

$$\Psi_h(x) = \int_0^{\infty} \exp[-\beta xt - t^{-\beta}](t-x^{-\gamma})^k dt. \quad (18.42)$$

Согласно (18.35) и (12.80)

$$\begin{aligned} \Psi_h(x) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} x^{-\gamma j} \int_0^{\infty} \exp(-\beta xt - t^{-\beta}) t^{k-j} dt \sim \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} x^{-\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} - \gamma k} \exp[-(1+\beta)x^{1-\gamma}] \times \\ &\times \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(k-j) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) (\beta x^{1-\gamma})^{-m}. \end{aligned} \quad (18.43)$$

Методом индукции в (12.79) можно установить, что коэффициенты b_k являются полиномами степени k относительно λ , а a_k — полиномами степени $2k$. Следовательно, $a_m(k-j)$ — полином степени $2m$ относительно j . Поскольку

$$\frac{d^r}{dx^r} [(1-x)^k x^r]_{x=1} =$$

$$= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+r) \dots (j+1) x^j |_{x=1} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < k, \\ (-1)^k k! & \text{при } r = k, \end{cases}$$

то $\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^r = 0$ при $r < k$ и $\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_m(k-j) = 0$ при $k > 2m$. Отсюда следует, что

$$\Psi_h(x) = O\left(x^{-(1+\gamma)/2 - \gamma k - (1-\gamma)[(k+1)/2]}\right) \exp[-(1+\beta)x^{1-\gamma}]. \quad (18.44)$$

Поскольку $g(x, t) = \beta xt + t^{-\beta}$, $g_2(x, s) = (1+\beta)\beta x^{1+\gamma}$, то при $k=2m$ (18.44) непосредственно следует из (17.58). Возможность замены $\psi_h(x)$ на $\Psi_h(x)$ следует из леммы 18.1 или 18.2,

если $\chi_h(s)$ удовлетворяет условию разложения, так как остальные условия выполнены. В случае условия (18.18) еще надо оценить интеграл по промежутку $[\varepsilon, \infty)$ с помощью леммы 2.3. Из сказанного следует, что для основного интеграла $\Omega_0(x)$ имеет место теорема 18.1, где функции $\psi_h(x)$ заменены на $\Psi_h(x)$.

Если $h_0(t)$ удовлетворяет прежним условиям, то оценки крайних интегралов по сегментам $[0, s-\omega]$, $[s+\omega, \varepsilon]$ следуют из оценки для $\Psi_0(x)$, а оценка по промежутку $[\varepsilon, \infty)$ — из леммы 2.3. Поэтому при $x \rightarrow +\infty$ имеем разложение

$$\int_0^{\infty} \exp[-\beta xt - t^{-\beta}] h_0(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h_k(x^{-\nu}) \Psi_k(x). \quad (18.45)$$

При конкретных $h_k(x^{-\nu})$ и β для $\Psi_k(x)$ можно использовать разложение (18.43) и перегруппировать члены. При $\beta=1$ в некоторых частных случаях ряд (18.43) обрывается и $\Psi_k(x)$ выражается через полином [126]. Это связано с разложением (18.39) при $\lambda_k = k + p + 1/2$, $p \in N$. В этих случаях (18.45) не имеет преимуществ по сравнению с (18.38).

Отметим, что суммы $S_{kr} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^r$ можно вычислить

в явном виде также при $r > k$. Имеем $S_{kr} = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^r (1-x)^k \right]_{x=1}$.

Отсюда следует, что при $r \geq k$ $S_{kr} = A_{r-k} r! k!$, где $A_0^r = (-1)^r$, $A_{r-1}^r = -1$, $A_{j+1}^{r+1} = A_j^r (r-j) - A_{j+1}^r$. Последнее соотношение можно рассматривать как разностное уравнение для A_{j+1}^r относительно r . С учетом равенства $\binom{r}{m} - \binom{r}{m-1} = \binom{r-1}{m-1}$ методом

индукции доказывается, что $A_j^r = (-1)^{r-j} \sum_{m=0}^{j-1} a_{jm} \binom{r}{2j-m}$, $j \geq 1$,

где

$$a_{j0} = (2j-1)!!, \quad a_{j,j-1} = 1, \quad a_{j+1,m+1} = a_{jm} (j-m) + a_{j,m+1} (2j-m).$$

5°. Формула (18.45) остается справедливой также при более слабых требованиях относительно $h_0(t)$: допускается, что $h_0(t)$ при $t \rightarrow +0$ быстро стремится к ∞ или $h_0(t) = o(t^N)$. Относительно $\chi_h(s)$ примем условие (18.18). Тогда в оценках крайних интегралов к $\Phi(s)H(s)$ достаточно добавить множитель $o(x^{-N})$. Пусть сначала при $t \in [0, \varepsilon]$

$$|h_0(t)| \leq M \exp(at^{-b}), \quad a \geq 0, \quad b < \beta/2, \quad h_0(t) \neq o(t^N). \quad (18.46)$$

Функция $\exp(at^{-b})$ при $b < \beta/2$ удовлетворяет условию (18.36), если в п. 4° $\alpha \in \left[\gamma(b+1), \frac{1+\gamma}{2} \right)$. Имеем $\gamma(b+1) < \gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right) = \frac{\gamma+1}{2}$.

Разобьем $\Omega_l(x)$ на $\Omega_{l1}(x) + \Omega_{l2}(x)$, где интегралы взяты по промежуткам $[0, Bx^{-\gamma}]$, $[Bx^{-\gamma}, s-\omega]$, $B < 1$. При достаточно большом x функция $G(x, t) = -\beta xt - t^{-\beta} + at^{-b}$ имеет максимум в $(s-\omega, s)$ и можно найти такое ε , что при $t \leq \varepsilon$ $G_1(x, t)$ монотонно возрастает. Поэтому

$$\Omega_{l1}(x) = O(\exp[-(B\beta + B^{-\beta})x^{1-\gamma} + aB^{-b}x^{b\gamma}]). \quad (18.47)$$

Если брать $B = \frac{1}{(1+\beta)^\beta}$, то в силу $1-\gamma = \beta\gamma > b\gamma$ имеем

$$\Omega_{l1}(x) = \exp[-(1+\beta)x^{1-\gamma}]o(x^{-N}).$$

При оценке $\Omega_{l2}(x)$ учтем, что на $[Bx^{-\gamma}, s-\omega]$ функция $\exp(at^{-b})$ монотонно убывает, а $\exp[-xt - t^{-\gamma}]$ монотонно возрастает. Поэтому в силу соотношения

$$\begin{aligned} & \exp[-g(x, s \pm \omega)] = \\ & = \exp[-(\beta+1)x^{1-\gamma}] \exp\left[-\frac{\beta(\beta+1)}{4}A^2x^{1+\gamma-2\alpha}\right] o(1), \end{aligned} \quad (18.48)$$

которое следует из (17.45), имеем

$$\Omega_{l2}(x) = \exp[-(\beta+1)x^{1-\gamma}] \exp\left[-\frac{\beta(\beta+1)}{4}A^2x^{1+\gamma-2\alpha} + ax^{b\gamma}\right] o(1). \quad (18.49)$$

Если $H(s) = \exp(ax^{b\gamma})$, то имеем $\Omega_{l2}(x) = \exp[-(\beta+1)x^{1-\gamma}] \times H(s)o(x^{-N})$, а $\Omega_{l2}(x)$ так же, как $\Omega_{l1}(x)$, входит в любой остаток. В общем случае (обозначим его через ОС), когда относительно $H(s)$ нет данных, берем $1+\gamma-2\alpha = \gamma b$, $\alpha = \frac{1+\gamma}{2} - \frac{\gamma b}{2}$.

Имеем $\alpha \geq \gamma(b+1)$, если $b \leq \beta/3$. Тогда A можем выбрать так, чтобы второй множитель в (18.49) имел оценку $o(x^{-N})$ и $\Omega_{l2}(x)$ входил в остаток. Подобным образом оценивается интеграл по сегменту $[s+\omega, \varepsilon]$, а оценка интеграла по $[\varepsilon, \infty)$ остается прежней. Следовательно, формула (18.45) сохраняет силу, если имеем оценку (18.46) и $b < \beta/2$ или в ОС $b \leq \beta/3$.

Полученные оценки недостаточны, если $h_0(t) = o(t^N)$. Пусть $h_0(t) = \exp(-at^{-b})f(t)$, $f(t) \in \Pi(0)$, $H(s) = \exp(-ax^{b\gamma})$, $b < \beta/2$. (18.46')

Из (18.47) видно, что при оценке для $\Omega_{11}(x)$ можно выделить множитель $H(s)$. Сказанное относится и к интегралу по $[\varepsilon, \infty)$, а также в силу (18.49) к интегралам по $[Bx^{-\gamma}, s-\omega]$ и $[s+\omega, \varepsilon]$. Поэтому разложение (18.45) сохраняет силу.

Если известно только, что $H(s) > M \exp(-ax^{\gamma b})$, то при оценке Ω_{12} в (18.49) следует брать $a=0$ и $\alpha < \frac{1+\gamma}{2} - \frac{\gamma b}{2}$. Такое число $\alpha \in [\gamma(b+1), (1+\gamma)/2]$ можно найти только тогда, когда $b \leq \beta/3$. При этом усиленном условии (18.45) сохраняется.

Если $b \geq \beta/2$, то нужно уточнить выражение для $s(x)$ и строить разложение в окрестности другой критической точки. Ослабление условий относительно $h_0(t)$ свидетельствует о том, что в некоторых случаях следует отдавать предпочтение разложению (18.45), а не (18.38).

6°. Асимптотическое выражение для (18.37) при $x \rightarrow \infty$ в случае, когда $h(t)$ содержит медленно изменяющуюся функцию, дано в теореме 6.1. Если $h(t)$ разлагается по степеням логарифма, то можно использовать теорему 13.3. Рассмотрим также полное разложение интеграла (18.37), когда при $t \in [0, a]$, $a < 1$, $h(t) = t^{\mu-1} (\ln^\alpha \ln 1/t) / \ln^\beta 1/t$, где $\mu > 0$, α и β — любые действительные числа, логарифмы имеют главные значения и $h(t) \equiv 0$ при $t > a$. Для общности заменим x на z , $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$, $|z| \rightarrow \infty$. Разобьем промежуток интегрирования на $[0, |z|^{-\gamma}]$, $[|z|^{-\gamma}, a]$, $\gamma \in (1, 2)$. Имеем оценку

$$\begin{aligned} |\Omega_1(z)| &= \left| \int_0^{|z|^{-\gamma}} e^{-zt} t^{\mu-1} \ln^\alpha \ln 1/t \ln^{-\beta} 1/t dt \right| \leq \\ &\leq \int_{\gamma \ln |z|}^{\infty} \frac{\ln^\alpha u}{u^\beta} e^{-\mu u} du < \\ &< \frac{[\ln(\gamma \ln |z|)]^\alpha}{\gamma^\beta \ln^\beta |z|} \frac{1}{|z|^{(\mu\gamma)/2}} \int_{\gamma \ln |z|}^{\infty} e^{-\frac{u\mu}{2}} du < \frac{2M \ln^\alpha \ln |z|}{\gamma^\beta \ln^\beta |z| |z|^{\mu\gamma}}, \end{aligned}$$

где $M=2^\alpha$ при $\alpha \geq 0$, $M=1$ при $\alpha < 0$. В оценке используется монотонное убывание функции $\ln^\alpha u u^{-\beta} e^{-(\mu u)/2}$ при достаточно большом u .

Во втором интеграле применим подстановку $zt=u$. Получим

$$\Omega_2(z) = \frac{\ln^\alpha \ln z}{z^\mu \ln^\beta z} \int_{|z|^{-\gamma}}^{az} \frac{\left[1 + \frac{\ln(1 - \ln u / \ln z)}{\ln \ln z} \right]^\alpha}{[1 - \ln u / \ln z]^\beta} u^{\mu-1} e^{-u} du.$$

Далее с учетом (20.28) используем разложение

$$[1 + v \ln(1 - \omega)]^\alpha (1 - \omega)^{-\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(v) \omega^k, \quad (18.50)$$

где

$$A_0 = 1, \quad A_{k+1} = \frac{1}{k+1} \left[(k + \beta - v\alpha) A_k - v\beta \sum_{j=0}^{k-1} A_j / (k-j) - \right. \\ \left. - v \sum_{j=0}^{k-1} A_{j+1} / (j+1) b_{k-j} \right], \quad b_k = (-1)^k B_{k-1}^{(k+1)}(2) / (k-1)!.$$

Отсюда следует, что при $\alpha \neq 0$ $A_k(v)$ — полином степени k . Ряд (18.50) сходится, если $|\omega| < 1$, $|v \ln(1 - \omega)| < 1$, а эти требования выполнены во всем промежутке интегрирования для $\Omega_2(z)$ при достаточно большом $|z|$. При этом учитывается, что $a < 1$ и $\nu \in (1, 2)$. Поэтому имеем

$$\Omega_2(z) = \frac{\ln^\alpha \ln z}{z^\mu \ln^\beta z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(1/\ln \ln z)}{\ln^k z} \int_{|z|^{-\nu}}^{az} e^{-u} u^{\mu-1} \ln^k u \, du. \quad (18.51)$$

Интегрированием по частям можно проверить, что

$$\left| \int_0^{|z|^{-\nu}} e^{-u} u^{\mu-1} \ln^k u \, du \right| < M_1 |z|^{(1-\nu)\mu} \ln^k |z|.$$

Поскольку

$$\left| \int_{az}^{\infty e^{i\varphi}} e^{-u} u^{\mu-1} \ln^k u \, du \right| < M_2 \exp[-(1-\varepsilon)|z| \sin \varepsilon],$$

то после замены пределов интеграла в (18.51) на 0 и $\infty e^{i\varphi}$ получаем асимптотическое разложение. Так как $\Omega_1(z)$ входит в любой остаток полученного ряда, то при $z \rightarrow \infty$

$$\Omega(z) \sim \frac{\ln^\alpha \ln z}{z^\mu \ln^\beta z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(1/\ln \ln z) \Gamma^{(k)}(\mu)}{\ln^k z}. \quad (18.52)$$

18.2.2. Рассмотрим асимптотику интеграла (18.37) при $x \rightarrow +0$.

1°. Если $\int_0^\infty t^k h(t) dt$ сходится при каждом $k \in N$, то разложение для (18.37) получаем в виде

$$\Omega(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \int_0^\infty t^k h(t) dt, \quad x \rightarrow +0. \quad (18.53)$$

Обоснование разложения следует из примера 14.1.3, 1°. Ряд (18.53) может оказаться расходящимся, например, при $h(t) = \exp(-t^\nu)$, $\nu \in (0, 1)$.

2°. Если $h(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеет степенную асимптотику, то справедлива

Теорема 18.3. Пусть 1) $h(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +\infty$ $h(t) \sim At^\alpha L(t)$, $A \neq 0$, $L(t) \in \mathcal{L}$, $\alpha \neq -1$; при $\alpha = -1$ $L(t) = (\ln t)^m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда при $x \rightarrow +0$ имеет место соотношение

$$\int_0^\infty e^{-xt} h(t) dt = \begin{cases} A\Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha-1}L(x^{-1})[1+o(1)] & \text{при } \alpha > -1, \\ \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} A \ln^{m+1}x [1+o(1)] & \text{при } \alpha = -1, \\ \int_0^\infty h(t) dt [1+o(1)] & \text{при } \alpha < -1. \end{cases} \quad (18.54)$$

Доказательство при $\alpha > -1$ только в деталях отличается от доказательства теоремы 6.1, если в ней $\beta=1$ и $\lambda=1$. Формула при $\alpha < -1$ очевидна, так как интеграл при $x=0$ сходится.

Доказательство при $\alpha = -1$ основано на выражении для $\int_1^\infty e^{-zt} t^{-1} \ln^m t dt$. В силу (12.37) при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $|z| > 0$, $-x \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_1^\infty e^{-zt} t^{x-1} \ln^m t dt = \frac{\partial^m}{\partial x^m} [\Gamma(x) z^{-x}] - (-1)^m m! \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^k}{k! (k+x)^{m+1}}; \quad (18.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial x^m} [\Gamma(x) z^{-x}] &= z^{-x} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \Gamma^{(m-j)}(x) \ln^j z = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} z^k \ln^k z \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \Gamma^{(m-j)}(x) \ln^j z = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} b_k(x, m) \ln^k z + O(x); \end{aligned} \quad (18.56)$$

$$b_k(x, m) = (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \frac{\Gamma^{(m-j)}(x)}{(k-j)!} z^{k-j}, \quad b_0(x, m) = \Gamma^{(m)}(x). \quad (18.57)$$

При $x \rightarrow 0$ имеем

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma^{(k+1)}(1)}{(k+1)!} x^k + O(x^{m+1}),$$

$$\Gamma^{(m)}(x) = \frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}} + \frac{\Gamma^{(m+1)}(1)}{m+1} + O(x).$$
(18.58)

Подставляя (18.58) в (18.57), получаем

$$b_k(x, m) = \frac{(-1)^k}{m+1} \binom{m+1}{k} \Gamma^{(m+1-k)}(1) + O(x), \quad k \geq 1. \quad (18.59)$$

В силу (18.56)–(18.59) при $x \rightarrow +0$ из (18.55) следует формула

$$\int_1^{\infty} e^{-zt} t^{-1} \ln^m t dt = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} \Gamma^{(m+1-k)}(1) \ln^k z -$$

$$- (-1)^m m! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k! k^{m+1}}. \quad (18.60)$$

Вернемся к доказательству второй строки формулы (18.54). Для данного $\varepsilon > 0$ можно найти такое ω , что $|\delta(t)| = |h(t) - -At^{-1} \ln^m t| < \varepsilon t^{-1} \ln^m t$ при $t \geq \omega$. Имеем

$$\left| \int_0^{\omega} e^{-xt} h(t) dt \right| \leq \int_0^{\omega} |h(t)| dt < M(\omega) = o(\ln^{m+1} x),$$

$$\int_{\omega}^{\infty} e^{-xt} A t^{-1} \ln^m t dt = A \int_1^{\infty} e^{-x\omega\tau} \tau^{-1} (\ln \tau + \ln \omega)^m d\tau =$$

$$= A \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} [\ln^{m+1} x + O(\ln^m x)],$$

$$\left| \int_{\omega}^{\infty} e^{-xt} \delta(t) dt \right| < \varepsilon \ln^{m+1} x.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} h(t) dt = \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} A \ln^{m+1} x (1 + o(1)). \blacksquare$$

Примечания. 1°. Теорему 18.3 можно обобщить в следующих направлениях: 1) брать комплексное x , $|\arg x| \leq \pi/2 - \varepsilon$; 2) рассматривать подобные обобщения, как в теоремах 6.1 и 6.2. В этой связи следует отметить, что в литературе встречаются асимптотические представления различных других интегральных преобразований при $x \rightarrow +0$ или $x \rightarrow +\infty$. Наиболее общие исследования проведены в работе [143], где даны разные условия, при которых из $h(t) \sim ct^{-\alpha}$ ($t \rightarrow +0$ или $t \rightarrow +\infty$) следует

$$\int_0^{\infty} K(xt)h(t)dt \sim cx^{\alpha-1} \int_0^{\infty} t^{-\alpha}K(t)dt$$

при $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow +0$.

2°. При более сильных условиях можно доказать более общую теорему [48]. Пусть 1) функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ локально интегрируемы в $[0, \infty)$; 2) $\Omega_2(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0 + 0$; 3) $h_2(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Тогда из $h_1(t) \sim Ah_2(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, $A \neq 0$ следует $\Omega_1(x) \sim A\Omega_2(x)$ при $x \rightarrow x_0 + 0$. Доказательство этой теоремы протекает по схеме, использованной в теореме 16.2.

3°. Формулу (18.60) можно обобщить, заменив t^{-1} на t^{-n-1} , $n \in \mathbb{N}$. Аналогично, как в п. 2°, получаем

$$\int_1^{\infty} e^{-zt}t^{-n-1} \ln^m t dt = \frac{z^n}{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} B_k(m) (\ln z)^{k-} - (-1)^m m! \sum_{n \neq k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!(k-n)^{m+1}}, \quad (18.61)$$

где

$$B_k(m) = (-1)^k \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{k} A_{m-k},$$

$$\Gamma(\kappa - n) = \frac{A_{-1}}{\kappa} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(k+1)!} \kappa^k, \quad A_{-1} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Коэффициенты A_k можно вычислить разными способами, например пользуясь соотношением

$$\Gamma(\kappa - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(\kappa + 1) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{\kappa - k} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\kappa} \frac{\pi \kappa}{\sin \pi \kappa} \frac{1}{\Gamma(1 + n - \kappa)}.$$

4°. Если при $t \rightarrow \infty$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-\lambda_k}, \quad \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (18.62)$$

то для разложения интеграла (18.37) при $x \rightarrow +0$ можно применить метод последовательного разложения — теоремы 11.1 и 11.2. Другие методы при условии (18.62) будут рассмотрены в § 22 и 23.

При $\lambda_k \in N$, $\lambda_0 > 0$ из теоремы 11.1 при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi/2$ с учетом примечания 2 к этой теореме получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} h(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma(-\lambda_k + 1) z^{\lambda_k - 1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} d_k z^k, \quad (18.63)$$

$$d_k = \int_0^{\infty} \tau^k \left[h(\tau) - \sum_{j=0}^{n_k} c_j \tau^{-\lambda_j} \right] d\tau, \quad k < \lambda_{n_k} < k+1, \quad \lambda_{n_k+1} > k+1.$$

Если $h(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k}$, то можно применить теорему 11.2. С учетом (11.26) получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} h(t) dt \sim \ln z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} c_{k+1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} d_k^* z^k, \quad (18.64)$$

$$d_k^* = \int_0^1 \left[t^k h(t) - \sum_{j=1}^k c_j t^{k-j} \right] dt +$$

$$+ \int_1^k t^k \left[h(t) - \sum_{j=1}^{k+1} c_j t^{-j} \right] dt + c_{k+1} \left[\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \Gamma'(1) \right].$$

При общих λ_k одновременно используются (18.63) и (18.64).

Непосредственная подстановка (18.62) в (18.37) не приводит к асимптотическому разложению, так как при $\lambda_k > 1$ согласно теореме 18.3 все дальнейшие члены, а также остаток имеют одинаковый порядок.

5°. Иногда можно интегрировать по частям, дифференцируя ядро и интегрируя функцию нагрузки (см. п. 8.5). Пример приведен в п. 13.4.3. Имеется также другой метод разложения. Подробнее он рассмотрен в гл. 6.

6°. Отметим некоторые интегралы, родственные (18.37). Соотношение

$$\int_0^{\infty} \exp(-xu^{-\beta}) u^{-\lambda} h(u) du = \int_0^{\infty} \exp(-x\tau^{\beta}) \tau^{\lambda-2} h\left(\frac{1}{\tau}\right) d\tau \quad (18.65)$$

исследование асимптотики при $x \rightarrow +0$ интеграла, стоящего в левой части (18.65), приводит к (18.37). При $h(u) = e^{-u}$ и $x \rightarrow +\infty$ разложение интеграла (18.65) следует из (12.80). Случай $\beta=1$, $h(u) = \exp[-(u-v)^2]$ рассмотрен в п. 18.5.

Для интеграла с переменным пределом

$$\int_x^{\infty} \exp(-u-au^{-\alpha}) u^{\lambda} du = \int_0^{\infty} \exp(-u-au^{-\alpha}) u^{\lambda} du - \int_0^x \exp(-u-au^{-\alpha}) u^{\lambda} du, \quad a > 0, \quad \alpha > 0,$$

разложение можно получить интегрированием по частям, интегрируя $\exp(-au^{-\alpha})$. При $x \rightarrow +0$ имеем

$$\int_0^x \exp(-u-au^{-\alpha}) u^{\lambda} du \sim \frac{1}{a\alpha} \exp(-x-ax^{-\alpha}) x^{\lambda+\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} (a\alpha)^{-k} x^{\alpha k} P_k(x), \quad (18.66)$$

где $P_k(x)$ — полином степени k , $P_0(x) = 1$. (18.66) всегда является сильноасимптотическим разложением. В [163] для этого интеграла при $\lambda=0$ дано неверное разложение.

18.2.3, 1°. Если $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности быстрее любой степени t , то следует применять теорию критических точек. Пусть $h(t) = e^{t^{\beta}} h_0(t)$, $\beta \in (0, 1)$, где $h_0(t)$ обладает разложением (18.62). Можно использовать результаты п. 12.5.3,

3°, согласно которым при $x \rightarrow 0$, $|\arg x| \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) - \varepsilon$

$$D(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \exp[-x\beta t + t^{\beta}] t^{-\lambda} dt \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} x^{\nu \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}} \exp[(1-\beta)x^{1-\nu}] \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda) \Gamma\left(k + \frac{1}{\nu}\right) (\beta^{-1} x^{\nu\beta})^k. \quad (18.67)$$

Функции $D(x, \lambda_k)$ образуют шкалу, $\gamma = \frac{1}{1-\beta} > 1$. Если $h_0(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$, то при $x \rightarrow 0$

$$\left| \int_0^{\omega} \exp[-x\beta t + t^\beta] h_0(t) dt \right| < M < \exp[(1-\beta)x^{1-\gamma}] o(x^N).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp[-x\beta t + t^\beta] h_0(t) dt &\sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k D(x, \lambda_k) \sim \\ &\sim 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\beta(1-\beta)}} x^{\gamma\left(\lambda_0 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}} \exp[(1-\beta)x^{1-\gamma}] \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\mu_k}, \quad (18.68) \\ \mu_0 &= 0, \mu_k \uparrow +\infty, b_0 = c_0. \end{aligned}$$

2° Можно ослабить требования относительно $h_0(t)$, как это сделано в п. 18.2.1, 4°, применяя разложение $h_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h_k(s) (t-s)^k$, где $s = x^{-\gamma}$. Тогда $\psi_k(x)$ следует заменить на

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) &= \int_0^{\infty} \exp(-\beta x t + t^\beta) (t - x^{-\gamma})^k dt \sim \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp[(1-\beta)x^{1-\gamma}] x^{-\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} - \gamma k} \times \\ &\times \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{m=0}^{\infty} a_m (k-j) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) (\beta^{-1} x^{\gamma\beta})^k = \\ &= \mathcal{O}\left(x^{-\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} - \gamma k + \gamma\beta \left[\frac{k+1}{2}\right]}\right) \exp[(1-\beta)x^{1-\gamma}], \end{aligned}$$

так как крайние интегралы по промежуткам $[0, s-\omega]$ и $[s+\omega, Bx^{-\gamma}]$ при $\omega = Ax^{-\alpha}$, $\alpha \in \left(\frac{\gamma+1}{2}, \gamma\right)$, $B = 2\gamma\beta^{-\gamma}$ по лемме 18.1 имеют оценку $\exp[(1-\beta)x^{1-\gamma}] o(x^N)$, а интеграл по промежутку $[Bx^{-\gamma}, \infty)$ в силу $g(x, t) \geq \frac{\beta}{2} xt$ при $t \geq Bx^{-\gamma}$ — оценку $o(x^N)$.

Пусть при $t \geq T$

$$M \exp(-at^b) \leq |h_0(t)| \leq M \exp(at^b), \quad M > 0, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0. \quad (18.69)$$

Функция $\exp(\pm at^b)$ удовлетворяет условию (18.36), если $\alpha \leq \gamma(1-b)$, $b < \beta/2$. Поскольку при достаточно малом x и $a > 0$ функция $G(x, t) = -x\beta t + t^\beta + at^b$ максимальное значение принимает в $(s, s+\omega)$, а $G_1(x, t)$ монотонно убывает, если $t > 0$, то части интеграла (18.37) по промежуткам $[0, s-\omega]$ и $[s+\omega, Bx^{-\gamma}]$ при соответствующем выборе A имеют оценки $\exp[(1-\beta)x^{1-\gamma} + ax^{-\gamma}]o(x^N)$. Можно выбрать $B = \left[\frac{2}{\beta(1+a)} \right]^\gamma$. Если $H(s) = \exp(ax^{-\gamma})$, то в этих крайних интегралах целесообразно выделить множитель $H(s)$, после чего они войдут в любой остаток. В общем случае с учетом (18.49) α следует выбрать так, чтобы $1+\gamma-2\alpha = -\gamma b$ и $\alpha \leq \gamma(1-b)$, если $b \leq \beta/3$. При этом условии и соответствующем выборе A получаем оценку $\exp[(1-\beta)x^{1-\gamma}]o(x^N)$. Для интеграла по $[Bx^{-\gamma}, \infty)$ сохраняется прежняя оценка $o(x^N)$.

Таким образом, при условии (18.69), где $b < \beta/2$ или в ОС $b \leq \beta/3$, и условии разложения при $x \rightarrow +0$ имеем разложение

$$\int_0^\infty \exp[-\beta xt + t^\beta] h_0(t) dt \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} h_k(x^{-\gamma}) \Psi_k(x). \quad (18.70)$$

При $\beta = 1/2$ $\Psi_k(x)$ можно выразить с помощью $\exp(1/2x^{-1})$ и некоторых специальных полиномов [45, 103]. Если $b \in [\beta/2, \beta)$, то приходится выбирать более точную критическую точку.

Подобным образом при $x \rightarrow +0$ можно исследовать асимптотику интеграла с ядром $\exp[-xt + \lambda(\ln t)^\beta]$, а также случай, когда вместо (18.62) имеем разложение по логарифмам.

18.2.4. Как уже отмечалось, результаты, изложенные в п. 18.2, иногда переносятся на случай, когда имеем функцию нагрузки $h(x, t)$. Функция $h(x, t)$ может иметь слабо критическую точку в $t=0$. Иногда удобно отщепить соответствующий множитель от функции нагрузки, присоединить его к e^{-xt} и образовать таким образом новое ядро, у которого $t=0$ будет критической точкой смешанного типа. Такие интегралы мало исследованы. Приводим пример:

$$\Omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt} (1+xt^\alpha)^{-\beta} h_0(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0; \quad (18.71)$$

$$h_0(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\lambda_k} \quad \text{при } t \rightarrow +0, \quad -1 < \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (18.72)$$

$h_0(t) = O(t^\omega)$ при $t \rightarrow +\infty$. Подстановкой $t = ux^{-1/\alpha}$, $y = x^{1-(1/\alpha)}$ получаем

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} e^{-yu} (1+u^\alpha)^{-\beta} h_0(ux^{-1/\alpha}) du. \quad (18.73)$$

Если $\alpha > 1$, $1 - (1/\alpha) > 0$, то $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Для $h_0(t)$ можно применить разложение (18.72) и к каждому члену — лемму Ватсона. При $\alpha = 1$ имеем $y = 1$ и к $\Omega(x)$ применима теорема 14.1. Если $\alpha < 1$, то $y \rightarrow +0$ при $x \rightarrow +\infty$. Согласно теореме 18.3 при $\gamma_k - \alpha\beta > -1$ и $x \rightarrow \infty$ имеем

$$x^{-\lambda_k/\alpha} \int_0^{\infty} e^{-yu} (1+u^\alpha)^{-\beta} u^{\lambda_k} du \sim \Gamma(\lambda_k - \alpha\beta + 1) x^{(1-1/\alpha)(\alpha\beta-1)} x^{-\lambda_k},$$

поэтому члены также образуют шкалу. Разложение каждого члена можно получить по формуле (18.63) или (18.64).

Доказательство справедливости упомянутых формальных действий во всех случаях одинаковое. Положим $h_0(t) - \sum_{k=0}^n a_k t^{\lambda_k} = \rho_n(t)$. Тогда $|\rho_n(t)| < Mt^{\lambda_{n+1}}$ при $t \leq \varepsilon$ и $|\rho(t)| < Mt^\kappa$ при $t \geq \varepsilon$, $\kappa = \max(\omega, \lambda_{n+1})$. Согласно лемме Ватсона или (18.54) при $\lambda_{n+1} > \alpha\beta - 1$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\varepsilon x^{1/\alpha}} e^{-yu} (1+u^\alpha)^{-\beta} \rho_n(ux^{-1/\alpha}) du \right| < Mx^{-\lambda_{n+1}/\alpha} \times \\ & \times \int_0^{\infty} e^{-yu} (1+u^\alpha)^{-\beta} u^{\lambda_{n+1}} du = x^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha\beta-1)} x^{-\lambda_{n+1}} O(1). \end{aligned}$$

С помощью (8.7) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\varepsilon x^{1/\alpha}}^{\infty} e^{-yu} (1+u^\alpha)^{-\beta} \rho_n(ux^{-1/\alpha}) du \right| < \\ & < x^{-\kappa/\alpha} y^{\alpha\beta-\kappa-1} \int_{\varepsilon x}^{\infty} e^{-v} v^{\kappa-\alpha\beta} dv = x^{-1-\frac{1}{\alpha}(\alpha\beta-1)} e^{-\varepsilon x} O(1) = o(x^{-N}). \end{aligned}$$

Поэтому при $x \rightarrow +\infty$ справедливо разложение

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} (1+xt^\alpha)^{-\beta} h_0(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-\lambda_k/\alpha} \int_0^{\infty} e^{-yu} (1+u^\alpha)^{-\beta} u^{\lambda_k} du. \quad (18.74)$$

Данный пример можно легко обобщить, заменив $(1+xt^\alpha)^{-\beta}$ на $(1+x^\gamma t^\alpha)^{-\beta}$, $\gamma > 0$, или на общее размытое ядро $K_0(xt^\alpha)$. При $h_0 \equiv 1$, $\beta = 1$ подобные интегралы рассмотрены в [4, 6].

Влияние величины α объясняется следующим образом: функция $(1+xt^\alpha)^{-\beta}$ обращается в ∞ в точке, которая находится на окружности $|t| = x^{-1/\alpha}$. Эта окружность при $\alpha > 1$ лежит вне круга $|t| = \rho$, где ρ — достаточно малый внешний радиус влияния для e^{-xt} , а при $\alpha < 1$ находится внутри круга. С этим связан такой любопытный факт, что интеграл (18.73) при $y \rightarrow +0$ имеет две критические точки $u=0$ и $u=\infty$, но асимптотические свойства функции $h(u)$ использованы лишь в окрестности $u=0$.

18.3. Модифицированный интеграл Лапласа

Исследуем асимптотику интеграла

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} \exp[xt - f(t)] h(t) dt, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (18.75)$$

Чтобы (18.75) сходилась независимо от свойств функции $h(t)$, предположим, что $t = o(f(t))$ при $t \rightarrow +\infty$. Рассмотрим типичные конкретные случаи функции $f(t)$.

18.3.1, 1°. Пусть $f(t) = \frac{1}{\alpha} t^\alpha$, $\alpha > 1$. Исходным пунктом является исследование интеграла

$$Nd_\lambda(x, \alpha) = \int_0^{\infty} \exp\left[xt - \frac{1}{\alpha} t^\alpha\right] t^\lambda dt, \quad \lambda > -1. \quad (18.76)$$

Асимптотика этого интеграла при фиксированном x и $\lambda \rightarrow +\infty$ рассмотрена Харди в работе [82], поэтому $Nd_\lambda(x, \alpha)$ назовем *интегралом, или функцией Харди*. При $\lambda \rightarrow +\infty$ асимптотика интеграла (18.76) исследована в п. 18.4. Если $\alpha > 2$, то после подстановки $t^\alpha = \tau$ можно получить его разложение по формуле (18.101).

Исследование при $x \rightarrow \infty$ подстановкой $x^{\alpha\nu} = y$, $t = x^\nu u$, $\gamma = \frac{1}{\alpha - 1}$ (см. также п. 17.4.5, 12°), приводится к

$$Hd_\lambda(x, \alpha) = x^{\nu(\lambda+1)} \int_0^\infty \exp \left[-y \left(\frac{1}{\alpha} u^\alpha - u \right) \right] u^\lambda du. \quad (18.77)$$

Этот интеграл несущественно отличается от (12.72), поэтому при $x \rightarrow +\infty$ можно построить разложение, подобное (12.80):

$$Hd_\lambda(x, \alpha) \sim x^{\nu(\lambda+1)} \exp [y(\alpha-1)\alpha^{-1}] \sum_{k=0}^{\infty} a_k^*(\lambda) \Gamma \left(k + \frac{1}{2} \right) y^{-k-\frac{1}{2}}, \quad (18.78)$$

где $a_k^*(\lambda)$ вычисляются так же, как $a_k(\lambda)$ в (12.80), если в (12.76) β заменить на $-\alpha$, а в (12.75) и (12.79) $-1+\beta$ на $\alpha-1$; $a_k^*(\lambda)$ тоже являются полиномами степени $2k$ относительно λ , $a_0^* = 2 \sqrt{\frac{2}{\alpha-1}}$.

Интеграл (18.76) существует при всех комплексных x и определяет целую функцию. Поворотом пути интегрирования можно показать, что (18.76) совпадает с (18.77) при $|\arg x| \leq \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. В этой области и справедливо разложение (18.78). Если $|\arg x| \geq \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, то в (18.76) можно x заменить на $-x$ и применить лемму Ватсона и поворот пути интегрирования. В п. 19.3.3 показано, что в оставшемся секторе надо сложить оба разложения.

2°. Поскольку для интеграла (18.77) единственной критической точкой является $u=1$, то интеграл по промежутку $[\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon < 1$, тоже имеет разложение (18.78), причем λ может быть любым числом. Отсюда следует, что (18.78) имеет место при любом λ также для интеграла

$$Hd_\lambda(x, \alpha, a) = \int_a^\infty \exp \left[xt - \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right] t^\lambda dt, \quad a > 0, \quad (18.79)$$

$Hd_\lambda(x, \alpha) = Hd_\lambda(x, \alpha, 0)$, так как после подстановки $t = x^\nu u$ получаем интеграл с нижним пределом $ax^{-\nu}$, а интеграл по $[ax^{-\nu}, 1/2]$ имеет оценку $\exp [y(\alpha-1)\alpha^{-1}] o(x^{-N})$. Функции $Hd_{-\lambda_k}(x, \alpha, a)$ образуют шкалу, если $\lambda_k \uparrow +\infty$.

Пусть функция $h(t)$ имеет разложение (18.62) и локально интегрируема в $[0, \infty)$. Тогда в силу свойств функций $Hd_\lambda(x, \alpha, a)$ нетрудно убедиться в том, что при $x \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty \exp\left(xt - \frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) h(t) dt \sim \sum_{h=0}^\infty c_h Hd_{-\lambda_h}(x, \alpha, 1) \sim \\ \sim x^{(-\lambda_0+1-\alpha/2)\nu} \exp[x^{\alpha\nu}(\alpha-1)\alpha^{-1}] \sum_{h=0}^\infty C_h x^{-\mu_h}, \quad (18.80)$$

$$C_0 = 2 \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha-1}} c_0, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_h \uparrow + \infty.$$

3°. Если $h(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ не имеет разложения (18.62), то можно применить разложение $h(t)$ по степеням $t-x^\nu$. Имеем $g(x, t) = \frac{1}{\alpha} t^\alpha - xt$, $g_1(x, t) = t^{\alpha-1} - x$, $g_2(x, t) = (\alpha-1)t^{\alpha-2}$, $s(x) = x^\nu$, $g_2(x, s) = (\alpha-1)x^{1-\nu}$, $\omega(x) = Ax^\beta$, $\beta \in \left(\frac{\nu-1}{2}, \nu\right)$. По лемме 18.1 $\psi_h(x)$ можно заменить на

$$\Psi_h(x) = \int_0^\infty \exp\left(xt - \frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) (t-x^\nu)^h dt = \\ = \sum_{j=0}^h (-1)^j \binom{h}{j} x^{\nu j} Hd_{h-j}(x, \alpha) \sim \exp[x^{\alpha\nu}(\alpha-1)\alpha^{-1}] x^{\left(h+1-\frac{\alpha}{2}\right)\nu} \times \\ \times \sum_{j=0}^h (-1)^j \binom{h}{j} \sum_{m=0}^\infty a_m^*(h-j) \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) y^{-m}. \quad (18.81)$$

Согласно анализу разложения (18.43) имеем

$$\Psi_h(x) = \exp[x^{\alpha\nu}(\alpha-1)\alpha^{-1}] x^{\nu\left(h+1-\alpha\left[\frac{h+1}{2}\right]-\frac{\alpha}{2}\right)} \bar{O}(1),$$

поэтому условие шкалы будет

$$\chi_h(s) s^{h-\alpha\left[\frac{h+1}{2}\right]} = o(1). \quad (18.82)$$

Пусть $h(t)$ удовлетворяет условию (18.69). Так же, как в п. 18.2, можно убедиться в том, что при $b < \alpha/2$ (18.36) и (18.82)

удовлетворены и получаем требуемую оценку остатка. Поэтому при $x \rightarrow +\infty$ справедливо разложение

$$\int_0^{\infty} \exp\left(xt - \frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) h(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h_k(x^\nu) \Psi_k(x). \quad (18.83)$$

18.3.2, 1°. Берем $f(t) = t \ln t = o(t^\alpha)$, $\alpha > 1$, и проводим исследование, как в п. 18.3.1. Подстановкой $s = e^{x-1}$, $t = s\tau$ получаем равенство

$$\begin{aligned} \Lambda_1(x, \lambda, 0) &= \int_0^{\infty} \exp(xt - t \ln t) t^\lambda dt = \\ &= s^{\lambda+1} \int_0^{\infty} \exp[-s(\tau \ln \tau - \tau)] \tau^\lambda d\tau, \quad \lambda > -1. \end{aligned}$$

Вторая подстановка $\tau \ln \tau - \tau + 1 = u^2$ приводит к уравнению, подобному (12.74), поэтому дальнейшие выкладки аналогичны и при любом λ и $a > 0$ или $\lambda > -1$ и $a = 0$ имеем разложение

$$\Lambda_1(x, \lambda, a) = \int_a^{\infty} \exp(xt - t \ln t) t^\lambda dt \sim s^{\frac{\lambda+1}{2}} e^s \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k(\lambda) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) s^{-k}, \quad (18.84)$$

где $\bar{a}_k(\lambda)$ определяется, как в (12.80), если в (12.75) и (12.79) подставить $\beta = 0$, а в (12.76) — $\beta = -1$, $\bar{a}_0 = 2\sqrt{2}$. Функции $\Lambda_1(x, -\lambda_k, a)$ образуют шкалу, если $\lambda_k \uparrow +\infty$.

При условиях п. 18.3.1, 2° относительно $h(t)$ имеем разложение

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(xt - t \ln t) h(t) dt &\sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Lambda_1(x, -\lambda_k, 1) \sim \\ &\sim \exp\left[e^{x-1} + (x-1)\left(-\lambda_0 + \frac{1}{2}\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\mu_k x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (18.85) \end{aligned}$$

$$C_0 = 2\sqrt{2\pi} c_0, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_k \uparrow +\infty.$$

2°. При разложении $h(t)$ по степеням $(t-s)^k$ целесообразно перейти к параметру s . Имеем $x = \ln s + 1$, $g_2(s) = 1/s$, $\omega = As^\beta$, $\beta \in (1/2, 1)$. Тогда можно относительно s применить лемму 18.1 и $\psi_k(x)$ заменить на

$$\Psi_k(x) = \int_0^{\infty} \exp(xt - t \ln t) (t-s)^k dt \sim$$

$$\begin{aligned} &\sim e^s s^{h+1/2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m (k-j) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) s^{-m} = \\ &= e^s s^{1/2+h-(k+1)/2} \bar{O}(1). \end{aligned} \quad (18.86)$$

Условие шкалы имеет вид (18.82), где $\alpha=1$. Если $h(t)$ удовлетворяет условию (18.69), то при $b < 1/2$ или в ОС при $b \leq 1/3$ и $x \rightarrow +\infty$ получаем разложение

$$\int_0^{\infty} \exp(xt - t \ln t) h(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h_k(s) \Psi_k(x). \quad (18.87)$$

18.3.3. Пусть $f(t) = ae^t$, $a > 0$. Согласно подстановке $e^t = u/a$ и формуле (18.101) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x, \lambda, 1) &= \int_1^{\infty} \exp(xt - ae^t) t^{\lambda} dt = \\ &= a^{-x} \int_{ae}^{\infty} u^{x-1} e^{-u} \ln^{\lambda} \left(\frac{u}{a} \right) du \sim a^{-x} \Gamma(x) \ln^{\lambda} \left(\frac{x}{a} \right) \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{-k}}{k!} Q_k(x) A_k(\ln^{-1} x), \end{aligned} \quad (18.88)$$

где $A_k(u)$ — полином степени k , $A_0(u) = 1$. При $\lambda \uparrow +\infty$ функции $\Lambda_2(x, -\lambda_k, 1)$ образуют шкалу, поэтому при условиях п. 18.3.1, 2° относительно $h(t)$ имеем разложение

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(xt - ae^t) h(t) dt &\sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Lambda_2(x, -\lambda_k, 1) \sim \\ &\sim a^{-x} \Gamma(x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \ln^{-\lambda_k} \left(\frac{x}{a} \right). \end{aligned} \quad (18.89)$$

Если ряд (18.62) сходится, то члены в (18.89) можно сгруппировать по степеням x и получить более точное разложение.

При других условиях относительно $h(t)$ целесообразно использовать подстановку $e^t = ua^{-1}$ и привести исследование к п. 18.4. При $h(t) \equiv 1$ интеграл (18.75) рассмотрен в п. 18.5.3.

Асимптотические разложения интегралов, рассмотренных в п. 18.3, при $x \rightarrow +0$ можно получить согласно теореме 14.1, разлагая e^{xt} в ряд и интегрируя почленно.

18.4. Преобразование Меллина

18.4.1. Преобразование Меллина определяется интегралом

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} h(t) dt, \quad (18.90)$$

причем при $x \rightarrow \infty$ для сходимости интеграла необходимо, чтобы $h(t) = o(t^{-N})$. Подстановкой $t = e^{-\tau}$ получаем

$$\Omega(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau x} h(e^{-\tau}) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\tau x} h(e^{-\tau}) d\tau + \int_0^{\infty} e^{\tau x} h(e^{\tau}) d\tau, \quad (18.91)$$

поэтому исследование асимптотики интеграла (18.90) при $x \rightarrow +\infty$ приводится также к п. 18.2 и 18.3. Ввиду этого исследуем непосредственно (18.90) лишь в случае, когда $h(t) = e^{-t^\alpha} h_0(t)$, $\alpha > 0$, $h_0(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$. С помощью подстановки $t^\alpha = \tau$ можно убедиться в том, что без потери общности достаточно брать $\alpha = 1$ и исследовать асимптотическое разложение интеграла

$$\Omega_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x h_0(t) dt. \quad (18.92)$$

1°. Пусть $h_0(t)$ обладает разложением (18.62). Имеем $s(x) = x$. При фиксированном a $\int_0^a e^{-t} t^x h_0(t) dt = \Gamma(x+1) o(x^{-N})$, поэтому, как и в предыдущих пунктах, можно в интеграл по промежутку $[a, \infty)$ подставить (18.62) и интегрировать почленно. Хотя функции $\Gamma(x+1-\lambda_k)$ образуют сильно неравномерную шкалу, так как $\lambda_k \uparrow +\infty$, при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ получаем практически применяемое конечное асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} t^x h_0(t) dt &= \Gamma(x+1) o(x^{-N}) + \\ &+ \sum_{k=0}^n a_k \Gamma(x+1-\lambda_k) + O(\Gamma(x+1-\lambda_{n+1})) \end{aligned} \quad (18.93)$$

и при $\lambda_{n+1} < \alpha x$, $\alpha \in (0, 1)$, имеем $\Gamma(x+1-\lambda_{n+1}) = o(\Gamma(x+1-\lambda_n))$. Численные расчеты, приведенные в [132] при $h_0(t) = e^{2t} K_\nu(t) / I_\nu(t)$, свидетельствуют о практической значимости формулы (18.93).

Согласно этой формуле можно также найти асимптотическое представление при $z \rightarrow \infty$ левого факториала

$$!z = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^z - 1}{t - 1} dt = \int_a^{\infty} e^{-t} \frac{t^z - 1}{t - 1} dt + \Gamma(z + 1) o(z^{-N}),$$

введенного в [105].

Подобные разложения можно получить, если в (18.62) $a_k = P_{m_k}(\ln t)$, $P_{m_k}(u)$ — полином степени m_k . Кроме того, согласно п. 17.1.2 разложение не изменится, если нижний предел 0 в (18.93) заменить на $b(x)$, где $\sqrt{x} = o(x - b(x))$.

2°. Подстановкой $t = \tau x$ получаем

$$\Omega_0(x) = x^{x+1} \int_0^{\infty} (e^{-\tau})^x h_0(\tau x) d\tau. \quad (18.94)$$

Пусть $h_k(t) = O(t^{\omega_k})$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда можно использовать результаты примера 9.1.4, 2°. При $x \rightarrow \infty$ получаем

$$\Omega_0(x) \sim \Gamma(x+1) \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x, 1), \quad (18.95)$$

где $g_n(x, 1) = \sum_{j=n}^{2n} a_{jn} x^{j-n} h_j(x)$, а a_{jn} определены в (9.23). Функции $g_k(x, 1)$ образуют шкалу, если

$$h_{k+1}(t) = \mathcal{O}(t^{b-1} h_k(t)), \quad b < 1/2, \quad (18.96)$$

так как тогда $g_k(x, 1) = \mathcal{O}(x^{-n(1-2b)} h_0(x))$.

Условие (18.96) допускает, что $h_0(t)$ вместо (18.62) удовлетворяет условию (18.69) при $b < 1/2$. Можно доказать сохранение разложения (18.95) и при этом расширении, если интеграл (18.94) разбить на сумму интегралов по промежуткам $[0, 1/2]$, $[1/2, 2]$ и $[2, \infty)$. Крайние интегралы оцениваются непосредственно, а к среднему интегралу можно применить формулу (9.13).

3°. Тот же результат, но в другой форме получаем разложением по степеням $(t-s)^k$. Имеем $\omega(x) = Ax^\gamma$, $\gamma \in (0, 1/2)$. Функции $\psi_k(x)$ заменим на

$$\Psi_k(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x (t-x)^k dt = \Gamma(x+1) R_k(x). \quad (18.97)$$

После интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) &= \int_0^{\infty} e^{-tx+1} (t-x)^{k-1} dt - x\Psi_{k-1} = \\ &= (x+1)\Psi_{k-1} + (k-1)\Psi_{k-1} + (k-1)x\Psi_{k-2} - x\Psi_{k-1}, \\ R_k &= kR_{k-1} - (k-1)xR_{k-2}, \quad R_0=1, \quad R_1=1. \end{aligned} \quad (18.98)$$

Отсюда методом математической индукции можно доказать, что

$$R_n(x) \sim d_n x^{[n/2]}, \quad d_{2k} = (2k-1)!!, \quad d_{2k+1} = \frac{1}{3} (2k+3)!!. \quad (18.99)$$

Из сравнения рекуррентных формул следует, что $R_n(x) = \frac{1}{n+1} x^{-1} Q_{n+2}(x)$, где $Q_n(x)$ исследованы в работах [43, 54, 137, 150] и называются *полиномами Трикоми*. Они употребляются вместо $R_n(x)$, если в (18.92) x заменяется на $x-1$, но разложение ведется по степеням x .

Крайние интегралы исследуются, как и в п. 18.2 и 18.3, поэтому при $b < 1/2$ или в ОС при $b \leq 1/3$ получаем разложение

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} h_0(t) dt \sim \Gamma(x+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h_k(x) R_k(x) \quad (18.100)$$

или [35, 45, 47]

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} h_0(t) dt \sim \Gamma(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h_k(x) Q_k(x). \quad (18.101)$$

Если в (18.100) перегруппировать члены, то получим разложение (18.95). Соотношение (18.96) гарантирует выполнение условия шкалы и (18.69).

При $b \in [1/2, 1)$ выражение для $s(x)$ следует уточнить и получим другое разложение. Иногда можно использовать теорему 18.2, где функция $s(x)$ остается в общем виде. Этот случай подробно исследован в работе [45]. При $H(s) = \exp(-ax^b)$, $a > 0$, случай, когда $b > 1$, подстановкой $at^b = \tau$ можно привести к случаю, когда $b < 1$.

18.4.2, 1°. Формулы (18.100) и (18.101) применимы для асимптотического разложения некоторых специальных функций при большом индексе. Например, при $\nu \rightarrow +\infty$ имеем [1]

$$\begin{aligned} K_\nu(y) &= \int_0^\infty \exp(-y \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} \nu t dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \exp(-y \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} \nu t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \exp(\nu t - y \operatorname{ch} t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \tau^{\nu-1} \exp\left(-\frac{y}{2} \tau\right) \exp\left(-\frac{y}{2} \tau^{-1}\right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{y}\right)^\nu \int_0^\infty u^{\nu-1} e^{-u} \exp\left(-\frac{y^2}{4u}\right) du \sim \\ &\sim \frac{1}{2} \left(\frac{2}{y}\right)^\nu \Gamma(\nu) \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q_k(\nu) A_k\left(\frac{4\nu}{y^2}\right) \left(\frac{4}{y^2}\right)^k, \end{aligned} \quad (18.102)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} \left[\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \right] &= \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) A_k\left(\frac{4t}{y^2}\right) \left(\frac{4}{y^2}\right)^k, \\ A_{k+1}(t) &= A_k(t) t^{-2} + A_k'(t), \quad A_0 = 1. \end{aligned}$$

Однако для функции (8.44)

$$\begin{aligned} H_{-\nu-1}(y) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \exp(-2ty - t^2) t^\nu dt = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty \exp(-2y\sqrt{\tau} - \tau) \tau^{\frac{\nu-1}{2}} d\tau \end{aligned}$$

при $\nu \rightarrow +\infty$ формула (18.100) не применима, так как $b=1/2$. Разложение этой функции рассмотрено в п. 18.5.4.

2°. Как уже было отмечено, разложения (18.93) и (18.100) сохраняются, если нижний предел интеграла заменить на $b(x) = o(s-\omega)$. Рассмотрим в качестве примера асимптотическое представление при $n \rightarrow +\infty$ интеграла

$$\Omega(n) = \int_{x(n)}^\infty e^{-t^\nu} P_n^\beta(t) dt,$$

$\gamma > 0$, $\beta > 0$, $P_n(t)$ — полином степени n , $P_n(t) \sim b_n t^n$, если все коэффициенты полинома имеют оценку $O(b_n)$. Подстановкой $t^\gamma = \tau$ получаем

$$\Omega(n) = \gamma^{-1} b_n^\beta \int_{x^\gamma(n)}^{\infty} e^{-\tau} \tau^{n\beta/\gamma} h_0(\tau, n) d\tau,$$

где $h_0(\tau, n)$ разлагается в ряд (18.62) с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями от n , $c_0 = 1$. Поэтому при $x^\gamma(n) = o\left(\frac{n\beta}{\gamma} - A\sqrt{n}\right)$ согласно (18.93) имеем

$$\Omega(n) \sim \gamma^{-1} b_n^\beta \Gamma\left(\frac{n\beta}{\gamma} + 1\right). \quad (18.103)$$

Если условие относительно коэффициентов не выполнено, то $\Omega(n)$ может иметь совершенно иную асимптотику. Например,

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} H_n^2(t) dt = 2^{n-1} n! \sqrt{\pi}.$$

Заметим, что в (24.46) получена оценка

$$\int_{\gamma_n}^{\infty} e^{-t^2} H_n^2(t) dt = 2^{n-\frac{1}{3}} n! n^{-\frac{1}{3}} \frac{[1 + O(n^{-1/3})]}{3^{1/6} \Gamma(1/6)}, \quad \gamma_n = \sqrt{2n + \beta}.$$

Пример, когда $h = h(x, t) = \exp\left(-\frac{tx^2}{At + B\sqrt{t}}\right) (1+t^\alpha)^{-1}$, $A, B >$

> 0 , приведен в работе [94].

3°. Бывают случаи, когда начиная с некоторого индекса $h_n(x) = o(x^{-N})$ и условие (18.96) не удовлетворено. Тогда формула (18.100) в общем не верна, так как отброшенные крайние интегралы могут иметь порядок больший, чем члены в (18.100). Рассмотрим пример, дополняющий также п. 16.2.7, 3°. При $\alpha + \beta > 1$, $x > \alpha$, $\alpha + \beta - 1 = \lambda$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\ln^x(1+t)}{t^\alpha(1+t)^\beta} dt = \int_0^{\infty} \frac{\tau^x e^\tau}{e^{\beta\tau}(e^\tau - 1)^\alpha} d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} \tau^x d\tau}{(1 - e^{-\tau})^\alpha} = \lambda^{-x-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} u^x}{(1 - e^{-u/\lambda})^\alpha} du \end{aligned}$$

и $h(u) = (1 - e^{-u/\lambda})^{-\alpha} = 1 + o(u^{-N})$, $h_k(u) = o(u^{-N})$, $k \geq 1$. В данном случае в силу леммы 5.1 $(1 - e^{-u/\lambda})^{-\alpha}$ можно разложить в ряд и интегрировать почленно. Получаем ряд

$$\Omega(x) = \Gamma(x+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-\alpha}{k}}{(k+\lambda)^{x+1}} \quad (18.104)$$

который одновременно является асимптотическим разложением.

Разложением (18.104) обладает также интеграл $\int_a^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} \tau^x d\tau}{(1 - e^{-\tau})^\alpha}$

для каждого фиксированного $a > 0$, так как $\int_0^a \frac{e^{-\lambda\tau} \tau^x d\tau}{(1 - e^{-\tau})^\alpha} < M a^{x-a}$

и по формуле Стирлинга $\Gamma(x+1) b^{-x} \rightarrow \infty$ при любом фиксированном $b > 0$. Если поэтому при $t \rightarrow +\infty$ $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k}$, $1 < \lambda_k \uparrow +\infty$, и $h(t)$ абсолютно интегрируема в $[0, \infty)$, то

$$\int_0^{\infty} \ln^x(1+t) h(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_1^{\infty} \frac{e^{-(\lambda_k-1)\tau} \tau^x}{(1 - e^{-\tau})^{\lambda_k}} d\tau, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (18.105)$$

причем каждый интеграл в правой части (18.105) можно разложить согласно (18.104) и после этого перегруппировать члены. Разложение (18.105) получено при иных условиях, чем (12.94), так как в (12.94) доминирующей критической точкой является $t=0$, а в (18.105) — $t=\infty$.

Подобным образом к интегралу Меллина с помощью подстановки $K(t) = \tau$ иногда можно привести интеграл $\int_0^{\infty} [K(t)]^x e^{-t^\alpha} dt$, если $K(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

18.4.3. Асимптотика интеграла (18.90) при $x \rightarrow 0$ рассмотрена в п. 14.3.3. Если не выполнено условие $h(t) = O(t^{-1-\eta})$, $\eta > 0$, при котором справедливо разложение (14.40'), то (18.90) следует преобразовать. Для этой цели часто применяется интегрирование по частям. В качестве примера при $x > 0$ приводим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-xt} e^t \cos e^t dt &= \int_1^{\infty} \tau^{-x} \cos \tau d\tau = \\ &= \sin 1 + x \cos 1 - x(x+1) \int_1^{\infty} \tau^{-x-2} \cos \tau d\tau. \end{aligned}$$

К последнему интегралу применима теорема 14.6 при $K(\tau) = e^{-\tau}$. Поскольку $\int_1^{\infty} \tau^{-2} (\ln \tau)^k d\tau = k!$, то при $x \in (0, 1)$ получаем сходящееся разложение

$$\int_1^{\infty} \tau^{-x} \cos \tau d\tau = -\sin 1 + x \cos 1 - x(x+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mu_k x^k, \quad (18.106)$$

где $\mu_k = \int_1^{\infty} \tau^{-2} (\ln \tau)^k \cos \tau d\tau$.

18.5. Некоторые другие типы интегралов

18.5.1. *Обобщенная В-функция* определяется интегралом

$$\Omega(x, y) = \int_0^1 (1-t)^x t^y h(t) dt. \quad (18.107)$$

Если $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$, то $s = \frac{y}{x+y}$. При $y = o(x)$ $s \rightarrow +0$, при $x = o(y)$ $s \rightarrow 1$. В этих случаях достаточно $h(t)$ разложить либо по степеням t ($s \rightarrow 0$), либо по степеням $1-t$ ($s \rightarrow 1$). Первый случай приводится ко второму подстановкой $1-t = \tau$, поэтому рассмотрим $y = o(x)$. Поскольку

$$\int_0^1 (1-t)^x t^{y+\lambda} dt = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+\lambda+1)}{\Gamma(x+y+\lambda+2)} \sim \sqrt{2\pi y} e^{-y[1+o(1)]} \left(\frac{y}{x}\right)^{y+\lambda}, \quad (18.108)$$

то с возрастанием λ получаем шкалу. При ограниченном y в (18.108) получаем оценку $O(x^{-y-\lambda})$.

Пусть $h(t) = F(t)h_0(t)$, где $h_0(t)$ разлагается по степеням t , а $F(t)$ не обладает этим свойством. Тогда иногда можно почленно интегрировать разложение для $h_0(t)$. Если при этом функции шкалы выражаются через весьма сложные интегралы, то предпочтительно применять другой метод, который подробнее рассмотрим только для частного случая, когда $y = \alpha x + \beta$, $\alpha > 0$. Имеем

$$s = \frac{\alpha}{1+\alpha} + \bar{O}(x^{-1}), \quad \text{однако нецелесообразно брать } s = \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

$$\Psi_k(x) = (-s)^k \int_0^1 (1-t)^{xt} t^y \left(1 - \frac{t}{s}\right)^k dt = (-s)^k B(x+1, y+1) \times \\ \times {}_2F_1(-k, x+1, y+2, s^{-1}) = (-s)^k B(x+1, y+1) T_k(x). \quad (18.109)$$

Из рекуррентной формулы для ${}_2F_1$ [1] получаем

$$T_k = \frac{k(y-x)}{y(x+y+k+1)} T_{k-1} + \frac{(k-1)x}{y(x+y+k+1)} T_{k-2}, \\ T_0 = 1, T_1 = \frac{y-x}{y(x+y+2)}. \quad (18.110)$$

Используя соотношение

$$T_k \sim \frac{1}{\alpha(1+\alpha)^k} [k(\alpha-1)T_{k-1} + (k-1)T_{k-2}], \quad x \rightarrow +\infty,$$

методом индукции при $\alpha \neq 1$ можно доказать, что

$$T_{2n}(x) \sim \frac{(2n-1)!!}{\alpha^n (1+\alpha)^n} x^{-n} \quad T_{2n+1}(x) \sim \frac{(2n+3)!! (\alpha-1)}{3\alpha^{n+1} (1+\alpha)^{n+1}} x^{-n-1}.$$

При $\alpha = 1, \beta \neq 0$ имеем

$$T_{2n+1}(x) \sim \frac{\beta(2n+3)!!}{3 \cdot 2^{n+1}} x^{-n-2},$$

а при $\alpha = 1, \beta = 0$

$$T_{2n+1}(x) = 0, \quad T_{2n}(x) = \frac{(2n-1)!!}{2^n (x+3/2)^n}.$$

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ $h(t) \in C^\infty[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. При этом ε выбрано так, чтобы $s \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Тогда условие (18.36) выполнено в $[\varepsilon, s]$, $[s, 1-\varepsilon]$ и $\omega_l = s - \varepsilon$, $\omega_r = 1 - \varepsilon - s$, $h_k(s) = O(1)$, $s^k = O(1)$. Замена $\psi_k(x)$ на $\Psi_k(x)$ выполнима согласно лемме 18.1. По той же лемме оценимы крайние интегралы, если $h(t) = O(t^{-\beta})$ при $t \rightarrow 0$ и $h(t) = O((1-t)^{-\beta})$ при $t \rightarrow 1-0$. Поэтому имеем разложение

$$\int_0^1 (1-t)^{xt} t^y h(t) dt \sim B(x+1, y+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^k h_k(s)}{k!} T_k(x). \quad (18.111)$$

Справедливость его при других соотношениях между x и y исследована в [102].

Условия относительно $h(t)$ можно ослабить и допустить, что $h(t)$ имеет абсолютно интегрируемые особенности в некоторых точках t_k , $|t_k - s| \geq \varepsilon_0 > 0$. Тогда можно взять $\omega = Ax^{-\nu}$, $\nu \in (0, 1/2)$, и остальные интегралы оценить согласно (18.48), так как $g_2(x, t) > 0$, $g_2(x, s) \sim \frac{(1+\alpha)^3}{\alpha} x$, $\omega^2 g_2 = O(x^{1-2\nu})$.

Формула (18.111) может оказаться полезной для разложения гипергеометрических функций в силу соотношения

$${}_pF_q(\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_q, z) = \frac{1}{B(x, y-x)} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-x-1} {}_{p-1}F_{q-1}(\mathbf{A}_{p-1}, \mathbf{B}_{q-1}, zt) dt, \quad (18.112)$$

$\mathbf{A}_{p-1} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}\}$, $\mathbf{A}_p = \{\mathbf{A}_{p-1}, x\}$, $\mathbf{B}_{q-1} = \{\beta_1, \dots, \beta_{q-1}\}$, $\mathbf{B}_q = \{\mathbf{B}_{q-1}, y\}$, справедливость которой проверяется почленным интегрированием. В частности, ${}_0F_0 = e^{zt}$, ${}_1F_0 = (1-zt)^{-\alpha}$.

18.5.2. Рассмотрим асимптотическое разложение интеграла типа свертки

$$\Omega(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) h(t) dt \quad (18.113)$$

при следующих условиях: 1) $K(t) \in C(-\infty, \infty)$; 2) $\max K(t) = K(0)$; 3) при $t \rightarrow \pm \infty$ $K(t) = O(\exp(-c|t|^\alpha))$, $c > 0$, $\alpha > 0$; 4) $h(t)$ удовлетворяет условию (18.69) при $t \in (-\infty, \infty)$, $b < \alpha$.

Имеем критическую точку $s = x$. Пусть $\omega(x) = Ax^{b/\alpha}$. Можно $\psi_h(x)$ заменить на

$$\Psi_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x) (t-x)^h dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \tau^h d\tau = c_h,$$

так как крайние интегралы по промежуткам $(-\infty, \omega]$ и $[\omega, \infty)$ имеют оценку $O(\exp(-c\omega^\alpha)) = \exp(-cA^\alpha x^b) O(1) = \exp(-ax^b) o(x^{-N})$, если A выбрано так, что $cA^\alpha > a$. Поэтому

$$\psi_h(x) = c_h + \exp(-ax^b) o(x^{-N}). \quad (18.114)$$

Если $h(t)$ удовлетворяет условию (18.36) и $h_h(x)$ образуют шкалу, то к основному интегралу применима теорема 18.1. Поскольку ядро $K(t)$ не представлено в виде показательной функции, то оценку крайних интегралов рассмотрим подробнее.

Разобьем эти интегралы по промежуткам $(-\infty, -x]$, $[-x, x-\omega]$, как $\Omega_{11} + \Omega_{12}$, и по $[x+\omega, 2x]$, $[2x, \infty)$, как $\Omega_{r1} + \Omega_{r2}$. Имеем оценку

$$|\Omega_{r2}| = \left| \int_{2x}^{\infty} K(t-x)h(t)dt \right| = \left| \int_x^{\infty} K(\tau)h(\tau+x)d\tau \right| < \\ < M \int_x^{\infty} \exp[-c\tau^\alpha + a(x+\tau)^b]d\tau.$$

При достаточно большом x имеем

$$1 - \frac{a}{c}(x+\tau)^b\tau^{-\alpha} = 1 - \frac{a}{c} \left[x\tau^{-\frac{\alpha}{b}} + \tau^{1-\frac{\alpha}{b}} \right]^b \geq \\ \geq 1 - \frac{a}{c} \left(2x^{1-\frac{\alpha}{b}} \right)^b > \frac{1}{2},$$

поэтому

$$|\Omega_{r2}(x)| < M \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{c}{2}\tau^\alpha\right)d\tau = \\ = O\left(x^{1-\frac{1}{\alpha}}\right) \exp\left(-\frac{c}{2}x^\alpha\right) = \exp(-ax^b) o(x^{-N}).$$

Подобным образом получаем

$$\Omega_{11}(x) = \exp(-ax^b) o(x^{-N}).$$

$$|\Omega_{12}(x)| = \left| \int_{-x}^{x-\omega} K(t-x)h(t)dt \right| = \left| \int_{-2x}^{-\omega} K(\tau)h(\tau+x)d\tau \right| < \\ < Mx \exp(-cA^\alpha\omega^\alpha + ax^b) = \\ = Mx \exp[-x^b(cA^\alpha - a)] = \exp(-ax^b) o(x^{-N}),$$

если $cA^\alpha > 2a$. Это будет окончательным условием относительно выбора A . Подобную оценку получаем для $\Omega_{r1}(x)$. Следовательно, при указанных условиях относительно $h(t)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-x)h(t)dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} h_k(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (18.115)$$

Если $H(x) = \exp(\pm ax^b)$, то следует иметь в виду, что функция $\exp(at^b)$ удовлетворяет условию (18.36) лишь при $b \leq \leq \frac{\alpha}{\alpha+1}$. В противном случае выражение для $s(x)$ приходится уточнить. Для этого целесообразно $K(t)$ представить в виде $K(t) = \exp(-c|t|^\alpha)G(t)$ и подробнее исследовать расположение критической точки [141]. Примеры разложения (18.115) при несколько иных условиях даны в [141]. В работе [45] исследована асимптотика интегралов с ядром $K\left[\frac{t-\alpha(x)}{\beta(x)}\right]$, а в [119] — асимптотика интегралов $\int_0^\infty K(x \pm t)h(t)dt$.

Можно допустить, что $h(t)$ в некоторых точках вне $[x-\omega, x+\omega]$ не ограничена и абсолютно интегрируема, так как интегралы по малым окрестностям этих точек можно выделить и оценить в силу свойств $K(t)$.

В качестве примера берем

$$\Omega_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2xt}h(t)dt = e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)^2}h(t)dt. \quad (18.116)$$

При исследовании асимптотики этого интеграла кроме формулы (18.115), где $c_{2k+1} = 0$, $c_{2k} = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$, можно применить также методы, рассмотренные в п. 18.3 и 18.4. В силу (8.44), (18.116) и (18.115) при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} H_{-\mu}(-x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2tx-t^2}t^{\mu-1}dt + O(x^{-\mu}) \sim \\ &\sim e^{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{(2k)! \Gamma(\mu - 2k)} x^{\mu-2k-1}. \end{aligned} \quad (18.117)$$

Можно убедиться в том, что (18.117) совпадает с (8.50) при $z = -x$ и $\nu = -\mu$.

18.5.3. Асимптотическое разложение интеграла $\int_0^\infty \exp[-g(x, t)]dt$ часто удобно находить, пользуясь представлением (18.27). В качестве примера исследуем интеграл

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \exp[xt - x^\mu f(t)]dt, \quad (18.118)$$

$\mu \neq 1$, $f(t) \in C^\infty(0, \infty)$. Для сходимости интеграла требуем

$$f(t) \sim ct^\alpha \text{ при } t \rightarrow +\infty, \quad c > 0, \quad \alpha > 1, \quad (18.119)$$

причем предположим, что соотношение (18.119) можно сколь угодно раз дифференцировать.

1°. Критическая точка определяется из уравнения $f'(\sigma) = = x^{1-\mu}$. Если $\mu < 1$, то из (18.119) следует, что $\sigma(x) \sim ax^{(1-\mu)\gamma} = = s(x)$, $a = (c\alpha)^{-\gamma}$, $\gamma = (\alpha-1)^{-1}$. При $\mu > 1$ $\sigma(x)$ стремится к точке t_0 , в которой $f(t)$ имеет минимальное значение. В силу соотношений $0 < x^{1-\mu} = f'(\sigma) = f'(t_0) + f''(\xi)(\sigma - t_0)$ имеем $\sigma > t_0$, $s > t_0$. Разбивая в этом случае интеграл по промежуткам $\{0, t_0\}$, $[t_0, \infty)$, можно ограничиться исследованием только второго интеграла, так как первый подстановкой $t_0 - t = \tau$ приводится к интегралу Лапласа. Второй интеграл подстановка $t - t_0 = \tau$ приводит к интегралу (18.118), в котором $f(t)$ заменено на $f_0(t) = = f(t_0 + t) - f(t_0)$ и к которому добавлен множитель $\exp[xt_0 - -x^\mu f(t_0)]$. Будем считать, что $f_0(t)$ при $t \rightarrow +0$ тоже имеет представление (18.119), и исследовать оба случая $\mu < 1$ и $\mu > 1$ одновременно. Из предыдущего следует, что для $f_0(t)$ $\alpha \geq 2$, $\alpha \in N$. Оценка $f_0(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ для асимптотики интеграла не имеет значения. Требуется лишь, чтобы (18.118) сходилась.

Согласно (18.27) берем

$$K(x, t) = \exp[-G(x, t)], \quad h(x, t) = \exp[\kappa(x, t)], \quad g(x, t) = -xt + x^\mu f(t),$$

$$G(x, t) = g(x, s) + \frac{1}{2} g_2(x, s) (t-s)^2, \quad \kappa(x, t) = -g(x, t) + G(x, t). \quad (18.120)$$

Имеем $G_1(x, s) = 0$, $G_2(x, t) = g_2(x, s)$, поэтому условие (17.30) удовлетворено при любом $\omega(x)$. Выбор $\omega(x)$ определяется условием (18.36), которое в силу $\kappa(x, s) = 0$, $\kappa_1(x, s) = 0$, $\kappa_2(x, s) = 0$, $\kappa_k(x, t) = -g_k(x, t) = -x^\mu f_k(t)$, $k > 2$, $h(x, s) = 1$, (18.32) и дифференцируемости (18.119) приводим к требованиям $\omega(x) = o(s)$ и $e^{\kappa(x, t)} = O(1)$ при $t \in [s - \omega, s + \omega]$. Поскольку $\kappa(x, t) = = \frac{1}{6} \kappa_3(x, \xi) (t-s)^3$ и $\kappa_3(x, \xi) \sim \kappa_3(x, s)$, то достаточно брать

$$\omega(x) = A |\kappa_3(x, s)|^{-1/3} \sim A_0 x^3 \frac{1}{(3-\alpha-2\mu)\gamma}. \quad (18.121)$$

Отсюда следует, что $\omega(x) = o(s)$ и $\omega^2 G_2(x, s) = \omega^2 g_2(x, s) = = \omega^2 x^\mu f_2(s) \sim A_1 x^3 \frac{1}{(\alpha-\mu)\gamma} \rightarrow +\infty$, если $\alpha > \mu$. Это условие всегда

выполняется при $\mu < 1$. Из леммы 18.1 следует, что $\psi_k(x)$ можно заменить на

$$\Psi_k(x) = \exp [xs - x^\mu f(s)] \left(\frac{2}{g_2(x, s)} \right)^{(k+1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u^k du$$

и $\Psi_{2h+1} = 0$. Поэтому разложение в (18.11) следует брать по четным индексам, т. е. $k = 2m$. Члены ряда можно выразить, пользуясь (18.32). В силу (18.119) они имеют порядок $(x^\mu s^\alpha)^{\beta_3 + \dots + \beta_{2m} - m} O(1)$, причем $\beta_3 + \dots + \beta_{2m} \leq \frac{2m}{3}$ и равенство достигается при $m = 3p$, $p \in \mathbb{N}_1$. Если $\alpha > \mu$, то $x^\mu s^\alpha \rightarrow +\infty$, однако члены ряда (18.11) ввиду колебаний β_k не образуют шкалы. Чтобы этого достичь, следует группировать члены по три в одной группе. Такая группа при $k = 6p$ имеет порядок $O((x^\mu s^\alpha)^{-p})$.

Следовательно, при $\alpha > \mu$ для основного интеграла имеет место теорема 18.1. Крайние интегралы оцениваются по лемме 18.1, поэтому при $x \rightarrow +\infty$ имеем разложение

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp [xt - x^\mu f(t)] dt \sim \\ & \sim \exp [xs - x^\mu f(s)] \sqrt{\frac{2\pi}{x^\mu f_2(s)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi_{2m}(s)}{m! [2x^\mu f_2(s)]^m} \quad (18.122) \end{aligned}$$

относительно шкалы $(x^\mu s^\alpha)^{-p}$. Напомним, что при $\mu > 1$ соотношение (18.119) дано в окрестности $t = 0$. Отметим также, что в [47] указаны условия, при которых по данному методу можно построить разложение с общим $g(x, t)$.

2°. При $\alpha < \mu$ применяется другой метод. Пусть $f(t) = t^\alpha \varphi(t)$, $\varphi(t) \geq \varepsilon > 0$ при $t \geq 0$, $\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ при $t \rightarrow +0$, $a_0 \neq 0$, $\mu - \alpha = \mu_1$. Подстановкой $xt = u$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp [xt - x^\mu t^\alpha \varphi(t)] dt = \\ & = \frac{1}{x} \int_0^\infty \exp [u - x^{\mu_1} u^\alpha \varphi(u/x)] du. \end{aligned}$$

Разобьем последний интеграл по промежуткам $[0, T]$, $[T, \infty)$. По лемме 2.3

$$\begin{aligned} & \int_T^{\infty} \exp\{u - x^{\mu_1} u^{\alpha} \varphi(u/x)\} du < \\ & < \int_T^{\infty} \exp(u - x^{\mu_1} u^{\alpha} \varepsilon) du = O(\exp(-\varepsilon T^{\alpha} x^{\mu_1})) = o(x^{-N}); \\ & \int_0^T \exp[u - x^{\mu_1} u^{\alpha} \varphi(u/x)] du = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_0^T \exp[-x^{\mu_1} u^{\alpha} \varphi(u/x)] u^k du + \\ & + R_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k!} \int_0^{T/x} \exp(-x^{\mu} \tau^{\alpha} \varphi(\tau)) \tau^k d\tau + O\left(x^{-\mu_1 \frac{(n+2)}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{\frac{T}{x}}^{\infty} \exp[-x^{\mu} \tau^{\alpha} \varphi(\tau)] \tau^k d\tau = O(\exp[-\varepsilon T^{\alpha} x^{\mu_1}]),$$

то к каждому интегралу в последней сумме можем применить теорему 16.4, согласно которой

$$x^{k+1} \int_0^{\frac{T}{x}} \exp[-x^{\mu} \tau^{\alpha} \varphi(\tau)] \tau^k d\tau \sim x^{-\frac{\mu_1}{\alpha}(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} d_{jk} \Gamma\left(\frac{k+1+j}{\alpha}\right) x^{-\frac{\mu j}{\alpha}}.$$

Поэтому при $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^{\infty} \exp[xt - x^{\mu} t^{\alpha} \varphi(t)] dt \sim x^{-1 - \frac{\mu_1}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} D_k x^{-\frac{\nu_k}{\alpha}}, \quad (18.123)$$

$$\nu_k = i\mu_1 + j\mu, \quad i, j \in N, \quad \nu_0 = 0, \quad D_0 = a_0^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

3°. При $\alpha = \mu$ дополнительно к 2° предположим, что $\varphi(t) - a_0 \geq 0$ при $t \geq 0$. Выберем $\gamma \in (1, 2)$ и разобьем интеграл по промежуткам $[0, x^{\gamma}]$, $[x^{\gamma}, \infty)$. По лемме 2.3

$$\int_{x^{\gamma}}^{\infty} \exp[xt - (xt)^{\alpha} \varphi(t)] dt < \frac{1}{x_x^{\gamma-1}} \int_x^{\infty} \exp[-\tau^{\alpha} \varepsilon + \tau] d\tau = o(x^{-N}).$$

В интеграле по $[0, x^\nu]$ после подстановки $tx = \tau$ применим тождество

$$\exp[\tau - \tau^\alpha \varphi(\tau/x)] = \exp[\tau - \tau^\alpha a_0] \exp[-\tau^\alpha (\varphi(\tau/x) - a_0)]$$

и второй множитель разложим в ряд по степеням $\tau^\alpha [\varphi(\tau/x) - a_0]$. Остаток можно оценить в силу обвертывающего свойства показательной функции, а при разложении интеграла

$$\int_0^{x^{\nu-1}} \exp[\tau - \tau^\alpha a_0] \tau^{\alpha k} [\varphi(\tau/x) - a_0]^k d\tau$$

можно пользоваться разложением для $\varphi(\tau/x)$ и заменять верхний предел на ∞ (так как $x^{\nu-1} \rightarrow +\infty$). После перегруппировки членов при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\int_0^\infty \exp[xt - (xt)^\alpha \varphi(t)] dt \sim \sum_{k=0}^\infty D_k x^{-k-1}, \quad (18.124)$$

$$D_k = \int_0^\infty \exp[\tau - \tau^\alpha a_0] \tau^k c_k(\tau^\alpha) d\tau,$$

где полином степени k $c_k(u)$ проще определить по разложению

$$\exp[-\tau^\alpha (\varphi(\tau/x) - a_0)] = \sum_{k=0}^\infty \frac{\tau^k c_k(\tau^\alpha)}{x^k}, \quad c_0 = 1,$$

которое можно построить согласно п. 16.2.2, 4°.

Асимптотические выражения для интегралов $\int_0^\infty \exp[\pm xt \mp \tau^\alpha f(t)] dt$ при $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow +\infty$ для монотонных положительных $f(t)$ и $f(t) \in LE$ исследованы в [63]. Некоторые результаты относительно асимптотики интеграла $\int_0^\alpha \exp[-xg(t) + x^2 G(t)] h(t) dt$ приведены в [121]. Пункты 2° и 3° свидетельствуют о том, что теорема 18.1 далеко не всегда применима.

Интеграл

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \exp[a(x)t^\alpha - b(x)t^\beta] t^\beta dt, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad (18.125)$$

подстановкой $t = a^{-\frac{1}{\alpha}} \tau^{\frac{1}{\beta}}$, $y = ba^{-\frac{1}{\nu}}$, $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} < 1$, приводится к

$$\Omega(x) = \frac{1}{\beta} a^{-\frac{\lambda+1}{\alpha}} \int_0^{\infty} \exp[-y\tau + \tau^{\nu}] \tau^{\frac{\lambda+1}{\beta}-1} d\tau,$$

к которому применима лемма Ватсона, если $y \rightarrow \infty$. При $y \rightarrow 0$ $\Omega(x)$ можно привести к интегралу Харди (18.76):

$$\Omega(x) = \frac{1}{\alpha} b^{-\frac{\lambda+1}{\beta}} \int_0^{\infty} \exp[y^{-\nu}u - u^{1/\nu}] u^{\frac{\lambda+1}{\alpha}-1} du.$$

18.5.4. Рассмотрим еще разложение при $\nu \rightarrow \infty$ интеграла

$$H_{-\nu-1}(y) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\infty} \exp(-2ty - t^2) t^{\nu} dt,$$

который не разложим согласно теории интеграла Меллина (см. п. 18.4, 4°). Обозначим $\nu = 2x$. Тогда $g(x, t) = 2ty + t^2 - 2x \ln t$, $s = \sqrt{x}$, $g_1(x, s) = 2y$, $g_2(x, t) = 2 + \frac{2x}{t^2}$, $g_2(x, s) = 4$, $g_k(x, s) = (-1)^{k-2} (k-1)! x^{1-k/2}$, $k \geq 3$. В (18.120) положим $G(x, t) = g(x, s) + 2y(t-s) + 2(t-s)^2$. Функция $\omega(x)$ определяется аналогично, как в п. 18.5.3. При $\omega(x) = x^{1/6}$ выполнено (18.36). Можно $\psi_k(x)$ заменить на

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) &= \exp[-g(x, s)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2y\tau - 2\tau^2] \tau^k d\tau = \\ &= 2^{-\frac{k+1}{2}} \exp[-g(x, s)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\sqrt{2}yu - u^2] u^k du = \\ &= \sqrt{\pi} \exp[-g(x, s)] 2^{-\frac{3k+1}{2}} i^k e^{\frac{y^2}{2}} H_k\left(\frac{iy}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp[-g(x, s)] c_k(y) e^{\frac{y^2}{2}}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-2tz} t^n dt = \frac{i^n \sqrt{\pi}}{2^n} e^{z^2} H_n(iz), \quad (18.126)$$

которую получаем, дифференцируя по z n раз соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2zu - u^2) du = \sqrt{\pi} e^{z^2}$$

и применяя формулу Родрига для полиномов Эрмита [1].

Поскольку $\chi_k(x, s) = -g_k(x, s)$, то в силу (18.32) функции образуют шкалу, если члены группировать по три в одной группе; k -я группа имеет оценку $O(x^{-k/2})$. При этом условия теоремы 18.1 для основного интеграла выполнены, а оценка для крайних интегралов следует из $g_2(x, t) > 0$ и (18.16). Таким образом, при $x \rightarrow +\infty$ получаем разложение

$$H_{-2x-1}(y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{x^x}{\Gamma(2x+1)} \exp[-x - 2y\sqrt{x}] e^{\frac{y^2}{2}} \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} c_k(y) \chi_k(x) \right], \quad (18.127)$$

$$\chi_3(x) = 4x^{-1.2}, \quad \chi_4(x) = -2 \cdot 3! x^{-1}, \quad \chi_5(x) = 2 \cdot 4! x^{-3/2},$$

$$\chi_6(x) = 160x^{-1} - 240x^{-2}.$$

Можно также члены перегруппировать по степеням $x^{-1/2}$. Легко показать, что формула (18.127) сохраняется также при комплексном y . При положительных индексах соответствующее разложение получается с помощью соотношения

$$H_\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^\nu \Gamma(1+\nu) e^{y^2} \left[e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_{-\nu-1}(iy) + e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} H_{-\nu-1}(-iy) \right], \quad (18.128)$$

которое следует из (8.49). При $\nu \rightarrow +\infty$ имеем

$$H_\nu(y) \sim 2^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{\nu}{\nu^2} \exp\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{y^2}{2}\right) \left\{ \exp i \left(-y\sqrt{2\nu} + \frac{\nu\pi}{2} \right) \right\} \left[1 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} c_k(iy) \chi_k \left(\frac{v}{2} \right) \left] + \exp i \left(y\sqrt{2v} - \frac{v\pi}{2} \right) \left[1 + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} c_k(-iy) \chi_k \left(\frac{v}{2} \right) \right] \} = \\
& = 2^{\frac{v+1}{2}} v^{\frac{v}{2}} \exp \left(-\frac{v}{2} + \frac{y^2}{2} \right) \left[\cos \left(y\sqrt{2v} - \frac{v\pi}{2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\chi_k \left(\frac{v}{2} \right) H_k(y/\sqrt{2})}{2^{3k/2} k!} \cos \left(y\sqrt{2v} - \frac{v\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]. \quad (18.129)
\end{aligned}$$

При целом v получаем асимптотическое разложение для полинома Эрмита.

В работе [57] рассмотрен более общий интеграл

$$\begin{aligned}
g_{\lambda}(x, u) &= \int_0^{\infty} v^{\lambda} \exp[-(v-u)^2 - xv^{-1}] dv = \\
&= e^{-u^2} \int_0^{\infty} v^{\lambda} \exp[-v^2 + 2uv - xv^{-1}] dv. \quad (18.130)
\end{aligned}$$

При $\lambda \rightarrow +\infty$ с соответствующими изменениями можно применить прежний метод, при $x \rightarrow \infty$ — выражение

$$g_{\lambda}(x, u) = e^{-u^2} \int_0^{\infty} \exp \left[-x\tau - \frac{1}{\tau^2} + \frac{2u}{\tau} \right] \tau^{-\lambda-2} d\tau, \quad (18.131)$$

которое является частным случаем (18.65). Поскольку $\beta=2$, $b=1=\beta/2$, то формула (18.45) не применима. Однако можно использовать метод, рассмотренный в данном пункте.

При $u \rightarrow \infty$ следует непосредственно применить формулу (18.83) или (18.80). При $u=0$ интеграл (18.130) исследован некоторыми авторами; библиография приведена в [28].

В заключение отметим следующее. Примеры с разложением по степеням t показывают, что точки, в окрестностях которых разлагается функция нагрузки, могут находиться вне области влияния, однако при $x \rightarrow x_0$ они должны иметь такой же предел, как критическая точка. В противном случае, как правило, не образуется асимптотическая шкала.

18.6. Библиографические сведения

18.6.1. Метод Лапласа изложен в учебниках Лакруа [106] и Лежандра [113] по математическому анализу. В последней работе уже дано формальное разложение (16.8), если $g(t)$ и $h(t)$ — аналитические функции. Указанными авторами отмечено также, что полученный ряд обычно расходится. Частные случаи разложения (16.8) были рассмотрены многими авторами.

Обоснованию метода Лапласа при разных условиях посвящена обширная литература. К ней относится также вся литература, связанная с леммой Ватсона, исторические сведения о которой даны в п. 15.4. Теорема 16.1 для аналитических функций приведена во многих учебниках и монографиях, вышедших в последнее время. Одним из первых эту теорему доказал Перрон [123], применив метод Буркхарда. Однако в его работе ошибочно из соотношений

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad |f(z)| \leq |g(z)|$$

делается вывод, что $|a_k| \leq |b_k|$. Это в общем неверно, например при $g(z) \equiv M$ мы получили бы $a_k = 0$, $k \geq 1$. Поэтому доказательство Перрона нельзя считать корректным. Указанную неточность в доказательстве заметил Сюй, который в работе [94] дал видоизмененное доказательство Перрона, но получил тем же методом только первый член разложения. Корректное доказательство теоремы 16.1 в частном случае по методу Буркхарда дано в работе [4]. В ней без доказательства также указано, что результаты будут оставаться справедливыми и тогда, когда $g(t)$ и $h(t)$ имеют асимптотические разложения. С помощью преобразования Лапласа теорема 16.1 для аналитических функций доказана в работе [75], а с помощью подстановки — в [67]. Кроме того, эта теорема приведена в [98, 121], а ее частные случаи — в [96, 136, 154, 381]. Теорема 16.4 при действительном z и $\lambda_k = k$, $\mu_k = k + \mu$ доказана в [73].

Теорема 16.2 при действительном z приведена в работе [84], а при комплексном — в [65]. Некоторые модификации в условиях этой теоремы даны в [86, 94]. Теорема 16.3 доказана в [94], а в более слабой формулировке — в [27, 157]. Много работ посвящено модификации этой теоремы в форме (16.33). При разных условиях она дана в [8, 91, 93, 112, 114, 138, 144]. Кроме [8], в остальных работах дифференцируемость от функции $g(t)$ не требуется. Метод нижних и верхних оценок, примененный в доказательстве теоремы 16.3, встречается в [8].

Аналог теоремы 16.5 при других условиях рассмотрен в работе [69]. Разные методы вычисления коэффициентов разложения по методу Буркхарда проанализированы в [108—110].

Литература об исследовании интегралов (16.88) указана в п. 15.4. В работе [21] в некоторых теоремах выделяется асимптотический вычет интеграла (16.87) при условии, что

$$K(u) = A \exp(cuv)g(u)[1 + o(1)], \quad g(\lambda u) = g(u)O(1)$$

при $u \rightarrow \infty$, $u \in s$, $\lambda \in [1 - \varepsilon, 1]$. Там же приводится пример (16.94) при конкретной функции $h(t)$. К интегралу (16.87) часто при более сильных условиях применимо также интегрирование по частям. Этот метод изложен в п. 10.3.

Подстановка в примере (16.42) связана с функциями $\operatorname{inverf} x$ и $\operatorname{inverf} cx$, обратными $\operatorname{erf} t$ и $\operatorname{erfc} t$. Теория этих функций рассмотрена в работах [55, 124, 147, 369], а асимптотическое разложение дано в [15].

18.6.2. Исследование асимптотики интеграла (16.47) при $g(t) \equiv t$ связано с теорией рядов Фурье, так как в этом случае интеграл совпадает с коэффициентом Фурье. В замечательной габилюционной работе [131] Риман доказал следующее свойство: $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^b e^{iht} h(t) dt = 0$, если $h(t)$ — интегрируемая функция.

Эта формула выражает *лемму Римана*. В качестве исторической справки следует отметить, что более слабые утверждения, чем в лемме Римана, были известны также первым исследователям сходимости рядов Фурье, в том числе Фурье [72], Дирихле [64], Лобачевскому [169] и Стоксу [145]. Лемма Римана обобщалась Лебегом [111] и в работе [49]. Она сохраняется, если $a = -\infty$, $b = +\infty$, k — действительное число и интеграл сходится равномерно относительно $k \geq k_0 > 0$ (*лемма Римана—Лебега*) [66]. В работе Дарбу [62] дана более точная характеристика поведения коэффициентов Фурье. Точная асимптотика интеграла Фурье согласно (16.61) указана Бромвичем [51]. Более слабые условия относительно $h(t)$ даны в [86] и [101]. Условия проанализированы также в [160].

В упомянутой работе Римана высказана также идея о принципе стационарной фазы. Анализируя интеграл Дирихле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (x-t) \right]}{\sin \frac{1}{2} (x-t)} h(t) dt, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

выражающий частичную сумму ряда Фурье, Риман указывал, что основной вклад интеграла дает окрестность точки x . Это соображение приводит к *принципу локализации*: при данном x сходимость ряда Фурье для $h(t)$ определяется лишь поведением $h(t)$ в непосредственной близости точки x . Принцип локализации был известен еще до Римана, однако он не был высказан в явной форме. Аналогично Риман приходит к заключению, что и асимптотический вклад интеграла $\int_a^b \cos[\psi(t) + n(t-c)]h(t)dt$ получается от окрестности $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, где $\psi'(\alpha) + n = 0$. Строгой оценки погрешности у Римана нет. Приведенный интеграл появился при разложении в ряд Фурье функций, имеющих бесконечно много экстремумов. Принцип стационарной фазы был высказан в 1850 г. также Стоксом [146], но данная работа появилась в свет позднее работы Римана. Метод стационарной фазы стал общеизвестным после работы Кельвина [100], в которой этот метод и получил свое название. Некоторые идеи указанного принципа можно обнаружить в одной из работ Коши, вышедшей в 1815 г. [56]. Позднее в частных случаях метод применялся многими авторами.

Первое строгое обоснование этого принципа в некоторых частных случаях было дано Ватсоном в работе [155]. В ней использована теорема Бромвича. Широкие новые возможности для разложения интеграла (16.47) появились после введения нейтрализатора [60, 68].

Асимптотику интеграла (16.47) при $g(t) = t^\nu$, $a = 0$ исследовали Перрон [122], Винтнер [159, 160] и Хартман [86]. В последней работе при условиях Бромвича относительно $h(t)$ получено равномерное асимптотическое представление для (16.47) при

$|\arg x| \leq \pi/2$. Асимптотика интегралов $\int_0^x e^{i\sigma(t)} h(t) dt$,

$\int_0^a e^{ixt} e^{i\sigma(t)} h(t) t^{-1} dt$ и $\int_0^\infty \sin xt t^\lambda e^{i\sigma t} dt$ при $\sigma(t) \in LE$, $h(t) \in LE$ исследована в работах [80, 81, 104]. Интеграл (16.47) при общем $g(t)$ кроме [155] исследовался также в [88]. Разложения интеграла при $g(t) = t^\nu$ даны в [67, 133]. В [67] впервые от $h(t)$ не требуется аналитичности на концах промежутка интегрирования, но допускается аналитичность в некоторой области, содержащей отрезок $(0, b]$, за исключением начала. Подобное условие дано в [10]. Условие о почленном дифференцировании разложения (16.51) встречается в [76]. Теорема 16.6 впервые доказана в [16]. Обобщенный интеграл (17.76) впервые исследован в [42]. Теорема 17.6 в частном случае при $K(t) = J_n(t)$ дана в [47].

Асимптотическое представление интеграла (16.64) исследовалось в работах [16, 140]. При $f(x) = x^{-1}$, $g_1(t) = t$, $g_2(t) = t^\alpha$,

$h(t) = t^{-\lambda} (\ln t)^n$ оно рассмотрено также в [49]. В этом случае при $n=0$ интеграл (16.64) с помощью подстановки приводится к (16.69), разложение которого при $\lambda=0$ и $n=3, 4$ получено в [50], а при общем целом α и комплексном x — в [53]. Этот интеграл тесно связан с интегралом Харди (18.76), исторические сведения о котором даны в п. 18.6.3. В [50, 53] интеграл (16.69) исследован также при конечном верхнем пределе.

Для построения асимптотического разложения интеграла (16.87) в случае осциллирующего ядра Виллис [158] предложил применять преобразование Лапласа. Обоснование этого метода при $K(t) = J_0(t)$ дано в [20], а для общих ядер — в [13, 14, 46, 95]. Оно приведено в § 13 нашей монографии. Некоторая модификация этого метода в случае ядра $K(t) = e^{-t \cos \theta} J_\nu(t \sin \theta)$, $\theta \in [0, \pi/2]$ разработана в [118]. Другие методы построения асимптотического разложения интеграла (16.87) применены в [9, 10, 23, 77, 79]. Из них интегрирование по частям, примененное в [23], рассмотрено в § 8—10 настоящей монографии, а остальные методы будут приведены в третьем томе.

Теоремы 16.8 и 16.9 и лемма 16.4 в случае цилиндрических функций приводятся в работе [116], а в общем случае — в [16]. Интеграл (16.88) в случае осциллирующего ядра рассмотрен в [16, 76]. В п. 16.4 устанавливается связь между методами, примененными в работах [16, 76]. Частный случай теоремы 16.10 при $g_h(t) = \sin^{\lambda_k} t / \alpha$ рассмотрен в [25].

18.6.3. Хотя понятие критических точек было известно уже начиная с работ Лапласа, термин «критическая точка» установился лишь с 1948 г. после появления работы ван дер Корпута [61]. В этой работе применяется термин «асимптотический вычет». Термин же «асимптотический вклад» встречается во многих работах, однако авторы придают ему разный смысл. Этим термином называют то интеграл, то его асимптотическое разложение. Понятие области влияния в разных смыслах применяется лишь в последнее время [4, 6, 17, 24, 69], но оно отличается от понятия, данного в определении 17.1 и дополнениях к нему. В [69] дано определение критической области как совокупности точек, определяющих асимптотический вклад интеграла, причем с помощью разложения функции нагрузки в окрестности любой точки этой области можно построить асимптотическое разложение интеграла. В [24] допустимый радиус влияния $\rho(x)$ определяется как функция, при которой интеграл по $[s(x), s(x) + \delta \rho(x)]$ при любом $\delta > 0$ является асимптотическим вычетом и его разложение не зависит от выбора δ . Понятия составных и поглощенных разложений нами заимствованы из [121]. Термин «пустое разложение» встречается в работах Райта.

Асимптотика интегралов с ядром $e^{-g(x,t)}$ в частных случаях исследована давно. К этим случаям относятся интеграл Пуассона, выражающий решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, и некоторые другие *фильтрующие* (или *сингулярные*) *интегралы*. Отметим несколько работ, в которых использованы аппроксимирующие критические точки.

В [82] Харди рассматривает асимптотику интеграла (18.76) при $\lambda \rightarrow \infty$. Автор говорит, что при нахождении асимптотического представления этого интеграла он не применяет новые идеи по сравнению с теми, которые даны Лапласом. Поэтому он не считает нужным приводить подробное доказательство. Для аппроксимации критической точки в [82] различаются случаи $\alpha > 2$, $\alpha = 2$ и $\alpha \in (1, 2)$, причем при $\alpha < 2$ главный член асимптотического представления интеграла остается недостаточно точным (см. (17.64)). Фабер в [70] отмечает, что при исследовании более общего интеграла стационарную критическую точку часто приходится заменять некоторой другой, достаточно близкой точкой, и с учетом этого рассматривает разложение интеграла $\int_{-a}^a \exp[a_1(n)t + a_2(n)t^2] h(t, n) dt$, где коэффициенты в разложении $h(t, n)$ по степеням t зависят от n . В работе [161] рассмотрена асимптотика интеграла Меллина при $h(t) = \exp(-e^{-t})$, но здесь критическая точка остается в неявной форме, так как достаточно точную аппроксимацию для $\sigma(x)$ найти нельзя. Этот пример рассмотрен также в [47]. В [161], кроме того, дана точная оценка остатка.

Выделение основного интеграла с пределами, зависящими от параметра, также давно известно. Все элементы теории, изложенной в § 17, можно найти уже в работах Хэвиленда [87] и Дьедонне [63], где рассмотрена асимптотика интеграла $\int_0^\infty \exp[\pm xt + x^\mu g(t)] dt$. Первые попытки исследования общего случая содержатся в работах Сюй [89, 90, 92, 94] и книге Евграфова [6]. Одновременно с [6] появились работы Берга [35—39, 41, 44], в которых условия выбраны более удачно, чем в предыдущих работах. Результаты Берга в дальнейшем были расширены самим автором и его сотрудниками. В основном эти результаты изложены в работе [47]. Большая часть содержания § 17 и 18 в несколько переработанном виде отражает достижения школы Берга. Некоторые результаты в случае, когда $g(x, t) = xp(t) + r(x, t)$, приведены в [121], где интеграл аппроксимируется с помощью функции Hd_ν .

Теорема 17.1 сначала была доказана Бергом в случае $n=2$ [35—38], потом — Вагнером при $n=4$ [152, 153]. Общий случай теоремы 17.1 рассмотрен Риделем [127] и в модифицированной

форме приведен в [47]. Выделение определяющей группы членов в формуле Тейлора для функции $g(x, t)$ использовано также в [69].

Общая теория асимптотических разложений, изложенная в § 18, в несколько ином виде впервые была рассмотрена в работах [36, 45], а отдельные частные случаи — в [102, 103, 126, 141]. Разложения при конкретных $g(x, t)$ были рассмотрены еще раньше. К такому частному случаю относится и асимптотика интеграла Лапласа, которой посвящена обширная литература. Хотя дифференцирование по параметру под знаком интеграла (18.37) практически применялось раньше, впервые законность этого действия доказана лишь в [121]. Разложение (18.52) приведено в [22].

Много исследований посвящено также интегралу (18.75), в частности при $h(t) \equiv 1$. Любопытна история интеграла Харди (18.76). Асимптотика интеграла

$$\int_0^{\infty} \exp[-y + xy^{\alpha}] dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \alpha n)}{n!} x^n, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (18.132)$$

который приводится к частному случаю (18.76), подробно исследована Барнсом [31]. Харди [82] исследовал (18.76) при $\lambda \rightarrow \infty$, а Факсен [71] рассматривал разложения интеграла $\int_y^{\infty} \exp[-x(t \pm t^{-\mu})] t^{\nu} dt$ при $x \rightarrow 0$, $y \geq 0$, $\mu > -1$. Полное исследо-

вание асимптотики интеграла $\int_0^{\infty} \exp(-u^k + zu) du$, $k > 1$, при $|z| \rightarrow \infty$ дано в [30]. Интегралы, родственные (18.76), рассмотрены в работах [11, 12, 53, 83]. В некоторых новейших работах, например в [121], вводится обозначение

$$Fi(\alpha, \beta, y) = \int_0^{\infty} \exp(-\tau + y\tau^{\alpha}) \tau^{\beta-1} d\tau, \quad \operatorname{Re} \alpha \in [0, 1) \quad (18.133)$$

и интеграл (18.133) называется *интегралом Факсена*.

Другим частным случаям (18.75) посвящены работы [63, 88, 134, 135, 139]. Асимптотическое разложение интеграла (18.84) при $\lambda = 0$ дано в [6, 1957 г.], а интеграла (18.88) — в [6, 1962 г.].

Значительно позже была исследована асимптотика интеграла Лапласа при $x \rightarrow 0$. Теорема 18.3 в частных случаях, когда $L(t) \equiv 1$, $\lambda \neq -1$ и $L(t) = \ln t$, $\lambda = -1$, приведена в работе [65], в которой указана также более ранняя литература по данному вопросу.

Асимптотическое выражение при $x \rightarrow 0$ для интеграла

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha xt} (\ln t)^{-1} dt, \quad \alpha > 0, \quad \text{т. е. } L(t) = (\ln t)^{-1}, \quad \lambda = 0,$$

дано в [85]. В силу теоремы 14.1 при $x \rightarrow 0$ легко найти полное разложение

$$\Omega(x) \sim (-\ln \alpha x)^{-1} (\alpha x)^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} (\ln \alpha x)^{-h} \Gamma^{(h)}(1). \quad (18.134)$$

При $h(t) = e^{-f(t)}$, $f(t) \in LE$, $x \rightarrow 0$ асимптотика интеграла Лапласа получена в [63], а разложение при более общих предположениях относительно $h(t)$ — в [78]. В работе [29] приведены примеры функций $h(t)$, когда интеграл Лапласа при $x \rightarrow +0$ не имеет определенной асимптотики.

Исследованию асимптотики общего интеграла Меллина при $x \rightarrow \infty$ посвящены работы [35, 38, 45]; частные случаи рассмотрены в [82, 161]. К этому интегралу относится также формула Поста—Уидера [125, 156] для обращения преобразования Лапласа. Формально согласно (18.100) она получается следующим образом. Если $f(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} F(\tau) d\tau$, то $(-1)^n f^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} F(\tau) \tau^n d\tau$. После замены p на nt^{-1} и подстановки $n\tau = ut$ в точке непрерывности функции $F(t)$ из (18.100) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n F\left(\frac{tu}{n}\right) du = F(t). \quad (18.135)$$

Некоторое обобщение этой формулы дано в [92].

Библиография по вопросу об асимптотическом представлении функций Эрмита $H_\nu(z)$ указана в п. 21.7.3. Асимптотика неполной Γ -функции исследована в работах [8, 47, 67, 127, 128, 149, 151, 374, 384]. В [74] поставлена следующая задача: какое значение должно принимать y , чтобы в соотношении $\Gamma(n-y, n) \sim \frac{1}{2} \Gamma(n)$ погрешность была по возможности малой? Для более общего интеграла эта задача решена в [370].

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ И ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОНТУРА В СЛУЧАЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОДЫНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 19. МЕТОД ПЕРЕВАЛА

19.1. Точки перевала и линии спуска

19.1.1. Рассмотрим интеграл

$$\Omega(z) = \int_L e^{zg(t)} h(t) dt, \quad (19.1)$$

где функции $g(t)$ и $h(t)$ аналитичны в области D на комплексной плоскости t , $t = \sigma + it$, $L \subset D$. Концы кривой L обозначим через a и b , причем допускаются бесконечные a и b , если интеграл сходится. Кривая L ориентирована от a к b . Функции предполагаются аналитическими, чтобы согласно теореме Коши [167] контур L можно было в D свободно деформировать, сохраняя при этом концы a и b . Эти концы могут находиться на границе D , где аналитичность данных функций может быть нарушена. Деформирование контура открывает новые возможности для асимптотического разложения интегралов, так как нередко путь интегрирования можно провести через существенно критические точки или вблизи их и выделить асимптотические вычеты. Определение асимптотического вычета в комплексной плоскости дано в § 20.

Часто все же встречаются интегралы, в которых функция $g(t)$ или $h(t)$ в области D имеет изолированные особые точки. Все они для интеграла (19.1) считаются критическими. Эти случаи рассмотрены в гл. VI. Разным видам деформирования пути интегрирования посвящены все дальнейшие параграфы второго тома.

Ради простоты сначала положим $z = x > 0$. Как и при методе Лапласа, можно ожидать, что критическими будут точки, в которых $|e^{xg(t)}| = e^{x\operatorname{Re}g(t)}$ или $\operatorname{Re}g(t)$ будет наибольшим. Но функция $u(\sigma, \tau) = \operatorname{Re}g(t)$ в области D является гармонической и согласно принципу максимума [167] внутри D не может принимать максимального значения. Поэтому в данном случае рассужде-

ния все же будут иными, чем при методе Лапласа. Следует учитывать, что при фиксированных концах линии L можно выбрать разные пути интегрирования. Если на выбранной кривой функция $u(\sigma, \tau)$ принимает максимальное значение во внутренней точке $P_m(\sigma_m, \tau_m)$ и a и b конечны, то интеграл (19.1) имеет оценку $O(\mu(x))$, где $\mu(x) = \exp[xu(\sigma_m, \tau_m)]$. На разных кривых в общем случае $\mu(x)$ будет иметь разные порядки, и легко понять, что существенно критической может быть только такая точка P_m^* , в которой $\mu(x)$ имеет минимальный порядок, т. е. там u имеет минимум. В противном случае подходящим выбором другого пути интегрирования для данного интеграла получили бы асимптотику более низкого порядка.

Чтобы найти P_m^* , допустим, что все точки P_m , находящиеся на разных путях интегрирования, соединены кривой. В точке P_m^* производная от $u(\sigma, \tau)$ по направлению касательной к этой кривой равна нулю. Но в нуль обращается также производная от $u(\sigma, \tau)$ по направлению касательной в P_m^* к пути интегрирования. Отсюда следует, что в P_m^* имеем $\frac{\partial u(P_m^*)}{\partial \sigma} = \frac{\partial u(P_m^*)}{\partial \tau} = 0$.

Целесообразно также применить другую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим в системе $O\sigma\tau$ поверхность $u = u(\sigma, \tau)$ и назовем ее *рельефной поверхностью* (РП). Ее вид удобно исследовать по *линиям уровня* (ЛУ) функции $u(\sigma, \tau)$. Дискретное семейство ЛУ на плоскости t назовем *картой* для РП. Некоторые свойства линий уровня приведены в [170].

Пусть кривой L на карте соответствует линия C на РП, точкам P на карте — точки Q на РП (рис. 1). Если в точке P_0 $\frac{\partial u(P_0)}{\partial \sigma} = \frac{\partial u(P_0)}{\partial \tau} = 0$, то касательная плоскость к РП в соответствующей точке Q_0 параллельна плоскости $O\sigma\tau$. Точка Q_0 на РП называется *седловой точкой*, или *точкой перевала*, но мы будем так называть и соответствующую ей точку P_0 на карте (рис. 1). В природе такая точка находится на горном перевале, если хотим по тропинке с одной долины попасть в другую, поднимаясь по возможности ниже над уровнем моря. Ввиду такой интерпретации в (19.1) мы взяли функцию $e^{zg(t)}$, а не $e^{-zg(t)}$, как в § 16.

Пусть P_0 определяется значением $t_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, $g(t) = u(\sigma, \tau) + iv(\sigma, \tau)$. Из формул

$$g'(t) = \frac{\partial u}{\partial \sigma} - i \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial \sigma} \quad (19.2)$$

следует, что

$$g'(t_0) = 0, \quad \frac{\partial v(P_0)}{\partial \sigma} = \frac{\partial v(P_0)}{\partial \tau} = 0. \quad (19.3)$$

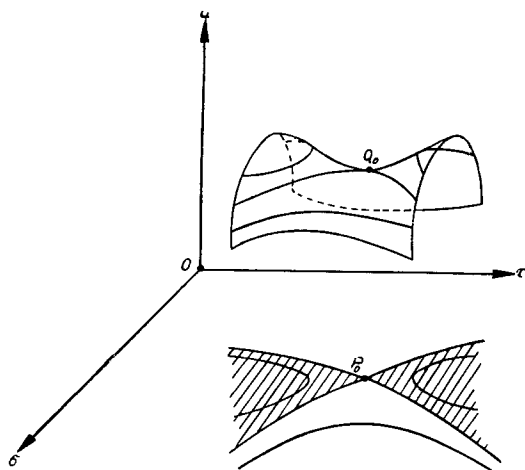


Рис. 1

Из уравнения (19.3) получаем правило для отыскания седловых точек, формально совпадающее с приемом определения стационарных критических точек в случае вещественного переменного. В области D может быть несколько точек перевала. Сначала допустим, что имеем только одну точку. Если $g''(t_0) \neq 0$, то седловую точку назовем *простой*, а если $g''(t_0) = 0$, — то *кратной*, причем кратность k означает, что $g^{(j)}(t_0) = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$, $g^{(k+1)}(t_0) \neq 0$.

Из дальнейшего текста убедимся в том, что для интеграла (19.1) критическими точками являются концы пути интегрирования и точки перевала, причем критичность понимается в таком же смысле, как в п. 16.1.1. Более точное определение критичности дано в § 20.

19.1.2. Исследуем свойства линий уровня, проходящих через точку P_0 . Предположим, что седловая точка имеет кратность $n-1$, $n \geq 2$. Тогда в окрестности t_0 имеем представление

$$w_0 = g(t) - g(t_0) = c_n(t-t_0)^n + O((t-t_0)^{n+1}), \quad c_n \neq 0, \quad (19.4)$$

или при обозначениях $t-t_0 = re^{i\psi}$, $c_n = \rho e^{i\alpha}$

$$w_0 = r^n \rho \cos(n\psi + \alpha) + ir^n \rho \sin(n\psi + \alpha) + O(r^{n+1}). \quad (19.4')$$

Поскольку на искомым линиях $u(t) = u(t_0)$, то на них $\operatorname{Re} w_0 = 0$ и $\rho \cos(n\psi + \alpha) + O(r) = 0$. Отсюда видно, что из P_0 выходит $2n$

линий уровня, касательные к которым образуют угол $\psi = \frac{\pi}{2n}(2k+1) - \frac{\alpha}{n}$ с осью $O\sigma$, причем целое число k может принимать $2n$ различных значений так, чтобы $\psi \in (-\pi, \pi]$. Назовем эти линии *основными линиями уровня* (ОЛУ). Отдельные части t -плоскости между двумя смежными ОЛУ в окрестности точки P_0 назовем *основными секторами* (ОС). В силу (19.4') в каждом из них в окрестности точки t_0 и $u(P) - u(P_0)$ сохраняет знак.

Нередко P_0 является единственной седловой точкой и плоскость с помощью ОЛУ разбивается на не более чем четыре части. Тогда знак сохраняется в каждой из этих частей. Более сложные случаи рассмотрены ниже, а также в § 24.

На РП соответствующие кривые, полученные пересечением РП и касательной плоскости, проходящей через Q_0 , отделяют *горы* (применяются также названия *холмы*, *возвышенности*) от *долин*. Горами и долинами для критической точки будем называть также соответствующие ОС. Чтобы отличить гору от долины, достаточно вычислить $u(P)$ в одной точке вне P_0 . Если $u(P) > u(P_0)$, то точка P находится на горе. Следует учитывать, что горы и долины чередуются. *На рисунках горы заштрихованы.*

Разбиение t -плоскости на ОС с помощью ОЛУ имеет большое значение при определении наиболее выгодного пути интегрирования, так как выбор пути зависит от того, где находятся концы пути. Кривую, вдоль которой функция u изменяется монотонно, назовем *линией спуска* (ЛС) (*descent line*). Целесообразно соблюдать следующее правило: если это возможно, то путь должен состоять из линий спуска, число которых по возможности должно быть меньше. Это позволяет легко определять критические точки.

19.1.3. Возможны разные ситуации. Рассмотрим простейший случай, когда $n=2$ (рис. 2) и плоскость разбивается на не более чем четыре основных сектора. В зависимости от расположения концов a и b пути интегрирования имеем следующие случаи.

1°. *Путь в гору.* Точки a и b находятся либо в одном ОС, либо в смежных секторах, но не на одной линии уровня. Тогда a и b всегда можно соединить одной линией спуска и критическим бу-

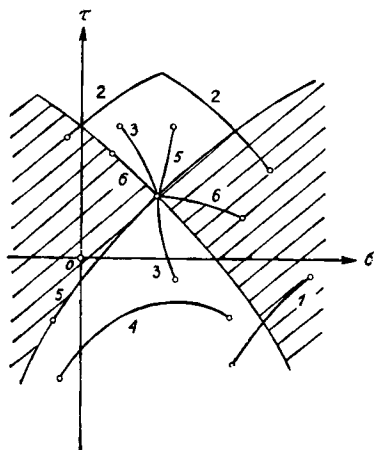


Рис. 2

дет тот конец пути, в котором u больше. Концом может быть также точка перевала.

2°. *Путь из горы в гору.* Точки a и b находятся на противоположных горах. Тогда путь можно деформировать в две линии спуска, исходящие из a и b и пересекающиеся либо в точке перевала, либо в долине. Критическим является тот из концов, в котором u больше. При одинаковых значениях u оба конца будут критическими.

3°. *Путь из долины в долину.* Точки a и b находятся в противоположных долинах. Путь следует деформировать в две линии спуска, пересекающиеся в точке перевала. Критической является точка перевала. Метод, в котором применяется такая деформация пути, называется *методом перевала* (*Sattelpunkt-methode, Раvmethode, saddle point method, méthode du col*).

4°. *Путь по линии уровня.* Точки a и b находятся на одной линии уровня, где $u = \alpha$. Тогда множитель $e^{x\alpha}$ можно вынести за знак интеграла (19.1). Получаем интеграл $\int_a^b e^{ixv} h(t) dt$. Если ЛУ задавать в виде $\sigma = \sigma(s)$, $\tau = \tau(s)$, то $v(\sigma, \tau) = g(s)$, $h(t) = H_1(s) + iH_2(s)$, $dt = [\sigma'(s) + i\tau'(s)] ds$ и задача об асимптотическом разложении интеграла приводится к результатам, полученным в § 16.

Покажем, что на ЛУ (кроме ОЛУ) значения функции v меняются монотонно. Выберем в точке P на ЛУ некоторое направление $\vec{l}(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Тогда согласно формулам Даламбера—Эйлера имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial l}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial \tau} \sin \alpha\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial \tau} \sin \alpha\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right)^2 = |g'(t)|^2. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Если \vec{l} — касательная к ЛУ, то $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, поэтому $\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{dv}{ds} = \pm |g'(t)| \neq 0$ и v изменяется монотонно. Исключение имеем в точке перевала, в которой $g'(t) = 0$. Тогда путь находится на ОЛУ. Следовательно, критическими являются только оба конца пути, если точка перевала не находится на L . Поэтому иногда целесообразно путь деформировать в две линии спуска, проходящие через a и b , на которых $u < \alpha$, так как тогда на каждой из этих линий получаем случай 1°. Подробнее это рассмотрено в п. 19.3.

Из монотонности v следует также, что ЛУ не может быть замкнутой и она кончается либо на границе области D , либо в особой точке для $g(t)$.

5°. *Путь из ОЛУ в долину.* Точка a находится на ОЛУ и не совпадает с точкой перевала, точка b — в противоположной долине. Путь следует деформировать в ОЛУ до точки перевала, а потом по линии спуска до b , т. е. случай 5° приводится к 4° и 1°.

6°. *Путь из ОЛУ в гору.* Точка a находится на ОЛУ и не совпадает с точкой перевала, точка b — на противоположной горе. Случай 6° также приводится к 4° и 1°, но критической является только точка b .

19.1.4. Рассмотрим некоторые дополнения к сказанному.

1°. Если точка P_0 — кратная точка перевала, то случаи, перечисленные в п. 19.1.3, с возможными несущественными изменениями сохраняются. Если имеем несколько точек перевала, то карта усложняется, но возможные ситуации дополняются только тем, что путь иногда приходится деформировать через несколько точек перевала. Все точки перевала являются критическими. Если это возможно, то путь следует деформировать так, чтобы он прошел только через ту точку перевала, в которой значение u меньше. Иногда имеем счетное множество критических точек (см. примеры 4°—6° в п. 19.5), но учитываем все лишь в исключительных случаях. Видоизменение карты в случае нескольких точек перевала показано на примерах в п. 19.5, а также в следующих параграфах, где даны более подробные пояснения к построению карты (п. 19.5.3, 3°).

2°. ОЛУ может состоять из несвязных частей, причем некоторые из них не проходят через P_0 . Такие случаи рассмотрены в п. 19.5.3, 3° и в п. 24.2.1.

3°. Пусть вместо x имеем $z=re^{i\varphi}$. Множитель $e^{i\varphi}$ можно присоединить к $g(t)$ и получить $g^*(t)=e^{i\varphi}g(t)$. Тогда будем иметь другие функции u и v , но точки перевала не будут меняться. Из формул (19.4) и (19.4') следует, что в окрестности точки P_0 карта в первом приближении изменяется только поворотом на угол φ вокруг P_0 . Поэтому с введением комплексного параметра новые случаи не появляются, но после поворота карты один случай может перейти в другой.

4°. При интегрировании по линии спуска меняется также $v(\sigma, \tau)$. Поэтому кажется, что удобнее интегрировать по такой ЛС, вдоль которой $v=\text{const}$, т. е. в (19.4') $\text{Im } \psi=0$, так как тогда e^{ixv} можно было бы вынести за знак интеграла. Из (19.4') следует, что в каждом ОС через точку перевала P_0 проходит одна такая линия, причем касательная к ней в P_0 является биссектрисой угла основного сектора. Линии, на которых $v=\text{const}$, называются *линиями наибо́льшего спуска* (ЛНС). Так

называются и соответствующие линии на РП. Известно, что семейства $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ ортогональны [167]. Согласно свойствам гармонических функций через каждую другую точку в области D также проходит только одна ЛНС.

Название ЛНС объясняется при анализе (19.5). Если на ЛНС выбрать параметр s , то будем иметь $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ и $\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| = |g'(t)| = \max \left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|$, поэтому вдоль ЛНС u меняется быстрее всего. Отсюда следует также физическая интерпретация ЛНС. Если плоскость $O\sigma\tau$ — поверхность земли и $u(P_0) > 0$, а $u(P)$ — потенциал гравитационного поля, то вдоль ЛНС потенциал изменяется быстрее всего. По ЛНС на РП потекла бы вода, если источник находился в Q_0 . Целесообразность деформирования пути по ЛНС проанализирована в следующих пунктах.

19.2. Основные теоремы

19.2.1. Рассмотрим построение асимптотического разложения интеграла (19.1), если точка $t_0 \in \bar{D}$ является единственной критической точкой и одним концом пути ($t_0 = a$), а L при фиксированном $\varphi = \text{arg } z$ совпадает с линией спуска для $\text{Re } e^{i\varphi} g(t)$. Если t_0 находится на границе области D , то для $g(t)$ и $h(t)$ эта точка может быть особой. Этот факт в дальнейшем будет учитываться. Формальные действия и методы дальнейших доказательств, по существу, мало отличаются от рассмотренных в § 16.

Поскольку L — линия спуска, то для каждого $\delta > 0$ можно найти такое $\eta > 0$, что $\text{Re } e^{i\varphi} [g(t_0) - g(t)] > \eta$ при $t \in L \setminus L_\delta$, где L_δ — та часть кривой L , которая находится внутри круга $|t - t_0| < \delta$. Конец кривой $L \setminus L_\delta$ обозначим через a_δ и оценим интеграл по $L \setminus L_\delta$ при $z = re^{i\varphi}$, $r \rightarrow \infty$. Если $b \neq \infty$, то имеем

$$\left| \int_{a_\delta}^b e^{zg(t)} h(t) dt \right| \leq |e^{zg(t_0)}| \int_{a_\delta}^b \exp[-r \text{Re } e^{i\varphi} (g(t_0) - g(t))] |h(t)| ds \leq |e^{zg(t_0)}| e^{-r\eta} \int_{a_\delta}^b |h(t)| ds = o(e^{zg(t_0)} z^{-N}).$$

При $b = \infty$ предположим, что интеграл (19.1) по L абсолютно сходится, если $r \geq r_0$, $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$. Тогда в силу

$$\operatorname{Re} z[g(t_0) - g(t)] = (r - r_0) \operatorname{Re}[e^{i\varphi}(g(t_0) - g(t))] + \\ + r_0 \operatorname{Re}[e^{i\varphi}(g(t_0) - g(t))] \geq (r - r_0)\eta + \operatorname{Re} z_0 g(t_0) - \operatorname{Re} z_0 g(t)$$

получаем

$$\left| \int_{a_\delta}^{\infty} e^{zg(t)} h(t) dt \right| \leq |e^{zg(t_0)}| e^{-r\eta} \exp[r_0\eta - \operatorname{Re} z_0 g(t_0)] \times \\ \times \int_{a_\delta}^{\infty} |e^{zg(t)}| |h(t)| ds = o(e^{zg(t_0)} z^{-N}). \quad (19.6)$$

Из (19.6) следует, что достаточно требовать сходимость интеграла (19.1) при $r=r_0$. Таким образом, доказана

Лемма 19.1. Пусть $z=re^{i\varphi}$, $u=\operatorname{Re}(e^{i\varphi}g(t))$ и функции $g(t)$ и $h(t)$ аналитичны в D . Если на линии спуска $L \subset D$ для $u(t)$, исходящей из $t_0 \in \bar{D}$, тах $u(t)=u(t_0)$ и интеграл (19.1) сходится при $z=r_0e^{i\varphi}$, то при любой фиксированной точке $a_\delta \in L$, отсекающей на L до точки t_0 отрезок L_δ , при $r \rightarrow \infty$ имеем оценку

$$\int_{L \setminus L_\delta} e^{zg(t)} h(t) dt = o(e^{zg(t_0)} z^{-N}). \quad (19.7)$$

Примечания. 1°. Если $|g(t)|$ остается ограниченным при $t \rightarrow \infty$, $t \in L$, то для выполнения последнего условия в лемме 19.1 достаточна сходимость интеграла $\int_L |h(t)| ds$. При $|g(t)| \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Re}(e^{i\varphi}g(t)) \sim -A|t|^\alpha$, $A > 0$, $\alpha > 0$, допускается условие $|h(t)| < Me^{c|t|^\alpha}$, $M > 0$, $c \geq 0$, $t \in L$, так как r_0 можно выбрать столь большим, чтобы $r_0A - c > 0$.

2°. При переменном φ η в общем зависит от φ . В дальнейшем сегмент изменения φ всегда будем выбирать так, чтобы η не зависело от φ .

19.2.2. Рассмотрим разложение интеграла (19.1) по L_δ , причем число δ в дальнейшем будем фиксировать достаточно малым. Пусть в $D \cap K(t_0, \delta)$ имеем разложения

$$g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^{\lambda_k}, \quad 0 \leq \lambda_k \uparrow + \infty; \quad (19.8)$$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t-t_0)^{\mu_k}, \quad -1 < \mu_k \uparrow + \infty. \quad (19.9)$$

Если $\lambda_0 = 0$, т. е. $g(t_0) = a_0$, то первый член в (19.8) можно отделить и ввести функцию $g_0(t) = g(t_0) - g(t)$, а за знак интеграла вынести множитель $e^{zg(t_0)}$. Поэтому впредь в интеграле (19.1) $g(t)$ будем заменять на $-g_0(t)$, где $g_0(t)$ обладает разложением (19.8), в котором $\lambda_0 > 0$. Ветвь функции $(t-t_0)^{\lambda_k}$ понимается так, что $(t-t_0)^{\lambda_k} \sim |t-t_0|^{\lambda_k} e^{i\lambda_k \psi}$ при $t \rightarrow t_0$, $t \in L$, где ψ — угол, образованный касательной к L в точке t_0 в направлении убывания u , $\psi \in (-\pi, \pi]$. Это означает, что функция $(t-t_0)^{\lambda_k}$ отображает кривую L в другую кривую на некотором листе римановой поверхности (или на нескольких листах).

Применим подстановку $w = g_0(t)$, $\arg w \sim \lambda_0 \psi + \alpha$, где $a_0 = |a_0| e^{i\alpha}$. Поскольку L — линия спуска, то $\operatorname{Re} e^{i\psi} g_0(t) > 0$ вдоль L . Целесообразно, чтобы

$$|\beta| = |\arg w + \varphi| \sim |\lambda_0 \psi + \alpha + \varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad t \in L_\delta. \quad (19.10)$$

Этого можно добиться, взяв в случае необходимости для α не главное значение α_0 , а $\alpha = \alpha_0 + 2m\pi$, $|m| \in N$, $\alpha_0 \in (-\pi, \pi]$. Таким образом фиксированное α впредь будем брать во всех действиях с a_0 .

Согласно теореме 4.10 в окрестности $w = 0$ существует обратная функция $t = t(w)$, ветвь которой при $w \rightarrow 0$ имеет разложение

$$t \sim t_0 + \sum_{k=0}^{\infty} d_k w^{\nu_k}, \quad d_0 = a_0^{-\frac{1}{\lambda_0}}, \quad \nu_0 = \frac{1}{\lambda_0}, \quad (19.11)$$

причем $\arg(t-t_0) \sim \psi$, если $w \rightarrow 0$ вдоль кривой L_δ^* , которая является отображением L_δ на римановой поверхности плоскости w . При этом L_δ^* может не находиться на основном листе. Функция $\omega = e^{i\varphi} w$ отображает L_δ^* на \tilde{L}_δ в плоскости ω , и \tilde{L}_δ согласно (19.10) находится в секторе $|\arg \omega| \leq \pi/2 - \varepsilon$.

В силу (19.9) и теоремы 4.7 функция $h(t(w))$ на кривой L_δ^* и в ее окрестности имеет разложение

$$h(t(w)) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k w^{\kappa_k}, \quad B_0 = b_0 d_0^{\mu_0}, \quad \kappa_0 = \mu_0 \nu_0;$$

$$H(w) = h(t(w)) t'(w) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^{\gamma_k}, \quad c_0 = B_0 d_0 \nu_0, \quad \gamma_0 = \kappa_0 + \nu_0 - 1. \quad (19.12)$$

Поэтому после подстановки $w = g_0(t)$ получаем

$$\Omega_\delta(z) = \int_{L_\delta} e^{z g_0(t)} h(t) dt = \int_{L_\delta^*} \exp[-re^{i\varphi}\omega] H(\omega) d\omega. \quad (19.13)$$

Число δ можно выбрать столь малым, чтобы при данном n в соотношении

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^n c_k \omega^{\nu_k} + \omega^{\nu_{n+1}} \rho(\omega) \quad (19.12')$$

имела место оценка $|\rho(\omega)| < M$, $\omega \in L_\delta^*$. Кривую L_δ^* деформируем в отрезок с концом ζ . Тогда

$$\begin{aligned} \Omega_\delta(z) &= \sum_{k=0}^n c_k \int_0^\zeta \exp[-re^{i\varphi}\omega] \omega^{\nu_k} d\omega + \\ &+ \int_0^\zeta \exp[-re^{i\varphi}\omega] \omega^{\nu_{n+1}} \rho(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\zeta \exp[-re^{i\varphi}\omega] \omega^{\nu_k} d\omega &= e^{-i\varphi(\nu_k+1)} \int_0^{|\zeta|e^{i\beta}} e^{-r\omega} \omega^{\nu_k} d\omega = \\ &= e^{-i\varphi(\nu_k+1)} \int_0^{\infty} e^{-r\omega} \omega^{\nu_k} d\omega + o(r^{-N}) = \Gamma(\nu_k+1) z^{-\nu_k-1} + o(z^{-N}), \end{aligned} \quad (19.14)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\zeta \exp[-re^{i\varphi}\omega] \omega^{\nu_{n+1}} \rho(\omega) d\omega \right| &< \\ &< M \int_0^\zeta \exp[-\operatorname{Re}(re^{i\varphi}\omega)] |\omega|^{\nu_{n+1}} ds \leq \\ &\leq M \int_0^{|\zeta|} e^{-rs \sin \varepsilon} s^{\nu_{n+1}} ds = O(r^{-\nu_{n+1}-1}). \end{aligned}$$

Теорема 19.1. Пусть выполнены условия леммы 19.1 и в некоторой окрестности кривой L_δ имеют места разложения (19.9) для $h(t)$ и (19.8) для $g_0(t) = g(t_0) - g(t)$, причем $\alpha = \arg a_0$

выбрано согласно (19.10), $\lambda_0 > 0$. Тогда при $|z| \rightarrow \infty$ имеет место разложение

$$\int_L e^{zg(t)} h(t) dt \sim e^{zg(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma(\gamma_k + 1) z^{-\gamma_k - 1}, \quad (19.15)$$

где c_k и γ_k определены в (19.12).

Примечание. В частном случае, когда $\lambda_k = k + \lambda$, $\mu_k = k + \mu$, имеем $\nu_k = \frac{k+1}{\lambda}$, $\kappa_k = \frac{\mu+k}{\lambda}$, $\gamma_k = \frac{\mu+k+1}{\lambda} - 1$ и

$$c_0 = \frac{b_0}{\lambda} a_0^{-\frac{\mu+1}{\lambda}}, \quad c_1 = \left[\frac{b_1}{\lambda} - \frac{(\mu+2)a_1 b_0}{\lambda^2 a_0} \right] a_0^{-\frac{\mu+2}{\lambda}},$$

$$c_2 = \left[\frac{b_2}{\lambda} - \frac{(\mu+3)a_1 b_1}{\lambda^2 a_0} + \right.$$

$$\left. + \{(\lambda + \mu + 3)a_1^2 - 2\lambda a_0 a_2\} \frac{(\mu+3)b_0}{2\lambda^3 a_0^2} \right] a_0^{-\frac{\mu+3}{\lambda}}.$$

19.2.3. Проанализируем более подробно применение теоремы 19.1.

1°. Пусть точка $t_0 = a$ находится внутри D и $g'(t_0) \neq 0$. Функции $g(t)$ и $h(t)$ аналитичны в t_0 . Разложения (19.8) и (19.9) сходятся в некоторой окрестности t_0 и $\lambda_k = k + 1$, $\mu_k = k + \mu$, $\mu \in N$, $\gamma_k = k + \mu$. Функция $t(w)$ однозначна, и $w = g_0(t)$ отображает окрестность точки $t = t_0$ на некоторую окрестность точки $w = 0$. При фиксированном φ можно соединить точку t_0 с точкой b с помощью разных линий спуска. На всех линиях спуска справедливо (19.15). Эти линии можно брать с разными ψ , лишь бы при данном φ выполнялось условие (19.10), где $\lambda_0 = 1$. Из геометрических соображений ясно, что ψ может меняться в интервале, длина которого не превосходит π , и пределы для изменения ψ можно определить, если в точке t_0 провести касательную к линии уровня, проходящей через t_0 .

Пусть $\arg z$ меняется. Путь L можно деформировать в линию спуска, если

$$\operatorname{Re} zg(t_0) > \operatorname{Re} zg(b). \quad (19.16)$$

Решая при данных $g(t)$, t_0 и b неравенство (19.16), которое приводится к $A \sin \varphi > B \cos \varphi$, получаем промежуток $[\varphi_1, \varphi_2]$, в котором должен измениться $\varphi = \arg z$, чтобы можно было непосредственно использовать теорему 19.1. Длина промежутка равна $\pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, причем ε появляется в силу примечания 2 к лемме

19.1. Если в некоторой его части φ не принимает главного значения, то следует брать $\varphi \in [\varphi_1^*, \varphi_2^*] \cup [\varphi_3, \varphi_4] \in (-\pi, \pi]$. Согласно вышесказанному об изменении ψ для всех $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ можно найти такое ψ , чтобы было удовлетворено условие (19.10). Следовательно, при $\arg z \in [\varphi_1, \varphi_2]$ справедливо разложение

$$\int_L e^{zg(t)} h(t) dt \sim e^{zg(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\mu)! z^{-k-\mu-1}. \quad (19.17)$$

Для нахождения коэффициентов c_k можно применять приемы, указанные в п. 16.2.2.

Формула (19.17) поясняет также, почему в п. 19.1.3, 3° не получается асимптотическое разложение, если L не проходит через точку перевала. Пусть в точке t_0 на L $\operatorname{Re}(e^{i\varphi} g(t))$ принимает максимальное значение. При данном φ всегда можно найти такие линии спуска, соединяющие a с t_0 и t_0 с b , что на них сохраняется (19.10) и справедливо (19.17). В силу равенства

$$\Omega(z) = - \int_{t_0}^a e^{zg(t)} h(t) dt + \int_{t_0}^b e^{zg(t)} h(t) dt$$

члены в разложениях для отдельных интегралов взаимно сокращаются и получаем соотношение $\Omega(z) = e^{zg(t_0)} O(z^{-N})$, дающее весьма малую информацию. Отметим, что такой случай невозможен при действительном t , так как тогда $g'(t_0) = 0$.

Чтобы в этом случае получить асимптотическое разложение, асимптотический вклад следует брать по такой кривой, концам которой на РП соответствуют точки, лежащие ниже точки перевала. Однако и при таком выборе асимптотического вклада иногда получается формальное разложение. Конкретные примеры рассмотрены в [174].

2°. Пусть t_0 — точка перевала кратности $m-1$, т. е. $\lambda_k = k+m$, $m \in N_2$. Разложения (19.8) и (19.9), так же как в 1°, сходятся в окрестности t_0 , причем разложение (19.8) для $g_0(t)$ имеет вид

$$g_0(t) = - \sum_{k=m}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^{m+k}. \quad (19.18)$$

Отсюда видно, что функция $t(\omega)$ m -значна и область однолистности функции $\omega = g_0(t)$ ограничена двумя ОЛУ, охватывающими одну пару ОС — долину и гору. Пусть функция $\omega = g_0(t)$ отображает основную долину, содержащую путь интегрирования от a до t_0 , на соответствующий лист римановой поверхности

плоскости ω . Переменную на этом листе обозначим через ω_0 , причем $\arg \omega_0$ не обязательно принимает главное значение. Выберем α таким, чтобы при данном φ удовлетворялось (19.10). Тогда согласно (19.15) имеем

$$\int_a^{t_0} e^{zg(t)} h(t) dt \sim -e^{zg(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma\left(\frac{\mu+1+k}{m}\right) z^{-\frac{\mu+1+k}{m}}. \quad (19.19)$$

Пусть вторая часть пути L от t_0 до b находится в l -й долине, $l \leq m-1$, считая в положительном направлении от основной долины. Этой долине соответствует лист с номером l на римановой поверхности, считая от листа, на котором имеем переменную ω_0 . Переменную на этом листе обозначим через ω_l . Имеем соотношение $\omega_l = \omega_0 e^{i2\pi l}$. Поэтому с учетом асимптотики соответствующей ветви обратной функции $t_l(\omega)$ получаем разложение

$$h(t_l(\omega)) t_l'(\omega) = H(\omega) = e^{\frac{i2\pi l(\mu+1)}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{\frac{i2\pi k l}{m}} \omega_0^{\frac{\mu+k+1}{m}-1}.$$

Следовательно, при $z \rightarrow \infty$, $\arg z = \varphi$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^b e^{zg(t)} h(t) dt \sim \\ & \sim e^{zg(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma\left(\frac{\mu+1+k}{m}\right) \exp\left[\frac{i2\pi l}{m}(\mu+k+1)\right] z^{-\frac{\mu+k+1}{m}} \end{aligned} \quad (19.20)$$

и

$$\begin{aligned} & \int_L e^{zg(t)} h(t) dt \sim \\ & \sim e^{zg(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[\exp\left\{\frac{i2\pi l}{m}(\mu+k+1)\right\} - 1 \right] \Gamma\left(\frac{\mu+k+1}{m}\right) z^{-\frac{\mu+k+1}{m}}. \end{aligned} \quad (19.21)$$

При $m=2p$, $l=p$ в (19.21) получаем множитель $(-1)^{\mu+k+1}-1$. Если $\mu=0$, то имеем $-[1+(-1)^k]$. Формула (19.21) совпадает с формулой (16.26), если L находится на действительной оси, но теперь интегрируем по ней в отрицательном направлении. Однако в (16.26) не требуется аналитичность функций $g(t)$ и $h(t)$.

Если выполнено условие (19.16), то (19.20) имеет место при $\arg z$, изменяющемся в интервале длиной $\pi - \varepsilon$. Угол ψ может изменяться только в интервале длиной $\frac{\pi}{m} - \frac{\varepsilon}{m}$. Но поскольку $\lambda_0 = m$ и в условии (19.10) имеем $m\psi$, то при всех указанных $\arg z$ можно найти такое ψ , чтобы (19.10) удовлетворялось. Подобные рассуждения относятся к (19.19), если

$$\operatorname{Re} zg(t_0) > \operatorname{Re} zg(a). \quad (19.22)$$

Однако в формуле (19.21) $\arg z$ должен одновременно удовлетворять обоим условиям: (19.16) и (19.22). Поэтому длина интервала изменения $\arg z$ в общем меньше $\pi - \varepsilon$. Интервал не сужается, если $g(a) = g(b)$, так как тогда (19.16) совпадает с (19.22).

Нередко встречается случай, когда путь в обеих долинах удаляется в бесконечность по направлениям, не выходящим из долин, вдоль которых $\operatorname{Re} zg(t) \rightarrow -\infty$. Тогда промежуток для изменения $\arg z$, при котором справедливо (19.21), в обеих долинах определяется неравенством

$$\operatorname{Re} zg_0(t) < 0, \quad (19.23)$$

причем $\arg t$ может изменяться в таких пределах, какие имеются для него в данных долинах при удалении в бесконечность. Из отдельных решений неравенства (19.23) в каждой долине следует брать общее решение. Часто при фиксированном $\arg z$ нельзя допускать весь возможный промежуток для $\arg t$, поэтому фактически здесь рассматривается цепочка аналитических продолжений для первоначального интеграла. Продолжение совершается поворотом концов пути интегрирования так, чтобы они остались в долинах. После определения из (19.23) промежутка для $\arg z$, в котором существует интеграл, следует проверить выполнение условия (19.10), так как пределы для изменения ψ не всегда совпадают с пределами для изменения $\arg t$ в долине при $t \rightarrow \infty$. Процесс исследования допустимых $\arg z$ проиллюстрирован многими примерами в п. 19.5.

Во многих руководствах рекомендуется в качестве пути интегрирования в данном случае выбирать ЛНС, так как вдоль нее $v \equiv v(t_0)$ и после подстановки $w = g(t_0) - g(t) = u$ имеем действительную переменную, т. е. $\arg w = 0$. Такой выбор пути также кажется естественным, так как вдоль ЛНС u меняется быстрее всего. Тогда задача о разложении интеграла (19.1) непосредственно приводится к лемме Ватсона. Метод, при котором применяется деформирование пути в одну или несколько ЛНС, называется *методом наибоыстрейшего спуска* (МНС, *method of steepest descents, die Methode des steilsten Abstieges*).

Если точки a и b конечные, то обычно ЛНС, исходящие из точки перевала, не проходят ни через a , ни через b . Поэтому путь деформируют либо так, чтобы только при $|t-t_0| < \delta$ он совпал с ЛНС, а потом — с некоторой линией спуска до a или b (так часто поступают на практике), либо по ЛНС до ближайшей особой точки функции $g(t)$ (иногда этой точкой является бесконечность), а оттуда идут по другой ЛНС к концу a или b . Однако МНС согласно второму способу часто оказывается более сложным, чем метод непосредственного интегрирования по линии спуска, и в нем нет необходимости, так как окончательный результат от этого не меняется. Такое деформирование пути может иметь преимущество лишь при более точной оценке остатка, так как проще произвести оценку в случае действительного переменного интегрирования и не требуется выделять окрестность точки t_0 . Этот вопрос будет рассмотрен в третьем томе монографии.

19.2.4. Как уже было отмечено, часто функции $g(t)$ и $h(t)$ (или же одна из них) в окрестности t_0 аналитичны. Тогда (19.8) и (19.9) (или же один из этих рядов) являются рядом Тейлора. От рассмотренных этот случай отличается тем, что здесь легко определить числа γ_k , как это видно из (19.17), (19.19) — (19.21).

Рассмотрим некоторое обобщение формулы (19.21), когда t_0 является точкой перевала и одновременно полюсом или точкой ветвления для $h(t)$, $\lambda_k = k + m$ и в (19.9) $\mu_0 \leq -1$. Точки a и b при фиксированном $\arg z = \varphi_0$ расположены в долинах, как в п. 19.2.3, 2°, и кривая L выбрана так, чтобы она не пересекала разрез, идущий из $t=t_0$ в ∞ . Множитель $e^{i\varphi_0}$ можно считать включенным в $g(t)$, поэтому в (19.1) z заменим на $r > 0$.

При $\mu_0 \leq -1$ нельзя провести путь интегрирования через точку t_0 , так как тогда интеграл (19.1) будет расходиться, но в качестве L можно взять дугу окружности L_δ радиусом δ с центром в t_0 и присоединить к ее концам a_δ и b_δ линии спуска до точек a и b (рис. 3). Поскольку оценки интеграла по линиям aa_δ и bb_δ остаются прежними, асимптотическим вычетом является интеграл по L_δ . Применим к нему такую же подстановку, как в доказательстве теоремы 19.1, т. е. $\omega = g(t_0) - g(t)$. Получаем интеграл (19.13), в котором L_δ^* означает кривую на римановой

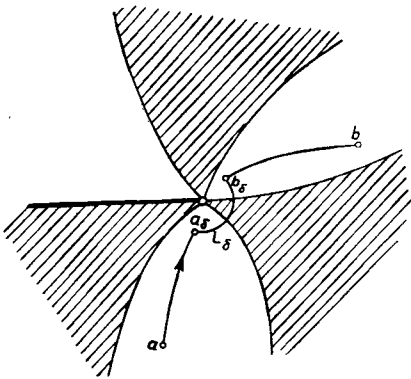


Рис. 3

поверхности, исходящую из точки $\omega = g(a_\delta)$ на основном листе, обходящую l раз в положительном направлении точку $\omega = 0$ и кончающуюся в точке $\omega = g(b_\delta)$ на l -м листе.

В формуле (19.12) имеем $\gamma_k = \frac{\mu_j + p}{m} - 1$, $j \in N$, $p \in N_1$. В частном случае, когда $\mu_j = \frac{\mu + j}{q}$, $q \in N_1$, имеем $\gamma_k = \frac{\mu + k + 1}{mq} - 1$. Разложение (19.12) справедливо на всей кривой L_δ^* , так как вдоль нее одна ветвь обратной m -значной функции $t(\omega)$ непрерывно переходит в другую и для каждой ветви разложение имеет место. Поэтому (19.12) можно подставить в (19.13). Получим такую же оценку остатка, как в доказательстве теоремы 19.1.

Остается вычислить интеграл $\int_{L_\delta^*} e^{-r\omega} \omega^\gamma d\omega$. Подстановка $\omega = a_0(t-t_0)^m$ переводит L_δ^* в \tilde{L}_δ на плоскости t , причем \tilde{L}_δ при малом δ мало отличается от L_δ . Точки a_δ и b_δ всегда можно выбрать так, чтобы концы a_δ' и b_δ' дуги \tilde{L}_δ находились в тех же долинах, в которых находятся a и b .

Пусть сначала $\gamma > -1$. Тогда кривую \tilde{L}_δ можно деформировать в отрезки $a_\delta't_0$ и t_0b_δ' , на которых согласно (19.10) имеем соответственно $|\arg a_0(t-t_0)^m| < \frac{\pi}{2}$ и $|\arg a_0(t-t_0)^m - 2\pi l| < \frac{\pi}{2}$. Далее эти отрезки следует повернуть так, чтобы на них $a_0(t-t_0)^m \geq 0$, т. е. нужно интегрировать по ЛНС для функции $a_0(t-t_0)^m$ и в отдельных интегралах применить подстановки $a_0(t-t_0)^m = \tau$ и $a_0(t-t_0)^m = \tau e^{i2\pi l}$. Получим

$$\begin{aligned} \int_{L_\delta^*} e^{-r\omega} \omega^\gamma d\omega &= a_0^{\gamma+1} m \left\{ \int_{a_\delta'}^{t_0} \exp[-ra_0(t-t_0)^m] (t-t_0)^{m\gamma+m-1} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{b_\delta'} \exp[-ra_0(t-t_0)^m] (t-t_0)^{m\gamma+m-1} dt \right\} = \\ &= - \int_0^A e^{-r\tau} \tau^\gamma d\tau + e^{i2\pi l(\gamma+1)} \int_0^B e^{-r\tau} \tau^\gamma d\tau + o(r^{-N}) = \\ &= \Gamma(\gamma+1) r^{-\gamma-1} [-1 + e^{i2\pi l(\gamma+1)}] + \int_A^\infty e^{-r\tau} \tau^\gamma d\tau - \\ &\quad - e^{i2\pi l(\gamma+1)} \int_B^\infty e^{-r\tau} \tau^\gamma d\tau + o(r^{-N}). \end{aligned}$$

Поскольку левая и правая части полученного равенства — аналитические функции от γ , если $-\gamma \in N_1$, то в силу принципа перманентности для аналитических функций при всех γ , $-\gamma \in N_1$, имеем равенство

$$\int_{L_0^*} e^{-r\omega} \omega^\gamma d\omega = \Gamma(\gamma+1) r^{-\gamma-1} [-1 + e^{i2\pi(\gamma+1)}] + o(r^{-N}). \quad (19.24)$$

Легко убедиться в том, что в (19.24) можно также перейти к пределу при $\gamma \rightarrow -p$, $p \in N_1$. Получим

$$\int_{L_0^*} e^{-r\omega} \omega^{-p} d\omega = (-1)^{p-1} \frac{2\pi i}{(p-1)!} r^{p-1} + o(r^{-N}). \quad (19.25)$$

Теорема 19.2. Пусть 1) функция $g(t)$ аналитична в D и $t_0 \in D$ — единственная седловая точка для $g(t)$ в D ; 2) $g_0(t) = = g(t_0) - g(t)$ обладает разложением (19.18), $m \geq 2$; 3) t_0 является полюсом или алгебраической точкой ветвления для $h(t)$; 4) $h(t)$ аналитична в остальных точках области D и обладает разложением (19.9) без ограничения $\mu_k > -1$, и ветвь для $h(t)$ определяется также с помощью (19.9); 5) точки $a \in D$ и $b \in D$ находятся в долинах для $\operatorname{Re} g(t)$, причем точка b находится в l -й долине, $1 \leq l \leq m-1$, считая в положительном направлении от основной долины, содержащей a ; 6) разрез для выделения ветви функции $h(t)$, если t_0 — точка ветвления, не пересекает кривую, соединяющую в положительном направлении точки a и b ; 7) $\arg a_0$ в (19.18) выбран согласно (19.10), где $\varphi = 0$. Тогда при $r \rightarrow \infty$ имеем разложение

$$\int_a^b e^{rg(t)} h(t) dt \sim e^{rg(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k [-1 + e^{i2\pi(\gamma_k+1)}] \Gamma(\gamma_k+1) r^{-\gamma_k-1}, \quad (19.26)$$

где c_k и γ_k определяются в (19.12), $\gamma_k = \frac{\mu_j + p}{m} - 1$, $j \in N$, $p \in N_1$.

Если $\mu_j = -q + j$, $q \in N_1$, то $\gamma_k = \frac{-q+1+k}{m} - 1$, причем при $-\gamma_k \in N_1$ следует применить формулу (19.25). Если функция $h(t)$ в точке t_0 аналитична, то имеем разложение (19.21).

Примечания. 1°. Можно отказаться от требования (19.10) и считать, что $\arg a_0 \in (-\pi, \pi]$. Тогда следует найти такое l_0 , $|l_0| \in N$, что на $a_\delta t_0$

$$|\arg g_0(t) + \varphi - 2\pi l_0| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad t \in a_\delta t_0, \quad (19.27)$$

где $a_\delta t_0$ лежит в основной долине, $\varphi=0$. Это означает, что при выводе формулы (19.19) ω_0 заменяется на $\omega_0 e^{i2\pi l_0}$ и что в (19.19) члены ряда имеют множитель $\exp \left[\frac{i2\pi l_0}{m} (\mu+k+1) \right]$. В итоге вместо (19.26) имеем

$$\int_a^b e^{rg(t)} h(t) dt \sim \sim e^{rg(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k [e^{i2\pi(l+l_0)(\nu_k+1)} - e^{i2\pi l_0(\nu_k+1)}] \Gamma(\nu_k+1) r^{-\nu_k-1}. \quad (19.26')$$

Соответственно изменяется также (19.21). Назовем (19.26') формулой Перрона—Ваймена [123, 231]. Такая форма разложения позволяет в (19.26') при условиях (19.16) и (19.22) r заменять на z , так как ψ на L_δ всегда можно выбрать так, чтобы при фиксированном l_0 сохранилось (19.27).

2°. Пусть $g(t) = -t^m$, $m > 0$, $t_0 = a = 0$ и $h(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 19.2, $\mu_0 > -1$. Неаналитичность функции $g(t)$ в $t=0$ при $m \in \mathbb{N}_1$ в этом случае не имеет значения, так как разрез в плоскости t можно брать вдоль луча $\arg t = \pi$. Если на луче, на котором $\arg t = \beta$, $\beta \in (-\pi, \pi)$, $|t| \geq \delta > 0$, имеет место оценка $|h(t)| < M |e^{bt^m}|$, $b > 0$, $M > 0$, и $|\arg ze^{i\beta m} - 2\pi l_0| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, то при

достаточно больших $|z|$ существует интеграл $\int_0^{\infty} e^{-zt^m} h(t) dt$ и согласно предыдущему при указанных $\arg z$ и $|z| \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-zt^m} h(t) dt \sim \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Gamma\left(\frac{\mu_k+1}{m}\right) e^{\frac{i2\pi l_0}{m}(\mu_k+1)} z^{-\frac{\mu_k+1}{m}}. \quad (19.28)$$

Эта формула выражает обобщенную лемму Ватсона в комплексной плоскости [231].

19.2.5. Можно доказать теорему, подобную теореме 16.5. Однако рассмотрим ее только в частном случае при условиях теоремы 19.2. Этим дадим обоснование методу Буркхарда, объединенному с методом перевала. В силу этого метод доказательства в некоторых деталях отличается от метода, примененного в п. 16.2.6. Более общая теорема приведена в работе [231].

Применим обозначение $z a_0(t-t_0)^m = \omega$. Представим $e^{-zg_0(t)} = e^{-\omega} e^{\omega G(t)}$ согласно (16.15₁) в виде

$$e^{-zg_0(t)} = e^{-\omega} \left[\sum_{k=0}^n B_k(\omega) (t-t_0)^k + R_n(\omega, t) \right]. \quad (19.29)$$

Если $G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t-t_0)^k$, то

$$B_0 = 1, \quad B_{k+1} = \frac{\omega}{k+1} \sum_{j=0}^k B_j D_{k+1-j}(k+1-j). \quad (19.30)$$

По формуле Тейлора в силу $G(t) = O(t-t_0)$ и аналитичности $G(t)$ имеем

$$|R_n(\omega, t)| = \frac{1}{n!} \left| \int_{t_0}^t \frac{d^{n+1}}{d\tau^{n+1}} [e^{\omega G(\tau)}] (\tau-t_0)^n d\tau \right| < \\ < M_n e^{\delta_1 |\omega| |t-t_0|} C_{n+1}(|\omega|) |t-t_0|^{n+1},$$

где $C_{n+1}(u)$ — полином степени $n+1$ с положительными коэффициентами, $\delta_1 > 0$. Согласно (19.9)

$$h(t) e^{-zg_0(t)} = e^{-\omega} \left[\sum_{k=0}^{n_2} Q_k(\omega) (t-t_0)^{\gamma_k} + \rho_{1,n}(t) e^{\delta_1 |\omega| |t-t_0|} \times \right. \\ \left. \times (t-t_0)^{n+1+\mu_0} C_{n+1}(|\omega|) + \rho_{2,n_1}(t) \sum_{k=0}^{n_1} B_k(\omega) (t-t_0)^{k+\mu_{n_1}+1} \right], \quad (19.31)$$

где n и n_1 выбраны так, чтобы $n+1+\mu_0 > -1$, $\mu_{n_1}+1 > -1$, $Q_k(\omega)$ — полином степени не выше k , $Q_k(\omega) = \sum_{j=0}^k q_{jk} \omega^j$, $\rho_{1,n}(t) = O(1)$, $\rho_{2,n_1}(t) = O(1)$, $\gamma_k = p + \mu_j$, $p \in N$, $j \in N$. При $h(t) \equiv 1$ имеем $Q_k(\omega) \equiv B_k(\omega)$.

Если выполнено (19.10), то в силу предыдущих пунктов при $\gamma_k > -1$

$$\int_{L_\delta} e^{-\omega} Q_k(\omega) (t-t_0)^{\gamma_k} dt = -c(\gamma_k) z^{-\frac{\gamma_k+1}{m}} \left[1 - e^{-\frac{i2\pi t}{m(\gamma_k+1)}} \right] + o(z^{-N}); \quad (19.32)$$

$$\begin{aligned}
 c(\gamma_k) &= \frac{1}{m} (a_0)^{-\frac{\gamma_k+1}{m}} \int_0^\infty e^{-\omega} Q_k(\omega) \omega^{\frac{\gamma_k+1}{m}-1} d\omega = \\
 &= \frac{1}{m} (a_0)^{-\frac{\gamma_k+1}{m}} \sum_{j=0}^k q_{jk} \Gamma\left(\frac{\gamma_k+1}{m} + j\right). \quad (19.33)
 \end{aligned}$$

Согласно принципу аналитического продолжения (19.32) сохраняется также при $\gamma_k \leq -1$, причем в случае, когда $-\frac{\gamma_k+1}{m} \in N_1$, вместо (19.33) следует применять формулу (19.25). Знак «-» в (19.32) появляется вследствие того, что путь идет от a к t_0 .

$Q_k(\omega)$ является линейной комбинацией от $B_k(\omega)$. Так как $B_k(\omega) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} e^{\omega G(t)} \Big|_{t=t_0}$ и при $t \rightarrow t_0$ $G(t) \rightarrow 0$, $\arg[1 - G(t)] = o(1)$, то

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty e^{-\omega} B_k(\omega) \omega^{\frac{\gamma_k+1}{m}-1} d\omega = \\
 &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \int_0^\infty e^{-\omega[1-G(t)]} \omega^{\frac{\gamma_k+1}{m}-1} d\omega \Big|_{t=t_0} = \\
 &= \frac{1}{k!} \Gamma\left(\frac{\gamma_k+1}{m}\right) \frac{d^k}{dt^k} \left[\left(\frac{1}{1-G(t)} \right)^{\frac{\gamma_k+1}{m}} \right]_{t=t_0}. \quad (19.34)
 \end{aligned}$$

Из (19.32) следует, что второй остаток в (19.31) имеет оценку $O\left(z^{-\frac{\mu_{n_1+2}}{m}}\right)$. При оценке первого остатка деформируем путь по отрезкам $a\delta t_0$ и $t_0 b\delta$. Поскольку

$$|\exp(-\omega + \delta_1|\omega|)| \leq \exp[-|\omega|(\sin \varepsilon - \delta_1\delta)],$$

то $\delta > 0$ следует выбрать таким, чтобы при заданном ε $\sin \varepsilon - \delta_1\delta > 0$. Тогда согласно (19.32) для первого остатка в (19.31)

имеем оценку $O\left(z^{-\frac{\mu_0+n+2}{m}}\right)$. Полученные оценки остатков свидетельствуют об асимптотическом характере разложения

$$\int_a^b e^{zg(t)} h(t) dt \sim -e^{zg(t_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c(\gamma_k) \left[1 - e^{\frac{i2\pi l}{m}(\gamma_k+1)} \right] z^{-\frac{\gamma_k+1}{m}}. \quad (19.35)$$

Теорема 19.3. При условиях теоремы 19.2 справедливо разложение (19.35), где $c(\gamma_k)$ определяется формулой (19.33).

Примечания. 1°. Если $h(t) = (t-t_0)^\mu h_0(t)$, где $h_0(t)$ аналитична в D , то можно также применить разложение

$$e^{-zg_0(t)} h_0(t) = e^{-\omega} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^*(\omega) (t-t_0)^k. \quad (19.29')$$

Поскольку в этом случае $\gamma_k = \mu + k$, то согласно (19.34) для $c(\gamma_k)$ имеем также выражение

$$c(\gamma_k) = (a_0)^{-\frac{\mu+k+1}{m}} \frac{1}{k!} \Gamma\left(\frac{\mu+k+1}{m}\right) \frac{d^k}{dt^k} \left[h_0(t) \left(\frac{1}{1-G(t)} \right)^{\frac{\mu+k+1}{m}} \right]_{t=t_0}; \quad (19.36)$$

Однако эта формула, которая получается также из теоремы 19.2 и формулы Лагранжа—Бюрмана, практическое значение имеет лишь в исключительных случаях.

2°. Имеется некоторая модификация теоремы 19.3, когда используется представление $e^{-zg_0(t)} = e^{-\omega} e^{zG^*(t)}$ и вместо (19.31) применяется разложение

$$h(t) e^{-zg_0(t)} = e^{-\omega} \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(z) (t-t_0)^{\gamma_k}, \quad (19.31')$$

где $Q_k^*(z)$ вычисляется с помощью метода, указанного в п. 16.2.2, 4°. Тогда

$$c(\gamma_k) = \frac{1}{m} (a_0)^{-\frac{\gamma_k+1}{m}} Q_k^*(z) \Gamma\left(\frac{\gamma_k+1}{m}\right). \quad (19.33')$$

Возможно, что функции $Q_k^*(z)$ вычислить проще, чем $Q_k(\omega)$, но получаем разложение, в котором коэффициенты стремятся к ∞ при $z \rightarrow \infty$, что усложняет оценку остатка. В конкретных примерах эта модификация применена в работах ван Вина [218, 219].

19.3. Интегралы вдоль линий уровня. Интегралы Фурье

19.3.1. Рассмотрим случай 19.2.3, 1° и возьмем $t_0 = a$. Пусть в (19.16) имеем знак равенства, т. е.

$$\operatorname{Re} zg(a) = \operatorname{Re} zg(b), \quad (19.37)$$

что достигается при определенном $\arg z = \varphi_0$. Предположим, что имеем только одну точку перевала. Тогда для взаимного расположения точек a и b возможны следующие случаи.

1°. Точки находятся на одной ЛУ.

2°. Точки находятся на двух разных ОЛУ, между которыми лежит хотя бы одна гора.

3°. Прежний случай, когда между смежными ОЛУ лежит одна долина.

4°. Точки находятся в двух разных долинах или на двух разных горах.

Случай 3° и 4° приводятся к теоремам 19.1 и 19.2, а в первых двух случаях приходится интегрировать по ЛУ. Кроме точек a и b , которые являются критическими, в случае 2° критической будет также точка перевала t_0 . Если функции $g(t)$ и $h(t)$ аналитичны в области, содержащей путь интегрирования, то эти точки для любых $\arg z$ остаются единственными критическими точками для интеграла (19.1). В случае конечных a и b $\Omega(z)$ является целой функцией.

Если имеем несколько точек перевала, то более сложные случаи расположения точек a и b , для которых справедливо (19.37), обычно приводятся к теоремам 19.1 и 19.2.

Из сказанного следует, что при разных $\arg z$ асимптотические разложения для $\Omega(z)$ могут содержать только ряды по степеням z^{-k} с множителем $e^{zg(a)}$ или $e^{zg(b)}$ и ряд по степеням $z^{-k/m}$ с множителем $e^{zg(t_0)}$ (или несколько таких рядов, если имеется несколько существенно критических точек перевала). На плоскости z можно найти лучи, на которых к одному из упомянутых разложений следует добавить другое (или несколько). Эти лучи назовем *линиями Стокса*, так как на них имеет место явление Стокса. Очевидно, эти лучи определяются уравнением (19.37) или одним из уравнений

$$\operatorname{Re} zg(t_0) = \operatorname{Re} zg(a), \quad \operatorname{Re} zg(t_0) = \operatorname{Re} zg(b). \quad (19.38)$$

Если t_0 не является существенно критической точкой, то составное разложение из двух рядов с множителями $e^{zg(a)}$ и $e^{zg(b)}$ является единообразным для $\Omega(z)$ при всех $\arg z \in (-\pi, \pi]$, так как в отдельных секторах одно разложение входит в любой остаток другого. Ниже будет показано, что такое разложение равномерно относительно $\varphi \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$. Однако при наличии равенств (19.38) иногда сумма всех разложений не дает единообразного разложения для всех $\arg z$, хотя ряд с множителем $e^{zg(t_0)}$ при $\arg z \neq \varphi_0$ входит в любой остаток другого ряда. Это связано с тем, что на разных линиях Стокса эти слагаемые могут быть разными и необъединяемыми (см. п. 19.5.2, 2°).

Интеграл по линии уровня можно привести к интегралу Фурье также иным путем, чем в п. 19.1.3, 4°. Для этого следует применить подстановку $e^{i\varphi_0}[g(t) - g(a)] = iv$, где v — действительная и монотонная переменная, найти $t = t(v)$, а потом разложить интеграл

$$\Omega(z) = e^{zg(a)} \int_{v_1}^{v_2} e^{irv} h(t(v)) t'(v) dv = e^{zg(a)} \int_{v_1}^{v_2} e^{irv} H(v) dv. \quad (19.39)$$

Интеграл Фурье является частным случаем общего интеграла по ЛУ, если ЛУ находится на действительной оси. Однако иногда разложение для (19.39) нельзя получить интегрированием по частям. Возможны следующие причины.

1°. При интегрировании по частям внеинтегральные члены на обоих концах промежутка интегрирования обращаются в нуль. Обычно это бывает, когда имеется промежуток $(-\infty, \infty)$ и $H^{(k)}(\pm\infty) = 0$, $k \in N$, или применяется модифицированное интегрирование по частям для интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{irg(v)} h(v) dv$ и $h_k(\pm\infty) = 0$, $k \in N$, где

$$h_{k+1}(v) = \frac{d}{dv} \left[\frac{h_k(v)}{g'(v)} \right], \quad h_0(t) \equiv h(t). \quad (19.40)$$

В частном случае при $g(v) \equiv v$ получаем интегралы для прямого или обратного преобразования Фурье, асимптотика которых также в случае гладкой функции $h(v)$ исследуется рассматриваемым методом.

В случае промежутка $[a, \infty)$ иногда $H^{(2k)}(a) = 0$ или $H^{(2k+1)}(a) = 0$, $k \in N$. В таком случае нельзя найти разложение при $r \rightarrow +\infty$ для одного из интегралов

$$\int_a^{\infty} \cos rv H(v) dv, \quad \int_a^{\infty} \sin rv H(v) dv. \quad (19.41)$$

Последний случай может встречаться также при конечных a и b . В силу аналитичности $H(v)$ не может быть, что $H^{(k)}(a) = 0$ при всех $k \in N$, так как тогда $H(v) \equiv 0$, но возможно, что a и b являются особыми точками для $H(v)$. Например, $H(v) = \exp\left[-\frac{1}{v-a} - \frac{1}{b-v}\right] H_0(v)$. В таком случае соответствующий множитель следует присоединить к ядру и искать критические точки нового ядра. Тогда критические точки будут зависеть от параметра. Такие интегралы подробнее рассмотрены в § 21.

Еще возможен случай, когда асимптотический вычет на одном конце промежутка интегрирования равен конечному выражению, на другом — асимптотически равен нулю, а полученное асимптотическое выражение нужно пополнить.

2°. *Вклады от концов промежутка интегрирования взаимно сокращаются.* Если $g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b)$, $h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $g'(t) \neq 0$ при $t \in [a, b]$, то интегрированием по частям согласно (19.40) получим

$$\int_a^b e^{irg(t)} h(t) dt = o(r^{-N}). \quad (19.42)$$

Этот случай типичен, когда $g(t)$ и $h(t)$ — периодические функции с периодом $b-a$.

19.3.2. В рассмотренных случаях в интеграле (19.39) следует перейти к интегрированию по некоторой кривой (или нескольким кривым) в комплексной плоскости. Для этого имеются два основных метода: 1) применение деформирования пути, осуществляемое с помощью некоторого замкнутого контура и теоремы Коши; 2) применение подстановки, отображающей отрезок $[a, b]$ на замкнутый контур, и деформирование этого контура. В частности, такая подстановка применима, если $b-a=2\pi$ и $g(t) = G(\sin t, \cos t)$, $h(t) = H(\sin t, \cos t)$. Тогда с помощью подстановки $e^{it} = \tau$, $\cos t = \frac{1}{2}(\tau + \tau^{-1})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(\tau - \tau^{-1})$ получаем

$$\int_a^b e^{irg(t)} h(t) dt = \oint_{|\tau|=1} e^{irg_1(\tau)} h_1(\tau) d\tau. \quad (19.43)$$

Пример приведен в п. 19.5.4.

Указанные методы следует применять и тогда, когда функции в интеграле (19.42) первоначально определены для действительного переменного $t \in [a, b]$. Допустим впредь, что в таких случаях они всегда аналитически продолжимы в той области, в которой деформируется путь интегрирования, за исключением изолированных особых точек. Следовательно, если действительных существенно критических точек для интеграла (19.42) нет, то их следует искать в комплексной плоскости и ими надо считать все особые точки функций $g(t)$ и $h(t)$ и точки перевала, в которых $g'(t) = 0$.

Если $g(t) \equiv t$, то критическими остаются только особые точки функции $h(t)$. Рассмотрим этот случай подробнее, так как деформирование пути при наличии точек перевала уже рассмотрено в п. 19.2.

1°. Для интеграла Фурье

$$\Omega(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} h(t) dt \quad (19.44)$$

при $x \rightarrow +\infty$ следует различать случаи, когда $h(t)$ в верхней (или нижней) полуплоскости имеет особые точки однозначного или многозначного характера. В первом случае рассмотрим в верхней полуплоскости замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности L_R , на которой $|t|=R$. Согласно теореме Коши о вычетах [167] имеем

$$\int_{-R}^R e^{ixt} h(t) dt = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} (e^{ixt} h(t); t_k) - \int_{L_R} e^{ixt} h(t) dt,$$

где t_k — особые точки функции $h(t)$, находящиеся в верхней полуплоскости. Если число этих точек конечное, то R можно брать столь большим, чтобы все они находились внутри круга. При бесконечном числе точек t_k берем последовательность окружностей радиусом R_k так, чтобы они не проходили через t_k . Если при $R_k \rightarrow \infty$ на L_{R_k} $h(t) \rightarrow 0$, то согласно доказательству в п. 12.3.2, 3° $\int_{L_{R_k}} \rightarrow 0$ при $R_k \rightarrow \infty$ и получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} h(t) dt = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{res} (e^{ixt} h(t); t_k). \quad (19.45)$$

Каждый вычет в (19.45) имеет множитель $e^{ixt_k} = e^{-x\tau_k} e^{ix\sigma_k}$. Если $\tau_k < \tau_{k+1}$, $k \in N$, то ряд (19.45) одновременно дает асимптотическое разложение при $x \rightarrow +\infty$ или асимптотическое выражение при конечном числе t_k . В случае ядра e^{-ixt} следует выполнить подобные действия в нижней полуплоскости.

В некоторых случаях ряд (19.45) можно просуммировать.

Например, легко доказать, что
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{\operatorname{ch} t} dt = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi x/2)}.$$

2°. Пусть $h(t)$ в верхней полуплоскости имеет единственную особую точку — точку ветвления t_0 , в окрестности которой

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_0)^{\lambda_k}, \quad \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (19.46)$$

и $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\text{Im } t \geq 0$. Ветвь для $h(t)$ определяется значениями $h(t)$ на действительной оси и разрезом, который полагаем лежащим на луче $\arg(t-t_0) = \beta \in (0, \pi)$. Тогда в силу сказанного в 1° имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} h(t) dt = \int_C e^{ixt} h(t) dt,$$

где C — петля вокруг разреза с обходом в положительном направлении. Подстановка $t = t_0 + \tau$ приводит к интегралу

$e^{ixt_0} \int_{\infty e^{i\beta}}^{(0+)} e^{ix\tau} h(t_0 + \tau) d\tau$. Поскольку $\beta \in (0, \pi)$, то $\text{Re } ix\tau < 0$. Чтобы

$\arg ix\tau \in (-\pi, \pi]$, при $\beta > \pi/2$ следует брать $i = e^{i(\pi/2 - 2\pi)}$. Тогда в силу (19.46), п. 12.3.3 и (12.30) с учетом $\frac{1}{\Gamma(-\lambda)} = -\frac{1}{\pi} \sin \lambda \Gamma(1 + \lambda)$ при $x \rightarrow +\infty$ получаем разложение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} h(t) dt \sim -2ie^{ixt_0} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h \sin \pi \lambda_h \Gamma(1 + \lambda_h)}{(ix)^{1 + \lambda_h}}. \quad (19.47)$$

Если имеется несколько точек ветвления, то следует учесть асимптотические вклады только от тех из них, у которых $\text{Im } t$ наименьшая. Также можно пренебречь вычетами особых точек t_k однозначного характера, если $\text{Im } t_k > \text{Im } t_0$.

3°. Возможно, что в (19.44) $h(t) = e^{-g(t)}$ и $h(t)$ — целая функция. Тогда от $e^{-g(t)}$ следует отщепить некоторый множитель, присоединить его к e^{ixt} , образовать новое ядро и искать точки перевала. Поскольку расположение точек перевала зависит от x , то этот случай относится к § 21. При полиномиальной функции $g(t)$ некоторые результаты относительно интеграла (19.44) даны в [6].

4°. При разложении интеграла $\int_0^{\infty} e^{ixt} h(t) dt$, если точка $t=0$ не является существенно критической, метод не претерпевает существенных изменений. В случае особых точек однозначного характера можно непосредственно применять формулу (12.23), а в случае точки ветвления — вместо суммы вычетов в ней писать разложение (19.47). Отделяя вещественную часть от мнимой, получаем искомое разложение для одного из интегралов (19.41).

5°. Не всегда в п. 1°—4° на всей L_R $h(t) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. В таком случае следует выбрать другой контур, причем число особых

точек не будет иметь существенного значения. Покажем соответствующую модификацию на примере

$$\Omega(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} e^{-t^2}}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2} \cos xt}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Сначала рассмотрим интеграл по замкнутому контуру, представленному на рис. 4. Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и применяя оценку

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty+2i}^{+\infty+2i} \frac{e^{ixt} e^{-t^2}}{\sqrt{1+t^2}} dt \right| = \\ & = e^{-2x+4} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x-4)u} e^{-u^2}}{\sqrt{u^2-3+4i}} du \right| < \frac{1}{3} e^{-2x+4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du, \end{aligned}$$

получаем

$$\Omega(x) = \int_C \frac{e^{ixt} e^{-t^2}}{\sqrt{1+t^2}} dt + O(e^{-2x}),$$

где C — петля в положительном направлении вокруг разреза, идущего вдоль луча $\arg(t-i) = 0$. При $t > 0$ $\arg \sqrt{1+t^2} = 0$, поэтому при непрерывном продолжении выбранной ветви на верхнем берегу разреза имеем $\arg \sqrt{1+t^2} = -\frac{3\pi}{4} + [1/2 \arg(t+i) - \pi/4]$. После подстановки $t = i + u$ на верхнем берегу разреза вдоль луча $\arg u = 0$ будет $\arg \sqrt{u} = -\pi$. Следовательно,

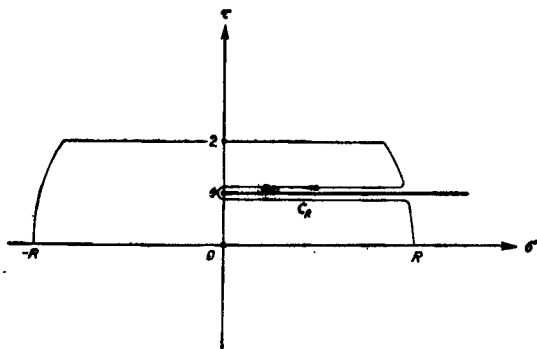


Рис. 4

$$\Omega(x) = \sqrt{2}e^{-x+1-\frac{i\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{i(x-2)u} u^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2i}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} du + O(e^{-2x}).$$

Поскольку

$$e^{-u^2} \left(1 + \frac{u}{2i}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (iu)^k,$$

где

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{35}{32},$$

$$c_{k+1} = \frac{1}{k+1} \left[\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4} \right) c_k + 2c_{k-1} - c_{k-2} \right], \quad k \geq 2,$$

то согласно формуле (10.21') при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} e^{-t^2} dt}{\sqrt{1+t^2}} \sim \sqrt{2}e^{-x+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) c_k (x-2)^{-k-\frac{1}{2}}. \quad (19.48)$$

6°. В качестве примера относительно пренебрегаемых вычетов, указанных в п. 2°, приводим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\operatorname{sh} t \sqrt{t^2 + a^2}} dt, \quad a > 0.$$

В верхней полуплоскости подынтегральная функция имеет полюсы $t_k = k\pi i$, $k \in \mathbb{N}_1$, и точку ветвления $t = ai$. Если $a \in (m\pi, (m+1)\pi)$, то при построении асимптотического разложения приходится учитывать те полюсы, у которых $k \leq m$, и точку $t = ai$. При $a = j\pi$, $j \in \mathbb{N}_1$, полюс совпадает с t_j , поэтому следует применять формулу $\operatorname{sh} t = (-1)^j \operatorname{sh}(t - t_j)$. Полное построение асимптотического разложения оставим читателю.

7°. Если пределы интегрирования a и b конечны, то при наличии точек ветвления с соответствующими изменениями можно применить формулу (12.24). При этом допускается, что точки a и b тоже являются точками ветвления для $h(t)$, в окрестности которых $h(t)$ имеет соответствующие асимптотические разложения. Тогда получаем другой метод для доказательства теоремы 16.6 в случае, когда $g(t) \equiv t$, но при более сильных требованиях относительно $h(t)$, чем в теореме 16.6.

8°. Ситуация, подобная указанным в предыдущих пунктах, может иметь место также при разложении интеграла $\int_0^{\infty} K(xt)h(t) dt$, $x \rightarrow +\infty$. При $K(\tau) = J_\nu(\tau)$ такой пример находим

в (13.69), а более общий пример получаем из (13.74), если $v = \mu - 2$, $h^{(2k+1)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Если в таких случаях ядро имеет экспоненциальную асимптотику, то можно попытаться применить разбиение ядра на подходящие слагаемые. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в третьем томе.

19.3.3. Как уже было сказано в п. 19.1.3, 4° , интеграл

$$\int_a^b e^{zg(t)} h(t) dt$$

при условии (19.37) можно разложить также согласно теореме 19.1, взяв точку c , для которой $\operatorname{Re} e^{i\varphi_0} g(c) < \operatorname{Re} e^{i\varphi_0} g(a)$, и деформируя путь по линиям спуска от a до c и от c до b . Поскольку значения φ , при которых имеет место неравенство $\operatorname{Re} e^{i\varphi} g(c) < \operatorname{Re} e^{i\varphi} g(a)$, содержатся также в интервале $[\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$, если ε достаточно малое, то разложение, полученное по теореме 19.1 с критической точкой a , справедливо при $\arg z \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$.

Аналогично получаем, что решения неравенства $\operatorname{Re} e^{i\varphi} g(c) < \operatorname{Re} e^{i\varphi} g(b)$ также содержатся в $[\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$. Поэтому разложение, полученное от асимптотического вычета точки b , тоже справедливо при $\arg z \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$. Если $\arg z \neq \varphi_0$, то существенно критическим является только один из концов, а асимптотический вклад от другого конца входит в любой остаток первого разложения. Из сказанного следует, что сумма полученных разложений дает равномерную асимптотику при $\arg z \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$.

Сказанное относится и к случаю, когда при $\arg z = \varphi_0$ точки a и b находятся на ОЛУ и путь проходит через точку перевала t_0 . Можно интегрировать по четырем линиям спуска: ac , ct_0 , t_0c_1 , c_1b . Получаем четыре асимптотических разложения, справедливых при $\arg z \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$. Вклады от точки t_0 при $\arg z \neq \varphi_0$ входят в любой остаток одного из оставшихся разложений. Рассуждения остаются в силе, если a и b бесконечны.

Кроме того, сказанное относится также к случаю, когда в отдельных секторах асимптотические разложения построены с помощью других методов, но их можно было получить также методом перевала. Например, с помощью данных рассуждений доказывается справедливость составного асимптотического разложения для интеграла (18.76) при всех $\arg z$.

19.4. Модификации и дополнения к методу перевала

19.4.1. При построении карты на рисунках показан также деформированный путь, идущий по линии спуска. Следует иметь в

виду, что не каждая кривая, точки которой в долине удаляются от точки перевала, является линией спуска, даже если расстояние при удалении изменяется монотонно. В этом легко убедиться, если взять некоторую точку в долине довольно близко к ОЛУ и достаточно далеко от точки перевала. Но из (19.4') следует, что в достаточно малой окрестности точки t_0 каждый отрезок, выходящий из t_0 в долине, будет линией спуска. Этим оправдывается доказательство теоремы 19.2.

Чтобы построить некоторую линию спуска, соответствующую часть долины, содержащую t_0 и a или b , можно отобразить с помощью $w = e^{i\varphi}[g(t_0) - g(t)] = u + iv$ в плоскости w и отображения точек t_0 и a соединить линией, вдоль которой u монотонно возрастает. Эту линию следует затем отобразить на плоскости t . Отсюда следует, что таких линий бесконечно много.

На практике иногда удобнее требовать монотонное изменение u не вдоль всего деформированного пути, а только в некоторой окрестности точки t_0 . Для остальной части пути достаточно выполнения неравенства

$$\operatorname{Re} e^{i\varphi}[g(t_0) - g(t)] \geq \eta > 0, \quad (19.49)$$

так как тогда лемма 19.1 сохраняется. В работе [231] кривые, которым присуще это свойство, названы *линиями Лапласа*. Такой выбор пути особенно удобен в случае, когда в долине находится одна или несколько других точек перевала и имеются более низкие горы, через которые проходит путь. Поэтому в дальнейшем неоднократно *вместо линий спуска будем применять линии Лапласа*.

19.4.2. Вместо построения карты, основанной на расположении точек перевала и ОЛУ, можно использовать отображение $w = g(t)$. Точки перевала отображаются в точки ветвления, поэтому данная область отображается на римановой поверхности. Однако при отображении эти точки ветвления вместе с некоторой окрестностью можно исключить из области. Возможные пути деформирования потом легко исследовать на w -плоскости. Из примеров, приведенных в работах [216, 217], видно, что этот метод особых преимуществ не имеет.

Подстановка $w = g(t)$ применяется и для другой цели в случае $z > 0$ [110, 220]. С помощью подстановки получаем интеграл $\int_{L_1} e^{zw} H(w) dw$, где L_1 является отображением линии L и в общем

находится на римановой поверхности с разрезами, выходящими из изображений точек перевала. В полученном интеграле критическими являются только особые точки функции $H(w)$. Интегралы такого типа подробнее рассмотрены в § 22. При сложных функциях $g(t)$ рассмотренный прием не имеет преимуществ по

сравнению с обычным методом перевала. Несколько конкретных примеров приведено в работе [110].

19.4.3. Если функция нагрузки $h(t)$ в (19.1) имеет полюс, расположенный довольно близко к доминирующей критической точке, то в окрестности этой точки путь интегрирования можно деформировать по ЛНС (при условии, что полюс не лежит на этой линии) и применять методы, изложенные в п. 12.3. Часть литературы, указанной в п. 12.3, относится именно к этому случаю. Аналогичный вопрос рассмотрен также в работе [98].

Можно также применять вначале отображение, рассмотренное в п. 19.4.2, а потом — соответствующие формулы из п. 12.3. Такая модификация предложена в работе [220], но ее преимущество оспоримо.

19.4.4. Интеграл

$$\Omega(z) = \int_L [K(t)]^z h(t) dt \quad (19.50)$$

с помощью равенства $K(t) = e^{\ln K(t)}$ всегда можно привести к (19.1). Точка перевала t_0 определяется из уравнения $K'(t) = 0$. Если $K^{(j)}(t_0) = 0$ при $1 \leq j \leq m$ и $K^{(m+1)}(t_0) \neq 0$, то получаем m -кратную седловую точку. Поскольку $\operatorname{Re} \ln K(t) = \ln |K(t)|$, то линией спуска для $\ln K(t)$ является любая кривая, вдоль которой $|K(t)|$ монотонно убывает.

Допустим далее, что L совпадает с линией спуска, выходящей из точки перевала t_0 , и $\operatorname{Re} z > 0$. Поскольку на $L \setminus L_\delta$ имеем $|K(t)| : |K(t_0)| \leq q(\delta) < 1$, то лемма 19.1 сохраняет силу. Для разложения интеграла по L_δ иногда удобно использовать разложение

$$K(t) = K(t_0) \left[1 - \sum_{k=m}^{\infty} b_k (t-t_0)^k \right] \quad (19.51)$$

и применять подстановку $K(t) = K(t_0) (1 - \omega^m)$, если из нее проще найти разложение обратной функции $t(\omega)$. В силу (19.51) эта функция при фиксированной ветви для $a_m^{1/m}$ в окрестности $\omega = 0$ однозначна.

Допустим, что кривую L_δ можно выбрать так, чтобы на ее конце $a_\beta K(a_\beta) = K(t_0) [1 - \beta^m]$, $\beta \in (0, 1)$, и эта кривая будет находиться в долине. Тогда с помощью указанной подстановки L_δ отображается на кривую \tilde{L}_β , конец которой находится в $\omega = \beta$, и \tilde{L}_β можно деформировать в отрезок $[0, \beta]$. Разлагая на нем $H(\omega) = h(t(\omega)) t'(\omega)$ в ряд по степеням ω , следует вычислить

$$I_h(z) = \int_0^\beta (1 - \omega^m)^z \omega^k d\omega = \frac{1}{m} \int_0^\beta (1 - \tau)^z \tau^{\frac{k+1}{m} - 1} d\tau.$$

Так как при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\int_{\beta^m}^1 (1-\tau)^z \tau^{\frac{k+1}{m}-1} d\tau = O((1-\beta^m)^z) = o(z^{-N}),$$

то

$$\begin{aligned} I_k(z) &= \frac{1}{m} B\left(z+1, \frac{k+1}{m}\right) + o(z^{-N}) = \\ &= \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) \Gamma(z+1)}{\Gamma\left(z+1+\frac{k+1}{m}\right)} + o(z^{-N}) = O\left(z^{-\frac{k+1}{m}}\right). \end{aligned} \quad (19.52)$$

Поэтому функции $I_k(z)$ при $z \rightarrow \infty$ образуют шкалу, однако сильно неравномерную. Остаток полученного асимптотического ряда при $\operatorname{Re} z > 0$ оценивается стандартным приемом. Идея данной модификации приведена в работе [211].

Другая модификация приведена в [379]. Подробнее о ней будет сказано в третьем томе.

19.5. Примеры

19.5.1. Применение метода перевала приводится во многих монографиях, учебниках и журнальных статьях. Этим методом найдены асимптотические разложения многих важных специальных функций. Наши примеры выбраны с целью проиллюстрировать разные случаи, указанные в предыдущих пунктах. Перечислим правила, которые следует соблюдать при использовании метода перевала.

1°. Найти точки перевала, решая уравнение (19.3).

2°. Построить карту для функции $\operatorname{Re} g(t)$, на которой показаны ОЛУ, горы и долины; горы заштриховать. Построение карты в случае нескольких седловых точек пояснено в п. 19.5.3, 3°. На карте следует отметить также разрезы и особые точки данных функций, если их расположение может повлиять на деформирование пути.

Вместо карты авторы многих работ рекомендуют строить только ЛНС. Затрата времени при вычислении координат для точек на ОЛУ или ЛНС примерно одинакова (в настоящее время это делается с помощью ЭВМ), но карта дает более полное геометрическое представление. *Выполнять немедленно п. 5° без геометрических исследований опасно*, так как в литературе имеются примеры неверных разложений, полученных формальным путем.

3°. Отметить на карте концы пути интегрирования и выполнить подходящее деформирование пути согласно возможностям, указанным в п. 19.1.3.

4°. Исследовать согласно п. 19.2 допустимый промежуток для $\arg z$. Иногда его можно расширить методом аналитического продолжения, что пояснено в п. 19.5.2, 1° и 19.5.3, 3°. Продолжить разложения для многозначных функций на другой лист римановой поверхности можно с помощью соответствующих соотношений между функциями. Например, для функций Бесселя применима формула

$$J_{\pm\nu}(ze^{i\pi m}) = e^{\pm i\pi m\nu} J_{\pm\nu}(z).$$

Иногда можно продолжить разложение, внося некоторые изменения в интеграл.

5°. Написать согласно соответствующей формуле из п. 19.2 соответствующее разложение. При этом особое внимание следует обращать на вычисление коэффициента $c_0 = \frac{1}{m} b_0 a_0^{-\frac{\mu_0+1}{m}}$ в (19.12), так как в общем c_0 не определяется однозначно. Ветвь для $a_0 - m$ выбирается так, чтобы в основной долине на L_δ было

$$t \sim t_0 + a_0^{-\frac{1}{m}} \omega^{\frac{1}{m}}, \quad a_0 = -g^{(m)}(t_0)/m!. \quad (19.53)$$

Ради простоты при определении ветви для $a_0^{-\frac{1}{m}}$ в качестве пути L_δ можно брать ЛНС для $a_0(t-t_0)^m$, находящуюся в основной долине.

Необходимо отметить, что в более сложных случаях карту построить очень трудно, даже почти невозможно. Тогда возможности деформирования пути через точки перевала приходится исследовать иным методом. Для этого нужно оценить модуль подынтегрального выражения на отдельных участках пути и показать, что кроме участка, определяющего асимптотический вклад, путь состоит из линий Лапласа.

19.5.2. Рассмотрим сначала примеры, когда имеется одна точка перевала.

1°. При всех z имеем [1]

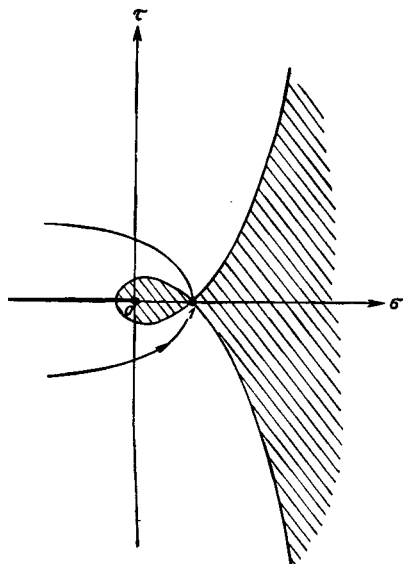


Рис. 5

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\zeta} \zeta^{-z} d\zeta. \quad (19.54)$$

Фиксируем $\arg z = 0$, т. е. $z = x > 0$. Тогда подстановкой $\zeta = tz$ получаем

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} z^{1-z} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp[z(t - \ln t)] dt. \quad (19.55)$$

Согласно принципу перманентности для аналитических функций соотношение (19.55) сохраняется при всех z , при которых интеграл (19.55) сходится, т. е. $\operatorname{Re} z t < 0$. Легко видеть, что это неравенство выполнено при соответствующем выборе пути в левой полуплоскости, если $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

В (19.55) имеем $g(t) = t - \ln t$, $t_0 = 1$, $g(t_0) = 1$, $u(\sigma, \tau) = \sigma - \frac{1}{2} \ln(\sigma^2 + \tau^2)$. Уравнение для ОЛУ имеет вид $\tau = \pm \sqrt{e^{2(\sigma-1)} - \sigma^2}$.

ОЛУ показана на рис. 5. Из рисунка видно, что она разделяет плоскость t только на три части; дополнительное разделение плоскости получается за счет разреза. Деформированный путь показан на рис. 5. Так как $\omega^2 = \omega = g_0(t) = 1 - t + \ln t \sim -\frac{1}{2}(t-1)^2$,

то $\alpha = \arg a_0 = \pi$. В основной долине $\psi \in \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$, поэтому легко убедиться в том, что для любого $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ можно найти такое ψ , чтобы (19.10) удовлетворялось. Кроме того, в этой долине на ЛНС для функции $-\frac{1}{2}(t-1)^2$ имеем $t = 1 - i\sqrt{2}\omega$, поэтому в (19.11) $d_0 = -i\sqrt{2}$.

При вычислении коэффициентов c_h в (19.21) следует найти разложение для $t(\omega)$. Из сравнения этой функции с (9.40) получаем соотношение $\omega = \omega^2 = -\tau^2$, поэтому $d_h = (-i)^{2h+1} 2^{\frac{h+1}{2}} a_{h+1}^*$, где a_h^* определено формулой (9.41). В результате согласно формуле (19.21) при $z \rightarrow \infty$ получаем разложение

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \sim \sqrt{\frac{z}{2\pi}} z^{-z} e^z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)!! a_{2k+1}^* z^{-k}. \quad (19.56)$$

С учетом формулы Стирлинга (19.56) имеет место при $|\arg z| \leq \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В остальном секторе применимы соотношения $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\pi} \sin \pi z \Gamma(1-z)$ и формула Стирлинга, из которых также можно получить (19.56) при $|\arg z| \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

2°. Рассмотрим разложение интеграла

$$\Omega(z, \alpha, \beta) = \int_{e^{i\alpha}}^{e^{i\beta}} e^{izt^3} (1+t)^{-1/2} dt \quad (19.57)$$

при разных α и β . Функция $(1+t)^{-1/2}$ означает ту ветвь, которая при $t > 0$ положительна, и разрез взят вдоль луча $t \in (-\infty, -1]$. Критическими являются концы пути интегрирования и точка перевала $t=0$, и разложение в общем состоит из нескольких рядов. Сначала найдем разложения основных асимптотических вычетов от конца пути и точки перевала, если путь идет по линии спуска, а потом применим их при конкретных α и β .

Для функции $g(t) = it^3$ имеем кратную точку перевала $t_0=0$, $m=3$. Карта для $u = \operatorname{Re} g(t)$ показана на рис. 6. Находим разложение асимптотического вклада от конца пути по формуле (19.17). Имеем $t_0 = e^{i\alpha}$, $g_0(t) = ie^{i3\alpha} - it^3 = \omega$, $t = e^{i\alpha} \sqrt[3]{1 + i\omega e^{-i3\alpha}}$, где ветвь корня при соответствующем разрезе выбрана так же,

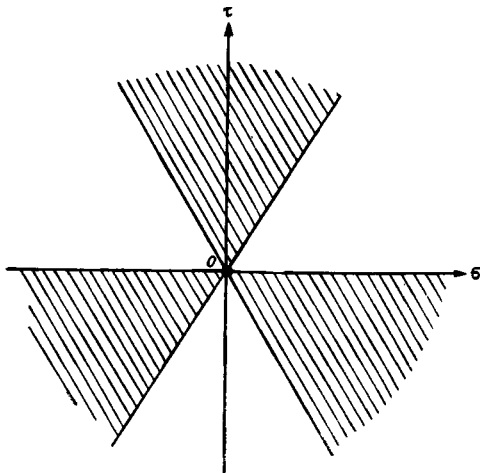


Рис. 6

как в п. 1°, так как при таком выборе вблизи конца пути $t = e^{i\alpha}[1+o(1)]$. По (19.17) при $z \rightarrow \infty$ получаем

$$S(z, \alpha) = \int_{e^{i\alpha}}^b e^{izt^3} (1+t)^{-1/2} dt \sim \\ \sim 1/3 \exp(ize^{i3\alpha} - 2i\alpha + i\pi/2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) k! z^{-k-1}, \quad (19.58)$$

где

$$c_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)(1+e^{i\alpha})} \left[\gamma c_k \left(k + \frac{2}{3} \right) + \frac{5}{6} \gamma e^{i\alpha} \sum_{j=0}^k c_j \left(\frac{1/3}{k-j} \right) \gamma^{k-j} + \right. \\ \left. + e^{i\alpha} \sum_{j=0}^{k-1} c_{j+1} (j+1) \left(\frac{4/3}{k-j} \right) \gamma^{k-j} \right], \quad k \geq 0, \\ c_0 = (1+e^{i\alpha})^{-1/2}, \quad \gamma = \exp[-i(3\alpha - \pi/2)].$$

При разложении интеграла по пути, исходящему из точки $t=0$, фиксируем основную долину, в которой $\arg t \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$. Чтобы в ней было удовлетворено (19.10), в подстановке $\omega = -it^3$ следует брать $-i = e^{-i\pi/2}$. Тогда $t = e^{i\pi/6} \sqrt[3]{\omega}$, где для $\sqrt[3]{\omega}$ взята та ветвь, которая положительна при $\omega > 0$. Если точка b_l лежит в l -й долине, то согласно (19.20) при $z \rightarrow \infty$ получаем

$$T(z, l) = \int_0^{b_l} e^{izt^3} (1+t)^{-1/2} dt \sim \\ \sim 1/3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) \exp[i\pi(1/6 + 2l/3)(k+1)] z^{-\frac{k+1}{3}}. \quad (19.59)$$

Рассмотрим далее частные случаи для α и β и построим разложение для $\Omega(z, \alpha, \beta)$ при $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

А. $\alpha=0, \beta=\pi/6$. При всех z согласно (19.58) имеем составное разложение

$$\Omega(z, 0, \pi/6) \sim S(z, 0) - S(z, \pi/6), \quad (19.60)$$

причем при $\varphi \in \left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$ и $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ определяющим является второе разложение, при $\varphi \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ — первое, а при $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$ оба вклада являются доминирующими, так как точки $e^{i\alpha}$ и $e^{i\beta}$ находятся на одной линии уровня.

Б. $\alpha=0$, $\beta=\pi/3$. При $\varphi \in (-\pi, \pi)$ получаем разложение

$$\Omega(z, 0, \pi/3) \sim S(z, 0) - S(z, \pi/3), \quad (19.61)$$

причем при $\varphi \in (-\pi, 0)$ определяющим является первое разложение, при $\varphi \in (0, \pi)$ — второе. Если $\varphi=0$, то оба конца находятся на ОЛУ и между ними лежит долина. Поэтому для определения вкладов можно непосредственно использовать формулу (19.58). Если бы мы все же интегрировали по ОЛУ, то вклад от t_0 получился бы $-T(z, 0) + T(z, 0) = 0$ и остались только вклады от a и b .

Однако при $\varphi=\pi$ между точками 1 и $e^{i\pi/3}$ находится гора и приходится интегрировать по ОЛУ, причем на луче $\arg t = \pi/3$ имеем $l=1$. Таким образом, при $z=e^{i\pi}x$ получаем формулу

$$\Omega(z, 0, \pi/3) \sim S(z, 0) - S(z, \pi/3) - T(z, 0) + T(z, 1), \quad (19.62)$$

которая остается справедливой также при остальных z , кроме $z=x$. Это подтверждает сказанное в п. 19.3.1 о невозможности построения составного разложения для всех $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

В. $\alpha=0$, $\beta=2\pi/3$. Имеем составное разложение

$$\Omega(z, 0, 2\pi/3) \sim S(z, 0) - S(z, 2\pi/3) - T(z, 0) + T(z, 1), \quad (19.63)$$

причем при $\varphi \in (-\pi, 0)$ доминируют первые два ряда (они содержат общий множитель $e^{i\alpha}$), а при $\varphi \in (0, \pi)$ — последние два ряда.

Г. $\alpha=\pi/4$, $\beta=3\pi/4$. При всех $\arg z \in (-\pi, \pi]$ справедливо разложение

$$\Omega(z, \pi/4, 3\pi/4) \sim S(z, \pi/4) - S(z, 3\pi/4) - T(z, 0) + T(z, 1), \quad (19.64)$$

причем при $\varphi \in (-\pi, -\pi/4)$ определяющим является второй ряд; при $\varphi = -\pi/4$ — последние три ряда; при $\varphi \in (-\pi/4, \pi/4)$ — последние два ряда; при $\varphi = \pi/4$ — все ряды, кроме второго; при $\varphi \in (\pi/4, \pi)$ — первый ряд, а при $\varphi = \pi$ — первые два ряда. Разложение (19.64) иллюстрирует разные случаи, указанные в п. 19.1.3: 1) при $\varphi \in (-\pi, -3\pi/4)$ и $\varphi \in (3\pi/4, \pi)$ точки $e^{i\alpha}$ и $e^{i\beta}$ находятся на горе, причем для первого интервала $e^{i\beta}$ выше, для

второго — выше $e^{i\alpha}$, при $\varphi = \pi$ обе точки на одинаковой высоте (п. 19.1.3, 2°); 2) при $\varphi = \pm \frac{3\pi}{4}$ один из концов пути находится на горе, другой — на ОЛУ (п. 19.1.3, 6°); 3) при $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ одна из упомянутых точек находится на ОЛУ, другая — в долине; 4) только при $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ доминирующей является точка перевала и длина промежутка равна $\pi/2$.

Д. $\alpha = 0, \beta = \pi$. Поскольку точка $t = e^{i\pi} = -1$ является особой для функции нагрузки, то вклад от этой точки получается непосредственно по теореме 19.1. Для $S(z, \pi)$ имеем иное разложение, чем (19.58). Если путь идет из $t = -1$ по линии спуска, то

$$S(z, \pi) = \int_{-1}^b e^{izt^3} (1+t)^{-1/2} dt \sim \frac{1}{3i} e^{-iz} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) z^{-k-1/2}, \quad (19.65)$$

где $c_0^* = \sqrt[3]{3} e^{\frac{i3\pi}{4}}$ и

$$c_k^* = \frac{3i}{k} \left[\frac{5}{6} i \sum_{j=0}^{k-1} c_j^* \binom{1/3}{k-j} (-i)^{k-j} - \sum_{j=0}^{k-1} c_j^* \binom{j-1/2}{k+1-j} \binom{4/3}{k+1-j} (-i)^{k+1-j} \right], \quad k \geq 1.$$

При $\varphi \neq 0, \varphi \neq \pi$ имеем разложение

$$\Omega(z, 0, \pi) \sim S(z, 0) - S(z, \pi), \quad (19.66)$$

причем при $\varphi \in (-\pi, 0)$ определяющим является первый ряд, при $\varphi \in (0, \pi)$ — второй. Если $\varphi = 0$, то к разложению (19.66) следует добавить $-T(z, 0) + T(z, 1)$, а при $\varphi = \pi$ надо иметь в виду, что при переходе по окружности от $t=1$ к $t=-1$ приходится пересекать две горы, поэтому $l=2$ и к (19.66) добавляется $-T(z, 0) + T(z, 2)$. Следовательно, и в этом случае нельзя получить одно составное разложение при всех $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

19.5.3. Рассмотрим примеры с несколькими точками перевала.

3°. Интеграл

$$Aiz = \frac{1}{2\pi} \int_L \exp \left[i \left(zv + \frac{1}{3} v^3 \right) \right] dv, \quad (19.67)$$

где L — бесконечная кривая, удаляющаяся в ∞ в секторах $\arg v \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ и $\arg v \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, сходится при всех z и называется *функцией* (или *интегралом*) *Эйри*. С помощью подстановок $v = -it$, $t = -u$ получаем также

$$Aiz = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \exp\left(-\frac{1}{3}t^3 + tz\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \exp\left(\frac{1}{3}u^3 - uz\right) du, \quad (19.68)$$

где концы для L_1 находятся в секторах $\arg t \in \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right)$ и $\arg t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$, а для L_2 — в $\arg u \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ и $\arg u \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Функцию

$$Ai_v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \exp\left(\frac{1}{3}u^3 - uz\right) u^v du \quad (19.68')$$

назовем *обобщенным интегралом Эйри*, однако словом «обобщенный» можно пренебречь. $Ai_0(z) \equiv Aiz$. При действительном z имеем

$$Aiz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(zv + \frac{1}{3}v^3\right)\right] dv = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(zv + \frac{1}{3}v^3\right) dv \quad (19.69)$$

и подстановка $v = \sqrt[3]{z}t$ приводит (19.67) к

$$\begin{aligned} Aiz &= \frac{\sqrt[3]{z}}{2\pi} \int_L \exp\left[iz^{3/2}\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)\right] dt = \\ &= \frac{\sqrt[3]{z}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iz^{3/2}(t + t^3/3)] dt. \end{aligned} \quad (19.70)$$

Согласно принципу перманентности соотношение (19.70) сохраняет силу при всех z , при которых интеграл сходится, т. е. при которых можно найти такие $\arg t$, принадлежащие $(0, \pi/3)$ и $(2\pi/3, \pi)$, что $\operatorname{Re} i \exp(i3\varphi/2)t^3 < 0$. Легко убедиться в том, что неравенство выполнено при $|\arg z^{3/2}| \leq \pi - 3\varepsilon/2$, т. е. $|\arg z| \leq 2\pi/3 - \varepsilon$.

При действительном z интеграл (19.70) является примером

интеграла по линии уровня, разложение которого нельзя найти интегрированием по частям (см. п. 19.3, 1°).

Используя представление (19.68) и изменяя порядок интегрирования, можно доказать формулу

$$\mu(\alpha) = \int_0^{\infty} Ai t t^{\alpha} dt = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{3^{1+\alpha/3} \Gamma(1+\alpha/3)}, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1, \quad (19.71)$$

которую следует добавить к п. 12.5.1. В случае функции $Ai(-t)$, $t > 0$, можно применить соотношение $Ai(-t) = 2\operatorname{Re} [e^{i\pi/3} Ai(te^{i\pi/3})]$, которое следует из (21.24) при $n=3$, $\lambda=0$ с учетом (21.20). Поэтому при $\operatorname{Re} \alpha \in (-1, 3/4)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} Ai(-t) t^{\alpha} dt &= 2 \operatorname{Re} \left[e^{-i\pi\alpha/3} \int_0^{\infty e^{i\pi/3}} Ai \tau \tau^{\alpha} d\tau \right] = \\ &= 2 \cos(\alpha\pi/3) \int_0^{\infty} Ai \tau \tau^{\alpha} d\tau = \frac{2 \cos(\alpha\pi/3) \Gamma(\alpha+1)}{3^{1+\alpha/3} \Gamma(1+\alpha/3)}. \end{aligned} \quad (19.71')$$

Этой формулой можно дополнить таблицу в п. 16.4.4, 3°. Она получается также с помощью (19.98) и (16.110).

В (19.70) имеем $g(t) = i \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right)$, $t_0 = \pm i$, $g(i) = -\frac{2}{3}$, $g(-i) = \frac{2}{3}$. Карта для каждой точки перевала изображена на

рис. 7 и 8. Уравнения для ОЛУ имеют вид $\sigma = \pm(\tau-1) \sqrt{\frac{\tau+2}{3\tau}}$

и $\sigma = \pm(\tau+1) \sqrt{\frac{\tau-2}{3\tau}}$.

Однако из двух таких карт не получаем ясного представления о РП. Поэтому в дальнейшем обе карты будем объединять. Это делается следующим образом. За основу берем карту, в которой точка перевала находится ниже. Назовем ее *основной картой*. Затем на этом же рисунке строим другую карту и заштриховываем горы, общие для обеих карт. *Области, которые являются долинами для верхней точки перевала и горами для нижней точки, заштрихуем пунктиром*. Такие карты будут построены на многих рисунках.

Очевидно, путь интегрирования в данном случае следует деформировать через точку $t=i$ и использовать рис. 7. В качестве

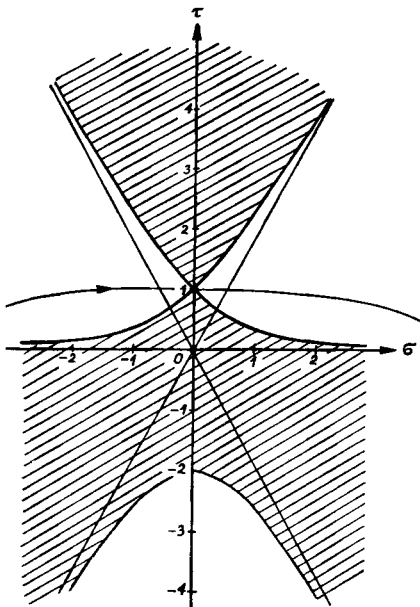


Рис. 7

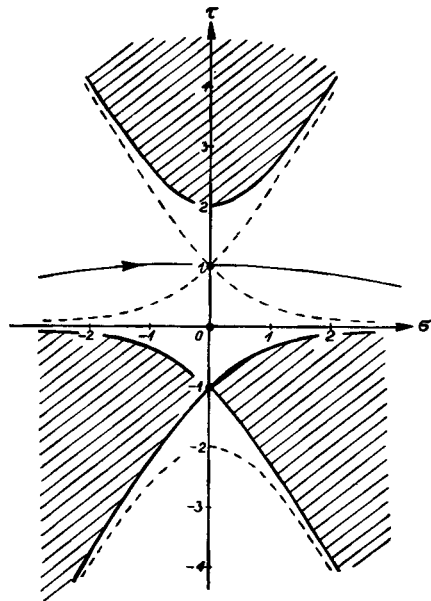


Рис. 8

основной долины будем считать ту, которая находится в правой полуплоскости. Имеем $g_0(t) = \omega = \omega^2 = (t-i)^2 - \frac{i}{3}(t-i)^3$, и в (19.10) следует брать $\alpha = 0$. Поскольку $|\psi| \leq \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ и вблизи $t = i$ определяющим в выражении для $g_0(t)$ считается член $(t-i)^2$, то легко убедиться в том, что при $|\arg z| \leq 2\pi/3 - \varepsilon$ можно найти такое ψ , чтобы удовлетворялось (19.10).

Коэффициенты d_k в этом случае можно найти по формуле Лагранжа—Бюрмана (5.81). Поскольку $\omega = (t-i) \sqrt{1 - \frac{i}{3}(t-i)}$, то

$$d_k = \frac{1}{k!} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\left(1 - \frac{i}{3} \zeta \right)^{-k/2} \right]^{(k-1)} = \frac{1}{k!} \left(\frac{i}{3} \right)^{k-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3k}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Согласно (19.21) при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq 2\pi/3 - \varepsilon$ получаем

$$Ai z \sim \frac{1}{2\pi\sqrt[4]{z}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{\Gamma\left(3k + \frac{1}{2}\right)}{3^{2k}} z^{-3k/2}. \quad (19.72)$$

Разложение для Aiz при $|\arg z| \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi - \varepsilon\right]$ можно получить с помощью аналитического продолжения, повернув в (19.70) путь интегрирования. При этом при $|t| > \delta$ целесообразно интегрировать по лучам, выходящим из начала. Однако мы применим другой метод, типичный для таких случаев, когда асимптотическое разложение находят при всех $\arg z$. Назовем его *методом поворота*.

Положим в (19.70) $z = \zeta e^{i\pi}$. Получим

$$Ai(\zeta e^{i\pi}) = \frac{e^{i\pi/2}\sqrt{\zeta}}{2\pi} \int_{L_2} \exp[\zeta^{3/2}(t + (1/3)t^3)] dt, \quad (19.73)$$

где L_2 указано в формуле (19.68). Здесь имеем $g(t) = t + (1/3)t^3$ и $g(i) = \frac{2}{3}i$, $g(-i) = -\frac{2}{3}i$. Поэтому путь интегрирования приходится деформировать через обе точки перевала, так как они находятся на одинаковой высоте. Карта показана на рис. 9. Путь L_2 можно подобрать так, чтобы интеграл (19.73) сходился при $|\arg \zeta| \leq \frac{2\pi}{3} - \varepsilon$. Применяя для отдельных точек перевала $t_1 = i$ и $t_2 = -i$ формулу (19.21), аналогично, как выше, при $\zeta \rightarrow \infty$ получаем

$$Ai(\zeta e^{i\pi}) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt[4]{\zeta}} \exp\left(\frac{2i}{3}\zeta^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3k + \frac{1}{2}\right)}{(2k)!3^{2k}} e^{-\frac{i\pi}{4}(2k+1)} \zeta^{-3k/2} + \frac{1}{2\pi\sqrt[4]{\zeta}} \exp\left(-\frac{2i}{3}\zeta^{3/2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3k+1/2)}{(2k)!3^{2k}} e^{\frac{i\pi}{4}(2k+1)} \zeta^{-3k/2}. \quad (19.74)$$

Легко видеть, что при $\arg \zeta \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ в (19.74) доминирует первый ряд и совпадает с (19.72) при $\arg z \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, а при

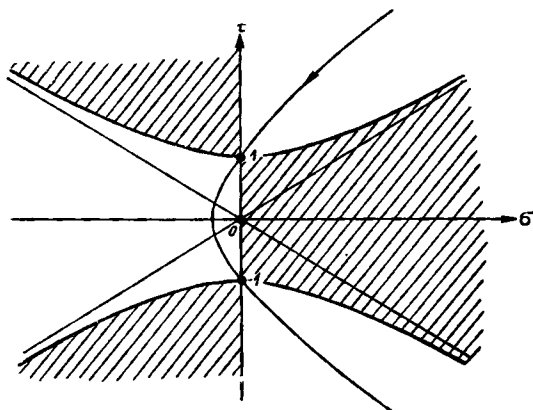


Рис. 9

$\arg z \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ доминирует второй ряд и совпадает с (19.72) при $\arg z \in \left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$. Поэтому разложение (19.72) справедливо при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$.

Этот факт можно установить также иначе. Если в первом интеграле (19.68) действительное z заменить на z^2 и в качестве пути взять прямую $t = -z + iv$, $v \in (-\infty, \infty)$, то получим

$$Ai(z^2) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{2}{3}z^3} \int_0^{\infty} e^{-zv^2} \cos \frac{v^3}{3} dv. \quad (19.75)$$

В силу принципа перманентности эта формула справедлива при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. По лемме Ватсона после замены z^2 на z получаем (19.72).

Без каких-либо существенных изменений можно построить асимптотическое разложение для $Ai_\nu(z)$ согласно (19.68'), только вычисление коэффициентов разложения станет более трудным.

4°. Заменим в формуле Сонина (15.17) путь интегрирования на $(-\infty, (0+))$, n на ν , t на v и применим подстановку $v = e^t$.

Тогда при $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ получим

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \exp(z \operatorname{sh} t - vt) dt, \quad (19.76)$$

где L — бесконечная кривая с концами в направлениях $t \rightarrow \infty \pm i\pi$, идущая снизу вверх. Хотя подинтегральная функция аналитична в области, ограниченной L , интеграл отличен от нуля, так как модуль подинтегральной функции на левой части L растет, если эта часть удаляется в бесконечность.

Исследуем асимптотику интеграла (19.76) при $z = \alpha v$. Для этого следует различать случаи, когда $\alpha < 1$, $\alpha > 1$ и $\alpha = 1$.

А. При $\alpha < 1$ положим $\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta}$, $\beta > 0$, и выделим множитель $v/\operatorname{ch} \beta$. Тогда $g(t) = \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} \beta$ и точки перевала определяются из уравнения $\operatorname{ch} t = \operatorname{ch} \beta$, т. е. $t = \pm \beta + 2k\pi i$, $|k| \in \mathbb{N}$. Имеем бесконечно много точек перевала, но в полуполосе, в которой лежит L , находится лишь точка $t = \beta$. Уравнение ОЛУ имеет вид $\cos \tau = \frac{\operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta + \sigma \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \sigma}$, и легко видеть, что эта кривая проходит

также через точки $t = \beta + 2k\pi i$. Кроме того, ОЛУ, проходящая через $t = -\beta$, симметрична относительно оси $O\tau$. Карта показана на рис. 10 ($\operatorname{ch} \beta = 2$), причем часть, отмеченная пунктиром, согласно сказанному в п. 19.5.3, 3° для точки $t = \beta$ является горой,

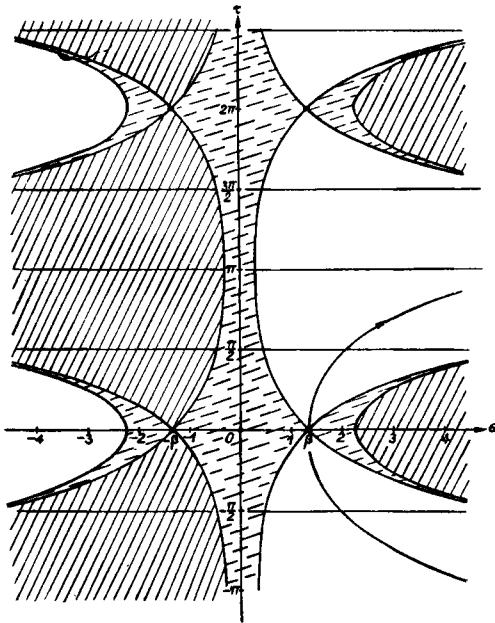


Рис. 10

для $t = -\beta$ — долиной. В качестве основной будем считать нижнюю долину, в которой $\psi \in \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

Имеем $\omega \sim -\frac{1}{2}(t-\beta)^2 \operatorname{sh} \beta$, поэтому (19.10) удовлетворено, если $\alpha = \pi$, и $d_0 = -i \sqrt{\frac{2}{\operatorname{sh} \beta}}$, $c_k = d_k \frac{k+1}{2}$. Согласно (19.21) при $\nu \rightarrow \infty$ получаем

$$J_\nu(\nu/\operatorname{ch} \beta) \sim -\frac{1}{\pi i} \exp[-\nu(\beta - \operatorname{th} \beta)] \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k} \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{\operatorname{ch} \beta}{\nu}\right)^{k+1/2}. \quad (19.77)$$

Коэффициенты d_k вычислить проще, если пользоваться теоремой 19.3 и формулами (19.33), (19.35), согласно которым

$$d_{2k} \Gamma(k+3/2) = c(2k) = \frac{1}{2} (a_0)^{-k-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\omega} B_{2k}(\omega) \omega^{\frac{2k+1}{2}-1} d\omega$$

и $B_k(\omega)$ последовательно определяются по формуле (19.30). После преобразования получаем

$$J_\nu(\nu/\operatorname{ch} \beta) \sim \frac{\exp[-\nu(\beta - \operatorname{th} \beta)]}{\pi \sqrt{2\nu \operatorname{th} \beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) A_k(\beta) \left(\frac{1}{2} \nu \operatorname{th} \beta\right)^{-k}, \quad (19.78)$$

где

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \operatorname{cth}^2 \beta, \quad A_2 = \frac{3}{128} - \frac{77}{576} \operatorname{cth}^2 \beta + \frac{385}{3456} \operatorname{cth}^4 \beta.$$

Разложение (19.78) сохраняет силу также при комплексном β , если $\operatorname{Re} \beta > 0$ и $\operatorname{Im} \beta \in (-\pi, \pi)$, так как тогда $t = \beta$ тоже является единственной доминирующей точкой перевала.

Можно получить примеры для некоторых других случаев деформирования контура, указанных в п. 19.1.3, если в (19.76) брать интеграл с конечными пределами. Пусть $z = x > 0$. Если кривая L — вертикальный отрезок от точки $t_1 = \beta - 2j\pi i - \pi i$ до $t_2 = \beta + 2j\pi i + \pi i$, $j \in \mathbb{N}_1$, то она проходит через $2j+1$ точку перевала на одинаковой высоте и все эти точки являются существенно критическими. Если интегрировать по действительной оси от $t_1 = -2\beta$ до $t_2 > \beta$, где $\operatorname{sh} t_2 - t_2 \operatorname{ch} \beta = \beta \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta$, то существ-

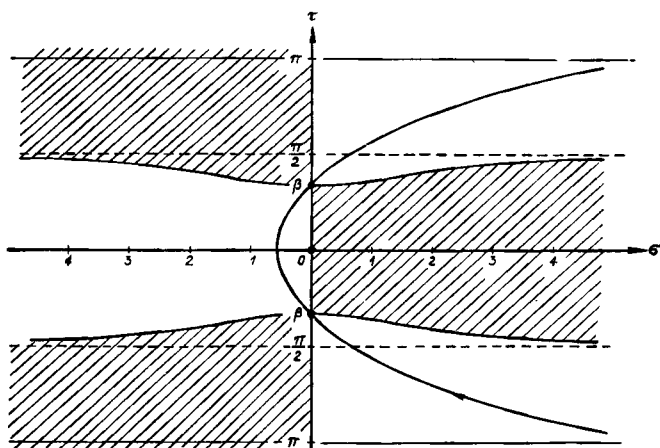


Рис. 11

венно критическими являются точки $-\beta$ и t_2 , тоже находящиеся на одинаковой высоте, но точка перевала β не имеет значения.

Б. При $\alpha > 1$ положим $\alpha = \frac{1}{\cos \beta}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и выделим множитель $\frac{\nu}{\cos \beta}$. Так как $\cos \beta = \text{ch } i\beta$, то точками перевала являются $t_k = i(\pm\beta + 2k\pi)$. Поскольку $g(t_k) = i(\pm \sin \beta \mp \beta \cos \beta - 2k\pi \cos \beta)$, то путь следует деформировать через две точки перевала $\pm i\beta$, находящиеся на одинаковой высоте. Карта показана на рис. 11 ($\beta = \frac{\pi}{3}$). Уравнения ОЛУ имеют вид $\cos \tau = \frac{\sigma \cos \beta}{\text{sh } \sigma}$ и $\sigma = 0$. Применяя частично прежние результаты, при $\nu \rightarrow \infty$ получаем разложение

$$\begin{aligned}
 & J_\nu(\nu/\cos \beta) \sim \\
 & \sim \frac{\exp\left[\nu i(\text{tg } \beta - \beta) - \frac{i\pi}{4}\right]}{\pi \sqrt{2\nu \text{tg } \beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) A_k(i\beta) \left(\frac{1}{2} \nu i \text{tg } \beta\right)^{-k} + \\
 & + \frac{\exp\left[-\nu i(\text{tg } \beta - \beta) + \frac{i\pi}{4}\right]}{\pi \sqrt{2\nu \text{tg } \beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) A_k(i\beta) \left(-\frac{1}{2} \nu i \text{tg } \beta\right)^{-k},
 \end{aligned} \tag{19.79}$$

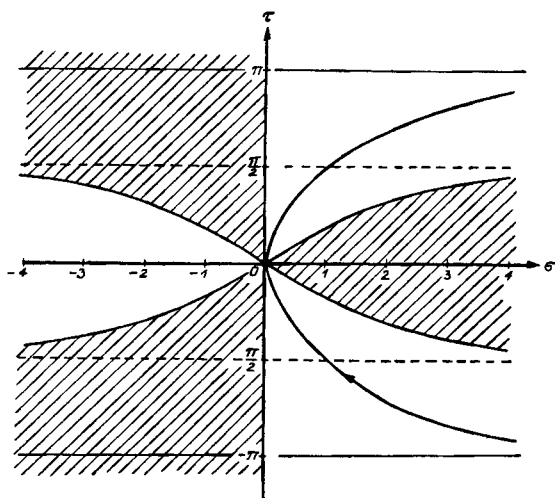


Рис. 12

где $A_k(\tau)$ — прежние коэффициенты. Первый член этого разложения при $\nu = n$ получен в (17.87).

В. При $\alpha = 1$ имеем кратные точки перевала $t_k = 2k\pi i$ и путь следует деформировать через точку $t = 0$. Карта показана на рис. 12. Уравнения для ОЛУ имеют вид $\cos \tau = \frac{\sigma}{\operatorname{sh} \sigma}$ и $\sigma = 0$. Как и раньше, целесообразно применить формулу (19.35), где $g(t_0) = 0$, $a_0 = \frac{1}{6} e^{i\pi}$, $c(k) e^{\frac{i\pi}{3}(k+1)} = \frac{1}{3} 6^{\frac{k+1}{3}} \int_0^{\infty} e^{-\omega} B_k(\omega) \omega^{\frac{k+1}{3}-1} d\omega$. Поскольку

$$D_{2k+1} = 0, \text{ то также } B_{2k+1} = 0, B_{2k} = -\frac{3\omega}{k} \sum_{j=0}^{k-1} B_{2j} \frac{2k-2j}{(2k-2j+3)!}$$

$B_0 = 1$. После преобразований при $\nu \rightarrow \infty$, $|\arg \nu| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, получаем

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{1}{3\pi} \sum_{k=0}^{\infty} E_k \sin \frac{(k+1)\pi}{3} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) \left(\frac{\nu}{6}\right)^{-\frac{k+1}{3}}, \quad (19.80)$$

где $E_{2k+1} = 0$, $E_0 = 1$, $E_2 = -\frac{1}{20}$, $E_4 = \frac{1}{280}$. Коэффициенты $E_6 - E_{10}$ можно найти в работе [5].

Из сравнения (19.80) с (19.79) и (19.78) видно, что (19.80) нельзя получить предельным переходом из предыдущих разложений. Поэтому целесообразно исследовать асимптотику $J_\nu(z)$ при $z = \nu(1 \pm \varepsilon(\nu))$, $\varepsilon = O(\nu^{-2/3})$. Это разложение рассмотрено Дебайем в [186] и приведено в [5]. Другая форма разложения в этом случае дана в п. 21.3.3, 2°. Можно показать, что при $\varepsilon = O(\nu^{-\frac{2}{3} + \alpha})$, $\alpha > 0$, остаются справедливыми формулы (19.78) и (19.79).

19.5.4. Рассмотрим примеры к п. 19.3 и 19.4.

5°. А. Для интеграла Фурье

$$\Omega(n, \varepsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp[in(t - \varepsilon \sin t)]}{1 - \varepsilon \cos t} dt, \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad n \in N, \quad (19.81)$$

при $n \rightarrow \infty$ асимптотические вклады от концов взаимно сокращаются (п. 19.3.1, 2°), поэтому следует искать критические точки в комплексной плоскости. Поскольку $g(t) = i(t - \varepsilon \sin t)$, то они определяются из уравнения $\cos t_k = \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $t_k^\pm = -i \ln[(1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon] + 2k\pi$. Легко показать, что функция $\psi(\varepsilon) = (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon e^{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ монотонно возрастает от 0 до 1 при $\varepsilon \in [0, 1]$, поэтому $\ln[(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon] + \sqrt{1 - \varepsilon^2} < 0$ при $\varepsilon \in (0, 1)$, $\ln[(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon] = -\ln[(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon] > 0$ и точки t_k^+ находятся в нижней полуплоскости, а t_k^- — в верхней. Карта дана на рис. 13 (при $\varepsilon = 4/5$). Уравнение для ОЛУ имеет вид

$$\cos \sigma = \frac{\ln[(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon] + \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \tau}{\varepsilon \operatorname{sh} \tau}.$$

Деформируем путь интегрирования по вертикальным отрезкам от $-\pi$ до $-\pi + i\tau_0$, $\tau_0 = \ln[(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon]$, и от π до $\pi + i\tau_0$ и кривой, соединяющей концы этих отрезков и обходящей точку перевала t_0^- снизу. Такой обход необходим потому, что t_0^- одновременно является полюсом первого порядка для подынтегральной функции. Удобнее пользоваться формулой (19.35) и применять в этом случае (19.29'), т. е.

$$e^{\omega G(t)} h(t) = \frac{B_0^*}{t - t_0} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k+1}^* (t - t_0)^k,$$

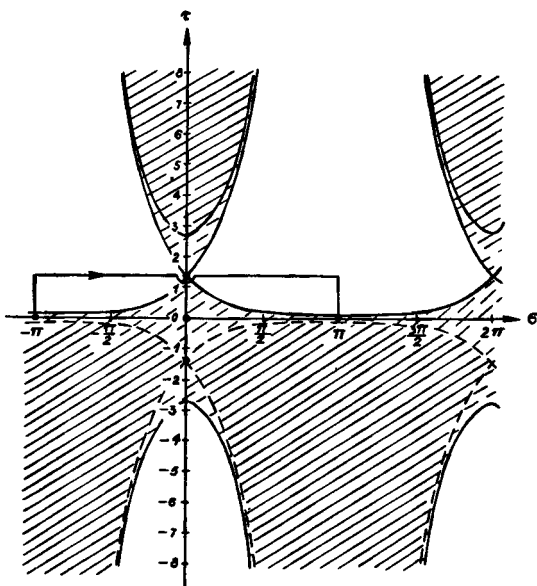


Рис. 13

где

$$B_0^* = \frac{1}{i\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

$$B_{k+1}^* = \frac{1}{i\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{\omega}{k+1} \sum_{j=0}^k B_j^* F_{k-j} - \sum_{j=0}^k B_j^* E_{k+2-j} \right],$$

$$1 - \cos \tau + i\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \tau = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \tau^k, \quad F_k = \sum_{j=0}^k D_{j+1} (j+1) E_{k+1-j},$$

$$\frac{i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} (\tau - \sin \tau) + \left(\cos \tau - 1 + \frac{\tau^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \tau^{k+2}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\Omega(n, \varepsilon) \sim \left\{ \left[(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) / \varepsilon \right] e^{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right\}^n \left[\frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} c(2k) n^{-k - \frac{1}{2}} \right], \quad (19.82)$$

где

$$-2c(2k) = \left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\omega} B_{2k+1}^*(\omega) \omega^{\frac{2k+1}{2}-1} d\omega,$$

$$-2c(0) = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{1-\varepsilon^2} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}.$$

Б. Можно применять также метод, указанный в п. 19.3.2, т. е. формулу (19.43). Подстановкой $e^{it} = v$ получаем

$$\Omega(n, \varepsilon) = \frac{1}{i} \int_{|v|=1} \exp \left[n \left(\ln v - \frac{\varepsilon}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right) \right) \right] \frac{dv}{v - \frac{\varepsilon}{2} (v^2 + 1)}.$$

Точками перевала являются $v_{1,2} = [1 \mp \sqrt{1-\varepsilon^2}]/\varepsilon$. Карта дана на рис. 14 (при $\varepsilon=4/5$). Уравнения ОЛУ имеют вид $\frac{1}{2} \ln(\sigma^2 + \tau^2) - \frac{\varepsilon\sigma}{2} \left(1 - \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \right) = \pm (\ln v_1 + \sqrt{1-\varepsilon^2})$. В силу предыдущих неравенств минимум достигается при $v=v_1$, поэтому путь следует деформировать в замкнутую линию, которая находится в долине и обходит v_1 справа, так как v_1 одновременно является также полюсом (рис. 14). В результате согласно (19.35) при $n \rightarrow \infty$ получаем разложение (19.82), причем

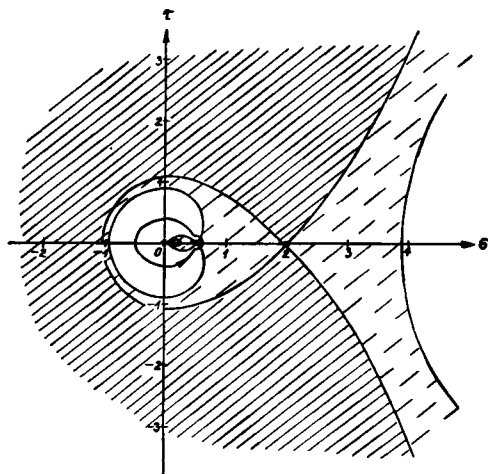


Рис. 14

$$-2c(2k) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)^{k+\frac{1}{2}} v_1^{2k+1} \int_0^{\infty} e^{-\omega} B_k(\omega) \omega^{\frac{2k+1}{2}-1} d\omega,$$

где

$$B_{k+1} = \frac{1}{k+1} \left[\omega \sum_{j=0}^k B_j D_{k+1-j}(k+1-j) - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{j=0}^{k-1} B_j D_{k-j}(k-j) \right] + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} B_k, \quad D_k = \frac{(-1)^{k+1/2}}{v_1^k \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{1-\varepsilon^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} \right), \quad k \geq 1, \quad B_0 = 1.$$

19.5.5, 6°. Некоторая своеобразная модификация появляется при асимптотическом разложении интеграла с ядром типа Стильтеса

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin xt \exp(-t^4) t^{4m+3} dt = \\ = x^{(4m+4)/3} / (2i) \left[\int_0^{\infty} \exp[-z(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\tau + \tau^4)] \tau^{4m+3} d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \exp[-z(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\tau + \tau^4)] \tau^{4m+3} d\tau \right] = \\ = x^{(4m+4)/3} / (2i) [\Omega_1(z) - \Omega_2(z)], \quad (19.83)$$

где $z = x^{3/4}$, $m \in N$. Первый интеграл имеет основную точку перевала в $\tau_0 = 1/\sqrt{2} e^{i\pi/4}$, второй — в $\tau_1 = 1/\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$, но в обоих случаях точка $\tau = 0$ находится выше точки перевала. Если путь интегрирования в $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ деформировать по отрезкам от начала до точек перевала, а потом — по линиям спуска до $\tau = +\infty$, то в силу равенства

$$\int_0^{e^{i\pi/4}} \exp[-z(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\tau + \tau^4)] \tau^{4m+3} d\tau = \\ = \int_0^{e^{i\pi/4}} \exp[-z(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\tau + \tau^4)] \tau^{4m+3} d\tau$$

в (19.83) остаются только интегралы по последним линиям спуска. Поэтому согласно (19.19) при $x \rightarrow +\infty$ получаем разложение

$$\Omega(x) \sim \frac{(-1)^m}{2^{m+3}\sqrt{3}} x^{(4m+2)/3} \exp(-3/4x^{4/3}) \sum_{k=0}^{\infty} D_k \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) x^{-2k/3}, \quad (19.84)$$

где $D_0=1$, а для вычисления D_k можно составить рекуррентные формулы.

7°. Рассмотрим пример к п. 19.4.3. Имеем

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos t)^n dt = \Omega_1 + \Omega_2 = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos \theta + i \sin \theta \cos t]^n dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos \theta - i \sin \theta \cos t]^n dt, \end{aligned} \quad (19.85)$$

где $\theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Исследуем сначала первый интеграл. Имеем точки перевала $t = k\pi$, $|k| \in N$, но промежуток интегрирования содержит только точку $t=0$. Применим подстановку $\cos \theta + i \sin \theta \cos t = e^{i\theta}(1 - \omega^2)$. Добавляя в левой части $\pm i \sin \theta$, после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \sin \frac{t}{2} &= \frac{e^{i\theta} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2} \sin \theta} \omega, \quad t = 2 \arcsin \left[\frac{\omega}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right] = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{1}{2k+1} \times \\ &\times \exp \left[i \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) (2k+1) \right] \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} \sin \theta} \right)^{2k+1}. \end{aligned} \quad (19.86)$$

Имеем $|K(t)| = \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 t} < 1$ при $t > 0$, поэтому условие применимости леммы 19.1 выполнено. В противоположность сказанному в п. 19.4.3 путь L_δ , т. е. отрезок $[0, \delta]$, деформировать не будем, но соответствующую ему кривую \tilde{L}_δ на плоскости ω , которая является отрезком на луче $\arg \omega = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$,

деформируем в отрезок $[0, \beta]$ и дугу окружности $w = \beta e^{i\gamma}$. На этой дуге

$$|1-w| = \sqrt{1-\beta(2\cos\gamma-\beta)} < \sqrt{1-\beta(\sqrt{2}-\beta)} < 1-\eta \quad \eta > 0,$$

поэтому интеграл по дуге имеет оценку $o(n^{-N})$. Согласно (19.86) и (19.52) при $n \rightarrow \infty$ получаем разложение

$$\begin{aligned} \Omega_1(\cos\theta) &\sim e^{i\theta n} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sin\theta} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{(1/2)_k}{\left(n+\frac{3}{2}\right)_k} e^{i((\theta/2)-(\pi/4)(2k+1))} (2\sin\theta)^{-k}. \end{aligned}$$

Аналогично разлагается $\Omega_2(\cos\theta)$. После объединения этих разложений при обозначении $\theta_{nk} = \theta(n+k+1/2) - \pi(k/2+1/4)$ имеем

$$P_n(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\theta}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(1/2)_k]^2}{k!(n+3/2)_k} \frac{\cos\theta_{nk}}{(2\sin\theta)^k}. \quad (19.87)$$

Напомним, что разложение для $P_n(\cos\theta)$ по функциям Бесселя дано в (13.30), а разложение для $P_n(\operatorname{ch}\alpha)$ — в (9.63). Другое разложение для $P_n(\cos\theta)$ будет приведено в третьем томе монографии.

§ 20. ИНТЕГРАЛ С БОЛЕЕ ОБЩИМ ЯДРОМ

20.1. Применение карты для $|K(rw)|$

20.1.1. Исследуем разложение при $z \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Omega(z) = \int_L K(zg(t))h(t)dt, \quad (20.1)$$

где $g(t)$ и $h(t)$ — аналитические в заданной области D_0 функции, за исключением, быть может, изолированных особых точек; $L \in \in D_0$. Функция $K(w)$ тоже аналитична в некоторой области D , находящейся в секторе $\arg w \in [\beta_1, \beta_2]$. В общем случае сектор принадлежит римановой поверхности. Область D при каждом

$\varphi = \arg z \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и достаточно большим $r = |z|$ содержит отображение на плоскости w , $w = \sigma' + i\tau'$, кривой L с помощью функции $w = re^{i\varphi}g(t)$. В отдельных подсекторах сектора $\arg w \in [\beta_1, \beta_2]$ функция $K(w)$ при $w \rightarrow \infty$ обладает асимптотическими разложениями вида

$$K(w) \sim \sum_{j=1}^p \exp [c_j w^{\nu_j}] \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} w^{-\lambda_{kj}}, \quad (20.2)$$

где $\nu_j \geq 0$, $\lambda_{kj} \uparrow + \infty$, $\sum_{j=1}^p |c_j| > 0$.

Переносим определения 16.2 и 16.3 на случай интеграла (20.1).

Определение 20.1. Критическими для интеграла (20.1) при $\nu > 0$ назовем точки следующих типов, принадлежащие области \bar{D}_0 .

- 1°. Концы пути интегрирования.
- 2°. Точки, в которых $g'(t) = 0$.
- 3°. Точки, в которых $g(t) = 0$.
- 4°. Особые точки функций $g(t)$ и $h(t)$.

Понятие *аппроксимирующей критической точки*, приведенное в п. 17.1, сохраняется и в данном случае.

Определение 20.2. Пусть путь интегрирования L содержит критическую точку. Интеграл от подынтегральной функции в (20.1) по кривой L_δ , исходящей из критической точки и состоящей из части пути интегрирования L , называется *асимптотическим вычетом*, или *асимптотическим вкладом*, вдоль L от критической точки в интеграл (20.1). Если асимптотическое разложение асимптотического вклада совпадает с разложением для (20.1) или дает его существенную часть или несколько частей, то вклад называется *существенным*. При этом кривая L_δ выбирается по возможности короткой. Критическая точка, дающая существенный асимптотический вклад, называется *существенно критической*. Термины «существенная часть», «полный вклад», «доминирующая критическая точка», «порядок критической точки» и «критическая точка смешанного типа» в общем сохраняют тот же смысл, что и в п. 16.1.3.

Если путь L не может содержать критическую точку (тип 4°), то нет смысла говорить об асимптотическом вычете. Строение асимптотических разложений в этом случае будет рассмотрено в п. 21.4 и гл. VI, а в § 20 влияние особых точек на асимптотику интеграла (20.1) не исследуется. Обычно понятие асимптотического вычета не имеет практического смысла и тогда, когда в (20.2) $\nu = 0$ и ядро является размытым.

20.1.2. В дальнейшем для параметра $z = re^{i\varphi}$ фиксируем $\varphi \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и множитель $e^{i\varphi}$ присоединяем к $g(t)$, обозначая новую функцию также через $g(t)$. Для лучшего исследования поведения ядра целесообразно построить карту. В § 19 при исследовании

$$|\exp[-r(g(t_0) - g(t))]| = \exp[-r \operatorname{Re}(g(t_0) - g(t))]$$

достаточно было построить карту для $u = \operatorname{Re} g(t)$ или $\operatorname{Re}[g(t_0) - g(t)]$. Сейчас же приходится строить карту для $|K(rg(t))|$. Поэтому понятия, которыми пользовались в § 19, следует несколько видоизменить.

Сначала рассмотрим построение карты для $|K(rw)|$. Метод, при котором используется такая карта, назовем *методом карты*.

Определение 20.3. Пусть линия L исходит из фиксированной точки w_0 , $K(rw_0) \neq 0$. Если для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такие $\eta > 0$, $M > 0$ и $\alpha > 0$, что для всех $w \in L$, для которых $|w - w_0| \geq \varepsilon$, при достаточно большом r имеет место неравенство

$$|K(rw)/K(rw_0)| \leq M \exp(-\eta r^\alpha), \quad (20.3)$$

то L называется *линией Лапласа для $|K(rw)|$, исходящей из w_0* . Если вместо (20.3) при прежних условиях на линии L имеем

$$|K(rw)/K(rw_0)| \geq M \exp(\eta r^\alpha), \quad (20.4)$$

то L называется *линией Лапласа для $|K(rw)|$, входящей в w_0* . В ближайшей окрестности точки w_0 на L отношение (20.3) или (20.4) должно быть ограниченным и в качестве соответствующей части L можно выбрать отрезок. Кривые, вдоль которых $|K(rw)|$ изменяется монотонно, называются *линиями спуска*.

Отметим, что для данной функции $|K(rw)|$ не всегда из каждой фиксированной точки w_0 выходят или входят линии Лапласа. Ниже указаны случаи, когда эти линии существуют.

Определение 20.4. Пусть для функции $K(rw)$ в отдельных секторах с вершинами в начале при $r \rightarrow \infty$ справедливы разложения типа (20.2). Если в некотором секторе, который может вырождаться также в луч, $|K(rw)|$ при $r \rightarrow \infty$ экспоненциально убывает, то сектор называется *долиной*, а если эта функция экспоненциально возрастает, то он называется *горой*. Совокупность точек области D , не принадлежащих ни долине, ни горе, называется *равниной*. Лучи, образующие граничные точки равнины, называются *сепараторами*. Если равнина — луч, то она совпадает с сепаратором. Указанные множества назовем *типами области для $|K(rw)|$* . Плоскость, в которой показано ее разделение на типы областей, называется *картой для $|K(rw)|$* .

Для функции $|K(rg(t))|$ понятия, рассмотренные в определениях 20.3 и 20.4, на плоскости t определяются с помощью отображения, обратного $w=g(t)$, карты для $|K(rw)|$ на карту для $|K(rg(t))|$.

Отметим, что применять термин «линии спуска» вместо «линии Лапласа» нецелесообразно, так как и в равнине обычно можно найти линии, вдоль которых $|K(rw)|$ меняется монотонно.

В методе перевала сепараторами являются ОЛУ. Однако сепаратор может отделять не только долину от горы, но и равнину от горы или же долины, а также и два одинаковых объекта: гору от горы, т. е. может образовывать *ущелье*. В качестве примера в случае образования ущелья приводим карту для $|\cos rw|$. Лучи $\arg w=0$ и $\arg w=\pi$ являются сепараторами и отделяют гору от горы, которые занимают остальную плоскость w . Кроме того, в отличие от ОЛУ сепаратор часто не является линией уровня для $|K(rw)|$. Но совпадение этих линий не исключено, например, для $K(w)=e^{iw}$ ось $\arg w=0$.

Равнина, занимающая двумерную область, является новым объектом. Она совпадает с тем сектором, в котором в разложении (20.2) $\gamma=0$. Для функции $|\Phi(\alpha; \gamma; rw)|$ в силу формулы (10.66) равниной является полуплоскость $\operatorname{Re} w \leq 0$, а сепаратором — прямая $\operatorname{Im} w=0$; полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ является горой. Для функции $|\operatorname{Erf}(rw)|$ в силу (8.9) и п. 8.4, 4° равниной является сектор $|\arg w| \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$ и лучи $\arg w = \pm \frac{\pi}{4}$. Последние, а также лучи $\arg w = \pm \frac{3\pi}{4}$ являются сепараторами. При $|\arg w| \in$

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right)$ имеем гору, при $|\arg w| < \frac{\pi}{4}$ — долину.

Следует отметить, что на карте для $|K(rw)|$ на горе, в долине и на равнине при фиксированном r имеем линии уровня, которые могут перейти из области одного типа в область другого типа, что снова отличает данный случай от случая, когда имеем ядро e^w . Но при достаточно большом r в силу разных асимптотик функции $|K(rw)|$ в областях разных типов линии уровня для $|K(rw)|$ лежат только в области одного вида.

Если в (20.2) имеем несколько рядов ($p > 1$), то возможно, что в одной части долины или горы доминирует один ряд, а в другой части — другой ряд. Линии, отделяющие эти части друг от друга, называются *линиями Стокса*. Если путь интегрирования не пересекает линию Стокса, то поведение $K(rw)$ при большом r на таком пути характеризуется одним доминирующим членом из (20.2).

Пусть при фиксированном $\kappa = \arg \omega \in [\beta_1, \beta_2]$ в (20.2) доминирующим является член

$$a_0 \exp(c_1 \omega^\gamma) \omega^{-\lambda_0}, \quad c_1 = a e^{i\psi}, \quad \gamma > 0, \quad (20.5)$$

и $K(r\omega_0) \neq 0$. Фиксируем $\omega = b e^{i\kappa}$, $\omega_0 = b_0 e^{i\kappa}$, $b > b_0 > 0$. Тогда при достаточно большом r

$$|K(r\omega)| = |a_0| \exp[ab^\gamma r^\gamma \cos(\gamma\kappa + \psi)] (rb)^{-\lambda_0} [1 + o(1)],$$

$$|K(r\omega)/K(r\omega_0)| = \left(\frac{b}{b_0}\right)^{-\lambda_0} \exp[ar^\gamma \cos(\gamma\kappa + \psi) (b^\gamma - b_0^\gamma)] [1 + o(1)]. \quad (20.6)$$

Это означает, что при $\cos(\gamma\kappa + \psi) > 0$ луч $\arg(\omega - \omega_0) = \kappa$ находится на горе, а при $\cos(\gamma\kappa + \psi) < 0$ — в долине. Можно брать любое фиксированное $b_0 > 0$, а если $K(0) \neq 0$, то сказанное верно также при $b_0 = 0$, так как $K(0) = \text{const}$.

Лемма 20.1. Пусть $K(\omega)$ аналитична в секторе $\arg \omega \in [\beta_1, \beta_2]$ и обладает в нем при $\omega \rightarrow \infty$ разложением (20.2), $\gamma > 0$, $K(0) \neq 0$. Тогда луч $\arg \omega = \kappa \in [\beta_1, \beta_2]$ является линией Лапласа для $|K(r\omega)|$, либо исходящей из начала, либо входящей в начало, если на нем в (20.2) имеется доминирующий член (20.5), в котором $\cos(\gamma\kappa + \psi) \neq 0$, $\psi = \arg c_1$. Одновременно луч является линией спуска.

Примечания. 1°. Пусть луч является линией Стокса и на нем в (20.2) доминирует несколько членов. Например, при фиксированном κ и $c_2 = a_2 e^{i\psi_2}$ имеет место $a \cos(\gamma\kappa + \psi) = a_2 \cos(\gamma\kappa + \psi_2) \neq 0$. При некоторых дополнительных условиях относительно данных чисел соответствующей модификацией доказательства можно показать, что лемма сохраняет силу и в этом случае и данная линия Стокса является линией Лапласа. Однако из примера $K(\omega) = e^{(1-i)\omega} + e^{(1+i)\omega}$, $K(x) = 2e^x \cos x$ следует, что это явление не всегда имеет место.

2°. Из леммы следует, что любые две точки, которые находятся в долине или на горе, можно соединить двумя линиями Лапласа — лучами, исходящими из начала.

3°. Лучи, вдоль которых $\cos(\gamma\kappa + \psi) = 0$, являются сепараторами.

20.1.3. В зависимости от расположения концов пути интегрирования путь можно деформировать как по использованным уже в § 19 линиям Лапласа, так и по линиям новых типов — сепараторам и линиям в равнине. Сначала рассмотрим пути первого типа.

Лемма 20.2. Пусть функции $g(t)$ и $h(t)$ аналитичны в D_0 , $K(\omega)$ аналитична в D и обладает в нем разложением (20.2), где $\gamma > 0$. Если L — линия Лапласа для $|K(\gamma g(t))|$, исходящая из

a , то при любой фиксированной точке $a_\delta \in L$, отсекающей на L до a отрезок L_δ , при $r \rightarrow \infty$ имеем оценку

$$\int_{L \setminus L_\delta} K(rg(t))h(t)dt = o(K(rg(a))r^{-N}). \quad (20.7)$$

В случае бесконечного пути интегрирования предполагается абсолютная сходимость интеграла при $r=r_0$.

Доказательство. Поскольку L исходит из a , то $K(rg(a)) \neq 0$. Согласно определению 20.3 при данном a_δ можно найти такое η , что на $L \setminus L_\delta$ справедливо (20.3). В случае конечного пути интегрирования из этого следует (20.7). Если же путь интегрирования бесконечный, то он обязательно находится в долине. Применим подстановку $w=g(t)$, которая $L \setminus L_\delta$ отображает на линию Лапласа в плоскость w . Эту линию можно деформировать в часть луча $\arg w = \text{const}$. Потом следует применить лемму 20.1, разложение (20.2) и доказательство леммы 19.1. ■

Из леммы 20.2 следует, что на линии Лапласа существенным асимптотическим вкладом является интеграл по части L_δ кривой, находящейся в малой окрестности точки a . При построении его асимптотического разложения надо различать случаи, когда $g(a) \neq 0$ и $g(a) = 0$.

1°. Если $g(a) \neq 0$, то в силу непрерывности в некоторой окрестности точки a , в которой находится L_δ , $g(t) \neq 0$. Выделим в (20.2) доминирующие на L_δ ряды и подставим их под знак интеграла. Можно интегрировать почленно, так как легко убедиться в том, что остаток обладает необходимой оценкой. Потом к каждому члену полученного ряда следует применить теорему 19.1 и перегруппировать члены. Если доминирует член (20.5), то $K(rg(a)) \approx a_{01} \exp[c_1 r^\nu g^\nu(a)] [rg(a)]^{-\lambda_{01}}$ и (20.7) можно переписать в другом виде.

2°. При $g(a) = 0$ сначала применим подстановку $w=g(t)$, которая критическую точку a переводит в начало плоскости w . При подстановке либо соответствующим выбором пути L_δ , либо деформированием его изображения L_δ можно добиться того, чтобы новый путь интегрирования находился на луче $\arg w = \kappa = \text{const}$. Потом новой подстановкой $w = ue^{i\kappa}$ получаем действительное переменное интегрирования u . К полученному интегралу можно применить теорему 16.9 или 12.1. Получим разложение иного вида, чем в 1°. Это вновь подтверждает, что точки, в которых $g(t)$ равна нулю, являются критическими.

3°. Обычно путь интегрирования, находящийся либо в долине, либо на горе на плоскости t , не совпадает с линией Лапласа. Если на нем $g(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$, то можно непосредственно

подставить под знак интеграла разложение (20.2) и интегрировать почленно, а потом — каждый интеграл по частям. Затем следует перегруппировать члены. Эти действия обычно легко обосновать. В частности, $g(t) \neq 0$ на линии уровня, так как $|K(rg(t))|$ и $|K(0)|$ не могут быть равными. Имеется более общий прием: с помощью подстановки $\omega = g(t)$ перейти на плоскости ω и путь согласно примечанию 2° к лемме 20.2 деформировать по двум линиям Лапласа. Сказанное относится также к случаю, когда путь идет из долины в гору.

20.1.4, 1°. Если путь интегрирования находится в равнине, в которой $K(rg(t))$ имеет степенную асимптотику, то целесообразно применить подстановку $\omega = g(t)$. Потом путь или его части следует деформировать по отрезкам, лежащим на лучах, подставить $\omega = ue^{ix}$ и применить метод последовательного разложения или другие методы (см. § 11 и 14). При $g(t) \neq 0$ в случае пути конечной длины подстановка будет излишней и можно непосредственно почленно интегрировать разложение (20.2).

2°. Если путь идет по сепаратору, то обычно задачу подстановкой $\omega = g(t)$ приводим к интегрированию по отрезку, а потом с помощью $\omega = ue^{ix}$ — к действительной переменной интегрирования. Далее приходится различать два случая.

А. В (20.2) все доминирующие ряды содержат множитель типа $\exp(iau^v)$, где a — действительное, $a \neq 0$. Тогда разложение приводится к § 16 и можно применить теоремы 16.8 и 16.9.

Б. В (20.2) имеется несколько доминирующих рядов, среди которых кроме рядов, указанных в п. А, содержится хотя бы один чисто степенной ряд. Если L не исходит из начала и имеет конечную длину, то можно применить почленное интегрирование соответствующих разложений. В противном случае следует использовать метод последовательного разложения, в котором взяты переменные коэффициенты (см. § 11).

3°. Пусть путь выходит из равнины и продолжается в область другого типа. Тогда путь интегрирования следует разбить на две части, лежащие в областях разных типов. Если вторая область — гора, то интегралом по равнине можно пренебречь и единственной существенно критической точкой является конец L , находящийся на горе. Путь, исходящий из этого конца, следует деформировать по линии Лапласа.

Если вторая область — долина, то критической может оказаться точка, находящаяся на сепараторе. Путь из нее в долине целесообразно деформировать по сепаратору до начала, а потом по линии Лапласа (см. пример 20.2.3). Подробнее о разных возможностях в выборе пути будет сказано в п. 20.2.

4°. Некоторые осложнения могут появиться из-за того, что часто плоскость t отображается на риманову поверхность плоскости ω и L может отобразиться в кривую, лежащую на не-

скольких листах этой поверхности. Этот факт требует соблюдения некоторой осторожности при подстановке $t=t(\omega)$, $dt = t'(\omega)d\omega$ под знак интеграла, так как надо выбрать правильную ветвь. Такой выбор на примерах будет показан в п. 20.2.

20.2. Примеры

20.2.1. Перечислим правила, которые следует соблюдать, используя данный метод.

1°. Найти критические точки, указанные в п. 20.1.1.

2°. Нарисовать карту для $|K(r\omega)|$, на которой показаны сепараторы, горы, равнины и долины. Надо отметить также разрезы, если функция $t(\omega)$, обратная $\omega=g(t)$, многозначна (см. п. 20.1.4, 4°). Точки ветвления на плоскости ω соответствуют седловым точкам на плоскости t . Долины и горы на карте обозначены так же, как в § 19, а равнины — *волнистым пунктиром* (см. рис. 18 и 19).

3°. Отобразить полученную в п. 2° карту с помощью функции $t(\omega)$ на карту в плоскости t . Поскольку $t(\omega)$ обычно многозначна, то следует построить отображение всех листов (или тех из них, образы которых содержатся в области D_0). Образ разреза назовем *линией ветвления*.

4°. Отметить на плоскости t концы пути интегрирования и исследовать возможности деформирования пути. В случае необходимости разбить путь L на несколько частей и к каждой части применить соответствующий метод разложения, указанный в п. 20.1.3 и 20.1.4. Иногда целесообразно L деформировать до подстановки $\omega=g(t)$. После подстановки соответствующее отображение пути отмечается на карте для $|K(r\omega)|$.

5°. Исследовать допустимый промежуток для $\arg z$. При этом надо иметь в виду, что карта для $|K(re^{i\varphi}g(t))|$ отличается от карты для $|K(rg(t))|$ поворотом на угол φ вокруг начала. Если при всех $\varphi \in [0, \varphi_0]$ кривая L находится на равнине, то при этих φ асимптотическое разложение сохраняется. Если кривая находится на горе или в долине, то сохраняется сумма разложений, полученная от вкладов окрестностей концов.

В дальнейших примерах покажем только карты, деформирование пути интегрирования и укажем метод для разложения асимптотических вкладов. Построение самих разложений оставляем читателю.

20.2.2. Пусть $K(t) = Ait$. Асимптотические разложения (19.72) и (19.74) для Ait соответствуют (20.2). Из них следует, что $Ai\omega \sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2}\omega^{-1/4}e^{-2/3\omega} \omega^{3/2}$ при $|\arg \omega| < \pi$ и $Ai(-r) \sim$

$\sim \pi^{-1/2} r^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} r^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$, $r > 0$. Кроме того, из (19.75) получаем, что $Ai(0) = 1/(3^{3/2}\Gamma(2/3)) \neq 0$. По этим данным можно строить карту для $|K(r\omega)|$ (рис. 15). Луч $\arg \omega = \pi$ — ущелье, содержащее разрез, а лучи $\arg \omega = \pm \pi/3$ — сепараторы.

Исследуем асимптотику интеграла

$$\Omega_h(r) = \int_{L_h} Ai[r(t^2+2t)]h(t) dt \quad (20.8)$$

при разных выборах пути L_h . Поскольку $g(t) = t^2 + 2t$, то критическими являются точки $t=0$ и $t=-2$, в которых $g'(t) = 0$, точка перевала $t = -1$, а также концы кривой L_h . Отображая построенную карту для $|K(r\omega)|$ с помощью обратной функции $t = -1 \pm \sqrt{1+\omega}$, получаем рис. 16. При этом $\sqrt{1+\omega} > 0$, если $\omega > -1$. Сепараторы $\arg \omega = \pm \pi/3$ отображаются в части гипербол, центр которых расположен в точке $t = -1$, оси симметрии повернуты на угол $\pm \pi/12$, и уравнение в новых осях имеет вид $\sigma^{*2} - \tau^{*2} = \sqrt{3}/2$. Преобразы и образы на рисунках обозначены одинаковыми цифрами.

Сепаратор $\arg \omega = \pi$ отображается в две ломаные $3'$ и $3''$ (рис. 16), причем их вертикальные части совпадают с линией ветвления, которая является изображением берегов разреза. Этот факт следует иметь в виду в случаях, когда путь интегрирования имеет общую точку с линией ветвления.

Выберем в качестве путей интегрирования кривые $L_1 - L_8$

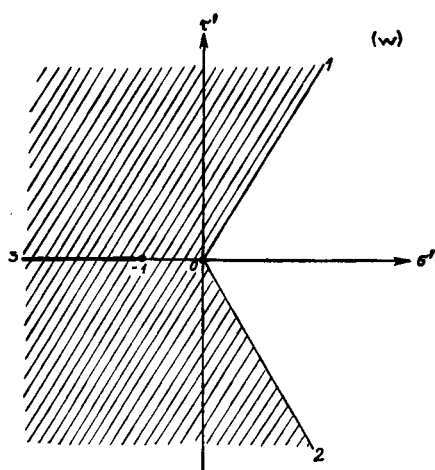


Рис. 15

(рис. 17), расположенные в областях разных типов. Путь L_1 целиком находится на горе, путь L_4 — в долине. На обеих кривых справедливо разложение (19.72), которое можно подставить под знак интеграла и интегрировать почленно. Если концы кривой не находятся на одной линии уровня, то доминирующим будет только вклад с того конца, на котором модуль больше.

Сказанное относится также к интегралам по L_3 и L_2 . Только в последнем случае применяем формулу (19.74). Но в обоих случаях доминирующим является вклад от конца, кото-

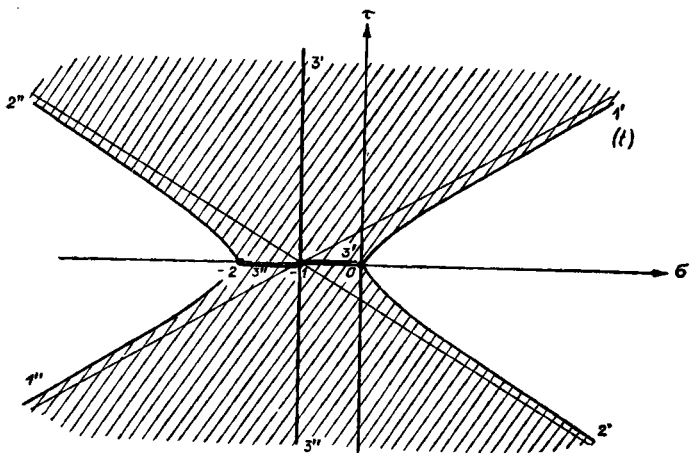


Рис. 16

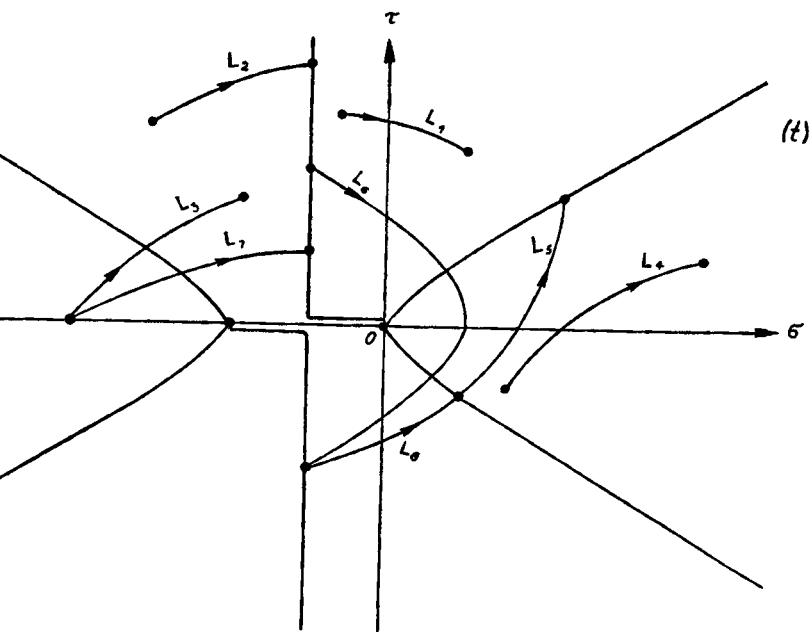


Рис. 17

рый находится на горе; поэтому можно использовать также (19.72). Следует отметить, что изображения кривых L_2 и L_3 лежат на втором листе римановой поверхности. Это нужно учитывать при подстановке $\omega = g(t)$.

В интегралах по $L_5 - L_8$ рекомендуется применять подстановку $\omega = g(t)$. Изображение L_5 для L_5 следует деформировать по сепараторам $\arg \omega = \pm \pi/3$ и применять формулу (19.72) и теоремы 16.8 и 16.9. Изображение L_6 является перерезанной замкнутой кривой, охватывающей точки $\omega = 0$ и $\omega = -1$. Ее концы опираются на берега разреза. Можно L_6 деформировать по отрезкам, лежащим на верхнем и нижнем берегах разреза и идущим вдоль луча $\arg \omega = \pi$. Функция $K(r\omega)$ на обоих берегах разреза принимает одно и то же значение, но для функций $t(\omega) = -1 + \sqrt{1+\omega}$ и $t'(\omega) = \frac{1}{2}(1+\omega)^{-1/2}$ на верхнем берегу

имеем $\sqrt{1+\omega} = i\sqrt{\omega-1}$, а на нижнем $-\sqrt{1+\omega} = -i\sqrt{\omega-1}$. Поэтому интегралы по разным берегам взаимно не сокращаются даже в случае, когда концы кривой L_6 отображаются на плоскости ω в одну и ту же точку. Далее для каждого интеграла применяются разложение (19.74) и теорема 16.8.

Путь L_7 сначала деформируем по прямолинейным отрезкам, а потом отображим его на плоскости ω в отрезок $[0, a]$, отрезок $[-1, 0]$ и отрезок $[b, -1]$ по верхнему берегу разреза. В первых двух интегралах $t = t_2(\omega)$. Для первого интеграла применим теорему 16.1, для второго — теоремы 16.8 и 16.9, а для третьего — теорему 16.8.

Путь L_8 также сначала деформируем по отдельным отрезкам сепараторов, а после подстановки его изображение L_8 разобьем по отрезкам $[a, -1]$, $[-1, 0]$ и по части сепаратора $\arg \omega = -\pi/3$. Для первого интеграла применим теорему 16.8, для второго и третьего — теоремы 16.8 и 16.9.

20.2.3. Пусть $K(\omega) = \Phi(\alpha; \gamma; \omega)$, $g(t) = t^2 + 2t$. Для $K(\omega)$ имеем асимптотическое разложение (10.66), из которого следует, что

$$K(\omega) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\omega} \omega^{\alpha-\gamma} \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty, \quad |\arg \omega| < \pi/2, \quad K(\omega) \sim \\ \sim \frac{\Gamma(\gamma) \exp[i\lambda \alpha \operatorname{sign} \arg \omega]}{\Gamma(\gamma - \alpha)} \omega^{-\alpha} \quad \text{при } |\arg \omega| > \pi/2. \quad \text{При } \arg \omega =$$

$= \pm \pi/2$ асимптотическое разложение для $K(\omega)$ состоит из двух рядов. Указанные лучи являются сепараторами. Кроме того, $K(0) = 1$. По этим данным строим карту для $|K(r\omega)|$ (рис. 18). Равнина на рисунке отмечена волнистым пунктиром. С помощью $t = -1 \pm \sqrt{1+\omega}$ отобразим эту карту на плоскости t (рис. 19). Сепараторы $\arg t = \pm \pi/2$ отображаются на гиперболу $(\sigma+1)^2 - \tau^2 = 1$.

Чтобы проиллюстрировать новые возможности, в интеграле

$$\Omega_h(r) = \int_{L_h} \Phi(\alpha; \gamma; r(t^2 + 2t)) h(t) dt \quad (20.9)$$

будем выбирать только такие пути, которые связаны с равнинной. Эти пути показаны на рис. 20. Во всех случаях вначале применим подстановку $w = t^2 + 2t$.

Кривую L_1 (изображение L_1) деформируем в два отрезка, выходящих из начала и находящихся в равнине, а L_4 — в подобный отрезок. В два отрезка деформируется также L_7 , только эти отрезки находятся на втором листе римановой поверхности. Путь L_3 идет по сепаратору, а L_5 — по отрезку и сепаратору.

Кривые L_2 и L_6 пересекают разрез, поэтому какая-то их часть находится на первом листе, остальная часть — на втором листе. Путь L_2 деформируем в два отрезка, соединяющих концы L_2 с началом, и в отрезки на берегах разреза, причем один отрезок на берегу и один на луче находятся на втором листе. Аналогично деформируется путь L_6 , только в данном случае будет отсутствовать отрезок на первом листе. Во всех случаях нужно фиксировать правильное направление на отрезках.

Разложение интегралов производится с помощью асимптотического разложения (10.66) функции Φ согласно методам, рассмотренным в § 11 и 14. При интегрировании по сепаратору можно использовать метод последовательного разложения с переменными коэффициентами. Интегралы по отрезкам, не содержащим точку $w=0$, разлагаются непосредственной подстановкой (10.66) и почленным интегрированием. В интегралах по кривым L_1 , L_2 и L_7 проще было бы обойтись без подстановки и прямо интегрировать почленно соответствующее разложение. Поскольку путь L_6 на плоскости t можно деформировать в отрезок $[-1, 0]$ и L_7 , то для разложения Ω_6 методы можно комбинировать.

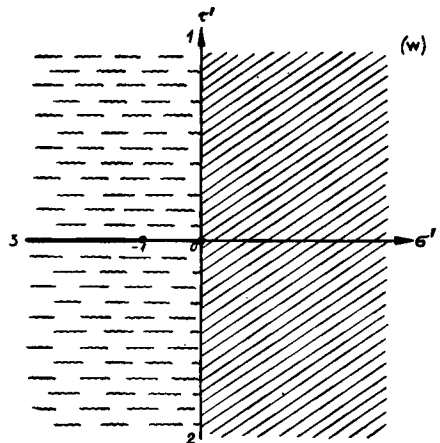


Рис. 18

Лемма 20.3. *Через каждую точку $t_0 \in D_0$, $t_0 \in \Sigma$, проходит одна и только одна ГЛ функции $g(t)$.*

Лемма непосредственно следует из теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (20.12) [165]. Из леммы вытекает, что внутри $D_0 \setminus \Sigma$ разные ГЛ не пересекаются. Но они могут иметь общие предельные точки, принадлежащие Σ . Причислим предельные точки к ГЛ, хотя (20.12) в них не определено. Если ГЛ приближается к особой точке в определенном направлении, будем говорить, что она *входит* в эту точку (или *выходит* из нее) в этом направлении. ГЛ входит в особую точку, если при приближении к этой точке $m(\sigma, \tau)$ возрастает, и выходит из точки, если $m(\sigma, \tau)$ убывает. При исследовании общих свойств ГЛ ради простоты указанные случаи не будем различать и всегда будем говорить «входит».

Определение 20.6. Особая точка, в которую входят все ГЛ из достаточно малой окрестности этой точки в определенных направлениях, называется *узлом*. Если в каждом направлении входит одна ГЛ, то узел называется *дикритическим*. Особая точка, в которую в изолированных направлениях входит по одной ГЛ, а все остальные ГЛ из окрестности этой точки не входят, называется *седлом*. При этом исключается случай, когда в точку одна ГЛ входит и в противоположном направлении другая ГЛ выходит, т. е. точка не является особой. Кривые, входящие в седло, называются *сепаратрисами*. Если в окрестности особой точки имеется бесконечно много ГЛ, входящих в точку, и бесконечно много таких, которые в нее не входят, то особая точка называется *седло-узлом*.

Лемма 20.4. *Для того чтобы на некоторой кривой $\Theta = \arg g(t) = \text{const}$, необходимо и достаточно, чтобы эта кривая была ГЛ для $g(t)$.*

Доказательство. Формулы Даламбера—Эйлера (или Коши—Римана) в полярных координатах имеют вид [167]

$$\frac{\partial m}{\partial \sigma} = m \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial m}{\partial \tau} = -m \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma}. \quad (20.13)$$

Пусть справедливо (20.12). Согласно (20.13) и (20.12) на ГЛ имеем

$$\frac{d\Theta}{ds} = \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial m}{\partial \tau} \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\partial m}{\partial \sigma} \frac{d\tau}{ds} \right) = 0, \quad (20.14)$$

поэтому на ГЛ $\Theta = \text{const}$.

Обратно, если на некоторой кривой $\Theta = \text{const}$, то на ней $\frac{d\Theta}{ds} = 0$

и из (20.14) и (20.13) получаем (20.12), т. е. кривая совпадает с ГЛ. ■

Из леммы следует, что ГЛ можно задавать уравнением

$$\Theta(\sigma, \tau) = \text{const.} \quad (20.15)$$

При фиксированной постоянной уравнением (20.15) иногда можно определить несколько несвязных линий. В силу неоднозначности аргумента при s и $s+2k\pi$, $|k| \in N_1$, получаем одну и ту же кривую или разные кривые на римановой поверхности. Поскольку путь интегрирования обычно лежит на одном листе, то практически часто достаточно ограничиться значениями $\Theta \in (-\pi, \pi]$.

Лемма 20.5. *Вдоль ГЛ функция $m(\sigma, \tau)$ изменяется монотонно.*

Доказательство следует из равенств

$$\left| \frac{dm}{ds} \right| = \max \left| \frac{\partial m}{\partial l} \right| = |\text{grad } m(\sigma, \tau)| = |g'(t)| \neq 0, \quad (20.16)$$

которые вытекают из определения векторной линии [209]. ■

Согласно лемме 20.5 ГЛ не может быть замкнутой. Если $g(t)$ многозначна, то иногда ГЛ на одном листе может казаться замкнутой, но фактически ее продолжение будет лежать на следующем листе (см. п. 20.3.3).

Определение 20.7. Особая точка, находящаяся внутри таких ГЛ, которые при совмещении всех листов римановой поверхности образуют замкнутые кривые, называется *псевдоцентром*. Если ГЛ — спирали, неограниченно приближающиеся на римановой поверхности к особой точке, то эта точка называется *фокусом*.

Из (20.16) вытекает также, что вдоль ГЛ $m(\sigma, \tau)$ изменяется быстрее, чем вдоль других линий, исходящих из одной и той же точки. Эта особенность напоминает свойство ЛНС.

20.3.3. Исследуем поведение ГЛ в некоторой окрестности простейших особых точек.

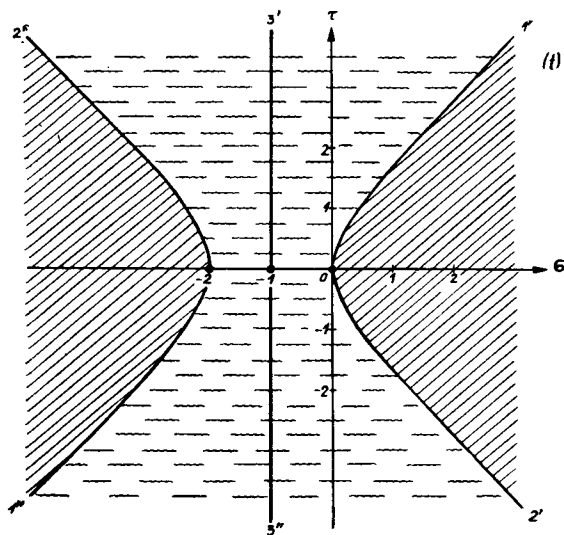
1°. Пусть $g(t)$ в окрестности $t=t_0$ представима в виде

$$g(t) = A(t-t_0)^\alpha \psi(t), \quad \psi(t) = 1 + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow t_0, \quad (20.17)$$

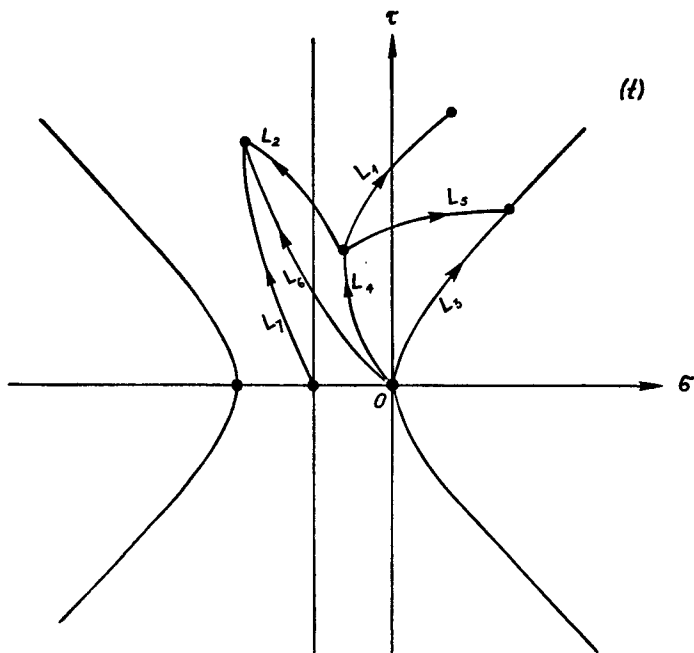
где A , α — комплексные числа; $A \neq 0$; $\alpha \neq 0$; $\psi(t)$ — аналитическая в окрестности $t=t_0$ функция. Сначала берем α действительным. Положим $t-t_0 = re^{i\varphi}$. Имеем либо $g(t_0) = 0$, либо $g(t_0) = \infty$, причем при $|\alpha| \in N$ t_0 является точкой ветвления. Поэтому полную кривую получаем на римановой поверхности.

Проводим через t_0 луч $\varphi = \beta \in (-\pi, \pi]$ и берем ГЛ в виде

$$\arg g(t) \equiv \arg A + \alpha\varphi + \arg \psi + 2k\pi = \arg A + 2k\pi + \alpha\beta, \quad (20.18)$$



Puc. 19



Puc. 20

20.3. Градиентные линии и их свойства

20.3.1. В п. 19.1.4 установлено, что ЛНС являются градиентными линиями для $\operatorname{Re} g(t)$ и вдоль них $\operatorname{Im} g(t) = \operatorname{const}$. В силу того что $K(\omega)$ в общем не обладает свойством $K(\omega_1 + \omega_2) = K(\omega_1)K(\omega_2)$, благодаря которому в методе перевала после подстановки $g(t_0) - g(t) = u$ за знак интеграла можно вынести $e^{zg(t_0)}$, применение ЛНС в настоящем параграфе не является целесообразным. Однако кажется, что преимущество может иметь интегрирование по линиям, вдоль которых при $g(t) = ue^{i\theta}$ $\theta = \operatorname{const}$, так как тогда непосредственно будем иметь действительное переменное интегрирования. Кроме того, при интегрировании по таким кривым иногда можно обойтись без рисунков и проще установить допустимый промежуток для $\arg z$. Исследуем эти линии подробнее.

Положим

$$g(t) = m(\sigma, \tau) e^{i\theta(\sigma, \tau)} \quad (20.10)$$

и допустим, что $g(t)$ — аналитическая функция в области D_0 , за исключением, может быть, некоторых изолированных особых точек.

Определение 20.5. Векторную линию вектора $\operatorname{grad}|g(t)| = \operatorname{grad} m(\sigma, \tau)$ назовем *градиентной линией* для $g(t)$. Обозначим ее через ГЛ. Если $g(t)$ многозначна, то ГЛ рассматривается на римановой поверхности.

Пусть ГЛ написана в параметрической форме

$$\sigma = \sigma(s), \quad \tau = \tau(s). \quad (20.11)$$

Тогда согласно определению 20.5 и определению векторных линий [209] функции $\sigma(s)$ и $\tau(s)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma}{ds} : \frac{\partial m}{\partial \sigma} = \frac{d\tau}{ds} : \frac{\partial m}{\partial \tau}. \quad (20.12)$$

Наоборот, решая (20.12), находим ГЛ, часто в форме $\tau = \tau(\sigma)$ или $\sigma = \sigma(\tau)$. При этом из рассмотрения пока приходится исключить следующие точки: 1) особые точки $g(t)$; 2) точки, в которых $g(t) = 0$, так как в них не имеет места представление (20.10), т. е. не существует $\theta(\sigma, \tau)$; 3) точки, в которых $g'(t) = 0$, так как они являются особыми точками уравнения (20.12). Совокупность этих точек обозначим через Σ и назовем их *особыми точками* семейства кривых, заданных уравнением (20.12). В одной особой точке может объединиться несколько из вышеперечисленных особенностей.

где k выбрано так, чтобы $\arg g(t) \in (-\pi, \pi]$. Существует только одно такое значение k при данных α и β . Поскольку при $t \rightarrow t_0$ $\arg \psi \rightarrow 0$, то вдоль выбранной ГЛ $\varphi \rightarrow \beta$, т. е. кривая входит в t_0 под углом β . Если в правой части (20.18) будем брать иную постоянную, принадлежащую $(-\pi, \pi]$, то получим другой угол. Поэтому кривая (20.18) является единственной ГЛ, входящей в t_0 под углом β , а точка t_0 — дикритическим узлом семейства градиентных линий.

Пусть $\alpha = \lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$. Берем ГЛ в виде $\arg g(t) = \arg A + 2k\pi + c \in (-\pi, \pi]$ или

$$\mu \ln r + \lambda \varphi + \arg \psi(t) = c + 2k\pi. \quad (20.19)$$

При небольших r и $\lambda \neq 0$ ГЛ мало отличается от части логарифмической спирали $r = c_0 e^{-\frac{\lambda}{\mu} \varphi}$ и, очевидно, не входит в t_0 . Поэтому точка $t = t_0$ является фокусом. При $\lambda = 0$ и $\psi(t) \equiv 1$ на основном листе получаем окружность, которая бесконечно много раз повторяется на римановой поверхности. Точка t_0 является псевдоцентром. При $\psi(t) \neq 1$ правая часть равенства $r = c_0 \exp \left[-\frac{1}{\mu} \arg \psi(re^{i\varphi}) \right]$ при $r \rightarrow 0$ стремится к c_0 , поэтому на данной ГЛ r не может стремиться к нулю. В силу аналитичности $\psi(t)$ на основном листе получаем замкнутую кривую. Точка t_0 в этом более общем случае также является псевдоцентром.

2°. Берем

$$g(t) = B + g_1(t), \quad (20.20)$$

где $g_1(t)$ определено по формуле (20.17), $B \neq 0$, $\alpha > 0$. Если $\alpha < 0$, то имеем случай 1°. Рассмотрим ГЛ

$$\arg [B + g_1(t)] = c, \quad c \in (-\pi, \pi],$$

или

$$\arg \left[1 + \frac{A}{B} (t - t_0)^\alpha \psi(t) \right] = c - \arg B + 2\varepsilon\pi, \quad \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}. \quad (20.21)$$

При $t \rightarrow t_0$ левая часть равенства (20.21) стремится к нулю. Поэтому ГЛ входит в t_0 тогда и только тогда, когда правая часть (20.21) также равна нулю, т. е. в t_0 входят только такие ГЛ, которые заданы уравнением

$$\arg \left[1 + \frac{A}{B} (t - t_0)^\alpha \psi(t) \right] = 0.$$

Отсюда следует, что на ГЛ выражение $\frac{A}{B} (t - t_0)^\alpha \psi(t)$ действи-

тельно и больше -1 . Пусть $\frac{A}{B} = be^{i\beta}$, $\psi(t) = \rho e^{i\kappa}$. Тогда $\sin(\beta + \alpha\varphi + \kappa) = 0$ или $\beta + \alpha\varphi + \kappa(r, \varphi) = k\pi$. Поскольку при $r \rightarrow 0$ $\kappa \rightarrow 0$, то ГЛ входят в t_0 в направлениях $\varphi = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{k\pi}{\alpha}$. На основном листе имеем либо $[2\alpha]$, либо $[2\alpha] + 1$ таких направлений. При $\alpha = n$ всегда имеем $2n$ направлений, а при $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ может не существовать ни одного направления. Следует исключить значение $\alpha = 1$, так как тогда через t_0 проходит одна ГЛ и согласно (20.20) точка t_0 не является особой. Точка t_0 при $\alpha \neq 1$ является седлом.

Отметим еще, что точка перевала t_0 для $g(t)$ при $g(t_0) \neq 0$ является седлом, а для $g(t_0) = g(t)$ — узлом.

3°. Пусть

$$g(t) = A(t-t_0)^\alpha \exp[B(t-t_0)^{-\beta}] \psi(t), \quad (20.22)$$

где A и B — комплексные числа, $A \neq 0$; $B \neq 0$; $B = \lambda + i\mu$; α и β — действительные числа; $\beta > 0$, а $\psi(t)$ определено в (20.17). Берем ГЛ в виде

$$\arg g(t) \equiv \arg A + \alpha\varphi + r^{-\beta}(\lambda \sin \beta\varphi + \mu \cos \beta\varphi) + \arg \psi(t) = c.$$

На этой кривой точка t может стремиться к t_0 (или $r \rightarrow 0$) лишь тогда, когда $\lambda \sin \beta\varphi + \mu \cos \beta\varphi \rightarrow 0$, т. е. $\operatorname{tg} \beta\varphi \rightarrow -\frac{\mu}{\lambda}$. Следовательно, ГЛ могут входить в особую точку только в определенных направлениях, причем для одного направления можно брать разные c . Поэтому особая точка является седло-узлом.

20.4. Деформирование пути по градиентным линиям

20.4.1. Рассмотрим подробнее метод, по которому путь интегрирования в (20.1) деформируется так, чтобы он состоял из ГЛ. На отдельной ГЛ имеем $g(t) = ue^{i\Theta}$, $\Theta = \text{const}$. Отсюда надо выразить $t = t(u)$ и перейти к интегрированию по u . Получаем интеграл

$$\int_a^b K(re^{i(\theta+\varphi)u}) h_0(u) du,$$

разложение которого производится рассмотренными в п. 20.1 методами. Фактически переход к интегрированию по u означает,

что путь на плоскости t выбран так, чтобы после подстановки $\omega = g(t)$ можно было интегрировать по отрезку, который лежит на луче, исходящем из начала. Для определения Θ следует учитывать равенство $\Theta = \arg g(a) = \arg g(b)$.

Обычно концы пути интегрирования не лежат на одной ГЛ. При деформировании пути в несколько градиентных линий следует иметь в виду, что установленные в п. 20.3 факты относятся только к некоторой малой окрестности точки t_0 , т. е. дают локальную картину. Глобальное поведение семейства ГЛ может быть весьма сложным. Локальную картину, имеющуюся вокруг особой точки, в более широкой области сильно искажает присутствие других особых точек.

ГЛ не может соединить двух узлов, если в них $g(t)$ имеет одно и то же значение (0 или ∞), так как на ГЛ $|g(t)|$ меняется монотонно. Но она может соединить две особые точки разных типов или узлы с разными значениями, например при $g(t) = (t-t_0)(t-t_1)^{-1}$. Два узла с одинаковыми значениями часто можно соединить с помощью двух ГЛ через седло (см. рис. 21 для функции $g(t) = t^2 + 2t$). Вообще каждая особая точка группирует вокруг себя отдельные семейства ГЛ.

Из сказанного следует, что путь не всегда можно деформировать по градиентным линиям. Иногда такое деформирование слишком сложно и не является целесообразным. Поэтому в зависимости от расположения концов пути интегрирования и данной функции $g(t)$ при деформировании пути целесообразно применять тот из рассмотренных двух методов, который в данном случае оказывается более простым. Как уже было сказано в п. 20.3.1, метод применения ГЛ имеет некоторые преимущества: 1) не требуется рисовать карту, так как на плоскости ω интегрирование происходит по лучу $\arg \omega = \text{const}$ и поведение ядра на таком луче легко определить по разложению (20.2); 2) нетрудно исследовать допустимый промежуток для $\arg z$, при которых справедливо построенное разложение. Однако вместо карты желательно иметь рисунок (эскиз) расположения особых точек и поведения семейства ГЛ для $|g(t)|$, чтобы выбрать правильное деформирование по ГЛ. При более сложной функции $g(t)$ такой эскиз особенно необходим (см. п. 20.4.4). Поэтому время, которое приходится тратить на изготовление рисунка, в обоих методах почти одинаковое.

20.4.2. Ознакомимся на примерах с применением ГЛ. Сначала рассмотрим примеры, приведенные в п. 20.2. Путь интегрирования берем по тем же линиям, которые отмечены на рис. 17 и 20. Эскиз семейства ГЛ для $g(t) = t^2 + 2t$ показан на рис. 21. Имеем узлы $t=0$ и $t=-2$ и седло $t=-1$. ГЛ, проходящие через узлы, являются равнобочными гиперболами с центром в точке $t=-1$.

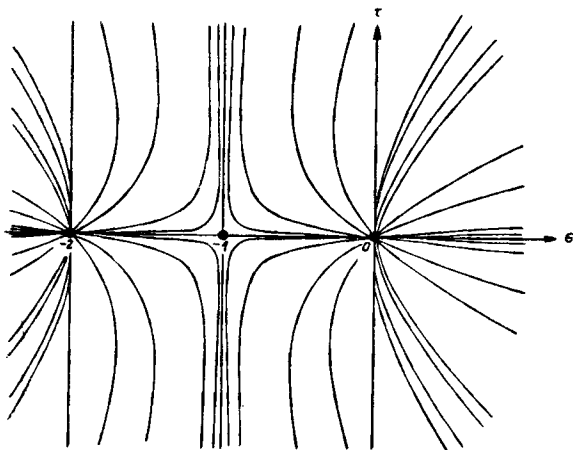


Рис. 21

1°. Рассмотрим деформирование путей, представленных на рис. 17, используя также рис. 21. Кривые L_1 , L_3 и L_4 деформируем в две ГЛ, входящие в $t=0$. Линию L_2 (в обратном направлении) можно деформировать по сепаратрисе до $t=-1$, по второй сепаратрисе — до $t=-2$ и по ГЛ — до конца L_2 .

Однако нельзя утверждать, что указанные деформации целесообразны. Например, при деформировании L_1 и L_4 в две ГЛ разложения вкладов от узла $t=0$ взаимно сокращаются, так как существенно критическим является лишь один конец или оба конца линий L_1 и L_4 , а не точка $t=0$. Кроме того, по методу карты можно непосредственно подставить под знак интеграла разложение (19.72). Если бы путь интегрирования находился на горе и пересекал сепаратрису, то следовало бы интегрировать по ГЛ до узла $t=-2$, оттуда — через седло до узла $t=0$ и, наконец, вдоль ГЛ до другого конца линии. По методу карты достаточно интегрировать по двум линиям Лапласа. Деформирование путей L_5-L_8 совпадают по обоим методам.

2°. Рассмотрим еще раз пример из п. 20.2.3 и деформирование путей, представленных на рис. 20. Они не дают новых случаев по сравнению с п. 1°, так как рис. 21 остается таким же. Деформирование L_2 по ГЛ соответствует дополнительному примеру из п. 1°. В данном случае оно одинаково по обоим методам. Линии L_3 и L_4 совпадают с ГЛ, деформирование кривых L_1 , L_5 и L_7 одинаково по обоим методам, а деформирование L_6 совпадает со вторым вариантом по методу карты. В некоторых случаях асимптотическое разложение для интеграла (20.9) проще построить по методу карты.

Из п. 2° следует, что для кривых, расположенных в равнине, выбор метода деформирования иногда несколько отличается от выбора метода для кривых, лежащих на горе или в долине.

20.4.3. Рассмотрим примеры, когда функция $g(t)$ имеет иной вид, чем в п. 20.4.2, и целесообразнее деформирование по ГЛ. Пусть

$$\Omega(z) = \int_0^a I_\nu(ze^{it}) h(t) dt, \quad \nu > 0, \quad a \in (0, \pi). \quad (20.23)$$

Критическими здесь являются только концы пути интегрирования, а ГЛ — прямые, параллельные мнимой оси. ГЛ столь просты, что эскиз для них не требуется. Путь в интеграле (20.23) деформируем по ГЛ: из точки $t=0$ до $t=i\infty$ и обратно до $t=a$.

Рассмотрим разложение интеграла

$$\begin{aligned} \Omega_1(z) &= \int_0^{\infty e^{i\pi/2}} I_\nu(ze^{it}) h(t) dt = i \int_0^\infty I_\nu(ze^{-u}) h(iu) du = \\ &= i \int_0^1 I_\nu(zv) h\left(i \ln \frac{1}{v}\right) v^{-1} dv. \end{aligned} \quad (20.24)$$

Если $h(it) = O(t^\omega)$ при $t \rightarrow \infty$ и $\nu > 0$, то интеграл (20.24) при нижнем пределе сходится. При $|\arg z| = |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ существенно критической точкой является только $t=1$. Допустим, что имеет место разложение

$$v^{-1} h\left(i \ln \frac{1}{v}\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1-v)^{\lambda+k}, \quad \lambda > -1. \quad (20.25)$$

Тогда согласно формуле (16.94) получаем разложение

$$\Omega_1(z) \sim \frac{i}{\sqrt{2\pi}} z^{-\lambda - \frac{1}{2} - 1} e^{z\pi} \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k}, \quad (20.26)$$

где A_k определены в (16.94).

К разложению (20.25) можно прийти следующим образом. Пусть при $t \rightarrow 0$ в окрестности оси $\arg t = \frac{\pi}{2}$ имеет место $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\lambda+k}$, $\lambda > -1$. Тогда при $v \rightarrow 1-0$

$$v^{-1}h\left(i\ln\frac{1}{v}\right)\sim v^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{\frac{i\pi}{2}(\lambda+k)}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\lambda+k}. \quad (20.27)$$

Чтобы найти разложение для $v^{-1}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\lambda+k}$ по степеням $1-v$, берем формулу (9.44). Из нее следует, что при любом λ

$$\frac{1}{k!}B_k^{(\lambda)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_0<2\pi}\frac{t^{\lambda-k-1}e^{zt}}{(e^t-1)^\lambda}dt.$$

Заменим в этой формуле λ на $\lambda+k+1$ и применим подстановку $1-e^t=\tau$, $t=\ln(1-\tau)$, где для логарифма выбрана ветвь, которая действительна при $\tau<1$. Получим соотношение

$$\frac{1}{k!}B_k^{(\lambda+k+1)}(z)=\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int\left(\frac{\ln\frac{1}{1-\tau}}{\tau}\right)^\lambda\frac{(1-\tau)^{z-1}}{\tau^{k+1}}d\tau,$$

из которого следует, что при $|\tau|<1$

$$(1-\tau)^{z-1}\left(\ln\frac{1}{1-\tau}\right)^\lambda=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\tau^{j+\lambda}B_j^{(j+\lambda+1)}(z). \quad (20.28)$$

В силу равенства $v^{-1}=[1-(1-v)]^{-1}$ при $\tau=1-v$, $z=0$ из (20.28) получаем разложение

$$v^{-1}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\lambda+k}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}(1-v)^{j+\lambda+k}B_j^{(j+\lambda+k+1)}(0). \quad (20.29)$$

Подставляя (20.29) в (20.27) и перегруппировывая члены, с учетом (4.32) приходим к (20.25), где

$$c_k=\sum_{j=0}^k\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}a_j e^{i\pi(\lambda+j)/2}B_{k-j}^{(k+\lambda+1)}(0).$$

Аналогично разлагается интеграл

$$\begin{aligned} & \frac{i\pi}{a+i\infty e^{-\frac{i\pi}{2}}} \\ \Omega_2(z) &= \int_a^1 I_\nu(ze^{it})h(t)dt= \\ &= i \int_0^1 I_\nu(re^{i(\varphi+a)}v)h\left(a+i\ln\frac{1}{v}\right)v^{-1}dv. \end{aligned} \quad (20.30)$$

Пусть

$$h(a+it) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{\mu+k}. \quad (20.31)$$

Тогда при $|\varphi+a| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ получаем разложение

$$\Omega_2(z) \sim \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (ze^{ia})^{-\mu-\frac{1}{2}-1} \exp(ze^{ia}) \sum_{h=0}^{\infty} B_h (ze^{ia})^{-h}, \quad (20.32)$$

где B_h определяются по тем же формулам, что и A_h , если в них a_h заменить на b_h .

При $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - a - \varepsilon$ для $\Omega(z)$ разложение получаем согласно (20.26), (20.32) и соотношению

$$\Omega(z) = \Omega_1(z) - \Omega_2(z). \quad (20.33)$$

Аналогично можно получить разложение также при $a \geq \pi$ и $|\varphi| \geq \frac{\pi}{2}$, если учесть, что при $|\arg z| \geq \frac{\pi}{2}$ функция $I_\nu(z)$ имеет другое асимптотическое разложение. При $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ или $\varphi + a = \pm \frac{\pi}{2}$ существенно критической точкой станет также левый конец пути $t=0$, поэтому разложение будет более сложным. Однако некоторые из полученных рядов могут быть поглощенными. Такое явление имеет место также для разложений (20.26) и (20.32). Например, при $z=x$ и $a < \frac{\pi}{2}$ разложением для $\Omega_2(z)$ в (20.33) можно пренебречь.

Как было сказано выше, условие $\nu > 0$ при деформировании пути существенно для сходимости интегралов. Если оно не выполнено, то деформирование пути по ГЛ возможно лишь при наложении дополнительных условий на поведение функции $h(iu)$ при $u \rightarrow +\infty$. В этом случае можно пользоваться методом карты.

20.4.4. Берем

$$\Omega(z) = \int_0^a \Phi(\alpha; \gamma; zte^{it}) h(t) dt, \quad (20.34)$$

где $-\alpha \in N$, $-\gamma \in N$. Критическими являются концы пути интегрирования и $t=i$; $t=0$ является узлом, а $t=i$ — седлом. Рассмот-

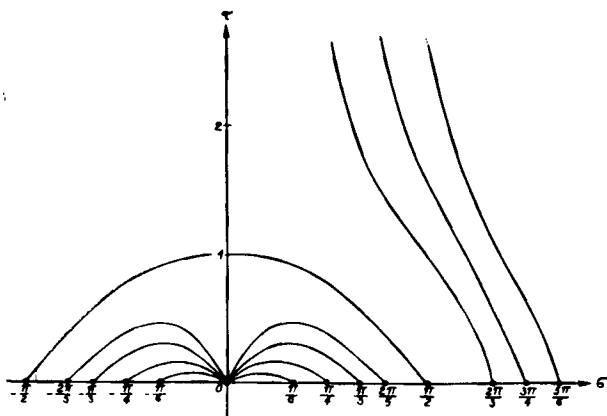


Рис. 22

рим ГЛ в виде $\arg t + \sigma = a$. При $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ для ГЛ имеем уравнение $\tau = \sigma \operatorname{tg}(a - \sigma)$ и они проходят через концы пути. При $a = \frac{\pi}{2}$ получаем сепаратрису, проходящую через седло (рис. 22).

При $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ уравнение имеет вид $\tau = \sigma \operatorname{tg}(a - \pi - \sigma)$ и ГЛ находятся в левой полуплоскости. Однако при $\sigma > a - \frac{\pi}{2}$ имеем также другую ветвь ГЛ, находящуюся по другую сторону от сепаратрисы (рис. 22) и проходящую через $t = a$ (но не через $t = 0$). Поэтому при $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ следует идти по мнимой оси (т. е. по сепаратрисе) вдоль одной ГЛ до седла, потом вдоль другой ГЛ дальше, до $t = i\infty$, а оттуда вдоль третьей ГЛ вернуться в a .

Рассмотрим построение асимптотического разложения лишь при $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $|\arg ze^{ia}| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. В этом случае существенно критической точкой является лишь $t = a$. Поэтому после подстановки $te^{it} = e^{ia}u$, $u \in [0, a]$, для функции $t(u)$ следует найти только разложение в окрестности $u = a$. Пользуясь уравнением $(1 + it)(a + v) \frac{dt}{dv} = t$, $v = u - a$, которое следует из подстановки,

получаем

$$t = a + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (u-a)^k, \quad (20.35)$$

$$b_{k+1} = \frac{1}{a(1+ia)(k+1)} \left[b_k(1-k) - ia \sum_{j=1}^k b_j b_{k+1-j}(k+1-j) - \right. \\ \left. - i \sum_{j=0}^{k-1} b_j b_{k-j}(k-j) \right], \quad k \geq 0, \quad b_0 = a.$$

Подставляя (20.35) в ряд Тейлора для $h(t)$, получаем

$$h(t(u)) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k (a-u)^k, \quad H(u) = h(t(u)) t'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (a-u)^k, \\ C_0 = h(a) b_1, \quad C_1 = -[b_1^2 h'(a) + 2b_2 h(a)].$$

Из (10.66) следует, что при $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ имеем

$$\Phi(\alpha; \gamma; t) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{t\alpha-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\alpha+k)}{\Gamma(\alpha-k)} t^{-k}. \quad (20.36)$$

Если пользоваться разложением (20.36) и методом, изложенным в п. 16.4.1, 2°, то при $|\arg ze^{ia}| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ получаем разложение

$$\Omega(z) \sim \exp(aze^{ia}) (aze^{ia})^{\alpha-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} D_k k! (ze^{ia})^{-k-1}, \quad (20.37)$$

$$D_0 = C_0, \quad D_1 = C_1 - C_0 \frac{(\alpha-\gamma)(2-\alpha)}{a}.$$

При других a или $\arg ze^{ia}$ затруднения вызывают функция $t(u)$, которую следует оставить в неявном виде, и более сложная асимптотика функции $\Phi(\alpha; \gamma; t)$.

20.4.5. Рассмотрим вопрос о ГЛ в случае $K(t) = e^t$.

1°. Поскольку на ГЛ u меняется монотонно, то каждая ГЛ, ориентированная в направлении убывания u , является линией спуска.

2°. Для функции $g_0(t) = g(t_0) - g(t)$, рассмотренной в § 19, точка $t \neq t_0$ является узлом, из которого выходит бесконечно много ГЛ. Среди них находится также ЛНС, вдоль которой $\arg g_0(t) = 0$, однако она обычно не проходит через другой конец пути $t = b$. Поэтому в качестве пути можно выбрать другую ГЛ, проходящую через $t = b$, если такая существует. Из примера в п. 20.4.4 при $a > \frac{\pi}{2}$ следует, что это не всегда имеет место, поэтому надо пользоваться несколькими ГЛ, что сильно усложняет расчеты.

Поскольку на ЛНС $\operatorname{Im} z g(t) = \operatorname{const}$ или $\arg e^{z g(t)} = \operatorname{const}$, то ЛНС является также градиентной линией для $e^{z g(t)}$. Подобная модификация выбора пути для интеграла (20.1) предложена в работе [174] и при $z = x$ подробнее исследована в [178]. Согласно этой модификации путь деформируется по векторным линиям для $\operatorname{grad} |K(xg(t))|$, которые названы ЛНС для ядра $K(xg(t))$.

§ 21. СЛУЧАИ, КОГДА РАСПОЛОЖЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗАВИСИТ ОТ ПАРАМЕТРА

21.1. Вспомогательные теоремы

21.1.1. Рассмотрим асимптотическое разложение интеграла

$$\Omega(z) = \int_L e^{-g(z,t)} h(z,t) dt, \quad (21.1)$$

где функции $g(z, t)$ и $h(z, t)$ являются аналитическими относительно $t \in D$ при каждом фиксированном $z \in Z$, $L \subset D$. Исследуем асимптотику интеграла (21.1) при $z \rightarrow z_0 \in \bar{Z}$. Обычно $Z = S[R, \varphi_1, \varphi_2]$ и $z_0 = \infty$. Однако иногда приходится исследовать поведение интеграла также в окрестности других точек, например $z_0 = 0$. Как и в §19, критическими являются точки, в которых $|e^{-g(z,t)}|$ при фиксированном z вблизи z_0 может иметь максимум: концы пути интегрирования и седловые точки, в которых $\frac{\partial g}{\partial t} \equiv \equiv g_1(z, t) = 0$, а также особые точки функций $g(z, t)$ и $h(z, t)$ относительно t . Отличие от § 19 состоит в том, что расположение седловой точки $t_0(z)$ зависит от z , и поэтому путь, проведенный через седловую точку, а также карта относительно этой точки меняются вместе с z . Расположение концов L тоже может зависеть от z .

Если путь приходится деформировать через точку перевала $t_0(z)$, то часто после подстановки $t = vt_0(z)$ или $t = v + t_0(z)$ или некоторого преобразования можно выделить такое новое ядро, у которого критическая точка не зависит от z или меняется не существенно. После этого следует поступать аналогично, как в § 19. Существенное различие будет заключаться лишь в том, что в данном случае коэффициенты разложения будут зависеть от z . Поэтому следует еще либо перегруппировать члены, либо применить разложение с более общей шкалой.

Подстановка изменяет также расположение концов кривой, если они находятся на конечном расстоянии от начала. Для нового ядра могут появиться еще другие точки перевала, поэтому всегда следует проверить, останется ли новая точка перевала единственной критической точкой. Если концы пути находятся в бесконечности, то целесообразно выполнить подстановку при фиксированном $\arg z$ и после этого применить принцип аналитического продолжения (см. п. 19.5, 1°).

Следует отметить, что приведение к фиксированной критической точке необязательно. Однако оно имеет значительное преимущество, так как в качестве пути интегрирования для асимптотического вычета нового интеграла позволяет выбрать отрезок в определенном направлении. Подстановку иногда целесообразно применять и тогда, когда расположение точки перевала неизвестно. Например, для интеграла $\int_L \exp[zt - g(t)] dt$ решение уравнения $g'(t) = z$ можно обозначить через $t_0(z)$, применить подстановку $t = \tau t_0(z)$ и после этого перейти к новому параметру $zt_0(z)$. Для дальнейшего необходимо знать асимптотику функции $t_0(z)$ при $z \rightarrow z_0$. Приведенный интеграл в случае, когда $g(t)$ является полиномом, рассмотрен в работе [6]. Другой пример такого рода приведен в [180].

Подстановка может быть излишней в случаях, когда $t_0(z) = t_0 + o(1)$, т. е. когда расположение критической точки и путь интегрирования меняются не существенно. В таких случаях подстановка только усложнила бы данные выражения (см. п. 21.4.2, 3°). Такую критическую точку назовем *почти фиксированной*.

Нередко существенно критическим является конец пути, а не седловая точка. Как уже было сказано, расположение концов пути также может зависеть от параметра. Однако в случаях, когда один из концов является существенно критической точкой, с помощью подстановки можно привести интеграл к виду с фиксированной или почти фиксированной критической точкой.

Объединим исследования указанных случаев и рассмотрим в п. 21.1 и 21.2 интеграл (21.1) по кривой L от a до b , где a — единственная существенно критическая точка, а L является линией спуска для $-\operatorname{Re} g(z, t)$, т. е. на L функция $u = \operatorname{Re}[g(z, t) - g(z, a)]$

при каждом $z \in Z$ монотонно возрастает, или L является *линией Лапласа*, т. е. монотонность u сохраняется на L лишь в некоторой ρ -окрестности точки a , а на остальной части имеет место (21.11), где $a + \rho e^{i\theta} \in L$. Если в окрестности точки a применить разложение

$$g(z, t) - g(z, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(z, a)}{k!} (t-a)^k \quad (21.2)$$

то в правой части (21.2) следует выделить *группу доминирующих членов*.

Рассмотрим только основные случаи, когда на L можно выделить такую окрестность точки a , что в ней либо доминирует член, содержащий $g_1(z, a)$, либо к нему присоединяется еще один член, содержащий $g_k(z, a)$, $k > 1$. Первый вариант имеет место, если a — конец пути, а второй вариант — когда a — приближенная точка перевала, простая или кратная. Он включает также случай, когда a — точная точка перевала и $g_1(z, a) = 0$. Нет принципиальных затруднений в более сложных случаях, когда выделяется доминирующая группа, состоящая более чем из двух членов. Но тогда приходится применять более сложные стандартные функции.

21.1.2. В некоторой окрестности точки a в качестве линии спуска можно брать отрезок $t = i + v e^{i\theta}$, θ фиксирован, $\theta \in (-\pi, \pi]$. После такой подстановки имеем действительную переменную интегрирования v . На этом пути с несущественными изменениями можно *сохранить определение 17.1 для областей и радиусов влияния*, которые в данном случае приходится считать односторонними, так как путь исходит из точки a . Внешний радиус влияния обозначим через $\rho(z)$, $\rho(z) > 0$, а отрезок от a до конца области влияния — через L_ρ , т. е. $v \in [0, \rho(z)]$. Если точка a почти фиксирована, то сохраним θ при всех рассматриваемых z . Следует оценить интеграл по $L \setminus L_\rho$, но сначала докажем следующую лемму.

Лемма 21.1. Пусть на пути $L_\rho : t = a + v e^{i\theta}$, $v \in [0, \rho(z)]$, имеет место соотношение

$$g_m(z, t) = g_m(z, a) [1 + o(1)], \quad (21.3)$$

где оценка $o(1)$ равномерна относительно $t \in L_\rho$ при $z \rightarrow z_0$, $z \in \underline{Z}$. Тогда при $t \in L_\rho$, $z \rightarrow z_0$, $z \in \underline{Z}$

$$\begin{aligned} G_m(z, t) &= g(z, t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{g_k(z, a)}{k!} (v e^{i\theta})^k = \\ &= \frac{1}{m!} g_m(z, a) (v e^{i\theta})^m [1 + o(1)], \end{aligned} \quad (21.4)$$

и в (21.4) $o(1)$ тоже равномерно относительно $t \in L_\rho$ при $z \rightarrow z_0$.

Доказательство леммы следует из соотношений

$$\begin{aligned} G_m(z, t) &= \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t g_m(z, \tau) (\tau-a)^{m-1} d\tau = \\ &= \frac{e^{im\vartheta}}{(m-1)!} \int_0^v g_m(z, a + \xi e^{i\vartheta}) \xi^{m-1} d\xi = \\ &= \frac{e^{im\vartheta}}{(m-1)!} g_m(z, a) \int_0^v [1 + o(1)] \xi^{m-1} d\xi = \\ &= \frac{1}{m!} g_m(z, a) (ve^{i\vartheta})^m [1 + o(1)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Лемма 21.2. Пусть ограниченная кривая L , исходящая из точки a , при z , достаточно близких к z_0 , $z \in Z$, является линией Лапласа для функции $-\operatorname{Re}[g(z, t)]$ и L_ρ — отрезок на L от a до $t_1 = a + \rho(z)e^{i\vartheta}$. Если можно найти такие $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ и $\rho(z)$, что при $z \rightarrow z_0$, $z \in Z$ выполнены условия

$$1) \quad g_k(z, a) = O[(g_m(z, a))^{k/m}], \quad k=1, \dots, m-1; \quad (21.5)$$

$$2) \quad g_m(z, a + \rho e^{i\vartheta}) = g_m(z, a)[1 + o(1)], \quad \rho(z) = o(1); \quad (21.6)$$

$$3) \quad \rho(z) \sqrt[m]{g_m(z, a)} \rightarrow \infty, \quad |\arg [e^{i\vartheta} (g_m(z, a))^{1/m}]| \leq \frac{\pi}{2m} - \varepsilon; \quad (21.7)$$

$$4) \quad \exp[-|\rho^m(z) g_m(z, a)|] = o([g_m(z, a)]^{-N}); \quad (21.8)$$

5) равномерно относительно $t \in L \setminus L_\rho$ имеет место

$$h(z, t) = O([g_m(z, a)]^\gamma), \quad \gamma \geq 0, \quad (21.9)$$

то при $z \rightarrow z_0$, $z \in Z$

$$\int_{L \setminus L_\rho} e^{-g(z, t)} h(z, t) dt = e^{-g(z, a)} o([g_m(z, a)]^{-N}). \quad (21.10)$$

При $m=1$ условие (21.5) опускается.

Доказательство. Для функции $[g_m(z, a)]^{1/m}$ выбрана определенная ветвь, которая не всегда совпадает с главным значением, так как надо удовлетворять условию (21.7). Из (21.6) и (21.7) следует, что $[g_m(z, a)]^{1/m} \rightarrow \infty$. Поскольку L — линия Лапласа, то при $t \in L \setminus L_\rho$ имеем

$$-\operatorname{Re}[g(z, t) - g(z, a + \rho e^{i\vartheta})] \leq 0. \quad (21.11)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \int_{L \setminus L_\rho} e^{-g(z, t)} h(z, t) dt \right| \leq \\ & \leq |e^{-g(z, a + \rho e^{i\theta})}| \int_{L \setminus L_\rho} |h(z, t)| ds = \\ & = |e^{-g(z, a + \rho e^{i\theta})}| O(g_m^\nu(z, a)). \end{aligned}$$

Из (21.7) следует, что $\rho g_m^{1/m} = o[(\rho g_m^{1/m})^k]$ при $k > 1$. С учетом этого свойства по лемме 21.1 согласно (21.5) и (21.6) имеем

$$g(z, a + \rho e^{i\theta}) = g(z, a) + \frac{1}{m!} (\rho e^{i\theta})^m g_m(z, a) [1 + o(1)],$$

а в силу (21.7) и (21.8)

$$\begin{aligned} & \left| \exp \left[-\frac{1}{m!} (\rho e^{i\theta})^m g_m(z, a) (1 + o(1)) \right] \right| < \\ & < \exp [-c |(\rho e^{i\theta})^m g_m(z, a)|] = o([g_m(z, a)]^{-N}), \end{aligned}$$

так как по (21.7)

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{m!} (\rho e^{i\theta})^m g_m(z, a) (1 + o(1)) \right] \geq c |\rho^m g_m(z, a)|.$$

Условия в лемме 21.2 можно также модифицировать таким же образом, как в § 17. ■

Если кривая L не ограничена, то целесообразно применить лемму 21.2 к интегралу по некоторой ограниченной части L , а интеграл по оставшейся неограниченной части оценить с помощью некоторого частного способа. Это целесообразно потому, что иногда данная линия Лапласа не является линией спуска и $-\operatorname{Re} g(z, t)$ на всем пути не убывает, а неравенство (21.11) сохраняется. Если сходится интеграл по $L \setminus L_\rho$ от $|h(z, t)|$ и для него справедлива оценка (21.9), то лемма 21.2 сохраняет силу для всей неограниченной линии $L \setminus L_\rho$.

21.1.3, 1°. При исследовании асимптотики интеграла по L_ρ приходится использовать функцию Харди (18.76)

$$Hd_\lambda(z, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{\alpha} t^\alpha + zt \right] t^\lambda dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > -1, \quad (21.12)$$

при $\alpha = n \in N_2$. Ее частный случай

$$Ni_\lambda(z) = Hd_\lambda(z, 3) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{3} t^3 + zt \right] t^\lambda dt \quad (21.13)$$

назовем *функцией Никольсона*, так как $Ni_0(z) \equiv Ni(z)$ исследована Никольсоном [201]. Следует отметить, что для $Ni(z)$ применяется также обозначение $Hi(z)$ и название *функция Скопера* [121].

Разлагая e^{zt} в ряд и интегрируя почленно, при $\alpha > 1$ из (21.12) получаем

$$Hd_\lambda(z, \alpha) = \frac{1}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{-k} z^k}{k!} \Gamma \left(\frac{k+\lambda+1}{\alpha} \right) z^k. \quad (21.14)$$

Из (21.12) следуют также соотношения

$$Hd_{\lambda+\alpha-1}(z, \alpha) = zHd_\lambda(z, \alpha) + \lambda Hd_{\lambda-1}(z, \alpha), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0; \quad (21.15)$$

$$Hd_{\lambda+h}(z, \alpha) = \frac{d^h}{dz^h} Hd_\lambda(z, \alpha); \quad (21.16)$$

$$Hd_{n-1}(z, n) = zHd_0(z, n) + \frac{1}{\pi}. \quad (21.17)$$

Формула (21.15) дает аналитическое продолжение для $Hd_\lambda(z, \alpha)$ при $\operatorname{Re} \lambda \leq -1$.

Составное асимптотическое разложение для $Hd_\lambda(z, \alpha)$ при $z \rightarrow \infty$ получается согласно (18.78) и лемме Ватсона. Имеем

$$\begin{aligned} Hd_\lambda(z, \alpha) &\sim \frac{1}{\pi} z^{\nu(\lambda+1)} \exp [z^{\alpha\nu} (\alpha-1) \alpha^{-1}] \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} a_k^*(\lambda) \Gamma \left(k + \frac{1}{2} \right) z^{-\alpha\nu \left(k + \frac{1}{2} \right)} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha k + \lambda + 1)}{\alpha^k k!} (ze^{-i\pi})^{-(\alpha k + \lambda + 1)}, \quad (21.18) \end{aligned}$$

где $a_k^*(\lambda)$ определено в п. 18.3.1, 1°, $\nu = 1/(\alpha-1)$, $c = \operatorname{sign}(\arg z)$.

2°. Если путь интегрирования проходит через точку перевала, то применяется также целая функция

$$Vi_\lambda(z, \alpha, l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_l} \exp \left[-\frac{1}{\alpha} t^\alpha + zt \right] t^\lambda dt, \quad \alpha > 1, \quad (21.19)$$

где L_l состоит из лучей $\arg t = \frac{2\pi l}{\alpha}$ и $\arg t = 0$, $|l| \in N_1$. Вместо L_l можно брать эквивалентный контур, не проходящий через $t=0$, поэтому на λ нет никаких ограничений. Очевидно, в силу (19.68) и (8.44) имеем

$$Ai_\lambda(z) = -e^{-\frac{i\pi}{3}(\lambda+1)} Vi_\lambda\left(-ze^{-\frac{i\pi}{3}}, 3, 1\right); \quad (21.20)$$

$$Vi_n(z, 2, 1) = -\frac{\exp\left[\frac{i\pi}{2}(n+1)\right]}{\sqrt{\pi}(\sqrt{2})^{n+1}} e^{\frac{z^2}{2}} H_n\left(-\frac{iz}{\sqrt{2}}\right); \quad (21.21)$$

$$H_{-\lambda-1}(z) = \pi\left(2^{\frac{\lambda+1}{2}} \Gamma(\lambda+1)\right)^{-1} Hd_\lambda(-\sqrt{2}z, 2). \quad (21.22)$$

Геометрически очевидно, что справедливы формулы

$$Hd_\lambda(z, \alpha) - e^{\frac{i2\pi l}{\alpha}(\lambda+1)} Hd_\lambda\left(ze^{\frac{i2\pi l}{\alpha}}, \alpha\right) = 2iVi_\lambda(z, \alpha, l); \quad (21.23)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} Vi_\lambda\left(ze^{\frac{i2\pi kl}{n}}, n, l\right) e^{\frac{i2\pi kl}{n}(\lambda+1)} = 0. \quad (21.24)$$

Из (21.14) и (21.23) следует, что

$$Vi_\lambda(z, \alpha, l) = \frac{1}{2\alpha\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{k+\lambda+1}{\alpha}}}{k!} \Gamma\left(\frac{k+\lambda+1}{\alpha}\right) \left[1 - e^{\frac{i2\pi l}{\alpha}(k+\lambda+1)}\right] z^k. \quad (21.25)$$

В общем случае $Vi_\lambda(z, n, l) \neq Vi_\lambda(z, n, l-n)$, но из (21.25) следует, что при $m \in N$ имеем $Vi_m(z, n, l) = Vi_m(z, n, l-n)$. Кроме того, согласно (21.25) и (21.20) получаем

$$Ai_\lambda(z) = \frac{1}{3\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{\frac{k+\lambda+1}{3}}}{k!} \Gamma\left(\frac{k+\lambda+1}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}(k+\lambda+1) z^k, \quad (21.26)$$

откуда

$$Vi_\lambda(z, 3, -1) = e^{-\frac{i\pi}{3}(\lambda+1)} Ai_\lambda\left(-ze^{-\frac{i\pi}{3}}\right). \quad (21.27)$$

Для $Vi_\lambda(z, \alpha, l)$ сохраняются (21.15) и (21.16), а вместо (21.17) имеем

$$Vi_{n-1}(z, n, l) = zVi_0(z, n, l) \text{ или } Vi_0^{(n-1)}(z, n, l) = zVi_0(z, n, l). \quad (21.28)$$

Асимптотическое разложение для $Vi_\lambda(z, \alpha, l)$ не при всех α и $\arg z$ можно найти по (21.18) и (21.23), так как возможно взаимное сокращение рядов. В этом легко убедиться в случае, когда $\alpha=3$. Разложения для родственных интегралов приведены в работе [12], а для $Vi_0(-ie^{i\pi/2m}m^{-1/m}z, m, [m/2])$ — в [53]. Случай $m=4$ проанализирован в [50].

3°. Лемма 21.3. Пусть 1) $\omega(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0, z \in Z$, и $|\arg \omega(z)| \leq \frac{\pi}{2m} - \varepsilon, m \in N_2, \varepsilon > 0$; 2) $|\mu(z)| < M$ при $z \in Z$. Тогда при $z \rightarrow z_0, z \in Z$, и каждом фиксированном $\lambda \geq 0$ можно найти такое $c > 0$, что будет иметь место оценка

$$\int_{w(z)}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{m} t^m + \mu t \right] t^\lambda dt = o(e^{-c|\omega|^m}). \quad (21.29)$$

Доказательство. Имеем равенство

$$\begin{aligned} & \int_w^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{m} t^m + \mu t \right] t^\lambda dt = \exp \left(-\frac{1}{m} \omega^m + \mu \omega \right) \times \\ & \times \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} u^{m-k} \omega^k - \left(\frac{1}{m} u^m - \mu u \right) \right] (u + \omega)^\lambda du. \end{aligned}$$

Поскольку при достаточно большом $|\omega|$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{m} \omega^m - \mu \omega \right) & \geq \frac{1}{2m} \sin m\varepsilon |\omega|^m, \quad \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} u^{m-k} \omega^k \geq 0, \\ |u + \omega| & \leq u + |\omega| \leq |\omega| (u + 1), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} & \left| \int_w^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{m} t^m + \mu t \right] t^\lambda dt \right| \leq M \exp \left(-\frac{1}{2m} \sin m\varepsilon |\omega|^m \right) |\omega|^\lambda \times \\ & \times \int_0^\infty e^{-c_0 u^m} (u + 1)^\lambda du = o(e^{-c|\omega|^m}), \quad c > 0, c_0 > 0. \end{aligned}$$

Аналогично при $\left| \arg w(z) - \frac{2\pi l}{m} \right| \leq \frac{\pi}{2m} - \varepsilon$ получаем соотношение

$$\infty \exp\left(\frac{i2\pi l}{m}\right) \int_{w(z)} \exp\left[-\frac{1}{m}t^m + \mu t\right] t^\lambda dt = o(e^{-c|w|^m}). \quad \blacksquare \quad (21.30)$$

Из леммы 21.3 следует, что при $|\arg w(z)| \leq \frac{\pi}{2m} - \varepsilon$

$$\int_0^w \exp\left[-\frac{1}{m}t^m + \mu t\right] t^\lambda dt = Hd_\lambda(\mu, m) + o(e^{-c|w|^m}), \quad (21.31)$$

а при $\left| \arg w(z) - \frac{2\pi l}{m} \right| \leq \frac{\pi}{2m} - \varepsilon$

$$\begin{aligned} & \int_0^w \exp\left[-\frac{1}{m}t^m + \mu t\right] t^\lambda dt = \\ & = e^{\frac{i2\pi l}{m}(\lambda+1)} Hd_\lambda\left(\mu e^{\frac{i2\pi l}{m}}, m\right) + o(e^{-c|w|^m}). \end{aligned} \quad (21.32)$$

21.2. Разложение интеграла в окрестности критической точки

21.2.1. Остается построить асимптотическое разложение для интеграла (21.1) по L_ρ . Сначала рассмотрим случай, когда конец a кривой L_ρ — приближенная или точная точка перевала кратности $m-1$, $m \in N_2$. Тогда в долине, в которой находится L , следует фиксировать такую ветвь для $[g_m(z, a)]^{1/m}$, чтобы было выполнено второе условие (21.7).

Теорема 21.1. Пусть L_ρ определен в лемме 21.2 и при $z \rightarrow z_0$, $z \in Z$, и фиксированном $m > 1$: 1) выполнены условия (21.7), (21.8); 2) выполнено (21.5) при $k=1$; 3) равномерно относительно $v \in [0, \rho(z)]$, $\rho(z) = o(1)$, имеет место

$$g_m(z, a + ve^{i\theta}) = g_m(z, a)[1 + o(1)]; \quad (21.33)$$

$$4) \quad \rho^k(z) g_k(z, a) = O(1), \quad k=2, \dots, m-1; \quad (21.34)$$

5) можно найти такие $\eta > 0$ и $M > 0$, что при всех $z \in Z$

$$|\eta^k g_k(z, a)/k!| < M |g_m(z, a)|, \quad k > m; \quad (21.35)$$

$$|\eta^k H_k(z, a)/k!| \leq M, \quad k \geq 0, \quad (21.36)$$

где

$$H_0(z, t) = h(z, t) \exp \left[- \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!} g_k(z, a) (t-a)^k \right] \quad \text{при } m > 2,$$

$$H_0(z, t) \equiv h(z, t) \quad \text{при } m = 2. \quad (21.37)$$

Тогда при $z \rightarrow z_0$, $z \in Z$, справедливо слабоасимптотическое разложение

$$\int_{L_\rho} e^{-g(z,t)} h(z, t) dt \sim e^{-g(z,a)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) \left[\frac{(m-1)!}{g_m'(z, a)} \right]^{\frac{k+1}{m}}, \quad (21.38)$$

где $c_k(z)$ определено формулой (21.48).

Доказательство в основном аналогично доказательству теоремы 19.3. Пусть

$$\frac{1}{(m-1)!} g_m(z, a) (ve^{i\theta})^m = \omega^m. \quad (21.39)$$

Отделим множитель $\exp \left[- \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!} g_k(z, a) (t-a)^k \right]$ и введем

новую функцию нагрузки $H_0(z, t)$ согласно (21.37). Можно z выбрать так, чтобы $|\rho(z)| < \eta$. Положим

$$g(z, t) = g(z, a) + g_1(z, a) ve^{i\theta} + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k!} g_k(z, a) (ve^{i\theta})^k +$$

$$+ \frac{1}{m!} g_m(z, a) (ve^{i\theta})^m + \omega^m G(z, ve^{i\theta}), \quad (21.40)$$

где

$$G(z, ve^{i\theta}) = (m-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+m}(z, a)}{(k+m)! g_m(z, a)} (ve^{i\theta})^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} D_k(z) (ve^{i\theta})^k. \quad (21.41)$$

В силу (21.33) по лемме 21.1 $G(z, ve^{i\theta}) = o(1)$ равномерно относительно $v \in [0, \rho(z)]$, а из (21.35) следует, что $|D_k(z)| < M_0$. Кроме того, из (21.41) и (21.35) следует, что для каждого фиксированного $p \in N_1$ при $z \rightarrow z_0$, $z \in Z$, равномерно относительно $v \in [0, \rho(z)]$

$$G_p(z, ve^{i\theta}) = O(1), \quad G_p(z, u) \equiv \frac{\partial^p}{\partial u^p} G(z, u).$$

Далее применим соотношение

$$\exp[-\omega^m G(z, ve^{i\theta})] = \sum_{k=0}^n B_k(z, \omega^m) (ve^{i\theta})^k + R_n(z, \omega^m, v), \quad (21.42)$$

где коэффициенты B_k определяются по формуле (19.30) при $\omega = -\omega^m$, $B_k(z, \omega^m)$ — полином степени k относительно ω^m с ограниченными по z коэффициентами. Остаток $R_n(z, \omega^m, v)$ согласно формуле

$$R_n(z, \omega^m, v) = -\frac{1}{n!} \int_0^{ve^{i\theta}} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (\exp[-\omega^m G(z, \xi)]) \xi^n d\xi$$

и свойствам функций G_p имеет оценку

$$|R_n(z, \omega^m, v)| < e^{\delta|\omega|^m} C_{n+1} (|\omega|^m) |v|^{n+1}, \quad (21.43)$$

где $C_n(u)$ — полином степени n с положительными коэффициентами, а $\delta > 0$ можно брать достаточно малым, так как $G(z, \xi) = o(1)$. Поэтому на L_ρ

$$\begin{aligned} e^{-g(z,t)} H_0(z, t) &= e^{-g(z,a)} \exp \left[-g_1(z, a) ve^{i\theta} - \frac{1}{m} \omega^m \right] \times \\ &\times \left[\sum_{k=0}^n Q_k(z, \omega^m) (ve^{i\theta})^k + R_n^*(z, \omega^m, v) (ve^{i\theta})^{n+1} \right], \quad (21.44) \end{aligned}$$

где

$$Q_k(z, \omega^m) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} B_{k-j}(z, \omega^m) H_j(z, a) = \sum_{j=0}^k q_{jk}(z) \omega^{mj}, \quad (21.45)$$

а $q_{jk}(z)$ в силу условий 5) — ограниченные функции от z .

Для R_n^* имеем выражение

$$\begin{aligned}
 R_n^*(z, \omega^m, v) &= \zeta_n(z, v) \sum_{k=0}^n B_k(z, \omega^m) (ve^{i\theta})^k + \\
 &+ \sum_{k=0}^{n-1} E_k(z, \omega^m) (ve^{i\theta})^k + R_n(z, \omega^m, v) (ve^{i\theta})^{-n-1} \times \\
 &\times \sum_{k=0}^n \frac{H_k(z, a)}{k!} (ve^{i\theta})^k, \quad (21.46)
 \end{aligned}$$

где $\zeta_n(z, v) = O(1)$ равномерно относительно v , $E_k(z, \omega^m)$ — полиномы относительно ω^m с ограниченными коэффициентами.

В силу (21.44) при фиксированном $n \in N$ имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{L_\rho} e^{-g(z,t)} h(z, t) dt &= e^{-g(z,a)} \left[e^{i\theta} \sum_{k=0}^n \int_0^\rho \exp \left(-g_1(z, a) ve^{i\theta} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{m} \omega^m \right) Q_k(z, \omega^m) (ve^{i\theta})^k dv + \right. \\
 &\quad \left. + e^{i\theta(n+2)} \int_0^\rho \exp \left(-g_1(z, a) ve^{i\theta} - \frac{1}{m} \omega^m \right) R_n^*(z, \omega^m, v) v^{n+1} dv \right] = \\
 &= e^{-g(z,a)} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{(m-1)!}{g_m(z, a)} \right)^{\frac{k+1}{m}} c_k(z) + o((g_m(z, a))^{-N}) + R_n^{**}(z) \right], \quad (21.47)
 \end{aligned}$$

где согласно (21.7), (21.8) и лемме 21.3

$$\begin{aligned}
 c_k(z) &= \int_0^{+\infty} \exp \left[-g_1(z, a) \left(\frac{(m-1)!}{g_m(z, a)} \right)^{1/m} \omega - \frac{1}{m} \omega^m \right] Q_k(z, \omega^m) \times \\
 &\times \omega^k d\omega = \pi \sum_{j=0}^k q_{jk}(z) H_{d_{k+mj}} \left[-g_1(z, a) \left(\frac{(m-1)!}{g_m(z, a)} \right)^{1/m}, m \right]. \quad (21.48)
 \end{aligned}$$

Очевидно, $c_k(z)$ — ограниченная функция от z .

При оценке остатка разобьем $R_n^{**}(z)$ с учетом (21.46) на три слагаемые: $\Omega_1(z) + \Omega_2(z) + \Omega_3(z)$. Для оценки $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ можно использовать формулы (21.47) и (21.48), в которых сначала применяется подстановка $ve^{i\vartheta} = \omega \left[\frac{(m-1)!}{g_m(z, a)} \right]^{1/m}$, потом подынтегральное выражение оценивается по модулю и затем верхний предел заменяется на ∞ . В силу множителя v^{n+1} получаем оценки $\Omega_1(z) = O\left([g_m(z, a)]^{-\frac{n+2}{m}}\right)$, $\Omega_2(z) = O\left([g_m(z, a)]^{-\frac{n+2}{m}}\right)$. Для оценки $\Omega_3(z)$ используем (21.43), причем z будем брать таким, чтобы $\delta < \frac{1}{2} \sin m\epsilon$. Тогда после указанных действий получаем сходящийся интеграл и $\Omega_3(z) = O\left([g_m(z, a)]^{-\frac{n+2}{m}}\right)$. Следовательно, $R_n^{**}(z) = O\left([g_m(z, a)]^{-\frac{n+2}{m}}\right)$. Отсюда вытекает (21.38), причем пока доказана слабоасимптотичность разложения

(21.38) относительно шкалы $\left\{ e^{-g(z,a)} [g_m(z, a)]^{-\frac{k+1}{m}} \right\}$. Это разложение будет сильноасимптотическим, если $c_k(z) = O(1)$, причем допускается, что при некоторых k $c_k(z) \equiv 0$. В этом дополнительно следует убедиться в каждом конкретном случае применения теоремы. ■

21.2.2, 1°. Пусть кривая L из основной долины проходит через критическую точку a и продолжается по линии Лапласа L_l в l -й долине в положительном направлении обхода от основной долины; при $l < 0$ обход идет в отрицательном направлении. В ρ -окрестности точки a в этой долине в качестве пути берем отрезок $t = a + ve^{i\left(\vartheta + \frac{2\pi l}{m}\right)}$ и общий путь, состоящий из двух отрезков, обозначим через $L_{\rho,l}$. Допустим, что на L_l также удовлетворены условия теоремы 21.1. Тогда эта теорема с учетом (21.32) применима и к интегралу по L_l . В силу дополнительного множителя $e^{i2\pi l/m}$ в (21.48) получаем коэффициент разложения $c_{k2}(z)$ в виде

$$c_{k2}(z) = e^{\frac{i2\pi l(k+1)}{m}} \sum_{j=0}^k q_{jk}(z) H_{d_{k+m}j} \left[-g_1(z, a) e^{\frac{i2\pi l}{m}} \left(\frac{(m-1)!}{g_m(z, a)} \right)^{1/m}, m \right].$$

При объединении разложений приходится применять функцию $Vi_l(z, m, l)$ и формулу (21.23).

Теорема 21.2. Если на кривой $L_{\rho, l}$ выполняются условия теоремы 21.1, то для $\int e^{-g(z, t)} h(z, t) dt$ при $z \rightarrow z_0, z \in Z$, справедливо разложение (21.38), в котором $c_k(z)$ надо заменить на

$$c_k^*(z) = -2\pi i \sum_{j=0}^k q_{jk}(z) Vi_{k+mj} \left[-g_1(z, a) \left(\frac{(m-1)!}{g_m(z, a)} \right)^{1/m}, m, l \right]. \quad (21.49)$$

2°. Практически в основном встречаются случаи, когда $m=2$, $l=1$ и $m=3$, $l=\pm 1$. Ввиду важности этих случаев формулируем их в отдельных теоремах.

Теорема 21.3 (теорема Фабера). При $m=2$ в теоремах 21.1 и 21.2, где условие 4) излишне, имеют место следующие формулы для коэффициентов $c_k(z)$ и $c_k^*(z)$:

$$c_k(z) = \int_0^{\infty} \exp \left[-g_1(z, a) \frac{\omega}{\sqrt{g_2(z, a)}} - \frac{1}{2} \omega^2 \right] Q_k(z, \omega^2) \omega^k d\omega = \\ = 2^{\frac{k+1}{2}} \sum_{j=0}^k 2^j (2j+k)! q_{jk}(z) H_{-k-2j-1} \left(\frac{g_1(z, a)}{\sqrt{2g_2(z, a)}} \right); \quad (21.50)$$

$$c_k^*(z) = -\sqrt{2\pi} \exp \left[\frac{g_1^2(z, a)}{2g_2(z, a)} \right] (i/\sqrt{2})^k \times \\ \times \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{2^j} H_{k+2j} \left(\frac{ig_1(z, a)}{\sqrt{2g_2(z, a)}} \right) q_{jk}(z). \quad (21.51)$$

Если $g_1(z, a) = 0$, то $c_k^*(z) = 0$ при $k=2j+1$.

Доказательство следует из формул (21.21)–(21.23). Последняя формула с учетом (21.22) совпадает с (18.128) и дает соотношение

$$n! [H_{-n-1}(y) + (-1)^n H_{-n-1}(-y)] = \frac{i^n \sqrt{\pi}}{2^n} e^{y^2} H_n(iy). \quad (21.52)$$

Теорема, подобная теореме 21.3, в недостаточной четкости формулировке при $z=n$ была рассмотрена Фабером [70]. ■

Теорема 21.4. При $m=3$ в теоремах 21.1 и 21.2 коэффициенты $c_k(z)$ и $c_k^*(z)$ выражаются в следующем виде:

$$c_k(z) = \int_0^{\infty} \exp \left[-g_1(z, a) \sqrt[3]{\frac{2}{g_3(z, a)}} \omega - \frac{1}{3} \omega^3 \right] Q_k(z, \omega^3) \omega^k d\omega = \\ = \pi \sum_{j=0}^k q_{jk}(z) Ni_{k+3j} \left[-g_1(z, a) \sqrt[3]{\frac{2}{g_3(z, a)}} \right]; \quad (21.53)$$

при $l=1$ имеем

$$c_k^*(z) = 2\pi i e^{i\pi(k+1)/3} \sum_{j=0}^k (-1)^j q_{jk} Ai_{k+3j} \left[e^{-\frac{i\pi}{3}} g_1(z, a) \sqrt[3]{\frac{2}{g_3(z, a)}} \right]; \quad (21.54)$$

при $l=-1$ или $l=2$ —

$$c_k^*(z) = -2\pi i e^{-\frac{i\pi}{3}(k+1)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q_{jk} \times \\ \times Ai_{k+3j} \left[e^{-\frac{i\pi}{3}} g_1(z, a) \sqrt[3]{\frac{2}{g_3(z, a)}} \right]. \quad (21.55)$$

Доказательство следует из формул (21.20), (21.23), (21.27) и (21.49). Некоторый аналог теоремы 21.4 рассмотрен в [69]. ■

3°. Если a не является точкой перевала, то обычно $m=1$ и определяющим является только член, содержащий $g_1(z, a)$. Теорема 21.1 сохраняется и в этом случае.

Теорема 21.5. Если в теореме 21.1 отбросить условия 2) и 4), то теорема сохраняется при $m=1$, где $H_0(z, t) \equiv h(z, t)$ и

$$c_k(z) = \int_0^{\infty} e^{-w} Q_k(z, w) \omega^k d\omega = \sum_{j=0}^k q_{jk}(z) (k+j)!. \quad (21.56)$$

Доказательство несущественно отличается от доказательства теоремы 21.1. Основные изменения следующие: ω^m заменяется на $\omega = g_1(z, a) v e^{i\theta}$ и $\exp \left[-g_1(z, a) v e^{i\theta} - \frac{1}{m} \omega^m \right]$ — на e^{-w} . ■

21.2.3. Примечания к теоремам 21.1—21.5. 1°. Если при $t \in L \setminus L_\rho$ или $t \in L \setminus L_{\rho,l}$ удовлетворено условие (21.9), то разложение (21.38), формула (21.49) и их частные случаи имеют место также для интеграла по ограниченной кривой L .

2°. Если $g(z, t) = zg(t)$, $g^{(k)}(a) = 0$, $k=1, \dots, m-1$, $g^{(m)}(a) \neq 0$, $z \rightarrow \infty$, $z \in S[R, \varphi_1, \varphi_2]$, то условие (21.35) выполнено и D_k

и B_k не зависят от z . Теорема 21.1 тогда обобщает теорему 19.3 в том отношении, что $h = h(z, t)$.

Весьма важный и более общий случай имеем, когда

$$g(z, t) = zg(t) + \mu(z)t, \quad (21.57)$$

где $g(t)$ обладает прежними свойствами, а $z^{-1/m}\mu(z)$ — ограниченная функция от z при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$. Тогда в условии (21.5) имеем $g_k(z, a) = 0$ при $k=2, \dots, m-1$, поэтому $H_0(z, t) \equiv h(z, t)$.

3°. Иногда возможна некоторая модификация в выборе шкалы, которую ради простоты рассмотрим для теоремы Фабера, когда $m=2$. Если функция $g_2(z, a)$ имеет весьма сложный вид, то нецелесообразно строить асимптотическое разложение согласно формуле (21.38) по степеням $g_2(z, a)$. Можно попытаться использовать разбиение $g_2(z, a) = g_2^*(z, a) + g_2^{**}(z, a)$, где $g_2^*(z, a)$ — основная часть, а $g_2^{**}(z, a) = O(1)$. Затем $\exp \left[-\frac{1}{2} g_2^{**}(z, a) (ve^{i\theta})^2 \right]$ по образцу доказательства теоремы 21.1 следует присоединить к $h(z, t)$ и ввести новую функцию нагрузки $H_0(z, t) = h(z, a + ve^{i\theta}) \exp \left[-\frac{1}{2} g_2^{**}(z, a) (ve^{i\theta})^2 \right]$. После этого разложение можно строить по степеням $g_2^*(z, a)$ (см. пример в п. 21.4).

4°. Можно ослабить условия 5) теоремы 21.1 и допустить, что

$$\left| \frac{g_k(z, a)}{k!} \right| < M |g_m(z, a)|^h \left(\frac{1}{m} - \eta \right), \quad (21.58)$$

$$\left| \frac{H_k(z, a)}{k!} \right| < M |g_m(z, a)|^h \left(\frac{1}{m} - \eta \right),$$

где $\eta \in \left(0, \frac{1}{m} \right]$ выбрано так, чтобы $|g_m(z, a)|^{1/m - \eta} \rho(z) \rightarrow 0$. Тогда получаем оценку $|D_k(z)| < M |g_m(z, a)|^{k(1/m - \eta) - 2\eta}$. Такую же оценку имеют коэффициенты полинома $B_k(z, \omega^m)$. Кроме того, $q_{jk}(z) = O(|g_m(z, a)|^{k(1/m - \eta) - 2\eta})$. Поэтому $R_n^{**}(z) = O(|g_m(z, a)|^{-(n+1)\eta - 1/2 - \eta})$ и члены ряда (21.38) имеют оценки $O(|g_m(z, a)|^{-k\eta - 1/2 - 2\eta})$. Однако такие оценки не гарантируют, что члены этого ряда образуют шкалу. Более сильные высказывания возможны лишь тогда, когда оценки (21.58) заданы точно.

5°. Если $D_{2k+1}(z) = 0$, $k \in N$, то $B_{2k+1}(z, \omega^m) = 0$. Пусть также $Q_{2k+1}(z, \omega^m) = 0$. Тогда

$$Q_{2k}(z, w^m) = \sum_{j=0}^k q_{jk}(z) w^{jm}. \quad (21.59)$$

Поэтому в данном случае в формуле (21.38) имеем показатель степени $\frac{2k+1}{m}$, а в формулах (21.48) и (21.49) функции Hd и Vi имеют индексы $2k+mj$. Соответственно изменяются частные случаи, рассмотренные в теоремах 21.3—21.5. При $H_0(z, t) \equiv 1$ имеем $Q_k(z, w^m) \equiv B_k(z, w^m)$.

6°. В некоторых случаях допустимо, что $g_1(z, a)[g_m(z, a)]^{-1/m} \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$, $z \in Z$, т. е. не выполнено условие (21.5) при $k=1$. Тогда надо исследовать дополнительные условия, при которых: 1) сохраняется применение леммы 21.3; 2) в разложении (21.38) образуется асимптотическая шкала. Рассмотрим эти вопросы при $m=2$.

С помощью формулы (8.7) легко убедиться в том, что применение леммы 21.3 сохраняется, если $\mu(z) \equiv g_1(z, a)[g_2(z, a)]^{-1/2} = o(\rho(z)\sqrt{g_2(z, a)})$, или

$$g_1(z, a) = o(\rho(z)g_2(z, a)). \quad (21.60)$$

При исследовании второго вопроса приходится различать случаи теорем 21.1 и 21.2. Если $\mu \rightarrow \infty$, то $H_{-k-2j-1}(\mu/\sqrt{2})$ остается ограниченным лишь при $|\arg \mu| \leq 3\pi/4$. При $|\arg \mu| > 3\pi/4$ $H_\lambda(\mu/\sqrt{2}) = \mathcal{O}(\exp(\mu^2/2)\mu^{\lambda+1})$, поэтому асимптотическую шкалу получим лишь тогда, когда к (21.60) добавим условие

$$g_1^3(z, a) = o(g_2^2(z, a)). \quad (21.61)$$

Кроме того, при $|\arg \mu| > 3\pi/4$ последнюю часть доказательства теоремы Фабера следует видоизменить.

В теореме 21.2 согласно (21.51) $c_k^*(z) = \mathcal{O}(\exp(\mu^2/2)H_{3k}(i\mu/\sqrt{2}))$, поэтому независимо от $\arg \mu$ шкалу получаем лишь при условиях (21.60) и (21.61).

7°. В доказательстве теоремы 21.1 мы считали, что критическая точка a фиксирована. Но доказательство сохраняется, если a почти фиксирована и несущественно зависит от z , т. е. $a = a_0 + o(1)$. Тогда можно при всех z сохранить фиксированное $\vartheta = \vartheta_0$ или брать $\vartheta = \vartheta_0 + o(1)$. Изменения карты, расположения точки a и отрезка L_ρ вместе с z не повлияют на выполнение условий теоремы и ее доказательство.

8°. Разложение можно модифицировать в таком виде, как указано в примечании 2° к теореме 19.3, но это усложняет

доказательство теоремы и требует других условий относительно $g_k(z, a)$, $k > m$. Тогда имеем

$$c_k(z) = \pi Q_k^*(z) H d_k \left[-g_1(z, a) \left(\frac{(m-1)!}{g_m(z, a)} \right)^{1/m}, m \right]. \quad (21.62)$$

21.3. Примеры к теоремам 21.3 и 21.4

21.3.1. При применении теорем 21.1 и 21.2 интеграл вначале следует привести к интегралу с фиксированной или почти фиксированной критической точкой. Иногда с помощью подстановки приходим непосредственно к методу перевала или без применения подстановки от $g(z, t)$ можно отделить главную часть, у которой критическая точка не зависит от параметра (см. примеры 21.3.2 и 21.3.3).

Если критической является точка перевала, то можно соблюдать процедуру, описанную в § 19. Фактически эта точка часто является лишь приближенной точкой перевала для всей функции $g(z, t)$. Строить карту тоже приходится исходя из расположения точек перевала. При этом следует иметь в виду, что карта строится для выделенной главной части функции $\operatorname{Re}[-g(z, t)]$, а не для самой функции. В некоторых случаях целесообразно использовать разложение в ряд функций $V i_{k+jm}$ или $H d_{k+jm}$ и перегруппировку членов в (21.48), чтобы получить разложение с постоянными коэффициентами. Иногда следует учитывать примечания 3° и 6° к теоремам 21.1—21.5. При применении соответствующей теоремы нужно тщательно проверять выполнение условий теоремы и леммы 21.2. Далее в примерах эти действия будут изложены довольно конспективно.

В § 18 было построено асимптотическое разложение для $H_\nu(z)$ при действительном ν и ограниченном $|z|$, если $\nu \rightarrow +\infty$. Получим более общее разложение для функции $H_\nu(z)$ по теореме 21.3 при комплексных z и ν . Из (8.44) для любого $\nu \neq -n$ получаем

$$H_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} e^{i\pi(\nu+1)} \int_{+\infty}^{(0-)} e^{-\tau^2 - 2\tau z \tau^{-\nu-1}} d\tau,$$

откуда после подстановки $\tau = e^{-i\pi} \sqrt{\frac{\nu+1}{2}} t$ следует формула

Уиттекера [225]

$$H_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \left(\frac{2}{\nu+1} \right)^{\nu/2} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp \left[-(\nu+1) \left(\frac{t^2}{2} + \ln t \right) + \sqrt{2(\nu+1)}zt \right] dt, \quad (21.63)$$

которая определяет $H_\nu(z)$ для всех ν и z , кроме $-\nu \in N_1$. При $\nu = n$ в качестве пути интегрирования можно брать любой замкнутый контур, охватывающий точку $t=0$.

Сначала рассмотрим случай ограниченного $|z|$ и воспользуемся приближенными точками перевала $t = \pm i$. Имеем $h(\nu, t) \equiv 1$, $g(\nu, t) = (\nu+1) \left(\frac{t^2}{2} + \ln t \right) - \sqrt{2(\nu+1)}zt$, $g_1(\nu, \pm i) = -\sqrt{2(\nu+1)}z$, $g_2(\nu, \pm i) = 2(\nu+1)$, $g_k(\nu, \pm i) = -(\nu+1)(\pm i)^k \times (k-1)!$

Условие (21.35) выполнено. Имеет место также (21.5), если $|z|$ ограничено, и (21.33), если $\rho(\nu) = o(1)$. Для выполнения (21.7) и (21.8) достаточно, чтобы $\rho(\nu) = \nu^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1/2)$. Карта для функции $u = -\frac{1}{2}(\sigma^2 - \tau^2) - \frac{1}{2} \ln(\sigma^2 + \tau^2)$ представлена на рис. 23. Бесконечность контура не влияет на применение леммы

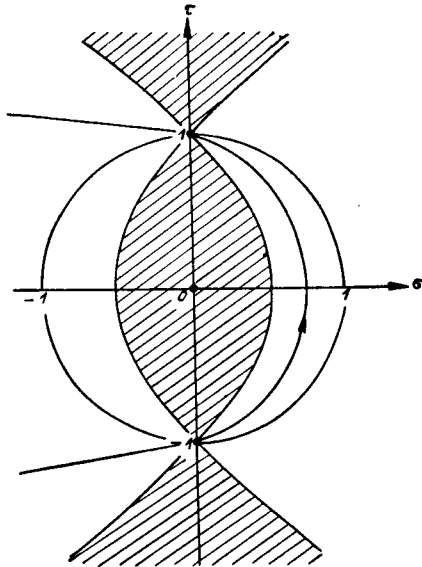


Рис. 23

21.2, так как при достаточно больших ω и $|v|$ имеем

$$\left| \int_{-\infty}^{-\omega} \exp \left[-(v+1) \left(\frac{t^2}{2} + \ln t \right) + \sqrt{2(v+1)}zt \right] dt \right| < \\ < M \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(v+1)t^2} dt = O \left(e^{-\frac{1}{4}(v+1)\omega^2} v^{-1} \right) \quad (21.64)$$

и эта оценка достаточна для использования (21.65).

Поскольку обе точки перевала находятся на одинаковой высоте, то необходимо разложить вклады от обеих точек. В обоих случаях в основных долинах можно принимать $\phi=0$ и в точке $t=i$ входить в положительном направлении, а в $t=-i$ — в отрицательном. Тогда второе из условий (21.7) будет выполнено, если $\sqrt{v+1}$ имеет главное значение. Разложение каждого асимптотического вычета получаем по формулам (21.38) и (21.51).

После преобразований при $|z| < M$, $v \rightarrow \infty$, $|\arg v| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ приходим к следующему разложению:

$$H_v(z) \sim \frac{\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{v+1} \right)^{v/2} \exp \left(\frac{v+1}{2} + \frac{z^2}{2} \right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} (v+1)^{-\frac{k+1}{2}} 2^{-k} A_k(z) \cos \left[\sqrt{2(v+1)}z + \frac{\pi}{2} (k-v) \right], \quad (21.65)$$

где

$$A_k(z) = i^k \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{2^j} H_{k+2j} \left(-\frac{iz}{\sqrt{2}} \right) q_{jk}^*, \\ B_k = Q_k = i^k \sum_{j=0}^k q_{jk}^* \omega^{2j},$$

B_k определяется по (19.30), $D_k = (\pm i)^{k/2} (k+2)$, q_{jk}^* — действительные числа. В силу примечания 6° к теоремам 21.1—21.5 формула (21.65) после перегруппировки членов дает асимптотическое разложение также при $z \rightarrow \infty$, если $z = o(\sqrt{v+1})$.

При $v=n$ для $H_n(z)$ получаем несколько иное разложение, чем (18.129), так как в (21.65) имеется шкала $\{(n+1)^{-k/2}\}$ и не требуется перегруппировка членов. Однако при выводе формулы

(21.63) можно было использовать подстановку $\tau = e^{-i\pi\sqrt{\nu/2}} t$, применить функцию

$$g^*(\nu, t) = \nu \left(\frac{t^2}{2} + \ln t \right) - \sqrt{2\nu} z t + \ln t$$

и построить разложение по степеням $\nu^{-k/2}$. Это примечание относится и к следующему пункту: при необходимости можно получить разложение как по степеням ν , так и по степеням $\nu+1$. Форма разложения в обоих случаях одинакова, но в первом случае несколько усложняется вычисление коэффициентов, так как $Q_k \neq B_k$.

21.3.2, 1°. Рассмотрим случай, когда $z = \bar{\sigma}(\sqrt{\nu+1})$. Если положить $z = \sqrt{2(\nu+1)} \operatorname{ch} \gamma$, $\gamma = \alpha + i\beta \neq 0$, $\beta \in [0, \pi]$, то можно непосредственно применить метод перевала. Поэтому данный пример фактически относится к § 19. Имеем критические точки $t_k = e^{(-1)^k \gamma}$, $k=1, 2$; $g(t) = 1/2 t^2 - 2t \operatorname{ch} \gamma + \ln t$, $g(t_k) = -[1/2 e^{(-1)^k 2\gamma} + 1 - (-1)^k \gamma]$, $u_k = -\operatorname{Re} g(t_k) = 1/2 \cos 2\beta e^{(-1)^k 2\alpha} + 1 - (-1)^k \alpha$.

Если $u_1 = u_2$, то следует учитывать влияние обеих седловых точек, так как они находятся на одинаковой высоте. Этот случай имеет место, когда $\alpha = 0$ или $\cos 2\beta = \frac{2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha}$. Разбиение γ -плоскости этими кривыми показано на рис. 12, где $\tau = 2\beta$, $\sigma = 2\alpha$. В заштрихованных областях $u_2 > u_1$, в остальных — $u_2 < u_1$.

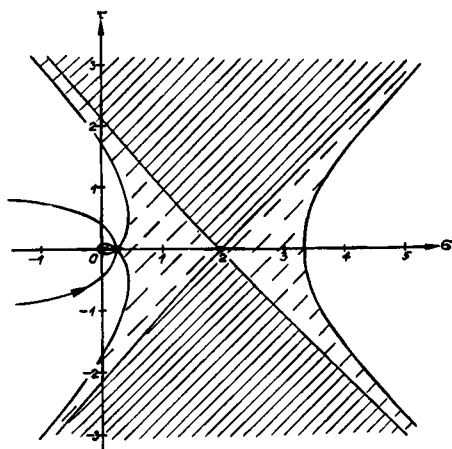


Рис. 24

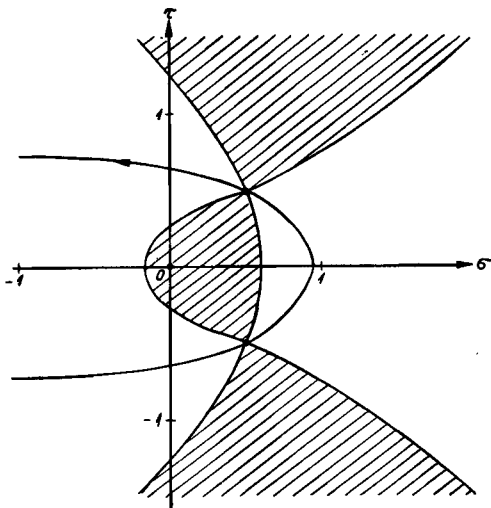


Рис. 25

Если $u_1 \neq u_2$, то доминирующей является только одна из седловых точек. В частном случае, когда $\beta = 0, \alpha > 0$, карта при $\alpha = 1$ показана на рис. 24. Если $\text{ch } \gamma < 1$, то $\alpha = 0, \text{ch } i\beta = \cos \beta$ и седловые точки находятся на одинаковой высоте. Этот случай напоминает п. 21.3.1. Карта при $\beta = \pi/4$ показана на рис. 25. В случае комплексных γ получаем искаженный рис. 24.

Разложение асимптотического вклада от критической точки $t_k = e^{(-1)^k \gamma}$ согласно формулам (21.38) и (21.51) при $\nu \rightarrow \infty$, $|\arg(\nu + 1)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ имеет вид

$$I_k(\nu, z) \sim \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{\nu + 1} \right)^{\nu/2} \exp [(\nu + 1)(1/2)e^{(-1)^k \gamma} + 1 - (-1)^k \gamma] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_m(\gamma)}{2^m} [\chi(\nu + 1)]^{-m-1/2}, \quad (21.66)$$

где

$$\chi = e^{(-1)^k \gamma} - 1, \quad E_m(\gamma) = \sum_{j=0}^{2m} \frac{(2m + 2j)!}{2^j (m + j)!} q_{j, 2m}(\gamma),$$

а $q_{j,2m}$ определяется по формулам (19.30) и (21.45), причем

$$D_m = \frac{(-1)^m}{\kappa(m+2)} \exp [(-1)^{k-1} \gamma(m+2)], \quad Q_m \equiv B_m,$$

$$E_0 = 1, \quad E_1 = -\frac{3}{2\kappa} e^{(-1)^{k-1} 4\gamma} + \frac{5}{3\kappa^2} e^{(-1)^{k-1} 6\gamma}.$$

Легко проверить, что условия теоремы 21.3 выполнены. Условие (21.7) в основной долине будет удовлетворено, если брать соответствующую ветвь для $\sqrt{g_2(t_k)}$. Например, при $\beta=0$ имеем $\vartheta \in \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{g_2(t_1)} = i\sqrt{\kappa}$, $\rho(v) = v^{-n}$, $\eta \in (0, 1/2)$; при $\alpha=0$,

$\beta \in (0, \pi)$ имеем $\sqrt{g_2(t_1)} = e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{\frac{i\beta}{2}} \sqrt{2 \sin \beta}$, $\sqrt{g_2(t_2)} = e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-\frac{i\beta}{2}} \sqrt{2 \sin \beta}$. Применение леммы 21.2 для бесконечного контура оправдывается оценкой (21.64).

В зависимости от данного числа γ согласно рис. 12 имеем $H_v(z) \sim I_1(v, z)$, $H_v(z) \sim I_2(v, z)$ или же $H_v(z) \sim I_1(v, z) + I_2(v, z)$. При $u_1 \neq u_2$ следует брать ту критическую точку, для которой u_k меньше, поэтому объединение разложений недопустимо. Это обстоятельство не учтено в работе [185]. Ошибка, допущенная в ней, свидетельствует о том, что рискованно применять метод перелома без исследования карты.

2°. Отметим частные случаи формулы (21.66).

А. $\alpha > 0$, $\beta = 0$. Согласно рис. 12 имеем $H_v(z) \sim I_1(z, v)$, $\kappa = 2 \operatorname{sh} \alpha e^\alpha$, поэтому при $v \rightarrow \infty$, $|\arg(v+1)| \leq \pi/2 - \varepsilon$

$$H_v(\operatorname{ch} \alpha \sqrt{2(v+1)}) \sim \frac{\Gamma(v+1)}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{v+1}\right)^{v/2} \exp \left[(v+1) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{2} e^{-2\alpha} + 1 + \alpha \right) \right] \sum_{m=0}^{\infty} E_m 2^{-2m} [(v+1) \operatorname{sh} \alpha e^\alpha]^{-m-1/2}. \quad (21.67)$$

Б. $\alpha = 0$, $\gamma = i\beta$, $\beta \in (0, \pi)$. Имеем $H_v(z) \sim I_1(z, v) + I_2(z, v)$. Поскольку $g_2(t_1) = -2ie^{i\beta} \sin \beta$, $g_2(t_2) = \bar{g}_2(t_1)$, $\kappa_2 = \bar{\kappa}_1$, $E_m(\gamma_1) = \bar{E}_m(\gamma_2)$, то согласно сказанному о выборе ветви для $\sqrt{g_2(t_k)}$ при $v \rightarrow \infty$, $|\arg(v+1)| \leq \pi/2 - \varepsilon$ получаем разложение

$$\begin{aligned}
& H_\nu(\cos \beta \sqrt{2(\nu+1)}) \sim \\
& \sim \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\nu+1} \right)^{\nu/2} \exp[(\nu+1)(1+1/2 \cos 2\beta)] \times \\
& \times \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m} [(\nu+1) \sin \beta]^{-m-1/2} \times \\
& \times \operatorname{Im} \left\{ E_m(\gamma_2) \exp i \left[\frac{\beta}{2} + \frac{3\pi}{4} + m \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (\nu+1) (\sin 2\beta - 2\beta) \right] \right\}. \quad (21.68)
\end{aligned}$$

Чтобы получить разложение, показывающее переход от (21.68) к (21.65), можно в (21.68) положить $\beta = \frac{\pi}{2} - \delta(\nu)$, $\delta(\nu) = o(1)$. При $\cos \beta = \frac{x}{\sqrt{2(\nu+1)}}$ из (21.68) получаем некоторую модификацию для (21.65). В работе [219] вместо (21.68) построено модифицированное разложение с учетом примечания 8° к теоремам 21.1—21.5 и формулы (21.62).

3°. Рассмотрим еще случай, когда $\operatorname{ch} \gamma \approx 1$ и предыдущие формулы неприменимы. Положим $\operatorname{ch} \gamma = 1 + \mu(\nu)$ и преобразуем $g(\nu, t)$ в виде

$$\begin{aligned}
g(\nu, t) &= (\nu+1) \left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln t \right) - 2(\nu+1)\mu t = \\
&= (\nu+1)g(t) - 2(\nu+1)\mu t.
\end{aligned}$$

Поскольку $g_1(1) = g_2(1) = 0$, то для $g(t)$ имеем одну кратную точку перевала $t=1$. Карта для этого случая показана на рис. 26. Можно применить теорему 21.4, если $(\nu+1)^{-1/2}(\nu+1)\mu = O(1)$, т. е. $\mu(\nu) = O(\nu^{-2/3})$. Проверка выполнения условий такой же, как и в предыдущих случаях. Имеем $g_1(\nu, 1) = -2(\nu+1)\mu$, $g_3(\nu, 1) = 2(\nu+1)$. Из рис. 26 видно, что в теореме 21.4 следует брать $l=2$ и в основной долине, находящейся в 4-й четверти, можно выбрать $\theta = -\frac{2\pi}{3}$, т. е. отрезок L_ρ нужно провести вдоль касательной к ЛНС. Чтобы при $|\arg(\nu+1)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ было удовлетво-

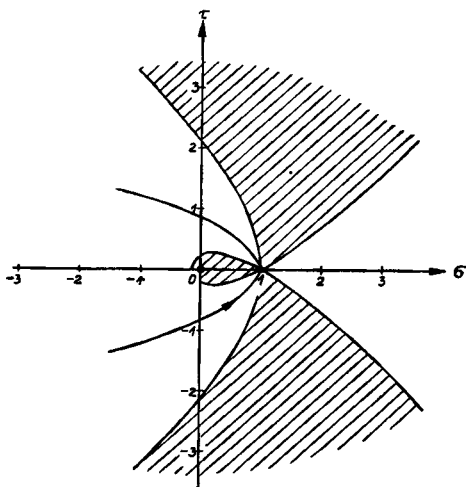


Рис. 26

рено условие (21.7), надо брать $\sqrt[3]{v+1} = (\sqrt[3]{v+1})_0 e^{\frac{i2\pi}{3}}$, где $|\arg(\sqrt[3]{v+1})_0| \leq \frac{\pi}{6} - \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда согласно (21.55) при $v \rightarrow \infty$ получаем разложение

$$H_\nu[(1+\mu(v))\sqrt{2(v+1)}] \sim \Gamma(v+1) \left(\frac{2}{v+1}\right)^{v/2} \times \\ \times \exp\left[(v+1) \left(\frac{3}{2} + 2\mu\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k M_k(\mu, \nu) (v+1)^{-\frac{k+1}{3}}, \quad (21.69)$$

где $M_k(\mu, \nu) = \sum_{j=0}^k (-1)^j q_{jh} A_{i_{k+3j}} [2\mu(v+1)^{2/3}]$, q_{jh} определяются по формулам (19.30), (21.42) и (21.45), $Q_k \equiv B_k$, $D_k = (-1)^k / (k+3)$. Очевидно, все разложения, полученные в п. 21.3.1 и 21.3.2, сильноасимптотические.

В работе [207] дано разложение для $H_n(x)/n!$ при $x \sim \sqrt{2(n+1)}$ по степеням $t = (x/\sqrt{2})^{-2/3} [(n+1) - x^2/2]$. Разложение, отличное от (21.69), при $z \sim \sqrt{2n}$ для $H_n(z)$ дано в [230].

21.3.3, 1°. В качестве второго примера рассмотрим разложение для интеграла (19.76):

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \exp(z \operatorname{sh} t - \nu t) dt, \quad (21.70)$$

причем $\nu = \sqrt{z} \lambda$, $\lambda = O(1)$, но может быть также $\lambda = o(1)$ при $z \rightarrow \infty$. Как главную часть функции $g(z, t)$ берем $-z \operatorname{sh} t$. Точками перевала являются $t_k = (k + 1/2)\pi i$, $|k| \in N$, поэтому путь L деформируем по долинам через точки $t = \pm i \frac{\pi}{2}$. Карта дана на рис. 27. Имеем $g(z, t) = -z \operatorname{sh} t + \nu t$, $g_1(z, \pm i) = \nu$, $g_{2k}(z, \pm i) = = e^{\mp i\pi/2} z$, $g_{2k+1}(z, \pm i) = 0, k \geq 1$. Если выбрать $\rho(z) = |z|^{-\alpha}$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, то легко убедиться в том, что все условия теоремы Фабера удовлетворены. Для отдельных точек перевала ϑ можно выбрать следующим образом: $\vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ для $t = i$ и $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ для $t = -i$. Тогда второе из условий (21.7) имеет место при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$. Лемма 21.2 для бесконечной кривой L применима в силу оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega \pm i\pi}^{\infty \pm i\pi} \exp(z \operatorname{sh} t - \nu t) dt \right| &\leq \int_{\omega}^{\infty} \exp(-z \operatorname{sh} \tau - \nu \tau) d\tau = \\ &= o(e^{-z \operatorname{sh} \omega}) = o(z^{-N}). \end{aligned}$$

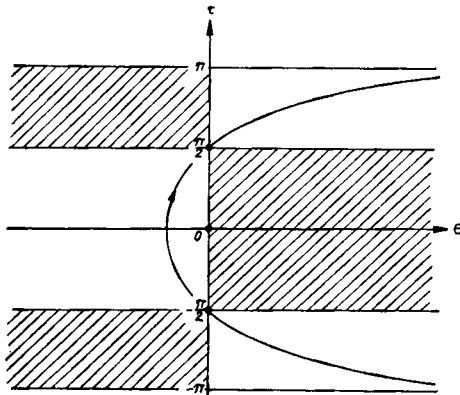


Рис. 27

Используя теорему 21.3 для отдельных точек перевала и учитывая примечание 5°, после преобразований при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \leq \pi - \varepsilon$, получаем

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k(z, \lambda) (2z)^{-k}, \quad (21.71)$$

где

$$\begin{aligned} A_k(z, \lambda) &= \frac{1}{2i} \left[\exp i \left(z - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\nu^2}{2z} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \right) \times \right. \\ &\times \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{2^{2j}} H_{2k+2j} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \right) q_{jk} - \exp i \left(-z + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\nu^2}{2z} - \right. \\ &\left. - \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} \right) \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{2^{2j}} H_{2k+2j} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}} \right) q_{jk} \left. \right] = \\ &= a_k(\lambda) \sin \left(z - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\nu^2}{2z} + \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} \right) + \\ &+ b_k(\lambda) \cos \left(z - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\nu^2}{2z} + \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} \right), \quad (21.72) \end{aligned}$$

$a_0(\lambda) = 1$, $b_0(\lambda) = 0$. Коэффициенты q_{jk} определяются из (21.59), где $Q_{2k} \equiv B_{2k}$, а B_{2k} — из (19.30) при $D_{2k} = \frac{2}{(2k+2)!}$. Имеем $q_{0k} = 0$ при $k \geq 1$, $q_{11} = 1/12$, $q_{21} = 1/360$, $q_{22} = 1/288$, откуда $a_1(\lambda) = \frac{1}{12}\lambda^4 - 1/4$, $b_1(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2}$.

После перегруппировки членов в (21.71) получаем сильно-асимптотическое разложение, если $\nu = o(z^{2/3})$. При $|\nu| < M$ из него следует (10.59).

2°. Рассмотрим интеграл (21.70) при другом соотношении между ν и z : $\nu = z + \mu$, $\mu = O(z^{1/3})$. Тогда можно применить соотношение

$$-g(z, t) = z(\operatorname{sh} t - t) - \mu t = zg(t) - \mu t.$$

Если выделить в качестве главной части $zg(t)$, то можно использовать п. 19.5.3, 4° В и рис. 12. Поскольку седловой точкой является $t=0$ и $g_3(z, 0) = -z$, а в основной долине имеем $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \right)$, то условие (21.7) при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ будет

выполнено, если выбрать $\sqrt[3]{-z} = z^{1/3} e^{i\pi/3}$, где $z^{1/3}$ — главное значение корня. Согласно теореме 21.4 при $l=1$, $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \leq \pi/2 - \varepsilon$, получаем разложение

$$J_\nu(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} M_k(\mu, z) (z/2)^{-(2k+1)/3}, \quad (21.73)$$

где

$$M_k(\mu, z) = \sum_{j=0}^k (-1)^j q_{jk} A i_{2k+3j}(\mu \sqrt[3]{2/z}). \quad (21.74)$$

Поскольку $D_{2k+1} = 0$, то согласно (21.59) и (19.30) имеем

$$B_{2k} = \sum_{j=0}^k q_{jk} \omega^{3j} = -\frac{\omega^3}{k} \sum_{j=0}^{k-1} B_{2j} \frac{2k-2j}{(2k-2j+3)!}, \quad B_0 = 1,$$

$q_{00} = 1$, $q_{0k} = 0$ при $k > 0$, $q_{11} = -1/60$, $q_{12} = -\frac{1}{2520}$, $q_{22} = \frac{1}{7200}$. Очевидно, (21.71) и (21.73) являются сильноасимптотическими разложениями.

При $\mu = 0$ из (21.73) и (21.26) следует (19.80). Кроме того, из (21.73) можно получить следующие модификации: 1) если для функций $A i_{2k+3j}$ применить (21.26) и в (21.73) перегруппировать члены по степеням z , то придем к тому разложению Дебая, о котором сказано при рассмотрении формулы (19.80); 2) в силу (21.16) и (21.28) имеет место соотношение

$$A i_m(\mu) = a_m(\mu) A i_0(\mu) + b_m(\mu) A i_1(\mu), \quad (21.75)$$

где $a_m(\mu)$ и $b_m(\mu)$ — полиномы, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \mu$, $a_3 = 1$, $a_4 = \mu^2$, $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = \mu$, $b_4 = 2$, поэтому ряд (21.73) можно разбить на два ряда с множителями $A i_0$ и $A i_1$. В такой форме $M_k(\mu, z)$ преобразовано в работе [204]. Подобное разложение получается также с помощью дифференциального уравнения Бесселя [121].

Имеется еще другая модификация разложения (21.73), когда перед знаком суммы стоит функция $A i(\varphi(\mu, z))$, где для $\varphi(\mu, z)$ строится асимптотическое разложение при $z \rightarrow \infty$ по степеням $z^{-2/3}$, а коэффициенты этого разложения и функции $M_k(\mu, z)$ — полиномы от $\mu/z^{1/3}$. Такое разложение вместе с предыдущими формами дано в работе [212], но методом дифференциальных

уравнений эта форма впервые введена в [184]. Разложения, родственные (21.73), получены также в [69].

Первый член разложения (21.73) найден Никольсоном [200]. В его работе впервые появляется идея о применении ряда Тейлора для $g(z, t)$ и (21.57). Однако интегральное представление для $J_\nu(z)$, примененное в [200], неудобно для получения дальнейших членов разложения (21.73).

21.3.4. Теоремы 21.1 и 21.2 применимы также в случае действительного переменного интегрирования и дополняют метод, изложенный в § 18. В качестве примера при $x \rightarrow +\infty$ рассмотрим разложение интеграла

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} \left[\frac{x^t}{\Gamma(1+t)} \right]^\lambda dt, \quad \lambda > 0. \quad (21.76)$$

Имеем

$$g(x, t) = \lambda[\ln \Gamma(1+t) - t \ln x], \quad g_1(x, t) = \lambda[\psi(1+t) - \ln x].$$

Существенно критической является точка $t_0(x)$, в которой $\psi'(1+t_0) = \ln x$. Если применить (9.51) и потенцировать, то по теореме 4.9 и формуле (4.37) при $x \rightarrow +\infty$ получим

$$t_0(x) \sim x - 3/2 + 1/6x + 1/24x^2 + \dots \quad (21.77)$$

Чтобы применить теорему 21.3, (21.76) следует привести к интегралу с постоянной критической точкой. Для этого можно использовать подстановку $t = t_0(x)\tau$, как отмечено в п. 21.1, но тогда выражения будут содержать $t_0(x)$. Поэтому в силу (21.77) берем $t = x\tau$. Получаем

$$\Omega(x) = x \int_0^{\infty} \exp \lambda[-\ln \Gamma(1+\tau x) + \tau x \ln x] d\tau = x \int_0^{\infty} \exp[-g^*(x, \tau)] d\tau.$$

Тогда $g_1^*(x, 1) \sim \lambda/2$, $g_2^*(x, 1) = \lambda x^2 \psi'(1+x) \sim \lambda x$, $g_k^*(x, 1) = \lambda x^k \psi^{(k-1)}(1+x) \sim \lambda (-1)^k (k-2)! x$, $k \geq 3$. Легко проверить, что все условия теоремы 21.3 выполнены. Применение леммы 21.2 в бесконечном промежутке оправдывается оценкой

$$\int_{\omega}^{\infty} \exp[-g^*(x, \tau)] d\tau < Mx^{-1/2} \int_{\omega}^{\infty} e^{-\lambda\tau x} d\tau = O(e^{-\lambda\omega x} x^{-3/2}),$$

справедливой при $\omega > e^2$. Поэтому согласно (21.38) и (21.51) при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\Omega(x) \sim \sqrt{2\pi} \left[\frac{x^x}{\Gamma(1+x)} \right]^\lambda \frac{1}{\sqrt{\lambda\psi'(1+x)}} \exp \left[\frac{\lambda}{8x^2\psi'(1+x)} \right] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k/2} C_k(x) [x^2\psi'(1+x)]^{-k/2}, \quad (21.78)$$

где

$$C_k(x) = (i/\sqrt{2})^k \sum_{j=0}^k (-2)^{-j} q_{jk}(x) H_{k+2j} \left(\frac{i\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}x\sqrt{\psi'(1+x)}} \right).$$

Функции $q_{jk}(x)$ определяются согласно (21.45) при $Q_k \equiv B_k$, а B_k — по (19.30) при $D_k = \frac{x^k \psi^{(k+1)}(1+x)}{(k+2)! \psi'(1+x)} \sim \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}$; $q_{00} = 1$, $q_{0k} = 0$ при $k \geq 1$, $q_{jk}(x) = O(1)$.

Легко убедиться в том, что $C_0 = 1$, $C_{2k}(x) = O(1)$, $C_{2k+1}(x) = O(1/\sqrt{x})$, поэтому разложение (21.78) после попарного объединения членов станет сильноасимптотическим. Если пользоваться разложениями (9.43) и (9.51), то после перегруппировки получаем

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{x^t}{\Gamma(1+t)} \right]^\lambda dt \sim (1/\sqrt{\lambda}) e^{\lambda x} (\sqrt{2\pi x})^{1-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\lambda) x^{-k}, \quad E_0 = 1. \quad (21.79)$$

При $\lambda = 1$ из (8.55) и (13.50) следует, что в (21.79) остается только e^x . Несколько отличным методом E_0 и E_1 вычислены в [121].

Подобным образом разлагаются интегралы $\int_0^{\infty} \frac{e^{xt}}{\Gamma((t/\lambda) + 1)} dt$ и $\int_0^{\infty} t^{\alpha-\lambda t} e^{xt} dt$, приведенные в [6].

21.4. Расщепление критической точки

21.4.1. Рассмотрим разложение при $z \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Omega(z) = \int_L e^{-zg(t)} h(t) dt \quad (21.80)$$

в случае, когда $g(t)$ и $h(t)$ аналитичны в области D , содержащей

некоторую окрестность точки $t=0$, за исключением этой точки, причем при $t \rightarrow 0$

$$g(t) = t^\alpha \sum_{h=0}^{\infty} a_h t^h = t^\alpha [a_0 + g_0(t)],$$

$$h(t) = t^\lambda \exp(-\mu t^{-\gamma}) h_0(t), \quad (21.81)$$

где $h_0(t)$ аналитична в D , $\alpha > 0$, $a_0 \neq 0$, $\gamma > 0$, λ и μ — фиксированные комплексные числа. Критическими являются концы кривой L , точки перевала функции $g(t)$, а также точка $t=0$.

Асимптотическое разложение вкладов от первых двух типов критических точек рассмотрено в § 19, поэтому исследуем только вклад от $t=0$. Разложение можно привести к теореме Фабера, если присоединить множитель $\exp(-\mu t^{-\gamma})$ к $e^{-zg(t)}$ и образовать новое ядро, которое вблизи $t=0$ имеет седловые точки. Поэтому можно сказать, что этим методом *первоначальная критическая точка $t=0$ сложного характера расщепляется на несколько седловых точек*. Назовем их *расщепленными седловыми точками*. Отметим, что кривая L может входить в $t=0$ только в таких направлениях, при которых интеграл (21.45) сходится.

Без ограничения общности будем считать, что $a_0=1$, так как в противном случае его можно присоединить к z . Из функции $zt^\alpha g(t) + \mu t^{-\gamma}$ выделим *главную часть* $zt^\alpha + \mu t^{-\gamma}$. Поскольку относительно ее имеем седловую точку $t = \left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z}\right)^{1/(\alpha+\gamma)}$, то далее фиксируем $\arg z$ и применяем подстановку

$$t = \left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z}\right)^{1/(\alpha+\gamma)} u^{1/\alpha}. \quad (21.82)$$

Получаем интеграл

$$\Omega(z) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z}\right)^{(\lambda+1)/(\alpha+\gamma)} \int_{L^*} \exp\left[-cz^\beta \left(u + \frac{1}{\kappa u^\kappa}\right) - z^\beta c \mu \gamma \left(c^{\frac{1}{\alpha}} z^{-\frac{\beta}{\gamma}} u^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right] u^{\frac{\lambda+1}{\alpha}-1} h_0\left(c^{\frac{1}{\alpha}} z^{-\frac{\beta}{\gamma}} u^{\frac{1}{\alpha}}\right) du, \quad (21.83)$$

где $\beta = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} < 1$, $c = \left(\frac{\mu\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha+\gamma)}$, $\kappa = \gamma/\alpha$ и все степени понимаются в смысле главного значения.

После подстановки (21.82) можно применить принцип аналитического продолжения и с помощью интеграла (21.83) опреде-

лить функцию $\Omega(z)$ при всех z , при которых интеграл существует. Однако следует также иметь в виду, что в подстановке появляется многозначная функция $z^{-1/(\alpha+\nu)}$, для которой берется главное значение. Поэтому рассматривается разрезанная z -плоскость и равенство (21.83) может иметь место лишь при $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Это условие остается в силе и тогда, когда интеграл (21.83) существует также при других $\arg z$ (см. примеры в п. 21.5).

При подстановке (21.82) изменяется также расположение концов кривой L . В общем они находятся на римановой поверхности. Если концы кривой L лежат на конечном расстоянии от начала, то *при определенных* $\arg z$ один из них будет являться доминирующей критической точкой и асимптотическое разложение для $\Omega(z)$ получим непосредственно из (21.80) согласно теореме 19.1. Это утверждение следует из того, что конец пути дает в разложении основной множитель e^{Az} , а расщепленные седловые точки — множитель $e^{\beta z}$, $\beta < 1$, и в некотором секторе $\operatorname{Re}(Az) > 0$.

Седловые точки функции $g(t)$ также дают множитель e^{Az} . Поэтому существуют такие интегралы (21.80), для которых при всех $\arg z$ расщепленные критические точки учитывать не следует, тем более что путь может находиться далеко от начала. В силу сказанного нельзя построить асимптотическое разложение интеграла (21.80) в общем случае в явном виде. Поэтому ограничимся лишь построением разложений для асимптотических вкладов в интеграл (21.83) от расщепленных седловых точек. Если при данных $\arg z$ концы кривой L^* лежат в долинах, то без ограничения общности можно допустить, что они находятся в бесконечности и удаляются от начала в таких направлениях, что интеграл будет сходиться. Концы кривой могут удаляться также на других листах римановой поверхности. Затем в каждом конкретном случае при допустимых $\arg z$ можно построить разложение для интеграла (21.80) с помощью сложения вкладов от существенно критических точек. С изменением $\arg z$ роли критических точек могут меняться, может измениться также деформированный путь.

21.4.2. Расщепленные седловые точки определяем для функции $G_0(z, u) = cz^\beta \left(u + \frac{1}{\chi u^\chi} \right)$. Так как $G_1(z, u) = cz^\beta (1 - u^{-\chi-1})$, то имеем критические точки $u_k = e^{i2\pi k/(\chi+1)}$, $k \in N$. В исходном интеграле (21.80) функции $g(t)$ и $h(t)$ определены на основном листе римановой поверхности, на котором разрез взят вдоль луча $\arg t = \pi$. Путь L тоже находится на этом листе. Но с помощью подстановки (21.82) этот лист отображается на сектор, который вместе с L^* может находиться на нескольких листах

римановой поверхности u -плоскости. Критические точки u_h , которые являются простыми седловыми точками, тоже будут находиться на этой поверхности.

Иногда для облегчения исследования карты интеграл (21.80) целесообразно привести к двум каноническим формам: (21.83) и подобной форме, которая получается после замены в (21.80) μ на $-\mu$ и подстановки (21.82):

$$\Omega^*(z) = (1/\alpha) \left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z} \right)^{(\lambda+1)/(\alpha+\gamma)} \int_{L^*} \exp \left[-cz^\beta \left(u - \frac{1}{\kappa u^\kappa} \right) - z^\beta c i \gamma_0 \left(\frac{1}{c^\alpha} z^{-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\gamma} u^\alpha \right) \right] u^{\frac{\lambda+1}{\alpha}-1} h_0 \left(\frac{1}{c^\alpha} z^{-\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\gamma} u^\alpha \right) du. \quad (21.84)$$

Для интеграла (21.84) критическими являются точки $u_h^* = \exp \frac{i\pi(2k+1)}{\kappa+1}$. Нередко достаточно для интеграла (21.83) путь деформировать через u_0 , а для (21.84) — через u_0^* и u_{-1}^* . На основном листе при разных κ относительно u_0 можно использовать карты, которые для функции $\operatorname{Re} \left(u + \frac{1}{\kappa u^\kappa} \right)$ показаны на рис. 28, *a—e*, если в них поменять ролями горы и долины. Аналогично для интеграла (21.84) относительно критических точек u_{-1}^* и u_0^* можно использовать карты для функции $\operatorname{Re} \left(u - \frac{1}{\kappa u^\kappa} \right)$, показанные на рис. 29, *a—в*, причем также следует поменять ролями горы и долины.

Если путь выходит из точки $u=0$, то иногда недостаточно применить только седловые точки u_0 , u_{-1}^* и u_0^* . Поэтому ради общности при разложении асимптотического вклада Ω_h для интеграла (21.83) берем общую седловую точку u_h , которая может находиться на любом листе, и общий путь L_h , проходящий через u_h и находящийся в долине для функции $-\operatorname{Re} \left(u + \frac{1}{\kappa u^\kappa} \right)$. Соответствующую карту можно построить при заданных κ и пути L .

Если L^* находится на нескольких листах, то иногда вместо подстановки (21.82) целесообразнее применить другую:

$$t = \left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z} \right)^{1/(\alpha+\gamma)} u. \quad (21.85)$$

Тогда путь интегрирования остается на одном листе и получаем интеграл с ядром $\exp \left[-cz^\beta \left(u^\alpha + \frac{1}{\kappa} u^{-\gamma} \right) \right]$, для которого имеем

расщепленные критические точки $u_k^{1/\alpha}$. Поскольку дальнейшие действия выполняются так же, как для интеграла (21.83), то этот случай подробнее рассмотрим только на примере в п. 21.5.3.

Пусть $g_0(t) = O(t^m)$ при $t \rightarrow 0$, $m \geq 1$. Тогда при $|z| \rightarrow \infty$ и $u \rightarrow u_k$ имеем $g_0(c^{1/\alpha} z^{-\beta/\gamma} u^{1/\alpha}) = O\left(z^{-\frac{m\beta}{\gamma}}\right)$. В зависимости от значений m и γ получаем разные случаи, причем в каждом из них можно использовать теорему 21.3. Приходится различать следующие случаи.

1°. Пусть $\beta - (m\beta)/\gamma \leq 0$, т. е. $m \geq \gamma$. Тогда согласно примечанию 3° к теоремам 21.1—21.5 множитель $\exp[-z^\beta \text{sig}_0(c^{1/\alpha} z^{-\beta/\gamma} u^{1/\alpha})]$ можно непосредственно присоединить к функции нагрузки и новую функцию нагрузки разложить по степеням $u - u_k$. Поскольку она аналитична относительно u в окрестности точки u_k , то имеем

$$H_0(z, u) = \exp[-z^\beta \text{sig}_0(c^{1/\alpha} z^{-\beta/\gamma} u^{1/\alpha})] u^{\frac{\lambda+1}{\alpha} - 1} h_0(c^{1/\alpha} z^{-\beta/\gamma} u^{1/\alpha}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} H_j(z, u_k) (u - u_k)^j, \tag{21.86}$$

где $H_j(z, u_k)$ иногда удобнее вычислять по рекуррентной формуле, как $Q_k(z, \omega^m)$ в (21.45), $H_j(z, u_k)$ — ограниченные функции от z .

Имеем $G_1(z, u_k) = 0$, $G_2(z, u_k) = cz^\beta (\kappa + 1) u_k^{-1}$. Если в (21.40) $g(z, t)$ заменить на $G_0(z, t)$ и a — на u_k , $u - u_k = ve^{i\theta}$, то согласно (21.42)

$$\exp[-G_0(z, u)] = \exp\left[-cz^\beta u_k \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\right] \exp\left(-\frac{1}{2} \omega^2\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} B_k(z, \omega^2) (ve^{i\theta})^k \tag{21.87}$$

и можно пользоваться разложением (21.44), где $Q_k(z, \omega^2)$ определяется по формуле (21.45). Согласно формуле (21.38) при $z \rightarrow \infty$ получаем разложение

$$\Omega_k(z) \sim \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z}\right)^{\frac{\lambda+1}{\alpha+\gamma}} \exp\left[-cz^\beta u_k \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)\right] \times \sum_{j=0}^{\infty} c_j^*(z) \left(\frac{u_k}{c(\kappa+1)}\right)^{\frac{j+1}{2}} z^{-\frac{\beta}{2}(j+1)}, \tag{21.88}$$

где $c_j^*(z)$ определяется в (21.51) при $g_1=0$, $c_0^* = -\sqrt{2\pi}H_0(z, u_k)$.

Допустимые значения для $\arg z$, при которых справедливо разложение (21.88), определяются так же, как в § 19, из условия

$$|\arg G_0(z, u)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad u \in L_k, \quad (21.89)$$

где путь L_k находится в долине. При этом используется соответствующая карта. Для разных k можно иметь разные условия, поэтому при деформировании пути через несколько расщепленных седловых точек следует учитывать все условия типа (21.89). Метод установления допустимых значений для $\arg z$ сохраняется также в следующих пунктах, в которых $G_0(z, u)$ заменяется на более сложную функцию.

2°. Пусть $m \in [\gamma/2, \gamma)$. Тогда в общем случае $H_j(z, u_k) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$ и $m = \gamma(1/2 + \eta)$, $\eta > 0$, имеем $H_j(z, u_k) = O(z^{\beta j(1/2 - \eta)})$. Такую же оценку имеет $c_j^*(z)$ в (21.88), и члены $c_j^*(z) z^{-1/2\beta(j+1)}$ в общем случае образуют шкалу, а (21.88) сохраняет силу.

Однако можно построить также другое разложение по шкале $z^{-1/2\beta(j+1)}$ с ограниченными коэффициентами. Используем соотношение

$$g_0(t) = \sum_{j=m}^{m_1} a_j t^j + g_0^*(t) \quad (21.90)$$

и выберем m_1 таким, чтобы $1 - (m_1 + 1)/\gamma \leq 0$. Тогда вместо прежнего множителя следует отделить $\exp[-z^\beta \text{cig}_0^*(c^{1/\alpha} z^{-\beta/\gamma} u^{1/\alpha})]$, а вместо $G_0(z, u)$ применить функцию

$$G_0^*(z, u) = G_0(z, u) + z^\beta \sum_{j=m}^{m_1} a_j c^{(j/\alpha)+1} z^{-(\beta j)/\gamma} u^{(j/\alpha)+1} \quad (21.91)$$

с теми же критическими точками u_k .

Поскольку $G_1^*(z, u_k) = O(z^{\beta - (m\beta)/\gamma})$, то при $m \geq \gamma/2$ выполнено условие (21.5) относительно $G_1^*(z, u_k)/\sqrt{G_2^*(z, u_k)}$ и согласно (21.38), (21.51) можно строить разложение по степеням функции $G_2^*(z, u_k)$. Но

$$\begin{aligned} G_2^*(z, u_k) &= z^\beta \left[c(\chi+1)u_k^{-1} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=m}^{m_1} a_j (j+\alpha) j c^{\frac{j}{\alpha}+1} z^{-\frac{\beta j}{\gamma}} u_k^{\frac{j}{\alpha}-1} \right] = \\ &= z^\beta \Phi(z^{-\beta/\gamma}, u_k), \end{aligned} \quad (21.92)$$

где $\Phi(z^{-\beta/\gamma}, u_k) = \tilde{O}(1)$, поэтому при $z \rightarrow \infty$ получаем разложение

$$\Omega_h(z) \sim \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z} \right)^{\lambda+1} \exp[-G_0^*(z, u_h) + (G_1^*(z, u_h))^2 / 2G_2^*(z, u_h)] \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j^*(z) \left(\frac{1}{\Phi(z^{-\beta/\gamma}, u_h)} \right)^{\frac{j+1}{2}} z^{-\frac{(j+1)\beta}{2}}, \quad (21.93)$$

где $\tilde{c}_j^*(z)$ определено по формуле (21.51) (без экспоненциального множителя), в которой g_1 и g_2 заменены на G_1^* и G_2^* .

3°. Пусть $m < \gamma/2$. При прежнем выборе m_1 и $m \geq \gamma(1/3 + \eta)$, $\eta > 0$, согласно примечанию 6° к теоремам 21.1—21.5 можно еще пользоваться разложением (21.93), так как тогда

$$[G_1^*(z, u_h)]^3 = o([G_2^*(z, u_h)]^2) \quad (21.94)$$

и функции $\tilde{c}_j^*(z) z^{-\frac{(j+1)\beta}{2}}$ образуют шкалу.

При $m \leq \gamma/3$ разложение (21.93) неприменимо. Это означает, что в ряду Тейлора для $G_0^*(z, u)$ по степеням $u - u_h$ определяющим является член $G_1^*(z, u_h)$, так как u_h недостаточно точно аппроксимирует точку перевала. Поэтому приходится точнее решить уравнение $G_1^*(z, u) = 0$, т. е. уравнение

$$1 - u^{-\kappa-1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=m}^{m_1} a_j (j + \alpha) c^{j/\alpha} z^{-(\beta j)/\gamma} u^{j/\alpha} = 0,$$

или

$$u = u_h \left[1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=m}^{m_1} a_j (j + \alpha) c^{j/\alpha} z^{-(\beta j)/\gamma} u^{j/\alpha} \right]^{1/(\kappa+1)}, \quad (21.95)$$

где для степени в бинOME Ньютона взято главное значение.

Методом неопределенных коэффициентов или методом асимптотических итераций асимптотическое разложение при $z \rightarrow \infty$ для корня u_h^* уравнения (21.95) можно найти в виде

$$u_h^* \sim u_h + \sum_{j=m}^{\infty} b_j z^{-(\beta j)/\gamma}, \quad (21.96)$$

$b_m = \frac{a_m(m+\alpha)}{\alpha(\kappa+1)} c^{m/\alpha} u_h^{m/\alpha+1}$. При этом применяются теоремы, приведенные в § 4. Обоснование этих методов дано в [173].

В ряду (21.96) берем такую частичную сумму u_h^{**} , чтобы либо член $G_1^*(z, u_h^{**})$ удовлетворял условию (21.94), либо $|G_1^*(z, u_h^{**})/\sqrt{G_2^*(z, u_h^{**})}|$ было ограничено. Тогда можно поль-

зваться разложением (21.93), в котором u_k заменено на u_k^{**} . Мы имеем право использовать точку u_k^{**} согласно примечанию 7° к теоремам 21.1—21.5.

Подобным образом без существенных изменений можно разложить второй канонический интеграл (21.84).

21.4.3. Возможно, что функция нагрузки вместо $\exp(-\mu t^{-\gamma})$ содержит более сложный множитель $\exp[-\mu t^{-\gamma}(1 + \sum_{j=1}^m d_j t^{\lambda_j})]$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots < \lambda_m < \gamma$. Покажем, что этот случай можно привести к предыдущему. Ради простоты без ограничения общности рассмотрим случай, когда $\alpha = 1$, $g_0(t) \equiv 1$, т. е. интеграл

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \int_L \exp \left[-zt - \mu t^{-\gamma} \left(1 + \sum_{j=1}^m d_j t^{\lambda_j} \right) \right] h_0(t) dt = \\ &= \left(\frac{\mu \gamma}{z} \right)^{1/(1+\gamma)} \int_{L^*} \exp \left[-cz^\beta (u + (1/\gamma u^\gamma)) - \frac{c}{\gamma} z^\beta \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{j=1}^m d_j c^{\lambda_j} z^{-\frac{\lambda_j \beta}{\gamma}} u^{-\gamma + \lambda_j} \right] h_0(cz^{-\beta/\gamma} u) du. \end{aligned} \quad (21.97)$$

Интеграл (21.97) является небольшой модификацией интеграла (21.83), так как функция g_0 в (21.83) содержит в разложении натуральные степени от $u^{1/\alpha}$, а в (21.97) показатели степени отрицательны. Если расщепленные седловые точки являются единственными критическими точками для интеграла (21.97), то путь следует деформировать через одну или несколько таких точек. Но на этом пути упомянутое отличие между (21.97) и (21.83) не имеет значения. Поэтому можно непосредственно использовать теорию, изложенную в п. 21.4.2. При этом всегда будем иметь либо случай 2° (при $\lambda_1 \geq \gamma/2$), либо случай 3° (при $\lambda_1 < \gamma/2$). Интеграл (21.97) при $h_0(t) = t^\alpha$ исследован в [229].

21.5. Примеры расщепления критической точки

21.5.1. Поскольку при расщеплении критической точки основное значение имеет ядро $\exp \left[-cz^\beta \left(u + \frac{1}{\mu u^\alpha} \right) \right]$, то рассмотрим вначале интегралы с этим ядром, хотя в данном случае можно непосредственно использовать результаты, изложенные в § 12

и 19. Сначала рассмотрим некоторую модификацию интеграла (12.71):

$$F_{\gamma}(y, z) = \int_y^{+\infty} t^{\nu} \exp[-\alpha t^{\mu} - \beta z t^{-\nu}] dt, \quad (21.98)$$

где $y \geq 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$. Родственный интеграл впервые исследовал Факсен [71]. Поэтому (21.98) назовем *интегралом Факсена*. Это название исторически более оправдано, чем такое же название для интеграла (18.133) (см. п. 18.6.3). В случае необходимости параметры α , β , μ , ν можно включить в качестве аргументов.

1°. При $y > 0$ интеграл существует для всех βz . Интегрированием по частям получаем соотношение

$$F_{\gamma}(y, z) = -y^{\nu+\nu+1} \frac{1}{\nu\beta z} \exp[-\alpha y^{\mu} - \beta z y^{-\nu}] + \\ + (1/\nu\beta z) [\alpha \mu F_{\gamma+\mu+\nu}(y, z) - (\gamma + \nu + 1) F_{\gamma+\nu}(y, z)],$$

откуда при $z \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \beta z \leq 0$ следует

$$F_{\gamma}(y, z) \sim \exp[-\alpha y^{\mu} - \beta z y^{-\nu}] \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y) (\nu\beta)^{-k-1} z^{-k-1}. \quad (21.99)$$

При $\operatorname{Re} \beta z > 0$ оценка остатка ряда (21.99) не имеет требуемого порядка, поэтому подстановкой $t^{-\nu} = u(\alpha/\beta z \kappa)^{\kappa/(1+\kappa)}$, $\kappa = \nu/\mu$, преобразуем интеграл к виду

$$\frac{1}{\nu} (\beta z \kappa / \alpha)^{\frac{\gamma+1}{\nu+\mu}} \times \\ \times \int_0^{y^{-\nu} (\beta z \kappa)^{\kappa/(1+\kappa)}} u^{-1-\lambda} \exp[-b(\beta z)^{1+\kappa} (u + \kappa u^{-1/\kappa})] du,$$

$b = (\alpha/\kappa)^{\kappa/(\kappa+1)}$, $\lambda = (\gamma+1)/\nu$. Поскольку $\left| \arg \left(\frac{\beta z \kappa}{\alpha} \right)^{\kappa/(\kappa+1)} \right| < \pi$ при $|\arg \alpha| < \pi/2$, $|\arg \beta z| < \pi/2 - \epsilon$, то луч, на котором находится путь интегрирования, лежит на основном листе римановой поверхности. Интеграл сходится, если в качестве пути брать весь луч, и оба интеграла имеют одинаковые асимптотические разложения. Так как при $\eta \in [0, 1]$ имеем неравенство

$$\left| \frac{\kappa}{1+\kappa} (1-\eta) \arg \alpha + \frac{1}{1+\kappa} (\kappa\eta + 1) \arg(\beta z) \right| < \frac{\pi}{2} - \epsilon_1,$$

то путь последнего интеграла можно повернуть на действительную ось и получить

$$\frac{1}{v} \left(\frac{\beta z \kappa}{\alpha} \right)^{\frac{\gamma+1}{v+\mu}} \int_0^{+\infty} u^{-\lambda-1} \exp \left[-b (\beta z)^{\frac{1}{1+\kappa}} (u + \kappa u^{-1/\kappa}) \right] du. \quad (21.100)$$

Для интеграла (21.100) имеем карту, показанную на рис. 28, только вследствие знака «-» роли долин и гор взаимно меняются. Путь интегрирования состоит из двух ЛНС, исходящих из точки перевала $u=1$. Поэтому с соответствующими изменениями при $z \rightarrow \infty$, $|\arg \beta z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ следует применить формулу (12.80), т. е.

$$F_\gamma(y, z) \sim \frac{1}{v} \left(\frac{\beta z \kappa}{\alpha} \right)^{\frac{\gamma+1}{v+\mu}} \exp \left[-(1+\kappa) b (\beta z)^{1/(1+\kappa)} \right] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma(k+1/2) [b (\beta z)^{1/(1+\kappa)}]^{-k-1/2}, \quad (21.101)$$

где a_k можно найти, пользуясь (12.75) и (12.79), $a_0 = 2 \sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}}$.

2°. При $y=0$ интеграл (21.98) сходится, если $\operatorname{Re} \beta z \geq 0$. Пусть $\operatorname{Re} \beta \geq 0$. Тогда при $\arg z = 0$ подстановкой $t^\mu = \left(\frac{\kappa \beta z}{\alpha} \right)^{1/(1+\kappa)}$ и получаем

$$F_\gamma(0, z) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\kappa \mu z}{\alpha} \right)^{\frac{1+\gamma}{\mu+\nu}} \int_0^{+\infty} u^{\lambda-1} \exp \left[-c z^{1/(1+\kappa)} \left(u + \frac{1}{\kappa} u^{-\kappa} \right) \right] du, \quad (21.102)$$

где $c = (\kappa \beta \alpha^\kappa)^{1/(1+\kappa)}$. Интеграл (21.102) — многозначная функция от z . Поэтому следует выделить главное значение, взяв $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$. При этом условии соотношение (21.102) согласно принципу аналитического продолжения сохраняется для всех z , для которых интеграл сходится, т. е. $|\arg c z^{1/(1+\kappa)}| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Далее с соответствующими изменениями применяем формулу (21.101) и при $z \rightarrow \infty$ имеем разложение

$$F_\nu(0, z) \sim \mu^{-1} \left(\frac{\kappa \mu z}{\alpha} \right)^{\frac{1+\nu}{\mu+\nu}} \exp \left[-cz^{1/(1+\kappa)} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* \Gamma \left(k + \frac{1}{2} \right) \left(cz^{1+\kappa} \right)^{-k - \frac{1}{2}}, \quad (21.103)$$

где a_k^* вычисляется таким же образом, как a_k в (21.101),

$$a_0^* = 2 \sqrt{\frac{2}{1+\kappa}}.$$

Если в (21.89) lv заменить на $h(z, t)$, то метод разложения при $\operatorname{Re} \beta z > 0$ останется таким же, только вычисление коэффициентов разложения станет более сложным.

21.5.2. Рассмотрим при $\kappa > 0$ и любом фиксированном β интеграл

$$I_{\beta^\kappa}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp(t + zt^{-\kappa}) t^{-\beta-1} dt, \quad (21.104)$$

который назовем *функцией Бесселя—Райта*, так как $I_{\beta^1}(z) = z^{-\beta/2} I_\beta(2\sqrt{z})$, а общая функция $I_{\beta^\kappa}(z)$ исследована в работах Райта [226—228]. Интеграл (21.104) определяет целую функцию. Если $\exp(z t^{-\kappa})$ разложить в степенной ряд и интегрировать почленно, то с учетом (12.30) получаем

$$I_{\beta^\kappa}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / (k! \Gamma(k\kappa + \beta + 1)). \quad (21.105)$$

Пусть $\arg z = 0$. Подстановкой $t = (z\kappa)^{1/(1+\kappa)} u = \zeta u$ получаем

$$I_{\beta^\kappa}(z) = \zeta^{-\beta} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp \left[\zeta \left(u + \frac{1}{\kappa u^\kappa} \right) \right] u^{-\beta-1} du. \quad (21.106)$$

Соотношение (21.106) согласно принципу аналитического продолжения сохраняет силу, если $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ и $|\arg z| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (\kappa + 1)$. Карта для функции $-\operatorname{Re}(u + u^{-\kappa}/\kappa)$ показана на рис. 28, а—е. ОЛУ задана уравнением $\rho^{\kappa+1} \cos \psi + (1/\kappa) \cos \kappa \psi = \rho^\kappa (1 + 1/\kappa)$, $u = \rho e^{i\psi}$. Кривые имеют асимптоту $\rho \cos \psi = 1 + 1/\kappa$. Точка возврата находится на разрезе при $\kappa < 1/2$, а другие петли появляются при $\kappa > 3/2$. Рисунки даны

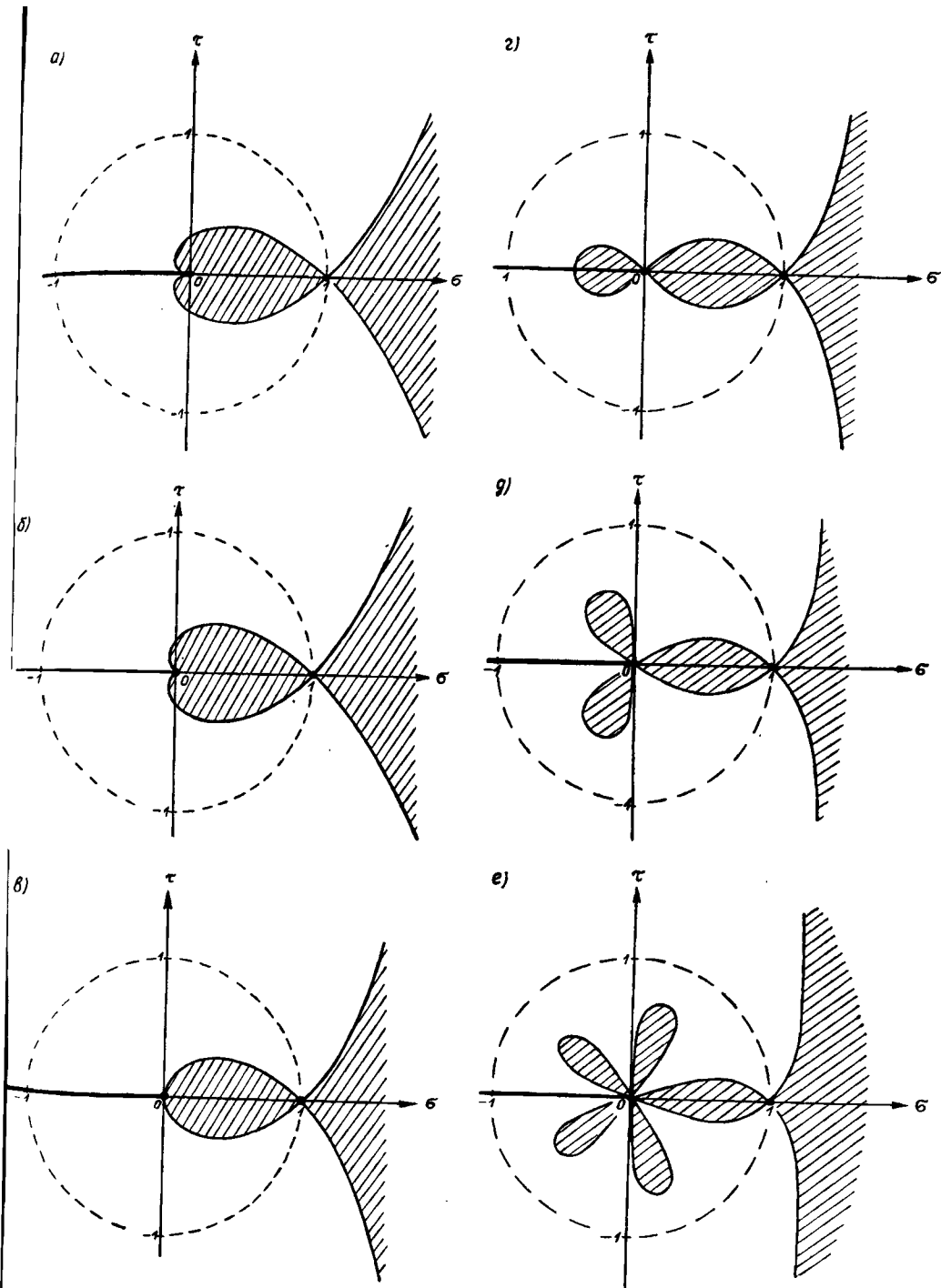


Рис. 28

при $\kappa=1/4, 1/2, 1, 2, 3, 5$. Из них видно, что при указанных значениях $\arg z$ достаточно использовать лишь критическую точку $u_0=1$. В качестве основной берем долину в нижней полуплоскости.

Условие (19.10) удовлетворено при $|\arg \zeta| \leq \pi - \varepsilon$ и $a_0 = e^{i\pi} \frac{\kappa+1}{2}$. Поскольку $g_1(1)=0$, то можно непосредственно использовать формулу (19.35). Получаем при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \min \left[\pi - \varepsilon, \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) (\kappa+1) \right]$

$$I_{\beta^{\kappa}}(z) \sim \frac{1}{\pi \sqrt{2(\kappa+1)}} \zeta^{-\beta-1/2} \exp \left[\zeta \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \right] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^k C(2k) \zeta^{-k}, \quad (21.107)$$

$$C(2k) = \int_0^{\infty} e^{-\omega} Q_{2k}(\omega) \omega^{k-1/2} d\omega, \quad Q_k = \sum_{j=0}^k \binom{-\beta-1}{j} B_{k-j}(\omega),$$

а $B_k(\omega)$ определяется по (19.30) при $D_k = \frac{(-1)^k 2}{(k+1)(k+2)} \times \times \binom{\kappa+k+1}{k}$; $C(0) = \sqrt{\pi}$, $C(2) = 1/4 \sqrt{\pi} [(\kappa+2)(2\kappa/3 + \beta + 31/12) + (\beta+1)(\beta+2)]$. Разложение (21.107) можно получить также по теореме 19.1 и пользоваться коэффициентами a_k^* , как в формулах (21.101) и (21.103). В п. 23.4.2, 3° установлена связь между $F_{\nu}(0, z)$ и $I_{\beta^{\kappa}}(z)$, которая одновременно дает соотношение между $C(2k)$ и a_k^* .

Если $\kappa \geq 1$, то (21.107) имеет место при $|\arg z| \leq \pi - \eta$. Чтобы получить разложение при $\kappa \geq 1$, $|\arg z| \in (\pi - \eta, \pi]$ и $\kappa < 1$, $|\arg z| \geq \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) (\kappa+1) > \frac{\pi}{2}$, применим метод поворота (см. п. 19.5.3, 3°): заменим в (21.104) z на $ze^{-i\pi}$ при $\arg z \in [0, \pi]$ и на $ze^{i\pi}$ при $\arg z \in [-\pi, 0]$. Независимо от величины κ достаточно рассматривать $|\arg z| \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. Применяя прежнюю подстановку, получаем

$$J_{\beta^{\kappa}}(z) \equiv I_{\beta^{\kappa}}(ze^{\pm i\pi}) = \zeta^{-\beta} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp \left[\zeta \left(u - \frac{1}{\kappa u^{\kappa}} \right) \right] u^{-\beta-1} du, \quad (21.108)$$

т. е. второй канонический интеграл. Основными седловыми точ-

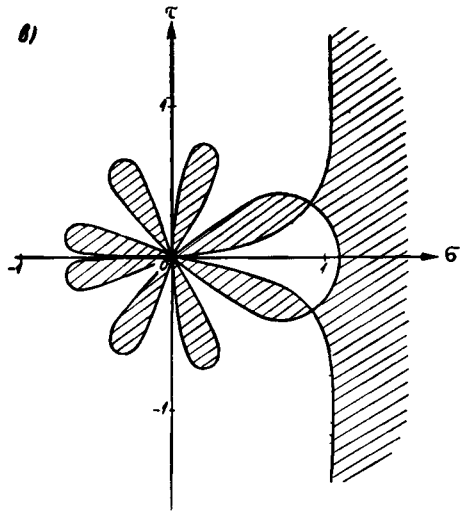
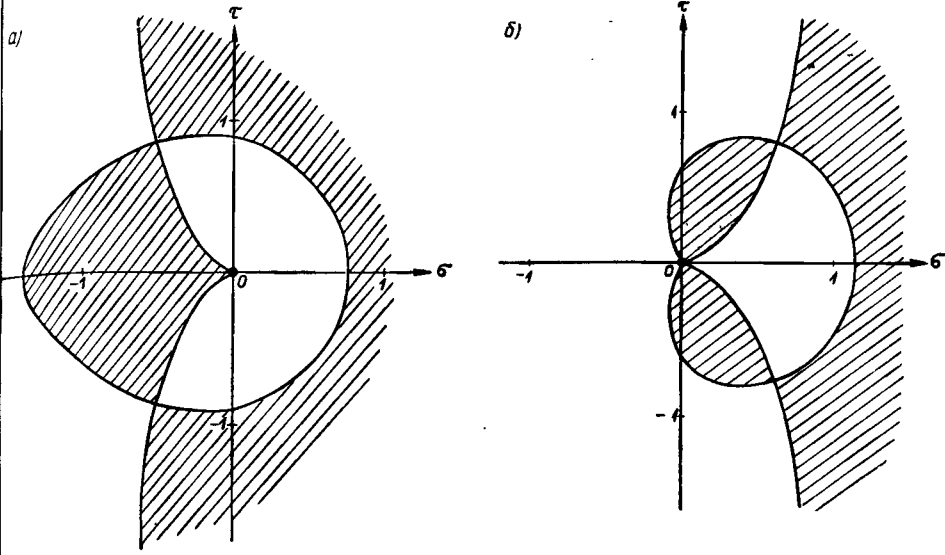


Рис. 29

ками являются $u_{\pm 1}^* = \exp\left(\pm \frac{i\pi}{\kappa+1}\right)$, которые расположены на одинаковой высоте. Поэтому следует строить разложение относительно каждой из них. Карта для функции $-\operatorname{Re}(u - u^{-\kappa}/\kappa)$ показана на рис. 29, $a-v$. Уравнение для ОЛУ имеет вид $\rho^{\kappa+1} \cos \psi - (1/\kappa) \cos \kappa\psi = \rho^{\kappa} \cos\left(\frac{\pi}{\kappa+1}\right)\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)$. Рисунки даны при $\kappa = 1/2, 5/2, 15/2$. Разложение для (21.108) справедливо при $|\arg \zeta| \leq \pi - \varepsilon$. В дальнейшем ходе разложения можно использовать (21.107). Поскольку функции $u^{-\beta-1}$ и $u - u^{-\kappa}/\kappa$ следует разложить по степеням $u - u_{\pm 1}^*$, то к прежнему $C(2k)$ согласно (19.33) надо добавить множитель $(u_{\pm 1}^*)^{-k-\beta-1/2}$. Поэтому и в (21.107) ζ заменяется на $\zeta \exp(\pm i\pi/\kappa+1)$, и при $z \rightarrow \infty$ получаем разложение

$$\begin{aligned}
 J_{\beta}^{\kappa}(z) &\sim 1/(\pi\sqrt{2(\kappa+1)}) \left\{ \exp[(z\kappa e^{i\pi})^{1/(1+\kappa)}(1+1/\kappa)] \times \right. \\
 &\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2/(\kappa+1))^k C(2k) (z\kappa e^{i\pi})^{-\frac{1}{1+\kappa}(k+\beta+1/2)} + \\
 &+ \exp\left[(z\kappa e^{-i\pi})^{\frac{1}{1+\kappa}} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \right] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^k C(2k) \times \\
 &\left. \times (z\kappa e^{-i\pi})^{-\frac{1}{1+\kappa}(k+\beta+1/2)} \right\}. \quad (21.109)
 \end{aligned}$$

При тех значениях $\arg z$, при которых справедливо (21.107), разложение можно получить также из (21.109), так как определяющим в (21.109) является только один из рядов. Поэтому (21.109) имеет место при $|\arg z| \in [0, \pi]$. Но тогда из (21.109) следует, что (21.107) справедливо при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ независимо от значения κ . Если $\kappa=1$, то получаем разложение для $z^{-\beta/2} J_{\beta}(2\sqrt{z})$ и совпадение с (10.64).

Замена $t^{-\beta-1}$ на $h(z, t)$ в (21.104) не вызывает новых принципиальных затруднений. Это рассмотрено в [377]. Однако иногда можно применять также другой прием. Имеем $h(z, t) = h(z, u(z\kappa)^{1/(1+\kappa)})$. При $z \rightarrow \infty$ и $u \sim u_k$ второй аргумент функции $h(z, t)$ стремится к ∞ , поэтому целесообразно использовать асимптотику этой функции. Если при некоторых $\arg z$ и $u \sim u_k$ имеем

$$h\left(z, u(z\kappa)^{\frac{1}{1+\kappa}}\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z) u^{-\lambda_k}(z\kappa)^{-\frac{\lambda_k}{1+\kappa}}, \quad \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (21.110)$$

то это разложение можно подставить под знак интеграла и непосредственно строить разложение по функциям $I_{\lambda_k-1}^{\kappa}(z)$, которые согласно (21.109) образуют шкалу.

В [378] при $z \rightarrow \infty$ исследован

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\lambda-1} J_{\mu s-1}^{\mu}(zt) dt.$$

21.5.3. Примеры из п. 21.5.1 и 21.5.2 достаточно хорошо характеризуют случай, когда $m > \gamma/2$. Рассмотрим еще пример, когда $m < \gamma/2$:

$$\Omega(z, j) = \int_{L_j} \exp[-zt^2(1-2t/3+t^2/4) - \mu t^{-4}] t^{\lambda} dt, \quad (21.111)$$

где λ — комплексное число; $\mu > 0$; L_1 — такая же кривая, как в (21.104); L_2 — действительная ось, причем при $t < 0$ $\arg t = \pi$; L_3 находится в 1-й четверти, асимптотически приближается к осям и направлена сверху вниз. Поскольку $\alpha = 2$, $m = 1$, $\gamma = 4$, $\beta = 2/3$, $m < \gamma/3$, то имеем случай, когда u_k не является достаточно точным приближением для точки перевала и его приходится уточнить, если путь деформируем через u_k . В случае кривой L_3 путь следует деформировать через седловую точку $1+i$ функции $g(t) = t^2(1-2t/3+t^2/4)$, поэтому всякая подстановка будет лишней.

Подстановка (21.82) не является целесообразной для интеграла по L_1 , так как L_1 отображается на кривую L_1^* , лежащую на двух листах римановой поверхности. Поэтому применим подстановку (21.85), которая удобна также для интеграла по L_2 . При $\arg z = 0$ получаем

$$\Omega(z, j) = 1/2 \left(\frac{2\mu}{z} \right)^{\frac{\lambda+1}{6}} \int_{L_j} \exp \left[-c^2 z^{\frac{2}{3}} \left(u^2 + \frac{1}{2} u^{-4} - \frac{2}{3} c z^{-\frac{1}{6}} u^3 + \frac{1}{4} c^2 z^{-\frac{1}{3}} u^4 \right) \right] u^{\lambda} du, \quad (21.112)$$

где $c = (2\mu)^{1/6}$. Согласно принципу перманентности интеграл (21.112) совпадает с $\Omega(z, j)$, $j = 1, 2$, при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$. Для разложения $\Omega(z, j)$ можно использовать формулу (21.93), в которой u_k следует заменить на u_k^{**} и

$$G_0^*(z, u) = -c^2 z^{2/3} (u^2 + (1/2) u^{-4} - (2/3) c z^{-1/6} u^3 + (1/4) c^2 z^{-1/3} u^4). \quad (21.113)$$

При построении карты в основу можно положить приближен-

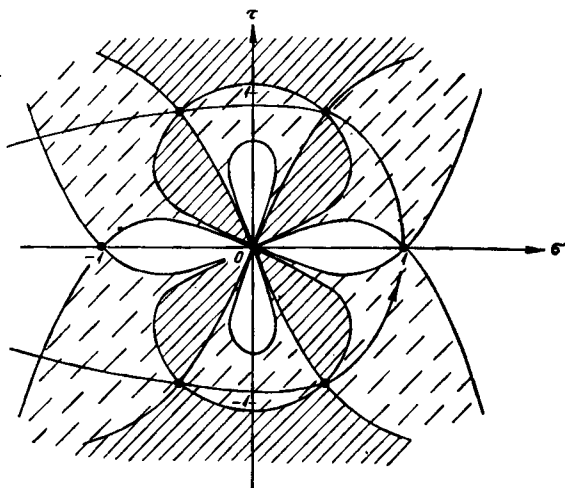


Рис. 30

ные седловые точки $u_{\pm k} = \exp\left(\pm \frac{i\pi k}{3}\right)$. Карта, приведенная на рис. 30, показывает, что для интеграла $\Omega(z, 1)$ путь приходится деформировать через точки $u_{\pm 2}^{**}$ и $u_{\pm 1}^{**}$. Путь для интеграла $\Omega(z, 2)$ идет вдоль действительной оси через критические точки $u_3^{**} \approx -1$ и $u_0^{**} \approx 1$.

Уточненную критическую точку u_k^{**} методом неопределенных коэффициентов можно найти из уравнения $u^6 - 1 - cu^7x + c^2u^8x^2/2 = 0$, $x = z^{-1/6}$, в виде $u_k^{**} = u_k \left(1 + \sum_{h=1}^{m_1} d_h x^h\right)$. Имеем $d_1 = (1/6)cu_k$, $d_2 = (1/24)c^2u_k^2$, $d_3 = (5/324)c^3$. Число m_1 выбираем так, чтобы $G_1^{*2}(z, u_k^{**})/G_2^*(z, u_k^{**}) = \mathcal{O}(1)$. Легко видеть, что $m_1 = 1$ и $u_k^{**} = u_k \left(1 + (1/6)cu_k z^{-1/6}\right)$. Тогда

$$G_1^{*2}(z, u_k^{**})/G_2^*(z, u_k^{**}) = -c^6/48[1 + \mathcal{O}(z^{-1/6})].$$

Полученные выражения следует подставить в (21.93). Для $\Omega(z, 1)$ получаем разложение $\Omega_{-2}(z) + \Omega_{-1}(z) + \Omega_1(z) + \Omega_2(z)$, а $\Omega(z, 2) \sim \Omega_3(z) + \Omega_0(z)$. Если вместо L_2 брать путь, идущий от $-\infty$ до $+\infty$ над действительной осью, то такой путь надо деформировать через седловые точки u_2^{**} и u_1^{**} . Но его нельзя деформировать в L_2 , так как существенно особую точку $u=0$ следует обойти по дуге полуокружности, интеграл по которой не стремится к нулю, если радиус окружности стремится к нулю.

Разложение для $\Omega(z, 3)$ найдем, деформируя путь через точку $t_0 = 1 + i$. Основной будем считать верхнюю долину (рис. 31), и

$a_0 = \sqrt{2}e^{\frac{-i5\pi}{4}}$. Тогда согласно (19.35) получаем

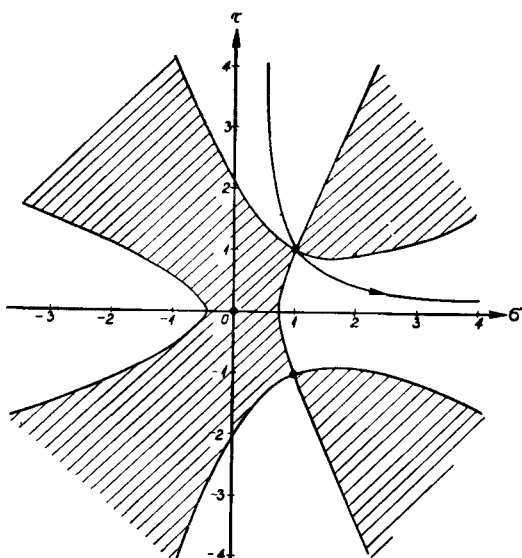


Рис. 31

$$\Omega(z, 3) \sim \exp[-1/3(1+2i)z] \sum_{k=0}^{\infty} C^*(2k) z^{-k-1/2}, \quad (21.114)$$

$$C^*(0) = \sqrt{\pi} 2^{\lambda/2-1/4} \exp[\mu/4 + i\pi(\lambda/4 - 3/8)].$$

Учитывая направления асимптот для ОЛУ, имеющие наклоны $\pi/8$ и $3\pi/8$ (рис. 31), поворотом пути интегрирования можно $\Omega(z, 3)$ аналитически продолжить и показать, что (21.144) справедливо при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$.

21.6. Случаи более общих ядер

21.6.1. Полученные в п. 21.4 результаты можно перенести на интеграл

$$\int_L K(zg(t)) h(t) dt, \quad (21.115)$$

если при $\tau \in S[0, \alpha, \beta]$

$$K(\tau) = A \exp(-c\tau^\kappa) H(\tau), \quad (21.116)$$

где $\kappa > 0$, $A \neq 0$, $H(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ имеет степенную асимптотику

и может иметь конечное число конечных особых точек, а $h(t)$ и $g(t)$ при $t \rightarrow 0$ имеют вид (21.81).

1°. Пусть в (21.81) $\alpha = 0$. Тогда $g(0) = a_0$ и в окрестности $t = 0$ для $K(zg(t))$ можно применить выражение (21.116) и перераспределить множители для ядра и функции нагрузки. Пусть $a_0 = 1$. Берем

$$K^*(z, t) = \exp[-cz^*g^*(t) - \mu t^{-\nu}], \quad h^*(z, t) = At^{\lambda}h_0(t)H(zg(t)). \quad (21.117)$$

К интегралу с новым ядром и функцией нагрузки применим метод расщепления критической точки, как в п. 21.4. Имеем $g^*(t) = 1 + O(t)$. Поэтому сначала следует отделить множитель $\exp(-cz^*)$. После этого применим подстановку (21.82). В окрестности критических точек u_k аргумент функции g в выражении $H\left[zg\left(\left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z}\right)^{1/(\alpha+\nu)} u^{1/\alpha}\right)\right]$ при больших $|z|$ близок к нулю. Так

как $g(0) = 1$, то при $z \rightarrow \infty$ функция H в этой окрестности имеет большой по модулю аргумент. Поэтому можно применить асимптотическое разложение для $H(\tau)$.

2°. Пусть в (21.81) $\alpha > 0$. Отличие от случая 1° заключается в том, что в силу $g(0) = 0$ при больших $|z|$ особые точки функции $H(zg)$ сгущаются в малой окрестности точки $\tau = 0$. Однако после подстановки (21.82) в силу (21.81) имеем

$$zg\left(\left(\frac{\mu\gamma}{\alpha z}\right)^{1/(\alpha+\nu)} u^{1/\alpha}\right) = cz^{\nu/(\alpha+\nu)}u(1 + o(1)).$$

Модуль аргумента функции H в окрестности критических точек u_k стремится к бесконечности. Поэтому асимптотическое разложение вкладов от расщепленных критических точек можно строить так же, как в п. 1°.

Пример к случаю 2°

$$\Omega(x) = \int_0^1 \exp(-xt + it^{-2})[a + (xt)^{\alpha}]^{-1} t^{\lambda} dt,$$

$\alpha > 0, \lambda > 0, a > 0$, при $x \rightarrow \infty$ приведен в [24].

21.6.2. Иногда рассмотренная в § 21 теория применима к интегралу

$$\Omega(z) = \int_L K(z^{\lambda}g(z, t))h(z, t)dt, \quad (21.118)$$

если $K(\tau)$ представимо в виде (21.116). К критическим точкам, перечисленным в начале п. 21.1.1, следует добавить точки, в которых $g(z, t) = 0$. В данном случае также целесообразно с помощью соответствующих подстановок привести переменные критические точки к постоянным или почти постоянным. Далее можно попытаться применить соотношение (21.116) и теоремы 21.1—21.5 или некоторые их модификации, если главную часть в ряду Тейлора для $g(z, t)$ в окрестности критической точки составляет группа других членов. Некоторые более подробные соображения относительно интеграла (21.118) с применением градиентных линий приведены в [24].

Имеются частные случаи, когда разложение подобных интегралов можно построить непосредственным интегрированием по частям. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\Omega(z) = \int_0^a J_\nu(t^2 + itz) h(t) dt, \quad \nu > -1, \quad (21.119)$$

где a — фиксированное комплексное число или функция от z , $a \neq 0$, $h(t)$ аналитична на отрезке от 0 до a . Исключим случай, когда на пути интегрирования находится точка $t = -iz$. Это допущение при достаточно большом $|z|$, безусловно, имеет место, когда $|a|$ ограничено. Применим формулу $\int t^{\nu+1} J_\nu(t) dt = t^{\nu+1} J_{\nu+1}(t)$ и интегрируем в (21.119) по частям. При обозначениях

$$h_0(z, t) = (t^2 + itz)^{-\nu-1} (2t + iz)^{-1} h(t),$$

$$h_{k+1}(z, t) = (t^2 + itz)^{-1} (2t + iz)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} h_k(z, t), \quad k \in N, \quad (21.120)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Omega(z) = & \sum_{k=1}^n (a^2 + iaz)^{\nu+k} J_{\nu+k}(a^2 + iaz) h_{k-1}(z, a) + \\ & + \int_0^a (t^2 + itz)^{\nu+n} J_{\nu+n}(t^2 + itz) \frac{\partial}{\partial t} h_{n-1}(z, t) dt. \end{aligned} \quad (21.121)$$

Из (21.120) следует, что

$$h_k(z, t) = (t^2 + itz)^{-\nu-2k-1} (2t + iz)^{-k} H_k(z, t),$$

где $H_k(z, t)$ — ограниченная функция, если $|a|$ остается ограниченным. Отсюда видно, что члены в сумме (21.121) образуют

шкалу, если $\text{Im}(a^2 + iaz) \neq 0$. При оценке остатка используем неравенство

$$|J_\nu(z)| < \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} |z|^\nu \exp(|\text{Im } z|), \quad (21.122)$$

которое следует из формулы Пуассона (10.58). Тогда при $z = re^{i\varphi}$, $t = \rho e^{i\psi}$ получаем

$$|R_n(z)| < M |z|^{-n+1+\nu} \int_0^{|a|} \rho^\nu \exp(\rho^2 |\sin 2\psi|) \exp(\rho r |\cos(\varphi + \psi)|) d\rho.$$

Отсюда согласно (16.93)

$$R_n(z) = \begin{cases} \tilde{O}(|z|^{-n+\nu} \exp(r|a \cos(\varphi + \psi)|)) & \text{при } \varphi + \psi \neq \frac{\pi}{2}(1+2k), \\ \tilde{O}(|z|^{-n+1+\nu}) & \text{при } \varphi + \psi = \frac{\pi}{2}(1+2k), \quad k \in N. \end{cases}$$

Полученная оценка вместе с (10.59) свидетельствует о том, что в (21.121) при $z \rightarrow \infty$ имеем асимптотическое разложение, причем при $\text{Im}(a^2 + iaz) = 0$ оно является сильноасимптотическим.

Иногда можно применять также почленное интегрирование, но не всегда этим методом получаем сильноасимптотическое разложение. В качестве примера к такому случаю рассмотрим при $x \rightarrow +\infty$ интеграл

$$\Omega(x) = x^{-1/3} \text{Ai}(\alpha x^{2/3}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ix(t^3/3 + \alpha t)] dt, \quad \alpha > 0. \quad (21.123)$$

Легко убедиться в том, что путь интегрирования можно деформировать в прямую $\text{Im } t = \beta$, $\beta > 0$. После этого подстановкой $t = \tau + i\beta$ получаем

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \frac{1}{2\pi} \exp[x(\beta^3/3 - \alpha\beta)] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x(\beta\tau^2 + i\tau(\beta^2 - \alpha))] \exp(ix\tau^3/3) d\tau. \end{aligned} \quad (21.124)$$

Поскольку модуль первого множителя в подынтегральном выражении в (21.124) принимает максимальное значение при $\tau = 0$, то можно попытаться разложить $\exp(ix\tau^3/3)$ в степенной

ряд и интегрировать почленно. С учетом интегрального представления для $H_n(z)$ получаем формальное разложение

$$\Omega(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta x}} \exp\left[\frac{x}{12\beta}(\beta^4 - 6\alpha\beta^2 - 3\alpha^2)\right] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(576\beta^3 x)^{k/2}} H_{3k}\left(\frac{\sqrt{x}(\alpha - \beta^2)}{2\sqrt{\beta}}\right), \quad (21.125)$$

которое в общем случае не является сильноасимптотическим. Однако при $\beta^2 = \alpha$ (21.125) дает классическое разложение, легко получаемое также из (19.72). Более глубокий анализ формулы (21.125) сделан в работе [174].

21.7. Библиографические сведения

21.7.1. Метод перевала является естественным обобщением метода Лапласа, однако это обобщение стало возможным лишь после того, как была создана общая теория функций комплексного переменного. Попытки Коши [181, 182] перенести метод Лапласа на комплексную плоскость и деформировать путь через точку перевала недостаточно обоснованы. В [181] можно найти следы идей Буркхарда и Фабера. В этой работе исследуются оценки коэффициентов ряда Лагранжа и интеграла (19.50). По мнению Буркхарда [52], Гаус, вероятно, тоже владел некоторым методом, обобщающим метод Лапласа в комплексной плоскости.

Идея метода перевала встречается в незаконченной работе Римана [210], где рассмотрена оценка интеграла $\int_0^1 t^{n+\alpha} (1-t)^{n+\beta} \times (1-wt)^{\nu-n} dt$ при больших n . По оставленным им наброскам в рукописи после смерти Римана эту работу закончил Шварц, который, очевидно, угадал мысли Римана. Комментарий Шварца к оставленным Риманом рисункам и формулам все же неполностью поясняет основную идею метода перевала. Шварц деформирует путь в окрестности точки перевала по касательной к ЛНС. Оценка погрешности не приведена. Подробнее эта работа рассмотрена в [7].

Деформирование пути интегрирования вдоль ЛНС через точку перевала в неясной форме встречается также в [191]. Метод перевала стал общеизвестным после появления работ Дебая [186, 187], в которых рассмотрено разложение интеграла, родственного (19.76). Автор этих работ отмечает, что только после окончания исследований ему стала известна работа Римана. Дебай подчеркивает значение седловых точек и деформирование

пути вдоль ЛНС. Им рассмотрен также случай, когда $v = x(1 \pm \varepsilon)$, отмеченный в п. 19.5.3, 4° В. Это исследование приведено в [5], где указана также библиография, посвященная асимптотике функции $J_\nu(\nu\alpha)$. Дебай не дает оценки остатка, но указывает, как его можно найти (см. п. 15.4.1). Это указание критикует Ватсон, который в [221] отмечает, что ему не удалось восстановить оценки остатка, не приведенные Дебайем.

В 1914 г. Буркхард [52] вместо подстановки $\omega = g_0(t)$, которой пользовался Дебай, предложил применять разложение для функции $e^{wG(t)}$. Хотя Буркхард ссылается на работу Дебая, сам метод перевала в его работе затронут мало. Этот метод изложен в работе Бриюзона [50], в которой впервые встречается название «метод перевала» (*méthode du col*). Однако в работе [50] также данный метод не обоснован. Это впервые в общей постановке дано в работе Перрона [123], в которой использован метод Буркхарда (теорема 19.3 в модифицированной форме). Как отмечено в п. 18.6.1, доказательство Перрона нельзя признать корректным.

Впоследствии были даны разные обоснования метода перевала, например в работах [4, 66]. Следует отметить также работы Ватсона [221, 222], в которых метод перевала применяется для разложения конкретных специальных функций. В [221] впервые появляется название «метод наискорейшего спуска» (*method of steepest descents*) как английский эквивалент термина «метод перевала». Интегрируя по ЛНС и применяя уравнение для ЛНС, Ватсон получил также тонкие оценки для функций $J_\nu(z)$ и $D_\nu(z)$. В настоящее время такое применение метода перевала мало известно.

Упомянутые авторы и также многие другие применяли интегрирование по ЛНС. Еще в работе [7] Копсон строго различал метод перевала и МНС. Фабер [70] первым отметил, что интегрирование по ЛНС необязательно. Целесообразность отказа от МНС убедительно показана в работе Ваймена [231], где в качестве пути интегрирования предлагается некоторая линия Лапласа. В этой работе рассматривается теорема 19.3, однако промежуток для $\arg z$ определяется только из условия (19.10). Теорема 19.1 в случае сходящихся рядов (19.8) и (19.9) при $\lambda_k = k + \lambda$, $\mu_k = \mu + k$ приведена в работах Ольвера [121, 206], где дано также условие (19.10). Результаты Ольвера приведены также в [98]. Кроме упомянутых работ метод перевала излагается во многих учебниках. В последнее время появились также работы, например [168, 203], в которых этот метод рассмотрен без существенных дополнений. Теорема 19.3 применима в разных конкретных случаях, например в [215].

Деформирование пути интегрирования для разложения интеграла (19.43) предлагал Пуанкаре в следующем виде [208]:

выбрать путь в той части плоскости, в которой $\operatorname{Re} g(t) > 0$, и провести его через точки, в которых $g'(t) = 0$. Однако никаких оценок и окончательных результатов в его работе не содержится.

21.7.2. Разложение интеграла (19.54) впервые дал Ватсон в [223]. Однако выражения для вычисления коэффициентов получились слишком сложными. Вывод разложения, подобный данному, приведен в [7]. Интеграл (19.67) ввел Эйри в 1838 г. в связи с исследованиями абберации лучей [176]. Функции $Ai_\nu(z)$ имеют большое значение при равномерном асимптотическом представлении многих специальных функций, зависящих от дополнительного параметра (см. [7, 121, 195]). Асимптотические разложения для Aiz исследованы в работах [7, 50, 121, 195, 206]. Однако впервые их при $z \rightarrow \pm \infty$ получил Стокс в [146]. В этой работе, рассмотрев дифференциальное уравнение $v'' = zv$, которому удовлетворяет Aiz , он замечает, что данную функцию можно выразить с помощью функций Бесселя. Однако впервые в явной форме это было сделано в работе [224], а потом в [201]. Обозначение Aiz введено в [194]. Формулы (19.71) и (19.71') приведены в [121]. Там же построены асимптотические разложения интегралов с ядрами $Ai(xt)$ и $Ai(-xt)$ при $x \rightarrow +\infty$. В работе [50] исследована асимптотика интеграла (19.67) в случае конечных пределов, а также интегралов $\int_L \exp[i(t^4 - xt)] dt$, $\int_L \exp[i(t^4 + ut^2 - xt)] dt$, но без достаточного обоснования.

Интеграл (19.76) для $J_\nu(\alpha\nu)$ имел большое значение для развития метода перевала, так как этот метод рассматривался Дебайем на примере интеграла, родственного (19.76). Большое значение для развития этого метода имел также интеграл (19.81), применяемый при исследовании движения небесных тел. Оценкой этого интеграла занимались многие математики XIX века (библиографию см. в [52]). На примере интеграла (19.81) Буркхард демонстрировал свой метод [52]. Этот интеграл исследовал также Перрон в [123]. Буркхард применял подстановку $e^{it} = v$, Перрон — непосредственное деформирование пути. Перрон исследовал также предельный случай, когда $\varepsilon = 1$ и кратная точка перевала одновременно является кратным полюсом. Оба метода рассмотрены в п. 19.5.4.

Разложение (19.87) первым получил Стилтъес [214], применив другое интегральное представление. Первый член разложения был найден уже Лапласом и Коши [181]. Библиография по асимптотике полиномов Лежандра дана в [166].

21.7.3. Теория интегралов вида (20.1) пока еще мало развита. Применение карты предлагается только в работах [178, 179]. В п. 20.1.1 из [178] заимствована только идея о карте. Остальные идеи в этой работе изложены недостаточно ясно. Интеграл (20.8) также рассмотрен в [178].

Градиентные линии для разложения интеграла (20.1) первым применил Цирулис в [21, 24]. Сведения о свойствах градиентных линий, изложенные в п. 20.3, с некоторыми изменениями заимствованы из этих работ. В упомянутых работах метод, по которому деформирование пути интегрирования производится по градиентным линиям, вместе с методами построения асимптотических разложений для асимптотических вкладов назван *методом градиентных линий*. При этом исключается случай, когда в разложении (20.2) $\gamma=0$. В работе [24] также рассмотрены интегралы (20.23) и (20.34) при $h(t)=t^\lambda$. Формула (20.28) приведена в [202], однако коэффициенты данного разложения методом неопределенных коэффициентов исследованы уже в [190].

Недостаточно разработана также теория интегралов (21.1). Первая формальная попытка применить формулы (21.2) и (21.57), как отмечено в п. 21.3.3, 2°, встречается в работе Никольсона [200]. Впоследствии этот метод неоднократно применялся в случае конкретных специальных функций. Исследование общего интеграла (21.1) начинается с упомянутой ранее работы Фабера [70]. Долгое время основные результаты этой работы оставались почти незамеченными. Встречаются редкие ссылки на данную работу (например, в [192]), хотя использование результатов Фабера заметно упростило бы оценки остатка во многих конкретных случаях. Например, в [196] почти повторяются выкладки Фабера (независимо от его работы) для построения некоторой модификации разложения (21.65). Их можно было использовать в работе [229], где рассмотрен интеграл (21.97), а также в [199]. Результаты по разложению интеграла (21.1) содержатся также в работах [47, 48, 189, 367]. Важность выделения группы доминирующих членов в правой части (21.2) подчеркнута в [69], где даны некоторые модификации теоремы 21.4. Содержание п. 21.1 и 21.2 изложено в [172].

История функции Hd_ν изложена в п. 18.6.3. Следует еще добавить, что при $|\arg x| > (1-\alpha)\pi/2$ интеграл (18.132) стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Барнс в работе [31] отмечает, что он долго пытался построить такую целую функцию, которая почти во всех направлениях стремится к нулю. Функция (18.132) соответствует этому требованию при значениях α , достаточно близких к единице. В [177] применяется интеграл (18.81) при $\alpha=3$.

Асимптотическое представление полиномов Эрмита $H_n(z)$ при большом индексе впервые получил Адамов [164]. Он нашел первый член в формуле (18.129) при $\nu=n$ и дал точную оценку остатка. Эта оценка улучшена в работе [219]. Дальнейшим исследованиям асимптотик $H_n(z)$ и $H_\nu(z)$ исходя из разных интегральных представлений посвящены работы [45, 70, 82, 185, 196, 207, 219, 222, 230]. В случае $\operatorname{sh} \gamma \sim 1$ разложения, отличные от (21.69), даны в [207, 230]. Исходя из дифференциального урав-

нения разные разложения получил Ольвер [205]. Главные члены разложений во всех случаях этим же методом получены в [213], а асимптотика для $H_{\nu-1}(z)$ дана в [376].

Метод расщепления критической точки впервые был применен в конкретных примерах. Одной из первых по этому вопросу была работа Райта [228], в которой исследована асимптотика функции Бесселя—Райта. Эта функция введена в других работах Райта [226, 227]. Однако главный член в формуле (21.107) при $z \rightarrow +\infty$ еще до Райта был приведен в работе Харди [82]. Свойства функции $J_{\lambda}^{\mu}(z)$ изучены многими авторами. Некоторые из этих свойств приведены в [1]. Появились также разные обобщения данной функции. Наиболее общей из этих функций [183] является

$$J_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{\mu_1, \dots, \mu_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!} \prod_{j=1}^n [\Gamma(\lambda_j + \mu_j k + 1)]^{-1}. \quad (21.126)$$

Эта функция при $\mu_j = 1$ рассмотрена в работе [188] и названа *гипербесселевой*. Это название сохраняется за функцией и при $\mu_j \neq 1$. Частный случай такой функции был рассмотрен уже в [193]. При $\mu_j = 1$ гипербесселева функция выражается с помощью ${}_0F_n$. Асимптотика функции (21.126) будет рассмотрена в третьем томе монографии. $J_{\nu}^{\mu}(z)$ в качестве функций шкалы применяются в работах [171, 226] (см. также п. 22.4.2). Асимптотика для $J_0^2(x^2)$ дана в [138]. Более сложный интеграл (21.97) исследован Райтом в [229]. Общая постановка вопроса о расщеплении критической точки для интеграла (21.80) дана Цирулисом в [24, 175].

Поведение интеграла (21.98) при $z \rightarrow 0$, $y \geq 0$ исследовано Факсеном в работе [71], который отмечает, что этот интеграл рассматривался ранее некоторыми физиками. Более простым путем разложение при $z \rightarrow 0$ интеграла (21.98) получено в [197]. При $z \rightarrow \infty$ исследованы частные случаи этого интеграла. Наиболее общие из них приведены в [198, 375]. В [198] указана также библиография, относящаяся к интегралу (21.98). Частично она указана в п. 15.4.1. В некоторых из этих работ использовано расщепление критической точки. Результаты работы [198] неполностью охватывают п. 21.5.1 и при $y=0$ получены с помощью дифференциального уравнения. Связь между интегралами (21.98) и (21.104) установлена в п. 23.4.2, 3°. Пример, подобный (21.111), рассмотрен в [24].

Теория относительно интегралов с более общими ядрами, подобная изложенной в п. 21.6, содержится в работе [24]. Асимптотическое выражение для интеграла, подобного (21.119), найдено в [24] с помощью градиентных линий.

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНТУРА С УЧЕТОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

§ 22. РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

22.1. Общие теоремы

22.1.1. Существует много практически важных интегралов с ядрами, не имеющими точек перевала, например e^{zt} , $z^t = e^{t \ln z}$, t^{-z} . Мы будем исследовать асимптотику более общего класса интегралов

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [K(t)]^2 h(t) dt \quad (22.1)$$

в случаях, когда $K'(t) \neq 0$ в рассматриваемой области и $K(t)$ в нем аналитична. Тогда критическими точками являются либо концы L , либо особые точки функции нагрузки $h(t)$. В следующих двух параграфах рассмотрим только случаи, когда единственными существенно критическими являются особые точки.

Чтобы получить асимптотическое разложение для $\Omega(z)$, контур L следует перенести через эти точки, если они однозначного характера, или деформировать в петли вокруг разрезов, проведенных из особых точек многозначного характера. Подробному исследованию этих деформаций пути посвящена данная глава, в которой также будут указаны важнейшие случаи применения полученных результатов. В первых двух параграфах рассмотрим интегралы типа обращения интегральных преобразований, а в последнем параграфе дадим некоторые дополнения ко всему предыдущему материалу и применения развитой теории. Все указанные задачи сводятся к исследованию асимптотики интеграла (22.1). К этому интегралу приводится также модификация метода перевала, рассмотренная в п. 19.4.2.

Направление, в котором следует деформировать путь, если особые точки для $h(t)$ расположены в разных направлениях, выбирается исходя из следующего общего соображения. Чтобы получить асимптотическое представление, остаток должен иметь требуемую оценку. Можно ожидать, что в случае интеграла

(22.1) такую оценку получим, если на новом контуре $\max |K(t)|$ будет меньше, чем на старом. Поэтому контур следует передвинуть в направлении, в котором $|K(t)|$ убывает. Например, в случае ядра e^{zt} при $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ контур надо сдвинуть влево, в случае ядра t^{-z} при $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ — расширить.

Далее будет рассмотрено деформирование контуров следующих двух основных видов: 1) поворачивается луч или неограниченная кривая передвигается примерно параллельно себе; возможно, что она при этом огибается вокруг разрезов; 2) либо замкнутый контур расширяется во всех направлениях (например, возрастает радиус окружности), либо расширяется только некоторая часть контура (например, передвигается одна сторона прямоугольника). Замкнутые контуры всегда будут ориентированы в положительном направлении обхода. Термины «*расширение через t_0* » и «*сдвиг через t_0* » контура впредь будут пониматься в только что указанном смысле.

Рассмотрим отдельно деформирование пути в случаях, когда особыми точками функции $h(t)$ являются: 1) полюсы; 2) точки ветвления; 3) существенно особые точки и трансцендентные точки ветвления.

22.1.2. Лемма 22.1. Пусть функция $K(t)$ аналитична в области D , содержащей ограниченные замкнутые контуры L и L_1 , а $h(t)$ имеет некоторые особые точки внутри L и особую точку t_0 однозначного характера, находящуюся между L и L_1 , $K(t_0) \neq 0$. Если L_1 получен расширением L через точку t_0 и

$$\max_{t \in L_1} |K(t)| = q |K(t_0)|, \quad q \in (0, 1), \quad (22.2)$$

то при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L [K(t)]^z h(t) dt = -\operatorname{res} \{ [K(t)]^z h(t); t_0 \} + O\{ [K(t_0)]^z q^z \}. \quad (22.3)$$

Доказательство леммы непосредственно следует из теоремы Коши о вычетах. Если t_0 — полюс m -го порядка, то $h(t)$ вблизи t_0 можно представить в виде $h(t) = H(t) (t - t_0)^{-m}$, где $H(t)$ аналитична в t_0 , и вычет будет вычисляться по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \{ [K(t)]^z h(t); t_0 \} &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} [(K(t))^z H(t)] = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \{ [K(t_0)]^z \}^{(j)} H^{(m-1-j)}(t_0) = \\ &= [K(t_0)]^z P_{m-1}(z). \end{aligned} \quad (22.4)$$

В случае, когда $P_m(z) \neq 0$, второй член в правой части (22.3) будет более высокого порядка, чем первый.

Если контуры L и L_1 неограниченны, причем L_1 получен из L сдвигом через t_0 , и на конечной части L_1 выполнено (22.2), то следует еще оценить интеграл по его оставшимся бесконечным частям. Обозначим одну из них через L_1' . Укажем условия, при которых остаток интеграла по L_1' имеет оценку $O([K(t_0)]^{\omega} z^{-N})$, для двух частных, но типичных случаев: 1) L_1' — часть вертикальной прямой; 2) L_1' — часть луча, на котором $|\arg t| \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Лемма 22.2. Если на пути L_j' : $t = \sigma + (-1)^j i\tau$, $\tau \in [\tau_0, \infty)$, $\tau_0 > 1$, $j = 1, 2$, имеют место оценки

$$|K(t)| \leq |K(t_0)| \tau^{-\alpha}, \quad \alpha > 0; \quad (22.5)$$

$$h(t) = O(\tau^\omega), \quad \omega \geq 0 \quad (22.6)$$

то при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

$$\int_{L_j'} [K(t)]^{\omega} h(t) dt = o([K(t_0)]^{\omega} z^{-N}). \quad (22.7)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $j = 2$.

При $\operatorname{Re} z \geq \frac{\omega + 1}{\alpha}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma + i\tau_0}^{\sigma + i\infty} [K(t)]^{\omega} h(t) dt \right| &\leq M |K(t_0)|^{\omega} \int_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-\alpha \operatorname{Re} z} \tau^{\omega} d\tau = \\ &= M |K(t_0)|^{\omega} \tau_0^{-(\alpha \operatorname{Re} z - \omega - 1)} (\alpha \operatorname{Re} z - \omega - 1)^{-1} = o([K(t_0)]^{\omega} z^{-N}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Лемма 22.3. Если на луче $L_0: t = re^{i\psi}$, $|\psi| \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $r \geq r_0 > 1$, имеют место оценки (22.5), (22.6), в которых τ заменено на r , или

$$|K(t)| \leq |K(t_0)| e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0; \quad (22.8)$$

$$|h(t)| = O(e^{\omega|t|}), \quad (22.9)$$

то при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ для интеграла по L_0 сохраняется оценка (22.7).

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 22.2. ■

Примечания. 1°. Если в лемме 22.1 между L и L_1 находится несколько особых точек однозначного характера, то в правой части (22.3) следуют писать сумму вычетов во всех особых точках. При этом может оказаться, что некоторые вычеты при $z \rightarrow \infty$ будут одинакового порядка и их следует объединить.

2°. Если имеем бесконечно много полюсов и они упорядочены так, что $|K(t)|$ в них монотонно убывает, а остаток при каждом фиксированном индексе имеет требуемую оценку, то деформирование контура приводит к асимптотическому разложению интеграла (22.1). Метод, по которому для построения асимптотического разложения используются вычеты, называется *методом вычетов*. Мы его уже использовали в п. 19.3.2 для построения разложения интеграла Фурье.

3°. Случай, когда полюс совпадает с критической точкой другого типа (концом пути или точкой перевала) или близок к ней, рассмотрены в § 19.

22.1.3. Пусть t_0 — точка ветвления алгебраического характера. Этот случай для интеграла Фурье рассмотрен в п. 19.3.2, где нами установлено, что интеграл по петле вокруг t_0 дает полное разложение и поэтому дальнейшие особые точки, в которых $|K(t)|$ меньше, дают вклады, входящие в любой остаток этого разложения и ими можно пренебречь. Укажем условия, при которых такое свойство сохраняется для общего интеграла (22.1), за исключением случаев, когда в разложении (22.10) имеем конечное число членов с дробными показателями степени. Этот метод построения асимптотического разложения назовем *методом точек ветвления*.

Допустим, что разрез направлен по лучу $\arg(t-t_0) = \gamma$ и фиксирована ветвь для $h(t)$ на верхнем берегу разреза. Окружность $|t-t_0| = \varepsilon$, концы которой находятся на верхнем и нижнем берегах, обозначим через L_ε и назовем *перерезанной окружностью*.

Лемма 22.4. Пусть 1) $K(t)$ аналитична в круге $|t-t_0| \leq \varepsilon$; 2) в этой окрестности точки t_0 имеет место разложение

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^{\lambda_k}, \quad \lambda_k \uparrow +\infty; \quad (22.10)$$

кроме точки t_0 $h(t)$ аналитична; 3) луч $K_\gamma: \arg(t-t_0) = \gamma$ является линией спуска для $\operatorname{Re} \ln K(t)$. Тогда при z , удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}[z \ln K(t_0)] > \operatorname{Re}[z \ln K(t_0 + \varepsilon e^{i\gamma})], \quad (22.11)$$

и $|z| \rightarrow \infty$ имеет место разложение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} [K(t)]^z h(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} [K(t)]^z (t-t_0)^{\lambda_k} dt. \quad (22.12)$$

Доказательство. K_γ является линией спуска, если на ней $|K(t)|$ монотонно убывает. Поэтому $K(t_0) \neq 0$. Докажем сначала, что интегралы

$$T(z, \lambda_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} [K(t)]^z (t-t_0)^{\lambda_k} dt \quad (22.13)$$

начиная с индекса, при котором $\lambda_k > -1$, образуют шкалу. При этом следует отбросить члены, в которых $\lambda_k \in \mathbb{N}$, так как тогда в силу аналитичности подынтегральной функции (22.13) равен нулю.

При $\lambda_k > -1$, $\lambda_k \notin \mathbb{N}$ L_ε можно деформировать по отрезкам вдоль верхнего и нижнего берегов. Применяя потом теорему 19.1, при $K'(t_0) \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{L_\varepsilon} [K(t)]^z (t-t_0)^{\lambda_k} dt &= e^{i\gamma(\lambda_k+1)} [e^{i2\pi(\lambda_k+1)} - 1] \times \\ &\times \int_0^\varepsilon \exp [z \ln K(t_0 + re^{i\gamma})] r^{\lambda_k} dr \asymp [K(t_0)]^z z^{-\lambda_k-1}, \end{aligned} \quad (22.14)$$

откуда следует утверждение. Если $K'(t_0) = 0$, то правая часть (22.14) несколько изменяется, но утверждение сохраняется. Поскольку n -й остаток ряда (22.10) имеет оценку $O[(t-t_0)^{\lambda_{n+1}}]$, то аналогично, как в (22.14), по теореме 16.1 для остатка ряда (22.12) получаем оценку $O(|K^z(t_0)| |z|^{-\lambda_{n+1}-1})$. ■

Примечание. Можно доказать свойство шкалы и для интегралов, в которых $\lambda_k < -1$, $|\lambda_k| \in \mathbb{N}$. В таком случае следует соответствующим образом модифицировать теорему 19.2, которая доказана в случае, когда t_0 — точка перевала для ядра, т. е. $K'(t_0) = 0$.

Рассмотрим конкретные $K(t)$, когда для функций шкалы можно найти явные асимптотически равные функции.

1°. Пусть $K(t) = e^t$, $\gamma = -\pi + \vartheta$, $|\vartheta| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда путь L_ε можно деформировать в бесконечную петлю вокруг разреза, до-

пуская при этом погрешность с оценкой $O(\exp[-\varepsilon z e^{i\theta} + z t_0])$. Согласно (12.30) при $|\arg z e^{i\theta}| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} e^{zt} (t-t_0)^\lambda dt = e^{zt_0} e^{i\gamma(\lambda+1)} \left[\int_{\infty}^{(0+)} e^{-z e^{i\theta} \tau} \tau^\lambda d\tau + \right. \\ & \left. + O(\exp(-\varepsilon z e^{i\theta})) \right] = e^{zt_0} \left[\frac{1}{\Gamma(-\lambda)} z^{-1-\lambda} + O(\exp(-\varepsilon z e^{i\theta})) \right] = \\ & = e^{zt_0} \left[-\frac{1}{\pi} \sin \lambda \pi \Gamma(\lambda+1) z^{-\lambda-1} + O(\exp(-\varepsilon z e^{i\theta})) \right]. \quad (22.15) \end{aligned}$$

Подставляя (22.15) в ряд (22.12), членом $O(\exp(-\varepsilon z e^{i\theta}))$ можно пренебречь. При $\lambda = -n$, $n \in \mathbb{N}$, подынтегральная функция однозначна и согласно теории вычетов имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} e^{zt} (t-t_0)^{-n} dt = e^{zt_0} t_0^{-n-1} / (n-1)!. \quad (22.15')$$

2°. Пусть $K(t) = t^{-z}$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$. Плоскость t разрезана по лучам $\arg(t-t_0) = \gamma$, $\arg t = \gamma \pm \pi$, $t_0 = r_0 e^{i\gamma}$, $\varepsilon < r_0$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} t^{-z} (t-t_0)^\lambda dt = t_0^{-z+\lambda+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\varepsilon_1}} (\tau+1)^{-z} \tau^\lambda d\tau, \quad (22.16)$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon/r_0$. В плоскости τ разрезы взяты вдоль лучей по интервалам $(-\infty, -1]$ и $[0, \infty)$. Аналогично, как в п. 1°, L_ε деформируем в петлю вокруг правого разреза. Этим допускается погрешность с оценкой $O[(1+\varepsilon_1)^{-z}] = o(z^{-N})$. При $\lambda > -1$ петлю можно деформировать по берегам разреза. Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} \frac{\tau^\lambda}{(1+\tau)^z} d\tau = \frac{e^{i\pi\lambda} \sin \pi\lambda}{\pi} B(\lambda+1, z-\lambda-1) = \\ & = e^{i\pi\lambda} \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \frac{\Gamma(\lambda+1) \Gamma(z-\lambda-1)}{\Gamma(z)} = -\frac{e^{i\pi\lambda}}{\Gamma(-\lambda)} \frac{\Gamma(z-\lambda-1)}{\Gamma(z)}. \quad (22.17) \end{aligned}$$

Согласно принципу аналитического продолжения соотношение (22.17) сохраняется при всех λ . Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} t^{-z} (t-t_0)^\lambda dt = t_0^{-z+\lambda+1} \left[e^{i\pi\lambda} \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(z-\lambda-1)}{\Gamma(z)} + o(z^{-N}) \right]. \quad (22.18)$$

Если функции (22.18) при $\lambda = \lambda_k \uparrow + \infty$ применить в качестве шкалы, то получим сильно неравномерную шкалу (см. п. 18.1.5). Иногда целесообразно согласно (12.62) и (9.49) применить разложение

$$\frac{\Gamma(z-\lambda-1)}{\Gamma(z)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1)_k}{k!} B_k^{(-\lambda)}(1) z^{-\lambda-k-1} \quad (22.19)$$

и перегруппировать члены, что в (22.12) дает разложение в степенной ряд.

22.1.4. Рассмотрим случай, когда t_0 — логарифмическая точка ветвления. Простейшую возможность получим, если к правой части (22.10) присоединим множитель $\ln^m(t-t_0)$, $m \in \mathbb{N}_1$.

Лемма 22.5. Пусть L_ε определен в п. 22.1.3. При любом $m \in \mathbb{N}_1$ имеет место формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} [K(t)]^z (t-t_0)^\lambda \ln^m(t-t_0) dt = \\ = \frac{d^m}{d\lambda^m} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} [K(t)]^z (t-t_0)^\lambda dt. \end{aligned} \quad (22.20)$$

Доказательство леммы следует из известной теоремы [167]: если 1) подынтегральная функция непрерывна по совокупности аргументов при $t \in L_\varepsilon$, $\lambda \in D_0$ и 2) она аналитична относительно $\lambda \in D_0$, то интеграл определяет аналитическую в D_0 функцию и его можно сколь угодно раз дифференцировать по λ под знаком интеграла. ■

Примечания. 1°. Если при построении асимптотически равной для (22.20) функции L_ε деформируем в бесконечную петлю вокруг разреза, то допущенная погрешность сохраняет ту же оценку, какую имеет интеграл без множителя $\ln^m(t-t_0)$, так как такой множитель при $|t-t_0| > \varepsilon$ мало влияет на поведение подынтегральной функции.

2°. Если $\lambda \in \mathbb{N}$ и интеграл (22.13) обращается в нуль, то сначала следует брать $\lambda \in \mathbb{N}$ и после дифференцирования перейти к пределу при $\lambda \rightarrow n \in \mathbb{N}$. Из (22.15) при $\lambda \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} e^{zt} (t-t_0)^\lambda \ln^m (t-t_0) dt = \\
& = -\frac{1}{\pi} e^{zt_0} z^{-\lambda-1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m}{j} (\ln z)^j \times \right. \\
& \times \sum_{l=0}^{m-j} \binom{m-j}{l} \sin \left[\left(\lambda + \frac{l}{2} \right) \pi \right] \pi^l \Gamma^{(m-j-l)}(\lambda+1) + o(z^{-N}) \left. \right].
\end{aligned} \tag{22.21}$$

При $\lambda = n \in N$ имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} e^{zt} (t-t_0)^n \ln^m (t-t_0) dt = (-1)^{n+1} e^{zt_0} z^{-n-1} \times \\
& \times \left[\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j} (\ln z)^j \sum_{l=0}^{\lfloor (m-j-1)/2 \rfloor} (-1)^l \binom{m-j}{2l+1} \pi^{2l} \times \right. \\
& \times \Gamma^{(m-j-2l-1)}(n+1) + o(z^{-N}) \left. \right].
\end{aligned} \tag{22.22}$$

При $\lambda = -n$, $n \in N_1$, заменим сначала в (22.15) λ на $-\lambda$. Получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} e^{zt} (t-t_0)^{-n} \ln^m (t-t_0) dt = \\
& = (-1)^m e^{zt_0} z^{n-1} \left[\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\ln z)^j \frac{d^{m-j}}{d\lambda^{m-j}} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \Big|_{\lambda=-n} + o(z^{-N}) \right].
\end{aligned} \tag{22.22'}$$

Объединяя результаты, для суммы, стоящей в квадратных скобках в формулах (22.21)–(22.22'), вводим общее обозначение $\Phi_{\lambda,m}(\ln z)$. Получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt} (t-t_0)^\lambda \ln^m (t-t_0) dt = e^{zt_0} z^{-\lambda-1} [\Phi_{\lambda,m}(\ln z) + o(z^{-N})]. \tag{22.23}$$

При $\lambda = n$, $m = 0$ $\Phi_{n,0}(\ln z) \equiv 0$.

3°. Аналогично можно дифференцировать в (22.18), но выражение получается более сложным. При $m = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} t^{-z} (t-t_0)^n \ln(t-t_0) dt = \\ & = t_0^{-z+n+1} \left[n! \frac{\Gamma(z-n-1)}{\Gamma(z)} + o(z^{-N}) \right]. \end{aligned} \quad (22.24)$$

Иногда имеем более сложный множитель $\ln^\mu(t-t_0)$, $\mu \in N$, или $G(\ln(t-t_0))$, где $G(\tau)$ при $\tau \rightarrow -\infty$ разлагается в асимптотический ряд по дробным степеням. Последний случай, очевидно, приводится к первому, так как каждый член разлагается отдельно. Появляется также новая точка ветвления $t=t_0+1$, но она находится вне L_ε , так как $\varepsilon < 1$.

Лемма 22.6. Если $\mu_k \downarrow -\infty$, $\lambda > -1$, $\varepsilon < 1$, то при условиях 1) и 3) леммы 22.4 и (22.11) функции

$$T^*(z, \lambda, \mu_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} [K(t)]^z (t-t_0)^\lambda [\ln(t-t_0)]^{\mu_k} dt \quad (22.25)$$

образуют шкалу при $z \rightarrow \infty$.

Доказательство. Применим подстановки $t-t_0=\tau$ и $K(t_0+\tau) = K(t_0)e^{-w}$. Из второй подстановки следует $\tau = \omega f(\omega)$, $f(0) \neq 0$, $f(\omega)$ аналитична в круге $|\omega| \leq \varepsilon_1$, где ε_1 — радиус новой окружности L_{ε_1} , в которую можно деформировать образ L_ε . Тогда

$$T^*(z, \lambda, \mu_k) = \frac{1}{2\pi i} [K(t_0)]^z \int_{L_{\varepsilon_1}} e^{-zw} \omega^\lambda H(\omega) [\ln \omega + \ln f(\omega)]^{\mu_k} d\omega. \quad (22.26)$$

Деформируя путь L_{ε_1} в отрезки по берегам разреза, к отдельным интегралам (22.26) с малыми изменениями можно применить доказательство теоремы 13.3 и формулу (13.33) перенести на (22.26). При этом $\ln f(\omega)$ заменяется на $\ln f(0)$. Следовательно, согласно (13.33) каждый интеграл асимптотически эквивалентен функции $[K(t_0)]^z z^{-\lambda-1} \ln^{\mu_k} z$. ■

Из леммы 22.6 вытекает, что в данном случае получаем разложение по логарифмам и поэтому достаточно брать только первый член разложения (22.10). Если имеем только множитель $\ln^\mu(t-t_0)$, то можно использовать также более сложную шкалу $\{T^*(z, \lambda_k, \mu)\}$, $\lambda_k \uparrow +\infty$.

Рассмотрим конкретные ядра.

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad T_1(z, \lambda, \mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} e^{zt} (t-t_0)^\lambda \ln^\mu(t-t_0) dt = \\ &= e^{-i\pi(\lambda+1)} \frac{e^{zt_0}}{2\pi i} \int_{L_1} e^{-z\tau} \tau^\lambda (\ln \tau - i\pi)^\mu d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $\ln \tau \neq i\pi$ на берегах разреза, то с погрешностью $o(z^{-N})$ путь интегрирования можно дополнить до полной петли вокруг разреза и потом повернуть так, чтобы разрез находился на положительной части действительной оси. Тогда при $\lambda > -1$ согласно теореме 13.3 при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} T_1(z, \lambda, \mu) &= e^{zt_0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-zu} u^\lambda \{ e^{i\pi(\lambda+1)} (\ln u + i\pi)^\mu - \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\pi(\lambda+1)} (\ln u - i\pi)^\mu \} du + o(z^{-N}) \right] \sim \\ &\sim \frac{1}{\pi} e^{zt_0} z^{-\lambda-1} \left(\ln \frac{1}{z} \right)^\mu \sum_{m=0}^\infty (-1)^m b_m (\ln z)^{-m}, \quad (22.27) \end{aligned}$$

где

$$b_m = \sum_{j=0}^m a_j \binom{\mu-j}{m-j} \Gamma^{(m-j)}(\lambda+1), \quad a_j = \binom{\mu}{j} \pi^j \sin \pi \left(\lambda + 1 + \frac{j}{2} \right), \quad (22.28)$$

$b_0 = a_0 \Gamma(\lambda+1)$. При $\lambda \in N$ $a_0 = b_0 = 0$. Формула (22.27) сохраняется также при $\lambda \leq -1$, если соответственно модифицируем доказательство теоремы 13.3. При $-\lambda \in N_1$ получаем другие коэффициенты.

2°. Аналогично, как в п. 22.1.3, 2°, получаем

$$\begin{aligned} T_2(z, \lambda, \mu) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_e} t^{-z} (t-t_0)^\lambda \ln^\mu (t-t_0) dt = \\ &= t_0^{-z+\lambda+1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty (\tau+1)^{-z\tau} [e^{i2\pi\lambda} (\ln \tau + 2\pi i + \ln t_0)^\mu - \right. \\ &\quad \left. - (\ln \tau + \ln t_0)^\mu] d\tau + o(z^{-N}) \right\}. \end{aligned}$$

Если применить подстановку $\tau+1=e^u$, то из доказательства теоремы 13.3 легко видеть, что при разложении по логарифмам подынтегральный множитель $e^u (e^u - 1)^\lambda$ можно заменить на u^λ и $\ln(e^u - 1)$ на $\ln u$. После этого из теоремы 13.3 следует

$$T_2(z, \lambda, \mu) \sim t_0^{-z+\lambda+1} z^{-\lambda-1} \left(\ln \frac{1}{z} \right)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k^* (\ln z)^{-k}, \quad (22.29)$$

где b_k^* будут вычисляться по (22.28), если a_j заменить на

$$a_j^* = \frac{1}{2\pi i} \binom{\mu}{j} [e^{i2\pi\lambda} (2\pi i + \ln t_0)^j - \ln^j t_0].$$

22.1.5. Если t_0 — существенно особая точка или трансцендентная точка ветвления, то в простейших случаях от функции $h(t)$ можно отщепить множитель, характеризующий поведение $h(t)$ в окрестности t_0 , и присоединить к ядру, образуя новое ядро. Простейший множитель имеет вид $\exp[-c(t-t_0)^{-\mu}]$, $\mu > 0$, или $\exp[-c(t-t_0)^{-\mu} \sum_{j=0}^k b_j (t-t_0)^{\lambda_j}]$, $0 \leq \lambda_j < \lambda_{j+1}$, $\lambda_k < \mu$. Если применить тождество $[K(t)]^z = e^{z \ln K(t)}$, то для построения асимптотического разложения можно использовать методы, приведенные в § 21.

В некоторых случаях интеграл по контуру вокруг существенно особой точки можно разложить непосредственно по более сложной шкале, содержащей известные специальные функции. Иногда непосредственно применима теория вычетов. Все указанные приемы подробнее будут рассмотрены в случае конкретных ядер.

22.2. Обращение преобразования Лапласа и метод Хара

22.2.1. Интеграл

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h(p) dp, \quad (22.30)$$

который в общем понимается в смысле главного значения, при некоторых весьма слабых условиях выражает обращение преобразования Лапласа

$$h(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \Omega(t) dt \doteq \Omega(t). \quad (22.31)$$

Некоторые авторы по историческим причинам (22.30) называют формулой Римана—Меллина, хотя ими фактически рассматри-

валось обращение преобразования Меллина, т. е. формула (23.5). Применяется также название *интеграл Бромвича*. Условия можно наложить как на *оригинал* $\Omega(t)$, так и на *изображение* $h(p)$. Приведем основные из этих условий обращения (УО) [66].

1°. УО1. Функция $\Omega(t)$ разложима в окрестности каждого $t > 0$ в ряд Фурье, и существует p_0 , при котором (22.31) сходится абсолютно (следствие из интегральной теоремы Фурье). В точках разрыва $\Omega(t)$ интеграл (22.30) имеет значение $\frac{1}{2} [\Omega(t+0) + \Omega(t-0)]$.

Поскольку $\int_0^t \Omega(\tau) d\tau$ согласно п. 2.5.2 удовлетворяет УО1, если $h(p)$ существует, то формула (22.30) всегда применима, если $h(p)$ заменяется на $h(p)/p$, а $\Omega(t)$ на $\int_0^t \Omega(\tau) d\tau$.

2°. УО2. Для функции $h(p)$ необходимыми являются следующие требования: аналитичность при $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ и $h(p) = o(1)$ равномерно относительно $\arg p$ при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ (предполагается, что $\Omega(t)$ не является обобщенной функцией). К ним следует добавить некоторые из нижеприведенных дополнительных достаточных условий.

Условие А. Интеграл $\nu. p. \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h(p) dp$ сходится равномерно относительно t в каждом сегменте $[t_1, t_2] \subset (0, \infty)$ и сходится интеграл $\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{|h(p)|}{1+|p|} |dp|$. Последнее требование будет выполнено, если $h(p) = O(p^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p = \gamma$.

Условие Б. Интеграл $\nu. p. \int_{-\infty}^{\infty} |h(\gamma + it)| d\tau$ сходится. В этом случае $\Omega(t)$ — непрерывная функция. Это условие — частный случай условия А.

Условие В. $h(p) = g(p) + h_0(p)$, где $g(p)$ является изображением, к которому применима формула обращения, $h_0(p)$ удовлетворяет одному из прежних условий. В частности, $h_0(p) = O(p^{-1-\varepsilon})$ при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq \gamma$, $\varepsilon > 0$.

Функция $h(p)$ как изображение обычно аналитически продолжима при $\operatorname{Re} p < \gamma$, за исключением изолированных особых точек, *что мы введем и предположим*. Если интеграл (22.30) не связан с преобразованием Лапласа, то $h(p)$ может иметь особенности также при $\operatorname{Re} p > \gamma$ и путь может быть искривленным, с возможными обходами по петлям вокруг особых точек. Поэтому и интеграл (22.30) имеет название, указанное в заголовке параграфа.

22.2.2. Из п. 22.1.1 следует, что для построения асимптотического разложения интеграла (22.30) при $t \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} t > 0$ путь следует сдвинуть влево. Для установления условий, при которых такой сдвиг возможен, часто применима

Лемма 22.7 (лемма Жордана). Пусть в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \gamma$ можно найти последовательность дуг окружностей $\{C_{R_k}\}$ с центрами в начале и радиусами R_k , на которых $h(p)$ аналитична и при $R_k \rightarrow \infty$ $e^{\alpha p} h(p) \rightarrow 0$, $\alpha \geq 0$, если $\operatorname{Re} p < 0$, $h(p) \rightarrow 0$, если $\operatorname{Re} p \in [0, \gamma]$. Тогда при $t > \alpha$ имеет место формула

$$\lim_{R_k \rightarrow \infty} \int_{C_{R_k}} e^{pt} h(p) dp = 0. \quad (22.32)$$

Доказательство. Достаточно оценить интеграл по дугам и верхней полуплоскости.

1°. При $\operatorname{Re} p \in [0, \gamma]$ на дуге $L_k' : p = R_k e^{i\vartheta}$, $R_k = \gamma / \cos \vartheta_k$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_k'} e^{pt} h(p) dp \right| &= R_k \left| \int_{\vartheta_k}^{\pi/2} \exp(t R_k e^{i\vartheta}) h(R_k e^{i\vartheta}) e^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \\ &\leq \max_{p \in L_k'} |h(p)| \exp(t R_k \cos \vartheta_k) \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_k \right) R_k < \\ &< M \max_{p \in L_k'} |h(p)| \gamma e^{t\gamma} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2°. На дуге $L_k'' : p = R_k e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_k''} e^{pt} h(p) dp \right| &= R_k \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \exp[R_k e^{i\vartheta}(t - \alpha)] e^{\alpha p} h(p) e^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \\ &\leq R_k \max_{p \in L_k''} |h(p) e^{\alpha p}| \int_0^{\pi/2} \exp[-(t - \alpha) R_k \sin \psi] d\psi < \\ &< R_k \max_{p \in L_k''} |h(p) e^{\alpha p}| \int_0^{\pi/2} \exp\left[-(t - \alpha) R_k \frac{2}{\pi} \psi\right] d\psi = \\ &= \frac{\pi}{2(t - \alpha)} \max_{p \in L_k''} |h(p) e^{\alpha p}| [1 - e^{-(t - \alpha) R_k}] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Примечание. Вместо семейства окружностей можно применять другие кривые. Иногда применяются прямоугольники или дуги парабол. Доказательства леммы при $\alpha=0$ в этих случаях даны в [66, 288].

Из леммы Жордана и теоремы Коши следуют изложенные ниже леммы 22.8 и 22.9.

Лемма 22.8. Пусть $h(p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p \in [\gamma_1, \gamma_2]$ и удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда

$$\int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} e^{pt} h(p) dp = \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} e^{pt} h(p) dp, \quad (22.33)$$

если один из рассматриваемых интегралов сходится.

Лемма 22.9. Пусть $h(p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p \leq \gamma$, за исключением конечной или бесконечной последовательности изолированных особых точек однозначного или многозначного характера, и $h(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда интеграл (22.30), если он сходится, равен сумме вычетов в особых точках первого типа и интегралов по бесконечным петлям вокруг разрезов, исходящих из особых точек второго типа.

Применяя лемму 22.9, допустим, что нет таких прямых $\operatorname{Re} p = \sigma < \gamma$, на которых $h(p)$ имеет бесконечно много особенностей. Тогда после деформирования пути по лемме 22.9 можно построить асимптотическое разложение для (22.30) согласно п. 22.1. Иногда используется только одна или несколько особых точек, лежащих правее. Равенство интеграла (22.30) сумме асимптотических вкладов доказано при $t > \alpha$, но, по принципу аналитического продолжения, оно обычно сохраняется также для комплексных t в некотором секторе. Варьируя в случае точек ветвления расположение разреза, можно попытаться развернуть этот сектор по возможности больше.

22.2.3. Вместо того чтобы непосредственно применять леммы из п. 22.1, иногда можно пользоваться модифицированным методом, предложенным Харом [75]. Назовем его *методом Хара*. В основе его лежит

Лемма 22.10. Пусть 1) интеграл (22.30) сходится при $t > 0$; 2) функция $h(p)$ аналитична в полосе $\operatorname{Re} p \in [\gamma_0, \gamma]$; 3) в этой полосе $h(p) = o(1)$ при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq 0$; $e^{\alpha p} h(p) = o(1)$, $\alpha \geq 0$, при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p < 0$; 4) интеграл (22.30) при $\gamma = \gamma_0$ сходится равномерно относительно $t \geq T$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $t \rightarrow +\infty$

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} h(p) dp = o(e^{(\gamma_0 + \varepsilon)t} t^{-N}). \quad (22.34)$$

Доказательство. Лемма 22.2 в данном случае неприменима. Согласно лемме 22.8 можно использовать формулу (22.33). Поэтому по лемме Римана—Лебега имеем

$$\Omega(t) = e^{\gamma_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} h(\gamma_0 + i\tau) d\tau = o(e^{\gamma_0 t}) = o(e^{(\gamma_0 + \varepsilon)t} t^{-N}). \blacksquare$$

Примечание. Укажем некоторые модифицированные условия, при которых справедлива оценка $\Omega(t) = o(e^{\gamma_0 t} t^{-N})$.

1°. Условия 2) и 3) леммы 22.10 можно заменить на следующие [75]: 2*) $h(p)$ аналитична на прямой $\operatorname{Re} p = \gamma_0$; 3*) при $\operatorname{Re} p = \gamma_0$, $\operatorname{Im} p \rightarrow \infty$ $h^{(n)}(p) \rightarrow 0$, $n \in N$, и интегралы от $e^{p t} h^{(n)}(p)$ по прямой $\operatorname{Re} p = \gamma_0$ сходятся равномерно относительно $t \geq T$. Имеется некоторое ослабление для условия 2*): вместо аналитичности на прямой достаточно требовать аналитичность в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma_0$ и непрерывность при $\operatorname{Re} p \rightarrow \operatorname{Re} p_0 + 0$ [66]. Если фиксировать n_0 и требовать выполнение условия 3*) при $n \leq n_0$, то получим оценку $o(e^{\gamma_0 t} t^{-n_0})$.

Выполнение условий равномерной сходимости часто трудно проверить. Иногда для этого можно пользоваться следующей леммой [66]: если $\frac{\partial}{\partial \tau} h(\gamma + i\tau)$ абсолютно интегрируема на прямой $\operatorname{Re} p = \gamma_0$ и $h(\gamma + i\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \pm \infty$, то интеграл от $e^{p t} h(p)$ по этой прямой сходится равномерно относительно $t \geq T > 0$. Доказательство легко получить интегрированием по частям.

2°. Условие 4) в лемме 22.10 можно заменить на 4*): путь для интеграла (22.30) допускает деформирование вне полосы $\operatorname{Re} p \in (\gamma_0, \gamma]$ так, что его концы удаляются в бесконечность параллельно лучам $\arg p = \pm \beta$, $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, и на них $|h(p)| < e^{\omega|p|}$, $\omega > 0$. Тогда лемма Римана—Лебега применяется для конечного отрезка, а остальные интегралы имеют оценки $O(e^{\gamma_0 t} t^{-1})$. Оценка (22.34) тогда справедлива при $|\arg t| \leq \beta - \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

3°. Условие 4) в лемме 22.10 можно заменить на 4**):

$$\int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} |h(p)| |dp| < \infty.$$

Вернемся к методу Хара. Пусть функция $h(p)$ представима в виде

$$h(p) = g_0(p) + g(p), \quad (22.35)$$

где $g_0(p)$ характеризует особенность функции $h(p)$ в точке $p = p_0$, p_0 — особая точка для $h(p)$ с наибольшей действительной

частью, $\operatorname{Re} p_0 \in (\gamma_0, \gamma)$, а $g(p)$ удовлетворяет условиям леммы 22.10. Предположим, что можно найти функцию

$$H(p) = g_0(p) + G(p), \quad (22.35')$$

для которой известен оригинал $\Omega_1(t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} H(p) dp$ (часто из таблиц обратного преобразования Лапласа) или его асимптотическое разложение, а $G(p)$ удовлетворяет условиям леммы 22.10. Тогда согласно этой лемме имеет место соотношение

$$\Omega(t) = \Omega_1(t) + o(e^{p_0 t - N}). \quad (22.36)$$

Часто функция $h(p)$ не представима в виде (22.35). Тогда следует попытаться найти последовательность функций $g_n(p)$, обладающих свойствами: 1) функции $h^{(k)}(p) - g_n^{(k)}(p)$ при $k = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям первой модификации леммы 22.10; 2) $g_n(p) \doteq G_n(t)$ и 3) функции $G_n(t)$ образуют частичные суммы асимптотического ряда. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ имеем соотношение

$$\Omega(t) = G_n(t) + o(e^{p_0 t - n}). \quad (22.36')$$

В этом и заключается первоначальная идея метода Хара. Первую модификацию леммы 22.10 удобно дополнить модификацией 2°.

22.2.4. Метод Хара можно дополнить идеей, использованной в [66, 314] и допускающей применение формулы преобразования Лапласа. Часто при построении асимптотических разложений для (22.30) функция $g_0(p)$ зависит также от параметра β , т. е. $g_0 = g_0(p, \beta)$ и при некоторых значениях β $g_0(p, \beta)$ является изображением по Лапласу, к которому применима формула обращения, а при некоторых β она таковой не будет являться. Например, $\ln p \cdot p^{-\beta} \doteq -\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} [\ln t - \Gamma'(\beta)] \equiv \kappa(t, \beta)$ при $\beta > 0$, а при $\beta < 0$ эта формула несправедлива, хотя $\kappa(t, \beta)$ существует также при $\beta < 0$, кроме $-\beta \in \mathbb{N}$, если $t > 0$. Причина этого явления проста: при $\beta < 0$ интеграл Лапласа от $\kappa(t, \beta)$ при нижнем пределе расходится. Поэтому следует отсекал левый конец интеграла Лапласа. Покажем, что в случае общей функции $\kappa(t, \beta)$ полный и отсеченный интегралы определяют функции, имеющие одинаковые особенности. Этот метод назовем *методом отсечения*.

Лемма 22.11. Пусть 1) в (22.35) $g_0(p, \beta) \doteq \kappa(t, \beta) e^{p_0 t}$ при $\beta \in B_0$, причем можно применить формулу обращения; 2) интеграл $\int_1^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \kappa(t, \beta) dt$ сходится при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$ и $\beta \in B_1$, $B_0 \subset B_1$.

Тогда при $\beta \in B_0$ справедливо соотношение

$$g_0(p, \beta) = H(p, \beta) - G(p, \beta), \quad (22.37)$$

где

$$H(p, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0, 1), \\ e^{p_0 t} \chi(t, \beta) & \text{при } t \geq 1, \end{cases} \quad (22.38)$$

а $G(p, \beta)$ — целая функция относительно p при $\beta \in B_0$.

Доказательство следует из равенств

$$\begin{aligned} g_0(p, \beta) &= \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \chi(t, \beta) dt = \int_1^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \chi(t, \beta) dt + \\ &+ \int_0^1 e^{-(p-p_0)t} \chi(t, \beta) dt = H(p, \beta) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (p-p_0)^k}{k!} \int_0^1 t^k \chi(t, \beta) dt = H(p, \beta) - G(p, \beta). \end{aligned}$$

Поскольку $|\int_0^1 t^k \chi(t, \beta) dt| < \int_0^1 |\chi(t, \beta)| dt$, то $G(p, \beta)$ — целая функция. ■

Лемма 22.12. Пусть 1) для $h(p, \beta)$ при $\beta \in B_1$ справедливо соотношение (22.35), где функция $g_0(p, \beta)$ при $\beta \in B_0$ определена в лемме 22.11 и аналитически продолжима при $\beta \in B_1$, $B_0 \subset B_1$, а $g(p, \beta)$ удовлетворяет условиям леммы 22.10; 2) $g_0(p, \beta)$ в полосе $\operatorname{Re} p \in [\gamma_0, \gamma]$, $\operatorname{Re} p_0 \in (\gamma_0, \gamma)$, удовлетворяет условию на бесконечности леммы 22.10; 3) при $\beta \in B_1$ имеет место соотношение (22.37), в котором $G(p, \beta)$ — аналитическая относительно p функция при $\operatorname{Re} p \in [\gamma_0, \gamma]$, а $H(p, \beta)$ определяется в (22.38); 4) выполнено условие 2) леммы 21.11; 5) функция $\chi(t+1, \beta)$ аналитична при $|\arg t| \leq \eta$, $\eta > 0$. Тогда при $\beta \in B_1$ и $t \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h(p, \beta) dp = e^{p_0 t} \chi(t, \beta) + o(e^{p_0 t} t^{-N}). \quad (22.39)$$

Доказательство будет следовать из формул (22.35), (22.35') и (22.36), если докажем, что функция $H(p, \beta)$ при обозначении $p-p_0=q$ относительно q удовлетворяет условию на бесконечности леммы 22.10, так как тогда в силу условия 2) и (22.37) $G(p, \beta)$ тоже удовлетворяет этому условию. Но для $H(p, \beta)$ согласно представлению

$$H(p, \beta) = e^{-(p-p_0)} \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} \chi(t+1, \beta) dt$$

при $p \rightarrow \infty$, $|\arg(p-p_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \eta$, $\varepsilon < \eta$, по лемме Ватсона можно построить асимптотическое разложение и получить оценку

$$H(p, \beta) = O[e^{-(p-p_0)} (p-p_0)^{-1}]. \blacksquare$$

Примечание. В работе [314] указано, что условие 3) леммы 22.12 выполнено, если $\frac{\partial}{\partial t} \chi(t, \beta) = \chi(t, \beta-1)$. Тогда кратным интегрированием по частям интеграл, определяющий $H(p, \beta)$ при $\beta \in B_0$, можно привести к интегралу при $\beta \in B_0$.

Методом отсечения новых результатов не получаем по сравнению с методом деформирования контура.

22.3. Случай алгебраических и логарифмических особенностей

22.3.1. При построении асимптотического разложения для интеграла (22.30) рассмотрим только отдельные типы особых точек, так как смешанный случай исследуется с помощью их суперпозиции.

Теорема 22.1. Если 1) интеграл (22.30) сходится при $\operatorname{Re} t > 0$; 2) функция $h(p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p \leq \gamma$, за исключением полюсов p_k порядка m_k , $\gamma > \operatorname{Re} p_k \downarrow -\infty$, $k \in N$; 3) при каждом фиксированном k в полосе $\operatorname{Re} p \in [\operatorname{Re} p_k, \gamma]$ $h(p)$ удовлетворяет условиям 3) и 4) леммы 22.10, то при $t \rightarrow +\infty$

$$\Omega(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{res} [e^{pt} h(p); p_k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{p_k t} P_{m_k-1}(t). \quad (22.40)$$

Если $h(p)$ при $\operatorname{Re} p \leq \gamma$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, то ряд (22.40) сходится при $\operatorname{Re} t > 0$.

Доказательство. При $t > \alpha$ согласно условию 3) путь можно перенести на прямую $\operatorname{Re} p = \gamma_k$, $\gamma_k \in [\operatorname{Re} p_{k+1} + \varepsilon, \operatorname{Re} p_k - \varepsilon]$, и добавить вычеты, которые вычисляются по формуле (22.4). В силу (22.34) новый интеграл будет иметь оценку $O(\exp[(\operatorname{Re} p_{k+1} + \varepsilon)t] t^{-N})$, откуда следует (22.40). Если удовлетворены условия леммы Жордана, то этот интеграл стремится к нулю и ряд (22.40) сходится. Сходимость сохраняется при $\operatorname{Re} t > 0$, а равенство — по принципу аналитического продолжения. \blacksquare

22.3.2. В случае точек ветвления из полосы $\text{Re } p \in [\gamma_0, \gamma]$ удаляем некоторую ее часть с помощью петель C_k вокруг разрезов, идущих по лучам $\arg(p - p_k) = \pi$, $\text{Re } p_k = \gamma_l \in (\gamma_0, \gamma)$, $k \leq n$. Каждая петля состоит из окружности $L_{\varepsilon, k}$ с центром в p_k и радиусом ε ($\varepsilon > 0$) и отрезков вдоль берегов разреза. Полученную область назовем *полосой с удаленными точками* p_k и обозначим через $\Pi_n(\gamma_0, \gamma)$.

Теорема 22.2. Пусть 1) функция $h(p)$ в полосе $\Pi_n(\gamma_0, \gamma)$ с удаленными точками p_l , $\text{Re } p_l = \gamma_l \in (\gamma_0, \gamma)$, $l = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяет условиям леммы 22.10; 2) в окрестностях точек p_l при $p \rightarrow p_l$ имеют место разложения

$$h(p) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{jl}(p-p_l)^{\lambda_{jl}} [\ln(p-p_l)]^{m_{jl}}, \quad l=1, 2, \dots, n, \quad (22.41)$$

где $\lambda_{jl} \uparrow +\infty$, $m_{jl} \in \mathbb{N}$ и многозначные функции имеют главные значения. Тогда при $t \rightarrow +\infty$ для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\Omega(t) = \sum_{l=1}^n e^{p_l t} \left[\sum_{j=0}^k a_{jl} \Phi_{\lambda_{jl}, m_{jl}}(\ln t) t^{-\lambda_{jl}-1} + o(t^{-\lambda_{kl}-1}) \right] \quad (22.42)$$

где $\Phi_{\lambda, m}$ определено в (22.21) — (22.23).

Доказательство. Согласно лемме 22.10

$$\Omega(t) = \sum_{l=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} e^{pt} h(p) dp + o(e^{\gamma_l t} t^{-N}),$$

где C_l пояснены в начале п. 22.3.2. Разложения отдельных интегралов рассмотрим при некотором фиксированном l . Путь C_l разобьем на окружность $L_{\varepsilon, l}$ и отрезки, лежащие на берегах разреза. Интегралы по отрезкам имеют оценки $O(e^{l(\gamma_l - \varepsilon)t}) = o(e^{\gamma_l t} t^{-N})$, которые входят в оценку остатка в (22.42). В интеграле по $L_{\varepsilon, l}$ используем (22.41) с учетом (22.23). Для оценки остатка путь $L_{\varepsilon, l}$ деформируем в окружность L_0 радиусом $\frac{1}{t}$ (при $t > \frac{1}{\varepsilon}$) и отрезки по берегам разреза. Так как остаток ряда (22.41) $\rho_{kl}(p)$ в круге радиусом ε имеет оценку $O((p - p_0)^{\lambda_{k+1, l}} [\ln(p - p_0)]^{m_{k+1, l}})$, то получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\varepsilon, l}} e^{vt} \rho_{kl}(p) dp \right| \leq e^{\nu t} t^{-\lambda_{k+1, l-1}} \left| \ln \frac{1}{t} \right|^{m_{k+1, l}} \times \\
& \quad \times \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos \alpha} d\alpha + 2Me^{\nu t} \int_{1/t}^{\varepsilon} e^{-\sigma t} \sigma^{\lambda_{k+1, l}} |\ln \sigma|^{m_{k+1, l}} d\sigma < \\
& < O(e^{\nu t} t^{-\lambda_{k+1, l-1}} (\ln t)^{m_{k+1, l}}) + 2Me^{\nu t} t^{-\lambda_{k+1, l-1}} \left| \ln \frac{1}{t} \right|^{m_{k+1, l}} \times \\
& \quad \times \int_1^{\infty} e^{-u} u^{\lambda_{k+1, l}} (1 + \ln u)^{m_{k+1, l}} du = O(e^{\lambda t} (\ln t)^{m_{k+1, l}} t^{-\lambda_{k+1, l-1}}),
\end{aligned}$$

откуда следует требуемая оценка для остатка ряда (22.42). ■

Примечания. 1°. При $\lambda_{jl} \in N$, $m_{jl} = 0$ функция $h(p)$ в точках p_l аналитична и получаем оценку $\Omega(t) = o(e^{\nu t} t^{-N})$. Поэтому теорема имеет практический смысл лишь тогда, когда хотя бы одно из чисел λ_{jl} и m_{jl} имеет другое значение.

2°. Можно допустить, что $m_{jl} \rightarrow \infty$. Такой случай при $m_{jl} = j$ рассмотрен в [171]. Можно также вместо функций $\ln^{m_{jl}}(p - p_l)$ ввести более общие множители $P_{jl}(\ln(p - p_l))$, где $P_{jl}(u)$ — полиномы от u любой степени. Тогда в (22.42) $\Phi_{\lambda_{jl}, m_{jl}}(\ln t)$ означают соответствующие полиномы, которые строятся с помощью (22.21) — (22.23). Если $P_{jl}(u)$ — полином степени m , то $\Phi_{\lambda_{jl}, m}$ — полином степени m или $m - 1$ (при натуральных λ_{jl}). Функции $\Phi_{\lambda_{jl}, m_{jl}}$ можно найти также методом неопределенных коэффициентов, если каждый член в (22.42) преобразовать согласно формулам (18.55) и (18.61) и коэффициенты при соответствующих степенях полученного ряда приравнять коэффициентам ряда (22.41). Этот метод предложен в [310].

3°. Рассмотрим при $p \rightarrow +0$, $m \in N_1$, m — нечетное число, $\lambda < 1$, $p = z^{-1}$, разложение

$$\begin{aligned}
h_0(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{-\lambda} \cos(t^{1/m}) dt = \\
&= mp^{\lambda-1} \int_0^{\infty} e^{-u^m} u^{m(1-\lambda)-1} \cos(z^{1/m} u) du \sim \\
&\sim m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(m(k+1-\lambda))}{(mk)! k!} \cos \frac{\pi}{2} (m(k+1-\lambda)) p^k,
\end{aligned}$$

в котором использована формула (10.21'). Хотя $h_0(p)$ при $p \rightarrow 0$ обладает разложением (22.41), оценка, указанная в примечании 1°, несправедлива. Это противоречие объясняется тем, что разложение не имеет места во всей окрестности точки $p=0$. При $m=1$ разложение справедливо только при $\arg p=0$, а при $m>1$ поворотом пути интегрирования можно доказать его справедливость при $|\arg p| \leq \frac{\pi}{2m} - \varepsilon$.

Другой пример $t^{-1/2} \cos(t^{1/2}) \doteq \sqrt{\pi/p} \exp(-1/4p) = o(p^N)$ при $p \rightarrow 0$, $|\arg p| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, полученный согласно (22.51), тоже показывает, что недостаточно того, чтобы изображение имело асимптотическое разложение вида (22.41) в секторе, в котором $|\arg p| < \pi/2$. Из последнего примера следует также, что функции $h(p)$ (из (22.41)) и $h(p) + \frac{1}{\sqrt{p-p_i}} \exp\left(-\frac{1}{4(p-p_i)}\right)$ имеют одинаковые асимптотические разложения при $p \rightarrow p_i$, $|\arg(p-p_i)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, но разные оригиналы. Легко видеть, что для справедливости теоремы 22.2 достаточно, чтобы (22.41) имело место при $|\arg(p-p_i)| \leq \frac{\pi}{2} + \eta$, $\eta > 0$. При $\eta=0$ необходимы еще дополнительные условия [310].

Кроме того, можно доказать следующее [310]. Если известно, что $\Omega(t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет разложение (22.42), то оно определяется разложением (22.41) независимо от того, при каких $\arg(p-p_i)$ справедливость (22.41) установлена. Сказанное относится также к примечанию 2°.

4°. Если в теореме 22.2 путь можно деформировать так, что он будет удаляться в бесконечность параллельно лучам $|\arg p| = \frac{\pi}{2} + \eta$, $\eta > 0$, то согласно примечанию 2° к лемме 22.10 (22.42) справедливо при $|\arg t| \leq \eta - \varepsilon$, $\varepsilon < \eta$. Но тогда теорему 22.2 при $n=1$ можно модифицировать так, чтобы путь интегрирования состоял из объединения дуги L_ε при $|\arg(p-p_i)| \leq \frac{\pi}{2} + \eta$ и лучей $|\arg(p-p_i)| = \frac{\pi}{2} + \eta$, на которых имеет место условие (22.9) [310].

5°. При оценке остатка тот факт, что $m_{h+1,i} \in \mathbb{N}$, не имеет значения.

6°. Отметим частные случаи теоремы 22.2.

А. При $m_{jl}=0$ согласно (22.15) имеем

$$\Omega(t) \sim -\frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^n e^{p_l t} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jl} \sin(\lambda_{jl}\pi) \Gamma(\lambda_{jl}+1) t^{-\lambda_{jl}-1}, \quad (22.43)$$

причем хотя бы некоторые $\lambda_{jl} \in N$.

Б. При $m_{jl}=1$, $\lambda_{jl} \in N$ согласно (22.22) получаем

$$\Omega(t) \sim \sum_{l=1}^n e^{p_l t} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jl} (-1)^{\lambda_{jl}+1} (\lambda_{jl})! t^{-\lambda_{jl}-1}. \quad (22.44)$$

В. При $m_{jl}=1$, $\lambda_{jl} \in N$ из (22.21) следует

$$\begin{aligned} \Omega(t) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^n e^{p_l t} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jl} t^{-\lambda_{jl}-1} [\sin(\lambda_{jl}\pi) \Gamma(\lambda_{jl}+1) \ln t - \\ - \sin(\lambda_{jl}\pi) \Gamma'(\lambda_{jl}+1) - \pi \cos(\lambda_{jl}\pi) \Gamma(\lambda_{jl}+1)]. \end{aligned} \quad (22.45)$$

22.3.3. Рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел m_{jl} не является натуральным. Тогда при наименьшем из них получаем разложение по логарифмам. Поэтому дальнейшие члены разложения (22.41) будут излишни, если не пользоваться более сложной шкалой (при $m_{j1} = -1$ см. пример в п. 22.7.1). Без ограничения общности можно считать, что $n=1$ и $m_{01} \in N$.

Теорема 22.3. Пусть функция $h(p)$ удовлетворяет условиям теоремы 22.2 при $n=l=1$, $m_{01} \in N$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$ имеем разложение

$$\Omega(t) \sim \frac{a_{01}}{\pi} e^{p_1 t} t^{-\lambda_{01}-1} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{m_{01}} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h b_h (\ln t)^{-h}, \quad (22.46)$$

где b_h определены в (22.28).

Доказательство теоремы следует из формулы (22.27) и оценки остатка в доказательстве теоремы 22.2 с учетом примечания 5°. ■

К теореме 22.3 относится примечание 4° к теореме 22.2. Аналогично доказывается

Теорема 22.4. Пусть 1) функция $h(p)$ в полосе $\Pi_1(\gamma_0, \gamma_1)$ с удаленной точкой p_1 , $\operatorname{Re} p_1 \in (\gamma_0, \gamma_1)$, удовлетворяет условиям леммы 22.10; 2) при $p \rightarrow p_1$ имеет место разложение

$$h(p) \sim (p-p_1)^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} a_j \ln^{-\mu_j} (p-p_1), \quad \mu_j \uparrow +\infty. \quad (22.47)$$

Тогда при $t \rightarrow +\infty$

$$\Omega(t) \sim \frac{1}{\pi} e^{p_0 t - \lambda - 1} \sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{-\kappa_j}, \quad (22.48)$$

где $b_0 = a_0$, $\kappa_0 = \mu_0$, а b_j , κ_j определяются формальным применением к отдельным членам ряда (22.47) формулы (22.27) и последующей перегруппировкой членов.

22.4. Случаи существенно особых точек и трансцендентных точек ветвления

22.4.1. Рассмотрим случай, когда $h(p)$ в точке p_0 имеет существенную особенность.

Теорема 22.5. Если 1) $h(p)$ в полосе $\operatorname{Re} p \in [\gamma_0, \gamma]$ аналитична, за исключением существенно особых точек однозначного характера p_1, \dots, p_n , $\gamma > \operatorname{Re} p_1 > \dots > \operatorname{Re} p_n > \gamma_0$; 2) в окрестностях этих точек $h(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kj}(p-p_j)^k$; 3) $h(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана; 4) в полосе $\operatorname{Re} p \in [\gamma_0, \operatorname{Re} p_n]$ $h(p)$ удовлетворяет условиям леммы 22.10, то при $t \rightarrow +\infty$

$$\Omega(t) = \sum_{j=1}^n e^{p_j t} F_j(t) + o(e^{(p_n - \varepsilon)t} t^{-N}), \quad (22.49)$$

где $\varepsilon < \operatorname{Re} p_n - \gamma_0$ и

$$F_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} \frac{t^k}{k!}. \quad (22.50)$$

Доказательство следует из леммы 22.10 и теории функций. Особые точки можно окружить окружностями достаточно малого радиуса и на них равномерно сходящийся ряд Лорана

$$\begin{aligned} e^{p_j t} e^{(p-p_j)t} h(p) &= e^{p_j t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p-p_j)^k t^k}{k!} \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{kj} (p-p_j)^{-h} = \\ &= e^{p_j t} \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_{hj}(t) (p-p_j)^{-h} \end{aligned}$$

интегрировать почленно. В результате получаем $b_{-1,j}(t) \equiv F_j(t)$. Поскольку ряды Лорана сходятся, то ряды (22.50) сходятся при всех t и определяют целые функции. ■

Примечания. 1°. Чтобы применить (22.49) для асимптотических аппроксимаций при $t \rightarrow +\infty$, надо знать явные выражения для функций $F_j(t)$ или их асимптотику при $t \rightarrow \infty$. Асимптотика целых функций будет рассмотрена в третьем томе монографии. Явные выражения для $F_j(t)$ получаем лишь в исключительных случаях. Например из (22.49) и (22.50) следует, что согласно (21.104) и (21.108) имеем

$$\frac{1}{p^{m+1}} \exp(\alpha p^{-n}) \doteq {}^m I_m^n(\alpha t^n), \quad \frac{1}{p^{m+1}} \exp(-\alpha p^{-n}) \doteq {}^m J_m^n(\alpha t^n), \quad (22.51)$$

$m \in N, n \in N_1, \alpha > 0$. Следует отметить, что формулы (22.51) сохраняют силу при всех действительных m и $n > 0$.

2°. Асимптотика функций $F_j(t)$ может быть весьма разнообразной. Поэтому члены в (22.49) в общем случае не образуют шкалу и при $n = \infty$ из (22.49) получаем лишь слабоасимптотическое разложение. Например, согласно (22.51)

$$\frac{1}{p-1} \exp\left(-\frac{1}{p-1}\right) + \frac{1}{p} \exp\left(\frac{1}{p}\right) \doteq e^t J_0(\sqrt{t}) + I_0(\sqrt{t}),$$

вторым членом в правой части при $t \rightarrow \infty$ нельзя пренебречь.

22.4.2. Теорема 22.6. Пусть 1) функция $h(p)$ в полосе $\Pi_1(\gamma_0, \gamma)$ с удаленной точкой $p_0, \operatorname{Re} p_0 = \gamma_1 \in (\gamma_0, \gamma)$, удовлетворяет условиям леммы 22.10; 2) при $p \rightarrow p_0$ имеет место разложение

$$h(p) \sim \exp[-c(p-p_0)^{-\mu}] \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p-p_0)^{\lambda_k}, \quad (22.52)$$

где $c > 0, \mu > 0, \lambda_k \uparrow +\infty$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ для каждого фиксированного $n \in N$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h(p) dp = e^{p_0 t} \left[\sum_{k=0}^n a_k t^{-\lambda_k-1} J_{-\lambda_k-1}^{\mu}(ct^{\mu}) + \right. \\ & \left. + o\left(t^{-\kappa_n} \exp\left[\gamma_1 t + \alpha t^{\mu\beta} \cos \frac{\pi}{\mu+1}\right]\right) \right], \quad (22.53) \end{aligned}$$

где $\beta = 1/(\mu+1) < 1, \alpha = (c\mu)^{\beta}(1+1/\mu), \kappa_n = \beta(\lambda_n+1+\mu/2)$.

Доказательство. Выберем $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\gamma_1 = \gamma_0 + \eta + \varepsilon$, $\gamma - \gamma_0 \geq \varepsilon$. Тогда с погрешностью $O(e^{\gamma_1 t} e^{-\varepsilon t} t^{-N}) = o\left(\exp\left[\gamma_1 t + \alpha t^{\beta\mu} \cos \frac{\pi}{\mu+1} t^{-N}\right]\right)$ в качестве пути интегрирования можно брать перерезанную окружность L_ε с центром в точке p_0 . Поскольку из (22.51) и (8.7) следует, что

$$\begin{aligned} e^{p_0 t} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \exp [t(p-p_0) - c(p-p_0)^{-\mu}] (p-p_0)^\lambda dp = \\ = e^{p_0 t} [t^{-\lambda-1} J_{-\lambda-1}^\mu(ct^\mu) + O(e^{-\varepsilon t} t^{-\beta})], \end{aligned}$$

то после применения (22.52) получаем

$$\begin{aligned} \Omega(t) = e^{p_0 t} \left[\sum_{k=0}^n a_k t^{-\lambda_k-1} J_{-\lambda_k-1}^\mu(ct^\mu) + \right. \\ \left. + O(e^{-\varepsilon t} t^{-\beta}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \exp [t(p-p_0) - \right. \\ \left. - c(p-p_0)^{-\mu}] (p-p_0)^{\lambda_{n+1} + \rho_n} (p-p_0) dp \right], \quad (22.54) \end{aligned}$$

где $\rho_n(p)$ — аналитическая и ограниченная на L_ε функция.

Для оценки остатка $R_n(t)$ в (22.54) применим подстановку $p - p_0 = w(c\mu t^{-1})^\beta$. Получим

$$\begin{aligned} R_n(t) = (c\mu t^{-1})^{\beta(\lambda_{n+1}+1)} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\varepsilon_1 t^\beta}} \exp \left[(c\mu t^\mu)^\beta \left(w - \frac{1}{\mu w^\mu} \right) \right] w^{\lambda_{n+1} + \rho_n} (w(c\mu t^{-1})^\beta)^\beta dw. \end{aligned}$$

Концы перерезанной окружности $L_{\varepsilon_1 t^\beta}$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon / (c\mu)^\beta$, находятся на берегах разреза, идущего вдоль $(-\infty, 0]$. Согласно рис. 29, a — v путь $L_{\varepsilon_1 t^\beta}$ можно деформировать через основные седловые точки $\tau_k^* = \exp\left(\pm \frac{i\pi}{\mu+1}\right)$ вдоль ЛНС до точек пересечения с окружностью $L_{\varepsilon_1 t^\beta}$, а потом интегрировать по дугам окружности до разреза. Поскольку ЛНС определена уравнением

$$r^{\mu+1} \sin \varphi + \mu^{-1} \sin \mu \varphi = \pm r^\mu (1 + 1/\mu) \sin \pi / (\mu + 1),$$

то угол ψ , под которым из начала видны эти дуги, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. В силу ограниченности ρ_n на новом контуре для интеграла по ЛНС согласно п. 21.4 и (21.109) получаем оценку

$$O(t^{-\kappa_{n+1}} \exp(\alpha t^{\beta\mu} \cos \pi/(1+\mu))),$$

а для интеграла по дуге — оценку

$$O(e^{-\varepsilon t \cos \psi}) = o(t^{-N} \exp[\alpha t^{\beta\mu} \cos \pi/(1+\mu)]).$$

Из (21.109) следует, что при $t \rightarrow +\infty$

$$t^{-\lambda-1} J_{-\lambda-1}^{\mu}(ct^{\mu}) \sim \frac{2(c\mu)^{\beta(\lambda+1/2)}}{\pi\sqrt{2(\mu+1)}} t^{-\kappa} \exp(\alpha t^{\beta\mu} \cos \pi/(1+\mu)) \times \\ \times \{ \cos[\alpha t^{\beta\mu} \sin \pi/(1+\mu) + \pi(\lambda+1/2)\beta] + O(t^{-\beta\mu}) \}. \quad (22.55)$$

В силу (22.55) и полученной оценки остатка в (22.53) имеем сильноасимптотическое разложение. ■

Примечание. Если в (22.52) c заменить на $-c$, то в (22.53) $J_{-\lambda_k-1}^{\mu}$ следует заменить на $I_{-\lambda_k-1}^{\mu}$. Можно рассматривать также случай комплексного c .

В некоторых более сложных случаях, когда функция $h(p)$ в окрестности особой точки в разных секторах имеет разные асимптотические представления, вместо (22.51) можно попытаться использовать другие формулы обратного преобразования Лапласа. Но обычно получаем только главный член асимптотического разложения. Некоторые примеры такого типа приведены в работе [351]. Например, иногда вместо (22.51) можно применить формулу [2, 351]

$$p^{-\frac{1}{2}-\mu+h} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\mu-k; 1+2\mu; \frac{1}{p}\right) \doteq \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+1/2)} t^{-k-1/2} I_{2\mu}(2\sqrt{t}).$$

22.5. Разложение при $t \rightarrow +0$ и по другим функциям

22.5.1. Часто приходится исследовать поведение интеграла (22.30) при $t \rightarrow +0$, в особенности в случаях, когда интеграл выражает обращение преобразования Лапласа, оригинал имеет физический смысл и t означает время. После подстановки $pt = w$ в (22.30) при действительном $t > 0$ получаем

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi it} \int_{\gamma t - i\infty}^{\gamma t + i\infty} e^{w} h(w/t) dw. \quad (22.56)$$

Отсюда видно, что при $t \rightarrow +0$ надо использовать свойства функции $h(p)$ при $p \rightarrow \infty$. Это означает, что следует применить другой метод.

Теорема 22.7. Если 1) интеграл (22.30) сходится при $t > 0$; 2) $h(p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ и 3) в этой полуплоскости при $|p| \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg p$

$$h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-\lambda_k}, \quad 0 < \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (22.57)$$

то при $t \rightarrow +0$

$$\Omega(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\lambda_k)} t^{\lambda_k - 1}. \quad (22.58)$$

Доказательство. Если $\gamma < 0$, то путь интегрирования в (22.30) можно деформировать так, чтобы точка $p=0$ оставалась слева и на всем пути $|p|$ был достаточно большим. Подставим под знак интеграла (22.56)

$$h(\omega/t) = \sum_{k=0}^n a_k \omega^{-\lambda_k} t^{\lambda_k} + \omega^{-\lambda_{n+1}} t^{\lambda_{n+1}} \rho_n(\omega/t), \quad |\rho_n(\omega/t)| < M.$$

Число n выбрано так, чтобы $\lambda_{n+1} > 1$. В каждом члене ряда путь интегрирования можно деформировать вокруг разреза вдоль $(-\infty, 0]$. С учетом (12.30), где $z = e^{i\pi}$, $\sigma = -\pi$, получаем

$$\Omega(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\Gamma(\lambda_k)} t^{\lambda_k - 1} + (t^{\lambda_{n+1} - 1} / 2\pi i) \int_{\gamma t + i\infty}^{\gamma t - i\infty} \omega^{-\lambda_{n+1}} e^{t\omega} \rho_n(\omega/t) d\omega.$$

При оценке остатка путь деформируем по прямой $\operatorname{Re} \omega = \gamma_1 \geq \gamma$, где γ_1 не зависит от t ; это возможно, так как $\lambda_{n+1} > 1$. Интеграл сходится, и поэтому остаток имеет оценку $O(t^{\lambda_{n+1} - 1})$. ■

Примечания. 1°. При $\lambda_k = k+1$ получаем дополнение к теореме 12.5, а при $\lambda_0 > 0$ — обращение леммы Ватсона.

2°. Если ряд (22.57) сходится при $|p| \geq R > 0$, то (22.58) сходится при $t > 0$. Действительно, тогда можно найти такое $M > 0$, что $|a_k| < MR^{\lambda_k}$, поэтому (22.58) имеет мажорантный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{\lambda_k} |t|^{\lambda_k - 1}}{\Gamma(\lambda_k)}.$$

Если $\lambda_k = k+1$, то ряд (22.58) определяет целую

функцию. Полученный результат является обращением теоремы 8.4 при $\lambda = 1$. В общем случае (22.58) часто сходится только в

некоторой окрестности начала. Например, $-e^p Ei(-p) \doteq (1+t)^{-1}$.

3°. Если к ряду (22.57) присоединить множитель $(\ln p)^m$, $m \in N$, то согласно формуле (22.23) в (22.58) $t^{\lambda_k-1}/\Gamma(\lambda_k)$ надо заменить на $t^{\lambda_k-1}\Phi_{-\lambda_k, m}(\ln t)$. Используя это изменение, можно легко доказать следующую теорему.

Теорема 22.8. Если в теореме 22.7 при $|p| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ разложение (22.57) заменить на

$$h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} p^{-\lambda_k} Q_{m_k}(\ln p), \quad (22.59)$$

где $Q_m(u)$ — полином степени m , то при $t \rightarrow +0$ (22.58) следует заменить на

$$\Omega(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{\lambda_k-1} \Psi_{\lambda_k, m_k}(\ln t), \quad (22.60)$$

где $\Psi_{\lambda, m}(u)$ — полином степени m или $m-1$ (при $\lambda \in N$).

Случай, когда разложение для $h(p)$ содержит дробные степени от $\ln p$, будет рассмотрен в п. 22.7.3.

22.5.2. **Теорема 22.9.** Если в теореме 22.7 вместо (22.57) при $|p| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ имеем разложение

$$h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma(\lambda_k + 1) \Gamma(p + \alpha)}{\Gamma(p + \alpha + \lambda_k + 1)}, \quad -1 < \lambda_k \uparrow + \infty, \quad (22.61)$$

то при $t \rightarrow +0$

$$\Omega(t) \sim e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - e^{-t})^{\lambda_k}. \quad (22.62)$$

Доказательство основано на формуле

$$e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^{\lambda_k} \doteq \frac{\Gamma(\lambda_k + 1) \Gamma(p + \alpha)}{\Gamma(p + \alpha + \lambda_k + 1)}, \quad (22.63)$$

которая непосредственно следует из п. 12.5.2, 1°. Поскольку остаток ряда (22.61) при каждом фиксированном n согласно (22.62) можно писать в виде $p^{-\lambda_{n+1}-1} \rho_n(p)$, $|\rho_n(p)| < M$, то из доказательства теоремы 22.7 для остатка ряда (22.63) получаем оценку $O(t^{\lambda_{n+1}-1})$. Но при $t \rightarrow 0$ имеем $e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^{\lambda} \sim t^{\lambda}$, поэтому члены в (22.62) образуют шкалу. ■

Примечания. 1°. При $\lambda_k = k+1$ в (22.61) имеем ряд обратных факториалов. Тогда разложение (22.61) можно построить с помощью уже рассмотренных приемов (см. § 5).

2°. Пусть ряд (22.61) абсолютно сходится при $\operatorname{Re} p = \mu$. Тогда из (12.62) следует, что абсолютно сходится также ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{-\mu - \operatorname{Re} \alpha}$ и, следовательно, также (22.62), если при доста-

точно больших k $0 < t \leq -\ln \left[1 - \lambda_k \frac{-\mu - \operatorname{Re} \alpha}{\lambda_k} \right]$. Поскольку $\lambda_k \frac{-\mu - \operatorname{Re} \alpha}{\lambda_k} \rightarrow 1$, то можно брать $t \in (0, \infty)$, причем при $\lambda_0 \geq 0$ допускается также $t = 0$.

3°. Теорема 22.9 является обратной частному случаю теоремы 13.1, относящемуся к формуле (22.63). Аналогично можно использовать другие формулы из таблиц для преобразования Лапласа и сформулировать ряд теорем о поведении $\Omega(t)$ при $t \rightarrow +0$. Осложнения могут возникнуть лишь при оценке остатка. Мы рассмотрим применение только одной формулы, показывающей разнообразие возможностей.

22.5.3. Теорема 22.10. Если в теореме 22.7 вместо (22.57) при $|p| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ имеем

$$h(p) \sim e^{-\alpha \sqrt{p}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-\lambda_k}, \quad \alpha > 0, \quad \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (22.64)$$

то при $t \rightarrow +0$

$$\Omega(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^{2\lambda_k - 1} H_{-2\lambda_k + 1} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right) t^{\lambda_k - 1}. \quad (22.65)$$

Доказательство. Используем формулу [2]

$$p^\lambda e^{-\alpha \sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{-2\lambda - 1} t^{-\lambda - 1} e^{-\alpha^2/4t} H_{2\lambda + 1}(\alpha/2\sqrt{t}), \quad (22.66)$$

которая справедлива при любом λ и $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Поскольку при $t \rightarrow +0$

$$t^{\lambda_k - 1} e^{-\alpha^2/4t} H_{-2\lambda_k + 1}(t) \asymp e^{-\alpha^2/4t} t^{2\lambda_k - 3/2}, \quad (22.67)$$

то члены ряда (22.65) образуют шкалу. Остается при $\lambda_{n+1} > 1$ оценить остаток

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} e^{-\alpha \sqrt{p}} p^{-\lambda_{n+1}} \rho_n(p) dp = \\ & = t^{2\lambda_{n+1} - 2} \int_{t^{2\gamma - i\infty}}^{t^{2\gamma + i\infty}} \exp[1/t(\omega - \alpha \sqrt{\omega})] \omega^{-\lambda_{n+1}} \rho_n \left(\frac{\omega}{t^2} \right) d\omega, \end{aligned}$$

где $\rho_n(p)$ — ограниченная при $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ функция. При фиксированной $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w \rightarrow \pm \infty$ $w^{-\lambda_{n+1}} \exp(-\alpha \sqrt{w}) \rightarrow 0$. Поэтому по лемме 2.8 путь интегрирования можно перенести на прямую $\operatorname{Re} w = \alpha^2/4$. На ней $|\rho_n(w/t^2)| < M$ и

$$\begin{aligned} |\exp[(1/t)(w - \alpha \sqrt{w})]| &= \exp[1/t \operatorname{Re}(w - \alpha \sqrt{w})] \leq \\ &\leq \exp[1/t(\operatorname{Re} w - \alpha \sqrt{\operatorname{Re} w})] = e^{-\alpha^2/4t}. \end{aligned}$$

Следовательно, остаток имеет оценку $O(e^{-\alpha^2/4t} t^{2\lambda_{n+1}-2})$. ■

Теорема 22.11. Если в теореме 22.7 вместо (22.57) при $|p| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq \gamma$ имеем

$$h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\alpha_k \sqrt{p}} p^{\lambda_k}, \quad 0 < \alpha_k \uparrow + \infty, \quad (22.68)$$

то при $t \rightarrow +0$

$$\Omega(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^{-2\lambda_k - 1} t^{-\lambda_k - 1} e^{-\alpha_k^2/4t} H_{2\lambda_k + 1}(\alpha_k/2\sqrt{t}). \quad (22.69)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 22.10, так как в обоих случаях используется формула (22.66). Поскольку $e^{-\alpha_{k+1}^2/4t} = o(t^N e^{-\alpha_k^2/4t})$ при $t \rightarrow +0$, то члены ряда (22.69) образуют шкалу. Пусть $t \leq t_0$, $\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2 = 2\eta$, $\operatorname{Im} w = v$. Остаток ряда (22.68) имеет вид

$$e^{-\alpha_{n+1} \sqrt{p}} p^{\lambda_{n+1}} \rho_n(p), \quad |\rho_n(p)| < M.$$

При оценке остатка ряда (22.69) можно использовать оценки из доказательства теоремы 22.10, если путь перенести на прямую $\operatorname{Re} w = 1/4\sqrt{\alpha_{k+1}^2 - \eta}$. Тогда под знаком интеграла можно отделить множитель $\exp(-\eta \sqrt{w}/t)$, но $|\exp(-\eta \sqrt{w}/t)| \leq \exp(-\eta \sqrt{|v|/2t_0})$. Такой множитель обеспечивает сходимость интеграла при любом λ_{n+1} . Поэтому для остатка получаем оценку

$$\begin{aligned} O(\exp[-(\alpha_{k+1}^2 - \eta)/t] t^{2\lambda_{n+1}-2}) &= \\ = o(\exp[-\alpha_k^2/t] t^{-\lambda_n - 1} H_{2\lambda_n + 1}(\alpha_n/2\sqrt{t})). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 22.12. Пусть 1) $h(p)$ в полосе $\Pi_1(-\gamma_0, \gamma_1)$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, с удаленной точкой $p=0$ удовлетворяет условиям леммы 22.10; 2) в окрестности $p=0$ имеет место разложение

$$h(p) \sim e^{-\alpha\sqrt{p}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{\lambda_k}, \quad \lambda_k \uparrow +\infty. \quad (22.70)$$

Тогда при $t \rightarrow +\infty$

$$\Omega(t) \sim 1/\sqrt{\pi} \exp(-\alpha^2/4t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^{-2\lambda_k-1} t^{-\lambda_k-1} H_{2\lambda_k+1}(\alpha/2\sqrt{t}). \quad (22.71)$$

Доказательство. При $t \rightarrow \infty$

$$t^{-\lambda-1} \exp(-\alpha^2/4t) H_{2\lambda+1}(\alpha/2\sqrt{t}) \asymp t^{-\lambda-1} \mu(t), \quad (22.72)$$

где $\mu(t) = 1$ при всех значениях λ , кроме $|\lambda| \in N$, когда $\mu(t) = t^{-1/2}$. Поэтому члены ряда (22.71), а в худшем случае некоторые их объединения, образуют шкалу. Выберем $0 < \varepsilon < \gamma_0$ и путь деформируем по прямой $\operatorname{Re} p = -\gamma_0 + \varepsilon$ с обходом вокруг начала по дуге окружности $C_{\gamma_0-\varepsilon}$. Для каждого члена ряда (22.70) можно применить формулу (22.66).

При оценке остатка вместо $C_{\gamma_0-\varepsilon}$ берем перерезанную окружность $L_{\gamma_0-\varepsilon}$. На прямой $\operatorname{Re} p = -\gamma_0 + \varepsilon$ согласно лемме 22.10 имеем оценку $o(t^{-N})$, а в интеграле по $L_{\gamma_0-\varepsilon}$ применим подстановку $pt = w$. Получим

$$t^{-\lambda_{n+1}-1} \int_{L_{(\gamma_0-\varepsilon)t}} e^w \exp(-\alpha\sqrt{w/t}) w^{\lambda_{n+1}} \rho_n(w/t) dw.$$

При $\lambda_{n+1} > -1$ путь деформируем по берегам разреза. Каждый интеграл имеет сходящуюся мажоранту $M \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\lambda_{n+1}} du$, поэтому для n -го остатка ряда (22.71) справедлива оценка $O(t^{-\lambda_{n+1}-1})$. ■

Примечания к теоремам 22.10—22.12, 1°. Из (22.70) следует, что в окрестности точки $p=0$ функция $h(p)$ обладает разложением (22.41) при $l=1$, $p_l=0$, $m_{jl}=0$, поэтому имеет место также более простая формула (22.43).

2°. В разложении (22.65) часто встречается функция Эрмита $H_{-m}(z)$, $m \in N_1$. В численных расчетах удобно применять соотношение [256]

$$H_{-n}(z) = \frac{i^{n-1} \sqrt{\pi}}{2^n (n-1)!} H_{n-1}(iz) e^{z^2} \operatorname{erfc} z + \frac{z^{n-2}}{2(n-1)!} \sum_{k=0}^{[n/2]-1} b_{n-2,k} (1/(2z^2))^k, \quad (22.73)$$

где

$$b_{nk} = \frac{(-1)^n (n-k)!}{(n-2k)!} \sum_{j=0}^k \binom{n-k+j}{j} (1/2)^j = \\ = \frac{(-1)^n n! 2^{-k}}{(n-2k)! k!} {}_2F_1(-k, 1; -n; 2).$$

Функции $H_{\pm n-1/2}(z)$ можно выразить с помощью $e^{z^2/2} K_{1/4}(z^2/2)$, $e^{z^2/2} K_{-3/4}(z^2/2)$ и полиномов [256].

3°. Возможно, что $h(p)$ при $p \rightarrow \infty$ имеет составное разложение, состоящее из нескольких рядов вида (22.64) с разными значениями α . Тогда из теоремы 22.11 следует, что достаточно оставить только ряд с наименьшим числом α , так как все остальные ряды входят в любой его остаток.

22.5.4. При оценке остатка в теореме 22.10 фактически применялся метод перевала, так как точка $\alpha^2/4$ является точкой перевала для $\operatorname{Re}(\omega - \alpha\sqrt{\omega})$. Для оценки интеграла (22.30) при $t \rightarrow +0$ этот метод можно применить в более общих случаях. Если $h(p) = e^{g(p)} h_0(p)$, то точки перевала определяются из уравнения $t + g_1(p) = 0$. Для простоты предположим, что это уравнение при малых $t > 0$ имеет единственное решение, действительная часть которого стремится к $+\infty$. При соответствующих дополнительных условиях в качестве критической точки можно брать также некоторое приближение s для корня, $s \rightarrow +\infty$. Поскольку расположение критической точки зависит от t , то нельзя непосредственно применять результаты § 21. Справедлива

Теорема 22.13. Пусть 1) функции $g(p)$ и $h_0(p)$ аналитичны при $\operatorname{Re} p \geq \gamma$; 2) уравнение $t + g_1(p) = 0$ при каждом достаточно малом t имеет единственное решение, которое стремится к бесконечности при $t \rightarrow +0$; 3) можно найти такие функции $s(t) > 0$ и $\rho(t) > 0$, причем $s(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$, что будет иметь место

$$t + g_1(s) = o(\sqrt{g_2(s)}) \quad \text{и} \quad \rho^2(t) g_2(s) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow +0;$$

4) равномерно относительно $\vartheta \in [-\rho, \rho]$ справедливы соотношения

$$g_2(s + i\vartheta) = g_2(s)[1 + o(1)], \quad h_0(s + i\vartheta) = h_0(s)[1 + o(1)];$$

5) при достаточно малом t и $|\tau| \geq \rho(t)$, $p = s + i\tau$, равномерно относительно $s \geq \gamma$ имеет место оценка

$$|e^{g(p)} h_0(p)| \leq (M/\sqrt{g_2(s)}) e^{g(s)} h_0(s) \psi(\tau), \quad (22.74)$$

где $\psi(\tau) = o(1)$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$ и $\int_{\pm\rho(t)}^{\pm\infty} \psi(\tau) d\tau = o(1)$ при $t \rightarrow +0$. Тогда при $t \rightarrow +0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt+g(p)} h_0(p) dp = \exp[st+g(s)] \frac{h_0(s)}{\sqrt{2\pi g_2(s)}} [1+o(1)]. \quad (22.75)$$

Доказательство. Из условий 1) и 5) и леммы 22.8 следует, что путь интегрирования можно перенести на прямую $p=s+i\tau$, $\tau \in (-\infty, \infty)$. Из условия 5) следует также, что формулу (22.75) достаточно доказать для интеграла по отрезку $\tau \in [-\rho, \rho]$. На этом отрезке в силу условия 4) и леммы 21.1 имеем

$$pt+g(p) = st+g(s) + [t+g_1(s)]i\tau - 1/2g_2(s)\tau^2 [1+o(1)],$$

причем из 3) следует, что $g_2(s) > 0$. Поэтому с учетом 3) и 4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\rho}^{s+i\rho} e^{pt+g(p)} h_0(p) dp &= \frac{1}{\pi \sqrt{2g_2(s)}} e^{st+g(s)} h_0(s) \times \\ &\times \int_{-\rho \sqrt{g_2/2}}^{\rho \sqrt{g_2/2}} \exp[v o(1) - v^2(1+o(1))] [1+o(1)] dv. \end{aligned}$$

Отсюда согласно леммам 17.4 и 21.3 следует (22.75). ■

Примечания. 1°. Можно указать признаки, при которых выполнено условие 5). Один из них приведен в работе [48].

2°. Условием 3) функция $s(t)$ не определяется однозначно, но в силу других условий при выборе другой функции $s(t)$ вместо (22.75) получаем выражение, отличающееся от (22.75) на множитель $1+o(1)$. Условие 2) необходимо, так как при наличии нескольких точек перевала нужно еще исследовать их расположение на карте, возможности деформирования пути и порядок каждого вклада.

В качестве примера рассмотрим $h(p) = \exp(-\alpha p^\beta) p^\lambda$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$, λ — действительное число. Имеем точную точку перевала $s = (\alpha\beta/t)^\mu$, $\mu = (1-\beta)^{-1} > 1$, $s \rightarrow +\infty$, при $t \rightarrow +0$, $st+g(s) = -(\alpha\beta)^\mu t^{1-\mu}/\beta\mu$, $g_2(s) = \alpha\beta(1-\beta)s^{\beta-2}$. Легко проверить выполнение условий 1)–4), причем $\rho = s^\kappa$, где $\kappa \in \left(1 - \frac{\beta}{2}, 1\right)$, $\rho \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$.

Пусть $p = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, $r = s/\cos\varphi$, $\tau = s \operatorname{tg}\varphi$. Тогда $|\exp(-\alpha p^\beta) p^\lambda| = r^\lambda \exp[-\alpha r^\beta \cos\beta\varphi]$. В силу четности достаточно рассмотреть функцию (22.74) при $\tau \in [s^\kappa, \infty)$. Имеем

$$\exp(-\alpha r^\beta \cos\beta\varphi) r^\lambda < s^\lambda \exp(-\alpha s^\beta) \exp[-\alpha \tau^\beta F(\varphi)] (2\tau)^\lambda,$$

где $F(\varphi) = (\cos\beta\varphi - \cos^\beta\varphi) \sin^{-\beta}\varphi$. Эта функция монотонно воз-

растает при $\varphi \in [0, \pi/2]$, так как $F'(\varphi) = \beta [\cos^{\beta-1}\varphi - \cos(\beta-1)\varphi] \sin^{-\beta-1}\varphi$, но $\cos^{\beta-1}\varphi > \cos(\beta-1)\varphi$ при $\beta \in (0, 1)$, что можно проверить подобным образом. Поэтому существует такое $c > 0$, что при $\tau \geq s^c$

$$\exp[-\alpha\tau^\beta F(\varphi)] < \exp(-\alpha c\tau^\beta),$$

$$\int_{s^c}^{\infty} |\exp(-\alpha p^\beta) p^\lambda| d\tau = o(\exp(-\alpha s^\beta s^{-N})).$$

Следовательно, условие 5) тоже выполнено.

Поэтому при $t \rightarrow +0$ имеем оценку

$$\Omega_\lambda(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(pt - \alpha p^\beta) p^\lambda dp =$$

$$= \sqrt{\mu/2\pi} (\alpha\beta)^{\mu(\lambda+1/2)} t^{-\mu(\lambda+1-\beta/2)} \exp[-(\alpha\beta)^\mu t^{1-\mu}/\beta\mu] [1 + o(1)]. \quad (22.76)$$

С помощью некоторой модификации для интеграла (22.76) можно построить также асимптотическое разложение. Подстановкой $p = (\alpha\beta)^\mu \omega t^{-\mu}$ получаем

$$\Omega_\lambda(t, \alpha, \beta) = t^{-(\lambda+1)\mu} (\alpha\beta)^{\mu(\lambda+1)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} \exp[(\alpha\beta)^\mu t^{1-\mu} (\omega - \omega^\beta/\beta)] \omega^\lambda d\omega.$$

Поскольку $t^{1-\mu} \rightarrow \infty$, то следует применить обычный метод перевала. После некоторых вычислений по формуле (19.21) при $t \rightarrow +0$ получаем

$$\Omega_\lambda(t, \alpha, \beta) \sim \sqrt{\mu/2\pi} (\alpha\beta)^{\mu(\lambda+1)} t^{-\mu(\lambda+1)} \exp[-(\alpha\beta)^\mu t^{1-\mu}/\beta\mu] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} b_k 1/\sqrt{\pi} \Gamma(k+1/2) [(\alpha\beta)^\mu t^{1-\mu}]^{-k-1/2}, \quad (22.77)$$

где b_k определяется аналогично, как a_k в (12.80).

В случае $\beta = 1/m$, $m \in N_2$, оригинал функции $p^\lambda \exp(-\alpha p^{1/m})$, $\operatorname{Re} \lambda > -1$, можно выразить как линейную комбинацию гипергеометрических функций ${}_1F_{m-1}$ [350] и найти разложение (22.77) другим путем с помощью интеграла типа Меллина—Барнса (см. § 23). Частные случаи рассмотрены также в [335, 336].

Если в интеграле (22.76) вместо p^λ введем множитель $h_0(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-\lambda_k}$ при $p \rightarrow \infty$, $\lambda_k \uparrow +\infty$, то из (22.76) следует, что, интегрируя ряд почленно, получаем асимптотическое разложение. Его можно перегруппировать по степенной шкале с учетом (22.77). Следовательно, получаем заметное обобщение теоремы 22.10.

22.5.5. Иногда целесообразно применять одновременное разложение функции нагрузки в окрестности особых точек с одинаковой действительной частью. Рассмотрим пример.

Теорема 22.14. Пусть 1) функция $h(p)$ в полосе $\Pi_2(-\gamma_0, \gamma_1)$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, с удаленными точками $p = \pm i$ удовлетворяет условиям леммы 22.10; 2) в окрестностях точек $p = \pm i$ имеет место разложение

$$h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p^2 + 1)^{\lambda_k}, \quad \lambda_k \uparrow +\infty. \quad (22.78)$$

Тогда при $t \rightarrow +\infty$

$$\Omega(t) \sim \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(-\lambda_k)} (2/t)^{\lambda_k + 1/2} J_{-\lambda_k - 1/2}(t). \quad (22.79)$$

Доказательство основано на формуле [5]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} (p^2 + 1)^\lambda dp = \sqrt{\pi} / \Gamma(-\lambda) (2/t)^{\lambda + 1/2} J_{-\lambda - 1/2}(t), \quad (22.80)$$

где L — составная петля, обходящая разрезы, проведенные из точек $p = \pm i$ параллельно лучу $\arg p = \pi$; λ — любое действительное число. Так же как в доказательстве теоремы 22.2, путь интеграла (22.30) деформируем по прямой $\operatorname{Re} p = -\gamma_0 + \varepsilon < 0$ с обходами вокруг $p = \pm i$. Согласно лемме 22.10 интеграл по прямой имеет оценку $o(t^{-N})$, и остается только интеграл по искривленной части C_0 . При интегрировании отдельного члена ряда (22.78) по C_0 с погрешностью $o(t^{-N})$ C_0 можно дополнить до L и использовать формулу (22.80). Остаток ряда (22.78) на окружностях $L_{\gamma_0 - \varepsilon, j}$ вокруг $p = \pm i$ имеет вид $(p \pm i)^{\lambda_{n+1}} \rho_{nj}(p)$, $|\rho_{nj}(p)| < M$, $j = 1, 2$. Дальнейшие оценки при $\lambda_{n+1} > -1$ аналогичны оценкам остатка в доказательстве теоремы 22.2. Получаем $O(t^{-\lambda_{n+1}-1})$. Поэтому (22.79) — сильноасимптотическое разложение относительно шкалы $\{t^{-\lambda_k-1}\}$. ■

Примечания. 1°. При $\lambda_k \in N$ k -й член в (22.79) равен нулю, но все члены не могут обращаться в нуль, так как $p = \pm i$ являются точками ветвления. Если число λ_k , для которых $\lambda_k \in N$, конечно, то следует учитывать дальнейшие особые точки функции $h(p)$.

2°. Если функция $h(p)$ разлагается по степеням $(p^2-1)^{\lambda_k}$, то оригинал разлагается по функциям $I_{-\lambda_k-1/2}(t)t^{-\lambda_k-1/2}$ [171].

3°. Во всех предыдущих теоремах этого параграфа требуется сходимость интеграла (22.30). Это требование относится также к лемме 22.10. Однако можно предполагать, что допустимо деформирование пути по лучам, параллельным лучам $\arg p = \gamma_i$, $i=1, 2$, $\gamma_1 > \pi/2$, $\gamma_2 < -\pi/2$. Тогда сходимость интеграла обеспечивается, если на этих лучах выполнено условие (22.9). Некоторые авторы рассматривают только случай, когда уже заранее задан интеграл по такому пути (т. е. без деформирования контура) [66, 171, 252, 314, 351].

22.6. Методы обращения преобразования Лапласа

22.6.1. На практике часто бывает, что обращение преобразования Лапласа не выполнимо с помощью таблиц прямого и обратного преобразования. Таких таблиц много [2, 238—240, 290, 296, 341, 355]. Кроме применения формулы (22.30) и некоторых ее модификаций можно указать следующие общие группы приемов обращения.

1°. Применение других формул обращения.

2°. Отыскание оригинала в виде функционального ряда.

3°. Применение приближенных методов.

Каждая группа, в свою очередь, содержит разные методы. По всем методам имеется обширная литература, которая частично приведена в работах [232, 244, 280]. Довольно полный список литературы содержится в [382]. Рассмотрим основные методы.

1°. Методы, относящиеся к первой группе, разделяются на методы, в которых применяются разные интегральные формулы обращения [66, 356], и методы, по которым используются формулы, содержащие предельный переход [66, 261, 267, 313, 344, 348, 349, 356]. В последних формулах используются как дифференциальные и интегральные, так и разностные операторы, а также предельный переход в конечной сумме [261, 267]. Примером является формула Уиддера—Поста (18.135). В [349] показано, что в ней k/t можно заменить на $[k + \Theta(k)]/t$, где $\Theta(k) = o(k)$; в частности, k/t можно заменить на $[k/t]$. Некоторые формулы для обращения общих интегральных преобразований приведены в [92]. Следует отметить, что вся эта группа методов имеет в основном только теоретическое значение.

2°. По второй группе методов оригинал $\Omega(t)$ ищется в виде суммы ряда

$$\Omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(t). \quad (22.81)$$

Первым такой метод предложил Хевисайд [312].

Коэффициенты c_k вычисляются разными методами. Можно попытаться разложить $h(p)$ в ряд по функциям $F_k(p) \doteq f_k(t)$ и выполнить почленное обращение. Если $\{f_k(t)\}$ — полная ортонормированная система на $[a, b]$, $0 \leq a < b \leq \infty$, с некоторым весом $\rho(t)$, то c_k можно выразить согласно формуле обращения (22.30) в виде контурного интеграла [235, 236]. С помощью формальных действий получаем

$$\begin{aligned} c_k &= \int_a^b f_k(t) \rho(t) \Omega(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f_k(t) \rho(t) dt \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h(p) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h(p) dp \int_a^b e^{pt} f_k(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} K(p, k) h(p) dp. \end{aligned} \quad (22.82)$$

Иногда для c_k можно найти явные выражения. Однако, как правило, по ним без значительной потери точности можно вычислить лишь первые два десятка коэффициентов [265], что при больших k обычно недостаточно. Чтобы справиться с этим затруднением, по формуле (22.82) целесообразно искать асимптотику для c_k при больших k . Такой метод предложен в работах [234, 264]. Он назван F — A -методом (Фурье-асимптотический) и фактически относится к третьей группе методов.

Следует отметить, что методы, отнесенные к п. 2°, нередко служат только теоретической базой для разработки широкой группы аналитических приближенных методов. Однако в задачах математической физики и теории специальных функций часто оригинал строится в виде (22.81) с точными коэффициентами. Это достигается либо разложением $h(p)$ в подходящий ряд и почленным обращением, либо применением леммы 22.9 [66, 209]. Пример приведен в п. 13.5.2, 1°.

22.6.2. Практически наиболее важными являются приближенные методы, которые разделяются на численные и аналитические. Перед рассмотрением этих методов следует отметить, что задача о приближенном обращении не поставлена корректно, так как малые изменения изображения могут вызвать большие изменения оригинала. Об этом свидетельствует соотношение

$\sin \alpha t \doteq \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$. Легко убедиться в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\alpha(\sigma_0)$, что при $\operatorname{Re} p \geq \sigma_0 > 0$ будет иметь место

$\left| \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right| < \varepsilon$. В то же время в определенных точках $|\sin at| = 1$.

1°. По численным методам приближенный оригинал строится по значениям изображения в отдельных точках. Применяются разные квадратурные формулы к интегралу обращения или численно решается интегральное уравнение

$$\int_0^1 u^{p-1} \Omega(-\ln u) du = h(p). \quad (22.83)$$

Некоторые результаты, полученные первым методом, даны в [244, 245]. Второму методу посвящены монография [280], а также другие работы. Обзор разных модификаций этих методов приведен в [232].

Вместо (22.83) можно применять также другие интегральные уравнения [244]. Выше было показано, что поведение оригинала при $t \rightarrow +\infty$ определяется поведением изображения вблизи особых точек p_h , в которых $\operatorname{Re} p_h$ имеет максимальное значение, а поведение при $t \rightarrow +0$ — поведением изображения при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$. Если эти факторы в применяемых формулах не учитывать, то можно ожидать, что точность приближения не будет отличной. Несмотря на этот недостаток указанные методы применяются довольно часто.

2°. В аналитических методах ищется приближенное аналитическое выражение для оригинала. Применяются разные приемы.

А. К приближенным аналитическим выражениям причисляются все асимптотические разложения, построенные в предыдущих пунктах.

Б. Оригиналу выражается как частичная сумма ряда (22.81). Имеются разные методы, по которым коэффициенты c_h вычисляются приближенно с помощью значений изображения или его производных в разных точках [232, 244, 357, 362]. Обзор литературы приведен в работе [232].

Более точные результаты достигаются F — A -методом, так как с его помощью сравнительно точно можно найти c_h при больших h [233] и использовать для практического счета частичные суммы с большими индексами.

В. Для приближенного обращения можно построить много формул, основанных на следующей общей идее. Пусть ряд $g(z) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} a_h z^h$ сходится при $|z| < R$, $R \geq 1$, и $h(p)$ при $\operatorname{Re} p \geq \sigma - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, является изображением, к которому применима

формула обращения. Рассмотрим функцию $h_0(p) = h(p + \sigma) \doteq e^{-\sigma t} \Omega(t) = \Omega_0(t)$. Согласно свойству запаздывания для преобразования Лапласа [209] имеем

$$\begin{aligned} \Omega^*(t, T) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h_0(p) g(e^{-pT}) dp = \\ &= \Omega_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Omega_0(t - kT) \eta(t - kT), \end{aligned} \quad (22.84)$$

если почленное интегрирование допустимо; $\eta(t)$ — единичная функция, $\eta(0) = 1$, $T > 0$. При $t \in [0, T]$ имеем $\Omega_0(t) = \Omega^*(t, T)$. Значения для $\Omega^*(t, T)$ строятся приближенно. Поскольку (22.84) имеет место при каждом фиксированном $T > 0$, то для $\Omega^*(t, T)$ асимптотическое выражение можно искать при $T \rightarrow +\infty$. Такой метод в работе [266] назван *асимптотическим расширением интервала*, а $g(z)$ — *опорной функцией срезания оригинала*.

Имеется также некоторая модификация соотношения (22.84). Пусть $g(z) = (1 + z^2)^{-1}$. Применяя леммы 22.8 и 22.9, получаем

$$\begin{aligned} \Omega^*(t, T) &= 1/2T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[i\pi(k+1/2)T] h[\sigma + i\pi(k+1/2)T] + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{e^{pt} h_0(p)}{1 + e^{-2pT}} dp. \end{aligned} \quad (22.85)$$

Для интеграла в (22.85) можно искать оценку, используя особые точки функции $h_0(p)$. В численных расчетах следует также варьировать свободный параметр σ .

Интересно отметить, что сумма в (22.85) появляется также при численном интегрировании (22.30). Варьируя функцию $g(z)$, можно получить разные квадратурные формулы [266], для оценки погрешности которых используются формулы (22.84) и (22.85). Разные формулы, близкие к (22.85) и полученные иным способом, рассмотрены в [248, 249, 298, 315]. Метод, изложенный в данном пункте, подробно исследован в [234].

Г. Подынтегральная функция (22.30) заменяется более простой функцией, чтобы можно было вычислить интеграл или найти его асимптотическое разложение. Обычно заменяется изображение (см. примеры, приведенные ниже), но можно заменить также e^{pt} . В [380] e^{pt} заменено рациональной функцией.

В работах, в которых использован этот метод, как правило, отсутствуют исследования оценки допущенной погрешности, что обычно является весьма сложной задачей. Для некоторой оценки погрешности можно применять формулы (22.84) и (22.85): функцию $h(p)$ следует заменять на $h_n(p) \doteq \Omega_n(t)$ и по указанным формулам оценивать разность $\rho_n(t) = \Omega(t) - \Omega_n(t)$. При этом функцию $\Omega_n(t)$ следует выбирать так, чтобы $h(p) - h_n(p)$ достаточно быстро убывала при $\text{Im } p \rightarrow \pm \infty$. Сумму в правой части (22.84), содержащей неизвестные функции, целесообразно оценивать асимптотическими методами. Эта идея впервые высказана в работах [248, 249], где приведены также численные примеры. По данным вопросам примеры даны также в [234].

22.6.3. Рассмотрим два примера к п. Г.

1°. В работе [338] выполняется обратное преобразование функции

$$h_1(p) = E(p) (1 + 2\rho/p)^{-1/2} \exp(-\alpha p \sqrt{1 + 2\rho/p}), \quad (22.86)$$

где

$$\rho = -\beta \sqrt{p} i H_0^{(1)}(i\gamma/\sqrt{p}) / H_1^{(1)}(i\gamma/\sqrt{p}) \equiv \beta \sqrt{p} H(p),$$

$$\alpha, \beta, \gamma > 0, \quad E(p) = 1 \text{ или } E(p) = e^{-\mu\sqrt{p}}, \quad \mu > 0.$$

Проводятся замены $H(p) \sim 1$, $\sqrt{1 + 2\beta H/\sqrt{p}} \sim 1 + \beta H/\sqrt{p}$. После этого применяются известные формулы, указанные в таблицах и дающие приближение оригинала при малых t .

2°. В работе [282] рассматривается обращение для

$$h_2(p) = \frac{1}{p} \frac{2K_1(p) - pK_0(p)}{2K_1(p) + 3pK_0(p)}. \quad (22.87)$$

Проводятся замены

$$K_0(p) \sim e^{-p\sqrt{\pi/2p}} P_n(p), \quad K_1(p) \sim e^{-p\sqrt{\pi/2p}} Q_n(p), \quad (22.88)$$

где полиномы $P_n(p)$ и $Q_n(p)$ определяются так, чтобы при соответствующих значениях p в (22.88) вместо « \sim » стояли знаки равенства. Эти значения p выбираются произвольно. После упрощений вместо $h_2(p)$ получается рациональная функция, которую следует разбить на простейшие дроби. При этом здесь также допускается некоторая погрешность. Впервые такая аппроксимация применялась в работе [323]. Она исследуется также в [378].

22.7. Примеры

22.7.1. В литературе имеется большое количество примеров с применением теорем 22.1—22.12. Особенно часто такие примеры встречаются в работах прикладного характера по технике и математической физике. Как указано в п. 22.2, иногда с помощью деформирования пути можно получить разложение при комплексном t , $|\arg t| \leq \pi/2 - \varepsilon$. Чтобы построить разложение при других $\arg t$, при действительном t целесообразно применять подстановку $pt = \omega$ и принцип аналитического продолжения вместе с поворотом пути интегрирования (см. п. 4°).

1°. Пусть интеграл (22.30) существует при $\operatorname{Re} p \in [-\gamma_0, \gamma_1]$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, и функция $h(p)$ в этой полосе аналитична и ограничена, а в окрестности $p=0$ имеет место разложение $h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{\lambda_k}$, $0 \leq \lambda_k \uparrow +\infty$. Найдем разложение при $t \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h(p) (\ln p)^{-1} dp, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_1], \quad (22.89)$$

не прибегая к теореме 22.3, но используя более общую шкалу. При $\lambda > 1$, $\operatorname{Re} p > 1$ имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_{\lambda}^{\infty} \frac{t^{u-1}}{\Gamma(u)} du = \int_0^{\infty} \frac{dv}{\Gamma(\lambda+v)} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\lambda+v-1} dt = \frac{1}{p^{\lambda} \ln p},$$

причем изменение порядка интегрирования легко обосновать. Поскольку полученное изображение удовлетворяет условию УОЗБ в п. 22.2.1, то при $\gamma_2 > 1$, $\gamma \in (0, 1)$ можно применить формулу обращения, а после этого лемму 22.9:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{t^{u-1}}{\Gamma(u)} du &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{\lambda} \ln p} dp = \\ &= e^t + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{\lambda} \ln p} dp = e^t + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^{pt}}{p^{\lambda} \ln p} dp. \end{aligned} \quad (22.90)$$

Согласно принципу перманентности формула (22.90) сохраняется при всех действительных λ и $t > 0$, поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \frac{e^{pt}}{\ln p} p^\lambda dp = \int_{-\lambda}^{\infty} \frac{t^{u-1}}{\Gamma(u)} du - e^t = \\ & = t^{-\lambda-1} \int_0^{\infty} \frac{t^y}{\Gamma(y-\lambda)} dy - e^t = v(t, -1-\lambda) - e^t \equiv T(t, -\lambda), \quad (22.91) \end{aligned}$$

причем функция

$$v(t, \alpha) = t^\alpha \int_0^{\infty} \frac{t^u du}{\Gamma(u+\alpha+1)} \quad (22.92)$$

называется *функцией Вольтерра* [360]. Ее асимптотику при $t \rightarrow \infty$ можно найти из (8.55). Однако из (22.27) непосредственно следует, что $T(t, -\lambda_k) \asymp t^{-\lambda_k-1} (\ln t)^{-1}$, поэтому эти функции при $\lambda_k \uparrow +\infty$ образуют шкалу.

Разложение для (22.89) строится по стандартному приему: путь интегрирования в (22.89) деформируется в прямую $\operatorname{Re} p = -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq \gamma_0$, $\varepsilon < 1$, и перерезанную окружность L_ε вокруг начала. Интеграл по прямой имеет оценку $o(t^{-N})$, а в интеграле по L_ε для отдельных членов подынтегрального разложения применяется (22.91) с погрешностью $o(t^{-N})$. Оценим при $\lambda_{n+1} > -1$ остаток:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{e^{pt}}{\ln p} p^{\lambda_{n+1}} \rho_n(p) dp \right| = \\ & = \left| t^{-\lambda_{n+1}-1} \int_{L_{\varepsilon t}} \frac{e^{\tau \lambda_{n+1}}}{\ln \tau - \ln t} \rho_n\left(\frac{\tau}{t}\right) d\tau \right| < \\ & < M t^{-\lambda_{n+1}-1} \ln(1/\varepsilon) \int_0^{\infty} e^{-\tau \lambda_{n+1}} d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, при $t \rightarrow +\infty$ и $\gamma \in (0, 1)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h(p) \frac{1}{\ln p} dp \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k T(t, -\lambda_k), \quad (22.93)$$

а при $\gamma > 1$ к правой части (22.93) следует добавить $e^t h(1)$. Более общее разложение будет приведено в п. 22.7.3.

2°. При решении смешанной задачи для уравнений параболического типа в случае осевой симметрии приходится находить

оригинал для разных отношений или произведений модифицированных функций Бесселя. В качестве примера рассмотрим [305]

$$h_\nu(p) = \frac{1}{p} \frac{K_\nu(\sqrt{pb}) I_\nu(\sqrt{pr}) - \alpha I_\nu(\sqrt{pb}) K_\nu(\sqrt{pr})}{K_\nu(\sqrt{pb}) I_\nu(\sqrt{pa}) - \beta I_\nu(\sqrt{pb}) K_\nu(\sqrt{pa})}, \quad (22.94)$$

$0 < a < r \leq b$, α и β — действительные числа. Подставляя вместо K_ν и I_ν их асимптотические разложения (8.41) и (10.64), после формальных действий при $p \rightarrow \infty$, $|\arg p| \leq \pi/2$, $r < b$ получаем

$$h_\nu(p) \sim \sqrt{a/r} e^{-\sqrt{p}(r-a)}/p \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\sqrt{p})^{-k} + O(e^{-2\sqrt{p}(b-r)}) \right].$$

При $r=b$ имеем другие коэффициенты c_k и оценку $O(e^{-2\sqrt{p}(b-a)})$. Для вычисления c_k можно составить рекуррентные формулы. Согласно теореме 22.10 с учетом примечания 3° при $t \rightarrow +0$

$$\Omega_\nu(t) \sim \sqrt{a/\pi r} \exp \left[-\frac{(r-a)^2}{4t} \right] \sum_{k=0}^{\infty} c_k 2^{k+1} H_{-k-1}((r-a)/2\sqrt{t}) t^{k/2}. \quad (22.95)$$

Асимптотику при $t \rightarrow +\infty$ исследуем в случае, когда $\nu=1$. Предположим, что все корни знаменателя находятся в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$. Применяя разложения для $K_1(z)$ и $I_1(z)$ в окрестности $z=0$, после преобразований получаем

$$h_1(p) = \frac{1}{p} \frac{(1-\alpha) \ln p \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b, r) p^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(b, r, \alpha) p^k}{(1-\beta) \ln p \sum_{k=0}^{\infty} a_k(b, a) p^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(b, a, \beta) p^k}. \quad (22.96)$$

Далее приходится различать следующие случаи.

А. $\alpha=\beta=1$. Точка $p=0$ является простым полюсом с вычетом $A_0(b, r, \alpha)/A_0(b, a, \beta)$, и для уточнения асимптотики следует учитывать полюсы, находящиеся в левой полуплоскости. Получаем разложение типа (22.40).

Б. $\beta=1$, $\alpha \neq 1$. Функция $h_1(p)$ принимает вид

$$h_1(p) = \ln p \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k + 1/p \sum_{k=0}^{\infty} B_k p^k,$$

откуда согласно (22.44) при $t \rightarrow +\infty$

$$\Omega_1(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^{k+1} k! t^{-k-1} + B_0. \quad (22.97)$$

В. $\beta \neq 1$, $A_0(b, a, \beta) \neq 0$. После преобразований из (22.96) в окрестности $p=0$ получаем

$$h_1(p) \sim 1/p \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(\ln p) p^k,$$

откуда согласно теореме 22.2 с учетом примечания 2° при $t \rightarrow +\infty$ следует разложение

$$\Omega_1(t) \sim c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k} Q_{k-1}(\ln t), \quad (22.98)$$

где $P_k(u)$ и $Q_k(u)$ — полиномы степени k .

Г. $\beta \neq 1$, $A_0(b, a, \beta) = 0$. В окрестности $p=0$ имеем разложение

$$h_1(p) \sim \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} (\ln p)^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} D_{jk} p^j, \quad D_{00} = 0.$$

Согласно п. 22.3 во внутреннем ряду достаточно оставить только свободные члены, после чего следует применить теорему 22.4. В итоге при $t \rightarrow +\infty$

$$\Omega_1(t) \sim \frac{t}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} E_k (\ln 1/t)^{-k}. \quad (22.99)$$

22.7.2. Асимптотические разложения разных функций часто строятся следующим образом. К функции применяют преобразование Лапласа, а потом с помощью формулы обращения функцию выражают через контурный интеграл. Такой метод разложения называется *неявной асимптотикой Абеля* [66]. Если асимптотика оригинала в интегральном преобразовании исследуется по асимптотике изображения, а также по свойствам оригинала без применения формулы обращения, то имеем *тауберову асимптотику*.

В некоторых случаях с помощью неявной асимптотики Абеля можно построить асимптотические разложения функций, опреде-

ляемых рядом $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\lambda_k + 1)} t^{\lambda_k}$, сходящимся при всех $t > 0$, если его можно преобразовать почленно. Согласно лемме 5.1 нетрудно показать, что это действие законно, если полученный после почленного преобразования ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-\lambda_k - 1}$ сходится вне некоторого круга $|p| > R$. Назовем это требование *условием преобразуемости ряда*. Интеграл Лапласа тогда сходится при $\text{Re } p > R$.

3°. Рассмотрим функцию Харди—Барнса [276, 311]

$$G_{\beta}(t, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + \alpha)^{\beta}}{k!} t^k, \quad \beta > 0. \quad (22.100)$$

При $\beta = n \in \mathbb{N}$ $G_{\beta}(t, \alpha)$ выражается в виде $e^t P_n(t)$. Поэтому рассмотрим случай, когда $\beta \notin \mathbb{N}$ и $\alpha = 0$. Отметим, что при $\text{Re } \alpha > 0$, $\text{Re } \beta > 0$ имеет место формула [311]

$$G_{-\beta}(t, \alpha) = 1/\Gamma(\beta) \int_0^1 e^{tv} v^{\alpha-1} (\ln 1/v)^{\beta-1} dv, \quad (22.101)$$

которую легко доказать почленным интегрированием. Асимптотическое разложение функции (22.101) при $|t| \rightarrow \infty$ и всех $\arg t$ легко получить по теоремам из § 16. Согласно условию преобразуемости при $\text{Re } p > 1$ получаем

$$G_{\beta}(t, 0) \doteq h_{\beta}(p) = p^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta} p^{-k}.$$

Можно доказать формулу [6, 121]

$$\begin{aligned} h_{\beta}(p) &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{p(\ln p)^{\beta+1}} + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(-\beta - k)}{k!} \left(\ln \frac{1}{p}\right)^k = \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{p(\ln p)^{\beta+1}} + \frac{1}{p} g_{\beta}(p), \quad |\ln p| < 2\pi. \end{aligned} \quad (22.102)$$

В [6] доказано, что $g_{\beta}(p)$ аналитична и ограничена при $|p| \geq e^{-2\pi}$. Согласно (20.28)

$$p^{-1}(\ln p)^{-\beta-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{(k-\beta)}}{k!} (p-1)^{k-\beta-1},$$

и метод Хара с учетом формулы (22.43) при $t \rightarrow +\infty$ приводит к разложению

$$G_\beta(t, 0) \sim -1/\pi\Gamma(\beta+1)e^t \sin \beta\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k^{(h-\beta)}}{k!} \Gamma(k-\beta) t^{-k+\beta}. \quad (22.103)$$

При $\beta = n$ ряд обрывается и совпадает с верхним выражением. С учетом (22.102) путь интегрирования в формуле обращения можно деформировать так, чтобы его концы лежали на берегах разреза. Поэтому разложение (22.103) имеет место при $|\arg t| \leq \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Кроме того, эта формула сохраняется также при $\beta < 0$, $|\beta| \in \mathbb{N}$, так как по принципу аналитического продолжения сохраняется (22.102). Асимптотика функции $G_\beta(t, \alpha)$ при $\beta < 0$ будет исследована также в п. 23.4.4 и 24.4.2.

4°. Функция

$$E_\rho(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k/\rho + 1)}, \quad \rho > 0, \quad (22.104)$$

называется *функцией Миттага—Лефлера* [337]. Преобразуя ряд для $E_\rho(t^{1/\rho})$, имеем $E_\rho(t^{1/\rho}) \doteq p^{-1}(1-p^{-1/\rho})^{-1}$. Поэтому

$$E_\rho(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt^\rho} p^{1/\rho-1}}{p^{1/\rho}-1} dp, \quad \gamma > 1.$$

Чтобы построить разложение при разных $\arg t$, применим при $t > 0$ подстановку $pt^\rho = \omega$. Тогда согласно принципу аналитического продолжения при всех t получаем

$$E_\rho(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} \frac{e^{\omega} \omega^{1/\rho-1}}{\omega^{1/\rho}-t} d\omega, \quad \gamma_1 > |t|^\rho. \quad (22.105)$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы $\omega_k = = t^\rho e^{i2k\pi\rho}$ и точку ветвления $\omega = 0$, если $\rho \neq 1/n$, $n \in \mathbb{N}_1$. Легко убедиться в том, что путь можно деформировать по берегам разреза вдоль $(-\infty, 0]$, если $\arg t \neq \pm\pi/\rho$, и добавить вычеты в полюсах.

Интегралы по берегам следует разложить согласно формуле (14.12). После их объединения при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq \pi$ имеем

$$E_\rho(t) \sim \rho \sum_{\substack{|\arg t + 2k\pi| \leq \pi}} \exp[t^\rho e^{i2k\pi\rho}] - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right) \sin \frac{\pi}{\rho}(k+1)}{t^{k+1}}. \quad (22.106)$$

При $\arg t = \pm \pi/\rho$ разрез можно брать вдоль луча $\arg w = \pi - \eta$, $\eta > 0$. Тогда получаем прежний результат. Если $\rho = 1/n$, $n \geq 2$, то в (22.106) остается только сумма вычетов и будем иметь точное равенство. При $\rho \geq 1$, $|\arg t| \leq \pi/\rho$ сумма совпадает с $\exp t^\rho$. При $\rho = m/l$, $m \in N_1$, $l = N_1$ из равенств

$$\frac{\rho^{l/m-1}}{\rho^{l/m}-1} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho(\rho^{l/m}-1)}, \quad \rho^l = y,$$

$$\frac{1}{y^{l/m}-1} = \frac{y}{y-1} \sum_{k=1}^m y^{-k/m} = \sum_{k=1}^m y^{-k/m} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)$$

следует, что $E_{m/l}(t)$ выражается с помощью элементарных функций и неполной Γ -функции.

Следует отметить, что в отечественной литературе исследуются также родственные функции:

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} = t^\alpha (1+\alpha) E_{\alpha+1}'(\beta t^{1+\alpha}), \quad (22.107)$$

названная функцией Работнова [232, 250, 251], и

$$E_\rho(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k/\rho + \mu)}, \quad \rho > 0, \quad (22.108)$$

названная тоже функцией Миттага—Лефлера [241]. Интересно отметить, что функции (22.92) и (22.108) связаны соотношением

$$v(t, \mu) = \int_{\mu}^{\mu+1/\rho} E_\rho(t^{1/\rho}, 1+u) t^u du, \quad (22.109)$$

что можно установить подстановкой (22.108) в (22.109) и по-

членным интегрированием [241]. В работах [303, 368] исследована асимптотика более общей функции

$$E(t, \mu, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(n)t^n}{\Gamma(\gamma n + \mu)}, \quad (22.108')$$

если $h(z)$ при $\operatorname{Re} z \geq x_0$ имеет асимптотическое разложение в ряд по обратным факториалам или их обобщениям.

К сожалению, использованный метод для построения асимптотического разложения функции $E_p(t)$ при всех $\arg t$ применим лишь в редких случаях. Однако при исследовании асимптотики

ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\lambda_k + 1)} t^{\lambda_k}$ имеется другая возможность: на луче

$\arg t = \varphi$ следует подставить $t = re^{i\varphi}$ и исследовать асимптотику относительно $r > 0$. Иногда достаточно t заменить на $te^{\pm i\pi}$.

22.7.3, 5°. С помощью неявной асимптотики Абеля иногда можно построить асимптотические разложения некоторых интегралов. В качестве примера рассмотрим функцию

$$\mu(t, \beta, \alpha) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\beta + 1)} \int_0^\infty \frac{t^\tau \tau^\beta d\tau}{\Gamma(\alpha + \tau + 1)}, \quad \alpha > -1, \beta > -1, \quad (22.110)$$

обобщающую функцию Вольтерра (22.92), так как $\nu(t, \alpha) = \mu(t, 0, \alpha)$. Применяя преобразование Лапласа, получаем

$$\mu(t, \beta, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{\alpha+1} (\ln p)^{\beta+1}} dp, \quad \gamma > 1. \quad (22.111)$$

Интеграл (22.111) дает также аналитическое продолжение для $\mu(t, \beta, \alpha)$ при всех β . Поступая аналогично, как в примере 3°, при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ получаем разложение

$$\mu(t, \beta, \alpha) \sim -\frac{\sin \beta \pi}{\pi} e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k^{(k-\beta)}(-\alpha)}{k!} \Gamma(k-\beta) t^{-k+\beta}. \quad (22.112)$$

При других $\arg t$ можно применить подстановку, как в примере 4°. Этот случай рассмотрен в работе [366]. При $\beta + 1 = -n$, $n \in N$, единственной особой точкой является $p = 0$, а при $\beta + 1 = n \in N_1$ точка $p = 1$ является полюсом. В обоих частных случаях получаем иные разложения, которые также приведены в [366].

Отметим еще следующее: хотя функции $\mu(t, \beta, 0)$ и $\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} G_\beta(t, 0)$ при $|\arg t| \leq \pi/2 - \varepsilon$ имеют одинаковые асимптотические разложения, из (22.102) видно, что эти функции не совпадают. При $t \rightarrow +0$ они имеют разные асимптотические выражения.

Функция $\mu(t, \beta, \alpha)$ применима для обобщения теоремы 22.8, если при $|p| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p > \gamma$ $h(p)$ обладает разложением

$$h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-\alpha_k} (\ln p)^{-\beta_k}, \quad (22.113)$$

где при всех $k \in N$ $0 < \alpha_k \leq \alpha_{k+1}$, $-1 < \beta_k \leq \beta_{k+1}$, причем одно неравенство строгое. В силу соотношений

$$t^\tau = \exp(-\tau \ln 1/t), \quad 1/\Gamma(\alpha + \tau + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) \tau^k$$

согласно лемме Ватсона при $t \rightarrow 0$ получаем

$$\mu(t, \beta, \alpha) \sim [t^\alpha / \Gamma(\beta + 1)] \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) \Gamma(\beta + k + 1) (\ln 1/t)^{-\beta - k - 1}. \quad (22.114)$$

Поэтому функции $\mu(t, \beta_k - 1, \alpha_k - 1)$ образуют шкалу. Легко доказать, что из (22.111) и (22.113) при $t \rightarrow +0$ следует разложение

$$\Omega(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu(t, \beta_k - 1, \alpha_k - 1). \quad (22.115)$$

В [162] доказана обратная теорема: из (22.115) следует (22.113).

22.8. Асимптотическое разложение интеграла свертки.

Ряды Меллина

22.8.1. Неявную асимптотику Абеля можно применить также для асимптотического разложения при $t \rightarrow +\infty$ интеграла свертки, так как справедлива формула [66]

$$\Omega_1(t) * \Omega_2(t) \equiv \int_0^t \Omega_1(t-\tau) \Omega_2(\tau) d\tau = h_1(p) \cdot h_2(p),$$

если хотя бы один из интегралов Лапласа от $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ сходится абсолютно [66]. Если оба интеграла сходятся абсолютно при $\operatorname{Re} p \geq \gamma$, то согласно условию УО1

$$\Omega_0(t) = \int_0^t \Omega_1(t-\tau) \Omega_2(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} h_1(p) h_2(p) dp. \quad (22.116)$$

Иногда асимптотику для $\Omega_0(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ можно исследовать по этой формуле. Рассмотрим несколько примеров.

1°. Согласно теореме 22.14 найдем асимптотическое разложение при $t \rightarrow +\infty$ по функциям Бесселя для функции

$$\Omega(t) = \int_0^t e^{\alpha\tau} J_0(\tau) d\tau, \quad \alpha \neq \pm i.$$

Имеем

$$e^{-\alpha t} \Omega(t) = e^{-\alpha t} \cdot J_0(t) \doteq \frac{1}{p+\alpha} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Так как при разложении функции $(p+\alpha)^{-1}$ по степеням p^2+1 в силу равенства $p = \pm \sqrt{p^2+1} - 1$ в окрестностях $p=i$ и $p=-i$ получаем разные коэффициенты разложений, то теорема 22.14 непосредственно неприменима. Поэтому сначала разложим вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \int_0^t \operatorname{sh} \alpha(t-\tau) J_0(\tau) d\tau &\doteq \frac{\alpha}{(p^2-\alpha^2)\sqrt{p^2+1}} = \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha^2+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2+1)^k} (p^2+1)^{k-1/2}, \\ t \int_0^t \operatorname{ch} \alpha(t-\tau) J_0(\tau) d\tau &\doteq \frac{p^2+\alpha^2}{(p^2-\alpha^2)\sqrt{p^2+1}} + \frac{p^2}{(p^2-\alpha^2)(\sqrt{p^2+1})^3} = \\ &= \frac{1}{(\alpha^2+1)(\sqrt{p^2+1})^3} + \frac{1}{(\alpha^2+1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k\alpha^2-1}{(\alpha^2+1)^k} (p^2+1)^{k-1/2}. \end{aligned}$$

Учитывая полюсы $p = \pm \alpha$, по теореме 22.14 после преобразований при $t \rightarrow +\infty$ получаем

$$\int_0^t e^{\alpha\tau} J_0(\tau) d\tau \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{e^{\alpha t} J_1(t)}{\alpha^2+1} + \frac{\sqrt{\pi} e^{\alpha t}}{(\alpha^2+1)t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k\alpha^2 + \alpha t(\alpha^2+1) - 1}{(\alpha^2+1)^k} (-2/t)^k \frac{J_k(t)}{\Gamma(-k+1/2)}. \quad (22.117)$$

При $\alpha = \pm i$ формулы упрощаются. С учетом рекуррентных формул для функций Бесселя получаем равенство

$$\int_0^t e^{\pm i\tau} J_0(\tau) d\tau = te^{\pm it} [J_0(t) \mp iJ_1(t)].$$

Следует отметить, что имеет место также легко непосредственно проверяемая более общая формула [272]

$$\int_0^t e^{i\tau} \tau^{\pm\nu} J_{\nu}(\tau) d\tau = \pm \frac{e^{it} t^{\pm\nu+1}}{2\nu \pm 1} [J_{\nu}(t) \mp iJ_{\nu \pm 1}(t)] + \frac{i(1 \mp 1)}{2\nu(2\nu-1)\Gamma(\nu)},$$

причем при знаке «+» $\operatorname{Re} \nu > -1/2$, при знаке «-» $\nu \neq 1/2$. Асимптотика интеграла $\int_0^t \tau^{\nu} e^{\tau} \cos \tau J_{\nu}(\tau) d\tau$ подобным образом найдена в [246].

2°. Вводим функцию

$$l_{\alpha m}(t, T) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0, T), \\ t^{\alpha-1} (\ln t)^m & \text{при } t \geq T, \end{cases} \quad (22.118)$$

$m \in N$. Интервал $[T, \infty)$, в котором функция $l_{\alpha m}(t, T)$ не равна нулю, называется *носителем*. В общем случае *носитель функции* $f(t)$ — замыкание множества всех точек области определения, в которых $f(t)$ отлична от нуля. Применяется обозначение $\operatorname{supp} f(t)$ (из support). Имеем

$$l_{\alpha m}(t, 1) * l_{\beta n}(t, 1) = \int_1^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha-1} (\ln t)^m dt \int_1^{\infty} e^{-pt} t^{\beta-1} (\ln t)^n dt.$$

Применяя формулы (18.55) и (18.61), согласно которым

$$\int_1^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha-1} (\ln t)^m dt = p^{-\alpha} Q_m(\ln p) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m) p^k,$$

с учетом (22.23), теоремы 22.2 и примечания 2° к ней при $t \rightarrow +\infty$ получаем

$$G_{\alpha, \beta, m, n}(t, 1) = l_{\alpha m}(t, 1) * l_{\beta n}(t, 1) \sim t^{\alpha+\beta-1} C_{m+n}(\ln t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) t^{\alpha-k-1} A_{mk}(\ln t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m) t^{\beta-k-1} B_{nk}(\ln t), \quad (22.119)$$

где A_{jk} и B_{jk} — полиномы степени не выше j , C_j — полином степени не выше $j+1$. Можно построить рекуррентные формулы для их вычисления. Разложение (22.119) можно найти также другим методом, выражая функцию G с помощью гипергеометрических функций Гауса и их производных по параметрам [310]. Разложение, подобное (22.119), сохраняется также для функции $G_{\alpha, \beta, m, n}(t, T)$, $T > 0$, так как с помощью подстановки $t = T\tau$ можно прийти к случаю $T=1$.

22.8.2. Ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k} Q_{m_k}(\ln t), \quad (22.120)$$

где $\operatorname{Re} \lambda_k \uparrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \lambda_k \downarrow -\infty$ при $t \rightarrow 0$, $Q_m(u)$ — полиномы степени m_k , впервые систематически использовались Меллином [332] и поэтому называются *рядами Меллина* (РМ). Они могут выражать асимптотические разложения в разных секторах. Без особого ограничения можно рассматривать случай действительных λ_k . Множества функций, обладающих этим разложением, обозначим через РМ (∞) и РМ (0) соответственно. Степенные ряды являются частным случаем РМ. Некоторые свойства РМ приведены в [371].

При некоторых дополнительных условиях ряды Меллина обладают следующими *свойствами двойственности*:

- 1) если $\Omega(t) \in \text{РМ}(0)$, то $h(p) \in \text{РМ}(\infty)$, и наоборот;
- 2) если $\Omega(t) \in \text{РМ}(\infty)$, то $h(p) \in \text{РМ}(0)$, и наоборот.

Как видно из п. 18.2.2, вторая часть утверждения в общем не имеет места для степенных рядов. Свойство 1) следует из п. 12.3.6, а также (22.59) — (22.60). Прямое свойство 2) можно доказать методом последовательного разложения, аналогично как доказываются формулы (18.63) и (18.64) в случае степенного ряда. Имеется также другой метод доказательства [78], ко-

торый рассмотрим в третьем томе монографии. Обратное свойство следует из примечания 2° к теореме 22.2. Контрпример в примечании 3° к теореме 22.2 свидетельствует о том, что безоговорочно свойство двойственности не имеет места.

22.8.3. Покажем, что свертка двух функций, принадлежащих множеству $\text{PM}(\infty)$, тоже принадлежит этому множеству. Доказательство было бы некорректным, если мы для каждой функции использовали второе прямое свойство двойственности, потом формулу (22.116) и наконец второе обратное свойство. Действительно, известно только, что разложение в PM для произведения изображений имеет место при $|\arg p| \leq \pi/2 - \varepsilon$. Однако этого недостаточно, чтобы применять второе обратное свойство. Если оригиналы аналитичны при $|\arg t| \leq \eta$, $\eta > 0$, то путь интегрирования в интеграле Лапласа можно повернуть и доказать справедливость разложения в PM для изображения при $|\arg p| \leq \leq \pi/2 + \eta/2$, что достаточно для применения указанного метода (см. примечание 4° к теореме 22.2).

Для доказательства утверждения без этого дополнительного предположения можно использовать метод последовательного разложения, примененный для свертки степенных рядов в п. 11.3, но мы будем пользоваться формулой (22.119) [310]. Сначала берем функции $\Omega_1(t, T)$ и $\Omega_2(t, T)$, имеющие носитель $[T, \infty)$, ограниченные при каждом $t \geq T$, интегрируемые и принадлежащие $\text{PM}(\infty)$. В силу дистрибутивного свойства свертки после перегруппировки по функциям шкалы при каждом $l \in N$ имеем

$$\Omega_1(t, T) * \Omega_2(t, T) = \sum_{k=0}^l c_k G_{-\alpha_k, -\beta_k, m_k, n_k}(t, T) + O(t^{-\mu_l} (\ln t)^{\nu_l}),$$

где $\alpha_k \uparrow + \infty$, $\beta_k \uparrow + \infty$, $\mu_l \uparrow + \infty$. Согласно примечанию к формуле (22.119) о замене l на T следует, что $\Omega_1(t, T) * \Omega_2(t, T) \in \text{PM}(\infty)$.

Наконец берем свертку общих, локально интегрируемых в $[0, \infty)$ функций $\Omega_1(t) \in \text{PM}(\infty)$ и $\Omega_2(t) \in \text{PM}(\infty)$. Разобьем их на сумму двух функций с носителями $[0, T)$ и $[T, \infty)$, причем T выберем столь большим, чтобы вторые слагаемые были ограниченными при каждом фиксированном $t \geq T$. Это всегда возможно, так как при $t \rightarrow \infty$ $\Omega_1(t) = \tilde{O}(t^{-\lambda_{01}} (\ln t)^{\mu_{01}})$, $\Omega_2(t) = \tilde{O}(t^{-\lambda_{02}} (\ln t)^{\mu_{02}})$. Случай, когда первые слагаемые в качестве носителя имеют только часть $[0, T)$, рассматриваются аналогично. Поскольку свертка функций с носителем $[0, T)$ имеет носитель $[0, 2T)$ и при $t \rightarrow \infty$ все коэффициенты разложения в PM этой функции равны нулю, то остается доказать, что $\int_0^T \Omega_1(t-\tau) \Omega_2(\tau) d\tau \in \text{PM}(\infty)$. Это при $t > T$ видно из равенств

$$\int_0^T \Omega_1(t-\tau) \Omega_2(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^{m_k} b_{jk} \int_0^T (t-\tau)^{-\alpha_k} [\ln(t-\tau)]^j \Omega_2(\tau) d\tau +$$

$$+ R_n = \sum_{k=0}^n a_k t^{-\alpha_k} \sum_{j=0}^{m_k} b_{jk} \sum_{l=0}^j (-1)^l \binom{j}{l} (\ln t)^{j-l} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p B_p^{(p+l+1)}(-\alpha_k)}{p!} t^{-p-l} \int_0^T \tau^{p+l} \Omega_2(\tau) d\tau + R_n.$$

При этом использована формула (20.28). Отсюда следует также, что $R_n = O(t^{-\alpha_{n+1}} (\ln t)^{m_{n+1}})$, поэтому свертка принадлежит множеству $\mathcal{PM}(\infty)$.

Примененный метод доказательства не является эффективным для практического использования. Вероятно, простейшим из рассмотренных методов для определения нескольких первых членов в \mathcal{PM} является применение преобразования Лапласа по вышеуказанному некорректному доказательству, так как после доказательства принадлежности $\Omega_1 * \Omega_2$ к $\mathcal{PM}(\infty)$ другим методом согласно примечанию 3° к теореме 22.2 это действие законно.

§ 23. ИНТЕГРАЛЫ ТИПА МЕЛЛИНА—БАРНСА

23.1. Интеграл обращения преобразования Меллина

23.1.1. Преобразование Меллина определяется интегралом

$$h(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \Omega(t) dt. \quad (23.1)$$

Применим символику $\Omega(t) \leftrightarrow h(s)$. Если

$$\Omega(t) = O(t^{-\alpha}) \text{ при } t \rightarrow +0, \quad \Omega(t) = O(t^{-\beta}) \text{ при } t \rightarrow +\infty, \quad (23.2)$$

$\beta > \alpha$ и $\Omega(t)$ локально интегрируема в $(0, \infty)$, то интеграл (23.1) сходится при $\operatorname{Re} s \in (\alpha, \beta)$ и определяет аналитическую функцию $h(s)$, причем $h(s) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} s \rightarrow \pm \infty$. При условиях (23.2) полоса сходимости может быть также шире, так как оценки в этих условиях не всегда указывают на действительные порядки. Данную полосу получаем, если $\alpha = \inf a$, для которых $\Omega(t) = O(t^{-a})$

при $t \rightarrow +0$ и $\beta = \sup b$, для которых $\Omega(t) = O(t^{-b})$ при $t \rightarrow +\infty$. Если $\Omega(t) = o(t^N)$ при $t \rightarrow +0$, то $\alpha = -\infty$; если $\Omega(t) = o(t^{-N})$ при $t \rightarrow +\infty$, то $\beta = +\infty$.

Путь интегрирования в (23.1) можно повернуть по лучу $\arg t = \gamma$, если $\Omega(t)$ аналитична при $\arg t \in [-\gamma_0, \gamma_0]$ и $|\gamma| \leq \gamma_0$. В таком случае с помощью подстановки $t = re^{i\gamma}$ легко убедиться в том (см. теорему 23.1), что при $\operatorname{Re} s \in [\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$ имеет место оценка

$$|h(s)| < M(\varepsilon) e^{-\gamma_0 |\tau|}, \quad s = \sigma + i\tau. \quad (23.3)$$

Подстановкой $t = e^{-\tau}$ получаем

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} \Omega(e^{-\tau}) d\tau. \quad (23.4)$$

Поэтому можно использовать свойства двустороннего преобразования Лапласа, которые подобны свойствам одностороннего преобразования. В частности, имеет место формула обращения

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{-s} h(s) ds \quad (23.5)$$

при одном из следующих условий (см. п. 22.2.1).

1°. Сохраняется УО1, в котором сходимость при p_0 следует заменить на сходимость при $\operatorname{Re} s \in (\alpha, \beta)$. Тогда $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

2°. Сохраняется УО2Б. В точке разрыва интеграл равен $1/2[\Omega(t-0) + \Omega(t+0)]$.

Далее часто будем использовать формулу (23.5). В теоретических вопросах допустим, что ее применение законно, а в конкретных примерах законность ее применимости можно проверить непосредственно либо по 1°, либо по 2°. Обычно эти проверки в тексте опускаются.

23.1.2. Хотя функция $h(s)$ согласно (23.1) определена только в полосе $\operatorname{Re} s \in (\alpha, \beta)$, нередко ее можно аналитически продолжить. Рассмотрим подробнее некоторые условия продолжимости как в левой, так и в правой полуплоскостях.

Если функция $\Omega(t)$ в $[0, \eta]$ аналитична и удовлетворяет второму условию (23.2), то из равенств

$$\begin{aligned} h(s) &= \int_0^{\eta} t^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega^{(k)}(0)}{k!} t^k dt + \int_{\eta}^{\infty} t^{s-1} \Omega(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega^{(k)}(0) \eta^{k+s}}{k!(k+s)} + \int_{\eta}^{\infty} t^{s-1} \Omega(t) dt \end{aligned}$$

следует, что $h(s)$ продолжима, как мероморфная функция при $\operatorname{Re} s < \beta$. Но этот результат можно обобщить, допуская для $\Omega(t)$ при $t \rightarrow +0$ разложение в РМ.

Теорема 23.1. Пусть 1) $\Omega(t)$ локально интегрируема в $(0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +\infty$ $\Omega(t) = O(t^{-\beta})$; 3) $\Omega(t) \in \text{PM}(0)$. Тогда интеграл (23.1) аналитически продолжим при $\operatorname{Re} s < \beta$ как мероморфная функция. Если $\Omega(t)$ аналитична при $|\arg t| \leq \gamma_0$ и в этом секторе сохраняется условие 2), то для каждого $b > 0$ равномерно относительно $\operatorname{Re} s \in [\beta - b, \beta - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b$, имеет место оценка

$$h(s) = O(e^{-\gamma_0 |t|}). \quad (23.6)$$

Доказательство. Разобьем интеграл (23.1) на два интеграла по промежуткам $[0, 1]$ и $[1, \infty)$ и функцию $\Omega(t)$ представим в $(0, 1]$ в виде

$$\Omega(t) = \sum_{k=0}^n t^{\lambda_k} Q_{m_k}(\ln t) + t^{\lambda_{n+1}} (\ln t)^{m_{n+1}} \rho_n(t), \quad \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (23.7)$$

где $\rho_n(t)$ в окрестности $t=0$ ограничена, а в $[0, 1]$ абсолютно интегрируема. Если $Q_{m_k} = \sum_{j=0}^{m_k} b_{jk} (\ln t)^j$, то

$$h(s) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m_k} b_{jk} \frac{(-1)^j j!}{(s - \lambda_k)^{j+1}} + \int_0^1 t^{\lambda_{n+1} + s - 1} (\ln t)^{m_{n+1}} \rho_n(t) dt + \int_1^{\infty} t^{s-1} \Omega(t) dt. \quad (23.8)$$

Первый интеграл в (23.8) является аналитической функцией при $\operatorname{Re} s > -\lambda_{n+1}$, второй — при $\operatorname{Re} s < \beta$. Сумма в (23.8) — мероморфная функция. Учитывая произвол в выборе n , в (23.8) имеем требуемое аналитическое продолжение.

В случае аналитичности $\Omega(t)$ при $|\arg t| \leq \gamma_0$ выберем путь интегрирования по лучу $\arg t = \gamma_0$ и разобьем его точкой $t = e^{i\gamma_0}$, а n берем таким, чтобы $\beta - b > -\lambda_{n+1}$. Тогда из неравенств

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{e^{i\gamma_0}} t^{\lambda + s - 1} (\ln t)^m dt \right| &= \left| e^{i\gamma_0(\lambda + s)} \int_0^1 r^{\lambda + s - 1} (\ln r + \gamma_0)^m dr \right| \leq \\ &\leq e^{-\gamma_0 \tau} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{j!}{(\lambda + \operatorname{Re} s)^{j+1}} \gamma_0^{m-j}, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\rho^{i\gamma_0}}^{\infty e^{i\gamma_0}} t^{s-1} \Omega(t) dt \right| \leq e^{-\gamma_0 \tau} \int_1^{\infty} r^{\operatorname{Re} s-1} |\Omega(\tau e^{i\gamma_0})| dr$$

легко следует второе утверждение теоремы, так как аналогично можно оценить интеграл по лучу $\arg t = -\gamma_0$. ■

Примечания. 1°. Если в правой части (23.7) добавить множитель $\exp(\pm i\mu t^{-\kappa})$, $\mu > 0$, $\kappa > 0$, то $h(s)$ при $\operatorname{Re} s < \beta$ можем продолжить как аналитическую функцию. Утверждение следует из того, что функция

$$I(s, \lambda, \mu, \kappa) = \int_0^1 \exp(\pm i\mu t^{-\kappa}) t^{s+\lambda-1} dt$$

продолжима во всей плоскости s . Действительно, в силу (12.37) при $\operatorname{Re} s \in (-\lambda - \kappa, -\lambda)$ имеем равенство

$$\begin{aligned} I(s, \lambda, \mu, \kappa) &= 1/\kappa \int_1^{\infty} e^{\pm i\mu u} u^{-\frac{s+\lambda}{\kappa}-1} du = \\ &= (1/\kappa) \mu^{\frac{s+\lambda}{\kappa}} \Gamma\left(-\frac{s+\lambda}{\kappa}\right) \exp\left[\mp \frac{i\pi(s+\lambda)}{2\kappa}\right] - \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm i)^k \mu^k}{k!} \frac{1}{k - (s+\lambda)/\kappa}. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Обе функции в правой части (23.9) продолжимы во всей плоскости, за исключением простых полюсов $s_k = -\lambda + k\kappa$, $k \in \mathbb{N}$, но в этих точках они имеют одинаковые вычеты $\frac{1}{\kappa k!} \mu^k \exp(i\pi k/2)$.

Поэтому в плоскости s аналитичны $I(s, \lambda, \mu, \kappa)$ и ее m -я производная по s , дающая под знаком интеграла в (23.9) множитель $(\ln t)^m$. Далее сохраняется доказательство теоремы 23.1. Равенство (23.9) объясняет также, почему при $\mu=0$ появляются полюсы.

С помощью других методов [76—79] можно доказать, что утверждение примечания сохраняется также в случае более общего множителя

$$\exp\left[i \sum_{j=0}^{j < \kappa/\nu} a_j t^{-\kappa + \nu j} \right], \quad \kappa > 0, \quad \nu > 0, \quad a_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{j < \kappa/\nu} a_j^2 > 0.$$

2°. Теорема 23.1 сохраняется, если λ_k — комплексные числа, $\operatorname{Re} \lambda_k \uparrow +\infty$.

23.1.3. Свойство двойственности для РМ сохраняется также относительно преобразования Меллина. Об этом свидетельствуют дальнейшие теоремы.

Теорема 23.2. Пусть при $\operatorname{Re} s < \beta$, $\gamma < \beta$ 1) функция $h(s)$ в (23.5) мероморфна; 2) $h(s)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана 22.7. Тогда $\Omega(t) \in \text{PM}(0)$. Если на некоторой прямой $\operatorname{Re} s = \alpha < \beta$ $h(s) = O(e^{-\vartheta|t|})$, $\vartheta \in (-\pi, \pi)$, то $\Omega(t)$ аналитична в секторе $|\arg t| \leq \vartheta - \varepsilon$, $\vartheta > \varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $h(s)$ имеет полюсы $-\lambda_k$ порядка m_k . Тогда доказательство первой части теоремы следует из теоремы 22.1 и формулы (22.40), так как $t^{-s} = \exp(s \ln 1/t)$ и $\exp(-\lambda_k \ln 1/t) = t^{\lambda_k}$.

Для доказательства второй части теоремы путь переносим на прямую $\operatorname{Re} s = \alpha$ и добавляем соответствующие вычеты, что возможно согласно лемме Жордана. Если существует полюс λ_k , для которого $\operatorname{Re} \lambda_k = \alpha$, то обходим его справа по некоторой полуокружности. Положим в интеграле $t = re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \vartheta - \varepsilon$. При достаточно большом $|r|$ справедлива оценка $|h(s)t^{-s}| \leq Mr^{-\alpha} e^{|\varphi r|} e^{-\vartheta|r|}$, которая обеспечивает сходимость данного интеграла, а также интеграла, полученного дифференцированием по t . Следовательно, интеграл — аналитическая функция от t . Поскольку вычеты аналитичны, то функция $\Omega(t)$ аналитична при $|\arg t| \leq \vartheta - \varepsilon$. ■

Так как имеет место равенство

$$h(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \Omega(t) dt = \int_0^{\infty} u^{-s-1} \Omega(1/u) du = h_1(-s), \quad (23.10)$$

то исследование аналитического продолжения $h(s)$ в правой полуплоскости приводится к исследованию продолжения $h_1(s)$ в левой полуплоскости, т. е. к теореме 23.1. Аналогично исследование асимптотического поведения функции $\Omega(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ приводится к теореме 23.2. Поэтому справедливы следующие теоремы.

Теорема 23.3. Пусть 1) $\Omega(t)$ локально интегрируема в $(0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +0$ $\Omega(t) = O(t^{-\alpha})$; 3) $\Omega(t) \in \text{PM}(\infty)$. Тогда интеграл (23.1) аналитически продолжим при $\operatorname{Re} s > \alpha$ как мероморфная функция. Если $\Omega(t)$ аналитична при $|\arg t| \leq \gamma_0$ и в этом секторе сохраняется свойство 2), то для каждого $b > 0$ равномерно относительно $\operatorname{Re} s \in [\alpha + \varepsilon, \alpha + b]$, $0 < \varepsilon < b$, имеет место оценка (23.6).

Теорема 23.4. Пусть при $\operatorname{Re} s > \alpha$, $\gamma > \alpha$ 1) функция $h(s)$, входящая в (23.5), мероморфна; 2) можно найти последовательность дуг окружностей $\{C_{R_k}\}$ с центрами в начале и радиусами R_k , на которых при $R_k \rightarrow \infty$ $e^{\beta s} h(s) \rightarrow 0$, $\beta \geq 0$, если $\operatorname{Re} s > 0$, и $h(s) \rightarrow$

$\rightarrow 0$, если $\operatorname{Re} s < 0$. Тогда $\Omega(t) \in \text{PM}(\infty)$. Если на некоторой прямой $\operatorname{Re} s = \gamma_0 > \alpha$ $h(s) = O(e^{-\theta|t|})$, $\theta \in (-\pi, \pi)$, то $\Omega(t)$ аналитична в секторе $|\arg t| \leq \theta - \varepsilon$, $\theta > \varepsilon > 0$.

Примечания. 1°. Если в теореме 23.3 к разложению в РМ присоединить множитель $\exp(\pm i\mu t^\kappa)$, $\mu > 0$, $\kappa > 0$, или

$$\exp \left[i \sum_{j=0}^{j < \kappa/\nu} a_j t^{\kappa - \nu j} \right], \quad \kappa > 0, \quad \nu > 0, \quad a_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{j < \kappa/\nu} a_j^2 > 0,$$

то $h(s)$ можно продолжить как аналитическую функцию. В случае первого множителя доказательство утверждения следует из примечания 1° к теореме 23.1 и из п. 16.3, а в общем случае — из работы [79].

2°. Возможно, что интеграл (23.1) при всех s расходится, так как $\beta < \alpha$. Если интеграл по $[0, 1]$ продолжим в левой полуплоскости, а интеграл по $[1, \infty)$ — в правой полуплоскости, то расходящемуся интегралу (23.1) можно придать конкретный смысл с помощью аналитического продолжения отдельных частей.

23.1.4. Чтобы построить асимптотическое разложение интеграла (23.5), его следует писать в форме

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \exp(s \ln 1/t) h(s) ds. \quad (23.11)$$

Далее применяются теоремы из § 22, если функция $h(s)$ удовлетворяет соответствующим условиям. Так как $\ln 1/t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$, то теоремы 22.1—22.6, 22.12 и 22.14 сохраняются без каких-либо изменений, если e^t заменяются на t^{-1} , а t на $\ln 1/t$. Поэтому в случае полюсов из теоремы 22.1 получаем теорему 23.2. В случае точек ветвления при условиях теорем 22.2 и 22.3 вместо формул (22.42), (22.43) и (22.46) при $t \rightarrow +0$ соответственно имеем

$$\Omega(t) \sim \sum_{l=1}^n t^{-p_l} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jl} \Phi_{\lambda_{jl}, m_{jl}} (\ln \ln 1/t) (\ln 1/t)^{-\lambda_{jl}-1}; \quad (23.12)$$

$$\Omega(t) \sim -\frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^n t^{-p_l} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jl} \sin(\lambda_{jl}\pi) \Gamma(\lambda_{jl} + 1) (\ln 1/t)^{-\lambda_{jl}-1}; \quad (23.13)$$

$$\Omega(t) \sim \frac{\alpha_{01}}{\pi} t^{-p_1} (\ln 1/t)^{-\lambda_{01}-1} (-\ln \ln 1/t)^{m_{01}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k (\ln \ln 1/t)^{-k}. \quad (23.14)$$

Чтобы получить асимптотическое разложение для $\Omega(t)$ при $t \rightarrow \infty$, в (23.11) следует применить подстановку $s = -p$. Тогда

$$\Omega(t) = 1/2\pi i \int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \exp(p \ln t) h(-p) dp \quad (23.11')$$

и к нему применимы вышеуказанные теоремы, причем в формулах (23.12)—(23.14) t^{-1} следует заменить на t , а $\ln 1/t$ на $\ln t$.

Если функция $h(p)$ аналитична в правой полуплоскости, то не всегда путь можно передвинуть вправо, так как интеграл может расходиться. Если такой сдвиг возможен как угодно далеко вправо, то легко видеть, что интеграл (23.11) имеет оценку $o(t^{-N})$, но он может также равняться нулю. Разложение с экспоненциально убывающим фактором можно получить, либо разлагая $h(s)$ по специальной шкале (см. п. 23.3), либо применяя метод перевала.

Можно также применять теоремы 22.7—22.11, дающие разложение для $\Omega(t)$ при $\ln 1/t \rightarrow +0$, т. е. $t \rightarrow 1-0$. Иногда эти разложения представляют интерес, так как интеграл (23.11) при $t=1$ может расходиться из-за исчезновения множителя $e^{-it \ln t}$, обеспечивающего сходимость интеграла. Этот вопрос будет рассмотрен в третьем томе монографии.

23.2. Интегралы Меллина—Барнса

23.2.1. Интегралы

$$H(t) = 1/2\pi i \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h(s) t^s ds \quad (23.15)$$

называются *интегралами Меллина—Барнса*, если

$$h(s) = \frac{\prod_{j=1}^l \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \beta_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \beta_j s) \prod_{j=l+1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j s)}, \quad (23.16)$$

где $l \leq p$, $m \leq q$, $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$, a_j и b_j — комплексные числа, $p^2 + q^2 > 0$. Наименование интеграла (23.15) будет пояснено в п. 24.7. При $l=0$ или $m=0$ соответствующий множитель в (23.16) отсутствует, т. е. пустое произведение заменяется единицей. Путь интегрирования не всегда идет строго вдоль вертикальной пря-

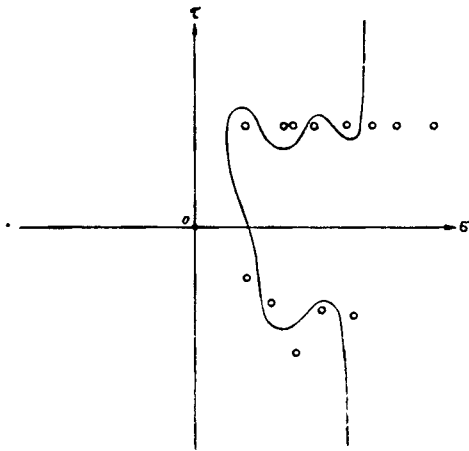


Рис. 32

мой, но в случае необходимости изгибается так, чтобы полюсы $s = (b_j + k)/\beta_j$, $j \leq m$, $k \in N$, лежали справа, полюсы $s = (a_j - 1 - k)/\alpha_j$, $j \leq l$, $k \in N$, — слева от пути. Это требование назовем *условием сепарации*. Пример возможного искривления пути показан на рис. 32. Точку $t=0$ следует исключить, если интеграл при $t=0$ не имеет смысла.

Исследуются также интегралы

$$\Omega(t) = 1/2\pi i \int_{C_\infty} h(s) t^s ds, \quad (23.15')$$

в которых в качестве пути берется кривая C_∞ , удаляющаяся в бесконечность параллельно положительной полуоси и разделяющая полюсы так же, как выше. Эта кривая направлена снизу вверх, т. е. идет в отрицательном направлении. Назовем их *интегралами Меллина—Барнса второго рода*, а (23.15) — *интегралами первого рода*. В частном случае при $\alpha_j = \beta_j = 1$ эта функция называется *G-функцией Мейера* [329, 330] и обозначается через

$$G_{pq}{}^{ml} \left(t \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \equiv G_{pq}{}^{ml} (t; \mathbf{A}_p; \mathbf{B}_q),$$

$$\mathbf{A}_p = (a_1, \dots, a_p), \quad \mathbf{B}_q = (b_1, \dots, b_q).$$

Рассматриваются также интегралы (23.15'), в которых путь C_∞ заменен на $C_{-\infty}$, т. е. при условии сепарации путь удаляется

в бесконечность параллельно отрицательной полуоси. Назовем их *интегралами Меллина—Барнса третьего рода*.

Для интегралов всех родов имеются разные модификации, в которых t заменено на t^{-1} (тогда интеграл (23.15) совпадает с интегралом обращения преобразования Меллина) или добавлен множитель $(-1)^s$. Эти отличия при исследовании свойств интегралов не имеют существенного значения. Частный случай такого интеграла

$$H_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + c_j s) \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j - e_j s)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + c_j - c_j s) \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j - e_j + e_j s)} t^{-s} ds \quad (23.15'')$$

при $c_j > 0$, $e_j > 0$, условия сепарации и некратности полюсов называется *H-функцией Фокса* [302].

Поскольку $\sin \alpha s = \pi / [\Gamma(\alpha s / \pi) \Gamma(1 - (\alpha s / \pi))]$, то в числитель и знаменатель дроби (23.16) могут входить также синусы. С помощью этой формулы (23.16) можно привести к виду

$$h(s) = \pi^{m+l-p} \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s) \prod_{j=l+1}^p \sin \pi(a_j - \alpha_j s)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(1 - b_j + \beta_j s) \prod_{j=1}^m \sin \pi(b_j - \beta_j s)} = \\ = \pi^{m+l-p} h_1(s) h_2(s), \quad (23.16')$$

который будем использовать в дальнейшем. Многие специальные функции выражаются через интегралы Меллина—Барнса (см. п. 23.4.1). Такая форма определения функции удобна для исследования асимптотики при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$.

Встречаются также интегралы (23.15) и (23.15'), в которых функция $h(s)$ не имеет вида (23.16), однако во всей нерасширенной плоскости s она имеет только алгебраические или логарифмические особенности. Такие интегралы также назовем *интегралами типа Меллина—Барнса* соответственно первого, второго или третьего рода. Методы для построения их асимптотического разложения мало отличаются от методов для интегралов Меллина—Барнса. Более ощутимые различия проявляются лишь в случае присутствия точек ветвления. Некоторые типы этих интегралов будут рассмотрены в третьем томе монографии, так как

они связаны с другим методом асимптотического разложения интегралов.

23.2.2. Исследуем вопрос о сходимости интегралов (23.15) и (23.15'). Для этого следует оценить поведение подынтегральной функции при $|s| \rightarrow \infty$. Для оценки отдельного множителя в (23.16') вместо (9.43) удобнее применить несколько *модифицированную формулу Стирлинга*

$$\ln \Gamma(z+\alpha) \sim (z+\alpha-1/2) \ln z - z + 1/2 \ln(2\pi) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}(\alpha)}{2k(2k-1)} z^{-2k+1}. \quad (23.17)$$

Она получается из (9.50), если z заменить на $z+\alpha$ и учесть (9.44). Отсюда равномерно относительно $|\arg s| \leq \pi - \varepsilon$

$$h_1(s) \sim \exp[\mu s (\ln s - 1) + s \ln v] s^{\kappa} \sum_{k=0}^{\infty} E_k s^{-k}, \quad (23.18)$$

где

$$E_k = (2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \prod_{j=1}^p \alpha_j^{-a_j+1/2} \prod_{j=1}^q \beta_j^{b_j-1/2} E_k^*,$$

а E_k^* вычисляется по рекуррентной формуле (19.30), в которой

$$\omega = 1, \quad B_k = E_k^*, \quad D_{2k} = 0,$$

$$D_{2k-1} = \frac{1}{2k(2k-1)} \left[\sum_{j=1}^p \frac{B_{2k}(1-a_j)}{\alpha_j^{2k-1}} - \sum_{j=1}^q \frac{B_{2k}(1-b_j)}{\beta_j^{2k-1}} \right].$$

Кроме того, введены обозначения

$$\mu = \sum_{j=1}^p \alpha_j - \sum_{j=1}^q \beta_j; \quad \nu = \prod_{j=1}^p \alpha_j^{\alpha_j} \prod_{j=1}^q \beta_j^{-\beta_j}; \\ \kappa = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j + (p-q)/2. \quad (23.19)$$

В дальнейшем понадобится также число

$$\lambda = \sum_{j=1}^l \alpha_j - \sum_{j=l+1}^p \alpha_j + \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=m+1}^q \beta_j. \quad (23.20)$$

Назовем $\alpha_j, \beta_j, a_j, b_j$ *первичными параметрами*, а $\lambda, \mu, \nu, \kappa$ — *вторичными параметрами*.

Для функции $h_2(s)$ вне некоторой горизонтальной полосы, содержащей полюсы функции $h_2(s)$, по формулам Эйлера при $s = \sigma + i\tau$ получаем оценку

$$|h_2(s)| \leq M \exp[\pi|\tau|(\mu - \lambda)/2]. \quad (23.21)$$

А. Оценим подынтегральную функцию в (23.15), т. е. используем (23.18) при $\tau \rightarrow \pm\infty$, $\sigma \in [\gamma_0, \gamma_1]$, где γ_0 и γ_1 — любые фиксированные числа. Поскольку

$$\begin{aligned} |\exp \mu s \ln s| &= \exp[\mu \sigma \ln |\tau| - \mu \tau \operatorname{arctg}(\tau/\sigma)] [1 + o(1)] = \\ &= |\tau|^{\mu \sigma} \exp[-\mu \tau (\pi \operatorname{sign} \tau / 2 - \operatorname{arctg}(\sigma/\tau))] [1 + o(1)] = \\ &= |\tau|^{\mu \sigma} \exp(-\mu |\tau| \pi / 2) e^{\mu \sigma} [1 + o(1)], \end{aligned}$$

то с учетом $t = re^{i\varphi}$, $|t^s| = \exp[\sigma \ln r - \varphi \tau]$, при $|\tau| \rightarrow \infty$, $\sigma = \gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ получаем

$$|h(s)t^s| < M_0 \exp(-\lambda |\tau| \pi / 2 - \varphi \tau) |\tau|^{\mu \gamma + \operatorname{Re} \kappa r \gamma} [1 + o(1)], \quad (23.22)$$

причем M_0 не зависит от $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ для любых фиксированных γ_0 и γ_1 .

Из этой оценки следует, что для сходимости интеграла (23.15) необходимо, чтобы $\lambda \geq 0$. При этом условия различаются следующие случаи.

1°. $\lambda > 0$. Интеграл (23.15) сходится при любых r и $|\arg t| < \frac{\lambda \pi}{2}$.

2°. $\lambda = 0$. Интеграл (23.15) сходится лишь при $\varphi = \arg t = 0$. Если $-\mu \gamma > 1 + \operatorname{Re} \kappa$, то интеграл сходится абсолютно. При $\mu = 0$ и $\operatorname{Re} \kappa < -1$ интеграл сходится для всех γ .

3°. $\lambda = 0$, $-\mu \gamma \in (\operatorname{Re} \kappa, \operatorname{Re} \kappa + 1]$. При $\mu = 0$ имеем $\operatorname{Re} \kappa \in [-1, 0)$. Если в формуле (23.18) учитывать также множитель, характеризующий $\arg h_1(s)$, то в асимптотике для $h(s)t^s$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$ получаем множитель $\exp[i\tau \ln(\nu r)]$, который обеспечивает неабсолютную сходимость интеграла (23.15) при $\nu r \neq 1$.

Б. Для исследования сходимости интегралов второго рода используем формулу (23.18) при ограниченном τ и $\sigma \rightarrow +\infty$. Поскольку на контуре C_∞ $|h_2(s)|$ ограничен, то получаем

$$|h(s)t^s| < M_1 \exp[\sigma(\ln(\nu r) - \mu)] \sigma^{\mu \sigma + \operatorname{Re} \kappa} [1 + o(1)]. \quad (23.23)$$

Отсюда следует, что для сходимости интеграла (23.15') необходимым является условие $\mu \leq 0$ и надо различать следующие случаи.

1°. $\mu < 0$. Интеграл (23.15') сходится при всех r и φ .

2°. $\mu=0$. Интеграл (23.15') сходится абсолютно при $r < 1/\nu$ и всех φ .

3°. $\mu=0$, $r=1/\nu$. Интеграл сходится абсолютно, если $\operatorname{Re} \kappa < -1$, и в силу множителя $e^{i\varphi\sigma}$ — неабсолютно при $\operatorname{Re} \kappa \in [-1, 0)$, если $\varphi \neq 0$.

В. Интеграл третьего рода подстановкой $s = -\omega$ можно привести к интегралу второго рода с аргументом t^{-1} . Если при новых вторичных параметрах поставить звездочки, то легко найдем, что $\lambda^* = \lambda$, $\mu^* = -\mu$, $\nu^* = \nu^{-1}$, $\kappa^* = \kappa$. Поэтому интеграл сходится при всех r и φ , если $\mu > 0$, и при $|t| > 1/\nu$, если $\mu = 0$.

Г. При $\lambda \geq 0$, $\mu < 0$ из (23.18) и (23.21) следует, что интеграл от $h(s)t^s$ сходится также на большой окружности с центром в начале и радиусом R , соединяющей концы конечных отрезков путей в (23.15) и (23.15'). При $R \rightarrow \infty$ интеграл по окружности стремится к нулю, поэтому можно перейти от (23.15) к (23.15'), и наоборот. Тем самым с помощью интеграла второго рода можно построить аналитическое продолжение для (23.15) при всех $\arg t$. Подобным образом построим аналитическое продолжение при $\mu > 0$ с помощью интеграла третьего рода.

Из (23.18) и (23.21) следует также, что при $\lambda = \mu = 0$, $\operatorname{Re} \kappa < -1$, $t = r < 1/\nu$ тоже возможен поворот пути и аналитическое продолжение функции (23.15) в круге $|t| < 1/\nu$. Применением интеграла третьего рода подобным образом построим аналитическое продолжение при $|t| > 1/\nu$, однако с помощью другой аналитической функции. Обе функции имеют общее значение в точке $t = 1/\nu$.

Более тонкий анализ, проведенный в [295], показывает, что при $\lambda = \mu = 0$, $\operatorname{Re} \kappa \in [-1, 0)$ аналогично, как и выше, также возможно аналитическое продолжение с помощью двух функций: $H_1(t)$ при $|t| < 1/\nu$ и $H_2(t)$ при $|t| > 1/\nu$. Если эти функции имеют конечные пределы при $t \rightarrow 1/\nu - 0$ и $t \rightarrow 1/\nu + 0$, то для расходящегося при $t = 1/\nu$ интеграла (23.15) существует главное значение, которое равно $1/2[H_1(1/\nu - 0) + H_2(1/\nu + 0)]$. Конкретный пример приведен в п. 23.4.3, 6°.

23.3. Асимптотические разложения интегралов Меллина—Барнса

Рассмотрим асимптотические разложения интеграла (23.15). Учтем, что полюсы могут появиться только у множителей, находящихся в числителе дроби (23.16).

23.3.1. Можно получить разложение при $t \rightarrow 0$, если передвинуть путь интегрирования вправо через полюсы $s = (b_j + k)/\beta_j$,

$j \leq m, k \in N$. Полюсов не будет, если $m=0$. Тогда для любого $n \in N$ имеем

$$|H(t)| = \left| \int_{n-i\infty}^{n+i\infty} h(s)t^s ds \right| < M_n t^n, \text{ т. е. } H(t) = o(t^N). \quad (23.24)$$

Иногда интеграл равняется нулю. Это бывает в случае, когда в правой полуплоскости можно присоединить большую полуокружность радиусом R и интеграл по ней от $h(s)t^s$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Согласно лемме 1.1 для этого достаточно, чтобы на окружности $h(s)t^s = O(s^{-1-\eta})$, $\eta > 0$. В противном случае приходится применять другие методы для построения асимптотического разложения. Этот вопрос рассмотрим в п. 23.3.3. В случае присутствия полюсов при $t \rightarrow 0$ получаем разложение

$$H(t) \sim - \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} \text{res} [h(s)t^s; (b_j+k)/\beta_j]. \quad (23.25)$$

Знак « $-$ » появляется потому, что обход вокруг полюса идет в отрицательном направлении. Оценка остатка следует из (23.24). При этом путь выбран так, что на нем нет ни одного полюса. При вычислении вычетов следует различать разные случаи.

1°. Полюс может быть кратным. Тогда соответствующий член разложения (23.25) будет содержать произведение степени t на полином от $\ln t$.

2°. Особая точка может оказаться устранимо особой. Вычет в ней равен нулю.

3°. Может оказаться, что точек типа 2° большинство и ряд (23.25) фактически содержит конечное число членов. Тогда также возникает вопрос об уточнении асимптотического представления членами порядка $o(t^N)$.

4°. Приведем явную формулу вместо (23.25) лишь в простейшем случае, когда имеем только простые полюсы:

$$H(t) \sim \sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{(b_j+k)/\beta_j}}{k!} \times$$

$$\frac{\prod_{n=1}^l \Gamma(1 - a_n + \alpha_n (b_j+k)/\beta_j) \prod_{\substack{n=1 \\ j \neq n}}^m \Gamma(b_n - \beta_n (b_j+k)/\beta_j)}{\prod_{n=m+1}^q \Gamma(1 - b_n + \beta_n (b_j+k)/\beta_j) \prod_{n=i+1}^p \Gamma(a_n - \alpha_n (b_j+k)/\beta_j)} \quad (23.26)$$

С учетом (23.16') формулу можно писать также в виде

$$\begin{aligned}
 H(t) &\sim \pi^{m+l-p-1} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\beta_j} \sum_{k=0}^{\infty} t^{(b_j+k)/\beta_j} \times \\
 & \times \frac{(-1)^k \prod_{n=1}^p \Gamma(1-a_n + \alpha_n(b_j+k)/\beta_j) \prod_{n=l+1}^p \sin \pi[a_n - \alpha_n(b_j+k)/\beta_j]}{\prod_{n=1}^q \Gamma(1-b_n + \beta_n(b_j+k)/\beta_j) \prod_{j \neq n=1}^m \sin \pi[b_n - \beta_n(b_j+k)/\beta_j]} .
 \end{aligned}
 \tag{23.26'}$$

Условие, что все полюсы простые, назовем *условием некратности*.

Ряд (23.26) может сходиться при определенных t или расходиться при всех t . Может быть также, что ряд сходится при всех t и $H(t)$ — целая функция. Такие примеры будут рассмотрены в п. 23.4. Сектор, в котором справедливо разложение (23.26), зависит от свойств параметров. При $\lambda > 0$ имеем $|\arg t| \leq \lambda\pi/2 - \epsilon$, при $\lambda = 0$, $-\mu\gamma > 1 + \operatorname{Re} \kappa$ можно брать лишь $\arg t = 0$. При $\lambda = \mu = \operatorname{Re} \kappa = 0$, $\operatorname{Re} \kappa \in [-1, 0)$ (23.26) также сохраняется, только усложняется оценка остатка, в которой следует применить асимптотическое разложение интеграла Фурье (см. § 10).

Аналогичные разложения получаем для интегралов второго рода, сузив контур через полосы $s = (b_j + k)/\beta_j$. Оценку остатка легко получить по верхнему образцу. Она имеет требуемый порядок. Поскольку при $\mu \leq 0$ интеграл (23.15') сходится для всех $\arg t$, то и (23.26) остается в силе при всех $\arg t$. Это означает, что ряд (23.26) сходится при всех t , если $\mu < 0$, и при $|t| < 1/v^{**}$, если $\mu = 0$. При фиксированном j этот факт легко проверить по (23.26) с помощью (23.23), если учесть изменение одного множителя в (23.26) и обозначить новые вторичные параметры через μ^{**} , κ^{**} , v^{**} . Легко найти, что

$$\mu^{**} = 1 + \mu/\beta_j; \quad \kappa^{**} = \kappa + \mu b_j/\beta_j; \quad v^{**} = (v\beta_j^{-\mu})^{1/\beta_j}. \tag{23.27}$$

Поэтому при $\lambda \geq 0$ и $\mu < 0$ или $\lambda = \mu = 0$, $\operatorname{Re} \kappa < -1$ для интеграла (23.15) разложение (23.26) продолжимо при всех $\arg t$.

23.3.2. Чтобы получить разложение интеграла (23.15) при $t \rightarrow \infty$, контур следует передвинуть влево через полюсы $s = (a_j - 1 - k)/\alpha_j$, $j \leq l$, $k \in N$, причем можно непосредственно использовать теорему 22.1. Полюсов не будет, если $l = 0$. Тогда интеграл имеет порядок $o(t^{-N})$. Разложения в этом случае рассмотрим в п. 23.3.3. С соответствующими изменениями сохраняются формулы (23.25) и (23.26), в которых повсюду $(b_j + k)/\beta_j$ следует заменить на $(a_j - 1 - k)/\alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, l$, а в (23.26) еще

$$1/\beta_j \text{ на } 1/\alpha_j, j=1, 2, \dots, l, \text{ и } \prod_{n=1}^l \text{ на } \prod_{j \neq n=1}^l, \prod_{j \neq n=1}^m \text{ на } \prod_{n=1}^m. \quad \text{В} \quad (23.25)$$

еще меняется знак, так как обход вокруг полюса идет в положительном направлении.

Подобные результаты получаем для интегралов третьего рода. Положение здесь такое же, как для интегралов второго рода при $t \rightarrow 0$. Если, однако, нужно разложить при $t \rightarrow \infty$ интегралы второго рода, то следует учитывать, что в данном случае контур расширяется и поэтому оценку остатка нельзя получить прежним методом. Если $\mu < 0$, $\lambda \geq 0$, то интеграл (23.15') при соответствующих условиях относительно $\arg t$ приводится к (23.15). Получаем прежние результаты. При $\mu = 0$ интеграл (23.15') при больших $|t|$ расходится. Все же при $\lambda > 0$ можно построить его аналитическое продолжение с помощью (23.15), так

как при $r < 1/\nu$, $|\arg t| < \frac{\lambda\pi}{2}$ путь можно повернуть в вертикальную прямую, а новый интеграл существует для всех $|t|$, $|\arg t| < \lambda\pi/2$. Кроме метода, по которому (23.15') приводится к (23.15), существуют также другие методы для оценки остатка в разложении для (23.15') при $|t| \rightarrow \infty$. Эти методы дают возможность одновременно построить разложение в более широком промежутке для $|\arg t|$ в случае, когда $\mu < 0$, $\lambda \geq 0$, и аналитически продолжить интеграл в случае, когда $\mu = 0$, $\lambda \leq 0$. По первому из этих методов после расширения пути влево через полюсы контур следует деформировать так, чтобы он состоял из вертикального отрезка L_0 , лежащего левее, и кривой $L_1 + L_2$, на которой можно использовать асимптотику подынтегральной функции и метод перевала [253]. Этот метод подробнее будет рассмотрен в третьем томе монографии для более общих интегралов.

По второму методу применяется разложение функции $h_2(s)$ в ряд по показательным функциям. В основе разложения лежит формула

$$\begin{aligned} \sin(a - \alpha s) &= (1/2i) \exp[i\pi(a - \alpha s)] \times \\ &\times [1 - e^{-i2\pi\alpha} e^{i2\pi\alpha s}] = (1/2i) \exp[i\pi(a - \alpha s)] \times \\ &\times \{1 - \exp[i2\pi(\alpha\sigma - \operatorname{Re} a)] \exp[-2\pi(\alpha\tau - \operatorname{Im} a)]\}. \end{aligned}$$

С ее помощью на L_1 при $\tau > \tau_0 = \max_j \{|\operatorname{Im} a_j/\alpha_j|, |\operatorname{Im} b_j/\beta_j|\}$ получаем

$$\begin{aligned} h_2(s) &= (2i)^{l+m-p} A_0 \exp[i\pi(\lambda - \mu)s/2] \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp(i2\pi\gamma_k s) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \exp(i2\pi\delta_k s), \end{aligned} \quad (23.28)$$

где

$$A_0 = \exp \left[i\pi \left(\sum_{j=l+1}^p a_j - \sum_{j=1}^m b_j \right) \right], \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_k \uparrow +\infty, \quad c_0 = 1.$$

Аналогично на L_2 при $\tau < -\tau_0$ имеем

$$\begin{aligned} h_2(s) &= (-2i)^{l+m-p} A_0^{-1} \exp[-i\pi(\lambda - \mu)s/2] \sum_{k=0}^{\infty} d_k \exp(-i2\pi\gamma_k s) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \exp(-i2\pi\delta_k s). \end{aligned} \quad (23.29)$$

При $\delta_0 < 0$, т. е. $\lambda - \mu < 0$, в интеграле по $L_1 + L_2$ можно добавить и отнять выражение

$$h_3(s) = \sum_{k=0}^{k_1} C_k \exp(i2\pi\delta_k s) + \sum_{k=0}^{k_2} D_k \exp(-i2\pi\delta_k s),$$

где k_1 и k_2 выбраны так, чтобы $\delta_{k_2} \leq -\delta_{k_1+1}$, $\delta_{k_1} \leq -\delta_{1+\tau_0}$. С учетом (23.28) и (23.29) можно установить, что

$$\begin{aligned} |h_2(s) - h_3(s)| &< M \left| \exp(i2\pi\delta_{k_1+1}s) \right| \quad \text{при } \tau > \tau_0, \\ |h_2(s) - h_3(s)| &< M \left| \exp(-i2\pi\delta_{k_2+1}s) \right| \quad \text{при } \tau < -\tau_0. \end{aligned}$$

Поэтому при соответствующих условиях в интеграле от $h_1(s)[h_2(s) - h_3(s)]t^s$ по $L_1 + L_2$ путь можно деформировать вдоль вертикальной прямой. К разложению (23.26) следует добавить сумму вычетов от $h_1(s)h_3(s)t^s$ в полюсах функции $h_1(s)$.

Подробнее этот метод рассмотрен в [283]. Осуществление родственной идеи в другой, более простой задаче рассмотрено в п. 24.6.4. Подобная модификация возможна для интегралов третьего рода при $t \rightarrow 0$, когда путь расширяется вправо.

23.3.3. Рассмотрим случаи, когда подынтегральная функция не имеет полюсов либо в правой полуплоскости ($m=0$), либо в левой ($l=0$) и интеграл не равен нулю. Поскольку оба случая исследуются одинаково, то рассмотрим только разложение при $|t| \rightarrow \infty$, т. е. $l=0$.

Первым для интеграла (23.15) разложения, содержащие экспоненциальные факторы, получил Барнс [278]. Вместо (23.16) Барнс рассматривал другую подынтегральную функцию, причем он исходил из того, чтобы интеграл выражал произведение исследуемой функции с показательной функцией. Это доказыва-

лось передвижением пути вправо. Однако часто этот метод весьма сложен и применим только к функциям, заданным конкретным степенным рядом. Для функций Бесселя этот метод применяется также в [5, 189]. В качестве примера приводим при условии сепарации формулу

$$I_\nu(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2\pi i}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(-s+\nu+1/2)}{\Gamma(s+\nu+1/2)} (2t)^s ds,$$

основанную на формуле (23.26) и соотношениях

$$\begin{aligned} e^{-t} I_\nu(t) &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\nu+k} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{2^{-2j}}{j! \Gamma(\nu+j+1) (k-2j)!}, \\ s_k &= \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{2^{-2j}}{j! \Gamma(\nu+j+1) (k-2j)!} = \frac{1}{\sqrt{\pi} k!} \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k}{2j} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(j+\nu+1)} = \\ &= \frac{2}{2\sqrt{\pi} k! \Gamma(\nu+1/2)} \int_0^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} \sum_{j=0}^{[k/2]} \binom{k}{2j} u^{2j} du = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} k! \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} [(1+u)^k + (1-u)^k] du = \\ &= \frac{2^{2\nu+k}}{\sqrt{\pi} k! \Gamma(\nu+1/2)} \int_{\pm 0}^1 \tau^{\nu-1/2} (1-\tau)^{k+\nu-1/2} d\tau = \frac{2^{2\nu+k} \Gamma(\nu+k+1/2)}{\sqrt{\pi} k! \Gamma(k+2\nu+1)} \end{aligned}$$

Более простым является метод, по которому подынтегральная функция $h(s)$ разлагается в ряд по другой подходящей шкале. Следует учитывать, что разложение $h(s)$ в степенной ряд согласно п. 23.1.4 приводит к разложению $H(t)$ при $t \rightarrow 1-0$. Формула

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(a-\rho s) (t/\alpha)^s ds = \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (t/\alpha)^{(a+k)/\rho} = \frac{1}{\rho} (t/\alpha)^{a/\rho} \exp[-(t/\alpha)^{1/\rho}], \quad (23.30) \end{aligned}$$

$\rho > 0$, $\gamma < \operatorname{Re} a/\rho$, $|\arg t/\alpha| < \rho\pi/2$, полученная с помощью перемещения пути влево, наводит на мысль, что целесообразно искать

разложение $h(s)$ по Γ -функциям. Соотношение (23.30) следует также из формул преобразования Меллина.

Поскольку

$$\frac{1}{(\rho s + c)_k} = \frac{(-1)^k \Gamma(1 - \rho s - c - k)}{\Gamma(1 - \rho s - c)}, \quad (23.31)$$

то достаточно, что данную функцию можно разложить в асимптотический степенной ряд, который согласно п. 5.2.4 всегда преобразуем в ряд обратных факториалов. При этом следует отметить, что дальнейшие разложения будут применяться при $\operatorname{Re} s < 0$. Поэтому для справедливости разложений необходимо в равенстве (23.31), а также в дальнейших разложениях исключить из рассмотрения полюсы данных функций вместе с некоторыми их окрестностями. Но в приложениях k будет фиксированным и (23.31) рассматривается при $\operatorname{Re}(1 - \rho s - c - k) > 0$.

Надо учитывать и то, что полученное асимптотическое разложение в степенной ряд также должно иметь место в левой полуплоскости, а формула (23.17) справедлива при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$. Поэтому в случае, когда $m < q$, сначала по образцу (23.16') $h(s)$ следует представить в виде

$$\begin{aligned} h(s) &= \pi^{-q+m} \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j - \beta_j s)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j s)} \prod_{j=m+1}^q \sin \pi(b_j - \beta_j s) \equiv \\ &\equiv h_4(s) \sum_{j=0}^{n_0} C_j e^{i\pi \omega_j s}, \end{aligned} \quad (23.32)$$

где

$$\omega_0 = - \sum_{j=m+1}^q \beta_j = (\lambda + \mu)/2, \quad \omega_k < \omega_{k+1}, \quad \omega_{n_0} = -\omega_0,$$

$$C_0 = (2\pi i)^{-q+m} \prod_{j=m+1}^q e^{i\pi b_j}.$$

Следовательно, в степенной ряд приходится разложить $h_4(s)/\Gamma(1 - \rho s - c)$, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{h_4(s)}{\Gamma(1-\rho s-c)} &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_k s^{-k} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{(\rho s+c)_k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k \frac{\Gamma(1-\rho s-c-k)}{\Gamma(1-\rho s-c)}. \end{aligned} \quad (23.33)$$

Для вычисления коэффициентов L_k в (23.33) к каждому члену последнего ряда следует применить формулу (12.62) и перегруппировать члены. Получаем рекуррентную формулу

$$L_j = \rho^j \tilde{E}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \binom{j-1}{k-1} L_k B_{j-k}^{(1-k)} (1-k-c), \quad L_0 = \tilde{E}_0. \quad (23.34)$$

Вычисление \tilde{E}_j показано в п. 23.2.2. Имеются также другие методы для вычисления коэффициентов L_k с помощью рекуррентных формул [291, 354].

Числа ρ и c определять следует так, чтобы в разложении типа (23.18) не было множителя $\exp[\mu_0 s (\ln s - 1)] s^{\kappa_0}$. Поскольку для функции $h_4(s)/\Gamma(1-\rho s-c)$ имеем вторичные параметры $\mu_0 = \mu + \rho$, $\lambda_0 = \lambda - \rho$, $\nu_0 = \nu \rho$, $\kappa_0 = \kappa + c - 1/2$, где μ , λ , ν и κ означают вторичные параметры для $h(s)$ или $h_4(s)$, то следует брать $\rho = -\mu > 0$, $c = 1/2 - \kappa$. Появление нового λ_0 не изменяет условия сходимости, так как фактически разлагается функция $h_4(s)$.

Чтобы представить $h_4(s)$ в виде

$$h_4(s) = \sum_{k=0}^n (-1)^k L_k \Gamma(1-\rho s-c-k) + \Gamma(-\rho s-c-n) R_n(s),$$

где функция $R_n(s)$ ограничена и аналитична при $\operatorname{Re} s < \gamma_0$, перенесем путь влево так, что $\gamma < 1/\rho \operatorname{Re}(1-c-n) = \gamma_0$. После этого с учетом (23.30) и (23.32) имеем

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{j=0}^{n_0} C_j \sum_{k=0}^n (-1)^k L_k \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(1-\rho s-c-k) (te^{i\pi\omega_j})^s ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(-\rho s-c-n) R_n(s) (te^{i\pi\omega_j})^s ds \right] = \\ &= 1/\rho \sum_{j=0}^{n_0} C_j (te^{i\pi\omega_j})^{(1-c)/\rho} \exp[-(te^{i\pi\omega_j})^{1/\rho}] \times \\ &\quad \times \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k L_k (te^{i\pi\omega_j})^{-k/\rho} + \Omega_{nj}(t) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $|\omega_j| \leq |\omega_0| = \frac{|\lambda + \mu|}{2}$, формула (23.30) применима при $|\arg t| < -\frac{\mu\pi}{2}$.

При оценке остатка $\Omega_{nj}(t)$ применим равенство

$$\Gamma(-\rho s - c - n) = \Gamma(2 - \rho s - c - n) / (\rho s + c + n - 1)_2$$

и формулу

$$\begin{aligned} & \Gamma(2 - \rho s - c - n) (te^{i\pi\omega_j})^s = \\ & = (te^{i\pi\omega_j})^{(2-c-n)/\rho} \int_0^\infty u^{1-\rho s - c - n} \exp[-u(te^{i\pi\omega_j})^{1/\rho}] du. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования (что легко обосновать), получаем

$$\Omega_{nj}(t) = (te^{i\pi\omega_j})^{(2-c-n)/\rho} \times$$

$$\times \int_0^\infty u^{1-c-u} \exp[-u(te^{i\pi\omega_j})^{1/\rho}] \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{R_n(s) u^{-\rho s}}{(\rho s + c + n + 1)_2} ds. \quad (23.25)$$

Внутренний интеграл в (23.35) при $u \in [0, 1]$ равен нулю. Действительно, к отрезку от $\gamma - i\tau_0$ до $\gamma + i\tau_0$ в левой полуплоскости можно присоединить дугу окружности и рассматривать интеграл по замкнутому контуру, который в силу аналитичности подынтегральной функции равен нулю. Поскольку на дуге окружности $|u^{-\rho s}| \leq 1$ при $u \in [0, 1]$, то согласно лемме 1.1 интеграл по дуге стремится к нулю при $\tau_0 \rightarrow \infty$. При $u > 1$ внутренний интеграл имеет оценку $O(u^{-\rho\gamma})$, поэтому по лемме 2.3 получаем

$$\Omega_{nj}(t) = (te^{i\pi\omega_j})^{(1-c-n)/\rho} \exp[-(te^{i\pi\omega_j})^{1/\rho}] O(1).$$

Следовательно, остаток имеет требуемую оценку и при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq -\frac{\mu\pi}{2} - \varepsilon$ справедливо разложение

$$H(t) \sim 1/\rho \sum_{j=0}^{m_0} C_j \exp[-(te^{i\pi\omega_j})^{1/\rho}] \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h L_h (te^{i\pi\omega_j})^{(1-c-h)/\rho}. \quad (23.36)$$

В других секторах ряды имеют экспоненциально возрастающие факторы. Эти случаи, а также другие, когда сдвиг пути

влево из-за расходимости интеграла невозможен (см. п. 23.2.2, 2°, а также 23.4.2, 1°), будут рассмотрены в третьем томе монографии.

23.4. Метод Меллина—Барнса. Примеры

23.4.1. Как уже было сказано, интегралы типа Меллина—Барнса применимы для исследования асимптотики и аналитического продолжения многих специальных функций или целых классов функций. Пусть функция $\Omega(t)$ определена с помощью степенного ряда, т. е. $\Omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)t^k$. Тогда разными способами ее можно выразить как интеграл типа Меллина—Барнса, если $h(s)$ — аналитическая в некоторой правой полуплоскости функция. Под знак интеграла типа Меллина—Барнса кроме $h(s)$ следует включить множитель, имеющий простые полюсы в точках $s=n \in N$, чтобы согласно формуле (23.26) получить данный ряд. Такие множители назовем *регулирующими*. Простейшими множителями такого типа являются $\Gamma(-s)$, $1/\sin \pi s$, $\operatorname{ctg} \pi s$. Применение каждого из них связано с определенным требованием относительно функции $h(s)$, чтобы интеграл сходился. Кроме того, их вычеты в точке $s=n$ соответственно равны $(-1)^{n+1}/n!$, $(-1)^n/\pi$, $1/\pi$. При этом интеграл может быть как первого, так и второго или третьего рода, но при разных условиях относительно $h(s)$.

Пусть при $\operatorname{Re} s \geq \gamma$ $|h(s)| < M$. Тогда в случае первого множителя при $-t = re^{i\varphi}$ имеем оценку

$$\left| \int_{n+1/2-i\infty}^{n+1/2+i\infty} h(s) \Gamma(-s) (-t)^s ds \right| < \\ < M \frac{(er)^{n+1/2}}{(n+1/2)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(|\tau|\pi/2 - \varphi\tau)}{(1 + [\tau/(n+1/2)]^2)^{(n+1)/2} \operatorname{ch} \pi\tau} d\tau,$$

из которой следует, что интеграл в левой части стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого r и $|\varphi| \leq \pi/2$. Поэтому при $|\arg(-t)| \leq \leq \pi/2$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(k)}{k!} t^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h(s) \Gamma(-s) (-t)^s ds, \quad \gamma \in (-1, 0). \quad (23.37)$$

Аналогично при $|t| < 1$, $|\arg(-t)| < \pi$, $h(s) = O(s^\omega)$ получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k) t^k = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (-t)^s h(s) / \sin \pi s ds, \quad \gamma \in (-1, 0). \quad (23.38)$$

Если $|h(s)| < M|s|^{-1-\eta}$ при $s \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} s \geq \gamma$, $\eta > 0$, то при $t \in [0, 1)$ имеет место также формула

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k) t^k = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^s h(s) \operatorname{ctg} \pi s ds, \quad \gamma \in (-1, 0). \quad (23.39)$$

Изменяя условия относительно $h(s)$, можно расширить область применения формул (23.37) — (23.39). Подобные выражения при соответствующих условиях получаем с помощью интегралов второго рода. С учетом равенств

$$(\alpha)_k = \Gamma(\alpha + k) / \Gamma(\alpha), \quad (\alpha)_k = (-1)^k \Gamma(1 - \alpha) / \Gamma(1 - \alpha - k), \quad (23.40)$$

а также формулы Гауса для умножения Γ -функций [1]

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz-1/2} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(z + j/n) \quad (23.41)$$

возможны разные вариации в выборе подынтегральной функции. Кроме того, путь интегрирования можно разбить на две части, лежащие в верхней и нижней полуплоскостях. Для лучшего обеспечения сходимости следует брать для отдельных частей разные регулирующие множители, например $(1 - e^{-i2\pi s})^{-1}$ в верхней полуплоскости и $(e^{i2\pi s} - 1)^{-1}$ в нижней.

В силу (23.38) при $\gamma \in (0, 1)$, $\operatorname{Re} \alpha > 1$ и $-\alpha \in \mathbb{N}$ имеем также соотношение [275]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\zeta(\alpha s, \kappa)}{s \sin \pi s} t^s ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} t^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+\kappa)^{\alpha k}} = \\ & = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left[\frac{t}{(j+\kappa)^\alpha} \right]^k = \sum_{j=0}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{t}{(j+\kappa)^\alpha} \right] = \\ & = \ln \prod_{j=0}^{\infty} \left[1 + \frac{t}{(j+\kappa)^\alpha} \right], \end{aligned} \quad (23.42)$$

показывающее, что логарифм от некоторых целых функций тоже выражается с помощью интеграла типа Меллина—Барнса. Можно проверить, что выполненное изменение порядка суммирования обоснованно при $|\arg t| < \pi$, $|t/(j+\kappa)^\alpha| < 1$, $j \in N$. Далее соотношение аналитически продолжается при других $|t|$.

Более общее соотношение получаем [334] с помощью ряда Дирихле

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \ln \lambda_n}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow +\infty, \quad (23.43)$$

где ряд (23.43) сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$. Если $\Omega(t)$ обладает степенными оценками (23.2) при $t \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$, то с учетом (23.43) почленным интегрированием получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Omega(\lambda_n t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h(s) Z(s) t^{-s} ds, \quad \sigma_0 \leq \gamma \in (\alpha, \beta). \quad (23.44)$$

В частности, отсюда следует представление с помощью интеграла типа Меллина—Барнса для сопряженного с (23.43) ряда Дирихле:

$$Z^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s) Z(s) t^{-s} ds, \quad (23.45)$$

а также в силу формулы

$$\ln(1+t) + \sum_{k=1}^m (-t)^k/k = \frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{t^s}{s \sin \pi s} ds, \quad \gamma \in (m, m+1),$$

некоторая модификация для (23.42):

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ (1+t/\lambda_n) \exp \left[\sum_{j=1}^m (-t/\lambda_n)^j \right] \right\}^{a_n} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{Z(s) t^s}{s \sin \pi s} ds, \quad (23.46)$$

$\sigma_0 \leq \gamma \in (m, m+1)$, $|\arg t| \leq \pi - \varepsilon$. Поскольку [1]

$$e^{-\gamma t}/\Gamma(1+t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1+t/k) e^{-t/k},$$

то имеем еще один метод для вывода формулы Стирлинга (9.55).

Указанный метод выражения специальных функций через интегралы систематически применяли Меллин и Барнс, поэтому назовем его *методом Меллина—Барнса*. Этот метод обратим в следующем смысле: асимптотическому разложению (или составному разложению) с помощью интеграла типа Меллина—Барнса можно сопоставить асимптотическую сумму, которая определена степенным рядом, т. е. аналитическую функцию.

С помощью интегралов типа Меллина—Барнса можно выразить также разные интегралы. Простейший из приемов — разложение данного интеграла в ряд, сходящийся при некоторых значениях параметров, и превращение ряда согласно (23.37) — (23.39) в интеграл. При этом иногда получаем аналитическое продолжение исходного интеграла (см. пример в п. 23.4.3).

Другой простой прием, примененный в § 22 (неявная асимптотика Абеля), заключается в том, что данный интеграл как функция от параметра преобразуется по Меллину и после этого применяется формула обращения. При вычислении изображения изменяется порядок интегрирования (см. пример 23.4.3, 5°).

Более тонким приемом является применение *формулы Парсеваля* для преобразования Меллина, которая при $x > 0$ формально получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Omega_1(xt) \Omega_2(t) t^{-\alpha} dt &= \int_0^{\infty} \Omega_1(xt) t^{-\alpha} dt \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h_2(s) t^{-s} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h_2(s) ds \int_0^{\infty} \Omega_1(xt) t^{-\alpha-s} ds = \frac{x^{\alpha-1}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h_2(s) h_1(1-\alpha-s) x^s ds, \end{aligned} \quad (23.47)$$

где $\Omega_1(t) \doteq h_1(s)$, $\Omega_2(t) \doteq h_2(s)$. Можно установить [19], что формула (23.47) справедлива, если существует такое σ_0 , что функция $\Omega_2(t) t^{\sigma_0-1}$ абсолютно интегрируема в $(0, \infty)$, а функция $h_1(1-\alpha-\sigma_0-it)$ — при $\tau \in (-\infty, \infty)$. После этого согласно принципу аналитического продолжения формула остается верной при тех s , при которых одновременно существуют обе части (23.47).

Поскольку с помощью (23.47) можно исследовать асимптотическое поведение данного интеграла как при $x \rightarrow 0$, так и при $x \rightarrow \infty$, то получаем мощный метод для асимптотического разложения интегралов, который подробнее будет рассмотрен в третьем томе монографии.

Иногда более целесообразна следующая модификация (23.47):

$$\int_0^{\infty} \Omega_1(x/u) \Omega_2(u) u^{-1} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h_1(s) h_2(s) x^{-s} ds. \quad (23.48)$$

В частности, из нее получаем формулу [332]

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(u)}{x+u} du = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(u) u^{-1}}{1+(x/u)} du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s} h(s) x^{-s} ds, \quad (23.48')$$

из которой следует, что асимптотику преобразования Стильтеса можно исследовать также с помощью интеграла типа Меллина—Барнса. Аналогично можно выразить некоторые другие интегральные преобразования.

Формула (23.47) имеет также другое значение. Если подынтегральная функция $h_2(s)h_1(1-\alpha-s)$ имеет вид (23.16) и $\lambda = \mu = 0$, $\operatorname{Re} \kappa \in [-1, 0)$, то интеграл в левой части (23.47) согласно п. 23.2.2 при $x=1/v$ терпит разрыв. Тем самым получаем признак для исследования разрывности интегралов типа (23.47). Разрывные интегралы вида (23.47), терпящие при $x=1/v$ разрыв, назовем *интегралами типа Диксона—Феррара* [295]. Формула (23.47) дает в некоторых случаях возможность вычислить эти интегралы в явном виде (см. п. 23.4.3, 5°).

23.4.2, 1°. В качестве первого примера рассмотрим интеграл

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s) \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j+s)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j+s)} (-t)^s ds, \quad (23.49)$$

где $-a_j \in \mathbb{N}$ и учитывается условие сепарации. Имеем $\lambda = p - q + 1$, $\mu = p - q - 1$, $\nu = 1$. Поэтому интеграл сходится при $p \geq q - 1$, причем при $p = q - 1$, $q \geq 1$, интеграл сходится только при $\arg t = \pi$. Согласно (23.26) и (23.37) имеем

$$\Omega_1(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j - k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + k)} \frac{t^k}{k!} = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)} {}_pF_q(\mathbf{A}_p; \mathbf{B}_q; t). \quad (23.50)$$

Последнее равенство имеет место, если $1/\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j) \neq 0$. Ряд (23.50)

сходится при $p \leq q$ и всех t и при $p = q + 1$, если $|t| < 1$. Однако обозначение ${}_pF_q$ сохраним также в случае расходящегося ряда. Из вышеуказанных условий видно, что интеграл (23.49) не определяет полностью все семейство гипергеометрических функций. При $p = q$ следует ограничиться условием $|\arg(-t)| < \pi/2$, а при $p = q + 1$ — условием $|\arg(-t)| < \pi$.

Если $p \leq q + 1$, то $\mu \leq 0$ и можно рассматривать подобный интеграл второго рода $\Omega_2(t)$. При $p = q + 1$ он сходится, если $|t| < 1$, а поведение интеграла на окружности $|t| = 1$ зависит от κ . Поскольку разложение (23.50) сохраняется также для $\Omega_2(t)$, то все семейство гипергеометрических функций полностью определено интегралом второго рода и является частным случаем функции Мейера.

Сдвинем при $p = q$ путь интегрирования в (23.49) в левую сторону через полюсы $s = -a_j - n$, причем предположим, что все полюсы простые. Получим асимптотическое разложение

$$\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j) / \Gamma(b_j) {}_pF_p(A_p; B_p; t) \sim \sum_{j=1}^p (-t)^{-a_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_j + n) \prod_{j \neq k=1}^p \Gamma(a_k - a_j - n) t^{-n}}{n! \prod_{k=1}^p \Gamma(b_k - a_j - n)}, \quad (23.51)$$

которое справедливо при $|\arg(-t)| < \pi/2 - \varepsilon$. Если $p = q - 1$, то интеграл (23.49) сходится только при $\gamma > \frac{1}{2} [1 + \operatorname{Re}(\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j)]$, поэтому передвижение пути влево невозможно. Это свидетельствует о том, что асимптотическое разложение содержит экспоненциальный множитель.

2°. Барнс [278] первым установил, что асимптотическое разложение в простой степенной ряд существует для некоторых линейных комбинаций гипергеометрических функций при любых p и $q \geq p - 1$. Рассмотрим при условии сепарации интеграл

$$\Omega_3(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\Gamma(-s) \Gamma(a_1 + s) \prod_{j=1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(1 - a_j - s)} t^s dt. \quad (23.52)$$

Имеем $\lambda = q - p + 3 \geq 2$, $\mu = p - q - 1$, $\nu = 1$, поэтому интеграл (23.52) сходится при $|\arg t| < \pi(q - p + 3)/2$. На параметры a_j и b_j наложим условие, что все полюсы подынтегральной функции в (23.52) простые. Сдвинув контур вправо через полюсы $s = n$, $s = 1 - b_j + n$, с учетом (23.40) получим

$$\begin{aligned} \Omega_3(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+n) \prod_{j=1}^q \Gamma(1-b_j-n)}{\prod_{j=2}^p \Gamma(1-a_j-n)} \frac{(-t)^n}{n!} + \\ & + \sum_{j=1}^q t^{1-b_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+1-b_j+n) \Gamma(b_j-1-n) \prod_{j \neq k=1}^q \Gamma(b_j-b_k-n)}{\prod_{k=2}^p \Gamma(b_j-a_k-n)} \times \\ & \times \frac{(-t)^n}{n!} = \frac{\Gamma(a_1) \prod_{k=1}^q \Gamma(1-b_k)}{\prod_{k=2}^p \Gamma(1-a_k)} {}_pF_q(\mathbf{A}_p; \mathbf{B}_q; (-1)^{q-p}t) + \\ & + \sum_{j=1}^q \frac{\Gamma(a_1+1-b_j) \Gamma(b_j-1) \prod_{j \neq k=1}^q (b_j-b_k)}{\prod_{k=2}^p \Gamma(b_j-a_k)} t^{1-b_j} \times \\ & \times {}_pF_q[\mathbf{A}_p + (1-b_j)\mathfrak{E}_p; \mathbf{B}_q + (1-b_j)(\mathfrak{E}_q + \mathbf{E}_q^j); (-1)^{p-q}t]. \quad (23.53) \end{aligned}$$

Здесь применены следующие обозначения: \mathfrak{E}_p и \mathbf{E}_p^j — векторы размерности p , причем координаты вектора \mathfrak{E}_p — единицы, а вектора \mathbf{E}_p^j — нули, кроме j -й координаты, которая равна единице. \mathbf{E}_p^j называется *единичным вектором*, или *ортом*, а \mathfrak{E}_p — *вектором единичного сдвига*. Удобно применить также следующие правила: k -ю координату вектора $(\alpha + b_k)\mathfrak{E}_q - \alpha\mathbf{E}_q^k - \mathbf{B}_q$, равную нулю, отбросим и считаем размерность вектора $q-1$, а $\alpha\mathbf{E}_{q+1} + \mathbf{B}_q$ означает вектор размерности $q+1$, первая координата которого равна α , а остальные координаты взяты от \mathbf{B}_q .

Смещением пути интегрирования в (23.52) влево через полюсы $s = -a_1 - n$ при $|\arg t| < \pi(q-p+3)/2$ аналогично получаем

$$\Omega_3(t) \sim \frac{\Gamma(a_1) \prod_{j=1}^q \Gamma(1-b_j+a_1)}{\prod_{j=2}^p \Gamma(1-a_j+a_1)} t^{-a_1} \times \\ \times {}_{q+1}F_{p-1}[(1+a_1)\Theta_q - \mathbf{B}_q + a_1\mathbf{E}_{q+1}^1; (1+a_1)\Theta_p - \mathbf{A}_p - \mathbf{E}_p^1; t^{-1}]. \quad (23.54)$$

Вместо (23.52) можно получить еще $p-1$ других линейных комбинаций, если в правой части (23.52) a_1 заменить на a_2, \dots, a_p .

Если $p=q+1$, то функция в правой части (23.53) существует лишь при $|t| < 1$, поэтому интеграл (23.52) выражает аналитическое продолжение этой функции для всех $|t|$, $|\arg t| < \pi$. В частности, при $p=2, q=1$ ряд (23.54) сходится, если $|t| > 1$, и формулы (23.53), (23.54) после введения новых параметров и замены t^{-1} на t дают для ${}_2F_1$ следующее аналитическое продолжение при $|t| > 1$ и $|\arg t| > 0$:

$$(1/\Gamma(c)) {}_2F_1(a, b; c; t) = \\ = -\frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-t)^{-a} {}_2F_1(a, 1+a-c; 1+a-b; t^{-1}) + \\ + \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-t)^b {}_2F_1(b, b+1-c; 1+b-a; t^{-1}), \quad (23.55)$$

которое одновременно является составным асимптотическим разложением. Более глубокий анализ показывает, что формула (23.55) сохраняется всегда, когда существуют коэффициенты гипергеометрических функций, т. е. $|a-b| \in \mathbb{N}$. Эту формулу можно получить также с помощью (23.49). Аналогично строится аналитическое продолжение и асимптотическое разложение для ${}_{q+1}F_q$ при $q > 1$.

3°. Найдем связь между интегралом Факсена и функцией Бесселя—Райта. Введем функцию

$$\eta(\rho, \beta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(\rho s - \beta) t^{-s} ds, \quad (23.56)$$

где $\rho > 0, \gamma > \operatorname{Re} \beta/\rho > 0$. Поскольку $\lambda = \mu = \rho + 1$, то интеграл сходится при $|\arg t| \leq \pi(\rho+1)/2$. Передвинув путь влево и допустив некратности полюсов, при $t > \theta$ получим

$$\begin{aligned} \eta(\rho, \beta, t) = & \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k! \Gamma(\rho k + \beta + 1) \sin(\rho k + \beta + 1)} - \\ & - \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{(k-\beta)/\rho}}{k! \Gamma\left(\frac{k-\beta}{\rho} + 1\right) \sin \frac{\pi(k-\beta)}{\rho}}. \end{aligned} \quad (23.57)$$

С учетом (21.105) отсюда непосредственно следует, что

$$J_{\rho}^{\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} [e^{i\pi(\beta+1)} \eta(\rho, \beta, e^{i\pi\rho t}) - e^{-i\pi(\beta+1)} \eta(\rho, \beta, e^{-i\pi\rho t})]. \quad (23.58)$$

Равенство (23.58) напоминает формулу Эйлера и формулу Ганкеля (10.68). Согласно принципу аналитического продолжения (23.58) сохраняется также в случае кратных полюсов.

С другой стороны, согласно (23.48) при $\Omega_1(u) = \exp(-u^\rho)$, $x=t$, $\Omega_2(u) = e^{-u} u^{-\beta}$, $\gamma > \operatorname{Re} \beta > 0$,

$$\begin{aligned} F_{-\beta-1}(0, t; 1, 1; 1, \rho) &= \int_0^{\infty} u^{-\beta-1} \exp[-(u+tu^\rho)] du = \\ &= \frac{1}{\rho 2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s/\rho) \Gamma(s-\beta) t^{-s} ds = \eta(\rho, \beta, t^\rho). \end{aligned} \quad (23.59)$$

Если в (23.58) подставить функцию Факсена, то согласно принципу аналитического продолжения условием $\operatorname{Re} \beta > 0$ можно пренебречь.

23.4.3, 4°. Рассмотрим примеры на представление интеграла с помощью интеграла типа Меллина—Барнса. Возьмем интеграл (13.72)

$$h(\rho, \beta, \rho, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-pt} J_\rho(t^\beta) t^{\alpha-1} dt, \quad \beta\rho + \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (23.60)$$

Интегрируя степенной ряд для $J_\rho(t^\beta)$ почленно, при $\beta < 1$, $\operatorname{Re} \rho > 0$ получаем сходящийся ряд

$$h(\rho, \beta, \rho, \alpha) = 2^{-\rho} \rho^{-\alpha-\beta\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma[\alpha + \beta(\rho + 2k)]}{k! \Gamma(k + \rho + 1) (2\rho^\beta)^{2k}}. \quad (23.61)$$

Согласно методу Меллина—Барнса при условии сепарации и $\gamma \in (-(\alpha + \beta\rho)/2\beta, 0)$ из (23.61) имеем

$$h(\rho, \beta, \rho, \alpha) = 2^{-\rho} \rho^{-\alpha-\beta\rho} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(\alpha+\beta\rho+2\beta s)}{\Gamma(\rho+1+s)} \left(\frac{1}{2\rho^\beta}\right)^{2s} ds. \quad (23.62)$$

Поскольку $\mu=2\beta-2$, $\lambda=2\beta>0$, то интеграл (23.62) сходится при $|\arg \rho| < \frac{\pi}{2}$ и дает аналитическое продолжение для суммы (23.61) при $\beta \geq 1$.

Передвинув контур влево, при $\rho \rightarrow 0$, $\operatorname{Re} \rho > 0$ получим разложение

$$h(\rho, \beta, \rho, \alpha) \sim \\ \sim (2^{(\alpha/\beta)-1})/\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta\rho+k}{2\beta}\right)}{k! \Gamma\left(1+\rho/2-\frac{\alpha+k}{2\beta}\right)} (2^{1/\beta} \rho)^k, \quad (23.63)$$

которое было использовано в п. 13.4.2, 3° и получено другим путем при более сильных условиях относительно параметров (в формуле (13.73) имеется опечатка: $\frac{\mu+k}{2}$ следует заменить на $\frac{\mu+k}{\beta}$).

5°. Имеем формальные равенства

$$\int_0^{\infty} t^{s-1} dt \int_0^{\infty} e^{-tg(u)} G(u) du = \int_0^{\infty} G(u) du \int_0^{\infty} e^{-tg(u)} t^{s-1} dt = \\ = \Gamma(s) \int_0^{\infty} G(u) [g(u)]^{-s} du \equiv \Gamma(s) h(s),$$

из которых при определенных условиях следует

$$\int_0^{\infty} e^{-tg(u)} G(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s) h(s) t^{-s} ds. \quad (23.64)$$

Таким образом, получаем новый метод для разложения интеграла Лапласа при $t \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$. Применение формулы (23.64) иногда может оказаться для этой цели более удобным, чем использование других, ранее рассмотренных методов.

В качестве примера берем $g(u) = u^\alpha(1+u)^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $G(u) \equiv 1$. Тогда при $\operatorname{Re} s \in \left(\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{1}{\alpha}\right)$ формальные действия легко обосновать. Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp[-tu^\alpha(1+u)^\beta] du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-\alpha s)\Gamma[(\alpha+\beta)s-1]}{\Gamma(\beta s)} t^{-s} ds. \end{aligned} \quad (23.65)$$

Имеем $\lambda = 2\alpha + 1$, $\mu = 1$. Интеграл Меллина—Барнса сходится при $|\arg t| < (\alpha + 1/2)\pi$ и дает аналитическое продолжение для интеграла Лапласа.

Передвинув путь вправо, получим при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq (\alpha + 1/2)\pi - \varepsilon$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp[-tu^\alpha(1+u)^\beta] du \sim \\ & \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{1+k}{\alpha}\right) \Gamma\left[\frac{\beta}{\alpha}(1+k) + k\right]}{k! \Gamma\left[\frac{\beta}{\alpha}(1+k)\right]} t^{-\frac{1+k}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (23.66)$$

Передвинув путь влево в случае, когда $\alpha + \beta$ не является рациональным числом, при $t \rightarrow 0$, $|\arg t| \leq (\alpha + 1/2)\pi - \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp[-tu^\alpha(1+u)^\beta] du \sim \\ & \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1+\alpha k) \Gamma[-1-(\alpha+\beta)k]}{\Gamma(-\beta k)} t^k + \\ & + \frac{1}{\alpha+\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{\alpha+\beta}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+\alpha k}{\alpha+\beta}\right)}{\Gamma\left[\frac{\beta(1-k)}{\alpha+\beta}\right]} t^{(k-1)/(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \quad (23.67)$$

Найдем разложение при $t \rightarrow 0$ в случае, когда $\alpha + \beta = p/q$, $p \in \mathbb{N}_1$, $q \in \mathbb{N}_1$; p, q — взаимно-простые числа. Пусть $m \in \mathbb{N}$. При $k = qm$ $pk/q = pm \in \mathbb{N}$. Подынтегральная функция в (23.65) имеет полюсы $s = -qm$ второго порядка. Вычеты в них следует вычислить по другой формуле. Остальные полюсы простые, поэтому согласно (23.25) и (22.4) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp[-tu^{\alpha}(1+u)^{\beta}] du &\sim \sum_{k=0, k \neq qm}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1+\alpha k)\Gamma(-1-pk/q)}{\Gamma(-\beta k)} t^k + \\ &+ q/p \sum_{k=0, k \neq pm+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma[q(1-k)/p]\Gamma[q(\beta+\alpha k)/p]}{\Gamma[\beta q(1-k)/p]} t^{q(k-1)/p} + \\ &+ q/p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(p+q)+1}\Gamma(1+\alpha mq)}{\Gamma(-\beta mq)(mq)!(1+mp)!} (-\ln t + C_m) t^{mq}, \quad (23.68) \end{aligned}$$

где

$$C_m = -\alpha\psi(1+\alpha mq) - \beta\psi(-\beta mq) + \psi(1+mq) + p/q\psi(2+mp).$$

Если в последней сумме $\beta mq \in \mathbb{N}$, то $-\psi(-\beta mq)/\Gamma(-\beta mq)$ следует заменить на $(-1)^{\beta mq}(\beta mq)!$.

6°. Рассмотрим также пример к интегралу типа Диксона—Феррара. С помощью передвижения контура влево легко убедиться в том, что

$$J_{\nu}(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s/2+\nu/2)}{\Gamma(\nu/2-s/2+1)} (2/t)^s ds, \quad (23.69)$$

где $-\operatorname{Re} \nu < \gamma < 1$. Согласно (23.47) имеем

$$\begin{aligned} \Omega(r, \mu, \nu, \alpha) &= \int_0^{\infty} J_{\mu}(rt) J_{\nu}(t) t^{-\alpha} dt = \\ &= \frac{r^{\alpha-1}}{2^{\alpha+1} 2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s/2+\nu/2)\Gamma[(1-\alpha+\mu)/2-s/2] r^s}{\Gamma(1+\nu/2-s/2)\Gamma[(1+\mu+\alpha)/2+s/2]} ds. \quad (23.70) \end{aligned}$$

Параметры выбраны так, чтобы удовлетворялись условия справедливости формулы и, кроме того, $-\operatorname{Re} \mu < \gamma < 1/2$, $1 - \operatorname{Re} \alpha < \gamma < 1$.

$< 1 - \operatorname{Re}(\alpha - \nu)$. После этого (23.70) можно распространить на все значения параметров, при которых оба интеграла существуют. Для левой части (23.70) имеем условия $\operatorname{Re}(\mu + \nu - \alpha) > -1$, $\operatorname{Re} \alpha > -1$, если $r \neq 1$, и $\operatorname{Re}(\mu + \nu + 1) > \operatorname{Re} \alpha > 0$, если $r = 1$. При $r = 1$ интеграл в левой части сходится также в случае, когда $\mu - \nu$ — нечетное число и $\operatorname{Re} \alpha > -1$.

Обозначим вторичные параметры в (23.70) звездочками. Тогда $\mu^* = \lambda^* = 0$, $\kappa^* = -1 - \alpha$, $\nu^* = 1$. Поэтому интеграл в правой части (23.70) сходится абсолютно при $\operatorname{Re} \alpha > 0$, а при $\operatorname{Re} \alpha \in (-1, 0]$ сходится неабсолютно. Передвижением пути влево и вправо с учетом (23.26) и (23.50) получаем следующие соотношения:

при $r > 1$

$$\Omega(r, \mu, \nu, \alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1 - \alpha + \mu + \nu}{2}\right)}{2^{\alpha} r^{\nu+1-\alpha} \Gamma(1+\nu) \Gamma\left(\frac{1 + \mu + \alpha - \nu}{2}\right)} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{1 + \nu - \mu - \alpha}{2}, \frac{1 + \nu + \mu - \alpha}{2}; 1 + \nu; r^{-2}\right); \quad (23.71)$$

при $r < 1$

$$\Omega(r, \mu, \nu, \alpha) = \frac{r^{\mu} \Gamma\left(\frac{1 + \mu + \nu - \alpha}{2}\right)}{2^{\alpha} \Gamma(1 + \nu) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha + \nu - \mu}{2}\right)} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{1 + \mu + \nu - \alpha}{2}, \frac{1 + \mu - \alpha - \nu}{2}; 1 + \mu; r^2\right). \quad (23.72)$$

При $\operatorname{Re} \alpha > 0$ обе функции при $r \rightarrow 1 + 0$ и $r \rightarrow 1 - 0$ согласно формуле [247]

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)}, \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(a + b), \quad (23.73)$$

имеют общий предел

$$\Omega(1, \mu, \nu, \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{1 + \mu + \nu - \alpha}{2}\right)}{2^{\alpha} \Gamma\left(\frac{1 + \mu + \alpha - \nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha + \nu - \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha + \nu + \mu}{2}\right)} \quad (23.74)$$

Все же в комплексной плоскости функции (23.71) и (23.72) не являются аналитическим продолжением друг друга.

При $\operatorname{Re} \alpha \in (-1, 0]$ в общем случае пределы в (23.71) и (23.72) при $r \rightarrow 1$ не существуют. Следовательно, $\Omega(r, \mu, \nu, \alpha)$ в этом случае при $r=1$ терпит бесконечный разрыв. Исключение представляет случай, когда $\mu = \kappa + j$, $\nu = \kappa - j - 1$, $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} \kappa > 1/2 \operatorname{Re} \alpha$. Тогда интеграл в левой части (23.70) сходится (его значение можно найти в [5]), а предел при $r \rightarrow 1$ в правой части бесконечен. Некоторая особенность появляется лишь при $\alpha = 0$, когда в (23.71) и (23.72) существуют конечные пределы. С учетом формулы

$${}_2F_1(a, -j; a-j; 1) = (-1)^j j! \Gamma(a-j) / \Gamma(a), \quad (23.75)$$

которая предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow +0$ получается из (23.73) при $c = a - j + \varepsilon$, $b = -j$ согласно (23.71), (23.72) и п. 23.2.2.В имеем

$$\Omega(r, \kappa + j, \kappa - j - 1, 0) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\kappa)}{r^{\kappa-j} \Gamma(\kappa-j) j!} {}_2F_1(\kappa, -j; \kappa-j; r^{-2}) & \text{при } r > 1, \\ (-1)^{j/2} & \text{при } r = 1, \\ 0 & \text{при } r < 1. \end{cases} \quad (23.76)$$

Интеграл (23.70) по историческим причинам называется разрывным *интегралом Вебера—Шафхейтлина*. Другие методы его вычисления, исторические справки и частные случаи рассмотрены в [5]. Этот интеграл использовался в п. 16.4.7.

В работе [302] доказано подобное соотношение для H -функции Фокса (23.15')

$$\int_0^\infty H_{-1}(xu) H_0(yu) u^{-1} du = \eta_s(x-y),$$

где $\eta_s(u)$ — симметричная единичная функция, $\eta_s(0) = 1/2$, $x > 0$, $y > 0$, $H_{-1}(u) = \int_0^u H_0(t) dt$. Оно непосредственно следует из (23.47) и свойств преобразования Меллина [19].

23.4.4, 7°. Рассмотрим пример разложения с экспоненциальным множителем. Возьмем функцию Харди—Барнса (22.100)

$$G_{-\beta}(-t, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k! (k+\alpha)^\beta} \quad \beta \neq 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Согласно методу Меллина—Барнса имеем

$$G_{-\beta}(-t, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)t^s}{(s+\alpha)^\beta} ds, \quad \gamma \in (-\operatorname{Re} \alpha, 0). \quad (23.77)$$

Поскольку $\mu = -1$, $\lambda = 1$, то равенство (23.77) имеет место при $|\arg t| \leq \pi/2 - \varepsilon$. Если $\Gamma(-s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s+\alpha)^k$, то согласно формуле (23.13), где $l=1$, $p_1 = -\alpha$, при $t \rightarrow \infty$ получаем

$$G_{-\beta}(-t, \alpha) \sim \frac{t^{-\alpha} \sin \beta\pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \Gamma(k-\beta+1) (\ln t)^{-k+\beta-1}. \quad (23.78)$$

В силу примечания 4° к теореме 22.2 разложение (23.78) справедливо при $|\arg t| \leq \pi/2 - \varepsilon$, так как тогда при $|t| > 1$ $|\arg \ln t| \leq \pi/2 - \varepsilon$.

Если $\beta = m \in N$, то ряд (23.78) обрывается (с учетом формулы дополнения для Γ -функции) и можно уточнить полученное асимптотическое представление после вычисления вычета в точке $s = -\alpha$, взяв $\operatorname{Re} s < -m$. Построим разложение с экспоненциально убывающим множителем. В силу равенства $(s+\alpha)^{-m} = s^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (\alpha/s)^k$ в формуле (23.33) следует брать $\rho=1$, $c=1+m$. Поскольку

$$\Gamma(-s)/\Gamma(-s-m) = (-1)^m s^m (1+1/s) \dots (1+m/s),$$

то согласно (5.39) получаем разложение

$$\Gamma(-s)/[\Gamma(-s-m)(s+\alpha)^m] = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_k s^{-k}, \quad (23.79)$$

где

$$\tilde{E}_k = (-1)^m \sum_{j=0}^k \binom{-m}{k-j} \alpha^{k-j} S_{m+1}^{m-j}, \quad S_{m+1}^{-j} = 0 \text{ при } j \in N_1.$$

Поэтому

$$\Gamma(-s)(s+\alpha)^{-m} \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k \Gamma(-s-m-k), \quad (23.80)$$

где L_k определяется в (23.34). Можно также найти непосредственное разложение в ряд обратных факториалов для функции

(23.79). В (23.80) следует учитывать примечание из п. 23.3.3 об исключении полюсов. Поскольку в (23.32) $C_0=1$, $\omega_0=0$, то согласно (23.36) и (23.78) при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ имеем

$$G_{-m}(-t, \alpha) \sim t^{-\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{(m-k-1)!} (\ln t)^{m-k-1} + \\ + e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k t^{-m-k}. \quad (23.81)$$

Если $\beta = -m$, то первая сумма в (23.81) отсутствует, а вторая после замены $-m$ на m превращается в конечную и согласно п. 22.7.2, 3° имеем знак равенства. При $\operatorname{Re} \beta > 0$ разложения (23.78) и (23.81) можно получить из формулы (22.101).

8°. В качестве примера для интеграла второго рода рассмотрим функцию Мейера, когда в (23.16) $\alpha_j=1$, $\beta_j=1$. Имеем $\mu = p-q$, $\lambda=2(l+m) - (p+q)$, $\nu=1$. Если $p < q$, то интеграл

$$G_{pq}{}^{ml}(t; \mathbf{A}_p; \mathbf{B}_q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\infty} \frac{\prod_{j=1}^l \Gamma(1-a_j+s) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j-s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+s) \prod_{j=l+1}^p \Gamma(a_j-s)} t^s ds \quad (23.82)$$

сходится при всех t , а в случае $p=q$ — при $|t| < 1$. Но при $\lambda > 0$ и $p=q$ можно $G_{pq}{}^{ml}$ аналитически продолжить с помощью интеграла первого рода, который сходится также при $p > q$ и, в свою очередь, аналитически продолжим с помощью интеграла третьего рода для любых $\arg t$. Таким образом, в силу принципа аналитического продолжения функцию $G_{pq}{}^{ml}$ можно определить интегралом Меллина—Барнса любого рода, причем хотя бы один из них при данных значениях параметров сходится. При исследовании свойств функции Мейера также можно использовать любой из интегралов.

В (23.82) подстановка $s = -\omega$ переводит интеграл второго рода в интеграл третьего рода. Имеем соотношение

$$G_{pq}{}^{ml}(t; \mathbf{A}_p; \mathbf{B}_q) = G_{qp}{}^{lm}(t^{-1}; \mathfrak{A}_q - \mathbf{B}_q; \mathfrak{A}_p - \mathbf{A}_p). \quad (23.83)$$

Отсюда следует, что достаточно рассмотреть только случай $p \leq q$.

Пусть выполнено условие некратности. Передвинув путь вправо, согласно (23.26) при $p \leq q$ получим формулу

$$G_{pq}{}^{ml} = \sum_{k=1}^m \frac{\prod_{j=1}^l \Gamma(1-a_j+b_k) \prod_{k \neq j=1}^m \Gamma(b_j-b_k)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1-b_j+b_k) \prod_{j=l+1}^p \Gamma(a_j-b_k)} t^{b_k} \times \\ \times {}_pF_{q-1}[(1+b_k)\mathfrak{A}_p - \mathbf{A}_p; (1+b_k)\mathfrak{A}_q - \mathbf{E}_q^k - \mathbf{B}_q; (-1)^{p-m-l}t]. \quad (23.84)$$

Аналогично при $p \geq q$ из интеграла третьего рода, передвинув путь влево, приходим к соотношению

$$G_{pq}{}^{ml} = \sum_{k=1}^l \frac{\prod_{k \neq j=1}^l (a_k - a_j) \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + 1 - a_k)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(a_k - b_j) \prod_{j=l+1}^p \Gamma(a_j + 1 - a_k)} t^{a_k - 1} \times \\ \times {}_qF_{p-1}[(1-a_k)\mathfrak{A}_q + \mathbf{B}_q; (1-a_k)\mathfrak{A}_p + \mathbf{A}_p - \mathbf{E}_p^k; (-1)^{q-l-m}t^{-1}]. \quad (23.85)$$

Полученные формулы показывают, что более глубокие исследования асимптотики функции Мейера возможны с помощью гипергеометрических функций. Однако, как мы видели (см. п. 23.4.2), для исследования гипергеометрических функций также целесообразно применять интеграл второго рода. Поэтому с помощью соотношения

$${}_pF_q(\mathbf{A}_p; \mathbf{B}_q; t) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{p \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} G_{p,q+1}{}^{1p}(-t; \mathfrak{A}_p - \mathbf{A}_p; \mathfrak{A}_{q+1} - \mathbf{B}_{q+1}^*), \quad (23.86)$$

$\mathbf{B}_{q+1}^* = \{1, \mathbf{B}_q\}$, которое следует из (23.84) при $m=1$, можно также разложения для ${}_pF_q$ получить как частный случай разложений для $G_{pq}{}^{ml}$. Этот путь более удобен, так как иногда комбинация гипергеометрических функций дает пустое разложение. Эти вопросы подробнее будут рассмотрены в третьем томе монографии. Они и разные свойства G -функций изложены в работах [1, 283, 302, 324, 330], где указана также дополнительная литература по вопросам функции Мейера.

23.5. Интегралы по вертикальной прямой с другими ядрами

23.5.1. Более общий тип интегралов, чем (22.30) или (23.15), имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} K(s, t) h(s) ds. \quad (23.87)$$

В частном случае $K(s, t) = e^{tg(s)}$. При деформировании пути интегрирования для таких интегралов часто приходится учитывать также особые точки функции $K(s, t)$ и точки перевала. В последнем случае можно использовать результаты § 21. Теория интегралов (23.87) пока мало изучена. Поэтому ограничимся лишь рассмотрением нескольких простых частных случаев, подобные которым встречаются в литературе. Они иллюстрируют разные приемы построения асимптотических разложений, так как кроме деформирования пути с учетом особых точек применяются также интегрирование по частям и разложение подынтегральной функции в ряд. Рассмотрим два случая, когда появляются интегралы типа (23.87).

1°. При исследовании асимптотики интегралов типа обращения преобразования Лапласа (или Меллина) аналитическое продолжение интеграла при комплексном t часто получают с помощью подстановки $tp = w$. Тогда

$$\Omega(t) = \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_{\gamma t - i\infty}^{\gamma t + i\infty} e^w h(w/t) dw. \quad (23.88)$$

Пример к этому методу рассматривался при разложении функции Миттага—Лефлера (п. 22.7.2, 4°).

2°. При обращении преобразования Лапласа с помощью функциональных рядов по F — A -методу используется асимптотика коэффициентов c_n согласно формуле (22.82) при большом индексе. В зависимости от конкретной системы функций получаем разные ядра $K(p, n)$, причем наблюдается большое разнообразие типов ядер [235, 236]. Например, для полиномов Лежандра $P_n(1 - 2e^{-\sigma t})$, которые ортогональны с весом $e^{-\sigma t}$ на $[0, \infty)$, имеем [235]

$$\begin{aligned} K(p, n) &= (2n+1) \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{pt} P_n(1 - 2e^{-\sigma t}) dt = \\ &= (2n+1) \left(\frac{p}{\sigma}\right)_n \left/ \left(1 - \frac{p}{\sigma}\right)_{n+1} \right. \end{aligned} \quad (23.89)$$

23.5.2, 1°. Если в интеграле (23.15) t^{-s} заменить на t^{-sm} , $m \in \mathbb{N}_2$, то исследование асимптотики заметно изменится. Определяющая роль обычно принадлежит функции $t^{-sm} = \exp(-s^m \ln t)$, имеющей седловую точку $s=0$. Тогда полюсы функции $h(s)$ не имеют существенного значения и формальный сдвиг пути интегрирования влево или вправо приводит к неверному разложению. Ради определенности рассмотрим случай, когда $m=4$, т. е. интеграл

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s+1) \prod_{j=1}^q \Gamma(b_j-s)}{s \prod_{j=2}^p \Gamma(a_j-s)} t^{-s^4} ds, \quad \gamma \in (0, \delta), \quad (23.90)$$

где $a_j > 0$, $b_j > 0$, $\delta = \min\{b_j\}$ и выполнено условие некратности. Поскольку при $t = re^{i\varphi}$, $s = \sigma + i\tau$ имеем

$$|t^{-s^4}| = \exp[(-\sigma^4 + 6\sigma^2\tau^2 - \tau^4) \ln r + 4\varphi(\sigma^3\tau - \sigma\tau^3)], \quad (23.91)$$

то интеграл (23.90) сходится при всех a_j , b_j , p и q , если $r > 1$. При смещении пути вправо или влево получаем два формальных степенных ряда, оба по убывающим степеням t . Но ни один из них не является асимптотическим, так как остаток не имеет требуемой оценки. Это объясняется тем, что на отрезке пути, где $\sigma^2/\tau^2 \in (3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$, множитель при $\ln r$ в (23.91) положителен и интеграл по этому пути стремится к бесконечности вместе с $\ln r$.

Следовательно, единственной существенно критической точкой является $s=0$. Поскольку эта точка одновременно является простым полюсом, то следует применять теорему 19.2, в которой имеем $m=4$, $l=2$, $\mu_k = k-1$, $\gamma_k = -1 + k/4$. Пусть

$$\Gamma(s+1) \prod_{j=1}^q \Gamma(b_j-s) \prod_{j=2}^p \Gamma(a_j-s) = G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k. \quad (23.92)$$

Тогда по формулам (19.25) и (19.26) получаем

$$\Omega_1(t) \sim \frac{a_0}{2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k+1} \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right) (\ln t)^{-k/2-1/4}, \quad (23.93)$$

$$t \rightarrow \infty, \quad |\arg t| \leq \pi - \varepsilon.$$

Разложение (23.93) можно получить также однократным интегрированием по частям, приведением $\Omega_1(t)$ к интегралу по $[0, \infty)$ и применением модификации леммы Ватсона [175].

Данный пример допускает следующие обобщения.

А. Поскольку разложение (23.93) содержит коэффициенты ряда (23.92), то результат остается справедливым при любой мероморфной функции $G(s)$, аналитической в окрестности мнимой оси и обладающей соответствующей оценкой в бесконечности.

Б. В (23.90) множитель s^{-1} можно заменить на $s^{-\rho}$, $\rho > 0$.

Рассмотренный метод неприменим при $m=1$, так как тогда указанным путем для интеграла по мнимой оси получаем лишь оценку $o((\ln t)^{-N})$. Поэтому в таком случае приходится учитывать полюсы.

2°. Рассмотрим еще другой пример, когда доминирующей является точка перевала, а интеграл представляет собой модификацию интеграла (22.30):

$$\Omega_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(p^2 t - 2p) h(p) dp, \quad \gamma > 0, \quad (23.94)$$

где $h(p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p > 0$. Исследуем асимптотику функции $\Omega_2(t)$ при $t \rightarrow +0$. Поскольку имеем точку перевала $p_0 = 1/t$, то применим подстановку $p = s/t$. Тогда

$$\begin{aligned} \Omega_2(t) &= \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_{\gamma t - i\infty}^{\gamma t + i\infty} \exp[(s^2 - 2s)/t] h(s/t) ds = \\ &= \frac{t^{-1}}{2\pi i} e^{-1/t} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \exp[(s-1)^2/t] h(s/t) ds = \\ &= \frac{t^{-1}}{2\pi} e^{-1/t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2/t) h[(1+i\tau)/t] d\tau. \end{aligned} \quad (23.95)$$

Пусть при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq \gamma$

$$h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-\lambda_k}. \quad (23.96)$$

Тогда в силу аналитичности функции $h(p)$ можно найти такие $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$, что части интеграла (23.95) по интервалам $(-\infty, -\varepsilon]$ и $[\varepsilon, \infty)$ будут иметь оценку $O(e^{-\eta/t})$ а в интервале по $[-\varepsilon, \varepsilon]$ можно применить (23.96) и лемму Ватсона. Перегруппировав после этого члены, при $t \rightarrow +0$ получим

$$\begin{aligned} \Omega_2(t) &\sim \frac{t^{-1}}{2\pi} e^{-1/t} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\lambda_k} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\tau^2/t} (1+i\tau)^{-\lambda_k} d\tau \sim \\ &\sim \frac{e^{-1/t}}{2\pi\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{\mu_k}, \end{aligned} \quad (23.97)$$

где b_k и μ_k определяются формальной перегруппировкой в

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\lambda_k} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda_k}{2j} \Gamma(j+1/2) t^j.$$

Можно построить разложение по более общей шкале [48].

23.5.3. В формуле (23.89) ядро $K(p, n)$ можно выразить с помощью отношения Γ -функций. Поэтому исследуем при $t \rightarrow +\infty$ асимптотику интеграла

$$\Omega_3(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(b_1-\alpha p) \Gamma(\alpha p+t+1-a_1)}{\Gamma(\alpha p+1-b_2) \Gamma(a_2+t-\alpha p)} e^{-\omega p} h(p) dp, \quad (23.98)$$

где $\alpha > 0$, параметры a_j и b_j действительны, $0 < \gamma < b_1/\alpha$, $\omega \geq 0$, а функция $h(p)$ при $\operatorname{Re} p < 0$ имеет конечное число алгебраических особенностей p_1, \dots, p_m , $\operatorname{Re} p_k \geq \operatorname{Re} p_{k+1}$ и удовлетворяет на бесконечности некоторому условию, которое обеспечивает сходимость интеграла. Поскольку при фиксированном t имеем $\mu = \lambda = 0$, $\kappa = b_1 + b_2 - a_1 - a_2$, то достаточно, если при $p \rightarrow \infty$ $h(p) = O(p^{-\kappa-1-\eta})$, $\eta > 0$. Кроме того, предположим, что $h(\bar{p}) = \bar{h}(p)$.

Чтобы при больших значениях t можно было применить асимптотику для Γ -функций и выделить в (23.98) более простое ядро и тем самым выяснить вопрос о присутствии или отсутствии седловых точек, целесообразно сначала применить подстановку $\alpha p = tz$, $z = x + iy$, которая переносит путь интегрирования параллельно себе ближе к мнимой оси. После этого согласно (23.17) выделим ядро $e^{tg(z)}$, где

$$\begin{aligned} g(z) &= (1+z) \ln(1+z) - 2z \ln z - (1-z) \ln(1-z) - \omega z/\alpha + \\ &\quad + i\pi z \operatorname{sign} y. \end{aligned} \quad (23.99)$$

Еще имеем множитель $\alpha^{-1} t^{\kappa+1} \exp[i\pi(b_1-1/2)\operatorname{sign} y] \exp[g^*(z, t)]$, где $g^*(z, t) = O(1/t)$ при $t \rightarrow +\infty$ и оценка равномерна относительно z на всем пути, кроме некоторого участка вблизи $z=0$. Но

на этом участке не будем применять представление ядра с помощью функции (23.99).

Из уравнения $g'(z) = 0$ получаем седловые точки $z^\pm = \pm i/\sqrt{e^{\omega/\alpha} - 1}$. При $\omega = 0$ седловых точек нет, поэтому не следует применять данную подстановку. Поскольку $\operatorname{Re} g(iy) = 0$ при любом y , то обе седловые точки находятся на одинаковой высоте и путь приходится деформировать через обе точки. Однако следует учитывать также разрез, идущий по отрицательной полуоси, и особые точки функции $h(p)$, которые в результате подстановки переходят в точки, близкие к $z = 0$. Поэтому нельзя непосредственно идти по долине от z^- к z^+ , а приходится подниматься в гору и обходить точку $z = 0$ справа (рис. 33). Следовательно, деформированный путь состоит из линий спуска L_1 и L_2 , проходящих через z^- и z^+ , и кривой L_3 , поднимающейся в гору. В интеграле по L_3 функцию (23.99) использовать не будем, но применим обратную подстановку. В итоге получим

$$\begin{aligned} \Omega_3(t) &= \frac{1}{\alpha 2\pi i} t^{\alpha+1} \int_{L_1+L_2} \exp[\operatorname{tg}(z) + i\pi(b_1 - 1/2) \operatorname{sign} y] G(z, t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3^*} \frac{\Gamma(b_1 - \alpha p) \Gamma(\alpha p + t + 1 - a_1)}{\Gamma(\alpha p + 1 - b_2) \Gamma(a_2 + t - \alpha p)} e^{-\omega p} h(p) dp = \\ &= \Omega_1^*(t) + \Omega_2^*(t), \end{aligned} \quad (23.100)$$

где

$$G(z, t) = (1+z)^{1/2-a_1} (1-z)^{1/2-a_2} z^{b_1+b_2-1} e^{g^*(z,t)} h(zt/\alpha), \quad (23.101)$$

а L_3^* показан на рис. 34. При $\omega = 0$ имеем только $\Omega_2^*(t)$, где L_3^* заменен вертикальной прямой с вогнутой средней частью, которая деформирована по $L_4 + L_{51} + L_{52} + L_6$ (рис. 34). Рассмотрим отдельно разложение каждого интеграла в (23.100).

1°. К разложению $\Omega_1^*(t)$ применим частный случай теоремы Фабера с учетом примечания 2° к теоремам 21.1—21.5. В силу того что $g^*(z, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) t^{-2k-1}$, согласно свойствам функции $h(p)$ $G_k(z, t) = o(1)$, а в (21.51) также $C_k^*(t) = o(1)$. Поэтому вклады от седловых точек имеют слабоасимптотические разложения, в которых еще следует перегруппировать члены по степенной шкале. Согласно свойствам подынтегральной функции $G_h(z^-, t) = \bar{G}_h(z^+, t)$. С учетом соотношений

$$g(z^\pm) = \pm 2i \arctg(1/\sqrt{e^{\omega/\alpha} - 1}), \quad g_2(\pm iy) = \pm 2i/y(1+y^2),$$

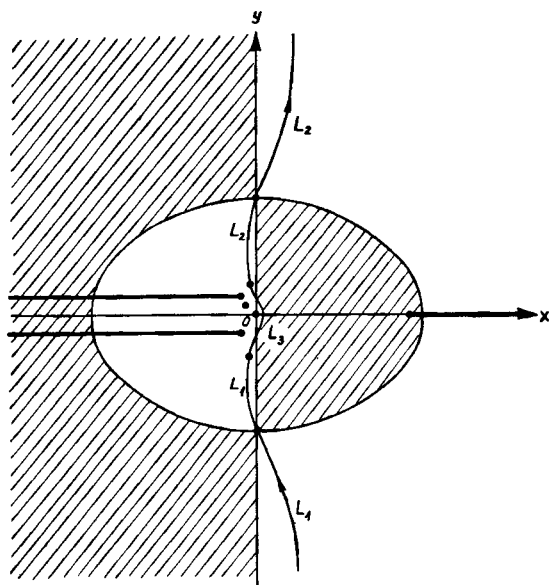


Рис. 33

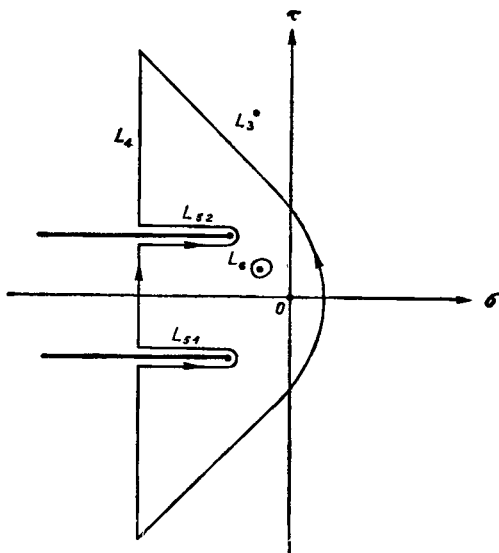


Рис. 34

а также формул (21.38) и (21.51) при $t \rightarrow +\infty$ получаем

$$\Omega_1^*(t) \sim \frac{t^{\kappa+1/2}}{\alpha\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{e^{\omega/\alpha}}{(e^{\omega/\alpha}-1)^{3/2}}} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} \{ \exp [i(2t \operatorname{arctg} (1/\sqrt{e^{\omega/\alpha}-1}) + \pi(b_1-3/4))] D_k(z^+, t) \} t^{-k}, \quad (23.102)$$

где $D_0(z^+, t) = G(z^+, t)$. Вычисление $D_k(z^+, t)$ при $k \geq 1$ весьма затруднительно.

2°. При нахождении разложения для $\Omega_2^*(t)$ ради конкретности допустим, что $m=3$ и p_1 — простой полюс, а p_2 и p_3 — точки ветвления, в окрестности которых $h(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj}(p-p_j)^{\lambda_{kj}}$, $j=2, 3$, $\operatorname{Re} p_2 = \operatorname{Re} p_3 < \operatorname{Re} p_1 < 0$. Согласно рис. 34

$$\Omega_2^*(t) = \frac{\Gamma(b_1 - \alpha p_1) \Gamma(\alpha p_1 + t - a_1 + 1)}{\Gamma(\alpha p_1 + 1 - b_2) \Gamma(a_2 + t - \alpha p_1)} e^{-\omega p_1} \operatorname{res} [h(p); p_1] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_4} H_0(p, t) dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{51} + L_{52}} H_0(p, t) dp, \quad (23.103)$$

где $H_0(p, t)$ — подынтегральная функция в (23.98). В первом члене, а также под знаком интегралов можно применить формулу (12.62), согласно которой

$$\frac{\Gamma(t + \alpha p + 1 - a_1)}{\Gamma(t + a_2 - \alpha p)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} Q_{2k}(p) t^{-\rho-k} \exp(2\alpha p \ln t), \quad (23.104)$$

где $\rho = a_2 + a_1 - 1$, а

$$Q_{2k}(p) = (\rho - 2\alpha p)_k B_k^{(2\alpha p - \rho + 1)}(\alpha p + 1 - a_1), \quad Q_0(p) = 1.$$

Степень $2k$ многочлена $Q_{2k}(p)$ следует из формул (9.45) и (9.47).

Подставив (23.104) при $p = p_1$ в (23.103), получим асимптотическое разложение первого члена. Ряд имеет конечное число членов, если $2\alpha p_1 + 1 - a_1 - a_2 \in \mathbb{N}$. Подставив (23.104) в интеграл по L_4 , получим для интеграла оценку $O(t^{-\rho-2\alpha\sigma_0})$, где $\operatorname{Re} p = -\sigma_0 < \operatorname{Re} p_3$ на L_4 . Поскольку для интегралов по L_{51} и L_{52} согласно (22.43) получаем разложения по степеням $2\alpha \ln t - \omega$, то в них следует подставить только первый член ряда (23.104) при $k=0$, а интегралом по L_4 можно пренебречь.

В разложении для первого члена в (23.103) и (23.102) тогда следует брать конечное число членов. В итоге имеем разложение

$$\begin{aligned} \Omega_2^*(t) \sim & \frac{e^{-\omega p_1} \Gamma(b_1 - \alpha p_1)}{\Gamma(\alpha p_1 + 1 - b_2)} \operatorname{res} [h(p); p_1] \sum_{k=0}^{k_0} \frac{(-1)^k}{k!} Q_{2k}(p_1) t^{2\alpha p_1 - \rho - k} - \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{j=2}^3 t^{-\rho + 2\alpha p_j} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} \sin(\pi \lambda_{kj}) \Gamma(\lambda_{kj} + 1) (2\alpha \ln t - \omega)^{-\lambda_{kj} - 1}, \end{aligned} \quad (23.105)$$

где $k_0 = [2\alpha \operatorname{Re}(p_1 - p_2)]$.

23.5.4, 1°. Интеграл типа Коши

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} \frac{h(s)}{t-s} ds \quad (23.106)$$

определяет аналитические функции при $\operatorname{Re} t < \gamma_0$ и $\operatorname{Re} t > \gamma_0$. Если интеграл от $|h(s)s^n|$ по прямой сходится при каждом фиксированном $n \in N$, то в силу равенства

$$\frac{1}{t-s} = \sum_{k=0}^n \frac{s^k}{t^{k+1}} + \frac{1}{t^{k+2}} \frac{s^{n+1}}{t-s} \quad (23.107)$$

получаем при $|t| \rightarrow \infty$

$$\Omega(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k-1} \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} h(s) s^k ds, \quad (23.108)$$

так как остаток имеет оценку $O(t^{-n-2})$.

Аналогично в некоторых случаях почленным интегрированием можно построить асимптотическое разложение интегралов, в которых $t-s$ заменено на $t-g(s)$. Чтобы применить формулу (23.107) и получить сходящиеся интегралы, иногда приходится путь деформировать и к разложению добавлять вычеты в полюсах. Пример этого при $h(s) = \exp(s+s^\alpha)$, $g(s) = \exp s^\alpha$, $\alpha \in (1/2, 1)$, рассмотрен в работе [6, 1962].

2°. При решении краевых задач важно исследовать также поведение интеграла типа Коши

$$\Omega_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{h(s)}{t-s} ds \quad (23.109)$$

в случае, когда t приближается к концу a . Случай, когда $h(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s-a)^k$ при $s \rightarrow a$ или $h(s) = (s-a)^{-\lambda} \ln^\mu (s-a)$, рассмот-

рены в [243]. Более общий случай, когда функция $h(s)$ удовлетворяет разностному уравнению $F(s+1) - F(s) = h(s)$ и $t \rightarrow a$, рассмотрен в [268, 269]. Но с помощью последнего приема обычно нельзя построить полное асимптотическое разложение.

§ 24. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ

24.1. Критические точки в бесконечности

24.1.1. В п. 12.4.3, 3°, а также в п. 16.3 мы уже установили, что в случае действительного переменного интегрирования иногда бесконечность является критической точкой. То же самое относится к случаю комплексного переменного интегрирования, если путь, который обозначим через L_∞ , в определенном направлении удаляется в бесконечность. Для интеграла

$$\Omega(z) = \int_{L_\infty} K(zg(t))h(t)dt \quad (24.1)$$

можно предположить, что $t = \infty$ будет критической точкой, если $g(t) \rightarrow a \neq \infty$ при $t \rightarrow \infty$, $t \in L_\infty$, так как тогда после подстановки $g(t) = u$ получаем интеграл, для которого точка $u = a$ является конечным концом пути, нередко являющимся существенно критической точкой. Поскольку из $g(t) = O(1)$ согласно п. 2.4.2, 1° следует, что $g'(t) = O(1/t) \rightarrow 0$, то можно сказать, что в бесконечности находится точка перевала.

С помощью прежней подстановки или некоторой другой точку $t = \infty$ можно отобразить на конечную точку. Поэтому при построении асимптотического разложения для асимптотического вклада от $t = \infty$ можно применить методы, рассмотренные в предыдущих главах. Иногда целесообразно интегрировать по градиентным линиям, чтобы задачу привести к действительному переменному интегрированию. Если в данном направлении в бесконечность уходит бесконечно много градиентных линий, то получаем разные разложения с разными промежутками для $\arg z$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда в (24.1)

$$K(t) = e^{-t}, \quad g(t) = t^\lambda \exp(-\alpha t^\beta) g_0(t), \quad (24.2)$$

где $\alpha > 0$; $\beta > 0$; λ — действительное число; $g_0(t) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-\kappa_k}$;

$0 < \kappa_k \uparrow + \infty$ при $t \rightarrow \infty$, $t \in S$; S — некоторый сектор, содержащий путь интегрирования, а $h(t) = At^{-1-\mu} h_0(t)$; $A \neq 0$; $\mu > 0$; $h_0(t) = 1 + o(1)$ при $t \rightarrow \infty$, $t \in S$. Имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, если $\arg t = \varphi \in$

$\in (-\pi/2\beta, \pi/2\beta)$. Этот сектор и примем в качестве S .

Поскольку при $t = re^{i\varphi}$

$$\arg g(t) = \lambda\varphi - \alpha r^\beta \sin \beta\varphi + o(1) + 2n\pi \in (-\pi, \pi],$$

то градиентные линии $\arg g(t) = -c$ могут удаляться в бесконечность только по направлениям, вдоль которых $\varphi = k\pi/\beta$, $|k| \in N$. В секторе S имеем только направление, вдоль которого $\varphi = 0$.

Пусть L_∞ — некоторая часть градиентной линии L_c , на которой $\arg g(t) = -c$, $c > 0$, и которая входит в $t = \infty$ под углом $\varphi = 0$. Второй конец L_c обозначим через a . Применим подстановку

$$g(t) = ue^{-ic}, \quad (24.3)$$

с помощью которой L_c отображается на отрезок $u \in [0, |g(a)|]$ с отрицательной ориентацией. Для функции $\exp(-zg(t)) = \exp(-ze^{-ic}u)$ критической является точка $u = 0$, если $|\arg(ze^{-ic})| \leq \pi/2 - \varepsilon$. Чтобы найти асимптотическое представление, из (24.3) следует выразить функцию $t = t(u)$, которая зависит также от $c = -\arg g(a)$. Коэффициенты разложения поэтому также зависят от c .

Покажем, что основной член разложения не зависит от c . Чтобы найти $t(u)$, вводим обозначение $t^\beta = \omega$. Если брать главное значение логарифма, то из (24.3) получаем уравнение $\ln(1/ue^{-ic})^{1/\alpha} = \omega - (\lambda/\alpha\beta) \ln \omega - 1/\alpha \ln g_0(\omega^{1/\beta})$. Пусть $\kappa_k = \beta k$ и ряд для $g_0(t)$ сходится при достаточно большом $|t|$. Тогда $\ln g_0(\omega^{1/\beta}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \omega^{-k}$ и при обозначении $(1/ue^{-ic})^{1/\alpha} = v$ согласно (24.61) имеем

$$\omega \sim \ln v \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(1/\ln \ln v) (\ln \ln v / \ln v)^j \right], \quad (24.4)$$

где $P_j(y)$ — полином степени j при $j \geq 2$; $P_1(y) \equiv \lambda/\alpha\beta$; $P_j(0) = 0$, $P_j'(0) \neq 0$. Согласно теореме 4.6, в которой $z = \ln \ln v / \ln v$, и формуле (4.23) имеем также разложение

$$t = \omega^{1/\beta} \sim \ln^{1/\beta} v \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(1/\ln \ln v) (\ln \ln v / \ln v)^j \right], \quad (24.5)$$

где

$$Q_j = 1/j \sum_{m=1}^j P_m Q_{j-m} [(1+1/\beta)m - j], \quad j \geq 1, \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = \lambda/\alpha\beta^2. \quad (24.6)$$

Легко видеть, что $Q_j(y)$ — тоже полином степени j , $j \geq 2$.

Поскольку функция $h_0(t)$ задана недостаточно точно, то можно построить только первый член разложения для $\Omega(t)$. Поэтому достаточно (24.5) упростить в форме

$$t(u) = \alpha^{-1/\beta} (\ln 1/u)^{1/\beta} [1 + o(1)]. \quad (24.7)$$

Полное разложение будет построено в п. 24.2.1 для одного частного случая. Если $\kappa_k \neq \beta k$, то вместо (24.4) получим более сложное разложение, но формула (24.7) сохранится. Поэтому дальнейший текст рассматривается без дополнительных ограничений относительно κ_k и $g_0(t)$

Из (24.3) легче найти выражение для $g'(t) dt$. Поэтому сначала данный интеграл один раз интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \Omega(z) = \int_{L_c} e^{-zg(t)} h(t) dt &= O(\exp(-ze^{-ic}|g(a)|)) + \\ &+ z \int_{L_c} e^{-zg(t)} h_{-1}(t) g'(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h_{-1}(t) &= \int_{\infty}^t h(\tau) d\tau = -(A/\mu) t^{-\mu} [1 + o(1)] = \\ &= -(A/\mu) \alpha^{\mu/\beta} (\ln 1/u)^{-\mu/\beta} [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Поэтому согласно (13.49) при $z \rightarrow \infty$, $|\arg ze^{-ic}| \leq \pi/2 - \varepsilon$

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -ze^{-ic} \int_0^{|a|} \exp[-ze^{-ic}u] h_{-1}(t(u)) du = (A/\mu) \alpha^{\mu/\beta} ze^{-ic} \times \\ &\times \int_0^{|a|} \exp[-ze^{-ic}u] (\ln 1/u)^{-\mu/\beta} [1 + o(1)] du = \\ &= (A/\mu) \alpha^{\mu/\beta} (\ln z)^{-\mu/\beta} [1 + o(1)]. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Если брать $h(t) = At^\mu \exp(-bt^\gamma) h_0(t)$, $b > 0$, $\gamma \in (0, \beta)$, то согласно (8.8) имеем

$$\begin{aligned} h_{-1}(t) &= (A/\gamma b) t^{\mu+1-\gamma} \exp(-bt^\gamma) [1 + o(1)] = (A/\gamma b) \alpha^{\frac{\mu+1-\gamma}{\beta}} \times \\ &\times (\ln 1/u)^{\frac{\mu+1-\gamma}{\beta}} [1 + o(1)] \exp[-b\alpha^{-\gamma/\beta} (\ln 1/u)^{\gamma/\beta} (1 + o(1))]. \end{aligned} \quad (24.9)$$

Поскольку $\gamma/\beta < 1$, то из (24.5) следует, что в (24.9) $(\ln 1/u)^{\gamma/\beta} o(1) = o(1)$. Поэтому основной множитель в правой

части (24.9) тоже не зависит от c . При $\arg ze^{-ic} = 0$ асимптотическое выражение при $z \rightarrow \infty$ для $\Omega(z)$ непосредственно следует из теоремы 6.1, так как правая часть (24.9) принадлежит классу \mathcal{L}_0 . Однако этот результат можно перенести на случай, когда $|\arg ze^{-ic}| \leq \pi/2 - \varepsilon$.

24.1.2. Для интеграла (24.1) в общем случае можно сохранить результаты п. 12.4.3, 3°, если на L_∞ сохраняются прежние свойства функций $h(t)$ и $g(t)$, т. е. при $t \rightarrow \infty$, $t \in S$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k - 1}, \quad g(t) \sim d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{-\mu_k}, \quad (24.10)$$

$0 < \lambda_k \uparrow + \infty$, $0 < \mu_k \uparrow + \infty$ и $g(t)$ аналитична в S . Если $K(t) = e^{-t}$, то $t = \infty$ при $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ является существенно критической точкой и вклад от нее после подстановки $t = 1/u$ можно найти аналогично, как в § 16. Если, напротив, функция $h(t)$ или $g(t)$ не обладает разложением (24.10), то разложение для $\Omega(t)$ нередко приходится строить более сложным путем. В качестве простого примера относительно $h(t)$ рассмотрим при $z \rightarrow \infty$

$$\Omega(z) = \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{zt}{1+t^2}\right) t^{-\alpha} \sin t dt, \quad (24.11)$$

$a \geq 0$, $\alpha > 0$. При $a = 0$ $\alpha \in (0, 2)$. Пример относительно $g(t)$ будет рассмотрен в п. 24.2.1. В (24.11) имеем также точку перегиба $t = 1$, но вклад от нее имеет оценки $O(e^{-z/2} z^{-1/2})$, поэтому следует учитывать только вклады от концов. Чтобы судить об их значимости, сначала разложим вклад $\Omega_1(z)$ от $t = \infty$. Подстановкой $t = 1/u$ получаем

$$\Omega(z) = \int_0^{1/a} \exp\left(-\frac{zu}{1+u^2}\right) u^{\alpha-2} \sin 1/udu,$$

но далее следует применить расщепление критической точки $u = 0$. Надо найти разложения интегралов

$$\begin{aligned} I^{\pm}(z) &= \int_0^{\varepsilon} \exp\left[-\frac{zu}{1+u^2} \pm \frac{i}{u}\right] u^{\alpha-2} du = e^{\pm i\pi(\alpha-1)/4} z^{-(\alpha-1)/2} \times \\ &\times \int_0^{\varepsilon/\sqrt{z} \exp(\mp i\pi/4)} \exp[-e^{\pm i\pi/4} \sqrt{z}(\tau+1/\tau)] H_0^{\pm}(z, \tau) \tau^{\alpha-2} d\tau. \end{aligned} \quad (24.12)$$

Поскольку критической в (24.12) является точка $\tau=1$, то путь можно деформировать по действительной оси через эту точку, а потом по линии спуска. Из рис. 28, в видно, что такое деформирование всегда возможно, если $|\arg \sqrt{z} \exp(\mp i\pi/4)| \leq \pi/2 - \eta/2$, т. е. $|\arg z| \leq \pi/2 - \eta$. При этих z и справедливы полученные разложения (24.13).

Для разложения интеграла (24.12) можно применить формулу (21.88), согласно которой при $z \rightarrow \infty$

$$I^{\pm}(z) \sim \sqrt{2} \exp[\pm i\pi(\alpha - 3/2)/4 - 2e^{\pm i\pi/4} \sqrt{z}] z^{(1-2\alpha)/4} \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} C_{2j}^{\pm}(z) 2^{-j} e^{\pm i\pi j/4} z^{-j/2}. \quad (24.13)$$

Коэффициенты $C_{2j}^{\pm}(z)$ вычисляются следующим образом. Сначала согласно § 21 строим разложения

$$\exp[-e^{\pm i\pi/4} \sqrt{z}(\tau + 1/\tau)] = \exp[-2e^{\pm i\pi/4} \sqrt{z}] e^{-\omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\omega^2) (\tau - 1)^k,$$

где функции $B_k(\omega^2)$ вычисляются по (19.30), $D_k = (-1)^{k-1}$, $\omega^2 = (\tau - 1)^2 e^{\pm i\pi/4} \sqrt{z}$ и

$$H_0^{\pm}(z, \tau) = \exp[z^{-1/2} e^{\pm i3\pi/4} \tau^3 / (1 + \tau^2 \kappa)] = \\ = \exp[z^{-1/2} e^{\pm i3\pi/4} / (1 + \kappa)] \exp \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{\pm}(z) (\tau - 1)^k = \\ = \exp[z^{-1/2} e^{\pm i3\pi/4} / (1 + \kappa)] \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\pm}(z) (\tau - 1)^k,$$

где коэффициенты $A_k^{\pm}(z)$ тоже вычисляются по (19.30), $\kappa = e^{\pm i\pi/2} z^{-1}$, $A_0^{\pm}(z) = 1$. Последнее разложение следует умножить на

$$\tau^{\alpha-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-2}{k} (\tau - 1)^k$$

и потом согласно (21.45) найти $Q_k(z, \omega^2)$; $q_{jk}(z)$ являются рациональными функциями от $1/\sqrt{z}$ и $q_{jk}(z) = o(1)$ при $z \rightarrow \infty$.

В силу этого после нахождения $C_{2k}^{\pm}(z)$ по (21.51) в (24.13) еще следует перегруппировать члены, чтобы получить разложение по степеням $z^{-1/2}$. С учетом соотношений

$$\Omega_1(z) = 1/2i[I^+(z) - I^-(z)], \quad \exp[z^{-1/2} e^{\pm i3\pi/4} / (1 + \kappa)] = 1 + O(1/\sqrt{z}),$$

приходим к выражению

$$\Omega_1(z) = \sqrt{\pi} z^{(1-2\alpha)/4} e^{-\sqrt{2z}} [\sin(\sqrt{2z} - \alpha\pi/4 + 3\pi/8) + O(\exp(|\operatorname{Im}\sqrt{2z}|)z^{-1/2})]. \quad (24.14)$$

При $a > 0$ вклад точки a имеет оценку $O(\exp[-za/(1+a^2)]z^{-1})$, поэтому доминирующей является точка $t = \infty$ и $\Omega(z)$ имеет асимптотическое выражение (24.14). Однако при $a = 0$ в силу оценки $e^{-\sqrt{2z}} e^{|\operatorname{Im}\sqrt{2z}|} = o(z^{-N})$ при $|\arg\sqrt{z}| \leq \pi/4 - \varepsilon$ доминирующей является точка $t = 0$. Согласно теореме 16.1 имеем

$$\Omega(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma(k+2-\alpha) z^{\alpha-k-2}, \quad (24.15)$$

где

$$\begin{aligned} 2^{\alpha-1} u^{\alpha-2} (1-\sqrt{1-4u^2})^{-\alpha+1} (1-4u^2)^{-1/2} \sin[(1-\sqrt{1-4u^2})/2u] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^{k+1-\alpha}, \quad c_0 = 1. \end{aligned}$$

При нахождении c_k можно использовать формулы

$$(1-\sqrt{1-\tau})^{\lambda+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\lambda+2j}{j} \frac{\lambda+1}{\lambda+j+1} \frac{\tau^{j+\lambda+1}}{2^{\lambda+2j+1}}; \quad (24.16)$$

$$(1-\sqrt{1-\tau})^{\lambda}/\sqrt{1-\tau} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\lambda+2j}{j} \frac{\tau^{j+\lambda}}{2^{\lambda+2j}}. \quad (24.17)$$

Первая из них получается по теореме Лагранжа—Бюрмана 5.5 при $f(z) = z^{\lambda+1}$, $g(z) = (2z-1)/z^2$, $z_0 = 1/2$, а (24.17) — из (24.16) почленным дифференцированием.

24.2. Путь интегрирования пересекает гору. Точка перевала на разрезе

24.2.1. Имеются случаи, когда при исследовании асимптотики интеграла

$$\Omega(z) = \int_L e^{zg(t)} h(t) dt \quad (24.18)$$

и деформировании пути L через точку перевала приходится пересечь гору. Если наиболее высокую точку на горе в этом пересече-

чении обозначить через t_0 , то согласно п. 19.2 для интеграла по такому пересечению получим лишь оценку $o(e^{zg(t_0)}z^{-N})$, которая плохо характеризует действительное асимптотическое выражение. Чтобы его найти, нередко целесообразно путь деформировать по линии спуска L_1 в бесконечность, если интеграл сходится, а потом — по другой линии спуска L_2 в точку перевала. На L_1 $\operatorname{Re} g(t)$ монотонно возрастает, на L_2 — монотонно убывает. При деформировании пути в бесконечность необходимо, чтобы выполнялось условие $g(t) \rightarrow a \neq \infty$ при $t \rightarrow \infty$, $t \in L_1$. Однако интеграл может оказаться расходящимся. Иногда этот недостаток можно устранить, если предварительно интеграл (24.18) один или несколько раз проинтегрировать по частям. В силу соотношения $g'(t) = O(1/t)$ можно ожидать, что придем к сходящемуся интегралу. Отметим, что интегрирование по частям вообще является целесообразным в случаях, когда путь нельзя непосредственно деформировать через критическую точку.

Рассмотрим пример. Берем

$$\Omega(x) = \int_{L_\infty} \exp(xte^t)t^{-\alpha-1}dt, \quad (24.19)$$

где $x \rightarrow +\infty$; α — действительное число; L_∞ — путь, удаляющийся в бесконечность в полосах $\operatorname{Im} t \in (5\pi/2, 7\pi/2)$ и $\operatorname{Im} t \in (-3\pi/2, -\pi/2)$ и при обходе сверху вниз охватывающий начало координат. Для выделения ветви функции $t^{-\alpha}$ разрез берем по положительной полуоси, причем $t^{-\alpha}$ принимает действительные значения при $\arg t = 0$.

Функция $g(t) = te^t$ имеет точку перевала $t = -1$. Карта показана на рис. 35. Уравнение ОЛУ имеет вид $\tau \cos \tau - \tau \sin \tau = -e^{-1}e^{-\sigma}$. Чтобы попасть в точку $t = -1$, приходится пересечь гору. Поэтому путь следует деформировать по линии, идущей по данной полосе в бесконечность в левой полуплоскости. Поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} te^t = 0$, то необходимое условие выполнено. Но интеграл по $t \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} t < 0$

такому пути абсолютно сходится только при $\alpha > 0$, поэтому при $\alpha \neq 0$ интегрируем сначала один раз по частям. Получаем

$$\Omega(x) = \alpha^{-1}x \int_{L_\infty} \exp(xte^t)t^{-\alpha}(1+t)e^tdt. \quad (24.20)$$

На прямых $\operatorname{Im} t = 2\pi$ и $\operatorname{Im} t = 0$ имеем $\operatorname{Re} te^t = \sigma e^\sigma$. Эта функция монотонно убывает от нуля до $-e^{-1}$, если $\sigma \in (-\infty, -1]$. Поэтому указанные прямые являются линиями спуска и путь можно деформировать следующим образом: по ЛС от $\infty + i3\pi$ до точки $(-1, 2\pi)$ и оттуда по горизонтальному лучу до $-\infty + i2\pi (L_1)$, а потом обратно по отрицательной части действительной оси до

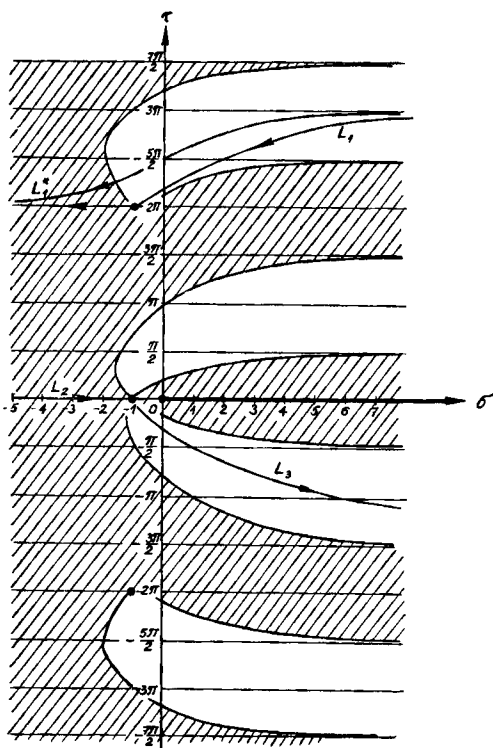


Рис. 35

$t = -1$ (L_2). Дальнейший путь L_3 идет в долине по ЛС (рис. 35). Такое деформирование пути в бесконечность законно, так как интеграл по вертикальному отрезку от подынтегральной функции в (24.20) стремится к нулю, если $\text{Re } t \rightarrow -\infty$.

Однако асимптотическое разложение вклада от точки $t = -\infty + i2\pi$ можно найти проще, если вместо L_1 брать градиентную линию L_1^* , вдоль которой te^t принимает действительные значения. Такая ГЛ имеет уравнение $\tau = 2\pi + \text{arcs ctg}(-\sigma/\tau)$, так как вдоль нее $\text{Im}(te^t) = e^\sigma \sin \tau (\tau \text{ctg } \tau + \sigma) = 0$. Поскольку бесконечные концы выше точки перевала, то надо учитывать только вклады от бесконечности. Если бы, напротив, верхняя часть кривой L_∞ находилась в полосе $\text{Im } t \in (\pi/2, 3\pi/2)$, то можно было бы деформировать путь непосредственно через точку $t = -1$.

В интеграле по L_1^* применим подстановку $t = -w = we^{i\pi}$, а по L_2 — подстановку $t = -\sigma = \sigma e^{i\pi}$, потом $we^{-w} = v$, $\sigma e^{-\sigma} = u$. Получим

$$\int_{L_1^*} + \int_{L_2} = e^{-i\pi\alpha} \left[\int_0^{\infty} e^{-xv} [\omega(v)]^{-\alpha} dv - \int_0^{e^{-1}} e^{-xu} [\sigma(u)]^{-\alpha} du \right] =$$

$$= e^{-i\pi\alpha} [I_1(x) - I_2(x)]. \quad (24.21)$$

Если бы мы интегрировали по L_1 , то получили бы другой интеграл $I_1(x)$ и при его разложении следовало бы выполнить лишние оценки.

При построении асимптотических разложений интегралов $I_1(x)$ и $I_2(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ достаточно рассматривать интегралы $I_1^*(x)$ и $I_2^*(x)$, в которых $v \in [0, \varepsilon]$, $u \in [0, \varepsilon]$, ε — достаточно малое положительное число. Затем следует построить асимптотическое разложение функций $[\sigma(u)]^{-\alpha}$ и $[\omega(v)]^{-\alpha}$. Согласно (24.5) и (24.6) при $1/\beta = -\alpha$, $\lambda/\alpha\beta = 1$ имеем

$$[\sigma(u)]^{-\alpha} \sim \ln^{-\alpha} (1/u) \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(1/\ln \ln 1/u) (\ln \ln 1/u / \ln 1/u)^j \right]. \quad (24.22)$$

При разложении функции $\omega(v)$ учтем то, что надо брать иную ветвь функции, чем $\sigma(u)$. Чтобы сохранилось главное значение логарифма, e^{-w} заменяем на $e^{-w-i2\pi}$. Поэтому $\ln 1/(ve^{i2\pi}) = w - \ln v$ и

$$[\omega(v)]^{-\alpha} \sim \ln^{-\alpha} (1/ve^{i2\pi}) \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(1/\ln \ln (1/ve^{i2\pi})) (\ln \ln (1/ve^{i2\pi}) / \ln (1/ve^{i2\pi}))^j \right]. \quad (24.23)$$

Применение (24.22) в комплексной плоскости обосновано в [371].

Разложения для $I_1(x)$ и $I_2(x)$ можно найти с помощью (18.52). При обозначении $Q_j(1/\ln \ln (1/u)) = \ln^{-j}(\ln 1/u) Q_j^*(\ln \ln 1/u)$, $Q_1 = -\alpha$, имеем

$$\int_0^{-1} e^{-xu} \ln^{-\alpha-j} (1/u) Q_j^*(\ln \ln 1/u) du \sim$$

$$\sim \frac{1}{x \ln^{\alpha+j} x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k)(1) A_{k+j,j}(\ln \ln x)}{(\ln \ln x \cdot \ln x)^k}, \quad j \geq 2, \quad (24.24)$$

$A_{k+j, j}$ — полином степени $k+j$. Применяя эту формулу к каждому члену (24.22) и перегруппировывая по логарифмам, получаем

$$I_2(x) \sim x^{-1} \ln^{-\alpha} x \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\ln \ln x) (\ln x)^{-k}, \quad (24.25)$$

где $R_0=1$, $R_1=\alpha[\Gamma'(1)-1]$, $R_k(u)=B_{2k-2}(u)/u^{k-2}$, $k \geq 2$, $B_j(u)$ — полином степени j .

Чтобы разложить $I_1(x)$, (24.23) целесообразно преобразовать согласно (18.50):

$$[\omega(v)]^{-\alpha} \sim \ln^{-\alpha}(1/v) \sum_{k=0}^{\infty} R_k^*(\ln \ln 1/v) \ln^{-k}(1/v), \quad (24.23')$$

где $R_0^*=1$, $R_1^*=\alpha(2\pi i-1)$, $R_k^*(u)=B_{2k-2}^*(u)/u^{k-2}$, $k \geq 2$. Поэтому с учетом (18.52) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\varepsilon} e^{-xv} \ln^{-\alpha-k}(1/v) R_k^*(\ln \ln 1/v) dv \sim \\ & \sim \frac{1}{x \ln^{\alpha+k} x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{j+2k-2, k}^*(\ln \ln x) \Gamma^{(j)}(1)}{(\ln \ln x)^{k+j-2} \ln^j x}, \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$I_1(x) \sim x^{-1} \ln^{-\alpha} x \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{**}(\ln \ln x) (\ln x)^{-k}, \quad (24.26)$$

где $R_0^{**}=1$, $R_1^{**}=\alpha[\Gamma'(1)+2\pi i-1]$, $R_k^{**}(u)=B_{2k-2}^{**}(u)/u^{k-2}$, $k \geq 2$.

Подставив (24.25) и (24.26) в (24.21), при $\alpha \neq 0$ получим

$$\Omega(x) \sim e^{-i\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{***}(\ln \ln x) \ln^{-k-\alpha} x, \quad R_1^{***}=2\pi i. \quad (24.27)$$

При $\alpha=0$ имеем несколько отличное разложение. Если концы кривой L_{∞} находятся в других долинах, то получаем подобные разложения. Их можно построить с помощью (24.26) после замены $2\pi i$ на $2m\pi i$, $|m| \in N_1$.

24.2.2. Имеются случаи, когда точка перевала находится на разрезе, который проведен из-за многозначности функций на-

грузки. Сначала рассмотрим случай, когда разрез проходит через точку перевала. Имеем две возможности: либо путь можно деформировать в долине через точку перевала по одной стороне от разреза, либо это невозможно и приходится обойти разрез. В первом случае применяется обычный метод; разрез может повлиять лишь на ширину сегмента, в котором изменяется $\arg z$. Во втором случае снова имеются две возможности: при обходе вокруг разреза либо спускаться в долину, либо подниматься в гору.

При первой возможности существенно критической остается точка перевала и следует только учесть, что на другом берегу разреза в точке перевала функция нагрузки перейдет к другой ветви.

При второй возможности существенно критической является точка ветвления, находящаяся на горе, и точка перевала при нахождении асимптотического разложения не имеет значения. Путь следует деформировать по некоторой петле вокруг разреза в окрестности точки ветвления и по линиям спуска в долинах. Асимптотическое разложение вклада от точки ветвления в случае интеграла (24.18) можно найти с помощью леммы 22.4 по образцу ее частного случая (22.15). Можно также применить метод, использованный при доказательстве теоремы 19.3.

В качестве простого примера рассмотрим интеграл

$$\Omega(z) = 1/2\pi i \int_L e^{zt^3} \sqrt{t^2 - 1} dt, \quad (24.28)$$

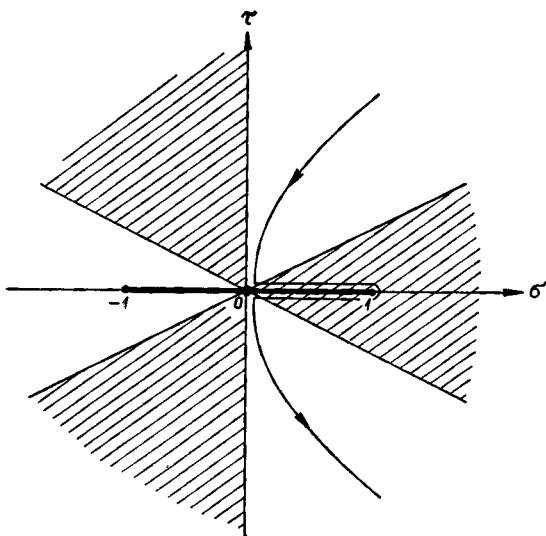


Рис. 36

где плоскость t разрезана вдоль $[-1, 1]$ и $\sqrt{t^2-1} > 0$ при $t > 1$. Концы кривой L удаляются в бесконечность в секторах $\arg t \in (\pi/6, \pi/2)$ и $\arg t \in (-\pi/2, -\pi/6)$, L ориентирована сверху вниз и обходит $t=1$ справа. Путь деформируем согласно рис. 36 по линиям спуска в долинах и по петле L^* вокруг разреза.

При разложении интеграла по петле используем метод, примененный в доказательстве формулы (22.15). Поскольку при $|t-1| < 2$

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2-1} &= \sqrt{t-1}\sqrt{2+t-1} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} 2^{-k} (t-1)^{k+1/2}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} e^{zt^3} (t-1)^{k+1/2} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0-)} \exp[z(1+v)^3] v^{k+1/2} dv + \\ &+ o(e^z z^{-N}) = \frac{(-1)^k}{\pi} \int_0^{\infty} \exp[z(1-u)^3] u^{k+1/2} du + o(e^z z^{-N}) \sim \\ &\sim \frac{(-1)^k}{3\pi} e^z \sum_{j=0}^{\infty} c_{jk} \frac{\Gamma(j+k+3/2)}{z^{j+k+3/2}}, \end{aligned}$$

где

$$[1 - \sqrt[3]{1-y}]^{k+1/2} (\sqrt[3]{1-y})^{-2/3} = 3^{-k-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} c_{jk} y^{j+k+1/2},$$

то при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$

$$\begin{aligned} \Omega(z) &\sim \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} e^{zt^3} \sqrt{t^2-1} dt \sim \\ &\sim \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\pi} e^z \sum_{k=0}^{\infty} A_k \Gamma(k+3/2) z^{-k-3/2}, \end{aligned} \quad (24.29)$$

причем согласно (4.32)

$$A_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{1/2}{j} 6^{-j} c_{k-j,j}, \quad A_0 = 1.$$

24.2.3. Случай, когда точка перевала совпадает с концом разреза, идущим из алгебраической точки ветвления, рассмотрен

в теоремах 19.2 и 19.3. Но функция $h(t)$ может иметь в точке перевала более сложную особенность. Рассмотрим кратко случай, когда под знак интеграла (19.1) добавлен множитель $\ln^p(t-t_0)$, где t_0 — точка перевала и логарифм имеет главное значение, и дополним содержание теоремы 19.3. Если же имеем трансцендентную точку ветвления, то следует применить метод расщепления критической точки.

Очевидно, дополнение сводится к вычислению интеграла, обобщающего (19.32):

$$J(z) = \int_{L_\delta} e^{-\omega} Q(\omega) (t-t_0)^\nu \ln^p(t-t_0) dt. \quad (24.30)$$

Приходится различать следующие случаи.

1°. $\nu > -1$, $p \in \mathbb{N}$. Легко доказать законность дифференцирования по ν в обеих частях формулы (19.32), так как функция, обозначенная через $o(z^{-N})$, является аналитической функцией от ν и ее производные по ν обладают такой же оценкой $o(z^{-N})$. Поэтому

$$J(z) = -\frac{\partial^p}{\partial \nu^p} \left\{ c(\nu) z^{-\frac{\nu+1}{m}} \left[1 - e^{-\frac{i2\pi l}{m}(\nu+1)} \right] \right\} + o(z^{-N}). \quad (24.31)$$

2°. При $\nu \leq -1$, $p \in \mathbb{N}$ формула (24.31) сохраняется по принципу аналитического продолжения, если только $-\frac{\nu+1}{m} \in \mathbb{N}_1$. В последнем случае приходится выполнить предельный переход.

3°. $\nu > -1$, $p \in \mathbb{N}$. Поскольку при вычислении интеграла (19.32) L_p дополняется до бесконечного пути и применяется подстановка $z a_0 (t-t_0)^m = \omega e^{i2\pi q}$, $q=0$ или $q=l$, то применим эти приемы также к (24.30). Тогда с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \ln^p(t-t_0) &= m^{-p} (-\ln z)^p \left[1 + \frac{\ln(a_0/\omega)}{\ln z} \right]^p = \\ &= m^{-p} (-\ln z)^p \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} (\ln(a_0/\omega))^k (\ln z)^{-k} \end{aligned}$$

и теоремы 14.2 получим при $z \rightarrow \infty$

$$J(z) \sim m^{-p-1} (a_0)^{-\frac{\nu+1}{m}} z^{-\frac{\nu+1}{m}} (-\ln z)^p \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} c_k(\nu) (\ln z)^{-k}, \quad (24.32)$$

где

$$c_k(\gamma) = - \int_0^{\infty} e^{-\omega} Q(\omega) \omega^{\frac{\gamma+1}{m}-1} \left\{ [\ln(a_0/\omega)]^k - e^{\frac{i2\pi l(\gamma+1)}{m}} \left[\ln(a_0/\omega e^{\frac{i2\pi l}{m}}) \right]^k \right\} d\omega. \quad (24.33)$$

24.3. Замена подынтегрального множителя интегралом

24.3.1. В п. 15.1 были рассмотрены замена ядра некоторым интегралом и последующее изменение порядка интегрирования в случае действительного переменного. Аналогично такую замену можно применить в случае контурных интегралов, тем более потому, что с помощью деформирования контура можно избежать тех затруднений, которые появляются при фиксированном пути интегрирования, — расходимости интегралов на конце промежутка от отдельных членов разложения подынтегральной функции.

Замена множителя — функции нагрузки была применена уже при выводе равенства Парсевалья (23.47) в п. 23.4.1. В результате этого данный интеграл выразился с помощью интеграла типа Меллина—Барнса. Отношение Γ -функций под знаком интеграла Меллина—Барнса иногда целесообразно выразить с помощью интеграла для B -функции [377]. Часто данный интеграл удобно заменять интегралом Меллина—Барнса, так как тогда по стандартному методу можно найти асимптотическое разложение интеграла как при $z \rightarrow 0$, так и при $z \rightarrow \infty$. Однако иногда другие методы дают более общие результаты.

Рассмотрим в качестве примера интеграл

$$\Omega(z) = 1/2\pi i \int_{+\infty}^{(0+)} (1 + \gamma t/z)^{\beta-1} h(t) t^{\alpha-1} dt, \quad (24.34)$$

где γ, β, α — действительные числа, $|\alpha| \in N$; $h(t)$ экспоненциально убывает на пути интегрирования. Плоскость t разрезана вдоль лучей $\arg t = 0$ и $\arg(t + z/\gamma) = \pi$, $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$, $z \neq 0$, и выбраны главные значения ветвей. Путь вокруг первого разреза не пересекает второй разрез.

Разложения для (24.34) при $z \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow 0$ и общей функции $h(t)$ можно построить с помощью теоремы 14.2. Применим при $|\arg t| \leq \pi - \varepsilon$ формулу

$$(1+t)^{-\alpha} = (1/\Gamma(\alpha)2\pi i) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(\alpha-s)\Gamma(s)t^{-s}ds, \quad (24.35)$$

справедливость которой при условии сепарации проверяется согласно (23.26). Поэтому после формального изменения порядка интегрирования получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Omega(z) = & \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(1-\beta-s)\Gamma(s) (\gamma/z)^{-s} ds \times \\ & \times \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{(0+)} h(t) t^{\alpha-1-s} dt. \end{aligned} \quad (24.36)$$

Чтобы построить асимптотические разложения для $\Omega(z)$ по этой формуле, нужно знать особые точки внутреннего интеграла, а это возможно лишь при конкретно заданной функции $h(t)$. Кроме того, построенное разложение может быть справедливым в более узком промежутке для $\arg z$, чем по теореме 14.2. Для иллюстрации этого явления берем $h(t) \equiv h_0(t) = \text{Erfc } t$. С учетом (12.28), (12.29) и п. 12.5.1, 8° после некоторых преобразований, в которых применяется также формула удвоения для Γ -функции, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{(0+)} \text{Erfc } t t^{\alpha-1-s} dt = \frac{\sqrt{\pi} 2^s e^{i\pi(\alpha-s)}}{2^{\alpha+1} \Gamma\left(\frac{\alpha-s}{2} + 1\right) \Gamma(1+s-\alpha)}, \quad (24.37)$$

причем согласно принципу аналитического продолжения формула справедлива при всех s . Подставляя (24.37) в (24.36), получаем интеграл, который согласно п. 23.2.2 сходится при $\arg z \in (3\pi/4, 5\pi/4)$, и с учетом предыдущего приходим к условию $\arg z \in [3\pi/4 + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$. При этом условии и $z \rightarrow \infty$ из (24.36) следует

$$\Omega_0(z) \sim e^{i\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{k} (-1)^k \frac{\sin[\pi(\alpha+k)/2]}{(\alpha+k)\Gamma[(1-k-\alpha)/2]} (\gamma/z)^k. \quad (24.38)$$

Но разложение (24.38) при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ получаем непосредственным почленным интегрированием разложения бинома в (24.34) с учетом (24.37). Обоснование этого действия следует из несущественной модификации теоремы 14.2.

24.3.2. Замену ядра интегралом часто приходится применять в случаях, когда параметром, стремящимся к бесконечности, является индекс n . Это нередко бывает, когда ядро — полином с большим индексом. Такое ядро можно заменить конкретным интегралом. Например, справедливы формулы

$$P_n(t) = (1/2^n 2\pi i) \int_L \frac{(u^2-1)^n}{(u-t)^{n+1}} du; \quad (24.39)$$

$$H_n(t) = (1/2\pi i) \int_{L_1} \exp(-u^2+2ut) u^{-n-1} du; \quad (24.40)$$

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(t) &= \frac{e^t t^{-\alpha}}{2\pi i} \int_L \frac{e^{-u} u^{n+\alpha}}{(u-t)^{n+1}} du = \\ &= (1/2\pi i) \int_{L_2} e^{-u} (1+t/u)^n \left(1+\frac{u}{t}\right)^\alpha u^{-1} du, \end{aligned} \quad (24.41)$$

где L — окружность $|u-t|=\varepsilon$ или ей равносильная кривая, а на L_1 и L_2 $|u|=\varepsilon$, причем для L_2 $\varepsilon < |t|$. Иногда для полиномов используется также формула Родрига, например в [25].

Рассмотрим более сложный пример

$$\Omega(n) = \int_{\gamma_n}^\infty e^{-t^2} H_n^2(t) dt, \quad (24.42)$$

где $\gamma_n = \sqrt{\alpha n + \beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Используем формулу Мелера [1, 10.13(22)]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(u) H_k(v)}{2^k k!} t^k = (1-t^2)^{-1/2} \exp \left[\frac{2uvt - (u^2+v^2)t^2}{1-t^2} \right],$$

из которой следует, что

$$H_n^2(t) = \frac{2^n n!}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} (1-z)^{-1/2} z^{-n-1} \exp \left(\frac{2t^2 z}{1+z} \right) dz, \quad (24.43)$$

где $\varepsilon < 1$ и $\sqrt{1-z^2}$ рассматривается на разрезанной плоскости z с разрезами вдоль $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$. При $z \in (-1, 1)$ $\sqrt{1-z^2} > 0$.

Подставим (24.43) в (24.42) и изменим порядок интегрирования, что легко обосновать. После этого применим подстановку

$z = (1 - \omega)/(1 + \omega)$, которая круг $|z| < 1$ отображает на полуплоскость $\operatorname{Re} \omega > 0$, а разрезы, вместе взятые, отображаются на луч $\arg \omega = \pi$. Окружность $|z| = \varepsilon$ отображается на окружность L , лежащую в правой полуплоскости и охватывающую точку $\omega = 1$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \Omega(n) &= -\frac{2^n n!}{2\pi i} \int_L \left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^n \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)}} \int_{\gamma_n}^{\infty} e^{-t^2 \omega} dt = \\ &= -\frac{2^n n!}{2\pi i} \int_L \left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^n \frac{\operatorname{Erfc}(\gamma_n \sqrt{\omega})}{\omega(1-\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

Применим соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{Erfc} z &= \frac{e^{-z^2}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \Gamma(k+1/2) z^{-2k-1} + \\ &+ (-1)^m \frac{\Gamma(m+1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} t^{-2m} dt, \end{aligned} \quad (24.44)$$

которое получается интегрированием по частям и справедливо при $|\arg z| \leq \pi/4 - \varepsilon$. От первой суммы при $z = \gamma_n \sqrt{\omega}$ отделим множитель $e^{-(\alpha n + \beta)\omega}$ и образуем ядро $\exp[ng(\omega)]$, где

$$g(\omega) = \ln(1 + \omega) - \ln(1 - \omega) - \alpha\omega.$$

Это ядро имеет седловые точки $\omega = \pm \sqrt{1 - 2/\alpha}$. При $\alpha \neq 2$ дальнейшее разложение интеграла с учетом (24.44) протекает по стандартной схеме метода перевала. Поэтому ниже будет исследован только случай, когда $\alpha = 2$ и обе точки перевала сливаются в кратную точку $\omega = 0$. Затруднения вызывает не кратность точки перевала, а то, что вблизи $\omega = 0$ (т. е. $z = 0$) члены ряда (24.44) стремятся к бесконечности тем быстрее, чем больше индекс k . Однако эти затруднения можно преодолеть.

Для функции $-\operatorname{Re} g(\omega)$ при $\alpha = 2$ карта показана на рис. 37, причем, в силу того что $n \in \mathbb{N}$, точки ветвления функции $\ln[(1 + \omega)/(1 - \omega)]$ не следует учитывать. Рассмотрим асимптотическое разложение отдельного члена

$$\Omega_m(n) = \gamma_n^{-2m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{ng(\omega)} \frac{e^{-\beta\omega}}{1-\omega} \omega^{-m-3/2} d\omega, \quad (24.45)$$

где L_1 получен деформированием L так, чтобы L_1 обходил в отрицательном направлении точку $\omega = 0$ вместе с разрезом по дуге

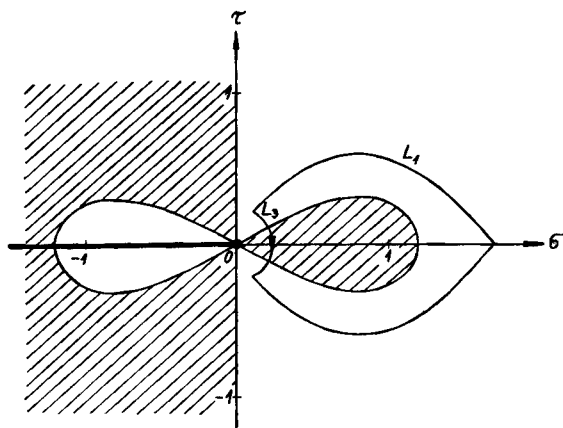


Рис. 37

малой окружности L_ε радиусом ε , причем на дуге $\arg w \in [-\pi/3, \pi/3]$, а потом продолжался в обоих направлениях по линиям спуска в долине (рис. 37). Имеем $\Omega_m(n) = \int_{L_\varepsilon} + o(n^{-N})$.

К разложению интеграла по L_ε применим результаты теоремы 19.3, согласно которым

$$e^{ng(w)}e^{-\beta w}/(1-w) = e^w \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(w) w^k, \quad (24.46)$$

где $\omega = 2n\omega^3/3$, $Q_k(\omega) = \sum_{j=0}^k q_{jk} \omega^j$, $q_{00} = 1$. Более подробное вычисление $Q_k(\omega)$ описано формулами (19.29)–(19.31), причем $D_{2k} = 2/(2k+3)$, $D_{2k+1} = 0$,

$$h(t) = e^{-\beta t}/(1-t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k, \quad A_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^k \beta^j}{k!}.$$

После подстановки (24.46) в (24.45) согласно теоремам 19.2 и 19.3 при $n \rightarrow +\infty$ получаем

$$\Omega_m(n) \sim \frac{1}{3} \left(\frac{2n}{3} \right)^{(m+1/2)/3} \gamma_n^{-2m-1} \sum_{k=0}^{\infty} C_{km} (3/2n)^{k/3}, \quad (24.47)$$

где с учетом (12.30)

$$C_{km} = (1/2\pi i) \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\omega} Q_k(\omega) \omega^{(k-m-1/2)/3-1} d\omega = \\ = \sum_{j=0}^k q_{jk} / \Gamma[1 - (k+j-m-1/2)/3].$$

Из (24.47) следует, что функции $\Omega_m(n)$ образуют шкалу. Чтобы доказать, что при $n \rightarrow +\infty$ имеет место разложение

$$\Omega(n) \sim \frac{2^n n!}{2\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Gamma(m+1/2) \Omega_m(n), \quad (24.48)$$

надо оценить остаток $R_m(n)$, так как непосредственная ссылка на теоремы 19.2 и 19.3 невозможна.

Разобьем L_1 на следующие части: по дуге окружности L_η при $\eta = 1/\sqrt[3]{n}$; по лучам L^\pm , где $\arg \omega = \pm \frac{\pi}{3}$, $|\omega| \leq \varepsilon$, а потом по любым линиям спуска. Согласно (24.44) в интегралах по L_η и L^\pm рассмотрим подынтегральную функцию

$$F_m(n, \omega) = \frac{M_m}{\gamma_n^{2m-1}} e^{ng(\omega)} \frac{e^{-\beta\omega}}{1-\omega} \omega^{-m-1/2} \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma_n^2 \omega \tau}}{(1+\tau)^{m+1/2}} d\tau.$$

Интегралы по линиям спуска имеют оценку $o(n^{-N})$.

В интеграле $I_{\eta,m}$ по L_η от $F_m(n, \omega)$ при достаточно большом n применим оценки

$$|g(\omega)| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega|^{2k+1}}{2k+1} \leq \frac{4}{n},$$

$$\left| \frac{e^{-\beta\omega}}{1-\omega} \right| < 2, \quad |\omega^{-m-1/2}| = n^{(m+1/2)/3},$$

$$\left| \int_0^\infty e^{-\gamma_n^2 \omega \tau} (1+\tau)^{-m-1/2} d\tau \right| < 2/(m-1),$$

поэтому $I_{n,m} = O(n^{(m-1/2)/3} \gamma_n^{-2m+1})$. В интегралах $I_{\pm m}^{\pm}$ по отрезкам легко показать, что функция

$$\operatorname{Re} g(\omega) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sigma)^2 + 3\sigma^2}{(1-\sigma)^2 + 3\sigma^2} - 2\sigma, \quad \omega = \sigma + i\tau,$$

монотонно убывает и $|e^{ng(\omega)}| < M_1$, поэтому сохраняются прежние оценки и $R_m(n) = O(n^{(m-1/2)/3} \gamma_n^{-2m+1})$. Этим справедливость формулы (24.48) доказана. С учетом (24.47) можно также перегруппировать члены, после чего получим

$$\Omega(n) = \frac{2^n n!}{\Gamma(1/6) \sqrt[6]{12} n^{1/3}} [1 + O(n^{-1/3})]. \quad (24.49)$$

24.4. Включение пути интегрирования в более общий контур

24.4.1. При построении асимптотических разложений вычеты можно применять по-разному. До сих пор мы в основном их применяли в таком виде, что каждый вычет означал один или несколько членов в асимптотическом представлении данного интеграла. В этом пункте рассмотрим общую идею этого метода и некоторое его применение, а в следующих двух пунктах — другие идеи использования вычетов.

Общая идея, применяемая до сих пор при использовании вычетов, заключается в следующем. Данный контур L_0 или некоторая его часть L_ω включается в более общий замкнутый контур L , охватывающий возможные особые точки однозначного характера подынтегральной функции и огибающей возможные разрывы. После этого контур L расширяется так, чтобы $L_\omega \rightarrow L_0$ и при этом интегралы по некоторым частям контура L стремились к нулю, интегралы по некоторым другим частям — к известным интегралам, а по остальным частям — к интегралам по путям, вдоль которых можно построить асимптотические разложения интегралов или получить оценки, входящие в любой остаток построенных разложений. В конкретных случаях не все из упомянутых частей будут встречаться.

Если при расширении пути L число особых точек однозначного характера неограниченно возрастает, то L должен расширяться скачкообразно, чтобы на контурах подынтегральная функция была аналитической. Сумма вычетов в особых точках переходит в сумму бесконечного ряда. Этот ряд сходится, если существуют пределы всех интегралов по отдельным частям.

В эту схему включаются лемма Жордана 22.7, приведенная в п. 22.2.2, и асимптотическое разложение интегралов Фурье, рассмотренное в п. 12.3.2, 3° и 19.3. Но такой вид деформирования применим также в некоторых более общих случаях, когда расположение концов пути интегрирования зависит от параметра. Сказанное иллюстрируем примером.

24.4.2. Рассмотрим еще раз функцию Харди—Барнса (22.100)

$$G_{-\beta}(t, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!(k+\alpha)^\beta}, \quad \beta > 0, \quad |\arg \alpha| \leq \pi - \varepsilon. \quad (24.50)$$

Временно берем $\beta \in N_1$. При указанных $\arg \alpha$ можно найти такое $\sigma \in (-\pi/2, \pi/2)$, что согласно (12.30)

$$(k+\alpha)^{-\beta} = \frac{\Gamma(1-\beta) e^{-i\pi\beta}}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\sigma}}^{(0+)} e^{-(k+\alpha)z} z^{\beta-1} dz.$$

Это выражение можно подставить в сумму (24.50) и в силу абсолютной сходимости ряда и интеграла поменять местами порядок суммирования и интегрирования. Получаем

$$G_{-\beta}(t, \alpha) = \frac{\Gamma(1-\beta) e^{-i\pi\beta}}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\sigma}}^{(0+)} \exp[-\alpha z + te^{-z}] z^{\beta-1} dz. \quad (24.51)$$

Интеграл (24.51) сходится при всех t , так как $\arg \alpha z = \arg \alpha + \sigma \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Пусть в дальнейшем $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Тогда можно брать $\sigma = 0$. В силу (12.27)

$$G_{-\beta}(t, \alpha) = 1/\Gamma(\beta) \int_0^{\infty} \exp[-\alpha z + te^{-z}] z^{\beta-1} dz, \quad (24.52)$$

что следует также из (22.101) при $v = e^{-z}$. Согласно принципу аналитического продолжения эта формула справедлива при $\operatorname{Re} \beta > 0$. Применив подстановку $1 - \tau/t = e^{-z}$, получим

$$G_{-\beta}(t, \alpha) = \frac{e^t}{t\Gamma(\beta)} \int_0^t e^{-\tau} (1 - \tau/t)^{\alpha-1} (\ln [1/(1 - \tau/t)])^{\beta-1} d\tau. \quad (24.53)$$

Интеграл (24.53) имеет критические точки 0 и t , которые одновременно являются точками ветвления. Для разложения (24.53) целесообразно применять метод включения пути интег-

рирования L_t в более общий контур L_0 , состоящий из луча $\arg \tau = 0$ в отрицательном направлении, из L_t и луча $\arg(\tau - t) = 0$. При этом $|\arg t| \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Поскольку в области, ограниченной L_0 , нет особых точек подынтегральной функции и разрывы для многозначных функций при любом расположении t можно брать вне контура, то интеграл по L_0 равен нулю и, следовательно,

$$G_{-\beta}(t, \alpha) = \frac{1}{t\Gamma(\beta)} \left[e^t \int_0^{\infty} e^{-\tau} (1 - \tau/t)^{\alpha-1} \ln^{\beta-1} [1/(1 - \tau/t)] d\tau - \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{-t} \right)^{\alpha-1} [\ln(-t) - \ln u]^{\beta-1} du \right].$$

Первый интеграл в правой части с учетом (20.28) можно разложить по теореме 14.3, а второй, аналогично как интеграл (14.42), — по теореме 14.6. В результате при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ имеем

$$G_{-\beta}(t, \alpha) \sim \frac{e^t}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} B_k^{(k+\beta)}(\alpha) \Gamma(k+\beta) t^{-k-\beta} + \frac{\ln^{\beta-1}(-t)}{\Gamma(\beta)(-t)^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta-1}{k} (-1)^k \Gamma(k) \ln^{-k}(-t). \quad (24.54)$$

Справедливость полученной формулы в остальных секторах следует из (22.103) и (23.78).

При $\operatorname{Re} \alpha < 0$ можно применить формулу

$$G_{-\beta}(t, \alpha + m) = \frac{d^m}{dt^m} \left[G_{-\beta}(t, \alpha) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!(k+\alpha)^\beta} \right] = \frac{d^m}{dt^m} G_{-\beta}(t, \alpha),$$

которая следует из (24.50). При этом $-\alpha \in N$, $\operatorname{Re}(\alpha + m) > 0$.

24.5. Асимптотика решений уравнений

24.5.1. Рассмотрим другую возможность использования вычетов. Пусть функция $F(z)$ аналитична в области \bar{D} , ограниченной кривой L , и имеет в \bar{D} единственный простой корень $\xi \in D$.

Тогда согласно определению вычета

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{zF'(z)}{F(z)} dz = \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{zF'(z)(z-\xi)}{F(z)} = \frac{\xi F'(\xi)}{F'(\xi)} = \xi,$$

так как $F'(\xi) \neq 0$. Можно допустить, что $F = F(z, t)$, $\xi = \xi(t)$ и для каждого $t \in T$ вышеотмеченные свойства $F(z, t)$ сохраняются. Тогда

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{zF'(z, t)}{F(z, t)} dz \quad (24.55)$$

и можно попытаться разлагаемую функцию представить в виде (24.55), а потом подынтегральную функцию разложить в ряд по некоторой шкале относительно t и интегрировать почленно. Эту идею часто удается осуществить при асимптотическом разложении решений разных уравнений, численных и функциональных. При этом нередко необходимо предварительное преобразование данного уравнения.

Рассмотрим два примера.

24.5.2. Пусть дано уравнение

$$\sin x f_1(x) + \cos x f_2(x) - f_3(x) = 0, \quad (24.56)$$

где $f_k(x)$ — аналитические в окрестности $x = \infty$ функции, которые обладают разложениями

$$f_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, \quad f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{x^k}, \quad f_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{x^k}, \quad (24.57)$$

причем в последних двух рядах хотя бы один коэффициент отличен от нуля, а коэффициенты во всех рядах действительны.

Чтобы найти приближенное значение больших корней x_n уравнения (24.56), рассмотрим *сокращенное уравнение*, которое получается отбрасыванием в (24.56) всех малых членов при больших x , т. е. уравнение $\sin x = 0$. Отсюда $x_n = n\pi + y_n$, а вместо (24.56) получаем

$$F(y_n, n) \equiv \sin y_n f_1(n\pi + y_n) + \cos y_n f_2(n\pi + y_n) - (-1)^n f_3(n\pi + y_n) = 0.$$

Поскольку при достаточно большом n на окружности $L_\gamma: |z| = \gamma < \pi/2$ имеем оценки

$$|f_1(n\pi + z)| > 1/2, \quad |f_2(n\pi + z)| < M/n, \quad |f_3(n\pi + z)| < M/n,$$

то при $z \in L_\gamma$

$$|\sin z f_1(n\pi + z)| > |\cos z f_2(n\pi + z) - (-1)^n f_3(n\pi + z)|$$

и по теореме Руше [167] $F(z, n)$ в круге $|z| \leq \gamma$ имеет столько же корней, сколько функция $\sin z f_1(n\pi + z)$, т. е. один корень. Поэтому для y_n применима формула (24.55):

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\gamma} \frac{z \frac{\partial}{\partial z} F(z, n)}{F(z, n)} dz. \quad (24.58)$$

Пользуясь теоремой 4.7 и формулой (4.32), получаем

$$F(z, n) = \sin z \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^k} Q_k(z) \right], \quad (24.59)$$

где

$$Q_k(z) = P_{k1}(z) + \operatorname{ctg} z P_{k2}(z) - (-1)^n \sin^{-1} z P_{k3}(z),$$

$P_{hj}(z)$ — полиномы от z . При достаточно большом n и всех $z \in L_\gamma$ имеем оценку $|n\pi + z| > n\pi/2$, поэтому для ряда (24.59) можно построить сходящуюся мажоранту, не зависящую от z . Так как подобная оценка справедлива также в некотором кольце, содержащем L_γ , то ряд (24.59) в этом кольце сходится равномерно, и согласно теореме Вейерштрасса $\frac{\partial}{\partial z} F(z, n)$ получаем почленным дифференцированием (24.59). Полученный ряд сходится равномерно, поэтому подынтегральная функция в (24.58) имеет следующее, равномерно сходящееся на L_γ разложение:

$$z \frac{\partial}{\partial z} F(z, n) F^{-1}(z, n) = \frac{z}{\sin z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^k} R_k(z),$$

$R_0 = \cos z$, $R_1 = \sin^{-1} z [-b_1 + (-1)^n c_1 \cos z]$, почленное интегрирование которого дает

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^k} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\gamma} \frac{z R_k(z)}{\sin z} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{(n\pi)^k}. \quad (24.60)$$

Ряд (24.60) сходится при достаточно большом n . Очевидно, $B_0 = 0$, $B_1 = b_1 + (-1)^n c_1$. Коэффициенты B_k тоже вычисляются с помощью вычетов.

Аналогично рассматриваются асимптотические разложения больших корней уравнения (24.56) при других условиях относительно $f_j(x)$. Но данный метод требует аналитичности функций $f_j(z)$ в окрестности $z = \infty$. Если брать ослабленные условия —

допустить, что $f_j(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеют асимптотические разложения по дробным степеням x , то можно применить метод неопределенных коэффициентов. Этот метод применен в [257]. Обоиими методами можно пользоваться также в случаях кратных корней.

В некоторых частных случаях решение уравнения (24.56) приводится к теореме 4.9. Например, если $f_1^2 + f_2^2 = f_3^2$, то (24.56) преобразуется к виду $\sin [x + \omega(x)] = \text{sign } f_3$, $\omega(x) = \text{arc tg } (f_2/f_1)$, и для его решения согласно теореме 4.9 надо обратить степенной ряд

$$x + \omega(x) = x_n \equiv 2\pi n \pm \pi/2. \quad (24.61)$$

Все корни уравнения (24.56) в этом случае кратные. Задача решается аналогично, если $f_1^2 + f_2^2 = \alpha^2 f_3^2$, $\alpha \in (0, 1)$.

Другой частный случай, приводящий к (24.61), имеем при $f_3(x) \equiv 0$, только тогда $x_n = n\pi$. Его первым применил Стокс [146], поэтому последний метод называется *методом Стокса*. Этим методом Мак-Магон вычислил большие корни функций Бесселя и их производных [306, 327]. Если использовать обозначения $1/x_n = \tau_n \rightarrow 0$, $x = z^{-1}$, то уравнение (24.61) можно переписать в виде $\tau_n = g(z)$, поэтому некоторые первые коэффициенты иногда вычисляемы по формуле Лангранжа—Бюрмана (5.81).

Следует отметить, что уравнение (24.56) при других условиях относительно функций $f_h(x)$ иногда имеет только конечное число действительных корней и бесконечно много мнимых корней. Можно найти также асимптотику мнимых корней при большом индексе. Для уравнения $\alpha \sin x = x$ в [284] решение $x(\alpha)$ найдено в виде интеграла. При этом данное уравнение связано с краевой задачей Римана.

24.5.3. В качестве второго примера рассмотрим уравнение (4.45)

$$t = x + \beta \ln x + f(x) \quad (24.62)$$

в случае комплексных t и β при условии, что $f(x)$ при $|x| > R$ аналитична и обладает разложением $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k}$. Построим асимптотическое разложение для $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $\arg t \in (-\pi, \pi)$. Применим подстановку $x = te^v$ и обозначим $t^{-1} = u$, $\ln t = v$. Получим уравнение

$$F(y, u, v) \equiv e^v - 1 + \beta u(v + y) + u f(u^{-1}e^v) = 0. \quad (24.63)$$

На окружности $L: |y| = R < 2\pi$ при достаточно большом $|t|$, т. е. достаточно малых $|u|$ и $|uv|$, имеем неравенство

$$|e^v - 1| > |\beta u(v + y) + u f(u^{-1}e^v)|,$$

поэтому по теореме Руше в данном круге при каждом фиксиро-

ванном t имеем только один корень уравнения (24.63), выражаемый согласно (24.55) в виде

$$y = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{z \frac{\partial}{\partial z} F(z, u, v)}{F(z, u, v)} dz. \quad (24.64)$$

Дальнейшее разложение протекает аналогично предыдущему примеру. Обозначим $(e^z - 1)^{-1} = \alpha$, тогда

$$F(z, u, v) = (e^z - 1) \left[1 + \alpha \beta uv (1 + zv^{-1}) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha a_{k-1} v^{-k} e^{-z(k-1)} (uv)^k \right]. \quad (24.65)$$

Легко установить, что ряд в (24.65) при достаточно малом $|uv|$ в некотором кольце, содержащем L , сходится равномерно. Поэтому $\frac{\partial}{\partial z} F$ можно получить почленным дифференцированием из (24.65). После перемножения рядов получаем равномерно на L сходящийся ряд

$$z \frac{\partial}{\partial z} F(z, u, v) F^{-1}(z, u, v) = \alpha z e^z + z \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(\alpha, z, v^{-1}) (uv)^k, \quad (24.66)$$

который на L можно почленно интегрировать. $Q_k(\alpha, z, v^{-1})$ — полином степени k относительно v^{-1} , $Q_1 = \alpha \beta [v^{-1} - \alpha e^z (1 + zv^{-1})]$.

Если обозначить

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L z Q_k(\alpha, z, v^{-1}) dz = D_k(v^{-1}), \quad D_1 = -\beta, \quad (24.67)$$

то получим разложение

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(v^{-1}) u^k, \quad (24.68)$$

которое сходится при достаточно малых $|uv|$. Имеем разложение

$$e^v = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(v^{-1}) u^k,$$

где $B_k(v^{-1})$ определяется по формуле (19.30) при $\omega=1$; $B_0=1$, $B_1=D_1=-\beta$. С помощью других методов (см. ниже) можно уста-

новить, что $B_k(0) = 0$ при $k > 1$, т. е. $B_k(v^{-1})v = P_{k-1}(v^{-1})$. В итоге получим

$$\begin{aligned} x &= t \sum_{k=0}^{\infty} B_k(1/\ln t) \left(\frac{\ln t}{t} \right)^k = \\ &= t - \beta \ln t + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(1/\ln t) (\ln t/t)^k. \end{aligned} \quad (24.69)$$

Это разложение совпадает с (4.46). При более слабых условиях относительно $f(x)$ разложение (24.69) можно получить другими методами — методом асимптотических итераций или методом неопределенных коэффициентов [371].

24.6. Асимптотика конечных сумм

24.6.1. Существует много методов, по которым в некоторых частных случаях для суммы $S(n) = \sum_{k=1}^n f(k, n)$ можно найти явное выражение с помощью элементарных или известных специальных функций. Если явное выражение для $S(n)$ найти невозможно, то часто те же методы разрешают построить асимптотическое разложение или выражение $S(n)$ при $n \rightarrow +\infty$. Отметим следующие методы.

1°. *Метод производящей функции.* Идея этого метода — выразить $S(n)$ или $S(n)/n!$ как коэффициент некоторого степенного ряда. Сумма (или асимптотическая сумма) этого ряда называется *производящей функцией* для $S(n)$. В частном случае, когда $f(k, n) = g_1(k)g_2(n-k)$ и

$$F_1(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} g_1(k)z^k, \quad F_2(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} g_2(k)z^k,$$

согласно формуле (4.17) получаем

$$F_1(z)F_2(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} S(n)z^n. \quad (24.70)$$

Отсюда в случае сходящегося ряда (24.70) следует выражение

$$S(n) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{F_1(z)F_2(z)}{z^{n+1}} dz. \quad (24.71)$$

Возможно, что из (24.70) или (24.71) $S(n)$ найдется в явном виде. В других случаях из (24.71) можно построить асимптотическое разложение для $S(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Иное применение формулы (24.71) рассмотрим в п. 4°.

2°. *Метод математической индукции.* Иногда по некоторым соображениям можно угадать вид для $S(n)$ и доказать его методом математической индукции. Пример приведен в (10.90).

3°. *Применение формулы суммирования по частям.* Пусть дана сумма $S(n) = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ и известна сумма $\sigma_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Тогда $a_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$, $\sigma_1 = a_1$, $\sigma_0 = 0$, и

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \sigma_k b_k - \sum_{k=1}^n \sigma_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_n b_n. \quad (24.72)$$

Первая сумма в правой части формулы (24.72) иногда суммируется в явном виде. Однако чаще эту формулу применяют в случаях, когда явный вид упомянутой суммы неизвестен и исследуется асимптотика $S(n)$ при $n \rightarrow \infty$, причем сумма в правой части более удобна для построения асимптотического разложения. Формула (24.72) выражает *преобразование Абеля*. Часто она применяется для преобразования бесконечных рядов.

4°. *Приведение суммы к интегралу.* Впервые эта идея осуществлена с помощью формулы Эйлера—Маклорена. Другая весьма общая идея приведения изложена в п. 15.3.1 и выражена следующими равенствами:

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n f(k, n) = \sum_{k=1}^n \int_a^b F(k, n, t) dt = \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^n F(k, n, t) dt = \int_a^b G(n, t) dt. \end{aligned} \quad (24.73)$$

Поскольку можно брать различные типы интегралов, то формула (24.73) охватывает многообразие модификаций метода. Замена одного множителя B -функций была показана в п. 23.3.3. Много других примеров этой модификации приведено в [189].

Иногда $f(x, n)$ выражается через контурный интеграл (24.71).

В качестве примера рассмотрим сумму $S(n) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k}$.

Согласно равенству $(1-z)^{-k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} z^j$ число $\binom{n-k}{k}$ является коэффициентом при z^n в разложении функции $z^{2h}(1-z)^{-k-1}$, поэтому при $\epsilon \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{z^{2h-n-1}}{(1-z)^{k+1}} dz = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{z^{2h-n-1}}{(1-z)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{1}{z^{n+1}(1-z-z^2)} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{1}{z^{n+1}} \left[\frac{1}{z + (1+\sqrt{5})/2} - \frac{1}{z + (1-\sqrt{5})/2} \right] dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (24.74)$$

Много подобных примеров рассмотрено в [242].

Часто все же интеграл (24.73) нельзя выразить с помощью известных функций и надо найти его асимптотическое разложение. В зависимости от конкретного вида $G(n, t)$ в данном случае применяются разные методы. Некоторые примеры, когда полученный интеграл содержит ядро с устранимой особенностью, приведены в [258]. Рассмотрим пример, когда применяется формула (23.44) и задача приводится к асимптотическому разложению интеграла типа Меллина—Барнса. Чаше этот метод применяется к функциям, определенным бесконечным рядом, что подробнее будет рассмотрено в третьем томе монографии.

Пусть $\Omega(t) \doteq h(s)$. Используем формально формулу (23.44), которую перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Omega(k+x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h(s) \zeta(s, x) ds. \quad (24.75)$$

Если $\Omega(t) = 0$ при $t > T(n)$, то в левой части (24.75) получаем конечную сумму, а формула (24.75) сохраняет силу, так как упомянутое свойство функции $\Omega(t)$ отражает соответствующее выражение для $h(s)$. Сдвиг пути интегрирования через полюсы

подынтегральной функции дает асимптотическое разложение конечной суммы.

В качестве конкретного примера берем

$$\Omega(t, x) = \begin{cases} (1 - xt^\alpha)^{\beta-1}/t^\lambda & \text{при } xt^\alpha \leq 1, \\ 0 & \text{при } xt^\alpha > 1, \end{cases} \quad (24.76)$$

где $\alpha > 0, \beta > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} h(s) &= \int_0^{x^{-1/\alpha}} t^{s-1-\lambda} (1 - xt^\alpha)^{\beta-1} dt = \\ &= (1/\alpha) x^{(\lambda-s)/\alpha} \Gamma[(s-\lambda)/\alpha] \Gamma(\beta) / \Gamma[(s-\lambda)/\alpha + \beta], \\ S(n, x) &= \sum_{k=1}^n (1 - xk^\alpha)^{\beta-1} k^{-\lambda} = \\ &= (1/i2\pi\alpha) \Gamma(\beta) x^{\lambda/\alpha} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \left[\Gamma\left(\frac{s-\lambda}{\alpha}\right) / \Gamma\left(\frac{s-\lambda}{\alpha} + \beta\right) \right] \zeta(s) x^{-s/\alpha} ds, \end{aligned} \quad (24.77)$$

где $xn^\alpha \leq 1, x(n+1)^\alpha > 1$. При $x \rightarrow +0, n \rightarrow +\infty$. Для интеграла (24.77) имеем $\lambda_0 = \mu_0 = 0, \kappa_0 = -\beta < -1$. Чтобы использовать результаты § 23, надо еще знать оценку для $|\zeta(s)|$. При $\operatorname{Re} s \geq 1 + \varepsilon$ из $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ следует $|\zeta(s)| < M$, а при $\operatorname{Re} s \leq -\varepsilon$ такую же оценку получим из (23.22) и функционального соотношения [262]

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} (\sin \pi s / 2) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad (24.78)$$

которое можно доказать с помощью (24.89), если $2k$ заменить на s и перейти к контурному интегралу. Эта формула была известна уже Риману. Другие свойства ζ -функции можно найти в [1, 262]. Из (24.78) следует также, что $\zeta(s)$ — аналитическая во всей плоскости функция, за исключением простого полюса в $s=1$, в окрестности которого имеет место разложение Стильбеса—Иенсена [144, 317]

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \gamma_k (s-1)^k, \quad (24.79)$$

$$\gamma_k = \lim \left[\sum_{j=1}^n (\ln j)^k / j - (\ln n)^{k+1} / (k+1) \right].$$

Разные методы вывода (24.79) и вычисления коэффициентов рассмотрены в [320]. В этой работе даны также подробные библиографические сведения о разложении (24.79).

Оценка $\zeta(s)$ при $\tau = \text{Im } s \rightarrow \pm \infty$ в полосе $\text{Re } s \in [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, более сложна. Имеется грубая оценка [262] $\zeta(s) = O(s)$, однако тогда приходится брать $\beta > 2$, чтобы обеспечить абсолютную сходимость интеграла (24.77). Если верна гипотеза Римана о том, что в полосе $\text{Re } s \in [0, 1]$ все нули $\zeta(s)$ сосредоточены на прямой $\text{Re } s = 1/2$, то в [262] доказано, что при любом $\eta > 0$ справедлива оценка $\zeta(s) = O(\tau^\eta)$. Примем эту гипотезу верной. Тогда достаточно брать $\beta > 1$. Абсолютная сходимость интеграла (24.77) согласно условию 2° в п. 23.1.1 обеспечивает справедливость этой формулы.

Пусть при всех $k \in N$ $\lambda - \alpha k \neq 1$. Тогда все полюсы подынтегральной функции в (24.77) простые и сдвигом пути влево при $x \rightarrow +0$ получим разложение

$$S(n, x) \sim \Gamma(\beta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\zeta(\lambda - \alpha k)}{\Gamma(\beta - k)} x^k. \quad (24.80)$$

Если при некотором k_0 $\lambda - \alpha k_0 = 1$, то соответствующий вычет в полюсе второго порядка вычисляется с помощью (24.79).

5°. Следует еще отметить, что каждую конечную сумму можно непосредственно выразить с помощью интеграла Стильеса:

$$\sum_{k=m+1}^n h(k, z) = \int_a^n h(t, z) d[t], \quad a \in [m, m+1). \quad (24.81)$$

Весьма далеко идущие результаты в построении асимптотического представления сумм на основе формулы (24.81) получены в работах Риделя [129, 352].

24.6.2. Отметим некоторые простейшие методы для асимптотического представления конечных сумм, не использующие непосредственно приведение суммы к интегралу.

1°. *Метод неопределенных коэффициентов.* Для суммы $S(n) = \sum_{k=1}^n h(k)$ иногда можно использовать эквивалентное разностное уравнение $S(n) - S(n-1) = h(n)$, $S(1) = h(1)$, и искать асимптотическое разложение его решения методом неопределенных коэффициентов, если можно угадать форму разложения. Некоторые примеры рассмотрены в [259].

Отметим, что иногда с помощью высшего уравнения после некоторых проб методом неопределенных коэффициентов можно

найти явное выражение для $S(n)$. Например, если искать $\sum_{k=1}^n ka^k = a^{n+1}(\alpha n + \beta) + \gamma$, то $\alpha = 1/(a-1)$, $\beta = -1/(a-1)^2$, $\gamma = a/(a-1)^2$, $a \neq 1$.

2°. *Аппроксимация общего члена.* Для суммы $S(n) = \sum_{k=1}^n a_k$ ищется такая последовательность $\{b_k\}$, что 1) известна сумма $\sum_{k=1}^n b_k$ или ее асимптотическое разложение; 2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ сходится. Тогда

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k). \end{aligned} \quad (24.82)$$

Последняя сумма в (24.82) имеет оценку $o(1)$, но иногда для нее удается получить асимптотическое разложение с помощью продолжения процесса или некоторого другого метода. Примеры можно найти в [4].

3°. *Разложение одного фактора в ряд.* В сумме $\sum_{k=1}^n a_k b_k(n)$ иногда множитель $b_k(n)$ можно разложить в асимптотический ряд по некоторой шкале относительно n , менять порядок суммирования и применять оценки внутреннего ряда.

Поясним сказанное простым примером. При $|a| > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a^k \ln k &= a^n \sum_{j=0}^{n-1} a^{-j} \ln(n-j) = \\ &= a^n \sum_{j=0}^{n-1} a^{-j} \left[\ln n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(j/n)^k}{k} \right] = \\ &= a^n \left[\frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}} \ln n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kn^k} \sum_{j=1}^{n-1} a^{-j} j^k \right]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{n-1} a^{-j} j^k = \sum_{j=1}^{\infty} a^{-j} j^k - \sum_{j=n}^{\infty} a^{-j} j^k = c_k(a) + \\ + O(a^{-n} n^k) = c_k(a) + o(n^{-N}),$$

то

$$\sum_{k=1}^n a^k \ln k \sim a^n \left[\frac{\ln n}{1-a^{-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(a)}{k n^k} \right]. \quad (24.83)$$

При $|a| < 1$ для данной суммы можно найти оценку с точностью до $o(1)$, если применить преобразование Абеля. Полное разложение при $|a| \leq 1$ можно построить методом неопределенных коэффициентов [259]. Разные методы для оценки конечных сумм приведены в [372].

24.6.3. Другая возможность применения теории вычетов к асимптотическому представлению функций появляется в случаях, когда функция определена суммой, конечной или бесконечной, которую можно одновременно считать суммой вычетов. Тогда сумма выражается с помощью интегралов по некоторым контурам, для которых (и одновременно для данной суммы) часто можно построить асимптотическое разложение. Иногда их можно вычислить и в результате получить явное выражение для функции (см. пример в п. 24.6.4). Данный метод является некоторой модификацией метода, отмеченного в п. 24.6.1, 4°.

Хотя имеются разные возможности в выборе контуров интегрирования, чаще всего в качестве первоначального контура берутся стороны прямоугольника, параллельные осям координат, и применяется предельный переход. В этот метод включается также выражение степенного ряда с помощью интеграла типа Меллина—Барнса (п. 23.4.1). В качестве регулирующего множителя, как и в п. 23.4.1, обычно берется один из $\operatorname{ctg} \pi t$, $1/\sin \pi t$, $e^{\pm i 2\pi t} - 1$. Проиллюстрируем приведенную идею, построив некоторые модификации формулы Эйлера—Маклорена (9.99).

1°. Пусть функция $h(t)$ аналитична в полосе $\operatorname{Re} t \in [1, n]$, за исключением конечной или бесконечной последовательности особых точек $\{t_k\}$, $\operatorname{Im} t_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_1$. Ради простоты сначала предположим, что все особые точки однозначного характера. Кроме того, равномерно относительно $\operatorname{Re} t \in [1, n]$ при $\operatorname{Im} t \rightarrow \pm \infty$ имеет место оценка

$$h(t) = O(e^{2\pi |\operatorname{Im} t| t - 1 - \varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (24.84)$$

Образует прямоугольник с вершинами в точках $1 + i\omega_m$, $1 - i\omega_m$, $n - i\omega_m$, $n + i\omega_m$. Его контур $L_{n, \omega, n}$ ориентирован в положи-

тельном направлении и искривлен вокруг точек $t=1$ и $t=n$ так, чтобы он пересекался с осью $\arg t=0$ в точках $t=1+\eta$ и $t=n-\eta$, $\eta \in (0, 1)$. Пусть внутри него находится p_m особых точек функции $h(t)$, причем в случае конечного числа особых точек ω_m выберем так, чтобы все особые точки находились внутри. Часть контура $L_{n,\omega,\eta}$, лежащую над осью $\arg t=0$, обозначим через $L_{n,\omega,\eta}^{(1)}$, остальную — через $L_{n,\omega,\eta}^{(2)}$, а число особых точек — соответственно через $p_m^{(1)}$ и $p_m^{(2)}$, $p_m^{(1)}+p_m^{(2)}=p_m$. Тогда согласно теореме Коши о вычетах имеем соотношения

$$\frac{1}{2i} \int_{L_{n,\omega,\eta}} \operatorname{ctg} \pi t h(t) dt = \sum_{k=2}^{n-1} h(k) + \pi \sum_{k=1}^{p_m} \operatorname{res} [h(t) \operatorname{ctg} \pi t; t_k],$$

$$\frac{1}{2} \int_{1-\eta}^{n-\eta} h(t) dt + \frac{1}{2} \int_{L_{n,\omega,\eta}^{(1)}} h(t) dt = \pi i \sum_{k=1}^{p_m^{(1)}} \operatorname{res} [h(t); t_k],$$

$$\frac{1}{2} \int_{1+\eta}^{n-\eta} h(t) dt - \frac{1}{2} \int_{L_{n,\omega,\eta}^{(2)}} h(t) dt = -\pi i \sum_{k=1}^{p_m^{(2)}} \operatorname{res} [h(t); t_k].$$

С учетом равенств

$$(1/i) \operatorname{ctg} \pi t + 1 = 2/(1 - e^{-i2\pi t}), \quad (1/i) \operatorname{ctg} \pi t - 1 = 2/(e^{i2\pi t} - 1) \quad (24.85)$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} h(k) - \int_{1+\eta}^{n-\eta} h(t) dt &= \int_{L_{n,\omega,\eta}^{(1)}} \frac{h(t)}{1 - e^{-i2\pi t}} dt + \int_{L_{n,\omega,\eta}^{(2)}} \frac{h(t)}{e^{i2\pi t} - 1} dt - \\ &- 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^{p_m^{(1)}} \operatorname{res} \left[\frac{h(t)}{1 - e^{-i2\pi t}}; t_k^{(1)} \right] + \sum_{k=1}^{p_m^{(2)}} \operatorname{res} \left[\frac{h(t)}{e^{i2\pi t} - 1}; t_k^{(2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24.86)$$

Перейдем к пределу при $\omega_m \rightarrow +\infty$. В силу (24.84) можно утверждать, что интегралы по горизонтальным отрезкам контура $L_{n,\omega,\eta}$ стремятся к нулю и полученные интегралы по вертикальным прямым сходятся. Суммы вычетов в случае конечного числа

особых точек не изменяются, а в случае бесконечного числа стремятся к суммам соответствующих сходящихся рядов, причем их сходимость следует из сказанного в п. 24.4.1. В дальнейшем пишем бесконечные ряды.

Отделим интегралы по полуокружностям радиуса η вокруг точек $t=1$ и $t=n$ и в остальных интегралах применим соответственно подстановки $t=1 \pm iu$, $t=n \pm iu$. После этого объединим интегралы по прямым $\operatorname{Re} t=1$ и $\operatorname{Re} t=n$ и перейдем к пределу при $\eta \rightarrow 0$. Интегралы по полуокружностям радиусом η стремятся к $1/2$ соответствующего вычета, а по прямым получаем сходящиеся интегралы. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n h(k) - \int_1^n h(t) dt &= (1/2)[h(1) + h(n)] + \\ &+ i \int_0^{\infty} \frac{h(1+iu) - h(1-iu)}{e^{2\pi u} - 1} du - 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left[\frac{h(t)}{1 - e^{-i2\pi t}}; \right. \right. \\ &\left. \left. t_k^{(1)} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left[\frac{h(t)}{e^{i2\pi t} - 1}; t_k^{(2)} \right] \right\} + i \int_0^{\infty} \frac{h(n-iu) - h(n+iu)}{e^{2\pi u} - 1} du. \end{aligned} \quad (24.87)$$

Полученная формула называется *формулой Абеля—Плана* [270, 271, 345].

Из нее можно получить формулу Эйлера—Маклорена (9.99), если дополнительно предположить следующее:

- 1) функции $h^{(2k+1)}(n)$ образуют шкалу;
- 2) при достаточно больших k и $u \in [0, \infty)$ справедливы оценки

$$|h^{(2k)}(n \pm iu)| < M_k |h^{(2k)}(n)| e^{\gamma u}, \quad \gamma < 2\pi. \quad (24.88)$$

Тогда к последнему интегралу в (24.87) можно применить теорему 14.1. Легко проверить выполнение условия (14.4): к функции $h(n-iu) - h(n+iu)$ следует применить формулу Тейлора с остатком в форме Лапласа (3.16) и учесть (24.88). Кроме того, приходится использовать соотношение

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{2k-1}}{e^{2\pi u} - 1} du = \frac{\Gamma(2k) \zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}} = (-1)^k \frac{B_{2k}}{4k}, \quad (24.89)$$

которое получается почленным интегрированием ряда $1/(e^{2\pi i u} - 1) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-2\pi(j+1)u}$. Учитывается также (9.97).

Формула Абеля—Плана дает аналитическое выражение для постоянной C в (9.99). Однако доведение до конкретного числа первого интеграла в (24.87) удастся лишь в редких случаях. Некоторые примеры указаны в [6, 121]. Выражение для C немного упрощается, если $h(\bar{t}) = \bar{h}(t)$. Кроме того, в данном случае имеем другие условия, при которых справедлива формула (9.99). Очевидно, формула (24.87) остается верной и в тех случаях, когда функция h зависит также от n . Иногда вместо (24.87) целесообразнее применить (9.92) при $m=0$, в частности в случаях, когда $n = \infty$ и $h(t)$ содержит дополнительный параметр, относительно которого ищется асимптотическое представление. Эти вопросы подробнее будут рассмотрены в третьем томе монографии.

Примененный метод допускает разные модификации.

А. В рассматриваемой полосе могут находиться также точки ветвления с разрезами, идущими параллельно мнимой оси. Тогда в выражении для C к сумме вычетов следует добавить интегралы по петлям вокруг разрезов.

Б. Первым индексом суммы в (24.87) вместо единицы можем брать любое другое натуральное число $m < n$. Можно также перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, если существует предел в правой части (24.87).

В. Вместо прямых $\text{Re } t = 1$ и $\text{Re } t = n$ можно брать $\text{Re } t = 1 - a$, $\text{Re } t = n + b$, $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$. Тогда получим более общую формулу и тем самым некоторую модификацию, которая приведена в [6, 321]. Кроме того, в регулирующем множителе можно брать аргумент $(t + \lambda)$ [286, 328].

Г. Может быть, что условие (24.84) не выполнено. Некоторая модификация формулы (24.87) для такого случая рассмотрена в п. 24.6.4.

Д. Отметим, наконец, что разные обобщения формулы (9.99) можно получить также без применения теории функций. В работах [292, 299] для этого применяются конечные части расходящихся интегралов.

2°. В предыдущем выводе можем брать прямые $\text{Re } t = 0$ и $\text{Re } t = 1$ и $\text{ctg } \pi t$ заменить на $\text{ctg } n\pi t$. Предположим, что $h(t)$ имеет 1) прежние особые точки p_k однозначного характера и 2) оценку

$$h(\sigma + i\tau) = O(e^{|\tau|}) \text{ при } \tau \rightarrow \pm\infty, \sigma \in [0, 1]. \quad (24.90)$$

Тогда, произведя соответствующие замены в предыдущих вы-

кладках, вместо (9.99) получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n h(k/n) - n \int_0^1 h(t) dt &\sim (1/2)[h(1) - h(0)] + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m+2}[h^{(2m+1)}(1) - h^{(2m+1)}(0)]}{(2m+2)!n^{2m+1}} - \\ &- 2\pi ni \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left[\frac{h(t)}{1 - e^{-i2\pi nt}}; t_k^{(1)} \right] + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res} \left[\frac{h(t)}{e^{i2\pi nt} - 1}; t_k^{(2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24.91)$$

Назовем (24.91) *формулой Эйлера—Маклорена второго рода*.

Поскольку $\operatorname{Re} t_k \in (0, 1)$, то все вычеты имеют оценку $o(n^{-N})$. Поэтому их можно включить в любой остаток первого ряда в правой части (24.91), т. е. отбросить. Однако при численных расчетах эти вычеты могут оказаться полезными и дать существенную поправку, если некоторые особые точки весьма близки к действительной оси.

Формула (24.91) имеет и другое значение — дает оценку погрешности, которая получается при замене интеграла на интегральную сумму. Поскольку можно применить разные квадратурные формулы, то при исследовании их погрешности формулу (24.91) следует модифицировать. Это достигается включением разных других регулирующих множителей или применением некоторых из тех модификаций, которые отмечены в п. 24.6.3, 1° относительно формулы Абея—Плана. Кроме того, можно отметить еще другие модификации для (24.91).

А. В формуле (24.86) не переходить к пределу при $\omega \rightarrow \infty$, но полученный интеграл при подходящем образом выбранном ω вычислить некоторым способом [328].

Б. Допустить, что $h(t)$ при $t=0$ и $t=1$ обладает асимптотическими разложениями по дробным степеням t и $(1-t)$ или $h(0)$ и $h(1)$ не существуют [260, 339]. Случай логарифмической особенности рассмотрен также в [340].

В. Другие квадратурные формулы получить с помощью разных вспомогательных функций [237].

Г. В (24.91) вместо производных функций $h(t)$ ввести их разности и разности других функций [286].

Отмеченные, а также другие обобщения можно получить и другими методами без применения аналитических функций. Фор-

мулу (24.91) без суммы вычетов можно вывести таким же путем, как в (9.99) [6]. Разные обобщения в этом направлении и исследования остатка в квадратурных формулах другими методами даны в [260, 286, 325, 328, 339].

24.6.4. Рассмотрим примеры применения формулы Абеля—Плана и ее модификацию.

1°. Пусть в (24.87) $h(t) = t^{-s}$, $s > 1$. Если перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, то получим формулу Иенсена

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1/2 + \frac{1}{s-1} + i \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(1+iu)^s} - \frac{1}{(1-iu)^s} \right] / (e^{2\pi u} - 1) du = \\ &= 1/2 + \frac{1}{s-1} + 2 \int_0^{\infty} (1+u^2)^{-s/2} \sin(s \operatorname{arctg} u) / (e^{2\pi u} - 1) du, \end{aligned} \quad (24.92)$$

которая замечательна тем, что дает аналитическое продолжение $\zeta(s)$ во всей плоскости s , кроме $s=1$. Для ζ -функции имеются также другие формулы такого типа [1, 321].

2°. Пусть в (24.87) $k=1$ заменено на $k=0$, $h(t) = e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. Тогда при $n = \infty$ получим формулу Лежандра

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda u}{e^{2\pi u} - 1} du = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-e^{-\lambda}} - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \right]. \quad (24.93)$$

3°. Рассмотрим более сложный пример, когда

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(ip\pi k^2/n), \quad (24.94)$$

где pn — четное число. Мы не можем непосредственно применить формулу (24.87), так как при $h(t) = \exp(ip\pi t^2/n)$ не удовлетворено условие (24.84). Поэтому сначала рассмотрим модификацию для (24.87), предложенную Линделефом [321].

Ради простоты предположим, что функция $h(t)$ аналитична в полосе $\operatorname{Re} t \in [0, n]$. В (24.86) заменим единицу на нуль и применим соотношение

$$\frac{1}{e^{-i2\pi t} - 1} = \sum_{k=1}^m e^{i2\pi kt} + \frac{e^{i2\pi mt}}{e^{-i2\pi t} - 1} \frac{1}{e^{i2\pi t} - 1} = \sum_{k=1}^m e^{-i2\pi kt} + \frac{e^{-i2\pi mt}}{e^{i2\pi t} - 1},$$

причем m выберем столь большим, чтобы при $\operatorname{Im} t \rightarrow \pm \infty$ $h(t) e^{-2(m+1)\pi |\operatorname{Im} t|} = O(t^{-1-\varepsilon})$ равномерно относительно $\operatorname{Re} t \in [0, n]$, если только такой выбор возможен.

Поскольку согласно теореме Коши

$$-\int_{L^{(1)}} h(t) e^{i2\pi kt} dt + \int_{L^{(2)}} h(t) e^{-i2\pi kt} dt = 2 \int_{\eta}^{n-\eta} h(t) \cos 2\pi k t dt,$$

то после предельного перехода при $\omega \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow 0$ получаем следующую модификацию формулы (24.87):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} h(n) &= [h(0) - h(n)]/2 + \int_0^n h(t) dt + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^m \int_0^n h(t) \cos 2\pi k t dt + \\ &+ i \int_0^{\infty} \frac{h(iu) - h(-iu)}{e^{2\pi u} - 1} e^{-2m\pi u} du + i \int_0^{\infty} \frac{h(n-iu) - h(n+iu)}{e^{2\pi u} - 1} e^{-2m\pi u} du. \end{aligned} \quad (24.95)$$

Вернемся к сумме (24.94), когда $h(t) = \exp(ip\pi t^2/n)$. В силу четности pn имеем $h(0) = h(n) = 1$, а в силу $h(iu) = h(-iu)$ предпоследний интеграл в (24.95) равен нулю. Поскольку

$$h(n-iu) - h(n+iu) = \exp[-ip\pi u^2/n] e^{2p\pi iu} [1 - e^{-4p\pi u}], \quad (24.96)$$

то можно брать $m=p$. Верхнее условие тогда удовлетворено. Пусть $h_k(t) = h(t) \cos 2\pi kt$. В силу (16.110) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iu^2} du = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4}. \quad (24.97)$$

Применим в (24.97) подстановку $u = at + b/a$, $a > 0$, заменим в полученном соотношении b на $-b$ и сложим обе формулы. В итоге

$$\int_0^{\infty} e^{\pm ia^2 t^2} \cos 2bt dt = \sqrt{\pi} \exp(\pm i\pi/4 \mp ib^2/a^2)/2a. \quad (24.98)$$

Отсюда при $a = \sqrt{p\pi/n}$, $b = k\pi$ следует

$$2 \int_0^n h_k(t) dt = \sqrt{n/p} \exp(i\pi/4 - ik^2 n\pi/p) - 2 \int_n^{\infty} h_k(t) dt.$$

С помощью теоремы Коши легко убедиться в том, что путь интегрирования при $k \leq p$ в последнем интеграле можно повернуть на $\pi/2$ и

$$\begin{aligned} 2 \int_n^{\infty} h_k(t) dt &= 2 \int_0^{\infty} h_k(n+u) du = 2i \int_0^{\infty} h_k(n+i\tau) d\tau = \\ &= i \int_0^{\infty} \exp(-2\pi p\tau - i\pi p\tau^2/n) [e^{2h_k\pi\tau} + e^{-2h_k\pi\tau}] d\tau. \end{aligned}$$

Согласно полученным результатам имеем

$$\begin{aligned} \int_0^n h_0(t) dt + 2 \sum_{k=1}^p \int_0^n h_k(t) dt &= \left[\int_0^{\infty} h_0(t) dt + 2 \sum_{k=1}^p \int_0^{\infty} h_k(t) dt \right] - \\ - \left[\int_n^{\infty} h_0(t) dt + 2 \sum_{k=1}^p \int_n^{\infty} h_k(t) dt \right] &= \sqrt{n/pe}^{i\pi/4} \left[\sum_{k=0}^{p-1} e^{-i\pi nk^2/p} + 1/2 \right] - \\ - i \int_0^{\infty} \exp(-i\pi p\tau^2/n) [e^{2\pi\tau} - e^{-4\pi\tau}] / (e^{2\pi\tau} - 1) d\tau. \quad (24.99) \end{aligned}$$

Если еще добавить последний интеграл в (24.95) и учесть (24.96), то первый член в правой части (24.99) следует сложить с интегралом

$$-i \int_0^{\infty} \exp(-i\pi p\tau^2/n) d\tau = -ie^{-i\pi/4} \sqrt{n/p}/2 = -e^{i\pi/4} \sqrt{n/p}/2.$$

Таким образом, получаем формулу двойственности Гауса

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp(i\pi pk^2/n) = \sqrt{n/pe}^{i\pi/4} \sum_{k=0}^{p-1} \exp(-i\pi nk^2/p). \quad (24.100)$$

Впервые при некоторых дополнительных условиях она получена Шаром, а при $p=2$ — Гаусом [319, 321]. В упомянутых работах приводится также подробная библиография, касающаяся формулы Гауса.

24.7. Библиографические сведения

24.7.1. Применять вычеты начал Коши. Однако к асимптотическому разложению интегралов вычеты начали применяться лишь Меллином в конце XIX в. [331], а потом систематически Барнсом. Много применений вычетов указано в работе Линдлефа [321]. Одновременно рассматривалось включение пути интегрирования в более общий контур, но для вывода асимптотических разложений этот метод начал применяться только в работах [208, 276, 361].

Весьма сложна история исследований о формулах обращения для преобразований Лапласа и Меллина. Наименование этих формул исторически не всегда оправдано. Преобразование Меллина и ее обращение впервые рассматриваются в работе Римана [353] при исследовании вопроса о количестве $\pi(x)$ простых чисел, не превышающих x . Риман первым предложил метод, согласно которому свойства функции исследуются с помощью ее интегрального преобразования (на примере конкретного преобразования $\int_1^{\infty} x^{s-1} f(x) dx = g(s)$). Применив интегральную теорему

Фурье, Риман формально получил формулу обращения этого преобразования не только при рассмотренной конкретной функции $f(x)$, но также в общем случае. Интеграл обращения он использовал для формального вывода асимптотического представления функции $\pi(x)$. Обоснование этих действий приведено в [309].

Если не считать работ Эйлера, Лапласа и Коши, в которых решение линейного дифференциального уравнения ищется в виде контурного интеграла, то формула обращения преобразования Лапласа в современном виде впервые встречается в работе Пинкерле [342], в которой исследуются линейные дифференциальные уравнения с коэффициентами, являющимися полиномами от e^{-t} . Для исследования такого же уравнения со степенными коэффициентами Меллин в [331] независимо от Римана вводит прямое и обратное интегральные преобразования, названные его именем. Там же сдвигом пути он формально получает асимптотические разложения при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. После этой работы появился большой цикл других его работ, посвященных как разработке теории преобразования Меллина, так и разносторонним ее применениям, в том числе и построению асимптотических разложений. Обзор многолетних исследований Меллина приводится в [333, 334].

В начале XX в. Барнс в цикле статей подробно разработал методику для построения асимптотических разложений разных классов функций, определяемых с помощью степенных рядов или

интегралов и выражаемых как интеграл обращения для преобразования Меллина (см. метод Меллина—Барнса). В первой работе цикла [275] он отмечал, что только после разработки этой теории ему стали известны работы Меллина.

Много работ посвящено исследованиям условий, при которых справедливы формулы обращения. Для обратного преобразования Лапласа условия исследовали Пинкерле [343] (частный случай УО2В), Гамбургер [308] (УО1, УО2Б), Фудживара [304] (модифицированное УО2А, УО2Б), Хар [75] (среднее между УО1 и УО2А), Тамаркин [359] (некоторое общее условие, из которого следует УО2Б и частный случай УО2В), Черчилл [287, 288] (УО2А, УО2Б, частный случай УО2В). Последний отмечает, что доказательство Фудживары нельзя признать корректным. В работах Черчилля можно найти также модификации леммы Жордана для прямоугольных [287] и параболических [288] контуров и их применения к доказательству теоремы 22.1. Обычное условие леммы Жордана ($h(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p < 0$) ослаблено в [287] ($|p^k h(p)| < M$) и [314] ($e^{\alpha p} h(p) \rightarrow 0$). Модификация 1° леммы 22.10 дана Харом [75]. В этой же работе изложена идея метода Хара. Более сложные условия для оценки интеграла обращения (22.30) приведены в [316].

Условия для обратного преобразования Меллина предложили Меллин [332] (УО1 и УО2 при более сильных требованиях), Фудживара [304] (УО2), Гамбургер [309] (УО2). Меллином рассмотрены также вопросы аналитического продолжения оригинала и изображения. Более полные исследования по последнему вопросу изложены в [76—79].

Деформирование контура вокруг разреза в случае алгебраической точки ветвления для построения асимптотического разложения начал применять Барнс [276]. Однако следует отметить, что формальный вывод асимптотического представления оригинала при $t \rightarrow +\infty$ без всякого обоснования был предложен уже Хевисайдом [312]: если при $p \rightarrow 0$ $h(p) = \sqrt[p]{p \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k}$, то разложение для $\Omega(t)$ строится с помощью формального применения формулы

$p^\alpha \doteq t^{-1-\alpha} / \Gamma(-\alpha)$. В случае ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{k/2}$ члены с целыми показателями степени следует выбросить. Отметим еще, что Хевисайду

принадлежит также формальный вывод частного случая теоремы 22.1. Обоснование метода Хевисайда дал Хар [75] (доказательство формулы (22.43) при $n=1$). Независимо от Хара формула (22.43) при общем n доказана в [318, 358]. Случай $m_{01}=1$ тоже рассмотрен Харом, причем и формула (22.44), когда $\lambda_{j1} \in N$. Впоследствии теорема 22.2 получила следующие обобщения: $m_{j1} = m \in N_1$ [66, 314], $m_{j1} = -1$ [314], $m_{j1} = j$ [171]. В [254] в неясной

формулировке рассмотрено обобщение теоремы 22.2 при $m_j \in \bar{N}$. Практически оно не улучшает теорему 22.4. Теорема 22.14 с некоторыми изменениями приведена в [171, 252]. Там же рассмотрен пример (22.117).

Теорема 22.5 приведена в [66, 297], теорема 22.6 и ее модификация в видоизмененном виде — в [171], а ее частный случай, когда ряд (22.52) содержит множитель $e^{-\beta/p}$, — в [314]. Следует также отметить, что некоторые результаты в случае существенно особой точки получены с помощью тауберовых теорем [29, 273]. В последней работе указана библиография по данному вопросу.

Асимптотические разложения оригинала при $t \rightarrow 0$ в литературе рассмотрены мало. Теоремы 22.7 и 22.9 (последняя — в частном случае) приведены в [66, 297], теорема 22.13 в видоизмененном виде — в [48, 281]. Пример (22.76) рассмотрен в [48]. Теоремы 22.10—22.12 формально, без всякого обоснования применялись при решении разных задач математической физики, например в [305].

Пример 1° в п. 22.7 в частном случае при $h(p) = 1/(1-p)$ рассмотрен в [314], где впервые применена шкала $\{T(t, -\lambda_h)\}$. Свойства функции Вольтерра (22.92) приведены в [241], а некоторые другие свойства функций $v(t, \alpha)$ и $\mu(t, \beta, \alpha)$ — в [1]. В работе [1] указана дополнительная литература по данным вопросам.

Функция Миттага—Лефлера введена в [337]. Там же впервые рассмотрено ее асимптотическое представление. Более глубоко эту функцию и ее асимптотику исследовали многие авторы. Большинство их работ приведено в [241], но следует к ним еще добавить работы [276] и [322]. В [31, 276, 361] начаты исследования обобщений и модификаций этой функции, которые в настоящее время идут в разных направлениях. К одному из них относится также функция (22.108') [303, 368], но следует отметить, что идея такого обобщения встречается уже у Барнса [276]. Другой вид обобщения подобен гипербесселевым функциям (21.126) [293]. Рассматривались также разные обобщения функции Харди—Барнса (22.100), которые одновременно являются обобщениями функции Миттага—Лефлера [31, 276, 361]. Функция (22.102) исследована уже Линделефом [321] и Барнсом [277]. Формула (23.77) дана в [276].

Преобразование Лапласа для асимптотического представления интеграла свертки в конкретных случаях применялось многими авторами. Общее доказательство относительно свертки функций класса $\mathcal{PM}(\infty)$, приведенное в п. 22.8.3 и использующее функции (22.118), дано в [310].

Ряды Меллина введены Меллином [332]. Ему были известны также свойства двойственности этих рядов относительно преоб-

разования, позднее названного его именем. Однако более глубокое изучение этих рядов и их применение в асимптотических разложениях дано только в [76—79, 310]. Свойства двойственности рядов Меллина относительно преобразования Лапласа частично приведены в [66, 297], но без специального акцента.

24.7.2. Частные случаи интеграла Меллина—Барнса встречаются у Римана [353], Пинкерле [342] и Меллина [331]. Более общие интегралы, но тоже частные случаи интеграла (23.15) исследовались в ряде работ Меллина и Барнса. Оба автора разрабатывали метод построения асимптотического разложения интеграла (23.15) сдвигом пути интегрирования вправо и влево, причем результаты Барнса более общие. Интегралы второго и третьего рода тоже встречаются в работах Барнса. Впервые они приведены в [276]. Однако систематическое их применение показано в [1], где приводятся определение и свойства функции Мейера. Последняя введена в [329]. Ее свойства, в том числе асимптотические разложения, исследованы в [330]. Многие из них приведены в [324]. Наиболее глубокие исследования интегралов Меллина—Барнса даны в [283], где изучена также асимптотика функции Мейера. Из этой работы в преобразованном виде заимствована часть результатов в п. 23.2 и 23.3. Там же приведена подробная библиография о частных случаях, рассмотренных в литературе.

Случаи, когда асимптотическое разложение интеграла (23.15) содержит экспоненциальный множитель, рассмотрены уже Барнсом [278, 279], причем в [279] применены более простые подынтегральные множители, чем в [278]. В [278] встречается также идея о применении формулы (23.30), но систематически она используется лишь в работах Райта [363, 364]. В отмеченных работах Райт не указал приема для вычисления коэффициентов L_h , однако в [365] им получено рекуррентное соотношение для их вычисления в случае гипергеометрических функций. При этом используется дифференциальное уравнение для ${}_pF_q$. Вычислению коэффициентов L_h посвящены также работы [255, 283, 291, 354] и некоторые другие. В п. 23.3.3 применяется метод, изложенный в [255]. Применение формулы (23.30) к общему интегралу (23.15) рассмотрено в [283].

Методы приведения исследований асимптотики функций, определяемых бесконечными рядами или интегралами, к интегралу (23.15) разрабатывали в своих работах независимо друг от друга Меллин и Барнс. Меллин в [332] дает также равенство Парсеваля в форме (23.48) и формулу (23.48'). Однако Меллин только упоминает [333], а не разрабатывает идею о применении (23.48) к асимптотическому разложению интегралов. На важность этой формулы указывается в [66]. Она упоминается также в некото-

рых других работах, например в [294]. Широкие применения и дальнейшее развитие она получила лишь в работах [76—79, 310].

Гипергеометрическая функция ${}_2F_1$ введена Гауссом, функция ${}_1F_1$ — Куммером, а более общий гипергеометрический ряд — Клаузеном [289]. Но систематически общие гипергеометрические функции изучались лишь Похгаммером. Первой работой в цикле является [346]. Все же его исследования мало похожи на современное изложение теории гипергеометрических функций. Похгаммером введено также соответствующее обозначение [347]. С помощью интеграла (23.15) функцию ${}_pF_q$ или ее частные случаи выразил Барнс. Формулы из п. 23.4.2, 1°, 2° тоже даны Барнсом [276, 278]. Асимптотическим разложениям гипергеометрических функций посвящена обширная литература. Обзоры даны в [1, 324], где частично указана библиография. Фоксом [301] и Райтом [364] исследована асимптотика более общих гипергеометрических функций. Асимптотические разложения интегралов по вертикальной прямой от весьма сложных подынтегральных функций рассмотрены в [278, 301]. Они появляются при построении асимптотики гипергеометрических функций в случае экспоненциального множителя (см. п. 23.3.3).

Формула (23.58) приведена в [197], а частный случай интеграла (23.98) — в [264]. Пример (23.90) рассматривался в неопубликованной дипломной работе Я. Янсона, а разложение (23.93) получено в [175].

24.7.3. На особые случаи, когда существенно критическая точка находится в бесконечности или путь пересекает гору, первым внимание обратил Федорюк [263]. Им рассмотрен интеграл (24.19) при $\alpha = -1$ и дана некоторая общая теорема об асимптотике интеграла в случае, когда путь пересекает гору и контур деформируется в бесконечности. Более просто и более подробно вопросы асимптотического разложения интегралов в упомянутых случаях изложены в [24]. Там же рассмотрено асимптотическое представление интегралов (24.11) и (24.19).

Замена подынтегрального множителя интегралом и применение изменения порядка интегрирования для асимптотического разложения интегралов в частных случаях встречается уже в работах Барнса [276] и Меллина [332, 333]. Меллин неоднократно применял формулу (24.35). Этим методом впоследствии пользовались некоторые авторы, например в [189, 294]. Пример (24.42) при $\beta = 1$ рассмотрен Халворсеном [307]. Но им получена только формула (24.49). Пример (24.53) приведен в [276]. Формула (24.55) для разных целей использована многими авторами. К разложению обратных функций в простых частных случаях уравнения (24.62) она применена в [4, 6].

Асимптотике конечных сумм посвящена весьма обширная литература. Пример (24.74) заимствован из работы [242]. Частные случаи (24.76) и (24.83) приведены в [4, 326]. Формула Абеля—Плана в отмеченных ранее работах Абеля и Плана выведена совершенно формальным путем из формулы Эйлера—Маклорена. Абель эту формулу применял для вычисления интегралов; в частности, им получено (24.93). Вычеты к выводу (24.87) впервые применяются в работе Коши [285]. Метод, рассмотренный в п. 24.6.3, 1° , впервые встречается у Кронекера [319] при выводе формулы двойственности Гауса, а для формул Абеля—Плана и Эйлера—Маклорена — в [321]. Метод, использованный в § 9 для вывода формулы Эйлера—Маклорена, тоже был известен Лиделефу. Подробная библиография относительно раннего периода исследования обеих формул приведена в [274, 286, 300, 321]. Задача о вычислении суммы (24.100) в случае $p=2$ возникла у Гауса в связи с некоторой задачей из теории чисел.

В заключение отметим, что рассмотренные методы охватывают далеко не все типы интегралов, которые встречаются в задачах прикладного характера. Например, пусть в (21.1) $g(n, t) = n[\ln t - 2 \ln(1+t)]$, $h(k, m, t) = (t-1) \left[\frac{t(1-t^{k-1})}{1-t^{k+1}} \right]^m$, $k = O(\sqrt{n})$, $m = O(\sqrt{n})$, $k, m, n \in \mathbb{N}$. Имеем точку перевала $t=1$, однако функция $h(k, m, t)$ не удовлетворяет условиям теоремы 21.1. Ее формальное применение не приводит к асимптотической шкале. В случае сложных подынтегральных функций нелегко применить также метод перевала. Некоторые трудные примеры приведены в [4]. Дополнительные методы, основанные на других идеях, будут рассмотрены в третьем томе монографии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К главе IV

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1—3. М., «Наука», 1966.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М., «Наука», 1969.
3. Блох Э. Л. Об одном разложении функций Бесселя в ряд по функциям Лежандра. — «Прикл. мат. мех.», 1954, т. 18, № 6, с. 745—748.
4. Брейн Н. Г. де. Асимптотические методы в анализе. М., ИЛ, 1961.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
6. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. Изд. 1-е. М., Гостехиздат, 1957; изд. 2-е. М., Физматгиз, 1962.
7. Консон Э. Т. Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
8. Полна Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. М., Гостехиздат, 1956.
9. Риекстиня В. Ж. Асимптотические оценки некоторых интегралов, зависящих от большого параметра. — «Латв. мат. ежегодник», 1968, вып. 3, с. 291—312.
10. Риекстиня В. Ж. Асимптотические разложения некоторых целых функций и интеграла Фурье. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1968, т. 91, с. 47—74.
11. Риекстиня В. Ж. Применение сумм степенных рядов для асимптотического разложения одного класса специальных функций. — «Латв. мат. ежегодник», 1973, вып. 12, с. 141—152.
12. Риекстиня В. Ж. Асимптотическое разложение одного класса специальных функций. — «Латв. мат. ежегодник», 1975, вып. 16, с. 154—163.
13. Риекстыньш Э. Я. Об асимптотическом представлении интегралов, зависящих от большого параметра. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1961, т. 41, с. 5—23.
14. Риекстыньш Э. Я. О применении теории нейтрис к асимптотическому представлению некоторых интегралов. — «Латв. мат. ежегодник», 1965, вып. 1, с. 5—21.
15. Риекстыньш Э. Я. Обзор выполненных в Риге исследований по асимптотическому представлению функций. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1968, т. 91, с. 3—34.
16. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов от быстро осциллирующих функций. — «Латв. мат. ежегодник», 1975, вып. 16, с. 89—112.

17. Риекстыньш Э. Я., Цирулис Т. Т. О методах, применяемых к асимптотическому представлению функций, определяемых интегралами, при больших значениях параметра. — «Латв. мат. ежегодник», 1970, вып. 7, с. 193—253.
18. Стильтес Т. И. Исследования о непрерывных дробях. Харьков, изд. ОНТИ, 1936.
19. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М., Гостехиздат, 1948.
20. Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. — «ДАН», 1959, т. 125, с. 982—985.
21. Цирулис Т. Т. О некоторых свойствах градиентных линий и их применении в асимптотических разложениях. — «Латв. мат. ежегодник», 1965, вып. 1, с. 71—87.
22. Цирулис Т. Т. Метод градиентных линий для асимптотического представления контурных интегралов. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Рига, 1968.
23. Цирулис Т. Т. О некотором обобщении метода стационарной фазы. — «Латв. мат. ежегодник», 1969, вып. 5, с. 170—190.
24. Цирулис Т. Т. Метод градиентных линий для асимптотического представления контурных интегралов. Рига, «Зинатие», 1973.
25. Цирулис Т. Т. Асимптотическое представление коэффициентов Фурье разложения функций в ряды по полиномам Лежандра. — «Латв. мат. ежегодник», 1976, вып. 19, с. 47—62.
26. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М., «Мир», 1972.
27. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
28. Abramovitz M. Evaluation of the integral $\int_0^{\infty} \exp[-u^2 - xu^{-1}] du$. — «J. Math. a. Phys.», 1953, vol. 32, No. 2—3, pp. 188—192.
29. Avakumović V., Karamata J. Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. — «Math. Z.», 1936, Bd. 41, S. 345—356.
30. Bakhoom N. G. Asymptotic expansions of the function $F_n(x) = \int_0^{\infty} \exp(-u^k + xu) du$. — «Proc. London Math. Soc.», 1933, vol. 35 (2), pp. 83—100.
31. Barnes E. W. On asymptotic expansions of the integral functions $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+an)x^n}{\Gamma(1+n)}$ and $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n\theta)x^n}{\Gamma(1+n+n\theta)}$. — «Trans. Cambr. Philos. Soc.», 1906, vol. 20, pp. 215—232.
32. Bateman H. Some asymptotic relations. — «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1942, vol. 28, pp. 371—374.
33. Bekessy A. Eine Verallgemeinerung der Laplaceschen Methode. — «Publ. Math. inst. Hung. acad. sci.», 1957, vol. 2, 1/2, p. 105—125.
34. Berg L. Über das asymptotische Verhalten der Laplace-Transformation. — «Wiss. Z. Hochsch. f. Elektrotechn. Ilmenau», 1956, Bd. 2, Nr. 2, S. 77—78.
35. Berg L. Asymptotische Entwicklung einer Klasse von Integralen. — «Math. Nachr.», 1957, Bd. 16, S. 207—214.
36. Berg L. Asymptotische Entwicklung von Parameterintegralen. — «Z. angew. Math. Mech.», 1957, Bd. 37, Nr. 7/8, S. 246—247.
37. Berg L. Hinreichende Bedingungen zur asymptotischen Darstellung von Parameterintegralen. — «Wiss. Z. Hochsch. f. Elektrotechn. Ilmenau», 1957, Bd. 3, Nr. 2, S. 85—88.

38. Berg L. Asymptotische Darstellungen für Integrale und Reihen mit Anwendungen. — «Math. Nachr.», 1958, Bd. 17, pp. 101—135.
39. Berg L. Praktische Herleitung asymptotischer Darstellungen. — «Z. angew. Math. Mech.», 1958, Bd. 38, Nr. 7/8, S. 1—2.
40. Berg L. Über das asymptotische Verhalten der Laplace-Transformation. — «Math. Nachr.», 1958, Bd. 17, S. 57—61.
41. Berg L. Abelsche und Taubersche Sätze für Potenzreihen mit Fehlerabschätzungen. — «Math. Nachr.», 1959, Bd. 20, S. 25—38.
42. Berg L. Asymptotische Darstellungen für verallgemeinerte Fourierintegrale. — «Math. Nachr.», 1959, Bd. 20, S. 166—170.
43. Berg L. Über eine spezielle Folge von Polynomen. — «Math. Nachr.», 1959, Bd. 20, S. 152—158.
44. Berg L. Verallgemeinerungen des Kriteriums von Herrn H. Schubert. — «Math. Nachr.», 1959, Bd. 20, S. 159—165.
45. Berg L. Asymptotische Entwicklungen für Parameterintegrale. — «Math. Nachr.», 1962, Bd. 24, S. 181—192; 1964, Bd. 27, S. 133—143, 265—275.
46. Berg L. Asymptotische Entwicklung mit Hilfe von Neutrizen. — «Arch. Math.», 1963, Bd. 14, S. 162—171.
47. Berg L. Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin, DVW, 1968.
48. Berg L. Operatorrechnung, 2. Berlin, DVW, 1974.
49. Bleistein N., Handelsman R., Lew J. Functions whose Fourier transforms decay at infinity. An extension of the Riemann—Lebesgue lemma. — «SIAM J. Math. Anal.», 1972, vol. 3, No. 3, pp. 485—495.
50. Brillouin L. Sur une méthode de calcul approchée de certains intégrales, dite méthode de col. — «Ann. Éc. norm.», 1916, t. 33 (3), p. 17—69.
51. Bromwich T. J. An introduction to the theory of infinite series. London, Macmillan, 1908.
52. Burkhardt H. Über die Funktionen großer Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung. — «Münch. Ber.», 1914, S. 1—11.
53. Burwell W. R. Asymptotic expansions of generalized hypergeometric functions. — «Proc. London Math. Soc.», 1923, vol. 22 (2), pp. 57—72.
54. Carlitz L. On some polynomials of Tricomi. — «Boll. Unione mat. ital.», 1958, vol. 13 (3), p. 58—64.
55. Carlitz L. The inverse of the error function. — «Pacif. J. Math.», 1963, vol. 13, pp. 459—470.
56. Cauchy A. L. Théorie de la propagation des ondes. Note 16, 1815.
57. Chahine M. T., Narasimha R. The integral $\int_0^{\infty} v^n \exp[-(v-u)^2 - xv^{-1}] dv$. — «J. Math. a. Phys.», 1964, vol. 43, No. 2, pp. 163—168.
58. Comstock C. On weighed averages at a jump discontinuity. — «Quart. Appl. Math.», 1970, vol. 28, No. 2, pp. 159—166.
59. Cornille P. Computation of Hankel transforms. — «SIAM Rev.», 1972, vol. 14, No. 2, pp. 278—286.
60. Corput J. G. van der. Zur Methode der stationären Phase. — «Comp. math.», 1934, vol. 1, p. 328—372; 1936, vol. 3, p. 328—372.
61. Corput J. G. van der. On the method of critical points. — «Proc. Kon. ned. akad. wet. Ser. A», 1948, d. 51, blz. 650—658.
62. Darboux G. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grand nombres. — «J. math.», 1878, t. 4 (3), p. 5—56, 377—416.
63. Dieudonné J. Sur la méthode du col. — «Bol. Soc. mat. São Paulo», 1947, vol. 2, p. 7—34.

64. Dirichlet L. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire des limites données. — «J. reine, angew. Math.», 1829, Bd. 4, S. 157.
65. Doetsch G. Theorie und Anwendung der Laplace Transformation. Berlin, Springer, 1937.
66. Doetsch G. Handbuch der Laplace Transformation, Bd. 1, 2. Basel, Birkhausen, 1950—1955.
67. Doetsch G. Desarrollos asintoticos y transformacion de Laplace. — «Rev. mat. hispano-amer.», 1953, vol. 13 (4), No. 112, p. 5—60.
68. Erdelyi A. Asymptotic representation of Fourier integrals and the method of stationary phase. — «J. Soc. Ind. Appl. Math.», 1955, vol. 3, pp. 17—27.
69. Erdelyi A., Wymann M. The asymptotic evaluation of certain integrals. — «Arch. Rat. Mech. Anal.», 1963, vol. 14, pp. 217—260.
70. Faber G. Abschätzung von Funktionen großer Zahlen. — «Münch. Ber.», 1922, S. 285—304.
71. Faxen M. Expansion in series of the integral $\int_0^{\infty} \exp[-x(t \pm t^{-\mu})] t^{\nu} dt$. — «Ark. mat. astr. fys.», 1921, bd. 15, No. 13, s. 1—57.
72. Fourier J. B. Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822.
73. Fulks W. Asymptotics. I. A note on Laplace's method. — «Amer. Math. Monthly», 1960, vol. 67, pp. 880—882.
74. Furch R. Über die asymptotische Halbierung der Exponentialreihe und der Gammafunktion bei großem Argument. — «Z. Phys.», 1939, Bd. 112, S. 92—95.
75. Haar A. Asymptotische Entwicklungen von Funktionen. — «Math. Ann.», 1926, Bd. 96, S. 69—107.
76. Handelsman R., Bleistein N. Asymptotic expansions of integral transforms with oscillatory kernels: a generalization of the method of stationary phase. — «SIAM J. Math. Anal.», 1973, vol. 4, No. 3, pp. 519—535.
77. Handelsman R. A., Lew J. S. Asymptotic expansion of a class of integral transforms via Mellin transform. — «Arch. Rat. Mech. Anal.», 1969, vol. 35, pp. 382—396.
78. Handelsman R. A., Lew J. S. Asymptotic expansion of Laplace transforms near the origin. — «SIAM J. Math. Anal.», 1970, vol. 1, pp. 118—130.
79. Handelsman R. A., Lew J. S. Asymptotic expansion of a class of integral transforms with algebraically dominated kernels. — «J. Math. Anal. Appl.», 1971, vol. 35, No. 2, pp. 405—433.
80. Hardy G. H. On the asymptotic values of certain integrals. — «Mess. Math.», 1914, vol. 43, pp. 9—13.
81. Hardy G. H. Oscillating Dirichlet's integrals. — «Quart. J. Pure Appl. Math.», 1914, vol. 44, No. 1—40, pp. 242—263.
82. Hardy G. H. On the asymptotic value of a definite integral. — «Mess. Math.», 1917, vol. 46, pp. 70—73.
83. Hardy G. H., Littlewood E. Some problems of «Partitio Numerorum». I. A new solution of Waring's problem. — «Göttinger Nachr.», 1920, S. 33—54.
84. Hardy G. H., Littlewood E. On Tauberian theorems. — «Proc. London Math. Soc.», 1929, vol. 30 (2), pp. 23—37.
85. Hardy G. H., Ramanujan S. Asymptotic formula for the distribution of integrals of various types. — «Proc. London Math. Soc.», 1917, vol. 16, pp. 112—132.
86. Hartmann P. An asymptotic formula for exponential integrals. — «Amer. J. Math.», 1940, vol. 62, pp. 115—121.
87. Haviland E. K. On an asymptotic expression. — «Quart. J. Math.», 1936, vol. 7, pp. 152—157.

88. Haviland E. K. On an asymptotic formula for the Fourier transforms of distributions on certain curves. — «Amer. J. Math.», 1940, vol. 62, pp. 655—668.
89. Hsu L. C. An asymptotic expression for an integral involving a parameter. — «Acad. Sinica Science Records», 1949, vol. 2, pp. 339—349.
90. Hsu L. C. The asymptotic behaviour of an integral involving a parameter. — «Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser. A», 1949, vol. 5, No. 3, pp. 273—279.
91. Hsu L. C. A theorem concerning an asymptotic integral. — «Chinese Science», 1951, vol. 2, pp. 149—155.
92. Hsu L. C. Generalized Stieltjes—Post inversion formula for integral transforms involving a parameter. — «Amer. J. Math.», 1951, vol. 73, pp. 199—210.
93. Hsu L. C. On an asymptotic integral. — «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1956, vol. 10(2), pp. 141—144.
94. Hsu L. C. Asymptotics of integrals and integral approximation. Peking, 1958 (на китайском языке).
95. Hsu L. C. Concerning an expansion formula for a type of integrals. — «Ann. polon. math.», 1961, vol. 11, p. 7—12.
96. Ichijo Y. Über die Laplace'sche asymptotische Formel für das Integral von Potenzen mit großem Indexe. — «J. Gakugei, Tokushima Univ.», 1955, vol. 6, pp. 63—74.
97. Jones D. S. Fourier transforms and the method of stationary phase. — «J. Inst. Math. Appl.», 1966, vol. 2, pp. 197—222.
98. Jones D. S. Asymptotic behaviour of integrals. — «SIAM Rev.», 1972, vol. 14, No. 2, pp. 286—317.
99. Jordan D. W., Smith P. On the asymptotic expansion of a class of real integrals. — «Math. Nachr.», 1973, Bd. 57, S. 201—207.
100. Kelvin J. On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in dispersive medium. — «Philos. Mag.», 1887, vol. 23(5), pp. 252—255.
101. Kok F. de. On the validity of an asymptotic formula. — «Simon Stevin», 1949, d. 26, blz. 214—217.
102. König H. Asymptotische Entwicklungen für verallgemeinerte Betafunktionen. Diplomarbeit. Univ. Halle—Wittenberg, 1965.
103. Krause K. H. Über die Koeffizienten einer speziellen asymptotischen Entwicklung. — «Wiss. Z. Univ. Halle», 1964, Bd. 13, Nr. 4/5, S. 439—441.
104. Kuniyada M. Note on asymptotic formulae for oscillating integrals. — «Quart. J. Pure Appl. Math.», 1920, vol. 48, pp. 113—135.
105. Kurepa D. On the left factorial function !n. — «Math. balkan.», 1971, vol. 1, p. 147—153.
106. Lacroix S. F. Traité des différences et des séries. Paris, 1800.
107. Laplace P. S. Oeuvres, vol. 9, p. 422—444; vol. 10, p. 209—295. Paris, Gauthier-Willars.
108. Lauwerier H. A. The use of confluent hypergeometric functions in mathematical physics and the solution of an eigenvalue problem. — «Appl. Sci. Res. Ser. A», 1950, vol. 2, pp. 184—204.
109. Lauwerier H. A. The calculation of the coefficients of certain asymptotic series by means of linear recurrent relations. — «Appl. Sci. Res. Ser. B», 1951, vol. 2, pp. 77—84.
110. Lauwerier H. A. Asymptotic expansions. Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1966.
111. Lebesgue H. Leçons sur les séries trigonométriques. Paris, Gauthier-Willars, 1906.
112. Lebesgue H. Remarques sur un énoncé dû à Stieltjes. — «Ann. Fac. sci. Toulouse», 1909, t. 1(3), p. 119—128.
113. Legendre A. M. Exercices du calcul intégral, t. 1. Paris, 1811.

114. Levi B. On a formula of Laplace. — «Publ. Inst. Math. Univ. Nat. Litoral», 1946, vol. 6, pp. 341—351.
115. Longman J. M. A short table of $\int_0^{\infty} J_0(t)t^{-n} dt$ and $\int_0^{\infty} J_1(t)t^{-n} dt$. — «Math. Tables Other Aids Comp.», 1959, vol. 13, No. 68, pp. 306—311.
116. MacKinnon R. F. The asymptotic expansion of Hankel transforms and related integrals. — «Math. Comp.», 1972, vol. 26, No. 118, pp. 515—527.
117. Medhurst R. G., Roberts J. H. Evaluation of integral $I_n(b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos bxdx$. — «Math. Comp.», 1965, vol. 19, No. 89, pp. 113—117.
118. Muki R. Uniform asymptotic expansions of integrals of the Lipschütz—Hankel type. — «SIAM J. Math. Anal.», 1972, vol. 3, pp. 285—290.
119. Muki R., Sternberg E. Note on an asymptotic property of solutions to a class of Fredholm equations. — «Quart. Appl. Math.», 1970, vol. 28, No. 2, pp. 277—281.
120. Muldoon M. E. Singular integrals whose kernels involve certain Sturm—Liouville functions. — «J. Math. Anal. Mech.», 1970, vol. 19, No. 10, pp. 855—873.
121. Olver F. W. J. Asymptotics and special functions. New York, Academic Press, 1974.
122. Perron O. Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe. — «Arch. Math. Phys.», 1914, Bd. 22(3), S. 329—340.
123. Perron O. Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen. — «Münch. Ber.», 1916/17, S. 191—219.
124. Philip J. R. The function inverse Θ . — «Austral. J. Phys.», 1960, vol. 13, pp. 13—20.
125. Post E. Generalized differentiation. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1930, vol. 32, pp. 723—781.
126. Presia H. J. Asymptotische Entwicklungen für eine Klasse von Laplace-Integralen. — «Wiss. Z. Hochsch. f. Elektrotechn. Ilmenau», 1962, Bd. 8, Nr. 3, S. 177—187.
127. Riedel R. Asymptotische Darstellungen von Parameterintegralen mit Exponenten beliebiger Ordnung. — «Wiss. Z. Univ. Halle», 1967, Bd. 16, H. 1, S. 109—123.
128. Riedel R. Eine asymptotische Darstellung von Parameterintegralen. — «Math. Nachr.», 1968, Bd. 36, S. 79—92.
129. Riedel R. Herleitung asymptotischer Darstellungen für Parameterintegrale und Reihen mit Stieltjesintegralen. Habilitationsschrift. Halle/Saale, 1969.
130. Riedel R., Treutler H. Asymptotische Darstellungen von Parameterintegralen mit logarithmischer Singularität. — «Wiss. Z. Univ. Halle», 1975, Bd. 24, H. 1, S. 43—55.
131. Riemann B. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. — In: Gesammelte Werke. Leipzig, 1876, S. 213—253.
132. Robert J. A. Computation of moments of $K_\nu(t)/I_\nu(t)$. — «Math. Comp.», 1965, vol. 19, No. 92, pp. 651—654.
133. Rodriguez Salinas B. Sobre ciertos desarrollos asintoticos de integrales de Laplace curvilinear. — «Rev. mat. hispano-amer.», 1953, vol. 13(4), No. 112, p. 120—127.
134. Rodriguez Salinas B. Un desarrollo asintotico de ciertas transformadas de Laplace. — «Rev. Real acad. ci. Madrid», 1959, vol. 54, p. 167—176.

135. Rodriguez Salinas B. Una formula asintotica para algunas transformadas de Laplace. — «Rev. Real acad. ci. Madrid», 1959, vol. 54, p. 177—187.
136. Rooney P. G. Some remarks on Laplace's method. — «Trans. Roy. Soc. Canada», 1953, vol. 47(3), pp. 29—34.
137. Rosser B. J. Transformations to speed the convergence of series. — «J. Res. Nat. Bur. Stand.», 1951, vol. 46, pp. 56—64.
138. Rosser B. J. Some sufficient conditions for the existence of an asymptotic formula or an asymptotic expansion. On the numerical approximation. Madison, Univ. Wisconsin, 1959, pp. 371—387.
139. Roy E. le. Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle. — «Bull. sci. math.», 1900, t. 24, p. 245—268.
140. Sather D. Asymptotics. III. Stationary phase for two parameters with an application to Bessel functions. — «Pacif. J. Math.», 1962, vol. 12, pp. 1423—1433.
141. Schell H. J. Asymptotische Entwicklungen für Parameterintegrale vom Faltungstyp. — «Wiss. Z. Univ. Halle», 1963, Bd. 12, Nr. 1, S. 21—30.
142. Smith V. G. An asymptotic expansion of $Ji_0(x) = \int_x^{\infty} J_0(t) t^{-1} dt$. — «J. Math. a. Phys.», 1943, vol. 22, pp. 58—62.
143. Soni K., Soni R. P. Asymptotic behaviour of a class of integral transforms. — «SIAM J. Math. Anal.», 1973, vol. 4, No. 3, pp. 466—481.
144. Stieltjes T., Hermite Ch. Correspondence d'Hermite et de Stieltjes, t. 2. Paris, Gauthier-Willars, 1905.
145. Stokes G. G. On the critical values of the sums of periodic functions. — «Trans. Camb. Philos. Soc.», 1849, vol. 8, pp. 533—583.
146. Stokes G. G. On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series. — «Trans. Camb. Philos. Soc.», 1856, vol. 9, pp. 166—187.
147. Strecok A. J. On the calculation of the inverse of the error function. — «Math. Comp.», 1968, vol. 22, No. 101, pp. 144—158.
148. Tricomi F. G. Determinazione del valore asintotico di un certo integrale. — «Rend. Accad. naz. Lincei», 1933, vol. 17(6), p. 116—119.
149. Tricomi F. G. Asymptotische Eigenschaften der unvollständigen Gamma Funktion. — «Math. Z.», 1950, Bd. 53, S. 136—148.
150. Tricomi F. G. A class of non-orthogonal polynomials related to those of Laguerre. — «J. anal. math.», 1951, vol. 1, p. 209—231.
151. Tricomi F. G. Sul comportamento asintotico della funzione gamma incompleta $\Gamma(\alpha, x)$ al simultaneo divergere di α e x . — «Rev. Univ. nac. Tucumán. Ser. A», 1962, vol. 14, p. 333—339.
152. Wagner E. Asymptotische Untersuchungen von Parameterintegralen mit positivem Integranden. I. — «Math. Nachr.», 1962, Bd. 24, Nr. 6, S. 371—383.
153. Wagner E. Asymptotische Untersuchungen von Parameterintegralen mit positivem Integranden. II. — «Wiss. Z. Univ. Halle», 1962, Bd. 11, Nr. 5, S. 553—566.
154. Watanabe Y., Ichijo Y. Zur Laplace'schen asymptotischen Formel. — «J. Gakugei, Tokushima Univ.», 1958, vol. 9, pp. 1—17.
155. Watson G. W. The limits of applicability of the principle of stationary phase. — «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1918, vol. 19, pp. 49—55.
156. Widder D. W. The inversion of the Laplace integral and the related moment problem. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1934, vol. 36, pp. 107—200.
157. Widder D. V. Laplace transform. Princeton, 1941.
158. Willis F. W. A formula for expanding an integral as series. — «Philos. Mag.», 1948, vol. 39(7), pp. 455—460.
159. Wintner A. On the asymptotic formulae of Riemann and Laplace. — «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1934, vol. 20, pp. 57—62.

160. Wintner A. Remarks on the method of stationary phase. — «J. Math. Phys.», 1945, vol. 24, pp. 127—130.
161. Wirtinger W. Über den asymptotischen Wert des Integrals $\int_0^{\infty} x^k \exp(-ex) dx$. — «Monatsh. Math.», 1930, Bd. 37, S. 343—348.
162. Wong R., Wymann M. A generalization of Watson's lemma. — «Can. J. Math.», 1972, vol. 24, No. 2, pp. 185—208.
163. Zanovello R. Sul calcolo numerico di un integrale che interessa d'idraulica. — «Calcolo», 1967, vol. 4, p. 615—624.

К главе V

164. Адамов А. Об асимптотическом выражении полиномов $U_n(x) = e^{-ax^2/2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-ax^2/2}]$ при больших значениях n . — «Изв. С. Петерб. политехн-та», 1906, т. 5, вып. 1/2, с. 127—143.
165. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1971.
166. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952.
167. Евграфов М. А. Аналитические функции. М., «Наука», 1965.
168. Колкунов В. А. и др. К методу перевала. — В кн.: Сборник 2-й летней школы по проблемам элементарных частиц. Ч. 3. Тарту, 1969, с. 85—112.
169. Лобачевский Н. Н. Об исчезании тригонометрических строк. — «Учен. зап. Казанского ун-та», 1834, кн. 2-я.
170. Немыцкий В. В., Слудская М. И., Черкасов А. Н. Курс математического анализа. Т. 2. М., Гостехиздат, 1957.
171. Риекстиня В. Ж. Обобщенные асимптотические разложения для одного контурного интеграла. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1959, т. 28, с. 111—126.
172. Риекстыньш Э. Я. Некоторое обобщение метода перевала. — «Латв. мат. ежегодник», 1976, вып. 19, с. 12—32.
173. Риекстыньш Э. Я., Мурия М. Я. Об асимптотическом представлении неявных функций. — «Латв. мат. ежегодник», 1965, вып. 1, с. 23—36.
174. Цирулис Т. Т. О выборе контура интегрирования для асимптотического разложения интегралов. — «Латв. мат. ежегодник», 1968, вып. 3, с. 347—360.
175. Цирулис Т. Т. О применении метода перевала в некоторых особых случаях. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1968, т. 91, с. 76—87.
176. Airy G. B. On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic. — «Trans. Cambr. Philos. Soc.», 1838, vol. 6, pp. 379—402.
177. Berg L. Operatorenrechnung und Asymptotik. — In: Entwicklung der Mathematik in der DDR. Berlin, 1974, S. 489—502.
178. Bleistein N., Handelsman R. A. A generalization of the method of steepest descent. — «J. Inst. Math. Appl.», 1972, vol. 10, pp. 211—230.
179. Bleistein N., Handelsman R. A. Asymptotic expansions of integrals. New York, Holt—Rinehart—Winston, 1975.
180. Bruijn N. G. de. The difference-differential equation $F'(x) = e^{ax+\beta} (x-1)$. — «Proc. Koninkl. ned. akad. wet. Ser. A», 1953, d. 56, No. 5, blz. 449—464.
181. Cauchy A. L. Mémoire sur diverse points d'analyse. — «Mém. Acad. sci.», 1829, t. 8, p. 101—126.

182. Cauchy A. L. Sur le service que le spirale logarithmique peut rendre à l'astronomie. — «C. r. Acad. sci.», 1854, t. 38, p. 1033—1036.
183. Chak A. M. A generalization of Bessel—Maitland functions. — «Ann. Soc. sci. Bruxelles», 1954, vol. 68(1), No. 3, p. 146—156.
184. Cherry T. M. Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1950, vol. 68, pp. 224—257.
185. Crothers D. S. F. Asymptotic expansions for parabolic cylinder functions of large order and argument. — «J. Phys. Ser. A», 1972, vol. 5, pp. 1680—1688.
186. Debye P. Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für große Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index. — «Math. Ann.», 1909, Bd. 67, S. 535—558.
187. Debye P. Semikonvergente Entwicklungen für die Zylinderfunktionen und ihre Ausdehnung ins Komplexe. — «Münch. Ber.», 1910, Bd. 40, Nr. 5, S. 1—29.
188. Delerue P. Note sur une formule opératoire nouvelle en calcul symbolique. — «C. r. Acad. sci.», 1949, t. 229, p. 1197—1199.
189. Dingle R. B. Asymptotic expansions: their derivation and interpretation. London—New York, Academic Press, 1973.
190. Feraud A. Expression des coefficients du développement de $(1-x)^k \log^p(1-x)$. — «Bordeaux Soc. sci. proc. verbaux», 1896/97, p. 93—97.
191. Graf J. H., Gubler E. Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, Bd. 1. Bern, 1898.
192. Häusler L. Über das asymptotische Verhalten der Taylorkoeffizienten einer gewissen Funktionenklasse. — «Math. Z.», 1930, Bd. 32, S. 115—146.
193. Humbert P. Les fonctions de Bessel du troisième ordre. — «Atti Pontificia Accad. sci.», 1930, vol. 83, p. 128—146.
194. Jeffreys H. Asymptotic solutions of linear differential equations. — «Philos. Mag.», 1942, vol. 33(7), pp. 451—456.
195. Jeffreys H. Asymptotic approximations. Oxford, Clarendon Press, 1962.
196. Kienast A. Über die asymptotische Darstellung gewissen Lösungen der Differenzgleichung der Hermiteschen Polynome. — «Math. Z.», 1936, Bd. 41, S. 739—753.
197. Krätzel E., Menzer H. Verallgemeinerte Hankel Funktionen. — «Publ. math.», 1971, vol. 18, No. 1—4, p. 139—148.
198. Kulshrestha P. K. Asymptotic behaviour of a class of integrals. — «Rend. mat.», 1973, vol. 6, No. 2, p. 361—379.
199. Lew J. S. Asymptotic expansion for small magnetic fields of acoustoelectric attenuation in nondegenerate semiconductors. — «IBM J. Res. Developm.», 1973, vol. 17, No. 3, pp. 270—272.
200. Nicholson J. W. On Bessel functions of equal argument and order. — «Philos. Mag.», 1908, vol. 16(6), pp. 217—279.
201. Nicholson J. W. On the relation of Airy's integral to the Bessel functions. — «Philos. Mag.», 1909, vol. 18(6), pp. 6—17.
202. Nörlund N. Sur les valeurs asymptotiques des nombres et des polynoms de Bernoulli. — «Rend. Circ. mat. Palermo», 1961, vol. 10(2), p. 27—44.
203. Northover P. H. On the method of steepest descents. — «J. Math. Anal. Appl.», 1970, vol. 29, pp. 216—232.
204. Olver F. W. J. Some new asymptotic expansions for Bessel functions of large order. — «Proc. Cambr. Philos. Soc.», 1952, vol. 48, pp. 414—427.
205. Olver F. W. J. Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large order. — «J. Res. Nat. Bur. Stand. Ser. B», 1959, vol. 63, pp. 131—169.

206. Olver F. W. J. Why steepest descents. — «SIAM Rev.», 1970, vol. 12, No. 2, pp. 228—240.
207. Plancherel M., Rotach W. Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite. — «Comm. math. helv.», 1929, vol. 1, p. 227—254.
208. Poincaré H. Sur la diffraction des ondes électriques. — «Proc. Roy. Soc.», 1904, vol. 72, pp. 42—52.
209. Riekstiņš E. Matemātiskās fizikas metodes. Rīga, «Zvaigzne», 1969.
210. Riemann B. Sullo svoglimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinite. — In: Gesammelte Werke. Leipzig, Teubner, 1876, S. 400—406.
211. Romberg W., Skogan E. Varianten der Sattelpunktmethode. — «Phys. norvegica», 1971, vol. 5, No. 3/4, p. 239—241.
212. Schöbe W. Eine an die Nicholsonformel anschließende asymptotische Entwicklung für Zylinderfunktionen. — «Acta math.», 1954, vol. 92, p. 265—307.
213. Schwid N. The asymptotic forms of the Hermite and Weber functions. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1935, vol. 37, pp. 339—362.
214. Stieltjes T. J. Sur les polynomes de Legendre. — «Ann. Fac. sci. Toulouse», 1890, t. 4G, p. 1—17.
215. Tricomi F. Sul comportamento asintotico dell' n -esimo polinomio di Laguerre nell'intorno dell'ascissa $4n$. — «Comm. math. helv.», 1949, vol. 22, p. 150—167.
216. Ursell F. Creeping modes in a shadow. — «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1968, vol. 64, p. 171—191.
217. Ursell F. Integrals with a large parameter: path of descent and conformal mapping. — «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1970, vol. 67, pp. 371—381.
218. Veer S. C. van. Asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktionen bei großem Parameter und großem Argument. — «Math. Ann.», 1927, Bd. 97, S. 696—710.
219. Veer S. C. van. Asymptotische Entwicklung und Nullstellenabschätzung der Hermiteschen Funktionen. — «Math. Ann.», 1931, Bd. 105, S. 408—436.
220. Waerden B. L. van der. On the method of saddle points. — «Appl. Sci. Res. Ser. B», 1950, vol. 2, pp. 33—45.
221. Watson G. N. Bessel functions and Kapteyn series. — «Proc. London Math. Soc.», 1916, vol. 16(2), pp. 150—174.
222. Watson G. N. The harmonic functions associated with the parabolic cylinder. — «Proc. London Math. Soc.», 1910, vol. 8(2), pp. 393—421; 1918, vol. 17(2), pp. 116—148.
223. Watson G. N. An expansion related to Stirling's formula, derived by the method of steepest descents. — «Quart. J. Pure Appl. Math.», 1920, vol. 48, pp. 1—18.
224. Wirtinger W. Zwei Bemerkungen zu Airy's Theorie des Regenbogens. — «Ber. Nat.-med. Ver. Innsbruck», 1897, Bd. 23, S. 7—15.
225. Wittaker F. T. On the functions associated with the parabolic cylinder in harmonic analysis. — «Proc. London Math. Soc.», 1903, vol. 35(1), pp. 417—427.
226. Wright E. M. The coefficients of a certain power series. — «J. London Math. Soc.», 1932, vol. 7, pp. 256—262.
227. Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities. — «J. London Math. Soc.», 1933, vol. 8, pp. 71—79.
228. Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. — «Proc. London Math. Soc.», 1935, vol. 38(2), pp. 257—270.
229. Wright E. M., Yates B. G. Asymptotic expansion of a certain integral. — «Quart. J. Math.», 1950, vol. 1(2), pp. 41—53.

230. Wyma n M. The asymptotic behaviour of the Hermite polynomials. — «Canad. J. Math.», 1963, vol. 15, pp. 332—349.
231. Wyma n M. The method of Laplace. — «Trans. Roy. Soc. Canada», 1964, vol. 2(4), pp. 227—256.

К главе VI

232. Амербаев В. М. Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра. Алма-Ата, «Наука», 1974.
233. Белов М. А. Об F - A -методе численного обращения преобразования Лапласа. — «Латв. мат. ежегодник», 1976, вып. 20, с. 3—14.
234. Белов М. А. Асимптотические методы в приближенном обращении интегрального преобразования Лапласа. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Рига, 1977.
235. Белов М. А., Цирулис Т. Т. Интегральные представления типа Меллина—Барнса для коэффициентов Фурье разложения оригиналов в ряды по ортогональным системам функций. — «Латв. мат. ежегодник», 1976, вып. 20, с. 15—32.
236. Белов М. А., Цирулис Т. Т. Асимптотические методы в приближенном обращении интегрального преобразования Лапласа. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1976, т. 252, с. 77—97.
237. Белов М. А., Цирулис Т. Т. Уточнение квадратурных формул методом асимптотических разложений. — «Латв. мат. ежегодник», 1977, вып. 21, с. 171—186.
238. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению М., Гостехиздат, 1951.
239. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
240. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
241. Жарбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.
242. Егорычев Г. П. Комбинаторные суммы и метод производящих функций. Красноярск, изд. Красноярского ун-та, 1974.
243. Звилович Е. И. Асимптотические разложения некоторых специальных функций, представляемых интегралами типа Коши. — «Доповіді АН УССР. Сер. А», 1951, № 5, с. 399—403.
244. Крылов В. И., Скобля М. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск, «Наука и техника», 1968.
245. Крылов В. И., Скобля М. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., «Наука», 1974.
246. Ларичева Л. С. Интегралы, содержащие функции Бесселя. — «Науч. тр. Новосибирского пед. ин-та», 1971, т. 67, с. 9—12.
247. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1961.
248. Пилатовский В. П. О приближенном вычислении значений функции, заданной лапласовым изображением. — «ДАН», 1952, т. 82, № 2, с. 197—200.
249. Пилатовский В. П. О вычислении функции давления и функции расхода в случае упругой жидкости в пласте. — «Прикл. мат. мех.», 1953, т. 17, с. 179—188.
250. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. — «Прикл. мат. мех.», 1948, т. 12, с. 53—62.
251. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.

252. Риекстиня В. Ж. Об одном обобщении асимптотических разложений. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1958, т. 20, с. 145—152.
253. Риекстиня В. Ж. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов, I. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1964, т. 58, с. 49—71; II — «Латв. мат. ежегодник», 1966, вып. 1, с. 37—70; III — «Латв. мат. ежегодник», 1966, вып. 2, с. 265—281.
254. Риекстиня В. Ж. Асимптотические разложения некоторых интегралов и сумм степенных рядов. — «Латв. мат. ежегодник», 1971, вып. 9, с. 203—220.
255. Риекстиня В. Ж. Асимптотическое разложение обобщенной гипергеометрической функции. — «Латв. мат. ежегодник», 1976, вып. 17, с. 50—64.
256. Риекстыньш Э. Я. О функциях Эрмита и функциях параболического цилиндра. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1956, т. 8, с. 67—72.
257. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения для вещественных корней некоторых трансцендентных уравнений. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1959, т. 28, с. 67—86.
258. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические оценки некоторых типов конечных сумм. — «Латв. мат. ежегодник», 1969, вып. 5, с. 123—132.
259. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические оценки конечных сумм методом неопределенных коэффициентов. — «Латв. мат. ежегодник», 1969, вып. 6, с. 141—149.
260. Риекстыньш Э. Я., Янсон Я. В. Асимптотические разложения интегралов с периодическими ядрами. — «Латв. мат. ежегодник», 1976, вып. 19, с. 33—46.
261. Рябцев И. И. Приближенное вычисление оригинала по значениям изображения в равностоящих точках действительной оси. — «Изв. высш. учеб. заведений. Математика», 1966, № 3, с. 139—143.
262. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М., ИЛ, 1953.
263. Федорюк М. В. Об асимптотике контурных интегралов. — «Усп. мат. наук», 1961, т. 16, вып. 1, с. 171—178.
264. Цирулис Т. Т. Об F -A-методе обращения преобразования Лапласа с помощью полиномов Лежандра. — «Латв. мат. ежегодник», 1976, вып. 19, с. 63—70.
265. Цирулис Т. Т., Белов М. А. Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного обращения преобразования Лапласа. — «Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки», 1973, т. 192, с. 137—154.
266. Цирулис Т. Т., Белов М. А. Обращение преобразования Лапласа методом асимптотического расширения интервала. — В кн.: Теплопроводность и диффузия. Рига, изд. РПИ, 1976, вып. 7, с. 49—60.
267. Шуваев А. К. Численные методы решения некоторых задач массового обслуживания. — В кн.: Вопросы экономически-математического моделирования. М., Изд-во Московского ун-та, 1971, с. 280—294.
268. Юров П. Г. Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях. — «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1967, № 3, с. 67—74.
269. Юров П. Г. О представлении интегралов типа Коши. — «Мат. заметки», 1969, т. 6, № 1, с. 55—63.
270. Abel N. H. L'intégral finie $\Sigma^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale simple. — In: Oeuvres complètes. Christiania, Gröndel, 1881, t. 1, p. 11—27.
271. Abel N. H. Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. — In: Oeuvres complètes. Christiania, Gröndel, 1881, t. 1, p. 28—39.
272. Abramovitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions. Washington, Nat. Bur. Stand., 1964.
273. Avakumović V. Bemerkung über Laplacesche Integrale, deren Wachstum von Exponentialcharakter ist. — «Math. Z.», 1940, Bd. 46, S. 62—69; Bd. 47, S. 141—152.

274. Barnes E. W. The Maclaurin sum-formula. — «Proc. London Math. Soc.», 1905, vol. 3(2), pp. 253—272.
275. Barnes E. W. The asymptotic expansions of integral functions of finite non-zero order. — «Proc. London Math. Soc.», 1905, vol. 3(2), pp. 273—295.
276. Barnes E. W. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor's series. — «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A», 1906, vol. 206, pp. 249—297.
277. Barnes E. W. On certain functions defined by Taylor's series of finite radius of convergence. — «Proc. London Math. Soc.», 1906, vol. 4(2), pp. 284—316.
278. Barnes E. W. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. — «Proc. London Math. Soc.», 1907, vol. 5(2), pp. 59—116.
279. Barnes E. W. On functions defined by simple types of hypergeometric series. — «Trans. Camb. Philos. Soc.», 1908, vol. 20, pp. 253—279.
280. Bellman R. E., Kalaba R. E., Lockett J. Numerical inversion of the Laplace transform. New York, American Elsevier, 1966.
281. Berg L. Über das asymptotische Verhalten der inversen Laplace Transformation. — «Math. Nachr.», 1960, Bd. 22, Nr. 1/2, S. 87—91.
282. Bickford W. B. A note on rational approximations of transcendental functions. — «Z. angew. Math. Phys.», 1966, Bd. 17, Nr. 2, S. 362—365.
283. Braaksma B. L. J. Asymptotic expansions and analytic continuation for a class of Barnes-integrals. — «Comp. math.», 1963, vol. 15, p. 239—343.
284. Burniston E. E., Siewert C. E. Exact analytic solution of the transcendental equation $\alpha \sin \zeta = \zeta$. — «SIAM J. Appl. Math.», 1973, vol. 24, No. 4, pp. 460—466.
285. Cauchy A. A. Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques. — «Mém. Inst.», 1826, t. 6, p. 603—612.
286. Chakravarty P. C. Integrals and sums. London, Athlone Press, 1970.
287. Churchill R. V. The inversion of the Laplace transformation by a direct expansion in series and its application to boundary value problems. — «Math. Z.», 1937, Bd. 42, S. 567—579.
288. Churchill R. V. Additional notes on the inversion of the Laplace transformation. — «Math. Z.», 1938, Bd. 43, S. 743—748.
289. Clausen Th. Über die Fälle, in denen die Reihe $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ein Quadrat von der Form $z = 1 + \frac{\alpha' \beta' \gamma'}{1 \delta' \epsilon'} x + \dots$ hat. — «J. reine, angew. Math.», 1828, Bd. 3, S. 89—92.
290. Colombo S., Lavoire J. Transformations de Laplace et de Mellin. Formulaires. Paris, 1972.
291. Corput J. G. van der. On the coefficients in certain asymptotic factorial expansions. — «Proc. Koninkl. ned. akad. wet. Ser. A», 1957, d. 60, No. 4, blz. 337—351.
292. Corput J. G. van der. The neutralized sum formula of Euler. — «J. Anal. Math.», 1961/62, vol. 9, pp. 205—345.
293. Delerue P. Sur la généralisation de la fonction de Mittag-Leffler. — «Ann. Soc. sci. Bruxelles», 1954, vol. 68(1), No. 1—2, p. 42—52.
294. Dingle R. B. The evaluation of integrals containing a parameter. — «Appl. Sci. Res. Sect. B», 1955, vol. 4, pp. 401—410.
295. Dixon A. L., Ferrar W. L. A class of discontinuous integrals. — «Quart. J. Math.», 1936, vol. 7, pp. 81—96.
296. Doetsch G. Tabellen zur Laplace Transformation und Anleitung zum Gebrauch. Berlin, Springer, 1947.

297. Doetsch G. Teoria degli sviluppi asintotici dal punto di vista delle trasformazioni funzionali. — «Publ. ist. appl. calcolo» (Roma), 1954, vol. 120, p. 3—84.
298. Dubner H., Abate J. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform. — «J. Assoc. Comp. Machinery», 1968, vol. 15, No. 1, pp. 115—123.
299. Duncan C. E. On the asymptotic behaviour of trigonometric sums. — «Proc. Koninkl. ned. akad. wet. Ser. A», 1957, d. 60, blz. 261—264, 369—380.
300. Ford W. B. Studies on divergent series and summability and the asymptotic developments of functions defined by Mac Laurin series. New York, Chelsea, 1963.
301. Fox C. The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions. — «Proc. London Math. Soc.», 1928, vol. 27(2), pp. 389—400.
302. Fox C. The G and H functions as symmetrical Fourier kernels. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1961, vol. 93, No. 3, pp. 395—429.
303. Fry C. G., Hughes H. G. Asymptotic developments of certain integral functions. — «Duke Math. J.», 1942, vol. 9, pp. 791—802.
304. Fujiwara M. Über Abelsche erzeugende Funktion und Darstellbarkeitsbedingungen von Funktionen in Dirichletschen Reihen. — «Tohoku Math. J.», 1920, vol. 17, pp. 363—383.
305. Goldstein S. Some two-dimensional diffusion problems with circular symmetry. — «Proc. London Math. Soc.», 1932, vol. 34(2), pp. 51—88.
306. Gray A., Mathews G. B. A treatise on Bessel functions and their applications to physics. London, Macmillan, 1922.
307. Halvorsen S. Asymptotic evaluation of certain integral involving Hermite polynomials. — «Kgl. norske vid. selskabs forhandl.», 1964, bd. 37, No. 11, s. 53—57.
308. Hamburger H. Über die Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen. — «Math. Z.», 1920, Bd. 6, S. 1—10.
309. Hamburger H. Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ Funktion. — «Math. Z.», 1921, Bd. 10, S. 240—254.
310. Handelsman R. A., Lew J. S. Asymptotic expansions of Laplace convolutions for large argument and tail densities for certain sums of random variables. — «SIAM J. Math. Anal.», 1974, vol. 5, No. 3, pp. 425—451.
311. Hardy G. H. On the zeros of certain classes of integral Taylor series.
- II. On the integral function $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+a)^n n!}$ and other similar functions. — «Proc. London Math. Soc.», 1905, vol. 2(2), pp. 401—431.
312. Heaviside O. Electromagnetic theory, vol. 2. London, Macmillan, 1899.
313. Hirschman J. J. A new representation and inversion theory for the Laplace integral. — «Duke Math. J.», 1948, vol. 15, pp. 473—494.
314. Hull T. E., Froese C. Asymptotic behaviour of the inverse of a Laplace transform. — «Can. J. Math.», 1955, vol. 7, pp. 116—125.
315. Ichikawa S., Kishima A. Applications of Fourier series technique to inverse Laplace transform. — «Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.», 1972, vol. 34, No. 1, pp. 53—67.
316. Izumi S. Eine Bemerkung über asymptotische Entwicklungen von Funktionen. — «Jap. J. Math.», 1927, vol. 4, pp. 141—145.
317. Jensen J. L. W. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. — «C. r. Acad. sci.», 1887, t. 104, p. 1156—1159.
318. Koizumi S. Note on the asymptotic evaluation of operational expressions. — «Philos. Mag.», 1936, vol. 21(7), pp. 265—274.

319. Kronecker L. Summierung der Gauss'schen Reihen $\sum_{h=0}^n e^{i2h^2\pi/n}$ — In: Leopold Kroneckers Werke, Bd. 4. Leipzig, Teubner, 1929, S. 301—305.
320. Liang J. J. I., Todd J. The Stieltjes constants. — «J. Res. Nat. Bur. Stand. Ser. B», 1972, vol. 72, pp. 161—178.
321. Lindelöf E. Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris. Gauthier—Villars, 1905.
322. Lipka S. Über asymptotische Entwicklungen der Mittag—Lefflerschen Funktion $E_\alpha(x)$. — «Acta Szeged», 1927, vol. 3, p. 211—223.
323. Luke Y. L. On the approximate inversion of some Laplace transforms. — In: Proc. 4th US Nat. Congr. Appl. Mech., vol. 1. New York, Amer. Soc. Mech. Eng., 1962, pp. 269—276.
324. Luke Y. L. The special functions and their approximations, vol. 1, 2. New York, Academic Press, 1969.
325. Lyness J. N., Ninham B. W. Numerical quadrature and asymptotic expansions. — «Math. Comp.», 1967, vol. 21, No. 98, pp. 162—178.
326. Macfarlane G. G. The application of Mellin transforms to the summation of slowly convergent series. — «Philos. Mag.», 1949, vol. 40(7), pp. 188—197.
327. Mac Mahon J. On the roots of the Bessel and certain related functions. — «Ann. Math.», 1894/95, vol. 9, pp. 23—30.
328. Mac Namee J. Error bounds for the evaluation of integrals by the Euler—Maclaurin formula and Gauss-type formula. — «Math. Comp.», 1964, vol. 18, No. 87, pp. 368—381.
329. Meijer S. C. Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte. — «Nieuw arch. wisk.», 1936, d. 18(2), blz. 10—39.
330. Meijer S. C. On the G function. — «Proc. Kon. ned. akad. wet. Ser. A.», 1946, d. 49, blz. 227—235, 344—356, 457—469, 632—641, 765—772, 936—943, 1063—1072, 1164—1175.
331. Mellin H. Om definitiva integraler, hvilka för obegränsadt växande värden af vissa heltaliga parametrar hafva till gränser hypergeometrisk funktionen of särskilda ordningen. — «Acta Soc. sci. fenn.», 1895, vol. 20, No. 7, p. 3—39.
332. Mellin H. Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma und der hypergeometrischen Funktionen. — «Math. Ann.», 1910, Bd. 68, S. 305—337.
333. Mellin H. Die Theorie der asymptotischen Reihen vom Standpunkte der Theorie der reziproken Funktionen und Integrale. — «Ann. Acad. sci. fenn. Ser. A.», 1922, vol. 18, No. 4, p. 1—108.
334. Mellin H. Abriß einer allgemeinen und einheitlichen Theorie der asymptotischen Reihen. — 5. Kongr. Skand. Math., Helsingfors, 4.—7. Juli, 1922. Helsingfors, 1923, S. 1—17.
335. Mikusinski J. Sur la fonction dont la transformée de Laplace est e^{-s^α} . — «Bull. Acad. pol. sci.», 1958, vol. 6, No. 11, p. 691—693.
336. Mikusinski J. On the function whose Laplace transform is e^{-s^α} . — «Stud. math.», 1959, vol. 18, p. 191—198.
337. Mittag—Leffler G. M. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. — «C. r. Acad. sci.», 1903, t. 137(2), p. 554—558.
338. Moritz K. Rechnerische Ermittlung der Dämpfung und Verzerrung von Wanderwellen. — «Arch. Elektrotechn.», 1953, Bd. 41, Nr. 3, S. 160—180.
339. Navot J. An extension of the Euler—Maclaurin summation formula for function with a branch singularity. — «J. Math. a. Phys.», 1961, vol. 40, pp. 271—276.
340. Navot J. A further extension of the Euler—Maclaurin summation formula. — «J. Math. a. Phys.», 1962, vol. 41, pp. 155—163.

341. Oberhettinger F., Badii L. Tables of Laplace transform. Berlin, Springer, 1973.
342. Pincherle S. Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. — «Atti Accad. naz. Lincei. Rend.», 1888, vol. 4(4), p. 694—700; 792—800.
343. Pincherle S. Sur les fonctions déterminantes. — «Ann. École norm. sup.», 1905, t. 22(3), p. 1—68.
344. Pinkham R. S. An inversion of the Laplace and Stieltjes transforms utilizing difference operators. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1956, vol. 83, No. 1, pp. 1—18.
345. Plana G. A. Note sur une nouvelle expression analytique des nombres Bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour le sommation des suites. — «Mem. Acad. sci. Torino», 1820, vol. 25, p. 403—418.
346. Pochhammer L. Über die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten. — «J. reine, angew. Math.», 1886, Bd. 102, S. 76—159.
347. Pochhammer L. Über die Differentialgleichung der allgemeineren F -Reihen. — «Math. Ann.», 1891, Bd. 38, S. 586—597.
348. Pollard H. Note on the inversion of the Laplace integral. — «Duke Math. J.», 1940, vol. 6, pp. 420—424.
349. Pollard H. Real inversion formula for Laplace transforms. — «Duke Math. J.», 1940, vol. 7, pp. 445—452.
350. Ragab F. M. The inverse Laplace transform of an exponential function. — «Comm. Pure Appl. Math.», 1958, vol. 11, pp. 115—127.
351. Reudink D. O. J. An extension of the method of Haar for determining the asymptotic behaviour of integrals of the inverse Laplace transform type. Thesis. Doct. diss. Oregon State University, 1965.
352. Riedel R. Asymptotische Darstellungen von Stieltjes-Integralen mit Anwendungen auf Reihen. — «Z. angew. Math. Mech.», 1969, Bd. 49, S. 63—75.
353. Riemann B. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. — In: Gesammelte Werke. Leipzig, Teubner, 1876, S. 136—144.
354. Riney T. D. A finite recursion formula for the coefficients in asymptotic expansions. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1958, vol. 88, No. 1, pp. 214—226.
355. Roberts G. E., Kaufman H. Tables of Laplace transforms. London, 1966.
356. Saksena K. M. Inversion formulae for a generalized Laplace integral. — «Proc. Nat. Inst. Sci. India», 1953, vol. 19, No. 2, pp. 173—181.
357. Spinell R. A. Numerical inversion of Laplace transform. — «SIAM J. Numer. Anal.», 1966, vol. 3, pp. 636—649.
358. Sutton W. G. The asymptotic expansion of a function whose operational equivalent is known. — «J. London Math. Soc.», 1934, vol. 9, pp. 131—137.
359. Tamarin J. D. On Laplace integral equation. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1926, vol. 28, pp. 417—425.
360. Volterra V. Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione. — «Atti Accad. naz. Lincei», 1916, vol. 11(5), p. 167—249.
361. Watson G. N. A class of integral functions, defined by Taylor's series. — «Trans. Camb. Philos. Soc.», 1913, vol. 22, pp. 15—37.
362. Weeks W. T. Numerical inversion of Laplace transform using Laguerre functions. — «J. Assoc. Comp. Machinery», 1966, vol. 13, pp. 419—429.
363. Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. — «J. London Math. Soc.», 1935, vol. 10, pp. 286—293.
364. Wright E. M. The asymptotic expansions of integral functions defined by Taylor series. — «Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1940, vol. 238, pp. 423—451.

365. Wright E. M. A recursion formula for the coefficients in an asymptotic expansion. — «Proc. Glasgow Math. Ass.», 1958, vol. 4, pp. 38—41.
366. Wyman M., Wong R. The asymptotic behaviour of $\mu(z, \beta, \alpha)$. — «Can. J. Math.», 1969, vol. 21. No. 4, pp. 1013—1023.

Дополнительный список

367. Гришин А. Ф. Асимптотические оценки одного класса интегралов. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1973, вып. 18, с. 102—115. (Харьков).
368. Ковалевский М. А. Асимптотическое поведение некоторых целых функций, определенных коэффициентами разложения их в ряд Маклорена. — «Вестн. Ленинградского университета», 1976, № 1, с. 11—15.
369. Кутин В. А. Одна формула для обращения интеграла вероятностей. — «Учен. зап. Пермского госуниверситета. Проблемы нелинейного анализа», 1974, т. 309, с. 99—101.
370. Риекстыньш Э. Я. Деление интеграла пополам при больших значениях параметра. — «Латв. мат. ежегодник», 1977, вып. 21, с. 206—210.
371. Риекстыньш Э. Я. О некоторых применениях рядов Меллина. — «Латв. мат. ежегодник», 1977, вып. 21, с. 211—224.
372. Bender E. A. Asymptotic methods in enumeration. — «SIAM Rev.», 1976, vol. 16, N 4, pp. 485—515.
373. Berg L. Zur approximativen Umkehrung der Laplace Transformation. — «Z. angew. Math. Mech.», 1975, Bd. 55, S. 346—348.
374. Boese G. Eine majorante asymptotische Abschätzung für die unvollständige Gammafunktion. — «Z. angew. Math. Mech.», 1972, Bd. 52, S. 552—553.
375. Buschman R. G. The asymptotic expansion of an integral. — «Rend. mat.», 1974/75, vol. 7, N 3/4, p. 481—486.
376. Cherry T. M. Expansions in terms of parabolic cylinder functions. — «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1949, vol. 8(2), pp. 50—65.
377. Fields J. L. Uniform asymptotic expansions of certain classes of Meijer G-function for a large parameter. — «SIAM J. Math. Anal.», 1973, vol. 4, N 3, pp. 482—507.
378. Glaeske H.-J., Sebastian H.-J. Über eine Verallgemeinerung der Besselfunktion. — «Math. Nachr.», 1975, Bd. 67, S. 41—52.
379. Hamy A. Sur l'approximation de fonction de grande nombres. — «J. math. pures appl.», 1908, vol. 4(6), p. 203—281.
380. Nakhla M. R., Singhal K., Vlach J. Simple method for numerical inversion of the Laplace transform. — Proc. 16th Midwest Symp. Circuit Theory, 1973, vol. 2, XIV 5.1.—5.9.
381. Ostrowski A. M. On asymptotic development of functions of large numbers. — «Rend. mat.», 1975, vol. 8(6), N 2, p. 429—445.
382. Piessens R. A bibliography on numerical inversion of the Laplace transform and applications. — «J. Comp. Appl. Math.», 1975, vol. 1, N 2, pp. 115—128; 1976, vol. 2, N 3, pp. 225—228.
383. Riedel R. Zur Methode der stationären Phase. — «Wiss. Z. Univ. Halle», 1976, Bd. 25, H. 2, S. 17—23.
384. Temme N. M. Uniform asymptotic expansion of the incomplete gamma functions and the incomplete beta function. — «Math. Comp.», 1975, vol. 29, N 132, pp. 1109—1114.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля асимптотика неявная 341, 346, 374
— преобразование 423
Абеля—Плана формула 430, 441
Амплитуда 76
— левая 77
— правая 77
Асимптотика неявная Абеля 341, 346, 374
— Таубера 341
Асимптотическая составляющая 11
Асимптотический вклад 11, 12, 162, 219
— — полный 11
— — существенный 11, 219
— вычет 11, 162, 219
Асимптотическое разложение
— — немое 11
— — поглощенное 11, 162
— — пустое 11, 162
— — составное 11, 162
— —, существенная часть 11
- Бесселя функция $J_\nu(z)$ 50, 55, 63, 67, 69, 105, 208, 238, 268, 291, 294, 295, 332, 347, 382
Бесселя—Райта функция $I_\rho^*(z)$ 282, 297, 321, 328
Бромвича интеграл 309
— теорема 39
Буркхарда метод 17, 29
Ватсона обобщенная лемма 183
Вебера—Шафхейтлина интеграл 384
Вектор единичный 377
— единичного сдвига 377
Возвышенность 169
- Гауса формула двойственности 435
Главная часть показателя степени 273
Гора 169, 220
- Градиентная линия (ГЛ) 231, 242, 296
— — входит в точку 232
— — выходит из точки 232
— —, особые точки семейства 231
- Деформирование контура 166, 437
Диксона—Феррара интеграл 375, 383
Дирихле ряд 373
Долина 169, 220
— основная 177, 198
Доминирующая группа членов 245
- Жордана лемма 310
— теорема 39
- Изображение 309
Интеграл Бромвича 309
— Вебера—Шафхейтлина 384
— Диксона—Феррара 375, 383
— Лапласа 120, 164, 380
— Меллина—Барнса 357, 362, 439
— типа Коши 395
— — Лапласа 13
— — Меллина—Барнса 351, 359
— Факсена 164, 280, 297, 378
— Фурье 35, 161, 188, 190, 213
— Харди 136, 156, 164
— Эйри 204, 295
Интеграл крайний 112
— — левый 92
— — правый 89
— левый 92
— основной 112
— — левый 77, 92
— — правый 76
— правый 76
— сингулярный 163
— типа свертки 346, 438
— фильтрующий 163
- Карта 167, 205, 220
— основная 205

- Равнина** 220, 229
Радиус влияния 71, 87, 245
 — — внешний 71
 — — внутренний 71
 — — длинный 72
 — — конечный 72
 — — короткий 72
 — — левый 71
 — — m -го приближения 73
 — — правый 71
Риделя модификация 78
Римана—Лебега лемма 160
Римана лемма 160
Римана—Меллина формула 308
- Седло** 232, 235
 — -узел 232, 235
Седловые точки 167, 243
 — — расщепленные 273
Секторы основные (ОС) 169
Сепаратор 220, 222
Сепаратриса 232
Сокращенное уравнение 418
Стилтьеса преобразование 375
 — типа ядро 50, 216
Стирлинга формула, модифицированная 360
Стокса линии 187, 221, 222
 — метод 420
- Точка перевала** 167
 — —, кратность 168
 — — простая 168
Трикоми полиномы 143
- Узел** 232
 — дикритический 232, 234
Уиттекера формула 261
Условие некратности 364
 — основное 113
 — преобразуемости ряда 342
 — разложения 120
 — сепарации 358
 — шкалы 111
Ущелье 221
- Фабера теорема** 256, 296
Факсена интеграл $F_\gamma(y, z)$ 164, 280, 297, 378
Факториал левый $!z$ 142
Фокса H -функция 359, 384
Фокус 233, 234
- Функция Бесселя $J_\nu(z)$** — см. Бесселя функция
 — Бесселя—Райта $I_{\beta^*}(z)$ 282, 297, 321, 378
 — B обобщенная 147
 — Вольтерра $v(z, \alpha)$ 339, 345, 438
 — Γ , неполная $\Gamma(\alpha, z)$ 95, 99, 165, 344
 — гипербесселева 297
 — гипергеометрическая ${}_pF_q$ 228, 240, 375, 440
 — дзета $\zeta(z, \alpha)$ 372, 424, 425, 433
 — Мейера $G_{pq}^{mi}(z)$ 358, 376, 386
 — Миттага—Лефлера $E_\rho(z)$ 343, 344, 438
 — Никольсона $Ni_\lambda(z)$ 248
 — Работнова $\mathcal{E}_\alpha(\beta, z)$ 344
 — — Скорера $Hi(z)$ 248,
 — — Фокса $H_o(z)$ 359, 384,
 — Харди $Hd_\lambda(z, \alpha)$ 136, 156, 164, 247, 296
 — Харди—Барнса $G_\beta(z, \alpha)$ 342, 384, 416, 438
 — Эйри $Ai_\nu(z)$ 204, 225, 292, 295
 — Эрмита $H_\nu(z)$ 144, 157, 260, 294, 296, 326, 328
Фурье интеграл 35, 161, 188, 190, 213
 — преобразование 188
- Хара метод** 311
Харди интеграл 136, 156, 164
 — функция $Hd_\lambda(z, \alpha)$ 136, 156, 164, 247, 296
Холм 169
- Шкала сильно неравномерная** 120, 304
 —, условие 111
Шуберта признак 90, 93, 103, 115
- Эйлера—Маклорена формула** 430, 432, 441
Эйри интеграл 204, 295
 — — обобщенный 204
 — функция $Ai_\nu(z)$ 204, 225, 292, 295
Эрмита функция $H_\nu(z)$ 144, 157, 260, 294, 296, 326, 328
Эскиз 236
- Ядро размытое** 12
 — типа Стилтьеса 50, 216

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава IV. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	
§ 16. Методы Лапласа и стационарной фазы и их модификации	7
16.1. Критические точки и асимптотические вычеты	7
16.2. Метод Лапласа	13
16.3. Интегралы Фурье и метод стационарной фазы	35
16.4. Интегралы с более общими ядрами	47
§ 17. Асимптотические оценки интегралов с положительными ядрами	70
17.1. Область и радиус влияния	70
17.2. Асимптотические представления основных интегралов	75
17.3. Оценки для радиусов влияния	87
17.4. Примеры	94
17.5. Интегралы с осциллирующими ядрами	102
§ 18. Асимптотические разложения интегралов с положительными ядрами	109
18.1. Основные теоремы	109
18.2. Преобразование Лапласа	120
18.3. Модифицированный интеграл Лапласа	136
18.4. Преобразование Меллина	141
18.5. Некоторые другие типы интегралов	147
18.6. Библиографические сведения	159
Глава V. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ И ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОНТУРА В СЛУЧАЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОДЫНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	
§ 19. Метод перевала	166
19.1. Точки перевала и линии спуска	166
19.2. Основные теоремы	172
19.3. Интегралы вдоль линий уровня. Интегралы Фурье	186
19.4. Модификации и дополнения к методу перевала	194
19.5. Примеры	197
§ 20. Интегралы с более общим ядром	218
20.1. Применение карты для $ K(rw) $	218
20.2. Примеры	225
20.3. Градиентные линии и их свойства	231
20.4. Деформирование пути по градиентным линиям	235

§ 21. Случаи, когда расположение критической точки зависит от параметра	243
21.1. Вспомогательные теоремы	243
21.2. Разложение интеграла в окрестности критической точки	251
21.3. Примеры к теоремам 21.3 и 21.4	260
21.4. Расщепление критической точки	272
21.5. Примеры расщепления критической точки	279
21.6. Случаи более общих ядер	289
21.7. Библиографические сведения	293

Глава VI. ПРИМЕНЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНТУРА С УЧЕТОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

§ 22. Разложения интегралов типа обращения преобразования Лапласа	298
22.1. Общие теоремы	298
22.2. Обращение преобразования Лапласа и метод Хара	308
22.3. Случаи алгебраических и логарифмических особенностей	315
22.4. Случаи существенно особых точек и трансцендентных точек ветвления	320
22.5. Разложение при $t \rightarrow +0$ и по другим функциям	323
22.6. Методы обращения преобразования Лапласа	333
22.7. Примеры	338
22.8. Асимптотическое разложение интеграла свертки. Ряды Меллина	346
§ 23. Интегралы типа Меллина—Барнса	351
23.1. Интеграл обращения преобразования Меллина	351
23.2. Интегралы Меллина—Барнса	357
23.3. Асимптотические разложения интегралов Меллина—Барнса	362
23.4. Метод Меллина—Барнса. Примеры	371
23.5. Интегралы по вертикальной прямой с другими ядрами	388
§ 24. Некоторые дополнения и применения	396
24.1. Критические точки в бесконечности	396
24.2. Путь интегрирования пересекает гору. Точка перевала на разрезе	401
24.3. Замена подынтегрального множителя интегралом	409
24.4. Включение пути интегрирования в более общий контур	415
24.5. Асимптотика решений уравнений	417
24.6. Асимптотика конечных сумм	422
24.7. Библиографические сведения	436
Список литературы	442
Предметный указатель	459

ЭДУАРД ЯНОВИЧ РИЕКСТЫНЬШ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
РАЗЛОЖЕНИЯ
ИНТЕГРАЛОВ

ТОМ 2

ИБ № 126

Редактор *А. Тихомирова*. Художник *Г. Сафронов*.
Художественный редактор *Г. Крутой*. Технический
редактор *М. Андерсоне*. Корректор *Н. Лебедева*.

Сдано в набор 30 июля 1976 г. Подписано к печати 7 сентября 1977 г. Бумага типогр. № 1, формат 60×90/16. 29 физ. печ. л.; 29 усл. печ. л.; 26,18 уч.-изд. л. Тираж 1700 экз. ЯТ 04230. Цена 2 р. 20 к. Издательство «Зинатне». Рига, ул. Тургенева, 19. Отпечатано в типографии «Циня» Государственного комитета Совета Министров Латвийской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Рига, ул. Блауманя, 38/40.
Заказ № 3191-Д.

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
22	12-я сверху	$\lim_{t \rightarrow +\infty}$	$\lim_{t \rightarrow +0}$
153	7-я сверху	$\beta_3 + \dots + \beta_2 m - m$	$\beta_3 + \dots + \beta_2 m - m$
173	10-я снизу	$Me^c t ^\alpha$	$Me^c t ^\alpha$
305	5-я снизу	L	L_e
317	14-я снизу	$\Phi_{\lambda_j, m_{j1}}$	$\Phi_{\lambda_{j1}, m_{j1}}$
322	13-я снизу	$-c(p-p_0)^{-\mu}$	$-c(p-p_0)^{-\mu}$
360	9-я сверху	формула (23. 17)	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} B_{k+1}(\alpha)}{k(k+1)} z^{-k}$
360	7-я снизу	$\omega=1, B_k = E_k^*, D_{2k} = 0$	$\omega=1, B_k = E_k^*$
360	6-я снизу	$D_{2k-1} = \dots$	$D_k = \frac{1}{k(k+1)} \left[\sum_{j=1}^p \frac{B_{k+1}(a_j)}{\alpha_j^k} - \sum_{j=1}^q \frac{B_{k+1}(b_j)}{\beta_j^k} \right]$
367	10-я снизу	$\int_{\pm 0}^1$	\int_0^1
389	8-я снизу	$(b_j - s) \prod_{j=2}^p$	$(b_j - s) / \prod_{j=2}^p$
449	4-я снизу	$(x-1)$	$F(x-1)$