

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
РАЗЛОЖЕНИЯ
ИНТЕГРАЛОВ

Том 3

РИГА «ЗИНАТНЕ» 1981

517.2
22.16
P 496
УДК 517.15+517.538.6

Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов, т. 3. Рига: Зинатне, 1981. — 370 с.

В третьем томе монографии с помощью методов, приведенных в первых двух томах, исследованы асимптотические представления коэффициентов степенных рядов и рядов Фурье и функций, определяемых функциональными рядами. Рассмотрены также другие методы построения асимптотических разложений интегралов, например применение интегральных преобразований и преобразований рядов, введение множителя сходимости, использование специальных соотношений и формул, в том числе формулы Парсевала для преобразования Меллина. Даны также дополнения к материалу, изложенному в первых двух томах, причем большое внимание уделено асимптотическому разложению интегралов, содержащих функции с логарифмическими особенностями.

Ил. 2, библиогр. 439 назв.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Академии наук Латвийской ССР от 21 июня 1979 года

Предисловие

Книга является завершающим томом монографии «Асимптотические разложения интегралов». Она непосредственно продолжает первые два тома, вышедшие в 1974 и 1977 гг. Для сохранения единства изложения материала и для удобства ссылки на результаты предыдущих томов в данной книге продолжается нумерация глав и параграфов. Однако необходимые для ссылки в 3-м томе литературные источники, упоминавшиеся в 1-м и 2-м томах, приводятся еще раз.

В значительной части третьего тома описывается применение методов, изложенных в первых двух томах. В главе VII анализируются асимптотические оценки коэффициентов разложений в степенных рядах и в рядах Фурье, причем в основном рассматриваются ряды Фурье по ортогональным полиномам. Ни в одной известной нам книге не содержится систематическое изложение данного материала. Чтобы дать читателю более полное представление о применяемых методах, в монографии кратко излагаются также некоторые методы, в которых не используется интегральное представление коэффициентов.

В главе VIII рассмотрено построение асимптотических представлений сумм функциональных рядов с помощью свойств коэффициентов рядов. Вначале исследована асимптотика сумм степенных рядов, затем аналогичными методами — асимптотика сумм функциональных рядов других видов, а также некоторых типов бесконечных произведений. Кроме того, указано несколько классов целых функций, которые можно использовать для исследования асимптотики интегралов, ядро которых — целая функция. В этой главе рассмотрены также некоторые методы, не связанные с интегралами. Приведен обзор

теорем, характеризующих поведение степенных рядов на границе области сходимости.

Как глава VII, так и глава VIII относятся к обширному материалу, и каждая из них могла бы послужить основой отдельной книги. Ввиду ограниченности объема монографии материал этих глав излагается конспективно.

Глава IX посвящена другим методам асимптотического представления интегралов. В ней содержатся также дополнения к первым двум главам. Из рассматриваемых здесь методов следует отметить применение интегральных преобразований, в том числе практически важное применение формулы Парсеваля для преобразования Меллина и введение множителя сходимости. Приведено также использование аппроксимирующего базиса, преобразования рядов и специальных соотношений и формул. В дополнениях большое внимание уделено интегралам с логарифмическими особенностями.

В предисловиях к первым двум томам автор обещал в третьем томе рассмотреть также вопрос о точных оценках остатка в асимптотических разложениях. Однако этот материал настолько обширен, что автор считает целесообразным посвятить ему отдельную книгу.

Следует еще коснуться вопроса о терминологии и символике. В данной монографии в формулах и в тексте не различаются функция и значение функции. В мировой литературе по асимптотике и специальным функциям такое различие соблюдается нечасто. Это связано с тем, что вместо кажущейся ясности такое различие может создать только неясность. Например, не всегда ясно, в каком смысле следует понимать понятия «многочлен», «интеграл», «ряд», «разложение» и т. д. Неясно даже, для чего строится асимптотическое разложение — для функции или же для ее значения.

Трудности появляются и при записи символов функций. Например, функция Бесселя зависит не только от аргумента, но и от индекса, т. е. является функцией двух переменных, поэтому выражение «функция J_ν » не совсем корректно. Однако отбрасывание индекса может привести к путанице. Подобных примеров в теории по асимптотическим разложениям и специальным функциям довольно много.

В статьях, в которых используется новая терминология, нередко в явной или неявной форме проскальзывают старая терминология и символика, так как они более удобны для выражения мысли. Даже книги Бурбаки, в которых введены новая терминология и символика, не свободны от этого недостатка. Так, в [314] соотношения порядка определяются и записываются для функций, но в конкретных случаях пишутся для значений функций. Норма также определяется для функций, но записывается для значений функций. Неоднократно встречается даже выражение «функция $f(x)$ ».

Надо учитывать, что терминология и символика — дело договоренности, поэтому относительно их нельзя сказать: «Это верно, а это неверно». Терминологию и символику следует выбирать так, чтобы практически было удобно их использовать. Кроме того, необходимо учитывать контингент читателей. Настоящая книга предназначена в основном для специалистов, занимающихся прикладной математикой. Автор уверен, что использование старой терминологии и символики в настоящей книге не приведет к недоразумениям.

Автор выражает искреннюю благодарность всем лицам, приславшим отписки своих работ по асимптотическим разложениям, а также М. Брикмане и И. Хенине за техническую помощь при подготовке рукописи к изданию.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЙ

§ 25. АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

25.1. Общая постановка

25.1.1. Во втором томе данной монографии рассматривалось построение асимптотических разложений изображений интегральных преобразований по свойствам оригинала и, наоборот, построение асимптотических разложений оригинала по свойствам изображения с помощью формулы обращения. Подобные две задачи ставятся в случае функционального ряда

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(t), \quad t \in D, \quad (25.1)$$

который можно считать дискретным аналогом интегрального преобразования: при фиксированной системе координатных функций $u_n(t)$ каждой последовательности $\{A_n\}$ из определенного класса сопоставлена соответствующая функция $F(t)$.

1°. По заданным свойствам функции $F(t)$ требуется найти асимптотику коэффициентов A_n при $n \rightarrow \infty$.

2°. По заданным свойствам коэффициентов A_n требуется построить асимптотическое выражение для $F(t)$ при $t \rightarrow t_0 \in \bar{D}$.

Обе эти задачи исследовались ранее соответствующих задач для интегральных преобразований. Поскольку как первая, так и вторая задачи часто приводятся к исследованию асимптотики интегралов, их целесообразно рассмотреть в настоящем томе монографии как важное применение теории, изложенной в первых двух томах нашей работы. Кроме того, решение второй задачи для некоторого класса целых функций одновременно дает новый метод построения асимптотических разложений интегралов (см. § 28).

В данной главе рассмотрим первую задачу. Если функция $F(t)$ в (25.1) задана степенным рядом, к которому приводится

также ряд Лорана, то коэффициенты A_n непосредственно выражаются согласно формуле Коши

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\eta} F(t)t^{-n-1}dt, \quad (25.2)$$

где η меньше радиуса сходимости ряда R . Без ограничения общности можно считать, что либо $R=1$, либо $R=\infty$. Асимптотика интеграла (25.2) в простейших случаях исследуется с помощью общих теорем, приведенных в п. 22.1, причем приходится учитывать особенности, которые функция $F(t)$ имеет на окружности сходимости, или же ее асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$.

Согласно формуле Тейлора функция $F(t)$ определяет все коэффициенты $A_n = F^{(n)}(0)/n!$, однако в явном виде при общем n их можно найти в редких случаях. Зато формула (25.2) часто дает возможность находить асимптотическое представление для A_n . Этому вопросу и посвящен настоящий параграф. Часть авторов подстановкой $t = \eta e^{i\varphi}$ приводят (25.2) к виду

$$A_n = \frac{1}{2\pi\eta^n} \int_{-\pi}^{\pi} F(\eta e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (25.2')$$

При исследовании асимптотики эта формула иногда может оказаться более удобной, чем (25.2).

Общая идея исследования A_n — найти критические точки интеграла (25.2) и деформировать путь интегрирования через эти точки или вокруг них. Таким образом, асимптотическими вкладами оказываются лишь интегралы по некоторой малой окрестности критических точек.

25.1.2. Если (25.1) — ряд Фурье по ортогональным в $[a, b]$ функциям $u_n(t)$ с весом $\rho(t)$, то имеем формулу

$$A_n = N_n^{-2} \int_a^b F(t)\rho(t)u_n(t)dt, \quad (25.3)$$

где $N_n = \sqrt{\int_a^b \rho(t)u_n^2(t)dt}$. В (25.3) параметр часто входит в индекс, что усложняет исследование. Однако в простейших случаях, когда имеем тригонометрический ряд и

$$A_n = (2/l) \int_0^l F(t) \exp(in\pi t/l) dt \quad (25.4)$$

или ряд Фурье—Бесселя и

$$A_n = N_n^{-2} \int_0^a t F(t) J_\nu(\lambda n t) dt, \quad (25.5)$$

можно непосредственно использовать результаты, приведенные в первом томе монографии, а также в § 16. Некоторые типы ортогональных рядов будут рассмотрены в § 26.

25.2. Степенные ряды с конечным радиусом сходимости. Случай простейших особенностей

25.2.1. Из (25.2) при $\eta < 1$ непосредственно следует неравенство

$$|A_n| \leq \max_{|t|=\eta} |F(t)| \eta^{-n},$$

показывающее, что оценку можно снизить, если взять η по возможности большим. Далее подробнее рассмотрены только такие случаи, когда $F(t)$ аналитически продолжима через окружность $|t|=1$ во всех направлениях, за исключением конечного числа изолированных особых точек, лежащих на этой окружности, и следующие особые точки находятся вне окружности $|t|=R_1 > 1$. При рассмотрении методов построения асимптотического представления для A_n без ограничения общности можно считать, что на окружности $|t|=1$ находится только одна особая точка t_0 , $|t_0|=1$, так как в более общем случае применим принцип суперпозиции, т. е. путь интегрирования деформируется так, чтобы были охвачены все особые точки, и складываются разложения интегралов по отдельным контурам.

Следует различать случаи, когда особая точка имеет однозначный или многозначный характер. Пусть t_0 — особая точка однозначного характера (полюс или существенно особая точка). Тогда согласно (22.3) с учетом (22.4) имеем

$$A_n = -\operatorname{res} \{t^{-n-1}F(t); t_0\} + O(R_1^{-n}). \quad (25.6)$$

В случае существенно особой точки асимптотическое разложение для вычета иногда строится методом расщепления критической точки (см. п. 25.3). Если на единичной окружности лежит p полюсов t_1, t_2, \dots, t_p порядка m_1, m_2, \dots, m_p , то согласно (22.4) при $K(t) = t^{-1}$, $z = n+1$ получаем

$$A_n \sim \sum_{j=1}^p (t_j)^{-n-1} P_{m_j-1}(n+1). \quad (25.7)$$

Остаток в (25.6) выражается с помощью интеграла по окружности $|t|=R_1$. Расширив контур интегрирования, асимптотическое представление можно уточнить, причем вид уточнения зависит от характера следующей особой точки. В случае бесконечной последовательности полюсов получаем асимптотическое разложение A_n в виде ряда вычетов. Например, согласно (9.44) и (22.4) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{B_n(z)}{n!} \sim -\frac{(-i)^n}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} [e^{i2k\pi z} + (-1)^n e^{-i2k\pi z}] k^{-n}, \quad (25.8)$$

причем ряд сходится при действительном z и приводит к (9.96) и (9.97). Здесь имеем простые полюсы $t_k = \pm 2k\pi i$, $k \in N_1$.

25.2.2. Если t_0 — точка ветвления, то от окрестности этой точки получаем все асимптотическое разложение. Пусть при $t \rightarrow t_0$

$$F(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^{\lambda_k}, \quad (25.9)$$

где $t-t_0$ рассматривается в разрезанной t -плоскости с разрезом вдоль луча $\arg(t-t_0) = \arg t_0$ и $(t-t_0)^{\lambda_k} = \exp[\lambda_k \ln(t-t_0)]$, где $\ln(t-t_0)$ на фиксированном берегу разреза принимает действительные значения.

Пусть фиксирован верхний берег. Тогда согласно лемме 22.4 по формуле (22.12) при $K(t) = t^{-1}$, $z = n+1$ получаем асимптотическое разложение для A_n . При этом можно учитывать формулу (22.18) и получать разложение по сильно неравномерной шкале или с помощью (22.19) преобразовывать ряд по степенной шкале. О недостатке сильно неравномерной шкалы будет сказано ниже. При использовании (22.12) следует учитывать, что L_e ориентирован в положительном направлении, а в нашем случае при деформировании контура получаем отрицательное направление, поэтому в формулу надо добавить знак «-». В итоге при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} A_n &\sim -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t_0^{-n+\lambda_k} e^{i\pi\lambda_k} \sin \pi\lambda_k \frac{\Gamma(\lambda_k+1)\Gamma(n-\lambda_k)}{\Gamma(n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-t_0)^{-n+\lambda_k} \binom{\lambda_k}{n}. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Если в качестве основного выбрать нижний берег, то $e^{i\pi\lambda_k}$ следует заменить на $e^{-i\pi\lambda_k}$.

Пусть

$$F(t, \Theta) = \prod_{k=1}^m (t - e^{i\alpha_k \Theta})^{\beta_k} H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\Theta) t^n, \quad (25.11)$$

где α_k , β_k и Θ — действительные числа; $|\beta_k| \equiv N$; ветви многозначных функций при фиксированных берегах определяются как выше; $H(t)$ — аналитическая функция в круге $|t| \leq R_1$, $R_1 > 1$. Обозначим $h_k(t, \Theta) = F(t, \Theta) / (t - e^{i\alpha_k \Theta})^{\beta_k}$. В окрестности особой точки $e^{i\alpha_k \Theta}$ имеем разложение

$$F(t, \Theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_k^{(j)}(e^{i\alpha_k \Theta}, \Theta)}{j!} (t - e^{i\alpha_k \Theta})^{\beta_k + j}, \quad (25.12)$$

поэтому согласно (25.10) и принципу суперпозиции получим

$$A_n(\Theta) \sim \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_k^{(j)}(e^{i\alpha_k \Theta}, \Theta)}{j!} (-e^{i\alpha_k \Theta})^{-n + \beta_k + j} \binom{\beta_k + j}{n}. \quad (25.13)$$

С другой стороны, можно использовать тождество $F \equiv$

$$\equiv \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m F \text{ и каждый член суммы разлагать по формуле (25.12)}$$

при соответствующем фиксированном k . Если все полученные ряды сходятся при $t=0$, что достигается при определенных Θ и $R_1 > 2$, то каждый ряд типа (25.12) можно n раз почленно продифференцировать и затем подставить $t=0$. Поскольку

$$A_n(\Theta) = \frac{F^{(n)}(0, \Theta)}{n!}, \text{ то получаем, что } A_n(\Theta) \text{ равен } 1/m \text{ суммы}$$

ряда, стоящего в правой части (25.13). Такой парадокс первым установил Ольвер [75] в случае полиномов Лежандра [см. (25.17)], поэтому назовем его *парадоксом Ольвера*. Независимо от [75] для функции $P_n^{(\lambda)}(\cos \Theta)$ этот парадокс установлен авторами работы [25].

Данный парадокс объясняется свойством сильно неравномерной шкалы, приведенным в п. 18.1.6, 2°: хотя при фиксированном j согласно (12.64) $\binom{\beta_k + j}{n} = \mathcal{O}(n^{-\beta_k - j - 1})$, $n \rightarrow \infty$, можно найти такие $j(n)$, что $\binom{\beta_k + j(n) + 1}{n} \neq \mathcal{O}\left(\binom{\beta_k + j(n)}{n}\right)$. Например, $\binom{n-1/2}{n} = \mathcal{O}(n^{-1/2})$, $\binom{n+1/2}{n} = \mathcal{O}(n^{1/2}) \neq \mathcal{O}(n^{-1/2})$. Причина того явления, что сумма ряда не совпадает с его асимптотической суммой, в этом случае иная, нежели в примере 3.3.2, 10°.

При построении разложения A_n для конкретной функции, выполняя формальные действия, необходимо внимательно

следить за тем, какая ветвь многозначной функции в данном случае рассматривается. Приведем пример — разложение полиномов Лежандра $P_n(\cos \Theta)$, $\Theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, которые определяются производящей функцией

$$F_0(t, \Theta) = (1 - 2t \cos \Theta + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \Theta) t^n. \quad (25.14)$$

Разрезы взяты вдоль лучей $\arg t = \pm \Theta$ и $F_0(0, \Theta) = 1$. Чтобы имело место равенство

$$(1 - 2t \cos \Theta + t^2)^{-1/2} = (t - e^{i\Theta})^{-1/2} (t - e^{-i\Theta})^{-1/2}, \quad (25.15)$$

на луче $\arg t = \Theta$ целесообразно фиксировать верхний берег разреза, а на луче $\arg t = -\Theta$ — нижний берег. Тогда будем иметь равенство

$$(t - e^{\pm i\Theta})^{-1/2} = e^{\mp i(\Theta + \pi)/2} (1 - te^{\mp i\Theta})^{-1/2}, \quad (25.16)$$

где степень в правой части (25.16) при $t=0$ равна $+1$.

Разложение (25.12) строится следующим образом:

$$\begin{aligned} (t - e^{i\Theta})^{-1/2} (t - e^{-i\Theta})^{-1/2} &= (t - e^{-i\Theta})^{-1/2} (t - e^{-i\Theta} + e^{-i\Theta} - e^{i\Theta})^{-1/2} = \\ &= (e^{-i\Theta} - e^{i\Theta})^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (t - e^{-i\Theta})^{k-1/2} (e^{-i\Theta} - e^{i\Theta})^{-k}. \end{aligned}$$

Чтобы выяснить ветвь для $(e^{-i\Theta} - e^{i\Theta})^{-1/2}$, применим (25.16) при $t = e^{-i\Theta}$. Получим $(e^{-i\Theta} - e^{i\Theta})^{-1/2} = e^{-i3\pi/4} / \sqrt{2} \sin \Theta$, поэтому для вклада от точки $e^{-i\Theta}$ согласно примечанию к (25.10) при $\lambda_k = k - 1/2$ будем иметь асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} (2 \sin \Theta)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \binom{k-1/2}{n} (2 \sin \Theta)^{-k} \times \\ \times \exp i[\Theta(n+1/2-k) + \pi(n-k/2-1/4)]. \end{aligned}$$

Построив подобным образом разложение для вклада от $e^{i\Theta}$, после преобразований при $n \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} P_n(\cos \Theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\sin \Theta}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \binom{k-1/2}{n} \times \\ \times (2 \sin \Theta)^{-k} \cos [\Theta(n+1/2-k) + \pi(n-k/2-1/4)]. \quad (25.17) \end{aligned}$$

Ряд сходится при $\Theta \in (\pi/6, 5\pi/6)$, и его сумма согласно парадоксу Ольвера равна $2P_n(\cos \Theta)$. С помощью (22.19) этот ряд можно преобразовать по степенной шкале.

В работе [52] рассмотрен случай, когда в (25.11) $m=3$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=-\alpha_3=1$, $\beta_2=\beta_3$, и дано разложение по степенной шкале. Там же допускается, что $\Theta = \Theta(n)$, и исследуется асим-

птогика $A_n(\Theta)$, если при $n \rightarrow \infty$ все особые точки сливаются в одну.

Имеется модификация метода точек ветвления, предложенная в 1878 г. Дарбу [37]. Для функции $F(t, \Theta)$ ищется последовательность таких функций $F_k(t, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}(\Theta) t^n$, чтобы F_k имели те же особые точки на окружности $|t|=1$, что и F , а функции $F - F_k$ были в круге $|t| \leq 1$ k раз непрерывно дифференцируемы, $k \in N$. Тогда согласно (25.2')

$$A_n(\Theta) - a_{nk}(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(t, \Theta) - F_k(t, \Theta)] e^{-int} dt = o(n^{-k}),$$

причем оценка доказывается k -кратным интегрированием по частям, $k \in N$. Поэтому $a_{nk}(\Theta)$ совпадает с частичной суммой асимптотического разложения для $A_n(\Theta)$. В качестве $F_k(t, \Theta)$ берутся линейные комбинации частичных сумм рядов типа (25.12).

Этот прием, названный *методом Дарбу*, не имеет преимуществ по сравнению с методом, изложенным выше. Некоторые авторы, например работ [46, 52, 90], его тоже называют методом Дарбу. Метод Хара, рассмотренный в п. 22.2, является аналогом метода Дарбу для преобразования Лапласа.

25.2.3. 1°. Рассмотрим случай, когда t_0 — логарифмическая точка ветвления. Если вместо разложения (25.9) при $t \rightarrow t_0$ имеем

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^{\lambda_k} \ln^{m_k} (t-t_0), \quad (25.18)$$

где $\lambda_k \uparrow +\infty$, $\lambda_k \in N$, $m_k \in N$, то для A_n получим разложение по более сложной шкале. Согласно лемме 22.5 и (22.17) следует применить функции

$$\begin{aligned} \Psi_m(n, \lambda, t_0) &= \frac{t_0^{-n}}{n!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k}{d\lambda^k} \Gamma(n-\lambda) \frac{d^{m-k}}{d\lambda^{m-k}} \left[\frac{(t_0 e^{i\pi})^\lambda}{\Gamma(-\lambda)} \right] = \\ &= t_0^{-n} \frac{\Gamma(n-\lambda)}{n!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} b_{km}(\lambda) (\ln n)^k [1 + O(1/\ln n)] \sim \\ &\sim (-\ln n)^m t_0^{-n} (t_0 e^{i\pi})^\lambda \frac{\Gamma(n-\lambda)}{n! \Gamma(-\lambda)} = (-\ln n)^m (-t_0)^{-n+\lambda} \binom{\lambda}{n}, \end{aligned} \quad (25.19)$$

причем используется соотношение

$$\begin{aligned} \Gamma^{(m)}(z+\alpha) &= z^{z+\alpha-1/2} e^{-z} (\ln z)^m \sqrt{2\pi} [1 + O(1/\ln z)] = \\ &= \Gamma(z+\alpha) (\ln z)^m [1 + O(1/\ln z)], \end{aligned} \quad (25.20)$$

которое следует из (23.17). Очевидно, функции $\Psi_{m_k}(n, \lambda_k, t_0)$ образуют шкалу, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$A_n \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Psi_{m_k}(n, \lambda_k, t_0) \sim a_0 \frac{t_0^{-n+\lambda_0} e^{i\pi\lambda}}{\Gamma(-\lambda)} (-\ln n)^{m_0} n^{-\lambda_0-1}. \quad (25.21)$$

Если же $\lambda_k \in N$, то в (25.21) $\Psi_{m_k}(n, \lambda_k, t_0)$ следует заменить на

$$\begin{aligned} \Psi_{m_k}^*(n, \lambda_k, t_0) &= -\frac{t_0^{-n}}{\pi n!} \sum_{j=0}^{m_k} \binom{m_k}{j} \left[\left(\frac{d^j}{d\lambda^j} \sin \pi\lambda \right) \times \right. \\ &\times \left. \frac{d^{m_k-j}}{d\lambda^{m_k-j}} \left((t_0 e^{i\pi})^\lambda \Gamma(\lambda+1) \Gamma(n-\lambda) \right) \right]_{\lambda=\lambda_k} = -\frac{t_0^{-n}}{n!} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \times \\ &\times B_{j, m_k} \Gamma^{(j)}(n-\lambda_k) \sim (-1)^{m_k \lambda_k} m_k! n^{-\lambda_k-1} t_0^{-n+\lambda_k} (\ln n)^{m_k-1}. \end{aligned} \quad (25.22)$$

Разложение, подобное (25.21), получаем и в более общем случае, когда в (25.18) $\ln^{m_k}(t-t_0)$ заменено на $Q_{m_k}[\ln(t-t_0)]$, где $Q_m(u)$ — полином степени m .

2°. Следует рассмотреть еще случай, когда в (25.18) при некотором k $m_k \in N$. При этом $t_0 \neq -1$, так как в противном случае часто точка $t=0$ также являлась бы точкой ветвления, если считать $\ln 1=0$, и функция $F(t)$ не обладала бы разложением в степенной ряд. Имеется возможность выбрать другую ветвь логарифма и считать $\ln 1=2k\pi i$ с фиксированным k . Однако мы этого делать не будем. Без ограничения общности для простоты можно считать, что $m_0 = \mu \in N$, так как в противном случае к разложению первых членов можно применить предыдущие формулы. Поскольку получим разложение по логарифмической шкале, то дальнейшие члены разложения (25.18) излишни, т. е. в формуле (25.2) достаточно $F(t)$ заменить на $a_0(t-t_0)^\lambda \ln^\mu(t-t_0)$, $\lambda = \lambda_0$. С учетом отрицательной ориентации пути интегрирования по формуле (22.29) получаем

$$A_n \sim -a_0 t_0^{-n+\lambda} (n+1)^{-\lambda-1} \ln^\mu(1/(n+1)) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k^* [\ln(n+1)]^{-k}, \quad (25.23)$$

где вычисление коэффициентов b_k^* пояснено в п. 22.1.4, $b_0^* = (1/\pi) e^{i\pi\lambda} \Gamma(\lambda+1) \sin \pi\lambda$. Это разложение справедливо также в случае, когда $\mu \in N$, но тогда целесообразнее применить более точную шкалу (25.19). Если же $\lambda \in N$, то в (25.23) $b_0^* = 0$. При $\lambda \in N, \mu \in N$ получаем (25.22).

3°. Иногда функция $F(t)$ содержит фактор $(1-t)^\lambda$ или же $[t^{-1} \ln(1/(1-t))]^\mu$, где выбраны те ветви многозначных функций, которые действительны при $t \in (0, 1)$. В таких случаях также можно применить прежние результаты при $t_0 = 1$, если учесть, что на верхнем берегу разреза при $t > 1$ $(1-t)^\lambda = e^{-i\pi\lambda} (t-1)^\lambda$ и $\ln^\mu(1/(1-t)) = [\ln 1/(t-1) + i\pi]^\mu$. Из-за последнего множителя вычисление коэффициентов разложения по формуле (25.23) весьма затруднительно, поэтому целесообразно применить некоторую модификацию, в основе которой лежит формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty}^{(0-)} e^{-t} (e^{-i\pi t})^\lambda \ln^h (e^{-it} t) dt &= \frac{d^h}{d\lambda^h} \left(\frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{d^h}{d\lambda^h} [\Gamma(\lambda+1) \sin \pi\lambda], \end{aligned} \quad (25.24)$$

полученная из (12.30).

Тогда, аналогично тому как в п. 22.1.4, 2°, т. е. подстановкой $t = e^\tau$, заменой $1 - e^\tau$ на $(-\tau)$ и подстановкой $\tau(n+\mu) = u$, получаем разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_e} t^{-(n+1)} (1-t)^\lambda [t^{-1} \ln(1/(1-t))]^\mu dt &\sim (n+\mu)^{-\lambda-1} \times \\ &\times \ln^\mu(n+\mu) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\mu}{k} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \right) [\ln(n+\mu)]^{-k}, \end{aligned} \quad (25.25)$$

где C_e — перерезанная окружность с центром в $t=1$. При $\lambda \in N$ приходится применять последнее равенство из (25.24). Легко доказать, что в (25.25) $n+\mu$ можно заменить на n , так как разность любых фиксированных частичных сумм этих двух разложений имеет оценку $n^{-\lambda-1} \ln^\mu n = O(1/n)$. В частности, из формулы (20.28)

$$(1-t)^{\lambda-1} (t^{-1} \ln 1/(1-t))^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n^{(n+\mu+1)}(\lambda) t^n \quad (25.26)$$

и (25.25) следует, что

$$B_n^{(n+\mu+1)}(\lambda) \sim \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\lambda)} n! n^{-\lambda} \ln^\mu n \quad \text{при } \lambda \in N_1; \quad (25.26')$$

$$B_n^{(n+\mu+1)}(m) \sim (-1)^{n+m+1} \mu \Gamma(m) n! n^{-m} \ln^{\mu-1} n \quad \text{при } m \in N_1. \quad (25.26'')$$

Отметим, что при $\lambda=1$, $\mu=-1$ коэффициенты в (25.26) называются *числами Лапласа* и обозначаются через $-L_n$. Поскольку $t/\ln(1/(1-t)) = \int_0^1 (1-t)^x dx$, то $L_n = (-1)^{n-1} \int_0^1 \binom{x}{n} dx$ [54] и из (25.26'') следует асимптотика для этого интеграла, которую трудно найти непосредственно.

4°. Полученные асимптотические представления приводят к следующему заключению. Если на окружности $|t|=1$ функция $F(t)$ в качестве особых точек имеет только полюсы и алгебраически-логарифмические точки ветвления в конечном счете, то можно найти такие постоянные c_k , ρ , σ , m и ω_k , $|\omega_k|=1$, что при $n \rightarrow \infty$

$$A_n \sim n^\rho (\ln n)^\sigma \sum_{k=1}^m c_k \omega_k^{-n}. \quad (25.27)$$

5°. Отметим еще следующий результат тауберова типа [59]: если $F(t) \sim C(1-t)^{-\rho} L(1/(1-t))$ при $t \rightarrow 1-0$, $L(t) \in \mathcal{L}$, $\rho > 0$, $A_n \geq 0$ и A_n монотонно убывает, то

$$A_n \sim C n^{\rho-1} L(n) / \Gamma(\rho).$$

Более подробно эта теорема будет рассмотрена в п. 27.3.2. Ее частный случай, когда $L(t)$ — произведение логарифмов разных порядков, приведен в [48].

25.3. Степенные ряды с конечным радиусом сходимости. Случай трансцендентных точек ветвления

25.3.1. Сначала рассмотрим случай, когда

$$F(t) = (1-t)^\lambda \exp [c/(1-t)^\nu] h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n, \quad (25.28)$$

где $c = \rho e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, $\nu > 0$, $h(t)$ аналитична в круге $|t| \leq 1 + \eta$, $\eta > 0$. Можно использовать результаты, изложенные в

§ 21. Множитель $\exp [c/(1-t)^v]$ в интеграле (25.2) следует присоединить к t^{-n-1} и образовать новое ядро. После деформирования контура в (25.2) по окружности $|t|=1+\eta$ и по петле вокруг разреза, идущего вдоль $[1, \infty)$, подстановкой $1-t=u$ получаем соотношение

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\eta} u^\lambda \exp [cu^{-v} - (n+1) \ln (1-u)] h(1-u) du + O[(1+\eta)^{-n}], \quad (25.29)$$

где L_η — петля, охватывающая в положительном направлении отрезок $[-\eta, 0]$ разреза, идущего вдоль $(-\infty, 0]$.

Точки перевала можно найти из уравнения

$$vcu^{-v-1} = (n+1)(1-u)^{-1}, \quad \text{или} \quad u^{-v-1} - u^{-v} = (n+1)(vc)^{-1}. \quad (25.30)$$

Если применить примечание 1° к теореме 4.10, то легко доказать, что при обозначении $y_0 = [vc/(n+1)]^{1/(v+1)}$ решение уравнения (25.30) u_0 при $n \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое разложение

$$u_0 \sim \sum_{j=1}^{\infty} B_j y_0^j, \quad B_1 = 1, \quad (25.31)$$

причем $\arg y_0 = \vartheta/(v+1)$. Другие корни уравнения (25.30) находим по (25.31) при $\arg y_0 = (\vartheta + 2k\pi)/(v+1)$. Получаем интеграл типа (21.80), где $\gamma = v$, $\alpha = 1$. Согласно общей теории критическая точка u_0 заменима на y_0 , если $v \leq 1$. Затем можно применить п. 21.4. Целесообразнее построить разложение по шкале, содержащей функции Бесселя—Райта. Имеются две разные модификации.

1°. После деформирования контура, аналогично тому как было сделано выше, применим подстановку $t = e^{-u}$. Получим

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\eta_0}} \exp [nu + cu^{-v}] \exp [c(1/(1-e^{-u})^v - u^{-v})] (1-e^{-u})^\lambda \times h(e^{-u}) du + O[(1+\eta)^{-n}], \quad (25.32)$$

где $\eta_0 = \ln(1+\eta)$. Используем разложения

$$(1-e^{-u})^\lambda = u^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k^{(-\lambda)}}{k!} u^k, \quad h(e^{-u}) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k u^k, \quad (25.33)$$

$$\exp [c(1/(1-e^{-u})^v - u^{-v})] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k u^k,$$

где $\mu_k = p - qv$, $p \geq q$, $p \in N_1$, $q \in N_1$; $\mu_k = k$ при $v=1$. После перемножения последних трех рядов получим разложение

$$u^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^{\mu_k}, \quad a_0 = h(1), \quad \mu_0 = 0.$$

Поскольку согласно § 21 и (8.8)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\eta_0}} \exp[nu + cu^{-v}] u^{\lambda + \mu_k} du &= n^{-\lambda - \mu_k - 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{n\eta_0}} \exp[\tau + cn^v \tau^{-v}] \times \\ &\times \tau^{\lambda + \mu_k} d\tau = n^{-\lambda - \mu_k - 1} I_{-\lambda - \mu_k - 1}^v(cn^v) + O(e^{-n\eta_0 n^{-1}}) = \\ &= O\left(n^{-\frac{\lambda + \mu_k + 1/2}{1+v} - 1/2} \exp[(cn^v)^{1/(v+1)}(1 + 1/v)]\right), \end{aligned} \quad (25.34)$$

то отдельные члены при полученном интегрировании образуют шкалу. Оценка остатка получается, как в п. 22.4.2, и имеет требуемый порядок. Поэтому при $n \rightarrow \infty$ справедливо разложение

$$A_n \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k n^{-\lambda - \mu_k - 1} I_{-\lambda - \mu_k - 1}^v(cn^v). \quad (25.35)$$

При $|\arg c| < \pi$ можно применить (21.107), а при $\arg c = \pi$ — (21.109) и в (25.35) перегруппировать члены по степенной шкале.

Если подстановку $t = e^{-u}$ применить непосредственно в (25.2), то задача приводится к асимптотическому разложению интеграла обращения преобразования Лапласа:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ln(1/\eta) - i\infty}^{\ln(1/\eta) + i\infty} F(e^{-u}) e^{nu} du, \quad (25.36)$$

причем разрез вдоль $[1, \infty)$ перейдет в разрез вдоль $(-\infty, 0]$. Далее можно применить результаты § 22. Формальную попытку применить соотношение (25.36) можно найти в [65].

2°. Преобразуем (25.29) в виде

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_L u^\lambda \exp[cu^{-v} + u(n+1)] H(n+1, u) h(1-u) du + \\ &+ O((1+\eta)^{-n}), \end{aligned}$$

где

$$H(n+1, u) = \exp(n+1) [-\ln(1-u) - u] = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(\omega) u^k,$$

$B_k(\omega)$ определяется по (19.30) при $D_k = 1/(k+1)$, $\omega = u(n+1)$.
 $H(n+1, u)h(1-u) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\omega) u^k$, $Q_k(\omega) = \sum_{j=0}^k q_{jk} \omega^j$, $Q_0(\omega) = h(1)$.

После подстановки $u(n+1) = \omega$ получаем

$$\begin{aligned} c_k(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} u^{\lambda+k} \exp[cu^{-\nu} + u(n+1)] Q_k(\omega) du = \\ &= (n+1)^{-\lambda-k-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{n(n+1)}} \exp[c(n+1)^{\nu} \omega^{-\nu} + \omega] Q_k(\omega) \omega^{\lambda+k} d\omega = \\ &= (n+1)^{-\lambda-k-1} \left[\sum_{j=0}^k q_{jk} I^{-\lambda+k+j+1}(c(n+1)^{\nu}) + O(e^{-n\eta n^{-1}}) \right] = \\ &= c_k^*(n) + O(e^{-n\eta n^{-\lambda-k-2}}). \end{aligned} \quad (25.37)$$

Поскольку согласно (21.107) и (21.109)

$$c_k^*(n) = O((n+1)^{-\nu_k}) \exp[(1+1/\nu)(c\nu(n+1)^{\nu})^{1/(\nu+1)}],$$

где $\nu_k = 1/2 + \frac{\lambda+1/2}{\nu+1} + k \frac{1-\nu}{\nu+1}$, то при $\nu \in (0, 1)$ функции $c_k^*(n)$ и $c_k(n)$ образуют шкалы. Оценку остатка получаем, как в § 21, поэтому при $\nu \in (0, 1)$

$$A_n \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k^*(n). \quad (25.38)$$

25.3.2. Если же $\nu > 1$, то для u_0 в (25.31) следует брать более точное приближение, чем y_0 , и применять общий метод расщепления критической точки. Но при использовании этого метода ход разложения существенно не изменится, если $\exp[c(1-t)^{-\nu}]$ заменить на более общий множитель

$$\exp \left[c(1-t)^{-\nu} \left(1 + \sum_{j=1}^m d_j (1-t)^{-\nu_j} \right) \right], \quad (25.39)$$

где $0 < \nu_1 < \dots < \nu_m < \nu$. Путь интегрирования в (25.2) в этом случае деформируется, как в п. 25.3.1, а в интеграле по петле

применяются подстановки $1-t=v$, $v=[cv/(n+1)]^{1/(v+1)}u$. Приходим к интегралу типа (21.83), если $\vartheta \neq \pi$, и к (21.84), если $\vartheta = \pi$. В первом случае путь следует деформировать через критическую точку $u_k=1+o(1)$, во втором — через точки $u_k = \exp[\pm i\pi/(v+1)][1+o(1)]$. Для построения асимптотического представления A_n в обоих случаях, введя соответствующие изменения, можно использовать формулу (21.88).

$$\begin{aligned} & \text{Поскольку } \left(\ln \frac{1}{1-t} \right)^\mu = [\ln 1/v]^\mu = \left(\frac{1}{v+1} \ln \frac{n+1}{cv} \right)^\mu \times \\ & \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\mu}{j} \left[\frac{(v+1) \ln u}{\ln((n+1)/cv)} \right]^j, \\ & \ln u = \ln u_k + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} [(u-u_k)/u_k]^{p/p}, \end{aligned}$$

то ход разложения существенно не изменится, если $F(t)$ содержит дополнительный множитель $[u^{-1} \ln 1/(1-u)]^\mu$, или $[\ln 1/(1-u)]^\mu$ в случае $\mu \in N_1$. После преобразований коэффициенты разложения являются полиномами от $1/[\ln((n+1)/cv)]$.

Согласно (21.88) при $\vartheta \neq \pi$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} A_n = & \frac{h(1)}{\sqrt{2\pi(v+1)}} (cv)^{\frac{\lambda+1/2}{v+1}} \left(\frac{1}{v+1} \ln[(n+1)/cv] \right)^\mu (n+1)^{-\frac{\lambda+1+v/2}{v+1}} \times \\ & \times \exp \left[\sum_{j=0}^m D_j (n+1)^{\frac{v-\kappa_j}{v+1}} \right] [1+O((n+1)^{-1/(v+1)})], \quad (25.40) \end{aligned}$$

где $\kappa_m \leq v$. Числа κ_j определяются подстановкой асимптотического разложения для критической точки в (25.39) с учетом ранее выполненных подстановок. Таким же путем определяются D_j , $D_0 = (cv)^{1/(v+1)}(1+1/v)$. Если все $v_j \in N_1$, то $\kappa_j = j$. Более подробное доказательство формулы (25.40) при $v \in N_1$, $v_j \in N_1$ несколько иным методом дано в [62], а для общего случая — в [95]. При $\vartheta = \pi$ получается сумма двух выражений, подобных (25.40). Результаты, приведенные в п. 25.3.1, включаются в (25.40), причем при $v=1$ имеем $\kappa_1=1$ и $D_1=c/2$.

Показательную функцию можно заменить на более общую целую функцию $G(z)$, т. е. взять множитель $G(1/(1-t))$, если $G(z)$ в отдельных секторах имеет асимптотические разложения по степенной шкале с экспоненциальными множителями. Тогда при деформировании пути вместо петли целесообразно взять перерезанную окружность радиуса η с центром в точке $t=1$ и выделить ту часть контура, на которой $|G(1/(1-t))|$ наибольший.

Заменяя функцию $G(1/(1-t))$ на этом участке пути на ее асимптотическое разложение, без существенных изменений можно применять результаты § 21. Иной метод для построения асимптотики коэффициентов в этом случае будет рассмотрен в п. 25.5.

25.3.3. Иногда $F(t)$ заменяется приближенным выражением в окрестности $t=1$ исходя из других соображений. В [92] рассмотрено асимптотическое представление коэффициентов $p_n(a)$ в разложении

$$F(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-at^k)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(a)t^n, \quad a \in (0, 1).$$

Все точки единичной окружности для $F(t)$ — особые. Можно показать [92] [см. также (29.104)], что на дуге $|t| = \exp(-1/\sqrt{n/A})$, $|\arg t| \leq \sqrt{A/n}$, $A = \sum_{k=1}^{\infty} a^k/k^2$, при $n \rightarrow \infty$ имеет место разложение

$$F(t) \sim \sqrt{1-a} \exp[A/\ln(1/t)] \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \ln^k(1/t) \sim \exp[A/(1-t)] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^* (1-t)^k. \quad (25.41)$$

Для нахождения асимптотики $p_n(a)$ целесообразно применить первое из этих выражений. Интегралом по остальной части окружности можно пренебречь. Случай $a=1$ подробно рассмотрен в [13]. Данный пример показывает, что первоначальный контур интегрирования не всегда следует расширять. Встречаются такие случаи, когда деформированный контур остается внутри круга сходимости. При выводе формулы (25.41) расширение вне единичного круга невозможно.

При исследовании асимптотики коэффициентов функции $F_m(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-t^k)^{-1}$ на некоторой дуге вблизи $t=1$ используется соотношение [93] $F_m(t) \sim (2\pi)^{-m/2} t^{-j} \sqrt{\ln 1/t} \exp[\Gamma(1+1/m)\zeta(1+(1/m))(\ln 1/t)^{-1/m}]$, где $j=0$ при четном m и $j = (-1)^{(m+1)/2} (2\pi)^{-m-1} \Gamma(m+1)\zeta(m+1)$ при нечетном m . При $m=1$ коэффициенты подобного конечного произведения исследованы в [85]. Асимптотика коэффициентов более общих функций $\prod_{k=1}^{\infty} (1-t^k)^{-\beta_k}$, $\beta_k \geq 0$, исследована в [32, 67] (см. п. 29.5),

а дополнительная литература по этому вопросу указана в [28]. Коэффициенты разложения $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^{\beta(k)}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\beta}(n) t^n$ исследованы в [81].

25.4. Степенные ряды с бесконечным радиусом сходимости

25.4.1. Пусть $F(t)$ — целая функция. В данном пункте можно рассматривать также функции вида $F(t)h(t)$, где $h(t)$ аналитична вне некоторого круга. Тогда $F(t)h(t)$ разлагается в ряд Лорана и можно исследовать асимптотику коэффициентов этого ряда при $n \rightarrow \infty$. Асимптотику при $n \rightarrow -\infty$ можно найти методами, указанными в предыдущих пунктах. Поскольку вне некоторого круга $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}$, а в определяющем секторе $|F(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то присутствие множителя $h(n, t)$ существенного значения не имеет.

Во всех случаях следует выделить ядро $\exp[g_0(n, t)]$, где

$$g_0(n, t) = \ln F(t) - (n+1) \ln t, \quad (25.42)$$

и искать точки перевала, которые определяются из уравнения

$$tF'(t)/F(t) = n+1. \quad (25.43)$$

При этом впредь предполагается, что в рассматриваемой области $F(t) \neq 0$, чтобы ветвь $\ln F(t)$ сохраняла главное значение. Если $F(t) = e^{g(t)}$, где $g(t)$ — целая функция, то (25.43) изменяется на

$$tg'(t) = n+1. \quad (25.43')$$

Корень уравнения (25.43') обозначим через $t_0(n)$. Тогда в силу того, что $|g'(t)| \rightarrow \infty$ только при $t \rightarrow \infty$, рассуждением от противного получаем, что $|t_0(n)| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В отличие от предыдущих пунктов уравнение (25.43), как правило, не решается в явном виде и можно построить только асимптотическое разложение корня, причем часто использование частичной суммы этого разложения приводит к неточному асимптотическому представлению для A_n ; с точностью до множителя $1 + o(1)$ обычно можно задавать лишь $(\ln A_n)/n$.

Появляются и другие затруднения. Во-первых, уравнение (25.43) обычно имеет несколько корней и из них следует выделить доминирующие, что не всегда является легкой задачей. Во-вторых, в случае нескольких доминирующих критических точек карту нарисовать крайне затруднительно. Поэтому возникает вопрос о том, как деформировать путь интегрирования. Следует также учесть, что карта зависит от n . В силу сказанного общую теорию в данном случае можно построить лишь при

многих ограничивающих предположениях. Такая общая теория одновременно относится и к п. 25.3. Некоторый обзор общих результатов по данному пункту будет приведен в п. 25.4.5. Для ознакомления с вышеуказанными осложнениями рассмотрим два примера.

Чтобы применить теорию из § 21, в случае одной доминирующей критической точки можно использовать подстановку $t = t_0(n)u$, которая приводит к интегралу с критической точкой $u = 1$. Получаем

$$A_n = (t_0)^{-n} \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \exp [g(t_0 u) - (n+1) \ln u] h(t_0 u) du. \quad (25.44)$$

Часто применяется подстановка $t = re^{i\varphi}$, приводящая к (25.2'). Эту формулу используем в п. 25.4.5.

25.4.2. Рассмотрим случай, когда $g(t) = t^m/m + \alpha t$, $m \in N_2$, $\alpha \neq 0$. Следует отметить, что более общую функцию $at^m + bt$ подстановкой $t = (1/am)^{1/m} \tau$ можно привести к $g(t)$. Коэффициент A_n имеет явное выражение:

$$A_n = \sum_{k=0}^{[n/m]} \frac{\alpha^{n-mk}}{(n-mk)! m^k k!}. \quad (25.45)$$

Однако из (25.45) трудно найти асимптотическое выражение для A_n .

Вместо подстановки, приводящей к (25.44), целесообразно применить $t = (n+1)^{1/m} u$, так как $(n+1)^{1/m}$ является достаточно хорошим приближением для модуля седловой точки. Получим

$$A_n = (n+1)^{-n/m} \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \exp [g(n, u)] du, \quad (25.46)$$

где

$$g(n, u) = (n+1) (u^m/m - \ln u) + \alpha (n+1)^{1/m} u. \quad (25.47)$$

Затем можно использовать теорему 21.3. Если в качестве главной части взять первый член в (25.47), то будем иметь критические точки $u_k = \exp(i2k\pi/m)$, $\arg u_k \in (-\pi, \pi]$ и $g_1(u_k) = \alpha(n+1)^{1/m}$, $g_2(u_k) = m(n+1)/u_k^2$. Легко проверить, что все условия теоремы 21.3 при $\rho = (n+1)^{-\beta}$, $\beta \in (0, 1/2)$ выполнены, поэтому вклад $I_k(n)$ от точки u_k имеет асимптотическое разложение согласно формулам (21.38) и (21.51). При этом следует учитывать, что $g(n, u)$ в этих формулах надо заменить на $-g(n, u)$. В частности,

$$I_k(n) \sim \frac{u_k}{\sqrt{2\pi m}} (n+1)^{(1/m)-(1/2)} \left(\frac{e}{n+1} \right)^{(n+1)/m} \exp \left[-\frac{i2\pi k}{m} (n+1) + \alpha u_k (n+1)^{1/m} - (1/2m) \alpha^2 u_k^2 (n+1)^{(2/m)-1} \right], \quad (25.48)$$

причем при $m > 2$ последнее слагаемое в экспоненте можно отбросить.

Чтобы выделить доминирующий вклад, надо различать отдельные случаи.

1°. Пусть $\alpha > 0$. Из (25.48) следует, что $k=0$, $u_k=1$ и

$$A_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} (n+1)^{(1/m)-(1/2)} \left(\frac{e}{n+1} \right)^{(n+1)/m} \exp [\alpha (n+1)^{1/m} - (1/2m)\alpha^2 (n+1)^{(2/m)-1}]. \quad (25.49)$$

Если учесть, что, по формуле Стирлинга,

$$[e/(n+1)]^{(n+1)/m} = [(n+1)!]^{-1/m} (2\pi)^{1/2m} (n+1)^{1/2m} [1 + O(1/n)],$$

то

$$A_n \sim \frac{1}{\sqrt{m}(n!)^{1/m}} [2\pi(n+1)]^{(1/2m)-(1/2)} \exp [\alpha (n+1)^{1/m} - (1/2m)\alpha^2 (n+1)^{(2/m)-1}]. \quad (25.49')$$

2°. При $\alpha=0$ все критические точки находятся на одинаковой высоте и правую часть (25.49') следует умножить на m . Имеем совпадение с непосредственно получаемым при $n \equiv 0 \pmod{m}$ выражением

$$A_n = \frac{1}{(n/m)! m^{n/m}} = \frac{\sqrt{m}}{(n!)^{1/m}} [2\pi(n+1)]^{(1/2m)-(1/2)} [1 + O(1/n)].$$

3°. Пусть $\alpha = \alpha_0 e^{i\psi}$, $\alpha_0 > 0$, $\psi \in [-\pi, \pi]$. В этом случае следует выбрать такое k , чтобы $\cos(2k\pi/m + \psi) = \cos \beta$ было наибольшим. Тогда $A_n \sim I_k(n)$. При $\psi = -\pi(2k-1)/m$ заменой k на $k-1$ получаем $\cos(-\beta)$, поэтому $A_n \sim I_k(n) + I_{k-1}(n)$.

4°. Пусть $\alpha < 0$. При $m=2p$, $p \in \mathbb{N}_1$, в (25.48) следует взять $k=p$. Получим (25.49), где к правой части добавлен множитель $(-1)^n$, а α заменено на $|\alpha|$. Это следует также из (25.45). При $m=2p+1$ согласно п. 3° имеем $A_n \sim I_p(n) + I_{p+1}(n)$.

5°. При исследовании общего случая, когда $g(t) = P_m(t)$, причем без ограничения общности в $P_m(t)$ можно брать старший коэффициент равным $1/m$, получаем сходные асимптотические представления. Усложнения появляются в связи с тем, что часто равенство $u_k = \exp(i2k\pi/m)$ недостаточно точно определяет критические точки и условие (21.5) теоремы 21.3 не удовлетворяется. Следовательно, требуется более точно решить уравнение $uP'_m(u) = n+1$ и критическую точку u_k^* брать в виде $u_k^* = u_k [1 + \sum_{j=1}^q b_j (n+1)^{-j/m}]$, причем выражения для b_j с возрастанием j быстро усложняются. Число q определяется так, чтобы u_k^* было достаточно точным.

В результате усложнится также асимптотическое выражение для A_n и в (25.48) вместо последнего множителя будем иметь $\exp \left[\sum_{j=1}^m c_j (n+1)^{1-(j/m)} \right]$. В качестве пути интегрирования можно оставить единичную окружность с некоторыми малыми изгибами вокруг точек u_k^* .

Усложняется также исследование вопроса о том, какие из критических точек являются доминирующими. Пусть член, следующий за старшим членом в $P_m(t)$, имеет вид αt^{m-p} , $\alpha = \alpha_0 e^{i\psi}$. Тогда $b_j = 0$ и $c_j = 0$ при $j < p$, $b_p = -\alpha(m-p)/m$, $c_p = \alpha(u_k^*)^p$. Главные критические точки получаются при тех k , при которых $\cos(\psi - 2k\pi/m)$ имеет наибольшее значение. Таких точек может быть несколько. Из них еще следует выделить доминирующие с учетом дальнейших коэффициентов c_j . Некоторые общие соображения по этому вопросу в случае действительных коэффициентов высказаны в [71]. Там же приведен полином $t^{90} + t^{30} - t^{24} + t^{15} - t^{10}$, когда доминирующими являются четыре критические точки $t = e^{\pm i2\pi/15}$, $t = e^{\pm i8\pi/15}$. Если все коэффициенты у $P_n(t)$ неотрицательны и общий наибольший делитель экспонент степеней, имеющих ненулевые коэффициенты, равен 1, то получим только одну доминирующую критическую точку при $k=0$.

Ввиду указанных усложнений определение коэффициентов b_j , c_j и асимптотического выражения для A_n целесообразно лишь в конкретных случаях. Пример, в котором c_j найдены с помощью формулы Коши, приведен в [8, 1-е изд.].

25.4.3. В качестве второго примера рассмотрим $F(t) = \exp(\gamma t^m e^{\alpha t})$, $m \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \exp(\gamma t^m e^{\alpha t}) t^{-n-1} dt = \\ &= \alpha^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_1} \exp[\beta u^m e^u - (n+1) \ln u] du, \end{aligned} \quad (25.50)$$

где $\beta = \gamma/\alpha^m$. Допустим в дальнейшем, что α , γ и m выбраны так, чтобы $\beta > 0$. Критические точки определяются из уравнения

$$u^{m+1} e^{u+i2k\pi} (1+m/u) = (n+1)/\beta, \quad |k| \in \mathbb{N}. \quad (25.51)$$

Логарифмируя обе части равенства (25.51), получаем

$$(m+1) \ln u + u + \ln(1+m/u) = \ln[(n+1)/\beta] - 2k\pi i = x_k, \quad (25.52)$$

$\ln u > 0$ при $u > 1$. Согласно п. 24.5.3 для решения (25.52) u_k имеем сходящееся при достаточно большом n асимптотическое

разложение

$$u_k = x_k - (m+1) \ln x_k + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(1/\ln x_k) (\ln x_k/x_k)^j =$$

$$= x_k - (m+1) \ln x_k + s_k, \quad (25.53)$$

$$P_1(v) = (m+1)^2 - mv,$$

$$P_2(v) = (m+1)^3/2 - (m+1)(m^2 + 3m + 1)v + m(3m/2 + 1)v^2.$$

Седловых точек бесконечно много. Из (25.51) — (25.53) следует, что $\beta u_k^m e^{u_k} - (n+1) \ln u_k = (n+1) \left[-\ln x_k + \frac{1}{m+1} s_k + \frac{1}{u_k+m} + \frac{1}{m+1} \ln \left(1 + \frac{m}{u_k} \right) \right]$, поэтому основной множитель в (25.50) должен иметь вид $(\alpha/x_k)^{n+1}/\alpha$. Но $\frac{1}{|x_k|^{n+1}} = \left[\frac{1}{\ln((n+1)/\beta)} \right]^{n+1} \left(1 + \frac{4k^2\pi^2}{\ln^2((n+1)/\beta)} \right)^{-n-1}$ и последний множитель стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$ и $k \neq 0$. Поэтому доминирующей седловой точкой является u_0 .

Подстановкой $u = u_0 v$ согласно (25.44) получаем

$$A_n = (\alpha/u_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|v|=1} \exp [g(v, n)] dv, \quad (25.54)$$

где

$$g(v, n) = \beta u_0^m v^m e^{v u_0} - (n+1) \ln v. \quad (25.55)$$

Для интеграла (25.54) седловой точкой является $v=1$. Приближенный эскиз карты при достаточно большом n показан на рис. 1, причем при $m=0$ правая часть ОЛУ не пересекает прямую $\operatorname{Re} v=1$. В [4] показано, что в данном частном случае путь интегрирования можно деформировать по этой прямой.

Для выбора пути интегрирования в общем случае необходимо учитывать равенство $\beta u_0^m e^{u_0} = (n+1)/(m+u_0)$, полученное из (25.51), и соотношение

$$\operatorname{Re} g(v, n) = (n+1) [r^m e^{-u_0(1-r \cos \varphi)} \cos (m\varphi + r u_0 \sin \varphi) - (m+u_0) \ln r] / (m+u_0) = (n+1) [(1+y^2)^{m/2} \cos (m\varphi + u_0 y) - (m+u_0) \ln ((1+y^2)/2)] / (m+u_0), \quad (25.56)$$

$v = re^{i\varphi} = 1 + iy$. Отсюда при достаточно большом n следует:

1) $\operatorname{Re} g(v, n)$ — четная функция от φ ; 2) на отрезке $y \in [0, \pi/(u_0+m)]$ $\operatorname{Re} g(v, n)$ монотонно убывает; 3) имеет место оценка

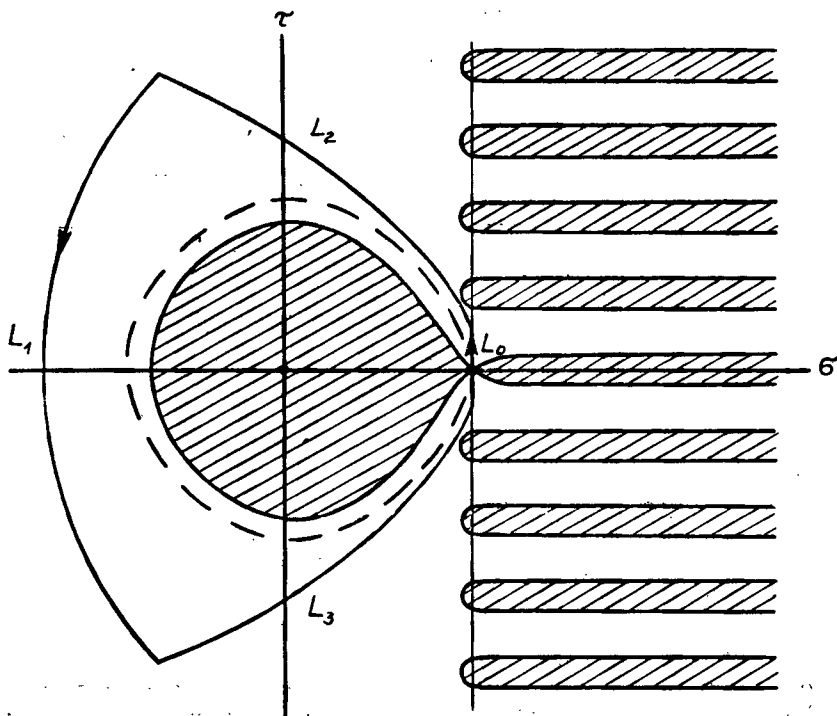


Рис. 1.

$$\operatorname{Re} g(1+i\pi/(u_0+m), n) = -\frac{n+1}{m+u_0} [1+\pi^2/2(m+u_0) + O(1/u_0^2)];$$

4) на дуге окружности L_1 : $\cos \varphi \leq -1/e$, $r=e$ справедливо неравенство $\operatorname{Re} g(v, n) < -(n+1)/2$.

Поэтому в качестве пути интегрирования можно выбрать отрезок L_0 : $v=1+iy$, $|y| \in [0, \pi/(m+u_0)]$, дугу L_1 и некоторые линии спуска L_2 и L_3 , соединяющие концы линий L_0 и L_1 . Из полученных оценок следует, что $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2+L_3} \exp[g(v, n)] dv \right| <$

$< M \exp[-(n+1)/(m+u_0)]$. Интеграл по L_1 можно разложить по теореме 21.3, причем при проверке выполнения условий этой теоремы следует ослабить условие (21.35) и заменить его на (21.58), так как $g_k(1, n)/[k!g_2(1, n)] < Mu_0^{k-2}$, $k \geq 3$, $g_2(1, n) = (n+1) \left(m+u_0 + \frac{u_0}{m+u_0} \right) = (n+1)u^*$.

В итоге согласно (21.38) и (21.50) получим

$$A_n = \left(\frac{\alpha}{u_0} \right)^n \exp \left[(n+1)/(m+u_0) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)u^*}} \times \\ \times [1 + O(\ln n/n)]. \quad (25.57)$$

В (25.57) u_0 нельзя заменить никаким приближением из (25.53), так как в противном случае последний множитель в (25.57) не будет корректным, но $1/\sqrt{u^*}$ можно заменить на $1/\sqrt{\ln(n+1)/\beta} \times [1 + O(\ln \ln n / \ln n)]$. Основной множитель в (25.57) имеет вид $\left(\frac{\alpha \exp [1/(\ln(n+1)/\beta)]}{\ln(n+1)/\beta} \right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n \ln n}}$. В численных расчетах при заданном n с помощью некоторого приближенного метода u_0 следует достаточно точно найти из уравнения (25.52). Для этого, например, можно использовать метод последовательных приближений. Примеры вычислений при $\gamma = \alpha = m = 1$ приведены в [60].

25.4.4. Если $m \in N$, то $F(t)$ не является целой функцией. Однако полученная асимптотика интеграла по L_0 сохраняется при любом действительном m . Поэтому формулу (25.57) можно применить также в случаях, когда $F(t) = e^{g(t)}$, где $g(t)$ — целая функция, имеющая на L_0 асимптотическое представление $\gamma t^{\alpha} e^{at^{\beta}}$, $\mu > 0$, а интегралом по остальной части подходящим образом выбранного контура можно пренебречь. Например, при $g(t) = {}_1F_1(a; c; t)$, $a > 0$, $c > 0$, согласно (10.66) при $t = u_0 v$ имеем $g(t) \sim (\Gamma(c)/\Gamma(a)) e^{t^a - c}$, т. е. $\beta = \gamma = \Gamma(c)/\Gamma(a)$, $\alpha = 1$, $m = a - c$. Если интеграл по остальной части контура оценить согласно (10.66), то можно доказать, что для асимптотики коэффициента A_n применима формула (25.57). Следует только учесть, что для определения u_0 с учетом (10.66) придется решить несколько иное уравнение, чем (25.51), и применить формулу (4.46).

Отметим еще сравнительно простой случай, когда целая функция $F(t)$ в отдельных секторах имеет составное асимптотическое разложение, в котором степенные ряды содержат экспоненциальные множители. Тогда асимптотика интеграла (25.2) исследуется по отдельным секторам, а это приводит к частным случаям, указанным в п. 25.4.2.

25.4.5. Как было отмечено в п. 25.4.1, имеется несколько работ, в которых приводится общая теория оценки коэффициентов рядов Тейлора [55, 61, 63, 97]. В этих работах при соответствующих условиях по существу рассматриваются частные случаи теоремы 21.3.

Ближе всего по условиям и доказательству этой теоремы находится содержание работы [61]. В ней исследован случай, когда имеется только одна существенно критическая точка, ле-

жащая на оси $\arg t=0$. В качестве пути интегрирования берутся вертикальный отрезок L_0 : $t=u_n+iy$, $|y|\leq\delta_n=O(n^{-2/5})$, дуга окружности L_1 : $|t|=u_n$ и горизонтальные отрезки L_2 и L_3 , соединяющие концы предыдущих линий. Однако в этой работе для интегралов по линиям L_1-L_3 в общем случае не даны точные оценки и лишь для интеграла (25.50) при $\alpha=\gamma=m=1$ показано, что требуемые оценки входят в любой остаток асимптотического разложения интеграла по L_0 . С помощью оценок, подобных приведенным в [61], легко показать, что указанный путь интегрирования $\sum_{k=0}^3 L_k$ можно было выбрать и при общем m .

В остальных упомянутых работах используется формула (25.2'). Поскольку в общем коэффициенты A_n могут изменяться нерегулярно, то оценки их можно рассматривать только для специальных классов целых функций. Наиболее простой класс H указан в [63]. При обозначениях

$$a(r)=rF'(r)/F(r), \quad b(r)=ra'(r) \quad (25.58)$$

класс H целых функций определяется следующими условиями. $F(t)\in H$, если:

$$1^\circ. M(r)=\max_{|t|=r} |F(t)|=F(r), \quad r\geq R_0>0.$$

2°. $F(t)\neq 0$ в окрестности критической точки $u_n>0$, определяемой уравнением $a(u_n)=n$ [некоторое видоизменение уравнения (25.43)].

$$3^\circ. b(r)\rightarrow +\infty \text{ при } r\rightarrow\infty.$$

$$4^\circ. \text{ Можно найти такое } \rho(n)>0, \text{ что при } |\varphi|\leq\rho(n), r\geq R_0$$

$$F(re^{i\varphi})=e^{in F(re^{i\varphi})}=F(r)\exp [i\varphi a(r)-1/2\varphi^2 b(r)][1+o(1)], \quad (25.59)$$

где $o(1)$ — равномерная оценка относительно $r\geq R_0$, а при $|\varphi|\in[\rho(n), \pi]$ $F(re^{i\varphi})=o(F(r))/\sqrt{b(r)}$.

Последняя оценка гарантирует, что для $F\in H$ при разбиении интеграла (25.2') по дугам $|\varphi|\leq\rho$, $|\varphi|\in[\rho, \pi]$ основным вкладом является первый интеграл, а второй входит в остаток первого. Поэтому непосредственно из (25.2') и (25.59) следует соотношение

$$A_n\sim\frac{F(u_n)}{u_n^n\sqrt{2\pi b(u_n)}} \quad (25.60)$$

При практическом применении (25.60) целесообразно учитывать, что из $F\in H$, $G\in H$ следует $FG\in H$, $\exp F\in H$, $F+P_m\in H$, $FP_m\in H$, $P_m(F)\in H$, где $P_m(t)=\sum_{k=0}^m b_k t^k$, b_k действительны, $b_m>0$ [63]. К классу H принадлежит функция, рассмотренная

в п. 25.4.3, а $\exp [P_m(t)]$ (см. п. 25.4.2) к данному классу может не принадлежать.

Чтобы получить полное асимптотическое разложение, условия 4° недостаточно. Следует точнее характеризовать поведение функции $F(re^{i\varphi})$ на пути интегрирования $|t|=r$. Для этого проще всего использовать лемму 21.2 и теорему 21.3. Пусть еще дополнительно к условиям 1°—3° функция F обладает следующими свойствами:

5°. $\exp(-\rho^n(n)b(u_n)) = o(b^{-N}(u_n))$ при $n \rightarrow \infty$.

6°. $\ln |F(u_n e^{\pm i\varphi(n)})| \geq \ln |F(u_n e^{i\varphi})|$ при $|\varphi| \in [\rho(n), \pi]$.

7°. Можно найти такие $\eta > 0$, $M > 0$, $\alpha \in [0, 1/2)$, что

$$\left| \eta^k \left[\frac{d^k}{d\varphi^k} \ln F(u_n e^{i\varphi}) \right]_{\varphi=0} \right| \leq M k! [b(u_n)]^{\alpha k}, \quad k > 2, \text{ где } \alpha \text{ выбрано}$$

так, чтобы $b^\alpha(u_n)\rho(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Свойство 5° соответствует (21.8), свойство 6° — (21.11), свойство 7° — (21.58), поэтому согласно лемме 21.2 и теореме 21.3 получаем слабоасимптотическое разложение

$$A_n \sim \frac{F(u_n)}{u_n^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi} b(u_n)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^*(n) [b(u_n)]^{-k} \quad (25.61)$$

относительно шкалы $\{F(u_n)u_n^{-n}[b(u_n)]^{-k-1/2}\}$; $c_k^*(n) = \sum_{j=0}^{2k} (2k+2j-1)!! q_{j,2k}(n)$, а $q_{j,2k}(n)$ определяются по формулам (21.42), (21.45), в которых $Q_k(n, \omega^2) \equiv B_k(n, \omega^2)$. При конкретной функции F часто удается показать, что члены ряда (25.61) образуют асимптотическую шкалу и разложение (25.61) является сильноасимптотическим.

Если $\max |F(t)|$ достигается на луче $\arg t = \varphi_0 \in (-\pi, \pi)$, то подстановкой $t = \tau e^{i\varphi_0}$ исследование об асимптотике A_n можно привести к прежнему случаю. Однако такое свойство не всегда имеет место. Например, в [57] показано, что для функции $F(t) = \exp(\sin t) \exp(e^{t^2})$ имеем $M(r) = \exp(|\sin r|) \exp(e^{r^2})$ и максимум достигается при $\arg t = 0$, если $r \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, и при $\arg t = \pi$, если $r \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$. Более общие случаи, когда имеется несколько существенно критических точек и для максимальных точек $\arg t$ меняется, рассмотрены в работе [97]. Однако приведенные в ней условия для возможности разложения A_n не легко проверяемы. Кроме того, в этой работе не исследованы асимптотические свойства членов полученного ряда.

25.4.6. Имеются случаи, когда нули функции $F(t)$ расположены на том же луче, по которому перемещается критическая точка при возрастающем n , или же находятся весьма близко к

данному лучу. Это обстоятельство вызывает новые затруднения, так как для $\ln F(t)$ имеются точки ветвления. В качестве примера рассмотрим разложение $F(t) = 1/\Gamma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n t^n$. С помощью формулы Стирлинга (9.43) можно установить, что седловая точка для функции $\exp[-\ln \Gamma(t) - (n+1) \ln t]$ находится довольно близко к оси $\arg t = \pi$, где расположены нули функции $F(t)$.

Асимптотическое разложение для A_n находим следующим образом. Применив подстановку $t = |t_0(n)|v$, где $t_0(n)$ будет определено ниже, разобьем путь интегрирования $|v|=1$ на дуги $L_1: |\arg v| \in [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, и $L_2: |\arg v| \in [\varepsilon, \pi]$. На L_2 применим соотношение $F(t) = (1/\pi) \sin \pi t \Gamma(1-t) = (1/2\pi i) \Gamma(1-t) [e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}]$ и после этого сделаем подстановку $v = -u$. Получим

$$\Omega_2(n) = \frac{(-|t_0|)^{-n}}{4\pi^2} \left[\int_{L_2'} \Gamma(1+|t_0|u) e^{i\pi|t_0|u} u^{-n-1} du - \int_{L_2'} \Gamma(1+|t_0|u) e^{-i\pi|t_0|u} u^{-n-1} du \right], \quad (25.62)$$

где L_2' — дуга окружности $|u|=1$, $|\arg u| \in [0, \pi - \varepsilon]$. В каждом интеграле в (25.62) путь интегрирования можно поворачивать так, чтобы критической стала точка $u=1$. Это означает, что $|t_0|$ в первом интеграле следует заменить на t_0^+ , а во втором — на t_0^- . Ниже будет показано, что $|t_0^+| = |t_0^-|$, $|\arg t_0^\pm| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому указанные действия законны. Пути интегрирования обозначим через L_2^+ и L_2^- .

На L_2^\pm к $\ln \Gamma(1+t_0^\pm u)$ можно применять формулу Стирлинга (9.55) и искать точку перевала для функции

$$g^\pm(t_0^\pm, u) = \ln \Gamma(1+t_0^\pm u) \pm i\pi t_0^\pm u - (n+1)u. \quad (25.63)$$

Точки t_0^\pm определяются из уравнения

$$\pm i\pi t_0^\pm + t_0^\pm \psi(1+t_0^\pm) = n+1. \quad (25.64)$$

Отсюда видно, что $t_0^- = (t_0^+)^*$, поэтому $|t_0^-| = |t_0^+|$. С учетом формулы (9.51) решение для (25.64) при обозначении $z = t_0^\pm e^{\pm i\pi}$ приводится к

$$z \ln z - \sigma(z) = (n+1/2) e^{\pm i\pi} = \omega, \quad \sigma(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (B_{2k}/2k) z^{-2k}. \quad (25.65)$$

Для решения уравнения $z \ln z = \omega$ после подстановки $z = e^v$ и логарифмирования можно использовать формулу (24.69). Потенцируя, получаем выражение для z . Методом асимптотических

итераций легко убедиться в том, что и решение уравнения (25.65) имеет то же асимптотическое разложение, т. е. функцией $\sigma(z)$ можно пренебречь. Поэтому при обозначении $n+1/2=v$ имеем

$$t_0^{\pm} \sim v/\ln(v e^{\pm i\pi}) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(1/\ln \ln(v e^{\pm i\pi})) \left(\frac{\ln \ln(v e^{\pm i\pi})}{\ln(v e^{\pm i\pi})} \right)^k \right]. \quad (25.66)$$

Полиномы Q_k можно найти также методом неопределенных коэффициентов. Отсюда при обозначении $t_0^{\pm} = x_0 \pm iy_0$ следуют $x_0 \sim v/\ln v$, $y_0 \sim -\pi v/\ln^2 v$, $\arg t_0^{\pm} = \mp \arctg(\pi/\ln v) \rightarrow 0$, $\operatorname{Re} g(t_0^{\pm}, 1) = v[1 + o(1)]$, $\operatorname{Re} g(t_0^{\pm}, u) = xv + O(v/\ln v)$ при $x = \operatorname{Re} u < 1$.

Последние соотношения показывают, что L_2^+ и L_2^- являются линиями Лапласа и к асимптотическому разложению интегралов в (25.62) можно применить лемму 21.2 и теорему 21.3, так как остальные условия этих теорем удовлетворены. Поскольку с помощью полученных оценок легко показать, что интеграл по L_1 имеет оценку $O(t_0^{-n} \exp[(v/\ln v) - (v/2)])$ и входит в любой остаток разложения для $\Omega_2(n)$, то согласно упомянутым теоремам получаем

$$\begin{aligned} A_n &\sim \frac{(-1)^n}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left[\frac{\Gamma(1+t_0^+) e^{i\pi t_0^+}}{(t_0^+)^n \sqrt{b(t_0^+)}} - \frac{\Gamma(1+t_0^-) e^{-i\pi t_0^-}}{(t_0^-)^n \sqrt{b(t_0^-)}} \right] = \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left[\frac{\Gamma(1+t_0^+) e^{i\pi t_0^+}}{(t_0^+)^n \sqrt{b(t_0^+)}} \right], \end{aligned} \quad (25.67)$$

где $b(t_0) = t_0^2 \psi'(1+t_0) + (n+1) \sim (n+1)$. При замене величины t_0^+ некоторым ее приближением согласно (25.66) формула (25.67) станет некорректной, поскольку все члены в (25.66) стремятся к ∞ .

25.5. Некоторые другие случаи

25.5.1. *Коэффициенты разложения обратных функций.* Более общая формула, чем (25.2), получается при исследовании асимптотики коэффициента (5.80)

$$a_n = \frac{1}{2n\pi i} \int_{|u-u_0|=e} f'(u) g^{-n}(u) du \quad (25.68)$$

ряда Лагранжа—Бюрмана для функции $f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, где функ-

ции $z=g(u)$ и $f(u)$ аналитичны в окрестности точки u_0 , $g(u_0)=0$, $g'(u_0)\neq 0$. Поскольку множитель $f'(u)$ в (25.68) при исследовании асимптотики a_n имеет второстепенное значение, то рассмотрим только случай, когда $f(u)\equiv u$, т. е. разложение обратной функции.

Чтобы в этом случае освободиться от ограничения $g'(u_0)\neq 0$, найдем модифицированную формулу. Пусть при $|t|\leq r_0$

$$F(t) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k t^k = \alpha u^m, \quad t=f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n, \quad \alpha > 0, \quad m > 0. \quad (25.69)$$

Тогда из (25.68) при $g(u)=u$ после подстановки $t=f(u)$, $u=\alpha^{-1/m}(F(t))^{1/m}$ получаем

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\varepsilon} f'(u) u^{-n} du = \frac{\alpha^{n/m}}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon_1} (F(t))^{-n/m} dt. \quad (25.70)$$

При этом фиксирована определенная ветвь функции $(F(t))^{1/m}$.

Построение асимптотических разложений согласно (25.70) отличается от построения, рассмотренного в п. 25.2—25.3, тем, что оно обычно осуществляется методом перевала. При отсутствии седловых точек непосредственно используется формула (25.2). В таком случае требуется найти особые точки неявной функции и изучить ее поведение в их окрестности. Точками, в которых $F'(t)=0$, соответствуют точки ветвления обратной функции. Если во всех остальных точках $F'(t)$ существует и $F'(t)\neq 0$, то функция $F(t)$ локально обратима и указанные точки ветвления являются единственными конечными особыми точками обратной функции.

Рассмотрим примеры с применением обоих методов.

1°. Возьмем уравнение

$$F(t) = t - \beta \sin t = \alpha u^m, \quad \beta > 0. \quad (25.71)$$

Выбор чисел α и m зависит от величины β . Точки перевала определяются из уравнения $\cos t = 1/\beta$. При $\beta > 1$ основными критическими точками будут $t = \pm \arccos(1/\beta)$, при $\beta < 1$ имеем $t = \pm i \ln[(1 + \sqrt{1 - \beta^2})/\beta]$. В этих случаях в (25.71) следует брать $\alpha = \mp 1$, $m = 1$. Исследуем подробнее более интересный случай, когда $\beta = 1$ и имеются двойные седловые точки $t = \pm 2\pi$. В (25.71) берем $\alpha = 1/6$, $m = 3$, и путь интегрирования в (25.70) деформируем через $t = \pm 2\pi$. Для функции $\sqrt[3]{t - \sin t}$ выберем ту ветвь, которая положительна при $t > 0$.

Из принципа аргумента следует, что в полосе $\operatorname{Re} t \in [-2\pi, 2\pi]$ функция $t - \sin t$ имеет корень только при $t = 0$,

а из соотношения

$$|t - \sin t| = \sqrt{(\sigma - \sin \sigma \operatorname{ch} \tau)^2 + (\tau - \cos \sigma \operatorname{sh} \tau)^2}, \quad t = \sigma + i\tau, \quad (25.72)$$

— то, что путь можно далее деформировать в прямые $\operatorname{Re} t = \pm 2\pi$. Поскольку при изменении $\arg t$ от 0 до π $\arg(t - \sin t)$ изменяется на 3π , то интегралы по обеим прямым равны. Следует учесть также, что $F(t)$ — нечетная функция, следовательно, и $t=f(u)$ нечетная, поэтому имеем разложение $t=f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{2n+1}$, $a_0=1$. Таким образом, согласно (25.70)

$$a_n = \frac{2}{(2n+1)6^{(2n+1)/3}} \frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi-i\infty}^{2\pi+i\infty} \exp \left[-\frac{2n+1}{3} \ln(t - \sin t) \right] dt. \quad (25.73)$$

Из (25.72) следует также, что вдоль пути интегрирования по обеим сторонам от точки $t=2\pi$ функция $\operatorname{Re} g(t) = \operatorname{Re} \ln(t - \sin t)$ монотонно убывает, т. е. он состоит из двух линий спуска. Тот факт, что в точке $t=2\pi$ эти линии касаются ОЛУ, не имеет значения.

Разложение интеграла (25.73) получаем по формулам (19.33) и (19.35). Пусть $g(t) = \ln(t - \sin t) = \ln 2\pi + \sum_{k=3}^{\infty} b_k (t-2\pi)^k$, $b_3=1/12\pi$, $b_4=0$, $b_5=-1/360\pi$, $b_6=-1/288\pi^2$. Для вычисления остальных b_k можно построить рекуррентные формулы. Полиномы $Q_k(\omega) \equiv B_k(\omega) = \sum_{j=0}^k q_{jk} \omega^j$ вычисляются по (19.30) при $D_k = -b_{k+3}/b_3$; $B_0=1$, $B_1=0$, $B_2=\omega/30$, $B_3=\omega/24\pi$. Учитывая, что $b_3^{-1/3} = e^{-i2\pi/3} \sqrt[3]{12\pi}$, $l=2$, получаем

$$a_n \sim \frac{1}{3\pi (n+1/2) (12\pi)^{(2n+1)/3}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* (36\pi / (2n+1))^{(k+1)/3} \times \\ \times \sin(2\pi(k+1)/3) = \frac{1}{18^{1/3} \Gamma(2/3) (n+1/2)^{4/3} (12\pi)^{2n/3}} \left[1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3(n+1/2)} + O(n^{-4/3}) \right] = \frac{1}{18^{1/3} \Gamma(2/3) n^{4/3} (12\pi)^{2n/3}} \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{3n} + O(n^{-4/3}) \right], \quad (25.74)$$

$$c_k^* = \sum_{j=0}^k q_{jk} \Gamma((k+1)/3 + j).$$

2°. Рассмотрим уравнение (9.40):

$$t-1-\ln t=u^2, \quad (25.75)$$

которое в окрестности $u=0$ определяет две неявные функции. Фиксируем одну из них $t(u)$ так, чтобы $\sqrt{t-1-\ln t}>0$ при $t>0$; второй функцией будет $t(-u)$. Метод, использованный в п. 1°, неприменим, так как не имеется седловых точек. Как указано в п. 9.2.4, 1° и в начале данного пункта, точки ветвления функции $t(u)$ получаем, если в (25.75) подставим $t=1$ и $\ln 1=\pm 2\pi i$, $m \in N_1$. Они и являются единственными особыми точками при продолжении обратной функции $t(u)=1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k u^k$ вне круга схо-

димости. Более близко к началу находятся точки, для которых $m=1$. При вычислении их по (25.75) необходимо учитывать, что слагаемое $\pm 2\pi i$ означает следующее: на плоскости t выполнен обход вокруг точки $t=0$ и поэтому корень переходит в другую ветвь, т. е. надо корень умножить на $e^{\pm i\pi}$. Поэтому основными точками ветвления являются $u^{\pm}=\sqrt{2\pi}e^{\pm i3\pi/4}$.

В силу сказанного путь интегрирования в (25.2) следует деформировать в перерезанную окружность, радиус которой больше $\sqrt{2\pi}$, и петли L_{η}^{\pm} вокруг разрезов, выходящих из u^{\pm} вдоль лучей $\arg u = \pm 3\pi/4$. Затем применяется формула (25.10). Чтобы получить разложение $t(u)$ в окрестности точек ветвления по натуральным степеням $(u-\sqrt{2\pi}e^{\pm i3\pi/4})^{1/2}$, используем уравнение (25.75), в котором $\ln t$ следует заменить на $\ln t \pm 2\pi i$. Далее применим подстановки $(u-\sqrt{2\pi}e^{\pm i3\pi/4})^{1/2}=v$, $\sqrt{2\pi}e^{\pm i3\pi/4}=a^{\pm}$, $u=v^2+a^{\pm}$ и ищем разложение $t=1+\sum_{k=1}^{\infty} B_k v^k$. Аналогично

тому как в п. 9.2.4, 1°, путем дифференцирования преобразованного уравнения (25.75) составим рекуррентную формулу $B_m =$

$$= \frac{4(B_{m-3} + aB_{m-1})}{B_1(m+1)} - \frac{1}{2B_1} \sum_{j=2}^{m-1} B_j B_{m+1-j}, \quad m \geq 3, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = 2\sqrt{a},$$

$B_2 = 4a/3$, $B_3 = (1+4a^2/9)/B_1$, в которой знаки « \pm » опущены. С помощью формулы (25.10), в которой $\lambda_k = k/2$, и с учетом $\binom{k}{n} = 0$ получаем разложение

$$c_n \sim -(\sqrt{2\pi})^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} D_k (\sqrt{2\pi})^{k+1/2} \binom{k+1/2}{n}, \quad (25.76)$$

$D_k = B_{2k+1}^- \exp[-(i\pi/4)(n-k-1/2)] + B_{2k+1}^+ \exp[(i\pi/4)(n-k-1/2)]$, $D_0 = 4(\sqrt{2\pi})^{1/2} \cos[(n+1)\pi/4]$, $D_1 = -(\sqrt{2\pi})^{-1/2} [\cos(n+1)\pi/4 + (8\pi/9) \cos(n-1)\pi/4]$.

Если к $\binom{k+1/2}{n}$ применить формулу (12.64), то получим

$$c_n = (-1)^n 2\sqrt{2}(\sqrt{2}\pi)^{-n} n^{-3/2} [\cos(n+1)\pi/4 + n^{-1}((\pi/3)\cos(n-1)\pi/4 + (3/4)\cos(n+1)\pi/4) + O(n^{-2})]. \quad (25.77)$$

Формула (25.77) уточняет соотношение, полученное с помощью неясных выкладок Ватсоном [87] и приведенное нами в п. 9.2.4, 1° (где следует исправить опечатку — a_n заменить на c_n). При $\cos(n+1)\pi/4=0$ вышеуказанное уточнение необходимо. Рассмотренный метод применим также в первом примере [см. 6, § 8.21]. Численные расчеты по обоим методам требуют примерно одинаковых затрат времени. Однако ряд (25.76) имеет сильно неравномерную шкалу, поэтому его следует еще перегруппировать по степенной шкале.

3°. Метод, рассмотренный в п. 2°, применим также в более общем случае, когда неявная функция $t(u)$ определяется уравнением $\Phi(t, u)=0$. Пусть $\Phi(t, u)$ — аналитическая функция переменных t и u в некоторой области и данное уравнение определяет аналитическую функцию $t(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ в некоторой окрестности $u=0$, и пусть в данной области можно найти такие значения t_0 и u_0 , что $\Phi(t_0, u_0)=0$, $\frac{\partial\Phi(t_0, u_0)}{\partial t} \equiv \frac{\partial\Phi_0}{\partial t}=0$, $\frac{\partial\Phi_0}{\partial u} \neq 0$. Поскольку $t'(u) = -\frac{\partial\Phi}{\partial u} / \frac{\partial\Phi}{\partial t}$, то $t'(u_0) = \infty$ и u_0 является точкой ветвления. Если таких точек несколько, то в качестве u_0 берем точку, наиболее близкую к началу; если и таких точек будет несколько, то учитывать следует все.

Пусть $\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2} \neq 0$ и u_0 — единственная точка ветвления. Применяя к функции $\Phi(t, u)$ в окрестности (t_0, u_0) разложение в ряд Тейлора и ограничиваясь рассмотрением членов первого и второго порядков, получаем соотношение

$$t = t_0 \pm \sqrt{-2 \frac{\partial\Phi_0}{\partial u} / \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2}} (u - u_0)^{1/2} + O(u - u_0).$$

Его можно уточнить с помощью упомянутого ряда Тейлора методом неопределенных коэффициентов. Из полученного соотношения и (25.10) следует, что

$$a_n \sim \pm \sqrt{-2 \frac{\partial\Phi_0}{\partial u} / \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2}} (-t_0)^{-n+1/2} \binom{1/2}{n}.$$

При этом необходимо внимательно следить за тем, какую ветвь корня следует брать. В случае нескольких точек ветвления с одинаковым модулем подобные выражения складываются. Применение этого метода рассмотрено в [28].

В [38] родственный метод формально применяется для нахождения асимптотики коэффициента A_n в разложении (16.9):

$$G(u) = h(t(u))t'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k u^k, \quad u = g(t). \quad \text{Если } t_0 \text{ — ближайшая к } t=0 \text{ точка, в которой } g'(t_0) = 0, \text{ то строится разложение } G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k (u - g(t_0))^{\lambda_k}, \text{ а затем применяется (25.10).}$$

25.5.2. Асимптотика рекуррентных последовательностей. В различных отраслях математики встречаются последовательности, заданные рекуррентным соотношением. Многие коэффициенты асимптотических разложений в настоящей монографии тоже заданы этим способом. Встречаются следующие простейшие виды рекуррентных формул:

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = c_n, \quad \sum_{k=1}^n a_{n-k} b_k = a_n, \quad \sum_{k=0}^m a_{n+k} b_k(n) = 0, \quad n > m, \quad \text{где } \{b_k\} \text{ и } \{c_k\} \text{ — заданные последовательности. Для исследования асимптотики общего члена последовательности применяются различные методы.}$$

1°. Исходя из рекуррентной формулы для последовательности $\{a_n\}$ строится производящая функция $F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ или же

$$\text{более общая: } F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n a_n t^n, \quad \text{где коэффициенты } d_n \text{ заданы в явном виде. Весьма часто приведенные ряды сходятся. Затем можно использовать методы, рассмотренные в п. 25.1—25.4. Метод производящих функций также применим в том случае, когда при фиксированном индексе надо исследовать асимптотику фиксированного члена последовательности относительно некоторого параметра, входящего в рекуррентную формулу. Такой пример приведен в [33].}$$

Производящую функцию не всегда легко найти. Рассмотрим случай, когда рекуррентное соотношение для $\{a_n\}$ задано в первом из указанных видов:

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = c_n, \quad (25.78)$$

где b_k и c_k — коэффициенты известных разложений в степенной

ряд: $F_1(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, $F_2(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Тогда согласно теореме 4.5 имеем

$$F(t) = F_2(t)F_1^{-1}(t) \quad (25.79)$$

и далее можно применить методы, изложенные в п. 25.1—25.4.

В качестве примера рассмотрим соотношение [8, 2-е изд.]

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k}/(k+1) = \alpha^n/n!.$$

Поскольку $F_1(t) = t^{-1} \ln [1/(1-t)]$, то $F(t) = \frac{t}{\ln [1/(1-t)]} e^{at}$. Согласно (25.26'') при $\lambda=1$, $\mu=-1$ получаем $a_n \sim -e^{\alpha n-1} (\ln n)^{-2}$.

2°. Иногда (25.78) можно решить относительно a_n . Этот вопрос подробнее рассмотрен в [9], где указана также дополнительная литература. Пусть в (25.79) $F_1^{-1}(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$. Тогда

$$a_n = \sum_{k=0}^n c_k d_{n-k}. \quad (25.78')$$

Теорема 25.1. Пусть в (25.78') $d_n \sim \frac{A n^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$, $\lambda > -1$, и $c_n \sim \frac{B n^\mu}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu > -1$. Тогда $a_n \sim \frac{A B n^{\lambda+\mu+1}}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}$.

Доказательство теоремы приведено в [20, с. 129]. Если использовать аналогичные теоремы относительно интеграла свертки (см. п. 11.3, 15.1 и 22.8), то нетрудно найти разные модификации и обобщения этой теоремы.

Теорема 25.2. Пусть 1) в разложении $F_2(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ начиная с некоторого индекса $|c_n| \geq \mu > 0$; 2) $c_{n-1}/c_n \rightarrow \beta$, $0 \leq |\beta| < \infty$; 3) разложение $\Phi(t) \equiv F_1^{-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$ сходится при $|t| < r$, $r > |\beta|$. Тогда для a_n , определенного в (25.78'), справедливо

$$a_n = [\Phi(\beta) + o(1)] c_n. \quad (25.80)$$

Доказательство. Поскольку $c_{n-m}/c_n = \prod_{k=0}^{m-1} c_{n-m+k}/c_{n-m+k+1}$, то при достаточно большом $n \geq n_0$ $c_{n-m}/c_n = \beta^m + o(1)$. Кроме того, можно найти такие M и $\eta \in (0, r - |\beta|)$, что при всех n и $m \leq n$

$|c_{n-m}/c_n| < M(|\beta| + \eta)^m$. Далее при $n \geq n_0$ с учетом (25.78') используем неравенство

$$\Delta = \left| \sum_{k=0}^{\infty} d_k \beta^k - a_n/c_n \right| \leq \left| \sum_{k=0}^m d_k (\beta^k - c_{n-k}/c_n) \right| + \\ + \left| \sum_{k=m+1}^n d_k (\beta^k - c_{n-k}/c_n) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \beta^k \right|.$$

Выберем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и фиксируем $m < n$ таким, чтобы $\left| \sum_{k=m+1}^n d_k \beta^k \right| < \varepsilon$, $M \sum_{k=m+1}^n |d_k| (|\beta| + \eta)^k < \varepsilon$, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \beta^k \right| < \varepsilon$ как отрезки и остаток сходящихся рядов $\sum_{k=0}^{\infty} |d_k \beta^k|$ и $\sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \times (|\beta| + \eta)^k$. При фиксированном m можно $n > n_1$ выбрать столь большим, чтобы при $k \leq m$ $|\beta^k - c_{n-k}/c_n| < \varepsilon / \sum_{k=0}^m |d_k|$. Тогда $\Delta < 3\varepsilon$. ■

3°. Иногда асимптотику для a_n из (25.78) можно исследовать по некоторым свойствам последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$.

Теорема 25.3. Пусть в (25.78) 1) $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$; 2) $\lim a_k = \alpha$; 3) $\lim c_k = \gamma$; 4) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \beta$. Тогда $\alpha = \gamma/\beta$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\beta > 0$, $a_k < M$. Выберем произвольно малое $\varepsilon \in (0, \beta/2)$ и найдем такое n_0 , чтобы при всех $n \geq n_0$ было $a_{[n/2]} \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, $c_n \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)$, $s_{[n/2]} = \sum_{k=0}^{[n/2]} b_k \in (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$, $s_n - s_{[n/2]} < \varepsilon$. Тогда при $n \geq n_0$ из (25.78) следуют неравенства

$$\gamma + \varepsilon > \sum_{k=0}^{[n/2]} b_k a_{n-k} > s_{[n/2]} (\alpha - \varepsilon) > (\beta - \varepsilon) (\alpha - \varepsilon).$$

Отсюда $\alpha < \gamma/\beta + \varepsilon[(2\gamma/\beta) + 2 + \beta]/\beta$. Аналогично имеем $\gamma - \varepsilon < c_n < s_{[n/2]}(\alpha + \varepsilon) + M\varepsilon < (\beta + \varepsilon)(\alpha + \varepsilon) + M\varepsilon$, $\alpha > \gamma/\beta - \varepsilon(M + 1 + \beta + \gamma/\beta)/\beta$. Полученные оценки для α в силу произвола ε доказывают теорему. Если $\beta = \infty$, то из первого неравенства следует, что $\alpha = 0$. ■

В несколько ином виде теорема дана в [47].

Теорема 25.4. Пусть 1) $a_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k}$, $a_0 = 1$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$, $b_k \geq 0$; 3) $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sim L(n)n^{-\alpha}$, $L(t) \in \mathcal{L}$, $\alpha \in (1/2, 1)$; 4) $\sum_{k=1}^{\infty} k b_k = \infty$. Тогда $a_n \sim n^{\alpha-1} (\sin \pi \alpha) / \pi L(n)$. Если $\alpha \in (0, 1/2]$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf n^{1-\alpha} \times \times L(n) a_n = (\sin \pi \alpha) / \pi$.

Доказательство теоремы приведено в [53].

4°. Для нахождения производящей функции иногда приходится составлять дифференциальное уравнение или же применять некоторые весьма искусственные приемы. В качестве примера рассмотрим соотношение

$$d_{n+1} = \binom{n}{0} d_0 + \binom{n}{1} d_1 + \dots + \binom{n}{n} d_n, \quad d_0 = 1. \quad (25.81)$$

Легко доказать [4], что d_n выражает число разбиений на всевозможные группы множества, состоящего из n элементов.

Пусть $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n / n!$. Тогда с учетом (25.81) имеем

$$F'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} t^n / n! = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n d_k / k! (n-k)! = F(t) e^t.$$

Отсюда в силу $F(0) = d_0 = 1$ получаем $F(t) = e^{-1} \exp(e^t)$ и асимптотическое выражение для d_n можно найти согласно (25.57).

Поскольку

$$\exp(e^t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kt}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(kt)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^j}{k!},$$

то $d_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} k^n / k!$. В п. 29.2.2 асимптотика суммы этого ряда при $n \rightarrow \infty$ будет найдена с помощью формулы Эйлера—Маклорена.

5°. Встречается также более общее, чем в теореме 25.4, рекуррентное соотношение типа (19.30): $a_n = \sum_{k=1}^n \beta_k(n) b_k a_{n-k}$, где b_k — коэффициенты заданной функции $F_1(t)$, $\beta_k(n)$ — заданные функции. Однако в этом случае пока нет общей теории, так как примеры показывают, что асимптотика для a_n в зависимости от $\beta_k(n)$ и b_k может быть весьма разнообразной. В частном случае, когда $|\beta_k(n)| \leq M$ при всех n и k и $b_{k-1} =$

$=o(b_k)$, т. е. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ расходится, судя по рекуррентному соотношению, можно ожидать, что $a_n \sim \beta_n(n) b_n a_0$. Асимптотическое разложение для a_n в этом случае при некоторых условиях, среди которых $b_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, приведено в [96].

6°. Рекуррентные соотношения вида

$$\sum_{k=0}^m a_{n+k} b_k(n) = 0, \quad n > m, \quad (25.82)$$

обычно встречаются в том случае, когда асимптотическое разложение строится для решения дифференциального уравнения. Соотношение (25.82) можно рассматривать как разностное уравнение и использовать соответствующую теорию об асимптотическом представлении решений разностных уравнений, которая изложена во многих работах, например в [29, 31, 74, 439]. Однако трудно найти точное соотношение между данным коэффициентом a_n и построенными асимптотическими разложениями частных решений уравнения (25.82).

25.5.3. *Приведение к интегралу Меллина.* Пусть дана целая функция $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Функция

$$G(t) = (1-t)^{-\lambda} \Phi(1/(1-t)^{\nu}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n, \quad \nu > 0, \quad (25.83)$$

аналитична в единичном круге. В силу абсолютной сходимости повторных рядов имеем

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1-t)^{-\lambda-\nu k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\nu k - \lambda}{n} t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(\nu k + \lambda + n)}{\Gamma(\nu k + \lambda)}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(\nu k + \lambda + n)}{\Gamma(\nu k + \lambda)}, \quad (25.84)$$

причем ряд сходится при каждом n . Пусть

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k / \Gamma(\nu k + \lambda). \quad (25.85)$$

Тогда

$$A_n = (1/n!) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+\lambda-1} H(tv) dt. \quad (25.86)$$

Интеграл (25.86) сходится при любом фиксированном λ , если n — достаточно большое число. Далее для функции $H(t)$ следует найти асимптотическое выражение при $t \rightarrow \infty$ и применить метод, изложенный в п. 18.4. В частности, при $c_k = \alpha^k/k!$ этим методом получают некоторые результаты из п. 25.3. В качестве другого примера возьмем

$$\Phi(t) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; \beta t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha) \beta^k}{\Gamma(k+\gamma) k!} t^k, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0. \quad (25.87)$$

Функция

$$H(t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k \Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+\gamma) \Gamma(\nu k + \lambda) k!} t^k$$

совпадает с $(\Gamma(\gamma)/\Gamma(\alpha)) {}_1\mathfrak{F}_2\left(\begin{matrix} \alpha; & 1; \\ \gamma, \lambda; & 1, \nu; \end{matrix} \beta t\right)$ [см. (28.92)]. Из (28.95) при $t \rightarrow +\infty$ следует асимптотическое представление

$$H(t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} c t^{\mu} e^{bt^{\kappa}} [1 + O(t^{-\kappa})],$$

где $c = [2\pi(1+\nu)]^{-1/2} \nu^{(1-2\lambda-2\alpha\nu+2\gamma\nu)/2(1+\nu)} \beta^{\mu}$, $\mu = (1/2 + \alpha - \gamma - \lambda)/(1 + \nu)$, $b = \beta^{\nu} (1+\nu) \nu^{-\kappa\nu}$, $\kappa = 1/(\nu+1)$.

Если $\nu < 1$, то $\kappa\nu < 1/2$ и можно непосредственно использовать формулу (18.101), в которую следует подставить $x = n + \lambda$, $h_0(t) = (c\Gamma(\gamma)/\Gamma(\alpha)) t^{\mu\nu} e^{bt^{\kappa\nu}}$. Поэтому

$$A_n = [c\Gamma(\gamma)/\Gamma(\alpha)] n^{\lambda+\mu\nu-1} \exp[b(n+\lambda)^{\kappa\nu}] [1 + o(1)]. \quad (25.88)$$

25.5.4. Асимптотика коэффициентов расходящихся асимптотических разложений. Коэффициенты асимптотических разложений в явном виде задаются не очень часто. Все же коэффициенты разложений важнейших специальных функций, например ${}_1F_1$, ψ , J_{ν} , H_{ν} и т. д., можно явно выразить с помощью

Γ -функции. Для дальнейшей оценки коэффициентов при большом n тогда применяется формула Стирлинга (9.43) или формула (12.62). Бывают и другие случаи, когда удается оценить коэффициенты асимптотических разложений.

1°. Коэффициент имеет вид $a_n = b_n \gamma_n$, где фактор b_n выражается с помощью Γ -функций, а для γ_n известна производящая функция, которая задана либо в явном виде, как, например, в (9.57), (12.12), (12.58) и (12.65), либо в неявном виде, как, например, в (9.43) и (16.8) при $h(t) \equiv 1$. Тогда можно использовать методы, рассмотренные в данном параграфе. Более сложные случаи, когда фактор γ_n или коэффициент a_n задан необозримой рекуррентной формулой, как, например, в (9.9), (9.12) и (9.63), вызывают большие затруднения. Достаточно полная теория в этих случаях отсутствует. Еще труднее строить теорию в случаях, когда коэффициенты выражаются цепочкой рекуррентных формул, например в (12.80).

2°. Если a_n или γ_n является коэффициентом сложной функции, например в (16.9) и (16.52), то в простейших случаях можно применить метод, указанный в конце п. 25.5.1, 3°. В [38] этот метод использован во многих примерах, содержащих оценки коэффициентов при большом индексе в асимптотических разложениях конкретных специальных функций.

3°. Фактор γ_n выражается с помощью интеграла Меллина, как, например, в (8.14) и (12.4). При исследовании его асимптотики могут использоваться результаты п. 18.4.

4°. Фактор γ_n или a_n может быть выражен с помощью производной от аналитической функции, как, например, в (8.13), (8.23), (8.26) и (8.33). В таком случае можно применить формулу Коши и затем использовать соответствующие результаты настоящего параграфа.

5°. Возможно, что a_n или γ_n выражается с помощью конечной суммы, как, например, в (12.94) и (13.20). В таком случае иногда применимы результаты п. 24.6, однако часто при оценке a_n приходится сталкиваться с большими трудностями. Если же γ_n выражается с помощью (25.78'), то иногда можно применить теорему 25.1 или 25.2.

Асимптотика коэффициентов асимптотических разложений иногда имеет значение при более точной оценке остатка. Часто такая асимптотическая оценка коэффициентов выражается с помощью Γ -функций, некоторой степени n и показательной функции или логарифма.

В заключение отметим, что для получения асимптотических оценок коэффициентов степенных рядов существуют и другие методы, не использующие интегралы. Многие примеры, относящиеся к комбинаторному анализу, приведены в [9, 28].

§ 26. АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ В РЯДАХ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

26.1. Ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля

26.1.1. В задаче Штурма—Лиувилля ищутся такие значения параметра λ , при которых уравнение

$$(pu')' - qu + \lambda \rho u = 0 \quad (26.1)$$

имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \quad \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \quad (26.2)$$

Указанные значения λ называются *собственными значениями*, соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями*. Можно доказать [80], что собственные значения образуют бесконечную последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, и все собственные функции u_n , соответствующие одному собственному значению λ_n , линейно зависимы. Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(t)$. Более общей является задача, в которой граничные условия имеют вид

$$\Lambda_1 u(a) = \Lambda_2 u(b), \quad \Lambda_3 u(a) = \Lambda_4 u(b), \quad (26.3)$$

где Λ_k — некоторые операторы. В такой постановке вышеуказанные свойства собственных функций и собственных значений не всегда имеют место. В частности, при $t \in [0, l]$, $p(t) \equiv \rho(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv 0$ и условиях

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (26.4)$$

имеем собственные значения $\lambda_n = (n\pi/l)^2$ и собственные функции $u_n = c_n \sin(n\pi t/l)$, $n \in N_1$. Разлагая данную функцию $F(t)$ в ряд по собственным функциям $\sin(n\pi t/l)$, для вычисления коэффициента A_n получаем выражение

$$A_n = 2/l \int_0^l \sin(n\pi t/l) F(t) dt. \quad (26.5)$$

Асимптотическое выражение для A_n можно найти согласно § 10, 16.

Если в задаче (26.1)—(26.4) $p \in C^\infty[a, b]$, $q \in C^\infty[a, b]$, $\rho \in C^\infty[a, b]$, $p > 0$, $\rho > 0$, $-\infty < a < b < +\infty$, $\lambda_n = \mu_n^2$, то можно доказать [80], что при $n \rightarrow \infty$ и обозначениях

$$z_n = n\pi/l, \quad x(t) = \int_a^t \sqrt{\rho/p} d\tau, \quad x(b) = l, \quad v_n(x) = u_n(t) \sqrt{p(t)\rho(t)} \quad (26.6)$$

имеем

$$\mu_n \sim z_n + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z_n^{-2k-1}; \quad (26.7)$$

$$v_n(x) \sim \sin z_n x \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1}(x) z_n^{-2k+1} + \cos z_n x \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}(x) z_n^{-2k}, \quad (26.8)$$

$x \in [0, l]$, где коэффициенты c_k и функции $g_k(x)$ определяются по соответствующим алгоритмам.

Нередко разложение в ряд удобнее строить по нормированным функциям $u_n^*(t) = u_n(t) N_n^{-1}$, где N_n определено ниже. Тогда для коэффициентов ряда

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* u_n^*(t) \quad (26.9)$$

имеем выражение

$$A_n^* = \int_a^b F(t) \rho(t) u_n^*(t) dt, \quad N_n^2 = \int_a^b \rho(t) u_n^2(t) dt. \quad (26.10)$$

Если к интегралам (26.10) применить (26.6), то получим

$$\begin{aligned} A_n^* &= N_n^{-1} \int_0^l F(t(x)) \sqrt[4]{\rho(t(x)) \rho(t(x))} v_n(x) dx = \\ &= N_n^{-1} \int_0^l F_1(x) v_n(x) dx, \quad N_n^2 = \int_0^l v_n^2(x) dx. \end{aligned} \quad (26.10')$$

Далее следует в (26.10') подставить (26.8), проинтегрировать почленно ряды, а потом для каждого члена построить асимптотическое разложение согласно § 10 и перегруппировать члены. При $F(t) \in C^\infty[a, b]$ после всех действий получаем

$$A_n^* \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k z_n^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^* n^{-k-1}. \quad (26.11)$$

В зависимости от свойств функции $F(t)$ некоторые B_k могут равняться нулю. Например, при $F(a) = F(b) = 0$ имеем $B_0 = 0$. Этот факт связан с тем, что равномерная сходимость на $[a, b]$ ряда (26.9) будет иметь место лишь тогда, когда разлагаемая

функция $F(t)$ удовлетворяет граничным условиям задачи Штурма—Лиувилля. Если функция $F(t)$ недостаточно гладкая, то применяется тот же метод, только разложение (26.11) может содержать другие степени z_n .

26.1.2. Если не все предыдущие условия относительно p , ρ и q удовлетворены, но выполнено хотя бы одно из условий $p(a)=0$, $p(b)=0$, $\rho(a)=0$, $\rho(b)=0$, $q(t)$ не ограничена в $[a, b]$, $a=-\infty$, $b=+\infty$, то имеем *сингулярные случаи* и формулы (26.7) и (26.8) в общем не верны. Модифицируются также граничные условия. Вместо (26.2) иногда требуется ограниченность решения на конце сегмента. Такой случай имеется для уравнения Бесселя, когда

$$(tu')' - v^2/t + \lambda tu = 0, \quad |u(0)| < M, \quad u(1) = 0. \quad (26.12)$$

Собственные значения определяются из уравнения $J_v(\mu_n) = 0$, где $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, собственными функциями являются $J_v(\mu_n t)$ [80]. При нахождении асимптотического разложения для μ_n можно применить (10.61) и теорию уравнения (24.56), изложенную в [14]. Имеем [66]

$$\mu_n \sim \beta_n + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \beta_n^{-2k-1}, \quad (26.13)$$

где

$$\beta_n = \pi(v/2 + 3/4 + n), \quad c_1 = -(4v^2 - 1)/8, \quad c_2 = -(4v^2 - 1) \times \\ \times (28v^2 - 31)/384. \quad (26.14)$$

Некоторые следующие c_k можно найти в [6, гл. 15]. Корни функций Бесселя вычислены в [19, 82].

Поскольку $N_n^2 = (1/2) [J_v'(\mu_n)]^2$ [80], то коэффициент ряда Фурье—Бесселя функции $F(t)$ по функциям $J_v(\mu_n t)$ выражается следующим образом:

$$A_n = 2 [J_v'(\mu_n)]^{-2} \int_0^1 t J_v(\mu_n t) F(t) dt. \quad (26.15)$$

Отсюда при $F(t) \in C^\infty[0, 1]$ согласно (10.87) и (10.89) найдем асимптотическое разложение интеграла (26.15) относительно μ_n :

$$\int_0^1 t J_v(\mu_n t) F(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_n^{-k-2} + \\ + i \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos [\mu_n - (\pi/2)(v - k + 3/2)] \mu_n^{-k-3/2}.$$

Если учитывать (26.13) и (26.14), то μ_n^{-k} и $\cos [\mu_n - (\pi/2) \times (v - k + 3/2)]$ можно разложить в ряд по степеням β_n и после этого перегруппировать члены. Подобные действия выполняются с $[J_{v'}(\mu_n)]^{-2}$. После всех преобразований получаем

$$A_n \sim \sum_{k=0}^{\infty} D_k \beta_n^{-k/2-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k^* n^{-k/2-1/2}. \quad (26.16)$$

При $F(1) = 0$ имеем $D_0 = D_0^* = 0$ (см. примечание в конце п. 26.1.1).

Аналогично оцениваются коэффициенты рядов по более сложным ортогональным цилиндрическим функциям, которые получаются при других граничных условиях.

Во многих других сингулярных случаях асимптотические разложения собственных функций можно выразить с помощью функций Бесселя или других известных специальных функций [5, 76], однако асимптотика не всегда равномерна во всем сегменте интегрирования, что создает затруднения при оценке A_n . Например, для полиномов Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$ имеем асимптотическое разложение (13.30), справедливое при $\vartheta \in [0, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, а полиномы Эрмита $H_n(t)$ в $(-\infty, \infty)$ имеют еще более сложные асимптотические представления (см. п. 21.3). Поскольку общая теория слишком сложна, то ограничимся рассмотрением лишь асимптотики коэффициентов разложений по некоторым классическим ортогональным полиномам, которые обозначим через $q_n(t)$. Все нули этих полиномов находятся в промежутке ортогональности $[a, b]$, поэтому ядро $q_n(t)$ в интеграле

$$A_n = N_n^{-2} \int_a^b F(t) \rho(t) q_n(t) dt = N_n^{-2} a_n \quad (26.17)$$

имеет колебательный характер. Дальнейшие пункты этого параграфа в некотором смысле дополняют конец § 16. Поскольку нормы N_n известны [16], основное внимание уделим асимптотическому представлению для a_n .

26.2. Простейшие методы вычисления коэффициентов Фурье по ортогональным полиномам

26.2.1. Классические ортогональные полиномы можно определить разными способами. Мы используем определение с помощью формулы Родрига [16]

$$q_n(t) = K_n [1/\rho(t)] \frac{d^n}{dt^n} [\rho(t) G^n(t)], \quad (26.18)$$

где $\rho(t)$ — *весовая функция*, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям, в том числе $\rho(t) \geq 0$; $G(t)$ — полином степени не выше 2; K_n — коэффициент, который отчасти по историческим причинам определяется исходя из разных соображений. Как уже сказано, в основном исследуем асимптотику коэффициента a_n в (26.17). В данном параграфе часто используется ортогональность $q_n(t)$ в $[a, b]$ с весом $\rho(t)$ к любому полиному, степень которого ниже $q_n(t)$ [16].

В некоторых случаях a_n вычисляется в явном виде с помощью элементарных или известных специальных функций, тем самым решается и вопрос об асимптотике a_n . Иногда все же асимптотику этих функций приходится дополнительно искать с помощью их интегрального представления (см., например, работу [89], где рассмотрены разложения по полиномам Якоби и коэффициенты выражаются через G -функции Мейера).

Рассмотрим вначале некоторые простейшие приемы вычисления a_n , известные в теории специальных функций. Часть из приведенных примеров будет использована в дальнейшем. При этом рассмотрим случаи, когда $q_n(t)$ — *полином Гегенбауэра* (или *ультрасферический полином*) $C_n^\lambda(t)$ при

$$\rho(t) = (1-t^2)^{\lambda-1/2}, \quad \lambda > -1/2, \quad G(t) = 1-t^2, \quad [a, b] = [-1, 1],$$

$$K_n = (-1)^n \sqrt{\pi} \Gamma(n+2\lambda) / (2^{n+2\lambda-1} n! \Gamma(\lambda) \Gamma(n+\lambda+1/2))$$

или *полином Эрмита* $H_n(t)$ при $\rho(t) = e^{-t^2}$, $G(t) \equiv 1$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$, $K_n = (-1)^n$. Ради простоты нередко рассматриваются только частные случаи $C_n^\lambda(t)$: *полином Лежандра* $P_n(t)$ при $\lambda=1/2$, $K_n = (-1)^n / 2^n n!$ и *полином Чебышева* $T_n(t) = (n/2) \lim_{\lambda \rightarrow 0} (1/\lambda) C_n^\lambda(t)$ при $K_n = (-1)^n \sqrt{\pi} / 2^n \Gamma(n+1/2)$. Используем также равенство [16]

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta. \quad (26.19)$$

Полином $C_n^\lambda(t)$, в свою очередь, является частным случаем *полинома Якоби* $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, для которого $\rho(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $G(t) = 1-t^2$, $[a, b] = [-1, 1]$, $K_n = (-1)^n / 2^n n!$ (иной выбор, чем в случае $C_n^\lambda(t)$). Полиномы $H_{2n}(t)$ и $H_{2n+1}(t)$ можно выразить с помощью *полиномов Лагерра* $L_n^\alpha(t)$ (при $\alpha = -1/2$ и $\alpha = 1/2$), для которых $\rho(t) = e^{-t} t^\alpha$, $G(t) = t$, $[a, b] = [0, \infty)$, $K_n = 1/n!$. Поскольку асимптотику коэффициентов Лагерра можно исследовать, аналогично как в случае полиномов Эрмита, то они рассматриваться не будут.

Основное внимание в работе обращается на разнообразие методов, а не на общность полученных асимптотических представлений.

26.2.2, 1°. *Применение рекуррентных формул.* Три смежных ортогональных полинома связаны рекуррентной формулой [16]

$$tq_n = \alpha_n q_{n+1} + \beta_n q_n + \gamma_n q_{n-1},$$

но имеют место также другие соотношения. В примерах используем формулы [16]

$$P_n = (1/(2n+1)) (P_{n+1}' - P_{n-1}'); \quad (26.20)$$

$$H_n' = 2nH_{n-1}, \quad H_{n+1} - 2tH_n + 2nH_{n-1} = 0. \quad (26.21)$$

Берем

$$F(t) \equiv F_m(t) = \begin{cases} a(t-\alpha)^m & \text{при } t < \alpha, \\ b(t-\alpha)^m & \text{при } t \geq \alpha, \end{cases} \quad (26.22)$$

$b \neq a$, $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, причем в случае $P_n(t)$ и $T_n(t)$ $\alpha \in (-1, 1)$. Коэффициент в (26.17) обозначим через $a_n(m)$. Сначала рассмотрим случай $m=0$. Тогда согласно (26.20) имеем

$$a_n(0) = (b-a) \int_{\alpha}^1 P_n(t) dt = (b-a)/(2n+1) \int_{\alpha}^1 [P_{n+1}'(t) - P_{n-1}'(t)] dt = ((b-a)/(2n+1)) [P_{n-1}(\alpha) - P_{n+1}(\alpha)]. \quad (26.23)$$

При $m > 0$ обозначим $I_{mn} = \int_{\alpha}^1 (t-\alpha)^m P_n(t) dt$. С учетом (26.20) интегрированием по частям получаем

$$I_{mn} = -(m/(2n+1)) I_{m-1, n+1} + (m/(2n+1)) I_{m-1, n-1}.$$

Применив эту формулу m раз, в правой части прежнего равенства будем иметь интегралы $I_{0, n+m}, \dots, I_{0, n-m}$, которые можно выразить с помощью (26.23). В итоге имеем формулу

$$a_n(m) = \frac{b-a}{2n+1} \sum_{j=-m-1}^{m+1} \beta_{jm}(n) P_{n+j}(\alpha) \equiv \frac{b-a}{2n+1} \Phi_m(n, \alpha), \quad (26.24)$$

где $\beta_{jm}(n) = O(n^{-m})$. Некоторые из $\beta_{jm}(n)$ могут равняться нулю. Ввиду асимптотического представления (25.17) имеем $\Phi_m(n, \alpha) = O(n^{-m-1/2})$.

В случае полиномов Чебышева используем соотношение (26.19), причем $\alpha = \cos \theta_0$. Вместо предыдущих формул получаем

$$a_n(0) = \sin n\theta_0/n, \quad I_{mn} = (m/2n) (I_{m-1, n-1} - I_{m-1, n+1}),$$

$$\int_{\alpha}^1 T_n(t) (1-t^2)^{-1/2} (t-\alpha)^m dt = O(n^{-m-1}). \quad (26.25)$$

Для полиномов Эрмита из формул (26.21) следует
 $(e^{-t^2} H_n)' = e^{-t^2} (H_n' - 2tH_n) = e^{-t^2} (2nH_{n-1} - 2tH_n) = -e^{-t^2} H_{n+1}$,
 поэтому, как и выше, при прежней функции $F(t)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_m(t) e^{-t^2} H_n(t) dt = (b-a) m! e^{-\alpha^2} H_{n-m-1}(\alpha), \quad n > m. \quad (26.26)$$

2°. *Применение формулы Родрига.* Вместо полинома под знак интеграла подставляется соответствующая n -я производная по формуле Родрига и интегрируется n раз по частям. Часто при этом целесообразно составить рекуррентную формулу. Иногда после выполненных действий полученный интеграл можно выразить с помощью известных функций.

В качестве примера при $\alpha + \lambda > -1/2$, $\alpha \in N$, рассмотрим

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 (1+t)^\alpha (1-t^2)^{\lambda-1/2} C_n^\lambda(t) dt = K_n \int_{-1}^1 (1+t)^\alpha \frac{d^n}{dt^n} \times \\ &\times [(1-t^2)^{n+\lambda-1/2}] dt = K_n \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-1}^1 (1+t)^{\alpha+\lambda-1/2} (1-t)^{n+\lambda-1/2} dt = \\ &= K_n \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} 2^{\alpha+2\lambda+n} \int_0^1 u^{\alpha+\lambda-1/2} (1-u)^{n+\lambda-1/2} du = \\ &= \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+\lambda+1/2) 2^{\alpha+1} \Gamma(n-\alpha) \Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(-\alpha) n! \Gamma(\alpha+n+2\lambda+1)}. \quad (26.27) \end{aligned}$$

В преобразованиях применялась подстановка $t+1=2u$. Если обе части (26.27) k раз дифференцировать по α , то под знаком интеграла в (26.27) появится множитель $\ln^k(1+t)$, $k \in N$. В оценке для a_n к (26.27) тогда добавляется множитель $O(\ln^k n)$. В частном случае при $\lambda=1/2$ для $P_n(t)$ получаем

$$\int_{-1}^1 (1+t)^\alpha P_n(t) dt = \frac{(-1)^n 2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+2)}. \quad (26.27')$$

Аналогично получают следующие формулы:

$$\int_{-1}^1 t^{n+k} P_n(t) dt = \frac{(n+k)! \sqrt{\pi}}{2^{n+k} \Gamma(k/2+1) \Gamma(n+k/2+3/2)},$$

k — четное число; (26.28)

$$\int_{-1}^1 (1+t)^\alpha (1-t^2)^{-1/2} T_n(t) dt = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^\alpha \Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)},$$

$$\alpha > -1/2; \quad (26.29)$$

$$\int_{-1}^1 t^{n+k} (1-t^2)^{-1/2} T_n(t) dt = \frac{\pi(n+k)!}{2^{n+k} \Gamma(k/2+1) \Gamma(n+k/2+1)},$$

$$k \text{ — четное число}; \quad (26.30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{n+k} H_n(t) dt = \frac{(n+k)!}{k!} \Gamma(k/2+1/2), \quad k \text{ — четное число};$$

$$(26.31)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{at} H_n(t) dt = \sqrt{\pi} \alpha^n e^{a^2/4}. \quad (26.32)$$

Пусть $|1+z| > 2$, $\mu \in N$. Аналогично как выше, интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \Omega(z, n, \lambda, \mu) &= \int_{-1}^1 (t-z)^\mu (1-t^2)^{\lambda-1/2} C_n^\lambda(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(n-\mu)}{\Gamma(-\mu)} K_n \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n+\lambda-1/2} (t-z)^{\mu-n} dt = \\ &= \frac{\Gamma(n-\mu)}{\Gamma(-\mu)} K_n 2^{2n+2\lambda} \int_0^1 \tau^{n+\lambda-1/2} (1-\tau)^{n+\lambda-1/2} (2\tau-1-z)^{\mu-n} d\tau = \\ &= \frac{\pi \Gamma(n-\mu) \Gamma(n+2\lambda) (-1-z)^\mu}{\Gamma(-\mu) \Gamma(\lambda) 2^{n+2\lambda-1} n! \Gamma(n+\lambda+1) (1+z)^n} \times \\ &\times {}_2F_1(n-\mu, n+\lambda+1/2; 2n+2\lambda+1; 2/(1+z)), \quad (26.33) \end{aligned}$$

где $|\arg(-1-z)| \leq \pi$. По принципу аналитического продолжения, формула (26.33) остается справедливой во всей плоскости z с разрезом вдоль $(-\infty, 1]$, $z \in [-1, 1]$. При $z \in [-1, 1]$, $\mu \in N$, $\mu < n$ интеграл равен нулю. Если $\mu \geq n$ и $z = \alpha \in [-1, 1]$, $\arg(1+z) = 0$, то последний интеграл в (26.33) существует, однако с ${}_2F_1$ он связан иначе.

При $\alpha = \pm 1$, $\alpha = 0$ интеграл (26.33) выражается с помощью B -функции. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\mu > n$. Разобьем $[0, 1]$ на $[0, (1+\alpha)/2]$ и $[(1+\alpha)/2, 1]$. В первом сегменте применим подстановку $\tau = (1+\alpha)u/2$, во втором — $2\tau - 1 - \alpha = v(1-\alpha)$. После преобразований получим

$$\Omega(\alpha, n, \lambda, \mu) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\mu) \Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda+\mu+3/2) n!} \times \\ \times \left[e^{-i\pi(\mu-n)} (1+\alpha)^{\mu-\lambda+1/2} 2^{1/2-\lambda} {}_2F_1(-n-\lambda+1/2, n+\lambda+1/2; \mu+ \\ +\lambda+3/2; (1+\alpha)/2) + (1+\alpha)^{n+\lambda-1/2} (1-\alpha)^{\mu+\lambda+1/2} 2^{1-n-2\lambda} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(-n-\lambda+1/2, \mu-n+1; \mu+\lambda+3/2; \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) \right]. \quad (26.34)$$

По принципу аналитического продолжения, соотношение (26.34) сохраняется при $\mu > -1$, $\mu \in N$, $\lambda > -1/2$. При $\alpha \in (-1, 0)$ во второй строке (26.33) вначале следует применить подстановку $t = -u$.

Если при выводе (26.34) $(t-\alpha)^\mu$ заменить на функцию (26.22), в которой m заменено на μ и $(t-\alpha)^\mu$ — на $|t-\alpha|^\mu$, то формула (26.34) изменяется следующим образом: множитель $e^{-i\pi\mu}$ к первой гипергеометрической функции надо заменить на a , а ко второй добавить множитель b .

3°. *Применение производящей функции.* Пусть при $|x| < \varepsilon$

$$\omega(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n q_n(t) x^n \quad (26.35)$$

и ряд сходится равномерно при $t \in [a, b]$. Обе части равенства (26.35) умножаем на $\rho(t)F(t)$ и интегрируем по $[a, b]$. Если при $|x| < \varepsilon$

$$\int_a^b F(t) \rho(t) \omega(x, t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n,$$

то с учетом (26.17) получаем $a_n \gamma_n = B_n$. Однако B_n в явном виде удастся вычислить лишь в частных случаях. В некоторых из них a_n проще вычислить иным методом. В качестве простого примера используем формулу [16]

$$\exp(2xt - x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) x^n / n!, \quad (26.36)$$

если $F(t) = e^{\alpha t^2}$, $|\alpha| < 1$. При обозначении $1 - \alpha = \beta^2$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t^2} e^{-t^2} e^{2tx - x^2} dt = \\ & = \exp [x^2(1 - \beta^2)/\beta^2] \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-(\beta t - x/\beta)^2] dt = \\ & = (\sqrt{\pi}/\beta) \exp [x^2\alpha/(1 - \alpha)]. \end{aligned}$$

Отсюда при четном n получаем

$$a_n = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1 - \alpha}} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{n/2} \frac{n!}{(n/2)!}. \quad (26.37)$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования легко оправдать.

4°. *Применение явного выражения полинома.* Поскольку для классических полиномов известны явные выражения [16] и в общем виде

$$q_n(t) = \sum_{k=0}^n \gamma_{kn} t^k, \quad (26.38)$$

то подстановкой (26.38) в (26.17) получаем

$$a_n = \sum_{k=0}^n \gamma_{kn} \int_a^b F(t) \rho(t) t^k dt. \quad (26.39)$$

Но такие суммы, как функции от n , в явном виде можно выразить лишь в исключительных случаях. Зато иногда (26.39) используется для построения асимптотического выражения a_n при $n \rightarrow \infty$.

Вместо (26.38) можно применять выражение для $q_n(t)$ с помощью других сумм. Например, имеем [16]

$$P_n(\cos \vartheta) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(1/2)_k (1/2)_{n-k}}{k! (n-k)!} \cos (n-2k) \vartheta. \quad (26.40)$$

Эту формулу легко доказать разбиением производящей функции на множители и перемножением рядов.

Следует также отметить соотношение (26.19), из которого для полиномов Чебышева получаем

$$a_n = \int_0^\pi F(\cos \theta) \cos n\theta d\theta. \quad (26.41)$$

Рассмотрим пример, когда $F(t) = (1-t^2)^\alpha$, $\alpha > -1/2$. Соответствующий интеграл (26.41) вычисляется следующим образом: $\cos nt$ заменяется на e^{int} , применяется подстановка $e^{it} = z$ и полученный интеграл по полуокружности заменяется на интеграл по отрезку $[-1, 1]$ (см. также п. 19.3.2). При $n > 0$, $n > 2\alpha$ получаем

$$a_n = \frac{\Gamma(2\alpha + 1) \cos(n\pi/2) \sin(n\pi/2 - \alpha\pi) \Gamma(n/2 - \alpha)}{2^{2\alpha} \Gamma(n/2 + \alpha + 1)}. \quad (26.42)$$

5°. *Выражение коэффициента с помощью бесконечного ряда.*

Если $F(t)$ в $[a, b]$ разлагается в степенной ряд $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k / k!$, то в (26.17) это разложение можно подставить под знак интеграла и интегрировать почленно. Получаем

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} [b_{k+n} / (k+n)!] \int_a^b \rho(t) q_n(t) t^{n+k} dt. \quad (26.43)$$

В случае, когда $[a, b]$ симметричен относительно $t=0$ и функции $t^n q_n(t)$, $\rho(t)$ четные, как это бывает для рассмотренных нами полиномов $q_n(t)$, в (26.43) остаются только члены с четными индексами. Иногда ряд (26.43) можно просуммировать в явном виде.

Другой вариант этого метода заключается в применении соотношения $t^k = \sum_{j=0}^k \alpha_{jk} q_j(t)$. Если это выражение для t^k подставить в степенной ряд и перегруппировать члены, то получим $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k} \alpha_{n+k} / (n+k)!$, что совпадает с (26.43).

В качестве примера рассмотрим функцию $F(t) = e^{\alpha t}$, α — фиксированное комплексное число. Тогда $b_k = \alpha^k$, а интеграл в (26.43) в случае $P_n(t)$ и $T_n(t)$ вычисляется согласно (26.28) и (26.30). В итоге получаем

$$\int_{-1}^1 e^{\alpha t} P_n(t) dt = \sqrt{2\pi/\alpha} I_{n+1/2}(\alpha); \quad (26.44)$$

$$\int_{-1}^1 e^{\alpha t} (1-t^2)^{-1/2} T_n(t) dt = \pi I_n(\alpha). \quad (26.45)$$

Кроме указанных имеется много других, более сложных методов. Некоторые из них рассмотрены в следующих пунктах. Все же часто непосредственное вычисление a_n невозможно, поэтому в следующих пунктах приведены методы для построения асимптотических представлений.

26.3. Коэффициенты для функций с особенностями на сегменте ортогональности

26.3.1. Как видно из примеров п. 26.2, асимптотическое выражение для a_n или A_n при $n \rightarrow \infty$ зависит от аналитических свойств разлагаемой функции $F(t)$ и конкретной системы полиномов. Рассмотрим вначале случай ортогональности на сегменте $[-1, 1]$ и полиномы $P_n(t)$ и $T_n(t)$.

1°. Пусть $F(t)$ в указанном сегменте разлагается в степенной ряд, сходящийся при $|t| \leq \alpha$, $\alpha > 1$. Тогда для a_n справедлива формула (26.43), которая в случае $P_n(t)$ с учетом (26.28) имеет вид

$$a_n = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+n}}{2^{n+2k} \Gamma(k+1) \Gamma(n+k+3/2)}. \quad (26.46)$$

Поскольку $|b_{n+2k}| < M_1 (2k+n)! \alpha^{-n-2k}$ и из (26.28) следует, что при всех $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ $(2k+n)! / 2^{n+2k} \Gamma(k+1) \Gamma(n+k+3/2) < 2/\sqrt{\pi}$, то ряд (26.46) имеет мажоранту $M(1-1/\alpha^2)^{-1} \alpha^{-n} = o(n^{-N})$ и $a_n = o(n^{-N})$. Подобный результат получаем для полиномов $T_n(t)$.

2°. Пусть $F(t) \in C^{m+1}[-1, 1]$, $m < n$. Тогда

$$F(t) = \sum_{k=0}^m c_k t^k + (1/m!) \int_0^t F^{(m+1)}(\tau) (t-\tau)^m d\tau.$$

В силу (26.24) и $|P_n(t)| \leq 1$ при $t \in [-1, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{m!} \int_{-1}^1 P_n(t) dt \int_0^t F^{(m+1)}(\tau) (t-\tau)^m d\tau = \\ &= \frac{1}{m!} \int_{-1}^1 F^{(m+1)}(\tau) d\tau \int_{\tau}^1 P_n(t) (t-\tau)^m dt = O(n^{-m-3/2}). \end{aligned} \quad (26.47)$$

Аналогично в случае $T_n(t)$ получаем оценку $O(n^{-m-1})$.

Из п. 1° и 2° следует, что приходится отдельно исследовать случаи, когда $F(t)$ аналитична при $|t| \leq \alpha$, $\alpha > 1$, когда $F(t) \in C^\infty[-1, 1]$ и когда $F(t) \in \overline{C^\infty}[-1, 1]$. При оценке коэффици-

ента $A_n = N_n^{-2} a_n$ используются нормы, которые вычисляются согласно (26.28), (26.30), (26.31) и соответствующим формулам Родрига:

$$\|P_n\|^2 = 2/(2n+1), \quad \|T_n\|^2 = \pi/2, \quad \|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (26.48)$$

Подобным образом получаем

$$\|C_n^\lambda\|^2 = \frac{\pi \Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda) 2^{2\lambda-1} (n+\lambda) n!}. \quad (26.48')$$

26.3.2. 1°. Сначала рассмотрим случай, когда разлагаемая функция $F(t)$ недостаточно гладкая внутри промежутка ортогональности. Для простоты допустим, что $F(t)$ имеет особенность только в одной точке $\alpha \in (-1, 1)$. Пусть

$$F(t) = \begin{cases} (t-\alpha)^m f_1(t) \equiv \varphi_1(t) & \text{при } t < \alpha, \\ (t-\alpha)^m f_2(t) \equiv \varphi_2(t) & \text{при } t \geq \alpha, \end{cases} \quad (26.49)$$

$f_1(t) \in C^\infty[-1, \alpha]$, $f_2(t) \in C^\infty[\alpha, 1]$, $f_1(\alpha) \neq f_2(\alpha)$, $m \in N$. Рассмотрим случай полиномов $P_n(t)$. Применив к $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лапласа (3.16) и затем к отдельным членам — формулу (26.24), при $k < n - m$ получим

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(m+j)!} [\varphi_2^{(m+j)}(\alpha) - \varphi_1^{(m+j)}(\alpha)] \Phi_{m+j}(n, \alpha) + R_k(n), \quad (26.50)$$

где $R_k(n)$ оценивается аналогично тому, как в (26.47), и в итоге имеем $R_k(n) = O(n^{-m-k-1/2})$. Поскольку члены в сумме (26.50) образуют шкалу, то в (26.50) при каждом фиксированном k имеем асимптотическое представление и $A_n = O(n^{-m-1/2})$. Шкала является сильно неравномерной, так как выполненные действия справедливы лишь при $k + m < n$.

2°. Если $\alpha = -1$ или $\alpha = +1$, то в случае $m \in N$ согласно п. 26.3.1, 1° имеем оценку $A_n = O(n^{-N})$. Поэтому заменим m на $\mu \in N$, $\mu > -1$, и рассмотрим функцию $F(t) = (1+t)^\mu f(t)$, $f(t) \in C^\infty[-1, 1]$. Применяя для $f(t)$ формулу Тейлора и (26.27'), получаем соотношение

$$A_n = (-1)^{n+1} 2^\mu (2n+1) \sin \mu \pi / \pi \times \\ \times \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(-1)}{k!} (-1)^k 2^k \Gamma^2(\mu+k+1) \frac{\Gamma(n-\mu-k)}{\Gamma(n+\mu+k+2)} + R_m(n), \quad (26.51)$$

где

$$R_m(n) = (1/2m!) \int_{-1}^1 f^{(m+1)}(\tau) d\tau \int_{\tau}^1 (2n+1) P_n(t) (t+1)^\mu (t-\tau)^m dt.$$

При $\tau = -1$ внутренний интеграл согласно (26.27') и (12.62) имеет оценку $O(n^{-2m-2\mu-1})$, а при $\tau > -1$ согласно п. 1° — $O(n^{-m-1/2})$. Поэтому $R_m(n) = O(n^{-m-1/2})$, и этой оценки достаточно, чтобы согласно (26.51) получить оценку $A_n = O(n^{-2\mu-1})$. Она отличается от оценки, полученной в п. 1°, и это показывает, что негладкость внутри промежутка влияет на асимптотику A_n иначе, чем негладкость в конце промежутка. Такого явления не наблюдается в случае тригонометрических рядов.

Аналогичным путем подобная оценка получается, если $F(t) = (1-t)^\mu f(t)$, а также в случае, когда $F(t)$ имеет такие особенности на обоих концах сегмента $[-1, 1]$. Тогда приходится применять нейтрализатор. Дифференцированием по μ можно получить асимптотическое выражение для A_n в случае, когда $F(t)$ содержит дополнительный множитель $\ln^m(1+t)$ или $\ln^m(1-t)$.

3°. Аналогично при той же функции (26.49) поступают в случае полиномов Чебышева $T_n(t)$; получается оценка $A_n = O(n^{-m-1})$. Однако можно непосредственно применить формулу (26.41) и результаты п. 10.2 и одновременно обобщить оценку для A_n в случае, когда в (26.49) $(t-\alpha)^m$ заменено на $|t-\alpha|^\mu$, $\mu \in N$, $\mu > -1$. Пусть $\alpha = \cos \vartheta_0$. Если интеграл (26.41) разбить по сегментам $[0, \vartheta_0]$, $[\vartheta_0, \pi]$, в последний из них подставить $\vartheta = \pi - u$ и использовать формулы (10.8'), (10.21), то в силу четности функции $F(\cos \vartheta)$ вклады от концов $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ будут асимптотически равны 0. Получаем оценку $A_n = O(n^{-\mu-1})$.

Возможность применения указанного метода сохраняется и тогда, когда $\alpha = -1$ или $\alpha = 1$, $\mu \in N$. Поскольку $(1 - \cos \vartheta)^\mu = 2^\mu \sin^{2\mu}(\vartheta/2) = O(\vartheta^{2\mu})$ при $\vartheta \rightarrow 0$, то и отсюда, как и из формулы (26.29), следует, что имеет место явление, отмеченное в п. 2°. Возможно также дифференцирование по параметру μ .

4°. Рассмотрим подобное обобщение на общий показатель степени в (26.49) для полиномов $P_n(t)$. Можно применить формулу (26.34) при $\lambda = 1/2$ с учетом дополнения к ней. Однако в таком случае необходимо исследовать асимптотику функции ${}_2F_1$ при больших значениях параметра, что не является легкой задачей. Имеется также другой метод: можно использовать соотношение

$$a_n = \int_0^1 P_n(t) [F(t) + (-1)^n F(-t)] dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} P_n(\cos \vartheta) [F(\cos \vartheta) + (-1)^n F(-\cos \vartheta)] \sin \vartheta d\vartheta \quad (26.52)$$

и разложение (13.30), после чего к каждому члену полученного разложения следует применить формулу (10.87). Однако построение полного асимптотического разложения для a_n с помощью данного метода тоже затруднительно. Все же можно убедиться в том, что оценка $A_n = O(n^{-\mu-1/2})$ сохраняется при $\mu \in N$ и вклады от концов асимптотически равны нулю.

5°. Для функции (26.49) коэффициенты разложения по полиномам Эрмита с учетом (26.26) исследуются аналогично тому, как в п. 1°, если $f_1(t) \in C^\infty(-\infty, \alpha]$, $f_2(t) \in C^\infty[\alpha, \infty)$. Однако для оценки остатка $R_k(n)$ в соотношении

$$A_n = e^{-\alpha^2} \sum_{j=0}^k [\varphi_2^{(j+m)}(\alpha) - \varphi_1^{(j+m)}(\alpha)] H_{n-m-j-1}(\alpha) / 2^n n! \sqrt{\pi} + R_k(n) \quad (26.53)$$

следует применить другой метод. Остаток с учетом (26.26) имеет вид

$$R_k(n) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\alpha} \varphi_1^{(k+m+1)}(\tau) e^{-\tau^2} H_{n-k-m-1}(\tau) d\tau + \int_{\alpha}^{\infty} \varphi_2^{(k+m+1)}(\tau) e^{-\tau^2} H_{n-k-m-1}(\tau) d\tau \right] = R_{k1}(n) + R_{k2}(n).$$

Допустим, что интегралы $\int_{-\infty}^{\alpha} [\varphi_1^{(k+m+1)}(\tau)]^2 e^{-\tau^2} d\tau$ и $\int_{\alpha}^{\infty} [\varphi_2^{(k+m+1)}(\tau)]^2 e^{-\tau^2} d\tau$ сходятся. Тогда к каждому слагаемому в выражении для $R_k(n)$ можно применить неравенство Коши—Буняковского с учетом $e^{-\tau^2} = e^{-\tau^2/2} e^{-\tau^2/2}$. Для $R_{k2}(n)$ будем иметь оценку

$$\begin{aligned} |R_{k2}(n)| &< \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{\alpha}^{\infty} [\varphi_2^{(n+m+1)}(\tau)]^2 e^{-\tau^2} d\tau} \times \\ &\times \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} H_{n-m-k-1}^2(\tau) d\tau} = \frac{M \sqrt{2^{n-k-m} (n-k-m-1)!}}{2^n n!} = \\ &= O \left(\left(\frac{e}{2n} \right)^{n/2} n^{-(k+m)/2-3/4} \right). \end{aligned}$$

Такую же оценку получаем для $R_{k1}(n)$. Поскольку члены в

(26.53) согласно (21.65) при фиксированном m имеют оценку $O((e/2n)^{n/2}n^{-(m+j)/2-1})$ и из них можно выделить сильно неравномерную шкалу для сильноасимптотического разложения, то (26.53) дает требуемое асимптотическое выражение. Из (26.53) следует, что $A_n = O((e/2n)^{n/2}n^{-m/2-1})$, поэтому в случае полиномов Эрмита коэффициенты имеют иной порядок, чем в предыдущих подпунктах, так как сказывается влияние бесконечного промежутка ортогональности.

26.4. Применение аналитического продолжения разлагаемой функции

26.4.1. Рассмотрим сначала случай, когда имеем ортогональность на сегменте $[a, b]$. Пусть функция $F(t)$ аналитична в круге $|t| \leq \alpha$, содержащем $[a, b]$. Выразив ее в (26.17) с помощью интеграла Коши и изменив порядок интегрирования, получим

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L K(n, z) F(z) dz, \quad (26.54)$$

где L — замкнутая кривая, охватывающая отрезок $[a, b]$, а

$$K(n, z) = \int_a^b \frac{\rho(t) q_n(t)}{z-t} dt. \quad (26.55)$$

Эта функция определена для всех z , кроме $z \in [a, b]$.

Для построения асимптотического разложения a_n к интегралу (26.54) можно применить метод, изложенный в § 25, т. е. можно использовать особые точки функции $F(t)$. Допустим, что $F(t)$ аналитически продолжаема во всей плоскости, за исключением изолированных особых точек. Данный случай отличается от изложенного в § 25 тем, что вместо ядра z^{-n-1} имеем более общее ядро $K(n, z)$ и поэтому получаем более сложную шкалу. В связи с этим часто приходится использовать асимптотическое разложение для $K(n, z)$ при $n \rightarrow \infty$ и несколько модифицировать соответствующие теоремы п. 22.1.

В случае полиномов Гегенбауэра $C_n^\lambda(t)$ согласно (26.33) будем иметь $K_\lambda(n, z) = -\Omega(z, n, \lambda, -1)$. В рассмотренных выше частных случаях эта функция является элементарной. Для $T_n(t)$ имеем

$$K_0(n, z) = \pi / [\sqrt{z^2-1} (z + \sqrt{z^2-1})^n], \quad (26.56)$$

а для $P_n(t)$ —

$$K_{1/2}(n, z) = 2Q_n(z), \quad (26.57)$$

где $Q_n(z)$ — функция Лежандра второго рода. Обе формулы непосредственно выводятся из (26.55). Методы получения (26.57) указаны в [18]. Формулу (26.56) можно доказать, если в (26.55) $(z-t)^{-1}$ разложить по степеням t и применить (26.30), (26.43) и (24.17). Функция $z + \sqrt{z^2 - 1}$ понимается как аналитическое продолжение действительной функции при $z = x > 1$ в z -плоскости с разрезом вдоль $[-1, 1]$.

С помощью формул (2.11.4), (2.11.16) и (2.9.2) из [2], связывающих функции ${}_2F_1$ с разными аргументами, из (26.33) получаем

$$\Omega(z, n, \lambda, \mu) = \frac{\pi e^{\pm i\pi\mu} \Gamma(n-\mu) \Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(-\mu) \Gamma(\lambda) 2^{\lambda-1} n! \Gamma(n+\lambda+1)} \frac{(z^2-1)^{(\lambda+\mu)/2}}{(\sqrt{z^2-1}+z)^{n+\lambda}} \times \\ \times {}_2F_1(\lambda+\mu+1, -\lambda-\mu; n+\lambda+1; (\sqrt{z^2-1}-z)/2\sqrt{z^2-1}), \quad (26.58)$$

где знаки « \pm » согласуются с условием $|\arg(-1-z)| \leq \pi$ [см. (26.33)]. Разрез взят вдоль $(-\infty, 1]$. Из (26.58) другим путем получаем (26.56) и (26.57). Формула (26.58) дает асимптотическое разложение для $\Omega(z, n, \lambda, \mu)$ при $n \rightarrow \infty$ в ряд обратных факториалов. Разложение по степеням n^{-1} можно найти либо путем преобразования ряда (26.58), либо из последнего интеграла в (26.33) методом перевала с использованием точки перевала $\tau = z - \sqrt{z^2 - 1}$. При $\mu = -1$ разложение по степеням $(n+\lambda)^{-1}$ методом дифференциальных уравнений получено в [43].

Из (26.58) вытекает, что

$$K_\lambda(n, z) = \frac{\pi \Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda) 2^{\lambda-1} \Gamma(n+\lambda+1)} \frac{(z^2-1)^{(\lambda-1)/2}}{(\sqrt{z^2-1}+z)^{n+\lambda}} [1 + O(1/n)], \quad (26.59)$$

поэтому при асимптотической оценке a_n $K_\lambda(n, z)$ можно заменить на правую часть (26.59).

При деформировании контура L через полюсы или существенно особые точки или при огибании петли вокруг разреза в случае точки ветвления особые точки следует упорядочить так, чтобы в полученном разложении образовалась шкала. Для этого необходимо учесть, что $|z + \sqrt{z^2 - 1}| = c > 1$ на эллипсе E_c с полуосями $a = (1/2)(c + c^{-1})$, $b = (1/2)(c - c^{-1})$, $z = (1/2)(ce^{i\varphi} + c^{-1}e^{-i\varphi})$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Поэтому особые точки следует упорядочить относительно семейства E_c . Предположим, что $c_0 = \min c$ достигается в особой точке $z = z_0$.

26.4.2. Рассмотрим случай, когда z_0 — m -кратный полюс и на E_{c_0} функция $F(t)$ других особых точек не имеет. Функция $K_\lambda(n, z)$ согласно (26.33) при $\mu = -1$ аналитична в z -плоскости с разрезом вдоль $[-1, 1]$, поэтому путь L можно деформировать через z_0 . Асимптотический вклад $B(z_0)$ от точки z_0 для a_n

равен вычету функции $K_\lambda(n, z)F(z)$ в z_0 . Пусть в круге с центром z_0 , ограниченном окружностью L_0 , $F(z) = \sum_{k=1}^m b_k (z-z_0)^{-k} + \Phi(z)$, где $\Phi(z)$ — аналитическая в круге функция. Тогда

$$B(z_0) = - \sum_{k=1}^m b_k \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} (z-z_0)^{-k} K_\lambda(n, z) dz = \\ = \sum_{k=1}^m b_k \int_{-1}^1 \frac{\rho(t) C_n^\lambda(t)}{(t-z_0)^k} dt = \sum_{k=1}^m b_k \Omega(z_0, n, \lambda, -k). \quad (26.60)$$

С учетом (26.58) для $B(z_0)$ получаем асимптотическое разложение в ряд обратных факториалов. При $\lambda > 0$ согласно (26.58) хотя бы один член в (26.60) разлагается в бесконечный ряд, и при выборе степенной шкалы получаем $a_n \sim B(z_0)$, т. е. другие особые точки не следует учитывать. Но можно применить более общую шкалу $B(z_k)$. Согласно (26.58) и (26.60) имеем

$$a_n = \begin{cases} \mathcal{O}(c_0^{-n} n^{m+\lambda-2}) & \text{в случае } C_n^\lambda(t), \lambda \neq 0, \\ \mathcal{O}(c_0^{-n} n^{m-1}) & \text{в случае } T_n(t). \end{cases} \quad (26.61)$$

Другим методом в случае $T_n(t)$ вклад $B(z_0)$ вычислен в [42].

Если $F(t)$ имеет только полюсы и существует такое число ω , что $F(t) = O(t^\omega)$ при $|t| \rightarrow \infty$, то рассмотренный прием дает *новый метод для вычисления a_n* в явном виде. Поэтому в случае мероморфной функции $F(t)$ целесообразно применить ее разложение на простейшие дроби. Например, в силу [7]

$$(\operatorname{tg} \alpha t)/t = (8\alpha/\pi^2) \sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1)^2 - 4\alpha^2 t^2/\pi^2]^{-1}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (26.62)$$

имеем

$$a_n = \int_{-1}^1 t^{-1} \operatorname{tg} \alpha t P_n(t) dt = (4/\pi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left[Q_n \left(\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha} \right) - Q_n \left(-\frac{\pi(2k+1)}{2\alpha} \right) \right]. \quad (26.63)$$

Отсюда $a_{2n+1} = 0$, а для a_{2n} согласно (26.59) при $\lambda = 1/2$ получаем

$$a_{2n} \sim (8\alpha / [\sqrt{\pi n} (\pi^2 - 4\alpha^2)^{1/4} (\pi + \sqrt{\pi^2 - 4\alpha^2})^{1/2}]) \\ \times [2\alpha / (\pi + \sqrt{\pi^2 - 4\alpha^2})]^{2n}. \quad (26.63')$$

26.4.3. Пусть z_0 — точка ветвления для $F(t)$. Если $F(t) = (t-z_0)^\mu$, то согласно (26.33) имеем $a_n = \Omega(z_0, n, \lambda, \mu)$. Но a_n выражается также с помощью (26.54). При $\mu < n$ согласно (26.59) кривую L можно деформировать в петлю Π_0 вокруг разреза, идущего по лучу $\arg(z-z_0) = \arg z_0$, поэтому

$$\int_{\Pi_0} (z-z_0)^\mu K_\lambda(n, z) dz = \Omega(z_0, n, \lambda, \mu). \quad (26.64)$$

Из (26.59) следует, что функции $\Omega(z_0, n, \lambda, \mu+k)$ образуют шкалу. Поэтому, аналогично тому как в п. 22.1, легко доказать, что в случае разложения

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{\mu+k}, \quad (26.65)$$

имеющего место в окрестности точки z_0 , при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$a_n = \sum_{k=0}^m b_k \Omega(z_0, n, \lambda, \mu+k) + O(c_0^{-n} n^{\lambda-2-\mu-m}). \quad (26.66)$$

Отсюда следует, что (26.61) сохранится, если m заменить на $-\mu$.

Имеется также другой метод, согласно которому используются результаты п. 22.1. Пусть L — эллипс E_c , $c < c_0$. Применим в (26.54) подстановку $z = (u+u^{-1})/2$, $u = z + \sqrt{z^2-1}$, которая эллипс E_c отображает на окружность L_c . Получаем

$$a_n = \frac{1}{4\pi i} \int_{L_c} F((u+u^{-1})/2) (1-u^{-2}) K(n, (u+u^{-1})/2) du. \quad (26.67)$$

Если в окрестности основной критической точки z_0 применить (26.65) и (26.59), то интеграл (26.67) будет иметь ядро $u^{-n-\lambda-1}$, а новая функция нагрузки $F_1(u)$ в окрестности новой критической точки u_0 будет обладать разложением $F_1(u) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k (u-u_0)^{\mu+k}$, $u_0 = z_0 + \sqrt{z_0^2-1}$, $|u_0| = c_0$. Затем можно применить результаты п. 22.1 и получить разложение по другой шкале. Основные трудности этого метода связаны с нахождением коэффициентов B_k . Метод является весьма удобным в случае применения полиномов $T_n(t)$.

26.4.4. Если z_0 — трансцендентная точка ветвления или существенно особая точка, то от функции $F_1(t)$ целесообразно отщепить основной множитель и применить метод перевала, как

в § 25. При этом можно также обойтись без подстановки и непосредственно разложить интеграл (26.54) с учетом (26.59). Некоторые примеры такого типа приведены в [44, 429].

Нередко более эффективным средством является применение ряда (26.43), который либо является рядом обратных факториалов, либо преобразуем в асимптотическое разложение. В [22] показано, что в случае более общих полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ из членов ряда (26.43) можно образовать асимптотическую шкалу, если $F(t)$ — целая функция порядка $\rho < 2$.

В качестве примера при $\rho = 2$ рассмотрим $F(t) = \operatorname{Erf}(\lambda t)$ и $q_n(t) = T_n(t)$. В силу нечетности $F(t)$ и четности $T_{2n}(t)$ имеем $a_{2n} = 0$. Согласно (26.43) и (26.30) получаем

$$a_{2n+1} = \int_{-1}^1 \operatorname{Erf}(\lambda t) T_{2n+1}(t) (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = (-1)^n \sqrt{\pi} \frac{\lambda^{2n+1}}{2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k} \Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right)}{k! \Gamma(2n+k+2)}. \quad (26.68)$$

Члены ряда имеют одинаковый порядок и не образуют шкалу. Если к Γ -функциям применить формулу Стирлинга и ряд перегруппировать, то получим

$$a_{2n+1} \sim (-1)^n \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda^2 e}{4n} \right)^n n^{-3/2} e^{-\lambda^2/2}. \quad (26.69)$$

Некоторые примеры для $P_n(t)$ приведены в [21].

26.4.5. Хотя в п. 26.4.1—26.4.3 предположено, что $F(t)$ аналитична в круге $|t| \leq 1$, это требование не обязательно и полученные результаты сохраняются и в том случае, когда $F(t)$ в упомянутом круге вне отрезка $[-1, 1]$ имеет полюсы или точки ветвления. Лишь в случае трансцендентных точек ветвления нельзя применить ряд (26.43), но следует использовать метод перевала.

Отметим еще некоторые модификации рассмотренных методов, приведенные в [21] для $P_n(t)$.

1°. В интеграле (26.17) можно вначале применить формулу Родрига (26.18) и n раз проинтегрировать по частям, а затем $F^{(n)}(t)$ выразить с помощью формулы Коши. В случае $C_n^\lambda(t)$ получим

$$a_n = (-1)^n K_n n! \frac{1}{2\pi i} \int_L F(z) dz \int_{-1}^1 \left(\frac{t^2-1}{t-z} \right)^{n+1} (1-t^2)^{\lambda-3/2} dt. \quad (26.70)$$

К внутреннему интегралу, аналогичному интегралу в (26.33), следует применить метод перевала и затем для каждого полученного члена построить асимптотическое разложение с учетом особых точек $F(z)$. Как и в п. 26.4.3, ядро имеет основной множитель $(z + \sqrt{z^2 - 1})^{-n-1}$, и поэтому данная модификация метода не имеет преимуществ по сравнению с предыдущим. В [22] этот метод применяется и в случае $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, $L_n^\alpha(t)$ и $H_n(t)$.

2°. В примерах (26.63) и (26.68) функция $F(t)$ четная или нечетная. В таких случаях часть коэффициентов обращается в нуль, поэтому иногда целесообразно применять другие формулы Родрига. Например, для $P_n(t)$ имеем

$$P_{2n}(t) = \frac{t}{n!} \frac{d^n}{(dt^2)^n} [t^{2n-1} (t^2 - 1)^n]. \quad (26.71)$$

Рассмотрим случай, когда $F(t) = c(1 + \beta t^2)^{-\lambda}$, $\beta > -1$, $\beta \neq 0$, $-\lambda \in \mathbb{N}$. Подстановкой $t^2 = u$, использованием (26.71) и интегрированием по частям получим

$$a_{2n} = c(-1)^n \beta^n \Gamma(n + \lambda) / (n! \Gamma(\lambda)) \int_0^1 \left(\frac{u - u^2}{1 + \beta u} \right)^n \frac{du}{\sqrt{u}(1 + \beta u)^\lambda}. \quad (26.72)$$

К (26.72) можно применить метод Лапласа с учетом критической точки $u_h = (1 + \sqrt{1 + \beta})^{-1}$. Согласно (16.26) имеем оценку

$$a_{2n} \sim c(-1)^n \beta^n n^{\lambda-3/2} (\sqrt{\pi}/\Gamma(\lambda)) (1 + \sqrt{1 + \beta})^{-2n-1/2} (1 + \beta)^{-\lambda/2+1/4} \quad (26.73)$$

При $c = 8\alpha/\pi^2$, $\beta = -4\alpha^2/\pi^2$, $\lambda = 1$ полученный результат совпадает с (26.63').

26.4.6. В случае полиномов Эрмита $H_n(t)$ можно применить методы, указанные выше. При этом следует учесть, что в формуле Коши для $F(t)$ кривая $L = L^+ + L^-$, где L^+ и L^- — прямые, параллельные действительной оси и расположенные по разным сторонам от нее. Кроме того, они находятся в той горизонтальной полосе Π , в которой $F(t)$ аналитична. Чтобы сохранить формулы (26.54) и (26.55), вначале предположим, что при $t \rightarrow \infty$, $t \in \Pi$ $F(t) = O(t^{-\alpha})$, $\alpha > 0$.

Согласно (26.55) и формуле Родрига для $H_n(t)$ после интегрирования по частям при $z \in L$ имеем

$$\begin{aligned} K(n, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} H_n(t)}{z - t} dt = n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{(z - t)^{n+1}} dt = \\ &= (ie)^{n+1} \sqrt{\pi} 2^{n+1} n! H_{-n-1}(ie z), \quad \varepsilon = -\text{sign Im } z. \end{aligned} \quad (26.74)$$

Формула (26.74) приведена в [86]. В несколько ином виде она встречается также в [146]. Функция $K(n, z)$ исследована в [83]. С учетом формулы (18.127) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$N_n^{-2} K(n, z) \sim (ie)^{n+1} n^{-1/2} (e/2n)^{n/2} \exp(-iez\sqrt{2n} - z^2/2). \quad (26.75)$$

С помощью этого соотношения согласно (26.54) и п. 22.1 можно построить асимптотическое выражение для A_n при любом виде особых точек функции $F(t)$. Легко видеть, что эти точки следует расположить в порядке возрастания расстояния от действительной оси. В силу (26.75) требование для $F(z)$ в (26.54) можно снизить до $F(z) = O(e^{\alpha z^2})$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in \Pi$, $\alpha < 1/2$.

Пусть наиболее близкая к этой оси особая точка — простой полюс $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда

$$A_n = O(n^{-1/2} (e/2n)^{n/2} \exp(-|y_0|\sqrt{2n})). \quad (26.76)$$

Сравнение (26.76) с оценками, приведенными в п. 26.3.2, 5°, показывает, что порядок в последнем равенстве ниже. Следовательно, явление, что порядок A_n ниже, если особые точки функции $F(t)$ находятся вне промежутка ортогональности, будет общим для классических ортогональных полиномов независимо от длины промежутка ортогональности.

Если $F(t)$ — целая функция, то иногда сохраняется метод, основанный на формуле (26.43). Более подробные выражения для A_n в случае полиномов $H_n(t)$ и $L_n^\alpha(t)$ при наличии точки ветвления у $F(t)$ приведены в [22].

26.5. Некоторые другие методы

26.5.1. *Применение интегральных представлений полиномов.* Поскольку ортогональные полиномы имеют разные интегральные представления, то можно было ожидать, что для исследования асимптотики a_n целесообразно в (26.17) вместо $q_n(t)$ подставить соответствующий интеграл и изменить порядок интегрирования. Однако большинство таких формул непригодно, так как множитель, содержащий n , часто зависит еще от обеих переменных интегрирования. Например, нецелесообразно в случае $P_n(t)$ применять формулу

$$P_n(\cos \theta) = (1/\pi) \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^n d\varphi.$$

Трудно также в полученных таким путем формулах учитывать особые точки функции $F(t)$, но именно они имеют определяющее значение в асимптотике a_n . В некоторых случаях все же

с помощью указанного метода можно построить асимптотические представления a_n . Кроме того, иногда этот метод при конкретном $F(t)$ дает новый прием для вычисления a_n в явном виде. Рассмотрим несколько примеров.

1°. В силу формулы Дирихле—Мелера [2, 10.9(32)] имеем

$$C_n^\lambda(\cos \vartheta) = \frac{2^{1-\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma^2(\lambda)} \sin^{1-2\lambda} \vartheta \int_0^\vartheta \frac{\cos(n+\lambda)\varphi}{(\cos \varphi - \cos \vartheta)^{1-\lambda}} d\varphi, \quad (26.77)$$

$\vartheta \in [0, \pi]$, $\lambda > 0$. Согласно (26.17) получаем

$$a_n = -\frac{2^{1-\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma^2(\lambda)} \int_0^\pi \cos(n+\lambda)\varphi d\varphi \int_{-1}^{\cos \varphi} F(t) (\cos \varphi - t)^{\lambda-1} dt. \quad (26.78)$$

Если $F(t) = (1+t)^\mu f(t)$ или $F(t) = (1-t)^\mu f(t)$, $f(t) \in C^\infty[-1, 1]$, то внутренний интеграл можно разложить по степеням $(1 \pm \cos \varphi)$ и построить асимптотическое разложение для a_n . Отдельные интегралы вычисляются методом, указанным в конце п. 26.2.2, 4°. При $\lambda = 1/2$ такое разложение несколько иным методом приведено в [21]. Гораздо труднее применить формулу (26.78), когда функция $F(t)$ недостаточно гладкая внутри промежутка интегрирования. Даже в случае простой функции (26.22), где m заменено на $\mu > -1$, $\mu \in \mathbb{N}$, с трудом можно доказать оценку $a_n = O(n^{-\mu+\lambda-2})$.

2°. В случае полиномов Эрмита наиболее подходящей будет формула

$$H_n(t) = (n!/2\pi i) \int_{|z|=\varepsilon} \exp(2tz - t^2) z^{-n-1} dz, \quad (26.79)$$

которая следует из (26.36). После изменения порядка интегрирования в (26.17) получаем

$$a_n = (n!/2\pi i) \int_{|z|=\varepsilon} z^{-n-1} dz \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-(t-z)^2} dt. \quad (26.80)$$

Пусть $F(t)$ определена формулой (26.22), где m заменено на $\mu \in \mathbb{N}$. В силу (8.44) имеем

$$a_n = (n! \Gamma(\mu+1) / 2\pi i) \int_{|z|=\varepsilon} \exp[-\zeta^2 - (n+1) \ln z] [aH_{-\mu-1}(-\zeta) + bH_{-\mu-1}(\zeta)] dz, \quad (26.81)$$

$\zeta = \alpha - z$. Поскольку на $|z| = \varepsilon$ максимум модуля подынтегральной функции в (26.81) достигается вблизи мнимой оси, то для $H_{-\mu-1}(\pm \zeta)$ можно использовать разложение (8.45) и к каждому члену применить метод перевала с критическими точками $z_k = \pm i\sqrt{(n+1)/2}$. В итоге получаем оценку $A_n = O((\varepsilon/2n)^{n/2} n^{-\mu/2-1})$, которая согласуется с оценкой, приведенной в п. 26.3.2, 5°.

3°. Рассмотрим еще в случае полинома Эрмита пример на вычисление интеграла (26.80), когда $F(t) = \exp(\alpha t^2 + \beta t)$, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{1-\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha} \int_{|z|=\varepsilon} \exp \left[- \left(\frac{i\sqrt{\alpha}z + i\beta/2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \right)^2 \right] z^{-n-1} dz = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{1-\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha} \left(\frac{i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \right)^n \int_c \frac{e^{-u^2} du}{(u - \beta i/2\sqrt{\alpha} - \alpha^2)^{n+1}} = \\ &= \left(\frac{-i\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \right)^n \sqrt{\frac{\pi}{1-\alpha}} e^{\beta^2/4(1-\alpha)} H_n \left(\frac{\beta i}{2\sqrt{\alpha} - \alpha^2} \right). \quad (26.82) \end{aligned}$$

При $\beta = 0$ и четном n получаем (26.37).

26.5.2. *Применение интегральных преобразований.* 1°. Вместо функции $F(t)$ в (26.17) можно подставить не только интеграл Коши, но и другое общее интегральное выражение. Для весьма широкого класса функций $F(t)$ можно выразить с помощью формулы обращения преобразования Лапласа и a_n представить в виде контурного интеграла. Поскольку упомянутая формула выражает $F(t)$ только при $t > 0$, то вначале предположим, что $a \geq 0$. Тогда согласно (22.82) имеем

$$a_n = (1/2\pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} K^*(p, n) h(p) dp, \quad (26.83)$$

где

$$K^*(p, n) = \int_a^b e^{pt} \rho(t) q_n(t) dt, \quad (26.84)$$

$h(p) \doteq F(t)$. Можно применить также другие интегральные преобразования.

Функция $F(t)$ определена в $[0, \infty)$, поэтому часто целесообразно область ортогональности привести к этому промежутку. Если берем полиномы $q_n(t) = C_n^\lambda (1 - 2e^{-\sigma t}) \equiv \tilde{C}_n^\lambda(t)$, $\sigma > 0$, ко-

торые ортогональны в $[0, \infty)$ с весом $\rho(t) = e^{-\sigma(\lambda+1/2)t} (1 - e^{-\sigma t})^{\lambda-1/2}$, то подстановкой $x = 1 - 2e^{-\sigma t}$, применением формулы Родрига и интегрированием по частям получаем

$$a_n = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{2^{2\lambda-1} n! \Gamma(\lambda)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(p/\sigma+n) \Gamma(\lambda+1/2-p/\sigma)}{\Gamma(p/\sigma) \Gamma(n+2\lambda+1-p/\sigma)} h(p) dp, \quad (26.85)$$

$\gamma \in (\gamma_0, \sigma(\lambda+1/2))$, γ_0 — абсцисса сходимости интеграла Лапласа от $F(t)$. Интеграл (26.85) является частным случаем (23.98), асимптотика которого рассмотрена в п. 23.5.3.

2°. В случае $a < 0$ необходима некоторая модификация прежнего метода. Пусть $F_1(t) = F(t)\eta(t)$, $F_2(t) = F(t)\eta(-t)$, где

$$\eta(t) = 1 \text{ при } t > 0, \quad \eta(0) = 1/2, \quad \eta(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (26.86)$$

Отсюда $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$. Пусть $F(t) \doteq h_1(p)$, $F(-t) \doteq h_2(p)$. Тогда при всех t

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} e^{pt} h_1(p) dp + \int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty} e^{pt} h_2(-p) dp \right]. \quad (26.87)$$

Эту формулу обращения следует применить в общем случае. Здесь γ_i выбраны так, чтобы функция $h_1(p)$ была аналитической справа от пути интегрирования, а $h_2(-p)$ — слева.

Применение (26.87) при разложении по $C_n^\lambda(t)$ приводит к ядру $p^{-\lambda} I_{n+\lambda}(p)$. Этот результат можно получить также другим методом: функцию e^{pt} в (26.87) разложить согласно формуле [2, 7.15(1)]

$$e^{pt} = 2^\lambda \Gamma(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) C_n^\lambda(t) p^{-\lambda} I_{\lambda+n}(p), \quad |\arg p| < \pi, \quad \lambda > 0, \quad (26.88)$$

поменять формально порядок интегрирования и суммирования и приравнять коэффициенты при $C_n^\lambda(t)$. Получаем

$$K(n, p) = K^*(n, p) N_n^{-2} = 2^\lambda \Gamma(\lambda) (n+\lambda) p^{-\lambda} I_{\lambda+n}(p). \quad (26.89)$$

Однако для исследования асимптотики a_n интеграл (26.83) с ядром (26.89) мало пригоден. Его можно применить к вычислению A_n при некоторых конкретных $F(t)$. Примеры в случае, когда $q_n(t) = T_n(t)$, приведены в [44].

3°. Идею метода, рассмотренного в п. 2°, можно модифицировать: допустить, что в ряд по полиномам $C_n^\lambda(p)$ разложено

изображение $h(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$. Тогда по $C_n^\lambda(p)$ следует разложить e^{-pt} , поменяв в (26.88) местами p и t . Обозначив коэффициенты разложения для $h(p)$ через A_n , получаем

$$A_n = (-1)^n 2^\lambda \Gamma(\lambda) (\lambda + n) \int_0^{\infty} I_{n+\lambda}(t) t^{-\lambda} F(t) dt. \quad (26.90)$$

Но и эта формула обладает указанным в п. 2° недостатком. Кроме того, для сходимости интеграла (26.90) следует требовать, чтобы при $t \rightarrow \infty$ $F(t) = O(e^{-t} t^{\lambda-1/2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Условие такого вида можно ослабить, если вместо преобразования Лапласа применить преобразование Фурье. Однако и в этом случае интегральное представление для A_n в основном применимо для конкретного вычисления A_n . Некоторые примеры приведены в [88]. Применение упомянутых преобразований рассмотрено также в [429].

26.6. Библиографические сведения

26.6.1. Асимптотические представления коэффициентов степенных рядов начал исследовать Коши. В первой его работе [34] рассмотрено асимптотическое представление коэффициентов некоторых рядов Лагранжа—Бюрмана, причем формально почти таким же образом, как в п. 25.5.1. Там же можно обнаружить идею метода перевала, однако она недостаточно обоснована. В работе [35] без доказательства приведена формула (25.74). Кроме того, Коши исследовал асимптотику коэффициентов также по формулам (25.2) и (25.2'). В частности, им получено разложение (25.10). Толчок к дальнейшим исследованиям асимптотики коэффициентов дала работа Дарбу [37].

Сравнительно общая теория, немногим отличающаяся от изложенной в п. 25.2, дана в малоизвестной работе Ами [56], в которой приведена также дополнительная библиография по данному вопросу. Автор этой работы первым систематически использует деформирование контура в (25.2) вокруг разреза, чтобы получить асимптотическое разложение вклада по петле. Кроме того, подстановкой $z = 1/K(t)$ к полученным результатам он приводит исследование об асимптотике интеграла $\int_L K^n(t) h(t) dt$, тем самым образуя новую модификацию метода перевала. Доказанные Ами теоремы по асимптотике указанного интеграла родственны теоремам 19.1 и 19.2. Рассматривается также интеграл, в котором $h(t)$ имеет логарифмическую особенность в точке перевала, т. е. анализируются частные случаи п. 24.2.3.

Из работ, посвященных дальнейшим исследованиям материала, изложенного в п. 25.2.2, следует отметить [46, 52]; в [16] без достаточного обоснования приведена формула (25.13). Асимптотика полиномов Лежандра методом Дарбу рассмотрена в [11, 12, 37, 76]. Случай логарифмических особенностей исследован в [8 (2-е изд.), 48, 90]. В последней работе разложение сначала дано по более сложной шкале. Оценки коэффициентов в случае алгебраических и логарифмических особенностей разлагаемой функции получены также другими методами, без использования формулы (25.2). В этой связи следует отметить работы [64, 72]. В [64] асимптотика коэффициентов в (25.26) при $\mu \in N$ найдена дифференцированием по λ разложения для $(1-t)^{\lambda-1}$. Функции с более общими логарифмическими особенностями этим методом рассмотрены в [41]. К упомянутым работам примыкают также те, в которых ищется асимптотическое поведение $f^{(n)}(z)$ при $n \rightarrow \infty$ исходя из функционального уравнения, которому удовлетворяет $f(z)$. Первыми в этом направлении являются работы [73, 77].

Коэффициенты для функций с существенно особыми точками начал исследовать Фейер [50, 51]. Он рассмотрел случай, когда в (25.28) $\vartheta = \pi$, $\nu = 1$. Его результаты при $\vartheta \neq \pi$ пополнил Перрон [78] и добавил к функции также фактор $\ln^k [1/(1-t)]$, $k \in N$. С помощью подстановки упомянутые авторы построение разложения приводят к методам Лапласа или стационарной фазы. Харди [58] с помощью метода, приведенного в п. 25.5.3, рассматривает случай, когда $\nu \in (0, 1]$, а Фабер [49] обобщенным методом перевала — случай, когда $\nu \in N_1$. Во всех упомянутых работах дается только асимптотическое выражение коэффициента.

Полное разложение в случае, когда в (25.39) $\nu \in N_1$, $\nu_j \in N_1$ и добавлен логарифмический множитель, впервые построено в работе [62], а самый общий случай рассмотрен в [95]. Построение разложения по функциям Бесселя при $\nu = 1$ предложено Райтом в [91]; в этой работе применяется метод, изложенный в п. 25.3.1, 1°. Разложение по функциям Бесселя — Райта рассмотрено в [93]. В работах Райта [92, 93] показан пример (25.41), когда путь деформируется во внутреннюю сторону круга сходимости. Более подробные сведения об асимптотике бесконечных произведений, связанных с задачами комбинаторного анализа, будут рассмотрены в п. 29.5 и 29.6.

Библиография по общей теории, охватывающей п. 25.3 и 25.4, проанализирована в п. 25.4.5. Формулу (25.61) при других обозначениях и других условиях можно найти в [61], если в ней $n+1$ заменить на n . Подобная формула для интеграла по φ при $|\varphi| \in [0, \rho]$ дана в [55], однако при весьма сильных

условиях относительно класса допустимых функций. В этой работе предполагается, что интеграл по остальной части окружности $|t| = u_n$ входит в остаток разложения. Коэффициенты разложения функции $\exp P_n(t)$ в случае действительных коэффициентов полинома $P_n(t)$ исследованы в [71]; там же приведена дополнительная литература.

Коэффициенты (25.50) часто исследовались при $m=0$, $\beta=1$, когда $A_n n! = G_n$ называются *числами Белла*. Фактически Белл в [27] рассматривал коэффициенты Φ_k в более общем разложении $\exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k / k! \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k t^k / k!$, т. е. некоторую модификацию (19.29). Полученные им свойства коэффициентов Φ_k легко перенести на коэффициенты B_k в (19.30). Асимптотическое выражение для G_n исследовано в [4, 8 (1-е изд.), 49, 70, 76]. Оно приводится также во многих работах по комбинаторному анализу. Исследованы и некоторые обобщения чисел Белла.

Числа $\Phi_k k!$ называются *полиномами Белла*, причем это название сохраняется также в более общем случае, когда показательная функция в верхнем равенстве заменена общей аналитической функцией. Разные применения этих чисел в комбинаторном анализе рассмотрены в [419]. Числа Белла до $n=51$ приведены в [70].

Случай, когда в (25.50) $m=1$, $\beta=1$, исследован в [60, 61]. Кроме того, коэффициент функции $\exp_k t$ рассмотрен в [49], а коэффициенты более сложных показательных функций, принадлежащих классу H , — в [63]. Асимптотика коэффициентов (25.67) исследована в работах [8 (1-е и 2-е изд.), 63], но рассуждения в них недостаточно обоснованы и результаты не совпадают с (25.67). Содержание п. 25.4.3 и 25.4.6 изложено в [15].

Необходимость исследования асимптотики коэффициентов разных степенных рядов для производящих функций появляется во многих задачах комбинаторного анализа и теории вероятностей (см., например, [9, 10]). Теорию производящих функций можно найти в [2, 243]. Их значение в задачах комбинаторного анализа показано в [9]. Таблица производящих функций приведена в [2].

Асимптотика коэффициентов функции, обратной к функции (25.71), при $\beta=1$ рассмотрена разными авторами в [6, 35, 76]. Кроме Коши формула (25.74) без доказательства приведена также Мейселем в [68, 69], причем в последней работе фактор $\left[1 + \frac{1}{3(n+1/2)} + O(n^{-4/3}) \right]$ заменен на 1, а $(n+1/2)^{4/3}$ — на $(n+\alpha_n)^{4/3}$, $\alpha_n \in [0,25; 0,37]$. Однако из работы неясно, каким образом получен этот результат. Асимптотика коэффициентов

функции, обратной к (25.75), исследована в [87]. Первый из примененных в п. 25.5.1 методов предложен Коши [34], а второй — Ватсоном [6].

Теорема 25.2 доказана в [117] и приведена также в [28]. Идея метода, изложенного в п. 25.5.3, в частном случае при $\Phi(t) \equiv e^t$ дана в [58]. Имеется несколько работ, например [1, 40], в которых оценка для A_n приводится исходя из геометрических свойств функции $f(z)$, а не из расположения ее особых точек. Но асимптотическое разложение для A_n таким путем построить нельзя.

Отметим, что из асимптотического представления для A_n следует асимптотика для A_{n+1}/A_n при $n \rightarrow \infty$. Но асимптотике этого отношения посвящены также работы и в тех случаях, когда известны другие данные о коэффициентах A_n , например рекуррентная формула. Библиография по этому вопросу приведена в [30]. Исследуется также асимптотика при $n \rightarrow \infty$ частичной суммы $\sum_{k=0}^n A_k$ [17]. Отметим еще работу [94], в которой

оценка коэффициентов разложения $f(z+\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) z^n$ выражается с помощью $A_n(0)$. При этом для $A_n(\lambda)$ также используется формула Коши. Исследуется (например, в [10, 84]) также асимптотика коэффициентов, содержащих параметр, который одновременно с индексом стремится к ∞ .

26.6.2. Асимптотика решений дифференциальных уравнений изучена весьма подробно. Можно отметить монографии [5, 76], в которых указана дополнительная библиография по этому вопросу. С помощью такой асимптотики нетрудно найти асимптотику коэффициентов разложений по собственным функциям. Асимптотика коэффициентов рядов по ортогональным полиномам, напротив, изучена недостаточно. Частично это может быть связано с тем, что при исследовании сходимости этих рядов используется суммационная формула Кристофеля—Дарбу [16], а не асимптотика коэффициентов.

Большинство формул, рассмотренных в п. 26.2.2, содержится в [2, 16] и других монографиях по ортогональным полиномам. Из асимптотических оценок, полученных в п. 26.3.2, формула (26.51) приведена в работе [21], причем в ней используется иной метод, а результаты п. 26.3.2, 3° получены в [79]. Аналитическое продолжение разлагаемой функции $F(t)$ использовано в [21, 22, 42, 44, 45]. В [42, 44] рассмотрены полиномы $T_n(t)$, в [21] — $P_n(t)$, в [22] — $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, $L_n^\alpha(t)$, $H_n(t)$. В [45] приведены некоторые общие соображения и даны формула (26.33) и два примера в случае полиномов Лагерра. Применение ряда (26.43) предложено в работе [21]; из нее заимствован пример

(26.72). Там же в случае $P_n(t)$ применена формула Дирихле—Мелера.

Выражение коэффициентов Фурье с помощью интеграла обращения преобразования Лапласа связано с численным обращением этого преобразования (см. п. 22.6). Явные выражения для $K^*(p, n)$ в случае разных полиномов приведены в [3]. Формула (26.88) использована в [44].

Следует также учесть, что при исследовании оценки погрешности R_n квадратурных формул различных типов, основанных на использовании ортогональных полиномов $q_n(t)$, встречается интеграл, родственник (26.54), в котором $K(n, z)$ заменено на $K(n, z)/q_n(z)$. Его асимптотическое поведение исследовано в работах [36, 39, 45], в которых применены такие же методы, как в § 26, и получен первый член разложения при разных системах $\{q_n(t)\}$. Идея такого анализа впервые изложена в [26]. Метод применения ортогональных полиномов при построении квадратурных формул хорошо изложен в [2].

В заключение отметим, что рассмотренные методы иногда применяются при исследовании асимптотики коэффициентов разложений по другим ортогональным функциям. Но при исследовании асимптотики коэффициентов разложений по другим системам функций применяются иные методы. Таких исследований очень немного. В качестве примера отметим работы [23, 24], в которых дана оценка коэффициентов разложений по некоторой специальной системе аналитических функций. Несколько оценок коэффициентов ряда Дирихле по максимуму модуля функции, которой этот ряд сопоставляется в некотором асимптотическом смысле, можно найти в [111].

Возникает также вопрос о том, как найти асимптотические оценки коэффициентов рядов, если разлагаемая функция задана дифференциальным уравнением и соответствующими условиями, так как кроме степенных и тригонометрических рядов в последнее время к решению дифференциальных уравнений применяются и разные ряды по ортогональным полиномам, чаще всего по полиномам Чебышева.

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЯДАМИ

§ 27. АСИМПТОТИКА СУММ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

27.1. Общие теоремы

27.1.1. При исследовании асимптотики сумм степенных рядов следует различать случаи конечного и бесконечного радиуса сходимости. Сначала рассмотрим первый случай, причем без ограничения общности можем считать, что радиус сходимости $R=1$. Обозначим окружность $|z|=1$ через Γ . Если функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < 1, \quad (27.1)$$

можно аналитически продолжить через точку z_0 , $z_0 \in \Gamma$, то в некоторой малой окрестности z_0 $f(z)$ разлагается в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$, который одновременно является асимптотическим разложением $f(z)$ в окрестности z_0 . Поэтому наибольший интерес вызывает поведение $f(z)$ в окрестности особых точек на Γ . Известно, что по крайней мере одна такая точка на Γ находится [105].

Вопросы о поведении $f(z)$ и ряда (27.1) на Γ и о возможностях аналитического продолжения $f(z)$ вне Γ весьма сложны. Им посвящена огромная литература начиная с конца XIX в. Отметим некоторые монографии [100, 181], в которых эти вопросы освещены подробно. В них, а также в [102, 138] можно найти большинство доказательств нижеприведенных теорем. Несколько иным вопросам посвящена монография [118]. Многие теоремы по указанным вопросам имеют сложные формулировки, а их доказательства вместе с предварительными леммами занимают много страниц. Чтобы иметь представление о всем комплексе рассматриваемых вопросов, мы приводим без доказательства только основные и наиболее просто формулируемые теоремы.

Ряд (27.1) на Γ может сходиться во всех точках, может и расходиться во всех точках, и может быть промежуточный случай. Примеры показывают, что сходимость или расходимость ряда (27.1) в $z_0 \in \Gamma$ не может быть признаком аналитичности или неаналитичности функции $f(z)$ в z_0 . Если существует предел $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(re^{i\theta}) = A(\theta)$, то отсюда еще не следует, что $s_n(\theta) =$

$= \sum_{k=0}^n a_k e^{i\theta k} \rightarrow A(\theta)$. Пример $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{k^2}$, $\alpha \in (0, 1)$, показывает, что $f(e^{i\theta})$ может быть сколь угодно раз дифференцируемой функцией от $\theta \in [0, 2\pi]$, однако $f(z)$ не продолжима вне Γ (см. теорему 27.1.22). В связи с этим необходимо рассматривать разноеобразие теорем, характеризующих различные свойства $f(z)$ или $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

27.1.2, 1°. Рассмотрим некоторые теоремы о сходимости ряда (27.1) на Γ .

Теорема 27.1.1. Если $a_n = O(n^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, то ряд (27.1) сходится на Γ . Если $\lim a_n \neq 0$, то ряд (27.1) расходится на Γ .

Доказательство теоремы очевидно. Существуют ряды, расходящиеся во всех точках на Γ , для которых $\lim a_n = 0$ [236]. ■

Теорема 27.1.2. Если в (27.1) $a_n \rightarrow 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k-1}|$ сходится, то ряд (27.1) сходится во всех точках $z \in \Gamma$, кроме, может быть, в точке $z = 1$.

Доказательство следует из признака Дирихле [139]. Например, условиям теоремы удовлетворяет $a_n = 1/\ln \ln n$, $n \geq 3$. ■

Теорема 27.1.3 (теорема Фату—Рисса—Юнга [187, 275, 309]). Если $a_n \rightarrow 0$, то ряд (27.1) сходится в каждой точке на Γ , в которой $f(z)$ аналитична, причем сходимость равномерна на каждой замкнутой дуге на Γ , где $f(z)$ аналитична.

Более общие формулировки этой теоремы дали Рисс и Юнг.

Теорема 27.1.4. Если $a_n \rightarrow 0$ и $f(e^{i\theta})$ является функцией ограниченной вариации на некоторой дуге, принадлежащей Γ и содержащей точку $e^{i\theta}$, то ряд (27.1) в этой точке сходится [180].

Теорема 27.1.5 (теорема Литтльвуда [234]). Если $f(z) \rightarrow A$ при $z \rightarrow 1-0$ и $a_n = O(1/n)$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится к сумме A .

Таубером [286] эта теорема была доказана при предположении, что $a_n = o(1/n)$. Теорему можно обобщить для случая, когда $z \rightarrow 1$ по некоторому другому пути внутри круга $|z| \leq 1$. Условие $a_n = O(1/n)$ можно ослабить на $a_n > -c/n$, $c > 0$ (теорема Харди—Литтльвуда) [59].

Поведение частичных сумм $s_n(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k$ при $n \rightarrow \infty$ можно исследовать также при $|z| > 1$. Имеются некоторые исследования по этому вопросу. Например, справедлива следующая теорема Цудзи—Наруми [249, 288]. Пусть $a_n/a_{n+1} = 1 + o(1)$. Тогда равномерно относительно z в области $|z| \geq r > 1$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место $s_n(z) = a_n z^n [z/(z-1) + o(1)]$.

2°. Приводим некоторые теоремы о предельных значениях $f(z)$.

Теорема 27.1.6 (теорема Абеля [144]). Если $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$, то $\lim_{z \rightarrow 1-0} f(z) = A$. При действительных a_k теорема сохраняет силу, если $A = +\infty$.

Теорему Абеля можно обобщить, допустив при $A \neq \infty$ приближение $z \rightarrow 1$ внутри произвольного сектора с вершиной в $z=1$, лежащего внутри круга. Однако не всегда допустимы пути, касательные к Γ [133, 138]. Пример $f(z) = \exp[(1-z)^{-2}]$, $\lim_{r \rightarrow 0} f(1-re^{i\varphi}) = 0$ при $\varphi \in (\pi/4, \pi/2)$ показывает, что при $A = \infty$

указанное обобщение не всегда сохраняется. Для его сохранения имеются следующие достаточные условия: 1) $a_n \geq 0$; 2) ряд в указанном секторе удовлетворяет условию Прингсгейма [269]:

$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k| / \sum_{k=0}^{\infty} a_k |z|^k \geq \sigma > 0$. Кроме того, пример $f(z) = (1+z)^{-3}$ показывает, что $|s_n|$ может стремиться к $+\infty$ ($|s_n| \sim n^2/4$), но $f(z)$ остается аналитической в $z=1$.

Теорема 27.1.7 (теорема Фату [187]). Если $|f(z)| \leq M$ при $|z| < 1$, то $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(re^{i\theta})$ существует почти для каждого $\theta \in [0, 2\pi)$.

Эту теорему можно обобщить, если требовать ограниченность $f(z)$ только в некотором секторе круга [181] и θ брать на дуге, соответствующей этому сектору. В работе [274] доказано, что один и тот же предел может быть только при таких θ , которые образуют множество меры 0, если $f(z) \not\equiv \text{const}$. Вострецовым доказано [104], что для каждого ряда (27.1), сходящегося при $|z| < 1$, можно построить такую мажорантную функцию $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $|b_k| > |a_k|$, которая почти во всех точках на Γ имеет предельные значения.

Теорема 27.1.8 (теорема Монтеля—Линделефа [232, 248]). Если существует $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(re^{i\varphi})$ при $r \rightarrow 1-0$, то тот же предел существует также при $z \rightarrow e^{i\varphi}$ внутри сектора с вершиной в $z=e^{i\varphi}$, лежащего внутри круга, если только $f(z)$ ограничена в этом секторе.

3°. Далее приводим несколько теорем, в которых указывается расположение особых точек $f(z)$ на Γ . Имеется несколько необходимых и достаточных признаков того, чтобы точка $z_0 \in \Gamma$ являлась для $f(z)$ особой [100, 102, 138, 181], однако все они имеют сложную формулировку. Поэтому рассмотрим более простые достаточные признаки.

Теорема 27.1.9 (теорема Виванти [291]). Если при $k \geq k_0 \geq 0$ в (27.1) $a_k \geq 0$, причем для бесконечно многих k $a_k > 0$, то $z=1$ является особой точкой для $f(z)$.

Эта теорема обобщена Прингсгеймом [270]. В ней $a_k \geq 0$ заменено на $\operatorname{Re} a_k \geq 0$. Имеются также некоторые другие обобщения [100].

Теорема 27.1.10 (теорема Фабри [186]). Если для коэффициентов ряда (27.1) существует $\lim a_n/a_{n+1} = e^{i\varphi}$, то $z=e^{i\varphi}$ является особой точкой для $f(z)$.

Теорема 27.1.11 (теорема Адамара [201]). Если $c_k = \int_0^1 t^k v(t) dt$ и интеграл $\int_0^1 |v(t)| dt$ сходится, то ряд $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k z^k$ имеет те же особые точки, что и ряд (27.1).

Доказательство следует из соотношения

$$g(z) = \int_0^1 f(zt) v(t) dt. \quad \blacksquare \quad (27.2)$$

Ясно, что в случае произведения более чем двух коэффициентов такого вида теорема сохраняет силу. При $v(t) = t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} / \Gamma(\beta-\alpha)$, $\beta > \alpha > 0$, имеем $c_k = \Gamma(k+\alpha) / \Gamma(k+\beta)$. Если условие о сходимости интеграла не выполнено, то иногда можно рассматривать функции $f_m(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k$ и $g_m(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k a_k z^k$.

Утверждение теоремы сохраняется при условии, что интеграл $\int_0^1 |v(t)| t^m dt$ сходится. Например, при $v(t) = (\ln 1/t)^{\beta-1} t^{\alpha-1} / \Gamma(\beta)$, $\beta > 0$, $\alpha > -m$, имеем $c_k = (k+\alpha)^{-\beta}$, $k \geq m$.

4°. В разных теоремах указывается тип особых точек.

Теорема 27.1.12. Для того чтобы $f(z)$, определенная рядом (27.1), была рациональной функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа b_0, b_1, \dots, b_q такие, что при всех $k > p \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\sum_{j=k-q}^k a_j b_{k-j} = 0, \quad a_{-j} = 0, \quad j \in \mathbb{N}_1. \quad (27.3)$$

Тогда $f(z) = P_p(z) / Q_q(z)$, где $P_p(z)$, $Q_q(z)$ — полиномы.

Доказательство теоремы следует из формулы (4.17).

Необходимые и достаточные условия рациональности функции $f(z)$ можно выразить и в другом виде [100, 181]. Имеются также необходимые и достаточные условия для того, чтобы единственными особыми точками на Γ для $f(z)$ были полюсы. Приведем некоторые более простые теоремы.

Теорема 27.1.13. Если при $|z| > 1$ $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$, $b_n = O(n^m)$ и в (27.1) $a_n = O(n^m)$, $m \in \mathbb{N}$, то каждая изолированная особая точка на Γ является полюсом порядка не выше $m+1$ или же на Γ находятся дуги, состоящие из особых точек [281].

Теорема 27.1.14. Если $a_n \rightarrow 0$, то функция $f(z)$, определенная рядом (27.1), на Γ полюсов не имеет [287].

Назовем $z_0 \in \Gamma$ алгебраической особой точкой для $f(z)$, если в окрестности z_0 $f(z) \asymp A(z-z_0)^\lambda$, $A \neq 0$.

Теорема 27.1.15 (теорема Цудзи [289]). Если можно найти такие действительные числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, что в (27.1) $a_n \asymp n^{\lambda_0} \ln^{\lambda_1} n \dots \ln_m^{\lambda_m} n$, то на Γ находится хотя бы одна неалгебраическая особая точка для $f(z)$. Исключение может представить собой случай, когда λ_0 — рациональное число, отличное от целого отрицательного, и $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Теорема 27.1.16 (теорема Эгмона [147]). Если в (27.1) $a_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$ и $z=1$ — единственная особая точка для $f(z)$, то либо она является единственной особой точкой также для $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/a_k$, либо все точки на Γ — особые для $g(z)$.

Теорема 27.1.17 (теорема Ло [226]). Если при $n \geq n_0$ в (27.1) $a_n = g(1/n)$ и ряд $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится при $|z| \leq 1/n_0$, то главная ветвь аналитического продолжения $f(z)$ аналитична в плоскости с разрезом вдоль $[1, \infty)$.

Имеются также другие теоремы такого вида [181].

27.1.3. Многие теоремы относятся к рядам специального типа. Отметим некоторые из них.

1°. Пусть кроме (27.1) задан еще ряд $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Тогда ряд

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k \quad (27.4)$$

называется композицией Адамара первых двух рядов. Если радиус сходимости ряда (27.1) — R_1 , ряда для $g(z)$ — R_2 , то для $h(z)$ имеем $R \geq R_1 \cdot R_2$.

Теорема 27.1.18 (теорема Адамара [203]). Если конечное множество всех изолированных особых точек для $f(z)$ и ее аналитического продолжения обозначить через A , а для $g(z)$ — через B , то особые точки функции $h(z)$ могут принадлежать только множеству $A \circ B$, элементами которого является любое произведение $\alpha\beta$, где $\alpha \in A$, $\beta \in B$.

Более общая формулировка теоремы Адамара приведена в [100]. Доказательство опирается на формулу

$$h(z) = (1/2\pi i) \int_{|t|=\Theta/R_2} f(tz)g(1/t)t^{-1}dt, \quad (27.5)$$

где $|z| \leq \eta R_1 R_2$, $\eta \in (0, 1)$, $\Theta \in (1, 1/\eta)$. Действительно, подынтегральная функция аналитична в кольце $|t| \in [1/R_2, \Theta/R_2]$, поэтому значение интеграла совпадает с коэффициентом при t^{-1} в ряде Лорана подынтегральной функции, т. е. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$. До-

казательство проводится с помощью анализа возможностей деформирования пути интегрирования при выходе точки z из первоначального круга. Таким образом, интеграл (27.5) дает аналитическое продолжение для $h(z)$.

Не все элементы множества $A \circ B$ обязательно должны быть особыми точками для $h(z)$. Например, если $a_k = 0$ при $k = 2m + 1$, $b_k = 0$ при $k = 2m$, то $h(z) \equiv 0$ и особых точек нет. Многие работы посвящены уточнению этого вопроса. Приводим две теоремы.

Теорема 27.1.19 (теорема Поля [266]). Если $f(z)$ во всей расширенной плоскости имеет только особую точку $z=1$, то $g(z)$ и $h(z)$ имеют одни и те же особые точки, кроме, быть может, $z=\infty$ и $z=0$ (для других ветвей $h(z)$).

Теорема 27.1.20 (теорема Юнгена—Вильсона [64, 297]). Если $f(z)$ и $g(z)$ — рациональные функции, то и $h(z)$ рациональна. Если $f(z)$ рациональна, $g(z)$ — алгебраическая, то $h(z)$ — алгебраическая функция. Если $f(z)$ и $g(z)$ имеют только алгебраически-логарифмические особые точки на Γ , то особые точки такого же типа на Γ имеет и $h(z)$.

Исследуются и другие композиции, например композиция Гурвица, когда в (27.4) $a_k b_k$ заменено на $\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_{k-j}$ [100]. Тогда радиусы сходимости и особенности складываются. Исследуются также ряды, имеющие только конечное число разных коэффициентов, и ряды с целыми коэффициентами.

2°. Ряды, в которых бесконечное подмножество коэффициентов равно нулю, называются лакунарными. Приводим некоторые теоремы о лакунарных рядах, применяя обозначение

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}$, $\lambda_k \in N$, $\lambda_k \uparrow + \infty$. Обычно лакунарными называют

только такие степенные ряды, для которых $\overline{\lim} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \infty$.

Теорема 27.1.21 (теорема Мандельбротта—Цудзи [242, 289]). Если в $\{\lambda_k\}$ можно найти такую бесконечную подпоследовательность $\{\lambda_{k_j}\}$, что при всех k_j $\lambda_{k_{j+1}} - \lambda_{k_j} \geq t > 1$, то $f(z)$ имеет на Γ не менее чем t алгебраических особенностей или же неалгебраическую особую точку.

Теорема 27.1.22 (теорема Фабри [186]). Если $n/\lambda_n \rightarrow 0$, то все точки окружности Γ являются особыми для $f(z)$.

Из этой теоремы в качестве частного случая вытекает теорема Адамара [201]: все точки Γ особые для $f(z)$, если $\lambda_{k+1} > (1+\Theta)\lambda_k$, $\Theta > 0$. Имеются разные дополнения к теореме Фабри, допускающие присутствие еще некоторых добавочных членов в ряду. Однако Фабер [185] построил пример, когда $\overline{\lim} (n/\lambda_n) = 0$, но $f(z)$ на Γ имеет только одну особую точку. Полюа показал пример [268], когда теорема Фабри неверна, если $\overline{\lim} (n/\lambda_n) > 0$.

Теорема 27.1.23. Если $\lim (n/\lambda_n) = \gamma$, то $f(z)$ имеет хотя бы одну особую точку на каждой дуге, принадлежащей Γ и имеющей длину не меньше $2\pi\gamma$ [105].

Несмотря на теорему Адамара справедлива также

Теорема 27.1.24 (теорема Пели—Вейсс [295]). Если $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq q > 1$, $a_n \rightarrow 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$, то для каждого заданного числа A можно найти такое $\varphi \in [0, 2\pi)$, что $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\varphi \lambda_k} = A$.

3°. Не только для лакунарных рядов Γ может состоять лишь из особых точек $f(z)$. Об этом свидетельствует

Теорема 27.1.25 (теорема Фату—Гурвица—Полюа [187, 218]). В ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \epsilon_k z^k$, где $\epsilon_k = \pm 1$, знаки ϵ_k можно выбрать так, чтобы для суммы ряда Γ состояла лишь из особых точек.

Эта теорема и ей подобные приводят к заключению [100], что продолжаемые вне Γ степенные ряды являются исключением среди всех степенных рядов с $R=1$.

27.2. Теорема Апелля—Чезаро и ее дополнения

27.2.1. Теоремы, приведенные в п. 27.1, свидетельствуют о том, что в общем случае исследование асимптотического поведения $f(z)$ на Γ будет весьма трудной задачей. Поэтому в ос-

новном рассмотрим поведение $f(z)$ в окрестности точки $z=1$ в случаях, когда эта точка особая для $f(z)$. В некоторых частных случаях такое исследование легко выполнимо. В данном пункте рассмотрим грубый метод, основанный на непосредственном сравнении рядов, а в следующем — применение интегральных представлений.

Теорема 27.2.1 (теорема Апелля—Чезаро [152, 172]).

Пусть 1) в разложении $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ коэффициенты b_k действительны и при $k \geq k_0 \geq 0$ $b_k > 0$; 2) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ расходится; 3) в ряду (27.1) $a_k \sim \gamma b_k$, где γ — некоторое заданное число. Тогда при $z \rightarrow 1-0$ имеет место соотношение

$$f(z) \sim \gamma g(z). \quad (27.6)$$

Формула (27.6) при условиях 1) и 3) сохраняется для целых функций при $z \rightarrow +\infty$, если $g(z)$ не является полиномом.

Доказательство. Из теоремы 27.1.6 следует, что $g(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow 1-0$, а согласно условию 3) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $m \in \mathbb{N}$, $m > k_0$, что при $k > m$ $|a_k - \gamma b_k| < \varepsilon b_k$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(z) - \gamma g(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - \gamma b_k) z^k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^m (a_k - \gamma b_k) z^k \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} (a_k - \gamma b_k) z^k \right| < \sum_{k=0}^m |a_k - \gamma b_k| + \varepsilon \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k z^k + \\ &+ \varepsilon \sum_{k=0}^m b_k z^k - \varepsilon \sum_{k=0}^m b_k z^k < \sum_{k=0}^m |a_k - \gamma b_k| + \varepsilon g(z) + \varepsilon \sum_{k=0}^m |b_k|. \end{aligned} \quad (27.7)$$

Поскольку $g(z) \rightarrow +\infty$, то можно найти такое $\delta > 0$, что при фиксированных ε и m и $z \in (1-\delta, 1)$ $\sum_{k=0}^m |a_k - \gamma b_k| < \varepsilon g(z)$ и $\sum_{k=0}^m |b_k| < \varepsilon g(z)$. Поэтому

$$|f(z) - \gamma g(z)| < 3\varepsilon g(z), \quad (27.8)$$

т. е. получаем (27.6).

В случае целых функций согласно условию, что $g(z)$ не является полиномом, и условию 1) легко показать (см. п. 27.5.1),

что при любом $m \in N$ $z^m = o(g(z))$, если $z \rightarrow +\infty$. Неравенство (27.7) следует изменить в таком виде:

$$|f(z) - \gamma g(z)| < z^m \sum_{k=0}^m |a_k - \gamma b_k| + \varepsilon g(z) + \varepsilon z^m \sum_{k=0}^m |b_k|.$$

Можно найти такое M , что при $z > M$ $z^m \sum_{k=0}^m |a_k - \gamma b_k| < \varepsilon g(z)$ и $z^m \sum_{k=0}^m |b_k| < g(z)$. Поэтому (27.8) сохраняется. Отметим, что в теореме не требуется, чтобы a_k были действительными. ■

Примечания. 1°. Теорема Апелля—Чезаро сохраняет силу при $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$. В этих случаях $a_k = o(b_k)$ или $b_k = o(a_k)$. Тогда вместо (27.6) имеем $f(z) = o(g(z))$ или $g(z) = o(f(z))$. При $\gamma = 0$ доказательство теоремы не изменяется, а второй случай следует из первого.

2°. Теорему можно обобщить и допустить, что $z = 1$ внутри сектора с вершиной в $z = 1$, принадлежащего единичному кругу, если в данном секторе удовлетворено условие Прингсгейма $\sum_{k=0}^{\infty} b_k |z|^k < \sigma_1 \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $\sigma_1 \in (0, \infty)$. Это утверждение следует из соответствующей модификации (27.7). Такое обобщение имело бы место и в случае целых функций, однако в силу $z^m = o(g(z))$, где m любое, $m \in N$, условие Прингсгейма обычно не удовлетворено.

3°. Иногда условие 3) теоремы не выполнено, но вместо этого имеем соотношение $s_k = \sum_{j=1}^k a_j \sim \gamma b_k$ или $\sigma_k = \sum_{j=0}^k s_j \sim \gamma b_k$.

Тогда с учетом равенства $f(z)/(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$ получаем

$$f(z) \sim \gamma(1-z)g(z) \text{ или } f(z) \sim \gamma(1-z)^2 g(z). \quad (27.9)$$

Идея, примененная при выводе (27.9), обобщается следующим образом [149]. Пусть ряды $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$ и $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k$ сходятся при $|z| < 1$ и $z = 1$ для этих функций является особой точкой. Если коэффициенты разложений $f(z)F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ и

$g(z)G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$ удовлетворяют условиям теоремы Апелля—Чезаро и $\alpha_k \sim \gamma \beta_k$, то при $z \rightarrow 1-0$ $f(z) \sim g(z)G(z)/F(z)$. В частном случае, когда $F(z) = (1-z)^{-\lambda}$, $G(z) = (1-z)^{-\mu}$, $S_k^\lambda(f) \sim \gamma S_k^\mu(g)$, где обозначено $S_k^\alpha(f) = \sum_{j=0}^k \binom{j+\alpha-1}{j} a_{k-j}$ и выпол-

нены условия теоремы Апелля—Чезаро, имеем $f(z) \sim \gamma(1-z)^{\lambda-\mu}g(z)$.

4°. Теорема Абеля следует из теоремы Апелля—Чезаро при $s_k \sim A$ и $g(z) = (1-z)^{-1}$.

27.2.2. Успешное применение теоремы Апелля—Чезаро связано с удачным выбором *стандартной функции* $g(z)$. В силу транзитивного свойства символа « \sim » достаточно знать асимптотическое выражение для a_k , поэтому можно воспользоваться результатами § 25. Во многих практически встречаемых случаях в качестве стандартной функции можно брать (25.26):

$$g(z) = (1-z)^{\lambda-1} (z^{-1} \ln 1/(1-z))^{\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\lambda, \mu) z^k; \quad (27.10)$$

$$b_k(\lambda, \mu) \sim \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} k^{-\lambda} \ln^{\mu} k \quad \text{при } \lambda < 1; \quad (27.10')$$

$$b_k(1, \mu) \sim \mu k^{-1} \ln^{\mu-1} k \quad \text{при } \mu > 0. \quad (27.10'')$$

При других значениях λ и μ $\lim_{z \rightarrow 1} g(z) \neq \infty$, поэтому $g(z)$ не является стандартной функцией. Рассмотрим несколько примеров.

1°. Пусть $f_1(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{km}$, $m \in N_2$. Согласно теореме 27.1.22 Γ для $f(z)$ является особой линией. Поскольку $s_n \sim n^{1/m}$, то согласно (27.9), (27.10) и (27.10') при $\lambda = -1/m$, $\mu = 0$ имеем

$$f_1(z, m) \sim \Gamma(1+1/m) (1-z)^{-1/m}, \quad z \rightarrow 1-0.$$

2°. Аналогично для $f_2(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{km}$, $m \in N_2$, имеем $s_n \sim \ln n / \ln m$, поэтому согласно (27.9), (27.10) и (27.10') при $\lambda = 0$, $\mu = 1$ $f_2(z, m) \sim \frac{1}{\ln m} \ln \frac{1}{1-z}$, $z \rightarrow 1-0$. Для $f_2(z, m)$ Γ тоже является особой линией. Полное асимптотическое разложение для $f_1(z, m)$ приведено в (29.3), а для $f_2(z, m)$ и родственных функций — в [208].

3°. Рассмотрим гипергеометрическую функцию

$${}_{q+1}F_q(z) = A \sum_{k=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{q+1} \Gamma(k+\alpha_j) / \prod_{j=1}^q \Gamma(k+\beta_j) \right] z^k / k!, \quad (27.11)$$

$$A = \prod_{j=1}^q \Gamma(\beta_j) / \prod_{j=1}^{q+1} \Gamma(\alpha_j),$$

при действительных значениях параметров. Это ограничение не является существенным. Функция $(1/\Gamma(\alpha)) \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(k+\alpha) z^k/k! = (1-z)^{-\alpha}$ имеет единственную особую точку $z=1$. Дифференцируя последнее соотношение, можно убедиться в том, что при любом полиноме $Q_m(k)$ функция $\sum_{k=0}^{\infty} Q_m(k) \Gamma(k+\alpha) z^k/k!$ обладает тем же свойством.

Если к (27.11) нельзя непосредственно применить теорему 27.1.11 (например, при $\alpha_j > \beta_j$) в случае, когда $c_k = \Gamma(k+\alpha_j)/\Gamma(k+\beta_j)$, то числитель в (27.11) согласно рекуррентной формуле для Γ -функции следует преобразовать и отделить полином $Q_m(k)$, чтобы такое применение стало возможным. Таким образом, с помощью теоремы 27.1.11 всегда можно доказать, что ${}_{q+1}F_q(z)$ имеет только одну особую точку $z=1$ и функция (27.11) аналитически продолжима в разрезанной плоскости с разрезом вдоль $[1, \infty)$. С учетом (12.62) имеем $a_n \sim An^{\mu-1}$, $\mu = \sum_{j=1}^{q+1} \alpha_j - \sum_{j=1}^q \beta_j$. Поэтому при $z \rightarrow 1-0$ получаем

$$\begin{aligned} {}_{q+1}F_q(z) &\sim A\Gamma(\mu)(1-z)^{-\mu} \text{ при } \mu > 0, \\ {}_{q+1}F_q(z) &\sim A \ln(1/(1-z)) \text{ при } \mu = 0. \end{aligned} \quad (27.12)$$

При $\mu < 0$ ряд (27.11) в точке $z=1$ сходится. Можно показать, что (27.12) сохраняется во всей окрестности $z=1$ в разрезанной плоскости (см. п. 27.4.2, 1°).

4°. Формулы (27.9) и им подобные позволяют иногда получать оценки суммы рядов со знакопеременными и даже комплексными коэффициентами, так как γ в теореме 27.2.1 не должен быть обязательно действительным числом.

Рассмотрим ряд $f_3(z, m) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^{mk}$, $m \in N_2$. Поскольку имеем $\sigma_{m, 2n} = \sum_{k=1}^n m^{2k} - \sum_{k=1}^n m^{2k-1} \sim [m/(m+1)]m^{2n}$, то $\sigma_k \sim mk/(m+1)$ и согласно (27.9) при $g(z) = (1-z)^{-2}$ получаем $f_3(z, m) \sim m/(m+1)$, $z \rightarrow 1-0$.

В качестве второго примера берем $f_4(z, \omega, m) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \omega^k$, $\omega = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \neq 0$. Поскольку $s_{n, m} = (1-\omega^{n+1})/(1-\omega)$, то $\sigma_k \sim k/(1-\omega)$ и $f_4(z, \omega, n) \sim 1/(1-\omega)$ при $z \rightarrow 1-0$.

5°. С помощью упомянутых формул иногда можно найти асимптотику $f(z)$ также при $z \rightarrow e^{i\varphi}$, $\varphi \neq 0$. Например, для ряда $f_1(re^{i\varphi}, 2)$ при $\varphi = 2\pi p/q$, $p \in N_1$, $q \in N_1$, $p < q$, $(p, q) = 1$ получаем

$f_1(re^{i2\pi p/q}, 2) \sim \frac{1}{2q} \sqrt{\frac{\pi}{1-r}} \sum_{k=0}^{q-1} e^{i2\pi p k^2/q}$, $r \rightarrow 1-0$. В основе этого соотношения лежит формула $\sum_{k=0}^n e^{i2\pi p k^2/q} \sim (n/q) \sum_{k=0}^{q-1} e^{i2\pi p k^2/q}$ при $n \rightarrow \infty$, которую можно доказать группированием членов суммы (в каждой группе q членов) с помощью элементарных рассуждений.

27.2.3. Имеются также другие теоремы, похожие на теорему Апелля—Чезаро. Приводим две из них.

Теорема 27.2.2 (теорема Харди [171]). Пусть $a_k > 0$, $a_k \downarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = T$. Тогда при $z \rightarrow 1-0$

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s_k z^k \sim T/2, \quad s_k = \sum_{j=0}^k a_j. \quad (27.13)$$

Доказательство. Существование T следует из признака Лейбница. Пусть $\sigma_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k s_k$, $\sigma_n^* = \sum_{k=0}^n \sigma_k$, $\tau_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, $\tau_n \sim T$. Легко видеть, что $\sigma_{2n} = \sum_{k=0}^n a_{2k}$, $\sigma_{2n-1} = -\sum_{k=0}^n a_{2k-1}$, $\sigma_{2n}^* = \sum_{k=0}^n \tau_{2k}$, $\sigma_{2n-1}^* = \sum_{k=1}^n \tau_{2k-1}$. Далее применяется следующая

Теорема 27.2.3 (теорема Штольца [139, 285]). Пусть $c_n \uparrow \infty$ или $a_n \rightarrow 0$, $c_n \downarrow 0$. Тогда $\lim (a_n/c_n) = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{c_n - c_{n-1}}$, если только предел в правой части существует.

Поскольку $\sigma_{2n}^* \rightarrow \infty$, $\sigma_{2n-1}^* \rightarrow \infty$, то, выбрав в этой теореме $c_n = n$, получаем $\sigma_{2n}^*/2n \sim \tau_{2n}/2 \sim T/2$, $\sigma_{2n-1}^*/(2n-1) \sim \tau_{2n-1}/2 \sim T/2$. Поэтому $\sigma_n^* \sim nT/2$ и согласно (27.9) $h(z) \sim T/2$. ■

Теорема 27.2.4 (теорема Прингсгейма [269]). Пусть 1) $L(x)$ — непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая и медленно изменяющаяся функция, т. е. $L(x) \in \mathcal{L}$; 2) $L(x)$ обладает свойством (6.24') и $L(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$; 3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ в области S , в которой $|z| \leq 1$, $|\arg(1-z)| \leq \varphi_0 < \pi/2$, $\operatorname{Re} z > -\cos 2\varphi_0$, удовлетворяет условию Прингсгейма; 4) $a_n \sim \gamma n^\lambda [L(n)]^\mu$, $\lambda \geq 0$, $\mu = \pm 1$, $\gamma \neq 0$. Тогда при $z \rightarrow 1$, $z \in S$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \sim \gamma \Gamma(\lambda+1) (1-z)^{-\lambda-1} [L(1/|1-z|)]^\mu. \quad (27.14)$$

В случае, когда $L(x) = (\ln_m x)^q (\ln_{m+1} x)^{q_1} \dots (\ln_{m+k} x)^{q_k}$, $m \geq 1$, $q > 0$, подобный результат при $z \rightarrow 1-0$ доказывался Лас-

кером [225], но некоторые частные случаи были рассмотрены раньше [279].

Иногда асимптотическое выражение для $f(z)$ при $z \rightarrow 1-0$ можно уточнить.

Теорема 27.2.5. Пусть 1) в (27.1) $a_k = \sum_{j=0}^m c_j \varphi_j(k) + R_m(k)$, где функции $\varphi_j(k)$ образуют шкалу при $k \rightarrow \infty$ и $\varphi_j(k) \rightarrow +\infty$, $j \in N$; 2) $R_m(k) = o(\varphi_m(k))$; 3) $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_j(k) z^k = h_j(z)$, $|z| < 1$. Тогда при $z \rightarrow 1-0$

$$f(z) = \sum_{j=0}^m c_j h_j(z) + o(h_m(z)). \quad (27.15)$$

Доказательство. Из первого условия следует, что при $k \geq k_0$ $\varphi_j(k) > 0$, поэтому согласно примечанию 1 к теореме Апелля—Чезаро функции $h_j(z)$ образуют шкалу. По той же теореме, $\sum_{k=0}^{\infty} R_m(k) z^k = o(h_m(z))$ при $z \rightarrow 1-0$. ■

Уточнение другого вида в случае одного конкретного класса рядов дано в [107].

27.3. Применение интегральных представлений и суммационных формул

27.3.1. Степенные ряды разными способами можно превратить в интегралы. В качестве примеров отметим формулы (27.2) и (27.5). Однако многие из таких интегральных представлений, в том числе (27.2) и (27.5), трудно применить к исследованию асимптотики $f(z)$ при $z \rightarrow e^{i\psi}$.

Простейший способ для нахождения интегрального представления ряда (27.1) — выразить коэффициенты ряда a_k с помощью интеграла и поменять местами действия интегрирования и суммирования. Формулы (27.2) и (27.5) тоже основаны на этой идее. В простейших случаях для a_k и тем самым для $f(z)$ возможны разные интегральные представления. Но, как уже отмечено, не все они пригодны для исследования асимптотики $f(z)$. Поэтому иногда заранее выбирается подходящая форма интеграла и изучается тот класс рядов, для которых такое представление возможно.

Попытаемся представить $f(z)$ в виде

$$f(z) = \int_L \Phi(t) (1 - z\varphi(t))^\lambda dt, \quad (27.16)$$

где λ , функции $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ и путь интегрирования L выбраны так, чтобы в ряду (27.1) $a_k = (-1)^k \binom{\lambda}{k} \int_L \Phi(t) \varphi^k(t) dt$, если только такой выбор возможен. В частности, при $\lambda = -1$, $\varphi(t) = t^{-1}$, $\Phi(t) = h(t)/t$ в (27.16) получаем интеграл типа Коши.

Допустим, что путь L можно деформировать в путь L_1 так, чтобы при деформировании отщепилась нерегулярная часть $f_1(z)$ для асимптотического представления функции $f(z)$ при $z \rightarrow e^{i\psi}$ в виде вычетов или интегралов по петлям. Если на L_1 в силу равенства

$$1 - z\varphi(t) = e^{-i\psi} z (1 - e^{i\psi} \varphi(t)) \left[1 + \frac{e^{i\psi} - z}{z(1 - e^{i\psi} \varphi(t))} \right] \quad (27.17)$$

функцию $[1 - z\varphi(t)]^\lambda$ при малых $|e^{i\psi} - z|$ можно разложить по степеням $(e^{i\psi} - z)/z$, то этим будет построено асимптотическое разложение функции $f(z) - f_1(z)$ в окрестности граничной точки $e^{i\psi}$. Возможны также некоторые модификации и обобщения. Интеграл (27.16) часто одновременно выражает аналитическое продолжение для $f(z)$. К сожалению, класс таких функций узок.

Пусть, в частности, при $|\beta + \gamma| \in N$

$$a_k = \frac{e^{-i\pi(\beta+\gamma)}}{2i \sin \pi(\beta+\gamma)} \int_{L_0} e^{-(\alpha+k)t} t^{\beta-1} (1 - e^{-t})^{\gamma-1} \Phi(t) dt, \quad (27.18)$$

где $\alpha > 0$, L_0 — петля, охватывающая в положительном направлении разрез вдоль $[0, \infty)$, $\Phi(t)$ — на L и внутри ее аналитична, $\arg t = 0$, $\arg(1 - e^{-t}) = 0$ на верхнем берегу разреза. При $\beta + \gamma - 1 > 0$ имеем

$$a_k = \int_0^\infty e^{-(\alpha+k)t} t^{\beta-1} (1 - e^{-t})^{\gamma-1} \Phi(t) dt, \quad (27.18')$$

что позволяет также брать $\beta + \gamma \in N_2$.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{e^{-i\pi(\beta+\gamma)}}{2i \sin \pi(\beta+\gamma)} \int_{L_0} e^{-\alpha t} t^{\beta-1} (1 - e^{-t})^{\gamma-1} \Phi(t) (1 - ze^{-t})^{-1} dt. \quad (27.19)$$

Разложив $(1 - ze^{-t})^{-1}$ по степеням z , в силу (27.18) при $|z| < 1$ получим (27.1). Приблизив контур L_0 к разрезу, можно убедиться в том, что $f(z)$ аналитична в разрезанной z -плоскости с разрезом вдоль $[1, \infty)$. Таким образом, интеграл (27.19) дает

аналитическое продолжение для (27.1). Если контур L_0 передвинуть через точку $t = \ln z$, где логарифм принимает главное значение, и взять новый контур L_1 , то на нем можно использовать (27.17) и $(1 - ze^{-t})^{-1}$ разложить в ряд по степеням $(1-z)/z$, сходящимся при достаточно малых $|1-z|$. Вычет в точке $t = \ln z$ подинтегральной функции в (27.19) дает нерегулярную часть асимптотического представления при $z \rightarrow 1$, причем это представление справедливо при $|\arg(1-z)| < \pi$. Иногда методом, изложенным в п. 14.2.5, 1°, из (27.19) можно найти также асимптотическое разложение аналитического продолжения $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ (см. п. 27.4.1, 2°).

27.3.2. 1°. Рассмотрим интегралы, связанные с преобразованием Лапласа. Вводим ступенчатую функцию

$$h(t) = \sum_{k=0}^n a_k \text{ при } t \in [n, n+1). \quad (27.20)$$

С помощью формулы (24.72), т. е. преобразования Абеля, легко доказать [182], что при $\operatorname{Re} p > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t) dt &= (1/p) \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-pk} = (1/p) f(e^{-p}) = \\ &= [\ln(1/(1-x))]^{-1} f(1-x), \end{aligned} \quad (27.21)$$

где $e^{-p} = 1-x$.

Если при достаточно больших n $h(n) = s_n \sim g(n)$, где функция $g(t)$ определена при $t \geq t_0 \geq 0$ и $g(n+\theta) \sim g(n)$, $\theta \in (0, 1)$, то $h(t) \sim g(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда, из поведения $g(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ по соответствующим теоремам об асимптотике интеграла Лапласа (см. § 18, 31, 32) при $p \rightarrow +0$ согласно (27.21) можно судить о поведении $f(1-x)$ при $x \rightarrow 0$. При этом иногда целесообразно применять соотношение $\ln(1/(1-x)) \sim x$ при $x \rightarrow +0$.

Если задана асимптотика коэффициента $a_n \sim G(n)$, то вводим функцию $h_0(t) = h(t) - h(t-1) = a_n$ при $t \in [n, n+1)$. Пусть имеет место $G(n+\theta) \sim G(n)$. Тогда $h_0(t) \sim G(t)$. С другой стороны,

$$h_0(t) = h(t) - h(t-1) = (1/p) [f(e^{-p}) - e^{-p} f(e^{-p})] \sim f(1-x). \quad (27.22)$$

Выбрав конкретные $g(t)$ или $G(t)$, можно сформулировать соответствующие теоремы о поведении $f(1-x)$ при $x \rightarrow 0$. В случаях, когда для изображения функции $h(t)$ или $h_0(t)$ можно построить асимптотическое разложение при $p \rightarrow \infty$, согласно (27.21) соответствующее разложение получим также для

$f(1-x)$. Таким образом, данный метод является более гибким, чем использование теоремы Апелля—Чезаро. В качестве примера приведем следующий аналог теоремы Прингсгейма 27.2.4.

Теорема 27.3.1. Пусть $s_n = \sum_{k=0}^n a_k \sim An^\lambda L(n)$, $\lambda > -1$, $L(t) \in \mathcal{L}$, $A \neq 0$. Тогда при $x \rightarrow +0$

$$f(1-x) \sim A\Gamma(\lambda+1)x^{-\lambda}L(1/x). \quad (27.23)$$

Если $a_n \sim An^\lambda L(n)$, то при $x \rightarrow +0$

$$f(1-x) \sim A\Gamma(\lambda+1)x^{-\lambda-1}L(1/x). \quad (27.24)$$

Доказательство следует из вышесказанного и теоремы 18.3.

Теорема, приведенная в п. 25.2.3, 5°, является обращением теоремы 27.3.1. Она следует из соответствующей тауберовой теоремы [182].

2°. Другой вид применения преобразования Лапласа тоже основан на п. 18.2.2. Пусть $h(t)$ — целая функция, $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k/k!$, $|h(t)| < Me^{t\omega}$ и $h(t) \sim Ae^{t^\lambda}L(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, $\lambda \in (-1, \omega)$, $A \neq 0$, $L(t) \in \mathcal{L}$. Имеем $h(t) \doteq (1/p)f(1/p)$. Согласно лемме 5.1 ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-k} = f(1/p)$ сходится при $|p| > 1$. Пусть далее $h_1(t) = h(t)e^{-t} \doteq f_1(p)$. Тогда $(1/p)f(1/p) = f_1(p-1)$. В силу теоремы 18.3 при $p \rightarrow 0$ $f_1(p) \sim A\Gamma(\lambda+1)p^{-\lambda-1}L(1/p)$, поэтому после подстановки $p = 1/z$ при $z = 1-0$ с учетом $p-1 = (1-z)/z$ получаем

$$\begin{aligned} f(z) &\sim A\Gamma(\lambda+1)z^{-1}(z/(1-z))^{\lambda+1}L(z/(1-z)) \sim \\ &\sim A\Gamma(\lambda+1)(1-z)^{-\lambda-1}L(1/(1-z)), \end{aligned}$$

т. е. ту же формулу (27.24), но при других условиях.

На основе изложенного метода можно построить асимптотическое разложение для $f(z)$ при $z \rightarrow 1$, $|\arg z| \leq \pi/2$, если $h(t) \sim e^t \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-\lambda_k}$ при $t \rightarrow +\infty$, $\lambda_k \uparrow \infty$. Тогда следует непосредственно применить формулы (18.63), (18.64) или (31.21). Если $\lambda_k \in N$, то при $z \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} f(z) \sim z^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma(1-\lambda_k) \left((1-z)/z \right)^{\lambda_k-1} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k d_k/k!) \left((1-z)/z \right)^k \right]. \quad (27.25) \end{aligned}$$

В случае, когда $h(t) \sim e^t \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{-k}$, при $z \rightarrow 1$ получаем

$$f(z) \sim z^{-1} \left[\ln(z/(1-z)) \sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k c_{k+1}/k!) ((1-z)/z)^k + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k d_k^*/k!) \left(\frac{1-z}{z} \right)^k \right]. \quad (27.26)$$

Выражения для d_k и d_k^* даны в п. 18.2.2, 4° или (31.21). При этом в (18.64) надо исправить опечатку: $\ln z$ заменить на $-\ln z$. Данный метод можно расширить при некоторых других видах разложения для $h(t)$, применяя результаты из п. 18.2.3 и § 31, 32.

Отметим, что часто соотношения между асимптотическими разложениями оригинала и изображения применяются в обратную сторону: по известной асимптотике для $f(z)$ строится разложение для $h(t)$ согласно § 22. Этот вопрос рассмотрим в п. 27.6.4.

27.3.3. Для представления степенных рядов с помощью интеграла обращения преобразования Меллина можно применить формулы (23.38) и (23.39). Рассмотрим сначала (23.39), т. е. формулу

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k = -\frac{1}{2i} \int_L z^t h(t) \operatorname{ctg} \pi t dt. \quad (27.27)$$

Чтобы допускать комплексные значения z и налагать при этом меньше условий на $h(t)$, рассмотрим интегралы второго рода, т. е. в качестве L берем петлю, охватывающую луч $[\sigma, \infty)$, $\sigma \in (-1, 0)$, в отрицательном направлении. Кроме того, разобьем L на верхнюю L^+ и нижнюю L^- части. На L^+ положим $(\operatorname{ctg} \pi t)/2i = -1/2 + (1 - e^{-i2\pi t})^{-1}$, а на L^- — $(\operatorname{ctg} \pi t)/2i = 1/2 + (e^{i2\pi t} - 1)^{-1}$. После таких преобразований интегралы по L^+ и L^- сходятся, когда функция $h(t)$ аналитична в полуполосе $|\operatorname{Im} t| < \varepsilon$, $\operatorname{Re} t \geq \sigma$ и при $|t| \rightarrow \infty$ имеет оценку $h(t) = O(e^{-A|t|^\alpha})$, $\alpha < 1$, $A \geq 0$. Если, кроме того, эти свойства сохраняются в полуплоскости $\operatorname{Re} t \geq \sigma$, то в интегралах, содержащих $(1 - e^{\pm i2\pi t})^{-1}$,

при $|\arg z| < \pi$, $|z| < 1$, кривые L^+ и L^- можно повернуть в вертикальные лучи. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k = \int_{\sigma}^{\infty} \exp(-t \ln(1/z)) h(t) dt - \int_{\sigma}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(-t \ln(1/z)) h(t)}{1 - e^{-i2\pi t}} dt - \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma} \frac{\exp(-t \ln(1/z)) h(t)}{e^{i2\pi t} - 1} dt, \quad (27.28)$$

где $\ln(1/z)$ принимает главное значение. Подобный результат получается из формулы Абеля—Плана (24.87).

Поскольку правая часть в (27.28) фактически не зависит от $\sigma \in (-1, 0)$, то после подстановки $t = \sigma \pm i\tau$ в (27.28) можно перейти к пределу при $\sigma \rightarrow -0$. Получаем

$$f(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t \ln(1/z)) h(t) dt + + i \int_0^{\infty} \frac{\exp(-i\tau \ln(1/z)) h(i\tau) - \exp(i\tau \ln(1/z)) h(-i\tau)}{e^{2\pi\tau} - 1} d\tau. \quad (27.29)$$

Первый интеграл в (27.29) при $\ln(1/z) \rightarrow 0$ можно разложить согласно п. 18.2.2 или § 31, а во втором интеграле согласно лемме 5.1 показательные функции следует разложить в ряд по степеням $\ln(1/z)$ и интегрировать почленно. В итоге получаем

$$f(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t \ln(1/z)) h(t) dt + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k/k!) (\ln(1/z))^k, \quad (27.30)$$

где

$$c_k = i \int_0^{\infty} [h(i\tau) e^{-i\pi k/2} - h(-i\tau) e^{i\pi k/2}] [\tau^k / (e^{2\pi\tau} - 1)] d\tau. \quad (27.31)$$

Таким образом, (27.30) дает асимптотическое разложение для $f(z)$ при $z \rightarrow 1-0$ по иным функциям, чем формулы (27.19), (27.25) и (27.26).

Если $h(t)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} t > \sigma$ имеет особые точки однозначного характера, то к правой части (27.28) следует добавить соответствующие вычеты. В случае точек ветвления к ней

добавляются интегралы по петлям вокруг разрезов. Можно исследовать асимптотику $f(z)$ также при $z \rightarrow e^{i\psi}$, если применить тождество $\ln(1/z) = \ln|1/z| - i\psi$ и в интегралах (27.29) разделить множители $e^{i\psi t}$, $e^{-i\psi t}$.

Второй интеграл в (27.29) является аналитической функцией при всех z , $z \neq 0$, а первый поворотом пути на подходящий угол $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ превращается в интеграл, для которого существует аналитическое продолжение. Если $z = re^{i\theta}$, то новый интеграл сходится при $r < e^{\theta \operatorname{tg} \theta}$. При фиксированных r и θ всегда можно найти такое θ , чтобы указанное неравенство выполнялось. Поэтому (27.29) тоже дает аналитическое продолжение для $f(z)$ во всей плоскости, кроме разреза вдоль $[1, \infty)$. Отметим еще, что для интегралов, находящихся в правой части (27.29), точка $z=0$ в общем является точкой ветвления. Она будет точкой ветвления и для других ветвей $f(z)$, если ряд в левой части (27.28) определяет ветвь многозначной функции. Таким свойством обладает функция $g_B(z, \alpha)$ в (27.40).

Указанный метод неприменим в случае лакунарных рядов. Если использовать равенство $z^{\lambda_k} = \exp(\lambda_k \ln z)$, то степенной ряд приводится к функциональному ряду, к которому часто применимо преобразование Меллина в таком же виде, как оно рассмотрено в п. 29.1. Пример к этому случаю приведен в [200].

Для исследования асимптотики аналитического продолжения $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ нецелесообразно применять формулу (27.29). Обычно используется формула (23.38), т. е.

$$f(-z) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h h(k) z^k = -\frac{1}{2i} \int_L (z^h(t) / \sin \pi t) dt, \quad (27.32)$$

поскольку асимптотическое разложение строится при $|\arg z| < \pi$. При прежних условиях относительно $h(t)$ и $|\arg z| < \pi$ (27.32) можно превратить в интеграл первого рода и путь интегрирования передвинуть влево согласно § 23. Иногда целесообразнее для этой цели применить (23.37), хотя эту формулу с помощью соотношения $\Gamma(-s) = -\pi / \sin \pi s \Gamma(1+s)$ можно преобразовать в (23.38).

Например, с помощью интеграла (23.49) получаем аналитическое продолжение для ${}_{q+1}F_q(z)$ при $|\arg(-z)| < \pi$ и его асимптотическое разложение при $|z| \rightarrow \infty$. Оно состоит из $q+1$ функций типа ${}_{q+1}F_q$. Асимптотическое разложение для ${}_{q+1}F_q(z)$ при $z \rightarrow 1$ с помощью (27.30) строить невыгодно, так как довольно трудно вычислять коэффициенты. Поэтому целесообразнее применять (27.25) или (27.26) (см. п. 27.4.2, 1°).

27.3.4. Асимптотика функций, выражаемых с помощью сумм или рядов, иногда находится применением суммационных формул Эйлера—Маклорена и Пуассона.

Теорема 27.3.2. Пусть 1) $h(t)$ в $[0, \infty)$ является функцией ограниченной вариации; 2) при $t \rightarrow \infty$ $h(t) \rightarrow 0$; 3) $\int_0^{\infty} h(t) dt$ сходится; 4) $\alpha > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (1/2)h(+0) + (1/2) \sum_{k=1}^{\infty} [h(k\alpha-0) + h(k\alpha+0)] = \\ = (1/\alpha) \left[H(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} H(2\pi k/\alpha) \right], \end{aligned} \quad (27.33)$$

где

$$H(u) = \int_0^{\infty} h(t) \cos ut \, dt. \quad (27.34)$$

Доказательство по идее аналогично доказательству о сходимости ряда Фурье. Согласно определению функции ограниченной вариации можно допускать, что $h(t)$ — монотонно убывающая функция. Используем равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} h(t) \cos(2k\pi t/\alpha) dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{(m+1/2)\alpha} h(t) \cos(2k\pi t/\alpha) dt = \\ &= \int_0^{\infty} h(t) \left[\frac{\sin((n+1/2)2\pi t/\alpha)}{2 \sin(\pi t/\alpha)} - \frac{1}{2} \right] dt = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^m \int_{k\alpha}^{(k+1/2)\alpha} [h(t) - h(k\alpha+0)] \frac{\sin((n+1/2)2\pi t/\alpha)}{2 \sin(\pi t/\alpha)} dt + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^m \int_{(k-1/2)\alpha}^{k\alpha} [h(t) - h(k\alpha-0)] \frac{\sin((n+1/2)2\pi t/\alpha)}{2 \sin(\pi t/\alpha)} dt + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha/2)h(+0) + (\alpha/2) \sum_{k=1}^m [h(k\alpha-0) + h(k\alpha+0)] - \right. \\ &\quad \left. - (1/2) \int_0^{(m+1/2)\alpha} h(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Если к интегралам в суммах применить вторую теорему о среднем, то можно установить, что в пределе при $m \rightarrow \infty$ получаем равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$ сходящиеся ряды. Поскольку каждый член этих рядов при $n \rightarrow \infty$ стремится к 0, то суммы также стремятся к 0. В итоге остается соотношение (27.33). Сходимость ряда в левой части (27.33) следует из условия 3) согласно интегральному признаку Коши, а сходимость ряда в правой части (27.33) — из существования предела в левой части при $n \rightarrow \infty$. ■

Имеются разные модификации этой формулы, например в [137]. Если $h(t)$ непрерывна в $[0, \infty)$, то получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k\alpha) = h(0)/2 + (1/\alpha) \left[H(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} H(2k\pi/\alpha) \right]. \quad (27.35)$$

Соотношение (27.33) или (27.35) называется *формулой Пуассона*. Легко доказать также ее конечный вариант:

$$\sum_{k=0}^n h(k\alpha) = [h(0) + h(a)]/2 + (1/\alpha) \left[H(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} H(2k\pi/\alpha) \right], \quad (27.35')$$

где $a = n\alpha$, $H(u) = \int_0^a h(t) \cos ut \, dt$.

Формула Пуассона основана на преобразовании Фурье. Аналогичные формулы можно вывести и на основе других интегральных преобразований. В [250], например, используется преобразование Ганкеля. Близкие к этим результаты приведены в [223].

В случае степенных рядов с $R=1$ берем $\alpha=1$, $z=e^{-x}$, $h(t) = g(t)e^{-xt}$, $x>0$. Если $g(t)$ непрерывно дифференцируема в $[0, \infty)$ и $g(t) = O(t^a)$ при $t \rightarrow +\infty$, то условия теоремы 27.3.2 удовлетворены и можно применить (27.35). Если ряд в правой части формулы (27.35) сходится при $x \in (0, \varepsilon)$, то иногда из нее можно построить асимптотическое разложение при $x \rightarrow +0$, а отсюда — разложение для $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^k$ при $z \rightarrow 1-0$, подставив $x = \ln(1/z)$. Данный метод не охватывает широкий класс функций $f(z)$, однако этому классу принадлежат некоторые важные функции.

27.3.5. *Суммационная формула Эйлера—Маклорена* (9.90) после некоторой модификации при $n \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k) = (1/2)h(0) + \int_0^{\infty} h(t) \, dt + \int_0^{\infty} \sigma_1(t) h'(t) \, dt. \quad (27.36)$$

Пусть $h(t) = g(t)e^{-xt}$, $e^{-x} = z$. Тогда

$$f(e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-kx} = (1/2)g(0) + \int_0^{\infty} e^{-xt}g(t)dt + \\ + \int_0^{\infty} e^{-xt}\sigma_1(t)[g'(t) - xg(t)]dt. \quad (27.36')$$

Таким образом, исследование асимптотики степенного ряда при $z \rightarrow 1-0$, т. е. при $x \rightarrow +0$, приведено к исследованию асимптотики интеграла Лапласа при $x \rightarrow +0$. Для построения асимптотического разложения первого интеграла в (27.36') часто можно применять методы, рассмотренные в § 18, 31 и 32. Второй интеграл в (27.36') содержит разрывную периодическую функцию $\sigma_1(t)$, поэтому построить его асимптотическое разложение обычно довольно трудно. Чаще всего формула (27.36') применяется лишь для получения асимптотической оценки.

Пусть 1) $g(t) = e^{G(t)}$, $G(t) \in C^2(0, \infty)$, $G(t) > 0$, $G'(t) > 0$, $G''(t) < 0$; 2) при $t \rightarrow \infty$ $G(t) \rightarrow \infty$, $G'(t) \rightarrow 0$, $G''(t) \rightarrow 0$. Тогда $G(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и ряд (27.36') имеет радиус сходимости $R=1$. Кроме того, уравнение $G'(t) = x$ при достаточно малых x имеет только один корень $t_0(x)$, $t_0(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Если можно найти такую функцию $\omega(x)$, что $\omega^2(x)G''(t_0(x)) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +0$ и имеет место соотношение $G''(t_0(x) + \theta\omega(x)) = G''(t_0(x))[1 + o(1)]$ равномерно относительно $\theta \in [-1, 1]$, то согласно теореме 17.3 получаем

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} \exp[-xt + G(t)]dt = \sqrt{-2\pi/G''(t_0(x))} \times \\ \times \exp[-xt_0(x) + G(t_0(x))][1 + o(1)]. \quad (27.37)$$

Последний интеграл в (27.36') разобьем по сегментам $[0, t_0(x)]$, $[t_0(x), \infty)$ и применим неравенство $|\sigma_1(t)| \leq 1/2$. Получим оценку $O(\exp[-xt_0(x) + G(t_0(x))]) = o(\Omega(x))$, поэтому

$$f(e^{-x}) = \Omega(x)[1 + o(1)]. \quad (27.38)$$

Имеются также разные другие условия, когда $f(e^{-x}) \sim \Omega(x)$ [279].

Примечания. 1°. Пусть 1) $g(t) = t^\lambda e^{-G(t)}$, $\lambda \geq 0$, $G(t) \geq 0$, $G(t)$ не убывает; 2) $G'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$; 3) $\Omega(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$.

Разбив промежутки интегрирования для $\Omega(x)$ на $[0, 1/x]$ и $[1/x, \infty)$ и обозначив $\Omega_0(x) = \int_0^{1/x} e^{-G(t)} t^\lambda dt$, можно легко доказать, что

$$1/e < \Omega(x)/\Omega_0(x) < 1 + \Gamma(\lambda + 2),$$

поэтому $\Omega(x) \asymp \Omega_0(x)$. С другой стороны, если $s(n) = \sum_{k=0}^n g(k) \sim \int_0^n g(t) dt$, то $s(n) \sim \Omega_0(1/n) = O(\Omega(1/n))$. Эта формула связывает частичную сумму коэффициентов при $n \rightarrow \infty$ с $f(z)$ при $z \rightarrow 1 - 0$.

2°. Если рассматривать лакунарный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} g(k) e^{-x\psi(k)}$, $\psi(k) \in N_1$, $\psi(t)$ монотонно возрастает, то $\Omega(x)$ надо заменить на

$$\Omega^*(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\psi(t)} g(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-xy} g(t(y)) t'(y) dy, \quad (27.39)$$

где $t(y)$ — обратная функция для $y = \psi(t)$. Последний интеграл часто является асимптотическим выражением для $\sum_{k=0}^{\infty} g(t(k)) t'(k) e^{-kx}$ при $x \rightarrow +0$. Таким образом, лакунарному ряду в некотором смысле сопоставлен нелакунарный.

27.4. Примеры

27.4.1. Рассмотрим функцию

$$g_\beta(z, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)^\beta z^k. \quad (27.40)$$

Поскольку $(1/p) g_\beta(1/p, \alpha)$ является изображением по Лапласу функции Харди—Барнса $G_\beta(t, \alpha)$, то $g_\beta(z, \alpha)$ целесообразно называть *присоединенной функцией Харди—Барнса*, тем более что ее асимптотическое разложение исследовано Харди [206] и Барнсом [155]. В [2] функция $g_{-\beta}(z, \alpha)$ обозначена через $\Phi(z, \beta, \alpha)$. Там же приведены различные ее свойства, в частно-

сти интегральное представление (27.41). Функция $g_{-\beta}(1, \alpha)$ при $\operatorname{Re} \beta > 1$ называется ζ -функцией Гурвица $\zeta(\beta, \alpha)$. Подробнее она рассмотрена в п. 29.1.

Функция $z g_{-\beta}(z, 1)$, $\beta > 0$ совпадает с полилогарифмом $Li_{\beta}(z)$ [см. (14.37)]. Полилогарифм в некоторых источниках называется также функцией Жонкьера, так как такие функции исследовал Жонкьер, например в работе [219]. Интеграл $(1/\Gamma(\beta+1)) \int_0^{\infty} (t^{\beta}/(e^t-x \mp 1)) dt$ при знаке «-» называется интегралом Бозе—Эйнштейна, а при «+» — интегралом Ферми—Дирака [38]. Из (14.37) следует, что эти интегралы равны $\pm e^{-x} Li_{\beta+1}(\pm e^x)$. Имеются также некоторые другие обозначения для полилогарифмов или их частных случаев. Они указаны в [112].

Г°. По теореме 27.1.11, функция $g_{\beta}(z, \alpha)$ имеет лишь одну особую точку $z=1$. Применяя разные из вышеуказанных методов, асимптотическое представление при $z \rightarrow 1$ для $g_{\beta}(z, \alpha)$ можно получить в разных формах (см. также пример 27.4.3). Поскольку при $\operatorname{Re} \beta > 0$

$$(\alpha+k)^{-\beta} = 1/\Gamma(\beta) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+k)t} t^{\beta-1} dt,$$

то согласно (27.18') и (27.19) при $\gamma=1$, $\Phi(t) \equiv 1$, $-\beta \in N_1$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$

$$g_{\beta}(z, \alpha) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0-)} e^{-\alpha t} (-t)^{-\beta-1} (1-ze^{-t})^{-1} dt. \quad (27.41)$$

Интеграл (27.41) выражает аналитическое продолжение для $g_{\beta}(z, \alpha)$ во всей плоскости z , кроме $z \in [1, \infty)$. Если дополнительно $\operatorname{Re} \beta < 0$, то

$$g_{\beta}(z, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_0^{\infty} \frac{t^{-\beta-1} e^{-\alpha t}}{1-ze^{-t}} dt. \quad (27.41')$$

Передвинув путь интегрирования в (27.41) через полюс подынтегральной функции $t = \ln z$, имеем

$$g_{\beta}(z, \alpha) = \Gamma(\beta+1) z^{-\alpha} (\ln 1/z)^{-\beta-1} - (\Gamma(\beta+1)/2\pi i) \times \\ \times \int_{L_1} e^{-\alpha t} (-t)^{-\beta-1} (1-ze^{-t})^{-1} dt.$$

При этом путь L_1 не охватывает другие ветви $\ln z$. С учетом (27.17) получаем

$$g_\beta(z, \alpha) = \Gamma(\beta+1)z^{-\alpha}(\ln 1/z)^{-\beta-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha, \beta)z^{-k-1}(1-z)^k, \quad (27.42)$$

где

$$c_k(\alpha, \beta) = (-\Gamma(\beta+1)/2\pi i) \int_{L_1} e^{-\alpha t} (-t)^{-\beta-1} (1-e^{-t})^{-k-1} dt. \quad (27.43)$$

Если в (27.43) путь L_1 деформировать в отрезок $\operatorname{Re} t = -\ln 2$ и лучи $\operatorname{Im} t = \pm\pi$, то легко установить, что $|c_k(\alpha, \beta)| < M$ при всех k . Поэтому ряд в (27.42) сходится, если $|(1-z)/z| < 1$. Путь L_1 можно деформировать также в L_0 . Если при $-\operatorname{Re} \beta > 1$ под знаком интеграла (27.43) функцию $(1-e^{-t})^{-1}$ разложить в ряд, то получим, что $c_0(\alpha, \beta) = \zeta(-\beta, \alpha)$, где $\zeta(\beta, \alpha)$ — вышеуказанная ζ -функция Гурвица [см. также (12.61)]. По принципу аналитического продолжения, выражение для $c_0(\alpha, \beta)$ сохраняется при всех β , $\beta \neq 1$. Отметим, что при $-\operatorname{Re} \beta > 1$ нерегулярный член в (27.42) не является определяющим. Разложение другого вида (по степеням $\ln z$) приведено в [2, 116, 231].

При $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$ можно применить соотношение

$$g_\beta(z, \alpha) = \sum_{k=0}^m (k+\alpha)^\beta z^k + z^{m+1} g_\beta(z, m+\alpha+1), \quad (27.44)$$

в котором m следует выбрать так, чтобы к функции g_β в правой части (27.44) можно было применить (27.42). Сумму в (27.44) следует перегруппировать по степеням $(1-z)$. При $\operatorname{Re} \beta < 0$ значения $-\alpha \in N$ исключаются.

Если $\beta = -m$, $m \in N_1$, то в (27.41) следует выполнить формальный предельный переход при $\beta \rightarrow -m$, причем $\ln(-t) = \ln t - i\pi$. Получаем

$$g_{-m}(z, \alpha) = (1/2\pi i) \Gamma(m) \int_{L_0} e^{-\alpha t} t^{m-1} (1-ze^{-t})^{-1} \ln(-t) dt. \quad (27.45)$$

В справедливости этого соотношения легко убедиться непосредственно. Отсюда

$$g_{-m}(z, \alpha) = (-1/\Gamma(m)) z^{-\alpha} (\ln z)^{m-1} \ln(\ln 1/z) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^*(\alpha, -m) (1-z)^k z^{-k-1}, \quad (27.46)$$

где $c_k^*(\alpha, -m) = \lim_{\beta \rightarrow -m} c_k(\alpha, \beta)$. В частности, имеем $c_0^*(\alpha, -m) = \zeta(m, \alpha)$. При $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$ сначала следует применить (27.44). Разложение по степеням $\ln z$ приведено в [2]. В случае полилогарифма оно получено в [231].

2°. Асимптотическое разложение для $g_\beta(-z, \alpha)$ при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ с использованием (27.41) можно непосредственно построить согласно (14.31) лишь при $\alpha = 1$. В противном случае подынтегральная функция не удовлетворяет условиям теоремы 13.5, на которой этот метод основан. При $\alpha \in N_2$ можно дополнительно применить формулу (27.44), а при остальных α — соответствующее обобщение теоремы 13.5, которое приведено в п. 32.1.

Однако при всех α $g_\beta(z, \alpha)$ можно выразить с помощью интеграла (27.32) и путь интегрирования передвинуть влево согласно § 23 (см. также теорему 28.3). Следует иметь в виду, что при $|\beta| \in N$ точка $t = -\alpha$ является точкой ветвления и к сумме вычетов необходимо добавить интеграл по петле вокруг разреза, идущего из $t = -\alpha$. Этот интеграл разлагается согласно п. 12.3.3. В итоге при $\alpha \in N$, $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi$ получаем [195]

$$g_\beta(-z, \alpha) \sim - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\alpha - k)^\beta z^{-k} + z^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\Gamma(-\beta - k)} (\ln z)^{-k - \beta - 1}, \quad (27.47)$$

где $b_k = ((-1)^k \pi / k!) \frac{d^k}{dt^k} \left[\frac{1}{\sin \pi t} \right]_{t=-\alpha}$. Первый ряд в правой части (27.47) выражается с помощью $g_\beta(-1/z, -\alpha)$. Практически следует брать только конечную сумму членов до $k = m = [\operatorname{Re} \alpha]$.

Более полный анализ в частных случаях при $|\beta| \in N$ и $\alpha \in N$ приведен в [195]. Для полилогарифма соответствующее разложение дано в (14.36) и (14.37), причем в (14.36) следует исправить опечатку: z заменить на z^{-1} . Полный вид этой формулы следующий [2, 112]:

$$Li_\nu(z) + e^{i\nu\pi} Li_\nu(1/z) = ((2\pi)^\nu / \Gamma(\nu)) e^{i\nu\pi/2} \zeta(1-\nu, (\ln z)/2\pi i). \quad (27.47')$$

Она называется *формулой Жонкьера* [219]. При $\nu = n \in N_1$ правая часть в (27.47') с учетом (29.6') имеет вид $-((2\pi i)^n / n!) B_n((\ln z)/2\pi i)$, где $B_n(u)$ — полином Бернулли.

Аналогично исследуется функция $\sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)^\beta H(k + \alpha) z^k$, где $H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{-k}$ вне некоторого круга. Можно показать [155,

157], что эта функция равна $\sum_{k=0}^{\infty} b_k g_{\beta-k}(z, \alpha)$. При $z \rightarrow 1$ можно использовать (27.42) и перегруппировать члены.

27.4.2, 1°. Для исследования асимптотики функции ${}_{q+1}F_q(A; B; z)$ при $z \rightarrow 1$ можно использовать легко устанавливаемое соотношение

$${}_{q+1}F_{q+1}(A; B, 1; t) \doteq p^{-1} {}_{q+1}F_q(A; B; p^{-1})$$

и п. 27.3.2, 2°, так как при $t \rightarrow \infty$ $|\arg t| \leq \pi/2 - \varepsilon$

$${}_{q+1}F_{q+1}(A; B, 1; t) \sim e^t t^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}, \quad \mu = \sum_{k=1}^{q+1} \alpha_k - \sum_{k=1}^q \beta_k. \quad (27.48)$$

Это разложение приведено в п. 28.5.2. Если $|\mu| \in N$, то разложение при $z \rightarrow 1$ получаем согласно (27.25), где $\lambda_k = k + 1 - \mu$. При $-\mu \in N$ следует использовать формулу (27.26), а при $\mu = m + 1 \in N$ к правой части (27.26) требуется добавить сумму $z^{-1} \sum_{k=0}^m c_k (m-k)! ((1-z)/z)^{k-m-1}$, которую получаем из изображе-

ния суммы $e^t \sum_{k=0}^m c_k t^{m-k}$. Полученные разложения обобщают (27.12). Поскольку (27.48) имеет место при $|\arg t| \leq \pi/2 - \varepsilon$, то поворотом пути интегрирования в интеграле Лапласа можно доказать, что разложения для ${}_{q+1}F_q$ справедливы при $|\arg(1-z)| < \pi$.

2°. В качестве примера к (27.38) рассмотрим $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha k^\lambda} z^k$, $\lambda \in (0, 1)$, $\alpha > 0$. Величина $t_0(x)$ определяется из уравнения $\alpha \lambda t^{\lambda-1} = x$, $t_0(x) = (\alpha \lambda / x)^{1/(1-\lambda)}$. Поскольку $G''(t_0) = -\alpha \lambda (1-\lambda) (x/\alpha \lambda)^{(2-\lambda)/(1-\lambda)}$, то условия, приведенные в п. 27.3.5, удовлетворены при $\omega(x) = x^{-1}$. Поэтому при $z \rightarrow 1 - 0$

$$f(z) \sim \sqrt{2\pi} / (1-\lambda) (\alpha \lambda)^{1/2(1-\lambda)} x^{-(1-\lambda/2)/(1-\lambda)} \times \\ \times \exp \left[(1-\lambda) \alpha^{1/(1-\lambda)} (\lambda/x)^{\lambda/(1-\lambda)} \right], \quad (27.49)$$

причем $x = \ln 1/z \sim 1 - z$.

27.4.3. Рассмотрим функцию

$$\Omega_{\beta}(z, \lambda, \gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} k^{\beta} e^{i\gamma k^{\lambda}} z^k, \quad (27.50)$$

где $\beta > 0$, γ — действительное число, $\lambda \in [0, 1]$. В частных случаях имеем $\Omega_{\beta}(z, \lambda, 0) = g_{\beta}(z, 0)$, $\Omega_{\beta}(z, 0, \gamma) = e^{i\gamma} g_{\beta}(z, 0)$, $\Omega_{\beta}(z, 1, \gamma) = g_{\beta}(ze^{i\gamma}, 0)$, поэтому получаем некоторое дополнение к

п. 27.4.1. Пусть сначала $\lambda \in (0, 1)$. Согласно (27.35) при $h_\beta(t, x) = t^\beta e^{i\gamma t^\lambda} e^{-xt}$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\beta e^{i\gamma k^\lambda} e^{-kx} = H_\beta(0, x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} H_\beta(2\pi k, x), \quad (27.51)$$

где

$$\begin{aligned} H_\beta(2\pi k, x) &= \int_0^{\infty} t^\beta e^{i\gamma t^\lambda} e^{-xt} \cos 2\pi k t dt = \\ &= 1/2 [\psi_\beta(x + i2k\pi) + \psi_\beta(x - i2k\pi)], \end{aligned} \quad (27.52)$$

$$\psi_\beta(y) \int_0^{\infty} t^\beta e^{i\gamma t^\lambda} e^{-ty} dy = y^{-\beta-1} \int_0^{\infty} \tau^\beta \exp [(i\gamma \tau^\lambda / y^\lambda) - \tau] d\tau. \quad (27.53)$$

Последние соотношения дают аналитическое продолжение для $H_\beta(2\pi k, x)$ при $|x| \leq 2\pi - \varepsilon$, $k \geq 1$.

Поскольку при $k \geq 1$ $|\psi_\beta(i2\pi k)| < M k^{-\beta-1}$, то ряд $\Phi_\beta(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} H_\beta(2\pi k, x)$ имеет мажоранту $M_1 \zeta(\beta+1)$ и сходится равномерно при $|x| \leq 2\pi - \varepsilon$. Следовательно, $\Phi_\beta(x)$ в этой области является аналитической функцией и в силу $\Phi_\beta^{(j)}(x) = (-1)^j \Phi_{\beta+j}(x)$ имеем разложение

$$\Phi_\beta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} ((-1)^j / j!) \Phi_{\beta+j}(0) x^j. \quad (27.54)$$

Так как

$$\begin{aligned} H_\beta(0, x) &= x^{-\beta-1} \int_0^{\infty} \tau^\beta \exp [i\gamma \tau^\lambda / x^\lambda - \tau] d\tau = \\ &= \lambda^{-1} x^{-\beta-1} \int_0^{\infty} u^{(\beta+1)/\lambda-1} e^{i\gamma u/x^\lambda} e^{-u^{1/\lambda}} du, \end{aligned}$$

то согласно (12.104) или (16.52) при $x \rightarrow +0$ получаем

$$\begin{aligned} H_\beta(0, x) &\sim \lambda^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \exp [i \operatorname{sign} \gamma (j + \beta + 1) \pi / 2\lambda] \times \\ &\times \Gamma \left(\frac{j + \beta + 1}{\lambda} \right) |\gamma|^{(-j - \beta - 1)/\lambda} x^j, \end{aligned} \quad (27.55)$$

причем в силу §16 это соотношение сохраняется при $\arg(\gamma/x^\lambda) \in [0, \pi]$. Для разложения функции (27.50) при $z \rightarrow 1-0$ следует учитывать (27.51), (27.54) и (27.55) и подставлять $x = -\ln 1/z$. Разложение состоит из двух рядов по натуральным степеням $\ln 1/z$, причем один из рядов сходится, другой расходится.

Если $\gamma=0$, то $\psi_\beta(y) = \Gamma(\beta+1)/y^{\beta+1}$, поэтому при $z \rightarrow 1-0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^\beta z^k \sim \Gamma(\beta+1) (\ln(1/z))^{-\beta-1} + \\ + \Gamma(\beta+1) (2\pi)^{-\beta-1} [e^{-i\pi(\beta+1)/2} \zeta(\beta+1, e^{-i\pi/2} (\ln(1/z))/2\pi) + \\ + e^{i\pi(\beta+1)/2} \zeta(\beta+1, e^{i\pi/2} (\ln(1/z))/2\pi)]. \quad (27.56)$$

Таким образом, разложение для $g_\beta(z, 0)$ дано в другом виде, чем в (27.42).

При $\lambda=1$ имеем $\psi_\beta(y) = \Gamma(\beta+1)/(y-i\gamma)^{\beta+1}$, поэтому можно использовать формулу (27.56), если в ней $\ln 1/z$ заменить на $\ln(1/ze^{i\gamma})$. Полученное разложение характеризует поведение $g_\beta(z, 0)$, $\beta > 0$, на всей единичной окружности.

Аналогично исследуется асимптотика рядов $\sum_{k=1}^{\infty} k^\beta e^{i\gamma k^\lambda} \ln k z^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\beta} e^{i\gamma k^\lambda} z^k = z \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-\beta} e^{i\gamma(k+1)^\lambda} z^k$, $\beta \geq 0$. Можно также построить разложение для функции (27.50) в окрестности $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ в общем случае. Асимптотика ряда $\sum_{k=2}^{\infty} k^\beta (\ln k)^\nu z^k$, $\beta > -1$, приведена в работе [8, 2-е изд.], причем в ней используется формула Абеля—Плана (27.28). С помощью этой формулы можно построить также аналитическое продолжение данной функции.

27.5. Некоторые сведения о целых функциях

27.5.1. Целыми называются функции, аналитические во всей нерасширенной комплексной плоскости, т. е. при всех z они обладают разложением (27.1). Простейшими целыми функциями являются полиномы, все остальные — трансцендентные функции. В теории целых функций большое значение имеет их представление в виде бесконечного произведения, связанное с распределением нулей. Однако мы будем применять только ряд (27.1) и интегральные представления, следующие из него, а бесконечные произведения не будем использовать. Не будут затронуты также многие другие важные вопросы из теории целых функций.

Одной из основных характеристик целых функций является функция $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, называемая *максимумом модуля*. По принципу максимума модуля аналитических функций, эта функция монотонно возрастающая и непрерывная. Можно доказать, что функция $(r/M(r)) \frac{dM(r)}{dr}$ также монотонно возрастающая [202] и что на окружности $|z|=r$ имеется только конечное число точек, в которых $|f(z)|=M(r)$ [57]. Но эти точки максимума при изменении r не всегда перемещаются вдоль лучей, исходящих из начала. В общем с возрастанием r они либо перемещаются вдоль непрерывных кривых, либо изменяются скачкообразно. Подробнее эти возможности исследованы в [57, 165]. Там же приведены и другие свойства $M(r)$. В качестве примера приводим функцию $f(z) = \exp[e^{z^2} + \sin z]$, для которой лучи расположения максимальных точек меняются при $r = k\pi$, $k \in N_1$ [57]. Многие свойства $M(r)$ вытекают из распределения нулей функции $f(z)$.

Чем больше степень полинома, тем быстрее растет $M(r)$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому можно ожидать, что для трансцендентных целых функций при любом ω $r^\omega = o(M(r))$. Действительно, пусть существует $n \in N$, при котором $M(r) = O(r^n)$. Тогда из представления $f(z) = s_n(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$ следует, что функция $F(z) = [f(z) - s_n(z)]z^{-n-1}$ — тоже целая функция, которая стремится к 0 при $z \rightarrow \infty$. Из принципа максимума следует, что $F(z) \equiv 0$, т. е. $f(z) \equiv s_n(z)$. Для любой целой трансцендентной функции $f(z)$ можно указать такой путь L , что $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)z^{-n}| = +\infty$ при $|z| \rightarrow \infty$, $z \in L$ и каждом $n \in N$.

Следовательно, для оценки роста $M(r)$ приходится привлечь иные функции сравнения, чем r^ω . Простейшая из них — $\exp(r^\rho)$. Говорят, что $f(z)$ является *целой функцией порядка* ρ , если для любого $\sigma > 0$ $M(r) = o(\exp(r^{\rho-\sigma}))$, но $M(r) \neq O(\exp(r^{\rho-\varepsilon}))$. Другими словами,

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}. \quad (27.57)$$

Если в (27.57) $\rho = \infty$, то $f(z)$ называется функцией *бесконечного порядка*. Например, $f(z) = \exp(e^z)$. Порядок может быть также равным 0.

Порядок характеризует поведение функции $M(r)$ крайне недостаточно. Поэтому введено еще понятие *типа*. Функция $f(z)$

порядка ρ принадлежит к типу σ , если для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших r

$$e^{(\sigma-\varepsilon)r^\rho} < M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho},$$

т. е.

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln M(r)/r^\rho). \quad (27.58)$$

При $\sigma=0$ имеем функцию *минимального типа*, при $\sigma=\infty$ — *максимального*, при $\sigma \in (0, \infty)$ — *нормального типа*. Для функций минимального типа существует более узкая классификация, например $M(r)$ сравнивается с функциями $\sum_{k=0}^{\infty} r^k [\exp_m(k)]^{-k/\rho}$ [239].

Нетрудно доказать [110], что порядок суммы целых функций не превышает наибольшего порядка слагаемых. То же утверждение относится и к типу функций, если слагаемые и сумма одинакового порядка. Свойства порядка и типа для произведения целых функций приведены в [110]. Из (27.59) следует, что функция $f'(z)$ имеет тот же порядок и относится к тому же типу, что и $f(z)$.

27.5.2. Формулы (27.57) и (27.58) только в редких случаях непосредственно применимы для нахождения ρ и σ . Удобнее вычислять их с помощью коэффициентов ряда (27.1). Можно доказать [8, 110, 113], что

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln (1/|a_n|)}, \quad (\sigma\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n^{1/\rho} \sqrt[\rho]{|a_n|}). \quad (27.59)$$

Эти формулы удобны не только для практического вычисления ρ и σ . С их помощью можно также построить примеры для функций желаемого порядка и типа. Например, нетрудно уста-

новить, что функции $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma^{1/\rho} z)^k}{\Gamma(k/\rho + 1)}$ и $f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(\sigma\rho)^{1/\rho} z]^k}{k^{k/\rho}}$

имеют порядок ρ и тип σ и что при $a_k = (\ln k/k)^{k/\rho}$ функция (27.1) порядка ρ имеет максимальный тип, а при $a_k = (1/k \ln k)^{k/\rho}$ — минимальный; при $a_k = e^{-k^2}$ функция (27.1) имеет порядок $\rho=0$. При $\rho=1$ и $\sigma \in (0, \infty)$ функция называется функцией *экспоненциального типа*.

Если $a_n \geq 0$, то $M(r) = f(r)$. Пусть

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{-1/\rho} [1 + A(\ln n)/n + B/n + o(1/n)]. \quad (27.60)$$

Тогда [230]

$$M(r) = f(r) = \sqrt{2\pi\rho} e^{-B-Ar^\rho(A+1/2)} \exp(r^\rho/e\rho) [1 + o(1)]. \quad (27.61)$$

Назовем (27.61) *формулой Линделефа*.

Для более тонкой характеристики $M(r)$ можно применить более сложные функции. Обычно применяется непрерывно дифференцируемая функция $H(r)$, обладающая свойством $rH'(r)/H(r) > 0$ [8]. Если

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \ln M(r)/H(r) = \sigma, \quad (27.62)$$

то $H(r)$ называется показателем *порядка роста*, σ -*типом*. Нередко $H(r) = r^\rho L(r)$, $L(r) \in \mathcal{L}$ (см. п. 6.2). Имеются некоторые модификации этого уточнения [110].

Для функций $f(z)$ конечного порядка ρ вводится также функция

$$h(\Theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \ln |f(re^{i\Theta})|/r^\rho, \quad (27.63)$$

которая называется *индикатором*, или *индикатрисой роста* $f(z)$. Она характеризует рост $|f(z)|$ по различным направлениям. Функция $h(\Theta)$ встречается уже у Линделефа [231]. Ее свойства подробнее рассмотрены в [8, 110, 113, 213].

Отметим еще, что гораздо труднее исследовать минимум $m(r) = \min_{|z|=r} |f(z)|$. Некоторые результаты по этому вопросу приведены в [8, 110, 138, 169, 213].

27.5.3. Если $f(z)$ является полиномом, то $M(r)$ определяется старшим членом. В случае трансцендентных целых функций $M(r)$ можно связать с *максимальным членом* $\mu(r) = \max_{k \in N} |c_k| r^k$.

Если максимум достигается при нескольких индексах, то выбираем наибольший из них. Этот индекс обозначается через $\nu(r)$ и называется *центральный индексом*. Легко видеть, что $\nu(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ [117]. Очевидно, $M(r) \geq \mu(r)$. Можно доказать [103], что при $r \rightarrow \infty$, где r не принадлежит некоторому исключительному множеству I_ε , имеет место *неравенство Ви-мана*

$$M(r) < \mu(r) (\ln \mu(r))^{1/2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (27.64)$$

Точнее I_ε охарактеризовано в [103, 169]. Очевидно, при $r \rightarrow \infty$, $r \notin I_\varepsilon$ имеет место

$$\ln M(r) \sim \ln \mu(r). \quad (27.64')$$

В [140] приведены достаточные условия отсутствия или присутствия множества I_ε . Для функций конечного порядка ρ можно доказать, что (27.64') имеет место при всех $r > r_0$ [8], и (27.64) при $r \notin I_\varepsilon$ уточняется [169]:

$$M(r) < (\rho + \varepsilon) \mu(r) \sqrt[2]{2\pi \ln \mu(r)}, \quad \varepsilon > 0. \quad (27.64'')$$

Для специальных типов рядов имеются также другие оценки, например в [230]. Связи между $\ln M(r)$, $\ln \mu(r)$ и $\nu(r)$ весьма простыми средствами получены в [292].

Для $\nu(r)$ имеет место неравенство $\nu(r) < [\ln \mu(r)]^{1+\varepsilon}$ [103]. Функция $\nu(r)$ фигурирует также в другой оценке [103]:

$$f'(z) = (f(z)\nu(r)/z)(1+o(r)), \quad |z| = r \rightarrow \infty. \quad (27.65)$$

Разные свойства функций $\mu(r)$ и $\nu(r)$ приведены в [117]. Эти функции применяются также при $R < \infty$.

При выводе формул (27.61) и (27.64) $M(r)$ сравнивается с некоторой *центральной суммой* членов, близких к максимальному члену. Эта сумма либо заменяется на простую бесконечную сумму, либо оценивается с помощью формулы Эйлера—Маклорена. В частных случаях данный прием оценки центральной суммы уже давно использовался для нахождения асимптотики целых функций при $z=r \rightarrow \infty$, если $a_n \geq 0$. Одной из первых является работа [283], в которой найдено асимптотическое выражение для ${}_pF_q$, $p \leq q$. Этот метод продемонстрирован также в [117, 138] и успешно использован уже в работах [168, 230]. С его помощью можно доказать формулы (27.59). Иногда он применяется в случаях, когда другие методы трудно использовать.

В случае лакунарных рядов вида $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\Phi(k)} / (\Phi(k))!$, где $\Phi(k) \in N$, при достаточно быстро растущей функции $\Phi(k)$ асимптотическое выражение для $f(z)$ на некоторых окружностях совпадает с одним максимальным членом, а между этими окружностями достаточно использовать лишь два смежных члена. Например, при $c_k = 1$, $\Phi(k) \equiv k^3$ в [205] показано, что при $m^3 < |z| < (m+1)^3$, $m \in N$, $m > m_0$

$$f(z) = \frac{z^{m^3}}{(m^3)!} (1+o(1)) + \frac{z^{(m+1)^3}}{[(m+1)^3]!} (1+o(1)),$$

а при $z = m^3 e^{i\varphi}$

$$f(z) = \frac{e^{m^3(1+i\varphi)}}{\sqrt{2\pi m^3}} (1+o(1)).$$

Подобные оценки можно получить при $n^3 = \varrho(\Phi(n))$, но при $\Phi(n) = n^2$ имеем более сложное асимптотическое выражение [211]. Следовательно, в случае лакунарных рядов оценки (27.64) и (27.64'') часто бывают сильно превышены.

Пусть 1) $a_n = e^{-G(n)}$, $G(t) \in C^2(0, \infty)$, $G(t) > 0$, $G'(t) > 0$, $G''(t) > 0$ и указанные функции монотонно возрастают; 2) при $t \rightarrow +\infty$ $G(t) \rightarrow +\infty$, $G'(t) \rightarrow +\infty$, $G''(t) \rightarrow +\infty$. Обозначим ко-

рень уравнения $G'(t) = \ln r$ через $t_0(r)$, $t_0(r) \in [n_0(r), n_0(r) + 1]$. Тогда можно доказать [279], что

$$f(r) \sim a_{n_0-1} r^{n_0-1} + a_{n_0} r^{n_0} + a_{n_0+1} r^{n_0+1}. \quad (27.66)$$

27.5.4. Если в (27.57) $\overline{\lim}$ можно заменить на \lim , то говорят, что $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ *изменяется регулярно*. В общем случае могут существовать функции $h_1(r)$ и $h_2(r) = o(h_1(r))$ такие, что $M(r) < e^{h_1(r)}$ вдоль некоторой последовательности чисел $r = r_k \uparrow \infty$ и $M(r) > e^{h_2(r)}$ вдоль другой последовательности $r = r_k^* \uparrow \infty$. Тогда говорят, что $f(z)$ *изменяется нерегулярно*. В частности, $h_1(r) = Ar^\alpha$, $h_2(r) = Br^\beta$, $\alpha > \beta$, $A > 0$, $B > 0$.

Имеются разные методы для построения нерегулярно изменяющихся функций. Один из них указан в п. 3.3.2, 11°. Идея другого метода состоит в смешивании рядов для функций с разными порядками. Пусть, например, $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $e^{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $F(z) = \exp(e^z)$. Выберем $c_k = a_k$ при $k \in [F(2m), F(2m+1))$, $m \in \mathbb{N}$ и $c_k = b_k$ при $k \in [F(2m+1), F(2m+2))$. Тогда можно доказать [169], что функция $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *изменяется нерегулярно*, т. е. в некоторых интервалах r $M(r) < e^{r^{1+\varepsilon}}$, в некоторых других — $M(r) > e^{r^{2-\varepsilon}}$. Порядок роста функции $\Phi(z)$ $\rho = 2$. Выбор количества членов при смешивании рядов подробнее проанализирован на другом примере в [168].

Другой тип нерегулярно изменяющихся функций приведен

Харди в [207], где $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\sin k\pi\lambda} z^k$, λ не является рациональ-

ным числом. Харди показал, что при $c_k = 1/k!$ в зависимости от выбора λ ряд может иметь конечный или бесконечный радиус сходимости. В последнем случае он может изменяться регулярно или нерегулярно, причем $M(r)$ колеблется между $Ar^\alpha e^r$ и $Be^{\beta r \ln r + r^{-1/2}}$. Ряд, аналогичный рассмотренному, появляется при $z \rightarrow 0$ в разложении [207]

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{\alpha-1}}{t+z} dt \sim \pi z^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\lambda k}}{k! \sin(\alpha + \lambda k)\pi} +$$

$$+ \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Gamma\left(-\frac{k+1-\alpha}{\lambda}\right) z^k, \quad \lambda > 0, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (27.67)$$

Нерегулярный рост имеют весьма простые функции в случае комплексных параметров. Рассмотрим в качестве примера $F(z) = \exp(z^\rho)$, $\rho = \lambda + i\mu$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $z = re^{i\varphi}$. Имеем

$$e^{z^\rho} = \exp [r^\lambda e^{-\mu\varphi} \cos(\mu \ln r - \lambda\varphi)] [\cos(r^\lambda e^{-\mu\varphi} \sin(\mu \ln r - \lambda\varphi)) + i \sin(r^\lambda e^{-\mu\varphi} \sin(\mu \ln r - \lambda\varphi))]. \quad (27.68)$$

При фиксированном φ и $r \rightarrow \infty$ $|e^{z^\rho}|$ колеблется между $\exp(-r^\lambda e^{-\mu\varphi})$ и $\exp(r^\lambda e^{-\mu\varphi})$. Модуль будет изменяться регулярно, если двигаться по логарифмической спирали $\mu \ln r - \lambda\varphi = c$. Функция e^{z^ρ} при указанном ρ не является целой, так как $z=0$ и $z=\infty$ — точки ветвления, однако она может появиться в асимптотическом выражении некоторой целой функции, например согласно (22.106) в асимптотическом выражении для $E_\rho(z)$, и тогда рост функции не будет регулярным. Поэтому в настоящей книге мнимые параметры допускать не будем.

27.5.5. Для целых функций порядка не меньше $1/2$ могут существовать пути, удаляющиеся в бесконечность, вдоль которых $f(z) \rightarrow c_k = \text{const}$. Постоянные c_k называются *асимптотическими значениями* для $f(z)$. Если целая функция, отличная от постоянной, не принимает значения c , то это значение будет асимптотическим. Данжуа доказал [178], что $\omega = c_k$ являются трансцендентными особыми точками для функции, обратной к $\omega = f(z)$, и единственными такого типа. Кроме того, он высказал гипотезу [178], что для целой функции порядка ρ не может существовать более 2ρ разных конечных асимптотических значений. Справедливость этой гипотезы была доказана Альфорсом [148]. Число 2ρ часто не достигается, например, для функции $\exp(z^m)$, $m \in N_1$. Однако функция $f(z) = \int_0^z t^{-m} \sin(t^m) dt$, $m \in N_1$, имеет порядок m и $2m$ разных асимптотических значений $e^{ik\pi/m} \int_0^\infty t^{-m} \sin(t^m) dt$, $k=0, \pm 1, \dots, \pm(m-1)$, m . Эти вопросы подробнее изложены в [252].

С другой стороны, справедлива

Теорема 27.5.1 (теорема Монтеля [248]). Если $f(z)$ в секторе $\arg z \in (\alpha, \beta)$ аналитична и ограничена и $f(z) \rightarrow A$ при $z \rightarrow \infty$ вдоль некоторого луча $\arg z = \gamma \in (\alpha, \beta)$, то при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ $f(z) \rightarrow A$ равномерно в секторе $\arg z \in (\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$.

Из того, что вдоль некоторой кривой L , идущей в бесконечность, целая функция $f(z)$ стремится к асимптотическому значению A , еще не следует, что $f'(z) \rightarrow 0$ вдоль L . В работе [427] доказано, что для каждого $\rho \in (1/2, 1)$ можно построить такую целую функцию $f_\rho(z)$ порядка ρ , чтобы $f_\rho(z) \rightarrow 0$ вдоль некото-

рой кривой L , а $f'_\rho(z)$ не стремилась к 0 вдоль L . Это свойство не противоречит теореме 4.17, так как в ней функция стремится к пределу в некотором секторе.

Еще следует отметить результат Хеймана [213а]: можно построить целую функцию, которая на заданных лучах стремится к заданным асимптотическим значениям. В п. 28.1 будет показано, что существуют целые функции, которые вдоль каждого луча L_0 , исходящего из начала, стремятся к 0, однако это стремление неравномерно.

Поворотом пути интегрирования вдоль мнимой оси можно показать [253], что целая функция $\int_0^\infty e^{zt}t^{-t}dt$ равномерно ограничена вне полосы $|\operatorname{Im} z| \leq \pi/2 + \eta$, $\eta > 0$. Отсюда следует, что функция $\int_0^\infty e^{(z+i\alpha)t}t^{-t}dt$, α — действительное число, $|\alpha| > \pi/2 + \eta$, остается ограниченной вдоль каждого луча L_0 . Ограниченность также неравномерна, так как в противном случае согласно теореме Лиувилля [138] функция была бы постоянной.

27.6. Простейшие методы исследования асимптотики целых функций

27.6.1. *Грубые оценки.* Сведения о порядке и типе целой функции $f(z)$ крайне недостаточны для характеристики асимптотического поведения $f(z)$ даже в случае, когда $a_n \geq 0$ и $f(r) = M(r)$, так как при $r \rightarrow \infty$ известно только соотношение $f(r) = \exp[\sigma r^\rho(1+o(1))]$. Лучшие оценки получаем по формуле Линделефа (27.16). Например, для функции

$$T_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / (k!)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (27.69)$$

согласно (27.60) и (27.61) при $r \rightarrow \infty$ получаем

$$T_\alpha(r) = (1/\sqrt{\alpha}) (2\pi r^{1/\alpha})^{(1-\alpha)/2} \exp(\alpha r^{1/\alpha}) (1+o(1)). \quad (27.70)$$

Оценку такой же точности дает теорема Аpellя—Чезаро 27.2.1. Рассмотрим несколько примеров к этой теореме.

1°. Если $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $a_k \geq 0$, $b_k \rightarrow \beta \neq 0$, то при $x \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k a_k x^k \sim \beta f(x).$$

2°. Пусть $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k / k!$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$, $a_k \geq 0$. Поскольку $a_k = s_k - s_{k-1}$, то с учетом п. 1° при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-u} g(u) du &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s_k - s_{k-1})}{k!} \int_0^x e^{-u} u^k du = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \int_0^x (u^k / k! - u^{k+1} / (k+1)!) e^{-u} du = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1} / (k+1)! \sim s. \end{aligned}$$

Отсюда следует также, что $\int_0^{\infty} e^{-u} g(u) du = s$.

3°. Пусть $f_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $a_k \geq 0$. Требуется найти асимптотику функции $f_{\gamma}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k / k^{\gamma}$, $\gamma > 0$. Согласно (27.2)

$$F_{\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 f_0(z t) (1-t)^{\gamma-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\gamma+1)} z^k, \quad (27.71)$$

но $a_k \Gamma(k+1) / \Gamma(k+\gamma+1) \sim a_k k^{-\gamma}$, поэтому при $x \rightarrow +\infty$ $f_{\gamma}(x) \sim F_{\gamma}(x)$. Асимптотику для $F_{\gamma}(x)$ можно построить методом, указанным в п. 16.4.1, если известна асимптотика $f_0(x)$. Если $f_0(x) = Ax^{\alpha} e^{\sigma x} [1 + o(1)]$, то согласно (16.93) при $x \rightarrow +\infty$ получим

$$f_{\gamma}(x) \sim F_{\gamma}(x) = (A/(\sigma)^{\gamma}) x^{\alpha-\gamma} e^{\sigma x} [1 + o(1)]. \quad (27.72)$$

С учетом (22.106) из этой формулы снова выводится (27.70).

Дифференцированием по γ в (27.71) можно найти также функцию сравнения для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ln k x^k / k^{\gamma}$, однако выражения не получаются столь простыми, как в (27.71).

27.6.2. В п. 27.3.1 были рассмотрены интегральные представления (27.16) и (27.19) для степенных рядов с конечным радиусом сходимости. По аналогии можно исследовать класс целых функций, заданных представлением

$$f(z) = \int_0^1 e^{\gamma z u} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} \Phi(u) du, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad (27.73)$$

или

$$f(z) = e^{-i\pi\alpha} \Gamma(1-\alpha) / 2\pi i \int_{L_0} e^{\gamma z u} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} \Phi(u) du, \quad (27.74)$$

если α и β не удовлетворяют прежним условиям. Выражение (27.74) является аналитическим продолжением (27.73) относительно α и β , L_0 — контур, охватывающий разрез вдоль $[0, 1]$, $\Phi(u)$ — аналитическая на L_0 и внутри его функция.

Разложением $e^{\gamma z u}$ в степенной ряд получаем степенное разложение для $f(z)$. Поскольку все интегралы при почленном интегрировании равномерно ограничены, то полученный ряд сходится при всех z . Асимптотическое разложение для интеграла (27.73) можно построить согласно п. 10.3 или п. 16.4.1, а в случае (27.74) те же приемы приходится несколько модифицировать с учетом п. 12.3.3.

Возможен также другой подход, использующий более общие шкалы [205]. Пусть

$$\Phi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1-u)^k \quad (27.75)$$

и ряд можно подставить в (27.73) и интегрировать почленно. Тогда согласно (10.65) имеем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta+k+\alpha)} {}_1F_1(\alpha; \alpha+\beta+k; \gamma z). \quad (27.76)$$

При $\operatorname{Re}(\gamma z) > 0$ члены ряда (27.76) согласно (10.66) образуют асимптотическую шкалу. Если брать в (27.75) частичную сумму, то с учетом § 16 и (10.66) нетрудно показать, что в (27.76) получаем сильноасимптотическое разложение, т. е. остаток имеет требуемую оценку. То же самое относится к более общему случаю, когда (27.75) и (27.76) справедливы лишь в асимптотическом смысле. В случае интегрального представления (27.74) от ряда (27.75) следует отщепить соответствующую частичную сумму, чтобы интеграл от оставшегося ряда можно было преобразовать к виду (27.73). При $\operatorname{Re}(\gamma z) > 0$ в (27.76) с учетом оценки остатка ряда вместо ${}_1F_1$ можно подставить разложение (10.66) и перегруппировать члены. Получим разложение по степенной шкале.

Возможна и некоторая модификация этого метода. Если в ряд типа (27.75) разлагать не $\Phi(u)$, а $u^{\alpha-1}\Phi(u)$, то в (27.76) получим ряд по функциям

$${}_1F_1(1; \beta+k+1; \gamma z) = \Gamma(\beta+k+1) (\gamma z)^{-\beta-k} e^{\gamma z} + O(z^{-1}), \quad (27.77)$$

$\operatorname{Re}(\gamma z) > 0$, и в (27.76) непосредственно будем иметь степенное разложение.

При $\operatorname{Re}(\gamma z) < 0$ следует использовать разложение $\Phi(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k u^k$, так как критической является точка $u=0$. Получим

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha + k)} {}_1F_1(\alpha + k; \alpha + k + \beta; \gamma z), \quad (27.78)$$

где функции ${}_1F_1$ при $\operatorname{Re}(\gamma z) < 0$ согласно (10.66) образуют шкалу. Асимптотичность ряда (27.78) доказывается аналогично тому, как в случае, когда $\operatorname{Re}(\gamma z) > 0$. Если же вместо $\Phi(u)$ по степеням u разложить $(1-u)^{\beta-1}\Phi(u)$, то вместо (27.78) получим разложение по функциям

$${}_1F_1(\alpha + k; \alpha + k + 1; \gamma z) = \Gamma(\alpha + k + 1) (-\gamma z)^{-\alpha-k} + O(e^{\gamma z}), \quad (27.79)$$

$\operatorname{Re}(\gamma z) < 0$, и тем самым — непосредственно разложение по степенной шкале. Некоторые примеры к указанной модификации приведены в [205].

27.6.3. Другой класс интегральных представлений получаем согласно общей идее, изложенной в начале п. 27.3.1. Пусть $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — целая функция, $b_k = \int_{\alpha}^{\beta} t^k g(t) dt$. $F(z)$ — композиция Адамара, которая при фиксированной функции $g(t)$ выражает функциональное преобразование, т. е. каждой целой функции $f(z)$ сопоставляет соответствующую функцию $F(z)$. Тогда формально получаем

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k = \int_{\alpha}^{\beta} f(zt) g(t) dt. \quad (27.80)$$

При бесконечных α и β еще следует оправдать изменение порядка интегрирования и суммирования. Возможны следующие обобщения: 1) вместо пути $t \in [\alpha, \beta]$ берется некоторая кривая L ; 2) $b_k = \int_{\alpha}^{\beta} G(t, k) g(t) dt$. Тогда в (27.80) $f(zt)$ надо заменить на $\Phi(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k G(t, k) z^k$, но просуммировать такой ряд удастся лишь в частных случаях.

В качестве примера берем интеграл Фруллани [139]

$$b_k = \ln k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} - e^{-uk}}{u} du = \int_0^1 \frac{v^{k-1} - 1}{\ln v} dv, \quad k \in N_1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ln k z^k = \int_0^1 \frac{f(zv) - vf(z)}{v \ln v} dv. \quad (27.81)$$

Ряд (27.81) назовем *логарифмической композицией Адамара* функции $f(z)$. Асимптотическое разложение функции (27.81) зависит от свойств функции $f(z)$ (см. п. 27.7.1). В случаях, когда $a_k = c_k k^\gamma$, интегральное представление для $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ln k z^k$ можно найти из представления для $f(z)$ дифференцированием по γ .

Если $b_k = \psi(1+k)$, то аналогично можно применить представление

$$\psi(1+k) = \psi(1) + \int_0^1 \frac{1-t^k}{1-t} dt,$$

которое следует из (9.53). В частности, отсюда получаем [101]

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \psi(1+k)/k! = e^z \ln z + e^z \int_z^{+\infty} e^{-t} t^{-1} dt. \quad (27.81')$$

Таблицы, содержащие наиболее часто встречающиеся разложения для $f(z)$, а также различные интегральные выражения для b_k , приведены в [38]. Многие представления для b_k с помощью контурных интегралов указаны в [9]. Отметим, что сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^m z^k$, $m \in N_1$, для некоторого класса функций $f(z)$, содержащего гипергеометрические функции, можно выразить с помощью $f(z)$ или родственной ей функций и полинома. Например, согласно тождеству $k^m = \sum_{j=0}^m \sigma_m^{(j)} k(k-1) \dots (k-j+1)$, $m \in N$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^m z^k / k! = e^z \sum_{j=0}^m \sigma_m^{(j)} z^j.$$

Здесь $\sigma_m^{(j)}$ — числа Стирлинга второго рода. Их свойства и таблица приведены в [146].

27.6.4. *Применение преобразования Лапласа.* В случае степенных рядов с конечным радиусом сходимости этот метод рассматривался в п. 27.3.2, причем исследуемой функцией

являлось изображение $f(p^{-1})$. При исследовании асимптотики целых функций $h(t)$ применяется выражение оригинала, заданное формулой обращения (22.30). Если $h(t)$ — целая функция экспоненциального типа и $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, то согласно лемме 5.1

преобразованный ряд $f(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k! p^{-k-1}$ сходится вне некоторого круга. Поэтому необходимо исследовать свойства аналитического продолжения $f(p)$. Согласно § 22 асимптотику функции $h(t)$ определяют особые точки $f(p)$, лежащие правее. Затем применяются известные методы. Примеры такого применения преобразования Лапласа были рассмотрены в § 22.

Может оказаться, что окружность сходимости ряда для $f(p)$ состоит лишь из особых точек. В таком случае данный метод неприменим и его формальное использование может привести к неверным результатам. В этом можно убедиться в случае

лакунарных рядов $\sum_{k=0}^m \frac{t^k}{(k^m)!}$, $m \in N_2$, когда окружность $|p| = 1$

согласно теореме 27.1.22 является особой линией.

Вместо преобразования Лапласа можно брать также другое интегральное преобразование с ядром $K(t)$. Если $\mu_k = \int_0^{\infty} t^k K(t) dt$

и $\chi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \mu_k$ — целая функция, то оригинал $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k / \mu_k$

и изображение $f(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-k-1}$ связаны соотношениями

$$f(p) = \int_0^{\infty} K(pt) h(t) dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \chi(pt) f(p) dp, \quad (27.82)$$

которые получаются формальным почленным интегрированием рядов для $h(t)$ или $f(p)$. Например, при $K(t) = \rho t^{\rho-1} \exp(-t^{\rho})$ имеем $\chi(z) = E_{\rho}(z)$ [8, 1-е изд.].

Отметим, что в старейшей литературе преобразование, в котором функции $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k/k!) t^k$ формально, без помощи ин-

теграла Лапласа, сопоставляется функция $f(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{-k-1}$, или наоборот, называется *преобразованием Бореля*. Это преобразование впервые до оформления теории преобразования Лапласа применил Борель [167] при рассмотрении одного метода суммирования расходящихся рядов.

27.6.5. *Применение метода Меллина—Барнса* несколько отличается от изложенного в п. 27.3.3. Во-первых, в силу того, что формулы (27.27) и (27.32) используются при всех z , для справедливости этих формул на функцию $h(t)$ следует наложить иные условия. Во-вторых, асимптотические разложения данных целых функций часто содержат ряды с экспоненциальными множителями. Поэтому путь интегрирования нельзя непосредственно передвигать влево, а следует применять модификации, указанные в § 23, или другие. Подробнее это будет рассмотрено в § 28.

Если при соблюдении условия сепарации в качестве L брать вертикальную прямую, т. е. рассматривать интеграл первого рода, то (27.27) сохранится для целых функций $f(z)$ при $|\arg z| < \alpha$, если на пути и в правой полуплоскости $|h(t)| < Me^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$. Если же в указанной области $h(t) = O(e^{-\alpha|t| \ln t})$, что нередко имеет место, то можно применять также формулу (27.29). Последний интеграл в этой формуле следует разложить, как интеграл Фурье, поэтому (27.30) не имеет места. Иногда целесообразно пользоваться формулой (27.28) при $\sigma \rightarrow -\infty$, если $h(t)$ — целая функция. Это удобно в тех случаях, когда основной вклад, содержащий экспоненциальный множитель, получается из первого интеграла в правой части (27.28), а остальные интегралы входят в любой остаток. Некоторые простые примеры такого рода приведены в [195]. Можно этот метод применить и в том случае, когда $h(t)$ имеет особенности.

Формула (27.32) при прежних условиях относительно $h(t)$ сохраняется для интегралов первого и второго рода при $|\arg z| \leq \pi$. Иногда применяется также формула (23.37) в следующем модифицированном виде:

$$f(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h(k) z^k / k! = 1/2\pi i \int_L h(t) \Gamma(-t) z^t dt. \quad (27.83)$$

При $|h(t)| < M$ можно брать $|\arg z| \leq \pi/2$, при $h(t) = O(t^\omega)$ — $|\arg z| < \pi/2$. Однако и в данном случае часто следует применять модификации, так как асимптотическое разложение содержит экспоненциально убывающий множитель. Примеры непосредственного сдвига пути влево приведены в п. 23.4.2, а пример с экспоненциальным множителем — в п. 23.4.4, 7°. Примеры разложений для многих простейших специальных функций без достаточного обоснования даны в [38].

Иногда для облегчения выделения экспоненциальных множителей целесообразно применять *преобразование Барнса—Ватсона* [157, 293]. Рассмотрим следующий частный случай.

Пусть $h(k) = g(k)/\Gamma(\gamma k + \alpha)$, $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, $g(t)$ аналитична при $|\arg t| \leq \pi/2$ и $g(t) = O(t^\omega)$ при $|t| \rightarrow \infty$; $\arg z = \theta\pi$, $\theta \in [-1, 1]$. Тогда при $-\sigma_0 \in (0, \min(1, 1/\gamma))$, $p \in N$ и условии сепарации согласно § 23 имеем соотношение

$$f(z) = \frac{1}{2i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{\sin(2p+1-\gamma)\pi s}{\sin \gamma \pi s \sin \pi s} h(s) z^s ds + (1/\gamma)F(z), \quad (27.84)$$

где

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2p+1)\pi k/\gamma]}{\sin(\pi k/\gamma)} h(k/\gamma) z^{k/\gamma} = \\ &= \sum_{m=-p}^p \sum_{k=1}^{\infty} h(k/\gamma) (z^{1/\gamma} \exp(2\pi m i/\gamma))^k. \end{aligned} \quad (27.85)$$

Чтобы интеграл в (27.84) сходился и сдвиг пути вправо для вывода (27.85) был законным, должно выполняться неравенство

$$|\theta| < \gamma/2 + 1 - |2p+1-\gamma|, \quad (27.86)$$

которое определяет выбор числа p . При $-\gamma\sigma_0 - \operatorname{Re} \alpha + \omega + 1/2 < -1$ в (27.86) допускается знак равенства. Если γ — рациональное число, то подынтегральная функция в (27.84) тоже имеет только простые полюсы и (27.84), (27.85) сохраняются.

С помощью (27.84) исследование асимптотики $f(z)$ приводится к асимптотике целых функций первого порядка. Если $h(k/\gamma)$ можно разложить в ряд обратных факториалов, то $F(z)$ выражается с помощью суммы функций ${}_1F_1(1; n+\alpha_k; t)$ и можно применить (27.77). Если $g(k/\gamma)$ разлагается в степенной ряд и $\alpha=1$, то $F(z)$ выражается с помощью функций $G_\beta(z, 0)$ и применяются (22.103), (23.78) и (24.54). В секторе, в котором $|f(z)|$ растет экспоненциально, интегралом в (27.84) можно пренебречь, так как он имеет оценку $O(|z|^{-\sigma_0})$.

Данный метод будет применяться в п. 28.2.

27.6.6. *Применение суммационных формул.* Из формулы Пуассона (27.35) при $\alpha=1$, $z=e^x$, $h(t)=g(t)e^{xt}$ получаем

$$f(e^x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) e^{kx} = (1/2)g(0) + H(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} H(2k\pi), \quad (27.87)$$

где

$$H(u) = \int_0^{\infty} g(t) e^{xt} \cos ut \, dt. \quad (27.88)$$

Формула (27.87) используется таким же образом, как в случае степенных рядов при $R < \infty$. Однако часто функции $H(2k\pi)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ имеют одинаковый порядок, и тогда из (27.87) асимптотика для $f(e^x)$ непосредственно не следует, а необходимы дальнейшие преобразования и исследования, чтобы выделить главный член асимптотического представления. Пример приведен в п. 27.7.2. Нередко формула (27.87) для исследования асимптотики $f(z)$ вообще неприменима.

При прежних обозначениях из формулы Эйлера—Маклорена (27.36) получаем

$$\begin{aligned} f(e^x) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) e^{kx} = (1/2)g(0) + \int_0^{\infty} e^{xt} g(t) \, dt + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{xt} \sigma_1(t) [g'(t) + xg(t)] \, dt. \end{aligned} \quad (27.89)$$

Эта формула обычно дает только асимптотическую оценку. Пусть 1) $g(k) = e^{-G(k)}$, $G(t) \in C^2(0, \infty)$, $G(t) > 0$, $G'(t) > 0$, $G''(t) > 0$; 2) при $t \rightarrow \infty$ $G(t) \rightarrow \infty$, $G'(t) \rightarrow \infty$, $G''(t) \rightarrow 0$; 3) $t_0(x)$ означает корень уравнения $G'(t) = x$. Если можно найти такую функцию $\omega(x)$, что $\omega^2(x) G''(t_0(x)) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и имеет место соотношение $G''(t_0(x) + \vartheta \omega(x)) = G''(t_0(x)) [1 + o(1)]$ равномерно относительно $\vartheta \in [-1, 1]$, то, подобно тому как в п. 27.3.5, получаем асимптотическое представление

$$f(e^x) = \sqrt{2\pi/G''(t_0(x))} \exp [xt_0(x) - G(t_0(x))] [1 + o(1)]. \quad (27.90)$$

К (27.89) можно добавить аналогичные примечания, как в п. 27.3.5.

Пусть в условии 2) $G''(t) \rightarrow \kappa > 0$ при $t \rightarrow \infty$. Применяя к функции $G(t)$ в каждом члене ряда (27.89) формулу Тейлора относительно точки t_0 , получим

$$f(e^x) = \exp [xt_0 - G(t_0)] \sum_{k=0}^{\infty} \exp [-G''(t_0 + \vartheta_k(t_0 - k)) (t_0 - k)^2/2].$$

При $t_0 \rightarrow \infty$ последний ряд эквивалентен $\sum_{k=0}^{\infty} \exp [-\kappa(t_0 - k)^2/2] \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp [-\kappa(t_0 - k)^2/2]$. Эквивалентность следует из того, что

члены ряда, если их при фиксированном t_0 упорядочить по величине $(t_0 - k)^2$, образуют шкалу, и определяющими будут не более чем два члена ряда. Поэтому при $x \rightarrow \infty$ получаем

$$f(e^x) \sim \exp [xt_0 - G(t_0)] \sum_{k=0}^{\infty} \exp [-\kappa(t_0 - k)^2/2]. \quad (27.90')$$

Формулы (27.90) и (27.90') при $\kappa \neq 0$ показывают разницу между значением функции и максимальным членом ряда (27.89).

27.7. Примеры

27.7.1. Несколько примеров для исследования асимптотики целых функций с помощью интегральных преобразований рассматривалось в § 22, 23. Применение интеграла Меллина—Барнса к асимптотическому представлению некоторых классов целых функций будет рассматриваться также в следующем параграфе. Поэтому ограничимся лишь рассмотрением примеров к п. 27.6.3 и 27.6.6.

Пусть $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \ln k/k!$. Тогда в (27.81) следует брать $f(z) = e^z - 1$. Разбив интеграл (27.81) по сегментам $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, после преобразований получим

$$F(z) = I_1(z) + I_2(z) - Ae^z + B, \quad (27.91)$$

где

$$I_1(z) = \int_0^{1/2} \frac{e^{zv} - 1}{v \ln v} dv, \quad I_2(z) = \int_{1/2}^1 \frac{e^{zv} - ve^z}{v \ln v} dv,$$

$$A = \int_0^{1/2} \frac{dv}{\ln v} = (1/2) \ln \ln 2 - \int_0^{1/2} \ln \ln (1/v) dv,$$

$$B = \int_{1/2}^1 \frac{v-1}{v \ln v} dv + A = \ln \ln 2 - \Gamma'(1).$$

Выражения для A и B здесь преобразованы интегрированием по частям и подстановкой $\ln 1/v = u$. Легко видеть, что при $\operatorname{Re} z > 0$ в асимптотическом разложении для $F(z)$ можно отбросить $I_1(z)$, а при $\operatorname{Re} z < 0$ — $I_2(z)$.

Разлагая $I_2(z)$, целесообразно применять подстановку $v = 1 - u$ и использовать разложение (25.26) при $\lambda = 0$, $\mu = -1$. Обозначим $(-1)^n B_n^{(n)}/n! = \kappa_n$, $\kappa_0 = 1$, $\kappa_1 = 1/2$, $\kappa_2 = 5/12$. Подставляя ряд (25.26) под знак интеграла, после преобразований с учетом (27.91) при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ получаем

$$F(z) \sim e^z [\ln z - C - \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{k+1} k! / z^{k+1}], \quad (27.92)$$

$$C = 1/2 + \ln 2 + \Gamma'(1) + A + \int_0^{1/2} \frac{u + (1-u) \ln(1-u)}{u \ln(1-u)} du = 0.$$

Целесообразно (27.92) сравнить с (27.81').

В случае $\operatorname{Re} z < 0$ в $I_1(z)$ положим $z = -\zeta$, $\operatorname{Re} \zeta > 0$, проинтегрируем $I_1(z)$ по частям и учтем (18.52), где $\alpha = \mu = 1$, $\beta = 0$ и согласно (18.50) $A_0(v) = 1$, $A_k(v) = -v/k$. После подобных преобразований, как выше, при $\zeta \rightarrow \infty$, $|\arg \zeta| \leq \pi/2 - \varepsilon$ приходим к разложению

$$F(-\zeta) \sim -\Gamma'(1) + \ln \ln \zeta - \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma^{(k)}(1) / k \ln^k \zeta. \quad (27.93)$$

Более сложные результаты тем же методом получаем, если при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$

$$f(z) \sim e^{\alpha z} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{-\lambda_k}, \quad \alpha \geq 0, \quad \text{и} \quad f(-z) \sim e^{-\beta z} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-\mu_k}, \quad \beta \geq 0.$$

Эти разложения рассмотрены в [132]. Там же показано, что, при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (\pm ix)^k (\ln k) / k! &\sim e^{\pm ix} \ln(\pm ix) + \ln \ln(\mp ix) - \\ &- \Gamma'(1) - \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma^{(k)}(1) / k \ln^k(\mp ix). \end{aligned} \quad (27.94)$$

27.7.2. Рассмотрим примеры на применение формул (27.87) и (27.90). Пусть $f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\alpha k^\lambda) z^k$, $\lambda \in (1, 2)$, $\alpha > 0$. Функция $G(t) = \alpha t^\lambda$ удовлетворяет условиям, указанным в п. 27.6.6, если $\omega(x) = x$, поэтому согласно (27.90) при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$f_\lambda(e^x) \sim \sqrt{2\pi/\alpha\lambda(\lambda-1)} (x/\alpha\lambda)^{(1-\lambda/2)/(\lambda-1)} \exp[(1-1/\lambda)(x^\lambda/\alpha\lambda)^{1/(\lambda-1)}]. \quad (27.95)$$

В комплексной плоскости асимптотика этой функции с помощью (27.28) рассмотрена в [8].

При $\lambda=2$ согласно (27.87), (27.88), (8.44) и (8.51) имеем

$$f_2(e^x) = 1/2 + \sqrt{\pi/\alpha} e^{x^2/4\alpha} \vartheta_3(x/2\alpha, 1/\alpha) - \\ - (1/2\sqrt{\alpha}) \psi(x, 0) - (1/\sqrt{\alpha}) \sum_{k=1}^{\infty} \psi(x, 2k\pi), \quad (27.96)$$

где согласно (29.54)

$$\vartheta_3(v, t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 t} \cos 2k\pi v = (1/\sqrt{\pi t}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[-(v+k)^2/t], \quad (27.97)$$

$$\psi(x, u) = \exp\left(\frac{(x+iu)^2}{4\alpha}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{x+iu}{2\sqrt{\alpha}}\right) + \\ + \exp\left(\frac{(x-iu)^2}{4\alpha}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{x-iu}{2\sqrt{\alpha}}\right).$$

В силу (8.9) и формулы (1.421.4) из работы [7] можно убедиться в том, что последняя сумма в (27.96) при $x \rightarrow +\infty$ имеет оценку $O(1)$, поэтому при $z \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k^2 z^k} = \sqrt{\pi/\alpha} \exp((\ln^2 z)/4\alpha) \vartheta_3((\ln z)/2\alpha, 1/\alpha) + O(1). \quad (27.98)$$

В этом примере все члены ряда в правой части (27.87) имеют одинаковый порядок. Кроме того, $f(z) \exp(-(\ln^2 z)/4\alpha)$ не стремится к определенному пределу при $z \rightarrow +\infty$.

При $\lambda > 2$ следует применить (27.66). Если обозначить $n_0 = [(x/\alpha\lambda)^{1/(\lambda-1)}]$, то при $x \rightarrow +\infty$ получим соотношение

$$f_\lambda(e^x) \sim \sum_{k=0}^{n_0} \exp((n_0 - 1 + k)x - \alpha(n_0 - 1 + k)^\lambda). \quad (27.99)$$

§ 28. АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

28.1. Общие теоремы

28.1.1. При выражении функции, определяемой степенным рядом (27.1), в виде интеграла обращения преобразования Меллина требуется, чтобы коэффициент ряда являлся аналити-

ческой функцией в правой полуплоскости. При построении асимптотического разложения для (27.1) при $z \rightarrow \infty$ требуется существование аналитического продолжения данной функции во всей плоскости, за исключением изолированных особых точек. Обычно такое продолжение осуществляется с помощью интеграла. Имеются разные методы для построения аналитического продолжения коэффициента a_n в (27.1), т. е. для нахождения такой аналитической функции $h(t)$, для которой $h(n) = a_n$. Таких функций бесконечно много. В одном из методов для их построения используется формула Коши:

$$a_n = (1/2\pi i) \int_L f(z) z^{-n-1} dz = (1/2\pi i) \int_{L_1} f(e^{-t}) e^{nt} dt. \quad (28.1)$$

Последний интеграл в (28.1) взят по вертикальному отрезку длиной 2π и определяет целую функцию от n . Другая возможность — в (28.1) в качестве пути L брать петлю вокруг разреза, идущего от 0 до ∞ в таком направлении, в котором $f(z)$ аналитически продолжима и интеграл сходится для всех n при $\operatorname{Re} n > n_0$.

Свойство аналитичности коэффициента используется в разных теоремах, характеризующих поведение степенного ряда с радиусом сходимости $R=1$. Приводим две из них. Другие теоремы можно найти в [100, 181].

Теорема 28.1 (теорема Ло-Вигерта [118, 184, 226, 296]). Для того чтобы функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k$ являлась целой функцией от $1/(1-z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $h(t)$ была целой не выше первого порядка и минимального типа.

Теорема 28.2 (теорема Поля [267]). Если $h(k) = H(k) + h^*(k)$, где ряд $\sum_{k=0}^{\infty} h^*(k) z^k$ сходится в круге с радиусом больше 1, а $H(t)$ — целая функция не выше первого порядка и минимального типа, то точка $z=1$ является единственной особой точкой для $f(z)$.

28.1.2. При построении асимптотического разложения для функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k \quad (28.2)$$

при $z \rightarrow \infty$ методом Меллина—Барнса используются расположение и характер особых точек функции $h(t)$ в левой полуплоскости. Этот метод иногда применяется также при исследовании

асимптотики при $z \rightarrow \infty$ для аналитического продолжения функции (28.2) в случае конечного радиуса сходимости. Нередко применима

Теорема 28.3 (теорема Линделефа—Форда [192, 231]). Пусть в (28.2) 1) $h(t)$ аналитична при $\operatorname{Re} t \geq \sigma_0$; 2) можно найти такие $M > 0$ и $\theta \in [0, \pi)$, что для любого малого $\varepsilon > 0$, всех $\rho \geq \rho_0$ и $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет место

$$|h(x + \rho e^{i\psi})| < M e^{(\theta + \varepsilon)\rho}, \quad x \geq \sigma_0. \quad (28.3)$$

Тогда функция $f(-z)$ аналитически продолжаема при $|\arg z| \in [0, \pi - \theta)$, если она не является целой, а при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \in [0, \pi - \theta - \eta]$, $\eta > 0$, имеет асимптотическое представление

$$f(-z) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^m h(-k) (-z)^k + (-z)^{\sigma_0} O(1), & \text{если} \\ \sigma_0 \in (-m-1, -m), \quad m \in N_1, \\ (-z)^{\sigma_0} O(1), & \text{если } \sigma_0 > -1. \end{cases} \quad (28.4)$$

Доказательство. Пусть сначала $|\sigma_0| \in N$, $\sigma_0 \in (p-1, p)$, $|p| \in N$. Можно применить формулу (27.32), согласно которой в данном случае

$$\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k h(k) z^k = -\frac{1}{2i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} z^t (h(t) / \sin \pi t) dt. \quad (28.5)$$

Из неравенства (28.3) следует, что при $z = r e^{i\varphi}$ интеграл в (28.5) мажорируется интегралом

$$M_1 r^{\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-|y|(\pi - \theta - \varepsilon) - \varphi y] dy, \quad (28.6)$$

который сходится, если $|\varphi| < \pi - \theta - \varepsilon$. Отсюда получаем следующие выводы.

1°. Поскольку при $r < 1$ и $\sigma_0 \rightarrow +\infty$ мажорантный интеграл стремится к 0, то соотношение (28.5) имеет место при $r < 1$ и $|\varphi| < \pi - \theta - \varepsilon$. Этим оправдано передвижение пути интегрирования вправо, с помощью которого устанавливается справедливость (28.5). Затем согласно принципу аналитического продолжения (см. п. 2°) соотношение (28.5) сохраняется при $r \geq 1$, так как интеграл сходится.

2°. В силу произвольной малости ε интеграл в (28.5) определяет аналитическую функцию в секторе $|\arg z| < \pi - \theta - \varepsilon$.

Следовательно, этот интеграл в данном секторе дает аналитическое продолжение суммы, стоящей в левой части (28.5), если такое продолжение требуется. Поскольку $f(-z) = \sum_{k=p}^{\infty} - \sum_{k=p}^{-1}$ при

$p < 0$ и $f(-z) = \sum_{k=p}^{\infty} + \sum_{k=0}^{p-1}$ при $p \geq 0$, то аналитически продолжается

в данном секторе также функция $f(-z)$. При $p > 0$ следует учесть, что $h(0), \dots, h(p-1)$ определены данным рядом. Очевидно, безразлично, какой радиус сходимости ряда (28.5), так как в любом случае формула (28.5) даст возможность $f(-z)$ выразить с помощью интеграла и конечной суммы.

3°. Из оценки (28.6) и п. 2° следует формула (28.4). При $|\arg z| \leq \pi - \theta - \eta$, $\eta > \varepsilon$, оценка $O(1)$ равномерна относительно $\arg z$.

Если же σ_0 — целое число, то путь интегрирования в (28.5) вблизи точки $t = \sigma_0$ следует искривлять, обходя эту точку слева. Поскольку на искривленной части $\operatorname{Re} t \leq \sigma_0$, то оценка $r^{\sigma_0} O(1)$ на этой части сохраняется и (28.6) остается справедливым. ■

Примечания. 1°. Если подынтегральную функцию в (28.5) оценить точнее и учитывать подынтегральный множитель $e^{iy \ln r} = \cos(y \ln r) + i \sin(y \ln r)$, то, по лемме Римана—Лебега, при $r \rightarrow \infty$, $\ln r \rightarrow \infty$ интеграл, помноженный на $r^{-\sigma_0}$, стремится к 0 и поэтому в (28.4) $O(1)$ можно заменить на $o(1)$.

2°. Если $h(t)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству $|h(\rho e^{i\psi})| < M e^{\rho}$, то в (28.5) можно брать предел при $\sigma_0 \rightarrow -\infty$. Из (28.6) следует, что при $r > 1$ интеграл стремится к 0, поэтому получаем сходящийся ряд

$$f(-z) = - \sum_{k=1}^{\infty} h(-k) / (-z)^k, \quad |z| > 1, \quad (28.7)$$

одновременно дающий асимптотическое разложение. Отсюда и следует достаточность теоремы Ло—Вигерта 28.1 и частный случай теоремы Поля 28.2 при $h^*(t) \equiv 0$. Условие на $h(t)$ можно ослабить [195], чтобы ряд (28.7) оставался сходящимся.

3°. Возможно, что функция $h(t) / \sin \pi t$ имеет лишь конечное число полюсов при $\operatorname{Re} t < 0$. Если в этом случае интеграл (28.5) не стремится к 0 при $\sigma \rightarrow -\infty$, то часто асимптотическое представление удастся уточнить и добавить к нему разложение с экспоненциально убывающим множителем. Можно попытаться $h(t) / \sin \pi t$ разложить в ряд типа (23.33) и применить теорию, изложенную в п. 23.3.3. Примеры к этому случаю приведены в п. 23.4.4, 7°, 28.4.5 и 28.5.2.

4°. Если $h(t)$ аналитична лишь вне некоторого круга и обладает там данной оценкой, а внутри этого круга имеет

изолированные особые точки, то к сумме (28.7) следует добавить вычеты функции $z^t h(t)/\sin \pi t$ в особых точках или интегралы по петлям вокруг разрезов, как это указано в § 23. При этом разрезы находятся внутри круга. Поскольку интеграл по петле дает разложение по логарифмам, то полюсами, находящимися левее точки ветвления, а также следующими членами в сумме (28.4) можно пренебречь.

5°. Весьма часто встречается случай, когда $h(t)$ аналитична в секторе $|\arg t| \leq \pi/2 + \eta$, $\eta > 0$, где она обладает оценкой (28.3) при каждом x , причем $M = M(x)$. В остальном секторе, кроме полюсов и точек ветвления, эта функция аналитична. Тогда согласно § 23 для $f(-z)$ можно построить асимптотическое разложение, в котором к ряду (28.7) следует добавить ряд, составленный из вычетов в полюсах, и разложения по логарифмам, полученные из точек ветвления. Следует учитывать лишь те точки ветвления, действительная часть которых наибольшая. При оценке интеграла (28.5), где σ_0 выбрано так, что в путь интегрирования включены некоторые части упомянутых петель и на пути нет полюсов, оценка (28.3) используется лишь в секторе $|\arg t| \leq \pi/2 + \eta$, а на остальной части пути интегрирования $h(t)$ оценивается постоянной. Если $h(t)$ имеет полюс при $t = -m$, $m \in N_1$, то соответствующий член ряда (28.7) следует изменить, так как для подынтегральной функции в (28.5) этот полюс будет кратным. Если $t = -m$ является точкой ветвления, то вместо соответствующего члена получаем разложение по логарифмам.

6°. Можно доказать [261], что для любой последовательности чисел $\{c_k\}$ найдется такая целая функция $h(t)$, что $h(-k) = c_k$. Поэтому среди всех возможных асимптотических сумм формального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$ имеются также целые функции.

Более общая задача заключается в следующем: требуется установить, существует ли целая функция, обладающая при $|\arg z| \leq \pi$ составным асимптотическим разложением $e^{\alpha z} \times \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-\lambda_k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-\mu_k}$ при заданных $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_k\}$ и $\alpha > 0$. Некоторые результаты по этому вопросу приведены в работе [262], в которой построена целая функция, имеющая в разных открытых заданных секторах натуральные степенные асимптотические разложения с разными заданными коэффициентами.

28.1.3. Теорема 28.3 имеет различные применения (некоторые из них будут рассмотрены в п. 28.2). Кроме того, она дает возможность указать для многих целых функций определенный

сектор, в котором $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. В качестве примера рассмотрим функцию Линделефа [230, 231]

$$E_{\beta, \gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[\ln(k+\beta)]^{\gamma k}}, \quad \beta > 1, \quad \gamma > 0. \quad (28.8)$$

Функция $h(t) = [\ln(t+\beta)]^{-\gamma t} = \exp[-\gamma t \ln \ln(t+\beta)]$ аналитична при $\operatorname{Re} t > 1 - \beta$, $1 - \beta < 0$. Пусть в теореме 28.3 $\sigma_0 \in (1 - \beta, 0)$ и $t = x_0 + \rho e^{i\psi}$, $x_0 \geq \sigma_0$. Поскольку $\ln \ln(t+\beta) = \ln[\ln \rho + o(\ln \rho) + i\psi] = \ln \ln \rho + iO(1/\ln \rho)$, то $|h(t)| < M \exp[\gamma \rho \sin \psi O(1/\ln \rho) - \gamma(x_0 + \rho \cos \psi) \ln \ln \rho] < M_1 \exp(\varepsilon \rho)$, где ε можно фиксировать сколь угодно малым. Поэтому согласно теореме 28.3 $E_{\beta, \gamma}(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ в любом секторе S , из которого исключена ось $\arg z = 0$. На этой оси $E_{\beta, \gamma}(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow +\infty$. При $\beta > 2$ в S из (28.4) следует более точное асимптотическое выражение.

Функция $\exp[-E_{\beta, \gamma}(z)]$ тоже является целой и в S стремится к 1, а на оси $\arg z = 0$ — к 0. Пусть $\beta \neq \beta_1 > 1$. Целая функция

$$F(z) = \exp[-E_{\beta, \gamma}(z)] - \exp[-E_{\beta_1, \gamma}(z)] \quad (28.9)$$

замечательна тем, что стремится к 0 вдоль любого луча, исходящего из начала. Однако из данного анализа видно, что это стремление не является равномерным в любом секторе, содержащем ось $\arg z = 0$.

Асимптотическое выражение для $E_{\beta, \gamma}(z)$ при $z \rightarrow +\infty$ можно получить согласно (27.90), если в эту формулу подставить $z = e^x$:

$$\begin{aligned} t_0(x) &= [\exp(e^{x/\gamma} - 1)] [1 + o(1)], \quad G''(t_0(x)) = \\ &= \gamma e [\exp(-e^{x/\gamma} - x/\gamma)] [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $\omega(x) = \sqrt[\gamma]{t_0(x) + \beta} \ln [t_0(x) + \beta]$ условия применимости этой формулы выполнены.

28.2. Метод применения стандартных функций

28.2.1. Рассмотрим обобщение метода, изложенного в п. 27.6.2. Пусть

$$h(t) = e^{\beta t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j}{\Gamma(\gamma t + \alpha_j)}, \quad \gamma > 0, \quad \operatorname{Re} \alpha_j \uparrow +\infty, \quad \operatorname{Re} \alpha_0 > 0, \quad (28.10)$$

$\operatorname{Re}(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \geq m > 0$, $j \in N$. Предположим, что можно найти такое ω , что $d_j = O(j^\omega)$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда ряд (28.10) согласно

условиям $\operatorname{Re} \alpha_j$ абсолютно сходится во всей плоскости и $h(t)$ — целая функция. Имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{\beta})^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j}{\Gamma(\gamma k + \alpha_j)} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} d_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ze^{\beta})^k}{\Gamma(\gamma k + \alpha_j)} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j E_{1/\gamma}(ze^{\beta}, \alpha_j), \end{aligned} \quad (28.11)$$

где обобщенная функция Миттага—Леффлера $E_{1/\gamma}(z, \alpha)$ определена в (22.108). Изменение порядка суммирования оправдать нетрудно. Легко видеть, что $f(z)$ — также целая функция. Поскольку разложение (28.11) содержит те же коэффициенты d_j , что и ряд (28.10), а семейство функций $\{e^{\beta t}/\Gamma(\gamma t + \alpha_j)\}$ изменяется на семейство $\{E_{1/\gamma}(ze^{\beta}, \alpha_j)\}$, то назовем эти семейства стандартными семействами функций.

Асимптотическое разложение функции $E_{1/\gamma}(z, \alpha)$ находится аналогично тому, как для $E_{1/\gamma}(t)$ в п. 22.7. Вместо формулы (22.105) имеем

$$E_{1/\gamma}(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{e^{w\omega^\gamma - \alpha}}{\omega^\gamma - z} dw, \quad \sigma_1 > |z|^{1/\gamma}, \quad (28.12)$$

где $\arg(\omega^\gamma) \in [-\gamma\pi, \gamma\pi]$. Эта формула определяет $E_{1/\gamma}(z, \alpha)$ для всех z и $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Однако путь интегрирования можно изгибать по кривой L так, чтобы вдоль него $\operatorname{Re} \omega \rightarrow -\infty$. Тогда данный интеграл определяет аналитическое продолжение для $E_{1/\gamma}(z, \alpha)$ при всех α . Из (28.12), как и из (22.105), получаем разложение

$$\begin{aligned} E_{1/\gamma}(z, \alpha) &\sim (1/\gamma) \sum_{|\arg z + 2k\pi|/\gamma \leq \pi} \exp[(ze^{i2k\pi})^{1/\gamma}] (ze^{i2k\pi})^{(1-\alpha)/\gamma} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (1/[\Gamma(\alpha - \gamma n)]) z^{-n}, \end{aligned} \quad (28.13)$$

которое справедливо при $z \rightarrow \infty$ во всей плоскости. Из (28.13) видно, что члены ряда (28.11) не всегда образуют шкалу.

Проводим более детальный анализ формулы (28.13), так как число членов в первой сумме S_k и принимаемые значения индекса k зависят как от γ , так и от $\arg z$. При анализе следует иметь в виду, что в (28.12) $\arg(\omega^\gamma) \in [-\gamma\pi, \gamma\pi]$, $\arg z \in [-\pi, \pi]$ и полюсы, дающие сумму вычетов S_k в (28.13), определяются из

уравнения $\omega = (ze^{i2k\pi})^{1/\gamma}$. Поскольку функция $E_{1/\gamma}(z, \alpha)$ целая, то при $\arg z = -\pi$ и $\arg z = \pi$ ее значения совпадают. Кроме того, следует учесть, что сумма S_k влияет на асимптотику функции $E_{1/\gamma}(z, \alpha)$ только при тех $\arg z$, при которых $|\arg z + 2k\pi|/\gamma \leq \pi/2$.

1°. $\gamma \leq 1$. При $\arg z \in [-\gamma\pi, \gamma\pi]$ имеем один полюс, поэтому надо брать $k=0$, т. е. S_k имеет вид

$$(1/\gamma) \exp(z^{1/\gamma}) z^{(1-\alpha)/\gamma}. \quad (28.14)$$

При других $\arg z$ полюсов нет и сумма S_k в (28.13) отсутствует. Она влияет на асимптотику лишь при $|\arg z| \leq \gamma\pi/2$.

2°. $\gamma \in (1, 2)$. При $|\arg z| < \pi(2-\gamma)$ имеем один полюс, следовательно, $k=0$. В противном случае имеем два полюса, причем $k=0$ и $k = -\text{sign}(\arg z)$. Однако слагаемое в S_k при $k \neq 0$ не влияет на асимптотику, и вся сумма S_k влияет только при $|\arg z| \leq \gamma\pi/2$, когда она имеет вид (28.14).

3°. $\gamma=2$. При всех $\arg z$ имеем два полюса и $k=0$, $k = \pm 1$, как в предыдущем случае. При $|\arg z| < \pi$ на асимптотику влияет только член (28.14), а при $|\arg z| = \pi$ — также член

$$(1/\gamma) \exp[(ze^{i2\pi k})^{1/\gamma}] (ze^{i2\pi k})^{(1-\alpha)/\gamma}, \quad k = -\text{sign}(\arg z). \quad (28.15)$$

4°. $\gamma > 2$. Имеем $[(\gamma+1)/2]$ или $[(\gamma+1)/2] + 1$ полюсов, однако для дальнейшего исследования нас интересуют те члены суммы S_k , модуль которых наибольший. Поскольку $|\arg(z/\gamma)| \leq \leq \pi/\gamma$, $\arg(z/\gamma) - 2\pi/\gamma \leq -\pi/\gamma$, $\arg(z/\gamma) + 2\pi/\gamma \geq \pi/\gamma$, то определяющим является член (28.14). Только при $|\arg z| = \pi$ следует добавить член (28.15).

5°. В особом случае (ОС), когда $\alpha \in N$, $\gamma \in N_1$, бесконечный ряд в (28.13) превращается в конечную сумму, так как $\omega=0$ в (28.12) не является точкой ветвления. Поэтому в (28.13) имеем знак равенства и следует учитывать все члены.

28.2.2. При подстановке (28.13) в (28.11) используется следующее обобщение теоремы 5.6.

Лемма 28.1. Пусть 1) ряд $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \varphi_j(z)$ сходится в некоторой неограниченной области D ; 2) $\varphi_j(z) = \Phi(z) z^{-\mu_j} + G(z) [\sum_{k=0}^m b_{kj} z^{-\lambda_k} + \rho_{mj}(z)]$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in D$, где $\text{Re } \mu_j \uparrow +\infty$, $\text{Re } \lambda_k \uparrow +\infty$, $\rho_{mj}(z) = o(z^{-\lambda_m})$; 3) ряды $\sum_{j=0}^{\infty} d_j b_{kj} = c_k$ сходятся при $k \leq m$; 4) $\sum_{j=0}^{\infty} d_j \rho_{mj}(z) = O(z^{-\nu_m})$. Тогда при $z \rightarrow \infty$, $z \in D$

$$f(z) = \Phi(z) \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^{-\mu_j} + G(z) \left[\sum_{k=0}^m c_k z^{-\lambda_k} + O(z^{-\nu_m}) \right]. \quad (28.16)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi_j(z) = \Phi(z)z^{-\mu_j} + G(z)\varphi_j^*(z)$. Поскольку из условий 3) и 4) следует, что ряд $G(z) \sum_{j=0}^{\infty} d_j \varphi_j^*(z)$ сходится, то сходится также ряд $\sum_{j=0}^{\infty} d_j z^{-\mu_j}$ при достаточно большом $|z|$. Имеем равенства

$$\begin{aligned} f(z) &= \Phi(z) \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^{-\mu_j} + G(z) \sum_{j=0}^{\infty} d_j \sum_{k=0}^m b_{kj} z^{-\lambda_k} + G(z) \sum_{j=0}^{\infty} d_j \rho_{mj}(z) = \\ &= \Phi(z) \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^{-\mu_j} + G(z) \left[\sum_{k=0}^m c_k z^{-\lambda_k} + O(z^{-\nu_m}) \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Примечания. 1°. Лемма сохраняется, если в ней шкалы $\{t^{-\mu_j}\}$ и $\{t^{-\lambda_k}\}$ заменить на более общие шкалы $\{h_j(z)\}$ и $\{g_k(z)\}$.

2°. Если же сумму $G(z) \sum_{k=0}^m b_{kj} g_k(z)$ заменить на $G_j(z) \times \sum_{k=0}^m b_{kj} g_k(z)$, то условия 3) и 4) следует заменить на 3') $H_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j b_{kj} G_j(z) = O(1)$ и 4') $\sum_{j=0}^{\infty} d_j G_j(z) \rho_{mj}(z) = O(g_{\nu_m}(z))$. Тогда вместо (28.16) имеем

$$f(z) = \Phi(z) \sum_{j=0}^{\infty} d_j h_j(z) + \sum_{k=0}^m H_k(z) g_k(z) + O(g_{\nu_m}(z)). \quad (28.16')$$

При этом второй ряд в правой части (28.16') не всегда является асимптотическим разложением.

3°. Возможно, что условия 3) и 4) не выполняются, но существуют пределы

$$3'') \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{j=0}^{\infty} d_j b_{kj} r^j = c_k^* \quad \text{и} \quad 4'') \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{j=0}^{\infty} d_j \rho_{mj}(z) r^j = O(g_{\nu_m}(z)),$$

т. е. рассматриваемые ряды суммируемы в смысле Абеля. Тогда в силу теоремы Абеля

$$f(z) = \Phi(z) \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{j=0}^{\infty} d_j h_j(z) r^j + G(z) \left[\sum_{k=0}^m c_k^* g_k(z) + O(g_{\nu_m}(z)) \right]. \quad (28.16'')$$

Поскольку $E_{1/\nu}(z, \alpha)$ — целая функция, то при любом $\arg z$ выберем $|\arg(z e^{\beta})| \leq \pi$ и в (28.11) используем разложение

(28.13). Однако следует проверить выполнение условий 3) и 4) леммы 28.1. Имеем $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta n} d_j / \Gamma(\alpha_j - \gamma n) = h(-n)$, и эти ряды сходятся. Для проверки выполнения условия 4) надо глубже исследовать свойства интеграла в (28.12). Путь L этого интеграла можно деформировать в окрестности вокруг полюсов и в петлю вокруг разреза, идущего из $w=0$ в левой полуплоскости. Разрез при фиксированном $\arg z$ можно выбрать так, чтобы при достаточно большом $|z|$ для всех точек w на разрезе имело место неравенство $|w^\gamma - z| > 1$. После того петлю деформируем по лучам Γ_1 и Γ_2 на берегах разреза и по окружности L_0 , где $|w|=2$. Используя соотношения $1/(w^\gamma - z) = -\sum_{k=0}^m w^{\gamma k} / z^{k+1} + w^{\gamma(m+1)} / z^{m+1} (w^\gamma - z)$, $|1/(w^\gamma - z)| < 1$ на пути, $\int_2^\infty e^{-u} u^{\gamma(m+2) - \alpha_j} du < \Gamma(\gamma(m+2) + 1) 2^{-\alpha_j}$, $|\int_{L_0}| < 4\pi e^{2\gamma(m+2)} 2^{-\alpha_j}$ и сходимость ряда $\sum_{j=0}^{\infty} d_j 2^{-\alpha_j}$, можно утверждать, что условие 4) выполнено при любом m . Поэтому после подстановки (28.13) в (28.11) согласно лемме 28.1 получаем

$$f(z) \sim (1/\gamma) \sum_{|\arg(ze^{\beta}) + 2k\pi|/\gamma \leq \pi} \exp[(ze^{i2k\pi + \beta})^{1/\gamma}] \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} d_j (ze^{i2k\pi + \beta})^{(1-\alpha_j)/\gamma} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(-n)}{z^n}. \quad (28.17)$$

В силу анализа, приведенного в п. 28.2.1, при конкретных γ и $\arg z$ выражение (28.17) упрощается. При $\gamma > 2$ степенной ряд можно отбросить и в первой сумме \sum_k при $|\arg(ze^{\beta})| < \pi$ брать только член при $k=0$. Получаем ряд по j с множителем $F_0(z) = \exp[(ze^{\beta})^{1/\gamma}]$. При $|\arg(ze^{\beta})| = \pi$ еще следует добавить ряд, в котором $k = -\text{sign}(\arg(ze^{\beta}))$ и содержится множитель $F^\pm(z) = \exp[(ze^{\pm i2\pi + \beta})^{1/\gamma}]$. При $\gamma = 2$ и $|\arg(ze^{\beta})| < \pi$ сказанное сохраняется, но при $|\arg(ze^{\beta})| = \pi$ к прежнему выражению добавляется еще степенной ряд. При $\gamma < 2$ и $|\arg(ze^{\beta})| < \gamma\pi/2$ имеем только ряд с множителем $F_0(z)$, а при $|\arg(ze^{\beta})| > \gamma\pi/2$ — только степенной ряд. В этом случае получаем некоторое дополнение к примечанию 2° теоремы 28.3 Линделефа—Форда.

Данный анализ относится и к ОС, когда степенной ряд в (28.17) превращается в конечную сумму, т. е. $h(-n) = 0$ при $n \geq n_0$. Тогда при $1 \leq \gamma < 2$ и $|\arg(ze^{\beta})| > \gamma\pi/2$ сумма \sum_k содержит экспоненциально убывающий множитель и уточняет

асимптотику $f(z)$. При $\gamma < 1$ Σ_k появляется лишь тогда, когда $\arg(ze^{\beta}) \in [-\gamma\pi, \gamma\pi]$. В остальном секторе уточнение приходится искать другим путем, о чем будет сказано в п. 28.2.6.

Формула (28.17) показывает, что при $\gamma < 2$ плоскость z разделяется на такие части, что в одной из них $f(z)$ имеет асимптотическое разложение с экспоненциальным множителем, в другой — степенной ряд. Назовем эти части плоскости соответственно \mathcal{E} -сектором и \mathcal{C} -сектором. При $\gamma > 2$ \mathcal{E} -сектор превращается во всю плоскость z .

28.2.3. Весьма часто $h(t)$ не является целой функцией, но имеет особые точки — полюсы или точки ветвления в некоторой левой полуплоскости. Тогда коэффициенты d_j в (28.10) не могут обладать прежней оценкой $d_j = O(j^\omega)$ и лемма 28.1 неприменима. В таком случае либо ряд (28.10) сходится лишь в некоторой правой полуплоскости, либо $h(t)$ имеет только асимптотическое разложение вида (28.10). Оба случая исследуются одинаково.

Определение 28.1. Будем говорить, что функция $h(t)$ принадлежит классу V_β , если она обладает следующими свойствами.

1°. $h(t)$ аналитична в S : $|\arg t| \leq \pi/2 + \eta$, $\eta \in (0, \pi/2)$, $|t| \geq R \geq 0$, а вне S она аналитична, за исключением счетного множества изолированных полюсов τ_k , $\{\tau_k\} \equiv T$, и изолированных точек ветвления ω_k , $\{\omega_k\} \equiv \Omega$, $\omega_k \in N$, $\tau_k \in N$. При этом особые точки в случае бесконечного числа их удаляются от начала в левой полуплоскости так, что $\operatorname{Re} \tau_k \rightarrow -\infty$, $\operatorname{Re} \omega_k \rightarrow -\infty$. Обозначим $\max(\operatorname{Re} \tau_k, \operatorname{Re} \omega_k) = x_0$.

2°. При каждом $m \in N$ и $t \rightarrow \infty$, $t \in S$

$$h(t) = e^{\beta t} \left[\sum_{j=0}^m \frac{d_j}{\Gamma(\gamma t + \alpha_j)} + \frac{r_m(t)}{\Gamma(\gamma t + \alpha_{m+1})} \right], \quad (28.18)$$

$\gamma > 0$, $\operatorname{Re} \alpha_j \uparrow +\infty$, $r_m(t) = O(1)$ в S .

Определение 28.2. Класс целых функций (28.2), для которых $h(t) \in V_\beta$, обозначим через W_β , а совокупность W_β по всем β — через W .

Докажем эквивалентность соотношения (28.18) некоторым другим соотношениям.

Лемма 28.2. Соотношение (28.18) эквивалентно следующему: $h(t) = e^{\beta t} H(t) / \Gamma(\gamma t + \alpha_0)$, где $H(t)$ аналитична в S и при $t \rightarrow \infty$, $t \in S$

$$H(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} D_k t^{-\lambda_k}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \lambda_k \uparrow +\infty. \quad (28.19)$$

Доказательство. Пусть имеет место (28.18). В силу (12.62) при $j > 0$ и $t \rightarrow \infty$, $t \in S$ имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma t + \alpha_j)} = \frac{1}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0)} \frac{\Gamma(\gamma t + \alpha_0)}{\Gamma(\gamma t + \alpha_j)} \sim \frac{1}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0)} \sum_{k=0}^{\infty} b_{kj} t^{-k - (\alpha_j - \alpha_0)}.$$

Если эти выражения подставить в (28.18) и перегруппировать члены, то при новых обозначениях показателей степени получим

$$h(t) = \frac{e^{\beta t}}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0)} \left[\sum_{k=0}^{m_1} D_k t^{-\lambda_k} + O(t^{-\lambda_{m_1+1}}) \right] + \frac{e^{\beta t} r_m(t)}{\Gamma(\gamma t + \alpha_{m+1})},$$

где $\operatorname{Re} \lambda_{m_1+1} > \operatorname{Re}(\alpha_m - \alpha_0)$. Поскольку согласно (12.62) $r_m(t)/\Gamma(\gamma t + \alpha_{m+1}) = [\Gamma(\gamma t + \alpha_0)]^{-1} O(t^{-(\alpha_{m+1} - \alpha_0)})$, то из (28.18) следует (28.19).

Пусть имеет место (28.19). Тогда

$$h(t) = \frac{e^{\beta t}}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0)} \left[\sum_{k=0}^l D_k t^{-\lambda_k} + O(t^{-\lambda_{l+1}}) \right]. \quad (28.20)$$

Используем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{t^{-\lambda_k}}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0)} &= \frac{1}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0 + \lambda_k)} \frac{\Gamma(\gamma t + \alpha_0 + \lambda_k)}{t^{\lambda_k} \Gamma(\gamma t + \alpha_0)} \sim \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0 + \lambda_k)} \sum_{j=0}^{\infty} B_{jk} t^{-j}, \end{aligned} \quad (28.21)$$

которое также следует из (12.62). Обозначим $\alpha_0 + \lambda_0 = \alpha_0^*$. Таким же образом, преобразуя при фиксированном k отдельные члены в правой части (28.21), получаем

$$\frac{t^{-\lambda_k}}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0)} = \sum_{j=0}^{m_k} \frac{c_{jk}}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0 + \lambda_k + j)} + \frac{O(t^{-m_k-1})}{\Gamma(\gamma t + \alpha_0 + \lambda_k)}, \quad (28.22)$$

где $\operatorname{Re}(\alpha_0 + \lambda_k + m_k + 1) > \operatorname{Re}(\alpha_0 + \lambda_l)$. Выражения вида (28.22) подставим в (28.20) и перегруппируем члены в порядке возрастания чисел $\operatorname{Re}(\alpha_0 + \lambda_k + j)$. Числа в такой последовательности обозначим через α_p^* . Получим сумму вида (28.18), а остаток в силу (28.22) имеет вид $r_m(t)/\Gamma(\gamma t + \alpha_{m+1}^*)$, где $\operatorname{Re} \alpha_{m+1}^* = \min_k (\operatorname{Re}(\alpha_0 + \lambda_{l+1}), \operatorname{Re}(\alpha_0 + \lambda_k + m_k + 1))$. ■

Лемма 28.3. Выражение для $h(t)$, указанное в лемме 28.2, в S эквивалентно выражению $h(t) = e^{\beta t} G(t)$, где $G(t)$ в S аналитична и при $t \rightarrow \infty$

$$G(t) \sim e^{\mu t - \gamma t \ln t} \sum_{k=0}^{\infty} E_k t^{-\nu_k}, \quad \operatorname{Re} \nu_k \uparrow +\infty. \quad (28.23)$$

Связь между числами β и μ указана в доказательстве.

Доказательство вытекает из обобщенной формулы Стирлинга, полученной из (28.69):

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma t + \alpha)} \sim \sqrt{1/2\pi} (\gamma t)^{-\alpha+1/2} \exp[\gamma(1 - \ln \gamma)t - \gamma t \ln t] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha, \gamma) t^{-k}, \quad (28.24)$$

которое справедливо при $|\arg \gamma t| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Если исходить из (28.20), то получим (28.23), где $\mu = \gamma(1 - \ln \gamma)$, $\nu_0 = \alpha_0 - 1/2 + \lambda_0$. Если исходить из (28.23), то получим (28.20), где β заменено на $\beta^* = \beta + \mu - \gamma(1 - \ln \gamma)$, $\alpha_0 = \nu_0 + 1/2$, $\lambda_0 = 0$. ■

28.2.4. В п. 28.2.4—28.2.6 будем предполагать, что $h(t) \in V_\beta$, где β — любое фиксированное число. Можно ожидать, что разложение (28.17) для функции $f(z) \in \mathcal{W}$ сохранится, если ее соответственно дополнить с учетом особых точек функции $h(t)$. Однако нелегко доказать этот факт. Поскольку множитель $e^{\beta t}$ в (28.18) не имеет существенного значения, то обозначим $h(t) = e^{\beta t} h_0(t)$, $h_0(t) \in V_0$, $ze^\beta = \zeta$, $|\arg \zeta| \leq \pi$ и исследуем асимптотику функции $f(z) = f_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k h_0(k)$ относительно ζ .

1°. Рассмотрим вначале асимптотику $f(z)$ в S -секторе. Можно применить примечание 4° к теореме 28.3 Линделефа—Форда, так как из (28.18) и (28.24) следует, что условие (28.3) выполнено при $\vartheta = \gamma\pi/2$. В силу свойств множеств T и Ω число σ_0 в (28.5) можно выбрать так, чтобы на пути интегрирования не было особых точек функции $h_0(t)$ и эта функция на каждой конечной части пути была ограниченной. В случае точек ветвления путь следует искривлять так, чтобы он образовывал петли вокруг разрезов Γ_k , идущих влево из точек ветвления ω_k . При $|\arg \zeta| \leq \pi - \gamma\pi/2 - \eta_0$, $\eta_0 > 0$, и любом $m \in N_1$ получаем соотношение

$$f(-z) = f_0(-\zeta) = - \sum_{k=1}^m h_0(-k) (-\zeta)^{-k} - \Omega_1^*(-\zeta) - \Omega_2^*(-\zeta) + \\ + o(\zeta^{-m}), \quad (28.25)$$

где $\Omega_1^*(-\zeta)$ — сумма вычетов функции $H_0(t, \zeta) = \pi h_0(t) \zeta^t / \sin \pi t$ в тех полюсах $t = \tau_k$, которые находятся вправо от прямой $\operatorname{Re} t = \sigma_0 \in (-m-1, -m)$, $|\tau_k| \in N$, $\Omega_2^*(-\zeta)$ — сумма интегралов по петлям вокруг разрезов Γ_k . Поскольку согласно § 23 $\Omega_2^*(-\zeta)$ разлагается по степеням $\ln \zeta$ или $\ln \ln \zeta$, то в первых двух суммах в правой части (28.25) достаточно брать только члены, в которых степень ζ не меньше $\max \operatorname{Re} \omega_k - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Если $h_0(t)$ имеет полюс $t = -k$, $k \in N_1^k$, то соответствующий член в первой сумме правой части (28.25) следует видоизменить, так как вычет функции $H_0(t, \zeta)$ вычисляется в кратном полюсе. Если $h_0(-k) = 0$, то упомянутый член исчезает, так как $t = -k$ для $H_0(t, \zeta)$ является устранимо-особой точкой. Более сложное разложение получается, если $t = -k$ является точкой ветвления. Тогда упомянутый член следует вычеркнуть, так как влияние точки $t = -k$ учитывается в Ω_2^* . Асимптотическое разложение для Ω_2^* можно построить с учетом результатов § 23. Примеры приведены в п. 28.4.2 и 28.4.3.

Разложение вида (28.25) встречается лишь при $\gamma < 2$. При $\gamma \geq 2$ во всей плоскости для $f(z)$ следует построить другое асимптотическое разложение.

2°. В (28.18) при $\beta = 0$ фиксируем достаточно большое m , обозначим $h_0(t) = s_m(t) + \rho_m(t)$ и подставим его в (28.2). Получим

$$f(z) = \sum_{j=0}^m d_j E_{1/\gamma}(\zeta, \alpha_j) + \sum_{k=0}^{\infty} \rho_m(k) \zeta^k = S_m(\zeta) + R_m(\zeta). \quad (28.26)$$

Для $S_m(\zeta)$ согласно (28.13) имеем асимптотическое разложение во всей плоскости ζ :

$$S_m(\zeta) = (1/\gamma) \sum_{|\arg \zeta + 2k\pi| \leq \gamma\pi} \exp [(\zeta e^{i2\pi k})^{1/\gamma}] \sum_{j=0}^m d_j (\zeta e^{i2\pi k})^{(1-\alpha_j)/\gamma} - \sum_{n=1}^m s_m(-n) \zeta^{-n} + O(\zeta^{-m-1}). \quad (28.27)$$

Поскольку (28.18) справедливо при любом m , то $R_m(\zeta) \in W$. Пусть $|\arg \zeta| \geq \gamma\pi/2 + \eta_0$, $\eta_0 > 0$. Оценку для $R_m(\zeta)$ можно получить согласно теореме Линделефа—Форда с учетом (28.25). Имеем

$$R_m(\zeta) = - \sum_{n=1}^m \rho_m(-n) \zeta^{-n} - \Omega_1(\zeta) - \Omega_2(\zeta) + I_m(\zeta), \quad (28.28)$$

где $\Omega_1(\zeta)$ — сумма вычетов функции $H_m(t, \zeta) = \pi \rho_m(t) (-\zeta)^t / \sin \pi t$ в полюсах τ_k , $\operatorname{Re} \tau_k > \sigma_0$, $\Omega_2(\zeta)$ — сумма интегралов по петлям и $I_m(\zeta)$ — интеграл по прямой $\operatorname{Re} t = \sigma_0$ от $H_m(t, \zeta)$ с соответствующими искривлениями, $\sigma_0 \in (-m-1, -m)$.

Имеем $h_0(-n) = s_m(-n) + \rho_m(-n)$, поэтому соответствующие суммы в (28.27) и (28.28) можно объединить в $-\sum_{n=1}^m h_0(-n) \zeta^{-n}$.

Поскольку $s_m(t)$ — целая функция, то функции $H_0(t, \zeta)$ и $H_m(t, \zeta)$ имеют одинаковые полюсы и вычеты в них тоже одинаковые. Поэтому $\Omega_1^*(-\zeta) = \Omega_1(\zeta)$. Так как $s_m(t)$ в окрестности точки ветвления ω_k разлагается по целым степеням $(t - \omega_k)$, которые при разложении интегралов по петлям не учитываются, то $\Omega_2^*(-\zeta) = \Omega_2(\zeta)$.

Чтобы соотношение (28.28) сохранилось при всех $\arg \zeta$, при $|\arg \zeta| \geq \gamma\pi/2 + \eta_0$ интеграл $I_m(\zeta)$ превратим в интеграл второго рода $I_m^*(\zeta)$, концы пути которого удаляются в ∞ так, что на них $\operatorname{Re} t \rightarrow +\infty$. Тогда $I_m^*(\zeta)$ согласно (28.24) сходится при всех $\arg \zeta$, поэтому этот интеграл дает также аналитическое продолжение для $R_m(\zeta)$. Таким образом, из (28.26) — (28.28) при $m \in \mathbb{N}$ и всех $\arg \zeta$ получаем

$$f(z) = (1/\gamma) \sum_{|\arg \zeta + 2k\pi| \leq \gamma\pi} \exp [(\zeta e^{i2\pi k})^{1/\gamma}] \sum_{j=0}^m d_j (\zeta e^{i2\pi k})^{(1-\alpha_j)/\gamma} - \sum_{n=1}^m h_0(-n) \zeta^{-n} + O(\zeta^{-m-1}) - \Omega_1(\zeta) - \Omega_2(\zeta) + I_m^*(\zeta). \quad (28.29)$$

3°. При $|\arg \zeta| \geq \gamma\pi/2 + \eta_0$ согласно вышесказанному $I_m^*(\zeta) = I_m(\zeta) = O(\zeta^{-\sigma_0})$. Так как первой суммой в (28.29) можно пренебречь, ибо она экспоненциально убывает, то снова получаем (28.25). Приступим к оценке $I_m^*(\zeta)$ при остальных $\arg \zeta$, т. е. $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi/2 + \eta$. Для этого подставим под знак интеграла $I_m^*(\zeta)$ $\rho_m(t) = r_m(t) / \Gamma(\gamma t + \alpha_{m+1})$, где согласно (28.18) $r_m(t) = O(1)$ и $r_m(t)$ аналитична при $|\arg t| \leq \pi/2 + \eta$. Путь для $I_m^*(\zeta)$ деформируем по отрезку $\operatorname{Re} t = \sigma_0$ конечной длины и по кривым L^+ и L^- так, что на них $\operatorname{Re} t \rightarrow +\infty$. Получаем

$$I_m^*(\zeta) = I_{\sigma_0}(\zeta) + I^+(\zeta) + I^-(\zeta). \quad (28.30)$$

Отрезок прерван разрезами, которые путь интегрирования обходит по петлям. Интеграл по ним составляет $\Omega_2(\zeta)$. Кроме того, концы отрезка находятся в секторе $|\arg t| \leq \pi - \varepsilon$. На отрезке функция $H_m(t, \zeta)$ имеет оценку $O(\zeta^{-\sigma_0})$, поэтому $I_{\sigma_0} = O(\zeta^{-\sigma_0}) = o(\zeta^{-m})$.

На L^+ и L^- для функции $1/\Gamma(\gamma t + \alpha_{m+1})$ используем формулу (28.24), которая справедлива при $|\arg \gamma t| = |\arg t| \leq \pi - \varepsilon$. С учетом соотношения

$$1/\sin \pi t = \mp 2ie^{\pm i\pi t} \left[1 + \frac{e^{\pm i2\pi t}}{1 - e^{\pm i2\pi t}} \right] = \mp 2ie^{\pm i\pi t} O(1)$$

подынтегральную функцию на L^+ и L^- можно представить в виде $t^{-\alpha_{m+1}+1/2} \exp F_\gamma(t, \zeta) O(1)$, где

$$F_\gamma(t, \zeta) = \gamma(1 - \ln \gamma)t - \gamma t \ln t + t \ln(-\zeta) \pm i\pi t, \quad (28.31)$$

и функция $O(1)$ аналитична на путях L^+ и L^- .

Интегралы $I^+(\zeta)$ и $I^-(\zeta)$ можно оценить методом перевала. Рассмотрим конспективно только оценку для $I^+(\zeta)$, так как $I^-(\zeta)$ оценивается аналогично. Точка перевала для $I^+(\zeta)$ определяется из уравнения

$$\ln t = (1/\gamma) \ln(-\zeta) - \ln \gamma + i\pi/\gamma, \quad (28.32)$$

где все логарифмы имеют главные значения. Имеем $\arg(-\zeta) \in [-\pi, -\pi + \gamma\pi/2 + \eta_0]$ или $\arg(-\zeta) \in [\pi - \gamma\pi/2 - \eta_0, \pi]$. При объединении правой части (28.32) под одним знаком логарифма в зависимости от $\arg \zeta$ и γ получим $\ln(\zeta^{1/\gamma})$ или $\ln(\zeta e^{i2k\pi})^{1/\gamma}$, где логарифм имеет главное значение, т. е. $|\arg \zeta + 2k\pi| < \gamma\pi$. Такое представление всегда возможно, так как $f(z)$ — целая функция и $f(ze^{i2k\pi}) = f(z)$. Пусть имеем $\ln(\zeta^{1/\gamma})$. Тогда будем иметь точку перевала $t^+ = (1/\gamma)\zeta^{1/\gamma}$.

Чтобы точка t^+ находилась в секторе $|\arg t| \leq \pi/2 + \eta$, в котором справедливо (28.18), следует ограничиться значениями $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi/2 + \gamma\eta$, т. е. можно брать $\eta_0 = \gamma\eta$. Таким образом, получаем именно тот сектор, в котором ищется оценка для $R_m(\zeta)$. При таких $\arg \zeta$ достаточно ограничиться значениями $k = \mp 1$.

Далее подробнее рассмотрим случай, когда $\arg \zeta \in [0, \gamma\pi/2 + \eta_0]$. Если применить подстановку $t = t^+\omega$, то

$$I^+(\zeta) = \zeta^{(-\alpha_{m+1}+3/2)/\gamma} \int_{L^*} \omega^{-\alpha_{m+1}+1/2} \exp[\zeta^{1/\gamma}(\omega - \omega \ln \omega)] O(1) d\omega. \quad (28.33)$$

Подынтегральная функция имеет точку перевала $\omega = 1$. Карта для $\operatorname{Re}(\omega - \omega \ln \omega)$ изображена на рис. 2. Часть кривой L^+ от левого конца A до точки t^+ обозначим через L_1^+ , остальную часть — через L_2^+ , отображение A в плоскости ω — через A^* . Соединим A^* с точкой $\omega = 1$ с помощью кривой L_1^* так, чтобы L_1^* находилась в долине и являлась линией спуска, а L_1^+ выберем так, чтобы она отобразилась в L_1^* . В качестве пути L_2^+ выберем луч $\arg(t - t^+) = (1/2)\arg t^+$. Его отображение L_2^*

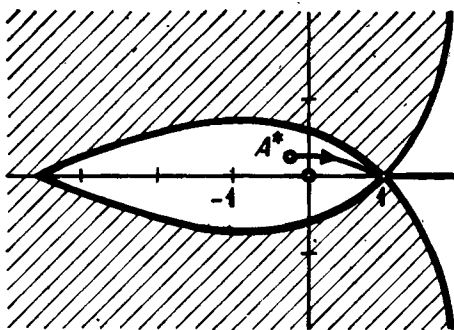


Рис. 2.

тоже находится в долине. Затем этот луч целесообразно деформировать в $\arg(\omega - 1) = 0$.

Используя метод перевала вместе с поворотом пути, при $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi/2 + \eta_0$ получаем асимптотическое представление

$$I_m^+(\zeta) = \zeta^{(1-\alpha_{m+1})/\gamma} \exp(\zeta^{1/\gamma}) O(1). \quad (28.34)$$

Поскольку точка A^* находится весьма близко к началу, то ввиду множителя $\omega^{-\alpha_{m+1}+1/2}$ в интервале (28.33) надо еще дополнительно показать, что для интеграла по L_1^* оценка (28.34) сохраняется. Частный случай будет рассмотрен в п. 28.2.5.

Аналогично исследуются другие случаи и асимптотика интеграла по L^- . Полный анализ возможных случаев занял бы слишком много места. В несколько модифицированном виде для $I_m(-\zeta)$ без применения подстановки такой анализ проведен в [120—122]. В итоге при $|\arg \zeta e^{i2k\pi}| \leq \gamma\pi/2 + \eta_0$ получаем оценку

$$I_m^*(\zeta) = (1/\gamma) \sum_{|\arg \zeta + 2k\pi| \leq \gamma\pi/2 + \eta_0} \exp[(\zeta e^{i2k\pi})^{1/\gamma}] O[(\zeta e^{i2k\pi})^{(1-\alpha_{m+1})/\gamma}] + o(\zeta^{-m}). \quad (28.35)$$

При $\gamma \geq 2$ полученная оценка относится ко всей плоскости. При $\gamma < 2$ в сумме (28.35) следует брать только $k=0$, а при $|\arg \zeta| > \gamma\pi/2$ эта сумма входит в оценку $o(\zeta^{-m})$. Последнее замечание относится и к первой сумме в (28.29), поэтому повсюду без ограничения общности можно писать $|\arg \zeta + 2k\pi| \leq \gamma\pi$.

Таким образом, доказана

Теорема 28.4. Если $h_0(t) \in V_0$, то функция (28.2), где $h(t) = e^{\beta t} h_0(t)$, $\zeta = ze^{\beta}$, при всех $\arg \zeta \in [-\pi, \pi]$ и любом $m \in \mathbb{N}$

имеет асимптотическое представление (28.29), в котором $I_m^*(\zeta)$ имеет оценку (28.35). В отдельных Э- и С-секторах соответствующие части этого представления излишни.

Примечания. 1°. Теорема 28.4 охватывает также случай, рассмотренный в п. 28.2.1 и 28.2.2, т. е. формулу (28.17).

2°. Если в (28.29) применить равенство $h(t) = h_0(t)e^{\beta t}$, то вторая строка в (28.29) будет иметь вид

$$- \sum_{n=1}^m h(-n)z^{-n} - \Omega_1(z) - \Omega_2(z) + O(z^{-m-1}) + I_m^*(z), \quad (28.36)$$

где Ω_1 , Ω_2 и $I_m^*(z)$ вычислены с подынтегральной функцией $H^*(t, z) = \pi(-z)^t h(t) / \sin \pi t$.

3°. Можно применить также иные стандартные функции, чем $E_{1/\rho}$. Например, если вместо (28.18) имеем

$$h(t) = \frac{e^{\beta t}}{\Gamma(t+1)} \left[\sum_{j=0}^m \frac{d_j}{\Gamma[(\gamma-1)t + \alpha_j]} + \frac{r_m(t)}{\Gamma[(\gamma-1)t + \alpha_{m+1}]} \right], \quad (28.37)$$

то для $f(z)$ получим разложение по функциям Бесселя—Райта $I_{\alpha_j-1}^{\gamma-1}(z)$ [123]. При доказательстве можно использовать прежнюю оценку остатка. С помощью лемм 28.2 и 28.3 легко показать, что (28.37) и (28.18) эквивалентны.

4°. Справедлива также

Теорема 28.5. Пусть 1) $h(t) \in V_0$, причем в (28.18) $\gamma > 2$; 2) $g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}$ при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq \pi/2 - \eta$, $\lambda_k \uparrow +\infty$; 3) $g(t)$ аналитична в указанном секторе. Тогда при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)g(k)z^k \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j f(e^{-\lambda_j z}), \quad (28.38)$$

где $f(z)$ определяется согласно (28.2).

Теорема доказывается аналогично предыдущей [123]. Ее можно видоизменить при $\gamma \leq 2$.

28.2.5. Основной задачей в рассмотренном методе является оценка остатка $R_m(\zeta)$ в (28.26). Приведем некоторые модификации разложений, полученных в п. 28.2.4 при других условиях относительно $h(t)$.

1°. Класс аналитических функций, для которых (28.18) справедливо лишь при $|\arg t| \leq \pi/2 - \eta$, $\eta > 0$, обозначим через V_{β}^* . Для функции $f(z)$, имеющей коэффициенты $h(k)$ и принад-

лежащей классу V_{β}^* оценки, полученные в п. 28.2.4, 3°, имеют место при $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi/2 - \gamma\eta$, и в этом секторе

$$f(z) = (1/\gamma) \sum_{|\arg \zeta + 2k\pi| < \gamma\pi/2} \exp(\zeta e^{i2\pi k})^{1/\gamma} \left[\sum_{j=0}^m d_j (\zeta e^{i2\pi k})^{(1-\alpha_j)/\gamma} + O(\zeta^{(1-\alpha_{m+1})/\gamma}) \right]. \quad (28.39)$$

Чтобы получить оценки при других $\arg \zeta$, которые требуются, если $\gamma \leq 2$, для применения данного метода нужна дополнительная информация о поведении $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \in [\pi/2 - \eta, \pi/2 + \eta]$.

2°. Рассмотрим оценку функции

$$R_m(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \rho(k) z^k / \Gamma(\gamma k + \alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 1, \quad m \geq 1, \quad (28.40)$$

если $\rho(t)$ аналитична при $\operatorname{Re} t \geq \sigma_0$, $\sigma_0 < m$, и $\rho(t) = O(1)$. Для вывода оценки используем иной метод — применение преобразования Барнса—Ватсона. Согласно (27.84) и (27.85) при $\sigma_0 \in (m-1, m)$ получим

$$R_m(z) = O(z^{\sigma_0}) + 1/\gamma \sum_{|\arg z + 2k\pi| \leq \gamma\pi} F_{m_1}(z^{1/\gamma} \exp(2k\pi i/\gamma)), \quad (28.41)$$

где

$$F_{m_1}(\zeta) = \sum_{j=m_1}^{\infty} \frac{\rho(j/\gamma)}{\Gamma(j+\alpha)} \zeta^j, \quad (28.42)$$

$$(m-1)\gamma < m_1 \leq m/\gamma, \quad \sigma_0 \in (m_1\gamma, (m_1+1)\gamma).$$

Соотношение (28.41) имеет место при $|\arg z| < \pi[\gamma/2 + 1 - |2p + 1 - \gamma|]$, где p выбран так, чтобы $|2p + 1 - \gamma| \leq 1$. Кроме $\gamma = 2$, $p = 1$, при всех других значениях γ величина в правой части неравенства для $|\arg z|$ больше $\gamma\pi/2$, а при $\gamma = 2$ и $p = 1$ число σ_0 можно выбрать так, чтобы $-\gamma\sigma_0 - \operatorname{Re} \alpha + 1/2 < -1$, и тогда допустимо $|\arg z| \leq \pi$. Таким образом, соотношение (28.41) справедливо в секторе $|\arg z| \leq \min(\pi, \gamma\pi/2 + \eta_0)$, $\eta_0 < \pi[1 - |1 - \gamma|]$, и этим методом оценки получаем в более широком секторе, чем при использовании метода, рассмотренного выше.

Найдем оценку функции $F_{m_1}(\gamma)$ при всех $\arg \zeta$. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > 3/2$. В противном случае отщеплением членов в (28.42) и вве-

дением новых обозначений получим новый ряд с желаемым свойством. Функцию $F_{m_1}(\zeta)$ можно выразить с помощью формулы (27.28), причем сначала берем интеграл второго рода, а после преобразований, указанных в п. 27.3.3, в последних двух интегралах перейдем к интегралам первого рода. При этом $\sigma \in (m_1 - 1, m_1)$. Легко видеть, что полученные интегралы при всех $\arg \zeta$ имеют оценку $O(\zeta^\sigma)$. Поэтому

$$F_{m_1}(\zeta) = O(\zeta^\sigma) + \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\zeta^t \rho(t/\gamma)}{\Gamma(t+\alpha)} dt. \quad (28.43)$$

При $\operatorname{Re} \zeta \leq 0$ для интеграла (28.43) путь можно повернуть вокруг точки $t = \sigma$ на 90° . На таком пути подынтегральная функция согласно (28.24) имеет мажоранту $M|t|^{-\alpha+1/2}|\zeta|^\sigma$, поэтому $F_{m_1}(\zeta) = O(\zeta^\sigma)$.

Пусть $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$. Подынтегральную функцию в (28.43) можно представить в виде $\exp(t - t \ln t + t \ln \zeta) t^{-\alpha+1/2} O(1)$, которая имеет точку перевала $t = \zeta$. При $\operatorname{Re} \zeta = 0$ получаем прежнюю оценку, а при $\operatorname{Re} \zeta > 0$ путь деформируем по вертикальному отрезку и лучу $\arg t = \arg \zeta$. Первый интеграл имеет оценку $O(\zeta^\sigma)$, а второй подстановкой $t = \zeta \omega$ приводится к интегралу

$$\zeta^{-\alpha+3/2} \int_{\sigma/\operatorname{Re} \zeta}^{\infty} \exp[\zeta(\omega - \omega \ln \omega)] \omega^{-\alpha+1/2} O(1) d\omega,$$

который согласно п. 28.2.4, 3° при $|\arg \zeta| \leq \pi/2$ имеет оценку $O(e^{\zeta} \zeta^{-\alpha+1})$.

При больших $\operatorname{Re} \zeta$ левый конец пути находится близко к началу. Чтобы показать, что множитель $\omega^{-\alpha+1/2}$ все же не влияет на прежнюю оценку, рассмотрим

$$I_\sigma(\zeta) = e^\zeta \int_{\sigma/\operatorname{Re} \zeta}^{1/2} \exp[\zeta(\omega - 1 - \omega \ln \omega)] \omega^{-\alpha+1/2} O(1) d\omega.$$

Поскольку функция $\omega - 1 - \omega \ln \omega$ монотонно возрастает в $[0, 1]$, то в $[0, 1/2]$ имеем $\omega - 1 - \omega \ln \omega \leq -1/2 - (1/2) \ln(1/2) < -1/10$, поэтому

$$|I_\sigma(\zeta)| < M |e^\zeta e^{-\operatorname{Re} \zeta/10} (\operatorname{Re} \zeta)^{\alpha-3/2}| = o(e^\zeta \zeta^{-N}).$$

Резюмируя, получаем оценки

$$F_{m_1}(\zeta) = \begin{cases} O(\zeta^\sigma) & \text{при } \operatorname{Re} \zeta \leq 0, \\ O(\zeta^\sigma) + O(e^\zeta \zeta^{-\alpha+1}) & \text{при } \operatorname{Re} \zeta \geq 0, \end{cases} \quad (28.44)$$

которые следует использовать в (28.41). Соотношения (28.44) можно обобщить, если вместо $\rho(t) = O(1)$ допустить оценку $\rho(t) = O(\ln^* t)$. Этот случай будет рассматриваться также в п. 28.2.7.

С учетом (28.26) и (28.27) получаем следующий результат.

Теорема 28.6. Пусть функция $h(t)$ при $\operatorname{Re} t \geq \sigma_0 \geq 0$ удовлетворяет (28.18), где $r_m(t)$ в этой полуплоскости — аналитическая и ограниченная функция. Тогда к правой части (28.39) надо добавить член $O(z^{\sigma_0})$, и это соотношение будет справедливо при $|\arg \zeta| \leq \min(\pi, \gamma\pi/2 + \eta_0)$, $\eta_0 < \pi[1 - |1 - \gamma|]$.

3°. Пусть при $\operatorname{Re} t \geq 0$

$$h(t) = \frac{e^{\beta t}}{\Gamma(\gamma t + 1)} \int_0^1 u^{\gamma t} (1-u)^{\alpha-1} \Phi(u) du, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (28.45)$$

где функция $\Phi(u)$ абсолютно интегрируема в $[0, 1]$. Тогда $h(t)$ аналитична при $\operatorname{Re} t \geq 0$. Легко установить, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k = \int_0^1 E_{1/\gamma}(u^{\gamma} z e^{\beta}) (1-u)^{\alpha-1} \Phi(u) du, \quad (28.46)$$

поэтому асимптотику $f(z)$ можем исследовать по интегралу (28.46).

Пусть далее при любом $m \in \mathbb{N}$

$$\Phi(u) = \sum_{j=0}^m c_j (1-u)^{\lambda_j} + \rho_m(u) (1-u)^{\lambda_{m+1}}, \quad (28.47)$$

где $-\operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \lambda_j \uparrow + \infty$, $\rho_m(u) = O(1)$ при $u \rightarrow 1-0$. Тогда легко убедиться в том, что $h(t)$ при $\operatorname{Re} t \geq 0$ обладает разложением (28.18). Поскольку для заданных d_j согласно п. 4.3.2 можно найти бесконечно много функций $\Phi(u)$, в том числе и аналитических, для которых справедливо (28.47) с $c_j = d_j / \Gamma(\alpha + \lambda_j)$, то (28.18) и (28.45) эквивалентны.

Кроме того, в силу формулы

$$\int_0^1 E_{1/\gamma}(u^{\gamma} z) (1-u)^{\alpha-1} du = \Gamma(\alpha) E_{1/\gamma}(z, \alpha + 1), \quad (28.48)$$

которая устанавливается почленным интегрированием, получаем соотношение

$$f(z) = \sum_{j=0}^m c_j \Gamma(\lambda_j + \alpha) E_{1/\gamma}(z e^{\beta}, \alpha + \lambda_j + 1) + R_m(z),$$

т. е. (28.26), где $R_m(z)$ задан в виде интеграла типа (28.46). Его оценку можно получить с помощью методов, рассмотренных в § 10 и 16, используя асимптотику функции $E_{1/\gamma}$. Однако при использовании этих методов не учитываются особые точки функции $h(t)$ в левой полуплоскости, поэтому получаем лишь разложение (28.39) и оценку остатка при $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi/2$, как и в п. 2°.

В работе [305, ч. 2] исследована асимптотика $f(z)$ в случае, когда (28.18) имеет место при $-\pi/2 < \theta_1 < \arg t < \theta_2 < \pi/2$, что можно осуществить также вышерассмотренными методами.

4°. Другой метод предложен в [254], где при $|\arg(-1)^{k+1}z| < \pi$ и $m \in N_1$ для функции (28.2) доказана формула (формула Ньюсома)

$$f(z) = \int_{-m-1/2}^{\infty} h(t) ((-1)^{k+1}z)^t \sin k\pi t / \sin \pi t dt - \sum_{j=1}^m h(-j) z^{-j} + o(z^{-m}), \quad (28.49)$$

объединяющая теорему Линделефа—Форда с обобщением формулы (27.28). Здесь $h(t)$ — аналитическая во всей плоскости функция, $|h(x+iy)| < M e^{k|x|y}$ для всех x и y , $k \in N_1$, M не зависит от x и y . В случае, когда $h(t)$ имеет изолированные особые точки, к правой части (28.49) следует добавить соответствующие интегралы вида $-\frac{1}{2i} \int_L \frac{h(t) [(-1)^{k+1}z]^t dt}{e^{ikh\pi t} \sin \pi t}$, где L — петля,

обходящая особую точку и удаляющаяся влево [198, 214].

Если вместо $h(t)$ подставить (28.18) и учесть равенство $\sin k\pi t / \sin \pi t = \sum_{j=1}^k e^{i\pi(k-2j+1)t}$, а также асимптотическую формулу, которая получается из (28.49) при $f(z) = e^z$, $h(t) = 1/\Gamma(t+1)$, $k=1$, то можно найти разложение для $f(z)$. Эта идея осуществлена в [198, 215, 216, 255]. Данный метод дает возможность иным путем, чем преобразование Барнса—Ватсона, от случая $\gamma \neq 1$ перейти к случаю $\gamma = 1$.

Однако согласно этому методу справедливость (28.18) требуется на всей оси $\arg t = \pi$, что сильно ограничивает класс функций $f(z)$ (см. п. 28.2.6), для которых метод применим. В противном случае применение метода некорректно. Об этом свидетельствуют работы [216, 255], в которых рассмотрена асимптотика функций ${}_0F_q$ [255] и ${}_0\mathfrak{F}_q$ [216], когда (28.18) при $\arg t = \pi$ не имеет места. В этих работах после выполнения формальных преобразований новая подынтегральная функция на оси $\arg t = \pi$ имеет другие нули, чем исходная. Аналогичная

некорректность встречается в работе [198], где исследуется

асимптотика функции $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma k + 1)(k + \alpha)^\beta}$. В работах [198,

215] при $\alpha_j = \alpha + j$ в доказательстве теоремы 28.4 с помощью формулы Ньюсома принимается, что соотношение (28.18) имеет место во всей плоскости, но отсутствует оценка остатка. При $\gamma = 1$ этот метод изложен также в [195].

Формула Ньюсома (28.49) дает возможность исследовать асимптотику для расширенной функции Вольтерра (22.92)

$t^\alpha \int_{-\lambda}^{\infty} \frac{t^u du}{\Gamma(\gamma u + \alpha + 1)}$, $\lambda > 0$, а также для многих других интегралов,

если асимптотика функции $f(z)$ известна.

28.2.6. Возможно, что функция $h(t)/\sin \pi t$ аналитична при $\operatorname{Re} t \leq -\sigma_1$, $\sigma_1 > 0$, т. е. она имеет лишь конечное число полюсов при $\operatorname{Re} t < 0$ и не имеет точек ветвления. Тогда при $\gamma < 2$, $|\arg \xi| > \gamma\pi/2$ асимптотическое выражение для $f(z)$ состоит лишь из конечной суммы, которая может и вовсе отсутствовать. В таком случае вместо асимптотического разложения имеем только оценку $f(z) = o(z^{-N})$, которая получается из интеграла $I_m^*(\xi)$ в (28.29), так как путь интегрирования — вертикальную прямую — можно передвинуть сколь угодно далеко влево. Интеграл $I_m^*(\xi)$ целесообразно оценить точнее с помощью экспоненциально убывающих функций.

1°. Часто соотношение (28.18) имеет место при $|\arg t| \leq \leq \pi - \varepsilon$, $|t| > R$, со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$, если R достаточно большое. Но при $|\arg t| \in [\pi - \varepsilon, \pi]$ такое соотношение при общих α_m невозможно, так как функция $1/\Gamma(\gamma t + \alpha_m + 1)$ в этом секторе имеет бесконечно много нулей, расположение которых может меняться вместе с m . Нельзя в этом секторе функцию $h(t)$ представить также в виде (28.53), так как для выделения главного значения логарифма необходимо провести разрез. Но такое представление может иметь место отдельно в верхней и нижней полуплоскостях, если путь интегрирования деформировать по кривым L^+ и L^- , как это делается в п. 28.2.4, 3°. Например, в силу формулы

$$1/\Gamma(\gamma t + \alpha) = (1/\pi) \Gamma(1 - \gamma t - \alpha) \sin \pi(\gamma t + \alpha) \quad (28.50)$$

такое представление возможно для произведений и отношений Γ -функций.

Пусть на L^+ и L^- при $|\arg t| \in [\pi - \varepsilon, \pi]$ $h(t)$ аналитична и справедлива оценка $h(t) = \exp[\mu t - \gamma t \ln t] O(t^{-\alpha_0 + 1/2})$, где $\mu = = \beta + \gamma - \gamma \ln \gamma$, а β , γ и α_0 взяты из (28.18). Эта оценка справед-

лива и на остальных частях L^+ и L^- , лежащих вне сектора $|\arg t| \in [\pi - \varepsilon, \pi]$, в силу (28.18) и (28.50). Тогда функция $\rho_m(t)$, которая в (28.18) при $|\arg t| \leq \pi - \varepsilon$ определена как $r_m(t)/\Gamma(\gamma t + \alpha_{m+1})$, продолжима на L^+ и L^- при $|\arg t| \in [\pi - \varepsilon, \pi]$ той же формулой и обладает такой же оценкой, как $h(t)$, так как к каждому члену в (28.18) можно применить (28.50) и обобщенную формулу Стирлинга (28.69). Число $m \in N$ выбрано так, чтобы функция $h(t)/\sin \pi t$ не имела полюсов при $\operatorname{Re} t < -m$.

В силу сказанного для оценки $I_m^*(\zeta)$ можно применить прежний метод перевала. Поскольку седловые точки t^+ и t^- теперь могут находиться во всей плоскости t , то оценка (28.35) для $I_m^*(\zeta)$, в которой отброшен член $o(\zeta^{-m})$, при $\gamma \geq 1$ справедлива при $|\arg \zeta + 2k\pi| \leq \gamma\pi$. Следовательно, соотношение (28.29) сохранится, если в правой его части отбросить $\Omega_2(\zeta)$ и $O(\zeta^{-m-1})$ (так как при $\operatorname{Re} t < -m$ полюсов нет), а $I_m^*(\zeta)$ включить в остаток суммы $\sum_{j=0}^m$. Экспоненциально убывающие множители при $|\arg \zeta| > \gamma\pi/2$ содержатся в первой сумме этого выражения. Таким образом, приведенный анализ дополняет теорему 28.4.

2°. При $\gamma < 1$ полученная оценка для $I_m^*(\zeta)$ не охватывает всю плоскость ζ . Кроме того, следует учитывать, что асимптотическое разложение для $E_{1/\gamma}$ согласно п. 28.2.1, 1° при $\gamma < 1$ содержит член с экспоненциальным множителем лишь при $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi$. Поэтому остается сектор, в котором уточнение не получается. Об этом было сказано в конце п. 28.2.2. Рассмотрим еще один метод.

Часто можно применять метод, изложенный в п. 23.3.3, который пригоден при всех $\gamma > 0$. Пусть при $\operatorname{Re} t \leq -\sigma_1$, $\sigma_1 > 0$,

$$h(t)/\sin \pi t \sim e^{\beta t} \Gamma(1 - \gamma_1 t - \alpha) \sum_{j=0}^m C_j e^{i\pi \omega_j t} \sum_{k=0}^{\infty} E_k t^{-k}, \quad (28.51)$$

где ω_j — действительные числа. Поскольку при $|\arg t| \in [\pi/2, \pi/2 + \eta]$, $\operatorname{Re} t < -\sigma_1$ одновременно должны иметь место (28.51) и (28.20), то $\gamma_1 = \gamma$. Согласно (23.33) и (23.34) при $\operatorname{Re} t \leq -\sigma_1$ получаем

$$h(t)/\sin \pi t \sim e^{\beta t} \sum_{j=0}^m C_j e^{i\pi \omega_j t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k \Gamma(1 - \gamma t - \alpha - k),$$

откуда в силу (23.30) при $|\arg(ze^\beta) + \pi \max |\omega_j| | < \gamma\pi/2$, если такое неравенство имеет место, следует разложение

$$f_1(-z) = -\frac{\pi}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{h(t)z^t}{\sin \pi t} dt \sim$$

$$\sim -\frac{\pi}{\gamma} \sum_{j=0}^m C_j (ze^{\beta} e^{i\pi\omega_j})^{(1-\alpha)/\gamma} \exp [-(ze^{\beta} e^{i\pi\omega_j})^{1/\gamma}] \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k (ze^{\beta} e^{i\pi\omega_j})^{-k/\gamma}. \quad (28.52)$$

В полученном составном разложении следует еще выделить доминирующие ряды. Примеры будут рассмотрены в п. 28.4.5 и 28.5.2.

28.2.7. Мы видели, что (28.18) эквивалентно соотношению

$$h(t) = e^{\mu t - \gamma t \ln t} \left[\sum_{k=0}^m E_k t^{-\nu_k} + O(t^{-\nu_{m+1}}) \right] \quad (28.53)$$

и $h(t) \in V_\beta$, $\beta = \mu - \gamma(1 - \ln \gamma)$. Можно рассматривать и другие классы коэффициентов. Пусть при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq \pi/2 + \eta$

$$h(t) = e^{\mu t - \gamma t \ln t} \left[\sum_{j=0}^m E_j \ln^{-\kappa_j} t + O(\ln^{-\kappa_{m+1}} t) \right], \quad (28.54)$$

где $\kappa_j \uparrow +\infty$. Обозначим $h(t) = e^{\mu t} h_0(t)$. Если $h(t)$ обладает другими свойствами функций класса V_β , то новый класс обозначим через VL_μ . Классы V_β и VL_μ разные, так как из (28.54) не следует (28.18). Класс функций $f(z)$, для которых $h(t) \in VL_\mu$, обозначим через WL_μ .

Асимптотическое разложение для $f(z) \in WL_\mu$ можно построить аналогично тому, как это сделано в теореме 28.4. Таким же путем, как (28.25), получаем

$$f(z) = - \sum_{k=1}^m h_0(-k) \zeta^{-k} - \Omega_1(\zeta) - \Omega_2(\zeta) + I_m(\zeta), \quad (28.55)$$

где $\zeta = ze^\mu$, Ω_1 — сумма вычетов, Ω_2 — сумма интегралов по петлям. При $|\arg \zeta| \geq \gamma\pi/2 + \eta_0$ $I_m(\zeta) = o(\zeta^{-m})$. В данном случае $h(t)$ всегда имеет также логарифмические точки ветвления. Формула (28.55) сохраняется и при $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi/2 + \eta_0$, однако

следует еще найти соответствующее асимптотическое представление для $I_m(\zeta)$. Для этого, как и в теореме 28.4, применяется метод перевала. Так же как в п. 28.2.4, 3°, рассмотрим $I_m^+(\zeta)$ по пути L^+ , т. е.

$$I_m^+(\zeta) = -\frac{1}{2i} \int_{L^+} t^\nu \ln^{-\kappa} t \exp[-\gamma t \ln t + t \ln(-\zeta)] / \sin \pi t dt.$$

Если на L^+ $\operatorname{Re} t \rightarrow +\infty$, то $1/\sin \pi t = -2ie^{i\pi t} [1 + o(t^{-N})]$ и следует искать точку перевала для функции $F_\nu(t, \zeta) = -\gamma t \ln t + t \ln(-\zeta) + i\pi t$. Аналогично тому как в п. 28.2.4, 3°, получаем $t^+ = e^{-1} (\zeta e^{i2k\pi})^{1/\nu}$, $k=0, \pm 1$. Подстановкой $t = t^+ w$ приводим $I_m^+(\zeta)$ к интегралу

$$I_m^+(\zeta) = (t^+)^{\nu+1} \int_{L^*} w^\nu \exp[\gamma t^+(w - w \ln w)] (\ln t^+ + \ln w)^{-\kappa} \times \\ \times [1 + o((t^+)^{-N})] dw,$$

который оценивается методом перевала так же, как интеграл (28.33). В силу соотношения $\ln w \sim w - 1$ при $w \rightarrow 1$ получаем оценку

$$I_m^+(\zeta) = \sqrt{2\pi\gamma^{-1}} (t^+)^{\nu+1/2} (\ln t^+)^{-\kappa} \exp(\gamma t^+) [1 + O(1/t^+)].$$

Аналогично оценивается интеграл $I_m^-(\zeta)$ по пути L^- . Полученный результат можно применить для асимптотического представления отдельных членов в (28.54). При этом следует иметь в виду, что для любого m имеем $O(1/t^+) = o(\ln^{-\kappa} t^+)$. Если учитывать выбор числа k в зависимости от $\arg \zeta$, то согласно (28.54) при $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi/2 + \eta_0$ в (28.55) получаем

$$I_m(\zeta) = \sqrt{2\pi\gamma^{-1}} \sum_{|\arg \zeta + 2k\pi| \leq \gamma\pi} \exp[e^{-1}\gamma(\zeta e^{i2k\pi})^{1/\nu}] \times \\ \times [e^{-1}(\zeta e^{i2k\pi})^{1/\nu}]^{\nu+1/2} \left[\sum_{j=0}^m E_j \ln^{-\kappa_j} (e^{-1}(\zeta e^{i2k\pi})^{1/\nu}) + \right. \\ \left. + O(\ln^{-\kappa_{m+1}}(\zeta)) \right] + o(\zeta^{-m}). \quad (28.56)$$

Теорема 28.7. Если $h(t) \in VL_\mu$, то функция (28.2) при всех $\arg \zeta \in [-\pi, \pi]$, $\zeta = ze^\mu$, и любом $m \in \mathbb{N}$ имеет асимптотическое представление (28.55), в котором $I_m(\zeta)$ выражается формулой (28.56),

28.2.8, 1°. Непосредственное обобщение класса V_β получаем, если вместо (28.18) при $|\arg t| \leq \pi/2 + \eta$ и любом $m \in N$ имеем

$$h(t) = e^{\beta t} \sum_{n=0}^p \left[\sum_{j=0}^m d_{jn} \chi_n(\gamma t + \alpha_{jn}) + O(\chi_n(\gamma t + \alpha_{m+1, n})) \right], \quad (28.57)$$

где $\chi_0(t) = 1/\Gamma(t)$, $\chi_n(t) = -[\chi_{n-1}(t)]'$, $n \geq 1$, $\alpha_{jn} \uparrow + \infty$ при фиксированном n . Тогда вместо стандартных функций $E_{1/\gamma}(z, \alpha)$ следует применить функции

$$E_{1/\gamma}(z, \alpha, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_n(\gamma k + \alpha) z^k = (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} E_{1/\gamma}(z, \alpha). \quad (28.58)$$

Асимптотическое разложение функции $E_{1/\gamma}(z, \alpha, n)$ можно построить по формуле (28.12), в которой под знак интеграла согласно (28.58) следует добавить множитель $\ln^n \omega$. В силу леммы 22.5 представление (28.13) можно n раз дифференцировать по α . Остальные действия не отличаются от таковых в доказательстве теоремы 28.4. Соответствующие разложения приведены в [106].

Поскольку согласно (28.69) при $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq \pi - \varepsilon$

$$\chi_1(t + \alpha) = \frac{\psi(t + \alpha)}{\Gamma(t + \alpha)} \sim \frac{1}{\Gamma(t + \alpha)} \left[\ln t + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k1}(\alpha) t^{-k} \right], \quad (28.59)$$

то методом индукции нетрудно показать, что

$$\chi_n(t + \alpha) \sim \frac{1}{\Gamma(t + \alpha)} \left[\ln^n t + \sum_{j=0}^{n-1} \ln^j t \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}(\alpha) t^{-k} \right]. \quad (28.60)$$

В силу (28.60) с помощью методов, использованных в доказательстве лемм 28.2 и 28.3, можно доказать, что (28.57) эквивалентно представлению $h(t) = e^{\beta t} G(t)/\Gamma(\gamma t + \delta)$, $\delta = \min_{0 \leq n \leq p} \alpha_{0n}$,

где при $|\arg t| \leq \pi/2 + \eta$

$$G(t) \sim \sum_{n=0}^p \ln^n t \sum_{j=0}^{\infty} A_{jn} t^{-\mu_{jn}}, \quad \operatorname{Re} \mu_{jn} \uparrow + \infty. \quad (28.61)$$

Сравнение (28.61) с (28.54) показывает, что в некоторых случаях $f(z)$ можно представить как линейную комбинацию функций класса WL_μ .

2°. Другая модификация возможна, если к правой части (28.53) добавить множитель $\exp G(t)$, где $G(t) = \sum_{j=0}^p A_j t^{\lambda_j}$, $\operatorname{Re} \lambda_j \in (0, 1)$. При таком множителе в S -секторе можно применить теорему Линделефа—Форда, а в \mathcal{E} -секторе асимптотическое разложение получаем методом перевала, используя результаты § 21. Вместо $\exp[(\zeta e^{i2k\pi})^{1/\nu}]$ имеем более сложный множитель $\exp[G_1(\zeta e^{i2k\pi})^{1/\nu}]$, где $G_1(t)$ — функция, подобная $G(t)$. Этот случай более детально рассмотрен в [94].

28.3. Метод целых функций

28.3.1. Пусть $f(t) \in \mathcal{W}$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_0^z t^{-\lambda-1} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(k) z^{k+\lambda}}{k+\lambda} = z^\lambda F_0(z), \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (28.62)$$

Очевидно, $F_0(z) \in \mathcal{W}$. Таким образом, асимптотическое разложение для $F(z)$ можно получить по теореме 28.4.

Аналогично можно поступать в случае интеграла с конечными пределами, если ядро — целая функция. Метод, согласно которому интеграл, определяющий целую функцию, почленным интегрированием выражается с помощью степенного ряда, а на основании свойств его коэффициентов строится асимптотическое разложение интеграла, назовем *методом целых функций*.

В частном случае для интеграла $\int_0^1 f(zv) t^{\lambda-1} dt$ снова получаем (28.62), поэтому рассмотрим более общую целую функцию

$$F(z) = \int_0^1 K(zv) g(v) dv, \quad (28.63)$$

где $K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k \in \mathcal{W}$, $g(v)$ абсолютно интегрируема в $[0, 1]$ и при $v \rightarrow 1-0$

$$g(v) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1-v)^{\lambda_k}, \quad -1 < \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (28.64)$$

а при $v \rightarrow 0$ $g(v) = O(v^\mu)$, $\mu > -1$. Из (28.63) следует

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^k \int_0^1 v^k g(v) dv. \quad (28.65)$$

Чтобы применить теорию, изложенную в предыдущих пунктах, необходимо аналитически продолжить интеграл $\int_0^1 v^h g(v) dv$. Это достигается с помощью функции

$$G(t) = \int_0^1 v^t g(v) dv,$$

которая определена и аналитична при $\operatorname{Re} t + \mu > -1$; $v^t = e^{t \ln v}$. При $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq \pi/2 - \eta$ из (28.64) согласно § 16 следует разложение

$$G(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{-\mu_k}, \quad \mu_k \uparrow +\infty, \quad (28.66)$$

и по леммам 28.2 и 28.3, $h^*(t) = h(t) G(t) \in V_{\beta}^*$ при $|\arg t| \leq \pi/2 - \eta$. Поэтому при $|\arg \zeta| \leq \gamma\pi/2 - \gamma\eta$ для $F(z)$ справедливо разложение (28.39).

28.3.2. Чтобы получить асимптотическое разложение для $F(z)$ при всех $\arg \zeta$, приводим дополнительные достаточные условия относительно $g(v)$. Пусть $g(v) = v^{\mu} g_0(v)$, где $\mu > -1$, функция $g_0(v)$ аналитична в круге $|v| \leq 1$. Тогда функция $g_0(e^{-u})$ аналитична при $\operatorname{Re} u \geq 0$. Поскольку в круге $g_0(v) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k v^k$, то при $\operatorname{Re} u \geq 0$ $g_0(e^{-u}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ku}$ и

$$G(t) = \int_0^{\infty} e^{-(t+\mu+1)u} g_0(e^{-u}) du. \quad (28.67)$$

В силу аналитичности $g_0(e^{-u})$ путь интегрирования в секторе $|\arg u| < \pi/2$ можно поворачивать, и поэтому интеграл (28.67) дает аналитическое продолжение для $G(t)$ при $|\arg t| \leq \pi - \eta$. Кроме того, в этом секторе сохраняется разложение (28.66), а это означает, что $h^*(t)$ обладает разложением (28.18).

Исследуем поведение $G(t)$ на оси $\arg t = \pi$. Имеем

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^{\omega} e^{-(t+\mu+1)u} g_0(e^{-u}) du + \int_{\omega}^{\infty} e^{-(t+\mu+1)u} g_0(e^{-u}) du \equiv \\ &\equiv G_1(t) + G_2(t). \end{aligned} \quad (28.67')$$

Функция $G_1(t)$ аналитична во всей плоскости, а $G_2(t)$ при любом $m \in N$ представима в виде

$$G_2(t) = \sum_{k=0}^m c_k \int_{\omega}^{\infty} e^{-(t+\mu+1)u} e^{-ku} du + \int_{\omega}^{\infty} e^{-(t+\mu+1)u} e^{-(m+1)u} r_m(u) du = \\ = \sum_{k=0}^m \frac{c_k e^{-(t+\mu+1+k)u}}{t+\mu+1+k} + G_2^*(t).$$

Функция $G_2^*(t)$ аналитична при $\operatorname{Re} t > -(2+\mu+m)$, поэтому в силу произвола в выборе m можно утверждать, что $G_2(t)$ продолжима как мероморфная функция, которая в простых полюсах $t = -\mu - k - 1$ имеет вычеты c_k . Отсюда следует, что $h^*(t) \in V_{\beta}$ и для $F(z)$ можно построить разложение согласно теореме 28.4.

Метод целых функций является мощным теоретическим средством построения асимптотического разложения для интеграла (28.63) во всей плоскости, но его практическое применение связано с трудностями. Коэффициенты d_j в разложении (28.39) можно найти с помощью цепочки рекуррентных формул согласно п. 28.4.1. Однако большие трудности появляются при вычислении вычетов в полюсах функции $h^*(t)/\sin \pi t$ и при построении разложений вокруг точек ветвления этой функции, так как необходимо знать явное выражение для аналитического продолжения функции $G(t)$. Это выражение можно найти лишь при конкретно заданной $g(v)$ и только в таких случаях, когда интеграл (28.67) берется в явном виде.

Исключение представляет случай, когда функция $h(t)/\sin \pi t$ при $\operatorname{Re} t < 0$ особых точек не имеет, т. е. когда $h(t)$ — целая функция и $h(-n) = 0$. Тогда единственными особенностями для $h^*(t)/\sin \pi t$ будут полюсы функции $G(t)$ и в (28.29)

$$\Omega_1(\zeta) \sim -\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k h(-\mu-k-1)}{\sin \pi(\mu+k+1)} (-\zeta)^{-\mu-k-1}. \quad (28.68)$$

При $\mu \in N$ отношение в (28.68) следует понимать в предельном смысле. Например, такой случай встречается, когда

$$K(z) = I_{\nu}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\rho k + \nu + 1)}.$$

Для интеграла (28.63) с указанным ядром имеем разложение (28.29), где $\nu = \rho + 1$, $\beta = (\rho + 1) \ln(\rho + 1) - \rho \ln \rho$, $h_0(-n) = 0$,

$\Omega_2(z) = 0$, а $\Omega_1(z)$ обладает разложением (28.68). Частный случай этого интеграла приведен в конце п. 21.5.2.

Метод целых функций иногда применим также к интегралам с бесконечным верхним пределом, если в (28.63) возможно почленное интегрирование. Пример к этому случаю приведен в [127]. Его можно применить также к интегралам по бесконечному пути в комплексной плоскости. В [129] этим методом исследован интеграл $\int_{L_{k,j}} K(z)t e^{-t^\alpha} t^\mu dt$, $K(z) \in W$, $\alpha > \gamma^{-1}$, $L_{k,j}$ — бесконечная кривая, удаляющаяся в ∞ в секторах $\arg t \in \left(\frac{4k-1}{2\alpha}\pi, \frac{4k+1}{2\alpha}\pi\right)$ и $\arg t \in \left(\frac{4j-1}{2\alpha}\pi, \frac{4j+1}{2\alpha}\pi\right)$, $|k| \in N$, $|j| \in N$, $k \neq j$. Приведенный интеграл обобщает функцию $Vi_\mu(z, \alpha, l)$ в (21.19).

28.3.3. Рассмотрим некоторые случаи расширения класса допустимых функций $g(v)$.

1°. Пусть $g(v) = v^\mu \ln^\kappa(1/v) g_0(v)$, $\mu > -1$, $\kappa > -1$, где $g_0(v)$ обладает указанными в п. 28.3.2 свойствами. Тогда разложение (28.64) для $g(v)$ сохраняется, изменяются только коэффициенты и показатели степеней. Под знак интеграла (28.67) добавляется множитель u^κ . Разложение (28.66) от этого меняется не существенно, но заметно усложняются свойства функции $G_2(t)$ в (28.67'). Точки $t = -\mu - 1 - k$ для $G(t)$ являются алгебраическими точками ветвления, если $\kappa \in N$, и поэтому следует учитывать только точку $t = -\mu - 1$. Разложение для $F(z)$ можно построить согласно теореме 28.4.

2°. Пусть $g(v) = v^\mu \ln^\kappa(1/v) \ln^\lambda(\ln 1/v) g_0(v)$, $\mu > -1$, $\kappa > -1$, $\lambda \in N$, $g_0(v)$ — прежняя функция. Для $\ln(\ln 1/v)$ выбрана ветвь, которая действительна при $v \in (0, 1)$. Тогда

$$G(t) = \int_0^\infty e^{-(t+\mu+1)u} u^\kappa (\ln u)^\lambda g_0(e^{-u}) du.$$

При $t \rightarrow \infty$, $|\arg t| \leq \pi - \eta$ согласно (13.49) можно построить разложение для $G(t)$ по логарифмам, причем $g_0(e^{-u})$ согласно п. 32.2 следует заменить на $g_0(1)$. Легко видеть, что $h^*(t) \in VL_B$.

По формуле (13.49) можно исследовать асимптотику $G(t)$ при $t \rightarrow -1 - \mu - k$. Поскольку получаем разложение по логарифмам, то достаточно брать $t \rightarrow -1 - \mu$. Затем следует применить теорему 28.7. Подробнее этот случай рассмотрен в [126]. Если $\lambda \in N$, то $G(t)$ поворотом пути интегрирования нельзя аналитически продолжить в секторе $|\arg t| \leq \pi - \eta$, так как $u = 1$ является точкой ветвления и путь интегрирования идет по определенному берегу разреза.

28.4. Примеры

28.4.1. При исследовании асимптотики конкретных целых функций коэффициент $h(t)$ часто задается разложением (28.23). Чтобы перейти к виду (28.18) и определить необходимые коэффициенты d_j , приходится использовать ряд рекуррентных формул. Рассмотрим подробнее наиболее распространенный случай, когда в (28.23) $\nu_k = \lambda + k$. При этом удобно использовать обобщенную формулу Стирлинга (23.17), которая в тексте нашей работы напечатана с ошибками (см. исправление ошибок ко 2-му тому). Эта формула должна иметь вид

$$\ln \Gamma(t+\alpha) \sim (t+\alpha-1/2) \ln t - t + 1/2 \ln(2\pi) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} B_{k+1}(\alpha)}{k(k+1)} t^{-k}. \quad (28.69)$$

1°. Найдем выражение для коэффициентов $c_k(\alpha, 1) \equiv c_k(\alpha)$ в (28.24) при $\gamma=1$. Если обе части (28.69) умножить на -1 и потенцировать согласно (19.29) и (19.30), то получим рекуррентное соотношение

$$c_{k+1}(\alpha) = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j c_{k-j}(\alpha) B_{j+2}(\alpha) / (j+2), \quad (28.70)$$

$$c_0 = 1; \quad c_1 = -(\alpha^2 - \alpha + 1/6)/2, \quad c_2 = [c_1^2 + (\alpha^3 - (3/2)\alpha^2 + \alpha/2)/3]/2, \\ c_3 = [3c_1c_2 - c_1^3 - (\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 - 1/30)/4]/3.$$

Из выполненных действий следует также, что

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) t^{-k} \right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k(\alpha) t^{-k}. \quad (28.71)$$

Если в рассмотренном разложении t заменить на γt , то $c_k(\alpha, \gamma) = c_k(\alpha) / \gamma^k$. В частности, из (28.24) и (28.71) следует

$$e^{-\gamma t \ln t} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\gamma t + \alpha)} (\gamma t)^{\alpha-1/2} e^{-\gamma(t-\ln \gamma)t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k(\alpha) / (\gamma t)^k. \quad (28.72)$$

Здесь α является свободным параметром, и его можно выбрать каким угодно.

2°. Согласно (28.23) и лемме 28.3 в (28.18) имеем $\beta = \mu - \gamma(1 - \ln \gamma)$, $\alpha_j = \lambda + 1/2 + j$. Пусть $d_j / \sqrt{2\pi} \gamma^{\lambda} = d_j^*$, $c_k(\lambda + 1/2 + j) = C_{kj}$. Тогда из формального равенства

$$\sum_{j=0}^{\infty} d_j^* (\gamma t)^{-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{kj} (\gamma t)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k t^{-k}$$

получаем рекуррентное соотношение

$$d_k^* = E_k \gamma^k - \sum_{j=0}^{k-1} d_j^* C_{k-j,j}, \quad k \geq 1, \quad (28.73)$$

$d_0^* = E_0$, $d_1^* = E_1 \gamma + E_0(\lambda^2 - 1/12)/2$, $d_2^* = E_2 \gamma^2 + E_1 \gamma(\lambda^2 + 2\lambda + 11/12)/2 + E_0(\lambda^4/8 + \lambda^3/3 + 11\lambda^2/48 - 23/1152)$. Таким образом, с помощью (28.70) и (28.74) по заданным E_k в (28.23) можно вычислить соответствующие d_j в (28.18).

3°. Пусть $h(t) = e^{\beta t} H(t) / \Gamma(\gamma t + \alpha)$, где $H(t)$ обладает разложением (28.19) при $\lambda_k = k$. Тогда при $\alpha_j = \alpha + j$ в силу (12.62) из формального равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k t^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \frac{\Gamma(\gamma t + \alpha)}{\Gamma(\gamma t + \alpha + j)} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} (\gamma t)^{-k-j}$$

получаем рекуррентное соотношение

$$d_k = D_k \gamma^k - \sum_{j=1}^{k-1} d_j a_{k-j,j}, \quad k \geq 1, \quad (28.74)$$

где $a_{kj} = (-1)^k \binom{j+k-1}{k} B_k^{(1-j)}(\alpha)$, $d_0 = D_0$, $d_1 = D_1 \gamma$, $d_2 = D_2 \gamma^2 + D_1 \gamma \alpha$, $d_3 = D_3 \gamma^3 + D_2 \gamma^2 (2\alpha + 1) + D_1 \gamma \alpha (\alpha + 1)$.

Формула (28.74) непосредственно выражает d_k с помощью D_k . Поскольку вычисления в п. 3° намного проще, чем в п. 2°, так как не требуется находить вспомогательные величины $c_k(\alpha)$, то $h(t)$ целесообразно привести к последнему виду, если при этом не надо выполнять дополнительные расчеты. Пример будет рассмотрен в п. 28.5.1.

28.4.2. Так как согласно формулам, указанным в п. 28.4.1, в случае конкретных функций $f(z)$ следует только произвести численные расчеты для нахождения коэффициентов d_j , то рассмотрим лишь несколько примеров. При использовании формулы (28.29) следует учитывать примечание 2° к теореме 28.4 и выражение (28.36).

Исследуем вначале асимптотику функции

$$T_\gamma(z, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma^\gamma(k + \alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \gamma > 0. \quad (28.75)$$

Согласно (27.69) $T_\gamma(z, 1) = T_\gamma(z)$. Имеем $h(t) = 1/\Gamma^\gamma(t + \alpha)$. Если обе части (28.69) умножить на $(-\gamma)$ и потенцировать, то получим

$$1/\Gamma^\gamma(t + \alpha) \sim (2\pi)^{-\gamma/2} t^{-\gamma(\alpha-1/2)} \exp(\gamma t - \gamma t \ln t) \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\alpha, \gamma) t^{-k}, \quad (28.76)$$

где коэффициенты E_k определяются по рекуррентной формуле (28.70), в которой множитель $1/(k+1)$ заменен на $\gamma/(k+1)$. Имеем $E_0 = 1$, $E_1 = \gamma c_1$, $E_2 = \gamma[c_1^2(\gamma-1) + 2c_2]/2$, $E_3 = \gamma[c_1^3(\gamma-1)(\gamma-2)/2 + 3c_1c_2(\gamma-1) + 3c_3]/3$, где c_k определены в (28.70). По данным E_k согласно (28.73) вычислим d_j^* , а $d_j = \sqrt{2\pi} \gamma^\lambda d_j^*$; $d_0^* = 1$, $d_1^* = (\gamma^2 - 1)/24$.

Согласно п. 28.4.1, 2° имеем $\lambda = \gamma(\alpha - 1/2)$, $\mu = \gamma$, $\beta = \gamma \ln \gamma$, $e^\beta = \gamma^\gamma$. Следовательно,

$$1/\Gamma^\gamma(t + \alpha) \sim (2\pi)^{(1-\gamma)/2} \gamma^{\gamma(\alpha-1/2)} e^{t\gamma \ln \gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j^*}{\Gamma(\gamma t + \gamma(\alpha - 1/2) + 1/2 + j)}. \quad (28.77)$$

Далее приходится различать следующие случаи.

1°. $\gamma \in N_1$. Поскольку имеем $T_1(z, \alpha) = (1/\Gamma(\alpha)) {}_1F_1(1; \alpha; z)$, то достаточно брать $\gamma \in N_2$. Так как $h(t)$ в этом случае — целая функция, то можно использовать формулу (28.17). При $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi$ получаем

$$T_\gamma(z, \alpha) \sim (2\pi)^{(1-\gamma)/2} \gamma^{-1/2} \sum_{|\arg z + 2k\pi| \leq \gamma\pi} \exp[\gamma(z e^{i2k\pi})^{1/\gamma}] \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} d_j^* \gamma^{-j} (z e^{i2k\pi})^{(1/2 - \gamma(\alpha-1/2) - j)/\gamma} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma^\gamma(\alpha - n) z^n} \equiv \sum_1 - \sum_2. \quad (28.78)$$

При $\alpha = 1$, $z = r$ первый член (28.78) совпадает с (27.70). При $\alpha \in N$ ряд \sum_2 содержит лишь конечное число членов. Отметим, что T_n выражается с помощью ${}_1F_n$.

2°. $\gamma \in N$, $\alpha \in N$. Функция $h(t)$ имеет точки ветвления $t = -\alpha - k$, но мы должны учитывать лишь $t = -\alpha$ и построить

разложение для функции $1/[\sin \pi t \Gamma^\nu(t+\alpha)]$ в окрестности этой точки по степеням $t - (-\alpha) = t + \alpha$. Имеем

$$\frac{1}{\Gamma(t+\alpha)} = \frac{t+\alpha}{\Gamma(1+t+\alpha)} = (t+\alpha) \sum_{h=0}^{\infty} s_h (t+\alpha)^h,$$

$$s_h = \frac{1}{k!} \frac{d^h}{dt^h} \frac{1}{\Gamma(1+t)} \Big|_{t=0};$$

$$\frac{1}{\Gamma^\nu(t+\alpha)} = (t+\alpha)^\nu \sum_{h=0}^{\infty} a_h (t+\alpha)^h,$$

$$\frac{1}{\sin \pi t} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^h}{dt^h} \frac{1}{\sin \pi t} \right) \Big|_{t=-\alpha} (t+\alpha)^h,$$

где a_k выражаются через s_k согласно (4.23). Коэффициенты s_k до $k=40$ приведены в [301]. Из построенных разложений получаем

$$\frac{1}{\sin \pi t \Gamma^\nu(t+\alpha)} = (t+\alpha)^\nu \sum_{h=0}^{\infty} A_h (t+\alpha)^h. \quad (28.79)$$

Поскольку $(-z)^t = \exp[t \ln(-z)]$ и $|\arg \ln(-z)| \leq \pi/2 - \varepsilon$ при $|\arg z| \leq \pi$ и $|z| > 1$, то согласно (22.15) (или (23.13)), (28.29) и (28.36) к правой части (28.78) при $|\arg z| \leq \pi$ следует присоединить

$$-\Omega_2(z) \sim (-z)^{-\alpha} \sin \gamma \pi \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h A_h \Gamma(k+1+\gamma) [\ln(-z)]^{-\gamma-h-1}, \quad (28.80)$$

а в Σ_2 брать конечную сумму до $n = [\operatorname{Re} \alpha]$.

3°. $\gamma \in N, \alpha \in N$. Вместо (28.79) получаем разложение

$$\frac{1}{\sin \pi t \Gamma^\nu(t+\alpha)} = (t+\alpha)^{\nu-1} \sum_{h=0}^{\infty} A_h^* (t+\alpha)^h,$$

где при вычислении A_h^* следует учитывать разложение для $1/\sin \pi t$ в (13.59). Поэтому в (28.80) γ заменяется на $\gamma-1$ и A_h — на A_h^* . В обоих последних случаях для интеграла $\Omega_2(z)$ разрез можно брать по лучу $\arg(t+\alpha) = \pi - \varepsilon, \varepsilon > 0$.

При $\alpha=1$, $\gamma \in N$ первые члены соответствующих разложений даны в [8], а при $z=x>0$ и $z=-x$ — в [76], где они получены с помощью формулы Эйлера—Маклорена. Случай, когда $\alpha=1$, $\gamma \in (0, 2)$, $z=-x$, рассмотрен также в работе [417], в которой применяется преобразование Меллина.

28.4.3. Исследуем асимптотику функции

$$U_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{\gamma k}}, \quad \gamma > 0. \quad (28.81)$$

Имеем $h(t) = e^{-\gamma t \ln t}$, поэтому в (28.23) $\mu=0$, $\lambda=0$, $E_0=1$, $E_k=0$, $k \geq 1$. Следовательно, $\beta = -\gamma(1 - \ln \gamma)$, $e^\beta = (\gamma/e)^\gamma$, $\alpha_j = 1/2 + j$ и

$$e^{-\gamma t \ln t} \sim e^{-\gamma(1 - \ln \gamma)t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j}{\Gamma(\gamma t + 1/2 + j)}, \quad (28.82)$$

где $d_j = d_j^* \sqrt{2\pi}$, а d_j^* определяется из (28.73) при вышеуказанных E_k . В частности, $d_0^* = 1$, $d_1^* = -1/24$, $d_2^* = -23/1152$.

Функция $h(t)$ имеет в $t=0$ логарифмическую точку ветвления сложного характера. Поэтому еще следует построить разложение функции $e^{-\gamma t \ln t} / \sin \pi t$ в окрестности $t=0$, причем разрез можно взять по лучу $\arg t = \pi - \varepsilon$. Имеем $\pi t / \sin \pi t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, где согласно (13.59) $a_{2k-1} = 0$, $a_{2k} = \pi^{2k} 2(2^{2k-1} - 1) |B_{2k}| / (2k)!$. Поэтому в окрестности $t=0$ получаем разложение

$$e^{-\gamma t \ln t} / \sin \pi t = (1/\pi t) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + (\gamma/\pi) \sum_{k=0}^{\infty} t^k \ln t P_k(\ln t),$$

где $P_k(u)$ — полином степени k , $P_0 = -1$. Согласно (22.22) с учетом $(-z)^t = e^{t \ln(-z)}$ при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi$ имеем

$$-\Omega_2(z) \sim 1 + \sum_{k=0}^{\infty} [\ln(-z)]^{-k-1} Q_k(\ln \ln(-z)), \quad (28.83)$$

где $Q_k(u)$ — полином степени k , $Q_0 = -\gamma$. Вычетами в точках $t = -n$, $n \in N_1$, можно пренебречь, поэтому согласно теореме 28.4 при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi$

$$U_\gamma(z) \sim \sum_{|\arg z + 2k\pi| \leq \gamma\pi} \exp[\gamma e^{-1}(ze^{i2k\pi})^{1/\gamma}] \times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} d_j (\gamma/e)^{1/2-j} [ze^{i2k\pi}]^{(1/2-j)/\gamma} - \Omega_2(z). \quad (28.84)$$

28.4.4. Преобразование Барнса—Ватсона является лишь одним из примеров, когда с помощью интеграла Меллина—Барнса можно установить соотношение между разными целыми функциями. Рассмотрим в качестве примера функции

$$f_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + \alpha k)}{k!} z^k = \int_0^{\infty} t^{\beta-1} \exp(-t + z t^{\alpha}) dt = \\ = \pi \alpha^{\beta-1} Hd_{(\beta/\alpha)-1}(z \alpha^{\alpha}, 1/\alpha), \quad \alpha \in (0, 1), \quad \beta > 0; \quad (28.85)$$

$$\Phi_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \lambda k)}{\Gamma(1 + (\lambda + \mu)k)} z^k = \\ = 1 + z \int_0^1 E_{1/\mu}(z t^{\mu}(1-t)^{\lambda}, \mu) t^{\mu-1} (1-t)^{\lambda} dt, \quad (28.86)$$

$\lambda > 0$, $\mu > 0$, функция Hd_{λ} определена в (21.12). Следует отметить, что во 2-м томе данной монографии местами перепутаны обозначения для $Hd_{\lambda}(z, \alpha)$ и $Hd_{\lambda}^*(z, \alpha) = \pi Hd_{\lambda}(z, \alpha)$. Очевидно, $\Phi_{\alpha, 1-\alpha}(z) = f_{\alpha, 1}(z)$. Найдем соотношение между $\Phi_{\lambda, 1}(z)$ и $f_{\lambda/(\lambda+1), 1}(z)$. Для этого рассмотрим интеграл Меллина—Барнса второго рода с отрицательным направлением обхода

$$I(z) = \frac{1}{2i} \int_L \frac{\Gamma(-t) z^t dt}{\Gamma(-\alpha t) \sin[(1-\alpha)\pi t]}, \quad \alpha = \lambda/(\lambda+1) \in (0, 1),$$

где путь L пересекает действительную ось в точке $t = \sigma_0 \in \left(-\frac{1}{1-\alpha}, 0\right)$.

Функция $I(z)$ существует при всех $\arg z \in [-\pi, \pi]$. После передвижения пути L вправо и вычисления вычетов в полюсах $t = k$, $t = m/(1-\alpha)$, $k \in N_1$, $m \in N$, получаем

$$I(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k\alpha)}{k!} z^k - (\lambda+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k\lambda)}{\Gamma(1+(\lambda+1)k)} z^{k(\lambda+1)}. \quad (28.87)$$

Чтобы все полюсы были простыми, предположим, что $\lambda \notin N_1$.

При $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| < 3\pi/2(\lambda+1)$ $I(z)$ можно преобразовать в интеграл первого рода. После этого передвижением пути влево получаем

$$I(z) \sim (\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n(\lambda+1))}{\Gamma(\lambda n)} z^{-n(\lambda+1)}.$$

Отсюда с учетом (28.87) после замены z на $z^{1/(\lambda+1)}$ при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| < 3\pi/2$ имеем соотношение

$$f_{\lambda/(\lambda+1),1}(z^{1/(\lambda+1)}) - (\lambda+1)\Phi_{\lambda,1}(z) \sim (\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n(\lambda+1)) z^{-n}}{\Gamma(\lambda n)}, \quad (28.88)$$

которое можно использовать для асимптотического представления $\Phi_{\lambda,1}(z)$ с учетом асимптотики $Hd_{(\beta/\alpha)-1}$ (см. (21.18)). (В правой части этой формулы к первому члену следует добавить множитель $1/2$.) Такой подход значительно проще непосредственного использования интеграла (28.86). Можно применить также результаты п. 28.5.

Отметим, что (28.86) показывает новую возможность для представления целых функций с помощью интеграла, содержащего функции $E_{1/\mu}$. Применение интеграла $I(z)$ впервые было рассмотрено Барнсом в [156].

28.4.5. Рассмотрим еще функцию

$$F_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda k + \mu)}{k!} \sin [(\lambda k + \mu)\pi] z^k, \quad \lambda \in (0, 1), \quad \mu > 0. \quad (28.89)$$

Согласно (21.26) имеем $F_{1/3,\mu}(z) = 3^{1-\mu} \pi A i_{3\mu-1}(-3^{-1/3}z)$. Из (28.85) следует

$$\begin{aligned} F_{\lambda,\mu}(z) &= (1/2i) [e^{i\pi\mu} f_{\lambda,\mu}(e^{i\pi\lambda}z) - e^{-i\pi\mu} f_{\lambda,\mu}(e^{-i\pi\lambda}z)] = \\ &= (\lambda^{\mu-1} \pi / 2i) [e^{i\pi\mu} Hd_{(\mu/\lambda)-1}(ze^{i\pi\lambda}z^\lambda, 1/\lambda) - \\ &\quad - e^{-i\pi\mu} Hd_{(\mu/\lambda)-1}(ze^{-i\pi\lambda}z^\lambda, 1/\lambda)]. \end{aligned} \quad (28.90)$$

Для отдельных функций $Hd_{(\mu/\lambda)-1}$ можно построить асимптотическое разложение на всей плоскости z согласно (21.18) (или (28.29)). Однако при суперпозиции разложений при $|\arg(-z)| < (1-\lambda)\pi/2$ степенные ряды, взятые из (21.18) и подставленные в (28.90), взаимно сокращаются, а возможность применения рядов с экспоненциальными факторами в этой области не доказана. Поэтому при $|\arg(-z)| < (1-\lambda)\pi/2$ из (28.90) получим лишь оценку $F_{\lambda,\mu}(-z) = o(z^{-N})$.

Поскольку $\nu = 1 - \lambda \in (0, 1)$, то применим метод, указанный в п. 28.2.6, 2°, для функции $F_{\lambda,\mu}(-z)$. Используя данные п. 28.4.1, легко убедиться в том, что при $\operatorname{Re} t \leq -\sigma_0$

$$\begin{aligned} h(t)/\sin \pi t &= -\frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(1-\lambda t - \mu)} \sim -C e^{\beta t} \Gamma(\mu - (1-\lambda)t - 1/2) \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} E_k t^{-k} \sim -C e^{\beta t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k \Gamma(\mu - (1-\lambda)t - 1/2 - k), \end{aligned}$$

где $e^\beta = \lambda^\lambda (1-\lambda)^{1-\lambda}$, $C = \lambda^{\mu-1/2} (1-\lambda)^{1-\mu} (\sqrt{2\pi})^{-1}$, а E_k и L_k определяются согласно п. 28.4.1 и 28.2.6, $E_0=1$, $L_0=1$. Поэтому по формуле (28.52) при $\gamma=1-\lambda$, $|\arg z| < (1-\lambda)\pi/2$ получаем

$$F_{\lambda,\mu}(-z) \sim (\pi C / (1-\lambda)) \exp[-(ze^\beta)^{1/(1-\lambda)}] \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k (ze^\beta)^{(\mu-1/2-k)/(1-\lambda)}. \quad (28.91)$$

При остальных $\arg z$ разложение для $F_{\lambda,\mu}(z)$ можно построить согласно (28.90) и (21.18). В отдельных секторах получается такое же разложение, как (28.91) (только z заменено на $ze^{\pm i\pi}$), и добавляется степенной ряд. При $\lambda=\mu=1/3$ имеем (19.72).

Поскольку согласно (21.105)

$$F_{\lambda,\mu}(z) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(1-\mu-\lambda k)} = \pi I_{-\mu-\lambda}(z), \quad \lambda \in (0, 1),$$

то получим также дополнительную информацию о функции Бесселя—Райта. Асимптотика этой функции исследована также в [170, 304].

Отметим, что с помощью разложения (28.91) можно расширить область применимости формулы (22.77), в которой при $t \rightarrow +\infty$ разлагается интеграл

$$\Omega_\mu(t, \alpha, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} p^\mu \exp(pt - \alpha p^\lambda) dp, \quad \alpha > 0, \lambda \in (0, 1), t \geq 0.$$

Этот интеграл существует при $|\arg \alpha| < \pi(1-\lambda)/2$. При этих $\arg \alpha$ легко показать [199], что путь интегрирования можно деформировать по петле вокруг разреза, идущего вдоль луча $\arg p = \pi$. Отсюда в силу формул (21.104) и (21.105), которые справедливы также при $\kappa \in (-1, 0)$, получаем соотношение

$$\Omega_\mu(t, \alpha, \lambda) = t^{-\mu-1} I_{-\mu-1}(-\alpha t^{-\lambda}), \quad t > 0, |\arg \alpha| < \pi(1-\lambda)/2.$$

Этим расширяется также формула (22.51).

28.5. Асимптотика общих гипергеометрических функций

28.5.1. Общая гипергеометрическая функция имеет вид

$${}_p\mathfrak{F}_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ b_1, \dots, b_q; \beta_1, \dots, \beta_q; \end{matrix} z \right) \equiv {}_p\mathfrak{F}_q(A_p, \mathfrak{A}_p; B_q, \mathfrak{B}_q z) \equiv \\ \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + \alpha_j k) \left[\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k) \right]^{-1} z^{k/\lambda}, \quad (28.92)$$

где $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$, $A_p = \{a_1, \dots, a_p\}$, $\mathfrak{A}_p = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, $B_q = \{b_1, \dots, b_q\}$, $\mathfrak{B}_q = \{\beta_1, \dots, \beta_q\}$. При $\alpha_j = \beta_j = 1$ согласно (23.50) получаем ${}_p\mathfrak{F}_q = \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j) \prod_{j=1}^q \Gamma^{-1}(b_j) {}_pF_q(A_p; B_q; z)$. Поэтому асимптотика для ${}_pF_q$ следует из асимптотики ${}_p\mathfrak{F}_q$. Асимптотические представления для функции Мейера $G_{pq}{}^{ml}$ согласно (23.84) и (23.85) получаем с помощью представлений для ${}_pF_q$. В исключительных секторах, когда степенные разложения для ${}_pF_q$ взаимно сокращаются, можно применить п. 28.2.6. Поэтому достаточно исследовать (28.92). Асимптотика функции $G_{pq}{}^{ml}$ подробно рассмотрена в [170]. Она приведена также в [235, 429]. Поскольку $1/\sin \pi t = -\Gamma(-t)\Gamma(1+t)/\pi$, то ${}_p\mathfrak{F}_q$ является частным случаем интеграла Меллина—Барнса (23.15) и асимптотику этой функции можно исследовать также на основе § 23. Это сделано в [170].

Ряд (28.92) определяет целую функцию, если $\gamma = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{j=1}^p \alpha_j + 1 > 0$. С помощью (28.69) при $|\arg t| \leq \pi - \eta$ из (28.92) следует разложение

$$h(t) = \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + \alpha_j t) \left[\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j t) \right]^{-1} / \Gamma(t+1) \sim \\ \sim K \exp(\mu t) \sum_{k=0}^{\infty} E_k t^{-k} / \Gamma(\gamma t - \kappa + 1/2),$$

где

$$\mu = \gamma \ln \gamma + \sum_{j=1}^p \alpha_j \ln \alpha_j - \sum_{j=1}^q \beta_j \ln \beta_j, \quad e^\mu = \gamma^\gamma \prod_{j=1}^p \alpha_j^{\alpha_j} \prod_{j=1}^q \beta_j^{-\beta_j}, \\ \kappa = \sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + 1/2 (q - p - 1), \quad (28.93)$$

$$K = (2\pi)^{(p-q)/2} \gamma^{-\kappa} \prod_{j=1}^p \alpha_j^{a_j - 1/2} \prod_{j=1}^q \beta_j^{1/2 - b_j},$$

а E_k определяется по формуле (19.30), где

$$D_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \left[\sum_{j=1}^p B_{k+1}(a_j) \alpha_j^k - \sum_{j=1}^q B_{k+1}(b_j) \beta_j^k - B_{k+1} + \right. \\ \left. + \gamma^k B_{k+1}(1/2 - \kappa) \right].$$

В частном случае, когда ${}_p\mathfrak{F}_q \equiv \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j) \prod_{j=1}^q \Gamma^{-1}(b_j) {}_pF_q$, $p \leq q$, имеем

$$\gamma = q - p + 1 \geq 1, \quad \mu = \gamma \ln \gamma, \quad e^\mu = \gamma^\gamma, \quad K = (2\pi)^{(p-q)/2} \gamma^{-\kappa}. \quad (28.94)$$

Коэффициенты d_j определяются по формуле (28.74), в которой D_k заменено на E_k . Таким образом, функция $h(t)$ обладает представлением (28.18), в котором положено $\beta = \mu$ и $\alpha_j = -\kappa + 1/2 + j$. Согласно теореме 28.4 и формуле (28.29) с учетом $\arg e^\mu = 0$ при $|\arg z| \leq \pi$ в случае, когда $h(t)/\sin \pi t$ имеет бесконечно много полюсов при $\operatorname{Re} t < 0$, получаем разложение

$$\begin{aligned} {}_p\mathfrak{F}_q(A, \mathfrak{A}; B, \mathfrak{B}; z) &\sim (K/\gamma) \sum_{|\arg z + 2k\pi| \leq \pi} \exp [(ze^{\mu + i2k\pi})^{1/\gamma}] \times \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} d_j (ze^{\mu + i2k\pi})^{\kappa - j + 1/2} \gamma^{-} \\ &- \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{res} [h(t) (-z)^t / \sin \pi t; (-k - a_j) / \alpha_j]. \quad (28.95) \end{aligned}$$

В (28.95) отпадает ряд $\sum_{n=1}^{\infty} h(-n) z^{-n}$, так как точки $t = -n$ для функции $1/\Gamma(t+1) \sin \pi t$ являются устранимо особыми. Отпадает также $\Omega_2(\xi)$, так как особыми точками $h(t)$ могут быть только полюсы. Поскольку они могут быть кратными, то сумму вычетов в конкретных случаях следует уточнить.

Детализируем разложение (28.95) при разных значениях γ .

1°. $\gamma > 2$. Тогда в (28.95) при $|\arg z| < \pi$ в первой сумме $k = 0$. При $|\arg z| = \pi$ кроме $k = 0$ еще следует брать $k = -\operatorname{sign}(\arg z)$. Сумма вычетов отпадает, так как она входит в любой остаток первого ряда.

2°. $\gamma = 2$. Сохраняются результаты п. 1°, только при $|\arg z| = \pi$ необходимо учитывать сумму вычетов.

3°. $\gamma < 2$. При $|\arg z| \leq \gamma\pi/2 - \eta$ в (28.95) следует брать только первую сумму, где $k = 0$; при $|\arg z| \in [\gamma\pi/2 + \eta, \pi]$ — только сумму вычетов, а в остальном секторе — их объединение.

В случае функции ${}_pF_q$ надо учитывать значения постоянных (28.94) и тот факт, что $\gamma \in N_1$. Для ${}_pF_p$ при $|\arg z| < \pi/2$ в (28.95) $k = 0$. Получаем разложение с множителем e^z , которое было использовано уже в (27.48). При $|\arg z| \in (\pi/2, \pi]$ имеем степенное разложение, приведенное в явном виде в (23.51), а при $|\arg z| \sim \pi/2$ берем объединение обоих рядов. Если $q > p$,

то $\gamma \geq 2$ и при всех $\arg z$ в (28.95) следует брать лишь первую сумму. Только при $q=p+1$ и $|\arg z|=\pi$ к этой сумме надо добавить сумму вычетов. Частный случай разложения для ${}_1F_2$ можно получить также из (10.87), так как

$${}_1F_2(\alpha; \beta, \gamma; -z) = \frac{2\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} z^{(1-\beta)/2} \int_0^1 J_{\beta-1}(2t\sqrt{z}) t^{2\alpha-\beta} (1-t^2)^{\gamma-\alpha-1} dt. \quad (28.96)$$

28.5.2. Остается рассмотреть случай, когда при $\gamma < 2$ функция $\Omega(t) = h(t)/\sin \pi t$ имеет только конечное число вычетов. Поскольку в этих случаях $\gamma \geq 1$ (см. ниже п. 1°—3°), то согласно п. 28.2.6, 1° во всей плоскости z сохраняется (28.95) и при $|\arg z| > \gamma\pi/2$ имеем экспоненциально убывающие множители. Рассмотрим, как этот результат получается при использовании второго метода.

1°. Пусть $\rho=0$. Тогда ${}_0\mathfrak{F}_q$ совпадает с гипербесселевой функцией (21.126). Функция $\Omega(t)$ при $\operatorname{Re} t < 0$ полюсов не имеет. В данном случае $\gamma = 1 + \sum_{j=0}^q \beta_j \equiv 1 + \nu > 1$, поэтому достаточно рассмотреть лишь значения $\nu \in (0, 1)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= 1/[\Gamma(1+t) \sin \pi t \prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j t)] = \\ &= -\frac{\Gamma(-t)}{\pi^{1+q}} \prod_{j=1}^q \Gamma(1-b_j - \beta_j t) \sum_{k=1}^{2^q} C_k e^{i\pi\omega_k t}, \end{aligned}$$

поэтому при $\operatorname{Re} t < -\sigma_1$ согласно (28.69) и (23.33)

$$\Omega(t) \sim -e^{\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k \Gamma(1 - \gamma t + \kappa + 1/2 - k) \sum_{j=1}^{2^q} C_j e^{i\pi\omega_j t}. \quad (28.97)$$

Здесь $\max \omega_j = \omega_1 = \nu$, $\min \omega_j = \omega_{2^q} = -\omega_1 = -\nu$. Из (28.97) при $|\arg z e^{i\pi\omega_j}| \leq \gamma\pi/2 - \varepsilon$ согласно (23.30) следует разложение

$$\begin{aligned} {}_0\mathfrak{F}_q(-z) &\sim (\pi/\gamma) \sum_{j=1}^{2^q} C_j \exp [-(ze^{\mu+i\pi\omega_j})^{1/\gamma}] \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L_k (ze^{\mu+i\pi\omega_j})^{(\kappa+1/2-k)/\gamma}. \quad (28.98) \end{aligned}$$

В сумме по j достаточно брать $j=1$, $\omega_j=\nu$ и $j=2^q$, $\omega_{2^q}=-\nu$, так как при $\varphi=\arg z \geq 0$ $\min_j \operatorname{Re}[(ze^{i\omega_j})^{1/\nu}] = |z|^{1/\nu} \cos \frac{|\varphi| + \pi\nu}{\nu}$, и такой же минимум имеем при $\varphi < 0$, если брать $\omega_j = -\nu$. Поэтому (28.98) справедливо при $|\arg z| < \gamma\pi/2 - \varepsilon - \nu\pi = (1 - \nu)\pi/2 - \varepsilon$.

Поскольку $e^{\pm i\nu/\nu} = e^{\pm i\pi} e^{\mp i\pi/\nu}$, то после замены в (28.98) $-z$ на $+z$ получаем такие же ряды, какие имеем в (28.95). Докажем еще, что коэффициенты в (28.95) и (28.98) совпадают.

Рассмотрим при $\nu \in (1, 2)$ сектор S : $\arg z \in [\gamma\pi/2 - \eta_1, \gamma\pi/2 + \eta_2]$, $\eta_2 > \varepsilon$, $\gamma\pi/2 + \eta_2 < \pi$. Вводим вспомогательную функцию $G(z) = {}_0\mathfrak{F}_q \exp[-(ze^\mu)^{1/\nu}] (ze^\mu)^{-(q+1/2)/\nu}$. Из (28.95) в S получаем

$$G(z) = (K/\nu) \left[\sum_{j=0}^n d_j (ze^\mu)^{-j/\nu} + O((ze^\mu)^{-(n-1)/\nu}) \right] + o(z^{-N} \exp[-(ze^\mu)^{1/\nu}]),$$

а из (28.98) в S_2 : $\arg z \in [\gamma\pi/2 + \varepsilon, \gamma\pi/2 + \eta_2]$ имеем

$$G(z) = (\pi/\nu) \left\{ C_{2^q} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k L_k (ze^\mu)^{-k/\nu} + O((ze^\mu)^{-(n+1)/\nu}) \right] + O(\exp[(ze^{\mu-i2\pi})^{1/\nu} - (ze^\mu)^{1/\nu}]) \right\}.$$

Последний член в S_2 имеет оценку $o(z^{-N})$.

Из первого соотношения следует ограниченность $|G(z)|$ на луче $\arg z = \gamma\pi/2 - \eta_1$, из второго — ограниченность на луче $\arg z = \gamma\pi/2 + \eta_2$. Поэтому согласно теореме Фрагмена—Линделефа [138, 259] можно утверждать, что $|G(z)|$ ограничен в S . Поскольку на упомянутых лучах функция $G(z)$ имеет конечные пределы при $z \rightarrow \infty$, то из теоремы Апелья 27.5.1 следует, что эти пределы одинаковы, т. е. $Kd_0 = \pi C_{2^q} L_0$. Совпадение остальных коэффициентов доказывается аналогично тому, как это сделано в теореме 4.1. Приведенное доказательство и обобщает эту теорему.

Таким образом, в данном случае при всех $\arg z$ сохраняется разложение (28.95).

2°. Пусть $p > 0$, $\gamma = 1 + \nu$, $\nu \in (0, 1)$. Конечное число полюсов функция $\Omega(t)$ может иметь лишь тогда, когда Γ -функции, стоящие в знаменателе и числителе, имеют общие множители, которые взаимно сокращаются. Легко доказать, что две Γ -функции имеют либо один общий полюс, либо бесконечно много

общих полюсов. Мы имеем последний случай. Тогда можно доказать [303], что $h(t)$ приводится к виду

$$h(t) = \frac{P_m(t)e^{\mu t}}{Q_n(t)\Gamma(t+1)\prod_{j=1}^{q'}\Gamma(b_j'+\beta_j't)}, \quad (28.99)$$

где $P_m(t)$ и $Q_n(t)$ — полиномы соответствующих порядков, $\mu_1 = \mu - \gamma \ln \nu + \sum_{j=1}^{q'} \beta_j' \ln \beta_j'$, $\gamma = 1 + \sum_{j=1}^{q'} \beta_j'$.

Поскольку множитель $P_m(t)/Q_n(t)$ при $\operatorname{Re} t < -\sigma_1$ не препятствует приведению $\Omega(t)$ к виду (28.97) и после этого получаем тот же множитель $e^{\mu t}$, что и раньше, то и в данном случае сохраняется утверждение, высказанное в конце п. 1°. Чтобы доказать совпадение коэффициентов, в выражении для $G(z)$ функцию ${}_0\mathfrak{F}_q$ следует заменить на ${}_p\mathfrak{F}_q - \Sigma$, где Σ — сумма вычетов в полюсах функции $\Omega(t)$, которые совпадают с корнями $Q_n(t)$.

3°. Пусть $p > 0$, $\gamma = 1$, $\nu = 0$. Тогда в (28.99) произведение Γ -функций отсутствует и $\Omega(t) = -P_n(t)e^{\mu t}\Gamma(-t)/Q_n(t)$. Отсюда снова получаем (28.97) и, следовательно, (28.98).

28.5.3. Коэффициенты d_j в (28.95) вычисляются с помощью рекуррентных формул (19.30) и (28.74), достаточно удобных для применения ЭСМ. Такой способ вычисления d_j указан в [130]. В случае, когда ${}_p\mathfrak{F}_q \equiv {}_pF_q$, для вычисления d_j имеются также другие методы. Можно составить непосредственную рекуррентную формулу конечной длины

$$(j+1)d_{j+1} = \sum_{k=1}^q c_k(j)d_{j+1-k}, \quad j \geq q-1, \quad (28.100)$$

однако коэффициенты $c_k(j)$, которые являются полиномами степени $q+1$ от j , вычисляются довольно сложно. В [306] их выражения найдены непосредственной подстановкой (28.95) в линейное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет ${}_pF_q$, а в [277] они выражены с помощью некоторых других коэффициентов, вычисляемых, в свою очередь, по рекуррентным формулам. В [276] с помощью разностного уравнения, которому удовлетворяет $\prod_{k=1}^p \Gamma(t+\alpha_k) / \prod_{k=1}^q \Gamma(t+\beta_k)$, найдена рекуррентная формула, схожая с (28.74), где коэффициенты $a_{k-j,j}$ выражаются как линейные комбинации отношений Γ -функций. Этот метод в [175, 439] переносится на более общие разностные уравнения.

Для некоторых простейших случаев формула (28.100) в явном виде приведена в [235]. Например, при $p=q=2$ имеет место формула

$$(j+1)d_{j+1} = d_j [2j^2 - j(2\kappa + a_1 + a_2) + (\kappa + 1/2)(a_1 + a_2 - 1) - a_1 a_2 + b_1 b_2] - d_{j-1} (j - \kappa - 3/2)(j - \kappa - b_1 - 1/2)(j - \kappa - b_2 - 1/2),$$

$$d_{-1} = 0, \quad d_0 = 1. \quad (28.101)$$

После анализа последнего члена в (28.101) можно попытаться выяснить, не удовлетворяет ли этому рекуррентному соотношению выражение $d_k = (b_1 - a_1 - a_2 + 1)_k (b_2 - a_1 - a_2 + 1)_k / k!$. Однако это имеет место лишь в том случае, когда $a_1(a_2 - 1) = a_2 - 1$. Учитывая свойство перестановочности параметров a_1 и a_2 , имеем $a_1 = a$, $a_2 = 1$. В таком случае $d_k = (b_1 - a)_k (b_2 - a)_k / k!$ и формально

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k} = {}_2F_0(b_1 - a, b_2 - a; z^{-1}).$$

Это соотношение установлено в [426].

§ 29. АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЯДАМИ ДРУГИХ ТИПОВ

29.1. Применение интегральных представлений

29.1.1. В прикладной математике встречаются различные типы функциональных рядов. Часто приходится исследовать асимптотику функций, определяемых такими рядами. Однако кроме степенных рядов редко встречаются такие классы рядов, для которых асимптотическое выражение известно при произвольном выборе коэффициентов, обладающих определенными асимптотическими свойствами. Чаще всего с помощью ниже рассмотренных методов удается построить асимптотическое выражение только для конкретных рядов, допускающих в лучшем случае несколько, а не бесконечно много свободных параметров, т. е. произвольных коэффициентов. Поэтому в данном параграфе мы не будем развивать общую теорию асимптотических разложений определенных типов рядов, а рассмотрим только отдельные методы на конкретных примерах.

Существуют разные методы для исследования асимптотики функций, определяемых функциональными рядами.

1°. Простейшим будет случай, когда данный ряд уже является асимптотическим разложением. Однако такие случаи встречаются редко.

2°. Ряд удается просуммировать с помощью некоторой функции, асимптотика которой известна.

3°. Иногда данный ряд можно преобразовать в иной ряд, к которому можно применить методы, указанные в других пунктах. Примером служит суммационная формула Пуассона.

4°. Чаще всего для данной функции ищется интегральное представление и затем применяется один из методов, характерных для исследования асимптотики интегралов.

5°. Иногда данный ряд может быть преобразован в сумму интеграла и некоторого асимптотического ряда. Примером может служить формула Эйлера—Маклорена.

Ниже рассмотрены примеры на применение указанных методов, а также некоторые дополнения.

Наиболее часто используется формальное преобразование ряда в интеграл, рассмотренное уже в § 27:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_L F(k, z, t) dt = \int_L \sum_{k=1}^{\infty} F(k, z, t) dt = \int_L G(z, t) dt. \quad (29.1)$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования часто можно оправдать согласно лемме 5.1. В дальнейших примерах соответствующие обоснования опущены. Кроме (29.1) в случае конкретных рядов можно встретить разные другие методы для превращения ряда в интеграл, например разнообразные применения метода вычетов. В частности, на этом методе основаны формула Абеля—Плана и (29.9).

29.1.2. Для интегральных представлений рядов часто используются интегралы, определяющие прямое или обратное преобразование Меллина или Лапласа. Сначала рассмотрим примеры на преобразование Меллина. Схема для преобразования ряда в интеграл типа Меллина—Барнса рассмотрена в п. 23.4.1. Она согласуется с общей формулой (29.1). В силу (23.44) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Omega(\lambda_n t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h(s) Z(s) t^{-s} ds, \quad \gamma > \sigma_0, \quad (29.2)$$

где $\Omega(t) \leftrightarrow h(s)$, $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$, причем этот ряд сходится при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.

1°. Рассмотрим $f_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\beta} t}$, $\beta > 0$, при $t \rightarrow +0$. Согласно

(29.2) имеем

$$f_{\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s) \zeta(\beta s) t^{-s} ds, \quad \gamma > 1/\beta.$$

Подынтегральная функция имеет полюсы $s = -k$, $k \in N$ и $s = 1/\beta$, поэтому при $t \rightarrow +0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^{\beta} t} \sim (1/\beta) \Gamma(1/\beta) t^{-1/\beta} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta(-k\beta) t^k/k!. \quad (29.3)$$

Полученная формула при $\beta = m \in N_1$, $e^{-t} = z$ дополняет п. 27.2.2, 1°. Если в (29.3) k^{β} заменить на $(k+\alpha)^{\beta}$, $\alpha \geq 0$, и применить ζ -функцию Гурвица $\zeta(\beta s, \alpha)$, то получим аналогичный результат. Этот случай при дополнительном коэффициенте $(\alpha+k)^{-\gamma}$ впервые рассмотрен в [245], а при $\alpha=0$ — также в [200, 417]. В [247] исследованы ряды, аналогичные (29.3), в которые добавлены определенные числовые коэффициенты, взятые из комбинаторного анализа. Другой метод исследования подобных рядов будет рассмотрен в (29.77).

2°. Возможности применения метода ограничены трудностями, возникающими нередко при исследовании свойств аналитического продолжения $Z(s)$. Следует отметить работу [251],

в которой доказано, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(s + \lambda_n)}$ имеют

одни и те же точки сходимости и расходимости, но этого свойства недостаточно. Поэтому требуется более подробное исследование некоторых классов рядов Дирихле.

В работе Барнса [154] указаны достаточные условия относительно $\Phi(t)$, чтобы функция

$$Z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi(\lambda + n\mu) (\lambda + n\mu)^{\rho}]^{-s} \quad (29.4)$$

имела только простые полюсы и при $|\operatorname{Im} s| \rightarrow \infty$ обладала такими же асимптотическими свойствами, как $\zeta(s, a)$ [см. (29.6''')]. Назовем (29.4) *рядами Дирихле типа Барнса*.

Несколько отличающиеся от (29.4) ряды Дирихле исследованы Меллином в [245]. В частности, им показано, что аналитически продолжимы, за исключением некоторых полюсов в левой полуплоскости, во всей плоскости s функции $\sum_{n=0}^{\infty} [R(\omega + n)]^{-s}$

и $\sum_{n=0}^{\infty} [R(a^{\omega+n})]^{-s}$, где $R(\omega)$ — рациональная функция, $|R(\omega)| \rightarrow$

$\rightarrow \infty$ при $|\omega| \rightarrow \infty$. Кроме того, для этих функций $Z(s)$ при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение $\Gamma(s)Z(s)e^{-\varepsilon|s|} \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Im} s| \rightarrow \infty$. Назовем их рядами Дирихле типа Меллина.

Некоторые полезные теоремы об аналитическом продолжении $Z(s)$ можно найти также в [182].

3°. Ниже рассмотрим только случай, когда $Z(s) = \zeta(\beta s, \alpha)$ [см. (12.61)]. Тогда вместо формулы (29.2) удобно применять следующую ее модификацию:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Omega(\alpha k + \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \alpha^{-s} h(s) \zeta(s, \beta/\alpha) ds, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (29.5)$$

При использовании (29.5) следует учитывать, что ζ -функция Гурвица $\zeta(s, \alpha)$ аналитична во всей плоскости s , кроме точки $s=1$, в окрестности которой

$$\zeta(s, \alpha) = (s-1)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) (s-1)^k, \quad c_0 = -\psi(\alpha). \quad (29.6)$$

Кроме того,

$$\zeta(-n, \alpha) = -B_{n+1}(\alpha)/(n+1), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (29.6')$$

Отсюда в силу (9.49) при $\alpha \in [0, 1]$ имеем

$$\zeta(-n, \alpha) = (-1)^{n+1} \zeta(-n, 1-\alpha).$$

Еще следует отметить соотношение

$$\zeta(n, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+z)^{-n} = [(-1)^n / (n-1)!] \psi^{(n-1)}(z),$$

$$n \in \mathbb{N}_2, \quad |\arg z| \leq \pi - \varepsilon. \quad (29.6'')$$

Доказательства формул (29.6) и (29.6') приведены в п. 29.1.4, 2°, а (29.6'') следует из (9.51), (9.52) и (12.61).

Приходится также учитывать оценки [18]

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha) &= O(|\tau|^{1/2-\sigma}) \quad \text{при } \sigma < 0, \\ \zeta(s, \alpha) &= O(|\tau|^{(1-\sigma)/2} \ln |\tau|) \quad \text{при } \sigma \in [0, 1], \\ \zeta(s, \alpha) &= O(1) \quad \text{при } \sigma > 1, \quad s = \sigma + i\tau. \end{aligned} \quad (29.6''')$$

Из-за (29.6''') путь интегрирования не всегда можно передвинуть как угодно далеко влево, так как при этом может получиться расходящийся интеграл. Поэтому возможности применения формулы (29.5) ограничены. Неучет оценок (29.6''') может привести к неверным результатам. Примером этого может служить

работа [238]. С помощью (29.6''') легко показать, что соотношение (29.3) получено законно.

4°. Рассмотрим одно асимптотическое представление для некоторых частных случаев конечной суммы вида (29.5), когда применение интегралов типа Меллина—Барнса можно довести до окончательного результата. Используемый метод несколько отличается от предыдущего. В основе его лежит представление для суммы $\sum_{k=0}^{m-1} (\beta + \alpha k)^{-\lambda}$, $\operatorname{Re} \lambda > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. С учетом очевидных свойств ζ -функции

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\beta + \alpha k)^{-\lambda} = \alpha^{-\lambda} \zeta(\lambda, \beta/\alpha),$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \beta^k} \zeta(\lambda, \beta) = (-1)^k (\lambda)_k \zeta(\lambda + k, \beta),$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\beta + \alpha k)^{-\lambda} = \alpha^{-\lambda} [\zeta(\lambda, \beta/\alpha) - \zeta(\lambda, m + \beta/\alpha)]$$

и сдвигом пути интегрирования вправо при $\gamma \in (\operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Re} \lambda + 1)$ согласно формуле Тейлора получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^{-\lambda}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} m^{s-\lambda} \zeta(s, \beta/\alpha) \frac{\Gamma(s) \Gamma(\lambda-s)}{\Gamma(\lambda)} ds = \\ & = \alpha^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k m^k \zeta(\lambda+k, \beta/\alpha) (\lambda)_k / k! = \\ & = \alpha^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial (\beta/\alpha)^k} \zeta(\lambda, \beta/\alpha) = \\ & = \alpha^{-\lambda} [\zeta(\lambda, m + \beta/\alpha) - \zeta(\lambda, \beta/\alpha)] = - \sum_{k=0}^{m-1} (\beta + \alpha k)^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Если далее сдвинуть путь влево, то с учетом (29.6) и (29.6') отсюда получим соотношение

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\beta + \alpha k)^{-\lambda} = \alpha^{-\lambda} \left[\zeta(\lambda, \beta/\alpha) + \frac{m^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k B_{k+1}(\beta/\alpha) (\lambda)_k}{k+1} m^{-k-\lambda} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} m^{s-\lambda} \zeta(s, \beta/\alpha) \frac{\Gamma(s)\Gamma(\lambda-s)}{\Gamma(\lambda)} ds \right], \quad (29.7)$$

где $\gamma_n \in (-n, -n-1)$. Очевидно, остаток имеет оценку $O(m^{-\lambda-n-\varepsilon})$. Формула (29.7) является обобщением (9.101).

Легко видеть, что формула (29.7) остается справедливой при всех λ , если $\lambda \neq 1$, $-\lambda \in N$ и $\gamma_n < \operatorname{Re} \lambda$. Предельным переходом при $\lambda \rightarrow -p$, $p \in N_1$ можно установить, что соотношение (29.7) сохранится также при $\lambda = -p$, если в нем взять $n = p$ и отбросить интеграл. При $\lambda = 0$ в правой части (29.7) имеем m .

Пусть при $|z| > R$ $\Omega(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{-k}$, $\beta > R$. Тогда при достаточно большом m , когда $\alpha m > R$, согласно (29.7) после некоторых преобразований получаем

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Omega(\beta + \alpha j) = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=2}^{n+2} \frac{c_k}{(\beta + \alpha j)^k} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{c_k}{(\beta + \alpha j)^k} = \\ = \sum_{k=2}^{\infty} c_k \alpha^{-k} \zeta(k, \beta/\alpha) + \alpha^{-1} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k (\alpha m)^{1-k}}{1-k} + \\ + \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j B_{j+1}(\beta/\alpha) \alpha^j}{(j+1)!} \sum_{k=2}^{\infty} c_k (\alpha m)^{-k-j} (k)_j - \\ - \sum_{k=n+3}^{\infty} c_k \alpha^{-k} \zeta(k, m + \beta/\alpha) - \alpha^{-1} \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{c_k (\alpha m)^{1-k}}{1-k} - \\ - \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j B_{j+1}(\beta/\alpha) \alpha^j}{(j+1)!} \sum_{k=n+3}^{\infty} c_k (\alpha m)^{-k-j} (k)_j - \\ - \sum_{k=2}^{n+2} \frac{c_k \alpha^{-k}}{2\pi i} \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} m^{s-k} \zeta(s, \beta/\alpha) \frac{\Gamma(s)\Gamma(k-s)}{\Gamma(k)} ds.$$

Поскольку при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} |c_k \alpha^{-k} \zeta(k, \beta/\alpha)| &= \left| (c_k/\beta^k) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha j/\beta)^k} \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{|c_k|}{\beta^k} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha j/\beta)^2} \right] = \frac{M|c_k|}{\beta^k}, \end{aligned}$$

а $|c_k| < M_1 R^k$, то первый ряд сходится. Последние четыре суммы можно оценить и показать, что они обладают оценкой $o(m^{-n-2-\varepsilon})$. Подробнее оценки приведены в [420]. Поэтому с учетом соотношений

$$\Omega^{(j)}(z) = (-1)^j \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{-k-j} (k)_j, \quad \int_{\infty}^z \Omega(t) dt = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k z^{1-k}}{1-k}$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \Omega(\beta + \alpha j) &\sim \sum_{k=2}^{\infty} c_k \alpha^{-k} \zeta(k, \beta/\alpha) + \frac{1}{\alpha} \int_{\infty}^{m\alpha} \Omega(t) dt + \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{j+1}(\beta/\alpha) \alpha^j}{(j+1)!} \Omega^{(j)}(m\alpha). \end{aligned} \quad (29.7')$$

При $\alpha = \beta = 1$ получаем формулу Эйлера—Маклорена, поэтому (29.7') можно считать ее обобщением. Можно также обобщить (29.7'), допустив комплексные α и β [420].

Если $\Omega(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h$ и $|a_h| < M \sigma^h / (h!)^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, т. е. $\Omega(z)$ — целая функция порядка ниже 1, то с учетом справедливости формулы (29.7) при $-\lambda = p \in \mathbb{N}$ после преобразований, аналогичных указанным выше, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \Omega(\beta + \alpha j) &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \alpha^k B_{k+1}(\beta/\alpha)}{k+1} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{m\alpha} \Omega(t) dt + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}(\beta/\alpha) \alpha^k}{(k+1)!} \Omega^{(k)}(m\alpha). \end{aligned} \quad (29.7'')$$

При этом использовано (29.6'). Поскольку $\Omega(\beta + m\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \Omega^{(k)}(m\alpha) \beta^k / k!$ — целая функция относительно β того же

порядка, то $|\Omega^{(k)}(m\alpha)/k!| < M_1 \sigma^k / (k!)^{1+\varepsilon}$ и последний ряд в (29.7''), так же как и первый, сходится при любом α . При этом учитывается, что согласно (9.44) $|B_k(\beta/\alpha)/k!| < M_0 / (2\pi - \eta)^k$, $\eta > 0$.

Отметим следующее практически важное указание. В случае как конечной, так и бесконечной сумм при вычислении вычетов в (29.2) или (29.5) часто не требуется знать явное выражение для $h(s)$. Согласно п. 31.2.1, 2° достаточно того, что известно разложение $\Omega(t)$ в РМ(0), так как оно полностью определяет полюсы и вычеты в них для $h(s)$ в левой полуплоскости. Примеры формального характера к такому подходу приведены в [200].

Если применить соотношение

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Omega(\beta + \alpha j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \alpha^{-s} h(s) [\zeta(s, \beta/\alpha) - \zeta(s, m + \beta/\alpha)] ds, \quad (29.7''')$$

которое получается аналогично (29.2) и (29.5), то согласно указанному примечанию иным методом можно вывести формулу (29.7''). Сдвигом пути интегрирования вправо с учетом п. 31.2.2, 2° можно получить также (29.7'). Но формула (29.7''') дает возможность рассматривать для $\Omega(z)$ разложение также в более общий ряд Меллина. Поэтому метод, изложенный в данном пункте, следует считать устаревшим. Ценность его заключается в том, что он показывает различные возможности применения интегралов типа Меллина—Барнса.

5°. Рассмотрим пример к (29.5). Согласно таблице, помещенной в примечании 4° к теореме 16.9, имеем соотношение

$$x^{-\lambda} J_\nu(ax) \rightarrow (1/2) (a/2)^{\lambda-s} \Gamma\left(\frac{s+\nu-\lambda}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda-s}{2} + 1\right),$$

которое справедливо при $\operatorname{Re} s \in (\lambda - \nu, \lambda + 3/2)$. Если x заменить на $\alpha x + \beta$, то при $a=t$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 1$, $\nu > 0$ из (29.5) следует

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_\nu[(\alpha k + \beta)t]}{(\alpha k + \beta)^\lambda} = \\ & = \frac{1}{2\alpha^\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left(\frac{\alpha t}{2}\right)^{\lambda-s} \frac{\Gamma((s+\nu-\lambda)/2)}{\Gamma((\nu+\lambda-s)/2+1)} \zeta(s, \beta/\alpha) ds, \end{aligned}$$

$\gamma \in (\max(1, \lambda - \nu), \lambda)$. При достаточно больших $|\tau|$ согласно (23.22) имеем оценку

$$\Gamma\left(\frac{s+\nu-\lambda}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda-s}{2} + 1\right) = O(|\tau|^{\sigma-\lambda-1}).$$

Из этого следует, что интеграл при указанных значениях γ сходится абсолютно и применение (29.5) законно. С учетом (29.6''') можно утверждать, что абсолютная сходимость сохраняется также при $\gamma < 1$. Поэтому при $\lambda \neq \nu + 1$, $t \rightarrow +0$ сдвигом контура влево получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{\nu}[(\alpha k + \beta)t]}{(\alpha k + \beta)^{\lambda}} \sim \frac{1}{2\alpha} (t/2)^{\lambda-1} \Gamma\left(\frac{1+\nu-\lambda}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda-1}{2} + 1\right) + \alpha^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\zeta(\lambda-\nu-2n, \beta/\alpha)}{\Gamma(n+\nu+1)} (\alpha t/2)^{\nu+2n}. \quad (29.8)$$

При $\lambda = \nu + 1$ точка $s = 1$ является двукратным полюсом. При $\beta = 0$ используем равенство $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha k)^{-\lambda} J_{\nu}(\alpha k t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha k + \alpha)^{-\lambda} J_{\nu}[(\alpha k + \alpha)t]$.

Легко убедиться в том, что асимптотическое представление суммы ряда (29.8) при $t \rightarrow \infty$ можно получить, если в каждый член ряда вместо J_{ν} подставить его асимптотическое разложение и перегруппировать члены. При $\beta = 0$, $\lambda = \nu$ ряд (29.8) будет рассматриваться также в п. 29.1.4, 3°.

Преобразование Меллина можно применить также к исследованию асимптотики при $x \rightarrow 1$ рядов Ламберта $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n / (1-x^n)$, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $|z| < 1$. Легко убедиться в том, что

$$F(e^{-z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s) \zeta(s) Z(s) z^{-s} ds,$$

где $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Сдвигом пути интегрирования влево получаем асимптотическое представление функции $F(e^{-z})$ при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$. При $a_n = n^{\lambda}$ имеем $Z(s) = \zeta(s - \lambda)$. Некоторые свойства $F(e^{-z})$ этим методом исследованы в [421].

6°. Иногда применяется некоторая модификация формул (27.27) и (27.28), где $h(t)z^t$ заменено на $h(t, z)$. Пусть функция $h(t, z)$ при каждом $z \in Z$ аналитична в полуполосе Π : $\operatorname{Re} t \geq \sigma$, $|\operatorname{Im} t| < \varepsilon$ и при $t \rightarrow \infty$ в Π $h(t, z) = H(z) O(t^{-1-\eta})$, $\eta > 0$, равномерно относительно $z \in Z$; L^+ и L^- — кривые, исходящие из точки σ , находящейся в Π и удаляющейся в ∞ в верхней и

нижней полуплоскостях. Тогда вместо (27.28) при $\sigma \in (m-1, m)$ получаем

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} h(k, z) = \int_{\sigma}^{\infty} h(t, z) dt - \int_{L^+} \frac{h(t, z)}{1 - e^{-i2\pi t}} dt + \int_{L^-} \frac{h(t, z)}{e^{i2\pi t} - 1} dt. \quad (29.9)$$

При исследовании асимптотики $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, $z_0 \in \bar{Z}$, можно попытаться к интегралам применить известные методы. Если $h(t, z)$ аналитически продолжима вне Π , то в последних двух интегралах желательно путь деформировать тоже вне Π . Часто целесообразно их превращать в интегралы по вертикальным лучам, как в (27.28). Рассмотрим пример. Пусть

$$f_m(z, \lambda, \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\lambda \ln^m k}{(z+k^\alpha)^\beta}, \quad (29.10)$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > -1$, $q = \alpha\beta - 1 - \lambda > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $|\arg z| \leq \min(\pi - \eta_0, \alpha\pi - \eta_0)$, $\eta_0 > 0$. Переходя в (29.9) к пределу при $\sigma \rightarrow +0$, имеем

$$f_m(z, \lambda, \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{t^\lambda \ln^m t}{(z+t^\alpha)^\beta} dt + \lim_{\sigma \rightarrow +0} \left[- \int_{L^+} \frac{t^\lambda \ln^m t dt}{(z+t^\alpha)^\beta (1 - e^{-i2\pi t})} + \int_{L^-} \frac{t^\lambda \ln^m t dt}{(z+t^\alpha)^\beta (e^{i2\pi t} - 1)} \right] = \Omega_1(z) + \Omega_2(z). \quad (29.11)$$

В $\Omega_1(z)$ применим подстановку $t = u^{1/\alpha} z^{1/\alpha}$. После преобразований, аналогичных действиям, которые выполнены в (12.90), получим

$$\Omega_1(z) = \alpha^{-m-1} z^{-q/\alpha} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \ln^{m-k} z \frac{\partial^k}{\partial p^k} B(p, q/\alpha) \Big|_{p=(\lambda+1)/\alpha}, \quad (29.12)$$

где $B(p, q)$ — бета-функция.

Для разложения $\Omega_2(z)$ при $z \rightarrow \infty$ кривые L^\pm деформируем в лучи L_1^\pm , параллельные лучам $\arg t = \pm \eta_0/2\alpha$, и применяем теорему 14.2. Получаем

$$\Omega_2(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} c_{km} z^{-k-\beta}, \quad (29.13)$$

где

$$c_{km} = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \left[- \int_{L_1^+} \frac{t^{\lambda+\alpha k} \ln^m t}{1-e^{-2\pi t}} dt + \int_{L_1^-} \frac{t^{\lambda+\alpha k} \ln^m t}{e^{2\pi t}-1} dt \right]. \quad (29.14)$$

Разложение для f_m следует из (29.11) — (29.13).

Пусть $\lambda + \alpha k > 0$. Тогда в (29.14) L_1^+ и L_1^- можно деформировать по лучам на мнимой оси. После преобразований с учетом (24.78) имеем

$$c_{k0} = -2 \sin [\pi(\lambda + \alpha k)/2] \Gamma(\lambda + \alpha k + 1) \zeta(\lambda + \alpha k + 1) (2\pi)^{-\lambda - \alpha k - 1} = \\ = \zeta(-\lambda - \alpha k); \quad c_{km} = \frac{d^m}{d\lambda^m} \zeta(-\lambda - \alpha k). \quad (29.15)$$

При $\lambda + \alpha k = 0$ применим в (29.15) предельный переход, а при $(\lambda + \alpha k) \in (-1, 0)$ — аналитическое продолжение.

Если $c_{km} = 0$, то это еще не значит, что $f_m(z, \lambda, \alpha, \beta) \equiv \Omega_1(z)$. Например, можно доказать [171], что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 + x} = -\frac{1}{2x} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}x^{3/4}} \frac{\operatorname{sh}(\pi\sqrt{2}\sqrt{x}) + \sin(\pi\sqrt{2}\sqrt{x})}{\operatorname{ch}(\pi\sqrt{2}\sqrt{x}) - \cos(\pi\sqrt{2}\sqrt{x})}, \quad x > 0.$$

Здесь $m=0$, $c_{k0}=0$ при $k>0$.

29.1.3. Преобразование Лапласа обычно применяется согласно общей схеме в (29.1). Пусть $F(k, t) \doteq f(k, p)$. Тогда имеем либо

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \sum_{k=1}^{\infty} f(k, p) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} G(p) dp, \quad (29.16)$$

либо

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{k=0}^{\infty} F(k, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} H(t) dt. \quad (29.17)$$

Если функцию $G(p)$ или $H(t)$ можно выразить в явном виде, то далее применяются известные приемы, изложенные в § 16, 18, 22, 31 и 32. При этом нередко и интегралы, стоящие в правых частях (29.16) и (29.17), можно выразить в явном виде с помощью известных функций. Таким образом, не только просуммированы ряды (29.16) и (29.17), но и указан другой путь к исследованию асимптотики суммы ряда. Много примеров суммирования рядов с помощью преобразования Лапласа приведено в [141]. Рассмотрим примеры.

1°. Используя степенной ряд для функции Бесселя, из (29.16) будем иметь

$$t^{v/2} J_v(2\sqrt{t}) \doteq p^{-v-1} e^{-1/p}, \quad v > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (29.18)$$

Затем в силу (29.16) и (29.18) при $x > -1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k/k!) x^k t^{(v+k)/2} J_{v+2k}(2\sqrt{t}) \doteq p^{-v-1} e^{-(1+x)/p} \doteq [t/(1+x)]^{v/2} \times \\ \times J_v(2\sqrt{(1+x)t}).$$

Если обозначить $2\sqrt{t} = z$, а затем $-xz/2 = y$, то получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k/k!) y^k J_{v+k}(z) = [z/(z+2y)]^{v/2} J_v(\sqrt{z^2+2yz}). \quad (29.19)$$

Эта формула получена при $z > 0$, $z+2y > 0$, но по принципу аналитического продолжения она распространяется на все z и y . Из (29.19) нетрудно найти асимптотическое разложение суммы ряда при $z \rightarrow \infty$ или $y \rightarrow \infty$.

2°. Трудно найти прямой метод построения асимптотического представления при $t \rightarrow \infty$ для интеграла

$$F(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^\infty \frac{t^{\tau\beta} {}_1F_1(1; \alpha+1+\tau; t)}{\Gamma(\alpha+\tau+1)} d\tau, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1. \quad (29.20)$$

По формулам (22.111) и (29.16) при $\operatorname{Re} p > 1$ имеем

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(t, \beta, \alpha+k) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} p^{-\alpha-k-1} (\ln p)^{-\beta-1} = \\ = p^{-\alpha} (\ln p)^{-\beta-1} (p-1)^{-1} = f(p).$$

Пусть $\beta \in \mathbb{N}$. Тогда согласно § 22 следует учитывать лишь точку ветвления функции $f(p)$ при $p=1$. В силу формулы Нёрлунда (20.28) в окрестности $p=1$ имеем

$$f(p) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j^{(j-\beta)}(1-\alpha)}{j!} (p-1)^{j-\beta-1},$$

поэтому согласно (22.43) получаем разложение

$$F(t) \sim \frac{e^t}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j^{(j-\beta)}(1-\alpha)}{j!} \sin \pi(j-\beta) \Gamma(j-\beta) t^{-j+\beta}, \quad (29.21)$$

которое справедливо при $|\arg t| \leq \pi/2 - \eta$. Случай $\beta \in N$ оставляем читателю.

3°. Иногда с помощью обращения преобразования Лапласа ряд преобразуется в асимптотический ряд иным методом. Он состоит в том, что к обращению преобразования применяются два различных приема, дающих разные ряды. Часто этот метод используется при решении с помощью преобразования Лапласа смешанных задач для уравнений параболического типа. В качестве примера рассмотрим

$$f(p) = AI_0(r\sqrt{p})/pI_0(\sqrt{p}), \operatorname{Re} p > 0, r \in (0, 1). \quad (29.22)$$

Эта функция является частным случаем (22.94) при $\nu=0$, $\alpha=\beta=0$, $a=1$.

Если путь интегрирования в интеграле обращения передвинуть влево, то методом вычетов получим ряд

$$F(t) = A \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) / \lambda_n J_1(\lambda_n) \right], \quad (29.23)$$

где $J_0(\lambda_n) = 0$. Этот ряд является асимптотическим при $t \rightarrow \infty$, но при малых t сходится медленно. Его можно преобразовать в другой ряд, если к (29.22) применить теорему 22.10. Поскольку при $|p| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \geq \gamma > 0$ имеем

$$I_0(r\sqrt{p})/pI_0(\sqrt{p}) \sim e^{-(1-r)\sqrt{p}} \sum_{h=0}^{\infty} b_h(r) p^{-h/2-1},$$

то согласно (22.65) при $t \rightarrow +0$

$$F(t) \sim (A/\sqrt{\pi r}) e^{-(1-r)^2/4t} \sum_{h=0}^{\infty} b_h(r) 2^{h+1} H_{-h-1}[(1-r)/2\sqrt{t}] t^{h/2}. \quad (29.24)$$

Формулы (29.23) и (29.24) дают требуемое преобразование.

4°. Отметим еще следующее применение преобразования Лапласа, соответствующее общей формуле (29.1). Пусть $a(p) \doteq \doteq F(t)$, $G(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} g_h(t) x^h$, где ряд сходится при $|x| < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\infty} (\pm 1)^h a(k) g_h(t) &= \sum_{h=1}^{\infty} (\pm 1)^h g_h(t) \int_0^{\infty} e^{-k\tau} F(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} F(\tau) G(\pm e^{-\tau}, t) d\tau = \int_0^1 F(\ln 1/u) u^{-1} G(\pm u, t) du, \quad (29.25) \end{aligned}$$

если можно оправдать изменение порядка интегрирования и суммирования. В частности, (29.25) справедливо, если $|\sum_{k=0}^n (\pm 1)^k g_k(t)| < M$, $n \in N$. Например, из (29.25) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a(k) \sin kt &= \sin t \int_0^1 \frac{F(\ln 1/u)}{1-2u \cos t + u^2} du, \\ \sum_{k=1}^{\infty} a(k) \cos kt &= \int_0^1 \frac{(\cos t - u) F(\ln 1/u)}{1-2u \cos t + u^2} du, \end{aligned} \quad (29.26)$$

и в силу (29.19)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a(k) J_k(t)/k! = \int_0^1 F(\ln 1/u) u^{-1} J_0(\sqrt{t^2 + 2ut}) du. \quad (29.27)$$

При конкретных $F(t)$ нередко можно построить асимптотическое разложение интеграла (29.25). В качестве примера при $z = e^{i\varphi}$, $x > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\varphi \neq 0$ рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k^2 + x^2}} = \int_0^{\infty} J_0(xt) \frac{ze^{-t}}{1 - ze^{-t}} dt.$$

Эту формулу можно обосновать, если правую ее часть разбить по интервалам $[0, 1]$, $[1, \infty)$. При $|t| < |\varphi|$ имеем $(1 - ze^{-t})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(z) t^k$. Согласно (27.41) $D_k(z) = g_k(z, 0)/k!$. Для вычисления D_k можно также использовать формулу

$$D_k = (z/(1-z)) \sum_{j=1}^k (-1)^j D_{k-j}/j!, \quad D_0 = 1/(1-z).$$

Коэффициенты $D_k(z)$ и их обобщения исследованы в [174]. Согласно (10.92) с учетом (10.81) при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k^2 + x^2}} &\sim z/(1-z) x + (1/\pi) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 2^{2m} \times \\ &\times D_{2m}(z) \Gamma^2(m + 1/2) x^{-2m-1}. \end{aligned} \quad (29.28)$$

С помощью (29.28) можно разложить также $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{k^2+x^2}}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{\sqrt{k^2+x^2}}$.

29.1.4, 1°. Общая схема (29.1) применяется во многих случаях. Например, в работе [115] интегральное представление рядов Неймана $\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_{\nu+k}(z)$ получено с помощью формулы (7.3.4.9) из [2] для $J_{\nu+k}(z)$ и формул для суммирования рядов Фурье. В качестве примеров приводим

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} J_k(z) = (-1/\pi) \int_0^{\pi} [\cos(z \sin t) \ln(2 \sin(t/2)) - ((\pi-t)/2) \sin(z \sin t)] dt,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k k^{-2} J_{2k}(z) = (2/\pi) \int_0^{\pi/2} (\pi^2/6 - \pi t + t^2) \cos[z \sin(t + \pi(1-\varepsilon)/4)] dt, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x^k/k!) J_{k+m}(z) = (1/\pi) \int_0^{\pi} e^{x \cos t} \cos(mt - (z-x) \sin t) dt,$$

$$m \in N, \quad x \neq 0.$$

Последнюю формулу целесообразно сравнить с (29.19). С помощью интегралов, стоящих в правых частях этих формул, можно найти асимптотику рядов при $z \rightarrow \infty$.

2°. В качестве другого примера рассмотрим доказательство формул (29.6) и (29.6'). Согласно определению Γ -функции при $\operatorname{Re} s > 1, a > 1$ имеем

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(k+a)} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-t(a-1)}}{e^t - 1} dt. \quad (29.29)$$

Поскольку $\zeta(s, a) = g_{-s}(1, a)$, то (29.29) является частным случаем (27.41'). Для исследования асимптотики $\zeta(s, a)$ при $s \rightarrow -1 + 0$ формула (14.40') непосредственно не применяется. Вначале целесообразно использовать тождество

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t(a-1)} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) dt + \frac{1}{(s-1)(a-1)^{s-1}}. \quad (29.29')$$

Затем первый интеграл при $s \rightarrow 1 + 0$ следует разложить согласно (14.40'). Получим

$$\zeta(s, a) \sim \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k(a) (s-1)^k}{k!} + \frac{1}{s-1} \left[1 - \ln(a-1)(s-1) + \sum_{h=2}^{\infty} (-1)^h \frac{\ln^h(a-1)}{h!} (s-1)^h \right] = \frac{1}{s-1} + \sum_{h=0}^{\infty} c_h(a) (s-1)^h, \quad (29.30)$$

где

$$\mu_k(a) = \int_0^{\infty} e^{-t(a-1)} \left[\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right] \ln^k(t) dt.$$

Отсюда, по формулам из работы [109], $\mu_0(a) = \ln(a-1) - \psi(a)$, $c_0(a) = -\psi(a)$. Разные методы для вычисления $c_h(1)$ указаны в работе [428]. Поскольку функция $\zeta(s, a) - (s-a)^{-1}$ аналитична в окрестности $s=1$ [это видно из (29.29')], то в силу единственности разложения ряд (29.30) одновременно является сходящимся рядом Тейлора.

При $s \in N_1$ вместо формулы (29.29) согласно (27.41) берем

$$\zeta(s, a) = \frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} \frac{t^{s-1} e^{-t(a-1)}}{e^t - 1} dt. \quad (29.31)$$

Отсюда следует аналитическая продолжимость функции $\zeta(s, a)$ во всей s -плоскости. Формула (29.31) остается справедливой при $\operatorname{Re} a > 0$. Пусть $s = -n$, $n \in N$. Тогда путь интегрирования можно деформировать в окружность с центром в начале, а интеграл вычислять как вычет. Согласно (9.44) и (9.49) будем иметь (29.6').

Кроме того, деформируя путь через полюсы $2k\pi i$, $|k| \in N$, при $\operatorname{Re} s < 1$, $a \in (0, 1)$ можно получить формулу Гурвица [217]

$$\zeta(s, a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left[\sin(\pi s/2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi a}{k^{1-s}} + \cos(\pi s/2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi a}{k^{1-s}} \right], \quad (29.32)$$

откуда с учетом (9.97) снова следует (29.6'). При $a=1$ (29.32) превращается в (24.78). Более подробный вывод формулы

(29.32) можно найти в [2, 18]. Она одновременно является примером преобразования рядов с помощью интеграла. Другие свойства $\zeta(s, a)$ приведены в [2, 18].

3°. Рассмотрим еще следующий пример. Согласно [109] при $\nu > -1/2$, $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (-1)^k J_\nu(kt)/(kt/2)^\nu = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \times \\ & \times \int_0^{\pi/2} \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt \sin x) \cos^{2\nu} x dx = \\ & = -\frac{1}{2\Gamma(\nu+1)} + \frac{2(-1)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos[(n+1/2)t \sin x]}{\cos[(t \sin x)/2]} \cos^{2\nu} x dx. \end{aligned} \quad (29.33)$$

Если $t \in (0, \pi)$, то, по лемме Римана, интеграл стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$f_\nu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_\nu(kt)/(kt/2)^\nu = -1/[2\Gamma(\nu+1)]. \quad (29.34)$$

Если в сумме (29.33) множитель $(-1)^k$ заменить на $\cos k\alpha$, то аналогично получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\alpha J_\nu(kt)/(kt/2)^\nu = \begin{cases} -\frac{1}{2\Gamma(\nu+1)} & \text{при } 0 < t < \alpha < \pi, \\ -\frac{1}{2\Gamma(\nu+1)} + \frac{\sqrt{\pi}}{t\Gamma(\nu+1/2)} (1 - \alpha^2/t^2)^{\nu-1/2} & \text{при } 0 \leq \alpha < t < \pi. \end{cases} \quad (29.35)$$

Правая часть (29.34) дает асимптотическое представление $f_\nu(t)$ при $t \rightarrow +0$. Из (29.33) следует, что ряд при $t=0$ расходится, что не вытекает из асимптотического представления. При $t \in (2m-1)\pi, (2m+1)\pi$, $m \in N_1$, из (29.33) и теории рядов Фурье следует, что

$$\begin{aligned} f_\nu(t) &= -1/[2\Gamma(\nu+1)] + 2\sqrt{\pi}/[t\Gamma(\nu+1/2)] \times \\ & \times \sum_{k=1}^m [1 - (2k-1)^2\pi^2/t^2]^{\nu-1/2}. \end{aligned} \quad (29.36)$$

При $t \in (2m\pi, 2m\pi + 2\pi)$ аналогично или иными способами [182, 256] можно доказать формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\nu}(kt)}{(kt/2)^{\nu}} = -\frac{1}{2\Gamma(\nu+1)} + \frac{2\sqrt{\pi}}{t\Gamma(\nu+1/2)} \times \\ \times \left[1/2 + \sum_{k=1}^m (1 - 4k^2\pi^2/t^2)^{\nu-1/2} \right]. \quad (29.37)$$

Выражения подобного типа для более общих рядов по цилиндрическим функциям можно найти в [163, 256]. Разные другие результаты относительно рядов Шлемильха разбросаны в литературе, указанной в [2].

29.2. Применение суммационных формул

29.2.1. При исследовании асимптотики суммы ряда часто применяются суммационные формулы аналогично как в § 27. Исходным пунктом для применения формулы Эйлера—Маклорена является соотношение (9.92), однако его целесообразно обобщить. Следует отметить, что (9.92) справедливо и при отрицательных x , если соответственно изменить допустимые значения для n . Кроме того, $h(t)$ может зависеть от комплексного параметра $z \in \mathbb{Z}$. Заменим в (9.92) x на $x_1 > x$ и вычтем одно выражение из другого. Получим

$$\sum_{k=[x]+1}^{[x_1]} h(k, z) = \int_x^{x_1} h(t, z) dt + \sum_{k=0}^m (-1)^k [\sigma_{k+1}(x) h_k(x, z) - \\ - \sigma_{k+1}(x_1) h_k(x_1, z)] + (-1)^m \int_x^{x_1} \sigma_{m+1}(t) h_{m+1}(t, z) dt, \quad (29.38)$$

где $h_k(t, z) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} h(t, z)$. Отсюда непосредственно следует

Теорема 29.1. Пусть при всех $z \in \mathbb{Z}$ 1) $h(t, z) \in C^{\infty}[x, \infty)$; 2) $h_k(t, z) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$; 3) ряд в левой части и интегралы в правой части (29.38) при фиксированном x сходятся, если $x_1 \rightarrow \infty$; 4) функции $h_k(x, z)$ образуют асимптотическую шкалу при $z \rightarrow z_0 \in \mathbb{Z}$; 5) остаток в (29.38) имеет требуемую оценку. Тогда при $z \rightarrow z_0$

$$\sum_{k=[x]+1}^{\infty} h(k, z) \sim \int_x^{\infty} h(t, z) dt + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sigma_{k+1}(x) h_k(x, z). \quad (29.39)$$

Часто в (29.39) берется $x=0$. Тогда $\sigma_{2m+1}(0)=0$, $\sigma_{2m}(0)=B_{2m}/(2m)!$, $\sigma_1(0)=-1/2$, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k, z) \sim (1/2)h(0, z) + \int_0^{\infty} h(t, z) dt - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h_{2k-1}(0, z). \quad (29.40)$$

Величины $h_{2k-1}(0, z)$ иногда можно найти из формулы Тейлора для $h(t, z)$ относительно t .

Если члены ряда в (29.39) не образуют шкалу (что бывает нередко), то часто формулу (29.38) можно применить при $m=0$, $x_1=\infty$ и попытаться либо разложить последний интеграл в (29.38) как интеграл с периодическим ядром (см. п. 30.4 и 31.5), либо получить лишь для него некоторую оценку. Примеры к последнему случаю приведены в § 27 для степенных рядов и в п. 29.2.2, 29.5.1 и 29.5.2.

Некоторая модификация приведенных формул следует из формулы Абеля—Плана (24.87) или (29.9), если при каждом $z \in \mathbb{Z}$ $h(t, z) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} t \geq \sigma$ и $h(t, z)$ аналитична относительно t в этой полуплоскости, за исключением изолированных особых точек однозначного характера. В этих формулах остаток имеет иное интегральное представление, чем интеграл в правой части (29.38) при $x_1=\infty$, $m=0$. Иногда такое представление удобнее для получения оценки остатка. Пример приведен в п. 29.5.3. Если для интегралов, стоящих в упомянутых формулах, построить асимптотические разложения, то получим ряд, аналогичный (29.39), но при более жестких условиях, которые приведены в п. 24.6.3, 1°.

Можно использовать также другие модификации и обобщения формулы Эйлера—Маклорена, имеющиеся в литературе.

Проверить выполнение условия 5) теоремы 29.1 не всегда легко, так как $\sigma_{m+1}(t)$ — периодическая функция. Иногда для этого достаточно применить оценку $|\sigma_{2k}(t)| \leq 4(2\pi)^{-2k}$, которая следует из (9.97). Однако оценка, полученная таким способом, может оказаться весьма грубой. В качестве примера рассмотрим частный случай функции (29.10) при $x \rightarrow +\infty$:

$$f_0(x, p, n, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^p}{(x+k^n)^\beta}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad \beta > 0, \quad n\beta - p > 1. \quad (29.41)$$

Имеем $h(t, x) = t^p (x+t^n)^{-\beta}$,

$$\int_0^{\infty} h(t, x) dt = (1/n) x^{(p+1)/n - \beta} B((p+1)/n, \beta - (p+1)/n).$$

Методом индукции можно оценить $h_{2m}(t, x)$ и с учетом приведенной оценки для $\sigma_{2k}(t)$ — доказать, что

$$\int_0^{\infty} \sigma_{2m}(t) h_{2m}(t, x) dt = O(x^{-(p+1-2m)/n-\beta}).$$

Эта оценка достаточна для справедливости (29.13), но она получается весьма грубой, так как соответствует другой шкале.

Рассмотрим еще при $x \rightarrow 1-0$ модифицированный ряд Ламберта

$$\chi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\Theta)^p x^{\alpha(k+\Theta)} (1-x^{k+\Theta})^q, \quad (29.42)$$

$\Theta \in [0, 1]$; $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$. Положим $x = e^{-y}$, $y \rightarrow +0$. Тогда $h(t, y) = (t+\Theta)^p e^{-\alpha(t+\Theta)y} (1-e^{-(t+\Theta)y})^q$. Берем в (29.39) $x = -\Theta$. Получаем

$$\chi(e^{-y}) \sim \int_0^{\infty} t^p e^{-\alpha t y} (1-e^{-t y})^q dt + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sigma_{k+1}(-\Theta) h_k(-\Theta, y). \quad (29.43)$$

Интеграл в (29.43) равен

$$(-1)^p y^{-p-1} \frac{d^p}{d\alpha^p} \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^q d\tau = (-1)^p y^{-p-1} \frac{d^p}{d\alpha^p} B(\alpha, q+1).$$

Функцию $h_k(-\Theta, y)$ легко найти согласно (9.44). Нетрудно также получить требуемую оценку остатка. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \chi(e^{-y}) &\sim (-1)^p y^{-p-1} \frac{d^p}{d\alpha^p} B(\alpha, q+1) - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k(-q)(\alpha) B_{k+p+q+1}(\Theta)}{k!(p+q+k+1)} y^{k+q}. \end{aligned} \quad (29.44)$$

Разложения при других условиях относительно q можно найти в [177]. В частности, при $q = -1$, $p = 0$, $\Theta \in (0, 1]$, $y \rightarrow +0$, $x \rightarrow 1-0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha(k+\Theta)}}{1-x^{k+\Theta}} &\sim -\frac{\ln y}{y} + \frac{1}{y} [\psi(\Theta) - \psi(\alpha) + \psi(1)] - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!k} B_k(\Theta) B_k(\alpha) y^{k-1}. \end{aligned} \quad (29.45)$$

Вывод этого соотношения основан на равенстве $e^{-z}(1-e^{-z})^{-1} = z^{-1} + G(z)$ и предельном переходе при $x_1 \rightarrow \infty$ в формуле (29.38). При $\alpha = \Theta = 1$ этот результат получен Шлемильхом [280].

Как видно из примеров, ограничения относительно параметров связаны с условиями 1) и 3) теоремы 29.1. С помощью теории нейтрис можно построить более общую формулу, чем (29.39), и освободиться от указанных ограничений [176].

29.2.2. Теорема 29.2. Пусть при каждом $x \in X$ 1) ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-g(k, x)} \quad (29.46)$$

сходится; 2) уравнение $g_1(t, x) = 0$ имеет единственное решение $t_0(x) > 0$; 3) $g_2(t, x) \geq 0$ при $t \geq 0$, $g_2(t_0(x), x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0 \in \bar{X}$; 4) можно найти такую функцию $\omega(x) > 0$, что при $x \rightarrow x_0$

$$\omega^2(x) g_2(t_0, x) \rightarrow \infty, \quad g_2(t_0 + \vartheta \omega, x) = g_2(t_0, x) [1 + o(1)], \quad (29.47)$$

где $o(1)$ равномерно относительно $\vartheta \in [-1, 1]$; 5) $e^{-g(0, x)} = o(e^{-g(t_0(x), x)})$. Тогда при $x \rightarrow x_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-g(k, x)} = \sqrt{2\pi/g_2(t_0, x)} e^{-g(t_0, x)} [1 + o(1)]. \quad (29.48)$$

Если $g_2(t_0, x) \rightarrow \kappa > 0$, $t_0(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-g(k, x)} = e^{-g(t_0, x)} \sum_{k=0}^{\infty} \exp[-\kappa(t_0 - k)^2/2] [1 + o(1)]. \quad (29.49)$$

Доказательство аналогично доказательствам формул (27.38), (27.90) и (27.90'). Из условия 1) следует, что $g(t, x) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Согласно (29.38) при $x_1 = \infty$, $x = 0$, $m = 0$ имеем

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-g(t, x)} dt - \int_0^{\infty} \sigma_1(t) e^{-g(t, x)} g_1(t, x) dt + (1/2) e^{-g(0, x)}.$$

Первый интеграл в правой части этой формулы в силу условий 1)–4) сходится и согласно теореме 17.3 имеет асимптотическое представление (29.48). Если второй интеграл приведенной выше формулы разбить по интервалам $[0, t_0]$, $[t_0, \infty]$, то согласно условию 3) с учетом $|\sigma_1(t)| \leq 1/2$ для данного интеграла получим оценку

$$(1/2) [e^{-g(t_0, x)} - e^{-g(0, x)} + e^{-g(t_0, x)}] = e^{-g(t_0, x)} [1 + o(1)] = o(e^{-g(t_0, x)} \sqrt{1/g_2(t_0, x)}).$$

Отсюда в силу $e^{-g(0,x)} = o(e^{-g(t_0,x)})$ следует (29.48). Формула (29.49) доказывается аналогично (27.90'). \blacksquare

Примечание. С помощью результатов, полученных в § 21, теорему 29.2 можно перенести на случай комплексного x . Кроме того, согласно § 17 возможны различные модификации этой теоремы. В частности, под знак суммы в (29.49) можно включить множитель $h(k, x)$ (см. также п. 29.3.4, 4°). Отметим еще, что эта теорема выражает в замкнутом виде выделение центральной части ряда.

В качестве примера рассмотрим $d_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} k^n/k!$, встречающийся в п. 25.5.2, 4°. Имеем $g(t, n) = \ln \Gamma(t+1) - n \ln t$, $g_1(t, n) = -\psi(t+1) - n/t$, $g_2(t, n) = \psi'(t+1) + n/t^2$. Критическая точка $t_0(n)$ определяется из уравнения $t_0 \psi(t_0+1) = n$, $t_0(n) = (n/\ln n) [1 + o(1)]$. Легко проверить, что все условия теоремы 29.2 удовлетворены при $\omega = \sqrt[3]{n}$. Поэтому согласно (29.48) с учетом (9.51) и асимптотики для $t_0(n)$ имеем

$$d_n = e^{-1} (\sqrt[3]{2\pi n/\ln n}) [t_0^n/\Gamma(t_0+1)] (1+o(1)). \quad (29.50)$$

В последнем множителе t_0 нельзя заменить его асимптотическим выражением.

Аналогично при $\alpha > 1$, $x \rightarrow +\infty$ доказывается

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^x}{k^\alpha} \sim \int_1^{\infty} \frac{(\ln t)^x}{t^\alpha} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-1)u} u^x du = \Gamma(x+1) (\alpha-1)^{-x-1}. \quad (29.51)$$

Асимптотика ряда $e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)^{n-\beta}/k!$ при $n \rightarrow \infty$ с помощью выделения центральной суммы рассмотрена в [135].

29.2.3. Нередко применяется преобразование ряда с помощью формулы Пуассона (27.35):

$$h(0, z)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} h(\alpha k, z) = 1/\alpha \left[H(0, z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} H(2k\pi/\alpha, z) \right], \quad (29.52)$$

так как функцию

$$H(u, z) = \int_0^{\infty} h(t, z) \cos ut dt \quad (29.53)$$

можно вычислить в явном виде при многих конкретных $h(t, z)$. Если (29.53) разложить по степеням u^{-1} согласно (8.25), то после преобразований с учетом (9.97) получим формулу

Эйлера—Маклорена. Иногда формула (29.52) непосредственно дает требуемое асимптотическое разложение.

Можно применять также разные модификации и обобщения формулы Пуассона. О некоторых из них сказано в п. 27.3.4. Кроме того, как формулу (29.52), так и ее модификации, например (29.58), иногда можно применять для исследования асимптотики конечных сумм. Этот метод дополняет методы, приведенные в п. 24.6.

Рассмотрим примеры к (29.52).

1°. Пусть при $x > 0$ $h(t, x) = e^{-t^2/x} \cos 2tv$, $\alpha = \pi$. Тогда $H(u, x)$ можно найти согласно (24.98). После преобразований получим соотношение

$$\begin{aligned} & 1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2x} \cos 2k\pi v = \\ & = (1/2\sqrt{\pi x}) \left(e^{-v^2/x} + \sum_{k=1}^{\infty} [e^{-(v+k)^2/x} + e^{-(v-k)^2/x}] \right), \end{aligned} \quad (29.54)$$

которое совпадает с (27.97) и напоминает (29.23), (29.24). Ряд одновременно дает асимптотическое разложение при $x \rightarrow +0$. При $v=0$ (29.54) дает уточнение (29.3) в случае $\beta=2$.

2°. Рассмотрим случай, когда (29.52) применяется исходя из ее правой стороны. В конце п. 16.2.3 упоминается интеграл

$$\Omega_n(b) = (2/\pi) \int_0^{\infty} (\sin t/t)^n \cos btdt, \quad (29.55)$$

асимптотическое разложение которого при большом n находится методом Лапласа. Оно приведено в [244]. Если $b \sim \beta n$, $\beta > 0$, то это разложение неприменимо. Известно [7], что при $b > n$ $\Omega_n(b) = 0$. Берем в формуле (29.52) $h(t, n) = (\sin t/t)^n$, $\alpha = 2\pi/b$. Тогда согласно (29.52) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_n(kb) &= (1/b) [1 + 2(b/2\pi)^n \sum_{k=1}^{\infty} [k^{-1} \sin(2k\pi/b)]^n] - \\ &- (1/2) \Omega_n(0). \end{aligned} \quad (29.56)$$

Если $b \in (n/2, n)$, то в левой части (29.56) имеем только $\Omega_n(b)$ и ряд в ее правой части дает асимптотическое разложение этой функции при $n \rightarrow \infty$. При $b \in (n/3, n/2)$ построенное разложение используется для $\Omega_n(2b)$, а $\Omega_n(b)$ можно выразить из (29.56) с помощью $\Omega_n(2b)$. Аналогично (29.56) применяется при других $b < n$.

3°. Не всегда формула (29.52) дает асимптотическое разложение. Пусть $h(t, z) = (tz/2)^\nu K_\nu(tz)$, $\nu > 0$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \eta$. Согласно [294] имеем

$$\begin{aligned} H(u, z) &= \int_0^\infty (tz/2)^\nu K_\nu(tz) \cos ut dt = \\ &= (\sqrt{\pi}/2) \Gamma(\nu + 1/2) z^{2\nu} / (z^2 + u^2)^{\nu+1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом $h(+0, z) = \Gamma(\nu)/2$ согласно (29.52) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty (kz/2)^\nu K_\nu(kz) &= -\Gamma(\nu)/4 + \\ + (\sqrt{\pi}/2) \Gamma(\nu + 1/2) z^{2\nu} &\left[z^{-2\nu-1} + 2 \sum_{k=1}^\infty (z^2 + 4\pi^2 k^2)^{-\nu-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (29.57)$$

Ряд в правой части (29.57) не является асимптотическим ни при $z \rightarrow \infty$, ни при $z \rightarrow 0$. Однако при $z \rightarrow \infty$ его асимптотическое разложение можно найти по формулам (29.11) — (29.13), если взять $m = \lambda = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = \nu + 1/2$ и z заменить на $z^2/4\pi^2$. При $z \rightarrow 0$ асимптотическое разложение получаем из (29.59).

При $\nu = 0$ ряд в правой части (29.57) расходится. Но в тождестве

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{1}{(z^2 + 4\pi^2 k^2)^{\nu+1/2}} - \frac{1}{(2\pi k)^{2\nu+1}} \right] + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{2\nu+1}} \zeta(2\nu + 1) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(z^2 + 4\pi^2 k^2)^{\nu+1/2}} \end{aligned}$$

ряд в левой его части сходится также при $\nu = 0$, поэтому

$$\sum_{k=1}^\infty K_0(kz) = (\pi/2) \left[z^{-1} + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + 4\pi^2 k^2}} - \frac{1}{2\pi k} \right) \right] + A_0(z),$$

где

$$\begin{aligned} A_0(z) &= (1/2) \lim_{\nu \rightarrow +0} \left[\frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2) z^{2\nu}}{(2\pi)^{2\nu+1}} \zeta(2\nu + 1) - \Gamma(\nu)/2 \right] = \\ &= (1/2) [\ln(z/4\pi) - \psi(1)]. \end{aligned}$$

При вычислении $A_0(z)$ применяются (29.30) и формула $\psi(1/2) = = \psi(1) - 2 \ln 2$, которая следует из (29.66), (29.67).

4°. Соотношение (29.52) можно рассматривать как формулу трапеций для интеграла $\int_0^{\infty} h(t, z) dt$, где погрешность задана бесконечным рядом. В случае конечного промежутка интегрирования существуют более подходящие формулы для исследования асимптотики погрешности квадратурных формул. С помощью ряда Фурье в комплексной форме легко доказать следующую модификацию формулы Пуассона [237]:

$$\sum_{k=1}^n a_k h(t_k) - \int_0^1 h(t) dt = \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \int_0^1 h(t) e^{i2\pi m t} dt \sum_{k=1}^m a_k e^{-i2\pi m t_k}. \quad (29.58)$$

В случае формул трапеций (29.58) можно успешно применить для асимптотического разложения погрешности при $n \rightarrow \infty$. В итоге получим модификацию формулы Эйлера—Маклорена [237]. Другой подход к той же задаче — применение некоторых модификаций формулы Абеля—Плана — предложен в [99, 174]. В работе [163] формулы Пуассона и Эйлера—Маклорена обобщаются в том случае, когда к членам $h(k)$ добавляются периодически повторяющиеся коэффициенты a_k . На основе этого обобщения в [163] получены модификации для разложений разных типов, в частности для (29.8), (29.37) и (29.57).

29.3. Применение некоторых других методов и дополнения

29.3.1. Иногда к асимптотическому разложению ряда при $z \rightarrow 0$ можно непосредственно применить формулу Тейлора. Независимо от свойств сходимости полученный ряд согласно (3.16') является асимптотическим разложением. Рассмотрим примеры.

1°. Для функции (29.10) при $z \rightarrow 0$ получаем

$$f_m(z, \lambda, \alpha, \beta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} (\beta)_k}{k!} \zeta^{(m)}(\alpha\beta + \alpha k - \lambda) z^k. \quad (29.59)$$

Полученный ряд сходится при $|z| < 1$.

2°. Рассмотрим при $x \geq 0$ функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k^\beta} \cos(k^\lambda x), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0. \quad (29.60)$$

Легко видеть, что при $x \rightarrow 0$

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_m x^{2m}}{(2m)!}, \quad c_m = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k^\beta} k^{2m\lambda}. \quad (29.61)$$

Сходимость ряда (29.61) зависит от отношения λ/β . Имеем $c_m > \max_k (e^{-\alpha k^\beta} k^{2m\lambda}) \sim (2m\lambda/e\alpha\beta)^{2m\lambda/\beta}$, $(2m)! \sim 2\sqrt{\pi m} (2m/e)^{2m}$, поэтому ряд (29.61) расходится, если $\lambda/\beta > 1$. При $\beta \in [1, 2)$ можно применить теорему 29.2, согласно которой k у указанной выше оценке для c_m добавляется множитель $O(m^{1/\beta-1/2})$. Поэтому при $\lambda/\beta < 1$, $\beta \in [1, 2)$ ряд (29.61) сходится, если $|x| < 1$.

29.3.2. Применение формулы Пуассона является лишь одним из многих способов для преобразования ряда в другой ряд. Простейшим стандартным методом преобразования кроме уже рассмотренного приведения к интегральному представлению является переход к двойному ряду и изменение порядка суммирования. При этом часто выполняются формальные действия с расходящимися рядами. К их обоснованию следует привлечь теоремы, приведенные в § 5 и относящиеся к преобразованию асимптотических рядов. Нередко применима теорема 5.6 или же ее обобщение — лемма 28.1 (с учетом примечаний к ней). Основной задачей в лемме 28.1 является проверка выполнения ее условий 3) и 4), что иногда вызывает значительные затруднения. Эта задача облегчается, если остаток асимптотического ряда удастся представить в виде интеграла, для оценки которого имеются различные методы.

Пример к использованию леммы 28.1 приведен в п. 29.4.3. Применение примечания 3° к лемме 28.1 можно найти в [98, 221]. Отметим, что лемма 28.1 не всегда приводит к полному асимптотическому разложению. В качестве примера рассмотрим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+k/z)}{z+k^4} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z+k^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho(z, k)}{z+k^4}. \quad (29.62)$$

В силу равенства $\ln(1+z) = \int_0^z \frac{dt}{1+t}$ при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ имеем

$|\ln(1+z) - z| \leq |z|^2/2M$, поэтому $|\rho(z, k)| \leq k^2/|z|^2 2M$, $M = \sin \varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, \pi/2]$, $M = 1$ при $\varepsilon \in [\pi/2, \pi]$. Согласно неравенству $|z+k^4| \geq k^4 M$ и (29.12) при $z \rightarrow \infty$ получаем $f(z) = \pi/4z^{3/2} + O(z^{-2})$. Улучшить этот результат с помощью леммы 28.1 нельзя. Полное разложение получается при использовании формулы Эйлера—Маклорена.

Ниже рассмотрим лишь несколько простых примеров к применению преобразования рядов для асимптотического разложения суммы ряда. Подробному анализу данного вопроса следовало бы посвятить отдельную главу.

1°. Преобразование в степенной ряд.

А. Пусть $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, $|t| < R$. Тогда при $|\beta| < R$, $\alpha \in (0, 1]$, $\lambda \neq 0$, $z \rightarrow 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \beta^k}{(1+z\alpha^k)^\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \beta^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{j} z^j \alpha^{kj} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{j} z^j f(\beta \alpha^j). \quad (29.63)$$

Б. Пусть при $z \rightarrow 0$ $F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, и это соотношение можно сколько угодно раз почленно дифференцировать. Тогда перегруппировкой членов легко показать (см. также п. 5.3), что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k z^k F^{(k)}(z) / k! \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j (\Delta_j c_0) z^j \quad (29.64)$$

2°. Преобразование ряда в ряд обратных факториалов.

А. При $\operatorname{Re} z > 0$ имеем

$$\begin{aligned} G_{-1}(-\alpha, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k!(k+z)} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k!(k+z)} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} = \\ &= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(k+z)} = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{z(z+1) \dots (z+n)}. \end{aligned} \quad (29.65)$$

Можно также использовать равенство $G_{-1}(-\alpha, z) = \int_0^1 e^{-\alpha t} t^{z-1} dt$ и интегрировать по частям.

Б. При $|\alpha| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$ имеем

$$\begin{aligned} g_{-1}(-\alpha, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k+z} = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+\alpha t} dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+\alpha-\alpha(1-t)} dt = \\ &= \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^k \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^k dt = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^k \times \\ &\quad \times \frac{k!}{z(z+1) \dots (z+k)}. \end{aligned} \quad (29.66)$$

В (29.66) относительно α выполнено преобразование Эйлера с учетом п. 5.2.3, 3°. Из интегрального представления следует, что при рациональном z $g_{-1}(-\alpha, z)$ выражается с помощью элементарных функций. Кроме того, в силу формулы (1.3.15) из [109] имеем

$$g_{-1}(-1, z) = (1/2) [\psi((z+1)/2) - \psi(z/2)]. \quad (29.67)$$

В [2] эта функция обозначена через $G(z)$. Там же приведены некоторые ее свойства.

3°. Ряд определяет разрывную функцию.

А. Имеем при $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} x^k(1-x^k)/k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k - \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/k = \ln(1+x) = \\ &= \ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)^k}{2^k k}. \end{aligned}$$

Отсюда при $x \rightarrow 1-0$ $F(x) \rightarrow \ln 2$, однако $F(1) = 0$ и асимптотическое разложение не характеризует поведение функции в точке $x = 1$.

Б. Функция $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1-x}$ имеет бесконечное множество бес-

конечных разрывов при $x = 2m+1$, $m \in N$. Однако ее асимптотику при $x \rightarrow \infty$ можно точно задавать с помощью соотношений

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1-x} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(1-x)/2} = \frac{1}{4} \left[\psi\left(\frac{3-x}{4}\right) - \psi\left(\frac{1-x}{4}\right) \right],$$

$$\psi(1-z) = \psi(z) + \pi \operatorname{ctg} \pi z$$

и формулы (9.51). Первое соотношение следует из (29.67).

29.3.3. В формулах (29.36) и (29.37) имеем примеры функций, заданных конечной суммой, число членов которой возрастает вместе с увеличением t . Функции такого типа часто появляются при решении волнового уравнения. Они характеризуют процесс отражения бегущих волн. Если применить единичную функцию $\eta(t)$, где

$$\eta(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad \eta(t) = 1 \text{ при } t \geq 0, \quad (29.68)$$

то такие ряды обычно можно представить либо в виде

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} H(t, k) h(t - \omega_k) \eta(t - \omega_k), \quad 0 \leq \omega_k \uparrow +\infty, \quad (29.69)$$

либо, в более общем случае, в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} H(t, k) \eta(g(t) - \omega_k), \quad g(t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (29.69')$$

Общая теория рядов специальных функций, которые можно преобразовать в виде (29.69), изложена в [256].

Исследовать асимптотику функций вида (29.69) или (29.69') при $t \rightarrow +\infty$ часто весьма трудно. Грубые оценки можно получить, если в сумме резко выделяется максимальный член. Если, например, в (29.69) при $t \rightarrow +\infty$ $H(t, k) h(t - \omega_k) = O(t^{-\lambda - \varepsilon})$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, равномерно относительно k и $\omega_k \sim \alpha k^{1/\lambda}$, $\alpha > 0$, то легко видеть, что $F(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В (24.77) мы уже имели пример ряда (29.69). Если обозначить $x = 1/t$, то ряд (24.77) примет вид

$$\chi(t, \alpha, \beta, \lambda) = t^{1-\beta} \sum_{k=1}^{\infty} (t - k^\alpha)^{\beta-1} k^{-\lambda} \eta(t - k^\alpha), \quad \alpha > 0, \beta > 1. \quad (29.70)$$

Однако асимптотика для $\chi(t)$ в п. 24.6.1, 4° найдена неверно, так как ошибочно дана оценка для $\zeta(s)$ при $\operatorname{Re} s < 0$. Из (24.78) в силу (23.22) при $\sigma < 0$ легко получить оценку $\zeta(s) = O(|\tau|^{1/2-\sigma})$, $s = \sigma + i\tau$, которая соответствует (29.6''') при $a = 1$. Согласно

$$(12.62) \text{ имеем } \Gamma\left(\frac{s-\lambda}{\alpha}\right) / \Gamma\left(\frac{s-\lambda}{\alpha} + \beta\right) = O(|\tau|^{-\beta}). \text{ Поэтому (24.77)}$$

справедливо при $\operatorname{Re} s > \max(\lambda, 1)$. В силу оценок для $\zeta(s)$ путь интегрирования можно передвинуть до прямой $\operatorname{Re} s = 0$, а дальше — лишь в случае, когда $\beta > 3/2$. Тогда можно достичь прямую $\operatorname{Re} s = -\beta + 3/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. После исправления опечатки в формуле (24.80), в которой пропущен вычет в точке $s = 1$, вместо (24.80) при $t \rightarrow +\infty$, $\lambda - \alpha k \neq 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \chi(t, \alpha, \beta, \lambda) = & \left[\Gamma(\beta) \Gamma\left(\frac{1-\lambda}{\alpha}\right) / \alpha \Gamma\left(\frac{1-\lambda}{\alpha} + \beta\right) \right] t^{(1-\lambda)/\alpha} + \\ & + \Gamma(\beta) \sum_{k=0}^{k_0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\zeta(\lambda - \alpha k)}{\Gamma(\beta - k)} t^{-k} + O(t^{-(\lambda - \beta + 3/2 + \varepsilon)/\alpha}), \end{aligned} \quad (29.71)$$

где $k_0 = [\lambda/\alpha]$ при $\beta \in (1, 3/2)$, $k_0 = [(\lambda + \beta - 3/2)/\alpha]$ при $\beta > 3/2$. Преобразование Меллина и в некоторых других случаях можно применить к исследованию асимптотики рядов типа (29.69).

При $\lambda = 0$ асимптотическое разложение для функции (29.70) иногда можно получить другими методами.

1°. Если $\beta \in N_1$, $\alpha \in N_1$, то с помощью (9.48') можно найти точное выражение для (29.70), например

$$\chi(t, 2, 2, 0) = (2/3)\sqrt{t-1/2-t^{-1/2}B_2(\kappa)} + t^{-1}B_3(\kappa)/3,$$

где $\kappa = \sqrt{t-1} - [\sqrt{t-1}] \in [0, 1)$. Первые два члена этого равенства получаются также из (29.71).

2°. Если $\alpha=2$, то можно использовать (29.37), где $t^2/4\pi^2$ следует заменить на t . Асимптотическое разложение ряда Шлемильха найдется с помощью асимптотического разложения для J_ν при $t \rightarrow \infty$. Получим более точное представление для (29.70), чем (29.71).

3°. Если $\alpha \in N_1$, то можно применить формулу Эйлера—Маклорена. Однако при $\alpha \neq 1$ получаются весьма сложные выражения. Рассмотрим случай, когда $\alpha=1$. При обозначении $t - [t] \equiv t - n = \kappa \in [0, 1)$ согласно (9.99) при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} t^{\beta-1}\chi(t, 1, \beta, 0) &= \sum_{k=1}^n (\kappa + n - k)^{\beta-1} = \sum_{m=0}^{n-1} (\kappa + m)^{\beta-1} \sim \\ &\sim (t-1)^\beta/\beta + (t-1)^{\beta-1}/2 - C_0(\kappa) - \kappa^\beta/\beta - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\beta)_{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} (t-1)^{\beta-2k}. \end{aligned} \quad (29.72)$$

$C_0(\kappa)$ определяется по формуле (9.94), где $p = [\beta]$. Интегрированием по частям легко установить, что интеграл в (9.94) сходится.

4°. Первый член асимптотического выражения для $\chi(t, \alpha, \beta, \mu)$, $\mu = -\lambda$, $\mu \geq 0$, с помощью формулы Эйлера—Маклорена можно найти при любых значениях параметров. Согласно (29.38) при $x=0$, $x_1 = t^{1/\alpha}$, $h(k, t) = (t - k^\alpha)^{\beta-1} k^\mu$, $m=0$ имеем

$$\begin{aligned} t^{\beta-1}\chi(t, \alpha, \beta, \mu) &= \left[\Gamma(\beta) \Gamma\left(\frac{1+\mu}{\alpha}\right) / \alpha \Gamma\left(\frac{1+\mu}{\alpha} + \beta\right) \right] \times \\ &\times t^{\beta-1+(\mu+1)/\alpha} - (1/2)t^{\beta-1}\tau^\mu \Big|_{\tau=0} + \int_0^{t^{1/\alpha}} \sigma_1(\tau) h_1(\tau, t) d\tau. \end{aligned}$$

При $\beta > 2$, $\mu \geq 1$ результат можно уточнить. После уточнения снова получим (29.71). В противном случае уточнение с помощью (29.38) возможно путем добавления и вычитания подходящей вспомогательной суммы. При $\beta=3/2$, $\mu=0$, $\alpha=2$ этот способ приведен в [76].

Формулу Эйлера—Маклорена нередко можно применить и к исследованию асимптотики других рядов типа (29.69) или (29.69'). В некоторых частных случаях для этих рядов можно найти непосредственное интегральное представление. Например, имеем [131]

$$\sum_{k=0}^n \frac{(\alpha z)^k}{k!} = e^{\alpha z} - \frac{(\alpha z)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha z)^k}{(n+2)_k} = e^{\alpha z} - \frac{(\alpha z)^{n+1}}{(n+1)!} \times \\ \times {}_1F_1(1; n+2; \alpha z) = e^{\alpha z} - \frac{(\alpha z)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^1 e^{\alpha z t} (1-t)^{n+1} dt. \quad (29.73)$$

Это равенство можно использовать при разных соотношениях между $n(z)$ и z , $n(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$.

Наиболее сильным методом для получения асимптотической оценки является применение асимптотики интеграла Стильтьеса (см. п. 24.3.4, 4°).

29.3.4. Разными методами часто можно найти грубые оценки суммы ряда. Отметим те из них, которые связаны с материалом, изложенным в предыдущих параграфах.

1°. Можно обобщить теорему Абеля.

Теорема 29.3. Пусть функции $u_n(x)$ при $x \in [1-\eta, 1]$, $\eta > 0$, обладают следующими свойствами: 1) непрерывны и равномерно ограничены относительно n ; 2) $u_n(x) \geq u_{n+1}(x) \geq 0$ при $n \geq n_0$. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то при $x \rightarrow 1-0$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(1)$. Если при всех m и p $|\sum_{n=m}^{m+p} a_n| < M_0$ и дополнительно к свойствам 1) и 2) $u_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $x \in [1-\eta, 1]$; то утверждение сохраняется.

Доказательство следует из преобразования Абеля (24.72) для отрезка ряда:

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} a_n u_n(x) \right| = \left| \sum_{n=m}^{m+p-1} (a_m + \dots + a_n) (u_n(x) - u_{n+1}(x)) + \right. \\ \left. + u_{m+p}(x) \sum_{n=m}^{m+p} a_n \right|. \quad (29.74)$$

При достаточно большом m , $m > m_0$, и любом p в силу условий при $x \in [1-\eta, 1]$ для (29.74) получаем оценку $2\epsilon u_m(x) < 2\epsilon M$, откуда следует равномерная сходимость ряда в $[1-\eta, 1]$, а в силу непрерывности $u_n(x)$ — утверждение теоремы в первом

случае. Во втором случае из (29.74) следуют оценка $2\varepsilon M_0$ и также равномерная сходимость. ■

Согласно теореме 29.3 при $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ и $x \rightarrow 1-0$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1+x^n} \sim s/2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_n x^n}{1-x^n} \sim s(1-x)^{-1},$$

причем в последней сумме используется равенство $n \frac{(1-x)}{1-x^n} = \frac{n}{1+x+\dots+x^{n-1}}$.

Имеются некоторые модификации теоремы 29.3 [20, 207]. При дополнительных условиях можно также доказать некоторые теоремы о $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$, когда $x \rightarrow 1-0$, если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ расходится, но этот ряд можно суммировать методом Чезаро [20, 207, 209].

2°. Без всяких изменений на ряды вида $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$ и $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u_n(x)$ можно перенести теорему Апелля—Чезаро, если при $n \in N_1$, $x \in [1-\eta, 1]$ имеет место оценка $|u_n(x)| \leq M$. Например, эта теорема применима к лакунарным степенным рядам, если выполняются условия теоремы 29.3. Кроме того, иногда возможно также сравнение рядов по разным системам функций. Например, в силу

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+x^n)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{2n(1+x^n)} < \\ < (1/2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} &= (1/2) \ln(1+x) \leq (1/2) \ln 2 \end{aligned}$$

при $x \rightarrow 1-0$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+x^n)} \sim (1/2) \ln(1/(1-x))$. Соотноше-

ние $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \sim \ln 2/(1-x)$ можно получить с помощью (29.38).

3°. Иногда для данного функционального ряда целесообразно найти интегральное представление с помощью преобразования Абеля (24.72). Пусть функция $b(x, z)$ при каждом $z \in Z$ непрерывно дифференцируема по $x \in [1, \infty)$, $b'_x(x, z) \equiv b_1(x, z)$,

$A(x) = \sum_{k=1}^{[x]} a_k$. Согласно (24.72) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b(k, z) &= A(n) b(n, z) - \sum_{k=1}^{n-1} A(k) \int_k^{k+1} b_1(x, z) dz = \\ &= A(n) b(n, z) - \int_1^n A(x) b_1(x, z) dx. \end{aligned} \quad (29.75)$$

Если существуют пределы при $n \rightarrow \infty$, то имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b(k, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(n) b(n, z) - \int_1^{\infty} A(x) b_1(x, z) dx. \quad (29.76)$$

Так как функция $A(x)$ имеет специальный вид, для интеграла в (29.76) обычно удается выделить лишь основной член асимптотического представления.

В качестве примера рассмотрим при $t \rightarrow +0$

$$f_{\beta, \alpha}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k + \alpha)^{-1} e^{-k^{\beta} t}, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta > 1. \quad (29.77)$$

Имеем $A(x) = \psi([x] + \alpha + 1) - \psi(\alpha + 1)$, $b(x, t) = e^{-x^{\beta} t}$. С учетом п. 9.2.4, 2^о используем неравенства

$$\begin{aligned} \psi(x + \alpha + 1) - \psi([x] + \alpha + 1) &\leq \psi(x + \alpha + 1) - \psi(x + \alpha) = (x + \alpha)^{-1}, \\ 0 < \psi(x + \alpha + 1) - \ln(x + \alpha) &< (1/2)(x + \alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} (x + \alpha)^{-1} \beta x^{\beta-1} t e^{-x^{\beta} t} dx &= \int_t^{\infty} \frac{e^{-u} du}{(u/t)^{1/\beta} + \alpha} < t^{1/\beta} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-1/\beta} du = \\ &= O(t^{1/\beta}), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} f_{\beta, \alpha}(t) &= O(t^{1/\beta}) + \int_t^{\infty} \ln [(u/t)^{1/\beta} + \alpha] e^{-u} du - \psi(\alpha + 1) \int_t^{\infty} e^{-u} du = \\ &= O(t^{1/\beta}) + \int_t^{\infty} \ln [1 + \alpha(t/u)^{1/\beta}] e^{-u} du - (\ln t)/\beta + \\ &+ \Gamma'(1)/\beta + O(t \ln(1/t)) - \psi(\alpha + 1) + O(t). \end{aligned}$$

Последний интеграл имеет оценку $O(t^{1/\beta})$, поэтому при $t \rightarrow +0$

$$f_{\beta, \alpha}(t) = \ln(1/t)/\beta + \Gamma'(1)/\beta - \psi(\alpha + 1) + O(t^{1/\beta}) + O(t \ln(1/t)). \quad (29.78)$$

Этот результат при $\beta = m \in N_1$, $e^{-t} = z$ дополняет п. 27.2.2, 1°. В качестве $\{a_h\}$ можно брать и другие последовательности.

4°. Поскольку согласно (24.81) бесконечный ряд выражается как интеграл Стильтеса, то к исследованию асимптотики суммы ряда можно привлечь разработанную в [271, 272] теорию об асимптотике интеграла Стильтеса. В указанных работах, в частности, исследована асимптотика рядов $\sum_{k=m}^{\infty} h(k, x) e^{-g(k, x)}$ и $\sum_{k=m}^{\infty} h(k, x)/g(k, x)$, если функции $h(k, x)$ и $g(k, x)$ удовлетворяют ряду условий. Например, можно заметно обобщить теорему 29.2, хотя частично этого можно достигнуть также с помощью результатов, изложенных в § 17 и 21. В [272] указанным методом исследованы функции (29.62) и (29.73).

29.3.5. В литературе имеется много оценок сумм разных типов функциональных рядов. Привести их и даже указать литературу в настоящей книге невозможно. Поэтому рассмотрим лишь некоторые результаты, касающиеся поведения сумм тригонометрических рядов при $x \rightarrow +0$. Некоторые оценки сумм рядов Дирихле приведены в [111].

1°. Пусть $a(p)$ является изображением по Лапласу при $\text{Re } p > p_0$, $p_0 \leq 0$. Тогда с помощью (29.26) можно доказать [136], что при $x \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \sin nx &\sim \int_0^{\infty} a(t) \sin txt dt + \sum_{h=1}^{\infty} b_h x^{2h-1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cos nx &\sim \int_0^{\infty} a(t) \cos txt dt + \sum_{h=0}^{\infty} c_h x^{2h}, \end{aligned} \quad (29.79)$$

если ряды сходятся. Эти формулы напоминают формулу Эйлера—Маклорена, которая в случае осциллирующих функций для исследования асимптотики обычно неприменима.

В [136] даны явные выражения для b_h и c_h в случае, когда $a(n) = (n + \alpha)^{-\beta}$, $\text{Re } \alpha > -1$, $\text{Re } \beta > 0$, $\beta \in N$, а также при $\beta = 1$. Их можно найти также непосредственно из (29.26), если применить результаты п. 14.2. В частности, при $\text{Re } \beta > 0$, $\beta \in N$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\beta}} &\sim x^{\beta-1} \Gamma(1-\beta) \cos(\beta\pi/2) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} \zeta(\beta-2k+1) x^{2k-1}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\beta}} &\sim x^{\beta-1} \Gamma(1-\beta) \sin(\beta\pi/2) + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \zeta(\beta-2k) x^{2k}.
\end{aligned} \tag{29.80}$$

Формулы (29.80) следуют также из (29.32), если $\zeta(s, a)$ разложить в ряд Маклорена. На основе формулы (29.25) аналогично можно исследовать асимптотику рядов по другим осциллирующим функциям, например применить (29.27).

2°. Формулы (29.80) можно дополнить следующими. Если $L(t) \in \mathcal{L}$, $L(n) - L(n+1) = O(n^{-1}L(n))$, то при $x \rightarrow +0$

$$\begin{aligned}
S_{\beta}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} L(n) \sin nx \sim \\
&\sim x^{\beta-1} L(1/x) \Gamma(1-\beta) \cos(\beta\pi/2), \quad \beta \in (0, 2), \\
C_{\beta}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} L(n) \cos nx \sim \\
&\sim x^{\beta-1} L(1/x) \Gamma(1-\beta) \sin(\beta\pi/2), \quad \beta \in (0, 1).
\end{aligned} \tag{29.81}$$

Библиография, относящаяся к формулам (29.81), и разные дополнения к этим формулам в случае других значений β приведены в [114]. В частности, показано, что представление для $S_{\beta}(x)$ сохраняется при $\beta=0$, если $L(n) \downarrow 0$. В [114] также даны условия, при которых можно найти асимптотику при $x \rightarrow +0$ для производных от $S_{\beta}(x)$ и $C_{\beta}(x)$.

Отметим, что для тригонометрических рядов по асимптотическому поведению суммы ряда исследована и асимптотика коэффициентов. Например, в [150] приведены условия, при которых соотношения (29.81) обратимы, т. е. из правой части (29.81) для коэффициентов следуют асимптотические выражения, стоящие в левой части этих формул.

29.4. Асимптотика степенных рядов относительно параметров

29.4.1. Степенные ряды часто содержат параметры, относительно которых нередко приходится исследовать асимптотику суммы ряда.

Теорема 29.4 (теорема Линделефа [231]). Пусть 1) функции $h(t)$ и $[g(t)]^{-\lambda t}$, $\lambda \in [0, \lambda_0]$, удовлетворяют условиям теоремы 28.3 при $\operatorname{Re} t \geq \alpha$, причем постоянные M и σ в (28.3) для $[g(t)]^{-\lambda t}$ не зависят от λ ; 2) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h(k) z^k$ сходится при $|z| < R \leq \infty$, и его сумма $f(z)$ аналитически продолжаема в некотором секторе S . Тогда при каждом фиксированном $z \in S$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} F_{\lambda}(z) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h(k) [g(k)]^{-\lambda k} z^k = f(z). \quad (29.82)$$

Доказательство. Поскольку функции $f(z)$ и $F_{\lambda}(z)$ можно выразить с помощью формулы (28.5), то

$$F_{\lambda}(z) - f(z) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{h(t) [1 - (g(t))^{-\lambda t}] z^t}{\sin \pi t} dt.$$

Интеграл в силу условий и (28.3) сходится абсолютно и равномерно относительно $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Поэтому под знаком интеграла можно перейти к пределу при $\lambda \rightarrow +0$. ■

В частности, функции $U_{\lambda}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k k^{-\lambda k}$ и $E_{\beta, \lambda}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[\ln(k+\beta)]^{\lambda k}}$ при $\lambda \rightarrow +0$ стремятся к $1/(1-z)$, если

$\{\arg z\} \in [\varepsilon, \pi]$. Дополнения к теореме 29.4 в случае иной зависимости от λ можно найти в [20] (теоремы 32 и 135).

29.4.2. В предыдущих главах можно найти немало примеров функций, у которых параметр и аргумент одновременно стремятся к ∞ при разных соотношениях между ними. Так, в п. 14.5.2 рассмотрено асимптотическое поведение $\psi(\alpha, z, uz)$ и $\psi(\alpha, z, z+uz^v)$ при $z \rightarrow \infty$, в п. 21.3 — $H_v(z)$ и $J_v(z)$, когда $v \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$. Метод исследования использует подходящим образом подобранное интегральное представление. Этот метод применяется также для исследования аналогичной асимптотики многих других специальных функций. Например, в [191] асимптотика G -функции Мейера при специальных соотношениях между параметрами и аргументом исследована с помощью приведения G -функции к интегралу, родственному (21.106), в котором

функция нагрузки аналогична (21.110), а также к другим интегралам.

Однако нередко только коэффициенты степенных рядов содержат параметр, стремящийся к ∞ . Асимптотическое разложение суммы степенного ряда по отрицательным степеням этого параметра согласно [189] назовем *конфлюэнтным разложением*. Простейшими методами для построения конфлюэнтных разложений являются 1) нахождение для суммы ряда подходящего интегрального представления и 2) применение преобразования рядов. Кроме конфлюэнтных разложений применяются также другие, например ряд обратных факториалов (пример 1° при $\lambda=0$).

Рассмотрим несколько случаев приведения ряда к интегралу. Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k / k! = G(z), \quad |z| < R \leq \infty. \quad (29.83)$$

1°. При $\nu > 0$, $\mu \geq \lambda > 0$ (если $\mu = \lambda$, то $\beta > \alpha$), $y > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \frac{\Gamma(\lambda y + \alpha + \nu k)}{\Gamma(\mu y + \beta + \nu k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \frac{1}{\Gamma((\mu - \lambda)y + \beta - \alpha)} \int_0^1 u^{\lambda y + \alpha + \nu k - 1} (1-u)^{(\mu - \lambda)y + \beta - \alpha - 1} du = \\ &= \frac{1}{\Gamma((\mu - \lambda)y + \beta - \alpha)} \int_0^1 u^{\lambda y + \alpha - 1} (1-u)^{(\mu - \lambda)y + \beta - \alpha - 1} G(u^\nu z) du. \end{aligned} \quad (29.84)$$

При $y \rightarrow +\infty$ и фиксированном z следует применить результаты п. 18.5.1. Частный случай (29.84) рассмотрим в (18.112).

Если $\mu = \lambda$ и $\beta \leq \alpha$, то от $\Gamma(\lambda y + \alpha + k)$ с помощью рекуррентной формулы следует отщепить соответствующий множитель — полином $P_m(k)$ и представить его в виде $P_m(k) = b_0(y) + \sum_{j=1}^m b_j(y) k(k-1) \dots (k-j+1)$ (см. п. 27.6.3). Затем ряд (29.84) следует разбить на сумму рядов и к каждому из них применить интегральное представление (29.84).

При $\lambda = 0$, $\mu > 0$ ряд уже является асимптотическим при $y \rightarrow \infty$.

2°. Пусть в (29.83) $R = \infty$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \frac{\Gamma(y + \nu k)}{\gamma^{y + \mu k}}$, $\nu > 0$, $\gamma > 0$, сходится при $|z| < R_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \frac{\Gamma(y+vk)}{\gamma^{y+\mu k}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z/\gamma^{\mu-v})^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma u} u^{y+vk-1} du = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma u} u^{y-1} G(u\gamma z/\gamma^{\mu-v}) du. \end{aligned} \quad (29.85)$$

При $y \rightarrow +\infty$ к (29.85) можно применить результаты п. 18.4.

3°. В силу формулы (1.5.1.30) из [2] при $v > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \frac{\Gamma(1+y+vk)}{\Gamma(1+(y+vk+\beta)/2)\Gamma(1+(y+vk-\beta)/2)} &= \\ = \frac{2^{y+1}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \int_0^{\pi/2} \cos^{y+vk} t \cos \beta t dt &= \\ = \frac{2^{y+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^y t \cos \beta t G(x \cos^v t) dt. \end{aligned} \quad (29.86)$$

При $y \rightarrow \infty$ к (29.86) можем применить метод Лапласа.

Асимптотика G -функции Мейера относительно двух больших параметров исходя из некоторого интегрального представления методом перевала получена в [89].

29.4.3. В некоторых других случаях после подобных преобразований функция (29.83), находящаяся под знаком интеграла, содержит y , что сильно затрудняет исследование асимптотики интеграла. Более гибким является метод преобразования рядов. Часто можем применить лемму 28.1 или примечания к ней. Как уже сказано, наиболее трудной задачей является проверка выполнения условий 3) и 4) леммы 28.1. Рассмотрим несколько примеров.

1°. Ряд

$$\begin{aligned} F_1(z, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \ln(y+vk) = \ln y G(z) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \ln(1+vk/y), \quad v > 0, \end{aligned}$$

сходится при $|z| < R$. Аналогично как в п. 29.3.2, можно доказать, что при $|\arg t| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\left| \ln(1+t) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} \right| <$

$< |t|^{n+1}/(n+1)M$. Поэтому условие 4) леммы 28.1 выполнено и при $y \rightarrow \infty$, $|\arg y| \leq \pi - \varepsilon$ имеем

$$F_1(z, y) \sim G(z) \ln y + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z) y^{-j},$$

$$c_j(z) = -\frac{(-v)^j}{j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k k^j}{k!} \quad (29.87)$$

2°. Согласно (9.50) при $y \rightarrow \infty$, $|\arg y| \leq \pi/2 - \varepsilon$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \psi(y + vk) = F_1(z, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1 - e^{-u}} \right] e^{-u(y+vk)} du = F_1(z, y) + \int_0^{\infty} e^{-uy} \left[\frac{1}{u} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1 - e^{-u}} \right] G(ze^{-vu}) du \sim F_1(z, y) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(z) y^{-j}. \quad (29.88)$$

Для нахождения $b_j(z)$ применяется лемма Ватсона.

3°. Иногда после преобразования получается сходящийся ряд. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сходится при $|z| < R_0$. Тогда при $|z| < |y| R_0$, $-y \in N$ в силу (12.62), где выбрано $\alpha = k$, $\beta = 1$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \frac{\Gamma(y+k)}{y^k} = \Gamma(y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{(1-k)_j}{j!} B_j^{(k)}(0) y^{-j} =$$

$$= \Gamma(y) \sum_{j=0}^{\infty} h_j(z) y^{-j}, \quad (29.89)$$

где

$$h_j(z) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (1-k)_j B_j^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Изменение порядка суммирования легко оправдать, поэтому в (29.89) получаем сходящийся ряд. Поскольку $(1-k)_j B_j^{(k)}(0)$ является полиномом от k степени $2j$, то $h_j(z)$ согласно методу, приведенному в п. 27.6.3, можно выразить с помощью функции $G(z)$ и ее производных. Сказанное относится также к $c_j(z)$ в (29.87).

4°. Рассмотрим пример, когда проверка выполнения условия 4) леммы 28.1 более сложна, чем в п. 3°. Пусть ряд (29.83) сходится при $|z| < R$. Тогда ряд $F(z, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \frac{y^k}{\Gamma(y+k)}$ сходится при $|z| < \infty$, $|\arg y| \leq \pi - \varepsilon$. Согласно (12.62) и лемме 28.1 формально при $y \rightarrow \infty$ имеем

$$F(z, y) \sim \frac{1}{\Gamma(y)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (k)_j B_j^{(1-k)}(0)}{j!} y^{-j} \sim \frac{1}{\Gamma(y)} \sum_{j=0}^{\infty} g_j(z) y^{-j}, \quad (29.90)$$

где

$$g_j(z) = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (k)_j B_j^{(1-k)}(0)}{k!} z^k.$$

Функции $g_j(z)$ также можно выразить с помощью производных от $G(z)$. Ряды для $g_j(z)$ сходятся при $|z| < R$. Чтобы оправдать вывод (29.90), следует оценить $\rho_{mk}(y)$ в соотношении

$$\frac{y^k \Gamma(y)}{\Gamma(y+k)} = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (k)_j B_j^{(1-k)}(0)}{j!} y^{-j} + \rho_{mk}(y) = \frac{y^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} e^{-y\tau} \times \\ \times (1 - e^{-\tau})^{k-1} d\tau = \frac{y^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} e^{-y\tau} \left[\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j B_j^{(1-k)}(0)}{j!} \tau^{j+k-1} + \right. \\ \left. + R_{mk}(\tau) \right] d\tau, \quad (29.91)$$

$$\rho_{mk}(y) = \frac{y^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} e^{-y\tau} R_{mk}(\tau) d\tau.$$

Сначала оценим $B_j^{(1-k)}(0)/j!$. Пусть $\varphi(x) = e^{2x} - 2e^x \cos \sqrt{1-x^2} + 1$. Поскольку $\varphi'(x) = 2e^x [e^x - \cos \sqrt{1-x^2} - (x \sin \sqrt{1-x^2})/\sqrt{1-x^2}] \geq 2e^x (e^x - 1 - x) \geq 0$ при $x \in [0, 1]$ и $\varphi(x) = |e^t - 1|^2$ при $t = x + i\sqrt{1-x^2}$, то $\max_{|t|=1} |e^t - 1| = e - 1 = q$. Согласно (9.44) получаем оценку

$$|B_j^{(1-k)}(0)/j!| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{(e^t - 1)^{k-1}}{t^{j+k}} dt \right| < q^{k-1}. \quad (29.92)$$

Отметим, что из (9.44) непосредственно следует $|B_j^{(1-k)}(0)/j!| < M_k$, однако такая оценка является неопределенной. Оценка (29.92) весьма грубая.

Затем при $y > 0$ разобьем интеграл (29.91) по интервалам $[0, 1/2]$, $[1/2, \infty)$. В первом из них с учетом (29.92) получаем $|R_{mk}(\tau)| < 2q^{k-1}\tau^{k+m}$, во втором — $|R_{mk}(\tau)| < 2^{m+1}[1 + q^{k-1}(m+1)]\tau^{m+k}$. Отсюда

$$|\rho_{mk}(y)| < \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(k)y^{m+1}} [2q^{k-1} + 2^{m+1}(1 + q^{k-1}(m+1))].$$

Эта оценка показывает, что $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} \rho_{mk}(y) = O(y^{-m-1})$, если

$|z| < R/q$. При $|\varphi| = |\arg y| \leq \pi/2 - \varepsilon$ в качестве пути интегрирования в (29.91) следует брать луч $\arg \tau = -\varphi$ и применять подстановку $\tau = ue^{-i\varphi}$. Тогда все оценки сохранятся, поэтому (29.90) справедливо при $|\arg y| \leq \pi/2 - \varepsilon$, $|z| < R/q$.

Поскольку $y^k \Gamma(y) / \Gamma(y+k) = [(1+y^{-1}) \dots (1+(k-1)y^{-1})]^{-1}$, то с помощью формулы Тейлора можно получить более точную оценку для $|\rho_{mk}(y)|$ и распространить (29.90) на $|\arg y| \leq \pi - \varepsilon$ при соответствующем условии относительно $|z|$ [189]. Однако последний метод для оценки $\rho_{mk}(y)$ применяется лишь в исключительных случаях. Другие примеры конфлюэнтных разложений даны в [143, 189, 429]. Асимптотические выражения разных гипергеометрических функций относительно параметров приведены в [235]. Первым этот вопрос начал исследовать Риман. Он рассматривал асимптотику для ${}_2F_1$ в случае, когда параметры линейно зависят от большого n , и использовал интегральное представление (см. п. 21.7.1).

29.5. Асимптотика бесконечных произведений

29.5.1. Исследование бесконечных произведений путем логарифмирования обычно приводит к исследованию бесконечного ряда логарифмов. Поэтому можно применять методы, приведенные в предыдущих пунктах. Но вследствие того, что члены ряда содержат логарифмы, не все эти методы применяются с одинаковым успехом.

Часто применяется формула Эйлера—Маклорена, однако обычно члены ряда (29.40) не образуют шкалу. Поэтому целесообразно использовать формулу (29.38) при $m=1$ в виде

$$\begin{aligned} \ln P(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} h(k, z) = \int_1^{\infty} h(t, z) dt + (1/2)h(1, z) - \\ &- (1/12)h_1(1, z) - \int_1^{\infty} \sigma_2(t)h_2(t, z) dt \end{aligned} \quad (29.93)$$

и попытаться разложить интегралы в ее правой части.

Берем целую функцию

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + z/a(k)], \quad (29.94)$$

где ради простоты принимается, что $a(t) > 0$ и последовательность $\{a(k)\}$ монотонно возрастает. Тогда

$$\begin{aligned} h(t, z) &= \ln [1 + z/a(t)], \quad h_1(t, z) = \frac{-za'(t)}{a(t)(a(t) + z)} = \\ &= -\frac{a'(t)}{a(t)} + \frac{a'(t)}{a(t) + z}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функции $h_n(1, z)$ при $z \rightarrow \infty$ имеют одинаковый порядок. Поэтому целесообразно использовать формулу (29.93). После интегрирования по частям первого интеграла получаем

$$\begin{aligned} \ln P(z) &= -(1/2) \ln [1 + z/a(1)] + z \int_1^{\infty} \frac{ta'(t) dt}{a(t)(a(t) + z)} + \frac{a'(1)}{12a(1)} - \\ &\quad - \frac{a'(1)}{12(a(1) + z)} - \int_1^{\infty} \sigma_2(t) h_2(t, z) dt. \end{aligned} \quad (29.95)$$

Первый интеграл в правой части (29.95) иногда можно разложить согласно п. 14.2 и 14.3, второй интеграл обычно является ограниченной функцией, но его точное выражение из-за наличия множителя $\sigma_2(t)$ найти трудно. Иногда можно использовать формулу (9.97).

В (29.94) функция $a(t)$ должна быть такой, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [a(k)]^{-1}$ сходил. Если этот ряд расходится, то можно ис- следовать каноническое произведение

$$P_p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + z/a(k)] \exp \left[\sum_{j=1}^p \frac{(-1)^j z^j}{j a^j(k)} \right], \quad (29.96)$$

имеющее те же нули, что и (29.94). При этом величина p выбрана наименьшей из тех, при которых (29.96) сходится. Число p называется *родом*, или *жанром*, целой функции $P_p(z)$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [a(k)]^{-p-1}$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [a(k)]^{-p}$ расходится.

Логарифмируя и дифференцируя $P_p(z)$, получаем

$$P'_p(z)/P_p(z) = (-1)^p z^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^p(k) [a(k) + z]}. \quad (29.97)$$

Отсюда следует, что и в этом случае члены ряда (29.40) не образуют шкалу и асимптотику ряда (29.97) приходится исследовать по формуле (29.93).

В качестве примера рассмотрим случай, когда $a(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$. Пусть пока $z > 0$. Первый интеграл в (29.95) разобьем на разность интегралов по промежуткам $[0, \infty)$ и $[0, 1]$. Первый из них является полилогарифмом, и его асимптотическое разложение при $\nu = 2$ можно найти согласно (14.36) — (14.38). Второй интеграл разлагается непосредственно, причем ряд сходится, если $z > e^\alpha$.

Разбиением на разность интегралов и подстановкой второй интеграл в (29.95) приводим к виду

$$z\alpha^2 \int_0^1 \frac{\sigma_2(t) e^{\alpha t} dt}{(e^{\alpha t} + z)^2} + z\alpha \int_0^1 \frac{\sigma_2(\ln u/\alpha) du}{(u+z)^2} - \alpha \int_0^\infty \frac{\sigma_2(\ln(vz)/\alpha)}{(v+1)^2} dv. \quad (29.98)$$

Первые два интеграла здесь с учетом (9.96) разлагаются непосредственно как выше, а последний интеграл определяет осциллирующую функцию. Если при построении разложения использовать другой метод и применить формулу (23.46), то нетрудно показать (см. также п. 29.5.5), что эта функция равна сумме вычетов для подынтегральной функции $z^s/s(e^{\alpha s} - 1) \sin \pi s$ в полюсах $s = \pm 2k\pi i/\alpha$, $k \in N_1$. Отсюда

$$\Phi(\ln z) = \alpha \int_0^\infty \frac{\sigma_2(\ln(vz)/\alpha)}{(v+1)^2} dv = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi \ln z/\alpha)}{k \operatorname{sh}(2k\pi^2/\alpha)}.$$

Более общее произведение последним методом рассмотрено в [245].

Поскольку все полученные функции существуют при $|\arg z| \leq \leq \pi - \varepsilon$, то методом аналитического продолжения полученный результат можно распространить на этот сектор. Таким образом, при $z \rightarrow \infty$ получаем асимптотическое представление

$$\prod_{k=1}^{\infty} [1 + ze^{-\alpha k}] = e^C z^{-1/2} \exp[(\ln^2 z)/2\alpha - \Phi(\ln z)] [1 + O(1/z)], \quad (29.99)$$

$$C = \pi^2/6\alpha + \alpha/12.$$

Если в последний интеграл в (29.95) подставить разложение (9.97) и интегрировать по частям, то внеинтегральные члены образуют шкалу, но остаток не будет иметь требуемый порядок. Поэтому такой прием неприменим.

29.5.2. Формулу Эйлера—Маклорена можно использовать также в случае произведений, которые сходятся только при $|z| < 1$. В качестве примера возьмем

$$P_{\beta}(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-xe^{\beta k}}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{e^{\beta k}}), \quad \beta > 0, \quad (29.100)$$

и исследуем асимптотику $P_{\beta}(x)$ при $x \rightarrow +0$, $z \rightarrow 1 - 0$. В (29.93) имеем $h(t, x) = \ln(1 - e^{-xe^{\beta t}})$. Поскольку $h_1(t, x) = \beta [xe^{\beta t} / (e^{xe^{\beta t}} - 1)]$, то в силу (9.44) при $m > 0$ имеем $h_{m+1}(0, x) = \beta^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k k^m x^k}{k!} \sim -x\beta^{m+1}/2$ при $x \rightarrow +0$. Следовательно, и в

этом случае функции $h_{m+1}(0, x)$ не образуют шкалу и приходится использовать формулу (29.93), где число 1 заменено на 0.

После подстановки $xe^{\beta t} = u$ первый интеграл в (29.93) примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \ln(1 - e^{-xe^{\beta t}}) dt &= (1/\beta) \left[\int_x^{\infty} \frac{\ln(1 - e^{-u}) - e^{-u} \ln u}{u} du + \right. \\ &+ \left. \int_x^{\infty} \frac{e^{-u} \ln u}{u} du \right] = (1/\beta) [C_1 + O(x \ln x) - \\ &- (e^{-x} \ln^2 x)/2 + \Gamma''(1)/2 + O(x \ln^2 x)]. \end{aligned} \quad (29.101)$$

Поскольку при $u \rightarrow 0$

$$\ln(1 - e^{-u}) - e^{-u} \ln u = -u[1/2 + \ln u + O(u \ln u)], \quad (29.102)$$

то первый интеграл в правой части (29.101) при $x=0$ существует; он обозначен через C_1 . Второй интеграл в правой части (29.101) оценивается интегрированием по частям.

Второй интеграл в (29.93) можно преобразовать аналогично, как в п. 29.5.1. Получим

$$\begin{aligned} x\beta \int_0^1 \frac{\sigma_2(\ln u/\beta) [e^{xu}(1-xu) - 1]}{(e^{xu} - 1)^2} du + \\ + \beta \int_0^{\infty} \frac{\sigma_2(\ln(v/x)/\beta) [e^v(v-1) + 1]}{(e^v - 1)^2} dv. \end{aligned}$$

Первый член здесь имеет оценку $O(x)$, а второй определяет осциллирующую функцию, которую обозначим через $\varphi((-\ln x)/\beta)$. В итоге при обозначении

$$C_0 = (1/\beta) \left[\int_0^{\infty} \frac{\ln(1-e^{-u}) - e^{-u} \ln u}{u} du + \Gamma''(1)/2 \right] - \beta/12$$

согласно (29.93) с учетом (29.102) при $x \rightarrow +0$ получим

$$P_\beta(x) = e^{C_0} \sqrt{x} \exp \left[-\ln^2 x / 2\beta + \varphi((-\ln x)/\beta) \right] [1 + O(x \ln^2 x)]. \quad (29.103)$$

Аналогичные произведения встречаются в комбинаторном анализе, но там часто используются другие методы. Как уже отмечено в п. 25.3.3, в [93, 245] исследовано поведение при $x \rightarrow 0$ произведения $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \exp[-x^{(w+k)^m}])^{-1}$, $m \in N_2$, причем в [245] использован метод Меллина—Барнса. Во многих работах рассмотрена асимптотика при $x \rightarrow +0$ функции $P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-kx})^{-\beta_k}$. Наиболее общие результаты получены в [32, 67], но при разных условиях относительно β_k . В [32] предполагается, что $\sum_{k=1}^{[t]} \beta_k \sim A t^\alpha \ln^\nu t$, $A > 0$, $\alpha > 0$, а в [67] — что $Z(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k k^{-s}$ обладает свойствами рядов Дирихле типа Барнса [см. (29.4)]. Авторы обеих работ применяют равенство $\ln P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (1/m) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-mkx}$, но далее они используют различные методы. В [67] применяется формула, родственная (23.46), а в [32] сумма по m разбивается на три части и каждая часть оценивается своим методом.

Иногда непосредственно к искомому асимптотическому разложению приводит применение разложения логарифма. Например, при $\alpha \in (0, 1)$, $x \rightarrow 0$, $|\arg x| \leq \pi/2 - \varepsilon$ имеем разложение

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 - \alpha e^{-nx}) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k e^{-n k x}}{k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n k x} = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k} \left[1 + \frac{1}{kx} \frac{kx}{e^{kx} - 1} \right] \sim -x^{-1} Li_2(\alpha) + (1/2) \ln(1 - \alpha) - \\ &\quad - \frac{x}{12} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_{2n} g_{2n-2}(\alpha, 0) x^{2n-1}}{(2n)!}, \quad (29.104) \end{aligned}$$

которое целесообразно сравнить с (25.41). В [92] это разложение получено с помощью формулы Пуассона. Там же проанализирован более сложный случай, когда $\alpha > 1$.

29.5.3. При более жестких условиях относительно $a(t)$ можно применить модификацию формулы Эйлера—Маклорена в комплексной форме, которая эквивалентна (29.9). Здесь предположим следующие свойства функции $a(t)$: 1) сходимость интеграла $\int_{\sigma}^{\infty} |a(t)|^{-1} dt$; 2) аналитичность $a(t)$ в области D , в которой находятся пути L^+ и L^- и ось $t \geq \sigma$; 3) функция $[1+z/a(t)]$ при заданных z и $t \in D$ не обращается в 0, т. е. функция $\ln [1+z/a(t)]$ не имеет точек ветвления. Для выполнения последнего условия достаточно, чтобы функция $w=a(t)$ отображала D на область D' , которая содержится в секторе $|\arg w| < \eta \leq \leq \pi/2$. Тогда при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > \eta$ и $\sigma \in (0, 1)$ согласно (29.9) для функции (29.94) справедлива формула

$$\ln P(z) = \int_{\sigma}^{\infty} \ln (1+z/a(t)) dt + \\ + \int_{L^+} \frac{\ln (1+z/a(t))}{e^{-i2\pi t} - 1} dt + \int_{L^-} \frac{\ln (1+z/a(t))}{e^{i2\pi t} - 1} dt. \quad (29.105)$$

Первый интеграл в (29.105) при $z \rightarrow \infty$ разлагается аналогично тому, как в п. 29.5.1. Чтобы разложить остальные интегралы, предположим, что выполняется еще условие 4): пути L^+ и L^- можно выбрать так, чтобы на них интегралы от $|a^k(t) [e^{\pm i2\pi t} - 1]^{-1}|$ сходились при любом $k \in N$. Это условие выполняется тогда, когда $a(t) = O(t^{\omega})$ при $t \rightarrow \infty$, $t \in D$ и пути L^+ и L^- выбраны так, что на них $|\operatorname{Im} t| = O(t^{\delta})$, $\delta > 0$. В силу равенства

$$\ln [1+z/a(t)] = \ln z - \ln a(t) + \ln [1+a(t)/z]$$

с учетом свойства $\ln(1+t)$, указанного в п. 29.4.3, для последних двух интегралов при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ получаем разложение

$$I^+(z) + I^-(z) \sim (\sigma - 1/2) \ln z - c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k / k z^k, \quad (29.106)$$

где

$$c_0 = \int_{L^+} \frac{\ln a(t)}{e^{-i2\pi t} - 1} dt + \int_{L^-} \frac{\ln a(t)}{e^{i2\pi t} - 1} dt, \\ c_k = \int_{L^+} \frac{a^k(t)}{e^{-i2\pi t} - 1} dt + \int_{L^-} \frac{a^k(t)}{e^{i2\pi t} - 1} dt. \quad (29.107)$$

Хотя коэффициенты практически вычислить нелегко, мы все же теоретически доказали существование разложения для $\ln P(z)$.

Если условие 3) не выполняется, то данным методом проще исследовать асимптотику функции $P'(z)/P(z)$. Некоторые результаты, касающиеся этого вопроса, приведены в [8].

Рассмотрим пример. Пусть $a(t) = \exp(\alpha t^\beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Если в формулах (29.107) объединить интегралы, то можно перейти к пределу при $\sigma \rightarrow 0$. С учетом (14.36) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln(1 + ze^{-\alpha t^\beta}) dt &= \alpha \beta z \int_0^\infty \frac{t^\beta dt}{z + e^{\alpha t^\beta}} = \alpha z \int_0^\infty \frac{u^{1/\beta} du}{z + e^{\alpha u}} \sim \\ &\sim \frac{2}{(1+1/\beta)\alpha^{1+1/\beta}} (\ln z)^{1+1/\beta} \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \binom{1+1/\beta}{2j} (1-2^{2j-1}) \times \\ &\quad \times B_{2j} \pi^{2j} (\ln z)^{-2j}. \end{aligned} \quad (29.108)$$

Если $1/\beta \in N$, то следует учитывать также (14.37) и (14.38). При вычислении c_0 путь можно деформировать по мнимой оси. В силу (29.29) и (24.78) получим

$$-c_0 = 2\alpha \sin(\beta\pi/2) (2\pi)^{-\beta-1} \Gamma(\beta+1) \zeta(\beta+1) = \alpha \zeta(-\beta).$$

При вычислении c_k следует учитывать условие 4). Согласно условию 3) пути L^+ и L^- следует выбрать так, чтобы $|\arg a(t)| = \alpha r^\beta |\sin \beta\varphi| < \eta$, где $t = re^{i\varphi}$. Если брать кривые $\alpha r^\beta \sin \beta\varphi = \pm \eta_0$, $\eta_0 < \eta$, то вдоль них $|\operatorname{Im} t| \rightarrow +\infty$. На этих кривых условие 4) выполняется лишь при $\beta < 1/2$, так как на них

$$a^h(t) = O(\exp k\alpha r^\beta), \quad e^{\pm i2\pi t} = O(\exp(2\pi\eta_0 r^{1-\beta}/\alpha\beta)),$$

а должно быть $\beta < 1 - \beta$. При этом дополнительном условии при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ в итоге с учетом (29.105), (29.106) и (29.108) получим

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^\infty (1 + ze^{-\alpha k^\beta}) &= \\ &= e^{-c_0 z^{-1/2}} \exp [2\alpha^{-1-1/\beta} (1+1/\beta)^{-1} (\ln z)^{1+1/\beta} Q_m(\ln^{-2} z)] [1 + o(1)], \end{aligned} \quad (29.109)$$

где $m = [(1+1/\beta)/2]$, $Q_m(u)$ — полином степени m согласно (29.108). При $\beta = 1$ из формулы (29.99) следует, что функция имеет другую асимптотику.

29.5.4. Еще одна модификация предыдущего метода получается следующим образом. Как видно из (29.94), при $a(t) > 0$

функция $P(z)$ имеет только отрицательные нули. Обозначим число нулей, находящихся в круге $|z|=r$, через $n(r)$. С учетом формулы (24.72) имеем

$$\begin{aligned} \ln P(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+z/a(k)) = \sum_{k=1}^{\infty} k[\ln(1+z/a(k)) - \\ &- \ln(1+z/a(k+1))] = \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{a(k)}^{a(k+1)} \frac{z dt}{t(z+t)} = z \int_{a(1)}^{\infty} \frac{n(t) dt}{t(z+t)}. \end{aligned}$$

Аналогично для функции рода p получаем

$$\ln P_p(z) = z^{p+1} \int_{a(1)}^{\infty} \frac{n(t) dt}{t^{p+1}(z+t)}, \quad |\arg z| \leq \pi - \varepsilon. \quad (29.110)$$

Обозначим $n(t) = y(t) - \{y(t)\}$, где $y(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\{x\}$ — дробная часть числа x . С помощью биннома Ньютона для $(z+t)^{-1}$ (29.110) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \ln P_p(z) &= z^{p+1} \int_{a(1)}^{\infty} \frac{y(t) dt}{t^{p+1}(t+z)} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k z^{p-k} \int_{a(1)}^{\infty} \frac{\{y(t)\}}{t^{p+1-k}} dt + \\ &+ (-1)^{p2} \int_{a(1)}^{\infty} \frac{\{y(t)\} - 1/2 + 1/2}{t(t+z)} dt = z^{p+1} \int_{a(1)}^{\infty} \frac{y(t) dt}{t^{p+1}(t+z)} + \\ &+ Q_p(z) + ((-1)^{p2}) \ln [1+z/a(1)] + (-1)^{p2} \int_{a(1)}^{\infty} \frac{\{y(t)\} - 1/2}{t(t+z)} dt. \end{aligned} \quad (29.111)$$

При некоторых предположениях относительно $y(t)$ согласно теореме 30.12 можно доказать ограниченность последнего члена в (29.111). Примеры к этому методу рассмотрены в [142], в частности (29.109) при $\beta \in (0, 1]$.

29.5.5. Для некоторых типов целых функций конечного порядка наиболее простым методом является применение преобразования Меллина, т. е. формулы (23.46) или ее частного случая (23.42). Рассмотрим сначала пример

$$P_{\alpha}(z) = \prod_{k=0}^{\infty} [1+z(k+\kappa)^{-\alpha}], \quad \alpha > 1, \quad \kappa > 0. \quad (29.112)$$

Равенство $z(\beta k + \kappa)^{-\alpha} = (z\beta^{-\alpha})(k + \kappa/\beta)^{-\alpha}$ показывает, что к (29.112) можно привести более общее произведение. Согласно (23.42) имеем

$$\ln P_{\alpha}(z) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\zeta(\alpha s, \kappa) z^s}{s \sin \pi s} ds, \quad \gamma \in (1/\alpha, 1),$$

откуда сдвигом контура влево при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \ln P_{\alpha}(z) &\sim \frac{\pi z^{1/\alpha}}{\sin(\pi/\alpha)} + (1/2 - \kappa) \ln z + \\ &+ \alpha \ln(\Gamma(\kappa)/\sqrt{2\pi}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \zeta(-\alpha n, \kappa)}{n z^n}. \end{aligned} \quad (29.113)$$

При этом учитывается, что $s=0$ является двукратным полюсом и $\zeta(0, \kappa) = 1/2 - \kappa$, $\zeta'(0, \kappa) = \ln(\Gamma(\kappa)/\sqrt{2\pi})$. Данные формулы следуют из (29.31).

При $\alpha \in (0, 1]$ аналогично рассмотрим каноническое произведение

$$\begin{aligned} P_{\alpha, p}(z) &= \prod_{k=0}^{\infty} [1 + z(k + \kappa)^{-\alpha}] \exp \left[\sum_{m=1}^p \frac{(-z)^m}{m(k + \kappa)^{\alpha m}} \right], \\ &1/\alpha \in [p, p+1). \end{aligned} \quad (29.114)$$

Следует различать случаи $1/\alpha \notin N$ и $1/\alpha \in N$. В первом случае согласно (23.46) $\gamma \in (p, p+1)$ и к правой части (29.113) необходимо добавить вычеты в точках $s=1, 2, \dots, p$. Поэтому сумма в (29.113) начинается с $n=-p$. Во втором случае дополнительно надо учитывать тот факт, что точка $s=1/\alpha=p$ является двукратным полюсом, поэтому следует изменить вычет в этом полюсе.

Изложенный метод с несущественными изменениями сохраняется, если в (23.46) $\lambda_k = [\Phi(k + \kappa)(k + \kappa)^{\alpha}]^{-\beta}$ и соответствующий ряд Дирихле $Z(s)$ принадлежит к типу Барнса или Меллина (см. п. 29.1.2, 2°). Эти функции, а также некоторые их обобщения на кратные произведения рассмотрены в [154, 245]. Преимущество данного метода станет ясным, если его сравнить с применением некоторой модификации формулы Эйлера—Маклорена в [195].

Кроме того, с помощью этого метода сдвигом пути интегрирования вправо нередко для $\ln P(z)$ можно получить разложение в сходящийся степенной ряд. Например, это легко осуществить для произведения (29.99) [183].

В рассмотренных методах ограничение $a(t) > 0$ не является существенным. Если нули функции $P(z)$ расположены в секторе $|\arg z| \in (\pi - \eta, \pi]$, то асимптотическое представление можно построить при $|\arg z| \leq \pi - \eta$.

29.5.6. Отметим еще некоторые методы для вывода грубых асимптотических оценок бесконечных произведений.

1°. Иногда асимптотическую оценку ряда логарифмов можно получить разбиением ряда на части и выделением центральной суммы, как отмечено в п. 27.5.3. Например, такой метод применяется в [233] в случае функций нулевого порядка и в [179] в случае функций бесконечного порядка.

2°. Одним из вариантов разбиения является применение представления

$$\ln P(z) = \sum_{k=1}^n \ln (z/a(k)) + \sum_{k=1}^n \ln (1 + a(k)/z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln (1 + z/a(k)), \quad (29.115)$$

где $P(z)$ определяется в (29.94), а $n=n(z)$ выбирается так, чтобы отдельные суммы удобнее было оценить. Иногда к последним двум суммам применяется формула Эйлера—Маклорена, а первая оценивается методами, приведенными в п. 24.6.

3°. Ищется асимптотическое представление для $\sum_{k=1}^{\infty} (\zeta + a(k))^{-1}$, а затем из полученного выражения интегрированием по ζ в $[0, z]$ получаем представление для $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(z + a(k))$. Исследуемый ряд часто равен сумме вычетов, если соответственно деформировать путь интегрирования для интеграла с подынтегральной функцией, подобной (27.27). Этим методом в [204] найдена асимптотика произведений (29.99) и (29.112) при $|\arg z| \in [\pi - \eta, \pi]$.

29.6. Библиографические сведения

29.6.1. Исследования о поведении степенного ряда на окрестности сходимости начаты Абедем. В работе [144] им доказана теорема 27.1.6, причем также для случая $A = \infty$. Первые же систематические исследования по этой тематике, а также вопроса о поведении целых функций при $z \rightarrow \infty$ появились лишь в конце XIX в. На исследование целых функций повлияли

работы Вейерштрасса и Лагерра, которые ввели и применяли бесконечные произведения для определения и изучения свойств целых функций. Понятие рода (жанра) введено Лагерром [224]. Большое значение для дальнейшего развития исследований асимптотики суммы степенных рядов имели работы Адамара, например [201—203], а для пробуждения интереса к этим вопросам — книги Бореля [168, 169] и Линделефа [231]. Весьма ценные результаты получены в работах Фату, Фабри, Ле Руа, Фабера, а затем — в работах Мандельбройта, Поля и др. Следует еще отметить работы Вимана по целым функциям. Он начал также систематически исследовать связь между $\mu(r)$ и $M(r)$ [299, 300]. Понятия регулярного и нерегулярного изменений целых функций введены Борелем в работе [169]. В целом данным вопросам посвящено огромное количество работ. Важнейшая библиография частично указана в [100, 102, 103, 181]. Там же и в [231] изложены многочисленные результаты исследования аналитического продолжения степенных рядов.

Работы по применению интегральных представлений суммы степенного ряда для исследования асимптотики появились в начале XX в. Метод, рассмотренный в п. 27.3.1, предложен Харди [206] и Барнсом [155], а метод, приведенный в п. 27.6.2, — Харди [205]. Интегралы типа Меллина—Барнса для выражения суммы степенных рядов применялись во многих работах Меллина и Барнса. Часть этих работ указана в списках литературы ко 2-му тому монографии и к данной главе. В несколько модифицированном виде [модификация формулы (27.28)] интегральные представления применяются в работах Линделефа, которые отражены в [231]. Метод Линделефа, а также некоторые его модификации излагаются во многих монографиях, например в [8, 195]. В [76] этот метод рассмотрен на примере функции $T_\alpha(z)$ при $z \rightarrow +\infty$. Другими методами последний результат получен в [230, 279].

Формулу (27.35) при $\alpha=1$ первым доказал Пуассон [263]. В учебниках, монографиях и журнальных статьях даны доказательства этой формулы разными методами и при разных условиях относительно данной функции. Для исследования асимптотики функций формула (27.35) применяется сравнительно редко. Несколько примеров по ее использованию можно найти в [8, 188]. Метод замены суммы интегралом (п. 27.3.5 и 27.6.6) исходя из геометрических соображений без использования формулы Эйлера—Маклорена первым применил Ле Руа [279]. Им получены формулы (27.37), (27.38), (27.66), (27.90) и даны примечания 27.3.5, 1° и 27.3.5. Близкие к этим результаты, найденные путем выделения центральной суммы, приведены в [290]. Более общие результаты в их современном виде с помощью

формулы Эйлера—Маклорена получены Бергом [161, 162] и Риделем [271, 272]. Теорема 29.2 и формула (27.90') доказаны Бергом.

Идея преобразования Барнса—Ватсона встречается в работе Барнса [157] в случае функции Миттага—Леффлера [формула (27.84) с интегралом второго рода]. Эту идею расширили Ватсон [293] и Райт [305].

Большинство примеров, приведенных в п. 27.4 и 27.7, в несколько ином виде рассмотрено в нижеуказанной литературе. Частные случаи ряда (27.50) приведены в [160, 279]. Некоторые из формул (27.49), (27.70), (27.95) и (27.99), полученные различными методами, даны в [161, 168, 279]. Функция (27.95) исследовалась также многими другими авторами. Два первых члена разложения (27.92), полученные методом, отличающимся от описанного выше, приведены в [265].

Обобщение теоремы Абеля 27.1.6 в случае, когда точка приближается к $z=1$ из круга с центром внутри Γ , окружность которого касается Γ в точке $z=1$, в несколько измененной формулировке приведено Штольцем в работе [284]. В этой же работе доказана непрерывность $f(z)$ в секторе с центром в точке $z=0$, если дуга, стягивающая сектор, принадлежит Γ и ряд (27.1) на ней сходится.

Частные случаи теоремы Апелля—Чезаро встречаются в работах Апелля [151] и Фробениуса [197]. В первой из них показано, что из $n^{-\lambda}a_n \rightarrow A$, $\lambda > 0$, следует $f(z) \sim A\Gamma(\lambda)(1-z)^{-\lambda}$, а во второй доказана теорема: из $\lim s_n/n = A$ следует $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sim A$ при $z \rightarrow 1-0$. Теорему Фробениуса можно перенести на случай, когда $z \rightarrow 1$ по некоторому сектору. Общий случай теоремы рассмотрен Апеллем в [152] и Чезаро в [172], причем Чезаро указывает только работы [151] и [197]. В [172] рассмотрен также случай среднего арифметического и приведено много примеров. В работе [173] Чезаро перенес теорему 27.2.1 на интегралы в следующем виде.

Пусть 1) $f(x, t) > 0$, $g(x, t) > 0$ при $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \beta]$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $t \in [a, b]$; 2) $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt \rightarrow \infty$, $G(x) = \int_a^b g(x, t) dt \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, причем при $x = x_0$ точкой расходимости обоих интегралов является $t_0 \in [a, b]$; 3) $f(x, t)/g(x, t) \rightarrow k(x)$ при $t \rightarrow t_0$; 4) $k(x) \rightarrow \kappa$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда $F(x)/G(x) \rightarrow \kappa$ при $x \rightarrow x_0$.

Если сумму бесконечного ряда представить в виде интеграла, то данная теорема дополнит теорему 27.2.1, а также даст новый прием для исследования асимптотики рядов другого типа. В качестве примера можно отметить интеграл (29.29). Имеем:

$F(s) = \zeta(s, a)$, $f(s, t) = \frac{t^{s-1} e^{-t(a-1)}}{\Gamma(s) (e^t - 1)}$, $s_0 = 1$, $t_0 = 0$. Если выбрать $g(s, t) = \frac{t^{s-2} e^{-t(a-1)}}{\Gamma(s)}$, то $G(s) = \frac{1}{(s-1)(a-1)^{s-1}}$ и $f(s, t)/g(s, t) = \frac{t}{e^t - 1} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому согласно указанной выше теореме $\zeta(s, a) \sim 1/(s-1)$ при $s \rightarrow 1 + 0$.

К теореме 27.2.4 следует добавить, что ряды с коэффициентами, содержащими логарифмы, вышеуказанным методом исследовал уже Ле Руа [279]. Например, им рассмотрены случаи, когда $a_n = n^p/(\ln n)^q$, $a_n = (\ln n)^p/n^q$, $a_n = [n \ln n \dots \ln_{p-1} n (\ln_p n)^q]^{-1}$.

Много работ по исследованию частных случаев полилогарифмов. Одной из первых является работа [282]. Ранние работы по полилогарифмам указаны в [155, 205, 229, 231]. Некоторые новейшие результаты отражены в [260]. Небольшие таблицы численных значений полилогарифмов приведены в [119].

Несколько частных случаев функции $g_\beta(z, \alpha)$ было рассмотрено еще Абелем [145] и авторами других работ. Систематическое исследование асимптотики общей функции $g_\beta(z, \alpha)$ начинается с работ Барнса [155, 157, 158] и Харди [205, 206]. Следует также отметить работы Лерха [227, 228], в которых приводятся различные свойства функции $g_{-\beta}(e^{i2\pi x}, s)$ и при $x=0$ получено разложение (29.30). Им обобщена также формула Жонкьера (27.47'). Некоторые другие результаты даны в [2, 174, 195]. В указанных работах Барнса и Харди исследуются также ряды $\sum_{h=0}^{\infty} (k+\alpha)^\beta H(k+\alpha) z^k$.

29.6.2. Теорема Линделефа—Форда в данном виде впервые доказана Линделефом [231]. Более слабые варианты этой теоремы независимо от Линделефа приведены в работах Форда [192, 193], а затем в первом издании (1916 г.) первой части книги [195] и в [194]. В работе [231] приведен пример с функцией Линделефа (28.8). Одновременно с Линделефом Мальмквист [241] указал другую функцию, стремящуюся к нулю во всех направлениях, кроме $z \rightarrow +\infty$, а именно $-\sum_{k=2}^{\infty} z^{k-2}/\Gamma(1 + k/\ln^\alpha k)$, $\alpha \in (0, 1)$. Указанное свойство данной функции при $\alpha > 0$ также вытекает из теоремы Линделефа—Форда.

Основное преимущество метода стандартных функций состоит в том, что те же коэффициенты d_j , которые фигурируют в (28.18), появляются в разложении (28.29). Первыми в частных случаях при $\gamma=1$ в разных модифицированных формах эту идею использовали Харди [205] и Барнс [157]. Идеи Харди

изложены в п. 27.6.2, а их обобщение приведено в п. 28.2.5, 3°. Прием Барнса заметно расширил и модифицировал Ватсон [293] в случае, когда $h(t)$ обладает разложением (28.20) при $\lambda_k = \lambda + k$. Ватсон применял преобразование Барнса—Ватсона, приводя исследование к случаю $\gamma = 1$. Но этим методом он получил разложение лишь в Э-секторе. Ватсон в [293] предполагал, что класс W целых функций является наиболее общим среди функций, обладающих асимптотическим разложением, содержащим лишь степенные и показательные функции. Однако линейная комбинация функций, принадлежащих классу W при разных β (или γ), не принадлежит W , но обладает отмеченным разложением.

В 1916 г. в первой части книги [195] Форд отмечал, что при $\gamma = 1$ разложение (28.29) должно иметь место, но в данный момент он не может этого доказать. В [194] он при $\gamma = 1$ впервые объединил применение теоремы Линделефа—Форда в С-секторе с методом стандартных функций в Э-секторе. Однако в Э-секторе им получена слишком грубая оценка остатка, содержащая $e^{|\alpha|}$. Уточнение и расширение работы [194] приведено в [195].

Метод стандартных функций во всей общности применял Райт, вначале для гипергеометрических функций ${}_pF_q$ [302], затем для общего случая [94, 305]. В Э-секторе он использовал преобразование Барнса—Ватсона, а остаток разложения оценил методом, близким к методу перевала. Исследования Райта, так же как и Ватсона, усложнены тем, что допускается случай комплексного γ , $\operatorname{Re} \gamma > 0$, т. е. рассматривается разложение вдоль спирали (см. п. 27.5.4). В [305] приведено также разложение (28.13) для функции $E_{1/\gamma}(z, \alpha)$. Полное разложение $E_{1/\gamma}(z)$ впервые получено Виманом [298] и Барнсом [157]. Следует отметить, что в работе [2] функция $E_\rho(z, \alpha)$ обозначена через $E_{1/\rho, \alpha}(z)$. Мы такой символ применили для функции Линделефа. Соотношение

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} I_{\beta^*}(t) dt = p^{-1} E_{1/\rho}(p^{-1}, \beta + 1) \quad (29.116)$$

показывает связь между функциями $I_{\beta^*}(t)$ и $E_\rho(z, \alpha)$.

Одновременно с Райтом Ньюсомом [254] была опубликована формула (28.49), на основе которой в [198, 215, 216, 255] получены результаты, аналогичные результатам Райта. Как отмечено в п. 28.2.5, 4°, большинство результатов Ньюсома нельзя признать корректными или же следует считать, что они фактически получены при более сильных условиях, чем результаты Райта. Общие исследования интеграла Меллина—Барнса (23.15), проведенные в [170], дали возможность получить

асимптотические разложения функций, принадлежащих широкому подклассу класса W , другим способом, без применения (28.18). Этот метод рассмотрен в § 23. В [8] для асимптотической оценки некоторого класса целых функций на конкретных примерах функций (27.95) и (28.75) при $\alpha=1$ применяются (27.28) и метод перевала без использования (28.18).

В 1964 г. начал появляться цикл работ В. Риекстини [120—123, 125—128], в которых для оценки остатка в (28.29) применяется метод перевала. В [123, 126] рассматриваются также модификации, указанные в примечаниях 3° и 4° к теореме 28.4 и в п. 28.2.7. Модификация, приведенная в п. 28.2.8, 1°, дана Ковалевским [106], а ее частные случаи — в [222, 257]. Доказательства в [106] не приводятся, но дается ссылка на работу Райта [305]. Эквивалентность разных асимптотических разложений для функций класса V_β , приведенная в п. 28.2.3, встречается в работах Райта и Риекстини.

Конкретные примеры применения метода целых функций эпизодически приводятся во многих работах. Систематически этот метод применялся и исследовался в работах В. Риекстини [124—126, 129]. Содержание п. 28.3, в основном в переработанном виде, заимствовано из этих работ.

Асимптотику функций ${}_pF_q$ при $\arg z=0$ первым исследовал Стокс [283], оценив центральную сумму. Этот метод указан в п. 27.5.3. Некоторые результаты по асимптотике линейных комбинаций гипергеометрических функций получил Опп [258]. Полное асимптотическое разложение для функций ${}_pF_q$ привел Барнс [159]. Он исследовал также асимптотику разных линейных комбинаций функций ${}_pF_q$ в S - и \mathcal{E} -секторах. Барнс применял интеграл Меллина—Барнса (см. п. 23.3, 23.4), причем для вывода асимптотического разложения в \mathcal{E} -секторе он взял сложную подынтегральную функцию. Фоксом этот метод был упрощен [196]. Он первым исследовал асимптотику общей функции ${}_p\mathcal{F}_q$ и ввел соответствующую символику. Кроме идеи Барнса Фокс использовал также разложение в факториальный ряд типа (28.18), что заметно упрощает метод, примененный Барнсом. Однако Фоксом рассмотрен лишь случай, когда $\gamma=m/n$, $m \in N_1$, $n \in N_1$, так как тогда ${}_p\mathcal{F}_q$ можно привести к линейной комбинации таких функций, у которых $\gamma=1$. Поэтому все исследования им проводятся при $\gamma=1$. В [166] показано, что в случае, когда в (28.92) α_j и β_j рациональны, ${}_p\mathcal{F}_q$ выражается с помощью G -функций Мейера. Отсюда и следует асимптотика для ${}_p\mathcal{F}_q$ в данном случае.

Полностью асимптотика ${}_p\mathcal{F}_q$ исследована Райтом [303]. Без доказательства его результаты приведены уже в [302]. Им рассмотрен также случай конечного числа полюсов (п. 28.5.2), но

иним, более сложным методом — математической индукцией. Индукция, основанная на формулах, в которых функция ${}_pF_q$ выражается с помощью интеграла, содержащего гипергеометрическую функцию с меньшими индексами, применяется также в работах [108, 307, 308]. При этом в [108] используется интеграл типа (18.122) и исследуется асимптотика функций ${}_pF_p$ и ${}_pF_{p+1}$, а в [307, 308] — композиция Адамара (27.5) для ${}_1F_q$. Однако эти методы не дают общих результатов и являются довольно громоздкими. Случай конечного числа полюсов для изображения ${}_0F_q$ рассмотрен также в [128].

Асимптотика функций ${}_p\mathfrak{F}_q$ в [170] получена как следствие из асимптотики общего интеграла Меллина—Барнса (23.15). Там же подробно рассмотрена асимптотика G -функции Мейера и некоторых линейных комбинаций функций ${}_p\mathfrak{F}_q$. Асимптотические разложения для G -функций приведены также в [235, 429].

G -функции при специальном выборе индексов первым исследовал Барнс [159] (без символики Мейера). В качестве примера, когда линейная комбинация гипергеометрических функций имеет асимптотическое разложение в виде одного степенного ряда, он привел интеграл вида (23.15), выражающий $G_{pq^{q^1}}(-z)$, $q > p$ [см. (23.84)]. С помощью линейной комбинации, выражающей $G_{p,p+m}{}^{mp}(-z)$, $m \geq 1$, Барнс показал, что отдельные гипергеометрические функции могут иметь экспоненциальную асимптотику, а их линейная комбинация — степенную. Кроме того, Барнс привел асимптотические разложения, содержащие экспоненциальный множитель, для $G_{pq^{q^0}}(-z)$.

Методом Барнса Мейер при $q > p$ получил степенные асимптотические разложения для $G_{pq^{mn}}(z)$, если $m+n > (p+q)/2$. В других случаях он использовал выражение для $G_{pq^{mn}}(z)$ с помощью линейной комбинации функций $G_{pq^{q^1}}(z)$ и $G_{pq^{q^0}}(z)$, исследованных Барнсом. Эти комбинации следуют из дифференциального уравнения для $G_{pq^{mn}}(z)$, частными решениями которого являются также $G_{pq^{q^1}}$ и $G_{pq^{q^0}}$. Вычисление коэффициентов в этих соотношениях показано в [190]. При $p=q$, когда соотношение (23.84) имеет место лишь при $|z| < 1$, заменой в (23.15) s на $-s$ Мейер построил аналитическое продолжение в виде

$$G_{pp^{mn}}(\mathbf{A}_p; \mathbf{B}_p; z) = G_{pp^{nm}}(\mathfrak{A}_p - \mathbf{B}_p; \mathfrak{A}_p - \mathbf{A}_p; z^{-1}).$$

Отсюда с учетом (23.84) получается также асимптотическое разложение.

Много работ посвящено исследованию разных частных случаев функций ${}_p\mathfrak{F}_q$. Например, во 2-м томе данной монографии приведены функция Бесселя—Райта (21.105), функция Миттага—Лефлера (22.108), функция Харди (21.14) и др. Асимптотика каждой из этих функций или их частных случаев изучена

с помощью различных методов несколькими авторами независимо от общей теории. Функции (28.85) и (28.86) исследованы Барнсом [156]. Примером функции, принадлежащей классу W , но не совпадающей с ${}_pF_q$, является $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k g(k)}{\Gamma(1+\gamma k)(k+\Theta)^\beta}$, $\beta \neq 0$, $g(k) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^{-\lambda_n}$. Ее асимптотика при $\gamma=1$ и $\lambda_n = n + \lambda$ исследована в [157], а при $g(k) \equiv 1$ — в [157, 198].

Следует отметить, что многие интегралы можно выразить с помощью ${}_pF_q$ или ${}_pF_q$, поэтому их асимптотика следует из п. 28.5. Например, интеграл (16.138) выражается с помощью ${}_3F_3$, $\int_0^{\infty} t^{\lambda-1} J_\nu(at) (t^2+b^2)^{-\mu-1} dt$ — с помощью ${}_1F_2(a^2b^2/4)$ [6], $\int_0^{\infty} t^{2\alpha-1} J_\nu(x\sqrt{1+t^2}) (1+t^2)^\lambda dt$ — с помощью ${}_1F_2(-x^2/4)$ [431], $\int_0^{\infty} t^{\lambda-1} J_\nu(at) J_\mu(b/t) dt$ — с помощью ${}_0F_3(a^2b^2/16)$ [6]. Асимптотика последнего интеграла при $\lambda=0$, $a=1$, $b \rightarrow \infty$ исследована в [240] с помощью дифференциального уравнения.

Ни Барнсом, ни Фоксом, ни Райтом в [303] не указаны алгоритмы для вычисления коэффициентов d_j в (28.18). Обзор методов, применяемых другими авторами для построения алгоритма в случае функций ${}_pF_q$, приведен в п. 28.5.3. Однако ни в одном из них не используется обобщенная формула Стирлинга (28.69), доказанная в [278] с помощью разностного уравнения, которому удовлетворяет $\ln \Gamma(z+\alpha)$. Некоторые модификации этой формулы, если $\alpha \neq 1$, при разных ограничениях (в частности, $z \in N$) встречаются в работах Эрмита, Сонина и Барнса конца XIX в. (см. также п. 30.2.7, 3°).

29.6.3. Асимптотика отдельных функциональных рядов исследована многими авторами. Однако систематическое изложение основных применяемых методов пока отсутствует. Асимптотика разных сумм встречается в комбинаторном анализе [9] и теории вероятностей [10]. Большинство приведенных в § 29 примеров в несколько модифицированном виде заимствовано из разных источников. Укажем некоторые из них.

Формула (29.3) как частный случай более общей формулы впервые встречается в работе Меллина [245], а затем во многих других работах. Частный случай разложения функции (29.10) приведен в [8], формула (29.19) выведена в [141], а (29.26) — в [136]. Применение преобразования Лапласа в (29.25) предложено в [134]. Иногда, например в [98], используется модифицированное предположение, что последовательность $a(n)$ является абсолютно монотонной, т. е. что $\Delta^k a(n) \geq 0$

при $k \in N$, $n \in N$. Согласно теореме Хаусдорфа [20] $a(n) = \int_0^1 x^n d\psi(x)$, где $\psi(x)$ — возрастающая ограниченная функция.

Формула (29.51) приведена Ле Руа в работе [279]. Частный случай (29.54) при $v=0$ рассмотрен Пуассоном в [263], а при $v \neq 0$ — в [264]. В [263] дана также формула Пуассона и с ее помощью выведена формула Эйлера—Маклорена. Впоследствии соотношение (29.54) было исследовано и обобщено многими авторами. Соотношение (29.56) в несколько модифицированном виде приведено в [188], а (29.57) — в [294]. Частный случай разложения (29.60) рассмотрен в [164], а примеры (29.63)—(29.66) заимствованы из книги [171].

Формулы (29.75) и (29.76) в несколько модифицированном виде приведены в [423]. Применение их для асимптотического представления функций рассмотрено в [4]. Там же приведены асимптотика коэффициента d_n в (29.50), полученная методом перевала, а также разложение (29.104). Разложения (29.89) и (29.90) рассмотрены в [189]. Теорема 29.2 приведена в [162], теорема 29.3 — в [210].

Аналитические свойства бесконечных произведений первым начал изучать Риман в своей знаменитой работе [273]. В этой работе применяется формула Эйлера $\prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \zeta(s)$, где p — простые числа. Риман приводит основные асимптотические свойства $\zeta(s)$, в том числе формулу (29.31) при $a=1$, и вводит обозначение для этой функции. С помощью $\ln \zeta(s)$ исследуется $f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} (1/h) \pi(x^{1/h})$, где $\pi(x)$ означает число простых чисел p , не превышающих x . Применяется формула, аналогичная (23.46).

В начале XX в. в связи с развитием теории целых функций асимптотику бесконечных произведений систематически начали исследовать почти одновременно Меллин [245—247], Линдлеф [230], Барнс [153, 154], Харди [204], Литтлвуд [233] и другие. В своих работах они применяли либо формулу Эйлера—Маклорена [153, 230], либо соотношение (23.46) [154, 245, 246], либо разбиение суммы логарифмов на части [233]. Функция (29.99) исследована в [153, 204, 233, 245]. Результаты, содержащиеся в п. 29.5.3, нами заимствованы из [8], а в п. 29.5.4 — из [142]. Применение формулы (29.105) было известно уже Линдлефу. Пример (29.112) принадлежит Барнсу [154], который детально разработал методику применения формулы (23.46). Тот же пример при $|\arg z| \in [\pi - \eta, \pi]$ исследовал Харди [204]. Следует отметить, что как Меллин [245], так и Барнс [154] при использовании $\zeta(s, a)$ вместо (29.6''') применяли более грубую оценку $\zeta(s, a)e^{-\varepsilon s} \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Im} s| \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$.

Исследования асимптотики произведений, связанных с комбинаторным анализом, начались с работы Харди и Рамануджана [212], в которой сумма логарифмов оценивается разбиением на части. Эти исследования заметно продвинул вперед Райт, применивший функцию Бесселя—Райта. Работы в данном направлении послужили началом дальнейших работ Райта по методу стандартных функций (см. п. 29.6.2). Пример (29.100) заимствован из [162].

ДРУГИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ И ДОПОЛНЕНИЯ

§ 30. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РЯДОВ

30.1. Общая постановка

30.1.1. Часто асимптотика данной функции $\Omega(x)$ изучается с помощью некоторого интегрального преобразования согласно следующей формальной схеме. $\Omega(x)$ подвергается интегральному преобразованию T , обратное преобразование которого T^{-1} выражается с помощью интеграла. Затем при обозначении преобразования через $T\{\Omega(x); p\}$ используется представление

$$\Omega(x) = T^{-1}\{T\{\Omega(x); p\}; x\}. \quad (30.1)$$

Согласно терминологии Дёча [182] этот метод называется *неявной асимптотикой Абеля*. Если функция $T\Omega$ известна или известны необходимые ее свойства, то асимптотическое представление $\Omega(x)$ можно получить теми методами, которые применимы к интегралу, выражающему T^{-1} .

Та же схема справедлива и в случае, когда функция $\Omega(x)$ задана интегралом. Тогда имеем

$$\Omega(x) = \int_c K(x, t)h(t)dt, \quad T\{\Omega(x); p\} = \int_c T\{K(x, t); p\}h(t)dt. \quad (30.2)$$

Более подробно: если обозначить $T\{K(x, t); p\} = F(t, p)$, а обратное преобразование T^{-1} определяется интегралом по кривой C_1 и ядром $\kappa(x, p)$, то формально получим

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \int_c K(x, t)h(t)dt = \int_c h(t)dt \int_{C_1} \kappa(x, p)F(t, p)dp = \\ &= \int_{C_1} \kappa(x, p)dp \int_c F(t, p)h(t)dt. \end{aligned} \quad (30.2')$$

В общем случае в (30.2') имеем повторный интеграл, что усложняет дальнейшие действия. Поэтому во многих случаях

применение данного метода не является целесообразным и требуемую асимптотику проще найти другими методами. В основном по приведенной схеме используются преобразования Лапласа и Меллина, так как для них хорошо разработаны методы, применяемые к построению асимптотики интеграла обращения (см. § 22 и 23).

30.1.2. В некоторых случаях указанный выше метод весьма удобен. Целесообразно его применять в случае преобразования Лапласа ($T \equiv L$), если $\Omega(x) = \int_0^x K(t) dt$, так как тогда $L\{\Omega(x); p\} = p^{-1}L\{K(x); p\}$. Как показано в п. 22.8, удобно применять преобразование Лапласа также в случае интеграла свертки, т. е. $\Omega(x) = \int_0^x K_1(t)K_2(x-t) dt$, так как тогда $L\{\Omega(x); p\} = L\{K_1(x); p\}L\{K_2(x); p\}$. Иногда можно использовать частные случаи преобразования Эфроса—Лапласа, указанные в [313] (см. также [141]). Например, пусть $\Omega(x) = \int_0^\infty J_\nu(\sqrt{xt}) t^{-\nu/2} h(t) dt$. Тогда при некоторых условиях имеет место формула Трикоми $L\{x^{\nu/2}\Omega(x); p\} = p^{-\nu-1}L\{h(t); p^{-1}\}$ [402]. На базе указанных формул и теорем из § 22 можно сформулировать различные теоремы об асимптотическом разложении интегралов. Некоторые применения формулы Трикоми рассмотрены в [325].

Преобразование Лапласа можно использовать также с учетом соотношения [182]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f_1(p-z)f_2(z) dz = \int_0^\infty e^{-pt} F_1(t) F_2(t) dt,$$

где $F_k(t) \doteq f_k(p)$, $k=1, 2$, $F_k(t)$ — целые функции порядка 1 и конечного типа (см. п. 27.5), $\rho_2 < \rho < |p| - \rho_1$, $\rho_k = \lim_{r \rightarrow \infty} (\ln M_k(r))/r$.

При заданных $F_k(t)$ для интеграла в правой части известными методами можно построить асимптотическое разложение при $p \rightarrow \infty$.

Иногда применение неявной асимптотики Абеля с использованием преобразований Лапласа или Меллина целесообразно для построения равномерной асимптотики относительно дополнительного параметра. Тогда разложение для интеграла обращения строится методом перевала. Пример приведен в [401].

Другим примером применения интегральных преобразований является формула Парсевала (23.47) для преобразования Меллина. Аналогичные формулы Парсевала по схеме (31.2) можно вывести и для некоторых других интегральных преобразований.

Поскольку формула (23.47) выражает специальное соотношение между интегралами, то ее использование подробнее рассмотрим в п. 31.2, 31.3. Применяется также ее частный случай (23.48'), где интеграл преобразования Стильтеса выражается с помощью интеграла типа Меллина—Барнса. Методы, применяемые для исследования асимптотики преобразования Стильтеса, будут приведены в п. 32.3.2.

Пример (23.64) также показывает преимущество метода интегральных преобразований в некоторых частных случаях, когда функция $h(s)$ выражается в явном виде и обладает аналитическим продолжением в левой полуплоскости. Аналогично по образцу (23.64) можно рассматривать и другие типы интегралов. Мы оставим эту задачу читателю.

Отметим еще соотношение

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} h(t) dt = \frac{\Gamma(z)}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (-s)^{-z} ds \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt, \quad \gamma < 0, \quad (30.3)$$

которое получается по схеме, указанной в (30.2'), с учетом (12.30). Условия справедливости (30.3), а также подобных ему соотношений приведены в [377]. В некоторых случаях это соотношение можно применить для исследования асимптотики преобразования Меллина.

Интегральные преобразования для исследования асимптотики интегралов применяются также по другим схемам, например в [250]. В указанной работе приведены асимптотические выражения некоторых интегралов свертки и интегралов с переменным верхним пределом.

30.1.3. Приводим два примера с общей функцией нагрузки, когда асимптотику проще найти другими методами.

1°. Согласно схеме (30.2') в случае преобразования Лапласа имеем

$$\int_0^1 \exp(-xg(t)) h(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px} dp \int_0^1 \frac{h(t) dt}{p+g(t)}, \quad \gamma > 0.$$

Пусть $g(0)=0$, $g(t)>0$ при $t \in (0, 1]$. Тогда основной особой точкой изображения является $p=0$. В ее окрестности надо построить разложение внутреннего интеграла. Для этого можно использовать результаты п. 14.2. (Более сложным путем это разложение получено в [363].) Затем следует применить соответствующие теоремы из п. 22.3—22.5. Однако более простым путем и при более общих предположениях относительно функций $g(t)$ и $h(t)$ разложение данного интеграла получено в теореме 16.1.

2°. По той же схеме имеем

$$\int_0^1 J_0(xt) h(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px} dp \int_0^1 \frac{h(t)}{\sqrt{p^2+t^2}} dt, \quad \gamma > 0. \quad (30.4)$$

Пусть $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t \in [0, 1]$. Каждый из интегралов $\int_0^1 t^k (p^2 + t^2)^{-1/2} dt$ можно выразить с помощью элементарных функций. При $k=2m+1$ особыми точками являются $p = \pm i$, при $k=2m$ — также $p=0$. Поэтому выполнение обращения довольно сложно. Более общие результаты для интеграла (30.4) проще получены в п. 10.4, 12.6.2 и 15.2, 2°. Можно также использовать результаты п. 16.4. Пример (30.4) приведен в [363], где асимптотическое выражение при общем $h(t)$ не построено до конца.

30.2. Применение ε -преобразований

30.2.1. Одним из наиболее распространенных методов для построения асимптотических разложений интегралов является разложение функции нагрузки в окрестности критической точки в ряд и почленное интегрирование. В случае осциллирующих или степенных ядер и бесконечного предела интеграла этот метод обычно неприменим, так как получаются расходящиеся интегралы. Тогда используются другие методы, рассмотренные в первых двух томах монографии.

Некоторые авторы для таких случаев предлагают следующий прием: под знак интеграла вводится дополнительный множитель сходимости $\mu(t, \varepsilon)$, $\mu(t, 0) \equiv 1$, обеспечивающий сходимость рассматриваемых интегралов, а затем во всех выражениях берется предел при $\varepsilon \rightarrow +0$. В случае $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t}$ для расходящегося интеграла такая процедура называется *суммированием интеграла по методу Абеля* [20]. Поскольку введением множителя сходимости данный интеграл, а также упомянутые формально полученные расходящиеся интегралы подвергаются преобразованию (но не по схеме (30.1)) с ядром преобразования $\mu(t, \varepsilon)$, то назовем его *ε -преобразованием*. Методом, в какой-то мере родственным ε -преобразованием, но отличающимся от него выполняемыми действиями, является введение нейтрализатора, использованное в § 10, 12 и 16.

Имеется еще другой случай, когда целесообразно введение множителя сходимости. Под знаком интеграла может стоять разность двух функций, но интегралы от отдельных функций расходятся. Иногда для разделения интеграла на части целесообразно под его знак ввести множитель $\mu(t, \varepsilon)$, который вы-

бирается с таким расчетом, чтобы для отдельных интегралов легко можно было построить разложения или даже вычислить их. Затем выполняется предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$. Применяется также отрезание того конца пути интегрирования, который создает расходимость. Этот вариант тоже можно включить в ε -преобразование с множителем $\mu_0(t, \varepsilon) = \eta(t - \varepsilon)$ или $\mu_\infty(t, \varepsilon) = \eta(\varepsilon^{-1} - t)$, где $\eta(\tau)$ определено в (29.68). Поэтому все упомянутые случаи, которые назовем соответственно ε -преобразованием первого, второго и третьего рода, можно рассматривать в объединенном виде.

Справедлива очевидная

Теорема 30.1. Пусть 1) функция $\mu(t, \varepsilon)$ непрерывна в $[0, \infty)[0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$; 2) $\mu(t, 0) \equiv 1$ при $t \in [0, \infty)$; 3) для интеграла $\int_0^\infty K(x, t)H(x, t)dt$ критической является точка t_0 , в окрестности которой

$$H(x, t) = \sum_{m=0}^n a_m(x) \varphi_m(t) + \rho_n(x, t); \quad (30.5)$$

$$\varphi_{m+1}(t) = o(\varphi_m(t)), \quad \rho_n(x, t) = o(\varphi_n(t));$$

4) существуют интегралы

$$\Omega(x, \varepsilon) = \int_0^\infty \mu(t, \varepsilon) K(x, t) H(x, t) dt, \quad (30.6)$$

$$G_m(x, \varepsilon) = \int_0^\infty \mu(t, \varepsilon) K(x, t) \varphi_m(t) dt$$

и их пределы при $\varepsilon \rightarrow +0$; 5) функции $g_m(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_m(x, \varepsilon) a_m(x)$ образуют шкалу при $x \rightarrow x_0$, $x \in X$; 6) при $x \rightarrow x_0$, $x \in X$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R_n(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \mu(t, \varepsilon) K(x, t) \rho_n(x, t) dt = O(g_{m_n}(x)), \quad (30.7)$$

$m_n \uparrow +\infty$. Тогда при $x \rightarrow x_0$, $x \in X$

$$\int_0^\infty K(x, t) H(x, t) dt = \sum_{m=0}^n g_m(x) + O(g_{m_n}(x)). \quad (30.8)$$

Примечания. 1°. В случае преобразования второго рода $G_m(x, \varepsilon)$ состоит из разности двух интегралов. Если $\mu(t, \varepsilon)$

подобран так, что $\Omega(x, \varepsilon)$ после отделения интегралов можно выразить в явном виде без применения (30.5), то условия 3), 5) и 6) излишни. Вместо них следует оправдать предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$ в асимптотическом разложении для $\Omega(x, \varepsilon)$ (см. пример 30.2.7, 3°).

2°. Теорема не относится к преобразованию третьего рода. Если отдельные интегралы вычисляются в явном виде, как обычно бывает, то следует учитывать примечание 1°. Применение преобразования третьего рода рассмотрено в п. 30.2.6, 4°.

3°. Иногда функция $H(x, t)$ разлагается по шкале $\{a_m(x)\}$. Тогда в (30.5) $a_{m+1}(x) = o(a_m(x))$ при $x \rightarrow x_0$, $x \in X$ и $\rho(x, t) = = o(a_n(x))$. Остальные условия сохраняются.

30.2.2. Анализируем подробнее возможности выполнения условий 4) — 6) теоремы 30.1.

А. Обычно берется $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t^\beta}$, $\beta > 0$, а в случае преобразования второго рода — также $\mu(t, \varepsilon) = t^{\pm \varepsilon}$. В первом случае подстановкой $t^\beta = \tau$ $\Omega(x, \varepsilon)$ приводится к преобразованию Лапласа относительно ε . Известно [182], что из сходимости интеграла $\Omega(x, 0)$, которая дана в условии 2), при $x \in X$ следует равномерная сходимость интеграла $\Omega(x, \varepsilon)$ в секторе $|\arg \varepsilon| \leq \leq (\pi/2) - \eta$, $\eta > 0$. Поэтому $\Omega(x, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Omega(x, \varepsilon)$, если функции

$K(x, t)$ и $H(x, t)$ кусочно-непрерывны относительно t . Допустим в п. 30.2, что эти требования относительно $K(x, t)$ и $H(x, t)$ выполнены.

Во втором случае промежуток интегрирования разобьем на $[0, 1]$, $[1, \infty)$. Пусть $\mu(t, \varepsilon) = t^\varepsilon$. Первый интеграл подстановкой $t = e^{-\tau}$ приводим к интегралу Лапласа, а второй подстановкой $t = 1/\tau$ — к первому. Случай, когда $\mu(t, \varepsilon) = t^{-\varepsilon}$, подстановкой $t = 1/\tau$ приводим к предыдущему. Поэтому условие 4) относительно $\Omega(x, \varepsilon)$ обычно выполняется.

Б. В случае осциллирующей функции $K(x, t)$ интеграл $G_m(x, 0)$ обычно расходится начиная с некоторого m . Однако функции $G_m(x, \varepsilon)$ в таком случае часто можно аналитически продолжить в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ на плоскости ε . Тогда условие 4) выполняется также относительно $G_m(x, \varepsilon)$. Если, в частности, $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t}$, $K(x, t) = K_0(xt)$, $x_0 = \infty$ и $\varphi_m(t) = = t^m$, $K_0(t) \doteq k(\varepsilon)$ и $k(\varepsilon)$ в окрестности $\varepsilon = 0$ аналитична, то согласно свойствам преобразования Лапласа [182] имеем

$$g_m(x) = (-1)^m a_m(x) k^{(m)}(0) x^{-m-1}. \quad (30.9)$$

Эта формула в дальнейшем будет неоднократно использоваться.

Приводим важный признак существования предела интеграла Лапласа при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Лемма 30.1. Пусть 1) функция $K(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +0$ $K(t) = O(t^\lambda)$, $\lambda > -1$; 3) при

$t \rightarrow +\infty$ $K(t) \sim \exp[-\kappa t + i\alpha t] \sum_{h=0}^{\infty} a_h t^{-\lambda_h}$, $\lambda_h \uparrow +\infty$, $\alpha \neq 0$, α — действительное число, $\kappa \geq 0$. Тогда при $x \geq x_0 > 0$ существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} K(xt) dt$.

Доказательство. Если $\kappa > 0$, то интеграл сходится при $\varepsilon = 0$ и утверждение теоремы следует из п. А. То же самое относится к случаю $\kappa = 0$, $\lambda_0 > 0$. При $\lambda_0 \leq 0$, $\kappa = 0$ отделим группу членов с неотрицательными показателями степени и $K(xt)$ разобьем на сумму $K_0(xt) + K_1(xt)$. Существование предела для интеграла с ядром $K_0(xt)$ следует из равенства

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} e^{i\alpha x t} t^{\mu} dt = \frac{\Gamma(\mu+1)}{(\varepsilon - i\alpha x)^{\mu+1}}, \quad \mu \geq 0. \blacksquare \quad (30.10)$$

Примечания. 1°. Если вместо $e^{i\alpha t}$ имеем множитель $e^{i\alpha t^{\beta}}$, $\beta > 0$, то можно взять $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t^{\beta}}$ и применить подстановку $t^{\beta} = \tau$.

2°. Асимптотическое разложение для $K(t)$ может состоять из нескольких рядов, экспоненциальные множители которых содержат разные α и β . Такой случай имеем для функции $J_{\nu}(t)$.

3°. Если функции $\varphi_m(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ имеют степенную асимптотику, то функции $K(xt)\varphi_m(t)$ удовлетворяют условию 3) леммы 30.1. Обычно эти функции удовлетворяют и остальным условиям леммы, и тогда условие 4) теоремы 30.1 относительно $G_m(x, \varepsilon)$ выполнено.

В. В случае постоянных a_m условие 5) теоремы 30.1 выполнено, если функции $G_m(x, +0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_m(x, \varepsilon)$ образуют шкалу,

однако можно допускать также разные переменные $a_m(x)$. Если $a_m(x) = O(1)$, то иногда получается сильноасимптотическое разложение.

Г. Возможности применения ε -преобразования ограничены условием 6). Ясно, что при столь общей постановке его проверить невозможно, поэтому следует задать дополнительную информацию относительно функций μ , K , H . Пусть $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t}$. Обычно при оценке остатка в (30.7) нельзя под знаком интеграла брать модуль, так как тогда теряется осциллирующий характер подынтегральной функции и полученный в (30.7) интеграл в точке $\varepsilon = 0$ имеет особенность согласно следующей теореме [182]: если $F(t) \geq 0$, интеграл $f(\varepsilon) = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} F(t) dt$ сходится при $\varepsilon > 0$ и расходится при $\varepsilon = 0$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(\varepsilon) = \infty$. Поэтому

следует искать требуемую оценку другим методом. Ниже будут рассмотрены методы при разных дополнительных условиях.

30.2.3. Исследуем сначала возможность прямого применения в (30.5) формулы Тейлора. Пусть $t_0=0$ и

$$H(x, t) = \sum_{m=0}^n H_m(x, 0) t^m + \frac{1}{n!} \int_0^t H_{n+1}(x, \tau) (t-\tau)^n d\tau, \quad (30.11)$$

$$H_m(x, t) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} H(x, t).$$

Тогда

$$R_n(x, \varepsilon) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K(x, t) dt \int_0^t H_{n+1}(x, \tau) (t-\tau)^n d\tau. \quad (30.12)$$

Пусть функция $H_{n+1}(x, t)$ монотонно убывает при возрастании t и не меняет знака. Тогда путем изменения порядка интегрирования, применения второй теоремы о среднем и вторичного изменения порядка интегрирования при обозначении $K(x, t) \doteq \doteq k(x, \varepsilon)$ с учетом (30.9) получаем

$$\begin{aligned} R_n(x, \varepsilon) &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty H_{n+1}(x, \tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-\varepsilon t} K(x, t) (t-\tau)^n dt = \\ &= \frac{H_{n+1}(x, 0)}{n!} \int_0^{\eta(x, \varepsilon)} d\tau \int_\tau^\infty e^{-\varepsilon t} K(x, t) (t-\tau)^n dt = \frac{H_{n+1}(x, 0)}{(n+1)!} \times \\ &\times \left[\int_0^\eta e^{-\varepsilon t} K(x, t) t^{n+1} dt + \int_\eta^\infty e^{-\varepsilon t} K(x, t) (t^{n+1} - (t-\eta)^{n+1}) dt \right] = \\ &= \frac{H_{n+1}(x, 0)}{(n+1)!} \left[(-1)^{n+1} k_{n+1}(x, \varepsilon) - e^{-\varepsilon \eta} \int_0^\infty e^{-\varepsilon \tau} K(x, \tau + \eta) \tau^{n+1} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (30.13)$$

Законность изменения порядка интегрирования вытекает из приведенных ниже в теореме 30.2 условий.

Если $k(x, \varepsilon)$ в окрестности $\varepsilon=0$ аналитична, то имеем $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} k_{n+1}(x, \varepsilon) = k_{n+1}(x, 0)$. Но функция $\eta(x, \varepsilon) \in [0, \infty)$ неизвестна, поэтому мы не знаем, к чему стремится $e^{-\varepsilon \eta(x, \varepsilon)}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Известно лишь то, что этот множитель остается ограниченным, поэтому на последний интеграл в (30.13) тоже целесо-

образно наложить требование ограниченности. Следовательно, доказана

Теорема 30.2. Пусть 1) интеграл в левой части (30.14) при каждом $x \in X$ существует; 2) при каждом $x \in X$ $H(x, t) \in C^\infty[0, \infty)$; 3) функции $H_n(x, t)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, при каждом $x \in X$ монотонно убывают по t и не меняют знака; 4) $K(x, t)$ при каждом $x \in X$ и $T > 0$ локально интегрируема по t в $[0, T]$; 5) функция $k(x, \varepsilon) \equiv K(x, t)$ существует при $\varepsilon > 0$ и аналитична в окрестности $\varepsilon = 0$; 6) равномерно относительно $\eta \in [0, \infty)$ и $x \in X$ имеет место $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K(x, t + \eta) t^{n+1} dt = O(1)$. Тогда при $x \in X$ и каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\int_0^\infty K(x, t) H(x, t) dt = \sum_{m=0}^{n+1} \frac{(-1)^m}{m!} H_m(x, 0) k_m(x, 0) + H_{n+1}(x, 0) O(1). \quad (30.14)$$

Примечания. 1°. Формула (30.14) дает сильноасимптотическое разложение, если функции $H_m(x, 0)$ образуют шкалу и $k_m(x, 0) = O(1)$. Такое соотношение имеет место всегда, когда $K(x, t)$ не зависит от x . В работе [327] вместо 6) приведены некоторые другие условия, когда в (30.14) имеется асимптотическое разложение.

2°. Требование о монотонности $H_n(x, t)$ можно заменить следующим требованием: при $n \in \mathbb{N}$ $H_n(x, t)$ — функция ограниченной вариации относительно t .

3°. Теорема 30.2 доказана в [340], но более сложным путем: используется представление

$$\Omega(x) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K(x, t) e^{\varepsilon t} H(x, t) dt,$$

поэтому в дальнейших действиях, примененных в доказательстве теоремы 30.2, функция $H(x, t)$ заменена на $e^{\varepsilon t} H(x, t) = H(x, t, \varepsilon)$, что приводит к более сложным преобразованиям. Кроме того, с учетом независимости $\Omega(x)$ от ε применяется теория нейтрис (см. теорему 6.4). Некоторые дополнения к работе [340] приведены в [327].

4°. Можно задавать достаточные условия, при которых выполнено условие 6) теоремы 30.2. С помощью (30.10) нетрудно доказать, что это условие выполнено, если $K(x, t)$ — ограниченная функция в $X \times [0, \infty)$, и при $t \rightarrow \infty$ обладает асимптотическим разложением $K(x, t) \sim \exp[i\alpha t + i\beta x] \sum_{k=0}^\infty a_k t^{-\lambda_k}$, $0 \leq \lambda_k \uparrow + \infty$,

$\alpha \neq 0$, α , β — действительные числа. К этому признаку относятся примечания 1° и 2° к лемме 30.1. Более подробное доказательство можно найти в [340]. С учетом указанного признака можно построить разложение для $\int_0^\infty J_0(t)H(t/x)dt$, если функция $H(t/x)$ удовлетворяет условиям теоремы 30.2. Другие примеры к теореме 30.2 приведены в [340].

30.2.4. В теореме 30.2 весьма ограничивающим является условие 3). Поэтому исследуем другие подходы к обоснованию условий теоремы 30.1. В некоторых частных случаях для оценки остатка (30.7) можно применить интегрирование по частям аналогично, как в п. 12.6, но без использования нейтрализатора.

Теорема 30.3. Пусть 1) $K(t)$ удовлетворяет условиям леммы 30.1, причем $\lambda_0 > 0$, $\kappa = 0$; 2) при $t \rightarrow +0$ и каждом $n \in \mathbb{N}$

$$H(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^{\mu_k} + \rho_n(t), \quad \rho_n(t) = O(t^{\mu_{n+1}}), \quad -1 - \lambda < \mu_k \uparrow + \infty, \quad (30.15)$$

и соотношение (30.15) дифференцируемо сколь угодно раз; 3) $H(t) \in C^\infty(0, \infty)$; 4) при $t \rightarrow +\infty$ и каждом $j \in \mathbb{N}$

$$H^{(j)}(t) = e^{\gamma t} \sum_{k=0}^{h_j} d_{kj} t^{\nu_{kj}} + O(t^{\lambda_0 - 1 - \eta}), \quad (30.16)$$

$\gamma_{0j} < \lambda_0$, $\gamma_{k+1,j} < \gamma_{kj}$, γ — действительное число, $\eta > 0$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^\infty K(xt)H(t)dt \sim \sum_{k=0}^\infty b_k c_k x^{-\mu_k - 1}, \quad (30.17)$$

где

$$c_k = \lim_{\varepsilon/x \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon \tau/x} K(\tau) \tau^{\mu_k} d\tau. \quad (30.18)$$

Доказательство. При достаточно больших x $\alpha x + \gamma \neq 0$. В силу условий 1), 2) и 4) согласно лемме 30.1 интеграл (30.17) при достаточно больших x сходится, поэтому можно ввести множитель $e^{-\varepsilon t}$ и использовать теорему 30.1. Из леммы 30.1 и п. 30.2.2, В следует, что условия 1)–5) теоремы 30.1 выполнены. Для проверки выполнения условия 6) этой теоремы фиксируем $m = [\mu_n]$ и интеграл (30.7) при $\mu(t, \varepsilon) \equiv e^{-\varepsilon t}$ интегрируем по частям $m+1$ раз. При этом учитываем, что $\rho_n(t) \in C^\infty(0, \infty)$ и при $t \rightarrow +0$ $\rho_n^{(j)}(t) = O(t^{\mu_{n+1} - j})$, $\mu_{n+1} - m - 1 \geq \mu_{n+1} - \mu_n - 1 > -1$,

а при $t \rightarrow +\infty$ $\rho_n^{(j)}(t) = H^{(j)}(t) - \sum_{k=0}^n b_{kj} * t^{\nu_k - j}$, где $H^{(j)}(t)$ выражается согласно (30.16). Вводим также функции $K_{-j}(t) = \int_t^\infty K_{-j+1}(\tau) d\tau$, $j \geq 1$, $K_0(\tau) \equiv K(\tau)$. Согласно лемме 8.4 функции $K_{-j}(t)$ удовлетворяют условиям леммы 30.1 и при $t \rightarrow +0$ ограничены, если $j > 0$.

Интегрируя интеграл (30.7) по частям, с учетом того, что свободный член аннулируется, получаем

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K(xt) \rho_n(t) dt = (\varepsilon/x) \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K_{-1}(xt) \rho_n(t) dt - (1/x) \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K_{-1}(xt) \rho_n'(t) dt.$$

Согласно свойствам функций K_{-1} и ρ_n первый интеграл в этом равенстве в силу леммы 30.1 имеет предел при $\varepsilon \rightarrow +0$, поэтому данный член обладает оценкой $O(\varepsilon)$. Вновь интегрируя второй интеграл по частям, после аналогичных рассуждений приходим к соотношению

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K(xt) \rho_n(t) dt = O(\varepsilon) + \frac{(-1)^{m+1}}{x^{m+1}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K_{-m-1}(xt) \rho_n^{(m+1)}(t) dt. \quad (30.19)$$

Последний интеграл сходится при $\varepsilon=0$, поэтому в (30.19) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$. Еще следует показать, что интеграл в правой части (30.19) остается ограниченным при $x \geq x_0$. Это легко осуществить, если интеграл разбить по сегментам $[0, c]$, $[c, \infty)$ и учесть свойства подынтегральных функций. Для первого интеграла получаем оценку $O(1)$, для второго — $O(x^{-\lambda_0})$. ■

Примечания. 1°. Требование $\lambda_0 > 0$ в условии 1) необходимо для ссылки на лемму 8.4. Но от него можно освободиться.

Пусть $\lambda_p \leq 0$, $\lambda_{p+1} > 0$. Тогда обозначим $K(t) = e^{iat} \sum_{k=0}^p a_k t^{-\lambda_k} + K_1(t) \equiv K_0(t) + K_1(t)$. Относительно $K_1(t)$ справедлива теорема 30.3, а относительно $K_0(t)$ интеграл можно разбить по отдельным членам и обозначить $H(t) t^{-\lambda_k} = h_k(t)$. Эти функции

удовлетворяют условиям теоремы 30.3, так как $\gamma_{0j} < \lambda_0$, поэтому доказательство можно строить, как в теореме 30.3, интегрируя при оценке остатка функцию $e^{i\alpha x t}$. Случай $K(t) = e^{i\alpha t}$ данным методом рассмотрен в [386].

2°. Если в лемме 30.1 $\kappa > 0$, то доказательство теоремы 30.3 тривиально. Однако κ может зависеть от дополнительного параметра и при некоторых его значениях $\kappa = 0$ (см. (30.38)). Тогда теорема 30.3 сохраняет силу, так как лемму 8.4 легко видоизменить для случая, когда к правой части (8.20) добавляется множитель $e^{-\kappa t}$, $\kappa \geq 0$.

3°. При конкретных $K(t)$ условия теоремы допускают разные модификации. Иногда можно изменить условие (30.16), например допустить множитель $e^{i\gamma t^\nu}$, $\nu > 0$. Можно изменить также условие (30.15), допустив, что $b_k \equiv b_k(x)$ и функции $b_k(x)x^{-\mu_k-1}$ образуют шкалу или $b_k(x) = O(1)$. Пример к последнему случаю приведен в [329]. Иногда для более простого вычисления c_k целесообразнее брать $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t^\beta}$, $\beta > 0$. Такой пример в случае $K(t) = J_\nu(t)$ при $\beta = 2$ рассмотрен в [409]. В случае, когда вместо (30.16) дано другое условие, теорема 30.3 доказана в [437, 438]. Эти замечания означают, что на основе теоремы 30.3 можно сформулировать разные модифицированные теоремы.

Теорема 30.4. Пусть 1) $K(t)$ удовлетворяет условиям леммы 30.1; 2) $H(t)$ аналитична в секторе S : $|\arg t| \leq \varphi \leq \pi - \eta$, $\eta > 0$; 3) при $t \rightarrow 0$, $t \in S$ справедливо представление (30.15), которое можно сколь угодно раз дифференцировать; 4) при $t \rightarrow \infty$, $t \in S$ справедливо (30.16), где $\gamma = 0$. Тогда при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$

$$\int_0^\infty K(t) H(t/z) dt \sim \sum_{k=0}^\infty b_k c_k z^{-\mu_k-1}, \quad (30.20)$$

где

$$c_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K(t) t^{\mu_k} dt. \quad (30.21)$$

Доказательство теоремы при $\lambda_0 > 0$ вполне аналогично доказательству теоремы 30.3. При оценке остатка ряда (30.20) интегрированием по частям следует учитывать формулу $\frac{d^j}{dt^j} \rho_n(t/z) = z^{-j} \rho_n^{(j)}(t/z)$. Несколько отличается оценка интеграла, аналогичного (30.19): $((-1)^{m+1}/z^{m+1}) \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K_{-m-1}(t) \rho_n^{(m+1)}(t/z) dt$. Положим в нем $\varepsilon = 0$ и разобьем его по промежуткам $[0, c]$,

$[c, |z|]$, $[|z|, \infty)$. В первых двух интегралах используем оценку $\rho_n^{(m+1)}(\tau) = O(\tau^{\mu_{n+1}-m-1})$, а для $K_{-m-1}(t)$ соответственно $O(1)$ и $O(t^{-\lambda_0})$. В последнем интеграле применяются асимптотические представления обеих подынтегральных функций. В итоге получаем оценку

$$R_n(z, 0) = O(z^{-\mu_{n+1}}) + O(z^{-m-\lambda_0}) + O(z^{-m-1-\lambda_0}) + O(z^{-m-\lambda_0}), \quad (30.22)$$

которая обеспечивает справедливость разложения (30.20). В случае $\lambda_0 + m = \mu$ второй член в (30.22) следует заменить на $O(z^{-\mu_{n+1}} \ln |z|)$. При $\lambda_0 \leq 0$ приходится учитывать примечание 1° к теореме 30.3. ■

Соотношение между теоремами 30.3 и 30.4 имеет такой же двойственный характер, как соотношения между теоремами в п. 11.1 и 11.2 или между теоремами 12.1 и 14.3.

30.2.5. Теорема 30.5. Пусть 1) интеграл $h(\varepsilon) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} H(t) dt$ сходится при каждом $\varepsilon > 0$ и функция $h(\varepsilon)$ аналитически продолжима в круге $|\varepsilon| < \varepsilon_0$; 2) ряд $K(x, t) = \sum_{h=0}^\infty a_h(x) t^h$ сходится при $t \geq 0$, $x \in X$; 3) ряд $\sum_{m=0}^\infty m! a_m(x) t^m$ сходится при $x \in X$, $|t| < R_0$, $R_0 > 1/\varepsilon_0$; 4) при $t \rightarrow +0$ $H(t) = O(t^\lambda)$, $\lambda > -1$, а при $t \rightarrow \infty$ $H(t) = O(t^\omega)$, $\omega \geq 0$; 5) $\int_0^\infty K(x, t) H(t) dt$ сходится при $x \in X$. Тогда при $x \in X$

$$\int_0^\infty K(x, t) H(t) dt = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m a_m(x) h_m(0). \quad (30.23)$$

Доказательство. Поскольку согласно условиям 3) и 4) и соотношению $\Gamma(m + \omega + 1) \sim m! m^\omega$ ряд $\sum_{m=0}^\infty |a_m(x)| \Gamma(m + \omega + 1) \varepsilon^{-m-\omega-1}$ сходится при $1/\varepsilon < R_0$, то в силу леммы 5.1 ряд для $K(x, t)$ после умножения его на $e^{-\varepsilon t} H(t)$ можно почленно интегрировать. Согласно (30.9) при $x \in X$, $\varepsilon > 1/R_0$ имеем равенство

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} K(x, t) H(t) dt = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m a_m(x) h_m(\varepsilon). \quad (30.24)$$

Функция $h(\varepsilon)$ аналитична также в полуплоскости $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$. Фиксируем число $R_1 \in (1/R_0, \varepsilon_0)$ и рассматриваем семейство кругов радиусом R_1 с центрами в точках $\varepsilon \in [0, R_1]$. Область D , занимаемая этими кругами, лежит в области аналитичности функции $h(\varepsilon)$, поэтому существует $M = \max_{\varepsilon \in D} |h(\varepsilon)|$. Из формулы Коши при $\varepsilon \in [0, R_1]$ следует оценка $|h_m(\varepsilon)| < M m! / R_1^m$, а ряд

$M \sum_{m=0}^{\infty} m! |a_m(x)| R_1^{-m}$, мажорантный для (30.24), согласно условию 3) сходится. Поэтому соотношение (30.24) справедливо при $\varepsilon \in [0, R_1]$. Отсюда следует (30.23). ■

Примечания. 1°. Если функции $a_m(x)$ образуют шкалу при $x \rightarrow x_0 \in X$, то можно доказать, что ряд (30.24) дает требуемое асимптотическое разложение. Пример к теореме 30.5 приведен в [329].

2°. Функции $H(t) = J_\nu(\varepsilon_0 t)$, $\operatorname{Re} \nu > -1$, $H(t) = t^\lambda e^{i\varepsilon_0 t}$, $\operatorname{Re} \lambda > -1$, удовлетворяют условиям теоремы 30.5.

Аналогично доказывается следующая двойственная теореме 30.5

Теорема 30.6. Пусть 1) ряд $H(t) = \sum_{h=0}^{\infty} H_h(0) t^h / h!$ сходится при всех $t \geq 0$; 2) интеграл Лапласа от $|K(xt)| \sum_{h=0}^{\infty} |H_h(0)| t^h / h!$ сходится при $\varepsilon > 0$, $x \geq x_0 > 0$; 3) интеграл $\int_0^{\infty} K(xt) H(t) dt$ сходится при $x \geq x_0$; 4) интеграл $\kappa(\varepsilon) = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} K(t) dt$ сходится при $\varepsilon > 0$ и функция $\kappa(\varepsilon)$ аналитически продолжаема в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$; 5) ряд $\sum_{h=0}^{\infty} |H_h(0)| x^{-h}$ сходится при достаточно больших x . Тогда существует такое $x_1 \geq x_0$, что при $x \geq x_1$

$$\int_0^{\infty} K(xt) H(t) dt = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} H_h(0) \kappa_h(0) x^{-h-1}. \quad (30.25)$$

При первых трех условиях незаконченная теорема 30.6 в форме

$$\int_0^{\infty} K(xt) H(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} H_h(0) \kappa_h(\varepsilon/x) x^{-h-1}$$

приведена в [367].

30.2.6. Дадим краткий обзор других методов обоснования ε -преобразования, не затронутых в предыдущем тексте.

1°. В работе [311] приведена следующая

Теорема 30.7. Пусть 1) $K(t) = e^{-iat} g(t) \equiv e^{-iat} \int_0^{\infty} e^{-t\tau} d\psi(\tau)$, где $\psi(\tau)$ — функция ограниченной вариации в $[0, \infty)$; 2) функции $a_m(x)$ образуют шкалу при $x \rightarrow x_0$, $x \in X$; 3) $\int_0^t H(x, t) dt =$

$= \sum_{m=0}^n a_m(x) Q_m(t) + \rho_n(x, t)$, $\rho_n(x, t) = o(a_n(x))$ при $x \rightarrow x_0$, $x \in X$;

4) функции $Q_m(t)$ — полиномы степени не выше m_0 ; 5) можно найти такое $p > m_0$, что $\int_0^{\infty} |H_p(x, t)| dt = o(a_n(x))$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда при $x \rightarrow x_0$, $x \in X$, $\alpha \neq 0$ имеет место

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-iat} g(t) H(x, t) dt = \\ & = \sum_{m=0}^n a_m(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} e^{-iat} g(t) Q_m'(t) dt + o(a_n(x)), \quad (30.26) \end{aligned}$$

причем пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (30.26) существуют.

Если функция $g(t)$ абсолютно монотонна, т. е. $(-1)^k g^{(k)}(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ и всех $k \in \mathbb{N}$, то условие 1) выполнено согласно теореме Хаусдорфа [365]. Это условие важно для существования предела в (30.26), что можно доказать изменением порядка интегрирования.

Следует отметить, что леммы 2 и 3 из работы [311], на которые опирается доказательство теоремы 30.7, сформулированы недостаточно точно и их доказательства непонятны. В связи с этим непонятно и доказательство теоремы 30.7.

2°. Имеются попытки оправдать применение ε -преобразования с помощью теории обобщенных функций. В [368] применяется $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t^\lambda}$, $\lambda = 1, 2$, но $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ понимается в обобщенном смысле. Поскольку в этой работе используются нейтрализаторы и интегрирование по частям, то для обычных функций примененный метод аналогичен тем, которые рассматривались в п. 12.6 и 16.4, а $\mu(t, \varepsilon)$ применяется лишь для установления формул, аналогичных (16.119).

В [381] ε -преобразование при $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t}$ применено для разложения преобразования Стильтеса, т. е. в случае, когда $K(x, t) = (x+t)^{-1}$, $H(x, t) \equiv H_0(t)$. Применяемый метод по существу аналогичен методу последовательного разложения (см. § 11), и результаты упомянутой работы можно получить без применения обобщенных функций и множителя $e^{-\varepsilon t}$.

3°. В случае $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t}$ можно применить косвенный метод обоснования — аппроксимацию функции нагрузки линейной комбинацией показательных функций. Этот метод изложен в п. 13.4 и его обобщение будет рассмотрено в п. 30.3.

4°. В [360] рассмотрено применение ε -преобразования

третьего рода к интегралам $\int_0^{\infty} \sin xt h(t) dt$, $\int_0^{\infty} \cos xt h(t) dt$ при $x \rightarrow 0$ в случае, когда $h(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{-m-\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, причем ряд при $t \geq \varepsilon$ абсолютно сходится. После почленного интегрирования с помощью остроумных преобразований удастся освободиться от членов, содержащих степени ε^{-1} , если только полученные ряды сходятся. Затем можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получить сходящиеся асимптотические разложения при малых x . При более слабых условиях эти разложения следуют из теорем 11.1—11.3.

Почти все отмеченные в п. 30.2.6 методы, а также теоремы 30.5 и 30.6 налагают на данные функции весьма жесткие условия. Частично это относится и к теореме 30.2. Более слабые условия предъявлены в теоремах 30.3 и 30.4. Из сравнения результатов теорем, связанных с ε -преобразованием, с результатами, полученными в п. 8.2, § 10, 11, п. 12.6, 13.4, 15.2, 16.4, 31.2, 31.3 и п. 32.2 и относящимися к случаю осциллирующих подынтегральных функций, следует, что лишь в редких случаях ε -преобразование дает новые результаты. Однако его применение иногда целесообразно потому, что этим методом легче вычислить коэффициенты разложения. Кроме того, он нередко дает возможность точнее оценить остаток разложения, представленный в виде интеграла. Преобразования второго и третьего рода обычно применяются в том случае, когда отдельные интегралы вычисляются в явном виде с помощью известных специальных функций.

30.2.7. Рассмотрим несколько примеров.

1°. При $\mu + \nu > -1$, $\lambda > \mu - 1/2$ согласно теореме 30.4 при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \eta$ получаем

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \int_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(t) t^{\mu}}{(z+t)^{\lambda}} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon t} J_{\nu}(t) t^{\mu}}{(z+t)^{\lambda}} dt \sim \\ &\sim \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{m} z^{-\lambda-m} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} J_{\nu}(t) t^{\mu+m} dt. \end{aligned}$$

Согласно формуле (7.7.3 (16)) из [2] при $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} J_{\nu}(\alpha t) t^{\mu-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\alpha^{\nu}}{2^{\nu}(\varepsilon^2 + \alpha^2)^{(\mu+\nu)/2}} {}_2F_1 \left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}; \nu+1; \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \varepsilon^2} \right). \end{aligned} \quad (30.27)$$

Предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ в правой части (30.27) существует. После преобразований с учетом свойств ${}_2F_1$ и формулы Гауса для Γ -функции в силу (30.9) при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \eta$ получаем

$$\Omega(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{m} 2^{m+\mu} \left[\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+m+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu-m}{2}\right) \right] z^{-m-\lambda}. \quad (30.28)$$

При $z=x$ формула (30.28) непосредственно следует из (12.106), если в $\Omega(x)$ применить подстановку $t=x\tau$. Разложение интеграла $\Omega(z)$ при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi - \eta$ можно найти с помощью теоремы 11.4.

2°. Для разложения интеграла $\int_0^{\infty} e^{ixt^\beta} H(t) dt$, $\beta > 0$, целесообразно взять $\mu(t, \varepsilon) = e^{-zt^\beta}$ и применить подстановку $t^\beta = \tau$. Если функция $H_0(t) = H(t^{1/\beta}) t^{1/\beta-1}$ удовлетворяет условиям теоремы 30.3 и при $t \rightarrow +0$ обладает разложением (30.15), то с учетом (30.10) получаем разложение

$$\int_0^{\infty} e^{ixt^\beta} H(t) dt \sim (1/\beta) \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{i\pi(\mu_k+1)/2} \Gamma(\mu_k+1) x^{-\mu_k-1},$$

которое следует также из (12.104).

3°. Приводим примеры к преобразованию второго рода. Имеем

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t(1+t)^{z+1}} \right] dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_0^{\infty} t^{\varepsilon-1} e^{-t} dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} \frac{t^{\varepsilon-1}}{(t+1)^{z+1}} dt \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Gamma(\varepsilon) \left[1 - \frac{\Gamma(z+1-\varepsilon)}{\Gamma(z+1)} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{\Gamma(z+1-\varepsilon)}{\Gamma(z+1)} \right]. \end{aligned}$$

Если $\Gamma(z+1-\varepsilon)$ разложить по степеням ε , то получим, что $F(z) = \psi(z+1)$ (формула Дирихле). Если к отношению Γ -функций применить (12.62), то с учетом формулы Тейлора для $z^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon \ln z}$, соотношения $B_k(1) = (-1)^k B_k$ и (9.52) при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi/2$ приходим к разложению (9.51). Предельный

переход при $\varepsilon \rightarrow +0$ в остатке ряда (12.62) в данном случае легко оправдать.

Аналогично из формулы

$$\ln [\Gamma(z+a)/\Gamma(z)] = \int_0^{\infty} t^{-1} [ae^{-t} - e^{-zt}(1 - e^{-at})(1 - e^{-t})^{-1}] dt, \quad a \neq 0,$$

при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \eta$ следует разложение Сонина, которое непосредственно получается из (28.69).

4°. При $\mu(t, \varepsilon) = t^{-\varepsilon}$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2$, $a > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left[J_{\nu}^2(xt) - \frac{1}{\pi x(a+t)} \right] dt = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\left(\frac{x}{2} \right)^{\varepsilon} \frac{\Gamma(\nu+1/2-\varepsilon/2)}{\Gamma^2((1+\varepsilon)/2)\Gamma(\nu+1/2+\varepsilon/2)} - \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\pi a^{\varepsilon}} \right] \Gamma(\varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\pi x} [\ln(ax/2) + \psi(1) - \psi(1/2) - \psi(\nu+1/2)] = \\ &= \frac{1}{\pi x} [\ln(2ax) - \psi(\nu+1/2)]. \end{aligned} \quad (30.29)$$

Отсюда получаем асимптотическое представление как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow +0$ и при $\nu \rightarrow \infty$. При $x=1$ формула (30.29) иным путем получена в [358]. Более сложный пример для интеграла $\int_0^{\infty} J_n^2(t) [1 - 2tK_{m-1}(t)I_m(t)] dt$ при $n \rightarrow \infty$, $m = \alpha n$, $\mu(t, \varepsilon) = t^{-\varepsilon}$ рассмотрен в [357].

30.3. Применение аппроксимации функции нагрузки

30.3.1. Рассмотрим обобщение метода, использованного в п. 13.4. Для этого целесообразно ввести

Определение 30.1. Систему линейно независимых при каждом фиксированном n функций $\{\psi_{kn}(t)\}$, $k=0, 1, \dots, n$, $\psi_{kn}(t) \in C^{\infty}[0, \infty)$, назовем *аппроксимирующим базисом*, если для каждой функции $H(t) \in C^{\infty}[0, \infty)$ при каждом фиксированном $n \in N$ можно найти такие коэффициенты c_{kn} , что $G_n(t) \equiv \equiv H(t) - \sum_{k=0}^n c_{kn} \psi_{kn}(t)$ обладает свойством $G_n^{(j)}(0) = 0$, $j=0, 1, \dots, n$. Совокупность аппроксимирующих базисов обозначим через АБ.

Из определения следует, что $G_n(t) = O(t^{n+1})$ при $t \rightarrow +0$.

Основные идеи вышеупомянутого метода станут ясными из следующей очевидной теоремы.

Теорема 30.8. Пусть 1) функции $K(xt)$ и $G_n(t)$ обладают такими свойствами, что из $G_n^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, при $x \rightarrow +\infty$ следует

$$\int_0^{\infty} K(xt) G_n(t) dt = o(x^{-n}); \quad (30.30)$$

2) $H(t) \in C^\infty[0, \infty)$; 3) $\{\psi_{kn}(t)\} \in \text{АБ}$, $G_n(t) \equiv H(t) - \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} \psi_{kn}(t)$.

Тогда

$$\int_0^{\infty} K(xt) H(x) dt = \sum_{k=0}^n c_{kn} \int_0^{\infty} K(xt) \psi_{kn}(t) dt + o(x^{-n}). \quad (30.31)$$

Укажем достаточные признаки, при которых условие 1) теоремы 30.8 выполняется.

П 1. Если $K(t)$ удовлетворяет условиям леммы 8.4, а $G_n(t)$ при $t \rightarrow \infty$ обладает представлением (30.16), то интеграл (30.30) можно $n+1$ раз интегрировать по частям, а затем полученный интеграл оценить, аналогично как остаток в доказательстве теоремы 30.3 при $\varepsilon = 0$. В итоге при $x \rightarrow +\infty$ получим оценку $O(x^{-n-1})$.

П 2. Можно условие на $K(t)$ в П 1 ослабить и допустить, что $K(t)$ удовлетворяет условиям леммы 30.1, где $\lambda_0 < 0$, $\kappa = 0$. Пусть $\lambda_p \leq 0$, $\lambda_{p+1} > 0$, $-\lambda_k = l_k$, $k \leq p$. Тогда $K(t)$ можно разбить на сумму двух функций, как в примечании 1° к теореме 30.3, а t^{l_k} присоединить к $G_n(t)$. Но это можно сделать лишь в том случае, когда $l_k \in \mathbb{N}$. Это требование — дополнение к предыдущим условиям. Затем при прежних условиях относительно $G_n(t)$ интеграл с ядром $K_0(xt)$ можно $n+1$ раз интегрировать по частям и получить оценку $O(x^{-n-1})$. Интеграл с ядром $K_1(xt)$ такую же оценку имеет согласно П 1. Если $\kappa \geq 0$, то тем более справедлива полученная оценка.

П 3. Если при $t \rightarrow \infty$ $K(t) = o(t^{-N})$, то для $G_n^{(k)}(t)$ достаточна оценка $O(t^\omega)$.

Существуют также разные модификации данных признаков.

30.3.2. Рассмотрим применение некоторых аппроксимирующих базисов.

Лемма 30.2. Пусть 1) $\varphi(t) \in C^\infty[0, \infty)$, $\varphi^{(k)}(0) \neq 0$; 2) b_{kn} — разные положительные числа. Тогда $\psi_{kn}(t) = \varphi(b_{kn}t) \in \text{АБ}$.

Доказательство следует из системы уравнений

$$H^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^n c_{kn} b_{kn}^j \varphi^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (30.32)$$

с неизвестными c_{kn} . Определитель этой системы — определитель Вандермонда, поэтому система всегда имеет единственное решение $\{c_{kn}\}$. ■

Обозначим этот базис через AB_1 . Лемма 30.2 является обобщением леммы 13.1. Пусть при $y \rightarrow +0$, $n \in N$

$$\int_0^{\infty} K(t)\varphi(yt) dt = \sum_{k=0}^n a_k y^k + O(y^{n+1}). \quad (30.33)$$

Тогда с учетом (30.32) и (30.33) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} \int_0^{\infty} K(xt)\varphi(b_{kn}t) dt &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n c_{kn} \int_0^{\infty} K(t)\varphi(b_{kn}t/x) dt = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n c_{kn} \left[\sum_{j=0}^n a_j b_{kn}^j x^{-j} + O(x^{-n-1}) \right] = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{j=0}^n a_j x^{-j} H^{(j)}(0) / \varphi^{(j)}(0) + O(x^{n+2}). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Теорема 30.9. Пусть 1) $\varphi(t) \in C^\infty[0, \infty)$, $\varphi^{(k)}(0) \neq 0$; 2) функции $K(t)$, $H(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 30.8; 3) имеет место (30.33). Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^{\infty} K(xt)H(t) dt = \sum_{j=0}^n (a_j / \varphi^{(j)}(0)) H^{(j)}(0) x^{-j-1} + o(x^{-n}). \quad (30.34)$$

Примечание. Если в (30.34) n заменить на $n+2$, то после объединения остатков получим, что $o(x^{-n})$ в (30.34) можно заменить на $O(x^{-n-2})$.

Поскольку разложение (30.34) единственно, то величины $a_j / \varphi^{(j)}(0)$ не зависят от выбора базиса. Поэтому целесообразно выбрать наиболее простой и практически удобный базис. Кроме некоторых частных случаев такой базис получаем при $\varphi(t) = e^{-t}$, $\varphi^{(j)}(0) = (-1)^j$. Поэтому базис AB_1 дает мало нового по сравнению с результатами п. 13.4.

Лемма 30.3. Пусть $\varphi_n(t) \in C^\infty[0, \infty)$, $\varphi_n(0) \neq 0$. Тогда $\psi_{kn}(t) \equiv \varphi_n(t)^{th} \in AB$.

Доказательство непосредственно следует из системы уравнений

$$H^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} k! \varphi_n^{(j-k)}(0) c_{kn}, \quad j=0, 1, \dots, n, \quad (30.35)$$

определитель которой имеет треугольную матрицу, в главной диагонали ее находится $\varphi_n(0)$. Поэтому данная система всегда имеет единственное решение $\{c_{kn}\}$. ■

Теорема 30.10. Пусть 1) $\varphi_n(t) \in C^\infty[0, \infty)$, $\varphi_n(0) \neq 0$; 2) функции $K(t)$, $H(t)$ и $\psi_{kn}(t) = \varphi_n(t)t^k$ удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 30.8; 3) при каждом $k \in N$, $k \leq n$

$$\int_0^\infty K(xt)\psi_{kn}(t)dt = A \sum_{j=0}^n \frac{\binom{k+j}{k} \varphi_n^{(j)}(0) k! b_{k+j}}{x^{j+k+\lambda}} + O(x^{-(n+1+k+\lambda)}), \quad (30.36)$$

$\lambda \geq 0$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^\infty K(xt)H(t)dt = A \sum_{j=0}^n b_j H^{(j)}(0) x^{-\lambda-j} + o(x^{-n}). \quad (30.37)$$

Доказательство с учетом (30.31), (30.35) и (30.36) следует из равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_{kn} \int_0^\infty K(xt)\psi_{kn}(t)dt &= A \sum_{k=0}^n c_{kn} \sum_{j=0}^n \binom{k+j}{k} \varphi_n^{(j)}(0) b_{k+j} k! \times \\ &\times x^{-j-k-\lambda} + O(x^{-n-\lambda-1}) = A \sum_{j=0}^n b_j x^{-\lambda-j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} k! \varphi_n^{(j-k)}(0) c_{kn} + \\ &+ O(x^{-n-1-\lambda}) = A \sum_{j=0}^n b_j H^{(j)}(0) x^{-\lambda-j} + O(x^{-n-\lambda-1}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Если, в частности, берем $\varphi_n(t) = e^{-t}$ и $\lambda = 1$, то легко убедиться в том, что получаем прежний результат (30.34). Однако при таком выборе $\varphi_n(t)$ не всегда выполняемые действия будут простейшими. Примером к этому случаю является разложение при $x \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Omega(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \cos \Theta J_\nu(xt \sin \Theta) H(t) dt, \quad \Theta \in (0, \pi/2], \quad (30.38)$$

если использовать формулу (30.27). В работе [383] интеграл (30.38) разложен по теореме 30.10 при $\varphi_n(t) = J_n(t)t^{-n}$ в силу формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} J_{\nu}(\alpha t) J_{\mu}(\beta t) t^{\lambda-1} dt = \frac{\alpha^{\nu} \beta^{\mu}}{2^{\mu+\nu} \Gamma(\nu+1) (\alpha^2 + \beta^2)^{(\lambda+\mu+\nu)/2}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta^{2k} \Gamma(\lambda + \mu + \nu + 2k)}{2^{2k} k! \Gamma(k + \mu + 1) (\gamma^2 + \alpha^2)^k} \times$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{\mu + \nu + \lambda}{2} + k, \frac{1 + \nu - \lambda - \mu}{2} - k; \nu + 1; \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \right), \quad (30.39)$$

которая получается разложением $J_{\mu}(\beta t)$ в ряд, почленным интегрированием и применением (30.27). В результате согласно П I с учетом примечания 2° к теореме 30.3 получим

$$\Omega(x) \sim \left(\frac{\sin \Theta}{2} \right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} H^{(k)}(0) \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{k!} \times$$

$$\times {}_2F_1 \left(\frac{\nu+k+1}{2}, \frac{\nu-k}{2}; \nu+1; \sin^2 \Theta \right) x^{-k-1}. \quad (30.40)$$

При более слабых условиях относительно $H(t)$ интеграл (30.38) можно разложить по теореме 30.3 [329]. Тогда согласно (30.15) в (30.40) $H^{(k)}(0)/k!$ надо заменить на b_k , а в остальных местах — k на μ_k .

Если теоремы 30.3 и 30.4 сравнить с теоремами 30.9 и 30.10, то преимущества последних над первыми не наблюдается. Возможно, иногда по последним теоремам легче вычислить коэффициенты разложений.

30.3.3. Применение базисов AB_1 и AB_2 в теоремах 30.9 и 30.10 характерно тем, что в окончательном результате коэффициенты c_{kn} не появляются. Благодаря этому n можно брать произвольным, поэтому получаем асимптотическое разложение. Но для приближенного вычисления данного интеграла число n можно фиксировать и непосредственно использовать формулу (30.31) с учетом (30.32) или (30.35). Базис выбирается так, чтобы легче было вычислить интегралы $v_k(x) = \int_0^{\infty} K(xt) \psi_{kn}(t) dt$.

Таким образом, формула (30.31) предоставляет разные возможности для приближенного вычисления интегралов.

Аппроксимирующие базисы можно применить также несколько по-другому. Используется легко доказываемый факт, что при любом выборе разных положительных чисел t_{0n}, \dots, t_{nn} матрица, составленная из элементов $\psi_{kn}(t_{jn})$, не особая. Из этого следует, что система $\sum_{k=0}^{\infty} \omega_{kn} \psi_{kn}(t_{jn}/x) = v_j(x)$, $j=0, 1, \dots$

..., n , имеет единственное решение $\{\omega_{kn}\}$. При некоторых дополнительных предположениях относительно $\{\psi_{kn}(t)\}$ можно доказать [397], что

$$\int_0^{\infty} K(xt) h(t) dt = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n \omega_{kn} h(t_{kn}/x) + o(x^{-n-1}). \quad (30.41)$$

Формула (30.41) применима для численного интегрирования. Она аналогична (9.69), где коэффициенты c_{kn} вычисляются исходя из квадратурной формулы Гауса. В случае $K(xt) = e^{-xt}$ аналогичная квадратурная формула типа Лагерра приведена в [369].

30.4. Интегралы с периодическими ядрами

30.4.1. При окончательном оформлении полученного асимптотического разложения в предыдущих главах часто приходилось перегруппировывать члены асимптотического ряда. В простейшем случае это действие выполняется на основе теоремы 5.2. В случаях, когда подобных членов при перегруппировке бесконечно много, часто можно использовать теорему 5.6 или ее обобщение — лемму 28.1 и примечания к ней. В главе VIII были также рассмотрены многие примеры, когда к асимптотическому представлению данной функции применялись другие приемы преобразования рядов. Таким образом, преобразование рядов является часто применяемым средством для построения асимптотических разложений функций.

Преобразование рядов для этой цели может применяться также в другой форме в тех случаях, когда ядро интеграла задано функциональным рядом, который в данном интервале можно почленно интегрировать. Этим действием обычно получается сумма интегралов с более простыми ядрами, чем у исходного интеграла. Если каждый из этих интегралов можно разложить в асимптотический ряд, то в полученном повторном ряду следует еще перегруппировать члены, что часто осуществляется с помощью теоремы 5.6 или леммы 28.1. Поскольку эти теоремы содержат жесткие условия, которые в практически важных случаях нередко не удовлетворены, то данный метод не всегда применим.

Рассмотрим пример. Пусть

$$\Omega(r) = \int_0^{\infty} K(rt) H(t) dt, \quad K(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_0(\lambda_k \tau), \quad (30.42)$$

$\lambda_k = \mathcal{O}(k)$, $H(t) \in C^\infty[0, \infty)$, $r \rightarrow \infty$. Согласно (12.106) формально получаем

$$\Omega(r) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\lambda_k r)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{-n-1}. \quad (30.43)$$

Согласно теореме 5.6 для обоснования изменения порядка суммирования необходимо, чтобы внутренние ряды в правой части (30.43) при всех n сходились. Для этого достаточно, если $a_k = O(k^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Но ряд (30.42) сходится при $a_k = o(k^{1/2})$. Еще согласно теореме 5.6 следует показать, что $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R_n(r, \lambda_k) = o((\lambda_k r)^{-n-1})$, где

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda_k r t) H(t) dt = \sum_{j=0}^n b_j (\lambda_k r)^{-j-1} + R_n(r, \lambda_k).$$

Для этого можно применить теорему 30.3 при $K(t) = J_0(t)$. Если $H(t)$ удовлетворяет условию (30.16), где $\gamma_{0j} < 1/2$, то согласно (30.19) при $\varepsilon = 0$ получим, что $|R_n(r, \lambda_k)| < M_n(\lambda_k r)^{-n-2}$. Поэтому второе условие теоремы 5.6 удовлетворено и формула (30.43) оправдана.

Аналогично теорема 30.3 для оценки остатка применима в некоторых других случаях. Однако довольно часто весьма трудно проверить второе условие теоремы 5.6. В п. 30.4 подробнее рассмотрим лишь случай, когда ядро интеграла — периодическая функция, т. е. когда она разлагается в тригонометрический ряд Фурье. Вышеуказанным методом можно доказать многие другие теоремы для интегралов с разными подходящими ядрами.

30.4.2. Условия почленного интегрирования ряда Фурье характеризует следующая лемма, которая доказывается в курсах анализа, например в [139].

Лемма 30.4. Пусть 1) функция $K(t)$ периодична с периодом T и ее коэффициенты Фурье заданы формулами

$$a_k = (2/T) \int_0^T K(\tau) \cos(2k\pi\tau/T) d\tau, \quad (30.44)$$

$$b_k = (2/T) \int_0^T K(\tau) \sin(2k\pi\tau/T) d\tau;$$

2) функции $K(xt)$ и $H(t)$ при $x \geq x_0$ удовлетворяют одному из следующих условий:

1°. $K(xt)$ и $H(t)$ интегрируемы с квадратом в $[a, y]$.

2°. $K(xt)$ абсолютно интегрируема, $H(t)$ — функция с ограниченной вариацией в $[a, y]$.

3°. $H(t)$ абсолютно интегрируема, $K(xt)$ — функция с ограниченной вариацией в $[a, y]$.

Тогда для каждого $y > a$ имеет место формула

$$\int_a^y K(xt)H(t)dt = \frac{a_0}{2} \int_a^y H(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^y \left(a_k \cos \frac{2k\pi xt}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi xt}{T} \right) H(t)dt. \quad (30.45)$$

В (30.45) учитывается, что $K(xt)$ периодична с периодом T/x .

Теорема 30.11. Пусть 1) функции $K(xt)$ и $H(t)$ удовлетворяют при $y=b$ условиям леммы 30.4, причем $H(t) \in C^\infty(a, b)$;

2) $a_n = O(n^{-\beta})$, $b_n = O(n^{-\beta})$, $\beta > 0$; 3) при $t \rightarrow a+0$ $H(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k \times (t-a)^{\lambda_k-1}$, $0 < \operatorname{Re} \lambda_k \uparrow +\infty$, $\operatorname{Re} \lambda_0 + \beta > 1$, а при $t \rightarrow b-0$ $H(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k (b-t)^{\mu_k-1}$, $0 < \operatorname{Re} \mu_k \uparrow +\infty$, $\operatorname{Re} \mu_0 + \beta > 1$, причем асимптотические ряды сколь угодно раз почленно дифференцируемы. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ справедливо разложение

$$\Omega(x) = \int_a^b K(xt)H(t)dt \sim (a_0/2) \int_a^b H(t)dt + \sum_{j=0}^{\infty} A_j \Gamma(\lambda_j) \gamma^{-\lambda_j} \times \times S(ax, \lambda_j, \lambda_j) x^{-\lambda_j} + \sum_{j=0}^{\infty} B_j \Gamma(\mu_j) \gamma^{-\mu_j} S(bx, -\mu_j, \mu_j) x^{-\mu_j}, \quad (30.46)$$

где $\gamma = 2\pi/T$, а функция S определена в (30.47).

Доказательство. Вводим коэффициенты $c_{\pm k} = (a_k \pm b_k/i)/2 = O(k^{-\beta})$. Тогда в (30.45) отдельные члены ряда содержат интегралы $c_{\pm k} \int_a^b \exp(\pm i\gamma kxt)H(t)dt$. В силу условий 1) и 3) эти интегралы можно разложить согласно (12.104). В случае «+» получаем разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left\{ e^{i\gamma k a x} \left[\sum_{j=0}^n A_j \Gamma(\lambda_j) e^{i\pi \lambda_j / 2} (\gamma k x)^{-\lambda_j + \rho_{1n}(kx)} (kx)^{-\lambda_{n+1}} \right] + e^{i\gamma k b x} \left[\sum_{j=0}^n B_j \Gamma(\mu_j) e^{-i\pi \mu_j / 2} (\gamma k x)^{-\mu_j + \rho_{2n}(kx)} (kx)^{-\mu_{n+1}} \right] \right\},$$

где $\rho_{1n}(kx)$ и $\rho_{2n}(kx)$ — ограниченные функции. Затем применим примечание 2° к лемме 28.1. Ее условия 3') и 4') выполнены, так как ряды $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\gamma k a x} k^{-\lambda_j}$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\gamma k b x} k^{-\mu_j}$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\gamma k a x} \times \rho_{1n}(kx) k^{-\lambda_{n+1}}$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\gamma k b x} \rho_{2n}(kx) k^{-\mu_{n+1}}$ сходятся, потому что их мажорируют сходящиеся ряды $M \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\lambda_j - \beta}$ и $M \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\mu_j - \beta}$. Кроме того, суммы первых двух рядов периодичны с периодами $2\pi/\gamma a$ и $2\pi/\gamma b$, поэтому при $x \rightarrow +\infty$ они обладают оценкой $O(1)$. Аналогично преобразуются ряды в случае «-». После объединения результатов при обозначении

$$S(t, \lambda, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\gamma t + \lambda\pi/2) + b_k \sin(k\gamma t + \lambda\pi/2)] k^{-\mu} \quad (30.47)$$

получим (30.46). Ряд (30.47) сходится в силу условий 2) и 3). ■

Примечания. 1°. Поскольку $a_0/2 = T^{-1} \int_0^T K(t) dt$, то основной член в (30.46) получается заменой под знаком интеграла ядра $K(xt)$ на его среднее значение по одному периоду. Этого и следовало ожидать по эвристическим соображениям.

2°. К теореме 30.11 можно привести разложение интеграла

$$\Omega_0(x) = \int_a^b K(xg(t)) H(t) dt, \quad (30.48)$$

если $g(t)$ — кусочно-монотонная, а $K(\tau)$ — периодическая функции. Тогда в отдельном промежутке монотонности следует применить подстановку $g(t) = \tau$. Если функция $H(t(\tau)) t'(\tau) = G(\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 30.11, то получим разложение согласно (30.46). На концах промежутка монотонности функция $G(\tau)$ не ограничена, так как в конечных точках $g'(t) = 0$. Поэтому в разложениях, приведенных в условии 3), имеем либо $\operatorname{Re} \lambda_0 < 1$, либо $\operatorname{Re} \mu_0 < 1$. Доминирующий член кроме пер-

вого в асимптотическом разложении для $\Omega_0(x)$ обычно получается именно из окрестностей стационарных точек. Это означает, что для интеграла (30.48) в некотором смысле сохраняется принцип стационарной фазы, т. е. основными критическими являются точки, в которых $g'(t) = 0$. Кроме того, в силу условия 3) критическими являются также концы промежутка. Заметим, что основной член в (30.46) зависит от всего промежутка, а в случае ядра $\cos xt$ или $\sin xt$ он обращается в нуль.

30.4.3. Пусть в интеграле (30.46) $a=0$. Рассмотрим случай, когда $H(t) = h_0(t)t^{-\kappa}$, $\kappa \geq 1$, $h_0(0) \neq 0$, $K(0) = 0$, $K(t) = \mathcal{O}(t^\nu)$ при $t \rightarrow +0$, $\nu > \kappa - 1$. Тогда данный интеграл (30.46) сходится, а интеграл $\int_0^b H(t) dt$ расходится и теорема 30.11 неприменима. Множитель $t^{-\kappa}$ следует присоединить к ядру. Тогда он будет иметь устранимую или слабую особенность. К разложению интеграла (30.46) можно применить метод, изложенный в п. 15.3. Рассмотрим подробнее случай, когда $\kappa = \nu = m \in \mathbb{N}_1$, так как другие случаи исследуются аналогично. Пусть

$$h_0(t) = \sum_{j=0}^{m-1} A_j t^j + t^m h(t), \quad A_0 \neq 0, \quad (30.49)$$

где $h(t)$ и $K(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 30.11. Тогда

$$\int_0^b K(xt) t^{-m} H(t) dt = \sum_{j=0}^{m-1} A_j \int_0^b K(xt) t^{-m+j} dt + \int_0^b K(xt) h(t) dt. \quad (30.50)$$

Последний интеграл разлагается согласно теореме 30.11, поэтому, остается построить разложение для интеграла

$$\Omega_k(x) = \int_0^b K(xt) t^{-k} dt, \quad k=1, 2, \dots, m. \quad (30.51)$$

При обозначениях $y = bx/T$, $n = [y] = \mathcal{O}(x)$ имеем соотношения

$$\begin{aligned} \Omega_k(x) &= x^{k-1} \int_0^{bx} K(\tau) \tau^{-k} d\tau = (x/T)^{k-1} \int_0^y K(Tu) u^{-k} du = \\ &= (x/T)^{k-1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} K(Tu) u^{-k} du + \int_n^y K(Tu) u^{-k} du \right] = \end{aligned}$$

$$= (x/T)^{k-1} \left[\int_0^1 K(Tu) u^{-k} du + \int_0^1 K(Tv) \sum_{j=1}^{n-1} (j+v)^{-k} dv + \int_n^y K(Tu) u^{-k} du \right]. \quad (30.52)$$

Согласно (9.52)

$$g_k(v, n) = \sum_{j=1}^{n-1} (j+v)^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} [\psi^{(k-1)}(n+v) - \psi^{(k-1)}(v+1)] = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k+j-1)}(n)}{j!} v^j - \psi^{(k-1)}(v+1) \right].$$

Поскольку согласно (9.51) при $n \rightarrow \infty$ $\psi^{(k+j-1)}(n) = O(n^{-k-j+1})$, $k+j-1 \geq 1$, то эти функции образуют шкалу. Поэтому после подстановки $g_k(v, n)$ под знак интеграла в (30.52) и почленного интегрирования для $\int_0^1 K(Tv) g_k(v, n) dv$ получим асимптотическое разложение при $n \rightarrow \infty$. С учетом (9.51) его можно преобразовать в ряд по степеням n^{-1} . Для последнего интеграла в (30.52) разложение получаем подстановкой $u = v+n$ и применением формулы бинома Ньютона к функции $(v+n)^{-k}$. При обозначении

$$C_k = \int_0^1 K(Tu) u^{-k} du + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int_0^1 K(Tv) \psi^{(k-1)}(v+1) dv \quad (30.53)$$

из (30.52) получаем

$$\Omega_k(x) = (x/T)^{k-1} \left[C_k + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k+j-1)}(n)}{j!} \int_0^1 K(Tv) v^j dv + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k}{j} n^{-k-j} \int_0^{y-n} K(Tv) v^j dv \right]. \quad (30.54)$$

Последний ряд в (30.54) содержит переменные периодические коэффициенты с оценкой $O(1)$, которые при $y=n$ обращаются в 0.

Если в (30.51) $k = \lambda > 1$ не является целым числом, то вместо функции ψ следует применить

$$\zeta(\lambda, \nu, n) = \sum_{j=1}^{n-1} (j+\nu)^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m \zeta(\lambda, 0, n)}{\partial \nu^m} \nu^m / m!,$$

а в силу (9.101) —

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m \zeta(\lambda, 0, n)}{\partial \nu^m} &= (-1)^m (\lambda)_m \sum_{j=1}^{n-1} j^{-\lambda-m} = \\ &= (-1)^m (\lambda)_m [\zeta(\lambda+m) + O(n^{-\lambda-m+1})]. \end{aligned}$$

30.4.4, 1°. В качестве примера рассмотрим некоторое обобщение формулы Эйлера—Маклорена второго рода (24.91). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n h(k/n) &= \int_0^n h(t/n) dt + (1/2)[h(1) - h(0)] + \\ &+ (1/n) \int_0^n \sigma_1(t) h'(t/n) dt. \end{aligned} \quad (30.55)$$

Пусть $h'(t) \in C^\infty(0, 1)$, а на концах $t=0$ и $t=1$ $h'(t)$ обладает разложениями, указанными в условии 3) теоремы 30.11. Поскольку в силу (9.97) $\beta=1$, то в этом условии имеем $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$, $\operatorname{Re} \mu_0 > 0$. Если в теореме 30.11 брать $a_k=0$, $b_k = -1/k\pi$, $\gamma=2\pi$, то получаем

$$\begin{aligned} (1/n) \int_0^n \sigma_1(t) h'(t/n) dt &= \int_0^1 \sigma_1(nt) h'(t) dt \sim \\ &\sim (1/\pi) \left[\sum_{j=0}^{\infty} B_j \Gamma(\mu_j) (2\pi)^{-\mu_j} \zeta(\mu_j+1) \sin(\pi\mu_j/2) n^{-\mu_j} - \right. \\ &\left. - \sum_{j=0}^{\infty} A_j \Gamma(\lambda_j) (2\pi)^{-\lambda_j} \zeta(\lambda_j+1) \sin(\pi\lambda_j/2) n^{-\lambda_j} \right]. \end{aligned} \quad (30.56)$$

При $h(t) \in C^\infty[0, 1]$ из (30.56) следует частный случай (24.91).

Некоторые другие примеры к теореме 30.11 рассмотрены в [333].

2°. Формула (30.55) не имеет места, если $h(0)$ или $h(1)$ не существуют. В таком случае можно построить разложение для $\sum_{k=1}^{n-1} h(k/n)$. Тогда приходится разложить интеграл

$$\Omega_1(n) = \int_{1/n}^{1-1/n} \sigma_1(n\tau) h'(\tau) d\tau = \int_{1/n}^{1/2} \sigma_1(n\tau) [h'(\tau) - h'(1-\tau)] d\tau.$$

При этом использованы соотношения $\sigma_1(n-nu) = \sigma_1(-nu) = -\sigma_1(nu)$.

Пусть при $\tau \in (0, 1/2]$

$$h(\tau) = L_0 \ln \tau + \sum_{j=1}^{m_1} L_j \tau^{-j} + h_0(\tau), \quad (30.57)$$

$$h(1-\tau) = M_0 \ln \tau + \sum_{j=1}^{m_2} M_j \tau^{-j} + h_1(\tau),$$

где $h_0(\tau) \in C^\infty[0, 1/2]$, $h_1(\tau) \in C^\infty[0, 1/2]$. Тогда

$$h'(\tau) - h'(1-\tau) = D_0 \tau^{-1} - \sum_{j=1}^{m_0} j D_j \tau^{-j-1} + H(\tau), \quad (30.58)$$

где $m_0 = \max(m_1, m_2)$, $H(\tau) \in C^\infty[0, 1/2]$. К интегралу $\int_0^{1/2} \sigma_1(n\tau) H(\tau) d\tau$ применима теорема 30.11, а $\int_0^{1/n} \sigma_1(n\tau) H(\tau) d\tau = (1/n) \int_0^1 \sigma_1(\tau) H(\tau/n) d\tau$ разлагается с применением ряда Тейлора для $H(\tau)$. Остается рассмотреть разложение при $j \geq 1$ интеграла

$$\begin{aligned} I_j(n) &= \int_{1/n}^{1/2} \sigma_1(n\tau) \tau^{-j} d\tau = n^{j-1} \int_1^{n/2} \sigma_1(t) t^{-j} dt = \\ &= n^{j-1} \left[\int_1^\infty \sigma_1(t) t^{-j} dt - \int_{n/2}^\infty \sigma_1(t) t^{-j} dt \right] = n^{j-1} I_{j1} - I_{j2}(n). \end{aligned}$$

$I_{j2}(n)$ интегрируем по частям с учетом формул $\sigma'_{k+1}(t) = \sigma_k(t)$, $\sigma_k(t+1) = \sigma_k(t)$. Получаем

$$I_{j2}(n) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{m+2}(n/2) 2^{m+j} (j)_m n^{-m-1}. \quad (30.59)$$

$I_{j1} = \int_0^\infty \sigma_1(u) (u+1)^{-j} du$ вычисляется согласно формуле [182]

$$\int_0^{\infty} \sigma_1(u) (u+x)^{-1} du = x \ln x - x - \ln \Gamma(x) - (1/2) \ln x + (1/2) \ln 2\pi, \quad (30.60)$$

если обе части (30.60) дифференцировать по x и затем подставить $x=1$. С учетом (29.6'') получаем

$$\int_1^{\infty} \sigma_1(t) t^{-j} dt = \begin{cases} j/2(j-1)(j-2) - \zeta(j-1)/(j-1) & \text{при } j > 2, \\ \psi(1) + 1/2 & \text{при } j = 2, \\ -1 + 1/2 \ln 2\pi & \text{при } j = 1, \end{cases} \quad (30.61)$$

После всех вычислений, преобразований и сокращений получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} h(k/n) \sim \sum_{j=2}^{m_0} D_j \left[(j-1)^{-1} + 1/2 - j \int_1^{\infty} \sigma_1(t) t^{-j-1} dt \right] n^j + \\ + D_1 n \ln n + [A_0 - D_1 \psi(1)] n + (D_0/2) \ln 2\pi n - \\ - (1/2) E_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k+2}}{2k+2} E_{2k+1} n^{-2k-1}, \end{aligned} \quad (30.62)$$

где $H(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k E_k \tau^{k-1}$, а A_0 вычисляется как свободный член в разложении при $n \rightarrow \infty$ интеграла $\int_0^1 [h(\tau) + h(1-\tau)] d\tau$. Более подробно это разложение получено в [333]. Следует только исправить опечатки в формулах (50) и (51) этой работы. Там же приведен пример, непосредственно следующий из (30.62):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cosec}(k\pi/n) \sim (2n/\pi) \ln 2n - (2n/\pi) [\psi(1) + \ln \pi] - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2^{2k+2} - 2) (B_{2k+2})^2 \pi^{2k+1}}{(k+1)(2k+2)!} n^{-2k-1}, \end{aligned} \quad (30.63)$$

где B_{2k+2} — числа Бернулли.

Другим путем разложение (30.63) найдено Ватсоном в [405]. Обобщение метода Ватсона для разложения некоторых других тригонометрических сумм приведено в [352, 433].

3°. К выводу формулы Эйлера—Маклорена в п. 9.5.1 следует добавить, что для справедливости формулы (9.93) в этом пункте задано слишком сильное условие — требуется

сходимость интеграла $\int_0^{\infty} |h^{(k)}(t)| dt$. Достаточна сходимость интеграла $\int_a^{\infty} \sigma_h(t) h^{(k)}(t) dt$. К нему можно применить *признак Дирихле* [139]: $\int_a^{\infty} f(t) g(t) dt$ сходится, если 1) при любом $\omega \geq a$ $|\int_a^{\omega} f(t) dt| < M$ и 2) $g(t)$ монотонно стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$. Поскольку согласно (9.97) $\sigma_h(t)$ удовлетворяет первому условию, то достаточно, если $h^{(k)}(t)$ удовлетворяет второму условию признака Дирихле.

Аналогично доказывается следующая более общая

Теорема 30.12. Пусть 1) $t - [t] = \{t\}$; 2) при $t \in [0, \infty)$ функция $K(t)$ кусочно непрерывна, $g(t)$ непрерывно дифференцируема, $g(t) \geq 0$, $h(t)$ локально интегрируема; 3) можно найти такое $M > 0$, что $|\int K(\{u\}) du| < M$ при любых $\omega_2 > \omega_1 \geq 0$; 4) при $t \geq \omega \geq 0$ справедливо $g'(t) \geq m > 0$; 5) функция $h(t)/g'(t)$ монотонно стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$, $t \geq a$. Тогда $\int_0^{\infty} K(\{g(t)\}) h(t) dt$ сходится.

Доказательство. Из условия 4) следует, что при $t \geq \omega$ $g(t)$ монотонно возрастает, поэтому можно применить подстановку $g(t) = u$. Согласно условию 3), при $\omega_1 \geq \omega$ получаем

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} K(\{g(t)\}) g'(t) dt \right| = \left| \int_{g(\omega_1)}^{g(\omega_2)} K(\{u\}) du \right| < M.$$

Затем к интегралу $\int_{\omega}^{\infty} K(\{g(t)\}) g'(t) (h(t)/g'(t)) dt$ можно применить признак Дирихле. ■

В частном случае при $K(t) = t - 1/2$, $g(t) = t$, $h(t) = t^{-1}$ эта теорема рассмотрена в [142]. Асимптотика интегралов, содержащих периодические функции, рассматривается также в п. 31.5.

§ 31. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ И ФОРМУЛ

31.1. Применение формул Парсеваля

31.1.1. Соотношение (23.47) является частным случаем общей формулы Парсеваля, когда применяется преобразование Меллина. Общая формальная схема вывода этой формулы, допускающая и различные модификации, аналогична схеме (30.2').

Пусть

$$H(t) = \int_{L_1} \Phi(t, u) G(u) du. \quad (31.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_L K(z, t) H(t) dt &= \int_L K(z, t) dt \int_{L_1} \Phi(t, u) G(u) du = \\ &= \int_{L_1} G(u) du \int_L K(z, t) \Phi(t, u) dt = \int_{L_1} G(u) F(z, u) du. \end{aligned} \quad (31.2)$$

В (31.2) имеем формулу Парсеваля, если K и H — оригиналы некоторого интегрального преобразования, а интеграл по L_1 характеризует обратное преобразование, т. е. пути интегрирования L и L_1 связаны между собой. В схеме (30.2'), напротив, пути C и C_1 не связаны между собой. Кроме того, в (30.2') преобразование берется по параметру x , а не по переменной интегрирования t . Некоторые условия для справедливости (31.2) приведены в [370].

Частные случаи (31.2), когда $L=L_1=[0, \infty)$ и обратное преобразование для (31.1) выражается тем же ядром $\Phi(t, u)$ (симметрическое ядро типа Фурье), рассмотрены во многих работах, например в [137, 390, 434]. В последней работе рассмотрен также случай несимметрического ядра типа Фурье.

1°. Формула (31.2) может применяться для построения асимптотического представления интеграла, стоящего в левой части (31.2), если такое представление можно построить для интеграла, стоящего в правой части (31.2). Чтобы охватить по возможности более широкий класс интегралов, следует выбрать такое преобразование (31.1), характеризующееся интегралом по L_1 и ядром $\Phi(t, u)$, которое обладает следующими свойствами: 1) для широкого класса функций $H(t)$ можно найти соответствующую функцию $G(u)$ или выяснить необходимые свойства $G(u)$; 2) для широкого класса функций $K(z, t)$ можно найти функцию $F(z, u)$ или узнать ее свойства; 3) для интеграла по пути L_1 существует простой алгоритм для построения асимптотического разложения. Этим требованиям лучше всего соответствует обратное преобразование Меллина. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь формулы Парсеваля для этого преобразования, хотя возможны и другие применения (31.2).

Повторим приведенные в п. 23.4.1 условия применимости формулы Парсеваля (23.47), которую перепишем в более удобном для применения виде:

$$\Omega(z) = \int_0^{\infty} K(zt)H(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \kappa(s)h(1-s)z^{-s}ds, \quad (31.3)$$

где

$$\kappa(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}K(t)dt, \quad h(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}H(t)dt, \quad s = \sigma + i\tau. \quad (31.4)$$

Применим в дальнейшем обозначения $K(t) \rightarrow \kappa(s)$, $H(t) \rightarrow h(s)$. Формула (31.3) при $z > 0$ справедлива, если существует такое γ , что абсолютно интегрируемы функции $K(t)t^{\gamma-1}$ при $t \in [0, \infty)$ и функция $h(1-\gamma-i\tau)$ при $\tau \in (-\infty, \infty)$. Если на пути интегрирования имеет место оценка

$$G(s) = \kappa(s)h(1-s) = O(e^{-\vartheta|t|}), \quad \vartheta \in (-\pi, \pi], \quad (31.5)$$

то согласно теореме 23.2 функция $\Omega(z)$ является аналитической при $|\arg z| \leq \vartheta - \varepsilon$, $\vartheta > \varepsilon > 0$, и (31.3) сохраняет силу в этом секторе.

2°. Формула Парсеваля для преобразования Меллина применима также для вычисления определенных интегралов. Методика для этой цели на основе формулы (23.48) разработана в [112]. Рассмотрены случаи, когда изображения подынтегральных функций данного интеграла выражаются с помощью произведений и отношений Γ -функций [правая часть в (23.48) является интегралом Меллина—Барнса]. Затем выполняется обратное преобразование с помощью разных специальных функций (обычно частных случаев G -функции Мейера), причем для практического применения этого метода в [112] приведены подробные таблицы. Кроме этих таблиц при практическом применении теории, изложенной в п. 31.2 и 31.3, можно использовать таблицы, приведенные в [313, 384].

3°. Формальная схема, приведенная в (31.2), допускает также вывод формул другого, смешанного вида. В качестве примера рассмотрим случай преобразования Лапласа. Пусть согласно (22.31) $\Omega_1(t) \doteq h_1(p)$, $\Omega_2(t) \doteq h_2(p)$, причем интегралы Лапласа сходятся при $p=0$. Взяв в схеме (31.2) $K \equiv \Omega_1$, $H \equiv h_2$, получим

$$\int_0^{\infty} \Omega_1(p)h_2(p)dp = \int_0^{\infty} \Omega_2(t)h_1(t)dt. \quad (31.2')$$

Достаточные условия для оправдания изменения порядка интегрирования приведены в [139]: 1) функции $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ непрерывны и неотрицательны при $t \geq 0$; 2) функции $h_1(p)$ и

$h_2(p)$ непрерывны при $p \geq 0$; 3) один из интегралов в (31.2') сходится. Условие 2) в (31.2') выполнено в силу сходимости интеграла Лапласа при $p=0$ и свойств преобразования Лапласа. При более тонком анализе справедливости формулы (31.2') условия иногда можно ослабить, заменяя $p=0$ на $p>0$.

Формула (31.2') применяется не только в теории специальных функций. В некоторых случаях с ее помощью при обращении преобразования Лапласа можно модифицировать метод разложения оригинала по ортогональным функциям, приведенный в п. 22.6.1, 2°.

Пусть 1) дана ортонормированная в $[0, \infty)$ система функций $\{G_n(t)\}$, $G_n(t) \doteq g_n(p)$; 2) $H_n(t) \doteq G_n(p)$. Тогда согласно (31.2')

$$\int_0^{\infty} G_n(t) G_k(t) dt = \int_0^{\infty} g_n(p) H_k(p) dp = 0, \quad k \neq n. \quad (31.2'')$$

Допустим далее, что изображение $\varphi(p) \doteq \Phi(t)$ при $p \in [0, \infty)$ разложимо в ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k g_k(p)$, который можно умножить на $H_n(p)$ и почленно интегрировать в $[0, \infty)$. Тогда в силу (31.2'') $A_k = \int_0^{\infty} \varphi(p) H_k(p) dp$. Если еще допустить, что к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} A_k g_k(p)$ почленно применимо обратное преобразование, то $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k G_k(t)$.

Этот метод можно применить также для оценки погрешности обращения, если $\varphi(p)$ заменяется на $\varphi_0(p) \doteq \Phi_0(t)$, где функция $\Phi_0(t)$ известна. Тогда в ряд разлагается $\Phi(t) - \Phi_0(t)$. В таком виде при $G_n(t) = \sum_{k=1}^n c_{kn}/(\alpha_k + t)$, $0 < \alpha_k \uparrow + \infty$, метод применяется в [338], однако действия в этой работе обоснованы недостаточно.

31.1.2. Вернемся к формуле (31.3). Она не имела бы практического значения, если бы (31.3) имела место лишь при $\text{Re } s = \gamma$. Чтобы с ее помощью получить асимптотическое разложение для $\Omega(z)$ при $z \rightarrow \infty$, согласно § 23 путь интегрирования следует передвинуть вправо, а при $z \rightarrow 0$ — влево. В связи с этим необходимо рассмотреть следующие вопросы:

А. Возможности аналитического продолжения $G(s)$.

Б. Оправдание сдвига контура.

В. Получение требуемой оценки для интеграла по передвинутому контуру, характеризующего остаток разложения.

Проанализируем эти вопросы подробнее, ссылаясь на результаты, полученные в п. 23.1.

А. Асимптотическое разложение при $z \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow 0$ в простейшем случае получаем как сумму вычетов, если функция $G(s)$ мероморфна в соответствующей полуплоскости. Будут рассмотрены лишь такие случаи, когда на каждой вертикальной прямой находится не более конечного числа особых точек. Это условие назовем *условием конечности*. Класс функций, мероморфных при $\operatorname{Re} s < \gamma$ и удовлетворяющих условию конечности, обозначим через $M_l(\gamma)$, а аналогичный класс при $\operatorname{Re} s > \gamma$ — через $M_r(\gamma)$. Классы функций, которые в упомянутых полуплоскостях можно продолжить как аналитические, обозначим соответственно через $A_l(\gamma)$ и $A_r(\gamma)$. В п. 31.3 рассмотрен случай, когда $G(s)$ имеет точки ветвления.

Напомним основные положения из п. 23.1.

Лемма 31.1. Пусть 1) $F(t)$ локально интегрируема в $(0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +\infty$ $F(t) = O(t^{-\beta})$; 3) при $t \rightarrow 0$ $F(t) = \Phi_1(t)\Phi_2(t)$, где $\Phi_1(t) \in \text{PM}(0)$, т. е. $\Phi_1(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{\lambda_k} Q_{m_k}(\ln t)$, $\operatorname{Re} \lambda_k \uparrow +\infty$, а

$$\Phi_2(t) = \exp \left[- \sum_{j=0}^{j < \kappa/\nu} a_j t^{-\kappa + \nu j} \right], \quad \operatorname{Re} a_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{j < \kappa/\nu} |a_j| > 0, \\ \kappa > 0, \quad \nu > 0, \quad (31.6)$$

или $\Phi_2(t) \equiv 1$; 4) $F(t) \leftrightarrow f(s)$. Тогда при $\Phi_2(t) \equiv 1$, $\beta > -\operatorname{Re} \lambda_0$ имеем $f(s) \in M_l(\beta)$, при $\Phi_2(t) \neq 1$ $f(s) \in A_l(\beta)$. Расположение и порядок полюсов определяются из разложения $\Phi_1(t)$ в РМ согласно (23.7) и (23.8). Если $F(t)$ аналитична при $|\arg t| \leq \vartheta$ и в этом секторе кроме выполнения условия 2) поведение $F(t)$ при $t \rightarrow 0$ такое, что интеграл Меллина от $F(t)$ сходится по любому лучу $\arg t = \varphi$, $|\varphi| \leq \vartheta$, то в каждой вертикальной полосе при $\operatorname{Re} s < \beta$, $|\operatorname{Im} s| = |\tau| \rightarrow \infty$ $f(s) = O(e^{-\vartheta|\tau|})$.

Доказательство следует из теоремы 23.1 и примечаний к ней. Если хотя бы один из $\operatorname{Re} a_j > 0$ (этот случай в теореме 23.1 не рассмотрен), то легко видеть, что $\int_0^1 F(t) t^{s-1} dt$ сходится при всех s . ■

Аналогично из теоремы 23.3 следует двойственная лемме 31.1

Лемма 31.2. Пусть 1) $F(t)$ локально интегрируема в $(0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +0$ $F(t) = O(t^{-\alpha})$; 3) при $t \rightarrow \infty$ $F(t) = \Phi_1(t)\Phi_2(t)$, где $\Phi_1(t) \in \text{PM}(\infty)$, т. е. $\Phi_1(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\lambda_k} Q_{m_k}(\ln t)$, $\operatorname{Re} \lambda_k \uparrow +\infty$, а

$$\Phi_2(t) = \exp \left[- \sum_{j=0}^{j < \kappa/\nu} a_j t^{\kappa - \nu j} \right], \quad \operatorname{Re} a_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{j < \kappa/\nu} |a_j| > 0, \\ \kappa > 0, \quad \nu > 0, \quad (31.7)$$

или $\Phi_2(t) \equiv 1$; 4) $F(t) \xrightarrow{\tau} f(s)$. Тогда при $\Phi_2(t) \equiv 1$, $\alpha < \operatorname{Re} \lambda_0$ имеем $f(s) \in M_r(\alpha)$, при $\Phi_2(t) \not\equiv 1$ $f(s) \in A_r(\alpha)$. Расположение и порядок полюсов определяются, как в лемме 31.1. Если $F(t)$ аналитична при $|\arg t| < \vartheta$ и в этом секторе кроме выполнения условия 2) поведение $F(t)$ при $t \rightarrow \infty$ такое, что интеграл Меллина от $F(t)$ сходится по любому лучу $\arg t = \varphi$, $|\varphi| \leq \vartheta$, то в каждой вертикальной полосе при $\operatorname{Re} s > \alpha$, $|\operatorname{Im} s| = |\tau| \rightarrow \infty$ $f(s) = O(e^{-\vartheta|\tau|})$.

• **Примечания.** 1°. Можно подробнее исследовать поведение аналитического продолжения $f(s)$ при $|\tau| \rightarrow \infty$. Если в лемме 31.1 $\Phi_2(t) \equiv 1$, то из (23.8) следует, что $f(s) = o(1)$ при $|\tau| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} s < \beta$. Такую же оценку легко доказать в случае, когда $\Phi_2(t)$ задана формулой (31.6) и хотя бы один из $\operatorname{Re} a_j > 0$. Если $\Phi_2(t) = \exp[\pm i\mu t^\nu]$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, то в полосе $\beta - \nu p < \operatorname{Re} s < \beta$ можно доказать справедливость оценки $f(s) = O(|\tau|^p)$, $p \in N_1$ [164]. Аналогичные оценки имеют место в случае леммы 31.2 при $\operatorname{Re} s > \alpha$, причем при $\Phi_2(t) = \exp[\pm i\mu t^\nu]$, $\mu > 0$, $\nu > 0$ в полосе $\alpha < \operatorname{Re} s < \alpha + \nu p$, $p \in N_1$, имеет место оценка $f(s) = O(|\tau|^p)$.

В [164] заданы также различные условия относительно $F(t)$, когда $f(s)$ убывает как некоторая степень τ при $|\tau| \rightarrow \infty$. Приводим в случае леммы 31.1 условия, когда $f(s) = o(|\tau|^{-N})$: 1) $F(t) \in C^\infty(0, \infty)$; 2) разложение для $F(t)$ в $\operatorname{PM}(0)$ допускает почленное дифференцирование сколь угодно раз и 3) $\left(t \frac{d}{dt}\right)^p \times (t^\sigma F(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и всех $p \in N$, $\sigma > -\operatorname{Re} \lambda_0$.

2°. Если $F(t) = 0$ при $t < a$, $a > 0$, и $F(t) = 0$ при $t > b$, $b < \infty$, то $f(s)$ аналитична во всей плоскости. Если выполняется только первое равенство, то $f(s)$ аналитична при $\operatorname{Re} s < \beta$. В случае выполнения только второго равенства эта функция аналитична при $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Поскольку один множитель функции $G(s)$ следует продолжить в левой, а другой — в правой полуплоскости, то одновременно применяются обе леммы. Подробнее этот вопрос рассмотрен в п. 31.2.

Б. При построении асимптотического выражения для $\Omega(z)$ путь интегрирования следует передвинуть на конечное расстояние, поэтому согласно теореме Коши достаточно, если $G(s) = o(1)$ при $|\tau| \rightarrow \infty$ в соответствующей полосе. Для установления этого факта можно использовать примечание 1° в п. А.

В. Если $\int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} |G(s)| d\tau < M$, то $\int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} G(s) z^{-s} ds = O(z^{-\nu_1})$ и эта оценка достаточна для справедливости полученного асимптотического представления. Можно задавать также другие

условия, используя лемму 22.10, однако их проверка более сложная.

31.1.3. Имеется множество функций, например полиномы, для которых не существует преобразования Меллина. В таких случаях $F(t)$ можно представить в виде $F(t) = F(t)\eta(1-t) + F(t)\eta(t-1) \equiv F_1(t) + F_2(t) \rightarrow f_1(s) + f_2(s)$. Согласно примечанию 2° $f_1(s)$ аналитична при $\operatorname{Re} s > \alpha$, $f_2(s)$ аналитична при $\operatorname{Re} s < \beta$, но поскольку $f(s)$ не существует, то $\alpha > \beta$. Однако часто $f_1(s)$ аналитически продолжаема в левой, а $f_2(s)$ — в правой полуплоскости. В таком случае будем придавать конкретный смысл изображению функции $F(t)$ с помощью этих аналитических продолжений и запишем $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$.

Если указанным свойством обладает функция $H(t)$ в формуле (31.3), то $H(t)$ представим в виде $H(t) = H_1(t) + H_2(t)$ и $\Omega(z) = \Omega_1(z) + \Omega_2(z)$. Аналогично поступаем, если требуется разбить $K(t) = K_1(t) + K_2(t)$. Впредь предположим, что либо данные функции преобразуемы, либо интеграл $\Omega(z)$ разбит на вышеуказанные части и вместо данных функций фигурируют соответствующие слагаемые. Поскольку асимптотические разложения отдельно для $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ можно построить согласно общей теории, то в дальнейшем рассмотренное в данном пункте обобщение специально не выделяется. Пример приведен в п. 31.3.3, 3°.

31.2. Основные теоремы

31.2.1. В силу сказанного в п. 31.1 справедлива

Теорема 31.1. Пусть 1) при некотором γ имеет место (31.3), где функции $\kappa(s)$ и $h(s)$ определены в (31.4); 2) функция $G(s) = \kappa(s)h(1-s)$ при $\operatorname{Re} s > \gamma$ аналитически продолжаема как мероморфная функция с полюсами s_h ; 3) в каждой вертикальной полосе $\gamma < \gamma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \gamma_2$ $G(s) = o(1)$ при $|\tau| \rightarrow \infty$; 4) $\int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} |G(s)| d\tau < M(\gamma_0)$ при соответствующих $\gamma_0 > \gamma$. Тогда при $z \rightarrow +\infty$

$$\Omega(z) = \int_0^{\infty} K(z t) H(t) dt \sim - \sum_{h=0}^{\infty} \operatorname{res} [z^{-s} G(s); s_h]. \quad (31.8)$$

Если $G(s)$ при $\operatorname{Re} s > \gamma$ аналитична, то $\Omega(z) = o(z^{-N})$.

Примечания. 1°. Согласно леммам 31.1 и 31.2 $G(s)$ имеет полюсы, если либо $K(t) \in \operatorname{PM}(\infty)$, либо $H(t) \in \operatorname{PM}(0)$, и функции $K(t)$ и $H(t)$ удовлетворяют остальным условиям этих лемм. Если выполняются оба соотношения, то имеем две последова-

тельности полюсов. В случаях, когда $K(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ экспоненциально убывает или быстро осциллирует, $\kappa(s)$ аналитична при $\operatorname{Re} s > \gamma$ и асимптотика для $\Omega(z)$ зависит лишь от поведения $H(t)$ при $t \rightarrow +0$. Если $H(t) \in \text{PM}(0)$, то справедливо (31.8), в случае дополнительного множителя (31.6) имеем оценку $o(z^{-N})$. Таким образом, теорема 31.1 объединяет случаи, когда имеются ядра разных типов (экспоненциально убывающие, степенные и осциллирующие), и объясняет причины появления того или иного асимптотического представления.

2°. Как видно из (23.8), расположение полюсов s_k и разложение изображения в ряд Лорана в окрестности точки s_k определяются из разложения оригинала в РМ. Приведем более подробные результаты.

А. Если при $t \rightarrow +0$ $H(t) \sim \sum_{h=0}^{\infty} t^{\lambda_h} \sum_{j=0}^{m_h} b_{jh} \ln^j t$, то $h(s)$ имеет полюсы $-\lambda_h$ и в окрестностях этих точек главная часть ряда Лорана согласно (23.8) имеет вид $\sum_{j=0}^{m_h} \frac{b_{jh} (-1)^j j!}{(s + \lambda_h)^{j+1}}$, а главная часть для функции $h(1-s)$ — вид $\sum_{j=0}^{m_h} \frac{b_{jh} (-1)^j j!}{(1 + \lambda_h - s)^{j+1}}$. В случае простого полюса при $K(t) \in \text{PM}(\infty)$ в (31.8) вычет в точке $s_k = 1 + \lambda_k$ имеет вид $-b_{0k} z^{-1-\lambda_k} \kappa(1 + \lambda_k)$, а в общем случае — вид $[-z^{-1-\lambda_k} \sum_{j=0}^{m_k} b_{jk} \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} (-\ln z)^p \kappa^{(j-p)}(1 + \lambda_k)]$. Знак «-» появляется потому, что в знаменателе имеем $(1 + \lambda_k - s)$.

Б. Если $H(t) \in \text{PM}(0)$ и при $t \rightarrow \infty$ $K(t) \sim \sum_{h=0}^{\infty} t^{-\lambda_h} \sum_{j=0}^{m_h} c_{jh} \ln^j t$, то аналогично получим вычет в точке $s_k = \lambda_k$ в виде $-c_{0k} z^{-\lambda_k} \times \times h(1 - \lambda_k)$, если полюс простой, и в виде $[-z^{-\lambda_k} \sum_{j=0}^{m_k} c_{jk} \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} \times \times \ln^p z h^{(j-p)}(1 - \lambda_k)]$ — в общем случае. Знак «-» появляется потому, что вместо (23.8) в ряд с учетом $\text{PM}(\infty)$ разлагается $\int_1^{\infty} t^{s-1} K(t) dt$ и после почленного интегрирования функции вычисляются при $t=1$.

Таким образом, для практического вычисления вычетов в (31.8) в рассмотренных случаях в явном виде достаточно знать лишь одно изображение, а для второго множителя в данном интеграле — его разложение в РМ. Лишь в случае, когда $K(t) \in \text{PM}(\infty)$ и $H(t) \in \text{PM}(0)$ (ядро степенного типа), необходимо знать оба изображения. Теоретически разложение всегда задается формулой (31.8).

3°. Для проверки выполнения условия 3) теоремы 31.1 иногда можно использовать последнее утверждение в леммах 31.1 и 31.2 и примечание 1° к этим леммам. Это условие выполнено, если $K(t) \in \text{PM}(\infty)$ или $K(t) = o(t^{-N})$ при $t \rightarrow \infty$, а $H(t) \in \text{PM}(0)$ или $H(t) = o(t^N)$ при $t \rightarrow 0$. В случае осциллирующего ядра изображение $\kappa(s)$ имеет степенную асимптотику. Если $H(t)$ аналитична в секторе $|\arg t| \leq \theta$ при сколь угодно малом $\theta > 0$, то $h(1-s)$ согласно лемме 31.1 имеет оценку $O(e^{-\theta|\tau|})$ и поэтому $G(s) = o(|\tau|^{-N})$. Тем самым удовлетворено и условие 4) теоремы 31.1. Вместо аналитичности в секторе на $H(t)$ можно наложить более слабые условия, которые отмечены в конце примечания 1° к лемме 31.2. Такие условия приведены ранее, например в п. 16.4.

Теорема 31.2. Если в теореме 31.1 условия 3) и 4) заменить на $G(s) = O(e^{-\theta|\tau|})$ при $\gamma \leq \text{Re } s \leq \gamma_2$ с любым фиксированным числом γ_2 , то (31.8) справедливо при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \theta - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, если только интеграл в левой части (31.3) существует.

Доказательство следует из того, что передвижение пути, примененное в доказательстве теоремы 31.1, в силу оценки $G(s)z^{-s} = |z|^{-\sigma} O(e^{-\theta|\tau|})$ справедливо при $|\arg z| \leq \theta - \varepsilon$. ■

Примечания. 1°. Условие о существовании интеграла $\Omega(z)$ при $|\arg z| \leq \theta - \varepsilon$ не является излишним. Например, при $K(t) = J_\nu(t)$, $H(t) = (1+t)^{-1}$ в силу леммы 31.1 имеем оценку $G(s) = O(e^{-(\pi-\varepsilon)|\tau|})$, поскольку $H(t)$ аналитична при $|\arg t| \leq \pi - \varepsilon$. Однако $\Omega(z)$ не существует, если $\arg z \neq 0$.

2°. Теорема 31.2 согласно лемме 31.2 обычно применяется в случаях, когда ядро $K(t)$ — аналитическая функция при $|\arg t| \leq \theta + \varepsilon$ и при $t \rightarrow \infty$ либо $K(t) \in \text{PM}(\infty)$, либо $K(t) = o(t^{-N})$.

3°. Иногда разложение (31.8) справедливо при $|\arg z| \leq \theta$ (а не $\theta - \varepsilon$), так как $G(s)z^{-s}$ при $|\arg z| \leq \theta$ может иметь оценку $|z|^{-\sigma} O(|\tau|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, которая обеспечивает выполнение условий 3) и 4) теоремы 31.1. Более глубоко этот случай проанализирован в [164].

31.2.2. Построение асимптотических разложений для $\Omega(z)$ при $z \rightarrow 0$ аналогично предыдущему. Следует только путь интегрирования передвинуть влево и при применении лемм 31.1 и 31.2 поменять их местами. Поэтому можно соответственно перефразировать теоремы 31.1 и 31.2.

Теорема 31.3. Пусть 1) при некотором γ имеет место (31.3), где функции $\kappa(s)$ и $h(s)$ определены в (31.4); 2) функция $G(s) = \kappa(s)h(1-s)$ при $\text{Re } s < \gamma$ аналитически продолжаема как мероморфная функция с полюсами s_k ; 3) в каждой вертикальной полосе $\gamma_2 \leq \text{Re } s \leq \gamma_1 < \gamma$ $G(s) = o(1)$ при $|\tau| \rightarrow \infty$;

4) $\int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty} |G(s)| d\tau < M(\gamma_0)$ при соответствующих $\gamma_0 < \gamma$. Тогда при $z \rightarrow +0$

$$\Omega(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{res} [z^{-s} G(s); s_k]. \quad (31.9)$$

Если $G(s)$ при $\operatorname{Re} s < \gamma$ аналитична, то $\Omega(z) = o(z^N)$.

Примечания. 1°. Функция $G(s)$ в левой полуплоскости имеет полюсы, если либо $K(t) \in \operatorname{PM}(0)$, либо $H(t) \in \operatorname{PM}(\infty)$, и функции $K(t)$ и $H(t)$ удовлетворяют остальным условиям лемм 31.1 и 31.2. В случаях, когда $K(t)$ при $t \rightarrow 0$ экспоненциально убывает или быстро осциллирует, согласно лемме 31.1 $\kappa(s)$ аналитична при $\operatorname{Re} s < \gamma$ и асимптотика для $\Omega(z)$ зависит лишь от поведения $H(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Если $H(t) \in \operatorname{PM}(\infty)$, то справедливо (31.9), а в случае дополнительного множителя (31.7) имеем оценку $o(z^N)$. Следовательно, теорема 31.3 в случае разных типов ядер дает наглядное представление о поведении $\Omega(z)$ при $z \rightarrow 0$.

2°. Так же как в примечании 2° к теореме 31.1, вычеты в (31.9) вычисляются из разложений оригиналов в РМ.

А. Если при $t \rightarrow \infty$ $H(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\lambda_k} \sum_{j=0}^{m_k} b_{jk} \ln^j t$, то ряд Лорана для $h(1-s)$ в окрестности $s_k = 1 - \lambda_k$ имеет главную часть $\sum_{j=0}^{m_k} \frac{c_{jk} (-1)^{j+1} j!}{(1-s-\lambda_k)^{j+1}}$. Поэтому в случае простого полюса при $K(t) \in \operatorname{PM}(0)$ в точке s_k имеем вычет $c_{0k} z^{\lambda_k - 1} \kappa(1 - \lambda_k)$, а в общем случае $z^{\lambda_k - 1} \sum_{j=0}^{m_k} c_{jk} \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} (-\ln z)^{p \kappa(j-p)} (1 - \lambda_k)$.

Б. Если $H(t) \in \operatorname{PM}(\infty)$ и при $t \rightarrow 0$ $K(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{\lambda_k} \sum_{j=0}^{m_k} b_{jk} \ln^j t$, то вычет в точке $s_k = -\lambda_k$ в случае простого полюса имеет вид $b_{0k} z^{\lambda_k} h(1 + \lambda_k)$, а в общем случае $z^{\lambda_k} \sum_{j=0}^{m_k} b_{jk} \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} \ln^j z h^{(j-p)}(1 + \lambda_k)$.

3°. Условие 3) теоремы 31.3 выполнено, если $K(t) \in \operatorname{PM}(0)$ или $K(t) = o(t^N)$ при $t \rightarrow 0$, а $H(t) \in \operatorname{PM}(\infty)$ или $H(t) = o(t^{-N})$ при $t \rightarrow \infty$. Если $K(t)$ осциллирует при $t \rightarrow 0$ и $H(t)$ согласно лемме 31.2 аналитична в секторе $|\arg t| \leq \theta$, то $G(s) = o(|\tau|^{-N})$. Можно задавать также более слабые условия, как в примечании 3° к теореме 31.1.

Теорема 31.4. Если в теореме 31.3 условия 3) и 4) заменить на $G(s) = o(e^{-\theta|\tau|})$ при $\gamma_2 \leq \operatorname{Re} s < \gamma$ с любым фиксирован-

ным числом γ_2 , то (31.9) справедливо при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \vartheta - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, если только интеграл в левой части (31.3) существует.

Примечание. Теорема 31.4 применяется в тех случаях, когда ядро $K(t)$ — аналитическая функция при $|\arg t| \leq \vartheta + \varepsilon$ и при $t \rightarrow +0$ либо $K(t) \in \text{PM}(0)$, либо $K(t) = o(t^N)$.

31.3. Случай точек ветвления. Примеры

31.3.1. Формулу Парсеваля (31.3) можно применить и в случаях, когда аналитическое продолжение функции $G(s)$ [см. (31.5)] имеет точки ветвления. Пусть $K(t)$ при $t \rightarrow \infty$ обладает асимптотикой, которая указана в лемме 31.2. Тогда $H(t)$ при $t \rightarrow 0$ должна обладать иной асимптотикой, чем указано в лемме 31.1, чтобы $G(s)$ имела точки ветвления. Один из возможных случаев для этого имеется, когда $H(t)$ при $t \rightarrow 0$ разлагается в более общий ряд, чем $\text{PM}(0)$:

$$H(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{\beta_k} \sum_{m=0}^{m_k} c_{mk} (\ln 1/t)^{\mu_{mk}}, \quad -1 < \text{Re } \beta_k \uparrow +\infty, \quad (31.10)$$

где хотя бы одно из чисел $\mu_{mk} \in \overline{N}$.

Поскольку относительно членов, в которых $\mu_{mk} \in N$, при $z \rightarrow \infty$ можно применить теорему 31.1, то достаточно рассмотреть случай, когда при всех m имеем $\mu_{m0} \in \overline{N}$. Кроме того, ниже будет показано, что для $\Omega(z)$ при $z \rightarrow \infty$ получается разложение по логарифмам и поэтому дальнейшими членами ряда (31.10), содержащими более высокие степени t , можно пренебречь. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда при $t \rightarrow +0$

$$H(t) = t^{\beta} \sum_{m=0}^{m_0} c_m [\ln(1/t)]^{\mu_m} + \Phi(t), \quad (31.11)$$

где $\text{Re } \beta > -1$, $\mu_m \in \overline{N}$, $\Phi(t) = O(t^{\beta_1 - \varepsilon})$ при $t \rightarrow +0$, $\text{Re } (\beta_1 - \varepsilon) > \text{Re } \beta$, $\Phi(t)$ локально интегрируема в $[0, 1]$.

Пусть функции $K(t)$ и $H(t)$ обладают вышеупомянутыми свойствами и, кроме того, $K(t)$ аналитична в секторе $|\arg t| \leq \vartheta$, $\vartheta > 0$, в котором $K(t) = O(t^{\nu})$ при $t \rightarrow 0$, $\nu + \text{Re } \beta > -1$, а $H(t)$ абсолютно интегрируема в $[0, \infty)$. Все указанные условия вместе обозначим через условие А. Далее выделим два случая.

1°. $\text{Re } \mu_m > -1$. Представим $H(t)$ в виде

$$H(t) = H(t)\eta(1-t) + H(t)\eta(t-1) \equiv H_1(t) + H_2(t), \quad (31.12)$$

где функция $\eta(t)$ определена в (26.86). Соответственно имеем $\Omega(z) = \Omega_1(z) + \Omega_2(z)$. Наложим на $H(t)$ и $K(t)$ дополнительное

условие Б, чтобы $\Omega_2(z)$ входил в любой остаток разложения для $\Omega_1(z)$.

Пусть $H(t) = O(t^\alpha)$ при $t \rightarrow \infty$, а $K(t) = \Phi_1(t)\Phi_2(t)$ в секторе $|\arg t| \leq \theta$, где $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ указаны в лемме 31.2. Условие Б выполнено, если в (31.7) хотя бы один из $\operatorname{Re} a_j > 0$, а при $\Phi_2(t) \equiv 1$ достаточно, если $\operatorname{Re} \lambda_0 > \alpha + 1$, $\operatorname{Re} \lambda_0 > -\nu$, $\operatorname{Re} \lambda_0 > \operatorname{Re} \beta + 1$. Первое из этих неравенств гарантирует сходимость интеграла $\Omega_2(z)$, второе — существование $\kappa(s)$ при $\operatorname{Re} s \in (-\nu, \operatorname{Re} \lambda_0)$, а третье — оценку $\Omega_2(z) = O(z^{-\lambda_0}) = o(z^{-\beta-1} \ln^{-N} z)$, которую можно сопоставить с (31.14) и (31.18).

Таким образом, достаточно рассмотреть $\Omega_1(z)$. Согласно (31.11) применим разбиения $H_1(t) = [H_{11}(t) + \Phi(t)]\eta(1-t)$, $\Omega_1(z) = \Omega_{11}(z) + \Omega_{12}(z)$. В основе разложения лежит формула

$$\int_0^1 t^{s+\beta-1} (\ln 1/t)^\mu dt = \int_0^\infty e^{-u(s+\beta)} u^\mu du = \Gamma(\mu+1) (s+\beta)^{-\mu-1}. \quad (31.13)$$

Поэтому функция $h_{11}(1-s)$ имеет точку ветвления в $s=1+\beta$, $\operatorname{Re} s > 0$. Согласно условиям А и Б продолжение для $\kappa(s)$ аналитично или мероморфно при $\operatorname{Re} s > -\nu$, причем в последнем случае крайний левый полюс $s=\lambda_0$ для $\kappa(s)$ лежит правее точки $s=1+\beta$. Следовательно, в силу $-\nu < 1 + \operatorname{Re} \beta$ крайней левой особой точкой для $G_{11}(s) = \kappa(s)h_{11}(1-s)$ является точка ветвления $s=1+\beta$.

Пусть в окрестности точки $s=1+\beta$ $\kappa(s) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k [s - (1+\beta)]^k / k!$.

С учетом формулы (22.15) или (12.30) при $z \rightarrow \infty$ получаем

$$\Omega_{11}(z) \sim z^{-\beta-1} \sum_{m=0}^{m_1} c_m (\ln z)^{\mu_m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \binom{\mu_m}{k} (\ln z)^{-k}. \quad (31.14)$$

Можно применить также формулу (22.18), но тогда будем иметь неравномерную шкалу.

Оценка остатка $\Omega_{12}(z)$ получается следующим образом. Пусть $\Phi(t)\eta(1-t) \rightarrow \varphi(s)$. В силу (31.11) имеем $\varphi(1-s) = O(1)$ при $\operatorname{Re} s \leq \operatorname{Re} \beta_1 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > \varepsilon$, $\operatorname{Re} \beta_1 - \varepsilon_1 > \operatorname{Re} \beta$, а $\kappa(s) = O(e^{-\theta|t|})$ согласно теореме 23.1. Поэтому $\Omega_{12}(z) = O(z^{-\beta_1 - \varepsilon_1 - 1}) = o(z^{-\beta-1} \ln^{-N} z)$. Отсюда следует, что $\Omega(z) = \Omega_{11}(z) + o(z^{-\beta-1} \ln^{-N} z)$, т. е. для $\Omega(z)$ справедливо разложение (31.14) при $|\arg z| \leq \theta - \varepsilon_0$.

2°. Пусть $\operatorname{Re} \mu_0 \leq -1$. Ради простоты пренебрежем остальными членами в сумме (31.11), так как в противном случае можно применить суперпозицию разложений, как в (31.14). Использование представления (31.12) в данном случае нецелесо-

образно, ибо интеграл Меллина от $H_1(t)$ расходится. Поэтому применим другое представление

$$H(t) = H(t)\eta(1/2-t) + H(t)\eta(t-1/2) \equiv H_1^*(t) + H_2^*(t). \quad (31.15)$$

Соответственно имеем $\Omega(z) = \Omega_1^*(z) + \Omega_2^*(z)$, причем согласно условию Б $\Omega_2^*(z)$ входит в остаток разложения для $\Omega_1^*(z)$, как и раньше. Кроме того, положим $H_1^*(t) = [H_{11}(t) + \Phi(t)]\eta(1/2-t)$, $\Omega_1^*(z) = \Omega_{11}^*(z) + \Omega_{12}^*(z)$, $\mu_0 = \mu$.

С учетом (8.35) получим

$$h_{11}^*(s) = \int_0^{1/2} t^{s+\beta-1} (\ln 1/t)^\mu dt = 2^{-s-\beta} (\ln 2)^{\mu+1} \int_0^\infty e^{-u(s+\beta) \ln 2} \times \\ \times (1+u)^\mu du = 2^{-s-\beta} (\ln 2)^{\mu+1} \psi(1; \mu+2; (s+\beta) \ln 2) = \\ = (s+\beta)^{-\mu-1} \Gamma(\mu+1, \ln 2(s+\beta)); \quad (31.16)$$

$$h_{11}^*(1-s) = (1-s+\beta)^{-\mu-1} \Gamma(\mu+1, \ln 2(1-s+\beta)) = g_1(s) + f_1(s). \quad (31.17)$$

При $-\mu \in N$ согласно (12.37) имеем

$$g_1(s) = \Gamma(\mu+1) (1-s+\beta)^{-\mu-1},$$

а при $\mu = -n-1$, $n \in N$, согласно (12.38) —

$$g_1(s) = ((-1)^{n+1}/n!) (1-s+\beta)^n \ln(1+\beta-s).$$

В обоих случаях $f_1(s)$ — целая функция.

Сдвинем путь интегрирования в (31.3) вправо до прямой $\operatorname{Re} s = \beta_1 - \varepsilon_1$ с обходом по петле вокруг разреза, идущего вдоль луча $\arg(s-1-\beta) = 0$. Из (8.36) и (31.16) следует, что $h_{11}^*(1-s)$ на любой вертикальной прямой в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -\nu$ обладает оценкой $O(\tau^{-1})$. Поэтому с учетом оценки для $\kappa(s)$ интеграл по перерезанной разрезом прямой $\operatorname{Re} s = \beta_1 - \varepsilon_1$ входит в остаток ряда, полученного от интеграла по петле. Так как функция $f_1(s)$ разлагается по целым степеням $(s-1-\beta)$, то при построении упомянутого ряда ею можно пренебречь и использовать только $g_1(s)$. Кроме того, следует учитывать, что оценка для $\Omega_{12}^*(z)$ получается такой же, как в п. 1° для $\Omega_{12}(z)$.

Таким образом, при $-\mu \in N$ для $\Omega_1^*(z)$ остается справедливым разложение (31.14), где $m_0 = 0$, а при $\mu = -n-1$ согласно (22.22) получим

$$\Omega_1^*(z) \sim c_0 z^{-1-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \binom{n+k}{k} (\ln z)^{-n-k-1}. \quad (31.18)$$

В силу условия Б эти разложения сохраняются и для $\Omega(z)$.

31.3.2. Приводим некоторые дополнения к п. 31.3.1.

1°. Выражения для $g_1(s)$ показывают, что в разбиении (31.15) вместо $1/2$ можно брать любое число $q \in (0, 1)$, так как выбор q влияет только на выражение для функции $f_1(s)$, которой можно пренебречь.

2°. Рассмотренная в п. 31.3.1 теория сохраняется, если вместо (31.10) при $t \rightarrow +0$ имеем разложение

$$H(t) \sim t^\beta \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\ln 1/t)^{-\mu_m}, \quad \operatorname{Re} \mu_m \uparrow +\infty. \quad (31.19)$$

Тогда при $\mu_m \in N_1$ для $\Omega(z)$ получаем разложение согласно (31.14), где $m_0 = \infty$ и μ_m заменены на $-\mu_m$. Поэтому следует еще перегруппировать члены по убывающим показателям степеней логарифмов. Если при некотором m $\mu_m \in N_1$, то соответствующий внутренний ряд в (31.14) приходится заменить на ряд (31.18).

В частном случае, когда $H(t) = t^\beta [a + \ln(1/t)]^{-1}$, в [343] разложение для $\Omega(z)$ получено непосредственным использованием этого выражения, как в п. 31.3.1, без применения разложения (31.19). При $a = \ln b$ с учетом соотношения $a + \ln 1/t = \ln b/t$ подстановкой $t/b = \tau$ построение разложения можно привести к случаю (31.11), если в $\Omega(z)$ такая подстановка возможна. Этот прием можно использовать также в случае, когда $H(t) = t^\beta F(t)$, где $F(t)$ — рациональная функция от $\ln 1/t$, так как $F(t)$ можно разбить на простейшие дроби.

3°. Члены ряда (31.10) характерны тем, что их изображения по Меллину имеют одну точку ветвления. Поэтому возможные точки ветвления для $h(s)$ не могут находиться на одной вертикальной прямой. Но существуют функции, например [313]

$$H(t) = \alpha^{-1} t^\beta \sin(\alpha \ln 1/t) \eta(1-t) \rightarrow [(s+\beta)^2 + \alpha^2]^{-1},$$

изображения которых этим свойством не обладают. Поэтому разложения типа (31.10) или (31.19) не исчерпывают все случаи, когда $G(s)$ имеет точки ветвления. В приведенном примере при $t > 0$ функция $H(t)$ имеет разложение по возрастающим степеням $\ln 1/t$. Но формула Парсеваля применима и в данном случае.

4°. Аналогично данный метод можно применить к построению разложения для $\Omega(z)$ при $z \rightarrow 0$, если при $t \rightarrow \infty$ $H(t)$ имеет разложение (31.10), где $\operatorname{Re} \beta_* \downarrow -\infty$, или (31.19), а $K(t)$ при $t \rightarrow 0$ обладает асимптотикой, указанной в лемме 31.1. Эту задачу оставим читателю.

5°. Рассмотренные в п. 31.3.1 и 31.3.2 разложения можно получить также без помощи формулы Парсеваля непосредственным методом, который использован при доказательстве теоремы 13.3. Этот вопрос изложен в § 32.

31.3.3. Рассмотрим несколько примеров.

1°. Теорема 31.4 довольно просто применяется для разложения интеграла Лапласа. Пусть $H(t)$ локально интегрируема в

$[0, \infty)$ и при $t \rightarrow +\infty$ $H(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{-\lambda_k}$, $\lambda_k \in N_1$. Согласно (31.3) с

учетом $e^{-t} \xrightarrow{+} \Gamma(s)$ имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} H(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s) h(1-s) z^{-s} ds, \quad \gamma > 0, \quad (31.20)$$

причем в случае необходимости $h(1-s)$ можно понимать в смысле аналитического продолжения. В силу (31.9) при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} H(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{\lambda_k - 1} \Gamma(1 - \lambda_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} h(k+1) z^k. \quad (31.21)$$

Если $H(t) = o(t^{-N})$ при $t \rightarrow \infty$, то в (31.21) остается только второй ряд, который получается также непосредственным разложением e^{-zt} в ряд Маклорена, так как все моменты функции $H(t)$ существуют. Формула (31.21) показывает изменение разложения в противном случае. Эта формула получается также по теореме 11.1 и формуле (11.3).

Если функция $H(t)$ аналитична в некотором секторе, содержащем ось $\arg t = 0$, и сохраняет в этом секторе данное асимптотическое разложение при $t \rightarrow \infty$, то сектор, в котором справедливо (31.21), поворотом пути интегрирования можно соответственно расширить. Читатель легко может обобщить разложение (31.21) в случае, когда $H(t)$ обладает более сложным разложением в РМ при $t \rightarrow \infty$.

В этой связи напомним свойство двойственности для интеграла (31.21), указанное в п. 22.8.2: при $H(t) \doteq \chi(z)$ из $H(t) \in \mathcal{PM}(\infty)$ следует $\chi(z) \in \mathcal{PM}(0)$, и наоборот, а из $H(t) \in \mathcal{PM}(0)$ следует $\chi(z) \in \mathcal{PM}(\infty)$, и наоборот, если выполнены некоторые дополнительные условия. Первая часть первого свойства иным методом доказана также в [388]. В случае, когда $H(t) \in \mathcal{PM}(0)$, разложение при $z \rightarrow \infty$ проще всего получить, используя дополнение к лемме Ватсона, приведенное в п. 12.3.6. В частности,

таким путем при $z \rightarrow \infty$ разлагается интеграл $\int_0^{\infty} \exp[-zt - t \ln t] H_0(t) dt$, если при $t \rightarrow +0$ $H_0(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\mu_k}$, $-1 < \mu_k \uparrow +\infty$. Подобное разложение в частном случае было уже получено в (28.83).

Пусть $H(t)$ обладает разложением (31.19), где $\mu_m = m$. Тогда можно использовать указание, приведенное в п. 31.3.2, 4°, но в данном случае проще непосредственно применить теорему 13.4 с учетом примечаний 1° и 2° к ней. При $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} H(t) dt \sim z^{-\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} D_k (\ln 1/z)^{-k}, \quad (31.21')$$

где $D_k = \sum_{j=1}^k c_j \binom{-j}{k-j} \Gamma^{(k-j)}(\beta+1)$. Этот результат тем же методом получен также в [408].

Приведенные в п. 1° разложения заметно дополняют теорему 18.3.

2°. Рассмотрим частный случай интеграла свертки

$$\Omega(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z K(\tau) (z-\tau)^{\lambda-1} d\tau = \frac{z^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 K(zt) (1-t)^{\lambda-1} dt, \quad (31.22)$$

где $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Имеем

$$H(t) = (1-t)^{\lambda-1} \eta(1-t) \rightarrow \frac{\Gamma(s)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(s+\lambda)}, \quad h(1-s) = \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+1-s)}$$

при $\operatorname{Re} s < 1$.

Пусть при $t \rightarrow +0$ $K(t) \sim \sum_{j=1}^{\infty} b_k t^{\lambda_k}$, $-1 < \operatorname{Re} \lambda_k \uparrow +\infty$. Тогда соотношение (31.3) имеет место при $\gamma \in (-\operatorname{Re} \lambda_0, 1)$ и согласно (31.9) при $z \rightarrow +0$ имеем разложение

$$\Omega(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(1+\lambda_k)}{\Gamma(1+\lambda+\lambda_k)} z^{\lambda+\lambda_k}. \quad (31.23)$$

Если $K(t)$ аналитична в некотором секторе, то разложение (31.23) сохраняется в соответствующем секторе комплексной плоскости z . Это разложение можно обобщить в случае общего РМ. Формула (31.23) получается также непосредственной

подстановкой разложения для $K(tz)$ под знак интеграла и почленным интегрированием.

Пусть при $t \rightarrow \infty$ $K(t) = e^{-\mu t^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-\lambda_k}$, $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\nu > 0$, и при $t \rightarrow +0$ $K(t) = O(t^{-\alpha})$, $\alpha < 1$. Если $\operatorname{Re} \mu > 0$, то согласно лемме 31.2 $\kappa(s)$ аналитична при $\operatorname{Re} s > \alpha$ и формула (31.3) справедлива при $\gamma \in (\alpha, 1)$. Согласно теореме 31.1 и примечанию 2° к ней при $z \rightarrow +\infty$ получаем разложение

$$\Omega(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\lambda-1}{k} \kappa(1+k) z^{-1-k+\lambda}. \quad (31.24)$$

Если $\mu=0$, то $\kappa(s)$ в правой полуплоскости имеет полюсы λ_k . Пусть $\lambda_k \in N$. Тогда все полюсы функции $G(s)$ простые и вместо разложения (31.24) согласно теореме 31.1 имеем

$$\begin{aligned} \Omega(z) \sim (1/\Gamma(\lambda)) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\lambda-1}{k} \kappa(1+k) z^{-1-k+\lambda} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \Gamma(1-\lambda_k)}{\Gamma(\lambda+1-\lambda_k)} z^{\lambda-\lambda_k}. \end{aligned} \quad (31.24')$$

Возможны аналогичные обобщения, как для разложения (31.23). Разложение (31.24) при $\operatorname{Re} \mu > 0$ получается также непосредственно по лемме Ватсона, а при $\mu=0$ соответствующий результат вытекает из п. 11.3, но коэффициенты имеют более сложные выражения. При $\operatorname{Re} \mu=0$, $\mu \neq 0$, и $z \rightarrow \infty$ метод неприменим, так как согласно примечанию 1° к лемме 31.2 нельзя оправдать сдвиг пути интегрирования вправо. Результаты п. 10.4 и 16.4 показывают, что разложение для $\Omega(z)$ тогда изменится, поскольку существенный вклад дает также точка $t=1$.

3°. Рассмотрим пример к п. 31.1.3. Пусть $H(t) = |1-t|^\mu$, $K(t) = (1+t)^{-\lambda}$, $0 < \mu < \lambda-1$. Преобразование Меллина от $H(t)$ не существует. Берем $H_1(t) = (1-t)^\mu \eta(1-t)$ и $H_2(t) = (t-1)^\mu \eta(t-1)$. Тогда

$$h_1(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(s+\mu+1)} \text{ при } \operatorname{Re} s > 0, \quad h_1(1-s) = \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+2-s)};$$

$$h_2(s) = \frac{\Gamma(-s-\mu)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1-s)} \text{ при } \operatorname{Re} s < -\mu,$$

$$h_2(1-s) = \frac{\Gamma(s-\mu-1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(s)};$$

$$\kappa(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\lambda-s)}{\Gamma(\lambda)}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < \lambda.$$

Отсюда видно, что нет такого числа γ , при котором имело бы место (31.3). Если применяем разбиение $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$, то функция

$$G_1(s) = \kappa(s) h_1(1-s) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\mu+2-s)} \Gamma(\lambda-s) \Gamma(1-s) \quad (31.25)$$

существует при $0 < \operatorname{Re} s < 1$, и ее можно аналитически продолжить как мероморфную функцию во всей плоскости s . В правой полуплоскости она имеет полюсы $s = 1+k$, $s = \lambda+k$, а в левой — $s = -k$, $k \in \mathbb{N}$. Аналогично функция

$$G_2(s) = \kappa(s) h_2(1-s) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda)} \Gamma(s-1-\mu) \Gamma(\lambda-s) \quad (31.26)$$

существует при $1+\mu < \operatorname{Re} s < \lambda$, и ее также можно продолжить как мероморфную функцию, имеющую полюсы $s = \lambda+k$ и $s = 1+\mu-k$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, следует отдельно построить асимптотические разложения для функций $\Omega_1(z)$ и $\Omega_2(z)$ и использовать равенство $\Omega(z) = \Omega_1(z) + \Omega_2(z)$.

Разложение при $z \rightarrow \infty$ найдем непосредственно согласно (31.8) с учетом уже ранее примененного соотношения $\operatorname{res}[\Gamma(\lambda-s); \lambda+k] = (-1)^{k+1}/k!$. При $\lambda \in \mathbb{N}$ после преобразований получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{|1-t|^\mu}{(1+zt)^\lambda} dt \sim \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\lambda-1-k)}{\Gamma(\mu+1-k)} z^{-1-k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+\lambda-\mu-1)}{k!} \left(1 + \frac{\sin \pi(\mu-\lambda)}{\sin \pi\lambda} \right) z^{-\lambda-k} \right]. \quad (31.27)$$

Аналогично при $z \rightarrow 0$ согласно (31.9) имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{|1-t|^\mu}{(1+zt)^\lambda} dt \sim \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\mu+2+k)} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda-1-\mu+k)}{k!} z^{k-1-\mu} \right]. \quad (31.28)$$

Согласно теоремам 31.2 и 31.4 разложения (31.27) и (31.28) справедливы при $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$. Это свойство видно также из выражений для $G_1(s)$ и $G_2(s)$ в силу асимптотических свойств Γ -функции. Разложения (31.27) и (31.28) также можно найти с помощью теорем 11.1 [для (31.28)] и 11.4 [для (31.27)], однако для (31.27) получим более сложные коэффициенты.

4°. Если согласно теоремам 31.1—31.4 получаем лишь оценку $o(z^{-N})$ при $z \rightarrow \infty$ или $o(z^N)$ при $z \rightarrow 0$, то следует применить метод, изложенный в § 28. Например, для интеграла (21.98) $F_\lambda(0, z)$ при $K(t) = e^{-\beta t^{-\nu}}$, $K(z^{-1/\nu}t) = e^{-\beta z t^{-\nu}}$, $H(t) = t^\lambda e^{-\alpha t^\mu}$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ согласно (31.3) получим соотношение

$$F_\lambda(0, z) = \int_0^\infty t^\lambda \exp[-\alpha t^\mu - \beta z t^{-\nu}] dt =$$

$$= \frac{1}{\nu \mu \alpha^{(\lambda+1)/\mu}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(-s/\nu) \Gamma\left(\frac{\lambda+1-s}{\mu}\right) [\alpha^{1/\mu} (\beta z)^{1/\nu}]^s ds,$$
(31.29)

$\gamma < \min(0, (\operatorname{Re} \lambda + 1)/\mu)$. Отсюда сдвигом пути вправо непосредственно получим разложение функции $F_\lambda(0, z)$ при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| < \pi(1/\nu + 1/\mu)/2$. Для построения разложения при $z \rightarrow \infty$ следует применить результаты § 28. Можно убедиться в том, что приходим к (21.103). Соотношение (31.29) с помощью свойств H -функций Фокса получено в [347].

31.3.4. Дадим оценку рассмотренного метода и сравним его с остальными методами.

1°. Отметим сначала положительные стороны метода.

1) Имеем объединенный метод в случае ядер различных типов (экспоненциально убывающих, осциллирующих и степенных). Для ядер и функций нагрузки допускается сравнительно общая асимптотика. Не требуется различать типы ядер и затем выбирать соответствующий метод.

2) На основе свойств изображений по Меллину данных функций метод весьма просто и наглядно объясняет присутствие или отсутствие соответствующей составляющей в асимптотическом разложении интеграла, а также изменение вида разложения в случае кратных полюсов. Метод представляет возможность наглядно показать, каким образом тип ядра влияет на вид асимптотического разложения.

3) Во многих случаях метод более удобен и прост для вычисления коэффициентов разложения. В особенности это наблюдается при сравнении данного метода с методом последовательного разложения (см. примеры в п. 31.3.3). Хотя коэффициенты, полученные с помощью этих методов, одинаковы, все же их выражения различаются по внешнему виду. Согласно методу последовательного разложения они задаются с помощью интеграла, а согласно рассматриваемому методу — часто получаются в явном виде. Совпадение разных выражений коэффициентов будет показано в п. 32.3.1.

4) Метод применим также в случаях, когда аналитическое продолжение функции $G(s)$ имеет не только полюсы, но и точки ветвления. Результаты, приведенные в п. 31.3.1 и 31.3.2, только частично отражают все возможности в этом случае.

В силу сказанного метод применения формулы Парсевала следует признать весьма универсальным и элегантным. Большое количество примеров и задач по применению этого метода приведено в [164].

2°. Отметим некоторые недостатки метода.

1) Метод дает асимптотические разложения лишь по простейшим шкалам — разложения в РМ или по логарифмам. Разложения с факторами перед рядами или по более сложным шкалам в большинстве случаев данным методом непосредственно найти нельзя. Например, он неприменим, когда $H(t)$ имеет более сложные разложения по логарифмам или осциллирующим функциям (см. п. 32.1 и 32.2).

2) Хотя ядра могут быть как осциллирующими, так и экспоненциально убывающими или степенными, все же допускаются лишь ядра в форме $K(zt)$. Существует множество интегралов различных видов с ядрами иного типа, для разложения которых данный метод неприменим, но можно использовать другие методы. Следует отметить, что в работе [164] рассматриваются также интегралы $\int_a^b K(zg(t))h(t)dt$, которые подстановкой приводятся к теоремам 31.1—31.4. Однако во многих случаях для разложения таких интегралов удобнее применять другие методы, например метод Лапласа с модификациями, интегрирование по частям или почленное интегрирование.

3) Вопреки сказанному в п. 1° 3) нередко такие случаи, когда затруднения создает вычисление коэффициентов разложения, так как при этом необходимо знать явное выражение для аналитического продолжения функции $G(s)$. В особенности это явление характерно для интегралов по сегменту $[a, b]$, $a > 0$, $b < \infty$.

4) Метод не показывает других причин присутствия или отсутствия соответствующих составляющих в полученном разложении. Такие причины иногда просто вытекают из применения других методов.

Сказанное выше свидетельствует о том, что рассмотренные в предыдущих параграфах методы отнюдь не являются лишними. В случае экспоненциально убывающих ядер методы, рассмотренные в § 12, 13 и 16, не являются более сложными, но нередко являются более общими по сравнению с рассматриваемым методом, так как допускают построение асимптотического разложения в случае более общих подынтегральных

функций. Интегралы, рассмотренные в § 17 и 18, нельзя исследовать методом применения формулы Парсеваля. В случае осциллирующих ядер метод, изложенный в п. 16.4, дает аналогичные результаты, как равенство Парсеваля. Наибольшее преимущество данный метод имеет по сравнению с методом последовательного разложения, так как при известных явных выражениях для $\kappa(s)$ и $h(s)$ коэффициенты разложений данным методом вычисляются значительно проще.

31.4. Метод сопряженных операторов

31.4.1. Пусть

$$Lu(t) \equiv \sum_{k=0}^n p_k(t, x) u^{(k)}(t), \quad (31.30)$$

где $p_k(t, x)$ — аналитические относительно t функции в области D при каждом $x \geq x_0$. Согласно [323] оператор L^* , сопряженный с L , определяется выражением

$$L^*v(t) \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k (p_k(t, x) v(t))^{(k)}. \quad (31.31)$$

Метод разложения интеграла основывается на соотношении

$$\int_a^b [v(t) Lu(t) - u(t) L^*v(t)] dt = G(u, v) \Big|_a^b, \quad (31.32)$$

$[a, b] \in D$, где $G(u, v)$ — соответствующее билинейное дифференциальное выражение, полученное интегрированием по частям левой части (31.32) с учетом (31.30) и (31.31). Имеем [323]

$$G(u, v) = \sum_{k=1}^n \sum_{r+s=k-1} (-1)^k u^{(s)}(p_k v)^{(r)}. \quad (31.33)$$

В частности,

$$G_1(u, v) = p_1 uv, \quad G_2(u, v) = uv(p_1 - p_2') + p_2(u'v - uv'). \quad (31.34)$$

Пусть функция $K(x, t)$ при $x \geq x_0$ в D удовлетворяет уравнению

$$LK(x, t) = g(x, t)K(x, t) \quad (31.35)$$

и можно найти такую функцию $v(x, t)$, что в D

$$L^*v(x, t) = g(x, t)v(x, t) - h(x, t). \quad (31.36)$$

Тогда из (31.32) получаем

$$\int_a^b K(x, t)h(x, t)dt = G(K, v) \Big|_a^b. \quad (31.37)$$

Данная формула и является основой метода, если для правой части в (31.37) удастся построить асимптотическое разложение. Для этого требуется решить следующие задачи.

1°. Исходя из (31.36) надо построить асимптотическое разложение для подходящим образом выбранного частного решения $v_0(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$. Поскольку x в уравнение (31.36) входит в качестве параметра, то обычно применяется метод неопределенных коэффициентов.

2°. Следует доказать, что таким формальным путем полученное разложение соответствует определению асимптотического разложения.

3°. Следует показать, что разложение, полученное для $v_0(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$, можно почленно дифференцировать по t , как это требуется согласно соотношению (31.33).

Решение этих задач часто не является простым, поэтому возможности применения данного метода ограничены.

31.4.2. Рассмотрим некоторые указания относительно решения приведенных задач.

1°. Пусть L^*v представимо в виде

$$L^*v = L_1v + \omega(x)L_2v, \quad (31.38)$$

где при $x \rightarrow \infty$ либо $\omega(x) \rightarrow 0$, либо $\omega(x) \rightarrow \infty$, а коэффициенты операторов L_1 и L_2 ограничены при $x \geq x_0$, $t \in D$. В первом случае формальное разложение для $v_0(x, t)$ ищем в виде

$$v_0(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, t)\omega^k(x). \quad (31.39)$$

Подставляя это выражение формально в (31.36), получаем систему дифференциальных уравнений

$$L_1a_0 - ga_0 = -h, \quad L_1a_{k+1} - ga_{k+1} = -L_2a_k, \quad k \geq 0, \quad (31.40)$$

из которой в простейших случаях последовательно можно вычислить функции $a_k(x, t)$. Особенно просто это осуществляется в том случае, когда $L_1 \equiv 1$.

Во втором случае представим уравнение (31.36) в виде

$$L_2v + (1/\omega)L_1v = (1/\omega)(gv - h), \quad (31.41)$$

а затем поступаем аналогично предыдущему. Получаем формальное решение в виде

$$v_0(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x, t) \omega^{-k}(x); \quad (31.42)$$

$$L_2 b_0 = 0, \quad L_2 b_1 = g b_0 - h - L_1 b_0, \quad L_2 b_{k+1} = g b_k - L_1 b_k, \\ k \geq 1. \quad (31.43)$$

Можно допускать для L^*v также более общее выражение

$$L^*v = \sum_{k=0}^m \omega^k(x) L_k v. \quad (31.44)$$

2°. Далее рассмотрим только разложение (31.42). Пусть

$$v_0(x, t) = \sum_{k=0}^n b_k(x, t) \omega^{-k}(x) + r_n(x, t). \quad (31.45)$$

Предположим, что $b_k(x, t)$ и $v_0(x, t)$ при $x \geq x_0$ — аналитические в D функции от t . Тогда можно $v_0(x, t)$ из (31.45) подставить в (31.41). С учетом (31.43) получим

$$L_2 r_n + (1/\omega) L_1 r_n - (1/\omega) g r_n = - (1/\omega^{n+1}) (g b_n - L_1 b_n). \quad (31.46)$$

Методом вариации постоянных или с помощью функции Грина можно написать частное решение этого неоднородного уравнения. Если известны асимптотические свойства линейно-независимых частных решений соответствующего однородного уравнения, то по полученной формуле можно оценить r_n . Эта задача в общем случае трудная, так как приходится использовать тяжелый аппарат теории дифференциальных уравнений. В силу указанного затруднения этот пункт часто остается непроверенным. По виду уравнения (31.46) и свойствам операторов L_1 и L_2 можно ожидать, что в некоторой области $D_1 \subset D$, $[a, b] \subset D_1$, уравнение (31.46) имеет частное решение, обладающее оценкой $r_n(x, t) = O(\omega^{-n-1})$. Если эта оценка доказана, то уравнение (31.36) имеет решение, которое при $x \rightarrow \infty$ обладает представлением

$$v_0(x, t) = \sum_{k=0}^n b_k(x, t) \omega^{-k}(x) + O(\omega^{-n-1}(x)), \quad (31.47)$$

а в (31.37) в качестве $v(x, t)$ выберем именно $v_0(x, t)$.

3°. Допустим, что в п. 2° при $x \rightarrow \infty$ доказана оценка $|r_n(x, t)| < M\omega^{-n-1}$, которая справедлива при $t \in D_1$. Тогда в области $D_\varepsilon \subset D_1$, граница которой проходит на расстоянии ε от границы D_1 , для каждой фиксированной точки $t \in D_\varepsilon$ по формуле Коши имеем оценку

$$|r_n^{(k)}(x, t)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta-t|=\varepsilon} \frac{r_n(x, \zeta)}{(\zeta-t)^{k+1}} d\zeta \right| < \frac{k!M}{\varepsilon^k \omega^{n+1}},$$

которая доказывает законность почленного дифференцирования по t соотношения (31.47), как это требуется в (31.33).

31.4.3. В качестве примера рассмотрим при $n \rightarrow +\infty$

$$\Omega(n, z) = \frac{n!(v+n)}{n^n z^n} \int_0^1 t^{-n/2} (1-t)^{v+n-1} I_n(2nz\sqrt{t}) dt, \quad (31.48)$$

где $|z \pm 1| > \varepsilon$, $v \geq 0$. Имеем $y = K(n, t, z) = t^{-n/2} (1-t)^{v+n-1} \times \times I_n(2nz\sqrt{t})$, $h(n, t) \equiv 1$. Нетрудно убедиться в том, что функция $u = I_n(2nz\sqrt{t})$ относительно t удовлетворяет уравнению

$$t^2 u'' + tu' - n^2(1/4 + z^2 t)u = 0.$$

Отсюда следует, что уравнения (31.35) и (31.36) имеют вид

$$\begin{aligned} Ly &\equiv t(1-t)^2 y'' + [(n+1)(1-t)^2 + 2(1-t)(v+n-1)]y' + \\ &+ [(v+n-1)(n+1)(1-t) + t(v+n-1)(v+n) - n^2 z^2 (1-t^2)]y = 0, \\ L^* v &\equiv t(1-t)^2 v'' - [t^2(n+5) - t(4n+2v+4) + 3n+2v-1]v' + \\ &+ (n^2[1-z^2(1-t^2)] + t[n(v-3) + v(v-2) + 5] + n(v+4) + \\ &+ 3v-5)v = -1. \end{aligned}$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$v[1-z^2(1-t^2)] + (1/n)L_{11}v + (1/n^2)L_{12}v = -1/n^2. \quad (31.49)$$

Уравнение (31.49) соответствует оператору вида (31.44), т. е. несколько отличается от (31.41), но его формальное решение $v_0(n, t, z)$, обладающее асимптотическим разложением при $n \rightarrow \infty$, строится аналогично тому, как (31.42). Имеем

$$v_0(n, t, z) \sim - \sum_{k=2}^{\infty} b_k(t, z) n^{-k}, \quad (31.50)$$

где

$$b_2(t, z) = [1 - z^2(1 - t^2)]^{-1}, \quad b_3(t, z) = -[1 - z^2(1 - t^2)]^{-1} L_{11} b_2(t, z);$$

$$b_k(t, z) = -[1 - z^2(1 - t^2)]^{-1} [L_{12} b_{k-2}(t, z) + L_{11} b_{k-1}(t, z)], \quad k > 3.$$

Доказательство справедливости (31.50) слишком громоздко, поэтому его не приводим.

Вернемся к (31.37). Поскольку в правой части (31.37) с учетом (31.34) имеем $K(1) = K'(1) = 0$, $p_2(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +0} p_2(t) K'(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +0} K(t) = (nz)^n/n!$, $p_1(0) = 3n + 2v - 1$, $p_2'(0) = 1$, то согласно (31.34) и (31.37) получим

$$\Omega(n, z) = -(n + v)(3n + 2v - 2)v_3(n, 0, z). \quad (31.51)$$

В силу (31.50) имеем искомое разложение. В частности,

$$\Omega(n, z) = 3(1 - z^2)^{-1} + O(1/n).$$

Коэффициенты $b_k(0, z)$ в (31.50) при $|z \pm 1| > \varepsilon$ ограничены. Все же следует учитывать, что функция $v_0(n, t, z)$ должна быть ограниченной при $t \in [0, 1]$ и в некоторой окрестности этого сегмента, поэтому на z требуется наложить еще дополнительное условие.

В работе [331] интеграл (31.48) рассмотрен в связи с представлением

$$I_v(2nz) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(nz)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)} + \frac{(nz)^{2n+v}}{n! \Gamma(n+v+1)} \Omega(n, z).$$

Там же доказана справедливость полученного асимптотического разложения для $\Omega(n, z)$. Еще следует заметить, что в силу (28.96) $\Omega(n, z) = {}_1F_2(1; n+1, v+n+1; n^2 z^2)$, и для этой функции можно построить конфлюэнтное разложение при $n \rightarrow \infty$ согласно п. 29.4.

Другие примеры к данному методу приведены в [131]. Некоторые результаты относительно асимптотического разложения при $v \rightarrow \infty$ интегралов с ядром $J_v(vtz)$ и родственными ядрами с учетом частного случая (30.27) приведены в [350].

31.5. Интегралы с периодическими подынтегральными функциями

31.5.1. Пусть 1) $T(v)$ — m -мерная вектор-функция, $T(v) = \{T_1(v), \dots, T_m(v)\}$, непрерывна при $v \in (-\infty, \infty)$ и периодична с периодом ω , т. е. $T(v + k\omega) = T(v)$, $|k| \in N$; 2) функция

$K(u, T(v))$ непрерывна в области $D = [0, a] \times [0, \omega]$. Класс таких функций K обозначим через Π_ω .

Пусть сначала $a/\omega \in N_1$. Используем следующие очевидные тождества:

$$\Omega(n) = \int_0^a K(t, T(nt)) dt = \sum_{k=1}^{na/\omega} \int_{(k-1)\omega/n}^{k\omega/n} K(t, T(nt)) dt; \quad (31.52)$$

$$B = \int_0^a dt \int_0^\omega K(t, T(\tau)) d\tau = \sum_{k=1}^{na/\omega} \int_{(k-1)\omega/n}^{k\omega/n} dt \int_0^\omega K(t, T(\tau)) d\tau. \quad (31.53)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(n) = \Omega(n) - (1/\omega)B &= \sum_{k=1}^{na/\omega} \int_{(k-1)\omega/n}^{k\omega/n} [K(t, T(nt)) - \\ &- (1/\omega) \int_0^\omega K(t, T(\tau)) d\tau]. \end{aligned}$$

Применим еще тождество

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\omega/n}^{k\omega/n} K(u, T(nt)) dt &= \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{n} \int_{(k-1)\omega}^{k\omega} K(u, T(\tau)) d\tau = \\ &= (1/\omega) \int_{(k-1)\omega/n}^{k\omega/n} dt \int_0^\omega K(u, T(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (31.54)$$

при $u = \omega(k-1)/n$. Получим

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= \sum_{k=1}^{na/\omega} \int_{(k-1)\omega/n}^{k\omega/n} [K(t, T(nt)) - K(\omega(k-1)/n, T(nt))] dt + \\ &+ (1/\omega) \sum_{k=1}^{na/\omega} \int_{(k-1)\omega/n}^{k\omega/n} dt \int_0^\omega [K(\omega(k-1)/n, T(\tau)) - K(t, T(\tau))] d\tau = \\ &= S_1(n) + (1/\omega)S_2(n). \end{aligned} \quad (31.55)$$

В силу непрерывности $K(u, T(v))$ в D для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_0 , что при $n > n_0$ выражения в квадратных скобках в (31.55) по модулю меньше ε , поэтому $|\Delta(n)| < 2a\varepsilon$.

Это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(n) = (1/\omega)B$. Легко видеть, что полученная формула остается справедливой в случае, когда $a/\omega \in \bar{N}$, так как тогда вне суммы остаются стремящиеся к 0 интегралы по сегментам, длины которых меньше ω/n . Таким образом, доказана

Теорема 31.5. Если $K(t, T(t)) \in \Pi_\omega$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a K(t, T(nt)) dt = (1/\omega) \int_0^a dt \int_0^\omega K(t, T(\tau)) d\tau. \quad (31.56)$$

Примечания. 1°. Легко видеть, что (31.56) сохраняется в случае, когда $n \rightarrow \infty$ непрерывно.

2°. Согласно равенству $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a$ формулу (31.56) можно обобщить в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K(t, T(nt)) dt = (1/\omega) \int_0^\omega d\tau \int_a^b K(t, T(\tau)) dt. \quad (31.57)$$

3°. В частном случае, когда $K(t, T(nt)) = F(t, nt)f(t) \in \Pi_\omega$, где функция $F(t, \varphi)$ периодична относительно φ с периодом ω , $(t, \varphi) \in D$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a F(t, nt)f(t) dt = (1/\omega) \int_0^\omega d\varphi \int_0^a F(t, \varphi)f(t) dt. \quad (31.58)$$

Если функция F зависит только от φ , то получим первый член разложения (30.46). Следовательно, (31.58) в некотором смысле обобщает (30.46).

4°. Поскольку

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty K(t, T(nt)) dt - (1/\omega) \int_0^\infty dt \int_0^\omega K(t, T(\tau)) d\tau \right| \leq \\ & \leq \left| \int_a^\infty K(t, T(nt)) dt \right| + (1/\omega) \left| \int_a^\infty dt \int_0^\omega K(t, T(\tau)) d\tau \right| + \\ & + \left| \int_0^a K(t, T(nt)) dt - (1/\omega) \int_0^a dt \int_0^\omega K(t, T(\tau)) d\tau \right|, \end{aligned}$$

то (31.56) сохраняется также при $a = \infty$, если рассматриваемые

несобственные интегралы сходятся, а первый из них сходится равномерно относительно $n \geq n_0$.

31.5.2. Найдем асимптотическое разложение функции $\Omega(n)$ при следующих дополнительных предположениях А: 1) $a/\omega \in N_1$; 2) функция $K(u, T(v))$ при каждом $v \in [0, \omega]$ сколь угодно раз непрерывно дифференцируема по $u \in [0, a]$. Обозначим $na/\omega = p \in N_1$. С учетом формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned}
 S_1(n) &\equiv S_1^*(p) = \\
 &= a \sum_{k=1}^p \int_{(k-1)/p}^{k/p} [K(a\tau, T(p\omega\tau)) - K((k-1)a/p, T(p\omega\tau))] d\tau = \\
 &= a \sum_{k=1}^p \int_{(k-1)/p}^{k/p} d\tau \left[\sum_{j=1}^q \frac{\partial^j K((k-1)a/p, T(p\omega\tau))}{\partial u^j} \times \right. \\
 &\quad \times \frac{a^j}{j!} \left(\tau - \frac{k-1}{p} \right)^j + \frac{\partial^{q+1} K(a\Phi_k, T(p\omega\tau))}{\partial u^{q+1}} \frac{a^{q+1}}{(q+1)!} \times \\
 &\quad \times \left. \left(\tau - \frac{k-1}{p} \right)^{q+1} \right] = a \sum_{k=1}^p \left[\int_0^1 dv \sum_{j=1}^q \frac{\partial^j K((k-1)a/p, T(\omega v))}{\partial u^j} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{a^j v^j}{j! p^{j+1}} dv + O\left(\frac{1}{p^{q+2}}\right) \right] = \sum_{j=1}^q \frac{a^{j+1}}{j! p^{j+1}} \sum_{k=0}^{p-1} h_j(ka/p) + O(p^{-q-1}),
 \end{aligned} \tag{31.59}$$

где

$$h_j(t) = \int_0^1 \frac{\partial^j K(t, T(\omega v))}{\partial t^j} v^j dv. \tag{31.60}$$

Затем к внутренней сумме в (31.59) при каждом j применим формулу Эйлера—Маклорена второго рода (24.91) (без сумм, содержащих вычеты), причем ради удобства пишем также те члены, которые содержат числа Бернулли с нечетными индексами и фактически равны нулю. После соответствующей перегруппировки членов по степеням p с учетом (9.45), где взято $\lambda=1$, получаем

$$\begin{aligned}
 S_1^*(p) &= \sum_{k=1}^q \frac{a^k}{k! p^k} \int_0^1 \frac{\partial^{k-1} K(t, T(\omega v))}{\partial t^{k-1}} \Big|_{t=0}^{t=a} [B_k(v) - B_k] dv + \\
 &\quad + O(p^{-q-1}),
 \end{aligned} \tag{31.61}$$

где $B_k(v)$ — полином Бернулли.

Аналогично можно построить разложение для суммы $S_2(n) \equiv S_2^*(p)$. Отличие состоит в том, что согласно (31.55) вектор-функция T под знаком интеграла в (31.55) имеет не аргумент nt , как выше, а τ , по которому еще выполняется интегрирование по сегменту $[0, \omega]$. Поэтому после аналогичных преобразований, как для $S_1^*(p)$, по v приходится интегрировать лишь разность $B_k(v) - B_k$. В силу (9.91) с учетом равенства $\sigma_k(t) = B_k(t)/k!$ имеем $\int_0^1 B_k(v) dv = 0$, поэтому

$$(1/\omega)S_2^*(p) = (1/\omega) \sum_{k=1}^q \frac{a^k B_k}{k! p^k} \int_0^\omega \frac{\partial^{k-1} K(t, T(\tau))}{\partial t^{k-1}} \Big|_{t=0}^{t=a} d\tau + O(p^{-q-1}). \quad (31.62)$$

Если в формуле (31.61) применим подстановку $\omega v = \tau$, то при сложении $S_1^*(p)$ и $(1/\omega)S_2^*(p)$ последнее выражение сократится. Поэтому в итоге при $n \rightarrow \infty$ для $\Omega(n)$ получаем разложение

$$\begin{aligned} \Omega(n) \sim (1/\omega) \int_0^a dt \int_0^\omega K(t, T(\tau)) d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} \left[\int_0^1 \frac{\partial^{k-1} K(t, T(\omega v))}{\partial t^{k-1}} \Big|_{t=0}^{t=a} B_k(v) dv \right] n^{-k}. \end{aligned} \quad (31.63)$$

Этот результат в случае скалярной функции T при $a = \omega = 1$ получен Сюй в [334]; он приведен также в [332]. Поэтому назовем (31.63) *формулой Сюй*. Вспомним, что она справедлива при предположениях А. В работе [334] еще отмечаются следующие обобщения, когда применимы идеи данного метода.

1°. Составляющие вектор-функции $T(v)$ имеют разные периоды. Тогда данный интеграл аппроксимируется с помощью интеграла, кратность которого больше двух.

2°. Данный интеграл является кратным.

31.5.3. Рассмотрим примеры.

1°. При $|h(t)| > 1$, $t \in [a, b]$, $b \leq \infty$, согласно соответствующим тригонометрическим интегралам, легко вычисляемым с помощью теории вычетов, из (31.58) при $n \rightarrow \infty$ вытекает

$$\int_a^b \frac{g(t) dt}{h(t) + \sin nt} \sim \int_a^b \frac{g(t)}{\sqrt{h^2(t) - 1}} dt; \quad (31.64)$$

$$\int_a^b \frac{g(t) dt}{(h(t) + \cos nt)^2} \sim \int_a^b \frac{|h(t)| g(t)}{(\sqrt{h^2(t) - 1})^3} dt. \quad (31.65)$$

Результаты можно уточнить с помощью (31.63), если $a = 2m_1\pi$, $b = 2m_2\pi$, $m_1 \in \mathbb{N}$, $m_2 \in \mathbb{N}$.

2°. В работе [371] проведены некоторые исследования асимптотики при $x \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Omega(x) = \int_a^b \frac{g(t) dt}{h(t) + e^{ixt}}. \quad (31.66)$$

Там же без доказательства приведена формула (31.64) при $g(t) \equiv 1$. Применим к (31.66) теорему 31.5 с учетом примечания 1° к ней.

Пусть $|h(t)| \neq 1$ при $t \in [a, b]$. Тогда согласно (31.56) следует вычислить

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{h(t) + e^{i\tau}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(h(t) + z)}.$$

При $|h(t)| < 1$ оба полюса подынтегральной функции находятся внутри единичного круга, поэтому интеграл равен 0 и $\Omega(x) = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. При $|h(t)| > 1$ внутри находится лишь полюс $z=0$ и $\Omega(x) \sim \int_a^b [g(t)/h(t)] dt$. В случае, когда в некоторой точке сегмента $[a, b]$ $|h(t)| = 1$, интеграл (31.66) при соответствующих значениях x расходится, если его не понимать в смысле главного значения.

С учетом (31.63) асимптотику интеграла (31.66) можно уточнить лишь при специальных условиях, соответствующих предположениям А, и, кроме того, при $x = n$. Поэтому часто целесообразнее применять либо соотношение

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_a^b g(t) h^{-k-1}(t) e^{ikhxt} dt \quad \text{при } |h(t)| > 1, \quad (31.67)$$

либо

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_a^b g(t) h^k(t) e^{-i(k+1)xt} dt \quad \text{при } |h(t)| < 1. \quad (31.68)$$

Легко видеть, что ряды (31.67) и (31.68) сходятся. Затем при соответствующих дополнительных условиях каждый член рядов можно разложить как интеграл Фурье и перегруппировать члены аналогично тому, как в п. 30.5. Указанные разложения можно использовать также при исследовании поведения интеграла (31.66) при $x \rightarrow +0$. Иногда в этом случае целесообразнее подынтегральную функцию в (31.66) разложить в ряд по степеням $1 - e^{ixt} = O(x)$.

§ 32. ДОПОЛНЕНИЯ

32.1. Интеграл Лапласа и родственные ему интегралы

32.1.1. В период после завершения рукописи 1-го тома данной монографии появилось много работ, в которых встречаются различные модификации методов, рассмотренных в этой монографии, и дополнения к ним. Неоднократно исследованы интегралы, содержащие функции с логарифмическими особенностями. Вместе с тем оказалось, что некоторые теоремы в 1-м томе сформулированы в недостаточном общем виде. Поэтому в настоящем томе монографии целесообразно дать необходимые дополнения и краткий обзор новейшей литературы. Этим вопросам и посвящен заключительный параграф книги. Кроме того, в нем освещается материал некоторых ранее опубликованных, но своевременно не замеченных автором работ. К сожалению, и данные дополнения не могут претендовать на полноту.

Ввиду обширности материала подробные доказательства оценки остатка построенных разложений не всегда будут приводиться. Они обычно могут быть получены методами, рассмотренными в данной монографии, без каких-либо дополнительных новых идей. Конспективно изложено также большинство доказательств теорем и формул.

32.1.2. Рассмотрим модификации, непосредственно связанные с методом Лапласа.

1°. Интеграл

$$\Omega(x) = \int_0^a \exp(-\alpha x t^\lambda) h^\lambda(t) H(t) dt, \quad (32.1)$$

где $0 < a \leq \infty$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $h(t) > 0$, $h(t) = 1 + \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k$ при $t \leq t_0$, $m > \lambda$, $|h(t)| \leq M \exp(\beta t^\lambda)$ при $t \geq t_0$, $\beta \in (0, \alpha)$, при $x \rightarrow \infty$ можно разложить обычным методом Лапласа, если выбрать ядро $e^{-xg(t)}$, $g(t) = \alpha t^\lambda - \ln h(t)$. При этом в зависимости от расположения критических точек следует различать несколько случаев.

При некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих для интеграла по сегменту $[t_0, a]$ оценку $O(x^{-N})$, в работе [342] в случае $H(t) \equiv 1$ предлагается подставить разложение

$$h^x(t) = 1 + \sum_{k=m}^{\infty} b_k(x) t^k \quad (32.2)$$

в (32.1) и ряд интегрировать почленно. Для коэффициентов $b_k(x)$ можно составить рекуррентную формулу согласно (4.23). С помощью этой формулы или формулы бинома Ньютона легко установить, что $b_k(x)$ — полином степени $[k/m]$. Поэтому при $\lambda > 1$ члены полученного разложения образуют шкалу, а при $\lambda \leq 1$ приходится еще выполнить некоторую перегруппировку членов в этом ряду. Требуемую оценку остатка обеспечивает условие $m > \lambda$.

Если $f(t) = 1 - \alpha t^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k t^k$, то в (32.1) можно выбрать $\lambda = m$, $h(t) = e^{\alpha t^m} f(t) = 1 + \sum_{k=m+1}^{\infty} d_k t^k$ и данным методом разложить интеграл $\int_0^a f^x(t) dt$, $a < \infty$. Полученный результат, в частности, дает некоторую модификацию примера 12.5.3, 1°.

Общий случай при $H(t) \neq 1$ можно рассматривать вполне аналогично, если при $t \rightarrow +0$ $H(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} D_k t^k$. При этом допускается, что разложение для $h(t)$ — также асимптотическое. Тогда под знак интеграла (32.1) следует подставить произведение разложений для $h^x(t)$ и $H(t)$. Такой интеграл при $\lambda = m = 2$ рассмотрен в [387]. Поскольку условие $m > \lambda$ в последнем случае не выполнено, то разложение (32.2) целесообразно представить в виде $h^x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} [h(t) - 1]^k$, который дает возможность иным методом оценить остаток построенного разложения. Если $h(t) - 1$ возвести в степень согласно формуле (4.22), то получим (32.2). Имеем $h^x(t) H(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) t^k$, где $B_k(x)$ — полином степени $[k/2]$ от x . Приведенная модификация дает возможность оценить остаток также при общих λ и m .

2°. В работе [315] к асимптотическому разложению при $z \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Omega(z) = \int_0^a t^\beta \exp \left[- \sum_{j=0}^m z^{\alpha_j} f_j(t) \right] dt, \quad (32.3)$$

где $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_m > 0$, $f_j(t) > 0$, $f_j'(t) > 0$, $\beta > -1$, применяется подстановка $\sum_{j=0}^m z^{\alpha_j} f_j(t) = \tau(t, z)$, которая приводит к интегралу

$$\Omega(z) = \int_L \tau^\beta h(\tau, z) e^{-\tau} d\tau.$$

Затем функция $h(\tau, z)$ разлагается по степеням τ и интегрируется почленно. Однако разложение для $h(\tau, z)$ найти трудно. Кроме того, путь интегрирования L зависит от z . Поэтому практически проще применять равенства $\sum_{j=0}^m z^{\alpha_j} f_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) t^k = Q(z, t) + R(z, t)$, где $Q(z, t)$ — доминирующая группа для интеграла (32.3). Затем следует использовать разложение $\exp[R(z, t)] = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(z) t^k$ и к отдельным интегралам $\int_0^a e^{-Q(z, t)} \times D_k(z) t^{\beta+k} dt$ применить метод критических точек. Частные случаи интеграла (32.3) рассмотрены в п. 12.1.3 и 18.5.3.

3°. Приводим непосредственные обобщения теоремы 16.1, отмеченные в [132], причем можно использовать ту ослабленную формулировку этой теоремы, которая указана в теореме 16.4.

Теорема 32.1. Пусть 1) функция $h(t)$ абсолютно интегрируема в $[0, a]$, $a < \infty$; 2) при $t \rightarrow +0$ $h(t)$ обладает разложением

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\lambda_k}, \quad -1 < \lambda_k \uparrow +\infty; \quad (32.4)$$

3) $g(t) = d_0 + g_1(t)$, причем при $t \rightarrow +0$

$$g_1(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{\mu_k}, \quad 0 < \mu_k \uparrow +\infty, \quad d_1 > 0, \quad (32.5)$$

d_k — действительные числа; 4) для каждого $\eta > 0$ можно найти такое $\delta(\eta) > 0$, что $g_1(t) \geq \delta(\eta) > 0$ при $t \geq \eta$; 5) функция $e^{-zg(t)}$ интегрируема в $[0, a]$ при каждом $z \in S[R, \pi/2 - \varepsilon]$. Тогда при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$ имеет место разложение

$$\int_0^a e^{-zg(t)} \ln(t) h(t) dt \sim e^{-zd_0} \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_k b_k z^{-\nu_k - 1} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k \Gamma(\delta_k + 1) z^{-\delta_k - 1} - (1/\mu_1) \ln z \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma(\nu_k + 1) z^{-\nu_k - 1} \right]. \quad (32.6)$$

Здесь c_k и v_k определяются разложением

$$G(\tau) = h(t(\tau))t'(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{v_k} \quad \text{при } \tau \rightarrow +0, \quad (32.7)$$

$t(\tau)$ — формальная обратная функция к $g_1(t)$ в некоторой окрестности $[0, t_0]$, $b_k = (1/\mu_1) [\Gamma'(v_k + 1) - \Gamma(v_k + 1) \ln d_1]$, а D_k и δ_k определяются из соотношений

$$t(\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k \tau^{\beta_k} \quad \text{при } \tau \rightarrow +0, \quad B_0 = d_1^{-1/\mu_1}, \quad \beta_0 = 1/\mu_1,$$

$$\ln t(\tau) \sim \ln B_0 + \beta_0 \ln \tau + \sum_{k=0}^{\infty} E_k \tau^{v_k}, \quad E_0 = B_1/B_0, \quad \gamma_0 = \beta_1 - \beta_0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_k \tau^{v_k} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^{v_k} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \tau^{\delta_k}, \quad D_0 = E_0 c_0, \quad \delta_0 = \gamma_0 + v_0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 16.1, если учесть верхние соотношения и теорему 16.4. Частный случай при $\mu_k = \mu + \gamma k$, $\gamma > 0$, отмечался в п. 16.2.4, 6°. ■

Теорема 32.2. Пусть 1) функция $K(zg(t))$ интегрируема в $[0, a]$ при каждом $z \in S[R, \pi/2 - \varepsilon]$; 2) $K(z)$ при $z \rightarrow \infty$ в S обладает разложением

$$K(z) \sim e^{-\alpha z} \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-\alpha_k}, \quad \alpha \geq 0, \quad \alpha_k \uparrow +\infty, \quad A_0 \neq 0; \quad (32.8)$$

3) функции $g(t)$ и $h(t)$ обладают свойствами, указанными в теореме 32.1, причем $d_0 > 0$. Тогда при $z \rightarrow \infty$, $z \in S[R, \pi/2 - \varepsilon]$ имеет место разложение

$$\int_0^a K(zg(t)) h(t) dt \sim e^{-\alpha z d_0} \sum_{k=0}^{\infty} L_k z^{-l_k}, \quad (32.9)$$

$$0 < a < \infty, \quad l_k \uparrow +\infty, \quad l_0 = v_0 + \alpha_0 + 1, \quad L_0 = A_0 d_0^{-\alpha_0} \alpha^{-(\lambda_0+1)/\mu} c_0 \Gamma(l_0 + 1).$$

Если под знак интеграла (32.9) добавить множитель $\ln t$ и $\alpha > 0$, то

$$\int_0^a K(zg(t)) h(t) dt \sim e^{-\alpha z d_0} \left[\sum_{k=0}^{\infty} L_k^* z^{-l_k^*} + \ln z \sum_{k=0}^{\infty} M_k z^{-m_k} \right], \quad (32.10)$$

$l_k^* \uparrow +\infty$, $m_k \uparrow +\infty$. При $\alpha = 0$ сохраняется разложение (32.9).

Доказательство. Если $\alpha > 0$, то используются разложение (32.8) и теоремы 16.1 и 32.1. Затем следует перегруппировка членов по убывающим степеням z . При $\alpha = 0$ достаточно сослаться на (32.8) и теорему 4.15. ■

Примечания. 1. Теорема 32.2 дает более простое разложение, чем то, которое рассмотрено в п. 12.4.3. Одновременно она дополняет содержание п. 16.4.1.

2. Случай, когда $d_0 = 0$, рассмотрен в п. 12.4.3.

3. Допущение комплексных коэффициентов d_k иногда вызывает затруднения, так как аргумент $zg(t)$ может выйти из области S , в которой справедливо (32.8). В качестве дополнения укажем, что утверждения теоремы 32.2 сохраняются при $z = -x > 0$, если (32.8) справедливо в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и условие $d_0 > 0$ заменяется на $\operatorname{Re} d_0 \geq 0, d_0 \neq 0$.

4. Под знак интеграла вместо множителя $\ln t$ можно добавить $\ln^m t, m \in \mathbb{N}_2$, но тогда вместо (32.10) получим более сложное разложение. Это расширение означает, что в (32.8) вместо степенного ряда допускается общий ряд $\mathcal{PM}(\infty)$ (см. также п. 16.2.4, 6°).

4°. Можно обобщить также разложение (18.52) для случая общего экспоненциально убывающего ядра.

Теорема 32.3. Пусть функция $K(z)$ аналитична в $S(0, \pi/2 - \varepsilon]$ и при $z \rightarrow \infty$ в S обладает разложением (32.8). Тогда при $z \rightarrow \infty, z \in S$ и $\alpha > 0$

$$\int_0^{\alpha} K(zt) t^{\mu-1} \ln^{\nu} (1/t) \ln^{\lambda} (\ln 1/t) dt \sim \\ \sim z^{-\mu} \ln^{\lambda} (\ln z) \ln^{\nu} z \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\mu) B_k(1/\ln \ln z) \ln^{-k} z, \quad (32.11)$$

где $\alpha \in (0, e^{-1})$, $\mu > 0$, λ и ν — фиксированные действительные числа, $\lambda^2 + \nu^2 \neq 0$, логарифмы под знаком интеграла принимают действительные значения,

$$E_k(\mu) = \int_0^{\infty} K(u) u^{\mu-1} \ln^k u du, \quad (32.12)$$

а $B_k(v)$ — полиномы степени не выше k , определяемые разложением

$$[1 + v \ln(1-w)]^{\lambda} (1-w)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(v) w^k. \quad (32.13)$$

Разложение (32.11) сохраняется, если в (32.8) $\alpha = 0$ и $\alpha_0 > \mu > 0$.

Доказательство повторяет доказательство, приведенное в п. 18.2.1, 6°, только в нем следует исправить опечатку и писать $a \in (0, e^{-1})$. В обоих случаях интеграл разбивается по сегментам $[0, |z|^{-\nu}]$, $[|z|^{-\nu}, a]$, $\nu \in (1, 2)$. Асимптотическим вкладом является второй интеграл, в котором непосредственно применяется (32.13). Более подробные оценки соответствующих интегралов приведены в [132], где также требуется исправить упомянутую опечатку. ■

Примечания. 1. При $\alpha=0$ в теоремах 32.2 и 32.3 сектор S можно заменить на любой другой сектор S_1 , в котором $K(z)$ аналитична и имеет место разложение (32.8).

2. В теореме 32.3 путь интегрирования в (32.12) можно брать вдоль любого луча $\arg u = \text{const}$ в S_1 .

3. Тот факт, что разложение в теореме 32.3 при $\alpha=0$ не изменяется, объясняется тем обстоятельством, что после подстановки $zt=u$ в интеграле (32.11) ядром становится логарифмическая функция.

4. Функция $\ln(\ln 1/t)$ имеет точки ветвления 0, 1 и ∞ , а $\ln^2(\ln 1/t)$ при $|\lambda| \leq N$ — еще точку $t=e^{-1}$. При $e^{-1} \leq a \leq \infty$ нельзя использовать (32.13), поэтому при таких a промежутки интегрирования в (32.11) приходится разбить на $[0, q]$, $[q, a]$, $q < e^{-1}$, и дополнительно определить ветви многозначных логарифмов. Кроме того, следует добавить условие $\lambda > -1$, а при $a \geq 1$ — еще $\nu > -1$. Если в (32.8) $\alpha > 0$, то, очевидно, интеграл $\Omega_2(z)$ по сегменту $[q, a]$ входит в любой остаток ряда (32.11) независимо от выбора ветви логарифмов. При $\alpha=0$ в силу (32.8) согласно теореме 4.15 имеем $\Omega_2(z) = O(z^{-\alpha_0})$, поэтому $\Omega_2(z)$ тоже входит в любой остаток ряда (32.11). Таким образом, теорему 32.3 можно использовать также при $a \geq e^{-1}$; допуская и случай $a = \infty$. Это дополнение следует добавить к доказательству теоремы 32.3 в [132], чтобы ее можно было использовать в дальнейшем тексте этой работы.

5. Аналогично можно разложить интеграл по лучу $\arg t = \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta \neq 0$. Можно брать $a = \infty$, так как на пути интегрирования логарифмические функции аналитичны. Сохраняется разложение (32.11), только вместо (32.12) имеем

$$E_h(\mu) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} K(u) u^{\mu-1} \ln^h u \, du. \quad (32.12')$$

Часто путь интегрирования в (32.12') затем целесообразно повернуть по такому пути, по которому проще вычислить интеграл (см. п. 32.2.2).

6. Интеграл (32.11) расходится при $\mu \leq 0$. Тогда вместо него можно исследовать асимптотику при $x \rightarrow +\infty$ интеграла

$$\int_{+\infty}^{(0+)} K(xt) t^{\mu-1} \ln^{\nu} (1/t) \ln^{\lambda} (\ln 1/t) dt, \quad (32.11')$$

где функция $K(z)$ аналитична в некоторой окрестности начала и вблизи оси $\arg t=0$ и обладает разложением (32.8). Путь интегрирования можно деформировать по окружности $|t|=x^{-\nu_1}$, $\nu_1 \in (1, 2)$, и берегам разреза. Интегралы по лучам $[x^{-\nu_2}, \infty)$, $\nu_2 \in (0, 1)$, имеют оценку $o(x^{-N})$ и входят в остаток разложения. В интеграле по оставшейся конечной петле применим подстановку $xt=u$. На всем новом пути можно использовать (32.13), причем функция $\omega = \ln u / \ln x$ окружность $|u|=x^{1-\nu_1}$ отображает на вертикальный отрезок, целиком лежащий в круге $|\omega| < 1$. Поэтому разложение (32.11) сохраняется и для этого случая, только $E_h(\mu)$ вычисляется по формуле

$$E_h(\mu) = \int_{+\infty}^{(0+)} K(u) u^{\mu-1} \ln^{\lambda} u du. \quad (32.12'')$$

При дополнительных условиях относительно $K(z)$ для x допускаются комплексные значения. Применение этого обобщения к дополнению теоремы 32.4 предлагаем читателю.

5°. Теорема 32.3 дает возможность заметно обобщить теорему 13.3 как в случае общего ядра, обладающего при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$ разложением (32.8), так и в случае дополнительного множителя $\ln^{\lambda}(\ln 1/t)$.

Теорема 32.4. Пусть 1) функция $K(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 32.3, причем при $\alpha=0$ $\alpha_0 > \mu > 0$; 2) функция $h(t)$ локально интегрируема при $t \in [0, a]$, $0 < a < \infty$; 3) при $t \rightarrow +0$

$$h(t) \sim t^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ln^{-\nu_k} (1/t) \ln^{\lambda_k} (\ln 1/t), \quad a_0 \neq 0, \quad (32.14)$$

$\nu_k \uparrow +\infty$, λ_k — действительные числа, $\nu_k^2 + \lambda_k^2 \neq 0$. Если $\nu_k = \nu_0$ при $k \in N_1$, то $\lambda_k \downarrow -\infty$. Тогда при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$ имеет место разложение

$$\int_0^a K(zt) h(t) dt \sim z^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \ln^{-\nu_k} z Q_k(\ln \ln z), \quad (32.15)$$

где показатели степени $\mu_k \uparrow + \infty$ и функции $Q_k(u)$ определяются формальной перегруппировкой повторного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \ln^{-\nu_k} z \ln^{\lambda_k}(\ln z) \sum_{j=0}^{\infty} E_j(\mu) B_{jk}(1/\ln \ln z) \ln^{-k} z \quad (32.15')$$

по убывающим степеням $\ln z$.

Доказательство. Разобьем промежуток интегрирования по сегментам $[0, q]$, $[q, a]$, $q < e^{-1}$, и интеграл (32.15) — соответственно на $\Omega_1(z) + \Omega_2(z)$. Аналогично как в примечании 4 к теореме 32.3, можно показать, что $\Omega_2(z) = o(z^{-\mu} \ln^{-N} z)$, и поэтому $\Omega_2(z)$ входит в любой остаток разложения (32.15). При разложении $\Omega_1(z)$ можно использовать теорему 32.3, причем для оценки остатка $R_n(z)$ в разложении для $\Omega_1(z)$ уже в начале доказательства целесообразно q выбрать так, чтобы остаток ряда (32.14) $\rho_n(t)$ при $t \in (0, q]$ обладал оценкой $|\rho_n(t)| \leq M_n t^{\mu-1} \ln^{-\nu_{n+1}}(1/t) \ln^{\lambda_{n+1}}(\ln 1/t)$. Тогда $R_n(z)$ можно оценить по теореме 32.3, где $K(zt)$ заменен на $|K(zt)|$. Получаем

$$R_n(z) = O(z^{-\mu} \ln^{\lambda_{n+1}}(\ln z) \ln^{-\nu_{n+1}+2} z). \blacksquare$$

Примечания. 1. Если $h(t)$ обладает соответствующими свойствами при $t \rightarrow +\infty$, чтобы $\Omega_2(z) = o(z^{-\mu} \ln^{-N} z)$, то в теореме 32.4 допускается $a = \infty$.

2. Если $\lambda_k = \lambda_0$ при $k \in N_1$, то $Q_k(u) = u^{\lambda_0} Q_k^*(1/u)$, где $Q_k^*(v)$ — полином степени не выше k . При $\lambda_0 = 0$ согласно (32.13) $Q_k(u)$ — постоянные, поэтому разложение (32.15) $\ln \ln z$ не содержит. Тогда для интеграла (32.15) получаем разложение, аналогичное (31.14), (31.18). Таким образом, теорема 32.4 дает более общий результат, чем полученный в п. 31.3. Кроме того, она является заметным обобщением теоремы 13.3.

Второй частный случай появляется, когда $\nu_k = \nu_0$ при $k \in N_1$, $\lambda_k \downarrow -\infty$, т. е. $h(t)$ имеет разложение по степеням $[\ln(\ln 1/t)]^{-1}$. Тогда $\mu_k = \nu_0 + k$.

3. Теорема сохраняет силу, если точка a лежит на луче $\arg t = \theta$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta \neq 0$. Тогда в (32.15') $E_j(\mu)$ следует вычислять по формуле (32.12').

4. Аналогично можно обобщить теорему 13.4, т. е. исследовать поведение интеграла (32.15) при $a = \infty$ и $z \rightarrow 0$. Сначала при $z \rightarrow 0$ следует построить асимптотическое разложение для интеграла $\int_b^{\infty} K(zt) t^{\mu-1} \ln^{\nu} t \ln^{\lambda}(\ln t) dt$, $b > e$, $\mu > 0$, где $K(z)$ обладает разложением (32.8) (аналог теоремы 32.3). Промежутку интегрирования следует разбить на $[b, |z|^{-\gamma}]$, $[|z|^{-\gamma}, \infty)$, $\gamma \in (1, 2)$. При прежних условиях асимптотическим вкладом является интеграл по первому промежутку, причем разложение содержит степени $\ln 1/z$ и $\ln(\ln 1/z)$. Поэтому в формуле (32.13) ω следует заменить на $-\omega$, а в (32.11) B_k — на $(-1)^k B_k$.

Затем при $z \rightarrow 0$ можно разложить интеграл $\int_b^{\infty} K(z t) h(t) dt$, $b \geq 0$, если при $t \rightarrow +\infty$

$$h(t) \sim t^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ln^{-\nu_k} t \ln^{\lambda_k} (\ln t), \quad (32.16)$$

$\nu_k \uparrow +\infty$, $\nu_k^2 + \lambda_k^2 \neq 0$. На функцию $h(t)$ налагаются такие условия, чтобы интегралом по $[|z|^{-\nu}, \infty)$ можно было пренебречь. Точные формулировки соответствующих теорем оставим читателю.

5. Некоторое дополнение к теореме 32.4 в случае, когда $h(t)$ обладает иным разложением, чем (32.14), будет приведено в п. 32.2.3.

6°. Отметим еще интеграл

$$\Omega(z) = \int_0^{\gamma(z)} e^{-zt} h(t) t^{\lambda-1} dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad (32.17)$$

в случае, когда при $z \rightarrow \infty$ $z\gamma(z) \rightarrow c$, $0 < \operatorname{Re} c < \infty$, и лемма Ватсона не имеет места. После подстановок $\Omega(z)$ можно привести к интегралам по путям от 0 до c и от 0 до $\gamma(z)$, $\gamma(z) = c - zy(z) = o(1)$. Затем следует почленно интегрировать разложение в окрестности нуля для $h(u/z)$ и $h((c-v)/z)$. Можно брать также более общее ядро $K(zt)$.

Этот метод, в частности, применим к разложению *неполного интеграла Липшица—Ганкеля*

$$Z_{\nu}(x, z) = \int_0^z e^{-xt} Z_{\nu}(t) t^{\nu} dt, \quad (32.18)$$

где Z_{ν} — цилиндрическая функция, в случае, когда $xz \rightarrow c$ при $x \rightarrow \infty$. В [310] интеграл (32.18) представлен с помощью табулированных функций и сходящегося ряда.

Метод распространяется на интеграл $\int_0^{\gamma(z)} e^{-zg(t)} h(t) t^{\lambda-1} dt$. Однако если при $t \rightarrow +0$ $g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\lambda_k}$, $0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ и $k < \lambda_k$, $k = o(\lambda_k)$, то можно непосредственно применить разложение $\exp(-zg(t))$ по степеням t и почленное интегрирование. В качестве примера при $yz \rightarrow c$, $z \rightarrow \infty$ отметим *неполную цилиндрическую функцию Макдональда*

$$K_0(y, z) = \int_0^y \exp(-zch t) dt \sim e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z) y^{2k+1} / (2k+1)!, \quad (32.19)$$

где функции $b_k(z)$ находятся из разложения $\exp(-z \operatorname{ch} t) = e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z) t^{2k} / (2k)!$, $b_0(z) \equiv 1$. Из (19.30) легко следует, что $b_k(z)$ — полином степени k относительно z . Поэтому в (32.19) возможна перегруппировка по степеням y с ограниченными коэффициентами.

Легко также видеть, что для обобщенной интегральной показательной функции справедливо соотношение

$$\begin{aligned} E_1(\alpha, z) &= \int_1^{\infty} (\sqrt{t^2 + z^2})^{-1} \exp[-\alpha \sqrt{t^2 + z^2}] dt = \\ &= K_0(\alpha z) - K_0(\operatorname{arsh}(1/z), z), \end{aligned} \quad (32.20)$$

поэтому для разложения (32.20) при $z \rightarrow \infty$ можно применить (32.19). При $z \rightarrow 0$ асимптотическое разложение для $E_1(\alpha, z)$ получается по формуле Тейлора, а при $\alpha \rightarrow \infty$ и ограниченных z — интегрированием по частям. Все эти разложения приведены в [344].

32.1.3. Рассмотрим некоторые дополнения, относящиеся к § 9.

1°. Равномерную асимптотику интеграла, рассмотренного в п. 16.2.7, 4°Б, можно построить также для более общего интеграла

$$\Omega(z, a) = \int_a^{\infty} e^{-z(t-a)t^{\lambda-1}} h(t, a) dt, \quad \lambda > 0, \quad a \in [0, a_0]. \quad (32.21)$$

При $a=0$ асимптотическое разложение для $\Omega(z, a)$ получается иным, чем при $a>0$. Если $h(t, a) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a) (t-a)^{\lambda_k}$ при $t \rightarrow a+0$ и $h(t, a) = O(e^{\alpha t})$ при $t \rightarrow +\infty$, то, аналогично как в п. 16.2.7, 4°Б, ряд для $h(t)$ можно почленно интегрировать и согласно (8.35) получим

$$\Omega(z, a) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a) a^{\lambda+\lambda_k} \Gamma(\lambda_k+1) \Psi(\lambda_k+1; \lambda+\lambda_k+1; az). \quad (32.22)$$

Равномерность этого разложения доказывается аналогично тому, как в п. 16.2.7, 4°Б.

Если $h(t, a) \equiv h_0(t)$, то обычно $\lambda_k = k$ и в силу соотношения (см. п. 8.4, 2°)

$$\Psi(1; \lambda+1; z) = e^z z^{-\lambda} \Gamma(\lambda, z) \equiv Q_0(\lambda, z) \quad (32.23)$$

члены ряда (32.22) можно выразить с помощью $Q_0(\lambda, z)$ и полиномов от z^{-1} . Этот вопрос подробнее рассмотрен в [400].

В данном случае при соответствующих условиях относительно $h(t)$ применяются и другие методы.

А. К интегралу (32.21) можно применить метод рекуррентного интегрирования по частям, как в п. 9.1.1. В итоге получим разложение

$$\Omega(z, a) \sim a^\lambda Q_0(\lambda, az) \sum_{k=0}^{\infty} h_k(0) z^{-k} + a^{\lambda-1} \sum_{k=1}^{\infty} [h_{k-1}(a) - h_{k-1}(0)] z^{-k}, \quad (32.24)$$

в котором при $a \rightarrow 0$ в силу (32.23) остается первый ряд с множителем $z^{-\lambda}$, а при $a > 0$ в силу (8.7) — оба ряда. Коэффициенты $h_k(0)$ вычисляются, как в п. 9.1.1, но для $[h_k(a) - h_k(0)] a^{\lambda-1}$ трудно найти равномерное при $a \in [0, a_0]$ выражение, не содержащее вспомогательных функций.

Б. В работе [354] для выражения этих коэффициентов применяется иной вариант интегрирования по частям — использование интегралов дробного порядка Римана—Лиувилля

$$I^\alpha f(t) \equiv D^{-\alpha} f(t) = [1/\Gamma(\alpha)] \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du. \quad (32.25)$$

Оператор I^α согласно (32.25) определяется лишь при $\alpha > 0$, но в силу формулы

$$\frac{d}{dt} I^{\alpha+1} f(t) = I^\alpha f(t) = \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + I^{\alpha+1} f'(t), \quad (32.26)$$

полученной интегрированием по частям, его можно распространить на значения $\alpha \leq 0$, т. е. определить дифференцирование дробного порядка. В частности, из (32.26) следует, что $D^n f(t) = f^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}_1$, и $I^0 f(t) \equiv D^0 f(t) \equiv f(t)$. Кроме (32.26) используется соотношение $I^\alpha (I^\beta f(t)) = I^{\alpha+\beta} f(t)$, справедливое при $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Метод для построения равномерного разложения основан на формуле

$$t^{\lambda-1} h(t) = I^{\lambda-1} f(t) \quad \text{при } \lambda \in (0, 1), \quad (32.27)$$

где

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \int_0^t (t-u)^{-\lambda} u^{\lambda-1} h(u) du, \quad (32.28)$$

которая доказывается подстановкой (32.28) в (32.25), изменением порядка интегрирования и учетом (32.26).

Согласно (32.27) с повторным учетом (32.26) при $\alpha=0$ в (32.21) при $\lambda \in (0, 1)$ можно произвести повторное интегрирование по частям, которое вместо второго ряда в (32.24) дает $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \Gamma^k f^{(k)}(a)$. Оценка остатка и вывод явного выражения для $\Gamma^k f^{(k)}(a)$ приведены в [354]. Поскольку в последнее время усиленно изучаются различные применения интегрирования дробного порядка, в особенности в теории специальных функций (см., например, [366, 385]), то можно ожидать, что отмеченный метод будет широко применяться и в теории асимптотических разложений.

2°. Если функция $h(t)$ определена при $t \in [0, \infty)$, то в силу соотношения

$$\int_0^a e^{-zt} t^{\lambda-1} h(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\lambda-1} h(t) dt - e^{-az} \Omega(z, a)$$

равномерное асимптотическое разложение можно построить для интеграла (32.17), где $a=y(z)$.

3°. Аналогично непосредственным разложением $h(t, z)$ по степеням t с помощью функции ψ можно получить равномерное относительно y асимптотическое разложение для обобщения интеграла, рассмотренного в п. 16.2.7, 4°Б:

$$\Omega_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} (t+y)^{\lambda-1} h(t, z) dt, \quad y \in [0, a], \quad \lambda > 0. \quad (32.29)$$

Для интеграла

$$\Omega_2(z) = \int_0^y e^{-zt} (y-t)^{\lambda-1} h(t, z) dt \quad (32.30)$$

соответствующее равномерное разложение содержит функцию ${}_1F_1(\lambda_{n+1}; \lambda + \lambda_{n+1}; yz)$. К интегралам (32.29) и (32.30) с помощью подстановки $u=t+a$ приводятся интегралы $\int_a^{\infty} e^{-zu} \times \times (u-x)^{\lambda-1} h(u) du$ и $\int_a^x e^{-zu} (x-u)^{\lambda-1} h(u) du$, которые в [321] разложены путем рекуррентного интегрирования по частям, как в п. 1° А, причем $|\arg z| \leq \pi/2 - \eta$, $\eta > 0$.

Если ядро e^{-zu} заменить на $e^{\pm i x u}$, $x > 0$, то в случае бесконечного верхнего предела применение разложения функции $h(t, z)$ или $h(u)$ приводит к расходящимся интегралам. По-

этому остается применить рекуррентное интегрирование по частям, что сделано в [321].

4°. Для разложения при $z \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Omega(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\lambda} h(t) dt, \quad h(0) \neq 0, \quad (32.31)$$

в случае, когда $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ при $t \rightarrow +0$, можно применить следующий общий метод вспомогательных параметров, являющийся модификацией п. 9.3.1 и 30.3. Выберем функцию $h_1(t)$, содержащую m_1 определяемых параметров, так, чтобы $h(t) - h_1(t) = t^{m_1} H_1(t)$, $H_1(0) \neq 0$. Затем при обозначении $\lambda_1 = \lambda + m_1$ используем равенство

$$\Omega(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\lambda} h_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\lambda_1} H_1(t) dt \equiv I_1(z) + \Omega_1(z),$$

а интеграл $\Omega_1(z)$ преобразуем аналогично. Создаются последовательности $\{I_k(z)\}$ и $\{\Omega_k(x)\}$. Поскольку при весьма слабых условиях относительно $h(t)$ $I_k(z) = O(z^{-\lambda_k-1})$, $\Omega_k(z) = O(z^{-\lambda_{k+1}-1})$, то получим асимптотическое разложение со шкалой $\{I_k(z)\}$.

Метод имеет практическое значение, если функции $h_k(t)$ выбраны так, чтобы интегралы $I_k(z)$ были легко вычисляемы.

Рассмотрим вариант, когда $h_1(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{-\beta_j t}$. Если в качестве неизвестных параметров брать α_j и β_j , то они будут легко определяемы лишь в случае, когда $m=1$. (Такой случай рассмотрен в [403, 404].) Поэтому фиксируем разные положительные числа β_j и с помощью степенных рядов для функций $h(t)$ и $h_1(t)$ ищем α_j . Определитель полученной системы является определителем Вандермонда, умноженным на $(\prod_{j=1}^{m-1} j!)^{-1}$, поэтому числа α_j всегда определяются однозначно.

Другой вариант имеем, когда выбираем $h_1(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j e^{-\beta t}$, $\beta > 0$. Тогда система для нахождения α_j имеет треугольную матрицу. В обоих вариантах метод легко программируется для проведения расчетов на ЭВМ. Поскольку введение множителя $\ln^p t$, $p \in \mathbb{N}_1$, лишь несколько усложняет вычисление $I_k(t)$, то для $h(t)$ допускается разложение в РМ(0).

32.1.4. Рассмотрим несколько случаев, когда в интеграле Лапласа параметр стремится к 0.

1°. Бывают случаи, когда в интеграле (32.31) функция $h(t)$ определяется суммой с возрастающим вместе с t числом сла-

гаемых, т. е. рядом вида (29.69) или (29.70). Асимптотическое выражение для $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$ тогда часто имеет такой вид, что непосредственно нельзя применить известные методы. Поэтому найти асимптотику для $\Omega(z)$ при $z \rightarrow 0$ нередко крайне затруднительно. В некоторых простейших случаях явные выражения интеграла $\Omega(z)$ можно найти в таблицах для преобразования Лапласа, например в [313].

Пусть в (29.69) $\omega_h = k$. Иногда можно применить следующий метод, предложенный в частном случае в [389]. $\Omega(z)$ представляется в виде

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz} h_n(z), \quad h_n(z) = \int_0^1 e^{-z\tau} h(n+\tau) d\tau. \quad (32.32)$$

Если известна асимптотика функции $h(n+\tau)$ относительно n , то можно найти асимптотику для $h_n(z)$ при $n \rightarrow \infty$. В случаях, когда $h_n(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) g_j(n)$, можно попытаться найти асимптотику для $F_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz} g_j(n)$ при $z \rightarrow 0$, подставляя $e^{-z} = \zeta$, $\zeta \rightarrow 1$, и используя результаты из § 27. Однако не всегда члены ряда $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) F_j(z)$ образуют шкалу.

Для иллюстрации приведем простейший пример, когда $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (t-k)\eta(t-k)$. Легко видеть, что $h(t) = t^2/2 + O(t)$, поэтому $\Omega(z) = z^{-3} + O(z^{-2})$ при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$. Чтобы найти более точное выражение, применим (32.32). При $\tau \in [0, 1)$ имеем

$$h(n+\tau) = \sum_{k=0}^n (n-k+\tau) = n(n+1)/2 + (n+1)\tau.$$

Отсюда легко найти $h_n(z)$ в явном виде и затем применить выражения для $\sum_{n=0}^{\infty} n^j \zeta^n$, $j=0, 1, 2$. В итоге после преобразований с учетом (9.44) получим

$$\Omega(z) = z^{-2} (1 - e^{-z})^{-1} = z^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k / k!, \quad 0 < |z| < 2\pi.$$

Аналогично можно получить разложение для $\Omega(z)$ в случае, когда $h(t) = t^{\beta-1} \chi(t, 1, \beta, 0)$, $\beta \in N_2$. При $\beta \in \overline{N}_2$ следует применить (29.73).

2°. Иногда асимптотика интеграла (32.17) исследуется также при $z \rightarrow 0$, если $zy(z) \rightarrow c$. Рассмотрим этот вопрос для более общего интеграла

$$\Omega(x) = \int_0^{y(x)} e^{-xg(t)} h(t) dt \quad (32.33)$$

в случае, когда $x \rightarrow 0$, $xy(x) \rightarrow c \in (0, \infty)$, $g(t)$ монотонно возрастает и при $t \rightarrow \infty$ $g(t) \sim Mt^\alpha$, $\alpha > 0$, а $h(t) = O(t^\lambda)$. Подстановкой $g(t) = u = v + g(0)$ получим

$$\Omega(x) = e^{-xg(0)} \int_0^{g(y(x)) - g(0)} e^{-xv} H(v) dv. \quad (32.34)$$

Имеем $H(v) = O(v^\gamma)$, $\gamma = (\lambda + 1)/\alpha - 1$ при $v \rightarrow \infty$. Пусть $g(y(x)) - g(0) = \sigma(x)$. Далее выделим следующие частные случаи.

А. $\alpha \in (0, 1)$. Тогда $xg(y(x)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Функцию e^{-xv} в (32.34) можно разложить в ряд и полученное разложение интегрировать почленно, так как при $x \rightarrow 0$ функции

$$x^k \int_0^{\sigma(x)} H(v) v^k dv \sim Ax^k [\sigma(x)]^{k+\gamma+1}$$

образуют шкалу.

Б. $\alpha > 1$. Тогда $xg(y(x)) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Интеграл (32.34) можно выразить как разность интегралов по $[0, \infty)$ и $[\sigma(x), \infty)$. Первый из них часто разлагается согласно п. 18.2.2 или 31.2, а второй имеет оценку $o(x^N)$ и входит в любой остаток первого ряда.

В. Если $\alpha = 1$ и $xg(y(x)) \rightarrow a \in (0, 1)$, то можно применить аналогичный метод, как в п. 32.1.2, 6°.

32.1.5. Приведем несколько дополнений к методу перевала.

1°. В п. 19.4.3 отмечен случай, когда функция нагрузки $h(t)$ имеет полюс, весьма близкий к точке перевала ядра $e^{-zg(t)}$. Согласно п. 12.3.2, 2° этот полюс можно устранить, отнимая и добавляя к $h(t)$ главную часть ряда Лорана для $h(t)$ в окрестности полюса. Поскольку путь интегрирования не всегда деформируется через полюс, то иногда вместо отрезка ряда Лорана выгоднее от $h(t)$ отнять и добавить другую функцию $H(t)$, имеющую также в данной точке полюс такого же порядка. При этом $H(t)$ следует выбрать так, чтобы интеграл от $e^{-zg(t)} H(t)$ можно было вычислить с помощью известных функций. Пример к этой модификации приведен в [399].

2°. В дополнение к § 21 следует отметить работу [318], в которой рассмотрена асимптотика интеграла (21.1) при $g(z, t) = z[h(t) + \varepsilon(z, t)]$, где $\varepsilon(z, t) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$ и всех t , достаточно близких к точке перевала функции $\exp[zh(t)]$. В этой работе заданы иные условия, чем в теореме 21.1. Случай, когда $g(z, t) = zh(t) + \varphi(z)H(t)$, еще приведен в [418].

3°. В работе [320] метод перевала модифицируется для криволинейных интегралов, если подынтегральное выражение имеет экспоненциальный множитель с большим параметром.

4°. Весьма полный анализ возможностей деформирования пути интегрирования и расположения седловых точек в зависимости от $\arg z$ и $\arg v$ для интеграла Зоммерфельда (19.76) и родственных ему интегралов, определяющих другие цилиндрические функции, приведен в [317]. Там же указаны другие работы, касающиеся этого вопроса.

Асимптотика цилиндрических функций рассмотрена также в работе [379], в которой разложения (19.78) и (19.79) и родственные им перегруппированы по степеням $\operatorname{cth} \beta$ или $\operatorname{ctg} \beta$. В таком случае для вычисления коэффициентов нового разложения, зависящих от v , получается удобная трехчленная рекуррентная формула. Для этого составляется вспомогательное линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка и асимптотическое разложение его решения ищется методом неопределенных коэффициентов.

5°. В дополнение к § 17 отметим работу [395], в которой рассматривается интеграл $\int_s^b \exp[-g(x, \sigma, t)] (t-s)^\lambda dt$, $\lambda > -1$, где $g(x, \sigma(x), t) = G(x, \sigma(x), t) - H(x, \sigma(x), t)$, s — критическая точка. Асимптотическое выражение интеграла при $x \rightarrow x_0$ и различных условиях относительно функций G и H получается аналогично, как в § 17. Введение дополнительного параметра дает возможность исследовать асимптотику интеграла при различных функциях $\sigma(x)$, выбирая их в соответствии с разными условиями доказанных теорем, а также построить равномерную асимптотику. Полученные результаты обобщают также модификацию Риделя (см. п. 17.2.2, 2°), так как вместо функции Erfc появляется более общая функция Харди Hd_v , аналогично как в п. 21.2. Но в данной работе выделяется иная группа доминирующих членов в ряду Тейлора для $g(x, \sigma, t)$, чем в п. 21.2.

Случай, когда в аналогичном интеграле (без дополнительного параметра) подынтегральная функция содержит еще медленно изменяющийся множитель, исследован в [435].

32.2. Интегралы с осциллирующими ядрами

32.2.1. Разложение разных типов интегралов с осциллирующими ядрами различными методами рассмотрено в первых двух томах данной книги. В п. 8.2 и § 10 к разложению применяется интегрирование по частям, в п. 12.6 и 13.2 — разложение подынтегральной функции в ряд. Осциллирующие подынтегральные функции допускаются также при применении метода последовательных разложений, приведенного в § 11. Этот факт в указанном параграфе недостаточно подчеркнут, поэтому мы к нему с некоторыми дополнениями вернемся в п. 32.2.4. Метод, изложенный в п. 13.4, более подробно проанализирован в п. 30.3.

Следует учитывать, что иногда разложение при $x \rightarrow 0$ для интеграла $\int_0^{\infty} K(xt)h(t)dt$ в случае осциллирующего ядра $K(\tau)$ проще всего получается согласно теореме 14.3, в которой при $z=1/x$ условие об аналитичности $K(\tau)$ заменяется условием о локальной интегрируемости $K(\tau)$ в $[0, \infty)$.

В п. 15.2 показано, что в некоторых случаях для разложения интегралов с осциллирующими ядрами можно применить замену подынтегрального множителя интегралом, а в п. 15.3 рассмотрен случай, когда ядро имеет устранимую особенность. Ядро также может быть осциллирующим. В п. 16.3, 16.4 и 17.5 в случае осциллирующих ядер применяется метод критических точек, а в п. 19.3 к этому методу добавляется деформирование пути интегрирования. Некоторые дополнения к последнему методу, относящиеся к интегралам с осциллирующими ядрами, можно найти в § 20—24.

Методы для разложения интегралов с осциллирующими ядрами рассмотрены также в настоящем томе. При применении метода целых функций, рассмотренного в п. 28.3, важно лишь, чтобы ядро было целой функцией. На некоторых лучах такая функция иногда будет осциллирующей. Использование ε -преобразования, рассмотренного в п. 30.1 и 30.2, относится главным образом к интегралам с осциллирующими ядрами. Эти интегралы разлагаются также с помощью формулы Парсеваля для преобразования Меллина, рассмотренной в п. 31.2 и 31.3. Наконец, интегралы с периодическими подынтегральными функциями, приведенные в п. 30.4 и 31.5, также часто содержат осциллирующие функции.

Все же продолжают появляться работы, посвященные асимптотике интегралов указанных типов, в которых предлагаются новые модификации и дополнения к уже известным методам. Рассмотрим вначале некоторые непосредственные дополнения к вышеуказанным методам и пунктам данной монографии.

1°. В примечании 1° к теореме 8.3 было отмечено, что непосредственное вычисление величин $K_{-k-1}(0)$, где $K_{-n}(x) = -\int_x^\infty K_{-n+1}(t) dt$, часто затруднительно. Это замечание подтверждает пример, приведенный в работе [324], когда $K_0(t) = t^{\lambda-1} J_\nu(t^\rho)$, $\rho > 0$, $\nu > -3/2$, $\lambda + \nu\rho > 0$, где такое вычисление осуществлено. В случае данного ядра коэффициенты асимптотического разложения интеграла вычисляются более просто, если первообразные функции выбрать в виде интегралов по пути в комплексной плоскости. Это показано в п. 10.4.2. Наиболее эффективным при данном ядре является метод, приведенный в п. 16.4, или эквивалентное ему применение формулы Парсевала в п. 31.2.

2°. Приводим некоторые дополнения к п. 15.3.1, 2° в случае, когда ядро имеет устранимую особенность внутри промежутка интегрирования. Разбием интеграла на части построение разложения легко приводится к указанному пункту. Пусть ядро $K(t)$ — осциллирующая функция, удовлетворяющая следующим условиям А: 1) $K(t)$ — нечетная функция; 2) $K(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$; 3) при $t \rightarrow \infty$ имеет место разложение

$$K(t) = \sum_{j=0}^p A_j \sin \omega_j t + K_0(t) \sim \sum_{j=0}^p A_j \sin \omega_j t + \sum_{j=0}^m e^{i\mu_j t} \sum_{k=0}^{\infty} b_{kj} t^{-\lambda_{kj}}, \quad (32.35)$$

$0 < \lambda_{kj} \uparrow + \infty$ при каждом фиксированном j , $\mu_j \in \mathbb{R}^1$, $\sum_{j=0}^m |\mu_j| > 0$.

Пусть далее $h(t)$ удовлетворяет следующим условиям Б: 1) $h(t) \in C^\infty[0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow \infty$ $h^{(k)}(t) = O(t^{-\gamma})$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$.

Рассмотрим интеграл

$$\Omega(x, \alpha) = \int_0^\infty \frac{K(x(t-\alpha))}{t-\alpha} h(t) dt, \quad \alpha \in (0, \infty). \quad (32.36)$$

Разбием промежутка интегрирования на $[0, \alpha]$ и $[\alpha, \infty)$ получаем

$$\begin{aligned} \Omega(x, \alpha) &= h(\alpha) \int_0^\infty \frac{K(x(t-\alpha))}{t-\alpha} dt + \int_0^\infty K(x(t-\alpha)) \frac{h(t) - h(\alpha)}{t-\alpha} dt = \\ &= h(\alpha) \left[\int_0^\infty K(v) v^{-1} dv + \int_0^{\alpha x} K(v) v^{-1} dv \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\alpha} K(x\tau) \frac{h(\alpha-\tau) - h(\alpha)}{\tau} d\tau + \int_0^{\infty} K(x\tau) \frac{h(\alpha+\tau) - h(\alpha)}{\tau} d\tau \equiv \\
& \equiv h(\alpha) \Omega_0(\alpha x) + \Omega_1(x, \alpha) + \Omega_2(x, \alpha). \quad (32.37)
\end{aligned}$$

Согласно (32.35) интегралы в (32.37) существуют. Разложения для $\Omega_1(x, \alpha)$ и $\Omega_2(x, \alpha)$ построим интегрированием по частям, как в теореме 8.3. При этом выберем

$$K_{-1}(t) = - \sum_{j=0}^p A_j \omega_j^{-1} \cos \omega_j t + G_{-1}(t), \quad G_{-1}(t) = - \int_t^{\infty} K_0(\tau) d\tau, \quad (32.38)$$

$$K_{-n}(t) = \sum_{j=0}^p A_j \omega_j^{-n} \sin(\omega_j t - n\pi/2) - \int_t^{\infty} G_{-n+1}(\tau) d\tau, \quad n > 1. \quad (32.39)$$

Из (32.35), (32.38), (32.39) и леммы 8.4 следует, что $|K_{-n}(t)| \leq M_n$ при $t \in [0, \infty)$ и функции $G_{-n}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеют аналогичные асимптотические разложения, как $K_0(t)$ в (32.35).

Для краткости вводим обозначения

$$\frac{h(\alpha-t) - h(\alpha)}{t} = H(t, \alpha), \quad \frac{h(\alpha+t) - h(\alpha)}{t} = H^*(t, \alpha), \quad (32.40)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} H(t, \alpha) = H_n(t, \alpha), \quad \frac{\partial^n}{\partial t^n} H^*(t, \alpha) = H_n^*(t, \alpha).$$

Если в (32.40) отношение дифференцировать согласно формуле Лейбница, то с учетом условия Б2 легко убедиться в том, что $H_n^*(t, \alpha) = O(t^{-1-\gamma})$ при $t \rightarrow \infty$. Оценки для $K_{-n}(t)$ и $H_n^*(t, \alpha)$ показывают, что все интегралы, полученные интегрированием по частям $\Omega_2(x, \alpha)$, существуют, а внеинтегральные члены при $t = \infty$ аннулируются. Следовательно,

$$\Omega_2(x, \alpha) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} K_{-k-1}(0) H_k^*(0, \alpha) x^{-k-1} + R_{n2}(x, \alpha). \quad (32.41)$$

Интегрированием по частям $\Omega_1(x, \alpha)$ получаем

$$\Omega_1(x, \alpha) = \sum_{k=0}^n (-1)^k K_{-k-1}(x\alpha) H_k(\alpha, \alpha) x^{-k-1} +$$

$$+ \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} K_{-k-1}(0) H_k(0, \alpha) x^{-k-1} + R_{n1}(x, \alpha). \quad (32.42)$$

Из упомянутых оценок следует, что $R_{n2}(x, \alpha) = O(x^{-n-1})$, $R_{n1}(x, \alpha) = O(x^{-n-1})$. С помощью формулы Лейбница получаем

$$\begin{aligned} H_k(\alpha, \alpha) &= \frac{k!(-1)^{k+1}}{\alpha^{k+1}} \left[h(\alpha) - \sum_{j=0}^k \frac{h^{(j)}(0)\alpha^j}{j!} \right] \equiv \\ &\equiv \frac{k!(-1)^{k+1}}{\alpha^{k+1}} \Phi_k(\alpha), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_k(\alpha, \alpha) &= (-1)^{k+1} h^{(k+1)}(0)/(k+1), \end{aligned} \quad (32.43)$$

а с помощью формулы Тейлора —

$$H_k(0, \alpha) = (-1)^{k+1} h^{(k+1)}(\alpha)/(k+1), \quad H_k^*(0, \alpha) = h^{(k+1)}(\alpha)/(k+1). \quad (32.44)$$

При объединении рядов в (32.41) и (32.42) еще следует учесть, что согласно (32.39) $K_{-2m-2}(0) = G_{-2m-2}(0)$. Таким образом, доказана

Теорема 32.5. *Если функция $K(t)$ удовлетворяет условиям А, а функция $h(t)$ — условиям Б, то при $x \rightarrow \infty$ и каждом $\alpha > 0$ имеет место разложение*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{K(x(t-\alpha))}{t-\alpha} h(t) dt &\sim h(\alpha) \Omega_0(\alpha x) - \sum_{k=0}^{\infty} k! \Phi_k(\alpha) K_{-k-1}(\alpha x) \times \\ &\times (\alpha x)^{-k-1} + \sum_{m=0}^{\infty} [G_{-2m-2}(0) h^{(2m+2)}(\alpha)/(m+1)] x^{-2m-2}. \end{aligned} \quad (32.45)$$

Примечания. 1. Если $\alpha=0$, то $\Omega_1(x, \alpha) \equiv 0$ и разложение изменяется с учетом (32.37), (32.41) и (32.44).

2. Данный интеграл при $K_0(t) \equiv 0$ рассмотрен в [322]. В этом случае второй ряд в (32.45) аннулируется и допускается $\alpha \geq 0$. При условии $\sup_{\alpha \geq 0} |H_n(\alpha, t)| \in L(0, \infty)$ для остатка ряда в (32.45) в этой работе доказана оценка $o(x^{-n-1})$, равномерная относительно параметра $\alpha \in [0, \infty)$. Тот же метод доказательства указанной оценки можно применить в случае общего ядра (32.35) и получить такую же равномерную оценку при $\alpha \geq \alpha_0 > 0$.

3. Аналогично разложение можно построить в случае конечного промежутка интегрирования.

4. Теорему можно модифицировать в случае, когда в знаменателе имеем $(t-\alpha)^\mu$, $\mu > 1$, и $K(\alpha) = K'(\alpha) = \dots = K^{(m)}(\alpha) = 0$, $m = [\mu]$.

5. Разложение (32.45) показывает, что точка $t = \alpha$ также является критической, за исключением случая, когда $G_{-2m-2}(0) = 0$, $m \in N$ (в частности, когда $K_0(t) \equiv 0$). Этот факт согласуется со сказанным в п. 16.4.6.

6. В (32.35) можно допускать комплексные μ_j , лишь бы $\operatorname{Re}(i\mu_j) \leq 0$. При $\operatorname{Re}(i\mu_j) < 0$, $j \leq m$, имеем $K_{-k-1}(\alpha x) = o(x^{-N})$, поэтому первым рядом в (32.45) можно пренебречь. Это разложение получается из (8.13).

7. При вычислении $G_{-2m-2}(0)$ следует учитывать п. 32.2.1, 1°.

3°. Чтобы построить равномерное относительно $a \in [0, a_0]$ разложение при $x \rightarrow +\infty$ интеграла $\int_a^b f(t) (t^2 - a^2)^{-\lambda} \sin xt dt$, $\lambda \in (0, 1/2]$, в работе [432] применяется рекуррентное интегрирование по частям с учетом формул $\sin x = \sqrt{\pi/2} x^{1/2} J_{1/2}(x)$, $\cos x/x = \sqrt{\pi/2} x^{-1/2} J_{-1/2}(x)$ и $\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} J_\nu$. Такую модификацию можно использовать и в других случаях.

Но для данного интеграла равномерное разложение можно построить более просто [436], если функцию $f(t)$ разложить по степеням $(t^2 - a^2)$ (см. п. 13.2.1), применить множитель сходимости $e^{-\epsilon t}$ (см. п. 30.2) и в силу (13.15) легко доказываемую формулу

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^\infty e^{-\epsilon t} (t^2 - a^2)^\lambda \sin xt dt = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 1) 2^{\lambda-1/2}}{x^{\lambda+1/2}} a^{\lambda+1/2} J_{-\lambda-1/2}(ax),$$

которая сохраняется также при $a = 0$, если правую часть при $a = 0$ понимать в предельном смысле. Этот метод можно применить и в разных других случаях для интегралов с ядром $\sin xt$ или $\cos xt$.

4°. В теореме 17.5 и ее дополнении [формула (17.86)] рассматривается простейший случай асимптотики интеграла $I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} e^{ig(x,t)} h(x,t) dt$, когда для функции $g(x,t)$ в точке $t = s(x) \in (a, b)$ имеем простую стационарную точку. Тем же методом с некоторыми дополнениями можно рассматривать более сложные случаи. В работе [394] при $x \rightarrow x_0$, $x \in X$, $a(x) = s(x)$ и соответствующих условиях относительно функций $b(x)$, $\Phi(x,t)$, $F(x,t)$, $G(x,t)$ и $H(x,t)$ доказана формула

$$I(x) \sim H(x, s) \beta^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) |\Phi(x, s)|^{-1} \exp [iG(x, s) + \epsilon \lambda \pi / 2], \quad (32.46)$$

где

$$\begin{aligned} h(x, t) &= (t-s)^{\alpha-1} H(x, t), \quad g(x, t) = G(x, t) + F(x, t), \\ G_1(x, t) &= (t-s)^{\beta-1} \Phi(x, t), \quad \beta > \alpha > 0, \quad H(x, s) \neq 0, \quad \Phi(x, s) \neq 0, \\ \lambda &= \alpha/\beta, \quad \varepsilon = \text{sign } \Phi(x, t). \end{aligned}$$

При $\alpha=1$, $\beta=2$, $\varepsilon=1$ отсюда следует (17.86). Возможны также другие дополнения [394].

32.2.2. Разложения, рассмотренные в теоремах 32.3 и 32.4, с соответствующими изменениями можно перенести на случай осциллирующих ядер. Это можно сделать с помощью применения нейтрализатора, как в п. 10.3 и 12.6. Но мы рассмотрим новый вариант метода. В его основе лежит деформирование пути интегрирования в комплексной плоскости аналогично тому, как в п. 19.3 для частного случая, когда $K(t) = e^{it}$. Такой способ в случае логарифмических особенностей применен в [410, 413] при $K(t) = J_\nu(t)$ и $K(t) = e^{it}$.

1°. Теорема 32.6. Пусть 1) функция $K(z)$ аналитична при $\arg z \in [0, \theta]$, $\theta < \pi$; 2) в этом секторе при $z \rightarrow \infty$ имеет место разложение

$$K(z) \sim e^{i\alpha z} \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-\alpha_k}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha_k \uparrow + \infty, \quad A_0 \neq 0. \quad (32.47)$$

Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \int_0^a K(xt) t^{\mu-1} \ln^\nu(1/t) \ln^\lambda(\ln 1/t) dt \sim \\ &\sim x^{-\mu} \ln^\lambda(\ln x) \ln^\nu x \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\mu) B_k(1/\ln \ln x) \ln^{-k} x + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_k(\mu, \lambda, \nu, a) K_{-k-1}(xa) x^{-k-1}, \quad (32.48) \end{aligned}$$

где $a < e^{-1}$, $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\nu \in \mathbb{R}^1$, $\nu^2 + \lambda^2 \neq 0$, $E_k(\mu)$ и $B_k(u)$ определены в формулах (32.12') и (32.13), а $g_k(\mu, \lambda, \nu, a)$ — в (32.49). Во втором ряду в (32.48) следует отбросить члены, входящие в любой остаток первого ряда.

Доказательство. Пусть $\alpha_0 > 0$. Деформируем путь интегрирования в комплексной плоскости t от 0 до c , $\arg c \in (0, \theta]$, и от c до a . Получаем интегралы $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$. В $\Omega_1(x)$ путь интегрирования в силу (32.47) можно дополнить до полного

луча, допуская при этом погрешность $O(x^{-N})$, а интеграл по лучу в силу примечания 5 к теореме 32.3 обладает разложением (32.11), где $z=x$; коэффициенты $E_k(\mu)$ вычисляются по формуле (32.12').

Интеграл $\Omega_2(z)$ можно разложить интегрированием по частям, выбирая $K_{-n}(t) = -\int_t^{+\infty} K_{-n+1}(\tau) d\tau$. Если проанализировать доказательство леммы 8.3, то легко видеть, что эта лемма сохраняет силу также при комплексном t , если t находится в секторе, в котором справедливо (32.47). Формулировка леммы для этого случая будет приведена после доказательства теоремы (лемма 32.1). Поэтому $K_{-h}(cx) = o(x^{-N})$ и внеинтегральными членами, содержащими $K_{-h}(cx)$, можно пренебречь. Таким образом, для $\Omega_2(x)$ существенно критической точкой является только $t=a$. Следовательно, разложение интеграла $\Omega_2(x)$ дает вторую составляющую в (32.48), причем

$$g(\mu, \nu, \lambda, t) = t^{\mu-1} \ln^\nu(1/t) \ln^\lambda(\ln 1/t), \quad (32.49)$$

$$g_h(\mu, \nu, \lambda, t) = \frac{\partial^h}{\partial t^h} g(\mu, \nu, \lambda, t).$$

Оценка остатка разложения для $\Omega_2(x)$ получается обычным путем.

Если $\alpha_0=0$, то берем $K(t) = A_0 e^{iat} + K_0(t)$. Для первого члена этого равенства выберем $K_{-n}(t) = A_0 (i\alpha)^{-n} e^{iat}$, а для $K_0(t)$ используем доказанную выше теорему. После объединения разложений сохраняется (32.48). Пусть $\alpha_0 < 0, \dots, \alpha_m \leq 0, \alpha_{m+1} > 0$.

Тогда $K(t) = e^{iat} \sum_{k=0}^m A_k t^{-\alpha_k} + K_0(t)$. Первую сумму используем для разложения отдельных интегралов с ядром e^{ixat} , а множители $t^{-\alpha_k}$ присоединим к $t^{\mu-1}$. Поскольку в $K(xt)$ появился множитель $x^{-\alpha_k}$, а в формуле (32.48) с учетом множителя $t^{\mu-\alpha_k-1}$ имеем $x^{-\mu+\alpha_k}$, то после сокращения остается прежний множитель $x^{-\mu}$. После объединения всех разложений снова получаем (32.48). Поэтому знак для α_0 в (32.47) не существен. ■

Лемма 32.1. Пусть 1) функция $K(z)$ аналитична либо в секторе S_+ : $\arg z \in [0, \vartheta]$, $\vartheta < \pi$, либо в секторе S_- : $\arg z \in [-\vartheta, 0]$; 2) в случае S_+ $K(z)$ при $z \rightarrow \infty, z \in S_+$ обладает разложением (32.47) при $\alpha > 0, \alpha_0 > 0$, в случае S_- $K(z)$ при $z \rightarrow \infty, z \in S_-$ обладает разложением (32.47) при $\alpha < 0, \alpha_0 > 0$.

Тогда функции $K_{-n}(z) = -\int_z^{+\infty} K_{-n+1}(t) dt, K_0(t) \equiv K(t)$ аналитичны в S_+ или S_- и при $z \rightarrow \infty, z \in S_+$ или $z \in S_-$ имеют место разложения

$$K_{-n}(z) \sim e^{i\alpha z} \sum_{k=0}^{\infty} A_{kn} z^{-\alpha_{kn}}, \quad n \in N_1, \quad \alpha_{0n} = \alpha_0, \quad A_{0n} = (1/i\alpha)^n A_0. \quad (32.50)$$

Примечания. 1. Если в (32.47) $\alpha < 0$, то это разложение должно иметь место при $\arg z \in [-\vartheta, 0]$, $\vartheta \in (0, \pi)$. Соответственно модифицируется теорема 32.6. Нередко функцию $K(t)$ приходится разбивать на сумму нескольких слагаемых, где для каждого из них разложение (32.47) имеет место либо при $\alpha > 0$, либо при $\alpha < 0$. Так будет, например, в случае ядер $\sin t$, $\cos t$, $J_\nu(t)$ (см. примечание 5). Случай $\alpha = 0$ относится к теореме 32.3.

2. Если $\alpha_0 > \mu - 1$, то второй ряд в (32.48) входит в любой остаток первого ряда и им можно пренебречь. В этом случае можно применить такое же доказательство, как в теореме 32.3, а условия теоремы 32.6 заметно ослабить. Тогда в теореме 32.6 вместо условия 1) достаточно требовать: 1') $K(t) = O(1)$ при $t \rightarrow +0$; 1'') $K(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$. В условии 2) достаточно того, чтобы разложение (32.47) имело место при действительном $z \rightarrow +\infty$. Коэффициенты $E_k(\mu)$ вычисляются по формуле (32.12).

3. Если $\lambda \in N$, то можно допустить $a \in (0, 1)$. В противном случае следует требовать $\lambda > -1$, а при $a \geq 1$ — еще $\nu > -1$. Необходимо также дополнительно определить соответствующие ветви логарифмических функций, согласовав их со значениями этих функций в точке $t = c$, и выбрать точку a на соответствующем берегу разреза, идущего по лучу $[e^{-1}, \infty)$.

4. Если в интеграле (32.48) $\mu \leq 0$, то можно поступать аналогично тому, как в примечании 6 к теореме 32.3, и исследовать асимптотику интеграла (32.11'), где путь интегрирования идет в бесконечность вдоль верхнего и нижнего берегов разреза. Этим случаем можно дополнить также теоремы 32.7 и 32.8.

5. Вычисление коэффициента $E_k(\mu)$ в (32.48) часто упрощается, если путь интегрирования поворачивать в более подходящем направлении. Рассмотрим примеры.

А. Пусть $K(t) = e^{it}$. Тогда

$$E_k(\mu) = \int_0^{i\infty} e^{i\pi u} u^{\mu-1} \ln^k u \, du = e^{i\pi\mu/2} \int_0^\infty e^{-v} v^{\mu-1} (\ln v + i\pi/2)^k dv = \\ = e^{i\pi\mu/2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \Gamma^{(k)}(\mu) (i\pi/2)^{k-j} = [\Gamma(\mu) e^{i\pi\mu/2}]^{(k)}. \quad (32.51)$$

В случае $K(t) = e^{-it}$ в (32.51) $e^{i\pi\mu/2}$ следует заменить на $e^{-i\pi\mu/2}$.

Б. Пусть $K(t) = J_\nu(t) = (1/2)[H_\nu^{(1)}(t) + H_\nu^{(2)}(t)]$, $\mu \pm \nu > 0$. Тогда приходится учесть примечание 1 и для каждой функции Ганкеля вычислить коэффициент отдельно с учетом (10.77), (10.77') и (10.78). Получим

$$\begin{aligned}
 E_k(\mu) &= (1/2) \left[\int_0^{i\infty} H_\nu^{(1)}(u) u^{\mu-1} \ln^k u \, du + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{-i\infty} H_\nu^{(2)}(u) u^{\mu-1} \ln^k u \, du \right] = \\
 &= (1/\pi i) \left[e^{i\pi(\mu-\nu)/2} \int_0^\infty K_\nu(v) v^{\mu-1} (\ln v + i\pi/2)^k \, dv - \right. \\
 &\quad \left. - e^{-i\pi(\mu-\nu)/2} \int_0^\infty K_\nu(v) v^{\mu-1} (\ln v - i\pi/2)^k \, dv \right] = \\
 &= (1/\pi i) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (i\pi/2)^{k-j} \chi^{(j)}(\mu) [e^{i\pi(\mu-\nu)/2} - \\
 &\quad - (-1)^{k-j} e^{-i\pi(\mu-\nu)/2}] = \chi^{(k)}(\mu), \quad (32.52)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \chi(\mu) &= 2^{\mu-2} \Gamma[(\mu-\nu)/2] \Gamma[(\mu+\nu)/2], \quad \chi(\mu) = (2/\pi) \chi(\mu) \times \\
 &\times \sin[\pi(\mu-\nu)/2] = 2^{\mu-1} \Gamma[(\mu+\nu)/2] / \Gamma[1 - (\mu-\nu)/2]. \quad (32.53)
 \end{aligned}$$

6. Величины $K_{-k}(\chi a)$ в (32.48) вычислить обычно затруднительно, но вместо них можно подставить асимптотические разложения согласно лемме 8.3 и затем перегруппировать члены. В случае, когда $K(t) = J_\nu(t)$, можно применить более сложное интегрирование по частям на основе формулы $[t^{\nu+1} H_{\nu+1}^{(j)}(t)]' = = t^{\nu+1} H_\nu^{(j)}(t)$ и выразить интегрированные ядра с помощью функций $H_{\nu+k}^{(j)}(t)$. Этот метод применен в [410].

2°. При перенесении теоремы 32.4 на случай осциллирующего ядра без дополнительных условий относительно α_0 в разложении (32.47) в доказательстве появляются затруднения при оценке остатка, поэтому на $h(t)$ следует накладывать более сильные условия. Они будут приведены ниже в теореме 32.8.

Теорема 32.7. Пусть 1) функция $h(t)$ локально интегрируема в $[0, a]$; 2) при $t \rightarrow +0$ $h(t)$ обладает разложением

(32.14); 3) функция $K(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$; 4) $K(t) = O(1)$ при $t \rightarrow +0$; 5) при $t \rightarrow +\infty$ $K(t)$ обладает разложением (32.47), где $\alpha \neq 0$, $\alpha_0 > \mu$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ имеет место разложение

$$\Omega(x) = \int_0^a K(xt)h(t)dt \sim x^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \ln^{-\nu_k} x Q_k(\ln \ln x), \quad (32.54)$$

где $a \in (0, \infty)$, μ_k и Q_k пояснены в теореме 32.4.

Доказательство базируется на той же идее, которая использована в доказательстве теоремы 32.4. Выберем число $q < e^{-1}$ так, чтобы при $t \in (0, q]$ в равенстве

$$h(t) = t^{\mu-1} \sum_{k=0}^n a_k \ln^{-\nu_k}(1/t) \ln^{\lambda_k}(\ln 1/t) + \sigma_n(t) t^{\mu-1} \ln^{-\nu_{n+1}}(1/t) \ln^{\lambda_{n+1}}(\ln 1/t) \quad (32.55)$$

было $|\sigma_n(t)| \leq M_n$. Число n выберем произвольным, но так, чтобы $\nu_n > 0$.

Разобьем промежуток интегрирования на $[0, q]$, $[q, a]$. Тогда соответственно $\Omega(x) = \Omega_1(x) + \Omega_2(x)$. В силу условий теоремы $\Omega_2(x) = O(x^{-\alpha_0}) = o(x^{-\mu} \ln^{-N} x)$. Возможные особые точки функций $K(xt)$ и $h(t)$ при $t \in [q, a]$ не могут совпасть, если x — достаточно большое число.

Интеграл $\Omega_1(x)$ согласно (32.55) разобьем на $\Omega_{11}(x) + \Omega_{12}(x)$. В $\Omega_{11}(x)$ к каждому интегралу применим примечание 2 к теореме 32.6. Получим частичную сумму разложения (32.54) и остаток с оценкой $o(x^{-\mu} \ln^{-\nu_n} x \ln^{\lambda_n}(\ln x))$. Интеграл $\Omega_{12}(x)$ разобьем по сегментам $[0, x^{-\gamma}]$, $[x^{-\gamma}, q]$, $\gamma \in (1, 2)$. Первый интеграл имеет оценку $O(x^{-\gamma\mu}) = o(x^{-\mu} \ln^{-N} x)$, а второй — сходящееся асимптотическое разложение согласно теореме 32.3, где при вычислении коэффициента $E_k(\mu)$ под знаком интеграла (32.12) вместо $K(u)$ стоит $M_n |K(u)|$. Такой интеграл в силу условия $\alpha_0 > \mu$ существует. Следовательно, имеем оценку

$$\Omega_{12}(x) = o(x^{-\mu} \ln^{-N} x) + O(x^{-\mu} \ln^{-\nu_{n+1}} x \ln^{\lambda_{n+1}}(\ln x)). \quad \blacksquare$$

Примечания. 1. При дополнительных условиях относительно поведения $h(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ можем брать $a = \infty$. Один из таких вариантов будет рассмотрен в следующей теореме.

2. В доказательстве теоремы оценки получены без применения интегрирования по частям, которое обычно используется в случае осциллирующего ядра. Поэтому никакой гладкости от $h(t)$ не требуется. Возможные точки негладкости при данном

разложении функции $h(t)$ по логарифмам не являются существенно критическими точками. При $\alpha_0 \leq \mu$ это доказательство неприменимо.

3°. Теорема 32.8. Пусть 1) функция $K(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 32.6; 2) функция $h(t)$ аналитична в секторе $\Delta: 0 < |t| \leq \delta, \arg t \in [0, \gamma], \gamma \in (0, \min(\vartheta, \pi/2))$; 3) в этом секторе при $t \rightarrow +0$ имеет место (32.14); 4) $h(t) \in C^m(0, \infty)$, $m = [\mu - \alpha_0] + 1$; 5) $h^{(k)}(t) = O(t^{\alpha_0 - 1 - \eta})$ при $t \rightarrow \infty$, $\eta > 0, k \leq m$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} K(xt)h(t)dt \sim x^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \ln^{-\mu_k x} Q_k(\ln \ln x), \quad (32.56)$$

где μ_k и Q_k пояснены в теореме 32.4 с учетом примечания 3 к ней.

Доказательство. При $m=0$ имеем $\alpha_0 > \mu$, поэтому при более слабых условиях можно использовать теорему 32.7. Пусть $m > 0$. Разобьем $\Omega(x)$ на $\Omega_1(x) + \Omega_2(x)$, как в теореме 32.7, причем q выберем так, чтобы $q < e^{-1}$ и $q \leq \delta$. $\Omega_1(x)$ разобьем по путям от 0 до c , $|c| < \delta, \arg c \in (0, \gamma)$, и от c до q , т. е. $\Omega_1(x) = \Omega_{1(1)}(x) + \Omega_{1(2)}(x)$. Интеграл $\Omega_{1(1)}(x)$ разлагается в ряд (32.15) согласно примечанию 3 к теореме 32.4, и это разложение совпадает с (32.56).

Пусть $\alpha_0 > 0$. Тогда $\Omega_{1(2)}(x)$ и $\Omega_2(x)$ интегрируем по частям m раз, причем $K_{-k}(t)$ выбираем так же, как в теореме 32.6. В силу условий 1) и 5) и лемм 8.3 и 32.1 внеинтегральные члены при $t=c$ имеют оценку $o(x^{-N})$, при $t=\infty$ они аннулируются, а при $t=q$ взаимно сокращаются. Поэтому остаются

$$\begin{aligned} (-1)^m x^{-m} \int_c^q K_{-m}(xt)h^{(m)}(t)dt + (-1)^m x^{-m} \int_q^{\infty} K_{-m}(xt)h^{(m)}(t)dt = \\ = O(x^{-m-\alpha_0}) = o(x^{-\mu} \ln^{-N} x). \end{aligned}$$

Это означает, что $\Omega_{1(2)}(x) + \Omega_2(x)$ входит в любой остаток ряда (32.56).

Пусть некоторые $\alpha_k < 0$. Тогда нельзя выбрать $K_{-k}(t)$, как выше, но можно отщепить сумму членов с положительными показателями степени в (32.47) и при интегрировании по частям $\Omega_{1(2)}(x) + \Omega_2(x)$ поступать так, как указано в конце доказательства теоремы 32.6, т. е. взять ядро e^{iaxt} и присоединить степени t к функции $h(t)$, образуя $h_k(t) = h(t)t^{-\alpha_k}$. Условие 5) для $h(t)$ оправдывает интегрирование по частям интеграла $\Omega_2(x)$, поэтому (32.56) сохраняется. ■

Примечания. 1. Аналогичная теорема имеет место при $\alpha < 0$. В случае составного разложения для $K(t)$ могут появиться дополнительные условия относительно μ , так как отдельные слагаемые для $K(t)$ при $t \rightarrow 0$ могут иметь иные оценки, чем $K(t)$. Так будет в случае, когда $K(t) = J_\nu(t) = O(t^\nu)$, ибо $H_\nu^{(j)}(t) = O(t^{-|\nu|})$, $\nu \neq 0$, при $t \rightarrow +0$. Поэтому при указанном ядре имеем такое же условие, как в формуле (32.52): $\mu \pm \nu > 0$, хотя интеграл (32.56) сходится при одном условии: $\mu + \nu > 0$.

2. Аналогично можно разложить интеграл по конечному промежутку $[0, a]$. Тогда к разложению (32.56) следует добавить члены, которые интегрированием по частям $\Omega_2(x)$ получаются от точки $t = a$. Кроме того, отпадает условие 5) теоремы.

3. Аналогично при условии $\alpha_0 > \mu > 0$ можно исследовать поведение интегралов $\Omega_a(x) = \int_a^\infty K(xt) t^{\mu-1} \ln^\nu t \ln^\lambda(\ln t) dt$, $a > e$, и

$\Omega_0(x) = \int_0^\infty K(xt) h(t) dt$ при $x \rightarrow +0$. Метод разложения и изменения в полученном ряду остается таким же, как в примечании 4 к теореме 32.4. Условие $\alpha_0 > \mu$ гарантирует абсолютную сходимость интеграла $\Omega_a(x)$. Если его разбить по промежуткам $[a, x^{-\nu}]$, $[x^{-\nu}, \infty)$, $\nu \in (1, 2)$, то первый интеграл дает требуемое разложение, а второй входит в его остаток.

Для $\Omega_0(x)$ предположим, что $h(t)$ обладает разложением (32.16). Промежуток интегрирования следует разбить на $[0, a]$, $[a, \infty)$, $a > e$. Если $K(t) = O(1)$ при $t \rightarrow 0$, то первый интеграл имеет оценку $O(1)$ и входит в остаток разложения, содержащего множитель $x^{-\mu}$. Второй интеграл с учетом (32.16) разлагается по методу, примененному в доказательстве теоремы 32.7.

32.2.3. Проанализируем случай, когда при $t \rightarrow +0$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\mu_k - 1} \ln^{-\nu_k}(1/t) \ln^{\lambda_k}(\ln 1/t), \quad (32.57)$$

$0 < \mu_k \uparrow +\infty$. Чтобы единообразно исследовать случаи различных типов ядер, без ограничения общности берем $z = x$, $x \rightarrow +\infty$. В случаях степенного и осциллирующего ядер дополнительно в разложении (32.47) требуем $\alpha_0 > \mu_0$. Следует рассматривать только интеграл $\Omega_1(x)$ по сегменту $[0, q]$, $q < e^{-1}$, так как только в этом сегменте повлияет изменение асимптотики для $h(t)$. Положим

$$h(t) = a_0 t^{\mu_0 - 1} \ln^{-\nu_0}(1/t) \ln^{\lambda_0}(\ln 1/t) + \sigma(t) t^{\mu_1 - 1} \ln^{-\nu_1}(1/t) \ln^{\lambda_1}(\ln 1/t), \quad (32.58)$$

$|\sigma(t)| \leq M$ при $t \in [0, q]$, $\Omega_1(x) = \Omega_{11}(x) + \Omega_{12}(x)$. Интеграл $\Omega_{11}(x)$ разлагается согласно теореме 32.3 или 32.6.

В случае экспоненциально убывающего ядра по теореме 32.3 получаем оценку $\Omega_{12}(x) = o(x^{-\mu_0} \ln^{-N} x)$, так как $\mu_1 > \mu_0$. При других типах ядер $\Omega_{12}(x)$ разобьем по сегментам $[0, x^{-\gamma}]$, $[x^{-\gamma}, q]$, $\gamma \in (1, 2)$. Первый интеграл входит в любой остаток разложения для $\Omega_{11}(x)$, а второй разлагается в сходящийся ряд

$$x^{-\mu_1} \ln^{-\nu_1} x \ln^{\lambda_1}(\ln x) \sum_{k=0}^{\infty} \ln^{-k} x B_k(1/\ln \ln x) \times \\ \times \int_{x^{1-\gamma}}^{qx} K(u) \sigma(u/x) u^{\mu_1-1} \ln^k u du.$$

Поскольку интеграл под знаком суммы имеет мажоранту

$$O(1) + M_1 \int_a^{qx} u^{-\alpha_0 + \mu_1 - 1} \ln^k u du = O(1) + O(x^{-\alpha_0 + \mu_1} \ln^k(x)),$$

то в силу $\alpha_0 > \mu_0$ имеем $\Omega_{12}(x) = O(x^{-\mu_0} \ln^{-N} x)$. Таким образом, получаем следующий результат: *если $\alpha_0 > \mu_0$, то при всех типах ядер разложение (32.57) можно заменить на его первый член.*

Условие $\alpha_0 > \mu_0$ при этом существенно. Если $\alpha_0 \leq \mu_0$, то отмеченный выше результат тоже сохраняется, но при более сильных условиях. Можно сформулировать теорему с условиями, аналогичными условиям в теореме 32.8, однако мы рассмотрим другой вариант, когда не предполагается продолжения $h(t)$ вне действительной оси.

Теорема 32.9. Пусть 1) функция $K(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 32.6; 2) при $t \rightarrow +0$ $h(t)$ обладает разложением (32.57), где $0 < \mu_k \uparrow +\infty$, которое можно $m = \max([\mu_0] + 1, [\mu_0 - \alpha_0] + 1)$ раз почленно дифференцировать; 3) $h(t) \in C^m(0, \infty)$; 4) при $t \rightarrow +\infty$ $h^{(k)}(t) = O(t^{\alpha_0 - 1 - \eta})$, $\eta > 0$, $k \leq m$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} K(xt) h(t) dt \sim \\ \sim a_0 x^{-\mu_0} \ln^{-\nu_0} x \ln^{\lambda_0}(\ln x) \sum_{k=0}^{\infty} E_k(\mu_0) B_{k0}(1/\ln \ln x) \ln^{-k} x, \quad (32.59)$$

где $E_k(\mu)$ и $B_{k0}(u)$ пояснены в теореме 32.6.

Доказательство. Пусть $\alpha_0 \geq 0$. Разобьем промежуток интегрирования на $[0, q]$, $[q, \infty)$, $q \in (0, e^{-1})$, и интеграл $\Omega(x)$ — соответственно на $\Omega_1(x) + \Omega_2(x)$, причем при $t \in (0, q]$

$$h(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^{\mu_k-1} \ln^{-\nu_k}(1/t) \ln^{\lambda_k}(\ln 1/t) + \rho_n(t) \equiv s_n(t) + \rho_n(t), \quad (32.60)$$

где при $t \rightarrow +0$ $\rho_n(t) = O(t^{\mu_{n+1}-1-\eta_1})$, $\eta_1 > 0$. Если в (32.57) имеются конечная сумма и знак равенства, то в (32.60) n выберем так, чтобы $\rho_n(t) \equiv 0$. Тогда доказательство с учетом теоремы 32.6 упрощается. В противном случае выберем n так, чтобы $m < \mu_{n+1} - 1 - \eta_1$. Согласно условию 2) имеем $\rho_n^{(k)}(t) = o(1)$ при $t \rightarrow +0$, $k \leq m$.

Пусть согласно разбиению (32.60) $\Omega_1(x) = \Omega_{11}(x) + \Omega_{12}(x)$. Каждый член в $\Omega_{11}(x)$ имеет разложение по теореме 32.6, поэтому

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(x) = & \sum_{j=0}^n a_j x^{-\mu_j} \ln^{-\nu_j} x \ln^{\lambda_j}(\ln x) \left[\sum_{k=0}^{n_j} E_k(\mu_j) B_{kj}(1/\ln \ln x) \times \right. \\ & \left. \times \ln^{-k} x + O(\ln^{-n_j-1} x) \right] + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k s_n^{(k)}(q) K_{-k-1}(qx) x^{-k-1} + \\ & + O(x^{-m-1-\alpha_0}), \end{aligned} \quad (32.61)$$

где $K_{-n}(t)$ выражается так же, как в доказательстве теоремы 32.6. $\Omega_{12}(x)$ разложим интегрированием по частям m раз. В силу соотношения $\rho_n^{(k)}(t) = o(1)$, $k \leq m$, при нижнем пределе $t=0$ внеинтегральные члены аннулируются, поэтому

$$\Omega_{12}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \rho_n^{(k)}(q) K_{-k-1}(qx) x^{-k-1} + O(x^{-m}). \quad (32.62)$$

При объединении (32.61) и (32.62) с учетом (32.60) получаем сумму

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k h^{(k)}(q) K_{-k-1}(qx) x^{-k-1}.$$

$\Omega_2(x)$ разложим также интегрированием по частям при тех же $K_{-k}(t)$. Согласно условию 4) и лемме 8.3 внеинтегральные члены при $t=\infty$ аннулируются, а при $t=q$ они дают $-S_m(x)$. Если в первом ряду в (32.61) оставить только член при $j=0$, то получим (32.59).

Пусть некоторые $\alpha_k < 0$. Тогда повторим рассуждения, приведенные в конце доказательства теоремы 32.8. В (32.62) вместо $O(x^{-m})$ получим $O(x^{-m-\alpha_0})$, но $-m-\alpha_0 < -\mu_0$, поэтому данный член входит в остаток ряда (32.59). ■

Примечания. 1. К теореме 32.9 относятся также примечания 1 и 2 к теореме 32.8.

2. Теорему 32.8 нельзя модифицировать по образцу теоремы 32.9, так как при почленном дифференцировании ряда (32.14) не получаются такие же оценки для производной остатка, как в ряду (32.60). Остается открытым вопрос, можно ли ослабить условия в теореме 32.8.

3. Теоремы 32.4, 32.6—32.9 изложены в [330]. Разложение (32.57) в случаях, когда $K(t) = J_\nu(t)$ и $K(t) = e^{it}$, применено в [410, 413].

32.2.4, 1°. Рассмотрим подробнее применение метода последовательного разложения в случае осциллирующего ядра. Поскольку в этом случае $z = x > 0$, то можно использовать теорему 11.3 и примечания к ней, приведенные в п. 11.1.3. Согласно им имеем следующие условия: 1) $h(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$; 2) $h(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k}$ при $t \rightarrow +\infty$, $\lambda_k \in (k-1, k]$; 3) функция $K(t)$ ограничена при $t \geq 0$ и локально интегрируема в $[0, \infty)$; 4) $K(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ при $t \rightarrow +0$; 5) интеграл $\int_1^{\infty} K(t) t^{-\lambda} dt$ сходится. Тогда методом последовательного разложения согласно (11.23) можно разложить $\int_0^{\infty} K(t/x) h(t) dt$ при $x \rightarrow +\infty$ и $\int_0^{\infty} K(xt) h(t) dt$ при $x \rightarrow +0$. Данные условия допускают, что $K(t)$ осциллирует. Например, в качестве $K(t)$ можно брать e^{iat} , $J_n(t)$, $\text{si } t$ и т. д.

Теорема 11.4 согласно условию 3) не допускает осциллирующее ядро, но допускает осциллирующую функцию нагрузки, так как 1) $h(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$ и 2) $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ при $t \rightarrow +0$. После подстановки $tx = u$ ядром станет функция $h(t)$ и можно построить асимптотическое разложение интеграла аналогично, как по теореме 11.3.

В дополнениях к теореме 11.4 в разложении $K(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k}$ при $t \rightarrow +\infty$ допускаются переменные коэффициенты $a_k(t)$. Более подробно рассмотрен случай, когда $a_k(t) = A_k e^{i\alpha_k t}$, а это означает, что $K(t)$ — осциллирующее ядро. Ниже рассмотрим

некоторую модификацию этого расширения, используя теорему 11.2.

2°. Пусть при $t \rightarrow +\infty$

$$h(t) \sim \omega(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k}, \quad \lambda_k \in (k-1, k], \quad (32.63)$$

где $\omega(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ обладает разложением (32.47), в котором $\alpha \neq 0$, $\alpha_0 \geq 0$. Метод, использованный при доказательстве теоремы 11.1, в этом случае неприменим, так как появляются расходящиеся интегралы. Но можно использовать доказательство теоремы 11.2. Оно в данном случае даже упрощается, так как в силу сходимости рассматриваемых интегралов промежутки интегрирования не требуется разбивать на $[0, 1]$, $[1, \infty)$. При обозначениях

$$h_{-n}(t) - a_{n+1} t^{-\lambda_{n+1} + n} \omega(t) = t^{-1} h_{-n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (32.64)$$

$$h_{-n}(t) = t^n \left[h(t) - \omega(t) \sum_{k=1}^n a_k t^{-\lambda_k} \right] \sim \omega(t) \sum_{k=n+1}^{\infty} t^{-\lambda_k + n};$$

$$K_n(\tau) - K_n(0) = \tau K_{n+1}(\tau), \quad (32.65)$$

$$K_n(\tau) = \left[K(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} (K^{(k)}(0)/k!) \tau^k \right] \tau^{-n}$$

с соответствующими изменениями можно использовать (11.19).

Из (32.64) вытекает, что $\int_0^{\infty} h_{-n}(t) dt$, $n \in \mathbb{N}$, сходится. В итоге получаем следующую теорему.

Теорема 32.10. Пусть 1) функция $h(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$; 2) при $t \rightarrow +\infty$ $h(t)$ обладает разложением (32.63), где $\omega(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$, $\omega(t) = O(1)$ при $t \rightarrow +0$, а при $t \rightarrow +\infty$ $\omega(t)$ обладает разложением (32.47), где $\alpha \neq 0$, $\alpha_0 \geq 0$; 3) функция $K(t)$ аналитична в секторе S :

$|\arg t| \leq \beta \leq \pi$; 4) интегралы $\int_0^{\infty} K_n(t/z) t^{-\lambda_n + n} \omega(t) dt$ существуют при $z \in S$, где функции $K_n(\tau)$ определены в (32.65). Тогда при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$ и каждом $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} K(t/z) h(t) dt &= \sum_{k=0}^n z^{-k} (K^{(k)}(0)/k!) \int_0^{\infty} h_{-k}(t) dt + \\ &+ \sum_{k=0}^n z^{-k-1} a_{k+1} \int_0^{\infty} K_{k+1}(t/z) t^{-\lambda_{k+1} + k+1} \omega(t) dt + \end{aligned}$$

$$+z^{-n-1} \int_0^{\infty} K_{n+1}(t/z) h_{-n-1}(t) dt, \quad (32.66)$$

где функции $h_{-k}(t)$ определены в (32.64). Если $z=x>0$, то условие 3) можно заменить на 3') функция $K(t/x)h(t)$ локально интегрируема в $[0, \infty)$ и 3'') $K(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ при $t \rightarrow +0$. Тогда в (32.65) вместо коэффициента $K^{(k)}(0)/k!$ следует писать b_k .

Примечания. 1. Показатели степени λ_k в (32.63) могут быть как целыми, так и дробными числами. Если в интервал $(m, m+1]$ входит несколько λ_k , то следует учитывать примечание 2 к теореме 11.1. В случае составного асимптотического разложения для $h(t)$ с разными функциями $\omega(t)$ теорема применяется отдельно к каждому ряду.

2. В случае $z=x$ подстановкой $t/x=\tau$ можно перейти к интегралу с ядром $h(\tau x)$. Пример к этой модификации в случае $h(t)=J_\nu(t)$ рассмотрен в [312], где теорема 32.10 при более жестких условиях приведена в частном случае, когда $\omega(t)=e^{it}$, $\lambda_k=k-1/2$. Другой частный случай теоремы 32.10 при $K(t)=(1+t)^{-1}$, $\omega(t)=e^{it}$, $\lambda_k=k$ рассмотрен в [381].

3. Теорема 32.10 допускает как осциллирующее ядро, так и осциллирующую функцию нагрузки. При $K(t)=e^{-t}$ получаем разложение интеграла Лапласа при $z \rightarrow 0$ в случае осциллирующей функции нагрузки, что дополняет (31.21). Поскольку применение формулы Парсеваля (п. 31.2) не допускает введения общего множителя $\omega(t)$, то теорема 32.10 дает более общий результат, чем п. 31.2.

3°. В качестве примера к теореме 32.10 рассмотрим случай, когда в (32.66) $z=1/x$, $x \rightarrow +0$, $\omega(t)=e^{iat}$, $a \neq 0$, и функция $K(t)$ аналитична при $t \geq t_0 > 0$, а асимптотическое разложение для $K(t)$ при $t \rightarrow 0$ можно сколь угодно раз почленно дифференцировать. Тогда следует разложить интеграл

$$\begin{aligned} \mu_{k+1}(x) &= \int_0^{\infty} K_{k+1}(xt) t^{-\lambda_{k+1}+k+1} e^{iat} dt = \\ &= x^{\lambda_{k+1}-k-2} \int_0^{\infty} e^{iax\tau} \tau^{-\lambda_{k+1}} \left[K(\tau) - \sum_{m=0}^k b_m \tau^m \right] d\tau. \end{aligned}$$

Полученный интеграл с помощью нейтрализатора разобьем на две части. Интегрируя второй интеграл по частям, получаем оценку $o(z^{-N})=o(x^N)$. Первый интеграл можно разложить согласно теореме 12.6 и формуле (12.104). Получаем

$$\mu_{k+1}(x) \sim \exp [i \operatorname{sign} \alpha (1 - \lambda_{k+1}) \pi / 2] \times \\ \times \sum_{m=k+1}^{\infty} (i \operatorname{sign} \alpha)^m b_m |\alpha|^{\lambda_{k+1} - m - 1} \Gamma(m + 1 - \lambda_{k+1}) x^{m - k - 1}.$$

После подстановки в (32.66) и перегруппировки членов при $x \rightarrow +0$ имеем разложение

$$\int_0^{\infty} K(xt) h(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} x^k b_k \int_0^{\infty} h_{-k}(t) dt + \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k+1}, \quad (32.67)$$

где

$$B_k = (i \operatorname{sign} \alpha)^{k+1} b_{k+1} |\alpha|^{-k-2} \times \\ \times \sum_{j=0}^k a_{j+1} \exp [i \operatorname{sign} \alpha (1 - \lambda_{j+1}) \pi / 2] |\alpha|^{\lambda_{j+1}} \Gamma(k + 2 - \lambda_{j+1}). \quad (32.68)$$

Если $K(t) = e^{it}$, то в (32.67) и (32.68) $b_k = i^k / k!$, а при $K(t) = e^{-t}$ $b_k = (-1)^k / k!$.

4°. В п. 11.2.5 приведена модификация метода последовательного разложения для интеграла $\int_0^a K(zt) h(t) dt$, $z \rightarrow \infty$, когда последний разбивается по промежуткам $[0, \varepsilon]$, $[\varepsilon, a]$ и в первом из них почленно интегрируется разложение для $h(t)$ в степенной ряд. В работе [376] предлагается другой вариант этого способа для интеграла (32.67) при $x \rightarrow +0$ и $K(t) = e^{it}$. Интеграл разбивается по промежуткам $[0, R]$, $[R, \infty)$. В первом из них применяется ряд Тейлора для e^{ixt} , во втором — сходящееся асимптотическое разложение для $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Затем после соответствующих преобразований отбрасываются члены, содержащие R . Хотя после всех формальных действий получаются правильные разложения (31.21) и (32.67) при $\lambda_k = k$, все же строгого обоснования для этого формального метода пока нет. Но и по выполнению действий он не проще метода последовательного разложения.

32.3. Интегралы с ядрами степенного типа

32.3.1. Интегралы с ядрами степенного типа были рассмотрены в различных параграфах 1-го тома данной монографии. Часто их асимптотическое разложение можно построить методом последовательного разложения, рассмотренного в § 11. К этим ядрам относятся также теорема 13.5 и содержание

п. 14.1—14.3. В данном томе монографии случай степенных ядер рассмотрен в связи с ε -преобразованием (п. 30.1 и 30.2) и при применении формулы Парсеваля (п. 31.1—31.3). Наконец, теоремы 32.3, 32.4 и 32.10 также допускают степенные ядра в случаях, когда функция нагрузки обладает логарифмической особенностью или осциллирует. Ниже рассмотрим несколько дополнений к указанным выше методам.

1°. Метод последовательного разложения и метод применения формулы Парсеваля дают различные выражения для коэффициентов разложения. В силу единственности разложения коэффициенты должны совпасть. Но можно и непосредственно доказать совпадение коэффициентов. Рассмотрим такие доказательства на основе теоремы 11.4, когда $\lambda_k \in (k, k+1)$, т. е. для разложения (11.39)

$$\int_0^a K(zt)h(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A_k z^{-\lambda_k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k B_k z^{-k-1}, \quad (32.69)$$

если

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \quad \text{при } t \rightarrow +0, \quad (32.70)$$

$$K(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k} \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad |\arg t| \leq \gamma < \pi,$$

где

$$A_k = \int_0^a h_k(t) t^{k-\lambda_k} dt + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{b_j a^{-\lambda_k+j+1}}{j+1-\lambda_k}, \quad B_k = \int_0^{\infty} K_{-k-1}(\tau) \tau^{-1} d\tau,$$

$$h_k(t) = \left[h(t) - \sum_{j=0}^{k-1} b_j t^j \right] t^{-k}, \quad K_{-k}(t) = \left[K(t) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j t^{-\lambda_j} \right] t^k. \quad (32.71)$$

Пусть, по преобразованию Меллина, $K(t) \rightarrow \kappa(s)$. В силу (32.70) и п. 31.1 функция $\kappa(s)$ продолжима в правой полуплоскости как мероморфная функция с простыми полюсами λ_k и вычетами $-a_k$. При $\gamma \in (0, \lambda_0)$ согласно (23.5) имеем

$$K(t) = (1/2\pi i) \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \kappa(s) t^{-s} ds = \sum_{j=0}^k a_j t^{-\lambda_j} + (1/2\pi i) \int_{\gamma_k-i\infty}^{\gamma_k+i\infty} \kappa(s) t^{-s} ds, \quad (32.72)$$

где $\gamma_k \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$. В последнем интеграле в (32.72) применим подстановку $s = k+1 + \zeta$. Поскольку $\lambda_k \in (k, k+1)$, то γ_k можно выбрать так, чтобы $\operatorname{Re} \zeta \in (-\sigma_0, \sigma_0)$, $\sigma_0 > 0$. Поэтому из (32.72) следует

$$\left[K(t) - \sum_{j=0}^k a_j t^{-\lambda_j} \right] t^{k+1} = (1/2\pi i) \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} \kappa(k+1 + \zeta) t^{-\zeta} d\zeta,$$

$$\gamma_0 \in (-\sigma_0, \sigma_0),$$

а отсюда согласно (32.71), (23.1) и (23.5) —

$$\kappa(k+1 + \zeta) = \int_0^{\infty} K_{-k-1}(t) t^{\zeta-1} dt.$$

При $\zeta = 0$ получаем $B_k = \kappa(k+1)$. Это доказательство относится и к формуле (11.13).

Пусть $H(t) = h(t)\eta(a-t) \rightarrow \chi(s)$. Функция $\chi(s)$ аналитически продолжима в левой полуплоскости, за исключением полюсов $s = -k$, $k \in N$, с вычетами b_k . Поэтому при $\gamma > 0$, $\gamma_k \in (k-1, k)$

$$H(t) = (1/2\pi i) \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \chi(s) t^{-s} ds = \sum_{j=0}^{k-1} b_j t^j + (1/2\pi i) \int_{-\gamma_k - i\infty}^{-\gamma_k + i\infty} \chi(s) t^{-s} ds.$$

Число γ_k можно выбрать так, чтобы после подстановки $s = \zeta - \lambda_k$, $\lambda_k \in (k, k+1)$, было бы $\operatorname{Re} \zeta \in (\sigma_0, 1 + \sigma_1)$, $\sigma_0 \in (0, 1)$, $\sigma_1 \in (0, 1)$. Тогда

$$\left[H(t) - \sum_{j=0}^{k-1} b_j t^j \right] t^{-\lambda_k} = (1/2\pi i) \int_{\gamma_0 - i\infty}^{\gamma_0 + i\infty} \chi(\zeta - \lambda_k) t^{-\zeta} d\zeta, \quad \gamma_0 \in (\sigma_0, 1 + \sigma_1),$$

$$\chi(\zeta - \lambda_k) = \int_0^{\infty} \left[H(t) - \sum_{j=0}^{k-1} b_j t^j \right] t^{-\lambda_k} t^{\zeta-1} dt.$$

Можно брать $\zeta = 1$, поэтому

$$\chi(1 - \lambda_k) = \int_0^a h_k(t) t^{k-\lambda_k} dt - \sum_{j=0}^{k-1} b_j \int_a^{\infty} t^{j-\lambda_k} dt = A_k.$$

Аналогичным методом, но более сложно доказывається совпадение коэффициентов в случае, когда $\lambda_k = k+1$. Тогда из (32.71) следует, что аналитическое продолжение функции

$\chi(1-s)$ имеет полюсы в точках $s=k$, поэтому все полюсы функции $\chi(1-s)\kappa(s)$ — двойные и в разложении (11.41) появляется $\ln(az)$. В доказательстве совпадения коэффициентов следует использовать также формулу (31.12). Можно доказать совпадение коэффициентов и в случае теоремы 11.2. Другой вариант доказательства совпадения разложений, полученных по обоим методам, предложен в [436].

Следует отметить, что метод последовательного разложения в руководствах по асимптотическому разложению интегралов кроме 1-го тома данной монографии приводится лишь в работе [375] в случае интеграла Стильтьеса (см. п. 32.3.2, 3°). В модифицированной форме основная идея метода последовательного разложения впервые встречается в [351] при обосновании формального правила Хевисайда для обратного преобразования Лапласа (см. п. 24.7.1).

2°. К методу последовательного разложения иногда можно привести также интегралы с другими ядрами. В качестве примера при $z \rightarrow \infty$ рассмотрим обобщение интеграла (14.14)

$\int_0^a (zg(t) + G(t))^\lambda h(t) dt$, где $g(0) = 0$, $g(t) > 0$ при $t \in (0, a)$.

Пусть при $t \in [0, \alpha]$, $\alpha \leq a$, функция $v(t) = g(t)/G(t)$ монотонна, $v(t) \in C^1[0, \alpha]$ и $G(t) > 0$. Разобьем интеграл на сумму $\Omega_1(z) + \Omega_2(z)$ по промежуткам $[0, \alpha]$, $[\alpha, a]$. Интеграл $\Omega_2(z)$ можно разложить согласно теореме 4.15, применив к функции $[1 + G(t)/zg(t)]^\lambda$ формулу бинома Ньютона. Из $\Omega_1(z)$ с помощью подстановки $v = g(t)/G(t)$ получаем интеграл, к которому часто применима теорема 11.4 или метод, указанный в п. 11.2.5. Модификация последнего метода при ядре $(1+zt)^\lambda$ приведена в [336]. Частные случаи данного интеграла будут рассмотрены также в п. 32.3.2, 7°.

3°. Нередко степенные ядра встречаются в интеграле свертки

$$\Omega(z) = \int_0^z K(z-t)h(t) dt. \quad (32.73)$$

В п. 11.3 в таком случае построено асимптотическое разложение при $z \rightarrow \infty$ для $\Omega(z)$, если $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$ тоже обладает степенным разложением. Дополнение к этому случаю рассматривается в п. 22.8, а при экспоненциально убывающей или возрастающей функции $h(t)$ разложение для (32.73) дано в п. 15.1. Коэффициенты в разложении (11.72) весьма трудно вычислимы, поэтому, если возможно, целесообразнее использовать преобразование Лапласа, как указано в п. 22.8. Для некоторого узкого класса функций $K(t)$ и $h(t)$ формулу обращения можно при-

менять при разложении интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)h(t)dt$, который является сверткой в случае двустороннего преобразования Лапласа или преобразования Фурье. Этим в какой-то мере дополняются результаты п. 18.5.2.

На практике (в теории вероятностей и теории фильтров) приходится исследовать асимптотику также n -кратной свертки

$$h_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{n-1}(t-x)h(x)dx, \quad h_1(t) \equiv h(t),$$

а также $V_n(t) = \int_{-\infty}^t h_n(\tau)d\tau$ при $n \rightarrow \infty$. В работах [373, 374] с помощью преобразования Фурье получены асимптотические разложения для $h_n(c\sqrt[k]{n})$ и $V_n(c\sqrt[k]{n})$ при $n \rightarrow \infty$ и указана дополнительная литература по данному вопросу. Число $k \geq 2$ показывает первый, от нуля отличный момент функции $h(t)$, k — четное число. Кроме того, в [374] для оценки остатка полученного разложения приведен иной вариант применения интегральных преобразований: используется выражение для общей оценки разности функций (в данном случае — функции и частичной суммы ее разложения) через разность их изображений. В случае преобразования Фурье такую общую оценку дает *неравенство сглаживания* (или обобщенное неравенство Эссеена) [326, 355].

Подстановка $t = z\tau$, примененная в п. 11.3 и приводящая $\Omega(z)$ к интегралу

$$\Omega(z) = z \int_0^1 K(z(1-\tau))h(z\tau)d\tau, \quad (32.74)$$

может быть полезной и в случае ядер другого типа. Особенно простое выражение получаем для интеграла дробного интегрирования (32.25), когда

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= (1/\Gamma(\lambda)) \int_0^x (x-u)^{\lambda-1}h(u)du = \\ &= x^\lambda (1/\Gamma(\lambda)) \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1}h(x\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (32.75)$$

Если в (32.75) $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$ обладает разложением $h(t) \sim$

$\sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k}$, то можно использовать теорему 11.4. Отличие в условиях по сравнению с п. 11.3 состоит в том, что здесь для $K(t)$ используется его разложение при $t \rightarrow 0$, а в п. 11.3 — разложение при $t \rightarrow \infty$. В результате при $\lambda_k \in N$ получаем формулу (31.24'), причем совпадение коэффициентов доказано выше, в п. 1°. По существу аналогичным методом, но с помощью обобщенных функций разложение (31.24') найдено также в [382]. Обобщенные функции применяются и в [422] для вывода формулы (31.21). Такой модифицированный метод не имеет преимуществ. При его применении только становится неясной весьма простая идея метода последовательного разложения. Согласно формуле (11.42) или с помощью формулы Парсеваля нетрудно найти разложение для (32.75) при $\lambda_k = k+1$. Методом обобщенных функций это разложение получено в [382]. Если при $t \rightarrow \infty$ $h(t)$ в (32.75) осциллирует, то можно использовать один из тех методов, которые перечислены в п. 32.2. Случай, когда $h(t) \sim \exp(-at^\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k}$ при $t \rightarrow \infty$, $\alpha > 0$, $a \geq 0$, с помощью формулы Парсеваля рассмотрен в [341]. При $a > 0$ можно непосредственно применить теорему 15.1, а при $a = 0$ имеем вышеотмеченный случай.

Аналогично предыдущие методы используются, если $h(t)$ обладает логарифмическими особенностями. Некоторые результаты, полученные в этом случае методом, подобным методу доказательства теоремы 32.4, приведены в [411], где в интеграле (32.75) $h(t)$ обладает разложением (32.14) при $\nu_k = k - \gamma$, а $\lambda_k = 0$ или $\lambda_k = k$. В последнем случае получены только первые члены разложения. При $h(t) = \ln \Gamma(t)$ асимптотика интеграла (32.75) с помощью преобразования Меллина рассмотрена в [361].

32.3.2. Асимптотика преобразования Стильеса. Обобщенное преобразование Стильеса определяется интегралом

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{dH(t)}{(z+t)^\gamma}, \quad |\arg z| < \pi, \quad (32.76)$$

где $H(t)$ — функция локальной ограниченной вариации в $[0, \infty)$, γ — фиксированное комплексное число, $\gamma \neq 0$. Приводим некоторые основные свойства интеграла (32.76), исследованные в [348].

1. Если интеграл (32.76) сходится в точке $z = z_0$, $\arg z_0 \neq \pi$, то он сходится во всей разрезанной вдоль луча $\arg z = \pi$ плоскости z и определяет аналитическую функцию $f(z)$. Сходимость равномерна в каждой замкнутой части этой плоскости. Произ-

водные от $f(z)$ можно найти дифференцированием по параметру под знаком интеграла.

2. Если интеграл (32.76) сходится, то $H(t) = o(t^\nu)$ при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда интегрированием (32.76) по частям получаем

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{\gamma H(t)}{(z+t)^{\gamma+1}} dt.$$

При исследовании асимптотики $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ или $z \rightarrow 0$, $|\arg z| < \pi$, ради простоты рассмотрим обыкновенное преобразование Стильтьеса, когда $\gamma = 1$ и $dH(t) = h(t)dt$, $h(t) = o(1)$. В зависимости от поведения $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$ следует различать отдельные случаи.

1°. Во многих частных случаях $f(z)$ можно выразить с помощью известных специальных функций, асимптотика которых либо известна, либо легко находима. Таблицы преобразования Стильтьеса приведены в [313]. Асимптотика $f(z)$ в частном случае, когда $h(t)$ — G -функция Мейера, рассмотрена в [378]. Некоторые формулы преобразования Стильтьеса от отношения сложных цилиндрических функций с помощью формулы обращения для этого преобразования получены в [424].

2°. Если $h(t)$ экспоненциально убывает, то разложение для $f(z)$ дано формулой (14.12). При $\gamma = 1$ в п. 5.2.3, 3° к этому разложению применено преобразование Эйлера.

3°. Пусть при $t \rightarrow +\infty$ $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\lambda_k}$, $\lambda_0 > 0$, $h(t) \div \chi(s)$.

Тогда при $\lambda_k \in N$ согласно теореме 11.1 или 31.3 при $z \rightarrow \infty$ получим

$$\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{z+t} dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \chi(k+1) z^{-k-1} + \pi \sum_{k=0}^{\infty} (a_k / \sin \pi \lambda_k) z^{-\lambda_k}. \quad (32.77)$$

При $\lambda_k = k+1$ по теореме 11.2 или 31.3 имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{z+t} dt \sim \ln z \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k z^{-k-1}, \quad (32.78)$$

где $A_k = \lim_{s \rightarrow k+1} ([\chi(s)(s-k-1)]')$. Другое выражение для A_k полу-

чается по формуле (11.21), так как в (11.23) $\gamma_k = (-1)^k \sum_{j=1}^k j^{-1}$, а для $\chi(k+1)/k!$ — по формуле (11.13). Вместо теоремы 31.3 можно непосредственно применить формулу (23.48').

Разложение (32.77) при $\lambda_k = k + \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, приведено в [332], а при $\lambda_k = k + 1$ — в [375]. При этом в [375] применен другой метод. Используется равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{t+z} dt = \int_0^{\infty} e^{-z\tau} d\tau \int_0^{\infty} e^{-t\tau} h(t) dt, \quad (32.79)$$

которое доказывается непосредственным изменением порядка интегрирования. Внешний интеграл разлагается по лемме Ватсона, для чего внутренний интеграл следует разложить при $\tau \rightarrow 0$. В [375] это достигается методом последовательного разложения. Соотношение (32.79) можно использовать и при других функциях $h(t)$, а также для исследования асимптотики при $z \rightarrow 0$. Формулы (32.77) и (32.78) получены также в [381], где применена модификация метода последовательного разложения на базе обобщенных функций (см. п. 32.3.1, 2°). Для коэффициентов $\chi(k+1)$ и A_k в [381] даны другие выражения.

Поскольку имеем ядро вида $K(t/z)$, то разложение интеграла (32.79) при $z \rightarrow 0$ можно найти согласно теореме 11.4, если при $t \rightarrow +0$ $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, или по теореме 31.1, если $h(t) \in \in \text{PM}(0)$.

4°. Если $h(t)$ при $t \rightarrow +0$ обладает разложением (32.14), где $\mu \in (0, 1)$, и при $t \rightarrow +\infty$ $h(t) = O(t^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, то согласно теореме 32.4 и примечанию 1 к ней по формуле (32.15), в которой z заменено на $1/z$, при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi - \eta$ получим

$$\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{z+t} dt \sim z^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \ln^{-\mu_k} (1/z) Q_k(\ln(\ln 1/z)). \quad (32.80)$$

Чтобы построить разложение при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi - \eta$, когда $h(t)$ обладает разложением (32.16), $\mu < 1$, следует использовать примечание 4 к теореме 32.4. Получаем разложение

$$\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{z+t} dt \sim z^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \ln^{-\mu_k} z Q_k^*(\ln \ln z). \quad (32.81)$$

Если в разложениях (32.14) и (32.16) $\lambda_k = 0$, то можно использовать также результаты, изложенные в п. 31.3.

5°. В случае осциллирующей функции $h(t)$, обладающей разложением (32.63), при $z \rightarrow \infty$ следует использовать теорему 32.10, так как интегралы, указанные в условии 4) этой теоремы, в силу $K(t) = (1+t)^{-1}$ существуют. Разложение при $z \rightarrow \infty$,

$|\arg z| \leq \pi - \eta$ выражается формулой (32.66), где $K^{(k)}(0)/k! = (-1)^k$, $K_n(\tau) = (-1)^n/(1+\tau)$. Кроме того, в нее следует добавить множитель z^{-1} . В случае $\omega(t) = e^{i\alpha t}$ можно использовать (32.67) и (32.68). Особенно простой результат получается при $\lambda_h = k$, так как тогда второй ряд в (32.66) имеет вид $\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k z^{-k-1} \int_0^{\infty} e^{i\alpha t} (t+z)^{-1} dt$. Но по принципу аналитического

продолжения, $\int_0^{\infty} e^{i\alpha t} (t+z)^{-1} dt = (-\text{Ci}(|\alpha|z) + i \text{sign } \alpha [\pi/2 - \text{Si}(|\alpha|z)]) e^{-i\alpha z}$. Этот результат получен в [381] модифицированным методом с помощью обобщенных функций.

При $z=x$ можно применить подстановку $t=\tau x$ и исследовать асимптотику интеграла (32.76) с ядром $h(x\tau)$, применив теоремы, относящиеся к интегралам с осциллирующим ядром.

При весьма общих условиях относительно осциллирующей функции $h(t)$ асимптотическое разложение интеграла Стильеса можно найти согласно теореме 30.3. Формула (30.28) дает пример, когда $h(t) = J_\nu(t) t^\mu$, $\mu < 3/2$, $\mu + \nu > -1$.

6°. Некоторый приближенный метод для численного вычисления интеграла Стильеса на основе ε -преобразования третьего рода предложен в [356].

Отметим еще, что асимптотические оценки интеграла Стильеса при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi$ при разных $h(t)$ приведены в [414, 416], где указана также дополнительная литература.

7°. Теория, изложенная выше, в основном сохраняется, если функция $h(t)$ в некоторой части промежутка интегрирования тождественно равна 0. Иногда в таких случаях искомое разложение проще получить методом разложения подынтегральной функции в ряд и почленным интегрированием согласно образцу, рассмотренному в п. 11.2.5. Например, если $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t \in [0, 1]$, то этот ряд можно подставить под знак ин-

теграла $\int_0^1 \frac{h(t)}{t+z} dt$. Далее следует каждый член интегрировать

с помощью элементарных функций и перегруппировать члены, образуя асимптотическое разложение при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$.

Разнообразие методов, выбираемых в зависимости от свойств функции $h(t)$, характеризует пример

$$\Omega(z) = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\ln(1/t)(t+z)} = -\frac{\ln \ln 2}{1+2z} + z^{-1} \int_0^{1/2} \frac{\ln(\ln 1/t)}{(1+\zeta t)^2} dt,$$

$\zeta = 1/z \rightarrow \infty$, где использовано интегрирование по частям. Последний интеграл разлагается согласно теореме 32.4, так как $\alpha_0 = 2$, $\mu = 1$. В итоге при $z \rightarrow 0$, $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ получим

$$\Omega(z) \sim \ln(\ln 1/z) - \ln \ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{2k \ln^{2k}(1/z)},$$

где $\mu_k = \int_0^{\infty} \frac{\ln^k t}{(1+t)^2} dt$ выражается формулой (13.60). Отметим,

что с помощью чисел μ_j можно выразить также $\int_0^{\infty} \frac{\ln^k t}{(z+t)^2} dt$,

а отсюда интегрированием по z — $\int_0^{\infty} \frac{\ln^k t}{(\alpha+t)(\beta+t)} dt$, $\alpha > 0$,

$\beta > 0$.

К сокращенному или несокращенному преобразованию Стильтьеса приводятся некоторые родственные (32.76) интегралы. В качестве примера приводим при $\alpha > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{h(t)}{zt + e^{\alpha t}} dt = \int_0^{1/\alpha} \frac{h(t)e^{-\alpha t}}{zte^{-\alpha t} + 1} dt + \int_{1/\alpha}^{\infty} \frac{h(t)e^{-\alpha t}}{zte^{-\alpha t} + 1} dt. \quad (32.82)$$

В промежутках $[0, 1/\alpha]$, $[1/\alpha, \infty)$ функция $te^{-\alpha t}$ монотонна, поэтому можно применить подстановку $te^{-\alpha t} = u$, которая приводит к конечным интегралам Стильтьеса, где $z = 1/x$.

К интегралу (32.82), в свою очередь, подстановкой $\ln t = \tau$ приводится интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{h(t) dt}{zt^{\alpha} + \ln t} = \int_0^{\infty} \frac{h(e^{\tau}) e^{\tau}}{ze^{\alpha \tau} + \tau} d\tau, \quad \alpha > 0.$$

В случае ядра $[z + g(t)]^{-1}$, $g(t) \geq 0$, аналогично тому, как в (32.82), интеграл следует разбить по промежуткам монотонности функции $g(t)$ и применить подстановку $g(t) = u$.

К интегралу Стильтьеса иногда можно привести интегралы, по внешнему виду далекие от него. Например, исследование при $\beta \rightarrow 0$ интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta - e^{-t}}{\operatorname{ch} t - \cos \beta} e^{-\alpha t} dt, \quad \alpha > 0,$$

подстановкой $1 - \cos \beta = x$, $\operatorname{ch} t - 1 = u$ приводится к интегралу

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u^2 + 2u - u - x}}{u + x} (1 + u + \sqrt{u^2 + u})^{-\alpha} du,$$

который при $x \rightarrow 0$ можно разложить согласно (11.43), (11.44) или теореме 31.1.

32.3.3. Интеграл Стильтеса расходится, если $z = -x$, $x > 0$. Однако если $h(t) \in C^1(0, \infty)$, то интегрированием по частям легко убедиться в том, что при каждом фиксированном $x > 0$ существует главное значение интеграла. Поэтому к интегралу при $z = -x$ можно отнести всю рассмотренную выше теорию. Следует только учитывать, что в этом случае $K(t) = (t-1)^{-1}$ и в связи с этим изменяется выражение для $\kappa(s)$. Методом вычетов легко доказать, что при $\operatorname{Re} s \in (0, 1)$

$$\kappa(s) = \text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{t-1} dt = -\pi \operatorname{ctg} \pi s. \quad (32.83)$$

С учетом этого изменения можно найти асимптотическое разложение интеграла Стильтеса при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow +0$ в зависимости от свойств $h(t)$ аналогично тому, как в п. 32.3.2. Например, вместо формул (32.77) и (32.78) при $x \rightarrow +\infty$ и $\lambda_k \in N$ имеем

$$\text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{h(t)}{t-x} dt \sim - \sum_{k=0}^{\infty} \chi(k+1) x^{-k-1} + \pi \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\operatorname{ctg} \pi \lambda_k) x^{-\lambda_k}, \quad (32.84)$$

а при $\lambda_k = k+1$ —

$$\text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{h(t)}{t-x} dt \sim \ln(1/x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k-1}. \quad (32.85)$$

Эти разложения при $\lambda_k = k + \alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, методом последовательного разложения получены в [412], где рассмотрен также случай, когда $h(t)$ обладает разложением (32.63) при $\omega(t) = e^{it}$. Кроме того, случай $z = -x$ рассмотрен в [414], а при $h(t) = e^{-t}$ — в [398, 415]. Первые два члена асимптотического представления интеграла (32.85) при $x \rightarrow \infty$ и $h(t) = \ln^k t (t+a)^{-n} \eta(t-\alpha)$, $a > 0$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $n \in N_1$, элементарным путем получены в [430].

В работе [372] при $h(t) = e^{-t} t^{-\lambda} \ln^m t$, $\lambda \in [0, 1)$, $m \in N$, и $x \rightarrow +0$ применяется другой метод, основанный на формуле Сохоцкого—Племеля [316]

$$\text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{h(t)}{t-x} dt = (1/2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} [(t-x+i\varepsilon)^{-1} + (t-x-i\varepsilon)^{-1}] h(t) dt. \quad (32.86)$$

К интегралам в правой части (32.86) непосредственно можно применить результаты п. 32.3.2, однако требуется обосновать предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в оценке остатка. При $h(t) = e^{-t} t^{-\lambda} \ln^m t$ имеем $\chi(s) = \Gamma^{(m)}(s-\lambda)$, поэтому непосредственно по теореме 31.1 при $\lambda \in (0, 1)$ с учетом полюсов $s_k = k+1-\lambda$ порядка $m+1$ и простых полюсов $s_k = k+1$, $k \in N$, при $x \rightarrow +0$ получаем

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{-\lambda} \ln^m t}{t-x} dt &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{(m)}(-k-\lambda) x^k + \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k-\lambda} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \chi^{(m-j)}(k+1-\lambda) \ln^j(1/x). \end{aligned} \quad (32.87)$$

Формула (32.87) показывает, что результаты работы [372] не являются корректными, так как в ней утверждается: разложение (32.87) содержит логарифмы только в доминирующем члене.

Следует отметить, что к рассмотренному случаю интеграла Стильтьеса и п. 32.3.2 приводятся исследования об асимптотике преобразования Гильберта $(1/\pi) \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) (t-x)^{-1} dt$.

32.4. Некоторые другие дополнения

32.4.1. Приводим еще несколько дополнений к другим разделам данной монографии.

1°. В некоторых случаях, когда интеграл имеет ядро с устранимой особенностью, функция нагрузки $h(t)$ не обладает теми свойствами, какие указаны в п. 15.3. Пусть при $t \rightarrow +0$

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\ln 1/t)^{-\lambda_k}, \quad \lambda_k \uparrow +\infty, \quad (32.88)$$

и $K(0) = 0$, $K(t) \in C^1[0, a]$. Пусть $\lambda_m < 1$, $\lambda_{m+1} > 1$. Тогда в интеграл

$$\Omega(x) = \int_0^a K(xt) t^{-1} h(t) dt$$

подставим $h(t) = \sum_{k=0}^m a_k (\ln 1/t)^{-\lambda_k} + h_m(t)$. Аналогично тому как в п. 4.4, легко доказать, что при $t \rightarrow +0$

$$H_m(t) = \int_0^t h_m(\tau) \tau^{-1} d\tau \sim - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k (\ln^{-\lambda_k+1}(1/t)) / (-\lambda_k + 1), \quad (32.89)$$

поэтому $H_m(0) = 0$. Интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & K(xa) \left[- \sum_{k=0}^m a_k \ln^{-\lambda_k+1}(1/a) / (-\lambda_k + 1) + H_m(a) \right] + \\ & + x \int_0^a \left[\sum_{k=0}^m a_k \ln^{-\lambda_k+1}(1/t) / (-\lambda_k + 1) - H_m(t) \right] K'(xt) dt. \quad (32.90) \end{aligned}$$

Последний интеграл в (32.90) с учетом (32.89) при $x \rightarrow \infty$ разлагается согласно соответствующим теоремам из предыдущих пунктов в зависимости от свойств функции $K'(t)$. Если $K(t)$ экспоненциально убывает, то первым членом в (32.90) можно пренебречь.

Если $\lambda_m = 1$, то при $a < 1$ применяется предыдущий метод, следует только в (32.90) $\ln^{-\lambda_m+1}(1/a) / (-\lambda_m + 1)$ заменить на $\ln(\ln 1/a)$. Если $a \geq 1$, то член $a_m \ln^{-1}(1/t)$ при интегрировании по частям нельзя присоединить ни к первой, ни ко второй группе. Поэтому интеграл приходится разбить по промежуткам $[0, q]$, $[q, a]$, $q < 1$. Для первого интеграла применяется предыдущий результат, а второй разлагается в зависимости от свойств функции $K(t)$.

Можно допустить для $h(t)$ также некоторые более сложные разложения, чем (32.88).

2°. Асимптотика интеграла Меллина рассмотрена в п. 18.4. При $x \rightarrow 0$ можно использовать п. 14.3.3. Кроме того, иногда к построению его асимптотического разложения применима также формула (30.3), связывающая интеграл Меллина с интегралом обращения преобразования Меллина. Некоторые примеры, в которых используется метод перевала, приведены в [336].

Имеются случаи, когда асимптотическое разложение интеграла Меллина можно построить непосредственным почленным интегрированием. Пусть при $t \geq 0$

$$h(t) = \sum_{k=0}^n a_{m_k}(t) e^{-\lambda_k t} + \rho_n(t) e^{\lambda_{n+1} t}, \quad (32.91)$$

где $0 < \lambda_k \uparrow +\infty$, $n \in N$, $|\rho_n(t)| < M_0$ при $t \in [0, a]$, $|\rho_n(t)| < M_1 t^{m_{n+1}}$ при $t \geq a$, $a_{m_k}(t)$ — полиномы степени m_k . Тогда при $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^z h(t) dt &= \sum_{k=0}^n \int_0^{\infty} t^z a_{m_k}(t) e^{-\lambda_k t} dt + \int_0^{\infty} t^z \rho_n(t) e^{-\lambda_{n+1} t} dt = \\ &= \Gamma(z+1) \left[\sum_{k=0}^n \frac{b_{m_k}(z)}{\lambda_k^z} + R_n(z) \right], \end{aligned} \quad (32.92)$$

где $b_{m_k}(z)$ — полиномы степени m_k . Поскольку $\lambda_k \uparrow \infty$, то члены суммы в (32.92) образуют шкалу, а в силу оценки для $\rho_n(t)$ имеем

$$R_n(z) = \Gamma(z+1) O(z^{m_{n+1}} \lambda_{n+1}^{-z}) = o(\Gamma(z+1) \lambda_n^{-z} b_{m_k}(z)).$$

Функция $h(t)$ обладает представлением (32.91), если $h(t) = g(e^{\alpha t}, t)$, $\alpha > 0$, где $g(u, v)$ — рациональная функция от u и v , причем степень u в числителе меньше, чем в знаменателе. Частный случай, когда $h(t) = [\operatorname{sh} t \pm t]^{-1}$, рассмотрен в [349]. Вместо (32.91) допускаются также некоторые другие разложения для $h(t)$.

3°. В дополнение к теоремам 6.1 и 6.2 можно привести соотношение при $x \rightarrow +\infty$

$$\int_a^b L(xt) h(t) dt \sim L(x) \int_a^b h(t) dt, \quad (32.93)$$

где $L(t) \in \mathcal{L}$, $h(t)$ локально интегрируема в $[a, b]$. Соотношение (32.93) справедливо при следующих достаточных условиях [339].

1. При $a > 0$, $b < \infty$ условий нет.

2. При $a = 0$, $b < \infty$ должно существовать такое число $\varepsilon > 0$, чтобы интеграл $\int_0^b t^{-\varepsilon} |h(t)| dt$ сходиллся.

3. При $a > 0$, $b = \infty$ требуется выполнение одного из следующих условий:

- а) существует такое $\varepsilon > 0$, что $\int_a^\infty t^\varepsilon |h(t)| dt$ сходится;
- б) функция $L(t)$ монотонно убывает и интеграл $\int_a^\infty h(t) dt$ сходится;
- в) функция $L(t)$ — произведение двух монотонных функций, принадлежащих \mathcal{L} , и существует такое $\varepsilon > 0$, что интеграл $\int_a^\infty t^\varepsilon h(t) dt$ сходится.

4. При $a = 0$, $b = \infty$ можно комбинировать предыдущие условия.

Отметим еще, что теорема 6.2 обладает следующей двойственной теоремой: из $h(t) \sim t^{-\alpha} L(t)$ при $t \rightarrow \infty$, $L(t) \in \mathcal{L}$, и соответствующих дополнительных условиях относительно $K(t)$ и $h(t)$ при $x \rightarrow +0$ следует

$$\int_0^\infty K(xt) h(t) dt \sim x^{\alpha-1} L(1/x) \int_0^\infty K(t) t^{-\alpha} dt. \quad (32.94)$$

Условия указаны в работе [396], в которой приведена дополнительная библиография, касающаяся соотношения (32.94) и различных его модификаций. Доказательство (32.94) аналогично доказательству теоремы 6.2. Некоторые более сложные результаты в этом направлении получены в [390].

4°. В монографии неоднократно подчеркивалось (например, в п. 16.4.7, 2°), что для конкретно заданных интегралов асимптотическое разложение иногда удается построить с помощью удачно подобранной формулы, которая данный интеграл выражает через известную специальную функцию. Весьма общий класс функций охватывают G -функции Мейера. Для них существует много взаимных соотношений. Интеграл от G -функции тоже выражается с помощью G -функций. Часть указанных соотношений приведена в [2, 235], многие другие встречаются в новейшей журнальной литературе. Поскольку согласно п. 23.2.1 функция Мейера выражается с помощью интеграла Меллина—Барнса, то дальше асимптотическое представление можно найти известным методом, рассмотренным в § 23. В конкретных случаях к интегралу Меллина—Барнса часто можно прийти с помощью формулы Парсеваля (23.47') или (23.48). Примеры такого подхода приведены в [112].

В п. 32.3.2 уже указывался пример, когда весьма общий интеграл выражается с помощью G -функции. В работе [359]

этим методом строится асимптотическое представление при $\nu \rightarrow \infty$ для интегралов

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(at) I_{\nu}(bt) K_{\nu}(bt) t^{\rho-1} dt, \quad \int_0^{\infty} J_{\nu}(at) Y_{\nu}(at) I_{\nu}(bt) K_{\nu}(bt) t^{\sigma-1} dt,$$

Ре $\rho \in (0, 3/2)$, Ре $\sigma \in (0, 2)$. Соответствующие им интегралы типа Меллина—Барнса родственны интегралу (23.98), но асимптотическое представление в данном случае получается проще, чем в п. 23.5.3, так как можно непосредственно применить формулу Стирлинга. Аналогично с помощью интегралов типа Меллина—Барнса выражаются интегралы от разных других произведений цилиндрических функций. Общая идея высказана в [425].

32.4.2. В теореме 10.2 и формуле (10.50') встречается множитель $\exp(cza \pm i\alpha\pi)$. Сказано, что знак «+» берется при $\arg(cz) \geq \pi/2$, знак «-» при $\arg(cz) \leq -\pi/2$, а при остальных $\arg(cz)$ знак можно выбрать по желанию, так как при последних $\arg(cz)$ ряд, содержащий этот множитель, входит в любой остаток другого ряда и теоретически не имеет значения. Однако практически этот ряд иногда может понадобиться. Для конкретности берем составное разложение (10.66) при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \pi$

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) \sim \Gamma(\gamma) e^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\gamma - \alpha)_k}{\Gamma(\alpha - k) k!} z^{-k + \alpha - \gamma} + \\ + \Gamma(\gamma) e^{\pm i\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{\Gamma(\gamma - \alpha - k) k!} z^{-k - \alpha}, \quad (32.95)$$

где знак «+» берется при $\text{Im } z > 0$, знак «-» при $\text{Im } z < 0$. Методом продолжения по параметру доказывается, что формула (32.95) справедлива при всех значениях параметров, кроме $-\gamma \in \mathbb{N}$.

При $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N}$, первый ряд в (32.95) аннулируется и нетрудно установить, что второй ряд в (32.95) обрывается и дает точное значение функции ${}_1F_1$. Поэтому все же второй ряд в некоторых случаях имеет значение также при $\text{Re } z > 0$, хотя теоретически он входит в любой остаток первого ряда. Очевидно, в численных расчетах он должен повлиять также при значениях α , весьма близких к $-n$, если $|z|$ не слишком велик. Поэтому возникает вопрос о том, каким в таких случаях следует считать множитель $e^{\pm i\pi\alpha}$, если $\text{Im } z = 0$, т. е. $z = x > 0$.

Имеется возможность вместо « \pm » писать $\varepsilon = \text{sign } \text{Im } z$. Поскольку $\text{sign } 0 = 0$, то при $x > 0$ надо $e^{\pm i\pi\alpha}$ заменить на 1. Но

тогда теряется зависимость данного фактора от α . Поэтому более целесообразным считается требование, чтобы в (32.95) сохранялось соотношение

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = (1/2) \lim_{\eta \rightarrow 0} [{}_1F_1(\alpha; \gamma; x + i\eta) + {}_1F_1(\alpha; \gamma; x - i\eta)]. \quad (32.96)$$

Из него следует, что фактор $e^{\pm i\pi\alpha}$ при $z=x$ в (32.95) надо заменить на $\cos \pi\alpha$. Такая замена без особого обоснования предложена в [38] и несколько иным способом, чем в (32.96), получена также в [337].

Аналогичный вопрос возникает, когда в разложении (32.95) берем $z=-x$, $x>0$, и хотим сохранить влияние первого ряда. При $\arg z=\pi$ этот ряд содержит множитель $e^{i\pi(\alpha-\gamma)}$, а при $\arg z=-\pi$ — множитель $e^{-i\pi(\alpha-\gamma)}$. Если придерживаться требования (32.96), то при $z=-x$ к первому ряду в (32.95) следует добавить множитель $\cos \pi(\alpha-\gamma)$. Это требование согласуется с вышеустановленным выражением для (32.95) при $z>0$, если использовать формулу преобразования Куммера

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; -z) = e^{-z} {}_1F_1(\gamma-\alpha; \gamma; z), \quad (32.97)$$

которая легко следует из (10.65) и справедлива при всех z . Согласно (32.95) и (32.97) при $x \rightarrow +\infty$ получаем

$$\begin{aligned} {}_1F_1(\alpha; \gamma; -x) &\sim \Gamma(\gamma) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{\Gamma(\gamma-\alpha-k)k!} x^{-k-\alpha} + \\ &+ \Gamma(\gamma) \cos \pi(\alpha-\gamma) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_k}{\Gamma(\alpha-k)k!} x^{-k+\alpha-\gamma}. \end{aligned}$$

Аналогично вопрос исследуется для других специальных функций.

32.5. Библиографические сведения

32.5.1. Поскольку в § 32 вся библиография приведена уже в тексте, то следует указать ее лишь относительно § 30 и 31.

Первые конкретные применения интегральных преобразований к асимптотическому разложению интегралов согласно схеме (30.2') в случае преобразования Меллина встречаются в работах Меллина (см. п. 24.7.2), а в случае преобразования Лапласа — в работе Хара [363]. В литературе можно найти

различные эпизодические применения их. Общая постановка в виде (30.1) приведена Дёчем [351]. Систематические исследования о применении преобразования Лапласа проведены в случае интеграла свертки (см. библиографию к п. 22.8), а о применении преобразования Меллина — в случае формулы Парсеваля.

Формула Парсеваля (23.48) была известна уже Меллину (см. п. 24.7.2), однако он ее не применял для построения асимптотических разложений. На возможность применения ее для этого явно указано в монографии Дёча [183], в которой на основе формулы (23.48) рассмотрены частные случаи теорем 31.2 и 31.4 и в качестве примера приведена формула (32.77). В настоящее время широкое применение эта формула в виде (31.3) получила в серии работ Блейштейна, Хандельсмана и Лью. Резюме их работ, указанных в списке литературы к первым двум томам, приведено в монографии [164]. Дополнительные исследования в случае точек ветвления приведены в [343]. Материал п. 31.1.2, 31.2.1 и 31.2.2 в переработанном виде заимствован из [164]. Из этой работы с некоторыми изменениями взяты также примеры, рассмотренные в п. 31.3.3.

Несмотря на достигнутые результаты, все же возможности применения интегральных преобразований к построению асимптотических разложений интегралов пока исследованы мало. Например, применения преобразования Эфроса почти не изучены.

Суммирование интегралов методом Абеля впервые исследовано в работе Харди [364]. Основные результаты по этому вопросу изложены в [20]. Формальная схема применения ε -преобразования при $\mu(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t}$ дана Виллисом в [407]. Позднее были сделаны разные попытки обоснования этой схемы в частных случаях, которые отмечены в п. 30.2.6, а также в соответствующих местах в п. 30.2. Основные теоремы 30.1, 30.3, 30.4 и лемма 30.1 доказаны в [329], а теорема 30.5 в модифицированном виде приведена в [20].

Применение аппроксимирующего базиса $\{e^{-b_n t}\}$ для обоснования схемы Виллиса впервые в частном случае, когда $K(t) \equiv J_0(t)$, предложено Тихоновым [335]. Эта схема обобщена в п. 13.4. Упомянется она также в [162], но общая постановка об использовании аппроксимирующих базисов дана в [329]. Базис $\{J_n(t)t^{-n+k}\}$ для разложения интеграла (30.38) применен в [383].

Мало исследован вопрос, касающийся применений преобразования рядов к асимптотическому разложению интегралов. Содержание п. 30.4.2—30.4.4, 2° с некоторыми изменениями заимствовано из [333]. Дополнительная библиография относительно обобщений и модификаций формулы Эйлера—Маклорена вто-

рого рода указана в п. 24.6.3. К ней еще следует добавить работы [99, 352].

Как уже отмечено в начале п. 32.5.1, формула Парсевалья для построения асимптотических разложений интегралов до сих пор применяется лишь в случае преобразования Меллина. Можно с уверенностью сказать, что этим все возможности ее использования не исчерпаны.

Метод сопряженных операторов предложен в работе [131]. Родственный метод в случае $K(x, t) = \cos xt$ применен в [345]. Связь между интегралом от периодической функции и двойным интегралом в виде (31.58) при $f(t) = t$, $\omega = 2\pi$ впервые эвристическим путем найдена в [380]. Обоснование этой формулы дано в [406], а обобщения — в работах [346, 362]. Эти результаты и некоторые другие обобщения и применения формулы (31.56) приведены в [334]. Там же дано разложение (31.63) при $a = \omega = 1$.

32.6. Заключение

32.6.1. В данной монографии собраны основные методы и различные их модификации для построения асимптотических разложений *однократных интегралов*, зависящих от *одного параметра*. Почти повсюду параметр стремится к бесконечности или к нулю. Можно сказать, что монография в целом отражает достижения математики в настоящее время в области асимптотических разложений интегралов. К сожалению, не все работы по данной тематике были доступны автору, поэтому обзоры работ по асимптотическим разложениям вышеуказанных интегралов, а также список приведенной литературы не могут претендовать на полноту.

Из-за ограниченности объема работы и нехватки времени в монографии не помещены задачи. Они в достаточном количестве приведены во многих монографиях, например в [38, 76, 164, 319, 336]. В соответствующих местах монографии указаны некоторые нерешенные вопросы, например в п. 16.2.7, а также в п. 16.4.1, 3° об интегралах с ядрами типа Стилтеса. Часто указывается на возможность обобщения или модификации рассмотренного метода. Таким образом, в монографии читатель может найти соответствующий материал для самостоятельной исследовательской работы.

Однако материал данной монографии не исчерпывает всю теорию асимптотических разложений упомянутых интегралов. Прикладные науки ставят перед математиками все новые и новые задачи. Появляются и новые типы интегралов, исследование асимптотики которых имеет практическое значение. Кроме

того, нетрудно и теоретически придумать разные типы интегралов, которые не разлагаются известными методами. В качестве примера можно привести интеграл $\int_a^b K_1(zg_1(t)) K_2(zg_2(t)) h(t) dt$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $g_1(t) \neq g_2(t)$. Некоторые частные случаи его рассмотрены в п. 12.1.3, 12.6.3, 16.4.7 и 30.3, но подход к разложению в общем случае неизвестен. Отметим еще частный случай, когда интеграл $\int_0^1 K_1(zt) K_2(z\sqrt{1-t^2}) dt$ подстановкой $t^2 = \tau$,

$z = \sqrt{x}$, $x\tau = u$ приводится к интегралу свертки $(1/\sqrt{x}) \int_0^x f_1(u) \times \times f_2(x-u) du$, где $f_1(t) = K_1(\sqrt{t})/2\sqrt{t}$, $f_2(t) = K_2(\sqrt{t})$.

Задача усложняется также тем, что иногда на асимптотику влияет функция нагрузки. Например, при $x \rightarrow +\infty$ в интеграле $\int_0^a J_\nu(xt) e^{xt} \exp[-1/(a-t)] dt$ функцию нагрузки следует присоединить к ядру. Поскольку легко установить, что доминирующим является интеграл по сегменту $[a-\varepsilon, a]$, то для функции $J_\nu(xt)$ можно применить асимптотическое разложение, а функции $e^{\pm ixt}$ следует присоединить к ядру. Затем можно применить метод перевала с учетом критических точек $t_h = a - [(1 \pm i)x]^{-1/2}$.

32.6.2. Как было сказано выше, асимптотические разложения интегралов — постоянно развивающийся раздел математики. Рассмотренные в монографии вопросы — только часть всей теории, связанной с асимптотическими представлениями интегралов. Отметим также другие разделы асимптотики, по которым необходимы подробные монографии.

1°. В данной монографии устанавливается только порядок остатка построенного асимптотического разложения. Однако в практических приложениях этого не всегда достаточно. По словам Олвера [76], это — *теоретическая асимптотика*. Практически весьма важно знать точные оценки остатка сверху и снизу. В последнее время появилось много работ, посвященных этому вопросу. Однако он затронут лишь в монографиях [38, 76, 162]. Больше внимания ему уделено в [76].

В предисловии к первым двум томам данной монографии автор обещал этим вопросам посвятить последнюю часть третьего тома. Однако объем этого тома не позволил рассмотреть данные вопросы. Накопившийся в литературе материал по точным оценкам остатка в асимптотических рядах столь обширный, что ему следует посвятить отдельную книгу. Кроме того, этот материал несколько отличается от тематики данной монографии. Он включает исследование не конкретных методов построения асимптотических разложений интегралов, а различных

остроумных методов численной оценки интегралов, представляющих остаток, и методов, связанных с преобразованием асимптотических рядов.

2°. Хорошо разработаны методы построения асимптотических разложений для решений линейных дифференциальных и разностных уравнений. Поскольку основные специальные функции являются решениями таких уравнений, то их асимптотические разложения нередко строятся исходя из дифференциальных уравнений, так как этим путем иногда получают более общие разложения (см., например, [76]). Желательно более тесно связать методы для исследования асимптотики интегралов с методами, характерными для решений функциональных уравнений, выделить отдельные типы интегралов, для которых эти методы применимы. В данной монографии указан лишь один такой метод (см. п. 31.4).

3°. На практике нередко появляется необходимость исследовать асимптотику кратных интегралов. Имеется много работ, посвященных этой тематике, но в монографиях, например в [38, 162, 164, 336], освещаются лишь отдельные результаты. Больше всего этому вопросу уделяется внимания в книге [336], в которой примерно $\frac{1}{3}$ содержания посвящена кратным интегралам. Следует отметить также работы [391—393], в которых рассматривается асимптотика двойных интегралов с положительными ядрами. Систематической теории по данному вопросу пока не имеется. Многие из методов, рассмотренных в данной книге, можно перенести на кратные интегралы, причем нередко появляются новые подслучаи. Весьма желательна монография, посвященная асимптотике только кратных интегралов.

4°. Интеграл часто зависит от нескольких параметров, и асимптотику интеграла приходится исследовать относительно всех параметров. Исключительно мало таких случаев, когда это можно сделать без какого-либо соотношения между ними. Обычно асимптотика исследуется при некотором соотношении между параметрами. Тогда фактически она рассматривается только относительно одного параметра. Несколько таких случаев рассмотрено в п. 14.5.2, 19.5.3 и 21.3 данной монографии, но в литературе подобных примеров довольно много. При различных соотношениях получаются разные разложения, и переход от одного разложения к другому, а также точные границы применимости соотношений пока исследованы недостаточно.

5°. В случае двух параметров имеется другое направление, бурно развивающееся в последнее время. Оно заключается в исследовании асимптотики интеграла относительно одного параметра при фиксированных значениях второго параметра. Часто при различных значениях второго параметра получаются

разные разложения, но практически требуется разложение, равномерное относительно этого параметра, принадлежащего данному множеству чисел. В этой монографии равномерные разложения эпизодически затрагиваются лишь в п. 16.2.7, 4°Б и 32.2.1. Основные идеи построения равномерных асимптотических разложений хорошо изложены в [353], а примерная классификация возможных неравномерностей указана в [328]. Некоторые типы равномерных разложений рассмотрены в монографиях [38, 76, 162, 164, 336]. Весьма желательно посвятить этим вопросам отдельную монографию.

Для построения равномерных асимптотических разложений интегралов в несколько модифицированной форме применяются обычные методы, но разложения строятся так, чтобы либо члены рядов, либо множители, стоящие перед рядами, содержали простейшие из возможных функций, обладающие при различных значениях параметра разными асимптотическими разложениями такого же типа, что и данный интеграл. Эти множители называются *эталонными функциями*. Равномерность разложения проявляется именно во включении их в разложение. Благодаря этим функциям при конкретных значениях второго параметра из построенного равномерного разложения получаются соответствующие неравномерные разложения. Кроме того, построение равномерных асимптотических разложений от построения неравномерных разложений отличается тем, что равномерность относительного второго параметра требуется доказать также для оценки остатка. Эта задача нередко является более сложной, чем в случае неравномерных разложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К главе VII

1. *Базилевич И. Е.* Об одном критерии однолиственности регулярных функций и дисперсии их коэффициентов. — *Мат. сб.*, 1967, т. 74, № 1, с. 133—146.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Пер. с англ. Т. 1—3. М., Наука, 1965—1967.
Т. 1, 1965. 294 с.
Т. 2, 1966. 295 с.
Т. 3, 1967. 299 с.
3. *Белов М. А., Цирулис Т. Т.* Асимптотические методы в приближенном обращении интегрального преобразования Лапласа. — В кн.: *Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки*. Рига, 1976, т. 252, с. 77—97.
4. *Брэйи Н. Г. де.* Асимптотические методы в анализе. Пер. с англ. М., ИЛ, 1961. 247 с.
5. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Пер. с англ. М., Мир, 1968. 464 с.
6. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Пер. с англ. М., ИЛ, 1949. 798 с.
7. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962. 1100 с.
8. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. Изд. 1-е. М., Гостехиздат, 1957. 159 с. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1962. 200 с.
9. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск, Наука, 1977. 285 с.
10. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М., Наука, 1976. 223 с.
11. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Пер. с англ. Т. 1. М., Гостехиздат, 1951. 476 с.
12. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958. 678 с.
13. *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М., Наука, 1971. 416 с.
14. *Риекстыньши Э. Я.* Асимптотические разложения для вещественных корней некоторых трансцендентных уравнений. — В кн.: *Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки*. Рига, 1959, т. 28, с. 67—86.
15. *Риекстыньши Э. Я.* О некоторых применениях рядов Меллина. — В кн.: *Латв. мат. ежегодник*. Рига, 1977, вып. 21, с. 211—224.
16. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1962. 500 с.

17. *Субханкулов М. А.* Тауберовы теоремы с остатком. М., Наука, 1976. 399 с.
18. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Пер. с англ. Т. 2. М., Физматгиз, 1963. 515 с.
19. *Фадеева В. Н., Гавурин М. К.* Таблицы функций Бесселя целых номеров. М., Гостехиздат, 1950. 440 с.
20. *Харди Г. Х.* Расходящиеся ряды. Пер. с англ. М., ИЛ, 1951. 504 с.
21. *Цирулис Т. Т.* Асимптотическое представление коэффициентов Фурье разложения функций в ряды по полиномам Лежандра. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1976, вып. 19, с. 47—62.
22. *Цирулис Т. Т.* Асимптотические представления коэффициентов Фурье в ряды по классическим ортогональным полиномам. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1979, вып. 23, с. 37—52.
23. *Шабунин М. И.* Асимптотическая оценка коэффициентов разложения по некоторым системам аналитических функций. — Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 2, с. 446—456.
24. *Шабунин М. И.* Асимптотическая оценка коэффициентов разложения по некоторой системе аналитических функций и ее применение к интерполяционным многочленам в обобщенной проблеме моментов. — ДАН, 1972, т. 202, № 1—3, с. 48—50.
25. *Baratella P., Laforgia A.* Un paradosso sugli sviluppi asintotici dei polinomi ultrasferici. — Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis. mat. natur., 1975, vol. 109, N 3/4, p. 423—426.
26. *Barrett W.* Convergence properties of Gaussian quadrature formulae. — Comput. J., 1961, vol. 3, N 4, p. 272—277.
27. *Bell E. T.* Exponential polynomials. — Ann. Math., 1934, vol. 35, p. 258—277.
28. *Bender E. A.* Asymptotic methods in enumeration. — SIAM Rev., 1974, vol. 16, N 4, p. 485—515.
29. *Birkhoff G. D.* Formal theory of irregular linear difference equations. — Acta math., 1930, vol. 54, p. 205—254.
30. *Bojanić R., Lee Y. H.* A survey on recent results and problems in the study of convolution products of sequences. — In: Approximation theory. New York, Acad. Press, 1973, p. 263—268.
31. *Branders M.* The asymptotic behaviour of solutions of difference equations. — Bull. Soc. math. Belg., 1974, vol. 26, N 3, p. 255—260.
32. *Brigham N. A.* A general asymptotic formula for partition functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1950, vol. 1, p. 182—191.
33. *Bruijn N. G. de.* On a recurrence relation. Report N 41, Techn. Univ. Eindhoven, Netherlands, 1974, p. 1—3.
34. *Cauchy A.* Mémoire sur divers points d'analyse. — Mém. Acad. sci., 1829, vol. 8, p. 101—126.
35. *Cauchy A.* Sur la résolution des équations et sur le développement de leurs racines en séries convergentes. — C. r. Acad. sci. Paris, 1854, vol. 38, p. 1104—1107.
36. *Chawla M. M., Jain M. K.* Asymptotic error estimates for the Gauss quadrature formula. — Math. Comp., 1968, vol. 22, N 101, p. 91—97.
37. *Darboux G.* Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grande nombres, et sur une classe étendue de développements en série. — J. math. pures appl., 1878, vol. 4, p. 5—56, 377—416.
38. *Dingle R. B.* Asymptotic expansions: their derivation and interpretation. London—New York, Acad. Press, 1973. 521 p.

39. *Donaldson J. D., Elliott D.* A unified approach to quadrature rules with asymptotic estimates of their remainders. — *SIAM J. Numer. Anal.*, 1972, vol. 9, p. 573—602.
40. *Duren P. L.* Asymptotic behaviour of coefficients of univalent functions. — *Lect. Notes Math.*, 1976, N 505, p. 17—23.
41. *Eggleston M. G.* The coefficient theory of functions with singularities of the form $[1/(c-z)]^{\sigma}[\ln(1/(c-z))]^k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta(t)}{(c-z)^{i\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. — *Proc. London Math. Soc.*, 1951, vol. 53, p. 476—492.
42. *Elliot D.* The evaluation and estimation of the coefficients in the Chebyshev series expansions of a function. — *Math. Comp.*, 1964, vol. 18, p. 274—284.
43. *Elliot D.* Uniform asymptotic expansions of the Jacobi polynomials and an associated function. — *Math. Comp.*, 1971, vol. 25, N 114, p. 309—315.
44. *Elliot D., Szekeres G.* Some estimates of the coefficients in the Chebyshev series expansion of a function. — *Math. Comp.*, 1965, vol. 19, N 89, p. 25—32.
45. *Elliot D., Tuan P. D.* Asymptotic estimates of Fourier coefficients. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1974, vol. 5, N 1, p. 1—10.
46. *Erdelyi A., Wyman M.* The asymptotic evaluation of certain integrals. — *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1963, vol. 14, p. 217—260.
47. *Erdős P., Feller W., Pollard H.* A property of power series with positive coefficients. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1949, vol. 55, p. 201—204.
48. *Faber G.* Über das Verhalten analytischer Funktionen an Verzweigungstellen. — *Münch. Ber.*, 1917, S. 263—284.
49. *Faber G.* Abschätzung von Funktionen großer Zahlen. — *Münch. Ber.*, 1922, S. 285—304.
50. *Fejer L.* Sur une méthode de M. Darboux. — *C. r. Acad. sci. Paris*, 1908, vol. 147, p. 1040—1042.
51. *Fejer L.* Asymptotikus értékek meghatározásáról. — *Matematikai és természettudományi értesítő*, 1909, köt. 27, old. 1—33.
52. *Fields J. L.* A uniform treatment of Darboux's method. — *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1968, vol. 27, p. 289—300.
53. *Garsia A., Lamperti J.* A discrete renewal theorem with infinite mean. — *Comm. math. Helv.*, 1963, vol. 37, p. 221—234.
54. *Gerdes W.* Ein elementarer Beweis für die Integraldarstellung der Laplaceschen Zahlen. — *Elem. Math.*, 1975, Bd. 30, N 4, S. 84—86.
55. *Grosswald E.* Generalization of a formula of Hayman and its application to the study of Riemann's zeta function. — *Illinois J. Math.*, 1966, vol. 10, p. 9—23.
56. *Hamy M.* Sur l'approximation de fonction de grande nombres. — *J. math. pures appl.*, 1908, vol. 4, p. 203—281.
57. *Hardy G. H.* The maximum modulus of an integral function. — *Quart. J. Math.*, 1909, vol. 41, p. 1—9.
58. *Hardy G. H.* On the asymptotic value of a definite integral and the coefficient in a power series. — *Mess. Math.*, 1917, vol. 46, p. 70—73.
59. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. — *Proc. London Math. Soc.*, 1914, vol. 13, p. 174—191.

60. *Harris B., Schoenfeld L.* The number of idempotent elements in symmetric semigroups. — *J. Comb. Theory*, 1967, vol. 3, p. 122—135.
61. *Harris B., Schoenfeld L.* Asymptotic expansions for the coefficients of analytic functions. — *Illinois J. Math.*, 1968, vol. 12, p. 264—277.
62. *Häusler L.* Über das asymptotische Verhalten der Taylorkoeffizienten einer gewissen Funktionenklasse. — *Math. Z.*, 1930, Bd. 32, S. 115—146.
63. *Hayman W. K.* A generalization of Stirling's formulae. — *J. reine angew. Math.*, 1956, Bd. 196, S. 67—95.
64. *Jungen R.* Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébro-logarithmiques sur leur cercle de convergence. — *Comm. math. Helv.*, 1931, vol. 3, p. 266—306.
65. *Macintyre A. J., Wilson R.* Operational methods and the coefficients of certain power series. — *Math. Ann.*, 1954, Bd. 127, S. 243—250.
66. *McMahon J.* On the roots of the Bessel and certain relative functions. — *Ann. Math.*, 1894/95, vol. 9, p. 23—30.
67. *Meinardus G.* Asymptotische Aussagen über Partitionen. — *Math. Z.*, 1954, Bd. 59, S. 388—398.
68. *Meisel E.* Einige Entwicklungen, die Bessel'schen I-Funktionen betreffen. — *Astron. Nachr.*, 1891, Bd. 127, S. 357—362.
69. *Meisel E.* Beitrag zur Theorie der allgemeinen Bessel'schen Funktion. — *Astron. Nachr.*, 1891, Bd. 128, S. 145—154.
70. *Moser L., Wyman M.* An asymptotic formula for the Bell numbers. — *Trans. Roy. Soc. Canada*, 1955, vol. 49(3), p. 49—54.
71. *Moser L., Wyman M.* Asymptotic expansions. — *Canad. J. Math.*, 1956, vol. 8, p. 225—233; 1957, vol. 9, p. 194—209.
72. *Narumi S.* On a power series having only a finite number of algebraic-logarithmic singularities on its circle of convergence. — *Tohoku Math. J.*, 1929, vol. 30, p. 185—201.
73. *Nörlund N. E.* Fractions continues et différences réciproques. — *Acta math.*, 1911, vol. 34, p. 1—108.
74. *Nörlund N. E.* *Differenzenrechnung.* Berlin, Springer, 1924. 551 S.
75. *Olver F. W. J.* A paradox in asymptotics. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1970, vol. 1, N 4, p. 533—534.
76. *Olver F. W. J.* *Asymptotics and special functions.* New York, Acad. Press, 1974. 572 p.
77. *Perron O.* Über das Verhalten von $f^{(v)}(x)$ für $\lim v = \infty$, wenn $f(x)$ einer lineären homogenen Differentialgleichung genügt. — *Münch. Ber.*, 1913, S. 355—382.
78. *Perron O.* Über das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe. — *Arch. Math., Phys.*, 1914, Bd. 22, S. 329—340.
79. *Piessens R., Criegers R.* Estimation asymptotique des coefficients du développement en séries de polynômes de Chebyshev d'une fonction ayant certaines singularités. — *C. r. Acad. sci. Paris. Sér. A*, 1974, vol. 278, p. 405—407.
80. *Riekstiņš E.* *Matemātiskās fizikas vienādojumi.* Rīga, LVI, 1964. 528 lpp.
81. *Roth K. F., Szekeres G.* Some asymptotic formulae in the theory of partitions. — *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 1954, vol. 5, p. 241—259.
82. *Royal Society mathematical tables.* Vol. 7. Bessel functions. Part 3. Zeros and associated values. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1960. 79 p.

83. *Rusev P. K.* Hermite functions of second kind. — *Serdica, Bulgar. math. publ.*, 1976, vol. 2, N 2, p. 177—190.
84. *Szekeres G.* The asymptotic behaviour of the coefficients of certain power series. — *Acta sci. math.*, 1950, vol. 12, p. 187—198.
85. *Szekeres G.* Some asymptotic formulae in the theory of partitions, 2. — *Quart. J. Math.*, 1953, vol. 4, p. 96—111.
86. *Watson G. N.* Harmonic functions associated with the parabolic cylinder. — *Proc. London Math. Soc.*, 1910, vol. 8, p. 393—421.
87. *Watson G. N.* Theorems stated by Ramanujan (5): approximation connected with e^x . — *Proc. London Math. Soc.*, 1929, vol. 29, p. 293—308.
88. *Wimp J.* Polynomial approximations to integral transforms. — *Math. Comp.*, 1961, vol. 15, N 74, p. 174—178.
89. *Wimp J.* The asymptotic representation of a class of G-functions for large parameter. — *Math. Comp.*, 1967, vol. 21, N 100, p. 639—646.
90. *Wong R., Wyman M.* The method of Darboux. — *J. Approx. Theory*, 1974, vol. 10, N 2, p. 159—171.
91. *Wright E. M.* The coefficients of a certain power series. — *J. London Math. Soc.*, 1932, vol. 7, N 28, p. 256—262.
92. *Wright E. M.* Asymptotic partition formulae. (2). Weighted partitions. — *Proc. London Math. Soc.*, 1934, vol. 36, p. 117—141.
93. *Wright E. M.* Asymptotic partition formulae. 3. Partitions into k-th powers. — *Acta math.*, 1934, vol. 63, p. 143—191.
94. *Wright E. M.* The asymptotic expansion of integral functions and of the coefficients in their Taylor series. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1948, vol. 64, N 3, p. 409—438.
95. *Wright E. M.* On the coefficients of power series having exponential singularities. 2. — *J. London Math. Soc.*, 1949, vol. 24, p. 304—309.
96. *Wright E. M.* Asymptotic relations between enumerative functions in graph theory. — *Proc. London Math. Soc.*, 1970, vol. 20, p. 558—572.
97. *Wyman M.* The asymptotic behaviour of the Laurent coefficients. — *Canad. J. Math.*, 1959, vol. 11, p. 534—555.

К главе VIII

98. *Альанчич С.* О једном поступку за добијање асимптотских развитака. — *Билтен друштв. матем. физ. Нар. Реп. Македонија*, 1954, т. 5, с. 22—29.
99. *Белов М. А., Цирулис Т. Т.* Уточнение квадратурных формул методом асимптотических разложений. — В кн.: *Латв. мат. ежегодник*, Рига, 1977, вып. 21, с. 171—186.
100. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. Пер. с нем. М., Наука, 1967. 240 с.
101. *Вайслейб Ю. В.* О вычислении сумм некоторых рядов, содержащих по-лигамма-функции. — *Изв. высш. учеб. зав. Математика*, 1975, № 12, с. 16—19.
102. *Валирон Ж.* Аналитические функции. Пер. с франц. М., Гостехиздат, 1957. 235 с.
103. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Пер. с нем. М., Физматгиз, 1960. 319 с.
104. *Вострецов Б. А.* О существовании граничных значений и об интегральном представлении функций, аналитических в единичном круге. — *ДАН*, 1949, т. 65, № 1, с. 7—8.

105. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., Наука, 1965. 423 с.
106. *Ковалевский М. А.* Асимптотическое поведение некоторых целых функций, определенных коэффициентами разложения их в ряд Маклорена. — Вестн. Ленинград. ун-та, 1976, № 1, с. 11—15.
107. *Крикунов Ю. М.* Об одном обобщении гипергеометрического интеграла. — В кн.: Тр. семинара по крайевым задачам. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1973, вып. 10, с. 90—94.
108. *Лапиньш Я. К.* Асимптотические разложения гипергеометрических функций для больших значений аргумента. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1975, вып. 16, с. 62—83.
109. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1963. 358 с.
110. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956. 632 с.
111. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. Пер. с англ. М., ИЛ, 1955. 268 с.
112. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск, Наука и техника, 1978. 312 с.
113. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 2. М., Наука, 1968. 624 с.
114. *Пак И. Н.* Асимптотические формулы для производных от сумм специальных тригонометрических рядов. — В кн.: Асимптотические методы в теории систем. Иркутск, 1976, вып. 9, с. 98—117.
115. *Пак И. Н.* О рядах Неймана. Ленинград. электротехн. ин-т связи им. М. А. Бонч-Бруевича. Л., 1976. 27 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, 1976, № 1646-76 Деп.
116. *Плашевский А. Ю.* Об одном разложении функции $\Phi(z, s, v)$. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1977, № 5, с. 81—83.
117. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Пер. с нем. Т. 1, 2. М., Гостехиздат, 1956.
Т. 1. 396 с.
Т. 2. 432 с.
118. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М., Гостехиздат, 1950. 336 с.
119. *Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н.* Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления. Минск, Изд-во БГУ, 1976. 67 с.
120. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. — В кн.: Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки, 1964, т. 58, с. 49—71.
121. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов, II. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1966, вып. 1, с. 37—70.
122. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов, III. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1966, вып. 2, с. 265—281.
123. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотические разложения некоторых целых функций и интеграла Фурье. — В кн.: Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки. Рига, 1968, т. 91, с. 47—74.
124. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотические оценки некоторых интегралов, зависящих от большого параметра. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1968, вып. 3, с. 291—312.

125. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотические разложения некоторых интегралов и сумм степенных рядов. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1971, вып. 9, с. 203—220.
126. *Риекстиня В. Ж.* Применение рядов Тейлора для асимптотической оценки некоторых интегралов. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1972, вып. 11, с. 165—178.
127. *Риекстиня В. Ж.* Применение сумм степенных рядов для асимптотического разложения одного класса специальных функций. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1973, вып. 12, с. 141—152.
128. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотические разложения некоторого класса целых функций. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1975, вып. 16, с. 135—153.
129. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотические разложения одного класса специальных функций. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1975, вып. 16, с. 154—163.
130. *Риекстиня В. Ж.* Асимптотическое разложение обобщенной гипергеометрической функции. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1976, вып. 17, с. 50—64.
131. *Риекстыньш Э. Я.* Об одном методе для асимптотического разложения интегралов, зависящих от большого параметра. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1966, вып. 2, с. 227—240.
132. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения одного класса целых функций, определяемые логарифмической композицией Адамара. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1978, вып. 22, с. 155—166.
133. *Розенгауз М. М.* О второй теореме Абеля. — В кн.: Науч. тр. Ташкентского ун-та. Ташкент, 1974, вып. 460, с. 108—109.
134. *Салехов Г. С.* Приложение преобразования Лапласа к суммированию рядов, разложенных по специальным функциям. — В кн.: Учен. зап. Казан. гос. пед. ин-та. Казань, 1955, вып. 10, с. 3—8.
135. *Сачков В. Н.* Случайные разбиения множеств с помеченными подмножествами. — *Мат. сб.*, 1973, т. 92, № 3, с. 491—502.
136. *Тверитин А. Н.* Асимптотическое представление функций-сумм для одного класса тригонометрических рядов. — В кн.: *Вопр. мат. физики и теории функций.* Киев, Наукова думка, 1964, вып. 2, с. 118—133.
137. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. Пер. с англ. М., Гостехиздат, 1948. 479 с.
138. *Титчмарш Е.* Теория функций. Пер. с англ. М., Гостехиздат, 1951. 506 с.
139. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1—3. М., Физматгиз, 1966.
Т. 1. 607 с.
Т. 2. 800 с.
Т. 3. 656 с.
140. *Щучинская Е. Ф.* Об исключительных значениях в теореме Вимана. Ростов. ун-т. Ростов-на-Дону, 1976. 26 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, 1977, № 650-77 Деп.
141. *Эфрос А. М., Данилевский А. М.* Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков, Гостехиздат Украины, 1937. 384 с.
142. *Юров П. Г.* Асимптотические оценки целых функций, заданных каноническими произведениями. — *Мат. заметки*, 1971, т. 10, № 6, с. 641—648.
143. *Янсон Я. В.* О некоторых преобразованиях асимптотических рядов. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1976, вып. 19, с. 71—78.

144. *Abel N. H.* Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$ — *J. reine angew. Math.*, 1826, Bd. 1, S. 311—339.
145. *Abel N. H.* Oeuvres complètes. T. 2. Christiania (Oslo), Grøndahl, 1881. 341 p.
146. *Abramovitz M., Stegun I. A.* Handbook of mathematical functions. Washington, Nat. Bur. Stand., 1972. 1046 p.
147. *Agmon S.* On the singularities of Taylor series with reciprocal coefficients. — *Pacif. J. Math.*, 1952, vol. 2, p. 431—453.
148. *Ahlfors L.* Über die asymptotische Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. — *Acta Acad. aboensis. Math. et phys.*, 1932, t. 6, N 9, 8 p.
149. *Alam M. A.* A note on the asymptotic behaviour of a power series near its circle of convergence. — *Proc. Jap. Acad.*, 1963, vol. 39, p. 736—740.
150. *Aljančič S., Bojanić R., Tomić M.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones. — *Publ. Acad. sci. Serbe Inst. math.*, 1956, t. 10, p. 101—120.
151. *Appell P.* Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable. — *C. r. Acad. sci. Paris*, 1878, t. 87, p. 689—692.
152. *Appell P.* Sur les séries divergentes à termes positifs. — *Arch. Math. Phys.*, 1880, Bd. 64, S. 387—392.
153. *Barnes E. W.* A memoir of integral functions. — *Philos. Trans. London Math. Soc.*, 1902, vol. 199A, p. 411—500.
154. *Barnes E. W.* The asymptotic expansion of integral functions of finite non-zero order. — *Proc. London Math. Soc.*, 1905, vol. 3, p. 273—295.
155. *Barnes E. W.* On certain functions defined by Taylor's series of finite radius of convergence. — *Proc. London Math. Soc.*, 1906, vol. 4, p. 284—316.
156. *Barnes E. W.* On the asymptotic expansion of the integral functions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \Gamma(1+an)}{\Gamma(1+n)}$ and $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Gamma(1+n\theta)}{\Gamma(1+n+n\theta)}$. — *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1906, vol. 20, p. 215—232.
157. *Barnes E. W.* The asymptotic expansions of integral functions defined by Taylor's series. — *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1906, vol. 206, p. 249—297.
158. *Barnes E. W.* The asymptotic expansion of the function $G(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)(n+\theta)}$ and the singularities of the function $g(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+\theta}$. — *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1906, vol. 37, p. 289—313.
159. *Barnes E. W.* The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. — *Proc. London Math. Soc.*, 1907, vol. 5, p. 59—116.
160. *Berg L.* Über Potenzreihensummen beschränkter Funktionen. — *Math. Nachr.*, 1954, Bd. 11, N 4/5, S 213—218.

161. *Berg L.* Asymptotische Darstellungen für Integrale und Reihen mit Anwendungen. — *Math. Nachr.*, 1958, Bd. 17, N 1/2, S. 101—135.
162. *Berg L.* Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin, DVW, 1968. 324 S.
163. *Berndt B. C.* Periodic Bernulli numbers, summation formulas and applications. — In: *Theory and application of special functions*. New York, Acad. Press, 1975, p. 143—189.
164. *Bleistein N., Handelsman R. A.* Asymptotic expansions of integrals. New York, Holt—Rinehart—Winston, 1975.
165. *Blumenthal O.* Sur le mode de croissance des fonctions entières. — *Bull. Soc. math. France*, 1907, t. 35, p. 213—232.
166. *Boersma J.* On a function, which is a special case of Meijer's *G*-function. — *Comp. math.*, 1963, vol. 15, p. 34—63.
167. *Borel E.* Fondaments de la théorie des séries divergentes sommables. — *J. math. pures appl.*, 1896, t. 2(5), p. 103—122.
168. *Borel E.* Leçons sur les séries à termes positifs. Paris, Gauthier—Villars, 1902. 93 p.
169. *Borel E.* Leçons sur les fonctions entières. Paris, Gauthier—Villars, 1921. 162 p.
170. *Braaksma B. L. J.* Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes-integrals. — *Comp. math.*, 1963, vol. 15, p. 239—343.
171. *Bromwich T. J.* An introduction to the theory of infinite series. London, Macmillan, 1926. 535 p.
172. *Cesaro E.* Sulla determinazione assintotica delle serie di potenze. — *Napoli rend.*, 1893, vol. 7, p. 187—195.
173. *Cesaro E.* Sur une proposition fondamentale du calcul asymptotique. — *Mathesis*, 1894, vol. 4, p. 57—62.
174. *Chakravarti P. C.* Integrals and sums. London, Athlon Press, 1970. 89 p.
175. *Corput J. G. van der.* On the coefficients in certain asymptotic factorial expansions. — *Proc. Koninkl. Nederl. akad. wet. Ser. A*, 1957, vol. 60, N 4, p. 337—351.
176. *Corput J. G. van der.* The neutralized sum formula of Euler. — *J. Anal. Math.*, 1961/62, vol. 9, p. 205—345.
177. *Corput J. G. van der.* On a generalization of the Lambert series. — *Ann. mat. pura appl.*, 1962, vol. 58, p. 125—141.
178. *Denjoy A.* Sur les fonctions entières de genre fini. — *C. r. Acad. sci. Paris*, 1907, t. 145, p. 106—108.
179. *Denjoy A.* Sur les produits canoniques d'ordre infini. — *J. math. pures appl.*, 1910, t. 6, p. 1—136.
180. *Dienes P.* Sur la sommabilité de la série de Taylor. — *C. r. Acad. sci. Paris*, 1911, t. 153, p. 802—805.
181. *Dienes P.* The Taylor series. Oxford, Clarendon Press, 1931. 552 p.
182. *Doetsch G.* Theorie und Anwendung der Laplace Transformation. Berlin, Springer, 1937. 436 S.
183. *Doetsch G.* Handbuch der Laplace Transformation. Bd. 1, 2. Basel, Birkhäuser, 1950—1955. 581, 436 S.
184. *Faber G.* Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylor'schen Reihen. — *Math. Ann.*, 1903, Bd. 57, S. 369—388.
185. *Faber G.* Über Potenzreihen mit unendlich vielen verschiedenen Koeffizienten. — *Münch. Ber.*, 1906, S. 581—583.

186. *Fabry E.* Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux. — Ann. sci. École norm. supér., 1896, t. 13 (3), p. 107—114.
187. *Fatou P.* Série trigonométrique et série de Taylor. — Acta math., 1906, t. 30, p. 335—400.
188. *Fettis H. E.* More on the calculation of the integral $I_n(b) = (2/\pi) \int_0^\infty (\sin x/x)^n \cos bxdx$. — Math. Comp., 1967, vol. 21, N 100, p. 727—730.
189. *Fields J. L.* Confluent expansions. — Math. Comp., 1967, vol. 21, N 98, p. 189—197.
190. *Fields J. L.* The asymptotic expansion of the Meijer G -function. — Math. Comp., 1972, vol. 26, N 119, p. 757—765.
191. *Fields J. L.* Uniform asymptotic expansions of certain classes of Meijer G -functions for a large parameter. — SIAM J. Math. Anal., 1973, vol. 4, N 3, p. 482—507.
192. *Ford W. B.* Sur la fonction définie par une série de Maclaurin. — J. math. pures appl., 1903, t. 9, p. 223—232.
193. *Ford W. B.* A theorem on the analytic extension of power series. — Bull. Amer. Math. Soc., 1910, vol. 16, p. 507—510.
194. *Ford W. B.* On the behaviour of integral functions in distant portions of the plane. — Bull. Amer. Math. Soc., 1928, vol. 34, p. 91—106.
195. *Ford W. B.* Studies on divergent series. The asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series. New York, Chelsea Publ. Co., 1960. 342 p.
196. *Fox C.* The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. — Proc. London Math. Soc., 1928, vol. 27(2), p. 389—400.
197. *Frobenius G.* Über die Leibnitzsche Reihe. — J. reine angew. Math., 1880, Bd. 89, S. 262—264.
198. *Fry C. G., Hughes H. K.* Asymptotic developments of certain integral functions. — Duke Math. J., 1942, vol. 9, N 4, p. 791—802.
199. *Gajić L., Stanković B.* Some properties of Wright's function. — Publ. Inst. mathématique. Beograd, 1976, t. 20(34), p. 91—98.
200. *Gonnet G. H.* Notes on the derivation of asymptotic expansions from summations. — Inform. Process. Letters, 1978, vol. 7, N 4, p. 165—169.
201. *Hadamard J.* Essai sur l'étude des fonctions données par leurs développements Taylor. — J. math. pures appl., 1892, t. 8 (4), p. 101—186.
202. *Hadamard J.* Sur la croissance des fonctions entières. — Bull. Soc. math. France, 1896, t. 24, p. 185—186.
203. *Hadamard J.* Théorème sur les séries entières. — Acta math., 1898, t. 22, p. 55—64.
204. *Hardy G. H.* On the function $P_\rho(x)$. — Quart. J. Pure Appl. Math., 1905, vol. 37, p. 146—172.
205. *Hardy G. H.* On the zeroes of certain classes of integral Taylor series, 1, 2. — Proc. London Math. Soc., 1905, vol. 2, p. 332—339, 401—431.
206. *Hardy G. H.* A method for determining the behaviour of certain classes of power series near a singular point on the circle of convergence. — Proc. London Math. Soc., 1905, vol. 3, p. 381—389.

207. *Hardy G. H.* On a class of analytic functions. — Proc. London Math. Soc., 1905, vol. 3, p. 441—460.
208. *Hardy G. H.* On certain oscillating series. — Quart. J. Pure Appl. Math., 1906, vol. 38, p. 269—288.
209. *Hardy G. H.* Some theorems concerning infinite series. — Math. Ann., 1906, Bd. 64, S. 77—94.
210. *Hardy G. H.* Some theorems connected with Abel's theorem on the continuity of power series. — Proc. London Math. Soc., 1906, vol. 4, p. 247—265.
211. *Hardy G. H.* The zeros of the integral function $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}/(n^2)!$ and some similar functions. — Mess. math., 1910, vol. 39, p. 88—96.
212. *Hardy G. H., Ramanujan S.* Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. — Proc. London Math. Soc., 1917, vol. 16(2), p. 112—132.
213. *Hayman W. K.* The minimum modulus of large integral functions. — Proc. London Math. Soc., 1952, vol. 2, p. 469—512.
- 213a. *Hayman W. K.* On integral functions with distinct asymptotic values. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, vol. 66, p. 301—315.
214. *Hughes H. K.* On a theorem of Newsom. — Bull. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 49, p. 288—292.
215. *Hughes H. K.* On asymptotic expansions of entire functions defined by Maclaurin series. — Bull. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 50, p. 425—430.
216. *Hughes H. K.* The asymptotic developments of a class of entire functions. — Bull. Amer. Math. Soc., 1945, vol. 51, p. 456—461.
217. *Hurwitz A.* Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Funktionen. — Ztschr. Math., Phys., 1882, Bd. 27, S. 86—102.
218. *Hurwitz A., Polya G.* Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes. — Acta math., 1916, t. 40, p. 179—183.
219. *Jonquière A.* Note sur la série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^n$. — Bull. Soc. math. France, 1889, t. 17, p. 142—152.
220. *Joshi C. M., McDonald J. B.* Some finite summation theorems and an asymptotic expansion for the generalized hypergeometric series. — J. Math. Anal. Appl., 1972, vol. 40, N 2, p. 278—285.
221. *Karamata J.* Sur certains développements asymptotiques avec application aux polynômes de Legendre. — Publ. Acad. sci. Serbe. Inst. math., 1952, t. 4, p. 60—88.
222. *Kohno M.* A two-point connection problem involving logarithmic polynomials. — Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A, 1966, vol. 2, p. 269—305.
223. *Kubota T.* On an analogy to the Poisson summation formula for generalized Fourier transformation. — J. reine angew. Math., 1974, Bd. 268/269, S. 180—189.
224. *Laguerre E.* Sur quelques équations transcendentes. — C. r. Acad. sci. Paris, 1882, t. 94, p. 160—163.
225. *Lasker E.* Über Reihen auf der Konvergenzgrenze. — Philos. Trans. London Math. Soc., 1901, vol. 196, p. 431—477.
226. *Leau L.* Recherches sur les singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. — J. Soc. math. France, 1899, t. 5(5), p. 365—426.

227. *Lerch M.* Grundzüge der Theorie der Malmsten'schen Reihen. — Rozpravy, 1892, sv. 1, N 27.
228. *Lerch M.* Weitere Studien auf dem Gebiete der Malmsten'schen Reihen. — Rozpravy, 1894, sv. 3, N 28, s. 1—63.
229. *Lewin L.* Dilogarithms and associated functions. London, Macdonald, 1958. 353 p.
230. *Lindelöf E.* Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. — Acta Soc. sci. fenn., 1903, t. 31, N 1, p. 1—79.
231. *Lindelöf E.* Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars, 1905. 141 p.
232. *Lindelöf E.* Sur un principe générale de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme. — Acta Acad. sci. fenn. (Helsingfors), 1915, t. 46, N 4, p. 1—35.
233. *Littlewood J. E.* On the asymptotic approximation to integral functions of zero order. — Proc. London Math. Soc., 1907, vol. 5(2), p. 361—410.
234. *Littlewood J. E.* The converse of Abel's theorem on power series. — Proc. London Math. Soc., 1910, vol. 9, p. 434—448.
235. *Luke Y. L.* The special functions and their approximations. New York, Acad. Press, 1969, vol. 1. 349 p.
236. *Lusin N.* Über eine Potenzreihe. — Rend. Circ. mat. Palermo, 1911, vol. 32, p. 386—390.
237. *Lyness J. N., Ninham B. W.* Numerical quadrature asymptotic expansions. — Math. Comp., 1967, vol. 21, N 98, p. 162—178.
238. *MacFarlane G. G.* The application of Mellin transforms to the summation of slowly convergent series. — Philos. Mag., 1949, vol. 40, p. 188—197.
239. *Maillet E.* Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants. — J. math. pures appl., 1904, t. 10(5), p. 275—362.
240. *Mainra V. P., Singh B.* On asymptotic expansion of $\tilde{\omega}_{\mu, \nu}(x)$. — J. Birla Inst. Techn. Sci., 1970, vol. 2, p. 64—70.
241. *Malmquist J.* Etude d'une fonction entière. — Acta math., 1905, t. 29, p. 203—215.
242. *Mandelbrojt S.* Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes. — Ann. sci. École norm. supér., 1923, t. 40(3), p. 413—462.
243. *McBride E. B.* Obtaining generating functions. Berlin, Springer, 1971. 100 p.
244. *Medhurst R. G., Roberts J. H.* Evaluation of the integral $I_n(b) = (2/\pi) \int_0^{\infty} (\sin x/x)^n \cos bxdx$. — Math. Comp., 1965, vol. 19, N 89, p. 113—117.
245. *Mellin H.* Eine Formel für den Logarithmus transzendenter Funktionen endlichen Geschlechts. — Acta Soc. sci. fenn., 1900, t. 29, N 4, p. 1—50.
246. *Mellin H.* Eine Formel für den Logarithmus transzendenter Funktionen von endlichem Geschlecht. — Acta math., 1902, t. 25, p. 165—184.
247. *Mellin H.* Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Funktionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht. — Acta Soc. sci. fenn., 1903, t. 31, N 2, p. 1—28.
248. *Montel P.* Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine. — Ann. sci. École norm. supér., 1912, t. 29(3), p. 487—535.

249. *Narumi S.* On the distribution of zero points of sections of power series. — Jap. J. Math., 1927, vol. 4, p. 21—27.
250. *Nasim C.* Some results relating the behaviour of Fourier transforms near the origin and infinity. — Canad. J. Math., 1969, vol. 21, p. 942—950.
251. *Nevanlinna F.* Über korrespondierende Dirichlet'schen und Fakultätreihen. — Ann. Acad. sci. fenn., 1922, t. 18(A), N 3, p. 3—19.
252. *Nevanlinna R.* Eindeutige analytische Funktionen. Berlin, Springer, 1936. 353 S.
253. *Newman D. J.* An entire function bounded in every direction. — Amer. Math. Monthly, 1976, vol. 83, N 3, p. 192—193.
254. *Newsom C. V.* On the character of certain entire functions in distant portions of the plane. — Amer. J. Math., 1938, vol. 60, p. 561—572.
255. *Newsom C. V.* The asymptotic behaviour of a class of entire functions. — Amer. J. Math., 1943, vol. 65, p. 450—454.
256. *Nielsen N.* Sur une classe de séries infinies analogues à celles de Schlömilch selon les fonctions cylindriques. — Ann. mat. pura appl., 1901, vol. 6(3), p. 301—329.
257. *Okubo K.* A connection problem involving logarithmic functions. — Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A, 1965, vol. 1, p. 99—128.
258. *Orr W. McF.* On divergent (or semiconvergent) hypergeometric series. — Trans. Cambridge Philos. Soc., 1899, vol. 17, p. 171—199.
259. *Phragmen E., Lindelöf E.* Sur une extension d'une principle classique de l'analyse. — Acta math., 1908, t. 31, p. 381—406.
260. *Picard W. F.* On polylogarithms. — Publ. math., 1968, vol. 15, p. 33—43.
261. *Pittnauer F., Wyrwich H.* Ganze Funktionen mit einer vorgeschriebenen asymptotischen Entwicklung. — Math. Ztschr., 1977, Bd. 154, S. 295—302.
262. *Pittnauer F., Wyrwich H.* Ganze Funktionen mit endlich vielen vorgeschriebenen asymptotischen Entwicklungen. — Math. Ztschr., 1978, Bd. 161, S. 1—8.
263. *Poisson S. D.* Mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries. — J. École polytechn., 1823, t. 12, cah. 19, p. 404—420.
264. *Poisson S. D.* Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies. — Mém. Acad. sci., 1827, t. 6, p. 571—602.
265. *Pollak H. O., Shepp L.* An asymptotic expansion. — SIAM Rev., 1964, vol. 6, p. 60.
266. *Polya G.* Sur un théorème de M. Hadamard relatif à la multiplication des singularités. — C. r. Acad. sci. Paris, 1927, t. 184, p. 579—581.
267. *Polya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. — Ann. Math., 1933, vol. 34, N 4, p. 731—777.
268. *Polya G.* On converse gap theorems. — Trans. Amer. Math. Soc., 1942, vol. 52, p. 65—71.
269. *Pringsheim A.* Über den Divergenzcharakter gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. — Acta math., 1904, t. 28, p. 1—30.
270. *Pringsheim A.* Kritisch-historische Bemerkungen zur Funktionentheorie, I. — Münch. Ber., 1928, S. 343—358.
271. *Riedel R.* Asymptotische Darstellungen von Stieltjesintegralen mit Anwendungen auf Reihen. — Ztschr. angew. Math. Mech., 1969, Bd. 49, S. 63—75.
272. *Riedel R.* Herleitung asymptotischer Darstellungen für Parameterintegrale und Reihen mit Stieltjesintegralen. Habilitationsschrift. Halle/Saale, 1969. 80 S.

273. *Riemann B.* Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Größe. — Gesammelte Werke. Leipzig, Teubner, 1876, S. 136—144.
274. *Riesz F., Riesz M.* Über die Randwerte einer analytischen Funktion. — 4-ème congr. math. scand., Stockholm, 1916, p. 27—47.
275. *Riesz M.* Über einen Satz des Herrn Fatou. — J. reine angew. Math., 1911, Bd. 140, S. 89—99.
276. *Riney T. D.* On the coefficients in asymptotic factorial expansion. — Proc. Amer. Math. Soc., 1956, vol. 7, p. 245—249.
277. *Riney T. D.* A finite recursion formula for the coefficients in asymptotic expansions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1958, vol. 88, N 1, p. 214—226.
278. *Rowe C. H.* A proof of the asymptotic series for $\log \Gamma(s)$ and $\log \Gamma(s+a)$. — Ann. Math., 1931, vol. 32, p. 10—16.
279. *Roy E. le.* Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle. — Bull. sci. math., 1900, t. 24, p. 245—268.
280. *Schlömilch O.* Compendium der höheren Analysis. Braunschweig, Vieweg, 1895, Bd. 2. 546 S.
281. *Shah S. M.* On the singularities of a class of functions on the unite circle. — Bull. Amer. Math. Soc., 1946, vol. 52, p. 1053—1056.
282. *Spence W.* Essay on the theory of the various orders of logarithmic transcendents. London, 1809.
283. *Stokes G.* Note on the determination of arbitrary constants which appear as multipliers of semiconvergent series. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1889, vol. 6, p. 362—366.
284. *Stolz O.* Beweis einiger Sätze über Potenzreihen. — Ztschr. Math. Phys., 1875, Bd. 20, S. 369—376.
285. *Stolz O.* Über die Grenzwerte der Quotienten. — Math. Ann., 1878, Bd. 14, S. 231—240.
286. *Tauber A.* Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. — Monatsh. Maths. Phys., 1897, Bd. 8, S. 273—277.
287. *Tschakaloff M.* Sur les singularités polaires des séries entières. — C. r. Acad. sci. Bulgarie, 1948, t. 1, p. 9—12.
288. *Tsuji M.* On the distribution of the zero points of sections of a power series. — Jap. J. Math., 1925, vol. 2, p. 147—154.
289. *Tsuji M.* On a power series which has only algebraic singularities on its convergence circle. — Jap. J. Math., 1926, vol. 3, p. 69—85.
290. *Valiron G.* Sur le calcul approchée de certaines fonctions entières. — Bull. Soc. math. France, 1914, t. 42, p. 252—264.
291. *Vivanti G.* Sulle serie di potenze. — Riv. mat., 1893, vol. 3, p. 111—114.
292. *Volkman L.* Ein einfacher Zugang zur Theorie des Maximalgliedes. — Bull. math. Soc. sci. math. RS Roumanie, 1975, t. 19(67), N 3/4, p. 409—413 (1977).
293. *Watson G. N.* A class of integral functions defined by Taylor's series. — Trans. Cambridge Philos. Soc., 1913, vol. 22, p. 15—37.
294. *Watson G. N.* Some self-reciprocal functions. — Quart. J. Math. Oxford Series, 1931, vol. 2, p. 298—309.
295. *Weiss M.* Concerning a theorem of Paley on lacunary power series. — Acta math., 1959, t. 102, p. 225—238.
296. *Wigert S.* Sur les fonctions entières. — Öfersikt Svenska Vetenskapsakad., 1900, t. 57, p. 1001—1011.

297. *Wilson R.* Functions with dominant singularities of generalized algebraic-logarithmical type, II. On the order of the Hadamard product. — Proc. London Math. Soc., 1937, vol. 43, p. 417—438.
298. *Wiman A.* Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$. — Acta math., 1905, t. 29, p. 191—201, p. 217—234.
299. *Wiman A.* Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Glied der zugehörigen Taylor'schen Reihe. — Acta math., 1914, t. 37, p. 305—326.
300. *Wiman A.* Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Betrage bei gegebenem Argument der Funktion. — Acta math., 1918, t. 41, p. 1—28.
301. *Wrench J. W.* Concerning two series for the gamma function. — Math. Comp., 1968, vol. 22, p. 617—626.
302. *Wright E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. — J. London Math. Soc., 1935, vol. 10, p. 286—293.
303. *Wright E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. — Proc. London Math. Soc., 1940, vol. 46, p. 389—408.
304. *Wright E. M.* The generalized Bessel function of order greater than one. — Quart. J. Math. Oxford Series, 1940, vol. 11, p. 36—48.
305. *Wright E. M.* The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series, I, II. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1940, vol. 238, p. 423—451; 1941, vol. 239, p. 217—232.
306. *Wright E. M.* A recursion formula for the coefficients in an asymptotic expansion. — Proc. Glasgow Math. Assoc., 1958, vol. 4, p. 38—41.
307. *Wrinch D. M.* An asymptotic formula for the hypergeometric function ${}_0\Delta_1$. — Philos. Mag., 1921, vol. 41(6), p. 161—173.
308. *Wrinch D. M.* A generalized hypergeometric function with parameters. — Philos. Mag., 1921, vol. 41(6), p. 174—186.
309. *Young W. H.* On restricted Fourier series and the convergence of power series. — Proc. London Math. Soc., 1918, vol. 17, p. 353—360.

К главе IX

310. *Агрест М. М.* О равномерных асимптотических разложениях неполных интегралов Липшица—Ханкеля. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1978, т. 18, № 1, с. 10—16.
311. *Альевич С.* О асимптотском развитии A -збирливых линейных функций. — Сборник радова С. А. Н., 1953, 35. Математички институт, књв. 3, с. 157—212.
312. *Арсеньев А. А.* О преобразовании Фурье медленно убывающей функции. — ДАН, 1964, т. 154, № 2, с. 251—253.
313. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Пер. с англ. Т. 1, 2. М., Наука, 1968—1969.
Т. 1, 1968. 343 с.
Т. 2, 1969. 327 с.
314. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. Пер. с франц. М., Наука, 1965. 424 с.
315. *Вербицкий Б. В.* Усиление одного результата Ватсона. — В кн.: Тр. Моск. авиац. ин-та. М., 1976, вып. 384, с. 10—15.
316. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958. 543 с.

317. *Гохфельд И. М., Николаевский Е. С.* Переважные контуры интеграла Зоммерфельда. Ин-т теор. и эксперимент. физ. Препринт, № 97. М., 1978. 36 с.
318. *Евграфов М. А.* Асимптотика интегралов со сливающимися точками перевала. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препринт, № 12. М., 1975. 67 с.
319. *Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Бержанов К. А.* Сборник задач по теории аналитических функций. М., Наука, 1969. 387 с.
320. *Заруцкая В. В.* Асимптотика интегралов по кривым на римановых поверхностях. — В кн.: Тр. Моск. ин-та электрон. машиностроения. М., 1974, вып. 30, с. 51—92.
321. *Зильбергейт А. С.* О равномерных асимптотических разложениях некоторых определенных интегралов. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1976, т. 16, № 1, с. 40—47.
322. *Зильбергейт А. С.* Равномерное асимптотическое разложение интеграла Дирихле. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1977, т. 17, № 6, с. 1588—1592.
323. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. М., Физматгиз, 1961. 703 с.
324. *Ларичев В. Д.* Асимптотическое поведение интегралов, содержащих большой параметр в аргументе функции Бесселя. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1973, т. 13, № 4, с. 1029—1035.
325. *Ларичева Л. С.* Асимптотические разложения несобственных интегралов с ядром из бесселевых функций и оценка их точности. Рукопись деп. в ВИНТИ, 1978, № 2433-78 Деп.
326. *Паулаускас В. И.* О неравенстве сглаживания. — Лит. мат. сб., 1971, т. 11, № 4, с. 861—866.
327. *Риекстыньш Э. Я.* О применении теории нейтрис к асимптотическому представлению некоторых интегралов. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1966, вып. 1, с. 5—21.
328. *Риекстыньш Э. Я.* О равномерных и неравномерных асимптотических представлениях интегралов. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1976, вып. 17, с. 36—49.
329. *Риекстыньш Э. Я.* О применении множителя сходимости к асимптотическому разложению интегралов. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1979, вып. 23, с. 23—36.
330. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов от функций с логарифмическими особенностями. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1980, вып. 24, с. 30—42.
331. *Риекстыньш Э. Я., Силиня Б. А.* Асимптотические разложения частичных сумм и остатков для некоторых степенных рядов. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1966, вып. 2, с. 241—259.
332. *Риекстыньш Э. Я., Цирулис Т. Т.* О методах, применяемых к асимптотическому представлению функций, определяемых интегралами, при больших значениях параметра. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1970, вып. 7, с. 193—253.
333. *Риекстыньш Э. Я., Янсон Я. В.* Асимптотические разложения интегралов с периодическими ядрами. — В кн.: Латв. мат. ежегодник. Рига, 1976, вып. 19, с. 33—46.
334. *Сюй Л. Ч.* Асимптотика интегралов и интегральное приближение. Пекин, 1958. 121 с. (На китайском языке).

335. Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. — ДАН, 1959, т. 125, № 5, с. 982—985.
336. Федорюк М. В. Метод перевала. М., Наука, 1977. 368 с.
337. Черняк Ю. Об асимптотике вырожденной гипергеометрической функции на вещественной оси. — Вестн. МГУ. Сер. III. Физика. Астрономия, 1975, т. 16, № 5, с. 621—623.
338. Яковлев Ю. С. Метод асимптотически эквивалентных функций. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 5, с. 144—149.
339. Aljančić S., Bojanić R., Tomić M. Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies. — Publ. Acad. sci. Serbe. Inst. math., 1955, t. 7, p. 81—94.
340. Berg L. Asymptotische Entwicklungen mit Hilfe von Neutrizen. — Arch. Math., 1963, Bd. 14, S. 162—171.
341. Berger N., Handelsman R. Asymptotic evaluation of fractional integral operators with applications. — SIAM J. Math. Anal., 1975, vol. 6, p. 766—773.
342. Berkovits S. The extended Watson lemma and the asymptotic expansion of the L^p norm. — J. Approxim. Theory, 1976, vol. 18, N 2, p. 119—129.
343. Bleistein N. Asymptotic expansions of integral transforms of functions with logarithmic singularities. — SIAM J. Math. Anal., 1977, vol. 8, N 4, p. 655—672.
344. Breig W. F., Crosbie A. L. Numerical computation of a generalized exponential integral function. — Math. Comp., 1974, vol. 28, N 126, p. 575—579.
345. Briones F., Viedma L. G., Torres Y. J. Sobre la integración de funciones fuertemente oscilantes. — Rev. mat. hisp.-amer., 1964, vol. 24, N 3/4, p. 99—102.
346. Brunk H. D., Ewing G. M. Line integral approximation of double integral. — Proc. Amer. Math. Soc., 1953, vol. 4, p. 287—295.
347. Buschman R. G. The asymptotic expansion of an integral. — Rend. mat., Ser. 6, 1974, vol. 7, N 3/4, p. 481—486.
348. Byrne A., Love E. R. Complex inversion theorems for generalized Stieltjes transforms. — J. Austral. Math. Soc., 1974, vol. 18, p. 328—358.
349. Chih-Bing Ling, Jung Lin. A new method of evaluation of Howland integrals. — Math. Comp., 1971, vol. 25, N 114, p. 331—337.
350. Curtiss C. F. Expansions of integrals of Bessel functions of large order. — J. Math. Phys., 1964, vol. 5, N 4, p. 561—564.
351. Doetsch G. Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung. — J. reine angew. Math., 1931, Bd. 167, S. 274—293.
352. Duncan C. E. On the asymptotic behaviour of trigonometric sums. — Proc. Koninkl. ned. akad. wet., ser. A, 1957, vol. 60, p. 261—264, 369—380.
353. Erdelyi A. Uniform asymptotic expansion of integrals. — Analytic methods in mathematical physics. Sympos. Indiana univ., Bloomington, Ind., 1968. New York, Gordon-Breach, 1970, p. 149—168.
354. Erdelyi A. Asymptotic evaluation of integrals involving a fractional derivative. — SIAM J. Math. Anal., 1974, vol. 5, N 2, p. 159—171.
355. Esseen C. G. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. — Acta math., 1945, t. 77, p. 1—125.
356. Fogli G. L., Pellicaro M. F., Villani M. A summation method for a class of series with divergent terms. — Nuovo cimento, 1971, vol. 6A, N 1, p. 79—97.

357. *Glasser M. L.* Asymptotic evaluation of an integral arising in polaron theory. — *Simon Stevin*, 1976/77, vol. 50, N 2, p. 95—100.
358. *Glasser M. L., Klamkin M. S.* Some integrals of squares of Bessel functions. — *Util. Math.*, 1977, vol. 12, p. 315—316.
359. *Glasser M. L., Olver F. W. J.* Asymptotic behaviour of integrals of Bessel functions of high order. — *Util. Math.*, 1977, vol. 12, p. 225—239.
360. *Grosjean C. C.* On the series expansion of certain types of Fourier integrals in the neighbourhood of the origin. — *Bull. Soc. math. Belge*, 1965, vol. 17, N 3, p. 251—295.
361. *Grossman N.* Polygamma functions of arbitrary order. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1976, vol. 7, N 3, p. 366—372.
362. *Grosswald E.* On the integration scheme of Maréchal. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1951, vol. 2, p. 706—709.
363. *Haar A.* Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen. — *Math. Ann.*, 1926, Bd. 96, S. 69—107.
364. *Hardy G. H.* Researches in the theory of divergent series and integrals. — *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1904, vol. 35, p. 22—66.
365. *Hausdorff F.* Summationsmethoden und Momentenfolgen. — *Math. Ztschr.*, 1921, Bd. 9, S. 74—109.
366. *Higgins T. P.* A child's garden of special functions. — *Lect. Notes Math.*, 1975, vol. 457, p. 216—225.
367. *Hsu L. C.* Concerning an expansion formula for a type of integrals. — *Ann. pol. math.*, 1961, vol. 11, p. 7—12.
368. *Jones D. S.* Generalized transforms and their asymptotic behaviour. — *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1969, vol. 265, N 1158, p. 1—43.
369. *Jones D. S.* Asymptotic behaviour of integrals. — *SIAM Rev.*, 1972, vol. 14, N 2, p. 286—316.
370. *Joshi D. G.* Transform of a product and Parseval theorems. — *Ganita*, 1974, vol. 25, N 1, p. 55—60.
371. *Kantor P. B.* Extension of the Riemann-Lebesgue lemma. — *J. Math. Phys.*, 1970, vol. 11, N 10, p. 3099—3103.
372. *Kaper H. G.* Asymptotic evaluation of two families of integrals. — *J. Math. Anal. Appl.*, 1977, vol. 53, N 3, p. 415—422.
373. *Kruse K.-D.* Asymptotische Entwicklung von n -fachen Faltungsprodukten mit expliziter Abschätzung des Restgliedes. — *Wiss. Ztschr. Univ. Rostock. Math.-naturwiss. Reihe*, 1972, Jg. 21, H. 8, S. 775—779.
374. *Kruse K.-D.* Asymptotische Entwicklung von n -fachen Faltungsintegralen unter Verwendung einer verallgemeinerten Ungleichung von Esseen. — *Math. Nachr.*, 1978, Bd. 81, S. 327—332.
375. *Lauwerier H. A.* Asymptotic analysis. Amsterdam, Math. Centrum, 1974, 145 p.
376. *Levey H. C., Mahony J. J.* Series representations of Fourier integrals. — *Quart. Appl. Math.*, 1968, vol. 26, N 1, p. 101—109.
377. *Lew J. S.* On some relations between the Laplace and Mellin transforms. — *IBM J. Res. Develop.*, 1975, vol. 19, N 6, p. 582—586.
378. *Luke Y. L.* An asymptotic expansion. — *SIAM Rev.*, vol. 10, p. 229—232.
379. *Luke Y. L.* Some remarks on uniform asymptotic expansions for Bessel functions. — In: *Comput. math. appl.* Oxford, Pergamon Press, 1976, p. 285—290.
380. *Maréchal A.* Mechanical integrator for studying the distribution of light in the optical image. — *J. Opt. Soc. America*, 1947, vol. 37, p. 403—404.

381. *McClure J. P., Wong R.* Explicit error terms for asymptotic expansions of Stieltjes transforms. — *J. Inst. Math. Appl.*, 1978, vol. 22, p. 129—145.
382. *McClure J. P., Wong R.* Exact remainders for asymptotic expansions of fractional integrals. — *J. Inst. Math. Appl.*, 1979, vol. 23, p. 139—147.
383. *Muki R.* Uniform asymptotic expansions of integrals of the Lipschitz-Hankel type. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1972, vol. 3, N 2, p. 285—290.
384. *Oberhettinger F.* Tables of Mellin transforms. Berlin, Springer, 1974. 275 p.
385. *Oldham K. B., Spanier J.* The fractional calculus. New York, Acad. Press, 1974. 234 p.
386. *Olver F. W. J.* Error bounds for stationary phase approximations. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1974, vol. 5, p. 19—29.
387. *Ostrowski A. M.* On asymptotic development of functions of large numbers. — *Rend. mat. Ser. 6*, 1975, vol. 8, N 2, p. 429—445.
388. *Pankoke H.-J.* Anwendung einer verallgemeinerten Laplace-Transformation auf asymptotische Entwicklungen. — *Beitr. Analysis*, 1976, Bd. 9, S. 77—85.
389. *Pollak H. O., Schoenfeld L.* The asymptotic estimation of a Laplace transform arising in the theory of magnetoresistance. — *SIAM J. Appl. Math.*, 1969, vol. 17, N 1, p. 206—211.
390. *Ridenhour J. R., Soni R. P.* Parseval relation and tauberian theorems for the Hankel transform. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1974, vol. 5, N 5, p. 809—821.
391. *Riedel R.* Asymptotische Darstellungen von Doppelintegralen. — *Wiss. Ztschr. Martin-Luther-Univ. Halle*, 1965, Bd. 14, S. 333—339.
392. *Riedel R.* Asymptotische Darstellungen von Doppelintegralen mit stationären Maximum. — *Ztschr. angew. Math. Mech.*, 1965, Bd. 45, S. 323—332.
393. *Riedel R.* Asymptotische Darstellungen von Doppelintegralen mit nichtstationären Randmaxima. — *Math. Nachr.*, 1965, Bd. 30, S. 295—317.
394. *Riedel R.* Zur Methode der stationären Phase. — *Wiss. Ztschr. Martin-Luther-Univ. Halle*, 1976, Bd. 25, H. 2, S. 17—23.
395. *Schell H.-J.* Asymptotische Darstellungen für Parameterintegrale mit zwei reellen Parametern. — *Math. Nachr.*, 1978, Bd. 82, S. 309—323; 1979, Bd. 88, S. 391—408.
396. *Soni K., Soni R. P.* Slowly varying functions and asymptotic behaviour of a class of integral transforms. — *J. Math. Anal. Appl.*, 1975, vol. 49, N 1, p. 166—179.
397. *Stenger F.* Transform methods for obtaining asymptotic expansions of definite integrals. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1972, vol. 3, N 1, p. 20—30.
398. *Stieltjes T.* Recherches sur quelques series semi-convergentes. — *Ann. sci. Ecole norm. supér.*, 1886, t. 3, p. 201—258.
399. *Temme N. M.* Analytical methods for a singular perturbation problem in a sector. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1974, vol. 5, p. 876—887.
400. *Temme N. M.* Remarks on a paper of A. Erdelyi. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1976, vol. 7, N 5, p. 767—770.
401. *Temme N. M.* Uniform asymptotic expansions of confluent hypergeometric functions. — *J. Inst. Math. Appl.*, 1978, vol. 22, p. 215—223.
402. *Tricomi F.* Sulla trasformazione e il teorema di reciprocità di Hankel. — *Rend. Accad. naz. Lincei. Sez. 1*, 1935, vol. 22, p. 564—571.
403. *Wagner H.-J.* An algorithm for asymptotic approximation of Laplace integrals. — *Computing*, 1977, vol. 18, N 1, p. 51—58.

404. *Wagner H.-J.* Eine numerische Methode zur asymptotischen Approximation von Laplace-Integralen. — *Ztschr. angew. Math. Mech.*, 1977, Bd. 57, H. 5, S. 308—310.
405. *Watson G. N.* The sum of a series of cosecants. — *Philos. Mag.*, 1916, vol. 31, p. 111—118.
406. *Wilkins J. E.* An integration scheme of Maréchal. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1949, vol. 55, p. 191—192.
407. *Willis H. F.* A formula for expanding an integral as series. — *Philos. Mag.*, 1948, vol. 39, p. 455—459.
408. *Wong R.* On Laplace transforms near the origin. — *Math. Comp.*, 1975, vol. 29, N 130, p. 573—576.
409. *Wong R.* Error bounds for asymptotic expansions of Hankel transforms. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1976, vol. 7, p. 799—808.
410. *Wong R.* Asymptotic expansions of Hankel transforms of functions with logarithmic singularities. — *Comp. and Math. with Appl.*, 1977, vol. 3, p. 271—286.
411. *Wong R.* Asymptotic expansions of fractional integrals involving logarithms. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1978, vol. 9, N 5, p. 835—842.
412. *Wong R.* Asymptotic expansion of the Hilbert transform. — *SIAM J. Math. Anal.*, 1980, vol. 11, p. 92—99.
413. *Wong R., Lin J. F.* Asymptotic expansions of Fourier transforms of functions with logarithmic singularities. — *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, vol. 64, N 1, p. 173—180.
414. *Woolcock W. S.* Asymptotic behaviour of Stieltjes transforms. — *J. Math. Phys.*, 1967, vol. 8, p. 1270—1275; 1968, vol. 9, p. 1350—1356.
415. *Wynn P.* A numerical study of a result of Stieltjes. — *Chiffres*, 1963, t. 3, p. 175—196.
416. *Zimring S.* Some asymptotic behaviour of Stieltjes transforms. — *J. Math. Phys.*, 1969, vol. 10, p. 181—183.

Дополнительный список

417. *Гельфонд А. О.* Вычеты и их приложения. М., Наука, 1966. 112 с.
418. *Николаевский Е. С.* Асимптотические разложения метода перевала. Ин-т теор. и эксперимент. физ. Препринт № 78. М., 1979. 28 с.
419. *Платонов М. Л.* Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. М., Наука, 1979. 152 с.
420. *Barnes E. W.* The Maclaurin sum-formula. — *Proc. London Math. Soc.*, 1905, vol. 3, p. 253—272.
421. *Barrucand P.* Inégalités et relations asymptotiques pour les séries de Lambert. — *C. r. Acad. sci. Paris*, 1975, t. 281, N 10, p. 329—332.
422. *Durbin P.* Asymptotic expansion of Laplace transforms about the origin using generalized functions. — *J. Inst. Math. Appl.*, 1979, vol. 23, p. 181—192.
423. *Ingham A.* The distribution of prime numbers. Cambridge, Univ. Press, 1932. 114 p.
424. *Ismail M. E. H.* Integral representation and complete monotonicity of various quotients of Bessel functions. — *Canad. J. Math.*, 1977, N 6, p. 1198—1207.
425. *Kilpatrick J. E., Katsura S., Inoue Y.* Calculations of integrals of products of Bessel functions. — *Math. Comp.*, 1967, vol. 21, p. 407—412.

426. *Kim S. K.* The asymptotic expansion of a hypergeometric function ${}_2F_2(1, \alpha; \rho_1, \rho_2; z)$. — *Math. Comp.*, 1972, vol. 26, N 120, p. 963.
427. *Kjellberg B., Sandström B.* Asymptotic values of an entire function and its derivative. — *Ann. Acad. sci. fenn. Ser. A 1*, 1976, vol. 2, p. 257—267.
428. *Liang J. J. Y., Todd J.* The Stieltjes constants. — *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 1973, vol. B 76, N 3/4, p. 161—178.
429. *Luke Y. L.* *Mathematical functions and their approximations.* New York, Acad. Press, 1975. 568 p.
430. *Montaldi E.* Asymptotic behaviour of some useful integrals. — *Lett. Nuovo cimento*, 1971, vol. 1, N 4, p. 117—128.
431. *Schmidt P. W.* Evaluation of the integral $\int_0^{\infty} t^{2\alpha-1} J_{\nu}(x\sqrt{1+t^2}) / (1+t^2)^{\alpha+\beta-1} dt$. — *Math. Comp.*, 1978, vol. 32, N 141, p. 265—269.
432. *Schmidt P. W.* An asymptotic approximation for a type of Fourier integral. — *Math. Comp.*, 1978, vol. 32, N 144, p. 1171—1182.
433. *Schott G. A., Watson G. N.* Asymptotic formulae occurring in electron theory. — *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1916, vol. 47, p. 311—333.
434. *Soni K., Soni R. P.* The Parseval relation and monotone functions. — *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, vol. 48, p. 633—645.
435. *Wagner E.* Asymptotische Darstellung einer Klasse von Faltungsintegralen. — *Wiss. Ztschr. Martin-Luther-Univ. Halle*, 1980, Bd. 29, H. 1, S. 47—52.
436. *Wong R.* On a uniform asymptotic expansion of a Fourier type integral. — *Quart. Appl. Math.*, 1980, vol. 38, N 2, p. 225—234.
437. *Wong R.* Explicit error terms for asymptotic expansions of Mellin convolutions. — *J. Math. Anal. Appl.*, 1979, vol. 72, N 2, p. 740—756.
438. *Wong R.* Error bounds for asymptotic expansions of integrals. — *SIAM Rev.*, 1980, vol. 22, N 4, p. 401—435.
439. *Zwalenberg G. van.* Asymptotic factorial expansions. Dissertation. Berkeley, Univ. of California, 1968. 80 p.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля—Плана формула 93, 104, 167, 184, 190
 Абеля преобразование 90, 196, 197, 213
 Адамара композиция 79, 80, 114, 221
 — — логарифмическая 115, 120
 Алгебраическая особая точка 11, 72, 80
 Аппроксимирующий базис 242 — 244, 246, 336
 Барнса—Ватсона преобразование 117, 118, 140, 143, 217, 219
 Белла числа 73, 140
 Бернулли полиномы $B_n^\lambda(z)$ 12, 18, 101, 161, 169, 171 — 173, 177, 185, 195, 204, 205, 283, 284
 — числа B_n 161, 184, 195, 209, 210, 212, 241, 255, 283, 284
 Бесконечные произведения 23, 206, 216, 223, 224
 Бесселя—Райта функции $J_\nu^\lambda(z)$, $I_\nu^\lambda(z)$ 19 — 21, 72, 139, 151, 160, 219, 221, 224
 Бесселя функции $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ 11, 48, 49, 70 — 72, 163, 173, 174, 177 — 180, 182, 195, 201, 222, 226, 228, 234, 236, 238, 240, 242, 245 — 248, 264, 279, 280, 303, 306, 307, 309, 310, 313, 316, 318, 327, 334, 336, 338
 Бореля преобразование 116
 Ватсона лемма 204, 270, 272, 294, 326
 Вимана неравенство 107
 Генгенбауэра полиномы $C_n^\lambda(z)$ 50, 52, 53, 58, 61, 63, 65, 68 — 71
 Гипергеометрическая функция вырожденная ${}_1F_1$, $\psi(\alpha; \gamma; z)$ 30, 44, 113, 114, 118, 155, 177, 196, 201, 268, 295, 334, 335
 Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1$ 53, 54, 62, 206, 240, 241, 246
 — — обобщенная ${}_pF_q$ 85, 86, 94, 102, 108, 115, 143, 155, 161 — 163, 165, 220 — 222
 — — общая ${}_p\tilde{F}_q$ 44, 143, 160 — 163, 219 — 222, 280
 Гурвица композиция 81
 — формула 181
 Дарбу метод 15, 71, 72
 Дигамма-функция $\psi(z)$ 33, 115, 148, 185, 187, 189, 193, 198, 204, 241, 242, 252
 Дирихле признак 77, 256
 — ряды 75, 167, 168, 174, 199, 214
 — — типа Барнса 168, 210, 214
 — — — Меллина 169, 214
 Дифференцирование дробного порядка 296
 Erf, Erfc функции 65, 122, 301
 Жонкьера формула 101, 218
 — функция 99
 Интеграл Бозе—Эйнштейна 99
 — Коши 61, 69, 89
 — Лапласа 90, 97, 102, 230, 270, 286, 298, 318
 — Меллина 43 — 45, 260, 261, 331, 332
 — Меллина—Барнса 120, 158, 161, 219, 220, 258, 333, 334
 — свертки 40, 271, 322, 323, 338
 — типа Меллина—Барнса 167, 170, 173, 216, 227, 334
 — Ферми—Дирака 99
 — Фурье 286

- Интегралы с логарифмическими особенностями 72, 286, 288 — 290, 292, 293, 307, 309, 310 — 314, 320, 324, 326, 330
- Интегральная показательная функция обобщенная 295
- Интегральное представление 88, 89, 92 — 94, 112, 216
— — полиномов 67, 68
- Интегрирование дробного порядка 296, 297, 323
- Конфлюэнтные разложения 202, 206, 280
- Коши формула 10, 27, 45, 65, 66, 71, 74, 123, 237, 279
- Лагерра полиномы $L_n^\alpha(z)$ 50, 66, 67, 74
- Лагранжа—Бюрмана формула 34, 64, 71
- Лакунарные ряды 81, 82, 85, 86, 98, 108, 116, 197
- Лапласа метод 66, 72, 188, 203, 275, 286
— преобразование 15, 20, 69, 71, 75, 90, 91, 98, 115, 116, 167, 176, 177, 199, 222, 226, 227, 230, 258, 259, 299, 322, 323, 335, 336
— —, обращение 20, 69, 70, 75, 160, 178, 226, 227, 256
— числа 18
- Лежандра полиномы $P_n(z)$ 14, 49 — 52, 55 — 59, 61, 63, 65 — 67, 72, 74
— функция $Q_n(z)$ 61, 63
- Линделефа формула 106, 111
— функция 127, 218
- Макдональда функция $K_\nu(z)$ 189, 242, 295, 334
- Медленно изменяющиеся функции 18, 42, 87, 91, 107, 200, 301, 332
- Мейера G -функция 50, 161, 201, 203, 220, 221, 258, 325, 333
- Меллина преобразование 92, 94, 122, 157, 167, 194, 213, 226, 227, 256 — 258, 262, 272, 302, 320, 324, 331, 335 — 337
- Метод вспомогательных параметров 298
— Меллина—Барнса 117, 123, 210
— перевала 24, 35, 64, 66, 72, 137, 141, 145, 147, 300
— последовательного разложения 239, 274, 276, 301, 316, 317, 319, 322, 324, 326, 329
- сопряженных операторов 276, 337
- Метод целых функций 149, 151, 152, 220
- Множитель сходимости 228, 306
- Нейтрализатор 228, 234, 239, 307, 318
- Неполная Γ -функция $\Gamma(\alpha, z)$ 268, 295
- Неполная цилиндрическая функция Макдональда 294, 295
- Неполный интеграл Липшица—Ганкеля 294
- Неявная асимптотика Абеля 225, 226
- Неявные функции 38, 45
- Ньюсома формула 143, 144, 219
- Обратные функции 34, 73, 74
- Олвера парадокс 13, 14
- Ортогональные полиномы 49, 74, 75
- Особый случай 129, 131
- Парсевая формула 226, 256, 257, 266, 269, 270, 275, 276, 302, 303, 318, 320, 324, 333, 336, 337
- Полилогарифм 99, 208, 218
- Преобразование Ганкеля 96
— Гильберта 330
— Куммера 335
— ϵ 228, 229, 231, 238 — 241, 302, 320, 327, 336
— Эфроса—Лапласа 226, 336
- Принсгейма условие 78, 84, 87
- Производящая функция 39, 42, 45, 54, 73
- Пуассона формула 94, 96, 118, 187, 190, 211, 216, 223
- Равномерная асимптотика 49, 295 — 297, 301, 305, 306, 340
- Рекуррентное интегрирование 296 — 298, 306
- Рекуррентные последовательности 39
— формулы 39, 51
- Родрига формула 49, 52, 65, 66, 70
- Ряды Ламберта 174, 185, 197
— Меллина (РМ) 173, 260 — 266, 270, 271, 275, 290, 298, 326
— обратных факториалов 62, 63, 65, 168, 192, 220
- Семейство стандартных функций 128
- Собственные значения 46, 48
— функции 46, 48, 74
- S -сектор 132, 134, 139, 149, 219, 220
- Стандартные функции 85, 127, 139, 148, 218, 219, 224

- Стильеса преобразование 227, 239, 322, 324 — 330
 Стирлинга формула 33, 45, 65, 134, 145, 153, 222, 241, 242, 334
 Стирлинга числа 115
 Суммирование методом Абеля 130, 228, 336
 Сюй формула 284

 Теорема Абеля 78, 130, 215, 217
 — — обобщенная 196
 — Апелья—Чезаро 82, 83, 88, 91, 111, 197, 217
 — Виванти 79
 — Линделефа 201
 — Линделефа—Форда 124, 126, 131, 134, 135, 143, 149, 218
 — Литтльвуда 77
 — Ло 80
 — Ло—Вигерта 123, 125
 — Мандельброята—Цудзи 82
 — Монтея 110
 — Монтея—Линделефа 78
 — Пели—Вейсс 82
 — Прингсгейма 87, 91
 — Фату 78
 — Фату—Гурвица—Полиа 82
 — Фату—Рисса—Юнга 77
 — Фробениуса 217
 — Харди 87
 — Харди—Литтльвуда 77
 — Цудзи 80
 — Цудзи—Наруми 78
 — Штольца 87
 — Юнгена—Вильсона 81
 — Эгмона 80
 Теоремы Адамара 79, 81, 82
 — Полиа 81, 123, 125
 — Фабри 79, 82
 Теоретическая асимптотика 338
 Тэта-функция 122, 188
 Трикоми формула 226

 Условие конечности 260
 — сепарации 117, 118

 Формула Дирихле—Мелера 68, 75
 — Эйлера—Маклорена 42, 94, 96, 97, 108, 119, 157, 172, 183, 184, 188, 190, 191, 193, 195, 196, 199, 206, 209, 211, 214 — 217, 223, 253, 255, 283, 336
 Функция абсолютно монотонная 222, 239
 — Вольтерра $\mu(z, \beta, \alpha)$ 144, 177
 — Миттага—Лефлера $E_p(z)$ 110, 116, 128, 142, 217, 219
 — — обобщенная $E_p(z, \alpha)$ 128, 129, 135, 139, 142, 148, 158, 159, 219, 221
 — $\zeta(z)$, $\zeta(z, \alpha)$ 99, 100, 101, 104, 168 — 174, 176, 180, 181, 189, 190, 194, 200, 212, 214, 218, 223, 253, 255
 Фурье коэффициенты 10, 49, 75
 — преобразование 71, 96, 323
 — ряд 10, 46, 47, 95, 182, 199, 200, 248, 249

 Харди—Барнса функция $G_\beta(z, \alpha)$ 98, 118, 192
 — — присоединенная $g_\beta(z, \alpha)$ 98, 102, 104, 179, 180, 192, 193, 210, 218
 Харди функция $Hd_\lambda(z, \alpha)$ 158, 159, 221, 301

 Целая функция 22, 24, 43, 65, 83, 104, 112, 123, 126, 127, 132, 149, 159, 207, 216
 — —, асимптотическое значение 110
 — —, жанр 207, 216
 — —, индикатриса роста 107
 — —, максимальный член 107, 108, 216
 — —, максимум модуля 31, 32, 105 — 109, 216
 — —, нерегулярное изменение 109, 110, 216
 — —, порядок 65, 105 — 107, 110, 111
 — —, регулярное изменение 109, 216
 — —, род 207, 216
 — —, тип 105 — 107, 111
 — —, — максимальный 106
 — —, — минимальный 106, 123
 — —, — нормальный 106
 — —, экспоненциального типа 106
 Центральная сумма 108, 215, 216, 220
 Центральный индекс 107, 108

 Чебышева полиномы $T_n(z)$ 50, 51, 53, 57, 59, 61, 63 — 65, 70, 74, 75

 Штурма—Лиувилля задача 46

 Эрмита полиномы $H_n(z)$ 49 — 54, 60, 66 — 69, 74
 — функция $H_\nu(z)$ 66, 68, 69, 178, 201
 Э-сектор 132, 139, 149, 219, 220
 Эталонные функции 340

-
- Ядро осциллирующее 228, 230, 263 —
 265, 274 — 276, 297, 302, 303, 307,
 310, 312 — 314, 316, 318, 327
 — периодическое 247, 248, 280, 282,
 285, 337
 — степенное 228, 263, 274 — 276,
 313, 314, 319, 320, 322
 — с устранимой особенностью 302,
 303, 330
 — типа Фурье 257
 — экспоненциально убывающее 263,
 265, 274, 275, 290, 294, 314, 331
 Якоби полиномы $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ 50, 65, 66,
 74

Дополнительный список замеченных опечаток

В 1-м томе

Страница	Строка или формула	Напечатано	Должно быть
53	15-я снизу	см. т. 3	—
80	18-я сверху	$g(x) = l$	$g(x) = t$
102	5-я сверху	$\lim_{z \rightarrow z_0}$	$\lim_{z \rightarrow 0}$
149	(8.45)	$(2z)^{-v-k}$	$(2z)^{-v-2k}$
149	2-я снизу	$(2z)^{-k+v}$	$(2z)^{-2k+v}$
167	15-я сверху	a_n	c_n
186	(9.101)	$\sum_{k=1}^n k^{-\alpha}$	$\sum_{k=1}^{n-1} k^{-\alpha}$
190	12-я снизу	$\operatorname{Re} \mu$	$\operatorname{Re} \beta$
190	13-я снизу	$\operatorname{Re} \lambda$	$\operatorname{Re} \alpha$
209	2-я сверху	$(v+1/2)_k (v-1/2)_k$	$(v+1/2)_k \binom{v-1/2}{k}$
230	8-я снизу	$A_k = \int_0^a h_k(t) t^{k-\lambda_k} dt + a^{-\lambda_k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{b_j a^{j+1}}{j+1-\lambda_k}$	$A_k = \int_0^1 h_{k+1}(t) t^{k+1-\lambda_k} dt + a^{-\lambda_k} \sum_{j=0}^k \frac{b_j a^{j+1}}{j+1-\lambda_k}$
232	1-я снизу	$\ln(az)$	$\ln z$
238	8-я снизу	$t \in S$	$t \in S;$
260	8-я сверху	Согласно примечанию 1° к теореме 4.9	Согласно теореме 4.6
266	10-я сверху	$d_1^{(\lambda_0+1)/\mu_1}$	$d_1^{-(\lambda_0+1)/\mu_1}$
267	1-я сверху	(12.35)	(12.53)
276	(12.80)	$\Omega(z)$	$2\Omega(z)$
297	9-я сверху	a_k	d_k
305	2-я снизу	$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)$	$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j$
314	(13.73)	$(\mu+k)/2$	$(\mu+k)/\beta$

Страница	Строка или формула	Напечатано	Должно быть
318	9-я сверху	b_0	$2b_0$
319	(14.3)	$\rho_n(t, z)$	$\rho_n(z, t)$
321	3-я снизу	То же	То же
332	(14.36)	$\frac{2}{\nu\alpha^\nu} z(\ln z)^\nu$	$\frac{2}{\nu\alpha^\nu} (\ln z)^\nu z^{-1}$
380	22-я снизу	1960	1967

Во 2-м томе

20	3-я снизу	$(g^{(m)}(a)/m!)^{-1/m}$	$(g^{(m)}(a)/m!)^{-1/m}$
39	(16.60)	$\lambda > 0$	$\lambda \in (0, 1)$
76	10-я сверху	$[t - \sigma(x)], \theta \in (0, 1)$	$[t - \sigma(x)]^2 g_2(x, \xi)$
85	17-я сверху	(27.30)	(17.30)
104	(17.84)	$\exp i[g(x) + \pi/4]$	$\exp i[g(x, s) + \pi/4]$
121	(18.38)	$\sqrt{2\sqrt{2\pi/\beta(1+\beta)}}$	$\sqrt{2\pi/\beta(1+\beta)}$
123	8-я сверху	$\frac{1}{\sqrt{\beta}} x^{-1/2-\gamma/2-\gamma k}$	$\frac{1}{2\sqrt{\beta}} x^{-1/2-\gamma/2-\gamma k}$
126	18-я сверху	$a < 1$	$a \in (0, e^{-1})$
131	10-я снизу	\int_1^k	\int_1^∞
131	12-я снизу	$\ln z$	$-\ln z$
132	(18.67)	$1/\sqrt{\beta}$	$1/2\sqrt{\beta}$
133	(18.68)	$\sqrt{2\sqrt{2\pi/\beta(1-\beta)}}$	$\sqrt{2\pi/\beta(1-\beta)}$
137	(18.78)	$x^{\gamma(\lambda+1)}$	$(1/2)x^{\gamma(\lambda+1)}$
138	6-я сверху	$\sqrt{2\sqrt{2\pi}/(\alpha-1)}$	$\sqrt{2\pi}/(\alpha-1)$
175	1-я сверху	$e^{z g_0(t)}$	$e^{-z g_0(t)}$
198	18-я сверху	a_0^{-m}	$a_0^{-1/m}$
199	4-я снизу	$(-i)^{2k+1}$	$(-i)^{k+1}$
216	(19.83)	$\sqrt{2}e^{i\pi/4}$	$\sqrt{2}e^{i\pi/4\tau}$

Страница	Строка или формула	Напечатано	Должно быть
216	1-я снизу	$\int_0^{i\pi/4}$	$\int_0^{-i\pi/4}$
217	7-я сверху	19.4.3	19.4.4
217	3-я снизу	То же	То же
231	9-я сверху	$=ue^{i\theta}\Theta=$	$=ue^{i\theta}, \Theta=$
248	7-я снизу	$1/\pi$	$1/2\pi$
281	10-я сверху	$1/\nu$	$1/2\nu$
282	1-я сверху	μ^{-1}	$1/2\mu$
297	20-я сверху	$J_{\beta k}^{\times}(z)$	$J_{\beta k}^{\times}(z)$
317	15-я сверху	$\Phi_{\lambda, j_l, m}$	$\Phi_{\lambda, j_l, m, j_l}$
326	5-я снизу	$H_{-2\lambda_k+1}(t)$	$H_{-2\lambda_k+1}(\alpha/2\sqrt{t})$
372	5-я снизу	$\gamma \in (0, 1)$	$\gamma \in (\operatorname{Re} 1/\alpha, 1)$
374	13-я снизу	$t^{-\alpha-s}ds$	$t^{-\alpha-s}dt$
426	(24.80)	$\sim \Gamma(\beta)\Sigma$	$\sim (\Gamma(\beta)/\alpha) \times$ $\times \left[\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{\alpha}\right) / \Gamma\left(\frac{1-\lambda}{\alpha} + \right.$ $\left. + \beta \right)] x^{\frac{\lambda-1}{\alpha}} + \Gamma(\beta)\Sigma$
458	20-я сверху	1976	1974

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава VII. Асимптотические представления коэффициентов разложений	9
§ 25. Асимптотика коэффициентов степенных рядов	9
25.1. Общая постановка	9
25.2. Степенные ряды с конечным радиусом сходимости. Случай простейших особенностей	11
25.3. Степенные ряды с конечным радиусом сходимости. Случай трансцендентных точек ветвления	18
25.4. Степенные ряды с бесконечным радиусом сходимости	24
25.5. Некоторые другие случаи	34
§ 26. Асимптотика коэффициентов в рядах по ортогональным функциям	46
26.1. Ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля	46
26.2. Простейшие методы вычисления коэффициентов Фурье по ортогональным полиномам	49
26.3. Коэффициенты для функций с особенностями на сегменте ортогональности	57
26.4. Применение аналитического продолжения разлагаемой функции	61
26.5. Некоторые другие методы	67
26.6. Библиографические сведения	71
Глава VIII. Асимптотика функций, определяемых рядами	76
§ 27. Асимптотика сумм степенных рядов	76
27.1. Общие теоремы	76
27.2. Теорема Апелля—Чезаро и ее дополнения	82
27.3. Применение интегральных представлений и суммационных формул	88
27.4. Примеры	98
27.5. Некоторые сведения о целых функциях	104
27.6. Простейшие методы исследования асимптотики целых функций	111
27.7. Примеры	120
§ 28. Асимптотика некоторых классов целых функций	122
28.1. Общие теоремы	122
28.2. Метод применения стандартных функций	127
28.3. Метод целых функций	149
28.4. Примеры	153
28.5. Асимптотика общих гипергеометрических функций	160

§ 29. Асимптотика функций, определяемых рядами других типов . . .	166
29.1. Применение интегральных представлений	166
29.2. Применение суммационных формул	183
29.3. Применение некоторых других методов и дополнения . . .	190
29.4. Асимптотика степенных рядов относительно параметров . . .	201
29.5. Асимптотика бесконечных произведений	206
29.6. Библиографические сведения	215
Глава IX. Другие методы для построения асимптотических разло-	
жений интегралов и дополнения	225
§ 30. Применение интегральных преобразований и преобразованных рядов	225
30.1. Общая постановка	225
30.2. Применение в-преобразований	228
30.3. Применение аппроксимации функции нагрузки	242
30.4. Интегралы с периодическими ядрами	247
§ 31. Применение специальных соотношений и формул	256
31.1. Применение формул Парсеваля	256
32.2. Основные теоремы	262
31.3. Случай точек ветвления. Примеры	266
31.4. Метод сопряженных операторов	276
31.5. Интегралы с периодическими подынтегральными функциями	280
§ 32. Дополнения	286
32.1. Интеграл Лапласа и родственные ему интегралы	286
32.2. Интегралы с осциллирующими ядрами	302
32.3. Интегралы с ядрами степенного типа	319
32.4. Некоторые другие дополнения	330
32.5. Библиографические сведения	335
32.6. Заключение	337
Список литературы	341
Предметный указатель	362
Дополнительный список замеченных опечаток в 1-м и во 2-м томах монографии	366

Эдуард Янович Риекстыньш
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
ИНТЕГРАЛОВ

ТОМ 3

Редактор *А. Тихомирова*. Художественный редактор
Г. Крутой. Технический редактор *Е. Поча*.
Корректор *Н. Лебедева*

ИБ № 734

Сдано в набор 05.09.80. Подписано в печать
14.08.81. ЯТ 07321. Формат 60×90/16. Бумага типогр.
№ 1. Гарнитура литературная. Высокая печать.
23,25 физ. печ. л.; 23,25 усл. печ. л.; 20,16 уч.-изд. л.
Тираж 1500 экз. Заказ № 1878-Д. Цена 1 р. 60 к.
Издательство «Зинатие», 226018 Рига, ул. Турге-
иева, 19. Отпечатано в типографии «Циция» Го-
сударственного комитета Латвийской ССР по де-
лам издательств, полиграфии и книжной торговли,
226011 Рига, ул. Блауманя, 38/40.

Замеченные опечатки

Страница	Строка или формула	Напечатано	Должно быть
63	(26.63')	1)	1) ×
103	(27.53)	$\psi_B(y)$	$\psi_B(y) =$
160	(28.92)	$\mathfrak{B}_q z$	$\mathfrak{B}_q; z$
216	3-я снизу	27.3.5.	27.3.5, 2°.
284	11-я сверху	$S_2^*(\rho)$	$S_2^*(\rho)$
318	5-я снизу	$e^{i\alpha x \tau}$	$e^{i\alpha x \tau}$
332	(32.91)	$e^{\lambda_{n+1} t}$	$e^{-\lambda_{n+1} t}$
367	1-я снизу	$\sqrt{2}$	$\sqrt[2]{2}$

Э. Я. Риекстыньш. Асимптотические разложения интегралов. Т. 3.