Б. РИМАН

СОЧИНЕНИЯ

БЕРНГАРД РИМАН

СОЧИНЕНИЯ

*

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ, С ПРЕДИСЛОВИЕМ,
ОБЗОРНОЙ СТАТЬЕЙ И ПРИМЕЧАНИЯМИ
проф. В. Л. ГОНЧАРОВА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Об академическом издании сочинений Римана, задачей которого было бы воспроизведение и критическое изучение всего, что сохранилось в его научном наследии или, будучи записано рукой его друзей и учеников, должно было бы рассматриваться как подлинно ему принадлежащее, можно говорить как о памятнике Риману, как о деле высокой важности, для выполнения которого у нас нет, однако, никаких предпосылок. Не менее значительной и, возможно, актуальной была бы задача — проследить развитие идей Римана от их возникновения вплоть до настоящих дней: расчленить всё творчество Римана на составные части и, устраняя небольшую долю заведомо устаревшего (не сыгравшего исторической роли), сделать оставшееся фундаментом обширного построения, в котором были бы отражены, систематизированы и увязаны с их первоистоками успехи нескольких поколений математиков. Предпринять такую работу было бы под силу мощному авторскому коллективу, и созданное Риманом — пусть к его большей славе — растворилось бы в энциклопедии современной математики.

Мы поставили перед собой ограниченную цель: приблизить к широким кругам читателей подлинный текст тех научных работ Римана, которые отредактированы им самим полностью или частично, однако, настолько, чтобы было возможно их связное чтение. Присоединяя обзорную статью и примечания, мы имели намерение привести фактический материал, освещающий этапы его творчества, и, наконец, внести необходимые нюансы исторической перспективы. Вместе с тем, по мере возможности, мы стремились также и к тому, чтобы облегчить читателю движение вперёд по «трудному и идущему круто вверх пути, с часто меняющимся направлением» — так характеризовал К. Нейман манеру, в которой написаны произведения Римана; с этой целью во многих случаях мы указываем литературные источники, которые могут служить комментарием при чтении Римана.

Первое издание сочинений Римана было задумано в 1872 г. друзьями Римана, среди которых в первую очередь следует назвать Р. Дедекинда. Руководство изданием первоначально принадлежало Клебшу, затем, после его смерти, в 1874 году перешло к Г. Веберу, который и выпустил, совместно с Дедекиндом, в 1876 г. однотомник под наименованием «Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass» (Leipzig, Teubner). Сюда вошли: 1) работы Римана, опубликованные им самим; 2) работы, уже изданные после его смерти; 3) впервые публикуемая часть научного наследия (Nachlass) с приложением, носящим общее заглавие «Фрагменты философского содержания» (фрагмент «О метафизике и психологии» в настоящем издании опущен), и биографией, составленной Дедекиндом. В пределах каждого из трёх указанных разделов материал расположен в хронологическом порядке его возникновения. Второе издание этой книги последовало в 1892 г., с незначительными добавлениями из Nachlass'а. Кроме того, вышли в свет лекции Римана: «Partielle Differentialgleichungen der Physik» (обработка Hattendorf'а, 1869 г.); «Schwere, Elektrizität und Magnetismus» (обработка Hattendorf'а, 1875 г.) и «Elliptische Funktionen» (обработка Stahl'я, 1899 г.). Наконец, в 1902 г. в издании Teubner'а появились добавления к сочинениям Римана под редакцией Нётера и Виртингера «B. Riemann's gesammellte mathematische Werke. Nachträge» (herausgegeben von M. Nöther u. W. Wirtinger), где содержится подробно комментированное воспроизведение лекций 1861—1862 гг. по абелевым функциям, а также отрывки из лекций по дифференциальным уравнениям и ещё кое-что из Nachlass'а.

При отборе материала, вошедшего в настоящее собрание сочинений Римана, в основном использован однотомник (Werke) и, как правило, оставлены в стороне лекции. Из добавлений (Nachträge) взяты лишь небольшие отрывки лекций, касающиеся линейных дифференциальных уравнений и примыкающие к мемуару о гипергеометрическом ряде. Что касается лекций по абелевым функциям, то, несмотря на их большой научный интерес, мы решились не делать для них исключения вследствие их фрагментарности и вместе с тем довольно значительного объёма. Из однотомника не включены отрывки «Zur Theorie der Abelschen Funktionen» (из тех же лекций) и «Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen».

Предлагаемое собрание сочинений Римана, публикуемое в одной книге, разбито на две части, причём к первой части отнесены работы по анализу, теории функций и теории чисел, а ко второй — работы по геометрии, механике и математической физике. Разделение это несколько искусственное, так как творчество Римана цельно и базируется на одном общем руководящем принципе; кроме того, при решении проблем геометрического или физического содержания Риман пользуется средствами того же анализа и теории функций, и иной раз даже получается представление, что сама геометрическая или физическая проблема как бы служит предлогом для разворачивания этих средств. Однако, такое разделение всё же кажется нам полезным, поскольку мы отказались от хронологического расположения материала, считая расположение, построенное по принципу предметного расчленения, более удобным для читателя.

При переводе римановского текста мы старались передавать мысль возможно точнее, стремясь сказать не меньше и не больше того, что сказано самим автором. Представляло известные трудности избегать применения употребительной в наше время математической фразеологии в тех случаях, когда пользование ею означало бы неуместную модернизацию и навязывание автору понятий, в его эпоху ещё не вполне сложившихся. Укажем несколько примеров стилистических особенностей у Римана, которые мы считали необходимым сохранить при переводе. У Римана нет знака для модуля (абсолютного значения): он говорит описательно «независимо от знака A равно или меньше B», тогда как мы пишем $|A| \leqslant |B|$. Риман употребляет термин «ряд» не только в смысле «бесконечный ряд», но и в смысле «конечная сумма», а также в смысле «последовательность». Он говорит: «ряд равен S» или «ряд стремится к S», мы же говорим: «ряд имеет сумму S». «Функция становится бесконечно малой или бесконечно большой порядка k» означает: «функция имеет нуль или полюс порядка k». Более существенным является то обстоятельство, что у Римана нигде не обнаруживается привычная для нас концепция «точечного множества» — об этом подробнее сказано в статье о научных работах Римана.

В тексте в прямых скобках [ ] указаны редакционные примечания, которые отнесены в конец тома, причём нумерация примечаний проведена для каждой работы Римана в отдельности. Римская нумерация произведений Римана, помещённых в русском издании, не совпадает с нумерацией немецкого издания; соответствующий номер второго немецкого издания читатель найдёт в примечаниях.

В. Гончаров.

О НАУЧНЫХ РАБОТАХ РИМАНА

В. Л. Гончаров

Математическое творчество Римана разносторонне, полнокровно и своеобразно. Основы теории функций комплексного переменного, строение многомерных протяжённостей — их ситус и их метрика, эллиптические и абелевы функции, распределение простых чисел, теория воздушных волн, минимальные поверхности, тригонометрические ряды, теплопроводность, гипергеометрические функции, строение уха и глаза, основные понятия анализа — интеграл и производная, свет, магнетизм, электричество, синтетические натурфилософские теории — вот примерный перечень областей, в сторону которых были направлены его интересы. Если принять во внимание, что творческий период у Римана длился немногим более пятнадцати лет, что всё, написанное его рукой, умещается в одном томе немецкого издания его сочинений, объёмом около пятисот страниц, и сопоставить с количеством и качеством его достижений, то придётся притти к заключению, что интенсивность его творческой деятельности и уплотнённость математической мысли стоят на исключительном уровне. Вместе с тем, берётся ли Риман за вопрос, ещё никем нетронутый (таких немного), или обращается к задачам, уже рассмотренным его предшественниками (таких большинство), он неизменно применяет существенно новый подход и метод и собирает обильную жатву результатов. В том, что его резкое и сильное новаторство вовсе не агрессивно, а иногда даже и не сразу заметно, — его весьма характерная черта. О Римане ещё в большей степени, чем о Гауссе, можно сказать, что он стоит на грани двух эпох в математике, сочетая в себе их противоречия: он держит прочную связь с классиками, в особенности с Гауссом, к которому близок в смысле тематики (хотя противоположен по внутренним свойствам и творческому темпераменту), но ещё более тесные узы связывают его с последующими поколениями. «Никто другой не оказал более решительного влияния на современную математику, чем Риман», — так сказал о нём Ф. Клейн, и эти слова, нужно думать, не потеряли значения и в наши дни.

АНАЛИЗ, ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

То, что сделано Риманом в области теории функций, — мы покуда не ставим своей задачей говорить о совокупности всех его работ, — как бы вырастает из одного зерна. Этим зерном является своеобразная концепция функции. У классиков (у Эйлера) функция задавалась формулой и от формулы не отделялась: функция существовала всюду, где были выполнимы действия, указанные формулой, и прекращала своё существование там, где формула теряла смысл. Как известно, такое понимание функции было взорвано и уничтожено открытием рядов Фурье. Из уст своего учителя Лежёна-Дирихле Риман очень прочно воспринял новое определение, в основе которого лежала идея однозначного соответствия между значениями переменных. Теперь функция отделилась от её аналитического представления: оказалось, что одна и та же функция может выражаться различными формулами и что одна и та же формула может (в различных областях) представлять различные (в эйлеровском смысле) функции.

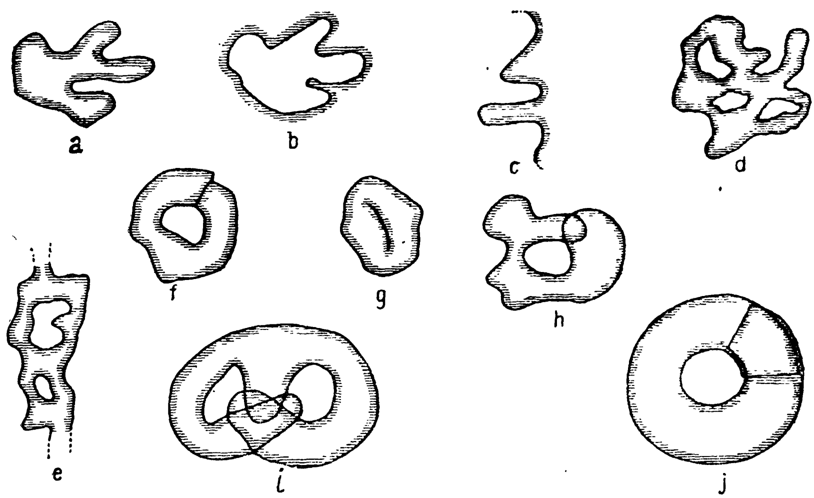
Но сущность — функция, однозначное соответствие, тогда как формула — лишь случайный её атрибут. Поэтому (вот концепция Римана) функции надлежит быть задаваемой или определяемой не посредством формулы, а как-то иначе, посредством свойств, ей внутренно присущих, и притом, как полагается в математике, совокупность свойств, определяющих функцию, должна быть такова, чтобы перечисляемые свойства были и необходимыми и достаточными для однозначного определения функции; другими словами, не должно существовать более одной функции, обладающей указанными свойствами, но и не должно быть названо ни одного лишнего свойства. В применении к функциям самого общего класса (в смысле Дирихле) этот принцип представляется бессодержательным: в самом деле, в каждой точке такая функция принимает то или иное значение независимо от других точек, и исчерпать все свойства функции, не задав значений во всех точках, невозможно. Но Риман, конечно, имеет в виду функции, принадлежащие к более узкому классу, именно те, которые мы теперь называем аналитическими.

Аналитические функции обладают рядом замечательных свойств, из которых каждое может быть взято в качестве определения этого класса функций. Риман исходит из свойства, которое не стоит в непосредственной зависимости от представления функций посредством той или иной формулы; он требует, чтобы в области существования функции $w = u + iv$ от переменной $z = x + iy$ была удовлетворена система уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Весьма существенно, что он сразу же вскрывает геометрическую сущность этих формальных соотношений (которые были известны ещё Даламберу) как условия конформности при отображении плоскости z на плоскость w. Здесь он следует по пути, намеченному Гауссом; разница лишь та, что Гаусс, по крайней мере по видимости, обращается к функциям комплексного переменного как к средству для разрешения картографической проблемы [1]), тогда как Риман использует упомянутое выше «картографическое» свойство отображений, порождаемых функциями комплексного переменного, в качестве определения и строит на нём всю дальнейшую теорию.

Каковы же, по Риману, те строго необходимые свойства функции комплексного переменного, которые нужно задать для того, чтобы функ-



Черт. 1.

ция была определена в некоторой области? Предположим пока, что данная область односвязная и ограничена некоторой замкнутой кривой, или, как выражается Риман, что по плоскости независимой переменной «разостлана» некоторая «поверхность» с одной только «граничной кривой» (черт. 1, a). Из основных дифференциальных уравнений Риман выводит, что действительная и мнимая части функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

(теперь эти уравнения принято называть «уравнениями Лапласа», а удовлетворяющие им функции — «гармоническими») и, кроме того, «сопряжённая» [2]) функция v определяется с точностью до постоянного слагаемого, если известна функция u. Что же касается любой гармонической функции, то для Римана физически очевидно (вероятно, близкое сопри-

[1]) C. F. Gauss, Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in dèn kleinsten Theilen ähnlich wird (1825).

[2]) Функции u и v «сопряжены» уравнениями Коши-Римана.

косновение с лабораторией Вильгельма Вебера оказало в данном случае своё влияние), что достаточно задать её значения на контуре области, чтобы и внутри области она была однозначно определена («принцип Дирихле»). Итак, в случае конечной области, ограниченной единственной замкнутой кривой, для определения функции $w = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ достаточно, например, задать значения её действительной части u на контуре области и, кроме того, ещё значение её мнимой части v в одной точке области. Конечно, можно также задать значения v на контуре и значение u в одной точке области, или (Риман идёт смело вперед по пути возможных обобщений)[1]) можно видоизменять «предельные условия» таким образом, что в каждой точке контура устанавливается функциональное соотношение, связывающее u и v, или же можно также, разбивая точки контура попарно, задать для каждой пары точек по два соотношения, связывающих между собою значения u и v в этих точках, и т. п.

Заметим дальше, что в построениях Римана так называемая бесконечно удалённая точка плоскости вводится наравне со всякой другой. В этом нет особенной новизны; однако, заслуживает быть упомянутым введённое Риманом (и теперь общеизвестное) геометрическое представление бесконечно удалённой точки посредством конформного отображения комплексной плоскости z на сферу. Пусть сфера касается плоскости в одной точке («полюсе»), и взаимно соответствующими считаются те точки плоскости и сферы, которые лежат на одной и той же прямой, проходящей через другой полюс сферы; этот самый полюс и следует рассматривать как отображение «бесконечно удаленной» точки плоскости[2]). Таким образом, следуя Риману, под «поверхностью, имеющей одну граничную кривую и содержащей бесконечно удалённую точку», мы должны понимать часть плоскости, лежащую вне заданной кривой, со включением бесконечно удалённой точки в качестве «несобственного» элемента (черт. 1, b). Подобным же образом, если «бесконечно удалённая точка находится на границе поверхности», то это означает, что граничная кривая не замкнута и разбивает плоскость на две части, из которых одна и составляет «поверхность» (черт. 1, c). Всё, что было сказано по поводу определения функции на «поверхности», остаётся справедливым и в этих случаях.

Положение существенно не меняется, если рассматриваемая «поверхность», как говорит Риман, «состоит из одного куска», но ограничивается несколькими «граничными кривыми», т. е. соответствующая область, по современной терминологии, связна, но не односвязна

---

[1]) См. § 19 диссертации «Основы общей теории функций одной комплексной переменной».

[2]) Риман говорил об этом отображении на своих лекциях по гипергеометрическому ряду (см. отрывок 3 под общим заглавием «О функциях, порождаемых некоторыми дифференциальными уравнениями» стр. 202 этого тома), и указанное геометрическое представление следует постоянно иметь в виду при чтении его работ.

(черт. 1, d и e) [1]): в этом случае значения определяемой гармонической функции должны быть заданы на всех «граничных кривых»; что касается сопряженной гармонической функции, то новое возникающее здесь обстоятельство заключается в том, что при обходе по замкнутым путям, не сводящимся к точке при непрерывной деформации в пределах «поверхности», она может изменяться на постоянные слагаемые. Если «поверхность» располагается по обе стороны некоторой части «граничной кривой», то каждый «край» рассматриваемой части кривой является самостоятельным (черт. 1, f) и предельные условия на одном «крае» никак не связаны с предельными условиями на другом. Точно так же возможны и незамкнутые «граничные» кривые, соединяющие две точки (черт. 1, g): их нужно трактовать как дважды проходимые (в противоположных направлениях) замкнутые кривые, и на двух их «краях» могут быть задаваемы совершенно различные предельные условия.

Риман делает далее решительный шаг чрезвычайной важности. Он утверждает, что его предложения справедливы и для таких «поверхностей», которые налегают на себя некоторыми своими частями; другими словами, допускается, чтобы «граничные кривые» сами себя пересекали. Таким образом, «римановы поверхности» (это наименование за ними прочно укрепилось) нужно представлять себе сделанными из очень тонкого слоя пластического вещества (теста или воска); они могут «надтачиваться» и быть продолжаемы по мере надобности во все стороны, распространяясь по плоскости (или по римановой сфере) и покрывая её несколькими «листами»; при этом точки римановой поверхности, лежащие «над» одной и той же точкой плоскости (или сферы), но принадлежащие различным листам, следует рассматривать как различные (черт. 1, h и i).

Вместе с тем — ещё один шаг вперёд — упомянутое пластическое вещество надлежит считать обладающим замечательным свойством: изготовленные из него «поверхности» могут перекрещиваться без пересечений, т. е. без того, чтобы возникали при этом общие точки, принадлежащие обоим перекрещивающимся листам сразу.

Поясним это на таком примере. Пусть поверхность определена неравенствами в полярных координатах (ρ, θ)

$$r < \rho < R, \quad 0 < \theta < t,$$

где $0 < r < R < \infty$, т. е. представляет собой «кольцевой сектор» с угловым раствором t. Пусть t постепенно увеличивается; покуда $t < 2\pi$, вся поверхность — однолистная, но при $2\pi < t < 4\pi$ (черт. 1, j) поверхность является уже частично двулистной. Предположим, что «надтачивание» продолжается дальше, до значения $t = 2m\pi$, где m — целое число; тогда поверхность станет m-листной, причём отрезки, определяемые со-

---

[1]) «Поверхности», состоящие из нескольких «кусков», т. е. несвязные, с установленной точки зрения не представляют интереса, так как каждый «кусок» рассматривается самостоятельно.

отношениями $\theta = 0$, $r < \rho < R$ и $\theta = 2m\pi$, $r < \rho < R$, будут составлять часть граничной кривой. Отождествим теперь точки с координатами $(\rho, 0)$ и $(\rho, 2m\pi)$, т. е. склеим названные отрезки мысленно (физически сделать это без пересечений, конечно, невозможно). Получится новая риманова поверхность, состоящая из m листов и имеющая две граничные кривые, именно, m раз проходимые круги $\rho = r$ и $\rho = R$.

Многолистные поверхности со взаимным перекрещиванием листов являются также предметом рассмотрения у Римана, причём функции на таких поверхностях определяются предельными условиями прежнего типа.

Совершая ряд возможных обобщений своей задачи, Риман, однако, решительно устраняет другие, представляющиеся ему мало полезными. В своих работах по алгебраическим функциям он предполагает, что поверхности составляются не иначе, как из конечного числа листов, и ограничиваются не иначе, как конечным числом кривых. Самое понятие кривой не подвергается вместе с тем никаким уточнениям.

Зададим себе теперь вопрос: нельзя ли допустить, что некоторые из «граничных кривых» обращаются в точки? Приходя к заключению, что в окрестности «отдельной» точки (если она не является искусственной «устранимой» особенностью) изучаемые функции не могут оставаться «конечными» (ограниченными), Риман и в этом пункте ставит предел возможным обобщениям, допуская, что «порядок бесконечности в таких точках является конечным» (§ 13 его диссертации). Таким образом, выражаясь современным языком, Риман устраняет из рассмотрения существенные особенности и оставляет лишь полюсы. Свою основную задачу он обобщает на рассматриваемый случай в том смысле (это содержится уже в общей теореме § 18), что сами точки разрыва (т. е. особенные точки) должны быть указаны заранее, а также указан характер разрыва, т. е. заданы главные части лоранова разложения, представляющиеся, согласно допущению Римана, в виде суммы конечного числа членов [1]).

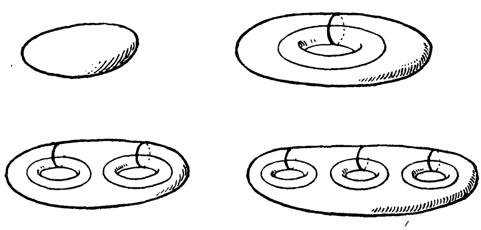
При исследовании алгебраических функций Риман встречается исключительно с замкнутыми поверхностями, т. е. с поверхностями, не имеющими вовсе «граничных кривых». Если такая поверхность однолистна, то она расстилается по всей плоскости со включением бесконечно удалённой точки (по всей римановой сфере). Если же она, будучи связной, состоит из m (>1) листов, то на ней должны быть точки ветвления.

Объясним, что такое точка ветвления $(m-1)$-ой кратности, возвращаясь к примеру выше рассмотренной m-листной «кольцевой поверхности». Допустим, что «надтачивание» этой поверхности продолжается та-

---

[1]) Заметим, кстати, что введение существенных особенностей опорочило бы основной принцип римановых построений. В самом деле, если бы мы, например, пожелали на всей плоскости комплексного переменного определить некоторую целую трансцендентную функцию, то, следуя принципу Римана, должны были бы задать главную часть разложения в окрестности её единственной особенности, именно бесконечно удалённой точки, а это значило бы задать её тэйлорово разложение, т. е. формулу, притом трансцендентную.

ким образом, что радиус меньшей окружности r стремится к нулю: граничная кривая в пределе обращается в точку; эта точка оказывается или «устранимой» особенностью функции (если при приближении к ней по любому листу функция стремится к одному и тому же конечному предельному значению), или же, в силу сделанного Риманом допущения, в ней может также оказаться и разрыв (полюс) конечного порядка. Эта точка считается во всех случаях принадлежащей сразу всем m листам поверхности и называется «точкой ветвления». Подобным же образом, заставляя неограниченно возрастать радиус большей окружности R, мы получаем ещё другую, бесконечно удалённую точку ветвления, причём поверхность, полученная после описанного предельного перехода, уже не имеет границы, т. е. является замкнутой, притом, очевидно, связной m-листной.



Черт. 2.

Построенная только что поверхность представляет собой частный пример m-листной замкнутой поверхности: исследуя в своей диссертации общий случай m-листной поверхности T, замкнутой или же ограниченной конечным числом «граничных кривых», Риман предполагает (§ 5), что заданы как граничные кривые, так и положения точек ветвления (в конечном числе); однако, Риман указывает, что в общем случае для определения поверхности этих данных ещё недостаточно и следует задать способ соединения листов поверхности.

Изучение связности поверхности как вопрос общетопологического характера Риман проводит, не ограничиваясь случаем «поверхностей, разостланных по плоскости», а имеет в виду общий случай двумерных многообразий «без складок и расщеплений». Он приходит к заключению, что посредством определенного (т. е. одного и того же, инвариантного для данной поверхности) числа «разрезов»[1]) многосвязная поверхность T может быть превращена в односвязную T'. Если поверхность T замкнутая, то число разрезов непременно чётное, и Риман обозначает его через $2p$. Впоследствии число p получило название **рода** поверхности (Geschlecht). На черт. 2 изображены примеры замкнутых поверхностей рода 0, 1, 2 и 3 с отмеченными на них разрезами. Вообще, любая замкнутая поверхность T рода p, разостланная по плоскости (сфере), посредством растяжений и сжатий, однако, без разрывов и склеиваний, «топологически», может быть превращена в поверхность подобного же типа, но с p «дырами».

Род p замкнутой римановой поверхности T легко устанавливается, если известно число листов m и число (и кратность) точек ветвления. Для случая, когда все точки ветвления простые (1-ой кратности) и число их

[1]) См. определение этого термина на стр. 55.

равно w, Риман в § 7 мемуара «Теория абелевых функций» получает формулу

$$p = \frac{w}{2} - m + 1.$$

В упомянутом мемуаре наперёд заданная m-листная замкнутая риманова поверхность T становится носителем функций комплексного переменного, которые, согласно общему принципу, должны быть определены минимальным числом их свойств. Уже в своей диссертации (§ 18) Риман обобщает и формулирует принцип Дирихле таким образом, чтобы его было удобно применять при построении функций на заданной римановой поверхности T, или, точнее говоря, при доказательстве существования функций на этой поверхности, обладающих указанными свойствами. Оказывается, что, согласно обобщённому принципу Дирихле, функция определяется на поверхности T с точностью до постоянного слагаемого, если заданы все её особенности (полюсы, в конечном числе, вместе с главными частями соответствующих разложений), а также действительные части тех «скачков» (модулей периодичности), которые она испытывает при переходе через каждый из $2p$ «разрезов». Допускается, чтобы, кроме полярных, имелись также и логарифмические особенности; но тогда следует при построении сделать дополнительные разрезы на поверхности T. Скачки на разрезах, очевидно, не зависят от положения выбранной точки на данном разрезе; поэтому производные от построенных функций уже имеют все скачки, равные нулю, т. е. они однозначны на всей поверхности T.

Построив функции, однозначные на всей поверхности T, Риман легко делает заключение, что симметрические функции их отдельных «ветвей» однозначны на плоскости z и, следовательно (так как число полюсов конечное), рациональны; итак, эти функции — алгебраические, т. е. удовлетворяют уравнению степени m с рациональными относительно z коэффициентами. Отсюда вытекает, что те функции, которые были построены раньше, являются интегралами от алгебраических функций, т. е. «абелевыми интегралами».

Мы воспроизвели в общих чертах ход мыслей Римана для того, чтобы было ясно, что введенные им принципы позволяют, исходя из данной поверхности T и данных особенностей функции, строить саму функцию.

Если следовать обратному пути, более простому и в большей степени излюбленному позднейшими авторами, то нужно исходить из формулы, определяющей алгебраическую функцию, т. е. из алгебраического уравнения, и затем строить риманову поверхность, на которой функция является однозначной. Но тогда остаётся открытым вопрос, который у Римана сразу получает полное решение: *можно ли выбрать алгебраическое уравнение таким образом, чтобы определяемая им функция была однозначной на заданной наперёд римановой поверхности?*

Перейдём к вопросу о том, насколько обоснованной является теория Римана. Наиболее уязвимым её местом оказалось применение «принципа Дирихле». Сам Риман доказывает принцип Дирихле следующим образом [1]).

Ограничимся простейшим случаем, когда заданы значения гармонической функции на контуре односвязной и однолистной области — «поверхности» T, а определяемая гармоническая функция не должна вовсе иметь особенностей в этой области. Риман ставит вариационную задачу: обратить в минимум интеграл

$$\int\int_T \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

— при условии, что функция α переменных x и y принимает заданные значения на контуре; посредством рассуждения, которое представляет интерес, но не является исчерпывающим и убедительным, он приходит к выводу о существовании требуемой функции и затем заключает, в сущности применяя обычный вариационный метод, что эта функция — гармоническая в рассматриваемой области.

Нужно заметить, что в сочинениях Дирихле нет ни приведённого рассуждения, ни формулировки самого предложения, и если Риман называет это предложение «принципом Дирихле», то, вероятно, потому, что подобный ход мыслей применялся Дирихле в его лекциях; однако, идея привлечения экстремальной проблемы к доказательству существования, несомненно, не принадлежит Дирихле, так как встречается ещё у Гаусса (метод наименьших квадратов).

Против доказательства Римана выступил Вейерштрасс в заметке «Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip» [2]) и привел пример вариационной проблемы, не допускающей никакого решения. Причина этого явления, как теперь известно, заключается в том, что существует разница между экстремальной проблемой в конечно-мерном точечном пространстве и в функциональном «пространстве»: последовательность точек в пространстве n-измерений непременно допускает предельные точки, тогда как в «пространстве функций» из последовательности функций не всегда можно извлечь последовательность, сходящуюся к некоторой предельной функции. Критика Вейерштрасса (как сообщает с его слов Ф. Клейн) была известна Риману; он признавал её справедливость, но оставался непоколебимо убеждённым в том, что его основная теорема все же верна.

Как бы то ни было, в глазах большинства современников этой дискуссии все результаты Римана, основанные на применении принципа Дирихле, были серьезно скомпрометированы. «Спасти» их удалось ученику Римана Нейману и ученику Вейерштрасса Шварцу, которые, пользуясь

[1]) § 16 диссертации: полагаем там $\beta\equiv0$.

[2]) Опубликована в 1869 г. уже после смерти Римана (см. Werke, т. 2, стр 49).

различными методами, сумели доказать принцип Дирихле, не прибегая к вариационной задаче [1]).

Но наступило и время торжества вариационного метода: в 1904 г. Гильберт, вернувшись к рассмотрению интеграла Дирихле, восполнил доказательство Римана и установил существование функции, обращающей в минимум этот интеграл [2]). В более общей форме вопрос был разобран Курантом и Вейлем [3]).

Другим зыбким местом у Римана являются топологические предпосылки его построения, а именно, доказательство того, что число разрезов, которое нужно произвести на поверхности, чтобы превратить её в односвязную, не зависит от выбора системы разрезов. В «Теории абелевых функций» Риман приводит иное доказательство этого предложения, чем в своей диссертации; повидимому, первое не казалось ему вполне убедительным. Однако, оба доказательства нуждаются в дальнейшем обосновании. Поскольку вся топологическая часть работ Римана целиком базируется непосредственно на интуитивной основе и вместе с тем допускает наглядные геометрические представления, оказывающие достаточно сильное убеждающее воздействие, большинство авторов прошлого столетия не обнаруживало особого критицизма в указанном направлении; из новейших авторов отметим Вейля, который в уже цитированной книге осуществляет попытку увязать теорию связности Римана с современными требованиями математической строгости.

Хотя топологическая часть диссертации Римана относится к произвольным поверхностям, однако, в дальнейшем он сам ограничивается рассмотрением поверхностей T, разостланных по замкнутой плоскости комплексного переменного z; впрочем, в последнем, 22-м параграфе диссертации он д е л а е т н а м ё к на то, что, «становясь на геометрическую точку зрения, мы естественно пришли бы к значительному расширению нашей задачи. Именно, отнюдь не является существенным ограничиваться рассмотрением плоских поверхностей; напротив, задача об отображении с сохранением подобия в бесконечно малом может быть поставлена и решена для случая совершенно произвольной поверхности». Другими словами, возможно рассматривать функции комплексного переменного на произвольных двумерных многообразиях. Такого рода функции на «общих римановых поверхностях» были позднее изучаемы Бельтрами и Клейном.

---

[1]) C. N e u m a n n, Vorlesungen ueber Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen, 2-te Auflage, 1884.

H. A. S c h w a r z, Züricher Vierteljahrsschrift, 1869—1870; Berliner Monatsberichte, 1870.

[2]) D. H i l b e r t, Ueber das Dirichletsche Prinzip (Mathem. Ann., 59).

[3]) См. имеющуюся в русском переводе книгу Р. К у р а н т, Геометрическая теория функции комплексной переменной (ОНТИ, Л.—М., 1934) и H. W e y l, Die Idee der Riemannschen Fläche (1913, 1923), также работу H. Lebesgu'a в 24 томе Rendiconti dei Circolo Matematico di Palermo (1907).

В этой связи интересно привести следующее суждение Вейля: [1]) «Ещё приходится от времени до времени встречаться с мнением, будто бы римановы поверхности — не что иное, как образ, интерпретация, как средство (добавляют — очень ценное, очень полезное) для наглядного представления многозначных функций [2]). Риманова поверхность есть необходимая, существеннейшая составная часть теории, она есть подлинное её основание. Она не есть также нечто такое, что a posteriori более или менее искусственно извлекается из аналитических функций, но должна быть рассматриваема как исходное данное, как почва, на которой функции вырастают и дают плоды».

Перечислим вкратце другие существенные результаты, полученные Риманом в его основных работах по теории функций комплексного переменного.

В качестве иллюстрации к своей общей теореме Риман доказывает в § 21 своей диссертации предложение, которое теперь занимает центральное место в теории конформного отображения: если заданы две односвязные области («поверхности»), то существует одно и только одно конформное отображение одной области на другую при дополнительном условии, чтобы было задано соответствие между двумя точками внутри областей и между двумя точками на контурах («граничных кривых»). Как известно, эта теорема используется в наше время как мощное средство для определения новых функций: в согласии с принципами Римана вместо формулы, определяющей функцию, задают две области, между которыми определяемая функция осуществляет конформное соответствие. Примером может служить знаменитая модулярная функция, которая была известна ещё Гауссу, но широко лансирована была только Риманом в его лекциях [3]). Те уточнения в теореме Римана о конформном отображении, необходимость которых вызывается современной теорией множеств, были произведены Каратеодори [4]).

Не ограничиваясь доказательством существования абелевых интегралов на заданной поверхности T, Риман устанавливает также их классификацию: к интегралам первого рода относятся такие, которые на всей поверхности не имеют особенных точек; к интегралам второго рода — те, которые имеют только полюсы; к интегралам третьего рода — те, которые имеют также логарифмические критические точки. Число линейно независимых интегралов первого рода равно

---

[1]) Из предисловия к его книге.

[2]) Ряд авторов, в особенности французских, также и в до-римановскую эпоху, не вводя римановой концепции, пользовались «обходами» (lacets) вокруг критических точек и исследовали перестановки «ветвей» функции, заданной алгебраическим уравнением.

[3]) См. отрывок 9 под общим заглавием «О функциях, порождаемых некоторыми дифференциальными уравнениями», стр. 213 этого тома.

[4]) Сошлёмся на его книгу «Конформное отображение», имеющуюся в русском переводе (ОНТИ, М.—Л., 1934).

роду поверхности. Вводя (§ 6 и дальше «Теории абелевых функций») алгебраическое уравнение $F(s, z)=0$, порождающее данную поверхность, Риман указывает также общий метод представления построенных им функций через интегралы от рациональных функций точки на поверхности T. Чтобы понять значение и смысл этих результатов, достаточно заметить, что единственный [1]) предшественник Римана, сам Абель, при изучении этих вопросов ограничивался гиперэллиптическим случаем, когда алгебраическое уравнение имеет вид $s^2-P(z)=0$, где $P(z)$ — полином степени $2n-1$ или $2n$, а поверхность T — двулистная с $2n$ точками ветвления.

Рассматривая (там же, §§ 11—13) замкнутые поверхности T, которые могут быть конформно отображены одна на другую как несущественно различные, Риман объединяет в один класс все неприводимые алгебраические уравнения, переводящиеся одно в другое посредством так называемых бирациональных преобразований. Он ставит перед собой задачу определения числа произвольных постоянных (модулей), от которых зависит класс алгебраических уравнений: это число оказывается равным нулю при $p=0$, единице при $p=1$, наконец $3p-3$ при $p \geqslant 2$. Иначе, по Клейну, можно сказать: число модулей во всех случаях равно $3p-3+r$, где r — число произвольных параметров, от которых зависит преобразование поверхности самой в себя. Этот результат имеет большое значение в теории конформного отображения многосвязных областей [2]).

Вторая половина «Теории абелевых функций» посвящена решению проблемы инверсии Якоби с помощью θ-функций. Изложим вкратце сущность и историю вопроса. Интеграл

$$w=\int\limits_a^z \frac{dz}{\sqrt{P_4(z)}},$$

(где через $P(z)$ обозначен многочлен, а значок указывает степень) — эллиптический, рода $p=1$. Он имеет $2p=2$ модуля периодичности, и потому обратная функция $z=z(w)$, однозначная и мероморфная во всей плоскости, является двоякопериодической, т. е. эллиптической. Якоби, являющийся, как известно, одним из творцов теории эллиптических функций, представлял эти функции через так называемые «якобиевские» [3]) эллиптические θ-функции, т. е. ряды, в которых логарифм общего члена есть полином второй степени относительно индекса суммирования и первой — относительно независимой переменной. Де-

---

[1]) Если не считать гениальных предвидений Галуа, содержащихся в его предсмертном письме к Шевалье (см. Э. Галуа, Соч. М.—Л., ОНТИ, 1936).

[2]) См., напр., G. Julia, Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, 1934.

[3]) Впервые θ-функции появляются, впрочем, не у Якоби, а у Фурье, в Théorie de la chaleur (1822).

лая шаг вперёд, Якоби поставил [1]) перед собой задачу обращения интегралов

$$\int\limits_a^z \frac{dz}{\sqrt{P_6(z)}} \quad \text{и} \quad \int\limits_a^z \frac{z\,dz}{\sqrt{P_6(z)}};$$

так как соответствующее гиперэллиптическое уравнение $s^2 - P_6(z) = 0$ — рода $p = 2$, то каждый из этих интегралов имеет четыре модуля, так что обратные им функции имеют по четыре периода. Правильно полагая, что однозначная функция с числом периодов, большим двух, не может не сводиться к постоянной, Якоби, однако, упустил из виду, что интересующие его обратные функции могут не быть однозначными, и объявил рассматриваемую им проблему «абсурдной». Пытаясь всё же найти обобщение проблемы инверсии эллиптического интеграла первого рода на гиперэллиптический случай и идя по пути, указываемому знаменитой теоремой Абеля, он пришёл к идее ввести функции w_1 и w_2 двух переменных z_1 и z_2:

$$w_1 = \int\limits_{a_1}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{P_6(z)}} + \int\limits_{a_2}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{P_6(z)}},$$

$$w_2 = \int\limits_{a_1}^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{P_6(z)}} + \int\limits_{a_2}^{z_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{P_6(z)}},$$

и трактовать проблему инверсии, как решение этих уравнений относительно z_1 и z_2; притом он высказал предположение, что задача может быть решена с помощью обобщённых θ-рядов, выражаемых двукратными суммами. В этом направлении, в самом деле, вскоре последовало решение поставленной задачи, выполненное Göpel'ем [2]) и несколько позднее и с большей детализацией учеником Якоби Rosenhain'ом [3]).

Далее, естественно возникла проблема инверсии абелевых интегралов для случая $p > 2$. Пусть $u_1(z)$, $u_2(z), \ldots, u_p(z)$ — система линейно независимых абелевых интегралов, не имеющих особенностей на данной римановой поверхности T рода p; требуется решить систему уравнений

$$w_i = \sum_{k=1}^{p} u_i(z_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

относительно переменных z_k. Этим вопросом при любом p занимался уже Эрмит в 1844 г. [4]); однако, результаты его не были полными.

Окончательный успех достался на долю Римана. Заметим прежде всего, что в § 12 «Теории абелевых функций» он мимоходом (при определении числа модулей) устраняет недоумения Якоби по поводу

[1]) Journal de Crelle, т. 13, 1835.

[2]) Journal de Crelle, т. 35, 1847.

[3]) Mémoires présentés par divers Savants, т. 11, 1851.

[4]) Journal de Math. pures et appl., т. 9.

обращения всюду конечного абелева интеграла при $p>1$ и разъясняет характер конформного отображения, доставляемого таким интегралом, причём выясняется и неоднозначность обратной функции. В § 17, несколько неожиданно для читателя, он вводит в рассмотрение θ-ряды p-ой кратности общего вида

$$\theta((v)) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_1^p v_\mu m_\mu} \text{[1]}$$

и указывает (впервые) условия их сходимости[2]). Эти условия оказываются выполненными, если в качестве величин $a_{\mu,\mu'}$ взять модули периодичности линейно независимых и надлежащим образом нормированных интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_p$; в качестве же переменных v Риман вставляет сами эти интегралы, и тогда получается «риманова θ-функция»

$$\theta((u(z))) = \theta(u_1(z), u_2(z), \ldots, u_p(z)).$$

Но разности $u_1(z) - e_1$, $u_2(z) - e_2, \ldots, u_p(z) - e_p$, где $e_1, e_2, \ldots, e_p$ обозначают постоянные числа, образуют систему интегралов, обладающих теми же свойствами; Риман вводит θ-функцию, зависящую от p параметров $e_1, e_2, \ldots, e_p$

$$\theta((u(z) - e)) = \theta(u_1(z) - e_1, u_2(z) - e_2, \ldots, u_p(z) - e_p),$$

и доказывает (§ 23), что

1) эта функция на разрезанной поверхности T' имеет ровно p нулей $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$, и что

2) при надлежащей фиксации постоянных слагаемых, входящих в интегралы $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_p(z)$, справедливы соотношения (конгруэнции)

$$e_i \equiv \sum_{k=1}^{p} u_i(\eta_k),$$

причём эти соотношения нужно понимать в том смысле, что разности между левой и правой частями являются линейными комбинациями, с целыми коэффициентами, из модулей периодичности соответствующих интегралов. В этих результатах в сущности и заключается решение проблемы инверсии, если станем рассматривать величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ как функции величин $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

Последние параграфы (26 и 27) мемуара Римана посвящены алгебраическим функциям, которые на данной поверхности T при переходе через разрезы приобретают постоянные множители — корни из единицы; такие функции позднее получили название Wurzelfunktionen.

---

[1]) Здесь $\theta((v))$ есть сокращённое обозначение для

$$\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p).$$

[2]) Условием сходимости является отрицательная дефинитность квадратической формы $\sum a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}$. Доказательство в мемуаре Римана не приведено, но сообщалось им на лекциях; оно воспроизведено в настоящем издании на стр. 151.

Те p функций от p переменных, которые получаются в результате решения якобиевской проблемы инверсии, обладают свойством, что всякая составленная из них симметрическая функция является однозначной функцией p основных независимых переменных и притом, естественно, имеет $2p$ периодов; такого рода функции впоследствии получили наименование «абелевых» (в специальном смысле); эти функции были также предметом исследования у Римана. В письме к Вейерштрассу [1]) от 1859 г. Риман доказывает, что однозначная функция p переменных, не сводясь к постоянной, не может иметь более $2p$ периодов.

Позднейшие результаты Римана, полученные им в области алгебраических функций и «абелевых интегралов», составили предмет его лекций в 1861—1862 г. Последовавшая болезнь, сведшая Римана в могилу, не позволила ему отредактировать собранный им богатый материал в форме, пригодной для опубликования в печати, и этот важнейший курс Римана, отражающий в себе вершины его творчества, сохранился в виде записок его слушателей — Prym'a, Roch'a и Minnigerode [2]).

Здесь содержатся между прочим эскизы более общей теории θ-функций и построение выражений для «абелевых» функций в простейших случаях (гиперэллиптические уравнения и уравнения рода $p = 3$). Детальная обработка этого наследия досталась на долю позднейших авторов, из которых некоторые были непосредственными учениками Римана. В этой связи назовем работы Неймана [3]), Прима, В. Вебера и Клебша [4]). Независимо от Римана алгебраические функции и их интегралы изучались Вейерштрассом и близкими к нему авторами. Более новое изложение теории, примыкающее к кругу идей Римана, можно найти у Шталя и в статье Крацера и Виртингера в немецкой энциклопедии [5]).

Отметим, наконец, общие курсы теории функций комплексного переменного, написанные в духе Римана и принадлежащие двум авторам, из которых первого можно считать другом и учеником Римана; я имею в виду Казорати и Дюрежа [6]).

---

[1]) См. стр. 155 настоящего издания.

[2]) Воспроизведён с дополнениями и примечаниями М. Нётером: B. Riemann's gesammelte Werke. Nachträge, herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger, 1902.

[3]) Его курс цитирован на стр. 16; эта книга задумана как комментарий к работам Римана и имеет задачей облегчить их понимание, в точности следуя тому же ходу мыслей.

[4]) F. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Funktionen. Wiener Denkschr., 24, 1865; Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche, 1866; Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel, 1882 и др.

H. Weber, Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3, 1876.

Clebsch u. Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen, 1866.

[5]) H. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen, 1896.

A. Krazer u. W. Wirtinger, Abelsche Funktionen u. allgemeine Thetafunktionen, 1920.

[6]) F. Casorati, Teoria delle funzioni di variabili complesse, 1868; вышел только первый том.

H. Durège, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's, 1864.

Перейдём теперь к циклу работ Римана, которые позволяют рассматривать его как одного из основателей аналитической теории дифференциальных уравнений.

В своих исследованиях по гипергеометрическим и другим функциям, удовлетворяющим линейным дифференциальным уравнениям с алгебраическими коэффициентами, Риман остаётся верен тем принципам, которые положены им в основу его диссертации. Он определяет рассматриваемые им функции не с помощью формулы, роль которой могло бы играть дифференциальное уравнение или его решение в виде определённого интеграла или степенного ряда, а посредством перечисления строго необходимых внутренних свойств, присущих изучаемым функциям. Необходимо, однако, заметить, что, во-первых, речь теперь идёт в сущности не об отдельной функции, а о целом их семействе, т. е. о совокупности функций, линейно зависящих от n произвольных постоянных

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i;$$

во-вторых, рассматриваемые функции на этот раз не являются алгебраическими. Задача ставится так: функции y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) регулярны во всей плоскости комплексного переменного x (т. е. на всей римановой сфере)[1]), за исключением к о н е ч н о г о числа точек $a, b, \ldots, g$; что касается этих последних, то предполагается, что при обходе около каждой такой точки каждая из функций y_i превращается в некоторую линейную комбинацию из функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, так что вся система функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ подвергается некоторому линейному преобразованию, которое считается заданным для каждой из точек $a, b, \ldots, g$. Совокупность линейных преобразований, которым подвергается система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при обходе по всевозможным замкнутым путям, не проходящим через точки $a, b, \ldots, g$, образует так называемую «группу монодромии» для рассматриваемого семейства функций. Исходя из заданных преобразований группы монодромии, Риман пытается в незаконченной и опубликованной лишь через 10 лет после его смерти работе[2]) сделать дальнейшие заключения о свойствах рассматриваемого семейства функций, в частности — построить дифференциальное уравнение, для которого все функции семейства были бы интегралами. Он устанавливает, что в окрестности выделенных критических точек, например, в окрестности точки a, данные функции являются линейными комбинациями n степенных рядов, из которых каждый есть произведение некоторой (вообще говоря, дробной) степени $x - a$ на ряд, расположенный по целым, положительным

[1]) Риман имел в виду ставить вопрос более широко, т. е. рассматривать произвольную риманову поверхность T; однако, внимательно занимается только случаем плоскости.

[2]) «Две теоремы общего характера, касающиеся линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами», датированы 1857 годом. См. стр. 176 настоящего издания.

и отрицательным, степеням $x-a$, т. е. на однозначную в окрестности точки a функцию, разложенную в ряд Лорана[1]). Допуская, что «рассматриваемые функции нигде не обращаются в бесконечность бесконечно высокого порядка», т. е. что показатели во всех таких рядах растут лишь в сторону положительной бесконечности, Риман приходит к заключению, что интересующее его дифференциальное уравнение имеет в качестве коэффициентов целые рациональные функции независимой переменной x.

Довести до конца определение вида этого дифференциального уравнения Риману не удалось. Но самое главное, что не сделано Риманом, это доказательство существования системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которые вели бы себя так, как это требуется в работе Римана. Возникшая отсюда «проблема Римана» была разрешена лишь гораздо позднее Давидом Гильбертом[2]) с помощью интегральных уравнений. Следует заметить, что, идя в другом направлении, чем Риман, т. е. отправляясь от дифференциального уравнения, а не от группы монодромии, ученик Вейерштрасса Л. Фукс на протяжении десятилетия, прошедшего между смертью Римана и опубликованием его незаконченной работы в первом издании сочинений (и, следовательно, независимо от Римана), развил обширную теорию уравнений, за которыми укрепилось название «фуксовых» и которыми, как выяснилось, занимался уже Риман.

При жизни же Римана был напечатан (в том же 1857 г.) только один сюда относящийся мемуар, а именно: «Новые результаты по теории функций, представимых гауссовым рядом $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$»; он посвящён частному случаю разбираемой теории, когда имеются всего лишь три критические точки a, b, c. Оказывается, что достаточно задать поведение рассматриваемой системы двух функций около точек a, b, c (т. е. наименьшие показатели соответствующих степенных рядов α, α'; β, β'; γ, γ'), чтобы отсюда вытекало дифференциальное уравнение «римановой функции»

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

Если $a=0$, $b=\infty$, $c=1$, то это уравнение—гипергеометрическое; его частный интеграл был рассмотрен Гауссом в 1812 г. в виде «гауссова» ряда, который расположен по степеням четвёртого аргумента и у которого три первых аргумента весьма просто связаны с римановыми показателями α, α', β, β', γ, γ'. Впрочем, с гипергеометрическими функциями встречался уже Эйлер.

---

[1]) Исключительные случаи, когда вместо дробных степеней $x-a$ появляется логарифм от $x-a$, были Риману также известны: см. отрывок «Об интегралах линейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности точки ветвления», стр. 194.

[2]) D. Hilbert, Grundzüge der Theorie der linearen Integralgleichungen, гл. X 1912 1924.

Исходя из введённого Риманом определения, удаётся очень быстро получить различные свойства гипергеометрических функций и вывести их многочисленные трансформации.

Представляют значительный интерес и лекции Римана по гипергеометрическому ряду: воспроизводимые в настоящем издании отрывки показывают, что Риман рассматривал также конформное отображение, осуществляемое отношением двух частных интегралов дифференциального уравнения 2-го порядка, и тем прокладывал путь к теории автоморфных функций. В частности, рассмотрение гипергеометрического уравнения привело Римана к группам многогранников и к эллиптической модулярной функции [1]).

В дальнейшем это направление мысли получило значительно более полное развитие у Шварца и в особенности у Клейна [2]).

В менее тесной связи с общей программой исследований Римана в области теории функций стоят две его замечательные работы, рассмотрением которых мы закончим первую часть настоящего обзора. Первая из них — «О числе простых чисел, не превышающих данной величины» — относится к позднейшеи эпохе (1859 г.), когда научные заслуги Римана получили всеобщее признание; она была направлена им Берлинской академии, избравшей его своим сочленом. Вторая работа — «О возможности представления функций посредством тригонометрического ряда» — является диссертацией (Habilitationsschrift), представленной шестью годами раньше в Гёттингенский университет с целью получения права преподавания; долгое время, до опубликования собрания сочинений Римана в 1876 г., она была мало известной.

Знаменитый мемуар о простых числах имеет скорее теоретико-функциональное, чем теоретико-числовое содержание. В нём Риман вводит функцию комплексного переменного

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ \ldots\ +\frac{1}{n^s}+\ldots,$$

ныне широко известную под именем «Римановой ζ-функции»; устанавливая ряд очень глубоких её свойств, он не всегда приводит исчерпы-

---

[1]) Отметим, что с общими автоморфными функциями Риман имел также случай соприкоснуться, занимаясь равновесием электричества на круговых цилиндрах (см. статью XXIV настоящего издания), а с эллиптическими модулярными функциями повстречался при чтении «Fondamenta» Якоби, когда занимался разысканием примеров всюду разрывных функций: (см. не вошедший в настоящее издание отрывок «Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen», B. Riemann's Gesammellte Mathematische Werke (изд. 2, XXVIII).

[2]) H. A. Schwarz, Journ. de Crelle, 75; также Gesamm. Abh. II, 211, 353—355, 363.

F. Klein, Vorlesungen ueber die hypergeometrische Funktion, 1933; эта книга может служить комментарием при чтении работ Римана.

F. Klein u. R. Fricke, Vorlesungen ueber Modulfunktionen und ueber automorphe Funktionen (лекции, читанные в Гёттингенском университете в 1893—1894 г.).

вающие доказательства. Из текста самой работы не совсем ясно, какие утверждения Римана были им строго доказаны и какие являются лишь гипотезами: будучи вполне убеждён в справедливости высказанных им мыслей, Риман нередко шёл вперёд, не останавливаясь на мелочных деталях и на формализации доказательств (вспомним «принцип Дирихле»). Восстановление всех доказательств в мемуаре Римана составило задачу последующих поколений: в процессе этой работы возникали и развивались новые математические теории; сюда относится вклад, сделанный Адамаром в современную теорию целых функций. И всё же, несмотря на громадные затраченные усилия, функция $\zeta(s)$ вплоть до настоящего времени остаётся загадочной, так как одна из «гипотез» Римана (кстати, как таковая им приведённая) не доказана и не опровергнута.

Генезис мемуара о целых числах нужно искать в «Théorie des nombres» Лежандра, книге, штудированной Риманом ещё до поступления в университет, затем в работах Дирихле, впервые начавшего привлекать аппарат анализа к проблемам теории чисел (например, в его работах, посвящённых вопросу о числе простых чисел, содержащихся в арифметической прогрессии) и введшего в употребление ряды вида $\sum \frac{a_n}{n^s}$, которые Дедекинд назвал «рядами Дирихле» и простейшим примером которых является ζ-функция. С другой стороны, проблема распределения простых чисел, как теперь известно, чрезвычайно занимала Гаусса, который получил (или наметил) ряд важных теорем, им самим не опубликованных, а также произвёл обширные «эмпирические» исследования в этой области. В какой степени мог быть у Римана контакт с Гауссом по вопросам теории чисел, можно только догадываться [1]).

Рассматривая поведение функции $\zeta(s)$ во всей комплексной плоскости, Риман кладёт начало тому направлению в теории чисел, которое носит теперь название «аналитической» теории чисел.

Представляя функцию $\zeta(s)$ в виде некоторого интеграла по бесконечному пути, охватывающему особенности подинтегральной функции («Schleifenintegral»), и затем выводя двумя различными способами функциональное уравнение $\zeta(s)$, которое в современной записи имеет вид

$$\zeta(1-s) = 2 \cdot (2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s),$$

Риман устанавливает, что $\zeta(s)$ имеет единственный полюс $s=1$ и так называемые «тривиальные» нули $s=-2n$ $(n=1, 2, \ldots)$ и, кроме того, имеет нули в полосе $0 < \Re s < 1$; затем указывает без доказательства асимптотическую формулу для числа этих (не «тривиальных») нулей и высказывает предположение (это и есть знаменитая, поныне не доказанная гипотеза Римана), что все эти нули лежат на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$.

[1]) Между прочим, весьма вероятно, что Риману были известны и работы Чебышева по теории чисел, так как все они были опубликованы в начале 50-х годов.

Наконец, он представляет, также не приводя доказательства, функцию $\zeta(s)$ в виде бесконечного произведения, сходящегося во всей плоскости, не считая упомянутого выше полюса.

Эти результаты находят следующее теоретико-числовое применение. Риман обозначает через $F(x)$ число простых чисел, меньших, чем x, и затем с помощью формулы Эйлера

$$\zeta(s) = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

приходит к соотношению

$$\frac{\lg \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x)\, x^{-s-1}\, dx,$$

где функция $f(x)$ выражается через $F(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right);$$

затем обратная трансформация (теперь обычно называемая трансформацией Лапласа-Меллина) позволяет выразить $f(x)$ через $\zeta(s)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\lg \zeta(s)}{s} x^s\, ds,$$

причём интегрирование производится по прямой $\Re s = a$, параллельной мнимой оси. Заменяя затем функцию $\zeta(s)$ её представлением в виде бесконечного произведения, Риман находит возможность произвести оценку функции $f(x)$, а так как функция $F(x)$, обратно, может быть выражена через $f(x)$, то отсюда вытекает и оценка для $F(x)$. В качестве главного члена асимптотического разложения $F(x)$ Риман получает в соответствии с предположениями Гаусса функцию интеграл-логарифм

$$Li(x) = \int^x \frac{dx}{\lg x}.$$

Доказательство последнего результата было проведено со всей необходимой точностью лишь в 1896 г. одновременно Адамаром[1]) и Валле-Пуссеном[2]).

Если мемуар о простых числах поражает глубиной и тонкостью результатов, полученных на основе высокой вычислительной техники, то историческое значение работы о тригонометрических рядах заключается, главным образом, в том, что в ней по-новому освещаются самые основы анализа. Риман отнюдь не ставил своей задачей критику этих основ; однако, он поневоле, в силу природы рассматриваемых вопросов, был

[1]) Bulletin Soc. Math. France, 24.

[2]) Ann. Soc. Scient. Bruxelles, 20_2.

к ней приведён. Явно и в полном объёме он не предпринимает критического пересмотра таких понятий, как «число», «переменная величина», «функциональная зависимость», но уже его современники (Вейерштрасс, Дедекинд, наконец, Кантор) должны были более решительно стать на путь перестройки («арифметизации») анализа. При этом в особенности работы, посвящённые тригонометрическим рядам, не только работа Римана, но и предшествующие ей по времени работы Дирихле и последующие — Липшица, Кантора, Дюбуа-Реймона — сыграли в этом отношении стимулирующую роль. Впрочем, первым исходным импульсом послужило, конечно, всё то же открытие Фурье, уничтожившее прочно устоявшуюся концепцию функции как формальной операции над «величинами» неопределённого содержания. Откликом на это открытие было данное Дирихле определение функции как отображения «числовых значений одной переменной» на «числовые значения другой». Но анализом того, что следует понимать под «числовым значением переменной», не занимался ни Дирихле, ни Риман, и только значительно позднее выкристаллизовалось понятие «промежутка значений действительного переменного» как «множества точек», «линейного континуума».

Известно, что у Кантора и Вейерштрасса были предшественники с теоретико-множественным образом или строем мысли: таков Больцано в его Paradoxien des Unendlichen; но Риман не в их числе.

Риману не свойственна теоретико-множественная концепция; он не мыслит как точечное множество ни кривую (одномерный континуум), ни поверхность, ни пространство (двумерный и трёхмерный континуум); тем более, нигде в его рассуждениях не появляются точечные множества более сложной структуры[1]). Нужно, между прочим, заметить, что отсутствие у Римана сколько-нибудь ясно выраженной теоретико-множественной концепции нередко затрудняет современному читателю, воспитанному на этой концепции, правильное понимание римановых рассуждений и построений. Для Римана является характерным, например, такой ход мыслей, который представляется нам теперь мало последовательным: некоторое обстоятельство, — допустим для определённости, что речь идёт об обращении в нуль некоторой функции, — должно непременно иметь место где-то в данной плоскости; если оно не происходит ни в какой «части» этой плоскости (следует понимать — ни в каком двумерном континууме), то оно происходит «на отдельных кривых», но если и это почему-нибудь исключено, то в таком случае явление происходит в «отдельных точках» и т. д. При этом как-то подразумевается, что «отдельные точки» и «отдельные кривые» могут наличествовать не иначе, как в конечном числе; и точно так же предполагается само собой понятным, что две «отдельные кривые» могут пересекаться не иначе, как в конеч-

[1]) Интересно, с другой стороны, обратить внимание на следующую фразу из § 16 его диссертации в связи с доказательством принципа Дирихле: «Совокупность функций λ образует связную замкнутую в себе область...» («Die Gesammtheit der Funktionen λ bildet ein zusammenhängendes in sich abgeschlossenes Gebiet...»).

ном числе точек. В одном месте Риман как-будто бы проливает свет на значение подобного рода рассуждений, неполнота которых, возможно, не была для него сомнительной: именно, подчиняя (§ 19 диссертации) рассматриваемую им функцию некоторым ограничениям, которые могли бы показаться излишними, он разъясняет в примечании, что «более далеко идущие ограничения сделаны для того, чтобы избежать пространного рассмотрения подробностей, не являющихся существенно необходимыми» (um unnötige Weitläufigkeiten zu vermeiden). Таким образом, приходится заключить, что нередко Риман, которому, как мы знаем, к тому же нелегко давался точный и лаконический стиль изложения его работ, оставлял незаглаженные швы в своих доказательствах, стремясь не утонуть и не расплыться в детализации вопросов, которые ему казались второстепенными. Если бы развить дальше приведённую, в сущности реакционную, мысль Римана сколь многое из созданного в математике нужно было бы отнести в разряд unnötige Weitläufigkeiten! [1])

Однако, вернёмся к интересующей нас работе, на страницах которой, независимо от намерений самого автора, скорее в силу естественного развития растущей математической мысли, вступают в конфликт две различные концепции. Но если у Г. Кантора, на два десятилетия позднее, этот конфликт приводит к бурному взрыву — созданию общей теории множеств, то Риман оставляет его неразрешённым, с виртуозной ловкостью избегая говорить о точечных множествах, так как, если идея и возникла, то слов для ее выражения еще нет.

Вместе с тем Риман, со ссылкой на Дирихле, сам указывает (§ 3), что рассматриваемый им вопрос «стоит в тесной связи с основными принципами исчисления бесконечно малых и может служить для того, чтобы привести эти принципы в состояние большей ясности и определённости».

Первая часть работы Римана посвящена истории вопроса о разложении «произвольных» функций в тригонометрические ряды. Таким образом, в ней в одинаковой мере излагаются и развитие методов интегрирования уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

и развитие понятия функции действительного переменного, от Даламбера и Эйлера до Дирихле. На этом историческом введении, в частности, в оценках достижений предшественников Дирихле и Римана по исследованию рассматриваемого вопроса, не в меньшей степени, чем в других частях работы, сказывается влияние Дирихле, советами и руководством которого молодой Риман имел случай воспользоваться и заслуги которого в теории тригонометрических рядов он отмечает должным образом.

---

[1]) Нужно сделать оговорку, что о позиции Римана по отношению к основным понятиям математики можно судить только по более ранним работам, до 1851 г., включая сюда три диссертации; в дальнейшем он (намеренно ли?) избегает всякого с ними соприкосновения.

Очень интересно заключение этой вводной части, в котором Риман высказывает убеждение в том, что «задача решена Дирихле для всех тех случаев, когда она могла бы быть поставлена природой», и что «те функции, на которые не распространяется исследование Дирихле, в природе не встретятся». Однако, он предвидит, что его исследования, охватывающие случаи, не рассмотренные Дирихле, должны играть известную роль «в одной области чистой математики, именно в теории чисел». Не эта ли самая мысль лежит в основе широко проведённого Ф. Клейном противопоставления «математики приближённого счета» и «математики точного счёта» (Approximationsmathematik и Präzisionsmathematik)?

Целью работы Римана, по его словам (§ 7), является «установить те условия, которые действительно необходимо наложить на поведение функции для того, чтобы она могла быть представлена тригонометрическим рядом»; поэтому нужно «сначала найти необходимые условия представимости и потом из них выбрать те, которые являются достаточными». Итак, Риман ставит своей первой задачей установить свойства суммы любого сходящегося тригонометрического ряда (не обязательно являющегося рядом Фурье для некоторой функции), и уже после этого станет возможным дать полную характеристику класса функций, разлагающихся в тригонометрический ряд.

Риман видит необходимость в предварительном анализе и уточнении понятия определённого интеграла. Состояние теории интегрирования до Римана было таково, что признавалась бесспорной возможность интегрирования непрерывной функции в конечном промежутке; впрочем, отсутствовало строго формальное доказательство независимости предела интегральных сумм от порядка разбиения промежутка интегрирования на частные промежутки; считалось допустимым также интегрировать функцию, имеющую конечное число точек разрыва, если в окрестности таких точек функция «допускала интеграцию», т. е. если первообразная функция при подходе к точке разрыва стремилась к конечному пределу. Поскольку с функциями более сложной структуры, попросту говоря, встречаться не приходилось, вопрос о точном объёме класса интегрируемых функций не стоял на очереди.

В мемуаре о тригонометрических рядах Риман вводит (§ 4) процедуру интегрирования, ныне связанную с его именем, широко известную и излагаемую во всех учебниках анализа. В самом определении «интеграла Римана» содержатся вполне точные указания на то, является ли данная функция интегрируемой; вместе с тем, трансформируя эти условия интегрируемости, Риман получает необходимый и достаточный критерий, позволяющий судить об интегрируемости функции по поведению её в окрестностях точек разрыва. Впервые также здесь даётся пример функции, имеющей везде густое множество точек разрыва и, однако, интегрируемой. Отметим также, что раньше Вейерштрасса Риман считает необходимым доказывать, и действительно доказывает, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций представляет собой непрерывную функцию. В этой же работе, между прочим, формулируется и доказывается теорема о неопределённости суммы членов неабсолютно сходящегося ряда с действительными членами (§ 3).

При разыскании свойств функций, представляемых сходящимся тригонометрическим рядом, наиболее полные результаты Риман получает, исходя из предположения, что коэффициенты a_n и b_n тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2}b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx+b_n\cos nx)$$

стремятся к нулю. Допустив это, Риман вводит в рассмотрение функцию $F(x)$, определяемую как сумму (очевидно, равномерно сходящегося) ряда, получаемого при двукратном почленном интегрировании данного ряда, а затем устанавливает два свойства суммы рассматриваемого ряда, из которых назовём здесь только первое: предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}$$

[«вторая обобщённая Риманова производная» от функции $F(x)$] должен существовать и быть равным сумме данного ряда. Таким образом, если некоторая функция может быть представлена тригонометрическим рядом указанного типа, то существует непрерывная функция, от которой вторая обобщённая производная равна данной функции. Эта же вторая обобщённая производная была использована позднее (в 1872 г.) Г. Кантором [1]) при доказательстве того, что если тригонометрический ряд имеет сумму, тождественно равную нулю, то коэффициенты его все равны нулю.

Заметим, что Риман обращает особенное внимание на свойство тригонометрических рядов, резко отличающее их от степенных рядов: возможность представления функции тригонометрическим рядом зависит исключительно от поведения функции в окрестности рассматриваемой точки.

Не останавливаясь на других важных и интересных результатах, а также разнообразных примерах, приводимых Риманом в его работе по тригонометрическим рядам, отметим в заключение, что здесь собран исключительно богатый материал, обеспечивший возникновение и развитие теории функций действительного переменного как самостоятельной отрасли математики.

Что касается дальнейших успехов и современного состояния исследования тех вопросов, которыми непосредственно занимается Риман в своей работе, то об этом можно почерпнуть многочисленные сведения, например, в не так давно вышедшей книге Зигмунда «Тригонометрические ряды», гл. XI [2]).

---

1) Math. Annalen, т. 5.

2) Имеется русский перевод: ГОНТИ, М. — Л., 1939.

ГЕОМЕТРИЯ, МЕХАНИКА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Во вторую часть настоящего собрания сочинений Римана вошли все работы, не принадлежащие к области анализа и теории функций и напечатанные в немецком однотомнике «Bernhard Riemann's Gesammelte Werke und wissenschaftlicher Nachlass», изданном Г. Вебером (1876 и 1892); что касается дополнений («Nachträge»), изданных Нётером и Виртингером, то в них материалов по разделам, здесь нас интересующим, не содержится. Принадлежность к области анализа и теории функций, разумеется, может быть установлена лишь условно; в особенности это справедливо в отношении Римана, у которого идея функции комплексного переменного является одним из основных движущих импульсов математического творчества, и нередко проблема физического содержания служит лишь трамплином для развития теоретико-функционального хода мыслей.

В зависимости от этого при классификации работ Римана возникали в нескольких случаях затруднения, из которых мы сочли возможным выйти на основе формального признака, т. е. руководствуясь заглавием работы в Riemann's Werke (хотя заглавие и не всегда принадлежит самому Риману).

Мы отдаём себе отчёт в научной и литературной неравноценности печатаемых в этой части материалов: наряду с работами крупного исторического значения, из которых некоторые в точном смысле «создали эпоху», сюда вошло кое-что прошедшее незамеченным, оказавшееся в стороне от главных путей развития науки; наряду с мемуарами, полностью отредактированными самим автором и напечатанными при его жизни, — вошли записи, не предназначенные к опубликованию, черновые наброски, содержащие лишь скудный текст, или работы, в которых только формулы принадлежат Риману, а текст написан чужой рукой. И всё же нам казалось нецелесообразным исключать эти работы, поскольку интерес их лишь в редких случаях (едва ли на нескольких страницах) снижается до чисто биографического уровня. Несколько особняком стоят «Философские фрагменты»; но устранить их полностью или частично значило бы вычеркнуть из научных исканий Римана один из наиболее своеобразных этапов, оказавшийся, может быть, поворотным пунктом его творческого пути.

Переходя к обзору работ Римана по намеченным разделам, и начиная при этом с геометрии, естественно прежде всего заметить, что работы, сюда относящиеся, немногочисленны, весьма ограничены по объему и вместе с тем крайне многозначительны по содержанию и результатам. Именно, здесь следует назвать: 1) знаменитую диссертационную работу (Probevorlesung) «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» с примыкающей сюда же второй частью работы по теплопроводности (так называемой «Парижский мемуар»), 2) эскизы по топологии, 3) исследования по минимальным поверхностям.

Первая из названных работ содержит изложенное в очень краткой (и притом чисто словесной) форме учение о многомерных метризованных протяжённостях или многообразиях, или же, как теперь более принято говорить, — о римановых пространствах.

В эпоху Римана идея многомерной геометрии, можно сказать, носилась в воздухе, ожидая кристаллизации. Таковой почти не произошло в работах Гаусса, хотя он, несомненно, владел относящимся сюда кругом идей; с другой стороны, независимо один от другого появляются такие труды, как «Ausdehnungslehre» Грассмана (1844 г.) и «Lectures on quaternions» Гамильтона (1853 г.).

Введённое Риманом в первой части его сочинения понятие «n-мерного многообразия» по существу вполне отвечает современному понятию «области в n-мерном пространстве»: достаточно представить себе какую угодно систему, различные «состояния» (или «точки») которой определяются совокупностью числовых значений n независимых параметров, или координат, способных меняться в заранее заданных пределах, и тогда совокупность всех этих «состояний» уже образует n-мерное многообразие. Необходимо, впрочем, обратить внимание на весьма важное различие в словоупотреблении: в наше время (например, в функциональном анализе) свободно употребляют термин «пространство» и называют так любое множество элементов при условии установления в нём надлежащих порядковых или предельных отношений; у Римана же «пространство» понимается в реально-физическом смысле: это — то трёхмерное многообразие, в котором располагаются наблюдаемые нами предметы внешнего мира. Примером простейшего — однократно протяжённого многообразия может служить всякая система, состояние которой определяется единственным параметром, меняющимся в данных пределах.

При определении многомерной протяжённости и числа её измерений Риман становится, однако, на большую принципиальную высоту: он исходит из топологической, т. е. независимой от каких бы то ни было измерений, характеристики многообразия и потому избегает вводить сразу же в определение упоминание о параметрах и их числовых значениях. Он должен прибегнуть к «рекуррентному» определению: сначала характеризует однократно протяжённые многообразия тем свойством, что в них переход от одной точки к другой возможно осуществить лишь «определённым способом», а затем $(n+1)$-мерную протяжённость определяет как получаемую посредством непрерывного ряда преобразований n-мерной протяжённости. Такой ход мыслей типичен для Римана, который всегда обращается к внутренним, инвариантным свойствам предмета, а не к его случайным атрибутам: ведь «аналитическое» представление протяжённости через координаты не определяется одним возможным способом и, напротив, две протяжённости могут считаться топологически-тождественными, если между определяющими их системами числовых значений координат можно установить взаимно-однозначное (и непрерывное) соответствие. В основе всех построений Римана лежит явно выраженная мысль о том, что «измерение» величины подразумевает перенесение по этой величине некоторой другой, принятой за единицу («эталона», «твёрдого тела»); если способ перенесения не указан (например, при измерении масс или температур), то шкала измерения остаётся произвольной, и здесь может итти речь о «больше» или о «меньше», но не о «сколько». Иными словами, сама возможность построения метрической геометрии стоит в зависимости от наличия неизменяемого и способного перемещаться эталона.

Риман с нарочитой чёткостью отделяет вторую, метрическую, часть своей работы от первой, топологической. Здесь он постулирует возможность измерения расстояний между точками многообразия. Сказанное, впрочем, не совсем точно, так как Риман последовательно стоит на инфинитезимальной точке зрения. Мы должны представить себе, что он вооружает исследователя необходимым для измерений эталоном, но эталоном бесконечно-малых размеров (наш метр также ничтожно мал по сравнению с размерами вселенной): такой эталон даёт возможность измерять «линейный элемент» ds, т. е. длину бесконечно-малой линии, связывающей данную точку с некоторой другой, к ней бесконечно близкой. Математически квадрат длины линейного элемента выражается у Римана в виде «основной» положительной квадратической формы от дифференциалов координат, причём коэффициенты формы являются функциями координат данной точки. Риман приводит доводы в пользу выбора именно такой формулы; легко заметить, что эта формула является обобщением гауссовой формулы

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (EG - F^2 > 0),$$

дающей квадрат линейного элемента на обыкновенной поверхности с заданной на ней системой параметров (u, v) (по Риману, частный случай двумерного многообразия). После того, как введена длина линейного элемента ds, представляется возможным вычислить расстояние между двумя точками многообразия A и B вдоль соединяющей их кривой (C) — посредством интеграла $\int\limits_{(C)} ds$. Таким образом, для того чтобы ввести мероопределение на многообразии, достаточно указать форму линейного элемента, т. е. задать коэффициенты соответствующей квадратической формы в виде функций от координат: линейный элемент «определяет метрику» многообразия.

В зависимости от выбора координатной (параметрической) системы на многообразии основная дифференциальная форма может иметь тот или иной вид, но метрика многообразия, как легко понять, от выбора координат не зависит. С другой стороны, может случиться, что два многообразия (одного и того же числа измерений) будут иметь одинаковые — вплоть до обозначений — основные дифференциальные формы: тогда эти многообразия, с точки зрения римановой теории, могут рассматриваться как тождественные. В этом смысле, например, любую часть всякой развёртывающейся поверхности можно отождествить с частью плоскости, на которую она развёртывается: на обеих названных поверхностях «господствует одна и та же геометрия». Вообще каждому классу положительных квадратических дифференциальных форм, взаимно-эквивалентных, т. е. переводимых одна в другую посредством замены переменных, соответствует некоторое определённое риманово многообразие с некоторой «господствующей на нём» геометрией.

На многообразии, определяемом классом взаимно-эквивалентных квадратических форм, Риман находит, дальше, следуя развитию идей у Гаусса, объекты и соотношения, не зависящие от специального выбора координат. Таковы, прежде всего, геодезические линии, или, как их называет Риман, «кратчайшие» линии.

Если, вместе с Риманом, считать очевидным, что интеграл $\int\limits_{(C)} ds$, взятый по произвольной кривой (C), соединяющей две точки A и B, достигает наименьшего значения для некоторой определённой кривой (C), то эта кривая и будет линией кратчайшего расстояния между точками A и B. Экстремали соответствующей вариационной задачи — «геодезические линии», — будучи подчинены условию проходить через заданную точку многообразия O, образуют пучок кривых, выходящих из точки O по всем направлениям (т. е. отвечающих всевозможным системам отношений дифференциалов координат). Из геодезических линий этого пучка можно построить геодезические поверхности (двумерные многообразия), касательные к любому «плоскому элементу» в точке O. Выбирая надлежащим образом систему координат («римановы канонические координаты»), оказывается возможным, исходя из основной квадратической формы, построить выражения, существенно не отличающиеся от гауссовой кривизны геодезических поверхностей в точке O. Что касается гауссовой кривизны поверхностей, расположенных в трёхмерном эвклидовом пространстве, то уже самому Гауссу было известно, что таковая может быть выражена через коэффициенты основной формы и, следовательно, имеется налицо теоретическая возможность вычисления кривизны поверхности посредством измерений, производимых только на самой поверхности, без выхода в окружающее пространство (Theorema egregium). Таким образом, понятие кривизны Римана содержит понятие гауссовой кривизны, как частный случай.

Констатируя, что в рассматриваемом многообразии твёрдые тела (фигуры) могли бы быть перемещаемы неограниченно в том и только в том случае, если бы оказалось, что кривизна многообразия не зависит ни от точки O ни от проходящего через неё плоского элемента, Риман уделяет особое внимание многообразиям постоянной кривизны и указывает канонический вид, к которому всегда приводится основная форма линейного элемента такого многообразия. Он называет многообразие *плоским*, если его кривизна постоянно равна нулю: сюда относятся эвклидовы пространства любого числа измерений, а также им эквивалентные многообразия. Так, например, всякая развёртывающаяся поверхность есть «плоское» двумерное многообразие.

Если кривизна постоянна и отлична от нуля, то возможны два случая: она или положительна или отрицательна. В обоих случаях надлежащий выбор масштаба немедленно приводит к многообразию, кривизна которого равна $+1$ или -1. Таким образом, имеется лишь две существенно различные «неэвклидовы» геометрии; в наше время они называются обыкновенно эллиптической и гиперболической. Гиперболическая геометрия — иначе геометрия Лобачевского — была известна ещё Гауссу, как об этом свидетельствует его переписка и архив; эллиптическая («в малом» осуществляемая на эвклидовой сфере) в общем понимании, повидимому, была впервые отмечена Риманом в его «Probevorlesung» (в присутствии Гаусса) и получила наименование «геометрии Римана», сохранившееся и поныне.

Как уже было упомянуто, в работе «Ueber die Hypothesen» Риман резюмирует свои результаты лишь в словесной форме; соответствующий математический аппарат частично был развёрнут им позднее во второй части работы по теплопроводности. Читатель найдёт необходимые выкладки в комментариях Г. Вейля, которые воспроизведены в настоящем издании (стр. 510).

Третья часть сочинения Римана — прикладная: он высказывает здесь в чрезвычайно осторожной форме некоторые суждения о реальном физическом пространстве. Не ссылаясь (по причинам, которые мы не будем пытаться установить) на то обстоятельство, что в реальном пространстве тела могут перемещаться всеми мыслимыми способами, он утверждает, что если это имеет место, — если «тела существуют независимо от их положения в пространстве», то кривизна пространства должна быть постоянной, и значение её могло бы быть вычислено посредством достаточно точного измерения суммы углов одного треугольника. Можно догадываться, что Риману были известны измерения, произведённые ради этой цели Гауссом, и известен также их отрицательный результат (отклонение от 180° не вышло за пределы возможных ошибок наблюдений). Поэтому он воздерживается от того, чтобы судить, следует ли приписать пространству кривизну, равную нулю или отличную от нуля, но приводит аргументацию, устраняющую кажущиеся несообразности, к которым приводит последнее допущение. В особенности многозначительны последние абзацы сочинения Римана, где содержатся намёки относительно внутренней причины возникновения метрических отношений в пространстве: с одной стороны, введённое им понятие многомерного многообразия и связанный с ним математический аппарат, с другой, — те неясные фразы, в которых сквозит догадка о зависимости метрики от «сил связи, действующих на реальное», — сближают Римана с творцами современных релятивистских теорий — Минковским и Эйнштейном. «Суждения Римана, выходящие за пределы области математики, — так говорит

Вейль [1]), — с поразительной ясностью (некоторые пытались даже усмотреть здесь пророчество) указывают путь для тех физических выводов из риманова учения о пространстве, которые сделала в дальнейшем эйнштейнова гравитационная теория».

Общее значение римановой «Probevorlesung» автор «Raum, Zeit, Materie» оценивает в следующих выражениях: «Проблема пространства развёрнута здесь Риманом с новой и поистине универсальной точки зрения. В области геометрии совершён тот же шаг, который Фарадей и Максвелл сделали в области физики, в частности, в учении об электричестве, благодаря отказу от принципа действий на расстоянии: при изучении мира мы исходим из взаимоотношений в бесконечно малом...».

Непосредственным откликом на опубликование «Ueber die Hypothesen» послужили (уже после смерти Римана) работы Гельмгольца [2]), Кристоффеля [3]) и Бельтрами [4]). Что касается позднейшей литературы, в которой отражена или получает дальнейшее развитие риманова теория протяжённости, то мы ограничимся здесь указанием на способствовавшие популяризации идей Римана лекции Клейна [5]) и известные публикации Пуанкарэ [6]); затем отметим исследования Риччи, посвящённые методу «абсолютного (построенного на инвариантной основе) дифференциального исчисления» [7]); наконец, монографию Э. Картана [8]) по римановым пространствам и труды Г. Вейля, где идеи Римана предстают в современном аспекте [9]).

Обратимся к топологическим фрагментам Римана: они представляют собою, по всей вероятности, первоначальные наброски сочинения, предметом которого должны были быть «многообразия без количественных признаков или различий». Нетрудно отдать себе отчёт в том, какие импульсы направили мысль Римана к Analysis situs — таинственной (в то время) области, лежащей у пределов математики. Вопросами топо-

[1]) Из предисловия к изданию «Ueber die Hypothesen», 1919 г

[2]) H. Helmholtz, Ueber die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen (Gott. Nachr. 1868).

[3]) E. B Christoffel, Ueber die Transformation des homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (Journ. fur reine u. ang Math., т 70, 1869).

[4]) E Beltrami, Teoria fondamentale degli spazi di curvatura constante [Ann. di Mat (2), 2, 1868].

[5]) F. Klein, «Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert», «Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie», «Vorlesungen über höhere Geometrie», все имеются в русских переводах.

[6]) H Poincaré, La science et l'hypothèse (1907), Science et méthode (1908) Dernières pensées (1913).

[7]) G. Ricci, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs application (Math. Ann, т. 54, 1901); см. также T. Levi-Cività, Lezioni di calcolo differenziale absoluto (1925) и J. A. Schouten, Der Ricci-kalkul (1924).

[8]) E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann (1918); имеется русский перевод.

[9]) H. Weyl, «Raum Zeit Materie» (1918).

логии, как теперь известно, настойчиво интересовался Гаусс; вероятно, он делился некоторыми идеями с окружающими; в 1847 г. (в первый год студенчества Римана) вышла в свет первая печатная работа в этой области «Vorstudien zur Topologie» Листинга; сопоставим это с тем обстоятельством, что по словам Клейна, «гёттингенская атмосфера была тогда так насыщена геометрическими интересами, что оказала незаметное, но очень сильное воздействие на талантливого и восприимчивого Римана». К вопросам топологического порядка — правда, только для двумерных протяжённостей — Риман был приведён в своей диссертации, когда ставил задачей обосновать понятие функции комплексного переменного, и позднее в «Теории абелевых функций»; но, с другой стороны, он смело раздвигал пределы эвклидова пространства и в связи с разработкой идей, положенных в основу «Ueber die Hypothesen», неизбежно должен был натолкнуться на трудности и проблемы топологического характера. Внимательное чтение «Probevorlesung» показывает, что здесь он пытается их обойти, оставить в стороне, рассчитывая к ним вернуться в другом месте: в самом деле, давая определение n-мерному многообразию, он, повидимому, имеет в виду лишь односвязные протяжённости, «n-мерники» (т. е. области, гомеоморфные n-мерному кубу или сфере). Дальнейшая задача — конструировать из таких элементов более сложные постройки, подобно тому, как здания складываются из кирпичей и как «римановы поверхности» склеиваются из кусков плоскости. Так, в первых же строчках текста «Фрагментов» мы узнаём, что два «одномерника» (простых жордановых кривых), ограниченных одной и той же парой точек, составляют совместно «связный неограниченный двумерник» (замкнутую кривую Жордана).

Центральный пункт, к которому устремляется внимание Римана, это — характеристика связности n-мерного многообразия, т. е., другими словами, перенесение на случай $n > 2$ тех результатов, которые им были получены в диссертации для случая $n = 2$. Он видит сразу, что в общем случае приходится ввести порядки связности различных ступеней или размерностей в зависимости от того, какова размерность «разрезов», производимых на данном многообразии.

Числовые характеристики связности, намечающиеся у Римана, соответствуют тем, которые в настоящее время носят название «чисел Бетти».

Можно усмотреть некоторую связь между исследованиями Римана по минимальным поверхностям и тем направлением его мысли, которое выражено в «Ueber die Hypothesen». Действительно, от геодезической линии, т. е. от одномерной протяжённости, соединяющей две данные точки и обладающей минимальной **длиной**, естественно перейти к минимальной поверхности, решающей так называемую «проблему Плато»: через заданный контур (замкнутую кривую) провести поверхность, т. е. двумерную протяжённость, обладающую минимальной **площадью**. Такая задача могла бы быть рассматриваема в произвольном римановом пространстве; она могла бы быть обобщена на случай протяжённости размерности большей, чем 2, и привела бы к теории «минимальных n-мерных многообразий». Однако, в своих исследованиях, отделённых от диссертационного периода промежутком в 6—7 лет, Риман идёт по пути конкретизации: он ограничивается классической постановкой задачи о минимальной поверхности в эвклидовом пространстве и сосредоточивается на частных случаях, когда заданный в пространстве контур определяется наиболее простыми условиями. Дифференциальное уравнение в частных производных, которому непременно должны удовлетворять минимальные поверхности вида $z = f(x, y)$, было выведено ещё Лагранжем (1760—1761 гг.); в обозначениях Монжа оно имеет вид:

$$(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 0.$$

Предшественниками Римана по исследованию минимальных поверхностей были Мёнье, Монж, Лежандр и Ампер. Об интересующем нас мемуаре Римана Г. Дарбу отзывается следующим образом [1]):

«Эта прекрасная работа с полным правом может быть поставлена в один ряд с самыми выдающимися произведениями знаменитого автора и содержит очень интересные применения тех новых и глубоких идей, которые Риман внёс в математический анализ». Риман пользуется гауссовым сферическим отображением минимальной поверхности, причём устанавливает конформность этого отображения и формулирует теорему, касающуюся искажения площади при отображении. Используя идею О. Боннэ [2]), он вводит комплексные координаты для определения положения точки на поверхности и при решении поставленных им задач систематически применяет метод конформного отображения. Вторая часть работы Римана посвящена рассмотрению частных случаев проблемы Плато. Если сама природа посредством мыльной плёнки решает краевую задачу без затруднений, то математическое решение её, даже при самых простых контурах, приводит к необходимости пустить в ход весьма серьёзные аналитические средства: так, если искомая поверхность подчинена требованию проходить через три данные попарно не пересекающиеся прямые, то при нахождении её уравнения Риман пользуется P-функцией, введённой им в мемуаре о гауссовом ряде, и функциями, ей родственными.

В своих исследованиях по минимальным поверхностям (как и в теории абелевых интегралов) Риман встретился с Вейерштрассом, который в 1866 г. передал Берлинской академии сводку своих результатов почти одновременно с представлением Гаттендорфом обработанного им риманова мемуара — Гёттингенскому Научному обществу. Ученик Вейерштрасса Шварц продолжил работу Римана над проблемой Плато и решил её в случае произвольных полигональных контуров [3]).

[1]) G. Darboux, Théorie des surfaces, т. I, гл. 4.

[2]) O. Bonnet, Journal des math. pures et appl. (2), т. 5 (1860).

[3]) H. A. Schwarz, Werke, т. I.

Переходя к обзору работ Римана в области механики и математической физики, нам следует, главным образом, остановиться на двух капитальных мемуарах, принадлежащих наиболее зрелой творческой эпохе его жизни, — один из них имеет предметом исследования движения жидкого эллипсоида, другой посвящён динамике газов. Вопрос об эллипсоидальном движении и его устойчивости, как легко понять, связан с космогоническими теориями и изучением формы небесных тел. Исходный, сюда относящийся, результат принадлежит Маклорену, который в работе, представленной на конкурс, объявленный в 1738 г. Парижской академией, установил, что всякий сплющенный эллипсоид вращения является возможной фигурой равновесия однородной тяжёлой вращающейся жидкости: движение таких эллипсоидов было позднее подробно изучено Лапласом в его «Небесной механике» (1799 г.). Позднее (в 1834 г.) Якоби показал, что существует также «серия» трёхосных эллипсоидов, которые обладают тем же свойством. Как в случае Маклорена, так и в случае Якоби эллипсоиды вращаются как целое (как твёрдое тело) около своей наименьшей оси. В последнем мемуаре Дирихле, изданном с дополнениями Дедекиндом в 1860 г., проблема поставлена более широко (координаты движущейся частицы предполагаются линейными однородными функциями их начальных значений и произвольными функциями времени); однако, вычисления доведены до конца только при некоторых частных предположениях. В своём мемуаре Риман с помощью удачного подбора переменных упрощает дифференциальную систему, полученную Дирихле, и получает решение задачи, включающее все ранее известные как частный случай. При этом оказывается, что движение может сохраняться неизменным только при условии, что мгновенная ось вращения лежит постоянно в одной из главных плоскостей эллипсоида. Не останавливаясь на перечислении результатов Римана, касающихся устойчивости изученных им движений, отметим, что продолжателями его в исследованиях этого направления были А. Пуанкаре[1]) и А. М. Ляпунов[2]).

Работа 1860 г. по газовой динамике трактует общие уравнения гидродинамики в предположениях, что 1) проекции скоростей в этих уравнениях, а также их частные производные и частные производные давления по времени и пространственным координатам — не считаются бесконечно-малыми, так что их произведения не могут быть пренебрегаемы, и что 2) давление считается заранее заданной произвольной (возрастающей) функцией плотности. В этих предположениях уравнения гидродинамики не приводят к обыкновенному линейному волновому уравнению; интегрирование их оказывается сложной задачей, но Риман упрощает её, допуская, что только одна из трёх проекций скоростей тождественно

[1]) H. Poincaré (Acta Mathem., т. 7, 1885 г.).

[2]) «Об устойчивости эллипсоидальных фигур равновесия вращающейся жидкости» (магистерская диссертация, 1884 г.) и позднейшие работы.

не равна нулю, т. е. ограничиваясь случаем, когда движения частиц совершаются параллельно определённому направлению. Что касается характеристической зависимости между плотностью и давлением, то Риман оставляет её произвольной (лишь бы давление было возрастающей функцией плотности), но в заключение своего исследования останавливается на двух специальных физически-реальных предположениях — на законе Бойля-Мариотта и на законе адиабатных процессов Пуассона.

Трудно сказать с уверенностью, что именно послужило для Римана непосредственным поводом для изучения «воздушных волн конечной амплитуды»: возможно, что это были опыты Гельмгольца над распространением звука в трубах. Как указывает сам Риман, его работу надлежит рассматривать не в экспериментальном аспекте, а скорее как вклад в теорию нелинейных уравнений в частных производных. Весьма важно отметить приём, которым пользуется Риман при нахождении интеграла одного специального линейного уравнения второго порядка гиперболического типа при условии, что на некоторой кривой, отличной от характеристик уравнения, заданы значения самой искомой функции и её нормальные частные производные; это — так называемая «проблема Коши». Риман находит общее решение для поставленной задачи, выражая его через частный интеграл некоторого «сопряжённого» уравнения в частных производных, подчинённый определённым краевым условиям на двух характеристиках. Возникающий таким образом «метод Римана» применим к произвольным уравнениям гиперболического типа.

Другой значительный результат, содержащийся в этом мемуаре Римана, касается впервые отмеченного здесь явления разрывов в течении газов (Stosswellen — «ударные волны»). Оказывается, что возникновение разрывов возможно даже в том случае, если начальные данные непрерывны. Если Риман при изучении этого явления ограничился линейным случаем, то в дальнейшем Кристоффель [1]) обобщил результаты Римана на случай пространства. В наиболее общей форме теория разрывов, независимо от Римана, была развита Гюгонио [2]). Подробные сведения по этому вопросу можно найти у Адамара в его «Leçons sur la propagation des ondes» (1903) [3]).

Остальные работы Римана по вопросам математической физики — менее капитального характера. В большинстве случаев это — небольшие заметки, наброски, эскизы откладываемых на будущее сочинений; немногие из них увидели свет при жизни Римана. Тематика и назначение их более или менее разнообразны: в одних даётся теоретическое

---

1) Christoffel, Annali di Matem., т. 8, 1877 г.

2) Hugoniot, Journ. Éc. Polyt., т. 39, 1887 г. и Journ. de Math., сер. 4, т. 3, 1887 г.

3) См. также статью G. Zemplén'a в немецкой энциклопедии (IV, 19); кое-что сказано об этом у Вебстера и Сеге (Дифференциальные уравнения математической физики, ОНТИ, М. — Л., 1934, гл. 6).

истолкование и обоснование физических экспериментов (опыты Кольрауша с лейденской банкой, кольца Нобили); в других — физическая задача является лишь поводом для аналитических построений (так, исходя из проблемы равновесия электричества на круговых цилиндрах, Риман предвосхищает теорию автоморфных функций); иногда целью заметки является выработка служебного математического аппарата, пригодного для случаев, ранее не рассмотренных (проблема Дирихле для области тора, тепловая проблема в области эллипсоида, потенциал эллиптического цилиндра). Следует также заметить, что Риман был склонен откликаться на специальные проблемы, объявленные в качестве конкурсных: сюда относится как наиболее яркий пример парижский мемуар, посвящённый изотермическим кривым.

Из всего сказанного выше никоим образом не следует выводить заключение, что сделанное Риманом в области математической физики по своей значительности уступает достижениям в других областях. Напротив, правильнее представлять себе, что, с одной стороны, такая область «чистого» анализа как теория функций комплексного переменного, и, с другой стороны, как раз уравнения математической физики являются у Римана, если можно так выразиться, двумя полюсами, в которых сосредоточивается его творчество наиболее интенсивно; полюсы эти к тому же поставлены — в этом особенно типичная для Римана черта — в отношение постоянного взаимодействия. Дело в том, что совокупность научных работ Римана нельзя рассматривать независимо от его лекционно-педагогической (и частично даже лабораторно-семинарской) деятельности: и необходимо признать, что в части, касающейся математической физики, центр тяжести научных заслуг Римана приходится, пожалуй, на его лекции, а не на те преимущественно фрагментарные материалы, которые вошли в собрание его сочинений. Подобного рода констатация, возможно, была бы не к чести учёного нашей эпохи; но во времена Римана отношение к продуктам «педагогической нагрузки» должно было быть иным.

Бурный рост математики на протяжении XVIII столетия, успехи совершенствовавшейся техники, а также Французская революция и последовавшие за нею потрясения — вывели науку из тиши кабинетов, где гениальные единицы совершали изумительные открытия, о которых мы узнаём из личной переписки, или из академических публикаций, продиктованных вдохновением и погоней за славой. После наполеоновских войн повсеместно стали возникать и расти университеты и специальные институты, куда мало-помалу хлынула молодёжь, чтобы приобрести профессию и заработок. В условиях, вновь возникших, задача чтения лекций была не только трудной и ответственной, но вместе с тем почётной и творческой: нужно было создавать систему обучения высшим математическим наукам, вырабатывать такие традиции преподавания, которые обеспечивали бы успех передачи идей людям, не имеющим выдающихся специальных дарований. Представим себе, что юноши, сидевшие на школьной скамье, были преисполнены рвения к науке, обладали высокой добросовестностью и работоспособностью, всеми предпосылками ясного и здорового мышления, но, желая усвоить твёрдо и отчётливо, они не схватывали с полуслова: им нужно было объяснять, их нужно было убеждать. Там, где для усвоения не было достаточно интуиции, на помощь приходила логика, и её формальные построения устраняли пробелы несовершенного восприятия: так возникла потребность укрепить основы математики путём её «арифметизации», так стал создаваться новый «формальный» стиль её изложения, который был вовсе неизвестен классическому веку. Этот вполне естественный (и обусловленный также внутренними причинами) процесс был длительным, и формальная стадия наступила позднее: понадобились десятилетия для того, чтобы школьная, университетская математика изменила своё лицо, а это, в свою очередь, нашло своё отражение в области чисто научного творчества — на страницах математических журналов.

В Германии середины прошлого столетия главные заслуги в деле переустройства математических наук на новых началах принадлежат Якоби и Дирихле, позднее и в ещё большей степени — Вейерштрассу, явившемуся наиболее ярким выразителем «формального» направления. Не случайно то обстоятельство, что их деятельность протекала, главным образом, в центральном университете — Берлинском [1]), где наплыв слушателей был, несомненно, гораздо значительнее, чем в провинциальных университетах.

Возвращаясь к Риману, нужно заметить, что в годы его студенчества в Гёттингенском университете тенденции века — по крайней мере в части, касающейся математики — ещё не успели найти своё отражение. Там всё было заслонено гигантской фигурой Гаусса, принадлежавшего ушедшей классической эпохе, если не всеми глубинами своего творчества, то по крайней мере в смысле академической традиции. Мы знаем, что обстановка Гёттингенского университета не удовлетворяла молодого Римана: он поехал учиться в Берлин и примкнул к Дирихле, с которым в дальнейшем был близок и дружен. Нужно полагать, что Риману было суждено продолжить деятельность Дирихле и, опираясь на широкий университетский фундамент, возможно, стать главой школы, и именно в области интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных и математической физики. Гёттинген стеснял и тяготил Римана также и в позднейшие годы, когда он был ординарным профессором; его ожидало, очевидно, более широкое поприще; не исключено, что получение кафедры в берлинском университете было бы для него началом деятельности большего размаха. Преждевременная болезнь и ранняя смерть помешали осуществлению этой возможной линии развития.

[1]) Якоби был в Берлине лишь с 1844 по 1851 г., ранее же — в Кенигсберге; Дирихле — в Берлине с 1829 по 1855 г. и далее до 1859 г. — в Гёттингене; Вейерштрасс — в Берлине с 1854 по 1897 г.

Лекции Римана по математической физике вышли в свет в обработке его слушателя Hattendorf'а; их точное наименование — «Partielle Differentialgleichungen der Physik» (1869) [1]. Эта книга достаточно общеизвестна по ряду переизданий с переработкой и добавлениями Г. Вебера; на протяжении полустолетия не очень объёмистые томики «Римана—Вебера» были настольной книгой каждого математика, интересы которого были направлены в сторону приложений, и каждого физика, интересы которого не ограничивались экспериментом; на смену ей в 1925 г. пришло солидное двухтомное издание, созданное целым коллективом авторов, под заглавием «Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, herausgegeben von Ph Frank und R v. Mises». Лекции Римана в их первоначальной редакции дают достаточно полную картину того, на каком уровне стояла теория уравнений математической физики с «краевыми условиями» в середине прошлого столетия, и свидетельствуют о том, какой ценный вклад внёс их автор упорядочением и систематизацией накопившегося материала

Поскольку «Partielle Differentialgleichungen der Physik» не вошли в состав настоящего русского издания сочинений Римана [2]), у нас нет оснований подвергать здесь эту книгу более подробному анализу. Заметим лишь суммарно, что исследования Римана в области математической физики, как правило, преследуют цель нахождения такого решения конкретно поставленной задачи, которое находилось бы в соответствии с данными опыта, а «формализация», «критическое обоснование» применяемых методов у Римана отсутствуют: не находим мы строгих доказательств существования и единственности решений, нередко недостаёт рассмотрений, касающихся сходимости процессов и т. д., более того, пример «принципа Дирихле» показывает, что Риман склонен даже в области чистого анализа взамен математического доказательства ссылаться на физическую очевидность. Причины этого ясны: объективно для математической физики как более молодой отрасли математики время формального обоснования в эпоху Римана ещё не настало, с другой стороны, гениальное воображение, избыток сил, богатство идей неизменно увлекают Римана вперёд. В этой связи нам кажется небезынтересным привести суждение Куранта [3]), противопоставляющего римановский дух искания господствующей в близкую нам эпоху скудости и ограниченности, формально безупречной, математической мысли: «Мы

[1]) Сюда следует присоединить ещё «Schwere, Elektrizität, Magnetismus» (Hattendorf, 1875). Чтобы исчерпать опубликованное до настоящего времени лекционное наследие Римана, остаётся, кроме отрывков, касающихся абелевых функций («Nachträge» Нётера — Виртингера), ещё назвать «Elliptische Funktionen», изданные Stahl'ем в 1899 г.

[2]) Издание перевода этой книги было бы, однако, чрезвычайно желательным.

[3]) R. Courant, Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten 100 Jahre (речь, произнесённая в связи со столетием со дня рождения Римана; напечатана в «Naturwissenschaften», 1926 г., №№ 36 и 52).

сдали много выдвинутых вперёд позиций, чтобы обеспечить оставшиеся позади коммуникации; мы укрылись за крепкие стены и добровольно ограничиваемся небольшой территорией, чтобы противостоять натиску критики. Многие, даже выдающиеся, математики настолько прочно восприняли идею «строгости», что даже не представляют себе возможности и необходимости «нестрогих» построений, базирующихся на полёте фантазии. — Избавить нас от опасности оскудения и маразма (Stagnation) смогла бы как раз та линия развития, которая исходит от Римана...».

В заключение нам следует остановиться на записках, воспроизведённых в Riemann's Werke под заглавием «Fragmente philosophischen Inhalts». Их научно-историческая ценность определяется тем обстоятельством, что в них содержатся эскизы задуманного, но не выполненного Риманом сочинения физико-синтетического содержания. Об этом замысле имеются следующие свидетельства. В реферате, представленном в ноябре 1850 г. педагогическому семинару в Гёттингене [1]), 24-летний Риман, между прочим, говорит о «возможности построения вполне законченной математической теории, которая, исходя из элементарных законов взаимодействия отдельных точек, охватила бы все процессы, происходящие в окружающем нас физическом непрерывном пространстве, — независимо от того, идёт ли речь о тяготении, электричестве, магнетизме, или равновесии тепла». Более определённые сведения по этому вопросу относятся к 1853 г., когда Риман занялся натурфилософией с таким увлечением, что даже на время отложил работу над своей Habilitationsschrift (о тригонометрических рядах); в письме брату [2]) от 28 декабря этого года он сообщает не без таинственности: «Я снова взялся за исследования по связи между электричеством, гальванизмом, светом и тяготением и продвинулся настолько, что смогу безусловно опубликовать их в нынешней редакции. Между прочим, я имею подтверждение сведений, что уже много лет Гаусс занимается теми же вопросами и теперь сообщил об этом нескольким друзьям, в том числе Веберу, однако с обязательством сохранения тайны. Надеюсь, что ещё не поздно, и что можно будет установить, что всё это найдено мною независимо от Гаусса. — Пишу тебе без опасения, что ты бросишь мне упрёк в неуместной заносчивости». Нечто очень похожее мы читаем и в письме к сестре, однако, значительно более позднем (1858 г.):

«Моё открытие о связи между электричеством и светом я передал здешнему (т. е. Гёттингенскому) научному обществу. По многим дошедшим до меня высказываниям следует заключить, что Гаусс построил теорию этой связи, отличную от моей, и сообщил о ней своим ближайшим знакомым. Однако, я непоколебимо убеждён, что моя теория является истинной и через немного лет будет таковой признана». Здесь идёт

1) Заглавие реферата — «Об объёме, порядке и методах преподавания естественных наук в гимназиях».

2) Вильгельм Риман был почтмейстером в Бремене; после смерти отца стал опорой семьи.

речь о заметке, озаглавленной «Ein Beitrag zur Elektrodynamik» (см. статью XXVIII настоящего издания); она была вскоре взята Риманом обратно и опубликована впервые в Анналах Поггендорфа после смерти Римана, причём вызвала возражения и полемику.

Следует всё же заметить, что, начиная с 1854 г., когда состоялся доклад Римана на съезде естествоиспытателей, интерес Римана к синтетическим теориям заметно падает; в зависимости ли от внутреннего роста или же под влиянием советов окружающих его лиц — внимание его направляется к вопросам более конкретного порядка. В этом отношении в особенности характерным является первый абзац к автореферату 1859 г. мемуара по газовой динамике (см. стр. 529), а также направление всей научной работы Римана, начиная примерно с этого времени.

Нужны были бы особые исследования для того, чтобы высказывать определённые суждения оримановых философских воззрениях. Эти исследования пока не выполнены.

Два отрывка философских фрагментов («Тяготение и свет» и «Новые математические принципы натурфилософии»), или же один из них, представляют собою то, о чём Риман говорит в цитированном выше письме 1853 г. Ф. Клейн [1]) усматривает здесь «предвосхищение теории Максвелла», делает сопоставление формулы Римана (стр. 476 настоящего издания) с похожими формулами у Мах-Келлоха и в итоге заключает: «Происхождение этой формулы для меня неясно, и я затрудняюсь сказать, что в ней остаётся справедливым с точки зрения современных теорий».

Что же касается остальных «Фрагментов», то они довольно неоднородны; можно было бы согласиться с мнением Г. Вебера, полагающего, что «сохранившиеся наброски достаточны для того, чтобы в общих чертах характеризовать позицию Римана по отношению к вопросам психологического и натурфилософского порядка», если бы можно было доказать, что весь материал, вошедший в «Фрагменты», представляет собою изложение собственных мыслей Римана. Однако, в этом позволительно сомневаться. Обширный отрывок под заглавием «По вопросам психологии и метафизики» содержит ряд ссылок на Гербарта и связное изложение некоторых идей Фехнера [2]).

Упоминаемые Риманом в этом отрывке сочинения Фехнера носят название «Nanna oder über das Leben der Pflanzen» (Нанна или о жизни растений), 1848 г. и «Zend-Avesta oder über die Dinge des Himmels und des Jenseits» (Зенд-Авеста или о вещах небесных и потусторонних), 1851 г. Нанна — имя древнегерманской богини цветов, Зенд-Авеста — священная книга религии Зороастра. Мы встречаемся здесь с аргументацией в пользу одушевлённости земли, небесных тел и растений. Эта аргументация полубе-

[1]) «Лекции о развитии математики в XIX столетии», стр. 293 русского издания.

[2]) Этот отрывок, по указанным выше соображениям, здесь упущен.

зумного Фехнера производит крайне странное впечатление на страницах собрания сочинений гениального математика. Нам представляется наиболее правдоподобным предположить, что молодой, увлекающийся, впечатлительный и разносторонний Риман оставил нам набросок реферата о заинтересовавших его недавно вышедших книгах.

Дальнейший материал, под заголовком «Из области теории познания», повидимому, не несёт на себе влияния Фехнера: при просмотре его получается впечатление, что перед нами — ряд записей, предназначенных для собственного употребления, дневник, записная книжка, куда попадают понравившиеся цитаты, удачные формулировки и т. п. Интересны, например, мысли о вероятностях и о гипотезах.

В общем, легко себе представить, что в возрасте, когда юноша считает нужным приводить в порядок своё научное миросозерцание, Риман был не всегда разборчивым в отношении различных философских идей, воздействию которых подвергался; к тому же кое-что могло стимулировать (хотя бы на основе скользких аналогий) построение им физико-синтетических теорий; но, как бы то ни было, судить по «Философским фрагментам» о натурфилософских позициях Римана можно лишь с величайшей осторожностью. Ещё менее обосновано было бы экстраполировать эти суждения на позднейшие годы жизни Римана.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

РАБОТЫ РИМАНА

ПО АНАЛИЗУ, ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

I. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1

Пусть через z обозначена переменная величина, которая, изменяясь неограниченно, может принимать всевозможные действительные значения; если каждому её значению соответствует единственное значение некоторой величины w, то w называют функцией z; если, кроме того, в то время как переменная z, изменяясь непрерывно, пробегает все значения, заключённые между двумя постоянными пределами, величина w также изменяется непрерывно, то внутри указанного промежутка эта функция называется непрерывной [1].

Ясно, что такое определение никоим образом не устанавливает связи между отдельными значениями функции: если поведение функции указано лишь в некотором определённом промежутке, то за пределы этого промежутка её можно продолжать совершенно произвольно.

Зависимость величины w от величины z может быть задана посредством математической формулы так, что значение w, соответствующее каждому значению z, получается в результате ряда определённых математических операций, производимых над числовым значением z.

Свойство функций, заключающееся в том, что они могут быть представлены одной единственной формулой при всех значениях z, принадлежащих внутренности заданного промежутка, считалось раньше присущим лишь функциям особого рода (их Эйлер называл functiones continuae); однако, новейшие исследования показали, что существуют такие аналитические выражения, с помощью которых можно в заданном промежутке представить любую непрерывную (в нашем смысле) функцию [2]. Таким образом, не является существенным, будет ли зависимость величины w от величины z задана произвольно или с помощью математической формулы. В силу упомянутой теоремы оба определения равносильны.

Иначе обстоит дело, если область изменения величины z не ограничивается действительными значениями, а распространяется также и на комплексные значения вида $x+yi$ (где $i=\sqrt{-1}$).

Пусть $x+yi$ и $x+yi+dx+dyi$ два бесконечно мало отличающиеся между собой значения переменной z, которым соответствуют значения $u+vi$ и $u+vi+du+dvi$ переменной w. В таком случае, если зависимость переменной w от переменной z считать совершенно произвольной, то отношение $\dfrac{du+dvi}{dx+dyi}$, вообще говоря, изменяется вместе с изменением dx и dy; если положить $dx+dyi=\varepsilon e^{\varphi i}$, то ясно видно, что

$$\frac{du+dvi}{dx+dyi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{dx-dyi}{dx+dyi}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]e^{-2\varphi i}.$$

Однако, всякий раз, когда функция w переменной z определена посредством формулы, содержащей простые математические операции, оказывается, что значение производной $\dfrac{dw}{dz}$ не зависит от выбора значения дифференциала dz [1]). Таким образом, становится ясным, что указанным способом можно выразить не всякую зависимость комплексной переменной w от комплексной переменной z.

Отмеченное нами характерное свойство всех тех функций, которые могут быть определены с помощью элементарных математических операций, мы положим в основу нашего дальнейшего исследования, в котором будем рассматривать функцию независимо от способа её аналитического представления; именно, мы будем исходить из следующего определения, не пытаясь пока доказывать [3], что возникающее на его основе понятие функции комплексного переменного вполне равносильно понятию, в основу которого положено наличие математической формулы.

Некоторая комплексная переменная w называется функцией другой комплексной переменной z, если она меняется вместе с ней таким образом, что значение производной $\dfrac{dw}{dz}$ не зависит от значения дифференциала dz [4].

2

Будем рассматривать переменную z, а также и переменную w, как переменные, из которых каждая может принимать любое комплексное значение. Понимание такой изменяемости в случае связных областей двух

---

[1]) Это утверждение, очевидно, выполнено во всех тех случаях, когда выражение $\dfrac{dw}{dz}$ можно получить из выражения w через z путём обычных правил дифференцирования: о том же, является ли оно вполне точным в общей формулировке, мы пока говорить не будем.

измерений существенно облегчается следующими геометрическими представлениями.

Вообразим, что каждому значению $x+yi$ переменной z сопоставляется точка O плоскости A с прямоугольными координатами x, y, а каждому значению $u+vi$ переменной w — точка Q плоскости B с прямоугольными координатами u, v. Тогда каждая зависимость переменной w от переменной z представится в виде зависимости положения точки Q от положения точки O. Если каждому значению z соответствует определённое, меняющееся непрерывно вместе с z значение w, другими словами, если u и v — непрерывные функции x и y, то каждой точке плоскости A соответствует некоторая точка плоскости B, каждой линии, вообще говоря,— некоторая линия, каждой связной плоской фигуре—некоторая связная плоская фигура. Таким образом, оказывается возможным интерпретировать зависимость переменной w от переменной z посредством отображения плоскости A на плоскость B.

3

Теперь нужно выяснить, каким особым геометрическим свойством обладает отображение плоскости на плоскость в том случае, когда w является функцией комплексной переменной z, т. е. когда $\frac{dw}{dz}$ не зависит от dz.

Обозначим через o некоторую неопределённую точку плоскости A вблизи точки O, через q — её отображение на плоскость B, через $x+yi+dx+dyi$ и $u+vi+du+dvi$ значения переменных z и w в этих точках. Тогда, если выбрать в качестве начала координат точки O и Q, то dx, dy и du, dv могут быть рассматриваемы как прямоугольные координаты точек o и q, а замена $dx+dyi=\varepsilon e^{\varphi i}$ и $du+dvi=\eta e^{\psi i}$ приводит к полярным координатам этих точек ε, φ; η, ψ с полюсами в точках O и Q. Обозначим через o' и o'' некоторые два определённых положения точки o, бесконечно близких к O, и условимся отмечать связанные с ними величины соответствующими индексами; из сделанного нами допущения следует:

$$\frac{du'+dv'i}{dx'+dy'i}=\frac{du''+dv''i}{dx''+dy''i},$$

значит,

$$\frac{du'+dv'i}{du''+dv''i}=\frac{\eta'}{\eta''}e^{(\psi'-\psi'')i}=\frac{dx'+dy'i}{dx''+dy''i}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}e^{(\varphi'-\varphi'')i};$$

отсюда вытекает: $\frac{\eta'}{\eta''}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ и $\psi'-\psi''=\varphi'-\varphi''$, т. е. в треугольниках $o'Oo''$ и $q'Qq''$ угол $o'Oo''$ равен углу $q'Qq''$ и заключающие их стороны пропорциональны.

Таким образом, устанавливается соотношение подобия между двумя взаимно соответствующими бесконечно малыми треугольниками, а следовательно, и вообще между очень малой частью плоскости A и её отображением на плоскость B. Это утверждение не оказывается справедливым лишь в тех исключительных случаях, когда, в противоположность тому, как мы неявно предполагали при нашем доказательстве, отношение взаимно соответствующих приращений переменных z и w не будет иметь конечного значения 1) [5].

4

Если отношение $\frac{du+dvi}{dx+dyi}$ мы представим в виде

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i\right)dx+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i\right)dyi}{dx+dyi},$$

то становится ясным, что оно в том и только в том случае имеет одно и то же значение для двух любых значений dx и dy, если имеют место равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Итак, эти условия являются достаточными и необходимыми для того, чтобы $w=u+vi$ являлось функцией $z=x+yi$. Отсюда для отдельных членов этой функции вытекают условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

которые служат основой при изучении свойств, принадлежащих каждому члену таких функций, рассматриваемому вне его зависимости от другого члена. Мы предпошлём доказательство важнейших из этих свойств более углублённому рассмотрению функции комплексной переменной в целом, но предварительно, чтобы подготовить почву для этого исследования, установим кое-какие предложения, относящиеся к более широкой области.

* * *

5

При дальнейших рассмотрениях мы ограничим возможное изменение переменных x, y некоторой конечной областью, предполагая, что точка O будет расположена уже не на самой плоскости A, а на некоторой поверхности T, разостланной по плоскости A.

Мы прибегаем, таким образом, к геометрическому представлению, при котором становится возможным говорить о листах поверхности, лежащих один над другим; этим достигается, что точка O может повторяться не-

1) См. по этому поводу: C. F. Gauss, Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird (К. Ф. Гаусс, Общее решение задачи об отображении некоторой части данной поверхности таким образом, чтобы отображённое было подобно отображаемому в малейших частях). Напечатано в качестве ответа на конкурс, объявленный Королевским обществом наук в Копенгагене в 1822 г., в Astronomische Abhandlungen, издаваемых Schumacher'ом (вып. 3., Altona, 1852) [6].

сколько раз над одним и тем же местом плоскости A; вместе с тем мы должны, однако, указать, что листы поверхности, лежащие один на другом, не могут быть соединены по общей кривой, т. е. наша поверхность не может ни расщепляться, ни образовывать складки [7].

Число листов поверхности, лежащих один над другим, для каждой части плоскости определяется полностью в том случае, если граница поверхности задана по положению и по направлению (т. е. указана её внешняя и внутренняя стороны); впрочем, структура поверхности этим ещё определена не вполне.

В самом деле, если через часть плоскости, покрытую рассматриваемой поверхностью, провести произвольную кривую l, то при движении по этой кривой число листов поверхности, лежащих один над другим, изменяется только при переходе через границу поверхности, и именно при переходе с наружной стороны на внутреннюю сторону границы на $+1$, с внутренней на наружную на -1, и, таким образом, это число определено везде. Вдоль той и другой стороны кривой l, поскольку она не встречает границы, неопределённости в вопросе о том, как соединены между собой различные листы поверхности, возникнуть не может. В самом деле, неопределённость может возникнуть не иначе, как в некоторой определённой точке, и это случится или в некоторой точке самой кривой или уже на некотором конечном расстоянии от кривой; это позволит нам, ограничиваясь рассмотрением той части кривой l, которая покрыта поверхностью, и достаточно близко к самой кривой расположенных частей поверхности, говорить о совершенно определённых прилегающих к кривой листах поверхности, число которых по обе стороны кривой — одно и то же. Приписывая кривой l некоторое направление, допустим, например, что слева от l лежат листы поверхности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а справа $a_1', a'_2, \ldots, a_n'$. Каждый лист a имеет своим продолжением один из листов a'; вообще говоря, вдоль всей кривой l некоторый лист слева продолжается в один и тот же лист справа, но при особых положениях кривой может случиться, что в отдельных её точках взаимная связь листов будет изменяться. Допустим, что до такой точки, например, σ (т. е. на некоторой части кривой l, предшествующей точке σ), с листами $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ связаны — в указанном порядке — листы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а после точки σ (т. е. на некоторой части кривой l, следующей за σ) с этими листами связаны уже листы $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_n}$, причём числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ только порядком отличаются от чисел $1, 2, \ldots, n$. В таком случае точка, переместившаяся до точки σ с a_1 на a'_1 при продолжении своего движения, перемещаясь обратно после точки σ на левую сторону кривой, попадёт уже на лист a_{α_1}; при дальнейшем вращении вокруг точки σ слева направо [8] индекс листа, на котором будет находиться движущаяся точка, будет последовательно принимать значения

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_{\alpha_1},\ \ldots,\ \mu,\ \alpha_\mu,\ \ldots$$

В этой последовательности, пока снова не встретится 1, все члены будут различны, так как произвольному члену α_μ непосредственно предшествует не иной член, как μ, и так далее вплоть до 1. Если же после некоторого числа членов, которое мы назовём m и которое наверное не превышает n, появится снова член 1, то в дальнейшем члены будут повторяться в прежнем порядке. Итак, точка, вращающаяся около σ, после m обходов оказывается снова на начальном листе; таким образом, над точкой σ будут соединены между собой m листов, нашей поверхности T. Такую точку соединения мы будем называть точкой ветвления $(m-1)$-го порядка. Повторяя то же рассуждение для остальных $n-m$ листов поверхности, мы разобьём их (если они не лежат обособленно) на системы из m_1, m_2, ... листов, причём листы каждой системы соединены между собой в точках ветвления (m_1-1)-го, (m_2-1)-го, ... порядка, совпадающих всё с той же точкой σ плоскости A.

Если задана граница T как по своему положению, так и по направлению и если задано также положение точек ветвления, то тем самым поверхность T или вполне определена, или же не исключено, что существует несколько поверхностей, обладающих указанной границей и указанными точками ветвления; число таких поверхностей во всяком случае конечно [9].

Переменная величина, которая во всякой точке O поверхности T, вообще говоря (т. е. за возможным исключением [1]) отдельных точек или кривых), принимает определённое и притом непрерывно в зависимости от положения меняющееся значение, очевидно, может быть рассматриваема как функция пары переменных x, y; и всегда, когда в дальнейшем будет итти речь о функциях x, y, мы будем иметь в виду именно такое толкование этого понятия.

Но прежде чем мы перейдём к рассмотрению функций, заданных на поверхности T, дадим кое-какие разъяснения, касающиеся вопроса о связности поверхностей. При этом будем иметь в виду только такие поверхности, которые не расщепляются вдоль какой-нибудь кривой.

6

Две части поверхности мы считаем связными (или принадлежащими одному куску), если из точки одной части в точку другой части можно провести кривую, принадлежащую поверхности; в противном случае две части поверхности называются несвязными, или отдельно расположенными.

---

[1]) Это ограничение, правда, не обусловливается самим понятием функции и вводится лишь для того, чтобы иметь возможность пользоваться методами анализа бесконечно малых: такая функция, которая имеет разрывы во всех точках (например, функция, которая при рациональных значениях x и y принимает значение 1, во всех же других точках плоскости x, y равна, 2), не может быть (непосредственно) подвергнута ни дифференцированию, ни интегрированию, ни каким бы то ни было операциям анализа. Что касается ограничения, наложенного здесь без очевидной необходимости на самую поверхность T, то надобность его выяснится впоследствии (§ 15).

Исследование связности поверхности производится посредством проведения на ней разрезов, — таких кривых, которые, не имея кратных точек; т. е. себя не пересекая, идут от некоторой точки границы до некоторой точки границы. Конечная точка разреза, нужно заметить, может лежать и на границе, возникающей в процессе разрезывания, т. е. совпадать с одной из предшествующих точек разреза.

Связная поверхность называется односвязной, если всякий разрез разбивает её на куски, т. е. на отдельно расположенные части. В противном случае она называется многосвязной.

Теорема I. Всякая односвязная поверхность A при проведении разреза ab разделяется на две односвязные части.

Действительно, допустим, что одна из частей не разделялась бы разрезом cd на отдельные части; тогда возможны три случая: или ни одна из точек c, d не лежит на разрезе ab, или только одна, например, c, или, наконец, обе точки c, d лежат на разрезе ab. Уничтожая в первом случае разрез ab, во втором — часть cb, в третьем — часть cd разреза ab, мы пришли бы к заключению, что на поверхности A можно провести разрез, не разделяющий её на отдельные части, что противоречит допущению.

Теорема II. Если поверхность T после проведения n_1 разрезов [1] q_1 превращается в систему T_1, составленную из m_1 односвязных поверхностей, а после проведения n_2 разрезов q_2 превращается в систему T_2, составленную из m_2 поверхностей, то невозможно неравенство $n_2 - m_2 > n_1 - m_1$.

Каждая из кривых q_2 (если она не принадлежит целиком системе разрезов q_1) образует один или несколько разрезов q_2' поверхности T_1. Следует считать концевыми точками разрезов q_2':

(1) $2n_2$ концевых точек разрезов q_2, за исключением тех случаев, когда концевая часть разреза принадлежит системе q_2,

(2) каждую промежуточную точку разреза q_2, в которой этот разрез вступает на систему q_1 в промежуточной точке одного из её разрезов, за исключением того случая, когда рассматриваемая точка уже принадлежит другому разрезу системы q_1, т. е. когда концевая часть некоторого разреза системы q_2 совпадает с данным разрезом q_2.

Пусть число μ содержит столько единиц, сколько раз кривые обеих систем встречаются и расходятся (отдельная общая точка, следовательно, считается дважды); ν_1 — столько единиц, сколько раз концевая часть разреза q_1 совпадает с промежуточной частью разреза q_2; ν_2 — столько единиц, сколько раз концевая часть разреза q_2 совпадает с промежуточной частью разреза q_1; ν_3 — столько единиц, сколько раз концевая часть разреза q_1 совпадает с концевой частью разреза q_2. Тогда пункт (1) даёт нам $2n_2 - \nu_2 - \nu_3$, пункт (2) $\mu - \nu_1$ концевых точек разрезов q_2'. Объ-

[1]) Предполагается, что разрезы производятся (если их несколько) последовательно, т. е. каждый новый разрез проводится на поверхности, полученной после проведения всех предыдущих.

единение двух пунктов даёт нам все концевые точки q_2' и каждую по одному разу, откуда можно заключить, что число разрезов q_2' равно

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s.$$

Подобными же рассуждениями мы покажем, что число разрезов q_1' поверхности T_2, образованных системой разрезов q_1, равно

$$\frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2} = n_1 + s.$$

Поверхность T_1 после $n_2 + s$ разрезов q_2', очевидно, превращается в ту же поверхность, что и поверхность T_2 после $n_1 + s$ разрезов q_1'. Но T_1 состоит из m_1 односвязных частей и, согласно теореме I, после $n_2 + s$ разрезов разобьётся на $m_1 + n_2 + s$ односвязных частей; следовательно, если бы было $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$, то число односвязных частей T_2 при проведении $n_1 + s$ разрезов должно было бы увеличиться больше, чем на $n_1 + s$, что невозможно [10].

Вследствие этой теоремы можно утверждать, что если число разрезов некоторой системы равно n, а число полученных после разрезывания односвязных частей поверхности равно m, то разность $n - m$ остаётся одной и той же, какова бы ни была система разрезов. В самом деле, пусть при одной системе имеется n_1 разрезов и получается m_1 частей, при другой имеется n_2 разрезов и получается m_2 частей; тогда, если m_1 частей после проведения разрезов первой системы односвязны, то $n_2 - m_2 \leqslant n_1 - m_1$; если же m_2 частей после проведения разрезов второй системы односвязны, то $n_1 - m_1 \leqslant n_2 - m_2$. Если же допустить и то и другое, то должно быть $n_2 - m_2 = n_1 - m_1$.

Это число $n - m$ уместно назвать «порядком связности» поверхности. Укажем некоторые его свойства. Порядок связности

после каждого разреза уменьшается на единицу, по определению;

не изменяется, если разрезывание производится от некоторой внутренней точки поверхности через внутренние же точки без пересечений к граничной точке или к предшествующей точке кривой, по которой происходит разрезывание;

если разрезывание производится от внутренней до внутренней точки поверхности, без пересечений, то увеличивается на единицу.

Чтобы убедиться в справедливости двух последних утверждений, достаточно уяснить себе, что в первом случае кривая, по которой производится разрезывание, превращается в разрез (в настоящем смысле) после добавления одного разреза, во втором случае — после добавления двух разрезов.

Наконец, заметим, что порядок связности поверхности, состоящей из нескольких отдельных частей, равен сумме порядков связности этих частей.

В дальнейшем придётся иметь дело преимущественно с поверхностями, состоящими лишь из одной части, и с целью характеризовать их связность, мы будем, несколько упрощая терминологию, говорить об односвязной, двусвязной и т. д. поверхностях, понимая под n-связной поверхностью такую, которая после $n-1$ разрезов превращается в односвязную.

Что касается взаимоотношений между связностью поверхности и связностью её границы, то здесь легко получаются следующие предложения.

1) Граница односвязной поверхности непременно состоит из одной замкнутой кривой.

Действительно, если бы граница состояла из нескольких отдельных кривых, то разрез q, соединяющий одну из таких кривых a с другой кривой b, отделял бы части поверхности, которые должны были бы быть связными, так как внутри поверхности можно было бы провести кривую вдоль a с одной стороны разреза q на другую; значит, разрез q не разбил бы поверхность на отдельные части.

2) Каждый разрез или уменьшает на 1 или увеличивает на 1 число граничных кривых.

Возможные случаи таковы:

или разрез q проходит от некоторой точки граничной кривой a до некоторой точки другой граничной кривой b; тогда кривые a, q, b, q, взятые в указанном порядке, образуют единственную граничную кривую;

или разрез q соединяет две точки одной и той же граничной кривой; тогда эта кривая конечными точками разреза разбивается на две, из которых каждая в соединении с разрезом q образует отдельную граничную кривую;

или, наконец, разрез q заканчивается в одной из своих же предшествующих точек и в таком случае составляется из замкнутой кривой o и кривой l, соединяющей некоторую точку o с некоторой точкой граничной кривой a; тогда, с одной стороны, сама по себе кривая o, с другой — a, l, o, l представляют собой отдельные граничные кривые.

Таким образом, после разреза в первом случае вместо двух получается одна граничная кривая, во втором и в третьем — вместо одной — две. Отсюда и следует теорема.

Итак, число отдельных граничных кривых n-связной поверхности или равно n, или на чётное число меньше n.

Отметим ещё такое следствие.

Если число отдельных кривых, ограничивающих n-связную поверхность, равно n, то всякая замкнутая, внутри поверхности расположенная, себя не пересекающая кривая разбивает поверхность на две отдельные части.

В самом деле, порядок связности при разрезывании поверхности по упомянутой кривой не изменяется, а число граничных кривых увеличивается на 2, и если бы полученная после разрезывания по нашей замкнутой кривой поверхность была связной, то она имела бы порядок связности n, а граница её состояла бы из $n+2$ отдельных кривых, что невозможно.

7 [11]

Пусть X и Y — две функции переменных x, y, непрерывные во всех точках разостланной по плоскости A поверхности T. Тогда справедлива формула [12]

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dT = - \int (X \cos \xi + Y \cos \eta)\, ds,$$

причём интеграл слева распространён на всю поверхность T, а интеграл справа берётся по всей её границе, элемент которой обозначается через ds; что касается ξ и η, то эти буквы обозначают углы, которые нормаль к граничной кривой, направленная внутрь поверхности T, делает с осями x и y.

Займёмся сначала преобразованием интеграла $\int \frac{\partial X}{\partial x} dT$. Для этого разобьём часть плоскости A, покрытую поверхностью T, на полосы прямыми, параллельными оси x, таким образом, чтобы через каждую точку ветвления проходила такая прямая. На каждой из полос будет лежать одна или несколько отдельных трапециеобразных частей T. Элементарная полоса, выделяющая на оси y элемент dy, даёт, очевидно, интегралу $\int \frac{\partial X}{\partial x} dT$ составляющую, равную $dy \int \frac{\partial X}{\partial x} dx$, причём последний интеграл должен быть распространён на один или несколько прямолинейных отрезков, расположенных на нормали к элементу dy, проходящей через какую-нибудь его точку, и принадлежащих поверхности T. Обозначим через $O_{,}$, $O_{,,}$, $O_{,,,}$, ... нижние точки этих отрезков (т. е. соответствующие меньшим значениям x), через O', O'', O''', ... их верхние точки, через $X_{,}$, $X_{,,}$, ..., X', X'', ... значения X в этих точках, через $ds_{,}$, $ds_{,,}$, ..., ds', ds'', ... элементы граничных кривых, вырезанные элементарной полосой, и через $\xi_{,}$, $\xi_{,,}$, ..., ξ', ξ'', ... значения ξ для этих элементов. Тогда получим

$$\int \frac{\partial X}{\partial x} dx = - X_{,} - X_{,,} - X_{,,,} - \ldots + X' + X'' + X''' + \ldots$$

Угол ξ, очевидно, — острый в нижних и тупой в верхних точках упомянутых отрезков, и потому

$$dy = \cos \xi_{,}\, ds_{,} = \cos \xi_{,,} ds_{,,} = \ldots = -\cos \xi' \, ds' = -\cos \xi'' \, ds'' = \ldots$$

После подстановки этих значений получаем

$$dy \int \frac{\partial X}{\partial x} dx = - \sum X \cos \xi \, ds,$$

причём суммирование распространяется на все элементы граничных кривых, имеющие на оси y проекцию dy.

После интегрирования по всем элементам dy мы исчерпаем как поверхность T (слева), так и всю её границу (справа) и будем иметь

$$\int \frac{\partial X}{\partial x} dT = - \int X \cos \xi \, ds.$$

Такие же рассуждения приводят к формуле

$$\int \frac{\partial Y}{\partial y}\, dT = -\int Y \cos\eta\, ds.$$

И отсюда следует

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int (X\cos\xi + Y\cos\eta)\, ds,$$

что и требовалось доказать.

8

Условимся отсчитывать длину граничной кривой от некоторой неподвижной начальной точки в направлении, которое ещё будет определено в дальнейшем, до переменной точки O_0 и будем обозначать эту длину через s; с другой стороны, проведя через точку O_0 нормаль к граничной кривой, условимся обозначать через p расстояние от переменной точки O на этой нормали до точки O_0, предполагая, что положительный отсчёт при этом должен совершаться внутрь рассматриваемой поверхности. Тогда координаты x, y, точки O становятся функциями s и p, и в точках границы имеют место равенства:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \cos\xi, \qquad \frac{\partial y}{\partial p} = \cos\eta, \qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \pm\cos\eta, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \mp\cos\xi,$$

причём верхние знаки следует брать в том случае, если направление, по которому величина s считается возрастающей, расположено относительно внутренней нормали таким же образом, как ось x относительно оси y; в противном же случае следует брать нижние знаки. Условимся теперь выбирать это направление с таким расчётом, чтобы справедливы были равенства $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial p}$ и, следовательно, $\frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial p}$, чем не нарушается общность дальнейших результатов.

Очевидно, эти соглашения можно распространить и на кривые, проходящие внутри поверхности; остаётся только, сохраняя условие, касающееся взаимной зависимости знаков dp и ds, указать, как будет выбираться знак dp или ds; именно, если речь идёт о замкнутой кривой, то нужно будет указать ту из разделяемых ею поверхностей, границей которой считается данная кривая (чем определится знак dp); если же речь идёт о незамкнутой кривой, то здесь нужно будет указать начальную точку, т. е. ту точку, для которой s — наименьшее.

Подставляя полученные для $\cos\xi$ и $\cos\eta$ значения в равенство, доказанное в предыдущем параграфе, мы получаем

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds = \int \left(X\frac{\partial y}{\partial s} - Y\frac{\partial x}{\partial s}\right) ds,$$

причём интегралы распространены так же, как и раньше.

9

Применяя только что выведенную формулу к частному случаю, когда на всей поверхности удовлетворяется уравнение

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0,$$

мы получаем следующие предложения.

I. Если X и Y — две функции, непрерывные во всех точках поверхности T и удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0,$$

то можно утверждать, что

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds=0,$$

причём интеграл взят по всей границе T.

Представим себе, что некоторая поверхность T_1, разостланная на плоскости A, разбита на две части T_2 и T_3; тогда интеграл

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

взятый по границе поверхности T_2, может быть рассматриваем как разность соответствующих интегралов, взятых по границе T_1 и T_3. В самом деле, там, где поверхность T_3 простирается до границы T_1, интегралы взаимно уничтожаются, все же остальные элементы как раз образуют элементы границы T_2.

С помощью этого замечания из I вытекает:

II. Значение интеграла

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

взятого по всей границе некоторой поверхности, разостланной по плоскости A, остаётся неизменным при каких угодно изменениях поверхности, лишь бы при этих изменениях не прибавлялись или не отбрасывались такие части поверхности, в которых не были бы выполнены предпосылки теоремы I.

Если функции X, Y на всей поверхности T удовлетворяют выше написанному дифференциальному уравнению, но на отдельных кривых или в отдельных точках имеют разрывы, то можно окружить каждую такую кривую или точку как угодно малыми частями поверхности (как бы оболочкой), и тогда с помощью предложения II получаем:

III. Интеграл

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

взятый по всей границе T, равен сумме таких же интегралов, взятых по окружениям всех мест разрыва, и притом не меняет своего значения, как бы тесно эти окружения ни охватывали места разрыва.

Значение рассматриваемого интеграла в случае одной точки разрыва неизбежно равно нулю, если при бесконечно малом расстоянии ρ точки O от точки разрыва ρX и ρY также бесконечно малы. Действительно, если, принимая такую точку разрыва за начало, введём (при произвольном начальном направлении) полярные координаты ρ, φ и в качестве окружения выберем круг радиуса ρ, то интеграл принимает вид

$$\int_0^{2\pi}\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\rho\, d\varphi,$$

и, следовательно, не может иметь значение $\varkappa$, отличное от нуля, так как, как бы мало ни было $\varkappa$, отличное от нуля, ρ можно взять всегда столь малым, что $\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\rho$ по абсолютному значению при любом значении φ будет меньше, чем $\frac{\varkappa}{2\pi}$; поэтому по абсолютному значению

$$\int_0^{2\pi}\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\rho\, d\varphi<\varkappa.$$

IV. Если на данной односвязной поверхности, разостланной по плоскости A, интеграл

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

или

$$\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds,$$

будучи взят по всей границе произвольной части поверхности, равен нулю, то такой же интеграл, взятый по произвольной кривой, проходящей по поверхности между неподвижными точками O_0 и O, имеет одно и то же значение.

Какие-нибудь две кривые, соединяющие точки O_0 и O, например, s_1 и s_2, вместе образуют замкнутую кривую s_3. Эта кривая, возможно, не имеет кратных точек; в противном случае её можно разложить на ряд замкнутых кривых, не имеющих кратных точек. Для этого следует, идя из некоторой точки кривой, останавливаться при проходе через точку, уже пройденную однажды, и выделять в особую кривую часть кривой, возникшую между этими двумя проходами; затем следует итти непосредственно дальше с соблюдением указанного правила. Каждая замкнутая кривая без кратных точек разбивает нашу поверхность на две части — односвязную и двусвязную; она образует полную границу первой из них, и интеграл, взятый по этой кривой, вследствие сделанного предположения, равен нулю. То же справедливо, следовательно, и относительно интеграла, взятого по всей кривой s_3 (конечно, предполагается, что отсчёт s ведётся всё время в одном и том же направлении); поэтому сумма интегралов, взятых по кривым s_1 и s_2 с сохранением направления отсчёта s, т. е. по одной кривой от O_0 до O, по другой от O до O_0, равна нулю, и, таким образом, если направление в одном из интегралов изменить, интегралы станут равны.

Пусть теперь имеется произвольная поверхность T, на которой, вообще говоря, выполнено равенство

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0:$$

выключая, если нужно, места разрывов, можем заключить, что интеграл

$$\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds,$$

взятый по полной границе любой части поверхности, равен нулю. Посредством разрезов превратим поверхность в односвязную, которую назовём T^*. Для всякой кривой, проходящей внутри T^* от точки O_0 к точке O, интеграл имеет одно и то же значение; обозначая его для краткости через

$$\int\limits_{O_0}^{O}\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds,$$

мы видим, считая точку O_0 неподвижной, а точку O подвижной, что интеграл при любом положении O не зависит от соединяющей эти точки кривой и может поэтому считаться функцией от x, y. Изменение этой функции при движении от точки O по элементу пути ds равно

$$\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds;$$

оно непрерывно всюду в T^* и одинаково также с обеих сторон любого разреза поверхности T. Следовательно,

V. Интеграл

$$Z=\int\limits_{O_0}^{O}\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds$$

представляет собой при неподвижной точке O_0 функцию от x, y, которая непрерывна в T^*, при переходе через разрезы поверхности T изменяется внезапно (скачком) на постоянную величину, и удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=Y,\quad \frac{\partial Z}{\partial y}=-X.$$

Изменения (скачки), испытываемые интегралом при переходе через разрезы, зависят от числа независимых переменных, равного числу разрезов: в самом деле, станем проходить по системе разрезов в обратном порядке, начиная с последнего разреза, тогда скачок будет везде определён, если известно будет его числовое значение в начале каждого разреза, эти же значения между собою независимы [13].

10

Если вместо функций, которые до сих пор были обозначены через X и Y, подставим

$$u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad u\frac{\partial u'}{\partial y}-u'\frac{\partial u}{\partial y},$$

то получим

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)-u'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

и, следовательно, если функции u и u' удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}=0,$$

то условие

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

будет выполнено, так что для интеграла

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

который в нашем случае принимает вид

$$\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial p}-u'\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds,$$

оказываются справедливыми теоремы предыдущего параграфа.

Предположим теперь относительно функции u, что она, как и её частные производные первого порядка, если имеет разрывы, то лишь расположенные в отдельных точках (а не вдоль какой-нибудь кривой) и притом такого рода, что, если через ρ обозначим расстояние точки O от точки разрыва, то величины $\rho\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\rho\frac{\partial u}{\partial y}$ будут бесконечно малы вместе с ρ. Тогда, на основании сделанного выше примечания к предложению III, на точки разрыва функции u можно будет не обращать внимания.

Действительно, на всякой прямой, выходящей из точки разрыва, можно найти такое значение $\rho=R$, что величина

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}=\rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\rho\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}$$

остаётся при $\rho \leqslant R$ меньше некоторого постоянного предела, и если обозначим через U значение u при $\rho = R$, через M наибольшее значение (независимо от знака) функции $\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}$ при $\rho \leqslant R$, то получим (также независимо от знака) $u - U < M(\log \rho - \log R)$; следовательно, $\rho(u - U)$ и также ρu бесконечно мало вместе с ρ; то же самое справедливо относительно $\rho \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\rho \frac{\partial u}{\partial y}$ и, значит (если u' не имеет разрыва), относительно

$$\rho\left(u \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{и} \quad \rho\left(u \frac{\partial u'}{\partial y} - u' \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Итак, выполнены как раз все необходимые предпосылки.

Мы допустим теперь, что поверхность T — геометрическое место точек O — разостлана без покрытий по плоскости A. Пусть O_0 — неподвижная точка, в которой u, x, y принимают значения u_0, x_0, y_0. Тогда величина

$$\frac{1}{2} \log((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = \log r,$$

будучи рассматриваема как функция x, y, обладает тем свойством, что

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} = 0,$$

и только в одной точке поверхности T, а именно в точке $x = x_0$, $y = y_0$, имеется разрыв.

В таком случае, согласно предложению III § 9, полагая $u' = \log r$, мы можем заключить, что интеграл

$$\int \left(u \frac{\partial \log r}{\partial p} - \log r \frac{\partial u}{\partial p}\right) ds,$$

взятый по всей границе T, равен этому же интегралу, взятому по любой кривой вокруг точки O_0; если в качестве таковой взять окружность, то радиус-вектор r можно будет считать постоянным, и, обозначая через φ дугу, отсчитываемую в долях радиуса от произвольной точки окружности в произвольном направлении, убедимся, что интеграл преобразуется к виду

$$-\int_0^{2\pi} u \frac{\partial \log r}{\partial r} r\, d\varphi - \log r \int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds,$$

или же, так как $\int \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0$ [14], к виду $-\int_0^{2\pi} u\, d\varphi$; если r бесконечно мало, а функция u в точке O_0 непрерывна, он переходит в $-u_0 2\pi$.

Итак, при сделанных относительно u и T предположениях, мы получаем для значения u в точке O_0 формулу

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial p} - u \frac{\partial \log r}{\partial p}\right) ds,$$

причём интеграл берётся по всей границе произвольной поверхности, содержащей точку O_0, и предполагается, что u непрерывна на этой поверхности; в частности, если интеграл взят по окружности с центром O_0, мы получаем

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\, d\varphi.$$

С помощью первого из двух последних равенств получается следующая

Теорема. Если функция u на некоторой поверхности, разостланной без покрытий по плоскости A, удовлетворяет, вообще говоря, уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

или, точнее говоря, если

1) точки, в которых уравнение не выполняется, не заполняют никакой части плоскости,

2) точки, в которых u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ имеют разрывы, не заполняют никакой кривой,

3) если имеются такие точки разрыва, то при бесконечно малых расстояниях ρ точки O от точки разрыва величины $\rho \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\rho \frac{\partial u}{\partial y}$ также бесконечно малы,

4) не существует точек, в которых разрыв устранялся бы изменением одного значения функции,

— то во всех точках, расположенных внутри данной поверхности, функция u конечна и непрерывна, так же как и её частные производные всех порядков [15].

Действительно, если точку O_0 будем считать подвижной, то в выражении

$$\int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial p} - u \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds$$

будут меняться только $\log r$, $\frac{\partial \log r}{\partial x}$, $\frac{\partial \log r}{\partial y}$. Но для всякого элемента границы поверхности T (если только O_0 внутри T) эти величины, как и все их частные производные, являются конечными и непрерывными функциями переменных x_0, y_0, так как производные являются дробными рациональными функциями этих переменных, содержащими в знаменателе лишь степени r. Такое же утверждение справедливо, следовательно, и относительно интеграла, значит, и относительно u_0. Ибо эта последняя функция, при предположениях 1) — 3) может лишь в отдельных точках иметь значения, отличные от рассматриваемого интеграла; но тогда она не была бы непрерывна, что стоит в противоречии с предположением 4).

11

При тех же предположениях относительно u и T, что и в конце предыдущего параграфа, мы получаем ряд дальнейших предложений.

I. Если на некоторой кривой $u=0$ и $\frac{\partial u}{\partial p}=0$, то u равно нулю всюду.

Мы покажем сначала, что кривая λ, на которой выполнены данные равенства, не может войти в состав границы такой части a поверхности T, где u положительно.

В самом деле, в противном случае всегда можно было бы выделить из a такую часть, которая была бы ограничена, с одной стороны, кривой λ, и с другой, — дугой окружности, причём не содержала бы внутри центр этой окружности (назовём его O_0).

Тогда, вводя полярные координаты r, φ точки O относительно O_0, мы получили бы

$$\int \log r \frac{\partial u}{\partial p}\, ds - \int u \frac{\partial \log r}{\partial p}\, ds = 0,$$

где интегралы взяты по полной границе выделенной части поверхности, или же, принимая во внимание сделанные допущения,

$$\int u\, d\varphi + \log r \int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds = 0,$$

где интегралы распространены только по дуге окружности. Но $\int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds = 0$; следовательно, $\int u\, d\varphi = 0$, что невозможно, так как мы допустили, что u внутри a положительно.

Подобным же образом докажем, что равенства $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial p}=0$ не могут быть выполнены на кривой, входящей в состав границы такой части поверхности, где u отрицательно.

Наконец, если бы равенства $u=0$ и $\frac{\partial u}{\partial p}=0$ были выполнены на некоторой кривой и если бы, с другой стороны, u было отлично от нуля в какой-нибудь части поверхности T, то такая часть или была бы непосредственно ограничена данной кривой, или же к ней примыкала бы часть плоскости, где u было бы равно нулю, и, следовательно, в состав её границы всё же вошла бы кривая, на которой были бы выполнены наши равенства [16]. Так мы приходим к уже рассмотренным случаям.

II. Если известны значения u и $\frac{\partial u}{\partial p}$ на некоторой кривой, тем самым функция u определена на всей поверхности T.

Пусть u_1 и u_2 — две функции, удовлетворяющие всем требованиям, наложенным на u; тогда, как легко понять, всем этим требованиям удовлетворяет и разность $u_1 - u_2$. Если бы значения u_1 и u_2, а также их производных по p совпадали бы на данной кривой, но не совпадали бы в некоторой части поверхности T, то применение теоремы I к разности $u_1 - u_2$ привело бы к противоречию.

III. Геометрическое место точек внутри T, где u имеет постоянное значение, представляет собой (если только u не всюду постоянно) кривые, которые отделяют части плоскости, где u больше данного постоянного значения, от частей плоскости, где u меньше его.

Эта теорема составляется из следующих:

u не может в некоторой точке T иметь максимум или минимум;

u не может быть постоянным **только** в некоторой части T;

кривые, на которых $u = a$, не могут с обеих сторон ограничивать части плоскости, где $u - a$ имеет один и тот же знак.

Допуская, что одна из этих теорем неверна, мы неизбежно приходим к противоречию с доказанным в предыдущем параграфе равенством

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \, d\varphi, \quad \text{или} \quad \int_0^{2\pi} (u - u_0) \, d\varphi = 0.$$

12

Мы возвращаемся теперь к рассмотрению комплексной переменной величины $w = u + vi$, которая, вообще говоря (т. е., за исключением, может быть, отдельных точек или кривых), во всякой точке O поверхности T принимает определённое значение, изменяющееся при положении этой точки непрерывно и в соответствии с уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

О функции w, обладающей указанными свойствами, мы будем говорить, не упуская из виду того, что было установлено в самом начале, что она является функцией комплексной переменной $z = x + yi$. Для упрощения дальнейшего мы условимся заранее, что функции переменной z не будут обладать такими разрывами в отдельной точке, которые могут быть уничтожены посредством изменения значения функции в этой точке.

Что касается поверхности T, то будем предполагать пока, что она — односвязная и разостлана по плоскости A без покрытий.

Теорема. Если функция w переменной z не имеет разрывов, образующих целые кривые, и, кроме того, для любой точки O', где $z = z'$, нашей поверхности величина $w(z - z')$ при неограниченном приближении точки O к O' становится бесконечно малой, то функция w вместе со всеми своими производными внутри поверхности конечна и непрерывна.

Положив $z - z' = \rho e^{\varphi i}$, заметим, что предположения, сделанные относительно функции w, расчленяются следующим образом:

1) $$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

и

2) $$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

везде на поверхности T;

3) функции u и v не могут иметь разрывов вдоль кривой;

4) для любой точки O' величины ρu и ρv бесконечно малы, если таковым является расстояние ρ точки O от точки O';

5) функции u и v не обладают такими разрывами в отдельной точке, которые могли бы быть уничтожены изменением их значений в этой точке.

Вследствие предположений 2), 3), 4) интеграл

$$\int \left(u \frac{\partial x}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds,$$

распространённый по полной границе произвольной части поверхности T, равен нулю (§ 9, III), и интеграл

$$\int_{O_0}^{O} \left(u \frac{\partial x}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds,$$

взятый по любой кривой (§ 9, IV) от неподвижной точки O_0 до точки O, является функцией U переменных x, y, которая непрерывна всюду, кроме отдельных точек, и удовлетворяет [вследствие 5)] во всех точках условиям $\frac{\partial U}{\partial x} = u$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -v$. Принимая во внимание эти условия, мы видим, что предположения 1), 3), 4) позволяют утверждать, что для функции U выполнены все предпосылки теоремы в конце § 10. Значит, функция U конечна и непрерывна, как и все её частные производные, в любой точке поверхности T, и то же справедливо для комплексной функции $w = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} i$ и всех её производных по комплексной переменной z [17].

13

Посмотрим теперь, к каким заключениям мы придём, если, сохраняя все прочие предположения § 12, допустим, что для некоторой определённой точки O' нашей поверхности величина $(z - z')\, w = \rho e^{\varphi i} w$ при бесконечном приближении точки O к O' уже не будет бесконечно малой. В таком случае величина w при приближении O к O' становится бесконечно большой, и мы допустим, что, если величина w и не будет того же порядка что и $\frac{1}{\rho}$ (т. е. отношение этих величин не будет приближаться к конечному пределу), то во всяком случае порядки этих величин находятся в конечном отношении, так что можно указать такую степень ρ, произведение которой на w при ρ бесконечно малом или будет бесконечно малым или будет оставаться конечным. Пусть μ — показатель этой степени, n — ближайшее к нему (большее или равное) целое число; тогда величина $(z-z')^n w=\rho^n e^{n\varphi i}w$ вместе с ρ будет бесконечно малой, и потому (так как $\frac{d(z-z')^{n-1}w}{dz}$ не зависит от dz) $(z-z')^{n-1}w$ будет такой функцией величины z, которая в рассматриваемой части поверхности удовлетворяет предпосылкам § 12 и, следовательно, в точке O конечна и непрерывна. Обозначим её значение в этой точке через a_{n-1}; тогда функция $(z-z')^{n-1}w-a_{n-1}$ в этой точке непрерывна и равна 0, и потому бесконечно мала вместе с ρ, откуда, согласно § 12, заключаем, что функция $(z-z')^{n-2}w-$ $-\frac{a_{n-1}}{z-z'}$ непрерывна в точке O'. Продолжая то же рассуждение, мы убедимся, что после вычитания выражения вида

$$\frac{a_1}{z-z'}+\frac{a_2}{(z-z')^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(z-z')^{n-1}}$$

функция w превращается в функцию, конечную и непрерывную в точке O'.

Итак, если изменить предположения § 12 в том смысле, что при бесконечном приближении O к некоторой точке O' внутри поверхности T функция w становится бесконечно большой, то порядок этой бесконечной величины (величина, растущая обратно пропорционально рассматриваемому расстоянию, считается бесконечно большой первого порядка), если только он конечен, будет целым числом; обозначая его через m, видим дальше, что после прибавления функции, содержащей $2m$ произвольных постоянных, наша функция превращается в функцию, непрерывную в точке O'.

Примечание. Мы считаем, что функция содержит одну произвольную постоянную, если возможным способам её определения соответствует непрерывная область одного измерения.

14

Ограничения, наложенные на поверхность T в § 12 и § 13, не являются существенными для того, чтобы полученные нами результаты были справедливы. Очевидно, всякую точку внутри поверхности можно окружить такой частью поверхности, которая обладала бы нужными нам свойствами; единственное исключение представляют точки ветвления.

Чтобы подвергнуть исследованию также и этот случай, вообразим, что поверхность T или некоторая часть её, содержащая точку ветвления $(n-1)$-го порядка O', в которой $z=z'=x'+y'i$, отображена посредством функции $\zeta=(z-z')^{\frac{1}{n}}$ на другую плоскость Λ; другими словами, представим себе, что значению функции $\zeta = \xi + \eta i$ в точке O сопоставляется точка Θ с прямоугольными координатами ξ, η, так что точка O будет отображаться на точку Θ. Таким образом, упомянутая часть поверхности T отобразится на некоторую связную разостланную по плоскости Λ поверхность, для которой, как мы сейчас убедимся, точка Θ', на которую отображается O', уже не будет точкой ветвления.

Предположим для определённости, что в плоскости A проведён круг с центром O' и радиусом R и затем диаметр этого круга, параллельный оси x (на котором $z - z'$, очевидно, принимает действительные значения). Вырезанная этим кругом часть поверхности T, содержащая точку ветвления, по каждую из сторон диаметра разобьётся, если R выбрано достаточно малым, на n отдельных полукруглых кусков. С той стороны диаметра, где $y - y'$ положительно, обозначим эти куски через a_1, $a_2, \ldots, a_n$, с противоположной — через a_1', a_2', $\ldots$, a_n'; допустим дальше, что по тому радиусу, где $z - z'$ имеет отрицательные значения, a_1, a_2, $\ldots$, a_n связаны (в порядке перечисления) с a_1', a_2', $\ldots$, a_n', а по тому радиусу, где $z - z'$ положительно, — с a_n', a_1', $\ldots$, a_{n-1}', так что подвижная точка, совершающая обход (в надлежащем направлении) вокруг точки O', проходит последовательно полукруги a_1, a_1', a_2, a_2', $\ldots$, a_n, a_n', а затем возвращается снова в a_1; такое допущение, очевидно, не ограничивает общности. Затем введём в обеих плоскостях полярные координаты, полагая $z - z' = \rho e^{\varphi i}$, $\zeta = \sigma e^{\psi i}$. Для отображения точек из полукруга a_1 выберем те значения $(z - z')^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi}{n} i}$, какие это последнее выражение принимает при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, и тогда для всех точек a_1 будем иметь $\sigma \leqslant R^{\frac{1}{n}}$, $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{n}$; все отображающие точки в плоскости Λ, очевидно, попадают в сектор круга, описанного около точки Θ' радиусом, равным $R^{\frac{1}{n}}$, простирающийся от $\psi = 0$ до $\psi = \frac{\pi}{n}$. Так как при непрерывном перемещении отображаемой точки по a_1 соответствующая отображающая точка движется также непрерывно, то мы видим, что наш полукруг отображается на связную поверхность, одним листом покрывающую упомянутый сектор. Подобным же образом полукруги a_1', a_2 отображаются на секторы, простирающиеся от $\psi = \frac{\pi}{n}$ до $\psi = \frac{2\pi}{n}$, от $\psi = \frac{2\pi}{n}$ до $\psi = \frac{3\pi}{n}$ и т. д., наконец, a_n' отображается на сектор, простирающийся от $\psi = \frac{2n-1}{n}\pi$ до $\psi = 2\pi$; при этом φ для каждого из перечисленных полукругов выбирается из промежутков от π до 2π, от 2π до 3π и т. д., наконец, от $(2n-1)\pi$ до $2n\pi$ (что, очевидно, можно сделать единственным способом). Полученные секторы примыкают один к другому в неизменном порядке следования точно таким же образом, как полукруги a и a', причём точки, образующие общую границу двух соседних полукругов, переходят в точки, образующие общую границу двух соседних секторов. Итак, мы получаем связное отображение окружающей точку O' части поверхности T на поверхность, покрывающую плоскость Λ одним листом.

Если переменная величина принимает определённое значение в каждой точке O, то она принимает определённое значенпе также в каждой точке Θ, и обратно, так как каждому O соответствует одно Θ и каждому Θ — одно O; если, далее, она есть функция комплексной переменной z, то она есть функция также и от комплексной переменной ζ, так как, если $\frac{dw}{dz}$ не зависит от dz, то $\frac{dw}{d\zeta}$ не зависит от $d\zeta$, и обратно. Отсюда заключаем, что все теоремы §§ 12—13 справедливы для функций w переменной z также и в точке ветвления O', причём w должно быть рассматриваемо как функция переменной $(z-z')^{\frac{1}{n}}$. Именно, мы получаем следующую теорему.

Если при бесконечном приближении точки O к точке ветвления $(n-1)$-го порядка O' функция w переменной z становится бесконечной, то порядок бесконечности её в этой точке есть число, кратное $\frac{1}{n}$, и если, именно, он равен $-\frac{m}{n}$, то, прибавляя к w выражение вида

$$\frac{a_1}{(z-z')^{\frac{1}{n}}}+\frac{a_2}{(z-z')^{\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{a_m}{(z-z')^{\frac{m}{n}}},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — некоторые комплексные величины, не подчинённые особым ограничениям, мы получим функцию, непрерывную в точке O'.

Как следствие этой теоремы утверждаем: функция w в точке O' непрерывна, если оказывается, что при бесконечном приближении точки O к O' величина $(z-z')^{\frac{1}{n}}w$ становится бесконечно малой.

15

Допустим теперь, что функция переменной z, заданная во всякой точке как угодно разостланной по плоскости A поверхности T и не сводящаяся к постоянной, истолковывается геометрически таким образом, что её значение $w=u+iv$ в точке O изображается в виде точки Q плоскости B с прямоугольными координатами u, v. Тогда можно утверждать следующее:

I. Совокупность точек Q образует поверхность S, каждой точке которой сопоставляется определённая точка поверхности T, перемещающаяся по этой поверхности непрерывно при непрерывном перемещении первой точки по поверхности T.

Чтобы это доказать, нам необходимо, очевидно, убедиться только в том, что при перемещении точки O точка Q также наверное (и притом, вообще говоря, непрерывно) перемещается. Это вытекает из такой теоремы.

Функция $w = u + vi$ переменной z не может быть постоянна вдоль кривой, если не сводится к постоянной.

Доказательство. Если бы на данной кривой функция w имела постоянное значение $a + bi$, то величины $u - a$ и $\frac{\partial (u-a)}{\partial p}$ (последняя равна $-\frac{\partial v}{\partial s}$) на этой кривой обращались бы в нуль; с другой стороны, везде справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 (u-a)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u-a)}{\partial y^2} = 0;$$

вследствие § 11, I отсюда следует, что везде $u - a$ равно нулю, а так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

то $v - b$ также везде равно нулю, вопреки сделанному допущению.

II. На основании предположений теоремы I, не может существовать связности между частями S, если нет связности между соответствующими частями T; обратно, всякий раз, как имеется связность на T и функция w непрерывна, на поверхности S может быть установлена также связность.

Действительно, границе S соответствует, с одной стороны, граница T, с другой — точки разрыва w; внутренние же части S, за исключением отдельных точек, разостланы на плоскости B одним листом, т. е. нигде не происходит ни расщепление на листы, лежащие один над другим, ни переворачивание.

Так как связность T — такая же, как и связность S, то первое могло бы произойти только в том случае, если бы было расщепление поверхности T, а этого мы не допускаем; мы покажем теперь, что не может быть второго.

Убедимся сначала в том, что точка Q', в которой $\frac{dw}{dz}$ конечно, не может лежать в складке поверхности S. В самом деле, если мы окружим точку O', которой соответствует Q', частью поверхности T безразлично какой формы и неопределённых размеров, то (согласно § 3) размеры её могут быть выбраны столь малыми, что соответствующая часть поверхности S по форме от неё отличается как угодно мало и, в частности, может отличаться так мало, что граница части поверхности S вырежет на плоскости B кусок, заключающий точку Q' внутри себя. Но это невозможно, если Q' находится в складке поверхности S.

Однако величина $\frac{dw}{dz}$, рассматриваемая как функция z, вследстие I, может обращаться в нуль только в отдельных точках, и так как функция

w в рассматриваемых точках T непрерывна, то $\frac{dw}{dz}$ только в точках ветвления может обращаться в бесконечность; следовательно, и т. д., что и требовалось доказать.

III. Итак поверхность S обладает всеми теми же свойствами, которые были в § 5 указаны для поверхности T; и в каждой точке Q этой поверхности переменная величина z имеет определённое значение, которое изменяется непрерывно при перемещении Q и притом так, что $\frac{dz}{dw}$ не зависит от направления перемещения. Поэтому, мы можем сказать, что в ранее установленном смысле величина z есть непрерывная функция переменной комплексной величины w в области, образуемой поверхностью S.

Отсюда следует, далее: если O' и Q' — две взаимно соответствующие внутренние точки поверхностей T и S и если в них $z=z'$, $w=w'$, то при условии, что ни одна из них не есть точка ветвления, при бесконечном приближении O к O' величина $\frac{w-w'}{z-z'}$ стремится к конечному пределу, и отображение там будет подобным в бесконечно малых частях; если же Q' есть точка ветвления $(n-1)$-го порядка, а O' — точка ветвления $(m-1)$-го порядка, то $\frac{(w-w')^{\frac{1}{n}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$ при приближении O к O' стремится к конечному пределу; что же касается отображения, то характер его легко устанавливается путём соображений, подобных изложенным в § 14.

16

Теорема. Пусть α и β — две произвольные функции переменных x, y, для которых интеграл

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT,$$

распространённый по всем частям как угодно разостланной по плоскости A поверхности T, имеет конечное значение; тогда, если α изменяется на функции непрерывные или имеющие разрывы только в отдельных точках, притом обращающиеся в нуль на границе поверхности, то рассматриваемый интеграл для одной из этих функций достигает своего наименьшего значения и притом (если исключить из рассмотрения функции, разрывы которых уничтожаются изменением одного значения функции) только для одной.

Обозначим через λ какую угодно непрерывную (или имеющую разрывы только в отдельных точках) функцию, которая обращается в нуль на границе и для которой интеграл

$$L=\int\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right]dT,$$

распространённый по всей поверхности, имеет конечное значение; через ω обозначим сумму функций $\alpha+\lambda$, через Ω — интеграл

$$\int\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT,$$

распространённый по всей поверхности. Совокупность функций λ образует связную замкнутую в себе область [18], в пределах которой каждая из этих функций может быть непрерывным изменением переведена в любую другую, но при такого рода изменениях не может бесконечно приближаться к функции, разрывной вдоль целой кривой без того, чтобы L стало бесконечным (§ 17). Для каждой функции λ интеграл Ω (где, как мы уже сказали, положено $\omega=\alpha+\lambda$) принимает конечное значение, которое одновременно с L обращается в бесконечность, изменяется непрерывно в зависимости от изменения λ, но никогда не может стать меньше нуля. Следовательно, по меньшей мере одним способом можно выбрать функцию ω так, чтобы Ω приняло наименьшее возможное значение.

Перейдём к доказательству второй части высказанного предложения. Пусть u — одна из функций ω, для которых Ω достигает минимума, и h — произвольная величина, имеющая на всей поверхности постоянное значение, так что $u+h\lambda$ удовлетворяет условиям, наложенным на функции ω. Значение интеграла Ω при $\omega=u+h\lambda$ равно

$$\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT+$$
$$+2h\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]dT+$$
$$+h^2\int\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right]dT=M+2Nh+Lh^2;$$

при любом значении λ (по самому понятию минимума) оно должно быть больше, чем M, если только h достаточно мало. Отсюда вытекает, каково бы ни было λ, равенство $N=0$; иначе выражение

$$2Nh+Lh^2=Lh^2\left(1+\frac{2N}{Lh}\right)$$

было бы отрицательным, если бы h по знаку было противоположно N, а по абсолютному значению меньше, чем $\frac{2N}{L}$. Поэтому значение Ω при $\omega=u+\lambda$ (а в этой форме можно записать любое значение ω) равняется $M+L$, и следовательно, так как L существенно положительно, Ω ни при каком выборе функции ω не может стать меньше, чем при $\omega=u$.

Если Ω достигает минимума M' ещё для какой-нибудь другой функции ω, например u', то к ней можно применить предыдущие рассуждения, и из неравенств $M'\leqslant M$, $M\leqslant M'$ получится $M=M'$. Если напишем u' в виде $u+\lambda'$, то M' примет вид $M+L'$, где L' есть значение L при

$\lambda = \lambda'$, и равенство $M = M'$ даёт нам $L' = 0$. Но это верно только в том случае, если во всех частях поверхности выполнены равенства

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \lambda'}{\partial y} = 0,$$

так что функция λ', которая по предположению не может быть разрывной вдоль кривой, во всех точках непрерывности должна иметь постоянное значение, которое, очевидно, равняется нулю, так как $\lambda' = 0$ на границе. Итак, две функции ω, при которых Ω принимает минимальное значение, могли бы отличаться одна от другой только в отдельных точках; но и это исключено, так как мы устранили из рассмотрения функции, непрерывность которых восстанавливается посредством изменения их значений в отдельных точках.

17

Теперь будет приведено доказательство того, что функция λ не может бесконечно приближаться к фуцнкии γ, имеющей разрывы вдоль некоторой кривой, без того, чтобы при этом не была нарушена конечность интеграла L; другими словами, если функция λ подчинена тому условию, что вне некоторой части поверхности T', включающей кривую разрывов функции γ, функция λ совпадает с γ, то часть поверхности T' можно выбрать столь малой, что L станет бо́льшим, чем наперёд заданная величина C.

Мы станем употреблять обозначения s и p, приписывая им обычное толкование и относя их к кривой разрывов; через $\varkappa$ обозначим кривизну этой кривой, соответствующую произвольному значению s (что касается знака кривизны, то таковой будем считать положительным, если кривая выпукла в сторону положительных нормалей), через p_1 и p_2 — значения p на границе T' со стороны положительных и со стороны отрицательных нормалей, наконец, через γ_1 и γ_2 — соответствующие значения γ. Рассмотрим теперь некоторую такую часть кривой разрывов, на которой кривизна изменяется непрерывно; тогда части поверхности T', заключённой между нормалями в конечных точках выделенной части кривой (предполагается, что центры кривизны лежат за пределами T'), будет соответствовать интеграл

$$\int ds \int_{p_2}^{p_1} dp\,(1-\varkappa p)\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)^2 \frac{1}{(1-\varkappa p)^2}\right].$$

По обычным правилам получается, что наименьшее значение выражения

$$\int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 (1-\varkappa p)\,dp,$$

при постоянных пределах γ_1 и γ_2 для величины λ, равно

$$\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2\varkappa}{\log(1-\varkappa p_2)-\log(1-\varkappa p_1)},$$

и, следовательно, написанный выше двойной интеграл при любом выборе λ должен быть больше, чем

$$\int\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2\varkappa\,ds}{\log(1-\varkappa p_2)-\log(1-\varkappa p_1)}.$$

Функция γ была бы непрерывной при $p=0$, если бы наибольшее значение, которое может принимать $(\gamma_1-\gamma_2)^2$ при $\pi_1>p_1>0$ и $\pi_2<p_2<0$, было бы бесконечно мало вместе с $\pi_1-\pi_2$; следовательно, для каждого значения s мы можем подобрать такую конечную величину m, что, как бы мало ни было $\pi_1-\pi_2$, всегда можно будет найти такие значения p_1 и p_2, удовлетворяющие ограничениям $\pi_1>p_1\geqslant 0$ и $\pi_2<p_2\leqslant 0$ (одновременное существование равенств исключается), при которых будем иметь $(\gamma_1-\gamma_2)^2>m$. Пусть теперь величины p_1 и p_2 имеют определённые значения P_1 и P_2, чему соответствует некоторый определённый выбор T'; обозначим через a интеграл

$$\int\frac{m\varkappa\,ds}{\log(1-\varkappa P_2)-\log(1-\varkappa P_1)},$$

взятый по выделенной части кривой разрывов. Тогда, очевидно, можно добиться выполнения неравенства

$$\int\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2\varkappa\,ds}{\log(1-\varkappa p_2)-\log(1-\varkappa p_1)}>C,$$

если для каждого значения s потребовать от величин p_1 и p_2, чтобы они удовлетворяли требованиям

$$p_1<\frac{1-(1-\varkappa P_1)^{\frac{a}{C}}}{\varkappa},\qquad p_2>\frac{1-(1-\varkappa P_2)^{\frac{a}{C}}}{\varkappa}\quad\text{и}\quad(\gamma_1-\gamma_2)^2>m.$$

Следствием этого будет то, что, какова бы ни была функция λ внутри T', выделенная часть интеграла L, а тем более сам интеграл L, будет больше, чем C, что и требовалось доказать [19].

18

Согласно результатам § 16, для определённой функции u и для произвольно выбранной функции λ интеграл

$$N=\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]dT,$$

распространённый по всей поверхности T, должен равняться нулю. Отсюда мы выведем теперь ряд дальнейших следствий.

Выделим из поверхности T такую часть T', которая содержит все разрывы функций u, β, λ; тогда, применяя к оставшейся части поверхности T'' результат §§ 7, 8 и полагая $X=\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\lambda$, $Y=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)$, мы убедимся, что часть интеграла N, относящаяся к поверхности T'', равна

$$-\int \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dT-\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda\, ds.$$

Вследствие ограничений, наложенных на функцию λ, та часть интеграла

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda\, ds,$$

которая относится к общей части границы T и T'', равна нулю, и потому N есть сумма интеграла

$$-\int \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dT,$$

отнесённого к T'', и интеграла

$$\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right] dT+\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda\, ds,$$

отнесённого к T'.

Очевидно, что, если бы в какой-нибудь части T выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ было отлично от нуля, то N также было бы отлично от нуля, так как не возбраняется выбрать λ таким образом, чтобы в T' оно равнялось нулю, а в T'' подобрать его знак так, чтобы $\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ не меняло знака. Если же $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ во всех частях T равно нулю, то часть интеграла N, относящаяся к T'', исчезает при любом λ и остаётся лишь часть, относящаяся к местам разрывов.

Поэтому для функций $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}$, принимая их за X, Y, мы не только получаем, вообще говоря, равенство

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0,$$

но, кроме того, убеждаемся, что интеграл

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds,$$

взятый по полной границе любой части T (если только этот интеграл не лишён смысла), должен быть равен нулю.

Превратим теперь (согласно § 9, V) поверхность T, если она многосвязна, посредством системы разрезов в односвязную поверхность T^*. Тогда интеграл

$$-\int_{O_0}^{O}\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right) ds,$$

взятый по любой кривой, идущей внутри T^* от O_0 к O, имеет одно и то же значение и потому, при неподвижной точке O_0, представляет собой функцию от x, y, непрерывную в T^* и испытывающую при переходе через любой разрез постоянный скачок. Обозначая её через ν и прибавляя к β, получим функцию $v=\beta+\nu$, для которой

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отсюда вытекает следующая

Теорема: Если на связной поверхности T, которая посредством системы разрезов может быть превращена в односвязную поверхность T^*, задана некоторая комплексная функция $\alpha+\beta i$ переменных x, y, такая, что интеграл

$$\int\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right] dT,$$

распространённый по всей поверхности, имеет конечное значение, то функцию $\alpha+\beta i$ всегда можно превратить, притом одним и только одним способом, в функцию комплексного переменного z посредством прибавления функции $\mu+\nu i$ переменных x, y, обладающей следующими свойствами:

1) μ обращается в нуль на границе области, за исключением лишь отдельных точек; ν в данной точке имеет заданное значение;

2) функция μ на поверхности T и ν на поверхности T^* могут иметь разрывы только в отдельных точках и притом такие, что интегралы

$$\int\left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2\right] dT \quad \text{и} \quad \int\left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)^2\right] dT,$$

взятые по всей поверхности, имеют конечные значения; функция же ν при переходе через любой разрез испытывает постоянный скачок.

Достаточность перечисленных условий для определения $\mu+\nu i$ следует из того, что ν определяется при известном μ с точностью до постоянного слагаемого; что же касается μ, то оно непременно обращает в минимум интеграл Ω, так как, положив $u=\alpha+\mu$, при всяком λ, очевидно, должно быть $N=0$; а это свойство, согласно § 16, принадлежит только одной функции.

19

Принципы, лежащие в основе теоремы предыдущего параграфа, открывают путь к исследованию функций комплексной переменной величины, определённых независимо от аналитического представления.

Для общей ориентировки в этом круге идей сделаем обзор тех условий, которыми определяется функция в заданной области.

Остановимся сначала на простом случае, когда разостланная по плоскости A поверхность (образующая как раз эту заданную область) односвязна. Тогда функция $w = u + vi$ переменной z может быть определена по следующим условиям:

1) значения u заданы во всех точках граничной кривой, причём предполагается, что с перемещением точки по граничной кривой на бесконечно малое расстояние значение u изменяется на бесконечно малую величину того же порядка; никаких других ограничений на заданные значения u не накладывается [1]);

2) в какой-нибудь точке задано значение v;

3) функция w должна быть во всех точках конечна и непрерывна.

Этими условиями функция w вполне определяется.

Всё это следует, действительно, из теоремы предыдущего параграфа, если функция $\alpha + \beta i$ будет подобрана (что всегда возможно) таким образом, чтобы α на границе имело заданное значение и чтобы при произвольном бесконечно малом перемещении точки z в пределах поверхности изменение $\alpha + \beta i$ было также бесконечно малой величиной того же порядка.

Итак, можно, вообще говоря, задать u на границе как совершенно произвольную функцию от s, чем вполне определится v; или, наоборот, можно произвольно задать значения v на границе, и тогда определится u. Поэтому, налагая ограничения на значение w в каждой точке границы, мы должны делать выбор одной точки из множества одного измерения: итак надлежит задать одно равенство, причём не является необходимым, чтобы равенство, соответствующее каждой граничной точке, содержало только значение u или только значение v в этой точке. Определение функции w может быть произведено и таким образом, чтобы задано было в каждой точке своё уравнение, связывающее значения u и v, и при движении точки по границе это уравнение может непрерывно изменяться. Не исключаются и иные возможности: разделим, например, границу на n частей и каждой точке из одной части сопоставим $n-1$ точек из других частей — по одной из каждой части, а затем свяжем значения u и v в этих n точках n уравнениями, изменяющимися непрерывно при изменении положения n выбранных точек. Эти условия, совокупность которых образует непрерывное множество и которые выражаются посредством уравнений, связывающих произвольные функции, являются, вообще говоря, необходимыми и достаточными для определения функции, всюду непрерывной в данной области, только при дальнейшем ограничении, именно, при добавлении равенств, связывающих входящие

1) В сущности заданные значения u на границе подчинены лишь одному условию — не быть разрывными вдоль некоторой части граничной кривой; более далеко идущие ограничения сделаны для того, чтобы избежать пространного рассмотрения подробностей, не являющихся существенно необходимыми [20].

произвольные постоянные, так как, очевидно, изложенная теория не даёт возможности вычислить эти постоянные [21].

В случае, если область изменяемости переменной величины z изображается многосвязной поверхностью, изложенные выше соображения не нуждаются в больших изменениях, так как применение теоремы § 18 позволяет построить функцию, как и в случае односвязной области: нужно только оговорить возникающие здесь скачки при переходе через разрезы; эти скачки, впрочем, можно сделать и равными нулю, если в граничные условия ввести постоянные, число которых будет равняться числу разрезов.

Случай, когда внутри поверхности имеется кривая, вдоль которой искомая функция не обязана быть непрерывной, включается в предыдущий, если вообразим, что поверхность прорезана по этой кривой.

Если, наконец, допускается нарушение непрерывности в отдельной точке, так что (согласно § 12) функция в этой точке должна становиться бесконечной, то в этом случае можно утверждать при сохранении всех предположений, сформулированных для первоначального случая, что здесь можно произвольно задать заранее функцию, после вычитания которой определяемая функция уже должна быть непрерывной. Действительно, допустим, что в достаточно малом круге с центром в рассматриваемой точке разрыва функция $\alpha+\beta i$ равняется этой заданной функции, вне же его подчинена прежним условиям; тогда интеграл

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT,$$

взятый по этому кругу, равен нулю, остальная же часть интеграла имеет конечное значение, и можно применить теорему предыдущего параграфа и, таким образом, получить искомую функцию. С помощью теоремы § 13 мы заключаем, что если разрешается, чтобы в рассматриваемой точке искомая функция обращалась в бесконечность порядка n, то при определении её мы имеем право располагать $2n$ постоянными.

С геометрической точки зрения (§ 15) функция w переменной комплексной величины z, изменяющейся в данной двумерной области, даёт отображение поверхности T, разостланной по плоскости A, на поверхность S, разостланную по плоскости B, притом отображение, сохраняющее подобие в бесконечно малых частях (кроме отдельных точек). Условия, которые были признаны необходимыми и достаточными для определения функции, относятся к её значениям в точках границы или в точках разрыва; следовательно, они могут быть истолкованы как условия, относящиеся к расположению границы поверхности S (§ 15), именно, каждая точка границы T даёт по одному условию. Если каждое условие относится только к одной точке границы, то геометрический смысл совокупности этих условий заключается в том, что точкам границы сопоставляется семейство кривых и требуется, чтобы каждая точка границы лежала на соответствующей кривой. Если же, например, точки границы связаны между собой попарно двумя условиями, то это значит, что между двумя частями границы устанавливается соответствие такого рода, что положение одной части может быть выбрано произвольно, но тогда вполне определяется положение другой части. Подобным же образом истолковываются геометрически и иные типы условий, но мы воздержимся от дальнейшего развития этого рода соображений.

20

Как причина, так и ближайшая цель введения комплексных величин в математику заключается в теории таких закономерных связей между переменными величинами, которые выражаются простыми [1]) математическими формулами. При изучении этих связей в расширенном их понимании, придавая входящим переменным величинам комплексные значения, мы обнаруживаем в них дотоле скрытую гармонию и правильность. Правда, случаи, в которых это имело место, охватывают пока небольшую область: почти все они сводятся к таким зависимостям между переменными, в которых одна из переменных есть алгебраическая [2]) функция другой или же имеет производную, являющуюся алгебраической функцией. Однако почти каждый шаг, который здесь был сделан, не только придавал более простой, более законченный вид результатам, полученным без помощи комплексных величин, но и указывал пути к новым открытиям; примером тому служит история исследований, посвящённых алгебраическим, круговым или показательным, эллиптическим и абелевым функциям.

Мы укажем здесь вкратце, что нового даёт наше исследование для теории таких функций.

Существовавшие до настоящего времени методы изучения этих функций имели в своей основе определение функции посредством формулы, позволяющей вычислить её значение для каждого заданного значения аргумента; в нашем исследовании показывается, что, в силу свойств, внутренне присущих функции комплексного переменного, в определении такого рода часть данных есть следствие остальных, и устанавливается, каким образом число данных может быть уменьшено и сведено к строго необходимому. Этим обстоятельством существенно облегчается исследование. Так, например, чтобы доказать тождественность двух выражений для одной и той же функции, раньше нужно было преобразовать одно в другое, т. е. убедиться в том, что они совпадают при всех значениях

1) В качестве элементарных операций мы рассматриваем здесь сложение, вычитание, умножение и деление, интегрирование и дифференцирование, а математическую формулу считаем тем более простой, чем меньше элементарных операций она содержит. Следует отметить, что в сущности все функции, до настоящего времени употреблявшиеся в анализе, возникают в результате выполнения конечного числа элементарных операций.

2) Это значит, что одна и другая переменная связаны алгебраическим уравнением.

переменной; теперь же достаточно доказать их совпадение в гораздо меньшем объёме.

Теория этих функций, построенная на принципах, обоснованию которых посвящена настоящая работа, должна определять поведение функции (т. е. устанавливать все её значения при всевозможных значениях аргумента) независимо от изображения её той или иной формулой, и именно таким образом, чтобы к общему понятию функции комплексной переменной всякий раз прибавлялись только те свойства рассматриваемой функции, которые строго необходимы для её определения, и уже после того эта теория должна переходить к вопросу об аналитических представлениях. Общий характер функций, определяемых операциями определённого типа, вытекал бы тогда из условий на границе или условий непрерывности. Так, например, если область изменяемости переменной простирается одним или несколькими листами по всей бесконечной плоскости A и если в этой области функция имеет разрывы только в отдельных точках, и притом такие, что порядок бесконечности остаётся конечным (причём для бесконечно удалённой точки сама величина z, а для конечной точки z' — величина $\frac{1}{z - z'}$ рассматривается как величина первого порядка), то функция — непременно алгебраическая. И обратно, всякая алгебраическая функция удовлетворяет этим условиям.

Мы отказываемся, однако, от подробного изложения этой теории, призванной, как указано, устанавливать простые закономерности в поведении функции, обусловленные определяющей её формулой; и поступаем так именно потому, что рассмотрение аналитических выражений не ставим в настоящее время своей задачей.

По тем же причинам мы не имеем намерения произвести здесь проверку того, насколько наши теоремы способны лечь в основу общей теории зависимостей между переменными величинами, для чего нужно было бы убедиться в полном совпадении понятия функции комплексного переменного, как оно здесь нами установлено, и понятия функции как зависимости, возникающей на основе аналитического представления[1].

21

Для иллюстрации полученных нами общих предложений будет полезен со всей подробностью рассмотренный пример их применения.

Применение, указанное в предыдущем параграфе, хотя и было предусмотрено при самом возникновении наших исследований, всё же носит специальный характер. Дело в том, что если функциональная зависи-

[1]) Здесь имеются в виду всевозможные такие зависимости, которые подразумевают выполнение простейших четырёх операций над величинами — сложения и вычитания, умножения и деления — в конечном или бесконечном числе. При этом мы различаем операции над величинами и операции над числами, подразумевая под первыми такие операции, при выполнении которых не учитывается соизмеримость и несоизмеримость величин [22].

мость составлена только из конечного числа операций, которые мы назвали элементарными, то в ней может содержаться лишь конечное число параметров; отсюда следует, что система независимых граничных условий, являющихся достаточными при определении функции, не может быть такой, что каждой точке некоторой кривой соответствует особое условие. Поэтому нам показалось более подходящим для нашей настоящей цели выбрать пример из иной области, а именно такой, в котором определяемая функция комплексной переменной поставлена в зависимость от произвольной функции.

Ради большей наглядности и удобства речи мы воспользуемся геометрическими представлениями, указанными в конце § 19. Пример, который мы здесь имеем в виду привести, заключается в исследовании возможности отобразить данную связную поверхность без нарушения связности и с сохранением подобия в бесконечно малых частях на область данного очертания, и именно таким образом, чтобы задаваемое геометрическое место точек, на которые отображается точка границы, для всех точек границы было одним и тем же; кроме того, будет указано направление границы (§ 5) и точки ветвления поверхности, возникающей при отображении. Мы ограничимся при рассмотрении поставленной задачи тем случаем, когда каждой точке одной поверхности соответствует только одна точка другой и обе поверхности — односвязные. В этом случае получается следующая теорема.

Две данные односвязные плоские поверхности всегда могут быть так отображены одна на другую, что каждой точке одной поверхности сопоставляется с сохранением непрерывности определённая точка другой поверхности и что при отображении обеспечивается подобие взаимно соответствующих бесконечно малых частей данных поверхностей; притом некоторой наперёд заданной внутренней точке первой поверхности сопоставляется некоторая наперёд заданная внутренняя точка второй поверхности и некоторой наперёд заданной граничной точке первой поверхности сопоставляется некоторая наперёд заданная граничная точка второй поверхности. Указанными условиями отображение полностью определяется [23].

Если каждая из двух поверхностей T и R отображена на третью S таким образом, что имеет место подобие в бесконечно малых частях, то тем самым отсюда вытекает аналогичное отображение между поверхностями T и R. Поэтому задача об отображении с сохранением подобия в бесконечно малом произвольной поверхности на произвольную поверхность сводится к задаче об отображении произвольной поверхности с сохранением подобия в бесконечно малом на некоторую определённую поверхность. Значит, обозначив через K круг в плоскости B с центром $w=0$ и радиусом 1, нам достаточно будет доказать следующее. Можно одним и только одним способом установить отображение с сохранением подобия в бесконечно малых частях между кругом K и произвольной односвязной поверхностью T, разостланной по плоскости A, при условии, что должны взаимно соответствовать центр круга и наперёд заданная внутренняя точка O_0 поверхности T и, кроме того, наперёд заданная точка периферии круга и наперёд заданная точка O' границы поверхности T.

Условимся в том, что z и Q в точках O_0, O' будут обозначаться теми же буквами с соответствующими значками. Вообразим на поверхности T круг Θ с центром в точке O_0 и радиусом настолько малым, чтобы внутри него не оказалось ни граничных точек, ни точек ветвления, и введём полярные координаты, полагая $z-z_0=re^{\varphi i}$; отсюда следует, что $\log(z-z_0)=\log r+\varphi i$. Действительная часть последнего выражения во всём круге непрерывна, кроме точки O_0, где обращается в бесконечность; что касается мнимой, то мы условимся считать, что по одну сторону того радиуса, на котором $z-z_0$ имеет действительные и положительные значения, она равна 0, по другую — равна 2π, в остальных же точках круга меняется непрерывно. Этот радиус, впрочем, может быть заменён совершенно произвольной кривой l, идущей от центра к периферии круга, так что функция $\log(z-z_0)$, при переходе точки O с отрицательной (той, где согласно § 8 p отрицательно) на положительную сторону этой кривой, испытывает скачок $-2\pi i$, в остальных же точках круга Θ меняется непрерывно. Возьмём теперь в качестве комплексной функции $\alpha+\beta i$ переменных x, y в круге Θ функцию $\log(z-z_0)$, вне же этого круга (продолжив кривую l произвольно до границы поверхности T) определим $\alpha+\beta i$, что всегда возможно, таким образом, чтобы:

1) на периферии круга Θ функция $\alpha+\beta i$ была равна $\log(z-z_0)$, на границе поверхности T — была чисто мнимой;

2) при переходе с отрицательной на положительную сторону кривой l увеличивалась на $-2\pi i$, во всех же прочих точках при бесконечно малом изменении z изменялась бы на бесконечно малую величину того же порядка.

Тогда интеграл

$$\int\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right]dT,$$

взятый по кругу Θ, равен нулю, а взятый по остальной части поверхности T имеет конечное значение. Мы знаем, что функция $\alpha+\beta i$ может быть превращена в функцию $t=m+ni$ комплексной переменной z посредством прибавления некоторой непрерывной функции переменных x, y, принимающей на границе чисто мнимые значения, причём прибавляемая функция определяется с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого. Действительная часть m функции t на границе равна нулю, в точке O_0 равна $-\infty$ и, кроме этой последней точки, всюду непрерывна. Поэтому, каково бы ни было число a, заключённое в пределах от $-\infty$ до 0, кривая, на которой $m=a$, разбивает поверхности на две части, из которых первая, где $m<a$, содержит внутри точку O_0, а вторая, где $m>a$, имеет границу, частично составленную из границы T и частично из кривой, на которой $m = a$. При прорезывании поверхности T по кривой $m = a$ её порядок связности или не изменяется или уменьшается и, следовательно, так как первоначально порядок равен -1, поверхность распадается или на два куска с порядками связности 0 и -1, или на бо́льшее число кусков. Но последнее невозможно, так как в этом случае по крайней мере на одном из кусков m будет конечно и непрерывно и притом на всех частях границы куска было бы постоянно, и тогда в отдельной точке или на целой кривой должно было бы иметь максимум или минимум, что невозможно вследствие § 11, III. Итак, кривые, на которых m постоянно, — замкнутые, себя не пересекающие; они окружают кусок, содержащий точку O_0; при переходе с одной кривой на другую по направлению к точке O_0, т. е. внутрь поверхности, m убывает. Отсюда следует, что при положительном обходе по каждой такой кривой (причём s, согласно § 8, возрастает) функция n, поскольку она непрерывна, всё время возрастает и только при переходе через кривую l делает скачок, равный -2π [1]); значит, при таком обходе эта функция один и только один раз принимает любое значение от 0 до 2π (с точностью до слагаемых, кратных 2π). Если положим теперь $e^t = w$, то e^m и n будут полярными координатами точки Q относительно центра круга K. Совокупность точек Q, очевидно, образуя поверхность S, покрывает одним листом круг K; точка Q_0 падает на центр круга; что же касается точки Q', то, используя произвольное постоянное слагаемое, входящее в n, мы можем совместить её с любой точкой периферии K. Это всё, что требовалось доказать.

В случае, если O_0 есть точка ветвления $(n-1)$-го порядка, получается совершенно аналогичный результат, причём надлежит заменить лишь $\log(z - z_0)$ через $\frac{1}{n}\log(z - z_0)$. Для более подробного проведения необходимых здесь рассуждений следует вспомнить сказанное в § 14.

22

Мы не будем так же подробно, как в предыдущем параграфе, исследовать более общий случай, когда данной точке одной поверхности сопоставляется несколько точек другой поверхности и когда поверхности предполагаются многосвязными, тем более, что, становясь на геометрическую точку зрения, мы естественно пришли бы к значительному расширению нашей задачи. Именно, отнюдь не является существенным ограничиваться рассмотрением плоских и притом (за исключением отдельных точек) однолистных поверхностей; напротив, задача об отображении с сохранением подобия в бесконечно малом может быть поставлена

[1]) Так как кривая l идёт из внутренней точки в граничную точку поверхности T, то границу рассматриваемого куска она пересекает изнутри наружу на единицу большее число раз, чем снаружи внутрь; таким образом, сумма скачков функции n при положительном обходе границы всегда будет равна -2π.

и решена для случая совершенно произвольных поверхностей. По этому поводу мы ограничимся указанием на две работы Гаусса, из которых первая процитирована в § 3; что же касается второй, то мы имеем в виду Disquisitiones generales circa superficies, § 13 [24].

СОДЕРЖАНИЕ

II. ТЕОРИЯ АБЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

1. ОБЩИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ ФУНКЦИЙ НЕОГРАНИЧЕННО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Имея намерение познакомить читателей «Journal für Mathematik» со своими исследованиями, относящимися к различным трансцендентным функциям, я, чтобы избегнуть повторений, считаю целесообразным предпослать в отдельном параграфе связное изложение тех исходных положений, которые лежат в основе моей работы.

Независимой переменной величине я неизменно даю в настоящее время уже общеизвестное, принадлежащее Гауссу, геометрическое истолкование, в силу которого комплексная величина $z = x + yi$ представляется точкой неограниченной плоскости с координатами x, y; я буду одними и теми же буквами обозначать как сами комплексные величины, так и соответствующие им точки. Функцией от комплексной величины $x + yi$ я считаю всякую величину w, которая изменяется вместе с ней при соблюдении условия

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

независимо от того, как выражается w через x и y. Из этого дифференциального уравнения, как известно, вытекает, что если только функция w в окрестности точки z имеет о д н о определённое значение, изменяющееся непрерывно при изменении z, то она разлагается в ряд, расположенный по целым степеням $z - a$ вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, и что указанное представление имеет место при условии, что на расстоянии от точки a, не превышающем модуля разности $z - a$, не будет нарушена непрерывность [1]. Из соображений, в основе которых лежит метод неопределённых коэффициентов, следует также, что коэффициенты a_n являются полностью определёнными, если функция w задана на некоторой, хотя бы весьма малой линии, выходящей из точки a.

Связывая два предыдущих утверждения, легко убедиться в справедливости такой теоремы:

Функция переменной величины $x+yi$, заданная в некоторой части плоскости (x, y), может быть непрерывно продолжена только одним способом.

Нужно представлять себе, что рассматриваемая функция определяется не какой-нибудь формулой, содержащей z, а тем, что даны её значения в некоторой части плоскости с какой угодно границей и оттуда уже она продолжается непрерывно (согласно уравнению $i\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}$). На основании сказанного такое продолжение является полностью определённым, если предположим, что оно совершается не по отдельным линиям (в этом случае нельзя было бы использовать дифференциальное уравнение), а по целым полосам конечной ширины. Смотря по тому, какова продолжаемая таким образом функция, или для одних и тех же значений z она будет всегда, по какому бы пути ни совершалось продолжение, принимать одни и те же значения, или же указанное свойство не будет иметь места. В первом случае я называю функцию однозначной; тогда каждому значению z соответствует совершенно определённое значение w, и не может оказаться, чтобы функция w претерпевала разрыв вдоль некоторой линии. Во втором случае естественно называть функцию многозначной, и в этом случае, чтобы установить её поведение, нужно прежде всего направить внимание на некоторые точки плоскости z, при обходе которых функция принимает новые значения. Например, для функции $\log(z-a)$ такой точкой будет точка a. Вообразим, что из этой точки проведена произвольная линия; тогда в окрестности точки a можно будет так выбрать значения функции, что вне названной линии функция всюду будет изменяться непрерывно, но при переходе с положительной [1]) стороны линии на отрицательную значение функции будет увеличиваться на $2\pi i$. Продолжение функции с одной стороны линии, например с отрицательной, вокруг точки a в область, лежащую на другой стороне, даёт функцию, уже не совпадающую с первоначально заданной; в данном случае новые значения будут на $2\pi i$ больше старых.

Для внесения большей отчётливости в эти взаимоотношения условимся различные продолжения одной и той же функции на некоторую часть плоскости z называть ветвями этой функции, а точку, при обходе которой происходит замена ветви,—точкой ветвления; там, где нет точек ветвления, функция называется монодромной.

Ветвь некоторой функции нескольких переменных величин $z, s, t, \ldots$ монодромна в окрестности данной системы значений $z=a$, $s=b$, $t=c, \ldots$, если всем таким системам значений переменных, расстояние которых от начальной системы не превышает некоторого предела (т. е. для которых модули разностей $z-a$, $s-b$, $t-c$, ... не превышают

---

[1]) В соответствии с наименованием «положительная боковая единица», которое Гаусс предложил для величины $+i$, я буду считать положительным боковым направлением по отношению к данному направлению такое, которое к нему расположено так же, как $+i$ к 1.

некоторого предела), соответствует определённое числовое значение рассматриваемой ветви функции и притом меняющееся непрерывно при изменении системы значений переменных. Взамен точек ветвления в случае функции многих переменных мы будем иметь области ветвления, которые характеризуются некоторым уравнением, связывающим между собой независимые переменные.

Вследствие упомянутой выше теоремы монодромность функции в окрестности данной точки равносильна возможности разложения в ряд, расположенный по целым (положительным или отрицательным) степеням приращений переменных, тогда как при наличии ветвления функции в данной точке такое разложение невозможно. Однако, не представляется целесообразным свойства функции, не зависящие от способа её представления, связывать с тем или иным видом формулы, посредством которой она может быть задана.

Во многих исследованиях, в частности, в исследованиях по алгебраическим и абелевым функциям, удобно следующим образом представлять себе геометрически ветвление функции. Представим себе, что по плоскости (x, y) разостлана некоторая другая, совпадающая с нею поверхность (или же на плоскости уложено некоторое бесконечно тонкое тело), однако, лишь там и только там, где задана функция. При продолжении функции поверхность будет также расстилаться дальше. В тех частях плоскости, в которых имеются два или большее число продолжений, поверхность ляжет два или большее число раз; она будет состоять из двух или большего числа листов, из которых каждый будет изображать некоторую ветвь функции. Около какой-нибудь точки ветвления один лист поверхности, будучи продолжаем, переходит в другой, так что в окрестности такой точки поверхность представляет собой нечто вроде винтовой поверхности с осью, стоящей в этой точке перпендикулярно к плоскости (x, y) и с бесконечно малым шагом. Если функция после нескольких обходов переменной z вокруг точки ветвления возвращается к своему прежнему значению (как, например, $(z-a)^{\frac{m}{n}}$, где m, n — взаимно простые числа, после n обходов), то тогда, конечно, нужно себе представить, что самый верхний лист поверхности продолжается сквозь все остальные в самый нижний.

Многозначная функция имеет во всякой точке такой поверхности, изображающей её ветвление, только одно определённое значение и поэтому может быть рассматриваема как вполне определённая функция точки на этой поверхности.

2. ТЕОРЕМЫ ИЗ ANALYSIS SITUS ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОТ ДВУХЧЛЕННЫХ ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Изучая функции, возникающие при интегрировании полных дифференциалов, нельзя обойтись без некоторых предложений, относящихся к analysis situs. Под этим наименованием, использованным Лейбницем (хотя и не совсем в том же смысле), следует, как я полагаю, понимать ту часть учения о непрерывно меняющихся величинах, в которой переменные величины не рассматриваются как существующие независимо от их положения и связанные числовыми соотношениями, но изучаются совершенно независимо от числовых соотношений, только лишь с точки зрения возникающих между ними пространственных соотношений взаимного расположения и связности [2]. Воздерживаясь в данных обстоятельствах от изложения этого предмета в целом в форме, совершенно независимой от числовых соотношений, я ограничусь здесь нужными мне теоремами об интегрировании двухчленных дифференциалов, причём придам им геометрическое истолкование.

Пусть дана поверхность T[1]), разостланная однократно или многократно по плоскости (x, y), и пусть X, Y такие непрерывные функции точки на этой поверхности, что всюду на ней $Xdx + Ydy$ есть полный дифференциал, так что выполняется равенство

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Как известно, в таком случае интеграл

$$\int (Xdx + Ydy),$$

взятый по границе некоторой части поверхности T в положительном или отрицательном направлении (т. е. или повсюду в положительном боковом направлении[2]), или повсюду в отрицательном боковом направлении относительно нормали, идущей изнутри наружу), равен нулю, так как в первом случае этот интеграл тождественно равен интегралу

$$\int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dT,$$

взятому по выделенной части поверхности T, во втором случае отличается от него только знаком. Поэтому интеграл

$$\int (Xdx + Ydy),$$

взятый между двумя неподвижными точками по двум различным путям, имеет одно и то же значение, если только два пути, рассматриваемые совместно, образуют полную границу некоторой части поверхности T. Отсюда следует, что если каждая замкнутая кривая, целиком принадлежащая внутренности T, образует полную границу некоторой части T, то наш интеграл, взятый от некоторой неподвижной до некоторой подвижной точки на поверхности T, имеет совершенно определённое значение

---

[1]) См. предыдущий §, стр. 90.

[2]) См. предыдущий §, сноску на стр. 89.

и, значит, представляет собой независящую от пути интегрирования, всюду в T непрерывную функцию конечной точки пути интегрирования. Отсюда вытекает также разделение поверхностей на односвязные, на которых любая замкнутая кривая полностью ограничивает некоторую часть поверхности (такова, например, поверхность круга), и многосвязные, указанным свойством не обладающие (такова, например, поверхность кольца, образованного двумя концентрическими окружностями). Многосвязная поверхность с помощью системы разрезов может быть превращена в односвязную (см. в конце этого параграфа примеры, иллюстрированные чертежами). Так как эта операция оказывается весьма полезной при исследовании интегралов от алгебраических функций, то мы здесь воспроизведём относящиеся сюда теоремы; заметим, что они справедливы и для любых поверхностей в пространстве [3].

Если на некоторой поверхности F две системы кривых a и b, рассматриваемые совместно, образуют полную границу некоторой части F, то всякая другая система кривых, которая совместно с системой a образует полную границу некоторой части F, также и совместно с b образует полную границу некоторой части F, которая составляется из упомянутых выше, прилежащих к a частей F (посредством сложения или вычитания, смотря по тому, лежат ли они по разные стороны или по одну сторону от a). Обе системы поэтому дают одно и то же для образования полной границы некоторой части F и с точки зрения выполнения этого требования могут друг друга заменять [4].

Если на поверхности F можно провести n замкнутых кривых a_1, $a_2, \ldots, a_n$, из которых ни каждая в отдельности, ни все совместно не образуют полной границы некоторой части этой поверхности F, но если всякая новая замкнутая кривая совместно с ними образует полную границу некоторой части F, то считается, что порядок связности поверхности равен $n+1$.

Эта характеристика поверхности не зависит от выбора системы кривых $a_1, a_2, \ldots, a_n$, так как любые n других замкнутых кривых $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которые не являются достаточными для образования полной границы некоторой части поверхности, точно так же, будучи рассматриваемы совместно со всякой иной замкнутой кривой, образуют полную границу некоторой части F.

В самом деле, так как b_1 совместно со всеми кривыми a ограничивает некоторую часть F, то можно одну из кривых a заменить через b_1 и остальные кривые a. Итак, для образования границы некоторой части F достаточна система кривых, состоящая из b_1, остальных $n-1$ кривых a и ещё любой замкнутой кривой, например, b_2; поэтому одна из $n-1$ кривых a может быть заменена через b_1, b_2 и остальные $n-2$ кривые a. Если только (как мы предположили) система кривых b недостаточна для образования границы некоторой части F, то указанный процесс может продолжаться, пока все a не будут заменены через b.

Многосвязная поверхность F порядка $n+1$ может быть превращена в поверхность F' порядка n посредством разреза, идущего по поверхности F из не-

которой точки границы в некоторую точку границы. При этом предполагается, что линия разреза сама себя не пересекает, но возникающие в процессе разрезывания новые части границы при дальнейшем разрезывании рассматриваются как граница, так что разрез может закончиться в одной из своих предшествующих точек [5].

Так как система кривых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ недостаточна для образования границы некоторой части F, то, представляя себе поверхность F разрезанной по этим кривым, мы видим, что как прилегающая слева, так и прилегающая справа к кривой a_n часть поверхности F будет иметь ещё в своей границе части границы F, отличные от кривых a. Поэтому и в одной и в другой части F можно будет из некоторой точки a_n провести к границе F линию, не пересекающуюся с кривыми a. Две этих линии q' и q'', рассматриваемые совместно, и образуют разрез q поверхности F, обладающий указанным в теореме свойством.

Действительно, по отношению к поверхности F', возникающей из F посредством разреза по линии q, система кривых $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, расположенных внутри F', недостаточна для образования полной границы части F' (так как недостаточна и для образования полной границы части F). Но та же система при добавлении ещё какой-нибудь принадлежащей F' замкнутой кривой l уже обладает названным свойством. В самом деле, мы знаем, что система $a_1, a_2, \ldots, a_n, l$ образует полную границу некоторой части f поверхности F. Но можно показать, что кривая a_n не участвует в образовании границы f; ибо в противном случае, смотря по тому, расположено ли f слева или справа от a_n, разрез q' или разрез q'' вёл бы из внутренности f к границе F, т. е. к точке, лежащей вне f, и, следовательно, пересекал бы границу f, тогда как по сделанному предположению кривая l, как и кривые a (кроме точки пересечения a_n и q), расположена внутри F'.

Итак, поверхность F', в которую превращается F после того, как сделан разрез q, как и требовалось доказать, имеет порядок связности n.

Мы покажем теперь, что всякий разрез p, не разделяющий поверхности F на отдельные части, превращает её в поверхность F' порядка связности n. Так как после того, как сделан разрез p, поверхность остаётся связной, то можно соединить обе стороны разреза p замкнутой кривой b, целиком принадлежащей внутренности F'. Эта кривая b не образует полной границы ни одной из тех частей поверхности F, на которые она её разделяет, так как разрез p по обе стороны кривой b ведёт к граничной точке F. Затем достаточно повторить те же рассуждения, что и в предыдущем доказательстве, заменяя одну из кривых a через кривую b, а каждую из остальных $n-1$ кривых a через некоторую кривую, расположенную внутри F', или, в случае надобности, через кривую b.

Итак, мы утверждаем, что *поверхность порядка связности $n+1$ после того, как сделан произвольный разрез, не разбивающий поверхности на части, превращается в поверхность порядка связности n.*

На поверхности, полученной после разреза, можно произвести новый разрез, и после n-кратного повторения такой операции поверхность порядка связности $n+1$ с помощью n последовательно произведённых и не разделяющих поверхности на части разрезов превращается в односвязную.

Чтобы применить предыдущие соображения к поверхности, не имеющей границы, т. е. к замкнутой поверхности, нужно посредством выбрасывания произвольно выбранной точки превратить её в поверхность с границей, и затем первая операция будет заключаться в проведении разреза, начинающегося и кончающегося в этой точке, т. е. в разрезывании по замкнутой линии. Так, например, поверхность тора, порядок связности которой равен трём, превращается в односвязную после того, как сделан разрез по замкнутой линии и ещё один разрез обыкновенного типа.

Возвращаясь к рассмотренным в начале этого параграфа интегралам от полного дифференциала $Xdx + Ydy$, воспользуемся только что установленным методом превращения посредством разрезов многосвязных поверхностей в односвязные.

Если разостланная по плоскости (x, y) поверхность T, на которой функции X, Y непрерывны и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,$$

имеет порядок связности $n+1$, то посредством n разрезов её можно превратить в односвязную поверхность T'. Тогда интегрирование выражения $Xdx + Ydy$, выполняемое от некоторой неподвижной точки по кривым, принадлежащим T', даёт числовой результат, зависящий только от положения конечной точки и являющийся поэтому функцией её координат. Если представить вместо координат величины x, y, получим функцию переменных x, y

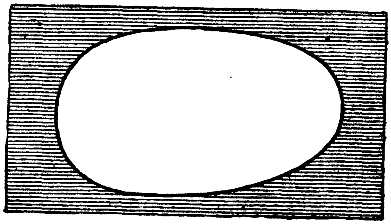
$$z = \int (Xdx + Ydy),$$

которая определена во всех точках T' и внутри T' изменяется непрерывно, однако, при переходе через какой-либо разрез, вообще говоря, испытывает скачок, т. е. внезапное изменение, величина которого на всём протяжении разреза (между двумя соседними узлами системы разрезов) остаётся одной и той же. Числовые значения скачков зависят от стольких независимых переменных величин, каково число разрезов; в самом деле, станем пробегать систему разрезов в обратном порядке, т. е. от последнего к первому: скачок будет всюду определён, если известно его значение в начале разреза; эти же значения скачков в начале каждого разреза являются независимыми.

Чтобы придать бóльшую наглядность тому, что (на стр. 92—93) было сказано о порядке связности данной поверхности, приведём в дальнейшем примеры односвязной, двусвязной и трёхсвязной поверхности.

Односвязная поверхность

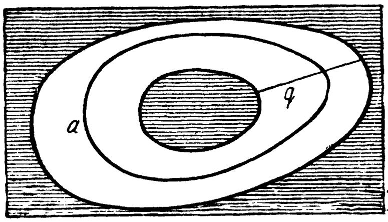
Разбивается на отдельные части, или куски, любым разрезом. Всякая замкнутая кривая образует полную границу части поверхности.



Черт. 3.

Двусвязная поверхность

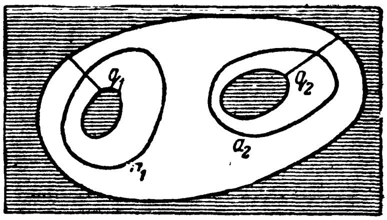
Всякий не разбивающий её на куски разрез q превращает её в односвязную. Всякая замкнутая кривая совместно с кривой a образует полную границу некоторой части поверхности.



Черт. 4.

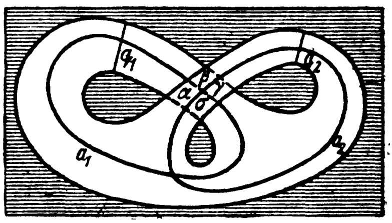
Трёхсвязная поверхность

На этой поверхности всякая замкнутая кривая совместно с кривыми a_1 и a_2 образует полную границу некоторой части поверхности. Каждый не разбивающий её разрез превращает её в двусвязную поверхность, а два таких разреза q_1 и q_2 — в односвязную.



Черт. 5.

В части плоскости $\alpha\beta\gamma\delta$ поверхность покрывает плоскость дважды. Полоса поверхности, содержащая a_1, находится под другой полосой и потому обозначена пунктирными линиями.



Черт. 6.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПОСРЕДСТВОМ УСЛОВИЙ НА ГРАНИЦЕ И УСЛОВИЙ, ОТНОСЯЩИХСЯ К РАЗРЫВАМ

Если значения функции комплексной переменной величины $x+yi$ (где x, y рассматриваются как прямоугольные координаты в некоторой плоскости) заданы на некоторой кривой, то функцию можно продолжать непрерывно только одним способом, так что продолжение её является полностью определённым (см. выше, стр. 89). Значения функции на кривой линии притом не могут быть выбраны произвольно, если мы хотим, чтобы непрерывное продолжение функции по обе стороны кривой, т. е. в прилегающие части плоскости, было возможно: действительно, значения функции на сколь угодно малой дуге данной кривой уже определяют её значение на остальной части кривой, и потому условия, определяющие значения функции на кривой, не являются независимыми.

В качестве основы при исследовании трансцендентных функций прежде всего необходимо установить, каковы должны быть взаимно независимые условия, достаточные для определения функции. Во многих случаях, в частности в теории интегралов от алгебраических функций и функций, им обратных, для этого может быть применён один принцип, которым уже целый ряд лет пользуется Дирихле в своих лекциях, посвящённых силам, действующим обратно пропорционально квадрату расстояния, при решении аналогичной задачи для функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа с тремя переменными. (Замечу, что к этому его побудила, вероятно, аналогичная мысль Гаусса [6]). Однако, для применений в теории трансцендентных функций в особенности важен тот случай, к которому принцип Дирихле в его простейшей форме неприменим и который в его лекциях остаётся нерассмотренным, как имеющий совершенно второстепенное значение. Названный случай характеризуется тем требованием, чтобы определяемая функция в той области, где она определяется, имела наперёд заданные разрывы: точнее говоря, функция подчинена условию иметь такие же разрывы, как и заданная прерывная функция, т. е. разность двух функций должна быть в рассматриваемой области непрерывной. Я изложу здесь принцип Дирихле в той форме, в какой он будет пригоден для применений, которые имею в виду, и позволю себе в отношении вопросов побочного характера указать на изложение того же принципа, данное мною в моей докторской диссертации «Основы общей теории функций одной комплексной переменной» (Гёттинген, 1851 г.).

Пусть дана разостланная по плоскости (x, y), однолистная или многолистная, как угодно ограниченная поверхность T и на ней — две во всякой её точке однозначно определённые действительные функции α и β от переменных x, y. Обозначим через $\Omega(\alpha)$ интеграл

$$\int \left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right) dT,$$

взятый по всей поверхности T; относительно функций α и β предполагается, что они могут и не быть непрерывными, лишь бы написанный выше интеграл имел конечное значение. В таком случае, если функция λ всюду непрерывна и имеет конечные частные производные, интеграл $\Omega(\alpha - \lambda)$ также будет иметь конечное значение. Пусть, дальше, γ — функция, имеющая разрывы в T (в какой-нибудь точке или вдоль какой-нибудь кривой); пусть наша непрерывная функция λ подчинена условию —

только в бесконечно малых частях T отличаться от γ; тогда интеграл $\Omega(\alpha-\lambda)$ будет иметь бесконечное значение, если интеграл

$$\int\left(\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

оказывается имеющим бесконечное значение (см. мою докторскую диссертацию, § 17); но $\Omega(\alpha-\lambda)$ будет конечно, если γ имеет разрывы только в отдельных точках и притом такие, что интеграл

$$\int\left(\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right)dT$$

имеет конечное значение [например, если γ в окрестности некоторой точки и на расстоянии r от неё равно $(-\log r)^\varepsilon$, где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$]. Назовём кратко λ прерывной функцией первого или второго рода, смотря по тому, будет ли интеграл $\Omega(\alpha-\lambda)$ конечным или бесконечным. Если теперь в интеграле $\Omega(\alpha-\mu)$ вместо μ будут подставляемы всевозможные функции—непрерывные или же прерывные первого рода,—обращающиеся в нуль на границе, то всякий раз интеграл принимает некоторое конечное значение, которое, как ясно из самой формулы, никак не может быть отрицательным и потому по меньшей мере в одном случае, скажем при $\alpha-\mu=u$, достигнет своего наименьшего возможного значения, так что для всякой функции $\alpha-\mu$, бесконечно мало отличающейся от u, Ω будет больше, чем $\Omega(u)$.

Пусть σ обозначает какую угодно непрерывную или прерывную первого рода функцию точки, заданную на поверхности T и обращающуюся в нуль на её границе, и h — величина, независимая от x, y; тогда $\Omega(u+h\sigma)$ должно быть больше, чем $\Omega(u)$, при достаточно малых как положительных, так и отрицательных значениях h, и потому в разложении $\Omega(u+h\sigma)$ по степеням h коэффициент при h должен обращаться в нуль. Если так, то

$$\Omega(u+h\sigma)=\Omega(u)+h^2\int\left(\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2\right)dT,$$

и, следовательно, Ω обращается в минимум. Минимум достигается только для одной единственной функции u, ибо если бы минимум достигался ещё для $u+\sigma$, то не могло бы быть $\Omega(u+\sigma)>\Omega(u)$, так как в этом случае при $h<1$ мы имели бы

$$\Omega(u+h\sigma)<\Omega(u+\sigma)$$

и $\Omega(u+\sigma)$ не было бы меньше, чем прилегающие значения Ω. Если же $\Omega(u+\sigma)=\Omega(u)$, то, очевидно, σ должно быть постоянным, и так как оно равно нулю на границе, то и повсюду. Итак, интеграл Ω обращается в минимум только для одной функции, и условие, касающееся вариации первого порядка, имеет вид:

$$2h\int\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)dT=0.$$

Из этого равенства следует, что интеграл

$$\int \left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy, \right.$$

взятый по полной границе произвольной части поверхности T, равен нулю. Превратим (как это было указано в предыдущем параграфе) поверхность T, если она многосвязная, в односвязную поверхность T'; тогда интегрирование внутри T' от некоторой неподвижной точки до точки (x, y) даёт нам функцию от переменных x, y

$$\nu = \int \left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right) + \text{const.},$$

которая будет на поверхности T' непрерывной или прерывной первого рода и которая при переходе через разрезы будет меняться скачками, числовое значение которых на данном разрезе между двумя соседними узлами будет постоянным. В таком случае функция $v = \beta - \nu$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

и, следовательно, $u + vi$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial (u + vi)}{\partial y} - i \frac{\partial (u + vi)}{\partial x} = 0,$$

т. е. некоторая функция переменной $x + yi$.

Таким образом, получается теорема, сформулированная в § 18 упомянутой мною работы:

Если на связной поверхности T, которая посредством системы разрезов может быть превращена в односвязную поверхность T', задана некоторая комплексная функция $\alpha + \beta i$ переменных x и y, такая, что интеграл

$$\int \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right) dT,$$

распространённый на всю поверхность, имеет конечное значение, то эту функцию всегда можно превратить, притом одним и только одним способом, в функцию комплексного переменного $x + yi$ посредством вычитания функции $\mu + \nu i$ переменных x и y, обладающей следующими свойствами:

1) *μ обращается в нуль на границе области, за исключением лишь отдельных точек; ν в данной точке имеет заданное значение,*

2) *функция μ на поверхности T и функция ν на поверхности T' могут иметь разрывы только в отдельных точках и притом такие, что интегралы*

$$\int \left(\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right) dT \quad и \quad \int \left(\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right) dT,$$

взятые по всей поверхности, остаются конечными, функция же ν при переходе через любой разрез испытывает постоянный скачок.

Если функция $\alpha+\beta i$ в точке, где её частные производные обращаются в бесконечность, имеет такой же разрыв, как и данная функция от $x+yi$ (и если притом разрыв не может быть устранён посредством изменения значения функции в отдельной точке), то $\Omega(\alpha)$ имеет конечное значение, и тогда $\mu+\nu i$ непрерывна во всех точках T'. В самом деле, так как функция переменной $x+yi$ вовсе не может обладать разрывами некоторых типов, как, например, разрывами первого рода (см. мою диссертацию, § 12), то, раз она не имеет разрыва второго рода, разность двух подобных функций должна быть непрерывной.

Итак, по доказанной теореме можно так подобрать функцию переменной $x+yi$, чтобы она (не говоря о нарушениях непрерывности, возникающих от скачков мнимой части на разрезах) имела внутри T наперёд заданные разрывы и чтобы её действительная часть на границе принимала заданные значения; предполагается при этом, что во всякой точке, где частные производные функции обращаются в бесконечность, разрыв должен быть таким же, каков разрыв некоторой прерывной в этой точке функции переменной $x+yi$. Что касается условия на границе, то, как легко видеть, без существенного изменения в получаемых результатах его можно заменить многими иными.

4. ТЕОРИЯ АБЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящем мемуаре я исследовал абелевы функции посредством метода, основы которого указаны в моей диссертации [1]) и в несколько изменённой форме изложены в трёх предшествующих параграфах. С целью обзора я предпосылаю дальнейшему изложению краткие сведения о его содержании.

Первая часть мемуара посвящена теории алгебраических функций с одинаковым ветвлением и их интегралов, поскольку исследование этих функций не основывается на рассмотрении ϑ-рядов. В §§ 1—5 речь идёт об определении этих функций, если известны их ветвление и особенности, в §§ 6—10 — о рациональном представлении их через две переменные величины, связанные алгебраическим уравнением, и в §§ 11—13 — о преобразовании соответствующих выражений посредством рациональных подстановок. Естественно возникающее при этом исследовании понятие **к л а с с а** алгебраических уравнений, переходящих одно в другое при рациональных подстановках, могло бы, вероятно, быть полезно и в других исследованиях; в частности, в иных обстоятельствах было бы уместным преобразование такого уравнения в уравнение того же класса возможно низшей степени (§ 13). В §§ 14—16 этой части содержится, наконец, необходимое в дальнейшем приложение абелевой теоремы сложения для случая произвольной системы всюду конечных интегралов от алгебраических функций одинакового ветвления к интегрированию одной системы дифференциальных уравнений.

[1]) «Основы общей теории функций одной комплексной переменной» (Гёттинген, 1851); стр. 49 настоящего издания.

Во второй части, где также имеется в виду случай произвольной системы всюду конечных интегралов от алгебраических функций одинакового ветвления и $(2p+1)$-й связности, якобиевские обратные функции от p переменных величин выражаются через бесконечные θ-ряды p-й кратности, т. е. ряды вида

$$\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu, \mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_1^p v_\mu m_\mu},$$

причём суммы в показателе берутся по индексам μ и μ', а внешние суммы — по индексам $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Здесь выясняется, что для общего решения этой задачи является достаточным специальный (при $p > 3$) тип таких рядов, в которых между $\frac{p(p+1)}{2}$ коэффициентами a имеется $\frac{(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2}$ соотношений, так что остаётся только $3p-3$ произвольных коэффициентов. В этой же части развита вместе с тем теория этого специального типа θ-рядов. Общего типа θ-ряды не затрагиваются; впрочем, они могут быть трактованы тем же методом.

Исследованная здесь до конца проблема инверсии Якоби в случае гиперэллиптических интегралов была решена различными способами в чрезвычайно глубоких и увенчанных прекрасными результатами работах Вейерштрасса, обзор которых приведён в 47-м томе «Journal f. Mathem.» (стр. 289). Однако, до настоящего времени последовало полное воспроизведение («Journ. f. Mathem.», т. 52, стр. 285) лишь той части этих работ, которая служит развитием §§ 1—2 и первой половины (касающейся эллиптических функций) § 3 упомянутой публикации; в какой степени последующие части этих работ согласуются не только в отношении результатов, но и в отношении применяемых методов, с моими здесь воспроизводимыми исследованиями, об этом можно будет судить преимущественно только после опубликования обещанного подробного изложения [7].

Настоящий мемуар является выдержкой из части лекций, читанных мною в Гёттингене с осени 1855 г. до лета 1856 г. Исключение составляют §§ 26 и 27, содержание которых в лекциях было лишь кратко указано. Что касается времени получения отдельных результатов, то изложенное в §§ 1—5, 9 и 12, а также необходимые предварительные предложения (которым позднее, в связи с читаемыми лекциями, были приданы воспроизведённые здесь более углублённые формулировки) установлены осенью 1851 г. и в начале 1852 г., поводом к чему послужили мои исследования по конформному отображению многосвязных поверхностей; но вскоре другие предметы отвлекли меня от этих вопросов. Только весной 1855 г. я снова взялся за них и к концу летних каникул этого года довёл работу до результатов § 21 включительно; остальное было закончено не позднее лета 1856 г. Отдельные предложения второстепенного характера были добавлены во многих местах работы во время её окончательного редактирования.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

1

Если s есть корень неприводимого уравнения n-й степени, коэффициентами которого являются целые функции m-й степени переменной z, то каждому значению z соответствует n значений s, которые изменяются непрерывно при изменении z всюду, где они не обращаются в бесконечность. Поэтому, если мы пожелаем представить себе ветвление этой функции с помощью разостланной по плоскости z неограниченной поверхности T (как на стр. 90), то эта поверхность должна во всякой части плоскости иметь n листов; на этой поверхности s есть однозначная функция точки. Неограниченную поверхность можно рассматривать или как поверхность с бесконечно удалённой границей, или же как замкнутую поверхность; выбирая последнее истолкование, мы будем считать поверхность T замкнутой, так что на каждом из n листов поверхности имеется одна точка, отвечающая значению $z=\infty$ (если $z=\infty$ не есть точка ветвления) [8].

Всякая рациональная функция переменных s и z, очевидно, есть также однозначная функция точки на поверхности T и обладает, следовательно, тем же ветвлением, что и функция s; мы увидим дальше, что справедливо и обратное предложение.

После интегрирования такой функции возникает новая функция, различные продолжения которой в одну и ту же часть поверхности T отличаются только на константы, так как производная такой функции в одной и той же точке поверхности всегда принимает одно и то же значение.

Указанного рода система алгебраических функций одинакового ветвления, а также их интегралов, и является предметом наших первых рассмотрений. Но мы не будем исходить из формульных представлений изучаемых функций, а станем определять их посредством их особенностей, с применением принципа Дирихле (стр. 98).

2

Для упрощения последующего мы будем говорить, что *функция в некоторой точке поверхности T — бесконечно мала 1-го порядка* в том случае, если её логарифм увеличивается на $2\pi i$ при положительном обходе вокруг некоторой окрестности этой точки, предполагая, что, за исключением самой данной точки, в упомянутой окрестности функция не обращается ни в нуль, ни в бесконечность. В соответствии с этим обстоятельством, если поверхность T обвивается μ раз около точки $z=a$, где a конечное, то выражения $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ и также $(dz)^{\frac{1}{\mu}}$, а в случае точки $z=\infty$, выражение $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, будут 1-го порядка. Случай, когда функция в некоторой точке поверхности T бесконечно мала или бесконечно велика порядка ν, должен быть понимаем в том же смысле, как если бы функция была бесконечно мала или бесконечно велика 1-го порядка в ν совпадающих (или бесконечно близких) точках; примеры не раз встретятся в дальнейшем.

Тип разрывов, которые будут испытывать функции, подлежащие нашему рассмотрению, может быть характеризован следующим образом. Пусть r обозначает какую угодно величину, которая в той точке поверхности T, где рассматриваемая функция обращается в бесконечность, будет бесконечно малой 1-го порядка. Тогда после вычитания конечного выражения вида

$$A \log r + Br^{-1} + Cr^{-2} + \ldots,$$

рассматриваемая функция должна в данной точке сделаться непрерывной, что может быть установлено разложением её в степенной ряд на основе известных теорем, доказываемых по Коши или с помощью ряда Фурье.

3

Вообразим теперь разостланную по всей плоскости z многосвязную n-листную поверхность T, которую по предыдущему надлежит считать замкнутой; затем посредством системы разрезов превратим её в односвязную поверхность T'. Так как граница поверхности, в которую превращается замкнутая поверхность, после того как произведено некоторое число разрезов, состоит из чётного или нечётного числа замкнутых кривых, смотря по тому, произведено ли нечётное или чётное число разрезов, и так как, с другой стороны, односвязная поверхность ограничивается одной замкнутой кривой, то для превращения замкнутой многосвязной поверхности в односвязную требуется чётное число разрезов. Пусть это число есть $2p$ [9]. Для упрощения последующего условимся производить разрезывание таким образом, чтобы каждый следующий разрез шёл из точки, лежащей на одном крае предшествующего разреза к примыкающей точке другого края того же разреза: в таком случае, если некоторая величина меняется непрерывно вдоль всей границы T' и при движении по обоим краям любого разреза испытывает одинаковые изменения, то разность обоих значений, которые она принимает в одной и той же точке разреза, при движении по одному и тому же разрезу остаётся постоянной [10].

Положим теперь $z = x + yi$ и выберем в T функцию $\alpha + \beta i$ переменных x, y следующим образом.

В окрестностях точек ε_1, ε_2, ... пусть функция $\alpha + \beta i$ будет равна заданным функциям переменной $x + yi$, обращающимся в этих точках в бесконечность; именно, если обозначим через r_ν какую угодно функцию z, которая в точке ε_ν будет бесконечно малой первого порядка, то пусть наша функция будет равна конечному выражению вида

$$A_\nu \log r_\nu + B_\nu r_\nu^{-1} + C_\nu r_\nu^{-2} + \ldots = \varphi_\nu(r_\nu),$$

причём A_ν, B_ν, C_ν, ... — произвольные постоянные. Затем в некоторую произвольную точку проведём по поверхности T' взаимно непересекающиеся кривые из всех точек ε, для которых величина A отлична от нуля; пусть l_ν есть кривая, проведённая из точки ε_ν. Наконец, выберем нашу функцию на всей остальной части поверхности T таким образом, чтобы она была непрерывна всюду, кроме линий l и разрезов, чтобы на положительном (левом) крае кривой l_ν она была больше на $-2\pi i A_\nu$, чем на отрицательном, и на положительном крае ν-го разреза была больше на данную постоянную $h^{(\nu)}$, чем на отрицательном, и, наконец, чтобы интеграл

$$\int\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right)dT,$$

распространённый по всей поверхности, имел конечное значение. Как легко видеть, это всегда возможно, если только сумма всех величин A равна нулю, и возможно не иначе, как при соблюдении этого условия, так как только в этом случае функция после обхода всей системы кривых l вернётся к исходному значению.

Константы $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, $\ldots$, $h^{(2p)}$, представляющие собой разности значений нашей функции на различных краях разрезов, мы назовём **модулями периодичности** этой функции.

Согласно принципу Дирихле можно превратить функцию $\alpha+\beta i$ в некоторую функцию ω переменной $x+yi$ посредством вычитания подобной же всюду в T' непрерывной функции переменных x, y с чисто мнимыми модулями периодичности и определяемой с точностью до постоянного слагаемого. Функция ω внутри T' имеет такие же особенности, что и $\alpha+\beta i$; точно так же совпадают действительные части модулей периодичности этих двух функций. Итак, можно задать наперёд совершенно произвольно функции φ_ν и действительные части модулей периодичности. Этими данными функция ω определяется с точностью до постоянного слагаемого; определяются, следовательно, и мнимые части модулей периодичности.

Мы увидим, что функции ω включают, как частный случай, функции, введённые в § 1.

4

Везде конечные функции ω (интегралы первого рода)

Мы рассмотрим теперь простейшие из функций ω, именно такие, которые везде конечны и, следовательно, внутри поверхности T' непрерывны. Если w_1, w_2, $\ldots$, w_p — такие функции, то такова также и функция

$$w=\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\ldots+\alpha_p w_p+\text{const.},$$

где α_1, α_2, $\ldots$, α_p — произвольные константы. Пусть модули периодичности функций w_1, w_2, $\ldots$, w_p для ν-го разреза обозначены через $k_1^{(\nu)}$, $k_2^{(\nu)}$, $\ldots$, $k_p^{(\nu)}$. Тогда модуль периодичности w для этого же разреза будет $k^{(\nu)}=\alpha_1 k_1^{(\nu)}+\alpha_2 k_2^{(\nu)}+\ldots+\alpha_p k_p^{(\nu)}$; и если величины α представим в форме $\gamma + \delta i$, то действительные части $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(2p)}$ будут линейными функциями величин $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$. Если между величинами $w_1, w_2, \ldots, w_p$ нет линейного соотношения с постоянными коэффициентами, то определитель, составленный из коэффициентов этих линейных функций, не равен нулю; ибо в противном случае отношения величин α можно было бы подобрать таким образом, чтобы модули периодичности действительной части w все равнялись нулю, и, следовательно, действительная часть w, а тогда, по принципу Дирихле, и само w, сводились бы к постоянным. Поэтому $2p$ величин γ и δ можно подобрать таким образом, чтобы действительные части модулей периодичности принимали заданные значения; отсюда вытекает, что если $w_1, w_2, \ldots, w_p$ не связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами, то формула для w охватывает все везде конечные функции ω. Выбрать же, согласно этому условию, такие функции всегда возможно; в самом деле, если только $\mu < p$, между модулями периодичности действительной части функции

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_\mu w_\mu + \text{const.}$$

непременно имеются линейные соотношения; поэтому $w_{\mu+1}$ уже не охватывается этой последней формулой, если только (что по предыдущему всегда возможно) модули периодичности действительной части этой функции взять такими, чтобы они упомянутым соотношениям не удовлетворяли.

Функции ω, становящиеся в одной точке поверхности бесконечно большими первого порядка (интегралы второго рода).

Допустим, что функция ω обращается в бесконечность только в одной точке ε поверхности T и что для этой точки все коэффициенты в функции φ обращаются в нуль, кроме B. Такая функция определяется с точностью до постоянного слагаемого величиной B и действительными частями модулей периодичности. Если $t^0(\varepsilon)$ обозначает одну из таких функций, то в выражении

$$t(\varepsilon) = \beta t^0(\varepsilon) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

всегда можно так подобрать константы $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, чтобы для него величина B и действительные части модулей периодичности приняли заранее указанные значения. Этой формулой, следовательно, охватывается любая функция рассматриваемого типа.

Функции ω, которые в двух точках поверхности T становятся логарифмически бесконечными (интегралы третьего рода)

Рассмотрим, наконец, случай, когда функция ω может становиться только логарифмически бесконечной; это должно происходить по меньшей мере в двух точках поверхности T, так как сумма величин A, как мы видели, равна нулю. Пусть ε_1 и ε_2 — две такие точки, причём $A_2 = -A_1$.

Если $\tilde{\omega}^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — одна из функций, для которых это имеет место, причём предполагается $A_2 = -A_1 = 1$, то, как можно легко убедиться посредством рассуждений, аналогичных предшествующим, общий вид таких функций будет

$$\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \tilde{\omega}^0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p + \text{const}.$$

В следующих замечаниях мы для простоты будем предполагать, что точки ε не являются точками ветвления и отличны от бесконечности. Положим $r_\nu = z - z_\nu$, причём z_ν обозначает значение z в точке ε_ν. Если затем продифференцируем $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ по z, позаботившись при этом, чтобы действительные части модулей периодичности (или же p из числа самих модулей), а также значение $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в заданной точке поверхности T оставались неизменными, то получится функция $t(\varepsilon_1)$, имеющая в точке ε_1 такой же разрыв, как и $\frac{1}{z-z_1}$. Обратно, если $t(\varepsilon_1)$ — функция указанного типа, то интеграл $\int\limits_{z_2}^{z_3} t(\varepsilon_1)\,dz_1$, взятый по произвольной кривой на поверхности T, равен одной из функций $\tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Подобным же образом в результате n последовательных дифференцирований функции $t(\varepsilon_1)$ по z_1 получаются функции ω, которые в точке ε_1 имеют такой же разрыв, как и функция $n!(z-z_1)^{-n-1}$ и, помимо того, остаются конечными.

Для случая оговорённых выше исключительных положений точки ε эти утверждения нуждаются в лёгком видоизменении.

Очевидно, из функций w, из функций $\tilde{\omega}$ и их производных по точке разрыва можно построить линейную комбинацию с постоянными коэффициентами таким образом, чтобы внутри T' эта комбинация имела те же самые разрывы, что и наперёд заданная функция ω, и чтобы действительные части модулей периодичности приняли наперёд указанные значения. С помощью такой линейной комбинации можно, следовательно, представить любую функцию ω.

5

На основании предыдущего всякая функция ω, которая в m точках $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ поверхности T становится бесконечно большой первого порядка, представляется формулой

$$s = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \ldots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p + \text{const.},$$

где t_ν обозначает произвольную функцию $t(\varepsilon_\nu)$, а α и β — константы. Если ρ из числа m точек ε совпадают с одной и той же точкой η поверхности T, то ρ функций t, соответствующих этим точкам, должны быть заменены функцией $t(\eta)$ и её $\rho-1$ первыми производными по точке разрыва (§ 2). $2p$ модулей периодичности функции s являются линейными комбинациями из $p+m$ величин α и β. Если $m \geqslant p+1$, то можно в качестве $2p$ из величин α и β взять такие линейные комбинации остальных, чтобы все модули периодичности обратились в нуль. После этого функция содержит ещё $m-p+1$ произвольных констант, от которых зависит линейно и однородно, и её можно рассматривать как линейную комбинацию $m-p$ функций, из которых каждая обращается в бесконечность первого порядка только в $p+1$ точках.

Если $m=p+1$, то отношения $2p+1$ величин α и β при любом положении $p+1$ точек ε полностью определены. Следует отметить, что при некоторых особых положениях этих точек некоторые из величин β обращаются в нуль. Пусть число их равно $m-\mu$, так что функция обращается в бесконечность лишь в μ точках. Эти μ точек должны тогда быть расположены таким образом, чтобы $p+1-\mu$ уравнений из общего числа $2p$ уравнений, связывающих между собой $p+\mu$ остальных величин β и α, тождественно следовали из прочих, и потому только $2\mu-p-1$ из числа величин β и α могут быть выбраны произвольно. Кроме того, функция содержит в этом случае ещё две произвольные константы.

Постараемся теперь определить s таким образом, чтобы μ было возможно меньше. Если s обращается μ раз в бесконечность первого порядка, то же справедливо и относительно всякой линейной рациональной функции от s; поэтому при решении поставленной задачи одну из μ точек можно взять произвольно. Положение остальных тогда нужно определять из того условия, что $p+1-\mu$ уравнений, связывающих величины α и β, должны быть тождественным следствием остальных; поэтому (если оставить в стороне возможные исключительные положения точек ветвления) мы должны иметь: $p+1-\mu \leqslant \mu-1$, или $\mu \geqslant \frac{1}{2}p+1$.

Число произвольных постоянных, от которых зависит функция s, обращающаяся в бесконечность первого порядка лишь в m точках поверхности T и непрерывная во всех остальных, во всех случаях равно $2m-p+1$.

Функция указанного выше вида есть корень уравнения n-ой степени, коэффициенты которого — целые функции степени m переменной z.

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — значения функции s, соответствующие одному и тому же значению z; если σ — совершенно произвольная величина, то $(\sigma-s_1)(\sigma-s_2)\ldots(\sigma-s_n)$ есть однозначная функция от z, обращающаяся в бесконечность только в тех точках z, с которыми совпадают точки ε; притом порядок обращения в бесконечность в каждой такой точке z равен числу точек ε, совпадающих с z. Действительно, только для одного множителя в нашем произведении порядок бесконечности увеличивается на единицу — в случае, если рассматриваемая точка z, с которой совпадает некоторая точка ε, не есть точка ветвления; если же z есть точка ветвления, около которой поверхность T обвивается μ раз, то тогда порядки бесконечности каждого из μ множителей увеличиваются каждый на $\frac{1}{\mu}$. Если обозначим дальше через $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu$ все конечные значения z, с которыми совпадают точки ε [11], и положим, кроме того,

$$(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_\nu)=a_0,$$

то выражение $a_0(\sigma-s_1)\ldots(\sigma-s_n)$ будет представлять некоторую однозначную функцию z, которая будет конечна при всех конечных значениях z, а при $z=\infty$ будет обращаться в бесконечность m-го порядка и потому будет целой функцией степени m относительно переменной z. С другой стороны, рассматриваемое выражение есть, очевидно, целая функция степени n относительно переменной σ, обращающаяся в нуль при $\sigma=s$. Введём для названной целой функции двух переменных σ и z обозначение F или $F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})$, понимая последнее обозначение в том смысле, что F есть *целая функция степени n относительно σ и степени m относительно z* (подобные обозначения не раз встретятся и в дальнейшем). Тогда мы приходим к заключению, что s есть корень уравнения $F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})=0$.

Функция F есть некоторая степень неразложимой целой функции (т. е. такой целой функции, которая не есть произведение целых функций), ибо каждый целый рациональный множитель $F(\sigma, z)$ при подстановке $\sigma=s$ становится функцией z, которая обращается в нуль на некоторой части поверхности T и, следовательно, так как поверхность связная, на всей поверхности T. Но два неразложимых множителя $F(\sigma, z)$, отношение которых не сводится к постоянной, могли бы одновременно обращаться в нуль только для конечного числа пар значений σ, z. Следовательно, F есть степень неразложимой функции.

Если показатель этой степени ν больше, чем 1, то ветвление функции s характеризуется не поверхностью T, а некоторой поверхностью τ, разостланной по плоскости z $\frac{n}{\nu}$ раз и по которой, в свою очередь, поверхность T разостлана ν раз. В этом случае можно, правда, сказать, что ветвление функции s такое же, как ветвление поверхности T, но нельзя было бы сказать, что ветвление поверхности T такое же, как и ветвление функции s.

Функции вида $\frac{d\omega}{dz}$ разделяют с функциями вида s общее свойство, заключающееся в том, что нарушение непрерывности может иметь место лишь в отдельных точках поверхности T. В самом деле, каждая такая функция на обоих краях разрезов и кривых l принимает одинаковые значения, так как скачки функций ω при переходе через эти кривые вдоль самих кривых постоянны; она может обращаться в бесконечность лишь в тех точках, где обращается в бесконечность ω, или же в точках ветвления; во всех же прочих точках она конечна, так как производная конечной и монодромной функции также конечна и монодромна.

Итак, любая из функций типа ω есть или алгебраическая, обладающая тем же ветвлением, что и поверхность T, или же интеграл от такой функции. Совокупность функций типа ω определена, как только задана поверхность T, и зависит только от положения её точек ветвления.

6

Допустим теперь, что дано неприводимое уравнение $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, и требуется установить характер ветвления функции s или же вид соответствующей поверхности T. Если для некоторого значения β переменной z μ ветвей функции связаны между собой таким образом, что каждая из этих ветвей после μ обходов около β снова переходит сама в себя, то эти μ ветвей функции, как легко доказать по Коши или с помощью ряда Фурье, могут быть представлены рядом, расположенным по возрастающим рациональным степеням $z - \beta$ с общим наименьшим знаменателем μ, и обратно [12].

Точка поверхности T, в которой связаны между собой две ветви, так что при обходе её первая ветвь переходит во вторую, а вторая — в первую, пусть называется **простой точкой ветвления**.

В таком случае точка поверхности T, около которой поверхность обвивается $\mu + 1$ раз, может быть рассматриваема как точка совпадения μ бесконечно близких простых точек ветвления.

Чтобы отдать себе в этом отчёт, представим себе в некоторой области, содержащей рассматриваемую точку, $\mu + 1$ монодромных ветвей s_1, $s_2, \ldots, s_{\mu+1}$ нашей функции s и на границе области расположим в порядке, соответствующем положительному обходу, μ простых точек ветвления $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$. При положительном обходе вокруг a_1 пусть меняются между собой s_1 и s_2, при обходе a_2 — s_1 и $s_3, \ldots$, при обходе a_μ — s_1 и $s_{\mu+1}$. В таком случае при положительном обходе вокруг области, содержащей все эти точки ветвления (и ни одной лишней), s_1 переходит в s_2, s_2 — в $s_3, \ldots$, s_μ — в $s_{\mu+1}$ и, наконец, $s_{\mu+1}$ — в s_1, так что при совпадении всех точек a получается точка ветвления порядка μ.

Свойства функций ω зависят существенно от того, каков порядок связности поверхности T. Прежде чем перейти к рассмотрению этого вопроса, определим сначала все простые точки ветвления функции s.

В точке ветвления связанные между собой ветви функции принимают одно и то же значение, и потому два (или большее число) корней уравнения

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

совпадают. Но это может случиться только при условии, что функция

$$F'(s) = a_0 n s^{n-1} + a_1 (n-1) s^{n-2} + \ldots + a_{n-1},$$

или же однозначная функция переменной z $F'(s_1) F'(s_2) \ldots F'(s_n)$ обращается в нуль. Эта последняя функция становится бесконечной при конечных значениях z только при условии, что $s = \infty$; но тогда $a_0 = 0$, и нашу функцию, чтобы она оставалась конечной, нам придётся умножить на a_0^{n-2}. После этого она станет однозначной функцией, принимающей конечные значения при конечных значениях z и притом при $z = \infty$ обращающейся в бесконечность порядка $2m(n-1)$; значит, она целая, степени $2m(n-1)$ [13]. Поэтому значения z, при которых $F'(s)$ и $F(s)$

обращаются в нуль одновременно, являются корнями уравнения степени $2m(n-1)$, получающегося после исключения s из уравнений $F'(s)=0$ и $F(s)=0$,

$$Q(z)=a_0^{n-2}\prod_i F'(s_i)=0;$$

так как $F'(s_i)=a_0\prod_{i'}(s_i-s_{i'})\ (i\neq i')$, то этому уравнению можно также придать вид

$$Q(z)=a_0^{2(n-1)}\prod_{i,i'}(s_i-s_{i'})=0 \qquad (i\neq i').$$

Если $F(s,z)=0$ при $s=\alpha$, $z=\beta$, то

$$F(s,z)=\frac{\partial F}{\partial s}(s-\alpha)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-\beta)+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s-\alpha)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial z}(s-\alpha)(z-\beta)+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z-\beta)^2\right\}+\ldots,$$

$$F'(s)=\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s-\alpha)+\frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial z}(z-\beta)+\ldots$$

Поэтому, если при $s=\alpha$, $z=\beta$ имеем $\frac{\partial F}{\partial s}=0$, но $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\neq 0$, то величина $s-\alpha$ оказывается бесконечно малой того же порядка, что и $(z-\beta)^{1/2}$ и тогда точка ветвления простая. В произведении $\prod_i F'(s_i)$ два множителя вместе с тем становятся бесконечно малыми, как $(z-\beta)^{1/2}$, и $Q(z)$ приобретает множитель $(z-\beta)$. Следовательно, если $\frac{\partial F}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ отличны от нуля всякий раз, как выполнены равенства $F=0$ и $\frac{\partial F}{\partial s}=0$, то каждому линейному множителю $Q(z)$ соответствует одна простая точка ветвления, и число таких точек равно, следовательно, $2m(n-1)$.

Положение точек ветвления зависит от коэффициентов при степенях z в функциях a и изменяется непрерывно в зависимости от этих коэффициентов.

Если эти коэффициенты изменяются таким образом, что две простые точки ветвления, принадлежащие одной и той же паре ветвей функции, совпадают между собой, то точки ветвления взаимно уничтожаются, и тогда два корня $F(s)=0$ будут равны друг другу без того, чтобы отсюда возникало ветвление. Действительно, если около каждой из точек ветвления связаны между собой ветви s_1 и s_2, то при обходе области, содержащей обе точки ветвления, s_1 перейдёт в s_1, s_2 — в s_2, и при совпадении точек обе ветви станут монодромными. Но в этом случае будет также монодромной и конечной производная $\frac{ds}{dz}$, и тогда, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{ds}{dz}\frac{\partial F}{\partial s}=0.$$

Если при $s=\alpha$, $z=\beta$ имеем $F=\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$, то из трёх следующих членов разложения $F(s, z)$ получаются два значения для $\frac{s-\alpha}{z-\beta}=\frac{ds}{dz}$ $(s=\alpha,\quad z=\beta)$. Если эти значения конечны и различны, то две ветви функции s, которым они соответствуют, не могут быть связаны и не разветвляются. Тогда для обеих ветвей $\frac{\partial F}{\partial s}$ становится бесконечно малым, как $z-\beta$, и $Q(z)$ приобретает множитель $(z-\beta)^2$; мы имеем, следовательно, совпадение двух простых точек ветвления [14].

Чтобы в каждом данном случае, когда при $z=\beta$ несколько корней уравнения $F(s)=0$ становятся равными α, решить, совпадение скольких простых точек ветвления имеет место при $s=\alpha$, $z=\beta$ и сколько из них при этом уничтожаются, следует, согласно методу, указанному Лагранжем [1]), выписать разложения этих корней по возрастающим степеням $z-\beta$ до тех пор, пока не станут обнаруживаться различия во всех этих разложениях; тогда можно судить и о действительном наличии точек ветвления. В таком случае нужно исследовать порядок малости $F'(s)$ для каждого из этих корней, чтобы определить число соответствующих им множителей в $Q(z)$ или совпадающих при $s=\alpha$, $z=\beta$ простых точек ветвления.

Пусть число ρ указывает, сколько раз поверхность T обвивается около точки ветвления (s, z); тогда в точке z порядок бесконечной малости $F'(s)$ будет равен числу совпавших простых точек ветвления, порядок $dz^{1-\frac{1}{\rho}}$ — числу действительно имеющихся точек ветвления и, следовательно, порядок $F'(s)\,dz^{\frac{1}{\rho}-1}$ — числу уничтожившихся точек ветвления.

Обозначим через w число действительно имеющихся простых точек ветвления, а через $2r$ — число уничтожающихся; тогда

$$w+2r=2(n-1)m.$$

Если допустим, что точки ветвления совпадают только попарно и при этом уничтожаются, то для r пар значений $s=\gamma_\rho$, $z=\delta_\rho$ будем иметь

$$F=\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

но

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial s}\right)^2 \neq 0,$$

[1]) Lagrange, Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. Mém. de l'Académie de Berlin, XXIV, 1780, Oeuvres de Lagrange, т. III, стр. 5.

а для w других пар получим:

$$F=0,\ \frac{\partial F}{\partial s}=0,\ \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\neq 0.$$

Мы будем ограничиваться по преимуществу рассмотрением именно этого случая, так как на остальные случаи наши результаты переносятся как на предельные; и мы с тем большим правом можем так поступить, что теория алгебраических функций строится нами на основе, не зависящей от представления их в той или иной форме и не порождающей исключительных случаев.

7

Для каждой односвязной поверхности, разостланной по некоторой конечной части плоскости z, оказывается справедливым весьма простое соотношение между числом простых точек ветвления и числом полных оборотов граничной кривой, именно: второе из этих чисел на единицу больше, чем первое; для многосвязной поверхности отсюда вытекает соотношение между названными числами и ещё числом разрезов, с помощью которых поверхность превращается в односвязную. Мы можем следующим образом вывести для нашей поверхности T это соотношение, в сущности не метрического характера и принадлежащее к области analysis situs [15].

Согласно принципу Дирихле, на односвязной поверхности T' можно определить функцию $\log\zeta$ от переменной z таким образом, чтобы функция ζ в некоторой точке внутри T' становилась бесконечно малой первого порядка и чтобы функция $\log\zeta$, вдоль произвольной себя не пересекающей кривой, ведущей от выбранной точки к границе поверхности, была с положительного края на $-2\pi i$ больше, чем с отрицательного, во всех остальных точках была непрерывной и вдоль границы T' принимала чисто мнимые значения. В таком случае функция ζ принимает всякое значение, модуль которого меньше единицы, ровно один раз; следовательно, совокупность принимаемых ею значений изображается кругом, однажды разостланным по плоскости ζ. Каждой точке T' соответствует точка круга, и обратно. Поэтому для произвольной точки поверхности T', где $z=z'$, $\zeta=\zeta'$, функция $\zeta-\zeta'$ будет бесконечно малой первого порядка и, следовательно, если поверхность T' обвивается вокруг этой точки $\mu+1$ раз, то в случае z' конечного выражение

$$(\mu+1)\frac{z-z'}{(\zeta-\zeta')^{\mu+1}}=\frac{dz}{d\zeta\,(\zeta-\zeta')^{\mu}},$$

а в случае z' бесконечного выражение

$$(\mu+1)\frac{z^{-1}}{(\zeta-\zeta')^{\mu+1}}=-\frac{dz}{zz\,d\zeta(\zeta-\zeta')^{\mu}}$$

остаётся конечным. Интеграл $\int d\log\frac{dz}{d\zeta}$, взятый в положительном направлении по всей границе круга, равен сумме интегралов, взятых вокруг точек, в которых $\frac{dz}{d\zeta}$ обращается в бесконечность или в нуль, т. е. равен $2\pi i(w-2n)$. Если s — длина граничной кривой поверхности T', отсчитываемая от некоторой определённой точки, а σ — длина соответствующей дуги круга, то

$$\log\frac{dz}{d\zeta}=\log\frac{dz}{ds}+\log\frac{ds}{d\sigma}-\log\frac{d\zeta}{d\sigma},$$

и так как

$$\int d\log\frac{dz}{ds}=(2p-1)\,2\pi i, \qquad \int d\log\frac{ds}{d\sigma}=0, \qquad -\int d\log\frac{d\zeta}{d\sigma}=-2\pi i$$

(где интегралы взяты по полным границам), то отсюда следует:

$$\int d\log\frac{dz}{d\zeta}=(2p-2)\,2\pi i\,.$$

Таким образом, мы видим, что

$$w-2n=2\,(p-1).$$

Но так как

$$w=2\,(\,(n-1)\,m-r),$$

то, следовательно,

$$p=(n-1)\,(m-1)-r.$$

8

Общее выражение для функций s' от переменной z, имеющих такое же ветвление, как поверхность T, и обращающихся в бесконечность первого порядка в m' наперёд заданных точках поверхности T и нигде больше, как было установлено (§ 5), зависит, и притом линейно, от $m'-p+1$ произвольных постоянных. Если возможно построить (теперь мы ставим своей задачей показать это) рациональные относительно s и z выражения, которые обращаются в бесконечность первого порядка для m' пар значений s, z, удовлетворяющих уравнению $F=0$, и притом зависят линейно от $m'-p+1$ произвольных постоянных, то с помощью этих выражений может быть представлена любая функция s'.

Чтобы отношение двух целых функций $\chi(s, z)$ и $\psi(s, z)$ при $s=\infty$ и $z=\infty$ могло принимать любые конечные значения, обе функции должны быть одинаковых степеней; поэтому выражение, которое представляет функции s', должно быть вида

$$\frac{\psi(\overset{\nu}{s},\ \overset{\mu}{z})}{\chi(\overset{\nu}{s},\ \overset{\mu}{z})},$$

причём $\nu\geqslant n-1$, $\mu\geqslant m-1$. Если две ветви функции, не связанные между собой в некоторой точке, принимают в этой точке одинаковые значения, т. е., если в двух различных точках поверхности T выполняются равенства $z=\gamma$, $s=\delta$, то s' в этих точках, вообще говоря, принимает различные значения; поэтому раз соотношение $\psi - s'\chi = 0$ должно выполняться тождественно, то при двух различных значениях s' имеет место равенство $\psi(\gamma, \delta) - s'\chi(\gamma, \delta) = 0$, так что $\psi(\gamma, \delta) = 0$, $\chi(\gamma, \delta) = 0$. Итак, функции ψ и χ должны обращаться в нуль для r пар значений $s=\gamma_\rho$, $z=\delta_\rho$ (см. стр. 110)[1]).

Функция χ обращается в нуль при таком значении z, при котором равна нулю функция

$$K(z) = a_0^\nu \chi(s_1)\,\chi(s_2)\ldots\chi(s_n),$$

а эта последняя однозначна и конечна при всех конечных значениях z; так как при $z=\infty$ она становится бесконечно большой порядка $m\nu + n\mu$, то представляет собой целую функцию степени $m\nu + n\mu$. Так как при подстановке значений (γ, δ) два множителя произведения $\prod\limits_i \chi(s_i)$ становятся бесконечно малыми первого порядка, так что $K(z)$ будет бесконечно мало второго порядка, то χ, кроме того, оказывается бесконечно малым первого порядка ещё при

$$i = m\nu + n\mu - 2r$$

парах значений s, z, т. е. в i точках T.

Если $\nu > n-1$, $\mu > m-1$, то значение функции χ не изменится при замене $\chi(s, z)$ выражением

$$\chi(\overset{\nu}{s}, \overset{\mu}{z}) + \rho(\overset{\nu-n}{s}, \overset{\mu-m}{z})\,F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})$$

(где ρ — произвольная целая функция); следовательно,

$$(\nu - n + 1)(\mu - m + 1)$$

из числа коэффициентов этого выражения могут быть выбраны произвольно. Если, кроме того, из остальных

$$(\mu+1)(\nu+1) - (\nu - n + 1)(\mu - m + 1)$$

определить r коэффициентов как линейные функции других таким образом, чтобы χ обращалось в нуль при подстановке r пар значений (γ, δ), то функция χ будет содержать ещё

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (\mu+1)(\nu+1) - (\nu-n+1)(\mu-m+1) - r = \\ &= n\mu + m\nu - (n-1)(m-1) - r + 1\end{aligned}$$

[1]) Здесь имеется в виду, как уже было указано, только тот случай, когда все точки ветвления функции s простые и при совпадении взаимно уничтожаются. В общем случае в такой точке поверхности T, где, согласно представлениям § 6, взаимно уничтожаются совпадающие простые точки ветвления, χ и ψ, если около рассматриваемой точки T обвивается ρ раз, должны делаться бесконечно малыми того же порядка, что и $F'(s)\,dz^{\frac{1}{\rho}-1}$, чтобы первые члены разложения представляемой функции по целым степеням $(\Delta z)^{\frac{1}{\rho}}$ могли принять наперёд заданные значения.

произвольных коэффициентов. Итак,

$$i-\varepsilon=(n-1)(m-1)-r-1=p-1.$$

Если выберем μ и ν так, чтобы было $\varepsilon>m'$, то можно будет подобрать функцию χ таким образом, чтобы при m' наперёд назначенных парах значений она становилась бесконечно малой первого порядка, и затем, если $m'>p$, то можно будет подобрать ψ так, чтобы отношение $\frac{\psi}{\chi}$ оставалось конечным для всех других значений. Действительно, ψ также есть линейная однородная функция ε произвольных постоянных, и потому, если $\varepsilon-i+m'>1$, то $i-m'$ из них можно определить как линейные функции остальных с таким расчётом, чтобы ψ обращалось также в нуль для тех $i-m'$ пар значений s, z, для которых χ становится бесконечно малым первого порядка. Значит, функция ψ будет содержать $\varepsilon-i+m'=m'-p+1$ произвольных постоянных, и потому $\frac{\psi}{\chi}$ может представлять любую функцию s'.

9

Так как функции $\frac{d\omega}{dz}$ алгебраические и обладают тем же ветвлением, что и s (§ 5), то по только что доказанной теореме они выражаются рационально через s и z, а потому все функции ω являются интегралами от функций, рационально зависящих от s и z.

Если w есть всюду конечная функция типа ω, то $\frac{dw}{dz}$ обращается в бесконечность первого порядка во всех простых точках ветвления поверхности T, так как в этих точках dw и $(dz)^{\frac{1}{2}}$ бесконечно малы первого порядка; во всех же остальных точках $\frac{dw}{dz}$ имеет конечные значения; наконец, при $z=\infty$ становится бесконечно малой величиной второго порядка. Обратно, интеграл от функции, обладающей таким поведением, имеет конечные значения на всей поверхности T.

Чтобы представить $\frac{dw}{dz}$ в виде отношения двух целых функций s и z, нужно (согласно § 8) в знаменатель поместить функцию, которая обращалась бы в нуль в точках ветвления, и также для r пар значений (γ, δ). Этому условию проще всего удовлетворить, если взять функцию, которая обращается в нуль только в этих точках. Такой является

$$\frac{\partial F}{\partial s}=a_0 n s^{n-1}+a_1(n-1)s^{n-2}+\ldots+a_{n-1}.$$

При $s=\infty$ она становится бесконечно большой $(n-2)$-го порядка (так как a_0 бесконечно мало первого порядка), а при $z=\infty$ — бесконечно большой порядка m. Чтобы $\frac{dw}{dz}$ всюду, кроме точек ветвления, было конечно и при $z=\infty$ было бесконечно мало второго порядка, числитель должен быть целой функцией вида $\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$, обращающейся в нуль при r парах значений (γ, δ) (см. стр. 110). Поэтому положим

$$w=\int \frac{\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}=-\int \frac{\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})\,ds}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

где $\varphi=0$ при $s=\gamma_\rho$, $z=\delta_\rho$ $(\rho=1, 2, \ldots, r)$.

Функция φ содержит $(n-1)(m-1)$ постоянных коэффициентов, и если представим себе, что r из их числа определены как линейные функции остальных таким образом, чтобы φ обращалось в нуль в точках (γ, δ), то остаётся ещё $(m-1)(n-1)-r$, т. е. p произвольных коэффициентов, и φ принимает вид

$$\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_p\varphi_p,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ — специальные функции типа φ, из которых ни одна не выражается линейно через остальные, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ — произвольные постоянные. Итак, иным путём, чем раньше, мы приходим к тому, что

$$w=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\ldots+\alpha_pw_p+\text{const}.$$

Функции ω, не всюду остающиеся конечными, в частности интегралы второго и третьего рода, выражаются рационально через s и z на основе тех же принципов. Мы не предполагаем задерживаться здесь на этом вопросе, так как общие правила предыдущего параграфа едва ли нуждаются в дальнейших разъяснениях; с другой стороны, только теория θ-рядов впервые даёт повод для рассмотрения специальных форм этих интегралов.

10

Функция φ, помимо r пар значений (γ, δ), становится бесконечно малой первого порядка ещё для $m(n-2)+n(m-2)-2r$, т. е. для $2(p-1)$ пар значений (s, z), удовлетворяющих уравнению $F=0$. Если

$$\varphi^{(1)}=\alpha_1^{(1)}\varphi_1+\alpha_2^{(1)}\varphi_2+\ldots+\alpha_p^{(1)}\varphi_p$$

и

$$\varphi^{(2)}=\alpha_1^{(2)}\varphi_1+\alpha_2^{(2)}\varphi_2+\ldots+\alpha_p^{(2)}\varphi_p$$

суть две произвольные функции вида φ, то в выражении $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$ можно подобрать знаменатель таким образом, чтобы он обращался в нуль для $p-1$ наперёд заданных пар значений s, z, удовлетворяющих уравнению $F=0$, а затем числитель — таким образом, чтобы он обращался в нуль для $p-2$ из числа тех пар значений, для которых, помимо упомянутых, обращается в нуль знаменатель $\varphi^{(1)}$. Полученное выражение будет ещё зависеть от двух произвольных постоянных и, следовательно, будет давать общее представление для функций, обращающихся в бесконечность первого порядка только в p точках поверхности T. Функция, обращающаяся в бесконечность менее, чем в p точках, есть частный случай рассматриваемых; поэтому все функции, которые обращаются в бесконечность первого порядка менее, чем в $p+1$ точках поверхности T, представляются в виде $\frac{\varphi^{(2)}}{\varphi^{(1)}}$ или в виде $\frac{dw^{(2)}}{dw^{(1)}}$, где $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ — везде конечные интегралы от рациональных функций s и z.

11

Функция z_1 от переменной z, имеющая то же ветвление, что и поверхность T, и обращающаяся в бесконечность первого порядка в n_1 точках этой поверхности, согласно предыдущему (стр. 106), удовлетворяет уравнению вида

$$G(\overset{n}{z_1}, \overset{n_1}{z}) = 0$$

и потому принимает любое заданное значение в n_1 точках поверхности T. Если представим себе, что каждая точка T отображается посредством функции z_1 на соответствующую точку плоскости z_1, то совокупность этих точек образует n_1 раз разостланную по плоскости z_1 поверхность T_1, на которую, — как известно, с сохранением подобия в бесконечно малых частях — и отображается, таким образом, поверхность T. Каждой точке одной поверхности при этом соответствует о д н а точка другой поверхности. Функции ω или интегралы от функций, имеющих то же ветвление, что и поверхность T, переходят, если в качестве независимой переменной вместо z ввести z_1, в функции, которые на поверхности T_1 имеют определённое значение во всякой её точке, и такие же разрывы, как и функции ω, в соответствующих точках T, и которые, следовательно, являются интегралами от функций переменной z_1, имеющих то же ветвление, что и поверхность T_1.

Если обозначим через s_1 ещё какую-нибудь функцию переменной z, имеющую то же ветвление, что и T, и обращающуюся в бесконечность первого порядка в m_1 точках T (и, следовательно, в m_1 точках T_1), то (§ 5) s_1 и z_1 непременно связаны уравнением вида

$$F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = 0,$$

где F_1 — степень неприводимой целой функции переменных s_1 и z_1, и если степень эта первая, то все функции переменной z_1, имеющие то же ветвление, что и поверхность T_1, а следовательно, и все рациональные функции от s и z, рационально выражаются через s_1 и z_1 (§ 8).

Итак, уравнение $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ с помощью рациональной подстановки может быть переведено в уравнение $F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = 0$, и обратно.

Поверхности, образованные парами величин (s, z) и (s_1, z_1), — одинакового порядка связности, так как каждой точке одной поверхности соответствует одна точка другой. Поэтому, если r_1 есть число таких случаев, когда s_1 и z_1 в двух различных точках поверхности принимают одни и те же значения, так что F_1, $\frac{\partial F_1}{\partial s_1}$ и $\frac{\partial F_1}{\partial z_1}$ одновременно обращаются в нуль, но

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2}-\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1 \partial z_1}\right)^2$$

отлично от нуля, то непременно должно иметь место равенство

$$(n_1-1)(m_1-1)-r_1=p=(n-1)(m-1)-r.$$

12

Станем считать принадлежащими к одному *классу все неприводимые алгебраические уравнения между двумя величинами, переводящиеся одно в другое посредством рациональных подстановок*; итак, уравнения $F(s, z)=0$ и $F_1(s_1, z_1)=0$ принадлежат к одному классу, если s и z можно выразить рационально через s_1 и z_1 таким образом, чтобы уравнение $F(s, z)=0$ перешло в $F_1(s_1, z_1)=0$, и притом s_1 и z_1 также рационально выражаются через s и z.

Рациональные функции переменных s и z, будучи рассматриваемы как функции одной из них, которую назовём ζ, образуют систему алгебраических функций с одинаковым ветвлением. Мы видим, что каждое уравнение порождает некоторый класс систем алгебраических функций с одинаковым ветвлением, которые переходят одна в другую при введении одной из функций системы как независимой переменной. При этом все уравнения одного и того же класса порождают один и тот же класс систем алгебраических функций, и обратно (§ 11), каждый класс таких систем приводит к некоторому классу уравнений.

Если поверхность, на которой располагаются точки (s, z), $(2p+1)$-связная и функция ζ в μ точках становится бесконечно большой первого порядка, то число точек ветвления одинаково разветвлённых функций переменной ζ, которые получаются из всяких других рациональных функций переменных s и z, равно $2(\mu+p-1)$, а число произвольных постоянных в функции ζ есть $2\mu-p+1$ (§ 5). Эти постоянные можно подобрать таким образом, чтобы $2\mu-p+1$ точек ветвления приняли заданные значения (если эти точки ветвления являются независимыми функциями упомянутых постоянных); сделать это можно конечным числом способов, так как получаемые уравнения — алгебраические. Поэтому в каждом классе систем функций, имеющих одинаковое ветвление порядка связности $2p+1$, имеется конечное число таких систем μ-значных функций, для которых $2\mu-p+1$ точек ветвления имеют заданные значения. Если, с другой стороны, $2(\mu+p-1)$ точек ветвления поверхности, обладающей порядком связности $2p+1$ и μ раз расстилающейся по плоскости ζ, заданы произвольно, то существует всегда (§§ 3—5) система алгебраических функций переменной ζ, имеющих то же ветвление, что и эта поверхность. Значит, остальные $3p-3$ точек ветвления в наших системах одинаково разветвлённых μ-значных функций могут принимать произвольные значения; следовательно, класс систем функций, имеющих одинаковое ветвление порядка связности $2p+1$, а также соответствующий класс алгебраических уравнений, зависит от $3p-3$ непрерывно меняющихся величин, которые мы будем называть модулями этого класса.

Приведённый выше подсчёт числа модулей класса одинаково разветвлённых функций порядка связности $2p+1$ действителен, впрочем, лишь в предположении, что имеется $2\mu-p+1$ точек ветвления, которые являются независимыми функциями от произвольных постоянных, входящих в функцию ζ. Но это предположение осуществляется только при условии $p>1$, и только в этом случае число модулей равно $3p-3$; в случае же, когда $p=1$, оно равно единице. Прямое исследование числа модулей представляется, однако, затруднительным вследствие того, что неизвестно, каким именно образом ζ зависит от постоянных. Поэтому при определении числа модулей, рассматривая систему одинаково разветвлённых функций порядка связности $2p+1$, в качестве независимой переменной мы введём не одну из этих функций, а всюду конечный интеграл одной из таких функций.

Значения, которые функция w переменной z принимает внутри поверхности T', представляются геометрически в виде некоторой поверхности, однократно или многократно разостланной по некоторой конечной части плоскости w и отображающей поверхность T' с сохранением подобия в бесконечно малых частях; обозначим названную поверхность через S. Так как w на положительном крае ν-го разреза имеет значения, на постоянную величину $k^{(\nu)}$ большие, чем на отрицательном, то граница S состоит из пар параллельных кривых, которые отображают отдельные части системы разрезов, образующих границу T'; при этом разность соответствующих точек на ν-ой паре параллельных кривых есть комплексная постоянная $k^{(\nu)}$. Число простых точек ветвления поверхности S равняется $2p-2$, так как dw становится бесконечно малым второго порядка в $2p-2$ точках поверхности T. Рациональные функции переменных s и z суть такие функции переменной w, которые принимают во всякой точке поверхности S некоторое определённое значение, меняющееся непрерывно с перемещением самой точки (при условии, что упомянутое значение конечно); во взаимно соответствующих точках параллельных кривых, из которых составляется граница S, значения функций одинаковы. Поэтому рассматриваемые функции образуют систему одинаково разветвлённых и $2p$-периодических функций переменной w. Но можно показать (аналогично тому, как в §§ 3—5), что если считать $2p-2$ точек ветвления и $2p$ комплексных постоянных, обозначающих сдвиг параллельных кривых на границе поверхности, произвольно заданными, то всегда существует система функций, которые разветвлены точно так же, как данная поверхность, во взаимно соответствующих точках параллельных кривых на границе принимают одинаковые значения и, следовательно, являются $2p$-периодическими; будучи рассматриваемы как функции одной из них, они образуют систему одинаково разветвлённых алгебраических функций порядка связности $2p+1$ и, следовательно, порождают класс алгебраических функций порядка связности $2p+1$. Действительно, основываясь на принципе Дирихле, мы убеждаемся, что на поверхности S с точностью до постоянного слагаемого определяется функция переменной w, удовлетворяющая двум условиям: внутри S она имеет наперёд заданные разрывы того же вида, что и ω на поверхности T', и во взаимно соответствующих точках параллельных граничных кривых принимает значения, различающиеся на постоянные с наперёд данными действительными частями. Отсюда, как в § 5, мы заключаем о существовании функций, которые имеют разрывы лишь в отдельных точках S и которые во взаимно соответствующих точках параллельных граничных кривых принимают одни и те же значения. Если такая функция z в n точках поверхности S становится бесконечно большой первого порядка, во всех же остальных непрерывна, то она принимает всякое комплексное значение в n точках S; в самом деле, обозначая через a произвольную постоянную, мы видим, что интеграл $\int d\log(z-a)$, распространённый по границе S, равен нулю (так как интегралы, взятые по параллельным кривым, взаимно уничтожаются) и потому на поверхности S величина $z-a$ столько же раз становится бесконечно малой, сколько и бесконечно большой. Следовательно, значения, которые принимает z, изображаются в виде поверхности, n раз разостланной над плоскостью z, и все прочие функции переменной w, обладающие теми же свойствами ветвления и периодичности, образуют поэтому систему алгебраических функций порядка связности $2p+1$, разветвлённых, как эта поверхность, что и требовалось доказать.

Если задан произвольно класс алгебраических функций порядка связности $2p+1$, то в выражении

$$w=\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2+\ldots+\alpha_p w_p+c,$$

которое представляет величину, принятую за независимую переменную, можно подобрать постоянные α таким образом, чтобы p из числа $2p$ модулей периодичности приняли наперёд заданные значения, и постоянную c (в случае, если $p>1$) — таким образом, чтобы одна из $2p-2$ точек ветвления периодических функций переменной w также приняла наперёд заданное значение. Этими условиями вполне определяется как функция w, так и те $3p-3$ величины, от которых зависят ветвление и периодичность упомянутых функций переменной w; и так как каждой системе значений этих $3p-3$ величин соответствует некоторый класс алгебраических функций порядка связности $2p+1$, то, следовательно, такой класс зависит от $3p-3$ постоянных.

Если же $p=1$, то точек ветвления нет вовсе, и в величине

$$w=\alpha_1 w_1+c$$

подбираем α_1 таким образом, чтобы о д и н модуль периодичности принял данное значение, чем определяется и другой модуль. Итак, в этом случае число модулей класса равно единице.

13

Согласно изложенным выше (в § 11) принципам трансформаций, чтобы преобразовать посредством рациональной подстановки произвольное данное уравнение $F(s, z) = 0$ в уравнение того же класса

$$F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = 0$$

возможно более низкой степени, нужно сначала подобрать для z_1 такое рациональное выражение относительно s и z, $r(s, z)$, чтобы n_1 стало возможно меньше; затем для s_1 — такое рациональное выражение $r'(s; z)$, чтобы m_1 стало возможно меньше, и вместе с тем, чтобы значения s_1, соответствующие первоначальному значению z_1, не распались на ряд одинаковых групп и $F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1})$ не смогло быть степенью (>1) неприводимой целой функции.

Если поверхность (s, z) $(2p+1)$-связная, то наименьшее значение, которое может принять n_1, должно быть, вообще говоря, $\geqslant \frac{p}{2}+1$ (§ 5), а число случаев, когда s_1 и z_1 в двух различных точках поверхности принимают одни и те же значения,

$$= (n_1 - 1)(m_1 - 1) - p.$$

Отсюда вытекает, что для данного класса алгебраических уравнений, связывающих две переменные (если только модули класса не удовлетворяют некоторым исключительным условиям), уравнения наинизшей степени имеют вид:

при

$$p = 1, \qquad F(\overset{2}{s}, \overset{2}{z}) = 0, \quad r = 0,$$

$$p = 2, \qquad F(\overset{2}{s}, \overset{3}{z}) = 0, \quad r = 0,$$

$$p > 2 \begin{cases} p = 2\mu - 3, & F(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z}) = 0, \quad r = (\mu - 2)^2, \\ p = 2\mu - 2, & F(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z}) = 0, \quad r = (\mu - 1)(\mu - 3). \end{cases}$$

Из числа коэффициентов при различных степенях s и z в целых функциях F r должны быть выбраны как линейные однородные функции остальных таким образом, чтобы $\frac{\partial F}{\partial s}$ и $\frac{\partial F}{\partial z}$ обращались в нуль одновременно для r пар значений переменных, удовлетворяющих одновременно уравнению $F = 0$. Рациональные функции переменных s и z, рассматриваемые как функции одной из них, представляют тогда все системы алгебраических функций порядка связности $2p+1$.

14

Следуя Якоби (Journ. f. Mathematik, т. 9, № 32, § 8)[1], я применю здесь при интегрировании одной системы дифференциальных уравнений абелеву теорему сложения; ограничусь, однако, лишь тем, что понадобится в дальнейшем для настоящей работы.

Пусть w — везде конечный интеграл от рациональной функции переменных s и z; если принять в качестве независимой переменной ζ рациональную функцию s и z, которая становится бесконечно большой первого порядка в m точках, то $\frac{dw}{dz}$ также будет m-значной функцией переменной ζ. Обозначая m значений w, соответствующих одному и тому же значению ζ, через $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(m)}$, мы видим, что

$$\frac{dw^{(1)}}{d\zeta}+\frac{dw^{(2)}}{d\zeta}+\ldots+\frac{dw^{(m)}}{d\zeta}$$

есть однозначная функция ζ, интеграл от которой всюду конечен; итак, функция $\int d\left(w^{(1)}+w^{(2)}+\ldots+w^{(m)}\right)$ всюду однозначна и конечна, следовательно, сводится к постоянной. Подобным же образом можно получить и более общий результат: если ω — интеграл от произвольной рациональной функции переменных s и z и $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(m)}$ — его значения, соответствующие одному и тому же значению ζ, то функция $\int d\left(\omega^{(1)}+\omega^{(2)}+\ldots+\omega^{(m)}\right)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого, если известен характер разрывов функции ω, а именно, она равна сумме рациональной функции переменной ζ и умноженных на постоянные коэффициенты логарифмов рациональных функций ζ.

Как теперь будет показано, с помощью этой теоремы можно найти общий интеграл следующей системы p дифференциальных уравнений, которые связывают $p+1$ пар значений s и z, $(s_1, z_1), (s_2, z_2), \ldots, (s_{p+1}, z_{p+1})$, удовлетворяющих уравнению $F(s, z)=0$:

$$\frac{\varphi_\pi(s_1, z_1)\,dz_1}{\dfrac{\partial F(s_1, z_1)}{\partial s_1}}+\frac{\varphi_\pi(s_2, z_2)\,dz_2}{\dfrac{\partial F(s_2, z_2)}{\partial s_2}}+\ldots+\frac{\varphi_\pi(s_{p+1}, z_{p+1})\,dz_{p+1}}{\dfrac{\partial F(s_{p+1}, z_{p+1})}{\partial s_{p+1}}}=0,$$

где $\pi=1, 2, \ldots, p$.

С помощью этих уравнений p пар величин (s_μ, z_μ) определяются как функции оставшейся пары, если заданы соответствующие некоторым произвольным значениям этой пары значения всех прочих пар. Поэтому, если удастся подобрать $p+1$ пар функций некоторой переменной ζ таким образом, чтобы при одном и том же значении 0 этой переменной они принимали произвольные заданные значения $(s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), \ldots, (s_{p+1}^0, z_{p+1}^0)$ и, кроме того, удовлетворяли нашей системе дифференциальных уравнений, то тем самым система была бы проинтегрирована

[1] Также «Jacob's gesammelte Werke», т. II, стр. 15.

полностью. Но мы убеждаемся, что можно всегда подобрать величину $\frac{1}{\zeta}$ как однозначную и, следовательно, рациональную функцию точки (s, z) таким образом, чтобы она не обращалась в бесконечность нигде, кроме $p+1$ точек (s_μ^0, z_μ^0), и в этих точках обращалась в бесконечность не выше первого порядка; в самом деле, в выражении

$$\sum_{\mu=1}^{p+1} \beta_\mu t(s_\mu^0, z_\mu^0) + \sum_{\mu=1}^{p} \alpha_\mu w_\mu + \text{const}.$$

можно подобрать отношения коэффициентов α и β так, чтобы все модули периодичности обратились в нуль. В таком случае, если ни один из коэффициентов β не обращается в нуль, нашей системе дифференциальных уравнений удовлетворяют $p+1$ ветвей $(p+1)$-значных и одинаково разветвлённых функций s и z переменной ζ (s_1, z_1), $(s_2, z_2), \ldots, (s_{p+1}, z_{p+1})$, предполагая, что указанные величины при $\zeta=0$ принимают значения (s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), $\ldots$, (s_{p+1}^0, z_{p+1}^0). Если же некоторые из величин β, например $p+1-m$ последних, равны нулю, то уравнения удовлетворяются m ветвями m-значных функций s и z переменной ζ (s_1, z_1), (s_2, z_2), $\ldots$, (s_m, z_m), при $\zeta=0$ принимающими значения (s_1^0, z_1^0), (s_2^0, z_2^0), $\ldots$, (s_m^0, z_m^0), и постоянными, следовательно, равными $s_{m+1}^0, \ldots, z_{p+1}^0$ значениями величин $s_{m+1}, z_{m+1}, \ldots, s_{p+1}, z_{p+1}$.

В последнем случае из числа p линейных однородных уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\varphi_\pi(s_\mu, z_\mu)\, dz_\mu}{\frac{\partial F(s_\mu, z_\mu)}{\partial s_\mu}} = 0$$

(где $\pi = 1, 2, \ldots, p$), связывающих величины $\dfrac{dz_\mu}{\frac{\partial F(s_\mu, z_\mu)}{\partial s_\mu}}$, $p+1-m$ являются следствиями остальных; отсюда получаются $p+1-m$ обусловливающих это обстоятельство равенств, связывающих функции (s_1, z_1), $\ldots$, (s_m, z_m), а также их начальные значения $(s_1^0, z_1^0), \ldots, (s_m^0, z_m^0)$; таким образом, из названных величин только $2m-p-1$ (в согласии с результатами § 5) могут быть произвольными.

15

Предположим теперь, что неопределённый интеграл

$$\int \frac{\varphi_\pi(s, z)\, dz}{\frac{\partial F(s, z)}{\partial s}} + \text{const.},$$

взятый по кривой внутри T', равен w_π и что модуль периодичности w_π относительно ν-го разреза равен $k_\pi^{(\nu)}$, так что функции $w_1, w_2, \ldots, w_p$ точки (s, z) при переходе её с отрицательного края на положительный край ν-го разреза увеличиваются одновременно на $k_1^{(\nu)}, k_2^{(\nu)}, \ldots, k_p^{(\nu)}$. Вообще, условимся для сокращения называть систему p величин $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ **конгруэнтной** другой системе $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ по $2p$ системам модулей, если одна из другой может быть получена посредством одновременных изменений всех величин на соответствующие модули. Итак, если модуль π-й величины в ν-й системе есть $k_\pi^{(\nu)}$, то конгруэнция

$$(b_1, b_2, \ldots, b_p) \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

обозначает существование p равенств

$$b_\pi = a_\pi + \sum_{\nu=1}^{2p} m_\nu k_\pi^{(\nu)},$$

где $\pi = 1, 2, \ldots, p$, а $m_1, m_2, \ldots, m_{2p}$ — целые числа.

Легко понять, что система p произвольных величин $a_1, a_2, \ldots, a_p$ всегда может быть представлена, и притом лишь одним способом, в виде

$$a_\pi = \sum_{\nu=1}^{2p} \xi_\nu k_\pi^{(\nu)},$$

где $2p$ величин ξ_ν — все действительные, и что при изменении величин ξ_ν на целые числа получаются все системы, конгруэнтные первоначальной, и только они. Таким образом, если в этих выражениях заставить каждую величину ξ пробегать непрерывно все значения от некоторого определённого значения до значения, на единицу большего (включая только одну из этих границ), то из каждой совокупности взаимно конгруэнтных систем получим при этом одну и только одну.

Принимая это во внимание, мы можем теперь заключить, что из выше рассмотренной системы дифференциальных уравнений или из p уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{p+1} dw_\pi^{(\mu)} = 0,$$

где $\pi = 1, 2, \ldots, p$, следует, в результате интегрирования, соотношение

$$\left(\sum w_1^{(\mu)}, \ \sum w_2^{(\mu)}, \ \ldots, \ \sum w_p^{(\mu)}\right) \equiv (c_1, c_2, \ldots, c_p),$$

причём $c_1, c_2, \ldots, c_p$ — постоянные величины, зависящие от начальных значений (s^0, z^0).

16

Представим ζ в виде отношения двух целых функций переменных s и z:

$$\zeta = \frac{\chi}{\psi};$$

тогда пары величин $(s_1, z_1), \ldots, (s_m, z_m)$ являются общими решениями системы уравнений $F = 0$ и $\frac{\chi}{\psi} = \zeta$. Так как целая функция

$$\chi - \zeta\psi = f(s, z)$$

обращается в нуль для всех пар значений (s, z), для которых обращаются в нуль одновременно χ и ψ, и притом каково бы ни было ζ, то пары величин (s_1, z_1), ..., (s_m, z_m) могут быть также определены как общие решения уравнения $F=0$ и другого уравнения $f(s, z)=0$, коэффициенты которого изменяются таким образом, что все остальные общие решения остаются неизменными. Если $m<p+1$, то ζ можно представить в форме $\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)}}$ (§ 10) и f — в форме

$$\varphi^{(1)}-\zeta\varphi^{(2)}=\varphi^{(3)}.$$

Самый общий вид пар функций (s_1, z_1), ..., (s_p, z_p), удовлетворяющих p уравнениям

$$\sum_{\mu=1}^{p} dw_{\pi}=0 \qquad (\text{где } \pi=1,\ 2,\ \ldots\ p),$$

получается, следовательно, как p общих решений уравнений $F=0$ и $\varphi=0$, изменяющихся таким образом, что остальные общие решения остаются неизменными. Отсюда мы легко приходим к следующему предложению, которое понадобится впоследствии. Задача, заключающаяся в нахождении $p-1$ из числа $2p-2$ пар величин (s_1, z_1), ..., (s_{2p-2}, z_{2p-2}) как функций $p-1$ остальных таким образом, чтобы были удовлетворены p уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{2p-2} dw_{\pi}^{(\mu)}=0 \qquad (\text{где } \pi=1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

получает своё совершенно общее решение, если в качестве этих $2p-2$ пар мы возьмём различные общие решения уравнений $F=0$ и $\varphi=0$, отличные от r решений $s=\gamma_\rho$, $z=\delta_\rho$ (§ 6), или же если возьмём $2p-2$ пар, для которых dw бесконечно мало второго порядка; указанное решение притом — единственное. Мы будем говорить, что найденные пары с в я з а н ы у р а в н е н и е м $\varphi=0$. Вследствие уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{2p-2} dw_{\pi}^{(\mu)}=0$$

получаем

$$\left(\sum_{1}^{2p-2} w_1^{(\mu)},\quad \sum_{1}^{2p-2} w_2^{(\mu)},\ \ldots,\ \sum_{1}^{2p-2} w_p^{(\mu)}\right)\equiv(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_p),$$

где c_π зависит только от постоянного слагаемого в функции w_π, т. е. начального значения выражающего эту функцию интеграла.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

17

Для дальнейшего исследования интегралов от алгебраических функций порядка связности $2p+1$ весьма полезно рассмотрение бесконечного θ-ряда p-й кратности, в котором логарифм общего члена представляет собой целую функцию второй степени от индексов суммирования. Обозначим в члене ряда с индексами $m_1, m_2, \ldots, m_p$ коэффициент при квадрате m_μ^2 через $a_{\mu,\mu}$, коэффициент при удвоенном произведении $m_\mu m_{\mu'}$ через $a_{\mu,\mu'} = a_{\mu',\mu}$, коэффициент при удвоенном m_μ через v_μ, и, наконец, свободный член пусть будет равен нулю. Сумму ряда, распространённую на все положительные и отрицательные значения индексов m, станем рассматривать как функцию p величин v и обозначим через $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, так что

$$\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p e^{\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}\, m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_1^p v_\mu m_\mu}, \tag{1}$$

где суммирование в показателе производится по индексам μ и μ', а внешнее суммирование по индексам $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Для сходимости этого ряда действительная часть суммы $\left(\sum\limits_1^p\right)^2 a_{\mu,\mu'}\, m_\mu m_{\mu'}$ должна быть существенно отрицательной, т. е., будучи представлена как сумма положительных и отрицательных квадратов действительных линейных взаимно независимых функций величин m, она должна состоять из p отрицательных квадратов [16].

Функция θ обладает свойством, заключающимся в том, что существуют такие системы приращений p величин v, при которых $\log\theta$ изменяется только на линейную функцию величин v; именно, имеется $2p$ таких взаимно независимых систем (ни одна из них не выводится, следовательно, из остальных). В самом деле, опуская под знаком функции θ те величины, которые остаются неизменными, мы имеем, полагая $\mu = 1, 2, \ldots, p$

$$\theta = \theta(v_\mu + \pi i) \tag{2}$$

и

$$\theta = e^{2v_\mu + a_{\mu,\mu}}\,\theta(v_1 + a_{1,\mu},\ v_2 + a_{2,\mu},\ \ldots,\ v_p + a_{p,\mu}), \tag{3}$$

как легко убедиться, заменяя в θ-ряде индексы m_μ через $m_\mu + 1$, причём θ-ряд преобразуется в выражение, стоящее справа, но сумма его не меняется.

Функция θ определяется с точностью до постоянного множителя этими соотношениями и свойством оставаться везде конечной. Действительно, вследствие последнего свойства и соотношений (2) она является однозначной, конечной при конечных v функцией величин $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \ldots, e^{2v_p}$ и, следовательно, разлагается в ряд p-ой кратности с постоянными коэффициентами

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p A_{m_1, m_2, \ldots, m_p} e^{2\sum\limits_1^p v_\mu m_\mu} \quad [17].$$

Но из соотношений (3) получается

$$A_{m_1, \ldots, m_\nu + 1, \ldots, m_p} = A_{m_1, \ldots, m_\nu, \ldots, m_p}\, e^{2\sum\limits_1^p a_{\mu,\nu} m_\mu + a_{\nu,\nu}},$$

так что

$$A_{m_1, \ldots, m_p} = \text{const.}\ e^{(\sum_1^p)^2 a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}},$$

что и требовалось доказать.

Итак, указанные свойства θ-функции можно считать её определением. Системы приращений величин v, при которых θ изменяется только на линейную функцию этих величин, мы назовём системами модулей периодичности независимых величин θ-функции.

18

Я подставляю теперь вместо p величин $v_1, v_2, \ldots, v_p$ всюду конечные интегралы $u_1, u_2, \ldots, u_p$ от рациональных функций независимой переменной z и алгебраической функции s порядка связности $2p+1$, а в качестве систем модулей периодичности величин v возьму системы модулей периодичности интегралов u, связанные с различными разрезами поверхности T. Тогда $\log \theta$ превращается в такую функцию одной переменной z, которая изменяется на линейную функцию величин u, если при непрерывном изменении z величины s и z возвращаются к первоначальному значению.

Нужно сначала показать, что указанная подстановка возможна, какова бы ни была функция s порядка связности $2p+1$. Система $2p$ замкнутых разрезов $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ на поверхности T должна для этого удовлетворять некоторым условиям. Именно, если интегралы $u_1, u_2, \ldots, u_p$ будут выбраны таким образом, чтобы модуль периодичности u_μ на разрезе a_μ равнялся πi, а на всех прочих разрезах a равнялся нулю, и если обозначим через $a_{\mu,\nu}$ модуль периодичности u_μ на разрезе b_ν, то, во-первых, должны быть выполнены равенства $a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$ и, во-вторых, действительная часть суммы $\sum\limits_{\mu,\mu'} a_{\mu,\mu'} m_\mu m_{\mu'}$ при всех (целых) значениях p величин m должна быть отрицательной.

19

Мы будем теперь разрезывать поверхность T несколько иначе, чем раньше. Сделаем сначала замкнутый разрез a_1, не разбивающий поверхности на части, а затем — другой разрез b_1, также замкнутый, идущий с положительного края разреза a_1 на отрицательный; граница поверхности, полученной после этих разрезов, состоит из одного куска. Третий разрез, также не разбивающий поверхности на части, можно ввести (если полученная поверхность ещё не односвязна) от границы до границы, в частности, можно вести в одну из предыдущих точек разреза. Именно так мы и сделаем; этот разрез будет состоять, таким образом, из замкнутой кривой a_2 и предшествующей ей кривой c_1, соединяющей пару разрезов a_1, b_1 с разрезом a_2. Следующий разрез b_2 проведём с положительного края a_2 на отрицательный; граница поверхности, полученной после этого, опять состоит из одного куска. Дальнейшее разрезывание (если в нём есть надобность) можно произвести снова по замкнутым кривым a_3 и b_3, начинающимся и кончающимся в одной и той же точке, и по кривой c_2, соединяющей пару разрезов a_3, b_3 с парой a_2, b_2. Продолжая эту процедуру подобным же образом, пока поверхность не сделается односвязной, мы получим, наконец, систему разрезов, состоящую из p пар кривых, начинающихся и кончающихся в одной точке (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_p, b_p) и $p-1$ кривых $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$, соединяющих каждую пару со следующей. Пусть, например, c_ν идёт от точки b_ν к точке $a_{\nu+1}$. Но мы должны толковать систему разрезов несколько иначе, именно — считать, что $(2\nu-1)$-й разрез состоит из кривой $c_{\nu-1}$ и замкнутой кривой a_ν, начинающейся и кончающейся в конечной точке $c_{\nu-1}$, а 2ν-й разрез есть кривая b_ν, идущая с положительного края на отрицательный край a_ν. После того, как проведено чётное число разрезов, граница поверхности состоит из одного куска; после того, как проведено нечётное их число, граница состоит из двух кусков.

При введённой теперь системе разрезов всюду конечный интеграл w от рациональной функции переменных s и z принимает на обоих краях какой-нибудь кривой c одинаковые значения. Действительно, предшествующая часть границы состоит из одного куска, и потому интеграл $\int dw$, взятый по этой части, берётся по каждой из кривых дважды в противоположных направлениях. Такая функция w, следовательно, непрерывна везде на поверхности T, кроме кривых a и b. Разрезанную по этим кривым поверхность T мы будем обозначать через T''.

20

Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_p$ — взаимно независимые функции указанного типа и пусть $A_\mu^{(\nu)}$ есть модуль периодичности функции w_μ на разрезе a_ν, а $B_\mu^{(\nu)}$ — модуль периодичности той же функции на разрезе b_ν. Очевидно, интеграл $\int w_\mu dw_{\mu'}$, взятый по всей границе поверхности T'', равен нулю, так как функция под интегралом всюду конечная. С другой стороны, при интегрировании каждая из кривых a и b проходится дважды, сначала в положительном, потом в отрицательном направлении. Если условимся обозначать через w_μ^+ и w_μ^- значения w_μ на положительном и на отрицательном крае проходимой кривой, то наш интеграл представится как сумма интегралов вида $\int (w_\mu^+ - w_\mu^-)\, dw_{\mu'}$, взятых по кривым a и b. Но при этом, так как кривые b идут с положительного на отрицательный край кривых a, то, следовательно, кривые a идут с отрицательного на положительный край кривых b. Поэтому интеграл по кривой a_ν равен

$$\int A_\mu^{(\nu)}\, dw_{\mu'} = A_\mu^{(\nu)} \int dw_{\mu'} = A_\mu^{(\nu)} B_{\mu'}^{(\nu)},$$

тогда как интеграл по кривой b_ν равен

$$\int B_\mu^{(\nu)}\, dw_{\mu'} = -B_\mu^{(\nu)} A_{\mu'}^{(\nu)}.$$

Итак, интеграл $\int w_\mu dw_{\mu'}$, взятый в положительном направлении по всей границе T'', равен сумме

$$\sum_\nu \left(A_\mu^{(\nu)} B_{\mu'}^{(\nu)} - B_\mu^{(\nu)} A_{\mu'}^{(\nu)}\right),$$

и эта сумма по предыдущему равняется нулю. Для каждой пары функций $w_1, w_2, \ldots, w_p$ имеется такое равенство, и, таким образом, мы получаем $\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}$ зависимостей между модулями периодичности.

Если в качестве функций w возьмём функции u, т. е. допустим, что $A_\mu^{(\nu)}=0$, если μ отлично от ν, и $A_\nu^{(\nu)}=\pi i$, то полученные зависимости принимают вид $B_{\mu'}^{(\mu)}\pi i - B_\mu^{(\mu')}\pi i = 0$, откуда и следует, что $a_{\mu,\mu'} = a_{\mu',\mu}$.

21

Остаётся ещё убедиться в том, что величины a обладают вторым необходимым свойством.

Положим $w=\mu+\nu i$ и обозначим модули периодичности этой функции на разрезе a_ν через $A^{(\nu)}=\alpha_\nu+\gamma_\nu i$, а на разрезе b_ν через $B^{(\nu)}=\beta_\nu+\delta_\nu i$. В таком случае интеграл

$$\int \left(\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right)dT,$$

или

$$\int \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\nu}{\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)dT\,[1],$$

распространённый на всю поверхность T'', равен интегралу $\int \mu d\nu$, взятому в положительном направлении по всей границе T'', т. е. равен сумме интегралов $\int (\mu^+ - \mu^-)\, d\nu$, взятым по кривым a и b. Но интеграл по кривой a_ν равен $\alpha_\nu \int d\nu = \alpha_\nu\delta_\nu$, а по кривой b_ν равен $\beta_\nu \int d\nu = -\beta_\nu\gamma_\nu$. Итак,

$$\int \left(\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right)dT = \sum_{\nu=1}^{p}(\alpha_\nu\delta_\nu-\beta_\nu\gamma_\nu).$$

Последняя сумма, следовательно, положительная.

Необходимость интересующего нас свойства величин a вытекает отсюда, если положим $w=m_1u_1+m_2u_2+\ldots+m_pu_p$. В самом деле, тогда

$$A^{(\nu)}=m_\nu\pi i, \quad B^{(\nu)}=\sum_\mu a_{\mu,\nu}m_\mu;$$

[1]) Этот интеграл представляет геометрически площадь поверхности, на которую в плоскости w отображаются значения, принимаемые функцией w на поверхности T''.

поэтому $\alpha_\nu = 0$, и

$$\int\left(\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right)dT=-\sum_{\nu=1}^{p}\beta_\nu\gamma_\nu=-\pi\sum_{\nu=1}^{p}m_\nu\beta_\nu,$$

а последняя величина есть, очевидно, не что иное, как действительная часть суммы

$$-\pi\sum_{\mu,\nu}a_{\mu,\nu}m_\mu m_\nu,$$

которая, таким образом, имеет непременно положительное значение при всех действительных значениях величин m.

22

Подставим в θ-ряд (1) § 17 вместо $a_{\mu,\mu'}$ модуль периодичности функции u_μ на разрезе $b_{\mu'}$ и, кроме того, вместо v_μ подставим $u_\mu - e_\mu$, где $e_1, e_2, \ldots, e_p$ — произвольные постоянные. Тогда получается функция переменной z

$$\theta(u_1-e_1,\ u_2-e_2,\ \ldots,u_p-e_p),$$

однозначно определённая на всей поверхности T и даже конечная и непрерывная на всей этой поверхности, за исключением кривых b; при переходе же через b_ν с отрицательного края на положительный функция увеличивается в $e^{-2(u_\nu-e_\nu)}$ раз; что же касается самих кривых b, то можно условиться, что на них наши функции u принимают значения, равные среднему арифметическому их значений на обоих краях кривой. Чтобы узнать, в скольких точках поверхности T' рассматриваемая функция становится бесконечно малой первого порядка, можно вычислить интеграл $\int d\log\theta$, взятый по границе поверхности в положительном направлении, так как этот интеграл равен числу таких точек, умноженному на $2\pi i$. С другой стороны, этот интеграл равен сумме интегралов $\int(d\log\theta^+ - d\log\theta^-)$, взятых по кривым a, b и c. Интегралы по кривым a и c равны нулю, а интеграл по b_ν равняется $-2\int du_\nu = 2\pi i$ и, значит, сумма равна $p2\pi i$. Поэтому функция θ становится бесконечно малой первого порядка в p точках поверхности T'; мы обозначим эти точки через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$.

При положительном обходе точки (s, z) вокруг одной из этих точек $\log\theta$ возрастает на $2\pi i$, а при положительном обходе вокруг пары разрезов a_ν и b_ν — на $-2\pi i$. Поэтому, чтобы функцию $\log\theta$ можно было считать однозначной, проведём разрез из каждой точки η к одной из пар разрезов a и b: пусть, например, разрез l_ν проходит от точки η_ν к общей (начальной и конечной) точке разрезов a_ν и b_ν; на полученной после такого разрезывания поверхности T^* наша функция всюду однозначна. На положительном крае кривой l_ν она на $-2\pi i$, на положительном крае кривой a_ν на $g_\nu 2\pi i$, на положительном крае b_ν на $-2(u_\nu-e_\nu)-h_\nu 2\pi i$ больше, чем на отрицательных краях тех же кривых (g_ν и h_ν обозначают целые числа).

Положение точек η и числовые значения g и h зависят от величин e, и характер этой зависимости можно выяснить следующим образом. Интеграл $\int \log\theta\, du_\mu$, взятый в положительном направлении по всей границе T^*, равен нулю, так как функция $\log\theta$ непрерывна в T^*. Но, с другой стороны, этот интеграл равен сумме интегралов $\int (\log\theta^+ - \log\theta^-)\, du_\mu$, взятых по всем разрезам l, a, b и c, и значение его равно

$$2\pi i\Big(\sum_\nu \alpha_\mu^{(\nu)} + h_\mu \pi i + \sum_\nu g_\nu a_{\nu,\,\mu} - e_\mu + k_\mu\Big),$$

где $\alpha_\mu^{(\nu)}$ есть значение функции u_μ в точке η_ν, а k_μ не зависит от величин e, g, h и положения точек η. Это выражение, следовательно, должно равняться нулю.

Величина k_μ зависит от выбора функции u_μ, которая определена с точностью до постоянного слагаемого, поскольку требуется, чтобы её модуль периодичности на разрезе a_μ равнялся πi, на всех остальных разрезах a—нулю. Если увеличим функцию u_μ и вместе с тем константу e_μ на постоянную величину c_μ, то функция θ и, следовательно, точки η и величины g, h не изменятся, но значение u_μ в точке η_ν станет $\alpha_\mu^{(\nu)} + c_\mu$. Поэтому k_μ перейдёт в $k_\mu - (p-1)c_\mu$ и, значит, обратится в нуль, если положим $c_\mu = \dfrac{k_\mu}{p-1}$.

Итак, возможно подобрать (что мы и сделаем) постоянные слагаемые в функциях u, т. е. начальные значения интегралов, представляющих u, таким образом, чтобы при подстановке $u_\mu - \sum \alpha_\mu^{(\nu)}$ вместо v_μ в $\log\theta(v_1, \ldots, v_p)$ получилась функция, которая была бы логарифмически бесконечной в точках η и при продолжении по ту сторону границы поверхности T^* на положительном крае кривых l_ν оказывалась бы на $-2\pi i$, на положительном крае кривых a_ν на 0 и на положительном крае b_ν на $-2(u_\nu - \sum\limits_1^p \alpha_\nu^{(\mu)})$ больше, чем на отрицательном крае этих кривых. Для определения упомянутых начальных значений мы скоро найдём более простой способ, чем вычисление их с помощью интегральных выражений для k_μ.

23

Если допустим, что $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \equiv (\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}, \ldots, \alpha_p^{(p)})$ по $2p$ системам модулей функций u (§ 15), так что

$$(v_1, v_2, \ldots, v_p) \equiv \Big(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\Big),$$

то тогда $\theta = 0$. Если, обратно, $\theta = 0$ при $v_\mu = r_\mu$, то система $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$ конгруэнтна системе величин вида

$$\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right).$$

В самом деле, если, считая η_p произвольным, положим $v_\mu = u_\mu - \alpha_\mu^{(p)} + r_\mu$, то функция θ, кроме точки η_p, будет бесконечно малой первого порядка ещё в $p-1$ других точках и, если обозначим их через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$, то будем иметь

$$\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv (r_1, r_2, \ldots, r_p)\ [13].$$

Функция θ не изменяется, если изменить знаки всех величин v; действительно, если в ряде $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ изменим знаки всех индексов m (отчего сумма ряда не изменится, так как $-m_\nu$ пробегают те же значения, что и m_ν), то $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ превращается в $\theta(-v_1, -v_2, \ldots, -v_p)$.

Выбирая точки $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ произвольными, мы будем иметь $\theta\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) = 0$, и, следовательно, так как функция θ, по предыдущему, чётная, то $\theta\left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) = 0$. Тогда можно так выбрать $p-1$ точек $\eta_p, \eta_{p+1}, \ldots, \eta_{2p-2}$, чтобы было

$$\left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv \left(-\sum_p^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_p^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right)$$

и, следовательно,

$$\left(\sum_1^{2p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, \ldots, 0).$$

Положение последних $p-1$ точек зависит от положения $p-1$ первых таким образом, что при произвольном непрерывном их перемещении остаются в силе равенства $\sum_1^{2p-2} d\alpha_\pi^{(\nu)} = 0$, где $\pi = 1, 2, \ldots, p$, и, следовательно (§ 16), точки η образуют систему таких $2p-2$ точек, для которых некоторое dw бесконечно мало второго порядка, так что, обозначая через (σ_ν, ζ_ν) значения пары величин (s, z) в точке η_ν, мы сможем утверждать, что пары $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_{2p-2}, \zeta_{2p-2})$ связаны уравнением $\varphi = 0$ (§ 16).

Итак, *при сделанном выборе начальных значений интегралов и мы имеем:*

$$\left(\sum_1^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, \ldots, 0),$$

причём суммирования распространяются на все (кроме пар величин $(\gamma_\rho, \delta_\rho)$ (§ 6) различные корни уравнений $F = 0$ и $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_p\varphi_p = 0$, где постоянные величины c произвольны.

Обозначим через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ те m точек, в которых рациональная функция ξ переменных s и z, m раз обращающаяся в бесконечность первого порядка, принимает одно и то же значение, и через $u_\pi^{(\mu)}$, s_μ, z_μ — значения u_π, s, z в точке ε_μ. Тогда (§ 15) система

$$(\sum_1^m u_1^{(\mu)}, \sum_1^m u_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^m u_p^{(\mu)})$$

конгруэнтна постоянной, т. е. не зависящей от значения ξ, системе величин $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$, и при произвольном положении одной точки ε положение остальных может быть выбрано таким образом, что будет справедливо соотношение

$$(\sum_1^m u_1^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^m u_p^{(\mu)}) \equiv (b_1, \ldots, b_p).$$

Поэтому можно в случае, когда $m = p$, систему $(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p)$ и в случае, когда $m < p$, систему

$$(u_1 - \sum_1^{p-m} \alpha_1^{(\nu)} - b_1, \ldots, u_p - \sum_1^{p-m} \alpha_p^{(\nu)} - b_p)$$

при произвольном положении точки (s, z) и $p - m$ точек η привести к виду $(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\nu)})$, заставляя одну из точек ε совпасть с (s, z); следовательно,

$$\theta(u_1 - \sum_1^{p-m} \alpha_1^{(\nu)} - b_1, \ldots, u_p - \sum_1^{p-m} \alpha_p^{(\nu)} - b_p)$$

обращается в нуль для любой пары (s, z) и для любых пар (σ_ν, ζ_ν).

24

Из исследования, содержащегося в § 22, вытекает, что произвольно заданная система величин $(e_1, \ldots, e_p)$ всегда конгруэнтна одной и только одной системе вида $(\sum_1^p \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\nu)})$, если функция $\theta(u_1 - e_1, \ldots, u_p - e_p)$ не обращается в нуль тождественно; действительно, в этом случае p точек η должны быть теми точками, где θ обращается в нуль. Если же $\theta(u_1^{(p)} - e_1, \ldots, u_p^{(p)} - e_p)$ обращается в нуль для всех значений (s_p, z_p), то можно положить (§ 23)

$$(u_1^{(p)} - e_1, \ldots, u_p^{(p)} - e_p) \equiv (-\sum_1^{p-1} u_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} u_p^{(\nu)}),$$

так что каждой паре (s_p, z_p) можно сопоставить пары $(s_1, z_1), \ldots, (s_{p-1}, z_{p-1})$ таким образом, что

$$(\sum_1^p u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^p u_p^{(\nu)}) \equiv (e_1, \ldots, e_p),$$

и, следовательно, при непрерывном изменении (s_p, z_p), $\sum_1^p du_\pi^{(\nu)} = 0$, где $\pi = 1, 2, \ldots, p$. Поэтому p пар (s_ν, z_ν) являются p корнями (отличными от $(\gamma_\rho, \delta_\rho)$ некоторого уравнения $\varphi = 0$, коэффициенты которого изменяются таким образом, что остальные $p-2$ корня остаются постоянными. Обозначая через $u_\pi^{(p+1)}, u_\pi^{(p+2)}, \ldots, u_\pi^{(2p-2)}$ значения u_π, соответствующие этим корням, мы получим

$$\left(\sum_1^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right) \equiv (0, \ldots, 0),$$

и, следовательно,

$$(e_1, \ldots, e_p) \equiv \left(-\sum_{p+1}^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_{p+1}^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right).$$

Обратно, если эта конгруэнция справедлива, то

$$\theta(u_1^{(p)} - e_1, \ldots, u_p^{(p)} - e_p) = \theta\left(\sum_p^{2p-2} u_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_p^{2p-2} u_p^{(\nu)}\right) = 0.$$

Итак, *произвольно заданная система величин $(e_1, \ldots, e_p)$ конгруэнтна только одной системе вида $\left(\sum_1^p \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\nu)}\right)$, если она не конгруэнтна некоторой системе вида $\left(-\sum_1^{p-2} \alpha_1^{(\nu)}, \ldots, -\sum_1^{p-2} \alpha_p^{(\nu)}\right)$, и конгруэнтна бесконечному их числу — в противоположном случае.*

Так как

$$\theta\left(u_1 - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, u_p - \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right) = \theta\left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} - u_1, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)} - u_p\right),$$

то θ зависит от каждой из p пар (σ_μ, ζ_μ) точно так же, как зависит от пары (s, z). Будучи рассматриваема как функция (σ_μ, ζ_μ), θ обращается в нуль в точке (s, z) и в $p-1$ точках, связанных уравнением $\varphi = 0$ с остальными $p-1$ парами (σ, ζ). Действительно, обозначая значения u_π в этих точках через $\beta_\pi^{(1)}, \beta_\pi^{(2)}, \ldots, \beta_\pi^{(p-1)}$, будем иметь

$$\left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right) \equiv \left(\alpha_1^{(\mu)} - \sum_1^{p-1} \beta_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)} - \sum_1^{p-1} \beta_p^{(\nu)}\right),$$

и следовательно, $\theta = 0$, если η_μ совпадает с одной из этих точек или с точкой (s, z).

25

Как следствие установленных свойств функции θ, получается представление $\log\theta$ через интегралы от алгебраических функций переменных (s, z), $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$.

Станем рассматривать величину

$$\log\theta\left(u_1^{(2)} - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots\right) - \log\theta\left(u_1^{(1)} - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \ldots\right)$$

как функцию пары (σ_μ, ζ_μ) или, другими словами, как функцию точки η_μ. В точке ε_1 эта функция ведёт себя, как $\log(\zeta_\mu - z_1)$, в точке ε_2 — как $\log(\zeta_\mu - z_2)$; на положительном крае некоторого разреза, идущего от ε_1 к ε_2, она на $2\pi i$ больше, чем на отрицательном; на положительных краях разрезов b_ν на $2(u_\nu^{(1)} - u_\nu^{(2)})$ больше, чем на отрицательных; помимо того, она всюду непрерывна. Пусть $\tilde{\omega}^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — какая-нибудь функция переменных (σ_μ, ζ_μ), которая вне кривых b ведёт себя точно так же и на одном крае каждой из этих кривых на постоянное число больше, чем на другом; тогда рассматриваемая величина отличается от $\tilde{\omega}^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (§ 3) на величину, не зависящую от (σ_μ, ζ_μ), и следовательно, от суммы $\sum_1^p \tilde{\omega}^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — на величину, не зависящую от всех переменных (σ, ζ); значит, она отличается только на величину, зависящую от (s_1, z_1) и (s_2, z_2). Наша функция $\tilde{\omega}^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ представляет собой значение функции $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ из § 4 при $(s, z) = (\sigma_\mu, \zeta_\mu)$ и при условии, что модули периодичности на разрезах a равны нулю. Если изменить значение этой функции на постоянную c, то сумма $\sum_1^p \tilde{\omega}'^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ изменится на pc; поэтому возможно (что мы и допустим в дальнейшем) выбрать постоянное слагаемое, или начальное значение интеграла третьего рода $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, таким образом, чтобы иметь равенство

$$\log \theta^{(2)} - \log \theta^{(1)} = \sum_1^p \tilde{\omega}^{(\mu)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Так как θ от каждой пары переменных (σ, ζ) зависит точно так же, как и от пары (s, z), то приращение, испытываемое функцией $\log\theta$, когда только одна из пар $(s, z), (\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$ подвергается изменению, тогда как прочие остаются неизменными, представляется как сумма функций $\tilde{\omega}$. Очевидно, в результате повторного применения указанного соображения мы можем представить $\log\theta$ как сумму функций $\tilde{\omega}$ и

$$\log\theta(0, 0, \ldots, 0)$$

или же значения $\log\theta$ при любой другой системе значений переменных. Представление $\log\theta(0, 0, \ldots, 0)$ как функции $3p-3$ модулей системы рациональных функций переменных s и z (§ 12) требует рассуждений такого же рода, какие были применены Якоби в его работах по эллиптическим функциям при вычислении $\Theta(0)$. Можно притти к нужному результату, если, пользуясь соотношениями

$$4\frac{\partial\theta}{\partial a_{\mu,\mu}} = \frac{\partial^2\theta}{\partial v_\mu^2} \quad \text{и} \quad 2\frac{\partial\theta}{\partial a_{\mu,\mu'}} = \frac{\partial^2\theta}{\partial v_\mu \partial v_{\mu'}} \quad (\text{при } \mu, \text{ не равном } \mu'),$$

выразим производные от $\log\theta$ по переменным a в формуле

$$d\log\theta = \sum \frac{\partial \log\theta}{\partial a_{\mu,\mu'}} da_{\mu,\mu'}$$

через интегралы от алгебраических функций. Для проведения всех необходимых при этом рассуждений нужно, повидимому, опираться на более развитую теорию функций, удовлетворяющих линейному дифференциальному уравнению с алгебраическими коэффициентами; этим я предполагаю заняться в недалёком будущем, имея в виду исходить из тех же принципов, которые лежат в основе настоящей работы.

Если (s_2, z_2) отличается от (s_1, z_1) бесконечно мало, то $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ переходит в $dz_1 t(\varepsilon_1)$, где $t(\varepsilon_1)$ — интеграл второго рода от рациональной функции s и z, которая в точке ε_1 ведёт себя как $\frac{1}{z-z_1}$ и на разрезах a имеет модули периодичности, равные нулю; оказывается, что модуль периодичности такого интеграла на разрезе b_ν равен $2\frac{du_\nu^{(1)}}{dz_1}$ и что постоянную интегрирования можно определить таким образом, чтобы сумма значений $t(\varepsilon_1)$ в p точках $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$ равнялась $\frac{\partial \log \theta^{(1)}}{\partial z_1}$. Тогда $\frac{\partial \log \theta^{(1)}}{\partial \zeta_\mu}$ равняется сумме значений $t(\eta_\mu)$ в $p-1$ точках, связанных уравнением $\varphi = 0$ с $p-1$ точками (σ, ζ), отличными от (σ_μ, ζ_μ), и в точке (s, z), мы получаем для выражения

$$\frac{\partial \log \theta^{(1)}}{\partial z_1} dz_1 + \sum_1^p \frac{\partial \log \theta^{(1)}}{\partial \zeta_\mu} d\zeta_\mu = d \log \theta^{(1)}$$

такое представление, которое обобщает полученное Вейерштрассом в случае, когда s есть двузначная функция переменной z (Journ. f. Mathem., 47, стр. 300, формула 35).

Свойства $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $t(\varepsilon_1)$, рассматриваемых как функции (s_1, z_1) и (s_2, z_2), получаются из соотношений

$$\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{p}\left(\log \theta\left(u_1^{(2)} - pu_1, \ldots\right) - \log \theta\left(u_1^{(1)} - pu_1, \ldots\right)\right)$$

и

$$t(\varepsilon_1) = \frac{1}{p} \frac{\partial \log \theta\left(u_1^{(1)} - pu_1, \ldots\right)}{\partial z_1},$$

которые, как частный случай, получаются из выведенных выше представлений для $\log \theta^{(2)} - \log \theta^{(1)}$ и $\frac{\partial \log \theta^{(1)}}{\partial z_1}$.

26

Теперь будет рассмотрена задача представления алгебраической функции переменной z в виде отношения двух произведений одинакового числа функций $\theta(u_1 - c_1, \ldots)$ и показательных выражений e^u.

Такое выражение при переходе точки (s, z) через разрезы поверхности T приобретает постоянные множители, и эти последние не могут быть не чем иным, как корнями из единицы, раз наше выражение есть алгебраическая функция z и, следовательно, при непрерывном продолжении может для одного и того же значения z принимать лишь конечное число значений. Если все множители — корни μ-ой степени из единицы, то μ-ая степень рассматриваемого выражения есть однозначная и, следовательно, рациональная функция от s и z.

Обратно, можно легко показать, что каждая алгебраическая r функция переменной z, которая, будучи непрерывно продолжаема по поверхности T', всюду принимает только одно определённое значение, а при переходе через разрезы приобретает постоянные множители, многочисленными способами может быть представлена в виде отношения двух произведений θ и показательных выражений e^u. Пусть u_μ при $r=\infty$ принимает значение β_μ, а при $r=0$ — значение γ_μ. Если из каждой точки, где функция r становится бесконечно большой первого порядка, в некоторую точку, где r становится бесконечно малой первого порядка, провести разрез, целиком лежащий внутри T', то вне этих разрезов функция $\log r$ будет всюду непрерывной. Пусть $\log r$ на положительном крае кривой b_ν на $g_\nu 2\pi i$, на положительном крае кривой a_ν на $-h_\nu 2\pi i$ больше, чем на отрицательном. Тогда рассмотрение интеграла $\int \log r\, du_\mu$, взятого по всей границе, приводит нас к равенству

$$\sum \gamma_\mu - \sum \beta_\mu = g_\mu \pi i + \sum_\nu h_\nu a_{\mu,\nu},$$

где $\mu = 1, 2, \ldots, p$ и g_ν и h_ν, как выше уже было замечено, обозначают рациональные числа, причём суммы в левой части распространяются на все точки, где r бесконечно мало и бесконечно велико первого порядка; тогда точки, где порядок r оказывается более высоким, следует рассматривать как составленные из нескольких точек первого порядка (§ 2). Если этих точек имеется p, то они могут всегда и притом, вообще говоря, одним способом быть подобраны таким образом, чтобы $2p$ множителей $e^{g_\nu 2\pi i}$, $e^{-h_\nu 2\pi i}$ приняли заданные значения (§§ 15, 24).

Пусть теперь в выражении

$$\frac{P}{Q} e^{-2\sum h_\nu u_\nu}$$

P и Q обозначают произведения одинакового числа функций $\theta(u_1 - \sum \alpha_1^{(\pi)}, \ldots)$ с одинаковыми (s, z) и разными (σ, ζ); в знаменателе этого выражения вместо пар (σ, ζ) в θ-функциях подставим пары (s, z), в которых r бесконечно, а в числителе вместо пар (σ, ζ) подставим пары (s, z), в которых r обращается в нуль, прочие же пары (σ, ζ) в числителе и в знаменателе примем равными между собой. Тогда логарифм рассматриваемого выражения будет иметь на поверхности T' такие же разрывы, как и функция $\log r$; кроме того, при переходе через разрезы a и b он будет, как и $\log r$, изменяться на чисто мнимые постоянные. Поэтому (согласно принципу Дирихле) логарифм рассматриваемого выражения отличается от $\log r$ только на постоянное слагаемое, само же рассматриваемое выражение от r отличается, следовательно, только на постоянный множитель. При упомянутой выше подстановке, разумеется, ни одна из θ-функций не должна обращаться в нуль тождественно при любом значении z. Это могло бы случиться (§ 23), если бы вместо пар (σ, ζ) в одной и той же θ-функции были подставляемы все пары, в которых однозначная функция от (s, z) обращается в нуль.

27

Из предыдущего следует, что как отношение двух θ-функций, умноженных на показательные выражения e^u, однозначную или рациональную функцию (s, z) представить нельзя. Но те функции r, которые для одной и той же пары (s, z) принимают несколько значений и притом обращаются в бесконечность первого порядка не более, чем для p пар, могут быть представлены в такой форме, и, с другой стороны, указанный класс функций охватывает все функции, которые могут быть представлены в такой форме. Именно, с точностью до постоянного множителя, каждая функция этого класса получается один и только один раз, когда в выражении

$$\frac{\theta\left(v_1 - g_1\pi i - \sum\limits_\nu h_\nu a_{1,\nu}, \ldots\right)}{\theta\left(v_1, \ldots, v_p\right)} e^{-2\sum\limits_\nu v_\nu h_\nu}$$

вместо h_ν и g_ν подставить правильные рациональные дроби, а вместо v_ν подставить $u_\nu - \sum\limits_1^p a_\nu^{(\mu)}$.

Рассматриваемое выражение есть вместе с тем алгебраическая функция от каждой из величин ζ, и изложенные выше (в предыдущем параграфе) принципы вполне достаточны, чтобы выразить её алгебраически через переменные $z, \zeta_1, \ldots, \zeta_p$.

В этом убедимся посредством такого рассуждения. Рассматриваемое как функция (s, z), наше выражение, будучи непрерывно продолжено по всей поверхности T', принимает всюду определённые значения, обращается в бесконечность первого порядка в точках $(\sigma_1, \zeta_1), \ldots, (\sigma_p, \zeta_p)$, при переходе с положительного на отрицательный край разреза a_ν приобретает множитель $e^{h_\nu 2\pi i}$ и аналогично при переходе b_ν — множитель $e^{-g_\nu 2\pi i}$; каждая другая функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, отличается от него только множителем, не зависящим от (s, z). Рассматриваемое, с другой стороны, как функция (σ_μ, ζ_μ), то же выражение при непрерывном продолжении по всей поверхности T' всюду принимает одно определённое значение, обращается в бесконечность первого порядка в точке (s, z) и ещё в $p-1$ точках $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$, связанных с остальными $p-1$ точками (σ, ζ) уравнением $\varphi = 0$; при переходе через разрез a_ν приобретает множитель $e^{-h_\nu 2\pi i}$, а при переходе через b_ν — множитель $e^{g_\nu 2\pi i}$; каждая другая функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, отличается от него только множителем, не зависящим от (σ_μ, ζ_μ). Итак, построив алгебраическую функцию переменных $z, \zeta_1, \ldots, \zeta_p$

$$f((s, z); (\sigma_1, \zeta_1); \ldots; (\sigma_p, \zeta_p))$$

таким образом, чтобы как функция каждой из этих переменных она обладала всеми перечисленными свойствами, мы сможем утверждать, что от нашего выражения она будет отличаться лишь множителем, не зависящим от $z, \zeta_1, \ldots, \zeta_p$, и, значит, это выражение равно Af, где A обозначает подобного рода множитель. Чтобы его определить, выразим входящие в f и отличные от (σ_μ, ζ_μ) пары (σ, ζ) через $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots$ $\ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$, после чего f примет вид

$$g((\sigma_\mu, \zeta_\mu), (s, z), (\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})),$$

очевидно, получится величина, обратная нашему выражению (т. е. равная $\frac{1}{Af}$), если в Ag подставить вместо (σ_μ, ζ_μ) пару (s, z), а вместо пар (s, z), $(\sigma_1^{(\mu)}, \zeta_1^{(\mu)}), \ldots, (\sigma_{p-1}^{(\mu)}, \zeta_{p-1}^{(\mu)})$ — те пары (s, z), при которых наше выражение, а значит и f, обращается в нуль. Отсюда получается A^2, а затем и A, причём знак может быть выяснен из непосредственного рассмотрения θ-рядов в нашем выражении [19].

III. ОБ ОБРАЩЕНИИ В НУЛЬ θ-ФУНКЦИЙ

Во второй части моего мемуара по теории абелевых функций, опубликованного в 54-м томе математического журнала [1], содержится доказательство одной теоремы, касающейся обращения в нуль θ-функций; его я здесь собираюсь снова воспроизвести, предполагая, что читателю известны обозначения, употребляемые мной в упомянутой работе. При нашем методе, опирающемся на определение функций посредством их точек и кривых разрыва, эта теорема, как легко усмотреть, должна лежать в основе теории абелевых функций; последующие разделы названного моего мемуара содержат краткие указания на её применение. Но в формулировке и в доказательстве самой теоремы не уделено надлежащим образом внимания тому обстоятельству, что при подстановке интегралов от алгебраических функций одной переменной θ-функция может обращаться в нуль тождественно, т. е. при любом значении переменной. Настоящая небольшая работа имеет целью восполнить этот пробел.

При изложении исследований по θ-функциям с неопределённым числом переменных обнаруживается потребность в сокращённом обозначении для ряда символов, например

$$v_1, \ v_2, \ldots, v_m,$$

где дело осложнено присутствием индексов. Можно было бы в данном случае ввести знак, аналогичный знаку суммы или произведения, но такое обозначение отнимало бы много места и с трудом воспроизводилось бы в печати под знаком функции. Поэтому я отдам предпочтение обозначению

$$\Big(\overset{m}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu)\Big) \quad \text{вместо} \quad v_1, v_2, \ldots, v_m;$$

таким образом, буду писать

$$\theta\Big(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu)\Big) \quad \text{вместо} \quad \theta(v_1, v_2, \ldots, v_p).$$

1

Пусть в функции $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ вместо p переменных v подставлено p интегралов $u_1 - e_1, \ u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p$ от таких алгебраических функций переменной z, которые имеют ветвление, одинаковое с ветвлением поверхности T; тогда получается некоторая функция z, непрерывная на всей поверхности T, кроме разрезов b, и приобретающая при переходе с отрицательной на положительную сторону разреза b_ν множитель $e^{-u_\nu^+ - u_\nu^- + 2e_\nu}$. Как было показано в § 22, эта функция, если только она не обращается тождественно в нуль, лишь в p точках поверхности T становится бесконечно малой первого порядка. Эти точки были обозначены через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$, а значение функции u_ν в точке η_μ — через $\alpha_\nu^{(\mu)}$. Затем была установлена конгруэнция по $2p$ системам модулей θ-функции:

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv \left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} + K_1,\ \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)} + K_2, \ldots,\ \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)} + K_p\right), \quad (1)$$

причём величины K зависели от пока неопределённых постоянных слагаемых, входящих в функции u, но не от величин e и не от точек η.

Выполняя указанное там вычисление, мы получаем:

$$2K_\nu = \sum \frac{1}{\pi i} \int (u_\nu^+ + u_\nu^-)\, du_{\nu'} - \varepsilon_\nu \pi i - \sum_{\mu=1}^{\mu=p}{}' \varepsilon_\mu a_{\mu,\nu}. \quad (2)$$

В этой формуле интеграл $\int (u_\nu^+ + u_\nu^-)\, du_{\nu'}$ надлежит взять в положительном направлении по кривой $b_{\nu'}$, а при суммировании — подставлять вместо ν' все числа от 1 до p, кроме ν; ε_ν равно $+1$ или -1, смотря по тому, лежит ли конец кривой l_ν на положительной или на отрицательной стороне разреза a_ν; наконец, $\varepsilon'_\nu = +1$ или -1, смотря по тому, лежит ли этот самый конец на положительной или на отрицательной стороне разреза b_ν. Впрочем, определение знаков существенно лишь в том случае, если требуется по разрывам $\log \theta$ вполне определить величины e из данных в § 22 уравнений; что же касается конгруэнции (1), то она остаётся справедливой, как бы ни были выбраны знаки.

Мы сохраним в силе сделанное раньше упрощающее предположение о том, что постоянные слагаемые в функциях u определены таким образом, чтобы все величины K были равны нулю. Чтобы освободить получаемые результаты от этого ограничительного предположения, очевидно, достаточно в θ-функциях к аргументам прибавить $-K_1, -K_2, \ldots, -K_p$.

Итак, если функция $\theta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$ в p точках $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ обращается в нуль, но *не обращается в нуль для любого значения* z, то справедлива конгруэнция

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv \left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right).$$

Эта теорема справедлива при каких угодно значениях величин e и, заставляя точку (s, z) совпасть с точкой η_p, мы отсюда получили следствие

$$\left(-\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\mu)}, -\sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\mu)}\right) = 0,$$

или же, так как θ-функция есть чётная функция своих аргументов,

$$\theta\left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\mu)}\right) = 0,$$

каковы бы ни были точки $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$.

2

Доказательство этой теоремы нуждается, однако, в дополнении ввиду того, что функция

$$\theta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$$

может тождественно обратиться в нуль (что, действительно, имеет место для каждой системы одинаково разветвлённых функций при некоторых значениях величин e).

Вследствие этого обстоятельства придётся сначала показать, что теорема остаётся справедливой, когда точки η независимо одна от другой меняются в некоторых конечных пределах. Отсюда уже будет следовать справедливость теоремы в общем случае на основе того принципа, что функция комплексной переменной не может обращаться в нуль в некоторой конечной области, не обращаясь в нуль при всех значениях переменной.

При данном значении z значения величин $e_1, e_2, \ldots, e_p$ всегда можно подобрать таким образом, чтобы выражение

$$\theta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$$

не обратилось в нуль; иначе функция $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ обращалась бы в нуль при всех значениях величин v, и, следовательно, в её разложении по целым степеням $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \ldots, e^{2v_p}$ все коэффициенты равнялись бы нулю, что не предполагается. В таком случае величины e могут изменяться независимо одна от другой в некоторой конечной области без того, чтобы функция

$$\theta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$$

при взятом значении z обратилась в нуль. Другими словами, можно всегда указать такую область E $2p$ измерений, в пределах которой система величин e может быть выбрана произвольно без того, чтобы функция

$$\theta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$$

при взятом значении z обратилась в нуль. Тогда она только при p положениях точки (s, z) будет бесконечно малой первого порядка, и, обозначив эти точки через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$, будем иметь конгруэнцию

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv \left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right). \tag{1}$$

Каждой системе значений величин e в области E, т. е. каждой точке E, соответствует некоторая система значений η, совокупность которых образует соответствующую области E область H. Но вследствие соотношения (1) каждая точка H соответствует только одной точке E; значит, если бы H имело $2p-1$ или меньше измерений, то и E не могло бы иметь $2p$ измерений. Следовательно, область H имеет $2p$ измерений. Итак, те рассуждения, на которые опирается доказательство нашей теоремы, остаются справедливыми при любых положениях точек η в пределах конечных областей, и равенство

$$\theta\left(-\sum_{1}^{p-1}\alpha_1^{(\mu)}, -\sum_{1}^{p-1}\alpha_2^{(\mu)}, \ldots, -\sum_{1}^{p-1}\alpha_p^{(\mu)}\right)=0$$

также выполняется при произвольных положениях точек $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ в пределах конечных областей и потому — при совершенно произвольном положении этих точек.

3

Отсюда следует, что если только $\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu-e_\nu)\right)$ не обращается в нуль при всех значениях z, то систему величин $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ можно считать — и притом только одним способом — конгруэнтной системе $\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{p}\alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right)$; в самом деле, если было бы возможно более чем одним способом подобрать точки $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ так, чтобы осуществлялась конгруэнция

$$\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(e_\nu)\right)\equiv\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{p}\alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right),$$

то, по только что доказанному, функция $\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu-e_\nu)\right)$, не будучи тождественно равной нулю, обращалась бы в нуль более чем в p точках, что невозможно.

Если $\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu-e_\nu)\right)$ тождественно обращается в нуль, то, чтобы придать системе $\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(e_\nu)\right)$ указанный выше вид, нужно будет рассмотреть функцию

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu+\alpha_\nu^{(1)}-u_\nu^{(1)}-e_\nu)\right),$$

а если эта последняя функция обращается в нуль тождественно относительно z, ζ_1, z_1, то функцию

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(u_\nu+\sum_{1}^{2}\alpha_\nu^{(\mu)}-\sum_{1}^{2}u_\nu^{(\mu)}-e_\nu\right)\right).$$

Мы допустим, что

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{m}\alpha_\nu^{(p+2-\mu)}-\sum_{1}^{m-1}u_\nu^{(p-\mu)}-e_\nu\right)\right)\\ \text{обращается в нуль тождественно, тогда как}\\ \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{m+1}\alpha_\nu^{(p+2-\mu)}-\sum_{1}^{m}u_\nu^{(p-\mu)}-e_\nu\right)\right)\\ \text{тождественно в нуль не обращается.}\end{array}\right\} \quad (1)$$

В таком случае последняя функция, будучи рассматриваема как функция переменной ζ_{p+1}, обращается в нуль при значениях ε_{p-1}, $\varepsilon_{p-2}, \ldots, \varepsilon_{p-m}$ и, кроме того, ещё в $p-m$ точках; если обозначим эти точки через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-m}$, то получим

$$\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(-\sum_{p-m+1}^{p}\alpha_\nu^{(\mu)}+e_\nu\right)\right)\equiv\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{p-m}\alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right):$$

точки $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-m}$ могут быть определены только одним способом так, чтобы выполнялась эта конгруэнция, так как иначе функция обращалась бы в нуль более чем в p точках. Та же функция, будучи рассматриваема как функция z_{p-1}, обращается в нуль, кроме точек η_{p+1}, $\eta_p, \ldots, \eta_{p-m+1}$, ещё в $p-m-1$ точках, и если обозначим эти точки через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-m-1}$, то получим

$$\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(-\sum_{p-m}^{p-2}u_\nu^{(\mu)}-e_\nu\right)\right)\equiv\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{p-m-1}u_\nu^{(\mu)}\right)\right),$$

причём точки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-m-1}$ этой конгруэнцией вполне определяются.

Итак, при сделанном предположении (1), чтобы удовлетворить конгруэнциям

$$\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(e_\nu)\right)\equiv\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{p}\alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right) \tag{2}$$

и

$$\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(-e_\nu)\right)\equiv\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{p-2}u_\nu^{(\mu)}\right)\right), \tag{3}$$

можно выбрать произвольно m из числа точек η и $m-1$ из числа точек ε, но тогда остальные точки уже тем самым определяются. Очевидно, справедливы и обратные предложения, т. е. функция обращается в нуль, если одно из этих условий выполнено. Значит, если конгруэнция (2) имеет более одного решения, то разрешима также и конгруэнция (3), и если из числа точек η можно выбрать произвольно m, но не более того, то из числа точек ε можно выбрать произвольно $m-1$, остальные же тем самым определяются, и обратно.

Совершенно таким же образом устанавливается, что если

$$\theta\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

то конгруэнции

$$\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ \nu\,(\sum\limits_{1}^{p-1} \alpha_\nu^{(\mu)}) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

и

$$\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(-r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ \nu\,(\sum\limits_{1}^{p-1} u_\nu^{(\mu)}) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

всегда разрешимы; и притом, если функция

$$\theta\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(\sum\limits_{1}^{m} u_\nu^{(\mu)} - \sum\limits_{1}^{m} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$$

тождественно равна нулю, а функция

$$\theta\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(\sum\limits_{1}^{m+1} u_\nu^{(\mu)} - \sum\limits_{1}^{m+1} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$$

тождественно нулю не равна (случай $m = 0$ не исключается), то как из числа точек η, так и из числа точек ε можно выбрать произвольно m, и тогда остальные $p - 1 - m$ определяются. Обратное утверждение также справедливо. Значит, если из числа точек η можно выбрать произвольно m, и не более того, то предпосылки этой теоремы выполнены; следовательно, из числа точек ε также можно выбрать произвольно m, и не более того.

4

Обозначим производную от $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ по v_ν через θ_ν', вторую производную по v_ν и v_μ — через $\theta''_{\nu,\mu}$ и т. д. (1). Тогда, если функция

$$\theta\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$$

обращается в нуль тождественно относительно z_1 и ζ_1, то все функции $\theta'\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$ равны нулю. Действительно, при s_1 и z_1, бесконечно мало отличающихся от σ_1 и ζ_1, равенство

$$\theta\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

переходит в следующее:

$$\sum_{1}^{p} \theta_\mu'\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix} d\alpha_\mu^{(1)} = 0.$$

Если допустим, что

$$du_\mu = \frac{\varphi_\mu(s,\ z)\,dz}{\frac{\partial F}{\partial s}},$$

то это равенство, после того как отбросим множитель $\dfrac{d\zeta_1}{\frac{\partial F(\sigma_1,\ \zeta_1)}{\partial \sigma_1}}$, принимает вид

$$\sum_1^p \theta'_\mu \left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)\varphi_\mu(\sigma_1,\ \zeta_1) = 0;$$

и так как функции φ не связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами, то отсюда следует, что все первые производные от $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ при $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ должны обращаться в нуль.

Докажем теперь обратную теорему. Допустим, что $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ и $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = t_\nu)$ — две системы значений, при которых функция θ обращается в нуль, но пусть она не обращается в нуль тождественно при $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)$ и $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + t_\nu)$. Построим выражение

$$\frac{\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)}{\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + t_\nu)\theta\right)\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)}. \tag{2}$$

Если станем рассматривать его как функцию z_1, то оказывается, что эта функция — алгебраическая и притом рациональная относительно s_1 и z_1, так как числитель и знаменатель непрерывны в T'' и на разрезах приобретают одинаковые множители. При $z_1 = \zeta_1$ и $s_1 = \sigma_1$ числитель и знаменатель становятся бесконечно малыми второго порядка, так что функция остаётся конечной; остальные же значения, при которых обращается в нуль числитель или знаменатель, как было показано выше, вполне определяются значениями величин r и величин t и, следовательно, не зависят от ζ_1. Но так как алгебраическая функция определяется с точностью до постоянного множителя теми значениями переменной, при которых она обращается в нуль или в бесконечность, то рассматриваемое выражение равно рациональной функции s_1 и z_1, не зависящей от ζ_1, $\chi(s_1,\ z_1)$, притом умноженной на константу, т. е. на величину, не зависящую от z_1. Ввиду того, что наше выражение симметрично относительно пар величин $(s_1,\ z_1)$ и $(\sigma_1,\ \zeta_1)$, то эта константа равна произведению $\chi(\sigma_1, \zeta_1)$ на не зависящий от ζ_1 множитель A. Если положим, дальше,

$$\sqrt{A}\,\chi(s, z) = \rho(s, z),$$

то выражение (2) принимает вид

$$\rho(s_1, z_1)\,\rho(\sigma_1, \zeta_1), \tag{3}$$

где $\rho(s, z)$ — рациональная функция переменных s и z. Чтобы её определить, достаточно положить $\zeta_1 = z_1$ и $\sigma_1 = s_1$; мы получаем

$$(\rho(s_1, z_1))^2 = \left\{ \frac{\sum\limits_{\mu} \theta'_{\mu}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) du_{\mu}^{(1)}}{\sum\limits_{\mu} \theta'_{\mu}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(t_\nu)\right) du_{\mu}^{(1)}} \right\}^2,$$

или же, после извлечения квадратного корня и удаления множителя $\dfrac{dz_1}{\dfrac{\partial F(s_1, z_1)}{\partial s_1}}$,

$$\rho(s_1, z_1) = \pm \frac{\sum\limits_{\mu} \theta'_{\mu}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) \varphi_{\mu}(s_1, z_1)}{\sum\limits_{\mu} \theta'_{\mu}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(t_\nu)\right) \varphi_{\mu}(s_1, z_1)}. \tag{4}$$

Таким образом, с помощью (3) и (4) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)}{\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)} = \\ &\quad = \frac{\sum\limits_{\mu} \theta'_{\mu}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) \varphi_{\mu}(s_1, z_1)}{\sum\limits_{\mu} \theta'_{\mu}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(t_\nu)\right) \varphi_{\mu}(s_1, z_1)} \cdot \frac{\sum\limits_{\mu} \theta'_{\mu}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) \varphi_{\mu}(\sigma_1, \zeta_1)}{\sum\limits_{\mu} \theta'_{\mu}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(t_\nu)\right) \varphi_{\mu}(\sigma_1, \zeta_1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из этого равенства следует, что

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)$$

должно обращаться в нуль при всех значениях z_1 и ζ_1, если все производные $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ обращаются в нуль при $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$.

5

Если

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{m} \alpha_{\nu}^{(\mu)} - \sum_{1}^{m} u_{\nu}^{(\mu)} + r_{\nu}\right)\right) \tag{1}$$

обращается в нуль тождественно, т. е. при любых значениях $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}(\sigma_\mu, \zeta_\mu)$ и $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}(s_\mu, z_\mu)$, то, рассуждая, как прежде, мы приходим к заключению, положив $\zeta_m = z_m$, $\sigma_m = s_m$, что все первые производные от функций $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ при

$$\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_{1}^{m-1} \alpha_{\nu}^{(\mu)} - \sum_{1}^{m-1} u_{\nu}^{(\mu)} + r_{\nu}\right)$$

равны нулю; затем, допустив, что $\zeta_{m-1} - z_{m-1}$, $\sigma_{m-1} - s_{m-1}$ — величины бесконечно малые, убеждаемся, что при

$$\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_{1}^{m-2} \alpha_{\nu}^{(\mu)} - \sum_{1}^{m-2} u_{\nu}^{(\mu)} + r_{\nu}\right)$$

обращаются в нуль также все вторые производные; очевидно, таким же образом получаем вообще, что все производные n-го порядка обращаются в нуль при

$$\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_{1}^{m-n} \alpha_{\nu}^{(\mu)} - \sum_{1}^{m-n} u_{\nu}^{(\mu)} + r_{\nu}\right),$$

каковы бы ни были значения величин z и ζ.

Отсюда следует, что предположение (1) влечёт за собой обращение в нуль при $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ всех производных от функции $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ до порядка m включительно.

Желая показать, что справедлива и обратная теорема, мы установим теперь, что если

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{m-1} \alpha_{\nu}^{(\mu)} - \sum_{1}^{m-1} u_{\nu}^{(\mu)} + r_{\nu}\right)\right)$$

обращается в нуль тождественно и все величны $\theta^{(m)}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)$ равны нулю, то

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{m} \alpha_{\nu}^{(\mu)} - \sum_{1}^{m} u_{\nu}^{(\mu)} + r_{\nu}\right)\right)$$

также обращается в нуль тождественно; с этой целью обобщим формулу (5) § 4.

Допустим, что

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_{1}^{m-1} u_{\nu}^{(\mu)} - \sum_{1}^{m-1} \alpha_{\nu}^{(\mu)} + r_{\nu}\right)\right)$$

обращается в нуль тождественно, тогда как

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^m u_\nu^{(\mu)}-\sum_1^m \alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\right)$$

в нуль тождественно не обращается; сохраняя прежние предположения, касающиеся величин t, рассмотрим выражение

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum\limits_1^m u_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^m \alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\right)\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum\limits_1^m \alpha_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^m u_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\right)\times \\ \times\prod\limits_{\rho,\rho'}\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(u_\nu^{(\rho)}-u_\nu^{(\rho')}+t_\nu\right)\right)\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\alpha_\nu^{(\rho)}-\alpha_\nu^{(\rho')}+t_\nu\right)\right)\end{array}\right\}}{\left(\prod\limits_1^m\right)^2\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(u_\nu^{(\rho)}-\alpha_\nu^{(\rho')}+t_\nu\right)\right)\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\alpha_\nu^{(\rho)}-u_\nu^{(\rho')}+t_\nu\right)\right)}. \tag{2}$$

Под знаком произведений в этом выражении ρ и ρ' должны пробегать все значения от 1 до m, причём в числителе нужно отбрасывать множители, соответствующие предположениям $\rho=\rho'$.

Если станем рассматривать выражение (2) как функцию z_1, то оказывается, что на всех разрезах она приобретает множитель 1 и, следовательно, есть функция алгебраическая. При $z_1=\zeta_\rho$ и $s_1=\sigma_\rho$ и числитель и знаменатель становятся бесконечно малыми второго порядка, так что вся дробь остаётся конечной; остальные же значения переменной, при которых и числитель и знаменатель обращаются в нуль, вполне определяются, как было показано выше (§ 3), величинами $\overset{m}{\underset{2}{\mu}}(s_\mu, z_\mu)$ и величинами r и t и потому не зависят от величин ζ. Так как рассматриваемое выражение есть симметрическая функция величин z, то сказанное справедливо и для любого z_μ: это выражение есть алгебраическая функция переменной z_μ и обращается в нуль или в бесконечность при значениях z_μ, не зависящих от величин ζ. Итак, оно равно произведению некоторой алгебраической функции $\chi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ переменных z, не зависящей от величин ζ, на некоторый множитель, не зависящий от величин z. Но так как оно не меняется при взаимной перестановке величин z и ζ, то названный множитель равен функции $\chi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$, умноженной на постоянную A, не зависящую ни от величин z, ни от величин ζ; поэтому, полагая

$$\sqrt{A}\,\chi(z_1, z_2, \ldots, z_m)=\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

мы можем выражению (2) придать вид

$$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)\,\psi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m), \tag{3}$$

где $\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ — алгебраическая функция величин z, не зависящая от величин ζ, которая вследствие свойств своего ветвления рационально выражается через $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}(s_\mu, z_\mu)$. Если заставим теперь точки η совпасть с точками ε так, что величины $\zeta_\mu - z_\mu$ и $\sigma_\mu - s_\mu$ станут бесконечно малыми, то получим равенство

$$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \pm \frac{\left(\sum_1^{\rho}\right)^m \theta^{(m)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}\left(\overset{p}{\underset{1}{\rho}}(r\rho)\right) du^{(1)}_{\nu_1} du^{(2)}_{\nu_2} \ldots du^{(m)}_{\nu_m}}{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \theta'_\nu\left(\overset{p}{\underset{1}{\rho}}(r_\rho)\right) du^{(\mu)}_\nu}, \tag{4}$$

где использовано обозначение (1) для производных от $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, введённое в § 4, и где знаки суммирования в числителе относятся к индексам $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$. Едва ли нужно разъяснять, что выбор знака перед дробью безразличен, так как не влияет на знак $\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m) \times \times \psi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$, и что, вместо величин $du^{(\mu)}_1, du^{(\mu)}_2, \ldots, du^{(\mu)}_p$, можно ввести одновременно в числителе и в знаменателе пропорциональные им величины $\varphi_1(s_\mu, z_\mu), \varphi_2(s_\mu, z_\mu), \ldots, \varphi_p(s_\mu, z_\mu)$.

Из равенства, получающегося как следствие (2), (3) и (4) и доказанного в предположении, что

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m-1} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{m-1} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right)$$

равно нулю, а

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{m} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right)$$

не равно нулю, следует, что

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{m} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right)$$

не может быть отлично от нуля, если только все функции $\theta^{(m)}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)$ равны нулю.

Таким образом, если все функции $\theta^{(m+1)}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)$ равны нулю, то из справедливости равенства

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{n} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{n} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right) = 0$$

при $n = m$ вытекает его справедливость при $n = m + 1$. Поэтому, если это равенство справедливо при $n = 0$, т. е. если $\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) = 0$ и если обращаются в нуль производные функции $\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu)\right)$ до m-го порядка включительно при $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$, но не все производные $(m+1)$-го порядка обращаются в нуль, то равенство выполняется и для всех бóльших значений n до $n = m$, но не для $n = m + 1$; ибо из равенства

$$\theta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m+1} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{m+1} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right) = 0$$

следовало бы, как выше было установлено, что все величины $\theta^{(m+1)}\begin{pmatrix} p \\ \nu\,(r_\nu) \\ 1 \end{pmatrix}$ должны были бы равняться нулю.

6

Объединяя полученные здесь результаты с прежними, мы получаем следующее предложение.

Если $\theta(r_1, r_2, \ldots, r_p) = 0$, то можно подобрать $p-1$ точек $\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_{p-1}$ таким образом, что будет справедлива конгруэнция

$$(r_1, r_2, \ldots, r_p) \equiv \left(\sum_1^{p-1} \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^{p-1} \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^{p-1} \alpha_p^{(\mu)}\right),$$

и обратно.

Если, кроме функции $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, также все её частные производные до порядка m включительно обращаются в нуль при $v_1 = r_1$, $v_2 = r_2, \ldots, v_p = r_p$, но производные порядка $m+1$ не все равны нулю, то можно m из числа $p-1$ точек η выбрать произвольно (при одних и тех же значениях r), и остальные $p-1-m$ тогда полностью определяются.

И обратно: если m — и не более того — из числа точек η (при одних и тех же значениях r) могут быть выбраны произвольно, то, кроме функции $\theta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, также все её частные производные до порядка m включительно обращаются в нуль при $v_1 = r_1$, $v_2 = r_2, \ldots, v_p = r_p$, но не все производные порядка $m+1$ обращаются в нуль.

Полное исследование всех особых случаев, которые могут встретиться при обращении в нуль θ-функции, было необходимо не столько ради рассмотрения тех особых систем одинаково разветвлённых алгебраических функций, которые обусловливают наступление упомянутых особых случаев, сколько по той причине, что без этого исследования остались бы пропуски в доказательстве теорем, основанных на нашей теореме об обращении в нуль θ-функции.

IV. О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ θ-РЯДОВ p-Й КРАТНОСТИ

Исследование сходимости бесконечного ряда с положительными членами всегда может быть приведено к исследованию определённого интеграла. Это показывает следующая теорема.

Пусть

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

есть ряд с положительными и убывающими членами, а $f(x)$ — функция, которая убывает при возрастании x, так что

$$f(\alpha) > \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)\,dx > f(\alpha+1),$$

и потому

$$f(0) + f(1) + \dots + f(n) > \int_0^{n+1} f(x)\,dx > f(1) + f(2) + \dots + f(n+1).$$

В таком случае ряд

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots$$

— сходящийся или расходящийся одновременно с интегралом

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Если $f(n)$ положительно и $a_n < f(n)$, то ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

— сходящийся, раз предыдущий интеграл — сходящийся. Отсюда следует теорема:

Если $a_n < f(x)$ при $n \geqslant x$, то ряд $\sum a_n$ — сходящийся, раз только интеграл $\int^{\infty} f(x)\,dx$ — сходящийся.

Положив $x = \varphi(y)$, $f(x) = f(\varphi(y)) = F(y)$, мы получаем

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int F(y)\,\varphi'(y)\,dy.$$

Предположим, что обе переменные x и y возрастают (притом до бесконечности) или убывают одновременно; в таком случае с увеличением y функция $F(y)$ убывает, а $\varphi(y)$ возрастает. Отсюда полученное условие сходимости принимает такой вид:

Ряд $\sum a_n$ — сходящийся, если $a_n < F(y)$ при $n \geqslant \varphi(y)$, или, иначе говоря, если $n < \varphi(y)$ при $a_n \geqslant F(y)$ и если интеграл

$$\int\limits_b^\infty F(y)\,\varphi'(y)\,dy$$

— сходящийся.

Но раз $a_n > F(y)$, то тому же неравенству удовлетворяют $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Поэтому, если, кроме того, $a_{n+1} < F(y)$, то n есть число членов ряда, которые больше, чем $F(y)$. Значит, справедлива и такая формулировка:

Если при возрастании y функция $F(y)$ убывает, а функция $\varphi(y)$ возрастает (притом до бесконечности) и если число членов ряда с положительными членами, не превышающих $F(y)$, меньше, чем $\varphi(y)$, то наш ряд — сходящийся, раз интеграл $\int\limits_0^\infty F(y)\,\varphi'(y)\,dy$ — сходящийся.

Мы разыщем такие функции F и φ для θ-рядов p-й кратности

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} m\right)^p e^{\sum\limits_1^p{}_i \sum\limits_1^p{}_{i'} a_{i,i'} m_i m_{i'} + 2\sum\limits_1^p{}_i m_i v_i},$$

причём, не предполагая ограничить общность, сначала допустим, что величины $a_{i,i'}$ и v_i — действительные.

Общий член этого ряда

$$e^{\sum\limits_1^p \sum\limits_1^p a_{i,i'} m_i m_{i'} + 2 \sum\limits_1^p m_i v_i}$$

больше, чем e^{-h^2}, если только

$$-\sum_1^p \sum_1^p a_{i,i'} m_i m_{i'} - 2\sum_1^p m_i v_i < h^2.$$

Нам нужно теперь установить, для скольких комбинаций целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_p$ выполняется это неравенство.

Для этой цели рассмотрим сначала интеграл

$$A = \int\int \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_p,$$

распространённый на область, определяемую неравенством

$$-\sum_1^p \sum_1^p a_{i,i'} x_i x_{i'} < 1.$$

Интеграл будет иметь конечное значение в том и только в том случае, если однородная функция второй степени

$$-\sum_1^p \sum_1^p a_{i,i'} x_i x_{i'}$$

может быть разложена на сумму p положительных квадратов. Ибо если

$$-\sum_1^p \sum_1^p a_{i,i'} x_i x_{i'} = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_p^2,$$

то область интегрирования определится неравенством

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_p^2 < 1,$$

сам же интеграл A примет вид

$$A = \int\int \ldots \int \left(\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \ldots \frac{\partial x_p}{\partial t_p}\right) dt_1 dt_2 \ldots dt_p,$$

откуда и следует заключение, если принять во внимание, что функциональный определитель есть конечное число, и переменные в области интегрирования по абсолютному значению не превосходят единицы.

С другой стороны, если бы не все t^2 были положительными или же если бы некоторые из них отсутствовали в трансформированной форме, то в интеграле A можно было бы давать переменным и бесконечные значения, и A само тогда было бы бесконечным.

Предыдущий результат ни в чём не меняется, если в качестве области интегрирования в интеграле A возьмём область, определяемую неравенством

$$-\sum_i \sum_{i'} a_{i,i'} x_i x_{i'} - 2\sum_i \alpha_i x_i < 1,$$

где α_i — произвольные действительные числа. Обращаясь к неравенству

$$-\sum_i \sum_{i'} a_{i,i'} m_i m_{i'} - 2\sum_i v_i m_i < h^2,$$

придадим ему, после подстановки $\frac{m_i}{h} = x_i$, вид

$$-\sum_i \sum_{i'} a_{i,i'} x_i x_{i'} - 2\sum_i \frac{v_i}{h} x_i < 1,$$

и тогда убедимся, что при любом конечном значении h этому неравенству удовлетворяет лишь конечное число комбинаций целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_p$, так как все x_i должны оставаться в некоторых конечных пределах, а в таких пределах имеется лишь конечное число рациональных чисел с данным знаменателем h.

Пусть $\mathfrak{Z}_h$ будет число допустимых комбинаций чисел m. Рассмотрим сумму

$$\sum_{m_1, m', \ldots, m_p} \int\limits_{\frac{m_1}{h}}^{\frac{m_1+1}{h}} dx_1 \int\limits_{\frac{m_2}{h}}^{\frac{m_2+1}{h}} dx_2 \ldots \int\limits_{\frac{m_p}{h}}^{\frac{m_p+1}{h}} dx_p = \frac{\mathfrak{Z}_h}{h^p},$$

распространённую на все такие допустимые комбинации: эта сумма конечна и при неограниченно увеличивающемся h стремится к пределу A, относительно которого также доказано, что он конечен, если только функция $-\sum_i \sum_{i'} a_{i,i'} x_i x_{i'}$ может быть представлена как сумма p положительных квадратов. Если положим, следовательно, что рассматриваемая сумма равна $A+k$, то k будет конечной величиной, стремящейся к нулю при неограниченном возрастании h. Таким образом, число n членов θ-ряда, которые больше, чем e^{-h^2}, даётся формулой

$$\mathfrak{Z}_h = (A+k)\, h^p.$$

В таком случае

$$n < (A+K)\, h^p,$$

где K — постоянная, которую, впрочем, можно выбрать как угодно малой, если исходить из достаточно большого значения h.

Теперь можно ввести функции

$$F(y) = e^{-y^2}, \quad \varphi(y) = (A+K)\, y^p,$$

и так как интеграл

$$\int_0^\infty e^{-y^2} (A+K)\, p y^{p-1}\, dy$$

— сходящийся, то при сделанном допущении будет сходящимся и θ-ряд.

Итак, можно утверждать: *бесконечный θ-ряд кратности p сходится для всех значений переменных $v_1, v_2, \ldots, v_p$, если только действительная часть квадратической формы в показателе существенно отрицательна.*

V. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ТОМ, ЧТО ОДНОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ n ПЕРЕМЕННЫХ НЕ МОЖЕТ ИМЕТЬ БОЛЕЕ $2n$ ПЕРИОДОВ

(ИЗ ПИСЬМА К ВЕЙЕРШТРАССУ)

Доказательство предложения, в сторону которого Вы недавно направили беседу, а именно о том, что не может существовать однозначной функции n переменных, имеющей больше чем $2n$ периодов, на словах я, вероятно, изложил недостаточно ясно, ограничившись указанием основной мысли, поэтому сообщаю Вам его здесь ещё раз.

Пусть f есть функция n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с $2n$ периодами, и — я позволю себе пользоваться известными Вам своими обозначениями — пусть модуль периодичности ве́личины x_ν в μ-м периоде обозначается через a^ν_μ. Как известно, величины x можно представить в виде [1]

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=2n} a^\nu_\mu \xi_\mu \qquad \text{при} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

где величины ξ — действительные. Когда величины ξ пробегают все значения от 0 до 1 (за исключением одного из этих пределов), то возникающая при этом $2n$-мерная область обладает тем свойством, что любая система значений n переменных конгруэнтна по $2n$ системам модулей одной из систем значений, принадлежащей рассматриваемой области. Чтобы иметь возможность в дальнейшем выражаться более кратко, я назову эту область «областью, периодически повторяющейся в $2n$ данных системах модулей».

Если функция имеет ещё $(2n+1)$-ю систему модулей, которая не составляется из $2n$ первых систем, то все системы числовых значений наших величин, конгруэнтные некоторой системе значений по этой системе модулей, можно свести к системе значений, конгруэнтной им по $2n$ первым системам модулей, но уже лежащей в выделенной нами

[1]) Правда, это возможно не всегда, а только в том случае, если $2n$ уравнений, из которых должны быть определены величины ξ, независимы; но рассмотрение исключительных случаев не составляет труда.

области; таким образом, в пределах этой области, как легко понять, мы находим сколько угодно систем числовых значений, конгруэнтных между собой по $2n+1$ системам модулей, если только не случится, что две системы значений, конгруэнтные по $(2n+1)$-й системе модулей, окажутся конгруэнтными также по $2n$ первым системам. В этом случае $2n+1$ системы модулей должны быть связаны n равенствами вида

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n+1} a_{\mu}^{\nu} m_{\mu} = 0,$$

где величины m — целые числа, и, следовательно, как я покажу позднее, $2n+1$ систем модулей составляются из $2n$ систем.

Разделим теперь для каждой из величин отрезок от 0 до 1 на q равных частей, вследствие чего наша периодически повторяющаяся область разобьётся на q^{2n} частных областей; в пределах любой из них каждая величина ξ изменяется не больше, чем на $\frac{1}{q}$. Раз в первоначальной области имеется больше, чем q^{2n} систем, взаимно конгруэнтных по $2n+1$ системам модулей, то, очевидно, по меньшей мере две такие системы придутся на одну и ту же частную область, так что значения одной и той же величины ξ в этих системах будут различаться не больше, чем на $\frac{1}{q}$. Итак, оказывается, что функция остаётся неизменной при некоторых изменениях величин ξ, из которых ни одно не превосходит $\frac{1}{q}$. Следовательно, так как q можно взять сколь угодно большим, функция, если она непрерывна, зависит от меньшего, чем n, числа линейных комбинаций величин x.

Нужно теперь убедиться в том, что, если $2n+1$ систем модулей связаны n уравнениями

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n+1} a_{\mu}^{\nu} m_{\mu} = 0,$$

то они могут быть составлены из $2n$ систем. Мы сначала без труда докажем, что к любой системе модулей

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n} a_{\mu}^{\nu} m_{\mu} = b_1^{\nu},$$

где величины m — взаимно простые целые числа, можно подобрать $2n-1$ других систем модулей $b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$ таким образом, что конгруэнция по модулям a будет равносильна конгруэнции по модулям b. Пусть θ_1 — общий наибольший делитель чисел m_1 и m_2, и α и β — два целых числа, удовлетворяющих равенству

$$\beta m_1 - \alpha m_2 = \theta_1.$$

Положим в таком случае

$$a_1^{\nu} m_1 + a_2^{\nu} m_2 = c_1^{\nu}\, \theta_1$$

и

$$\alpha a_1^{\nu} + \beta a_2^{\nu} = b_{2n}^{\nu};$$

тогда будем иметь

$$a_1^{\nu} = \beta c_1^{\nu} - \frac{m_2}{\theta_1}\, b_{2n}^{\nu}, \quad a_2^{\nu} = -\, \alpha c_1^{\nu} + \frac{m_1}{\theta_1}\, b_{2n}^{\nu}.$$

Значит, обратно: системы модулей a_1 и a_2 составляются из систем b_{2n} и c_1, так что конгруэнция по обеим первым системам равносильна конгруэнции по обеим вторым. Итак, системы a_1 и a_2 можно заменить системами c_1 и b_{2n}. Точно так же, обозначая через θ_2 общий наибольший делитель θ_1 и m_2, заменим дальше системы модулей c_1 и a_3 системой

$$\frac{1}{\theta_2}(\theta_1 c_1^{\nu} + m_3 a_3^{\nu}) = c_2^{\nu}$$

и некоторой системой b_{2n-1}. Продолжая таким же образом, мы, очевидно, и получим нашу теорему. Объём периодически повторяющейся области для новых систем модулей b тот же, что и для прежней.

Основываясь на доказанной теореме, мы можем в n равенствах

$$\sum_1^{2n+1} a_{\mu}^{\nu} m_{\mu} = 0$$

заменить $2n$ первых систем модулей через $2n$ новых систем $b_1,\ b_2, \ldots, b_{2n}$ таким образом, чтобы наши n равенства приняли вид

$$p b_1^{\nu} - q a_{2n+1}^{\nu} = 0,$$

где p и q — взаимно простые целые числа. Пусть целые числа γ, δ удовлетворяют равенству

$$p\delta + q\gamma = 1;$$

тогда две системы модулей b_1 и a_{2n+1} можно заменить одной системой

$$\gamma b_1^{\nu} + \delta a_{2n+1}^{\nu} = \frac{a_{2n+1}^{\nu}}{p} = \frac{b_1^{\nu}}{q}.$$

Отсюда следует, что любая система модулей, которая составляется из систем $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$, составляется также из $2n$ систем $\frac{b_1}{q}, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$, и обратно. Объём периодически повторяющейся области для этих $2n$ систем в q раз меньше, чем объём соответствующей области для систем a. Если функция, кроме этих систем модулей, имеет ещё одну, связанную с ними равенствами с целыми коэффициентами такого же вида, что и выше, то можно будет найти $2n$ новых систем модулей, из которых составляются исходные системы, причём объём вновь получаемой, периодически повторяющейся области снова уменьшается в целое число раз. Предположим, что эта область может быть сделана в результате подобного рода операций бесконечно малой; тогда рассматриваемая функция зависит от меньшего, чем n, числа линейных комбинаций из переменных величин, именно, от $n-1$, $n-2$ или $n-m$, смотря по тому, одно, два или m измерений рассматриваемой области становится бесконечно малыми. Если же предположим противоположное, то цепь наших операций должна будет оборваться, и мы получим $2n$ систем модулей, из которых составляются все системы модулей данной функции.

VI. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ГАУССОВЫМ РЯДОМ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$

Гауссов ряд $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, будучи рассматриваем как функция четвёртого аргумента x, представляет эту функцию лишь постольку, поскольку модуль x не превосходит единицы. Для того чтобы исследовать эту трансцендентную функцию, так сказать, во всём её объёме — при неограниченном изменении названного аргумента, появившиеся до сих пор работы, посвящённые тому же вопросу, указывают два пути. Именно, можно исходить или из линейного дифференциального уравнения, которому она удовлетворяет, или же из её представления посредством определённого интеграла. Каждому из этих путей свойственны некоторые преимущества; однако, до настоящего времени, как в содержательном мемуаре Куммера в 15-м томе математического журнала Крелля, так и в ещё не опубликованных исследованиях Гаусса [1]), предпочтение было отдано первому пути, главным образом, очевидно, потому, что приёмы оперирования с определёнными интегралами между комплексными пределами ещё не были достаточно разработаны или же не могли считаться усвоенными значительным кругом читателей.

В настоящей работе я изучаю гауссову трансцендентную функцию посредством нового метода, который в сущности остаётся применимым ко всякой функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению с алгебраическими коэффициентами. С помощью этого метода можно почти непосредственно из определения вывести результаты, которые раньше получались иной раз в итоге достаточно кропотливых вычислений; этот метод применён и в ныне публикуемой части настоящей работы [1], преимущественно с целью дать лёгкую обозреваемость возможным аналитическим представлениям функции, постоянно употребляемой в физических и астрономических исследованиях. Необходимо предпослать некоторые общие замечания, касающиеся изучения функции при неограниченном изменении её аргумента.

---

1) Gauss Werke, т. III, 1886, стр. 207.

Если станем изображать значение независимой переменной величины $x = y + zi$ с целью более лёгкого представления её изменяемости в виде точки на бесконечной плоскости с прямоугольными координатами y, z и допустим, что функция задана в некоторой части этой плоскости, то из этой части, согласно легко доказываемому предложению и притом единственным образом, её можно непрерывно продолжать с сохранением равенства $\frac{\partial w}{\partial z} = i\frac{\partial w}{\partial y}$. Такое продолжение, само собой разумеется, должно совершаться не по отдельным линиям (в этом случае нельзя было бы воспользоваться уравнением в частных производных), а по целым полосам конечной ширины. В случае функций, которые, подобно здесь рассматриваемым, «многозначны», т. е. при одном и том же значении x, смотря, по какому пути совершается продолжение, могут принимать различные значения, существуют некоторые точки плоскости x, обладающие тем свойством, что при их обходе значение функции меняется; такова, например, точка a для функций $\sqrt{x-a}$, $\log(x-a)$, $(x-a)^{\mu}$, если μ — не целое число. Если вообразим произвольную линию, проведённую из этой точки a, то в окрестности a значения функции могут быть выбраны таким образом, что всюду, кроме указанной линии, они будут меняться непрерывно; но на двух сторонах этой линии функция будет принимать различные значения, так что продолжение функции через линию даёт функцию, отличную от уже имеющейся.

Для облегчения речи различные продолжения одной и той же функции в одну и ту же часть плоскости x называются «ветвями» этой функции, а то значение x, при обходе которого совершается переход одной ветви в другую, — «точкой ветвления». В точке, которая не является точкой ветвления, функция считается «однозначной», или «монодромной» [2].

1

Я обозначу здесь символом

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

функцию переменной x, которая удовлетворяет следующим требованиям:

1) Она однозначна и конечна для всех значений x, кроме a, b, c.

2) Между любыми тремя ветвями этой функции P', P'', P''' имеет место линейное однородное соотношение с постоянными коэффициентами

$$c'P' + c''P'' + c'''P''' = 0.$$

3) Функцию можно представить в каждом из трёх видов

$$c_\alpha P^\alpha + c_{\alpha'} P^{\alpha'}, \quad c_\beta P^\beta + c_{\beta'} P^{\beta'}, \quad c_\gamma P^\gamma + c_{\gamma'} P^{\gamma'},$$

где c_α, $c_{\alpha'}, \ldots, c_{\gamma'}$ — постоянные, и притом

$$P^\alpha (x-a)^{-\alpha}, \quad P^{\alpha'} (x-a)^{-\alpha'}$$

в точке $x = a$, а точно так же

$$P^\beta (x-b)^{-\beta}, \quad P^{\beta'} (x-b)^{-\beta'}$$

в точке $x = b$ и

$$P^{\gamma}(x-c)^{-\gamma}, \quad P^{\gamma'}(x-c)^{-\gamma'}$$

в точке $x = c$, остаются однозначными и не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность. Относительно шести величин α, $\alpha', \ldots, \gamma'$ предполагается, что ни одна из разностей $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ не есть целое число [3] и, кроме того,

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Сколь многочисленны могут быть функции, удовлетворяющие этим требованиям, пока остаётся нерешённым, и вопрос этот разъяснится в процессе дальнейшего исследования (§ 4). Для большего удобства речи я буду называть x переменной, a, b, c — первой, второй, третьей точкой ветвления, а α, α'; β, β'; γ, γ' — первой, второй, третьей парой показателей P-функции.

2

Сначала выведем некоторые непосредственные следствия из определения.

В функции $P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$ можно как угодно переставлять между собой три первых столбца и точно так же α с α', β с β', γ с γ'. Далее

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & x' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

где через x' обозначена некоторая рациональная функция первой степени от x, которая при $x = a$, b, c принимает значения a', b', c'.

Вместо

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

к каковой функции в силу последнего замечания можно свести любую P-функцию с теми же α, $\alpha', \ldots, \gamma'$, я ради краткости буду писать просто $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$.

В выражении, подобном последнему, можно, очевидно, переставлять величины, принадлежащие одной и той же из трёх пар α, α'; β, β'; γ, γ'; можно также как угодно переставить между собой сами пары, если только в получающейся при перестановке P-функции вместо переменной x поставить такую её рациональную, первой степени функцию, которая для значений x, соответствующих первой, второй, третьей паре показателей, принимает значения 0, ∞, 1. Таким образом, функция $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma', & x\end{pmatrix}$ выражается через P-функции с переменными x, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $1-\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{1}{1-x}$ и теми же показателями, но в другом порядке.

Из определения вытекает, далее, следующее равенство:

$$\left\{P\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\delta}=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+\delta & \beta-\delta & \gamma & x \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta & \gamma' & \end{matrix}\right\},$$

а также

$$x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}\, P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma', & x\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\alpha+\delta & \beta-\delta-\varepsilon & \gamma+\varepsilon & \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta-\varepsilon & \gamma'+\varepsilon & x\end{pmatrix}.$$

С помощью последнего преобразования два показателя в разных парах могут получить заранее назначенные значения, а так как показатели связаны соотношением $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$, то вместо данной системы показателей может быть введена любая другая, для которой разности $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ оставались бы неизменными. Это обстоятельство позволит мне в дальнейшем обозначать через

$$P(\alpha-\alpha',\ \beta-\beta',\ \gamma-\gamma',\ x)$$

любую функцию вида

$$x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}\, P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma', & x\end{pmatrix}.$$

3

Прежде всего необходимо несколько точнее установить поведение функции. Для этого вообразим замкнутую линию l, проходящую через все точки ветвления и разделяющую совокупность всех возможных значений переменной на две области. Внутри каждой из них любая ветвь функции непрерывна и отделена от всякой другой, но на различных частях общей границы областей между ветвями функции будут иметь место различные линейные соотношения. Для большего удобства изложения я буду линейные выражения $pt+qu$, $rt+su$, полученные из величин t, u посредством системы коэффициентов $S=\begin{pmatrix}p, & q\\ r, & s\end{pmatrix}$, обозначать через $(S)(t, u)$. Затем по аналогии с наименованием «положительная боковая единица», которое было предложено Гауссом для $+i$, пусть под «положительным» направлением поворота по отношению к данному направлению подразумевается то, которое расположено по отношению к нему так же, как $+i$ по отношению к 1 (т. е. влево при обычном расположении чертежа). Следовательно, переменная x «обходит точку ветвления a в положительном направлении», если она движется по границе некоторой области, не содержащей никакой другой точки ветвления, и притом по направлению «положительного поворота» по отношению к направлению, указывающему изнутри наружу. Пусть линия l проходит последовательно через точки $x=c$, $x=b$, $x=a$, и пусть P', P'' — две отличающиеся не только постоянным множителем ветви функции P в области, расположенной в положительную сторону от l. В таком случае всякая иная ветвь P''' выражается линейно, с постоянными коэффициентами через P', P'', так как в существующем по предположению тождестве $c'P'+c''P''+c'''P'''=0$ коэффициент c''' должен быть отличен от нуля. Если допустим теперь, что при положительном обходе точки a P', P'' превращается в $(A)(P', P'')$, при обходе b — в $(B)(P', P'')$ и при обходе c — в $(C)(P', P'')$, то коэффициенты систем (A), (B), (C) полностью определяют периодичность функции. Но между названными коэффициентами есть соотношения. В самом деле, когда x пробегает вдоль линии l по отрицательной её стороне, функции P', P'' возвращаются к прежним их значениям, так как пройденный путь образует полную границу области, в которой эти функции однозначны. Но это как раз то же самое, как если бы точка x проходила по положительной стороне от каждой из точек c, b, a к следующей и затем совершала положительный обход вокруг каждой из них; при этом (P', P'') последовательно заменяются через $(C)(P', P'')$, $(C)(B)(P', P'')$ и наконец $(C)(B)(A)(P', P'')$. Поэтому

$$(C)(B)(A)=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \tag{1}$$

откуда следуют четыре соотношения между двенадцатью коэффициентами A, B, C.

При исследовании этих соотношений я ограничусь ради определённости рассмотрением функции $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & x\end{pmatrix}$, т. е. случаем, когда $a=0$, $b=\infty$, $c=1$, что существенно не повлияет на общность заключений, и в качестве линии l выберу линию действительных значений, которую нужно будет проходить от $-\infty$ до $+\infty$, чтобы последовательно пройти через c, b, a. В области, расположенной с положительной стороны этой линии, т. е. в области, где мнимая часть переменной положительна, выше описанные составляющие P-функции P^α, $P^{\alpha'}$, P^β, $P^{\beta'}$, P^γ, $P^{\gamma'}$ являются однозначными функциями x и, если функция P задана, определены с точностью до постоянных множителей, зависящих от выбора величин c_α, $c_{\alpha'}, \ldots, c_{\gamma'}$. При положительном обходе x около точки 0 P^α, $P^{\alpha'}$ переходят в $P^\alpha e^{\alpha 2\pi i}$, $P^{\alpha'}e^{\alpha' 2\pi i}$; точно так же при положительном обходе около точки ∞ P^β, $P^{\beta'}$ переходят в $P^\beta e^{\beta 2\pi i}$, $P^{\beta'}e^{\beta' 2\pi i}$ и при положительном обходе около точки 1 P^γ, $P^{\gamma'}$ переходят в $P^\gamma e^{\gamma 2\pi i}$, $P^{\gamma'}e^{\gamma' 2\pi i}$. Обозначив через P' значение, которое принимает P после положительного обхода около 0, будем иметь

$$P=c_\alpha P^\alpha+c_{\alpha'}P^{\alpha'}, \quad P'=c_\alpha e^{\alpha 2\pi i}P^\alpha+c_{\alpha'}e^{\alpha' 2\pi i}P^{\alpha'}.$$

Эти выражения имеют детерминант, отличный от нуля, так как $\alpha-\alpha'$, по предположению, не есть целое число, и, значит, P^α, $P^{\alpha'}$, обратно, выражаются линейно, с постоянными коэффициентами, через P, P', следовательно, через P^β, $P^{\beta'}$; P^γ, $P^{\gamma'}$. Если положим, далее,

$$P^\alpha = \alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'},$$
$$P^{\alpha'} = \alpha'_\beta P^\beta + \alpha'_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha'_\gamma P^\gamma + \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'},$$

введём сокращённые обозначения

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_\beta, \alpha_{\beta'} \\ \alpha'_\beta, \alpha'_{\beta'} \end{matrix}\right\} = (b), \quad \left\{\begin{matrix} \alpha_\gamma, & \alpha_{\gamma'} \\ \alpha'_\gamma, & \alpha'_{\gamma'} \end{matrix}\right\} = (c),$$

и ещё обозначим через $(b)^{-1}$ и $(c)^{-1}$ подстановки, обратные подстановкам (b) и (c), то окажется, что функции $(P^\alpha, P^{\alpha'})$ подвергнутся подстановкам

$$(A) = \left\{\begin{matrix} e^{\alpha 2\pi i}, & 0 \\ 0, & e^{\alpha' 2\pi i} \end{matrix}\right\},$$

$$(B) = (b) \left\{\begin{matrix} e^{\beta 2\pi i}, & 0 \\ 0, & e^{\beta' 2\pi i} \end{matrix}\right\} (b)^{-1}, \qquad (C) = (c) \left\{\begin{matrix} e^{\gamma 2\pi i}, & 0 \\ 0, & e^{\gamma' 2\pi i} \end{matrix}\right\} (c)^{-1}.$$

Так как детерминант сложной подстановки равен произведению детерминантов последовательно выполняемых подстановок, то из равенства $(C)(B)(A) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ следует

$$1 = \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(B) \cdot \operatorname{Det}(C) =$$
$$= e^{(\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma')\,2\pi i} \operatorname{Det}(b) \cdot \operatorname{Det}(b)^{-1} \cdot \operatorname{Det}(c) \cdot \operatorname{Det}(c)^{-1},$$

а так как $\operatorname{Det}(b) \cdot \operatorname{Det}(b)^{-1} = 1$, $\operatorname{Det}(c) \cdot \operatorname{Det}(c)^{-1} = 1$, то

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = \text{целому числу}, \tag{2}$$

с чем не находится в противоречии сделанное выше допущение о том, что сумма показателей равна 1.

Три остальные содержащиеся в $(C)(B)(A) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ равенства дают ещё три условия, налагаемые на (b) и (c); но их легче получить иначе следующим образом.

Если точка x делает положительный обход около 0 и затем около ∞, то пройденный путь образует отрицательный обход около 1. После этого P^α принимает значение, которое равно

$$\alpha_\gamma e^{\gamma 2\pi i} P^\gamma + \alpha_{\gamma'} e^{\gamma' 2\pi i} P^{\gamma'} = (\alpha_\beta e^{-\beta 2\pi i} P^\beta + \alpha_{\beta'} e^{-\beta' 2\pi i} P^{\beta'})\, e^{-\alpha 2\pi i}.$$

Умножим это равенство на произвольный множитель $e^{-\sigma\pi i}$, а равенство

$$\alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'} = \alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'}$$

— на $e^{\sigma\pi i}$, и вычтем; тогда получится (отбрасывая общий множитель)

$$\alpha_\gamma \sin(\sigma - \gamma)\pi\, e^{\gamma\pi i} P^\gamma + \alpha_{\gamma'} \sin(\sigma - \gamma')\pi\, e^{\gamma'\pi i} P^{\gamma'} =$$
$$= \alpha_\beta \sin(\sigma + \alpha + \beta)\pi\, e^{-(\alpha+\beta)\pi i} P^\beta + \alpha_{\beta'} \sin(\sigma + \alpha + \beta')\pi\, e^{-(\alpha+\beta')\pi i} P^{\beta'}.$$

Из подобных же соображений, заменяя всюду α' через α, выведем равенство

$$\alpha'_\gamma \sin(\sigma-\gamma)\pi e^{\gamma\pi i}P^\gamma + \alpha'_{\gamma'} \sin(\sigma-\gamma')\pi e^{\gamma'\pi i}P^{\gamma'} =$$
$$= \alpha'_\beta \sin(\sigma+\alpha'+\beta)\pi e^{-(\alpha'+\beta)\pi i}P^\beta + \alpha'_{\beta'} \sin(\sigma+\alpha'+\beta')\pi e^{-(\alpha'+\beta')\pi i}P^{\beta'},$$

при произвольном σ. Если посредством надлежащего выбора σ уничтожить в этих равенствах одну из функций, например $P^{\gamma'}$, то полученные равенства смогут отличаться только постоянным множителем, так как $\frac{P^\beta}{P^{\beta'}}$ не сводится к постоянной.

Поэтому исключение $P^{\gamma'}$ даёт

$$\frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma} = \frac{\alpha_\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_\beta \sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi e^{-\alpha'\pi i}} = \frac{\alpha_{\beta'} \sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi e^{-\alpha'\pi i}}, \tag{3}$$

и точно так же исключение P^γ даёт

$$\frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}} = \frac{\alpha_\beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi e^{-\alpha'\pi i}} = \frac{\alpha_{\beta'} \sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi e^{-\alpha'\pi i}}. \tag{3}$$

Это и есть четыре искомых условия. Из них получаются отношения дробей $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}$, $\frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$, $\frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}$, $\frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$. Равенство значений отношения $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} : \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$, вытекающих из второго и четвёртого условий, следует легко из $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$ с помощью тождества $\sin s\pi = \sin(1-s)\pi$.

Итак, все величины $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}$, $\frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$, $\frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}$, $\frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$ выражаются с помощью одной из них, например $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}$, и три величины $\alpha'_{\beta'}$, α'_γ, $\alpha'_{\gamma'}$ — с помощью пяти величин α_β, α'_β, $\alpha_{\beta'}$, α_γ, $\alpha_{\gamma'}$. Эти же пять величин зависят (при заданной функции P) от входящих в P^α, $P^{\alpha'}$, P^β, $P^{\beta'}$, P^γ, $P^{\gamma'}$ ещё произвольных множителей (или, скорее, от их отношений) и могут при надлежащем их подборе принять любые заданные значения.

4

Последнее замечание открывает путь к доказательству того, что в двух Г-функциях с одинаковыми показателями составляющие, соответствующие одинаковым показателям, могут отличаться только постоянным множителем.

В самом деле, если P и P_1 — две функции с одинаковыми показателями, то пять величин α_β, $\alpha_{\beta'}$, α_γ, $\alpha_{\gamma'}$ и α_β' у них могут быть приняты одними и теми же, и тогда неизбежно совпадут также $\alpha'_{\beta'}$, α_γ', $\alpha'_{\gamma'}$. Но в таком случае будем иметь одновременно

$$(P^\alpha,\ P^{\alpha'}) = (b)(P^\beta,\ P^{\beta'}) = (c)(P^\gamma,\ P^{\gamma'})$$

и

$$(P_1^\alpha,\ P_1^{\alpha'}) = (b)(P_1^\beta,\ P_1^{\beta'}) = (c)(P_1^\gamma,\ P_1^{\gamma'});$$

следовательно,

$$(P^\alpha P_1^{\alpha'} - P^{\alpha'} P_1^\alpha) = \mathrm{Det}(b)(P^\beta P_1^{\beta'} - P^{\beta'} P_1^\beta) = \mathrm{Det}(c)(P^\gamma P_1^{\gamma'} - P^{\gamma'} P_1^\gamma).$$

Первое из этих трёх выражений, будучи умножено на $x^{-\alpha-\alpha'}$, очевидно, однозначно и конечно в точке $x=0$; точно так же второе выражение, умноженное на $x^{\beta+\beta'}=x^{-\alpha-\alpha'-\gamma-\gamma'+1}$, в точке $x=\infty$ и третье выражение, умноженное на $(1-x)^{-\gamma-\gamma'}$, в точке $x=1$; то же справедливо и для каждого из трёх выражений в любой точке, отличной от 0, ∞, 1. Поэтому

$$(P^\alpha P_1^{\alpha'}-P^{\alpha'}P_1^\alpha)\,x^{-\alpha-\alpha'}(1-x)^{-\gamma-\gamma'}$$

есть всюду непрерывная и однозначная функция, т. е. константа. Далее, она равна 0 при $x=\infty$ и, следовательно, должна быть всюду равна 0.

Отсюда следует:

$$\frac{P_1^{\alpha'}}{P^{\alpha'}}=\frac{P_1^\alpha}{P^\alpha},$$

$$\frac{P_1^\beta}{P^\beta}=\frac{P_1^{\beta'}}{P^{\beta'}}=\frac{\alpha_\beta P_1^\beta+\alpha_{\beta'}P_1^{\beta'}}{\alpha_\beta P^\beta+\alpha_{\beta'}P^{\beta'}}=\frac{P_1^\alpha}{P^\alpha},$$

$$\frac{P_1^\gamma}{P^\gamma}=\frac{P_1^{\gamma'}}{P^{\gamma'}}=\frac{\alpha_\gamma P_1^\gamma+\alpha_{\gamma'}P_1^{\gamma'}}{\alpha_\gamma P^\gamma+\alpha_{\gamma'}P^{\gamma'}}=\frac{P_1^\alpha}{P^\alpha}.$$

Значит, функция $\dfrac{P_1^\alpha}{P^\alpha}$ всюду однозначна и должна быть, кроме того, всюду конечной и потому сводится к постоянной (что и требуется доказать), если только ещё будет установлено, что P^α и $P^{\alpha'}$ не могут в точке, отличной от 0, 1, ∞, одновременно обращаться в нуль.

Для этой цели заметим, что

$$P^\alpha\frac{dP^{\alpha'}}{dx}-P^{\alpha'}\frac{dP^\alpha}{dx}=\mathrm{Det}\,(b)\left(P^\beta\frac{dP^{\beta'}}{dx}-P^{\beta'}\frac{dP^\beta}{dx}\right)=$$
$$=\mathrm{Det}\,(c)\left(P^\gamma\frac{dP^{\gamma'}}{dx}-P^{\gamma'}\frac{dP^\gamma}{dx}\right)$$

и, следовательно, рассматриваемая функция в точках $x=0$, ∞, 1 оказывается порядка малости

$$\alpha+\alpha'-1,\quad \beta+\beta'+1=2-\alpha-\alpha'-\gamma-\gamma',\quad \gamma+\gamma'-1,$$

во всех же других остаётся непрерывной и однозначной, так что функция

$$\left(P^\alpha\frac{dP^{\alpha'}}{dx}-P^{\alpha'}\frac{dP^\alpha}{dx}\right)x^{-\alpha-\alpha'+1}(1-x)^{-\gamma-\gamma'+1}$$

всюду непрерывна и однозначна, значит, сводится к постоянной. Эта постоянная не равна нулю, иначе было бы $\log P^\alpha-\log P^{\alpha'}=\mathrm{const.}$, $\alpha=\alpha'$, вопреки предположению; но, очевидно, значение нуль должно было бы приниматься этой функцией в точках, где P^α и $P^{\alpha'}$ одновременно обращались бы в нуль, так как $\dfrac{dP^\alpha}{dx}$, $\dfrac{dP^{\alpha'}}{dx}$ как производные однозначных и непрерывных функций не обращаются в бесконечность.

Поэтому P^α и $P^{\alpha'}$ в точках, отличных от 0, 1, ∞, одновременно не обращаются в нуль, и мы имеем однозначную функцию

$$\frac{P_1^\alpha}{P^\alpha}=\frac{P_1^{\alpha'}}{P^{\alpha'}}=\frac{P_1^\beta}{P^\beta}=\frac{P_1^{\beta'}}{P^{\beta'}}=\frac{P_1^\gamma}{P^\gamma}=\frac{P_1^{\gamma'}}{P^{\gamma'}},$$

всюду конечную и, следовательно, сводящуюся к постоянной, что и требовалось доказать.

Из доказанного предложения вытекают такие заключения: 1) если две ветви P-функции отличаются не только постоянным множителем, то всякая иная P-функция с теми же показателями выражается через эти ветви линейно, с постоянными коэффициентами; 2) функция, характеризуемая требованиями § 1, определяется с точностью до двух констант; эти последние легко и во всех случаях находятся из значений функции для специальных значений переменной, удобнее всего подстановкой значений, соответствующих точкам ветвления.

Но всегда ли существует функция, удовлетворяющая поставленным требованиям? На этот вопрос здесь, конечно, ещё не даётся ответа. Это выяснится позднее, при построении функции с помощью определённых интегралов и гипергеометрических рядов, для чего не потребуется особого исследования [1].

5

Кроме трансформаций § 2, возможных при любых показателях, непосредственно из определения вытекает возможность следующих двух трансформаций:

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta & \gamma & x \\ \frac{1}{2} & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} -1 & \infty & 1 & \\ \gamma & 2\beta & \gamma & \sqrt{x} \\ \gamma' & 2\beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}, \tag{A}$$

где, согласно предыдущему, должно быть $\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=\frac{1}{2}$, и

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \gamma & x \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \gamma' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} 1 & \rho & \rho^2 & \\ \gamma & \gamma & \gamma & \sqrt[3]{x} \\ \gamma' & \gamma' & \gamma' & \end{matrix}\right\}, \tag{B}$$

где $\gamma+\gamma'=\frac{1}{3}$ и ρ обозначает мнимый корень третьей степени из единицы. Для более удобного обозрения всех функций, которые допускают взаимную сводимость посредством этих трансформаций, целесообразно ввести вместо показателей их разности и, как было выше предложено, обозначать через $P(\alpha-\alpha',\ \beta-\beta',\ \gamma-\gamma',\ x)$ все функции, охватываемые формулой $x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon} P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}$; при этом $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ будут называться первой, второй, третьей разностью показателей.

Из формул § 2 следует, что в функции $P(\lambda, \mu, \nu, x)$ знаки λ, μ, ν можно менять, и, с другой стороны, можно переставлять величины λ, μ, ν между собой. Переменный аргумент при этом принимает одно из шести значений x, $1-x$, $\frac{1}{x}$, $1-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$ и из 48 получающихся таким образом P-функций каждые восемь, отличающиеся только знаками при λ, μ, ν, имеют один и тот же аргумент.

Из указанных в этом параграфе трансформаций (A) и (B) первая применима, если одна из разностей показателей равна $\frac{1}{2}$ или если две разности равны между собой, вторая применима, если две разности равны $\frac{1}{3}$ или если все три равны между собой. Посредством последовательного выполнения этих трансформаций мы убеждаемся, что следующие функции выражаются одна через другую:

$$\text{I.}\quad P\left(\mu, \nu, \frac{1}{2}, x_2\right), \quad P(\mu, 2\nu, \mu, x_1) \quad\text{и}\quad P(\nu, 2\mu, \nu, x_3),$$

где

$$\sqrt{1-x_2}=1-2x_1, \qquad \sqrt{1-\frac{1}{x_2}}=1-2x_3,$$

так что

$$x_2=4x_1(1-x_1)=\frac{1}{4x_3(1-x_3)}.$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} P(\nu, \nu, \nu, x_3), & P\left(\nu, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_2\right), \quad P\left(\frac{\nu}{2}, 2\nu, \frac{\nu}{2}, x_1\right), \\ P\left(\frac{1}{3}, \nu, \frac{1}{3}, x_4\right), & P\left(\frac{1}{3}, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_5\right), \quad P\left(\frac{\nu}{2}, \frac{2}{3}, \frac{\nu}{2}, x_6\right), \end{cases}$$

где $1-\frac{1}{x_4}=\left(\frac{x_3+\rho}{x_3+\rho^2}\right)^3$ и, следовательно, $\frac{1}{x_4}=\frac{3(\rho-\rho^2)x_3(1-x_3)}{(\rho^2+x_3)^3}$,

$$x_4(1-x_4)=\frac{(\rho+x_3)^3(\rho^2+x_3)^3}{27x_3^2(1-x_3)^2}=\frac{(1-x_3(1-x_3))^3}{27x_3^2(1-x_3)^2};$$ далее, согласно I,

$$4x_4(1-x_4)=x_5=\frac{1}{4x_6(1-x_6)}, \quad 4x_3(1-x_3)=x_2=\frac{1}{4x_1(1-x_1)}.$$

$$\text{III.}\quad \begin{cases} P\left(\nu, \nu, \frac{1}{2}, x_2\right), & P(\nu, 2\nu, \nu, x_1), \\ P\left(\frac{1}{4}, \nu, \frac{1}{2}, x_3\right), & P\left(\frac{1}{4}, 2\nu, \frac{1}{4}, x_4\right), \end{cases}$$

где

$$x_3=\frac{1}{4}\left(2-x_2-\frac{1}{x_2}\right)=4x_4(1-x_4), \quad x_2=4x_1(1-x_1).$$

Все эти функции преобразовываются также с помощью общей трансформации, причём разности показателей как угодно могут быть переставлены и снабжены произвольными знаками. Помимо функций II и III, ещё только функция $P\left(\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = P(\nu, 1, \nu)$ (из числа имеющих одну из разностей произвольную) допускает повторение большее число раз трансформаций (A) и (B), и здесь получается

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ \nu & -\nu & 1 & x \end{pmatrix} = \text{const.} \cdot x^{\nu} + \text{const.}',$$

т. е. мы приходим к совсем элементарным формулам.

В самом деле, трансформация (B) применима только к $P(\nu, \nu, \nu)$ или $P\left(\frac{1}{3}, \nu, \frac{1}{3}\right)$, т. е. только к функциям II; трансформация (A) может быть повторена большее число раз, чем в I, только в том случае, если среди величин μ, ν, 2μ, 2ν имеется равная $\frac{1}{2}$ или если допускается одно из равенств $\mu = \nu$, $\mu = 2\nu$, $\nu = 2\mu$. Но допущения $\mu = 2\nu$ или $\nu = 2\mu$ приводят к функциям II, $\mu = \nu$, $2\mu = \frac{1}{2}$, $2\nu = \frac{1}{2}$ — к функциям III, наконец, $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$ — к функции $P\left(\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Число различных выражений, которое посредством этих трансформаций получается для каждой из функций I—III, можно установить, если принять во внимание, что в рассматриваемых P-функциях в качестве переменной проходят все корни тех уравнений, которыми они определяются, и что каждый корень принадлежит к системе 6 значений, которые могут быть получены путём общей трансформации.

В случае I оба значения x_1 и x_3, соответствующие данному x_2, приводят к одной и той же системе 6 значений, так что каждая из функций I представляется в виде P-функции $6 \cdot 3 = 18$ способами с различными переменными.

В случае II оба значения x_6 и x_4, соответствующие данному значению x_5, 6 значений x_3 и из 6 значений x_1 по два приводят к одной и той же системе 6 значений, тогда как три значения x_2 — к трём различным системам 6 значений. Итак, x_1 и x_2 дают по три, а x_3, x_4, x_5, x_6 — по одной системе 6 значений, так что все вместе дают $6 \cdot 10 = 60$ значений, чем и определяется число представлений функций II.

Наконец, в случае III x_3, два значения x_2, два значения x_4 и из четырёх значений x_1 по два дают систему из 6 значений, так что каждая из функций III допускает число представлений, равное $6 \cdot 5 = 30$.

В каждой P-функции можно, не меняя переменной, изменять как угодно знаки у разностей показателей; таким образом, так как ни одна из разностей не равна нулю, одна и та же функция может быть представлена 8 различными способами как P-функция с одной и той же переменной. Итак, всего представлений оказывается: в случае I $8 \cdot 6 \cdot 3 = 144$, в случае II $8 \cdot 6 \cdot 10 = 480$, в случае III $8 \cdot 6 \cdot 5 = 240$ [5].

6

При изменении всех показателей P-функции на целые числа выражения в равенствах (3) § 3

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\,\pi e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\,\pi e^{-\alpha'\pi i}}, \quad \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\,\pi e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\,\pi e^{-\alpha'\pi i}},$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\,\pi e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\,\pi e^{-\alpha'\pi i}}, \quad \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\,\pi e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\,\pi e^{-\alpha'\pi i}}$$

остаются неизменными.

Поэтому, если в функциях $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}$, $P_1\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 & x\end{pmatrix}$ взаимно соответствующие показатели α_1 и α и т. д. различаются на целые числа, то можно считать восемь величин $(\alpha_\beta)_1$, $(\alpha'_\beta)_1$, $(\alpha_{\beta'})_1, \ldots$ равными восьми величинам α_β, α'_β, $\alpha_{\beta'}, \ldots$, так как из равенства пяти произвольных вытекает равенство трёх остальных.

Применяя тот же метод рассуждений, что и в § 4, получаем

$$P^{\alpha}P_1^{\alpha'_1} - P^{\alpha'}P_1^{\alpha_1} = \operatorname{Det}(b)\,(P^{\beta}P_1^{\beta'_1} - P^{\beta'}P_1^{\beta_1}) = \operatorname{Det}(c)\,(P^{\gamma}P_1^{\gamma'_1} - P^{\gamma'}P_1^{\gamma_1});$$

далее, обозначая через $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ту величину из каждой пары

$$\alpha+\alpha'_1 \text{ и } \alpha_1+\alpha'; \quad \beta+\beta'_1 \text{ и } \beta_1+\beta'; \quad \gamma+\gamma'_1 \text{ и } \gamma_1+\gamma',$$

которая на целое положительное число меньше, чем другая, убедимся, что функция

$$(P^{\alpha}P_1^{\alpha'_1} - P^{\alpha'}P_1^{\alpha_1})\, x^{-\bar{\alpha}}\, (1-x)^{-\bar{\gamma}}$$

однозначна и конечна как в точках $x=0$ и $x=1$, так и во всех остальных точках, кроме $x=\infty$, в этой же последней бесконечна порядка $-\bar{\alpha}-\bar{\gamma}-\bar{\beta}$ и, следовательно, представляет собой целую функцию F степени $-\bar{\alpha}-\bar{\beta}-\bar{\gamma}$.

Обозначим теперь, как раньше, разности показателей $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ через λ, μ, ν. Нетрудно понять, прежде всего, что, когда все показатели изменяются на целые числа, сумма их разностей изменяется на чётное число. Действительно, она превосходит сумму всех показателей (неизменно равную 1) на $-2(\alpha'+\beta'+\gamma')$, а эта последняя величина может меняться только на чётные числа. Разности показателей могут изменяться на любые целые числа, лишь бы их сумма была чётной.

Обозначим, далее, $\alpha_1-\alpha_1'$, $\beta_1-\beta_1'$, $\gamma_1-\gamma_1'$ через λ_1, μ_1, ν_1 и абсолютные значения $\lambda-\lambda_1$, $\mu-\mu_1$, $\nu-\nu_1$ через $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$, $\Delta\nu$; тогда та из величин $\alpha+\alpha_1'$ и $\alpha'+\alpha_1$, которая на положительное число $\Delta\lambda$ меньше, чем другая, равна

$$\frac{\alpha+\alpha_1'+\alpha'+\alpha_1}{2}-\frac{\Delta\lambda}{2},$$

так что

$$-\bar{\alpha}=\frac{\Delta\lambda}{2}-\frac{\alpha+\alpha_1'+\alpha'+\alpha_1}{2};$$

точно так же

$$-\bar{\beta}=\frac{\Delta\mu}{2}-\frac{\beta+\beta_1'+\beta'+\beta_1}{2},$$

$$-\bar{\gamma}=\frac{\Delta\nu}{2}-\frac{\gamma+\gamma_1'+\gamma'+\gamma_1}{2}.$$

Поэтому степень целой функции F, равная сумме этих величин, оказывается равной

$$\frac{\Delta\lambda+\Delta\mu+\Delta\nu}{2}-1.$$

7

Пусть теперь $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}$, $P_1\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & x\end{pmatrix}$, $P_2\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' & x\end{pmatrix}$ — три функции, у которых взаимно соответствующие показатели отличаются на целые числа; тогда из последнего результата с помощью тождества

$$P^{\alpha}(P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2'}-P_1^{\alpha_1'}P_2^{\alpha_2})+P_1^{\alpha_1}(P_2^{\alpha_2}P^{\alpha'}-P_2^{\alpha_2'}P^{\alpha})+P_2^{\alpha_2}(P^{\alpha}P_1^{\alpha_1'}-P^{\alpha'}P_1^{\alpha_1})=0$$

вытекает то важное обстоятельство, что между P^{α}, $P_1^{\alpha_1}$ и $P_2^{\alpha_2}$ имеется линейное однородное соотношение с коэффициентами целыми рациональными относительно x, и что поэтому

«все P-функции, у которых соответствующие друг другу показатели отличаются на целые числа, выражаются через две какие-нибудь из них линейно, с коэффициентами, рациональными относительно x».

Из соображений, приведённых при доказательстве этой теоремы, следует, в частности, что вторая производная P-функции выражается через самую функцию и её первую производную линейно с рациональными относительно x коэффициентами, так что всякая P-функция удовлетворяет некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка.

Ограничимся, чтобы по возможности упростить вывод этого уравнения, предположением $\gamma=0$ (это всегда может быть достигнуто посредством приёмов, указанных в § 2), и положим $P = y$, $P^{\alpha} = y'$, $P^{\alpha'} = y''$. Тогда оказывается, что функции

$$y' \frac{dy''}{d\log x} - y'' \frac{dy'}{d\log x},$$

$$\frac{d^2y'}{d\log x^2} y'' - \frac{d^2y''}{d\log x^2} y',$$

$$\frac{dy'}{d\log x} \frac{d^2y''}{d\log x^2} - \frac{dy''}{d\log x} \frac{d^2y'}{d\log x^2}$$

будучи умноженными на $x^{-\alpha-\alpha'}(1-x)^{-\gamma'+2}$, однозначны и конечны для всех конечных значений x, а в точке $x = \infty$ бесконечно велики первого порядка и что, кроме того, первое из названных произведений в точке $x = 1$ бесконечно мало первого порядка. Поэтому

$$y = \text{const.}' y' + \text{const.}'' y''$$

удовлетворяет уравнению вида

$$(1-x)\frac{d^2y}{d\log x^2} - (A + Bx)\frac{dy}{d\log x} + (A' - B'x) y = 0,$$

в котором A, B, A', B' — константы, которые ещё следует определить.

Посредством метода неопределённых коэффициентов оказывается возможным найти разложение решения этого уравнения по возрастающим или убывающим степеням переменной вида $\sum a_n x^n$, причём показатель μ начального члена в первом случае (когда он наименьший) определяется из уравнения

$$\mu\mu - A\mu + A' = 0,$$

а во втором (когда он наибольший) — из уравнения

$$\mu\mu + B\mu + B' = 0.$$

Корни первого уравнения должны быть α и α', корни второго — β и — β', и потому

$$A = \alpha + \alpha', \quad A' = \alpha\alpha',$$
$$B = \beta + \beta', \quad B' = \beta\beta',$$

так что функция $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix} = y$ удовлетворяет уравнению

$$(1-x)\frac{d^2y}{d\log x^2} - (\alpha + \alpha + (\beta + \beta')x)\frac{dy}{d\log x} + (\alpha\alpha' - \beta\beta' x) y = 0.$$

Коэффициенты, далее, определяются через один из них по рекуррентной формуле

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+\beta)(n+\beta')}{(n+1-\alpha)(n+1-\alpha')},$$

откуда получается

$$a_n=\frac{\text{const.}}{\Pi(n-\alpha)\,\Pi(n-\alpha')\,\Pi(-n-\beta)\,\Pi(-n-\beta')}.$$

Итак, ряд

$$y=\text{const.}\sum\frac{x^n}{\Pi(n-\alpha)\,\Pi(n-\alpha')\,\Pi(-n-\beta)\,\Pi(-n-\beta')},$$

как в том случае, когда показатели, начиная с α или α', идут возрастая, так и в случае, когда показатели, начиная с $-\beta$ или $-\beta'$, идут убывая, даёт решение дифференциального уравнения; именно, даёт те частные решения, которые раньше были обозначены через P^{α}, $P^{\alpha'}$, P^{β}, $P^{\beta'}$.

По Гауссу, который обозначил через $F(a, b, c, x)$ ряд, в котором первый член равен 1, а отношение $(n+1)$-го члена к предыдущему равно $\frac{(n+a)\,(n+b)}{(n+1)\,(n+c)}x$, этот результат для простейшего случая, когда $\alpha=0$, выражается следующим образом:

$$P^{\alpha}\begin{pmatrix}0 & \beta & 0 & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}=\text{const.}\,F(\beta,\ \beta',\ 1-\alpha',\ x),$$

или

$$F(a,\ b,\ c,\ x)=P^{\alpha}\begin{pmatrix}0 & a & 0 & \\ 1-c & b & c-a-b & x\end{pmatrix}.$$

Отсюда же легко получается представление P-функции через определённый интеграл, если в общем члене ряда вместо Π-функций ввести эйлеровы интегралы второго рода и затем переставить знаки суммирования и интегрирования. Таким образом, устанавливается, что интеграл

$$x^{\gamma}(1-x)^{\gamma}\int s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}\,(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}\,(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\,ds,$$

распространённый по произвольному пути от одного из чисел 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ до другого, представляет собой функцию $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}$ и притом при надлежащем подборе пределов и пути интегрирования обращается в любую из функций P^{α}, $P^{\beta}, \ldots, P^{\gamma'}$. Но можно и непосредственно показать, что подобного рода интеграл обладает характеристическими свойствами такой функции. Это будет сделано в дальнейшем, когда представление P-функции через определённый интеграл будет использовано для определения множителей P^{α}, $P^{\alpha'}, \ldots$, остающихся ещё произвольными. Я здесь ещё только замечу, что в случае, если функция под интегралом около одного из значений 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ становится бесконечной столь высокого порядка, что интегрирование до соответствующего предела становится невозможным, то для того, чтобы всё же можно было пользоваться интегралом как средством представления P-функции, необходимо ещё некоторое изменение пути интегрирования.

8

Вследствие равенств, полученных в § 2 и § 7,

$$P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\ P^{\alpha}\begin{pmatrix}0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & x\end{pmatrix} =$$

$$= \text{const.}\ x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\ F(\beta+\alpha+\gamma,\ \beta'+\alpha+\gamma,\ \alpha-\alpha'+1,\ x),$$

из всякого представления данной функции в виде P-функции вытекает возможность её разложения в гипергеометрический ряд, расположенный по возрастающим степеням переменной в этой P-функции. Согласно § 5, имеется 8 представлений через P-функции с одной и той же переменной, которые получаются одно из другого перестановками взаимно связанных показателей, например, 8 представлений с переменной x. Из них каждые два, возникающие при перестановке второй пары, β и β' дают одно и то же разложение; таким образом, получаются четыре разложения по возрастающим степеням x, из которых два, образующихся вследствие перестановки γ и γ', представляют функцию P^{α}, а два других $P^{\alpha'}$. Эти четыре разложения сходятся при том условии, что модуль x меньше 1, и расходятся, если он больше 1, тогда как четыре ряда, расположенных по убывающим степеням x и представляющих P^{β} и $P^{\beta'}$, обнаруживают поведение противоположного характера. В случае, если модуль x равен 1, следует из теории ряда Фурье, что ряды перестают сходиться, если в точке $x=1$ функция имеет бесконечность порядка выше, чем первого, и остаются сходящимися, если названная бесконечность порядка ниже 1 или функция остаётся конечной. Итак, в этом случае из 8 рядов, расположенных по степеням x, сходится лишь половина, если действительная часть $\gamma'-\gamma$ не лежит между -1 и $+1$, и сходятся все, если это имеет место.

На основании изложенного одна и та же P-функция представима 24-мя различными гипергеометрическими рядами, расположенными по возрастающим или убывающим степеням трёх различных аргументов; из этих рядов для данного значения x сходящимися оказывается по меньшей мере половина, т. е. 12. В случае I § 5 это число надо умножить на 3, в случае II — на 10, в случае III — на 5. Для числового подсчёта оказываются большей частью наиболее подходящими те ряды, в которых четвёртый аргумент имеет наименьший модуль.

Что касается представлений P-функции с помощью определённых интегралов, которые получаются из представлений, указанных в конце предыдущего параграфа, посредством трансформаций § 5, то эти представления все различны. Таким образом, в общем случае имеется 48, в случае I 144, в случае II 480 и в случае III 240 определённых интегралов, которые представляют одну и ту же составляющую P-функции и, следовательно, отношения которых не зависят от x. Из них каждые 24, получающиеся одни из другого посредством чётного числа перестановок в показателях, могут быть преобразованы один в другой посредством такой замены переменной интегрирования s, при которой три каких-то значения из следующих: $0,\ 1,\ \infty,\ \frac{1}{x}$, переходят в значения $0,\ 1,\ \infty$. Для установления остальных равенств методами интегрального исчисления, поскольку я исследовал, нужна замена переменных в кратных интегралах.

VII. ДВЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА, КАСАЮЩИЕСЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Как известно, всякий интеграл линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка может быть выражен линейно, с постоянными коэффициентами, через n взаимно независимых частных интегралов. Если коэффициенты дифференциального уравнения являются рациональными функциями независимого переменного x, то всякая ветвь (вообще говоря, многозначной) функции, удовлетворяющей уравнению, выразится линейно, с постоянными коэффициентами, через n функций, однозначно определённых для каждого значения x и в таком случае, конечно, претерпевающих разрывы при переходе через каждую из линий некоторой системы. Если же коэффициенты оказываются алгебраическими функциями от x, именно, зависят рационально от x и некоторой μ-значной алгебраической функции от x, то каждой ветви этой μ-значной функции сопоставляется группа n взаимно независимых частных интегралов, так что в этом случае каждая ветвь любого интеграла уравнения представляется линейно через, самое большее, μn однозначных функций, причём, однако, в этом выражении только n функций будут принадлежать одной и той же группе. Так как всякое неоднородное линейное дифференциальное уравнение легко может быть заменено однородным, на единицу большего порядка, то из предшествующих соображений вытекает, что следующие далее теоремы охватывают все линейные дифференциальные уравнения с алгебраическими коэффициентами.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — функции переменной x, регулярные и принимающие конечные значения во всей плоскости этой переменной, кроме точек $a, b, c, \ldots, g$, и пусть при обходе x вокруг одной из этих точек ветвления они переходят в некоторые линейные функции их прежних значений, с постоянными коэффициентами.

С целью более точного их определения разделим комплексную плоскость на две области замкнутой линией, проходящей по порядку через все точки ветвления $(g, \ldots, c, b, a)$, так что в каждой из областей функции будут совершенно обособлены и непрерывны, и условимся считать заданными значения функций в области, находящейся в положительной стороне от проведённой линии. При положительном обходе x около a пусть y_1 переходит в $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^{(1)} y_i$, y_2 в $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^{(2)} y_i, \ldots, y_n$ в $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^{(n)} y_i$, и аналогично при положительном обходе около b y_ν переходит в $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^{(\nu)} y_i$ и т. д.; наконец, при положительном обходе x около g y_ν переходит в $\sum\limits_{i=1}^{n} G_i^{(\nu)} y_i$.

Обозначим теперь ради краткости систему n значений $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ через (y), систему nn коэффициентов

$$\begin{array}{cccc} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \ldots & A_n^{(1)}, \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & \ldots & A_n^{(2)}, \\ . & . & . & . \;, \\ A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & \ldots & A_n^{(n)} \end{array}$$

через (A), систему коэффициентов B через $(B), \ldots$, систему коэффициентов G через (G) и значения $\sum A_i^{(1)} y_i$, $\sum A_i^{(2)} y_i$, $\ldots$, $\sum A_i^{(n)} y_i$, получающиеся из (y) посредством системы коэффициентов (A), через $(A)(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (A)(y)$; тогда упомянутые системы коэффициентов оказываются связанными условием

$$(G)(F) \ldots (B)(A) = (0), \tag{1}$$

причём через (0) обозначена система коэффициентов, не меняющая значений рассматриваемых функций, т. е. такая, в которой коэффициенты, стоящие на диагонали, идущей вниз и направо, равны 1, все же остальные равны 0. В самом деле, если x движется вдоль всей граничной линии таким образом, что проходит по положительной стороне от одной точки ветвления до другой и всякий раз обходит вокруг каждой точки ветвления в положительном направлении, то функции (y) последовательно переходят в $(G)(y)$, $(G)(F)(y)$, наконец, в $(G)(F) \ldots (B)(A)(y)$. Но тот же результат должен получиться, если x пробегает всю границу по отрицательной её стороне (т. е. обходит всю границу с отрицательной стороны лежащей области), а в этом случае $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ снова примут их первоначальные значения, так как в упомянутой области они однозначны.

Условимся обозначать систему из n функций, обладающих только что указанными свойствами, через

$$Q\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & g & x \\ A & B & C & & G & \end{pmatrix}.$$

Станем считать принадлежащими к одному классу все те системы, для которых точки ветвления и соответствующие подстановки — одни и те же и притом обладают свойством (1), что (как скоро выяснится) в самом деле имеет место для бесконечного множества систем. Согласно теореме, которая легко доказывается и не раз была применяема Якоби, каждая подстановка, вообще говоря, разлагается на три подстановки, из которых последняя — обратная по отношению к первой, а в средней все коэффициенты, не стоящие на диагонали, равны 0, так что благодаря ей каждая из величин, к которым она применяется, только умножается на некоторое число. Итак, можно положить

$$(A)=(\alpha)\left\{\begin{matrix} \lambda_1, & 0 & ,\ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots & \lambda_n \end{matrix}\right\}(\alpha)^{-1},$$

причём $(\alpha)^{-1}$ обозначает подстановку, обратную к (α). Величины λ являются n корнями уравнения n-й степени, зависящего только от (A) [1]. В случае, если это уравнение имеет равные корни, следовало бы среднюю подстановку несколько видоизменить; но для упрощения дела мы пока этот случай исключим и допустим, что при разложении подстановок (A), (B), ..., (G) он не встречается [2]. Подстановка (α) может быть заменена подстановкой

$$(\alpha)\left\{\begin{matrix} l_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & l_2, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots, & l_n \end{matrix}\right\},$$

посредством прибавления подстановки, сводящейся к умножению на постоянные числа; обратно, все подстановки этого типа, как показывают уравнения, которыми определяется (α), могут быть представлены в указанной форме.

При положительном обходе вокруг точки a значения функций y из $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ переходят в $(A)(p)$. Поэтому значения функций

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n)=(\alpha)^{-1}(y),$$

образованных из (y) посредством подстановки $(\alpha)^{-1}$, переходят в

$$(\alpha)^{-1}(A)(p)=\left\{\begin{matrix} \lambda_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots, & \lambda_n \end{matrix}\right\}(\alpha)^{-1}(p),$$

т. е. $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ переходят в $(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \ldots, \lambda_n z_n)$.

Если функция z при положительном обходе около точки a приобретает постоянный множитель λ, то посредством умножения на некоторую степень $(x-a)$ она может быть превращена в функцию, однозначную в окрестности a. В самом деле, $(x-a)^{\mu}$ при обходе около a умножается на $e^{\mu 2\pi i}$; если определим μ таким образом, чтобы было $e^{\mu 2\pi i}=\lambda$, т. е. положим $\mu=\frac{\log\lambda}{2\pi i}$, то $z(x-a)^{-\mu}$ становится функцией, однозначной около $x=a$. Значит, эта функция разлагается по целым степеням $(x-a)$ и, следовательно, z — по степеням, отличающимся от μ на целые числа.

Вследствие предыдущего $z_1, z_2, \ldots, z_n$ разлагаются по степеням $x-a$, показатели которых имеют вид

$$\frac{\log\lambda_1}{2\pi i}+m,\quad \frac{\log\lambda_2}{2\pi i}+m,\ \ldots,\quad \frac{\log\lambda_n}{2\pi i}+m,$$

где m обозначает целое число. Мы допустим теперь, что функции y нигде не обращаются в бесконечность бесконечно большого порядка, так что эти ряды в сторону убывающих степеней оборвутся, и обозначим через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ наименьшие степени в этих рядах, так что

$$z_1(x-a)^{-\mu_1}, \ldots, z_n(x-a)^{-\mu_n}$$

имеют конечные, отличные от нуля значения. Очевидно, ни одна из разностей между величинами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ не равна целому числу, так как все величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны; с другой стороны, значения соответствующих показателей для двух систем, принадлежащих одному и тому же классу, будут различаться на целые числа, так как постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ полностью определяются подстановкой (A). Эти показатели могут быть употребляемы для того, чтобы различать и классифицировать системы функций, принадлежащих одному классу, и в случае, если они известны, достаточно вместо (A) задать подстановку (α), так как через них определяются величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Поэтому с целью более точно характеризовать систему $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ мы будем пользоваться выражением

$$Q\left\{\begin{matrix} a & b & \ldots & g & \\ (\alpha) & (\beta) & \ldots & (\theta) & \\ \mu_1 & \nu_1 & \ldots & \rho_1 & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \mu_n & \nu_n & \ldots & \rho_n & \end{matrix}\right\},$$

в котором величины, стоящие на второй, ..., на n-й вертикали имеют относительно точек ветвления $b, \ldots, g$ то же значение, что и величины первой вертикали относительно точки a. При этом само собой разумеется, что каждая система может быть рассматриваема как частный случай другой системы, в которой соответствующие показатели (все или некоторые из них) будут меньшими.

Теперь нетрудно доказать, что между любыми $n+1$ системами, принадлежащими одному классу, существует линейное однородное соотношение с коэффициентами, являющимися целыми функциями от x. Будем отмечать различные величины в этих $n+1$ системах верхними индексами. Допуская, что между ними имеют место n соотношений

$$\begin{aligned}
&a_0 y_1 + a_1 y_1^{(1)} + \ldots + a_n y_1^{(n)} = 0\\
&a_0 y_2 + a_1 y_2^{(1)} + \ldots + a_n y_2^{(n)} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0 y_n + a_1 y_n^{(1)} + \ldots + a_n y_n^{(n)} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

мы заключаем, что величины $a_0, a_1, \ldots, a_n$ пропорциональны тем детерминантам, которые получаются, если в системе $n(n+1)$ величин y выбрасывать по очереди 1-ю, 2-ю, ..., $(n+1)$-ю вертикаль. При положительном обходе вокруг точки a такой детерминант $\sum \pm y_1^{(1)} y_2^{(2)} \ldots y_n^{(n)}$ умножается на $\operatorname{Det}(A)$, и, с другой стороны, в точке $x=a$ не может обращаться в бесконечность бесконечно большого порядка; следовательно, он разлагается по степеням $x-a$, возрастающим на 1. Чтобы установить наименьший показатель в этом разложении, можно представить детерминант в виде

$$\operatorname{Det}(\alpha) \sum \pm z_1^{(1)} z_2^{(2)} \ldots z_n^{(n)}.$$

Первый член $z_1^{(1)} z_2^{(2)} \ldots z_n^{(n)}$ в последнем детерминанте равен величине $(x-a)^{\mu_1^{(1)}+\mu_2^{(2)}+\ldots+\mu_n^{(n)}}$, умноженной на функцию, которая в точке $x=a$ конечна и отлична от нуля. Поэтому самый низкий показатель в разложении этого члена по степеням $x-a$ равен $\mu_1^{(1)}+\mu_2^{(2)}+\ldots+\mu_n^{(n)}$; отсюда посредством перестановки верхних индексов получаются самые низкие показатели в разложениях других членов. Искомый показатель, вообще говоря, равен наименьшему из полученных таким образом значений или во всяком случае, не меньше его. Если обозначим наименьшее из этих значений через $\overline{\mu}$, аналогично для второй точки ветвления через $\overline{\nu}, \ldots$ и для последней — через $\overline{\rho}$, то окажется, что

$$\sum \pm y_1^{(1)} y_2^{(2)} \ldots y_n^{(n)} \cdot (x-a)^{-\overline{\mu}} (x-b)^{-\overline{\nu}} \ldots (x-g)^{-\overline{\rho}}$$

есть такая функция переменной x, которая при всех конечных комплексных значениях x однозначна и конечна, а при $x=\infty$ становится бесконечно большой порядка $\leqslant -(\overline{\mu}+\overline{\nu}+\ldots+\overline{\rho})$ и, следовательно, представляет собой целую функцию степени $-(\overline{\mu}+\overline{\nu}+\ldots+\overline{\rho})$ [3]. Эта последняя величина, очевидно (если сама функция не обращается в нуль тождественно), должна быть целым неотрицательным числом.

Частные детерминанты, которым пропорциональны величины a_0, $a_1, \ldots, a_n$, относятся, таким образом, как целые функции, умноженные на некоторые степени $x-a$, $x-b,\ldots,x-g$, показатели которых в различных детерминантах отличаются на целые числа. Сами величины a_0, $a_1,\ldots,a_n$ относятся поэтому как целые функции и таковыми могут быть заменены в уравнениях (2), чем и доказывается теорема.

Производные функций $(y_1, y_2,\ldots,y_n)$ по x, очевидно, образуют систему, принадлежащую тому же классу, так как производные функций (A) $(y_1, y_2,\ldots,y_n)$, в которые при положительном обходе вокруг a переходят функции $(y_1, y_2,\ldots,y_n)$ оказываются равными

$$(A)\left(\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx},\ldots,\frac{dy_n}{dx}\right),$$

поскольку коэффициенты в (A) — постоянные. Вследствие этого замечания из только что доказанной теоремы вытекают такие следствия:

«*Функции y, образующие систему, удовлетворяют дифференциальному уравнению n-го порядка, коэффициенты которого — целые (рациональные) функции от x.*»

Кроме того:

«*Каждая система, принадлежащая тому же классу, выражается линейно, с рациональными коэффициентами, через эти функции и их производные до $(n-1)$-го порядка.*»

Второе следствие позволяет установить общий вид системы данного класса, откуда сразу видно, что число всех таких систем (как уже было указано раньше) бесконечно; здесь же мы применим это следствие к разысканию всех систем, у которых не только подстановки, но и показатели одни и те же. Для любой системы $Y_1, Y_2,\ldots,Y_n$ с теми же подстановками и теми же показателями, что и $y_1, y_2,\ldots,y_n$, мы получаем по предыдущему n линейных соотношений вида

$$\begin{gathered}
c_0Y_1 = b_0y_1 + b_1y_1' + \ldots + b_{n-1}y_1^{(n-1)},\\
c_0Y_2 = b_0y_2 + b_1y_2' + \ldots + b_{n-1}y_2^{(n-1)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_0Y_n = b_0y_n + b_1y_n' + \ldots + b_{n-1}y_n^{(n-1)},
\end{gathered}$$

причём коэффициенты — целые функции от x, и производные обозначены согласно Лагранжу. Функция c_0 зависит только от функций y, и для степеней функций b имеется конечный максимум, так что они имеют конечное число коэффициентов. Чтобы, обратно, получающиеся из этих соотношений функции $Y_1, Y_2,\ldots,Y_n$ обладали требуемыми свойствами, названные коэффициенты необходимо должны быть таковы, чтобы показатели, соответствующие точкам ветвления, у них были не ниже, чем у функций y, и чтобы для всех других значений x они оставались конечными. Из этих условий получается система линейных однородных уравнений для коэффициентов при степенях x в функциях b. Решение этих уравнений, если они достаточны для определения коэффициентов, даёт const. (y) в качестве самого общего вида функций (Y), в противном же случае получается решение вида

$$Y_1 = ky_1 + k_1 Y_1^{(1)} + \ldots + k_m Y_1^{(m)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_n = ky_n + k_1 Y_n^{(1)} + \ldots + k_m Y_n^{(m)},$$

где $k, k_1, \ldots, k_m$ — произвольные постоянные. Что касается этих постоянных, то одну за другой каждую из них можно подбирать таким образом, чтобы начальный член в разложении одной из функций $(\alpha)^{-1}(Y)$, $(\beta)^{-1}(Y), \ldots, (\theta)^{-1}(Y)$ обращался в нуль, причём всякий раз сумма показателей увеличится по крайней мере на единицу, так что в итоге увеличится по крайней мере на m единиц, а число постоянных на столько же уменьшится. Таким образом, из каждой системы n функций можно получить новую с более высокими показателями, которая уже будет определена подстановками и показателями в её характеристике с точностью до постоянного множителя, общего для всех функций системы. Мы определим ещё и этот множитель, если потребуем, чтобы коэффициент при наинизшей степени $x-a$ в разложении первой из функций $(\alpha)^{-1}(y)$ равнялся единице, и тогда функции y будут определены однозначно.

Достаточно [4] внимательно вдуматься в то, как зависит поведение этих функций от положения одной из точек ветвления, например a, чтобы притти к заключению о том, что величины y образуют такую же систему функций от переменной a, как и от переменной x, но с точками ветвления $b, c, d, \ldots, g, x$ и с подстановками, составленными из (A), $(B), \ldots, (F)$. В случае, если не оказывается возможным добиться того, чтобы при изменении a все подстановки оставались неизменными (так как число содержащихся в них произвольных констант меньше, чем число необходимых для этого условий), то можно рассматривать данную систему как особый случай системы с более низкими показателями, в которой для этих специальных значений $a, b, \ldots, g$ обращаются в нуль коэффициенты нескольких начальных членов в разложениях $(\alpha)^{-1}(y)$, $(\beta)^{-1}(y), \ldots, (\theta)^{-1}(y)$.

Отсюда следует, что величины $y_1, y_2, \ldots, y_n$, рассматриваемые как функции p переменных $a, b, \ldots, g, x$, таковы, что, когда все переменные снова принимают свои начальные значения, они или также снова принимают свои начальные значения, или же обращаются в линейные комбинации своих начальных значений, причём система постоянных коэффициентов подстановки составляется некоторым образом из $p-2$ произвольно заданных систем (A), (B), $(C), \ldots, (F)$.

Я не буду здесь останавливаться на дальнейшем исследовании этих функций многих переменных и тех методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений, которые предоставляет в наше распоряжение последняя теорема, и ещё только замечу, что интегралы от алгебраических функций могут считаться частным случаем рассмотренных здесь функций и что применение изложенных принципов к одному из интегралов такого рода приводит к рассмотрению функций, которые представляются θ рядами общего вида с произвольными модулями периодичности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ближайшей задачей строящейся на этих принципах теории линейных дифференциальных уравнений будет разыскание простейших систем каждого класса [5]. Для этого придётся выяснить точнее вид дифференциального уравнения. Если под функциями $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ станем понимать, следуя Лагранжу, последовательные производные функции y, то уравнения (2) представят собой дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции. Степень целых функций, являющихся коэффициентами в уравнениях, определяется следующим образом: при каждом дифференцировании по x все показатели характеристики (предполагая, что ни один из них не есть целое число) уменьшаются на единицу. Поэтому выражение

$$\sum \pm (y_1 y_2^{(1)} \ldots y_n^{(n-1)})(x-a)^{-\bar{\mu}}(x-b)^{-\bar{\nu}} \ldots (x-g)^{-\bar{\rho}} = X_0,$$

где положено

$$\bar{\mu} = \sum_i \mu_i - \frac{n(n-1)}{2}, \quad \bar{\nu} = \sum_i \nu_i - \frac{n(n-1)}{2}, \ldots, \quad \bar{\rho} = \sum_i \rho_i - \frac{n(n-1)}{2},$$

оказывается однозначным и конечным. При $x = \infty$ функции y остаются однозначными и конечными, и потому выражение $\sum \pm y_1 y_2^{(1)} \ldots y_n^{(n-1)}$ бесконечно мало порядка $n(n-1)$. Поэтому степень целой функции X_0 равна

$$r = (m-2)\frac{n(n-1)}{2} - s,$$

где m — число точек ветвления, а s — сумма показателей в характеристике.

Если в системе $n(n+1)$ величин y вместо последней вертикали выбросить $(n+1-t)$-ю вертикаль, то, вообще говоря, образованный из них детерминант придётся умножать на степени $x-a$, $x-b, \ldots, x-g$, увеличенные на t, и он тогда станет целой функцией степени $r+(m-1)t$ [только при $t=n$ степень его будет $r+(m-2)n$].

Поэтому, обозначая произведение $(x-a)(x-b)\ldots(x-g)$ через ω, дифференциальному уравнению можно придать вид

$$X_n y + \omega X_{n-1} y' + \ldots + \omega^n X_0 y^{(n)} = 0,$$

где X_t обозначает целую рациональную функцию степени $r+(m-1)t$. [X_n — степени $r+(m-2)n$].

Исследуем теперь, каким условиям нужно подчинить коэффициенты функций X_t для того, чтобы ветвление могло быть только в точках $a, b, \ldots, g$ и показатели в этих точках имели данные значения. Ветвление отсутствует в том и только в том случае, если все решения дифференциального уравнения разлагаются по целым степеням приращения x или если разложение y по формуле Маклорена содержит n произвольных постоянных. Это всегда имеет место, если a_n отлично от нуля. Остаётся рассмотреть случай $a_n=0$. Если напишем дифференциальное уравнение в виде

$$b_0 y + b_1 (x-a) y' + b_2 (x-a)^2 y'' + \ldots + b_n (x-a)^n y^{(n)} = 0,$$

то, для того чтобы функция y удовлетворяла сформулированному выше требованию, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ должны быть корнями уравнения

$$b_0 + b_1 \mu + \ldots + b_n \mu (\mu - 1) \ldots (\mu - n + 1) = 0.$$

Это даёт n условий, налагаемых на функции X, и также обусловливает то, что b_n не обращается в нуль при $x=a$ (так как величины μ конечны и различны между собой). Аналогичные рассуждения справедливы относительно других корней $b, c, \ldots, g$ уравнения $\omega=0$. Итак, $X_0=0$ и $\omega=0$ не могут иметь общих корней.

Если (для некоторого корня уравнения $X_0=0$) $a_n=0$, но $a_{n-1} \neq 0$, то (для него) $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$ могут быть выбраны произвольно, но тогда $y^{(n-1)}$ определяется дифференциальным уравнением

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

так что $n-1$ произвольных констант входят в $n-1$ первых членов маклоренова ряда, последняя же константа — не раньше, чем в n-м. Допустим, что она входит впервые в $(n+h)$-й член.

Если в уравнение, получающееся после h-кратного дифференцирования последнего уравнения,

$$a_n y^{(n+h)} + (h a'_n + a_{n-1}) y^{(n+h-1)} + \ldots = 0$$

подставим значения $y^{(n+h-2)}, \ldots, y^{(n-1)}$, найденные при решении системы уравнений, полученных после дифференцирований низших кратностей, то коэффициенты при $y^{(n+h-1)}, y^{(n-2)}, y^{(n-3)}, \ldots, y$ обращаются в нуль, так как эти величины независимы между собой. Итак, мы получаем

$$h a'_n + a_{n-1} = 0$$

(так что $a'_n \neq 0$), и, кроме того, ещё $n-1$ уравнений; всего будем иметь n условий для коэффициентов функций X.

Теперь допустим, что a_n и a_{n-1} одновременно обращаются в нуль, но a_{n-2} остаётся конечным, так что $n-2$ первых членов маклоренова разложения содержат $n-2$ произвольных констант, и ещё предположим, что следующая константа входит в $(n+h-1)$-й член и последняя — в $(n+h'-1)$-й. Тогда, принимая во внимание, что $y^{(n+h-2)}$ и $y^{(n+h'-2)}$ не зависят от значений производных низшего порядка, получим

$$a_n' = 0, \quad \frac{h(h-1)}{2} a_n'' + ha_{n-1}' + a_{n-2} = 0,$$

$$\frac{h'(h'-1)}{2} a_n'' + h'a_{n-1}' + a_{n-2} = 0$$

(так что a_n'' и a_{n-1}' отличны от нуля) и, кроме того, ещё $2n-3$ уравнений. Уравнение $a_n = 0$ имеет два равных корня и получается $2n$ условий для функций X.

Подобным же образом в случае, если a_n, a_{n-1}, a_{n-2} одновременно обращаются в нуль, но a_{n-3} остаётся конечным и три последних произвольных постоянных встречаются впервые в $(n+h-2)$-м, $(n+h'-2)$-м, $(n+h''-2)$-м членах разложения, получаются условия

$$a_n' = 0, \quad a_n'' = 0, \quad a_{n-1}' = 0,$$

$$\frac{h(h-1)(h-2)}{1\cdot 2\cdot 3} a_n''' + \frac{h(h-1)}{1\cdot 2} a_{n-1}'' + ha_{n-2}' + a_{n-3} = 0 \quad (\text{для } h,\ h',\ h'')$$

и ещё, кроме того, $3n-6$ уравнений, так что уравнение $a_n = 0$ имеет три равных корня, и всего имеется $3n$ условий. Обобщая это рассуждение, видим, что каждому линейному множителю X_0 сопоставляются n условий для функций X.

Мы допустим теперь, что одна из особенных точек, например g, находится в бесконечности, и станем обозначать через ω функцию $(m-1)$-й степени

$$\omega = (x-a)(x-b)\ldots$$

Кроме того, обозначим через $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ детерминанты n-го порядка, составленные из матрицы

$$\begin{matrix} y_1, & y_1', & \ldots, & y_1^{(n)}, \\ y_2, & y_2', & \ldots, & y_2^{(n)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n, & y_n', & \ldots, & y_n^{(n)}, \end{matrix}$$

так что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будут частными решениями дифференциального уравнения

$$y\Delta_0 + y'\Delta_1 + y''\Delta_2 + \ldots + y^{(n)}\Delta_n = 0.$$

В таком случае функция

$$\Delta_k (x-a)^{-\Sigma\mu} (x-b)^{-\Sigma\nu} \ldots \omega^{-k+\frac{n(n+1)}{2}} = X_{n-k},$$

как уже выше замечено, — целая рациональная, степень которой может быть установлена из рассмотрения особенной точки $x = \infty$; а именно, обозначая степень X_t через r_t, получим

$$r_t = r + (m-2)t,$$

где

$$r = (m-2)\frac{n(n-1)}{2} - s$$

представляет собой степень X_0, и

$$s = \sum\mu + \sum\nu + \ldots + \sum\rho$$

есть целое число.

Дифференциальному уравнению можно придать вид

$$\omega^n X_0 y^{(n)} + \omega^{n-1} X_1 y^{(n-1)} + \ldots + \omega X_{n-1} y' + X_n y = 0,$$

и благодаря наличию r нулей X_0 (которые не должны совпадать с особенными точками), по предыдущему, возникнет rn условий, связывающих константы в уравнении.

Таким образом, в уравнении останется всего

$$\sum (r_t + 1) - 1 - rn = r + n + (m-2)\frac{n(n+1)}{2}$$

констант, которыми можно распоряжаться (один из коэффициентов следует приравнять единице), т. е., подставляя вместо r его значение,

$$-s + (m-2)n^2 + n$$

констант; отсюда следует, что в произвольной системе n частных интегралов $y_1, y_2, \ldots, y_n$, включая ещё n^2 постоянных интегрирования, в итоге будет

$$-s + (m-1)n^2 + n$$

произвольных констант.

Число коэффициентов в подстановках (A), (B), $\ldots$, (G) равно mn^2, и такое же число условий должно было бы быть наложено на эти коэффициенты, если бы эти подстановки были независимыми. Но подстановки связаны соотношением (1), так что n^2 из упомянутых условий должны быть следствием остальных. Поэтому остаётся ещё $(m-1)n^2$ условий, и число свободных констант равняется $n-s$. Это число больше или равно единице, так как у всех y должен остаться общий множитель, и отсюда следует

$$s \leqslant n - 1.$$

VIII. О РАЗЛОЖЕНИИ ОТНОШЕНИЯ ДВУХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В БЕСКОНЕЧНУЮ НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ

I

Рассмотрим бесконечную непрерывную дробь вида

$$a+\cfrac{b_1x}{1+\cfrac{b_2x}{1+\cfrac{b_3x}{1+\ldots}}},$$

которая при достаточно малых значениях x оказывается сходящейся и представляет функцию $f(x)$. Как легко усмотреть, m-я подходящая дробь равна отношению $\frac{p_m}{q_m}$ двух целых функций p_m и q_m, степени которых обе равны n, если $m=2n+1$, и равны n и $n-1$, если $m=2n$. Если x бесконечно мало, то разность между m-й подходящей дробью и функцией $f(x)$ бесконечно мала порядка m. Но для того, чтобы это имело место, должно быть выполнено столько условий, сколько произвольных постоянных содержит рациональная функция, равная подходящей дроби.

Итак, m-я подходящая дробь может быть определена требованием совпадения первых m членов разложения по степеням x, причём степени числителя и знаменателя должны быть обе равны n при $m=2n+1$ и равны n и $n-1$ при $m=2n$.

II

Этот способ определения подходящей дроби приводит непосредственно к её аналитическому выражению в том случае, когда требуется разложить отношение двух гипергеометрических рядов

$$P^{\gamma}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}=P \quad \text{и} \quad P^{\gamma}\begin{pmatrix}\alpha & \beta+1 & \gamma & \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma' & x\end{pmatrix}=Q,$$

причём приходится прибегнуть к тем характеристическим свойствам этих рядов, которые указываются в мемуаре «Новые результаты из теории функций, представимых гауссовым рядом $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$».

В самом деле, так как при бесконечно малом x разность $\frac{P}{Q} - \frac{p_m}{q_m}$ бесконечно мала порядка m, а Qq_m — порядка α, то выражение $q_m P - p_m Q$ бесконечно мало порядка $m + \alpha$, и легко показать, что оно обладает всеми свойствами, которые характеризуют функции, разлагаемые в гипергеометрический ряд, так что

$$\left.\begin{aligned} q_{2n+1} P - p_{2n+1} Q &= \\ = P\begin{pmatrix} \alpha + 2n + 1 & \beta - n & \gamma \\ \alpha' - 1 & \beta' - n & \gamma' \end{pmatrix} x\Bigg) &= x^n P\begin{pmatrix} \alpha + n + 1 & \beta & \gamma \\ \alpha' - n - 1 & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} x\Bigg) = x^n P_{n+1}, \\ q_{2n} P - p_{2n} Q = P\begin{pmatrix} \alpha + 2n & \beta + 1 - n & \gamma \\ \alpha' - 1 & \beta' - n & \gamma' \end{pmatrix} x\Bigg) &= x^n Q_n, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где P_n, Q_n обозначают то, во что превращаются P, Q, если заменить α, α' через $\alpha + n$, $\alpha' - n$. Если, затем, x и функции от x меняются непрерывно таким образом, что x делает обход вокруг значения 1, то q_m, p_m возвращаются к прежним значениям, тогда как P, Q, P_n, Q_n переходят в другие ветви тех же функций.

Итак, обозначая через P', Q', P'_n, Q'_n другие ветви соответствующих функций, мы получим также

$$\begin{aligned} q_{2n+1} P' - p_{2n+1} Q' &= x^n P'_{n+1}, \\ q_{2n} P' - p_{2n} Q' &= x^n Q'_n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получается:

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{PP'_{n+1} - P'P_{n+1}}{QP'_{n+1} - Q'P_{n+1}}, \quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{PQ'_n - P'Q_n}{QQ'_n - Q'Q_n}.$$

Следовательно, чтобы узнать, для каких значений x дроби $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ и $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ стремятся к $\frac{P}{Q}$, достаточно выяснить, когда $\frac{P_n}{P'_n}$ и $\frac{Q_n}{Q'_n}$ стремятся к нулю (при неограниченном возрастании n).

[III]

Для этой цели естественно ввести выражения P_n и Q_n через определённые интегралы. Полагая

$$\begin{aligned} [-\alpha' - \beta' - \gamma' &= a, \\ -\alpha' - \beta - \gamma &= b, \\ -\alpha - \beta' - \gamma &= c], \end{aligned}$$

можно представить P_n в виде

$$\left[x^{\alpha+n}(1-x)^{\gamma}\int_0^1 s^{a+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}ds\right]$$

и Q_n в виде

$$\left[x^{\alpha+n}(1-x)^{\gamma}\int_0^1 s^{a+1+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}ds\right].$$

Чтобы получить общий вид функций P_n, Q_n, нужно было бы ещё умножить интегралы на постоянные множители, но мы не будем этого делать, зато при подстановке в формулы (1) включим константы в качестве постоянных множителей в целые функции p_m, q_m. Что касается значений многозначных функций под интегралами, то выбор ветвей безразличен, лишь бы только в обоих интегралах значения s^a, $(1-s)^b$, $(1-xs)^c$ были взяты одинаковыми.

[Заметим теперь, что выражения для $\frac{p_m}{q_m}$ остаются неизменными, если вместо P', Q', P'_n, Q'_n вставить одни и те же линейные комбинации этих величин с величинами P, Q, P_n, Q_n, а именно $AP+BP'$, $AQ+BQ'$, $AP_n+BP'_n$, $AQ_n+BQ'_n$, причём A и B — константы и B отлично от нуля. Такие комбинации возникают как раз в том случае, если выписанные выше интегралы распространить от одного какого-нибудь до другого какого-нибудь из четырёх значений 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ и притом по одному и тому же пути.]

Поэтому в качестве P'_n, Q'_n можно взять такие же интегралы, взятые от единицы до единицы вокруг значения $\frac{1}{x}$.

Интегралы [через которые, принимая во внимание последнее допущение, выражаются P_n, Q_n, P'_n, Q'_n, сохраняют неизменными свои значения при непрерывном изменении пути интегрирования], лишь бы путь интегрирования не проходил через точку $\frac{1}{x}$, и мы можем распорядиться путём интегрирования таким образом, чтобы легче было найти предел, к которому стремятся значения интегралов при неограниченном возрастании n.

Для этого [положим]

$$\frac{s(1-s)}{1-xs}=e^{f(s)}$$

[и рассмотрим в плоскости комплексного переменного s кривые, вдоль которых модуль $e^{f(s)}$ имеет постоянное значение. При очень маленьких значениях модуля эти кривые окружают точки 0 и 1 почти как концентрические круги маленького радиуса. При очень больших значениях модуля эти кривые аналогичным образом окружают точки $s=\frac{1}{x}$ и $s=\infty$. Итак, в обоих названных случаях кривые состоят из двух замкнутых ветвей. Если заставим модуль возрастать, начиная с маленьких значений, то отдельные замкнутые кривые будут сближаться, пока не сольются в одну кривую с двойной точкой. В этой двойной точке производная должна обращаться в нуль. Такое же рассуждение справедливо и для случая, когда модуль уменьшается, начиная от больших значений.

Получаются следующие равенства:]

$$f(s)=\log(1-s)-\log\left(\frac{1}{s}-x\right),$$

$$f'(s)=-\frac{1}{1-s}+\frac{1}{\frac{1}{s}-x}\,\frac{1}{ss}=\frac{1-2s+xs^2}{s(1-s)(1-xs)}.$$

[Если $f'(s)=0$, то]

$$1-2s+xs^2=0,\quad s(1-xs)=1-s,\quad 1-2s+s^2=(1-x)s^2=(1-s)^2,$$

$$\frac{1}{s}-1=\sqrt{1-x}=1-xs,\quad \frac{1-s}{1-xs}=s.$$

[Условимся теперь обозначать через $\sqrt{1-x}$ то значение квадратного корня, действительная часть которого положительна, причём, естественно, выпадает из рассмотрения тот случай, когда x действительное и $\geqslant 1$. Затем пусть

$$\sigma=\frac{1}{1+\sqrt{1-x}},\quad \sigma'=\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$$

будут корни квадратного уравнения

$$1-2s+xs^2=0,$$

причём, понятно, модуль σ меньше, чем модуль σ'.

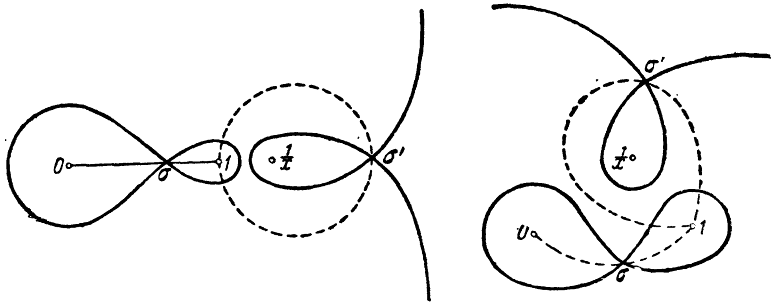
В таком случае

$$e^{f(\sigma)}=\sigma^2=\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2,\quad e^{f(\sigma')}=\sigma'^2=\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}\right)^2.$$

Представим себе теперь, что точки $s=0$ и $s=1$ связаны кривой, проходящей через точку $s=\sigma$ и обладающей тем свойством, что при движении по этой кривой модуль $e^{f(s)}$ возрастает от $s=0$ до $s=\sigma$ и убывает от $s=\sigma$ до $s=1$. Такую кривую можно принять за путь интегрирования в интегралах, через которые выражаются функции P_n и Q_n.

Что касается тех интегралов, через которые выражаются функции P'_n и Q'_n, то здесь путь интегрирования возьмём идущим от точки $s=1$

до точки $s=\sigma'$ и дальше, после обхода точки $s=\frac{1}{x}$, идущим обратно в точку $s=1$: его можно выбрать таким образом, чтобы модуль $e^{f(s)}$ достигал максимума в одной только точке $s=\sigma'$.



Требуется теперь найти формулу, которая давала бы асимптотическое значение интеграла

$$\int_0^1 s^{a+n}(1-s)^{b+n}(1-xs)^{c-n}\,ds$$

при неограниченно возрастающих значениях n.

Положим

$$s^a(1-s)^b(1-xs)^c=\varphi(s),$$

и тогда надо будет иметь дело с интегралом

$$\int_0^1 e^{nf(s)}\,\varphi(s)\,ds.$$

Интеграл, взятый по той части пути интегрирования, которая не лежит в непосредственной близости от точки $s=\sigma$, не только сам по себе бесконечно мал, но и отношение его к интегралу, взятому по части пути, находящейся в непосредственной близости названной точки, оказывается бесконечно малым, так как действительная часть $n(f(\sigma)-f(s))$ при сделанных предположениях неограниченно возрастает. Поэтому, определяя асимптотическое значение интеграла при $\lim n=\infty$, достаточно ограничиться рассмотрением интеграла, распространённого по дуге, которая лежит в окрестности $s=\sigma$. Итак, положим, обозначая через h величину, принимающую только малые по модулю значения:]

$$s=\sigma+h,\qquad f(s)=f(\sigma)+\frac{1}{2}f''(\sigma)\,h^2+(h^3),$$

$$nf(s)=nf(\sigma)+n\frac{f''(\sigma)}{2}h^2+n(h^3),\qquad -n\frac{f''(\sigma)}{2}h^2=z^2,$$

$$dh=\frac{dz}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}},\qquad e^{nf(s)}=e^{nf(\sigma)}\,e^{-z^2+\left(\frac{z^3}{\sqrt{n}}\right)},$$

$$e^{nf(s)}\,\varphi(s)\,ds=e^{nf(\sigma)}\,\varphi\left(\sigma+\frac{z}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}}\right)e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}}.$$

[Если допустим, что часть пути, лежащая в окрестности $s=\sigma$, — прямолинейный отрезок, делящий пополам прямые углы, образованные в точке $s=\sigma$ касательными к кривой

$$\operatorname{mod} e^{f(s)} = \operatorname{mod} e^{f(\sigma)},$$

то пределы интегрирования по переменной z при $\lim n = \infty$ стремятся соответственно к $-\infty$ и $+\infty$, и мы получаем асимптотическое значение

$$\frac{e^{nf(\sigma)}\varphi(\sigma)}{\sqrt{-n\frac{f''(\sigma)}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{-\frac{f''(\sigma)}{2}}}\,\frac{e^{nf(\sigma)}}{\sqrt{n}}\,\varphi(\sigma).$$

Так как

$$e^{nf(\sigma)} = \sigma^{2n} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n},$$

$$-\frac{f''(\sigma)}{2} = \frac{1}{\sigma(1-\sigma)} = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{1-x}},$$

$$\varphi(\sigma) = \sigma^{a+b}(1-x)^{\frac{b+c}{2}},$$

то окончательно интеграл $\int\limits_0^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds$ оказывается асимптотически равным

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}(1-x)^{\frac{b+c}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Подобные же рассуждения, будучи применены к интегралу

$$\int\limits_1^1 e^{nf(s)}\varphi(s)\,ds,$$

дают нам в качестве его асимптотического значения

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}(1-x)^{\frac{b+c}{2}+\frac{1}{4}}.$$

Итак, при сделанных предположениях отношение $P_n : P'_n$ оказывается асимптотически равным]

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2n+a+b+1}.$$

[Поэтому, если n неограниченно возрастает, то при всех значениях x

(кроме действительных, больших или равных единице) отношение $P_n : P'_n$ стремится к нулю.

То же справедливо (с заменой a на $a+1$) и для отношения $Q_n : Q'_n$.

Таким образом, доказано, что подходящие дроби разложения функции

$$\frac{P^\gamma \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}}{P^\gamma \begin{pmatrix} \alpha & \beta+1 & \gamma' & \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}}$$

в бесконечную непрерывную дробь (см. I) стремятся к значению этой функции при всех значениях x (кроме действительных, больших или равных единице).]

IX. ОБ ИНТЕГРАЛАХ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ

Если a является точкой ветвления для интегралов линейного дифференциального уравнения второго порядка и если при обходе x в положительном направлении вокруг a интеграл z_1 переходит в z_3, а интеграл z_2 — в z_4 (что будет кратко обозначаться таким образом: $z_1 \to z_3$, $z_2 \to z_4$), то

$$z_3 = tz_1 + uz_2, \quad z_4 = rz_1 + sz_2. \tag{1}$$

Пусть ε — какая угодно постоянная; тогда

$$z_1 + \varepsilon z_2 \to z_3 + \varepsilon z_4.$$

Но

$$z_3 + \varepsilon z_4 = (t + \varepsilon r)\, z_1 + (u + \varepsilon s)\, z_2. \tag{2}$$

Поэтому если ε будет подобрано так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\varepsilon\,(t + \varepsilon r) = u + \varepsilon s, \tag{3}$$

то мы получим

$$z_3 + \varepsilon z_4 = (t + \varepsilon r)(z_1 + \varepsilon z_2). \tag{4}$$

Существует, следовательно, такое ε, что $z_1 + \varepsilon z_2$ переходит в $(z_1 + \varepsilon z_2) \cdot \mathrm{const}$.

Но этим же свойством обладает и функция $(x - a)^\alpha$, которая после положительного обхода вокруг a приобретает множитель $e^{2\pi i\alpha}$. Если подберём α так, чтобы было $t + \varepsilon r = e^{2\pi i\alpha}$, то функция $(z_1 + \varepsilon z_2)(x - a)^{-\alpha}$ окажется неизменяющейся при обходе x вокруг a. Поэтому

$$(z_1 + \varepsilon z_2) = (x - a)^\alpha \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n\,(x - a)^n. \tag{5}$$

Если ε' — другой корень уравнения (3), то точно так же

$$z_1 + \varepsilon' z_2 = (x - a)^{\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n'\,(x - a)^n,$$

причём $e^{2\pi i\alpha'} = t + \varepsilon' r$.

Если ε и ε' не равны между собою, то оба интеграла $z_1+\varepsilon z_2=z^{(\alpha)}$ и $z_1+\varepsilon' z_2=z^{(\alpha')}$ различны и, следовательно, всякий интеграл выражается линейно через $z^{(\alpha)}$, $z^{(\alpha')}$.

Но если корни уравнения (3) одинаковы, то в этом случае

$$-u=r\varepsilon^2,\quad -2r\varepsilon=t-s=\frac{2u}{\varepsilon},$$

так что

$$z_3=tz_1+uz_2=(t+\varepsilon r)z_1+\frac{u}{\varepsilon}(z_1+\varepsilon z_2)$$

и

$$z_3(x-a)^{-\alpha}e^{-2\pi i\alpha}=z_1(x-a)^{-\alpha}+(z_1+\varepsilon z_2)k(x-a)^{-\alpha},$$

где положено: $e^{2\pi i\alpha}=t+\varepsilon r,\quad k=\dfrac{u}{\varepsilon(t+\varepsilon r)}$.

Так как

$$z_1(x-a)^{-\alpha}\to z_3(x-a)^{-\alpha}e^{-2\alpha\pi i},$$

то

$$z_1(x-a)^{-\alpha}\to z_1(x-a)^{-\alpha}+(z_1+\varepsilon z_2)k(x-a)^{-\alpha}.$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{k}{2\pi i}(x-a)^{-\alpha}(z_1+\varepsilon z_2)\log(x-a)\to\frac{k}{2\pi i}(x-a)^{-\alpha}(z_1+\varepsilon z_2)\log(x-a)+$$
$$+k(x-a)^{-\alpha}(z_1+\varepsilon z_2)$$

и потому функция

$$z_1(x-a)^{-\alpha}-\frac{k}{2\pi i}(x-a)^{-\alpha}(z_1+\varepsilon z_2)\log(x-a)$$

при обходе точки a остаётся неизменной и, значит, может быть представлена в виде

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}b_n(x-a)^n,$$

откуда следует

$$z_1=(x-a)^{\alpha}\log(x-a)\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(x-a)^n+(x-a)^{\alpha}\sum_{-\infty}^{+\infty}b_n(x-a)^n,$$

если положим

$$z_1+\varepsilon z_2=(x-a)^{\alpha}\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n(x-a)^n.$$

X. ИЗ ЛЕКЦИЙ ПО ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ РЯДУ

А. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ P-ФУНКЦИИ ОПРЕДЕЛЁННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Мы пришли к заключению, что интегралы вида

$$\int s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds,$$

взятые между пределами 0, 1, ∞, x^{-1}, весьма большим числом способов могут быть представлены посредством гипергеометрических рядов и потому удовлетворяют известному линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

Займёмся теперь непосредственным изучением такого интеграла, как функции переменной x, и покажем, обратно, что он представляет собою P-функцию.

Остановимся, в частности, на интеграле

$$\int_0^1 s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds.$$

Функция под интегралом непрерывна всюду, кроме точек 0, ∞, 1, x^{-1}. Предполагается, что интеграл берётся по отрезку действительной оси от 0 до 1; но можно установить и любой другой путь интегрирования, лишь бы он совместно с названным отрезком не охватывал точек разрыва.

Поэтому, если мы заставим x^{-1} делать обход в положительном направлении вокруг точки 1, то интеграл будет изменяться непрерывно, поскольку x^{-1} не пересечёт пути интегрирования. Меняя надлежащим образом путь интегрирования в то самое время, как x^{-1} обходит точку 1, мы получим к концу обхода значение интеграла, соответствующее пути от 0 до 1, но с охватом точки x^{-1}.

При интегрировании от 1 до x^{-1} множитель $(1-xs)^c$ будет иметь иное значение, чем при интегрировании от x^{-1} до 1, так как при обходе точки x^{-1} аргумент его увеличивается на $2\pi c$. Собирая вместе все интегралы, получим

$$\int_0^1 + (1 - e^{2\pi i c}) \int_1^{x^{-1}}.$$

Итак, мы видим, что интеграл от 0 до 1 при обходе x^{-1} около точки 1 переходит в линейную комбинацию двух из шести возможных интегралов между точками 0, 1, ∞, x^{-1}. Такой же результат мы получили бы и для каждого из шести других интегралов при точках разветвления 0, ∞, 1.

Мы покажем теперь, что можно написать следующие соотношения:

$$P_\alpha = \text{const.} \int_0^1 x^\gamma (1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\, ds,$$

$$P_{\alpha'} = \text{const.} \int_{x^{-1}}^{\infty} x^\gamma (1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\, ds,$$

$$P_\beta = \text{const.} \int_0^{x^{-1}} x^\alpha (1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\, ds,$$

$$P_{\beta'} = \text{const.} \int_1^{\infty} x^\alpha (1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\, ds,$$

$$P_\gamma = \text{const.} \int_{-\infty}^{0} x^\gamma (1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\, ds,$$

$$P_{\gamma'} = \text{const.} \int_1^{x^{-1}} x^\gamma (1-x)^\gamma s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'} (1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma} (1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\, ds.$$

В самом деле, исследуем, как ведут себя эти интегралы при $x = 0$, ∞, 1.

Первый интеграл ведёт себя при $x = 0$ как $x^\gamma \cdot \text{const.}$, а чтобы исследовать второй, достаточно сделать подстановку $s = (s'x)^{-1}$. Пределы интегрирования тогда переходят в 0 и 1 и интеграл при $x = 0$ ведёт себя, как $x^{\alpha'} \cdot \text{const}$.

Далее, интеграл, выражающий $P_{\beta'}$, ведёт себя в бесконечности, как $x^{-\beta'}$. Интеграл, выражающий P_β, после подстановки $s' = xs$ ведёт себя в бесконечности, как $x^{\alpha+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'-1} = x^{-\beta}$.

Интеграл, представляющий P_γ, как непосредственно видно, ведёт себя при $x = 1$, как $\text{const.}\,(1-x)^\gamma$; наконец, интеграл, представляющий $P_{\gamma'}$, как показывает подстановка $s = 1 - \frac{x-1}{x} s'$, ведёт себя при $x = 1$, как $\text{const.}\,(1-x)^{\gamma'}$.

Остаётся ещё показать, что каждый из написанных интегралов выражается линейно через два из них.

Пока функции P_α, $P_{\alpha'}$, P_β, $P_{\beta'}$, P_γ, $P_{\gamma'}$ были определены с точностью до постоянных множителей. Допустим теперь, что в первой и в последней паре эти множители таковы, что основания степеней при положительных значениях x, заключённых между 0 и 1, будут действительными и положительными.

Если проинтегрируем затем функцию

$$(-s)^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds$$

по всей области величин с положительной мнимой частью s, то интеграл обратится в нуль:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{1} + \int\limits_{1}^{x^{-1}} + \int\limits_{x^{-1}}^{\infty} = 0.$$

Выражая отдельные интегралы через определённые согласно предыдущим условиям функции P_α, $P_{\alpha'}$, ..., мы получим

$$P_\gamma + e^{-a\pi i} P_\alpha + e^{-(a+b)\pi i} P_{\gamma'} + e^{-(a+b+c)\pi i} P_{\alpha'} = 0.$$

Точно так же интегрирование по всей области с отрицательной мнимой частью s даёт

$$P_\gamma + e^{+a\pi i} P_\alpha + e^{(a+b)\pi i} P_{\gamma'} + e^{(a+b+c)\pi i} P_{\alpha'} = 0.$$

Здесь положено

$$a = -\alpha' - \beta' - \gamma', \quad b = -\alpha' - \beta - \gamma, \quad c = -\alpha - \beta' - \gamma.$$

Умножая первое равенство на $e^{(\sigma-\alpha')\pi i}$, второе — на $e^{-(\sigma-\alpha')\pi i}$, и вычитая, будем иметь

$$P_\gamma \sin(\sigma - \alpha')\pi + P_\alpha \sin(\sigma + \beta' + \gamma')\pi -$$
$$- P_{\gamma'} \sin(\sigma - \alpha)\pi - P_{\alpha'} \sin(\sigma + \beta' + \gamma)\pi = 0.$$

Далее, чтобы из этой формулы исключить одну из функций, достаточно подобрать σ таким образом, чтобы множитель при этой функции обращался в нуль; например, положить $\sigma = \alpha'$ для P_γ или $\sigma = \alpha$ для $P_{\gamma'}$.

Отсюда следует, что каждый из шести интегралов выражается через два других. В самом деле, интегралы в пределах от $-\infty$ до 0 и от 1 до x^{-1} выражаются через интегралы в пределах от 0 до 1 и от x^{-1} до ∞. Что же касается двух остальных, то достаточно заметить, что

$$\int\limits_{0}^{x^{-1}} = \int\limits_{0}^{1} + \int\limits_{1}^{x^{-1}}, \quad \int\limits_{1}^{\infty} = \int\limits_{1}^{x^{-1}} + \int\limits_{x^{-1}}^{\infty}.$$

Итак, выписанные выше интегралы обладают всеми свойствами, характеризующими P-функцию, а именно, определяют как раз функции P_α, $P_{\alpha'}$, P_β, $P_{\beta'}$, P_γ, $P_{\gamma'}$. Действительно, они превращаются при обходе точек ветвления в линейные комбинации тех же интегралов, выражаются через любые два из них и надлежащим образом ведут себя около точек ветвления.

B. О ФУНКЦИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕКОТОРЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

1

Рассмотрим функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{1}$$

Если обозначим через Y_1, Y_2 два частных интеграла этого уравнения, то всякий интеграл уравнения должен линейно и однородно выражаться через Y_1, Y_2.

Когда x пробегает замкнутый путь, причём a_0, a_1, a_2 возвращаются к их первоначальным значениям, то Y_1, Y_2 переходят в некоторые линейные однородные, с постоянными коэффициентами, комбинации этих же величин.

Обозначая отношение $\frac{Y_2}{Y_1}$ через z, мы видим, что при обходе названного пути z превращается в

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Станем рассматривать теперь, обратно, x как функцию z; тогда функция

$$x = f(z)$$

будет, очевидно, обладать свойством, заключающимся в том, что она удовлетворяет тождеству

$$f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Если функция z имеет несколько точек ветвления, то будет существовать также несколько таких рациональных преобразований первой степени, при которых функция $f(z)$ остаётся неизменной, и так как повторное выполнение нескольких таких преобразований равносильно опять-таки некоторому рациональному преобразованию первой степени (которое можно считать составленным из данных преобразований), то $f(z)$ остаётся неизменной при выполнении над z как преобразований, непосредственно связанных с точками ветвления, так и тех преобразований, которые из них могут быть составлены.

Теперь мы предположим, что задана функция, не изменяющаяся при выполнении некоторой совокупности преобразований указанного типа и поставим себе задачей вывести дифференциальное уравнение, из которого эту функцию можно было бы получить указанным выше способом.

Когда z переходит в $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, функция $x = f(z)$ возвращается к начальному значению. Продифференцируем по x: производная $\dfrac{dz}{dx}$ переходит в производную от $\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ по x, так что

$$\frac{dz'}{dx} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} \frac{dz}{dx}.$$

Предположим, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Тогда получим

$$\left(\frac{dz'}{dx}\right)^{-1/2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} (\gamma z + \delta), \qquad z' \left(\frac{dz'}{dx}\right)^{-1/2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} (\alpha z + \beta).$$

Таким образом, $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^{-1/2}$ и $z\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^{-1/2}$ переходят в линейные комбинации тех же функций.

Поэтому, если положим

$$Y_1 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}, \qquad Y_2 = z \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2},$$

то Y_1, Y_2 будут частными интегралами дифференциального уравнения второго порядка, коэффициенты которого — алгебраические функции [1].

Итак, если дана функция, обладающая указанным свойством, то можно, обратно, перейти к дифференциальному уравнению, и коэффициенты его можно определить, если известны свойства функции x. Отсюда получатся свойства Y_1, Y_2 и затем — дифференциальное уравнение. Мы вычислим, зная Y_1 и Y_2, выражения

$$Y_2'Y_1 - Y_1'Y_2, \quad Y_1''Y_2 - Y_2''Y_1, \quad Y_2''Y_1' - Y_1'Y_2''.$$

Так как они пропорциональны a_0, a_1, a_2, то имеет место равенство

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Мы получаем

$$Y'_2 Y_1 - Y_1' Y_2 = 1, \quad Y''_1 Y_2 - Y''_2 Y_1 = 0,$$

$$Y_2'' Y_1' - Y_1'' Y_2' = -\left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2}.$$

Дифференциальное уравнение для Y_1, Y_2 поэтому принимает вид

$$y'' - \left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} y = 0,$$

причём функция z удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1/2} = -a_2,$$

и a_2 есть алгебраическая функция от x.

Таков путь, по которому нужно итти, чтобы построить дифференциальное уравнение, если задана функция, не изменяющаяся при некоторых рациональных преобразованиях первой степени. Но почти всегда возможно из самой задачи вывести ещё и другие условия, которыми определяется эта алгебраическая функция.

2

Мы применим предыдущее к функциям, разлагающимся в гипергеометрические ряды, и к некоторым с ними связанным функциям. Функцию, которую мы обозначили через $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{pmatrix}, x)$ мы будем теперь (как функцию переменной x) обозначать через y, а само x станем рассматривать как функцию отношения двух частных интегралов того уравнения, которому удовлетворяет y. При этом P^α будем считать за Y_1, а $P^{\alpha'}$ — за Y_2.

Исследуем сначала, как изменяется $\frac{Y_1}{Y_2}$. Функции P^α и $P^{\alpha'}$ выражаются рядами, расположенными по возрастающим степеням x, причём первый начинается с члена степени α, второй — с члена степени α'.

Мы допустим, что α, β, γ; α', β', γ' — действительные числа и что действительными являются также коэффициенты при начальных членах рядов P^α и $P^{\alpha'}$. Тогда действительными будут и все остальные коэффициенты и притом, когда x растёт от 0 до 1, P^α и $P^{\alpha'}$ остаются действительными и положительными. Последнее, очевидно, справедливо и для отношения $z=\frac{Y_1}{Y_2}$. Если $\alpha>\alpha'$, то при $x=0$ будем иметь $z=0$, тогда как при $x=1$ значение z будет конечным.

Как ведёт себя функция z при отрицательных значениях x? Мы имеем

$$z=x^{\alpha-\alpha'}\,Q(x),$$

где Q — отношение двух рядов, расположенных по целым степеням x, притом положительное при малых значениях x. Таким образом, в окрестности $x=0$ получается

$$z=Q\cdot r^{\alpha-\alpha'}e^{(\alpha-\alpha')i\varphi},$$

где положено $x=re^{i\varphi}$ и φ заключено между $-\pi$ и $+\pi$. Когда x вблизи нуля переходит от $+r$ к $-r$, пробегая значения с положительной мнимой частью, то при $x=-r$ оказывается

$$z=Q(-r)\cdot r^{\alpha-\alpha'}e^{(\alpha-\alpha')i\pi},$$

так что (поскольку $Q(-r)$ положительно) z принимает значение с аргументом $(\alpha-\alpha')\pi$.

Предположим, что $\alpha-\alpha'<1$. Когда x пробегает отрицательные значения, z принимает значения с аргументом $(\alpha-\alpha')\pi$, которые в плоскости z лежат на прямой, делающей с действительной осью угол $(\alpha-\alpha')\pi$.

Исследуем теперь поведение z, когда x изменяется от 1 до ∞. Как мы знаем, P^{α} и $P^{\alpha'}$ выражаются линейно, с постоянными и притом действительными коэффициентами, через P^{γ} и $P^{\gamma'}$. При значениях x, больших чем 1, получаем

$$\frac{P^{\gamma'}}{P^{\gamma}}=(1-x)^{\gamma'-\gamma}\ (1+A_1(1-x)+\ldots).$$

Для значений z получаем поэтому формулу

$$z=\frac{p+p'e^{(\gamma-\gamma')\pi i}}{q+q'e^{(\gamma-\gamma')\pi i}},$$

где p, p', q, q' — действительные; значения z лежат, следовательно, на некоторой дуге окружности.

Возникает теперь вопрос, верно ли, что всякое значение, лежащее внутри полученной фигуры, z принимает один и только один раз? В рассматриваемой области z есть непрерывная функция x. Станем рассматривать, обратно, x как функцию z: если x не есть многозначная функция z, то производная $\frac{dz}{dx}$ всюду остаётся конечной и непрерывной; если же, напротив, x есть многозначная функция z, то в некоторой точке ветвления этой функции [2] мы имели бы $\frac{dz}{dx}=\infty$ или $\frac{dz}{dx}=0$.

Итак, рассмотрим производную

$$\frac{dz}{dx}=\frac{Y_1Y_2'-Y_2Y_1'}{Y_2^2}.$$

Так как

$$Y_1Y_2'-Y_2Y_1'=Cx^{\alpha+\alpha'-1}\,(1-x)^{\gamma+\gamma'-1}$$

и Y_2 конечно в рассматриваемой области, то $\frac{dz}{dx}$ нигде не обращается в нуль (не считая точек 0, 1, ∞). Но $\frac{dz}{dx}$ не обращается также и в бесконечность. Поэтому в области, ограниченной двумя названными прямыми и дугой окружности, x есть однозначная функция z.

В случае более сложных дифференциальных уравнений последнее утверждение, вообще говоря, уже не будет справедливым.

Отметим, что в теории полных эллиптических интегралов в качестве независимой переменной также было введено отношение $\frac{K'}{K}$.

3

Нас интересует теперь такое отображение сферы на плоскость, при котором сохранялось бы подобие в малых частях. Введём на сфере радиуса 1 полярные координаты, понимая под θ дугу большого круга, проходящего через постоянную точку o (считая дугу от O), и под φ —

угол, который образует этот круг с постоянным большим кругом, проходящим также через O. Таким образом, $\theta = \text{const.}$ будет уравнение параллельного круга и $\varphi = \text{const.}$ — уравнение меридиана.

Координаты точки на плоскости обозначим через u, v; вследствие отображения они будут функциями θ, φ.

Линейный элемент на сфере имеет вид $d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, на плоскости $du^2 + dv^2$. Отношение

$$\frac{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2}{du^2 + dv^2} = \frac{(d\theta + i\sin\theta d\varphi)(d\theta - i\sin\theta d\varphi)}{(du + idv)(du - idv)}$$

не должно зависеть от отношения $d\theta : d\varphi$. Поэтому множители числителя должны, каждый в отдельности, делиться на множители знаменателя; мы можем принять, например, что $du + idv$ содержит множителем $d\theta + i\sin\theta d\varphi$. (При ином предположении подобие носило бы обратный характер.)

Полагая $u + iv = z$, мы должны иметь

$$dz = m(d\theta + i\sin\theta d\varphi),$$

где m — функцию θ и φ — нужно подобрать таким образом, чтобы правая часть равенства была полным дифференциалом. Полагая $m = (\sin\theta)^{-1}$, мы получим

$$z = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + i\varphi.$$

Самое общее решение задачи получится, если мы приравняем z произвольной функции комплексной переменной $\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + i\varphi$.

Мы остановимся на решении: $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\varphi}$.

Эта функция принимает на сфере (при изменении θ от 0 до π и φ от 0 до 2π) каждое значение один и только один раз. В одном полюсе z принимает значение 0, в другом обращается в бесконечность. Легко найти на сфере точку, соответствующую данной точке плоскости z. Для этого представим себе, что плоскость z касается сферы в полюсе, т. е. в точке O, от которой ведётся отсчёт дуг θ. Достаточно провести прямую через другой полюс P и данную точку z на плоскости и найти точку пересечения Pz со сферой. Двум точкам сферы, лежащим на концах одного диаметра, соответствуют значения c и $\frac{1}{c'}$, причём c и c' — сопряжённые величины [3].

Отметим здесь же, что если окружность проходит через точки a и b, то на ней аргумент отношения $\frac{z-a}{z-b}$ остаётся постоянным.

4

Мы обозначали раньше отношение двух частных интегралов $P^{\alpha} : P^{\alpha'}$ через z и исследовали, как изменяется z, когда x пробегает границу области, в которой мнимая часть положительна. Мы получаем в качестве границы области изменения z две прямые, делающие между собой угол $(\alpha - \alpha')\pi$ (в точке, соответствующей $x = 0$), и дугу окружности, делающую с этими прямыми соответственно углы $(\beta - \beta')\pi$, $(\gamma - \gamma')\pi$.

Предположим, что эти три угла положительны, и каждый из них меньше π. Если притом их сумма больше π, то можно всегда отобразить рассматриваемую фигуру на сферу таким образом, чтобы ограничивающие линии отображались на дуги больших кругов. Таким образом, рассматриваемая область значений z отобразится на сферический треугольник с углами, равными $(\alpha - \alpha')\pi$, $(\beta - \beta')\pi$, $(\gamma - \gamma')\pi$, которые мы обозначим через $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. Рассматривая распределение значений x в этом треугольнике, убедимся, что в вершинах углов $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ будем иметь $x = 0$, $x = \infty$, $x = 1$. Представим себе теперь, что функция переменной x продолжается за пределы области, в которой она была первоначально рассмотрена. Тогда, если x пробегает область, где мнимая часть отрицательна, то z будет пробегать значения, лежащие в прилегающем симметрически-конгруэнтном сферическом треугольнике. Продолжая подобным образом, мы получим целый ряд симметрически-конгруэнтных треугольников.

Таким образом, возникает удобное геометрическое представление для совокупности значений функции z, получаемых при её неограниченном продолжении.

5

Рассматривая x как функцию z,

$$x = f(z),$$

мы замечаем, что эта функция, помимо z, зависит ещё от разностей показателей λ, μ, ν. Действительно, выражение для z не меняется, если интегралы y умножить на выражение вида $x^{\gamma}(1 - x)^{\varepsilon}$. Обозначая через x_1 другую, подобную же функцию от z с разностями показателей λ_1, μ_1, ν_1, мы можем поставить перед собой вопрос: *при каких условиях x и x_1 связаны алгебраическим соотношением?*

Если допустим, что между x и x_1 имеет место алгебраическое соотношение $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{x_1}) = 0$, то можно выделить такую область значений z, что в этой области функции x и x_1 принимают один и только один раз каждую пару значений, удовлетворяющую уравнению $F = 0$. Но каждому определённому значению x соответствует n значений x_1, и потому в этой области каждое значение x будет принято n раз, т. е. область изменения x покроет n раз всю плоскость. В таком случае область изменения

z состоит из n пар симметрически-конгруэнтных сферических треугольников с углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$. И точно так же каждое значение x_1 будет принято m раз и, следовательно, та же область z состоит из m пар симметрически-конгруэнтных треугольников с углами $\lambda_1\pi$, $\mu_1\pi$, $\nu_1\pi$.

Итак, одна и та же сферическая фигура должна составляться или из n пар треугольников с углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ или из m пар треугольников с углами $\lambda_1\pi$, $\mu_1\pi$, $\nu_1\pi$.

Вопрос наш равносилен следующему: в каких случаях функция $z(x)$ посредством алгебраического преобразования, произведённого над независимой переменной, превратится в функцию того же типа?

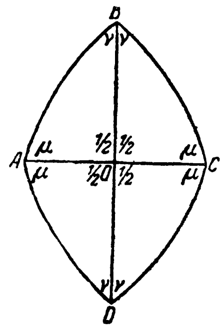
Подобного рода алгебраические преобразования нам уже встречались, и теперь мы дадим им геометрическое истолкование.

Мы видели, что каждая из функций $P\left(\mu, \nu, \frac{1}{2}, x\right)$, $P(\nu, 2\mu, \nu, x_1)$, $P(\mu, 2\nu, \mu, x_2)$ выражается через другие, причём было положено

$$x = 4x_1(1-x_1) = \frac{1}{4x_2(1-x_2)}.$$

Вообразим прямоугольный сферический треугольник, в котором один угол равен $\mu\pi$, другой $\nu\pi$.

Прилагая к катетам симметрически-конгруэнтные треугольники, мы сможем разложить сферический четыреугольник $ABCD$ на два симметрически-конгруэнтных треугольника с углами $2\mu\pi$, $\nu\pi$, $\nu\pi$ или $2\nu\pi$, $\mu\pi$, $\mu\pi$.



Мы можем также легко найти алгебраические зависимости между функциями x, x_1, x_2, из которых первая принадлежит к треугольнику AOB, вторая — к ADB и третья — к ACB. Пусть x принимает в точке O значение 1, в B — значение 0 и в C (и, следовательно, также в A) значение ∞. Так как четыреугольник составляется, с одной стороны, из двух пар треугольников, принадлежащих к x, и, с другой стороны, из одной пары треугольников, принадлежащих к x_1, то x есть рациональная функция x_1, которая принимает каждое значение дважды, в то время как x пробегает все значения. Пусть x_1 принимает значения ∞, 1, 0 соответственно в точках A, D, B; тогда в точке C она также принимает значение ∞. В таком случае x обращается в бесконечность только при условии, что x_1 обращается в бесконечность, и потому x есть целая рациональная функция второй степени от x_1, которая притом обращается в нуль при $x_1 = 0$, 1. Итак,

$$x = cx_1(1-x_1);$$

константа c определяется из того обстоятельства, что при однократном обходе переменной z точки 0 соответствующее значение обходится переменной x_1 также однократно, тогда как x обходит значение 1 дважды.

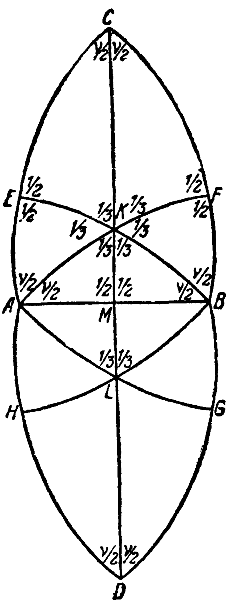
Обозначая через ξ_1 значение, которое принимает x_1 при $z=0$, видим, что производная $\dfrac{dx}{dx_1}$ обращается в нуль при $x_1=\xi_1$. Отсюда следует, что $\xi_1=\dfrac{1}{2}$, $c=4$. Так мы приходим к уже известному соотношению

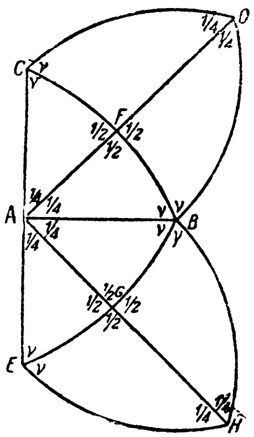
$$x=4x_1(1-x_1).$$

Подобным же образом получилось бы и соотношение

$$x=\frac{1}{4x_2(1-x_2)}.$$

Можно было бы показать геометрически, что при двух произвольных разностях показателей иные преобразования невозможны, так как всякая иная фигура не более чем одним способом может быть составлена из пар симметрически-конгруэнтных треугольников. Переходя к случаю, когда имеется одна произвольная разность показателей, рассмотрим сначала равносторонний треугольник ABC с углами $\nu\pi$ (см. чертеж слева). Проводя в нём три биссектрисы, получаем три пары симметрически-конгруэнтных треугольников с углами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\nu\pi}{2}$, и потому функция $P(\nu, \nu, \nu, x)$ алгебраическим преобразованием переводится в функцию $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{\nu}{2}, x_1\right)$, или же (с применением предыдущих преобразований) — в $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \nu, x_2\right)$ и $P\left(\frac{2}{3}, \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}, x_3\right)$, или же, наконец, в $P\left(\nu, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x_4\right)$, $P\left(\frac{\nu}{2}, 2\nu, \frac{\nu}{2}, x_5\right)$.





Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (см. чертеж справа) позволил бы таким же образом трансформировать функцию $P\left(\frac{1}{2}, \nu, \nu, x\right)$ в $P(\nu, 2\nu, \nu, x_1)$, $P\left(\frac{1}{4}, \nu, \frac{1}{2}, x_2\right)$ или $P\left(\frac{1}{4}, 2\nu, \frac{1}{4}, x_3\right)$.

Помимо этих преобразований (где остаётся одна разность показателей произвольной), должны существовать ещё некоторые другие, причём всем разностям показателей приходится давать определённые числовые значения. Такие преобразования порождаются каждым правильным многогранником, так как возникающие при этом сферические фигуры различными способами составляются из конгруэнтных сферических треугольников. Если эти последние известны, нахождение самих преобразований не представляется затруднительным.

Особого исследования потребовал бы случай, когда какая-нибудь из разностей показателей обратилась бы в нуль [или когда сумма трёх углов оказалась бы $\leqslant \pi$] [1]. В этом случае вместо сферических треугольников пришлось бы рассматривать плоские.

6

К предшествующим рассмотрениям побудило нас изучение свойств отношения двух частных интегралов нашего дифференциального уравнения как функции независимой переменной.

Мы займёмся теперь ещё другими функциями, также связанными с интегралами линейных однородных дифференциальных уравнений.

До сих пор мы имели дело с дифференциальными уравнениями вида

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — рациональные функции x, причём существеннейшее свойство интегралов таких уравнений заключается в том, что каждый интеграл выражается линейно, с постоянными коэффициентами, через n функций, являющихся частными интегралами уравнения. Отсюда следует, что если переменная x и коэффициенты возвращаются к прежним значениям, то эти функции переходят в линейные комбинации из них же самих. Но мы ещё не рассмотрели случая, когда дифференциальное уравнение линейно, но не однородно, т. е. когда правая часть его есть данная функция x, а не нуль. Пусть перед нами такое уравнение:

$$a_0 \frac{d^n \eta}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \eta}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} \eta}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n \eta = C(x).$$

Решение такого уравнения приводится к решению линейного однородного уравнения n-го порядка; имеется два основных метода, оба принадлежащие Лагранжу.

Если известны n частных интегралов $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ уравнения для случая, когда $C(x) = 0$, то функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n$ (где C_i — постоянные) удовлетворяет первому дифференциальному уравнению. Если то же самое выражение подставить во второе уравнение, рассматривая, однако, C_i как некоторые функции x, то члены, содержащие C_i, уничтожаются и останутся лишь члены, содержащие производные от C_i. Полученное уравнение, содержащее производные от C_i, удаётся проинтегрировать, и тогда определится и η. Функции C_i вычисляются с помощью одних лишь квадратур, однако, число их довольно велико.

Существует другой метод, более удобный, также ведущий начало от Лагранжа. Он заключается в том, что уравнение умножают на неопределённый множитель v и затем интегрируют от 0 до x. Затем нужно преобразовать с помощью интегрирований по частям отдельные члены левой части таким образом, чтобы в каждом члене η входило в качестве множителя под интегралом. Таким образом, получается:

$$\int \eta \left(a_n v - \frac{d(a_{n-1}v)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-2}v)}{dx^2} - \frac{d^3(a_{n-3}v)}{dx^3} + \ldots \right) dx +$$

$$+ \eta \left(a_{n-1} v - \frac{d(a_{n-2}v)}{dx} + \ldots \right) + \frac{d\eta}{dx} \left(a_{n-2} v - \frac{d(a_{n-3}v)}{dx} + \ldots \right) +$$

$$+ \ldots + a_0 v \frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} = \int C(x) v \, dx,$$

причём подразумевается неопределённое интегрирование. Если в качестве v возьмём какое-нибудь решение уравнения

$$a_n v - \frac{d(a_{n-1}v)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-2}v)}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n(a_0 v)}{dx^n} = 0,$$

то интеграл слева уничтожается. Обозначая через $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n независимых частных интегралов последнего уравнения, мы можем взять в качестве v линейную комбинацию вида $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$ и подобрать отношение констант c_i таким образом, чтобы при интегрировании от 0 до x все коэффициенты при η и производных от η, кроме одного из них, обратились в нуль при подстановке верхней границы интегрирования. В итоге η и производные от η будут представлены через простые интегралы. Что касается свойств этих функций, то, как мы уже заметили, они вытекают из свойств интегралов линейных однородных уравнений. Действительно, если η — некоторый интеграл неоднородного уравнения, то $\eta + c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ также будет таковым (и это — его общий вид), так как при подстановке в уравнение часть, зависящая от y_i, уничтожится, а член η даст $C(x)$. Отсюда следует, что при возвращении переменной x и всех коэффициентов уравнения к первоначальным значениям функция η переходит в функцию вида $\eta + c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$.

7

Перейдём теперь к специальным случаям. Мы убедились, что интеграл

$$\int s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds,$$

взятый между пределами, равными любым из тех значений, при которых обращается в нуль функция под интегралом, и рассматриваемый как функция переменной x, удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка с коэффициентами, рациональными относительно x. Именно, это следует из того, что значения, принимаемые интегралом после обхода точкой x точек 0, 1, ∞, выражаются линейно и однородно с постоянными коэффициентами через любые два из них. Подставляя интеграл в дифференциальное уравнение, мы легко убеждаемся в том, что оно удовлетворяется. Если же мы подставим в левую часть уравнения вместо определённого, неопределённый интеграл, то неопределённое интегрирование (как мы сейчас увидим) удаётся провести, но результат не обращается в нуль на пределах и потому правая часть оказывается не равной нулю.

Мы имели:

$$P\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma\, x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = \text{const.}\, x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{\alpha-\beta-\gamma}\,ds;$$

причём интеграл берётся между двумя из пределов 0, 1, ∞, x^{-1}. Мы будем считать α и γ равными нулю и напишем

$$y = \int s^{a}(1-s)^{b}(1-xs)^{c}\,ds.$$

Левая часть дифференциального уравнения имеет вид

$$(1-x)\frac{d^2y}{(d\log x)^2} + (a+b+1-(a-c+1)\,x)\frac{dy}{d\log x} + c\,(1+a)\,xy.$$

После подстановки, вместо y, функции

$$\eta = \int\limits_0^s s^{\alpha}(1-s)^{b}(1-xs)^{c}\,ds$$

предыдущее выражение становится функцией от s и x, которую обозначим $F(s, x)$. Когда s совершит замкнутый путь, то η изменится, но новое его значение будет линейно и однородно выражаться через интеграл от 0 до s и интегралы между пределами 0, 1, ∞, x^{-1}. Так как последние интегралы обращают в нуль дифференциальное выражение, то $F(s, x)$ после обхода s по замкнутому пути может только умножиться на постоянную; кроме того, $F(s, x)$ должно обращаться в нуль при $s=0$, 1, ∞, x^{-1}, если на a, b, c наложены надлежащие ограничения. Этого достаточно, чтобы найти выражение для $F(s, x)$. Мы сделаем, впрочем, непосредственную подстановку интеграла η в дифференциальное выражение и получим

$$F(s, x) = cx\int s^{a}(1-s)^{b}(1-xs)^{c-2}\,[(a+1)(1-xs)(1-s)-$$
$$-(b+1)\,s\,(1-xs)-(c-1)\,s\,(1-s)\,x]\,ds = cxs^{a+1}(1-s)^{b+1}(1-xs)^{c-1},$$

причём нижним пределом в интеграле может служить любое значение s, обращающее в нуль правую часть.

Итак, мы видим, что интеграл

$$\eta = \int_0^s s^a (1-s)^b (1-xs)^c \, ds$$

удовлетворяет уравнению

$$(1-x)\frac{d^2\eta}{(d\log x)^2} + (a+b+1-(a-c+1)x)\frac{d\eta}{d\log x} + c(1+a)x\eta =$$
$$= cxs^{a+1}(1-s)^{b+1}(1-xs)^{c-1}.$$

8

Пусть нам дано дифференциальное уравнение вида

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + g(x)\frac{dy}{dx} + h(x)y = 0;$$

мы попытаемся найти его решение в виде определённого интеграла.

Очень часто это удаётся сделать с помощью подстановки

$$y = \int (x-s)^\alpha v\,ds,$$

где v — некоторая функция одной лишь переменной s, и пределы интегрирования не зависят от x. Подставляя в левую часть уравнения, получим под интегралом выражение

$$v\,[\alpha(\alpha-1)f(x)(x-s)^{\alpha-2} + \alpha g(x)(x-s)^{\alpha-1} + h(x)(x-s)^\alpha].$$

Далее разложим $f(x), g(x), h(x)$ по степеням $(x-s)$, и если f, g, h — целые рациональные функции, то у нас будет конечное число членов вида

$$C\varphi(s)(x-s)^{\alpha+h}v.$$

С помощью интегрирований по частям можно в каждом члене увеличивать показатель при $(x-s)$, и в результате под интегралом окажется выражение вида

$$(x-s)^{\alpha+n}P(v),$$

где $P(v)=0$ есть однородное линейное уравнение относительно v, содержащее, возможно, параметр α, но не содержащее x.

Пределы интегрирования мы подберём затем таким образом, чтобы проинтегрированные выражения уничтожались при их подстановке.

Если, например, положим

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad g(x) = b_0 + b_1x, \quad h(x) = c_0,$$

то разложение $f(x)$ по степеням $x-s$ будет содержать три члена, разложение $g(x)$ — два члена, и наибольший показатель $x-s$ будет α.

Для v получится в этом случае уравнение

$$\frac{d^2(vf(s))}{ds^2}+\frac{d}{ds}(v(\alpha-1)\ f'(s)+g(s))+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)f''(s)+\alpha g'(s)+c_0\right)v=0,$$

а пределы интегрирования s_0, s_1 должны быть подобраны так, чтобы выражение

$$\left[\alpha(x-s)^{\alpha-1}vf(s)+(x-s)^{\alpha}\left(\frac{d\,(vf(s))}{ds}+v((\alpha-1)f'(s)+g(s))\right)\right]_{s_0}^{s_1}$$

обращалось в нуль.

Если бы мы оставили верхний предел интегрирования переменным, то линейное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяла бы функция

$$\eta=\int\limits_{s_0}^{s}(x-s)^{\alpha}\,vds,$$

уже не было бы однородным.

Применяя указанную процедуру к дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция

$$y=\int\limits_0^1 s^a\,(1-s)^b\,(1-xs)^c\,ds$$

(заменяя притом x через x^{-1}), мы снова получим уже раньше выведенное уравнение для функции

$$\eta=\int\limits_0^s s^a\,(1-s)^b\,(1-xs)^c\,ds.$$

В частности, посмотрим, как все эти соображения прилагаются к эллиптическим интегралам первого рода.

Так называются интегралы вида

$$\frac{1}{2}\int(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}\,x^{-1/2}\,dx.$$

Если пределами интегрирования являются 0 и 1, то интеграл называется п о л н ы м:

$$K=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}\,x^{-1/2}\,dx.$$

Дифференциальное уравнение для K имеет вид

$$(1-k^2)\,\frac{d^2K}{(2d\log k)^2}-k^2\,\frac{dK}{(2d\log k)}-\frac{1}{4}\,k^2K=0.$$

Выводя из этого уравнения уравнение для интеграла

$$u = \int_0^x (1-x)^{-1/2} (1-k^2x)^{-1/2} x^{-1/2}\, dx,$$

мы будем иметь неоднородное уравнение:

$$(1-k^2)\frac{d^2u}{(2d\log k)^2} - k^2\frac{du}{(2d\log k)} - \frac{1}{4}k^2u =$$
$$= -\frac{1}{2}k^2x^{1/2}(1-x)^{1/2}(1-k^2x)^{-3/2}.$$

Общий его интеграл даётся формулой $u + CK + C'K'$.

Очень многие свойства полных эллиптических интегралов были сначала найдены в результате исследования соответствующих неопределённых интегралов; эти последние являются чрезвычайно простыми функциями параметра x. Так же точно обстоит дело и с более общим интегралом

$$\eta = \int_0^s s^a(1-s)^b(1-xs)^c\, ds.$$

Этот интеграл η оказывается более простой функцией от s, чем от x; при исследовании его как функции s приходится рвссматривать подобные же интегралы, взятые в пределах от 0 до 1 и от 1 до x^{-1}. Общее решение соответствующего дифференциального уравнения даётся формулой

$$\eta + C\int_0^1 + C'\int_1^{\frac{1}{x}}.$$

Аналогичные замечания можно сделать по поводу тех дифференциальных уравнений, которые решаются изложенным выше методом подстановки определённых интегралов. Но и в иных случаях возможно поступать подобным же образом.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_ny = 0.$$

Если подставим в левую часть вместо y некоторую функцию от x и ещё некоторого параметра, то правая часть также станет функцией от x и от этого параметра; обозначим её через X. Рассмотрим затем уравнение

$$a_0\frac{d^n\eta}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}\eta}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n\eta = X;$$

очень часто η при надлежащем выборе X и параметра оказывается более простой функцией параметра, чем переменной x. Эти функции играют важную роль в теории дифференциальных уравнений.

9

Мы займёмся ещё несколько подробнее полными эллиптическими интегралами и исследуем, как меняются K и K', когда k^2, обходя точку 1, возвращается к прежнему значению. K переходит в этом случае в интеграл, взятый по контуру, который состоит из петли, выходящей из 0 и охватывающей k^{-2} в положительном направлении, и отрезка от 0 до 1, и, таким образом, новое значение K оказывается равным

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}\,dx -$$

$$-2\int_1^{k^{-2}} \frac{1}{2} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}(1-k^2x)^{-1/2}\,dx = K - 2iK'.$$

Интеграл K' при этом не изменяется. При положительном обходе k^{-2} вокруг начала K переходит в $3K-2iK'$ и iK' в $2K-iK'$. Положительный обход вокруг ∞, т. е. отрицательный вокруг 0, 1, оставляет K неизменным, а iK' переводит в $iK'+2K$.

Формулы, выражающие зависимость полных эллиптических интегралов от модуля k^2, были выведены Якоби в его «Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum». В качестве переменной он взял $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, но в дифференциальном уравнении ввёл само отношение $\frac{K'}{K}$, т. е. отношение двух частных интегралов. Рассматривая k^2 как функцию отношения $\frac{K'}{K}$, мы должны задать себе вопрос: как изменяется $\frac{K'}{K}$, когда k^2 пробегает значения с положительной мнимой частью?

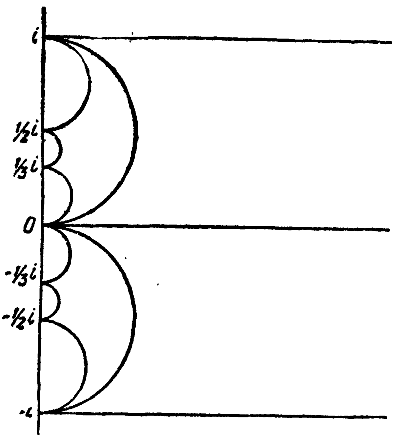
Когда k^2 растёт от 0 до 1, то $\frac{K'}{K}$ остаётся действительным и обращается в ∞ при $k^2=0$ и в 0 при $k'^2 = 1-k^2 = 0$, т. е. при $k^2=1$.

Но в окрестности точки $k^2=0$ K разлагается в ряд, расположенный по целым положительным степеням k^2, а K' представляется в виде

$$-\frac{1}{\pi}\log k^2 - \frac{2}{\pi}(a_0 + a_1k^2 + \ldots).$$

Отсюда можно заключить, что когда k^2 переводится (через значения с положительной мнимой частью) в $-k^2$ и далее в $-\infty$, то $\frac{K'}{K}$ пробегает значения, мнимая часть которых постоянно равна $-i$, так что отрезок 0, $-\infty$ отображается на прямую, параллельную действительной оси и проходящую через точку $-i$.

Далее, K и K' переходят одно в другое, когда k^2 и $1-k^2$ переставляются между собою. С помощью указанного разложения в ряд отсюда следует, что мнимая часть $\frac{K'}{K}$ остаётся постоянной, именно равной $+i$, когда k^2 изменяется от 1 до $+\infty$ и потому значения $\frac{K'}{K}$ располагаются на полукруге, имеющем радиус $\frac{1}{2}$ и центр $-\frac{1}{2}i$ и, следовательно, касающемся действительной оси и прямой, ей параллельной и проходящей через точку $-i$. Прилагаемый чертёж показывает нам те значения, которые принимает $\frac{K'}{K}$, когда k^2 пробегает значения с положительной мнимой частью. Прибавляя сюда область значений $\frac{K'}{K}$, соответствующих значениям k^2 с отрицательной мнимой частью (предполагаем, что соединение происходит по отрезку с концами $k^2=0$ и $k^2=1$), будем иметь фигуру, внутренность которой пробегает величина $\frac{K'}{K}$, когда k^2 движется по всей плоскости, не проходя через отрезки $0, -\infty$ и $1, \infty$.



Мы можем также выяснить, каковы будут значения $\frac{K'}{K}$, когда k^2 перейдёт через один из этих отрезков, например, если сделает обход в положительном направлении вокруг точки 1. Тогда $\frac{K'}{K}$ превратится в $\frac{K'}{K-2iK'}$, и остаётся только установить, какую область пробегает эта последняя величина, когда $\frac{K'}{K}$ пробегает ранее полученную фигуру. Оказывается, что эта область ограничена полукругом с диаметром $0, i$ и ещё тремя меньшими полукругами с диаметрами $\frac{1}{2}i, i$; $\frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i$; $\frac{1}{3}i, 0$.

В точке $k^2=0$ $\frac{K'}{K}$ примет теперь значение $\frac{1}{2}i$, в точке $k^2=1$ значение $\frac{1}{3}i$. Вообще для всех значений $\frac{K'}{K}$, равных $\sqrt{-1}$, умноженному на рациональное число, можно указать все те же соответствующие значения k, к которым, однако, надо будет подходить по разным путям.

Продолжая, таким образом, дальше функцию $\frac{K'}{K}$, мы убедимся, что, сколько бы раз и каким бы способом k^2 ни обходило вокруг точек 0, 1, ∞, отношение $\frac{K'}{K}$ примет каждое значение (с положительной действительной частью) только один раз.

Пусть теперь имеется некоторая функция Y, которая перестаёт быть непрерывной и однозначной только в точках 0, 1, ∞. Подставим в эту функцию вместо x функцию $\varphi(z)$, определяемую тождеством $k^2 = \varphi\left(\frac{K'}{K}\right)$. Тогда Y становится функцией z, которая для всякого значения z принимает одно определённое значение. Если бы, например, x сделало обход около точки нуль, то z перешло бы из одной области в другую. Итак, Y и также все однозначные функции от Y становятся однозначными функциями переменной z, если положим $x = \varphi(z)$, где φ — функция, выражающая k^2 через $\frac{K'}{K}$ [5].

XI. О ЧИСЛЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВЫШАЮЩИХ ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Мне кажется, что благодарность за честь, которую оказала мне Академия, избрав меня в число своих корреспондентов, я лучше всего смогу выразить тем, что, без промедления воспользовавшись предоставленным мне правом, сделаю сообщение о своих исследованиях в области распределения простых чисел, т. е. о вопросе, который, может быть, не покажется лишённым интереса, если вспомнить, что на протяжении продолжительного времени он привлекал внимание Гаусса и Дирихле [1].

В этих исследованиях мне служило исходным пунктом то обстоятельство, что, как было замечено Эйлером, имеет место соотношение

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s},$$

причём p пробегает здесь все простые, а n — все целые положительные числа. Функцию комплексного переменного s, представляемую этими тождественно равными выражениями, поскольку они являются сходящимися, я обозначаю через $\zeta(s)$ [2]. Но оба они оказываются сходящимися лишь в том случае, когда действительная часть s больше, чем 1; впрочем, легко можно указать и такое представление названной функции, которое не теряет смысла ни при каких значениях s. Из равенства

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s} \quad [3]$$

следует

$$\Pi(s-1)\,\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

Обращаясь затем к интегралу

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\, dx}{e^x - 1},$$

где в качестве пути интегрирования принимается кривая, идущая от $+\infty$ до $+\infty$ и охватывающая область, в которой кроме $x=0$ нет особенных точек функции, стоящей под интегралом, легко убедимся, что этот интеграл преобразуется к виду

$$(e^{-\pi s i}-e^{\pi s i})\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1};$$

при этом предполагается, что в многозначной функции $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ логарифм $(-x)$ определён таким образом, чтобы он был действительным при отрицательных значениях x. Отсюда заключаем, что

$$2\sin\pi s\cdot\Pi(s-1)\,\zeta(s) = i\int\limits_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\,dx}{e^x-1},$$

где интегрирование совершается так, как это было только что разъяснено.

Последнее равенство даёт нам значение функции $\zeta(s)$ при любом комплексном значении s и показывает, что она однозначна и для всех конечных значений s, кроме $s=1$, конечна; притом она обращается в нуль, если s равно целому отрицательному чётному числу [4].

Если действительная часть s отрицательна, то значения функции под интегралом при бесконечно больших по модулю значениях x бесконечно малы, и потому можно представить себе, что интегрирование совершается не в положительном направлении по кривой, охватывающей вышеупомянутую область, а в отрицательном направлении по кривой, охватывающей теперь ту область, которую раньше мы мыслили как лежащую вне кривой. Но в этой последней области функция, стоящая под интегралом, имеет разрывы, именно отвечающие значениям x, кратным $\pm 2\pi i$, и, следовательно, интеграл равен сумме интегралов, взятых в отрицательном направлении по путям, окружающим таковые значения. Интеграл, взятый по пути, окружающему значение $n2\pi i$, равен $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$; отсюда получается соотношение

$$2\sin\pi s\cdot\Pi(s-1)\,\zeta(s) = (2\pi)^s\sum n^{s-1}\left((-i)^{s-1}+i^{s-1}\right),$$

связывающее между собой $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$. Пользуясь известными свойствами функции Π, этот результат можно формулировать ещё и таким образом: выражение

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\zeta(s)$$

остаётся неизменным при замене s на $1-s$ [5].

Это свойство функции $\zeta(s)$ побудило меня в общем члене ряда $\sum\frac{1}{n^s}$ ввести множитель $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ вместо $\Pi(s-1)$; при этом получается очень удобное выражение для функции $\zeta(s)$.

В самом деле, мы имеем равенство

$$\frac{1}{n^s}\,\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\int_0^\infty e^{-n^n\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

откуда, если введём обозначение

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x}=\psi(x),$$

следует

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_0^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}\,dx$$

или, так как

$$2\psi(x)+1=x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right),\ ^{1})$$

то

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\int_1^\infty \psi(x)\,x^{\frac{s}{2}-1}dx+\int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{\frac{s-3}{2}}-x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.$$

Теперь положим $s=\frac{1}{2}+ti$ и ещё

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\,\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\xi(t).$$

Тогда

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-\left(tt+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)\,x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx;$$

иначе говоря,

$$\xi(t)=4\int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\,\psi'(x)\right)}{dx}\,x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\,t\log x\right)dx.$$

Функция $\xi(t)$ конечна для всех конечных значений t и разлагается в очень быстро сходящийся ряд, расположенный по степеням tt [6]. Так как при значениях s, действительная часть которых больше единицы,

$$\log\zeta(s)=-\sum\log\left(1-p^{-s}\right)$$

---

[1]) J a c o b i's gesammelte Werke, т. I, стр. 235.

остаётся конечным и то же справедливо относительно логарифмов других множителей, из которых составляется $\xi(t)$, то функция $\xi(t)$ может обращаться в нуль только в том случае, если мнимая часть t заключена между $\frac{1}{2}i$ и $-\frac{1}{2}i$. Число корней уравнения $\xi(t)=0$, действительная часть которых заключена между 0 и T, приблизительно равно

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi},$$

ибо интеграл $\int d\log\xi(t)$, взятый в положительном направлении по контуру той прямоугольной области, внутри которой мнимая часть t меняется от $-\frac{1}{2}i$ до $+\frac{1}{2}i$, а действительная — от 0 до T, равен

$$\left(T\log\frac{T}{2\pi}-T\right)i$$

(с относительной погрешностью порядка $\frac{1}{T}$); а такой интеграл равен числу лежащих в этой области корней $\xi(t)=0$, умноженному на $2\pi i$ [7]. И в самом деле, в указанных пределах содержится, примерно, столько действительных корней; представляется весьма вероятным, что и все корни являются действительными. Во всяком случае было бы желательно найти строгое доказательство этого предложения; после нескольких напрасных, не очень настойчивых попыток разыскать таковое, я временно от них отказался, так как для ближайшей цели моего исследования в этом не представлялось надобности [8].

Предполагая, что α пробегает значения, равные корням уравнения $\xi(\alpha)=0$, можно представить $\log\xi(t)$ в виде

$$\sum\log\left(1-\frac{tt}{\alpha\alpha}\right)+\log\xi(0);$$

действительно, так как плотность корней величины t возрастает вместе с t только лишь как $\log\frac{t}{2\pi}$, то это выражение, сходящееся и при бесконечно больших значениях t, оказывается порядка $t\log t$; следовательно, оно отличается от $\log\xi(t)$ на такую функцию от tt, которая при конечных значениях t остаётся непрерывной и конечной и, будучи разделена на tt, становится бесконечно малой, когда t бесконечно велико. Поэтому рассматриваемая разность сводится к постоянной, значение которой может быть определено посредством подстановки $t=0$ [9].

Основываясь на предыдущем, мы можем теперь определить число простых чисел, меньших чем x.

Обозначим через $F(x)$ это число, если только x не есть простое число; если же x — простое, то $F(x)$ пусть обозначает то же число, увеличенное на $\frac{1}{2}$, так что при тех значениях x, где $F(x)$ изменяется скачком, будет иметь место равенство

$$F(x)=\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}.$$

Если в соотношении

$$\log \zeta(s)=-\sum \log(1-p^{-s})=\sum p^{-s}+\frac{1}{2}\sum p^{-2s}+\frac{1}{3}\sum p^{-3s}+\ldots$$

заменить p^{-s} через $s\int\limits_{p}^{\infty} x^{-s-1}\,dx$, p^{-2s} через $s\int\limits_{p^2}^{\infty} x^{-s-1}\,dx$ и т. д., то получится

$$\frac{\log\zeta(s)}{s}=\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,x^{-s-1}\,dx,$$

где положено

$$f(x)=F(x)+\frac{1}{2}F\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{3}F\left(x^{\frac{1}{3}}\right)+\ldots$$

Это равенство справедливо при всяком комплексном значении $s=a+bi$, если только $a>1$. Но если при выполнении этого условия имеет место соотношение

$$g(s)=\int\limits_{0}^{\infty} h(x)\,x^{-s}\,d\log x,$$

то на основании известной теоремы Фурье можно функцию h выразить через функцию g. Допустим, что $h(x)$ — действительная функция, и положим:

$$g(a+bi)=g_1(b)+ig_2(b);$$

тогда наше соотношение разбивается на два следующих:

$$g_1(b)=\int\limits_{0}^{\infty} h(x)\,x^{-a}\cos(b\log x)\,d\log x,$$

$$ig_2(b)=-i\int\limits_{0}^{\infty} h(x)\,x^{-a}\sin(b\log x)\,d\log x.$$

Умножая последние равенства на

$$(\cos(b\log y)+i\sin(b\log y))\,db$$

и интегрируя от $-\infty$ до $+\infty$, получим, согласно теореме Фурье, в правых частях каждого из них $\pi h(y)\,y^{-a}$, откуда следует, если сложим полученные равенства и умножим на iy^a, что

$$2\pi i h(y)=\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)\,y^s\,ds,$$

причём интегрирование выполняется таким образом, что действительная часть s остаётся постоянной [10].

В случае, если для какого-нибудь значения y функция $h(y)$ претерпевает скачкообразное изменение, последний интеграл даёт нам среднее арифметическое из предельных значений функции h по обе стороны точки разрыва. Но вследствие введённого выше условия этим же свойством обладает функция $f(x)$, откуда следует, что при всех значениях y имеет место формула

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s \, ds.$$

Вместо $\log \zeta(s)$ сюда можно подставить полученное для него прежде выражение

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum^{\alpha} \log\left(1 + \frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha\alpha}\right) + \log \xi(0);$$

но тогда интегралы, соответствующие отдельным членам этого выражения, не были бы сходящимися, и потому целесообразно предварительно произвести интегрирование по частям, причём получается

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d}{ds}\left(\frac{\log \zeta(s)}{s}\right) x^s \, dx.$$

Так как

$$-\log \Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \lim\left(\sum_{n=1}^{n=m} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2}\log m\right) \text{ (при } m = \infty)$$

и, следовательно,

$$-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s} \log \Pi\left(\frac{s}{2}\right)\right] = \sum_{1}^{\infty} \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)\right],$$

то каждый из членов рассматриваемого выражения, сумма которых равна $f(x)$, за исключением

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{ss} \log \xi(0)\, x^s \, ds = \log \xi(0),$$

принимает вид

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s} \log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)\right] x^s \, dx.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{d\beta}\left[\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right]=\frac{1}{(\beta-s)\,\beta}$$

и, если действительная часть s больше, чем действительная часть β, то

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s\,ds}{(\beta-s)\,\beta}=\frac{x^\beta}{\beta},$$

причём последнее выражение равно $\int\limits_{\infty}^{x} x^{\beta-1}\,dx$ или $\int\limits_{0}^{x} x^{\beta-1}\,dx$, смотря по тому, будет ли действительная часть β отрицательной или положительной. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right]x^s\,ds=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\,ds,$$

а это равно

$$\int\limits_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\text{const.}\quad \text{в первом случае,}$$

$$\int\limits_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx+\text{const.}\quad \text{во втором случае.}$$

В первом случае постоянная интегрирования определится, если действительной части β придадим бесконечно большое отрицательное значение; во втором случае интеграл, взятый от 0 до x, принимает значения, различающиеся на $2\pi i$, в зависимости от того, совершается ли интегрирование с положительным или отрицательным аркусом, и будет бесконечно мал, если коэффициент при i в значении β будет бесконечно большим положительным или соответственно бесконечно большим отрицательным. Отсюда можно сделать заключение о том, как следует определять $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$, чтобы постоянную интегрирования можно было отбросить.

Если подставим найденные значения в выражение, полученное для $f(x)$, то будем иметь формулу

$$f(x)=\mathrm{Li}(x)-\sum\nolimits^{\alpha}\left(\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)+$$

$$+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x}+\log\xi(0)\ [11],$$

причём α в сумме $\sum^{\alpha}$ пробегает все положительные (или с положительной действительной частью) корни уравнения $\xi(\alpha)=0$ в порядке их возрастания. Можно было бы легко показать, подвергнув функцию ξ более внимательному исследованию, что при таком порядке суммирования сумма ряда

$$\sum \left(\mathrm{Li}\left(x^{1/2+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{1/2-\alpha i}\right)\right)\log x$$

оказывается равной пределу, к которому стремится интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha\alpha}\right)\right]x^s\,ds$$

при неограниченном возрастании b; при ином порядке суммирования эта сумма могла бы принять любое наперёд заданное действительное значение.

Функцию $F(x)$ можно выразить через функцию $f(x)$ посредством обращения формулы

$$f(x)=\sum\frac{1}{n}\,F\left(x^{\frac{1}{n}}\right);$$

именно, имеет место равенство

$$F(x)=\sum(-1)^{\mu}\,\frac{1}{m}\,f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

где m принимает в порядке возрастания все целые положительные значения, не делящиеся ни на какой квадрат, кроме 1, а μ обозначает число простых множителей числа m.

Если в сумме $\sum^{\alpha}$ ограничиться конечным числом членов, то производная выражения, полученного для $f(x)$, или же (если отбросим величину, убывающую очень быстро при возрастании x) выражение

$$\frac{1}{\log x}-2\sum^{\alpha}\frac{\cos(\alpha\log x)\,x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

позволяет определить приближённо плотность простых чисел $+\frac{1}{2}$ плотности квадратов простых чисел $+\frac{1}{3}$ плотности кубов простых чисел и т. д. около значения x.

Итак, известная приближённая формула $F(x)=\mathrm{Li}(x)$ справедлива лишь с точностью до величин порядка $x^{1/2}$ и даёт несколько преувеличенное значение $F(x)$; непериодические члены в нашей формуле для $F(x)$ (если отбросим величины, остающиеся ограниченными при неограниченном возрастании x) таковы:

$$\mathrm{Li}(x)-\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^{1/2})-\frac{1}{3}\,\mathrm{Li}(x^{1/3})-\frac{1}{5}\,\mathrm{Li}(x^{1/5})+\frac{1}{6}\,\mathrm{Li}(x^{1/6})-\frac{1}{7}\,\mathrm{Li}(x^{1/7})+\ldots$$

Как показывает сделанное Гауссом и Гольдшмидтом сопоставление $\mathrm{Li}(x)$ и числа простых чисел, меньших, чем x (вычисления были доведены до $x = 3\,000\,000$), уже начиная с первой сотни тысяч, это число оказывается постоянно меньшим, чем $\mathrm{Li}(x)$, и притом разность, много раз колеблясь, постепенно растёт вместе с x. Уплотнения и разрежения местного характера, зависящие от периодических членов, также привлекали внимание при подсчётах, хотя закономерности в этом явлении подмечено не было. Если будет предпринят новый подсчёт, представляется интересным проследить за влиянием на плотность распределения простых чисел тех периодических членов, которые имеются в нашей формуле. Более правильное поведение, чем $F(x)$, должна была бы обнаружить функция $f(x)$: уже в пределах первой сотни она в среднем весьма близко подходит к $\mathrm{Li}(x) + \log \xi(0)$ [12].

XII. О ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Настоящее сочинение о тригонометрических рядах состоит из двух существенно различных частей. Первая часть содержит историю исследований, связанных с произвольными (заданными графически) функциями и их представлением посредством тригонометрических рядов. В этой части, сопоставляя различные воззрения, я не преминул использовать кое-какие намёки и указания знаменитого математика, которому мы обязаны первой значительной работой в этой области. Что касается второй части, то в ней излагаются исследования о представлении функции тригонометрическим рядом, которые охватывают и до настоящего времени не рассмотренные случаи. Здесь оказалось необходимым дать краткие предварительные объяснения по поводу понятия определённого интеграла и условий, при которых это понятие является не лишённым смысла.

ИСТОРИЯ ВОПРОСА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

1

Ряды, которым Фурье дал наименование тригонометрических, а именно, ряды вида

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + \\ + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots,$$

играют значительную роль в той части математики, которая имеет дело с совершенно произвольными функциями. Можно даже утверждать с полным основанием, что наиболее существенные успехи в этой части математики, столь важной для физических приложений, были связаны с установлением более ясного понимания природы этих рядов. Уже при первых математических исследованиях, приведших к рассмотрению произвольных функций, возник вопрос: можно ли совершенно произвольную функцию выразить с помощью ряда такого вида?

Это случилось в середине прошлого столетия, в связи с теми исследованиями колебания струн, которыми тогда занимались крупнейшие математики эпохи. Однако, дать представление об их воззрениях на интересующий нас вопрос затруднительно, не изложив более или менее подробно самой проблемы колебания струн.

Предположим, что натянутая струна совершает колебания в одной и той же плоскости; обозначим через x расстояние некоторой её точки от начальной, через y — расстояние этой точки в момент времени t от её положения равновесия. Известно, что при условиях, которые в действительности выполняются приближённо, форма струны определяется дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

причём α не зависит от t, а если струна всюду одинаковой толщины, то и от x.

Общее решение этого дифференциального уравнения впервые дал Даламбер.

Он доказал [1]), что всякая функция переменных x и t, удовлетворяющая уравнению тождественно, должна представляться формулой

$$f(x+\alpha t)+\varphi(x-\alpha t);$$

это становится очевидным, если ввести новые независимые переменные $x+\alpha t$, $x-\alpha t$ вместо x, t, причём

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ переходит в } 4\frac{\partial \dfrac{\partial y}{\partial (x+\alpha t)}}{\partial (x-\alpha t)}.$$

Кроме названного дифференциального уравнения, которое получается из общих законов движения, величина y должна ещё удовлетворять дополнительному требованию — обращаться в нуль в тех точках, где струна закреплена; итак, если одна из этих точек $x=0$, а другая $x=l$, то должно быть

$$f(\alpha t) = -\varphi(-\alpha t), \quad f(l+\alpha t) = -\varphi(l-\alpha t)$$

и, следовательно,

$$f(z) = -\varphi(-z) = -\varphi(l-(l+z)) = f(2l+z),$$
$$y = f(\alpha t+x) - f(\alpha t - x).$$

Установив таким образом общий вид решения проблемы, Даламбер рассматривает в продолжении [2]) своей работы уравнение $f(z)=f(2l+z)$; другими словами, он разыскивает аналитические выражения, которые остаются неизменными при увеличении z на $2l$.

[1]) Mémoires de l'Académie de Berlin, 1747, стр. 214.

[2]) Там же, стр. 220.

Значительной заслугой Эйлера, который в следующем году дал[1]) новое изложение результатов Даламбера, было то, что он лучше понял сущность условий, которым должна быть подчинена функция $f(z)$. Исходя из механических соображений, он заметил, что движение струны вполне определено, если в некоторый момент времени заданы форма струны и скорость каждой её точки $\left(\text{т. е. } y \text{ и } \dfrac{\partial y}{\partial t}\right)$, и установил, что, считая эти две функции заданными в виде двух произвольно проведённых кривых, можно всегда вывести геометрическое построение функции Даламбера $f(z)$. В самом деле, если допустим, что при $t=0$ должно быть

$$y = g(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = h(x),$$

то отсюда следует для всех значений x, заключённых между 0 и l,

$$f(x) - f(-x) = g(x), \qquad f(x) + f(-x) = \frac{1}{a}\int h(x)\,dx;$$

эти равенства определяют функцию $f(z)$ между $-l$ и l, а тогда для всех иных значений z эта функция определяется из соотношения

$$f(z) = f(2l + z).$$

Таков указанный Эйлером метод определения функции $f(z)$, изложенный в несколько отвлечённой, но в наше время общеупотребительной форме.

Даламбер поспешил выступить против этого расширенного толкования его идеи[2]), так как он подразумевал, что y непременно должно быть выражено через t и x аналитически.

Но прежде чем последовал ответ со стороны Эйлера, была опубликована работа Даниила Бернулли[3]), в которой тот же вопрос был трактован совсем иначе. Еще раньше Даламбера Тэйлор обратил внимание[4]) на то, что уравнение $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = aa\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, а вместе с тем и условие $y=0$, при $x=0$ и при $x=l$, удовлетворяется, если положить $y = \sin\dfrac{n\pi x}{l}\cos\dfrac{n\pi a t}{l}$ и считать n целым. Отсюда он выводил как следствие, что, помимо своего основного тона, струна может издавать ещё тоны, являющиеся основными для струн, длина которых вдвое, втрое, вчетверо и т. д. меньше, все же прочие свойства остаются неизменными; притом он считал найденное им решение самым общим, т. е. полагал, что если целое

---

[1]) Там же, 1748, стр. 69.

[2]) Там же, 1750, стр. 358. «Как мне кажется, незаконно представлять переменную y аналитически, если не предполагать, что она есть некоторая функция от t и x. Но при этом предположении мы получаем решение проблемы лишь в том случае, если форма колеблющейся струны может быть характеризована одним единственным уравнением».

[3]) Там же, 1753, стр. 147.

[4]) Taylor de methodo incrementorum.

число n подобрано в соответствии с высотой издаваемого струной тона, то колебание выражается, по крайней мере приближённо, предыдущим уравнением. И вот Бернулли, наблюдая, что струна может и одновременно издавать несколько ей свойственных тонов, пришёл к заключению, что струна может, в согласии с теорией, колебаться также по закону

$$y = \sum a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a}{l}(t - \beta_n),$$

и так как все наблюдаемые видоизменения физического явления удалось объяснить, исходя из этого уравнения, то именно такого рода колебания он признал самыми общими [1]). Чтобы обосновать это убеждение, он подверг исследованию колебания невесомой натянутой нити, в отдельных точках которой укреплены конечные массы, и доказал, что колебания нити всегда разлагаются на колебания указанного типа, число которых соответствует числу весомых точек, и из которых каждое для всех этих точек имеет одинаковую продолжительность.

Эти результаты Бернулли вызвали отклик со стороны Эйлера, новая работа которого [2]) была напечатана в Мемуарах Берлинской академии непосредственно после работы Бернулли. Продолжая стоять на точке зрения иной, чем Даламбер, Эйлер здесь неизменно исходит из допущения, что функция $f(z)$ в пределах между $-l$ и l совершенно произвольна [3]), и приходит к выводу, что решение Бернулли (которое он уже раньше приводил в качестве частного решения) в том и только в том случае может быть названо общим, если ордината совершенно произвольной кривой, заданной в промежутке значений абсциссы x между 0 и l, может быть представлена рядом

$$a_1 \sin \frac{x\pi}{l} + a_2 \sin \frac{2x\pi}{l} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \frac{x\pi}{l} + b_2 \cos \frac{2x\pi}{l} + \ldots$$

Но в те времена никто не сомневался, что все преобразования, которые можно совершить над аналитическим выражением — безразлично, конечным или бесконечным, — законны для любых значений переменных или, самое большее, теряют смысл лишь в некоторых особых случаях. Поэтому невозможно было себе представить, чтобы алгебраическая или вообще какая бы то ни было аналитическая, но не периодическая, кривая могла быть выражена рядом тригонометрических функций. Таким образом, Эйлер полагал, что он решает вопрос не в пользу Бернулли.

Однако, разногласие между Эйлером и Даламбером всё ещё оставалось неустранённым. Это побудило молодого, в то время ещё мало из-

[1]) Mémoires de l'Académie de Berlin, 1753, стр. 157, XIII.
[2]) Там же, 1753, стр. 196.
[3]) Там же, стр. 214.

вестного математика Лагранжа выступить с новым решением задачи, причём он пришёл к результатам Эйлера. Он предпринял [1]) исследование колебаний невесомой нити с закреплением равных (в конечном числе) масс, сосредоточенных в равноотстоящих точках, и затем рассматривал, как изменяются эти колебания, когда число масс неограниченно возрастает. Хотя первая часть работы Лагранжа проведена с величайшим искусством в части, касающейся аналитических приёмов, но переход от конечного к бесконечному во второй части оставляет желать слишком многого, что дало возможность Даламберу в статье, поставленной им на первом месте в его «Opuscules mathématiques», приписать именно своему решению славу наибольшей общности. Итак, по этому вопросу точки зрения крупнейших математиков эпохи, как были, так и остались различными; в дальнейших работах каждый из них, в сущности, остался при своём мнении.

Подводя итог, сопоставим высказанные ими в связи с этой проблемой воззрения на произвольные функции и возможность их представления с помощью тригонометрического ряда. Эйлер впервые ввёл в анализ эти функции и, опираясь на геометрическую интуицию, стал применять к ним методы исчисления бесконечно малых. Лагранж [2]) считал правильными результаты Эйлера (геометрическое построение колебания струны), но его не удовлетворяло у Эйлера геометрическое понимание этих функций. Напротив, Даламбер [3]) высказывался против трактовки Эйлером дифференциального уравнения струны и ограничивался тем, что оспаривал правильность его результатов, исходя из того соображения, что в случае совершенно произвольных функций нельзя знать заранее, непрерывны ли их производные. Что касается решения, предложенного Бернулли, то все трое были согласны с тем, что его не следует считать общим; но тогда как Даламбер [4]), желая найти аргументацию, которая позволила бы заключить, что решение Бернулли менее общее, чем его собственное, был вынужден утверждать, что даже заданная аналитически периодическая функция не всегда может быть представлена тригонометрическим рядом, Лагранж, с другой стороны, полагал [5]), что возможность такого представления доказуема.

2

На протяжении почти пятидесяти лет в вопросе об аналитической представимости произвольных функций не было достигнуто существенных успехов. Но вот одно замечание Фурье бросило новый свет на эту проблему: началась новая эпоха в этой области математики, что скоро

[1]) Miscellanea Taurinensia, т. I, Recherches sur la nature et la propagation du son.
[2]) Miscellanea Taurinensia, т. II, Pars math., стр. 18.
[3]) Opuscules mathématiques p. d'Alambert, т. I, 1761, стр. 16, VII—XX.
[4]) Opuscules mathématiques, т. I, стр. 42, XXIV.
[5]) Misc Taur., т. III, Pars math., стр. 221, XXV.

сказалось в последовавшем вслед за тем блестящем развитии математической физики. Фурье заметил, что в тригонометрическом ряде,

$$f(x)=\begin{cases} a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots \\ +\frac{1}{2}b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\ldots \end{cases}$$

коэффициенты могут быть выражены формулами

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Он убедился, что эти формулы сохраняются и в том случае, когда функция $f(x)$ задана совершенно произвольно; он взял в качестве $f(x)$ так называемую прерывную функцию (ординату ломаной линии для абсциссы x) и получил при этом ряд, который действительно при всех значениях переменной давал значение функции.

Когда Фурье в одной из своих первых работ по теории тепла, предложенной им Французской академии[1]) (21 декабря 1807 г.), впервые сформулировал теорему о том, что совершенно произвольно (графически) заданная функция может быть представлена тригонометрическим рядом, то это утверждение для маститого Лагранжа было столь неожиданным, что он выступил с самыми решительными возражениями. В архивах Парижской академии должны храниться кое-какие записи по этому поводу[2]). Однако, Пуассон всякий раз, как ему приходится пользоваться тригонометрическими рядами для представления произвольных функций, ссылается[3]) на одно место в работах Лагранжа по колебаниям струн, где будто бы установлена возможность такого представления. Чтобы опровергнуть это утверждение (которое нельзя объяснить иначе, как хорошо известным фактом соперничества между Фурье и Пуассоном[4]), нам придётся ещё раз обратиться к самой работе Лагранжа, так как об упомянутом эпизоде в Академии нет никаких печатных свидетельств.

Именно, в месте, которое цитирует Пуассон[5]), мы в самом деле находим формулу:

«$$y=2\int Y\sin X\pi\,dX\times\sin x\pi+2\int Y\sin 2X\pi\,dX\times\sin 2x\pi+$$
$$+2\int Y\sin 3X\pi\,dX\times\sin 3x\pi+\text{etc.}+2\int Y\sin nX\pi\,dX\times\sin nx\pi,$$

так что при значении $x=X$ получается $y=Y$, где Y — ордината, отвечающая абсциссе X».

Правда, эта формула выглядит точно так же, как ряд Фурье, и при беглом чтении смешение легко может возникнуть; но причина этому та,

[1]) Bulletin des sciences p. la soc. philomatique, т. I, стр. 112.

[2]) Изустное сообщение профессора Дирихле.

[3]) В частности, в хорошо известном Traité de mécanique, № 323, стр. 638.

[4]) Сообщение в Bulletin des sciences о докладе Фурье принадлежит Пуассону.

[5]) Misc. Taurin., т. III, Pars. math., стр. 261.

что Лагранж употребляет знак $\int dX$ там, где он должен был бы, согласно принятым в наше время обозначениям, написать $\sum \Delta X$. Формула даёт решение задачи: подобрать конечную сумму синусов

$$a_1 \sin x\pi + a_2 \sin 2x\pi + \ldots + a_n \sin nx\pi$$

таким образом, чтобы она при значениях x

$$\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$$

(которые Лагранж обозначает неопределённым символом X) принимала наперёд заданные значения. Если бы Лагранж пожелал заставить n в этой формуле расти до бесконечности, то, конечно, он получил бы результат Фурье. Но при внимательном чтении его работы мы видим, что он очень далёк от мысли о том, что совершенно произвольная функция может быть представлена бесконечным рядом синусов. Но потому и была предпринята им эта работа, что он не видел возможности представить с помощью выше приведённой формулы произвольную функцию, а по поводу тригонометрических рядов полагал, что с их помощью может быть представлена каждая аналитически заданная периодическая функция. Конечно, нам теперь трудно понять, как Лагранж из своей формулы мог не получить ряда Фурье; но это объясняется тем, что спор между Эйлером и Даламбером вызвал у него известное предубеждение по этому поводу. Он считал, что должна быть предварительно полностью решена проблема колебания для случая распределения произвольных масс в конечном числе точек, и только тогда можно будет совершить предельный переход. Этот путь неизбежно связан с весьма обширными исследованиями [1]), без которых Лагранж мог бы, однако, обойтись, если бы знал ряд Фурье [1].

Итак, Фурье вполне правильно разгадал природу тригонометрических рядов [2]); с тех пор они не раз были применяемы в математической физике для представления произвольных функций, причём в каждом отдельном случае можно было легко убедиться, что ряд Фурье действительно сходится к значению исходной функции; но прошло не мало времени, пока это общее предложение было доказано в общем виде.

Доказательство, данное Коши (в докладе Парижской академии 27 февраля 1826 г. [3]), недостаточно, как это было показано Дирихле [4]). Коши исходит из допущения, что функция, получаемая после подстановки в данной периодической функции $f(x)$ вместо x комплексного аргумента $x+yi$, конечна для всякого значения y. Но это может быть только в том случае, если функция сводится к постоянной величине. Но легко, тем не менее, усмотреть, что такое допущение для дальней-

[1]) Misc. Taur., т. III, Pars math., стр. 251.
[2]) Bulletin d. sc., т. I, стр. 115 «Les coefficients $a, a', a'', \ldots$ étant ainsi déterminés etc.»
[3]) Mémoires de l'Acad. des sc. de Paris, т. VI, стр. 603.
[4]) Journal für die Mathematik (Crelle), т. IV, стр. 157-158.

ших заключений не является необходимым. Достаточно предположить, что существует функция $\varphi(x+yi)$, конечная для всех положительных значений y, и что действительная часть при $y=0$ становится равной данной периодической функции $f(x)$. Если допустить это предложение (которое, в самом деле, правильно[1]), то указанный Коши путь действительно ведёт к цели; и обратно, это предложение следует из теории рядов Фурье [2].

3

Наконец, в январе 1829 г., в журнале Крелля[2]) появился мемуар Дирихле, в котором со всей строгостью был разрешён вопрос о возможности представления с помощью тригонометрических рядов тех функций, которые в любом промежутке допускают интегрирование и не имеют бесконечного числа максимумов и минимумов.

Дирихле нашёл путь к решению этой задачи, исходя из того соображения, что бесконечные ряды разделяются на два существенно различных класса, смотря по тому, остаются ли они сходящимися, если сделать все члены положительными, или же этого нет. В первом случае члены ряда могут быть как угодно переставлены, во втором же сумма ряда, напротив, зависит от порядка членов. В самом деле, пусть в ряде второго класса положительные члены будут

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

а отрицательные

$$-b_1,\ -b_2,\ -b_3,\ \ldots$$

Тогда ясно, что обе суммы $\sum a$ и $\sum b$ должны быть расходящимися; действительно, если бы обе были сходящимися, то и весь данный ряд сходился бы после выравнивания знаков; а если бы сходилась только одна, то данный ряд был бы расходящимся. Нетрудно видеть, что при надлежащей перестановке членов ряд может принять любое заданное значение C. В самом деле, станем брать по очереди сначала положительные члены ряда, пока их сумма не превысит C, затем отрицательные, пока сумма не станет меньше C; при этом отклонение суммы от C никогда не станет больше, чем абсолютное значение члена, предшествующего последней перемене знака. Но так как и величины a и величины b с возрастанием индекса становятся бесконечно малыми, то отклонения от C при достаточном продолжении ряда станут сколь угодно малыми, а это значит, что ряд сходится к величине C.

Только к рядам первого класса применимы законы конечных сумм; только эти ряды могут быть в подлинном смысле рассматриваемы как сумма всех своих членов, о рядах же второго класса того же сказать нельзя — обстоятельство, упущенное из виду математиками прошлого столетия, вероятно, по той причине, что ряды, расположенные по воз-

[1]) Доказательство можно найти в диссертации автора.

[2]) Том IV, стр. 157.

растающим степеням переменной, вообще говоря (т. е. для всех значений переменной, кроме некоторых отдельных), принадлежат к первому классу.

Но ряды Фурье принадлежат не обязательно к первому классу; поэтому об их сходимости нельзя судить, как это пытался делать Коши [1]), по закону убывания членов. На самом деле нужно показать, что конечный ряд

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\sin x+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha\,d\alpha\sin 2x+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\sin nx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos\alpha d\alpha\cos x+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos 2\alpha\,d\alpha\cos 2x+\ldots+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha\cos nx,$$

или, что то же, интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

при неограниченном возрастании n стремится к предельному значению $f(x)$.

Доказательство Дирихле основывается на следующих двух предложениях:

1) если $0<c\leqslant\frac{\pi}{2}$, то при возрастании n выражение $\int\limits_0^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$ стремится к пределу $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$;

2) если $0<b<c\leqslant\frac{\pi}{2}$, то при возрастании n выражение $\int\limits_b^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$ стремится к пределу 0,

— предполагая, что функция $\varphi(\beta)$ в соответствующих промежутках или всё время возрастает или всё время убывает.

Основываясь на этих предложениях, легко притти к заключению, что если только функция f не переходит бесконечное число раз от воз-

[1]) См. Дирихле, в журнале Крелля, том IV, стр. 158. «Quoi qu'il en soit de cette première observation, ...à mesure que n croît».

растания к убыванию и обратно, — интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

может быть представлен в виде суммы конечного числа слагаемых, из которых при неограниченном возрастании n одно[1]) стремится к $\frac{1}{2}f(x+0)$, другое к $\frac{1}{2}f(x-0)$, а остальные — к нулю.

Отсюда следует, что с помощью тригонометрического ряда может быть представлена всякая такая периодически повторяющаяся через промежуток 2π функция, которая

1) всюду допускает интеграцию,

2) не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов и

3) в точках, где её значение меняется скачками, принимает значение, равное среднему арифметическому предельных значений слева и справа.

Функция, удовлетворяющая первым двум требованиям, но не удовлетворяющая третьему, очевидно, не может быть представлена тригонометрическим рядом, так как тригонометрический ряд, который представлял бы её всюду, кроме точек разрыва, в самих точках разрыва имел бы сумму, отличную от соответствующего значения функции. Но может ли быть представлена тригонометрическим рядом функция, не удовлетворяющая первым двум требованиям, и в каких случаях такое представление возможно, — этот вопрос в работе Дирихле остаётся открытым.

Работа Дирихле создала твёрдое основание для большого числа важных исследований из области математического анализа. Ему удалось привести в полную ясность вопрос, о котором Эйлер имел ошибочное мнение, и тем самым решить задачу, которая занимала целый ряд выдающихся математиков на протяжении семидесяти лет с лишним (с 1753 г.). В самом деле, эта задача была им решена с исчерпывающей полнотой для всех тех случаев, когда она могла бы быть поставлена природой (а только о таких случаях и шла речь), ибо при всём несовершенстве наших знаний о том, как силы и состояния материи изменяются в бесконечно малом в зависимости от места и времени, всё же мы можем с уверенностью считать, что те функции, на которые не распространяется исследование Дирихле, в природе не встретятся.

Тем не менее нужно думать, что случаи, не рассмотренные Дирихле, заслуживают внимания по двум причинам.

[1]) Если функция f не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов, то нетрудно показать, что, когда аргумент приближается к значению x, убывая или возрастая, значения функции или приближаются к конечным пределам $f(x+0)$ и $f(x-0)$ (обозначения Дирихле в «Dove Repertorium der Physik», т. I, стр. 170), или становятся бесконечно большими.

Во-первых, как указывает сам Дирихле в заключении своей работы, этот вопрос стоит в теснейшей связи с основными принципами исчисления бесконечно малых и может служить для того, чтобы привести эти принципы в состояние большей ясности и определённости. С этой точки зрения исследование упомянутых случаев представляет непосредственный интерес.

Во-вторых, область применения рядов Дирихле не ограничивается одними лишь физическими задачами; эти ряды применяются теперь с большим успехом и в одной области чистой математики, а именно в теории чисел, и можно думать, что здесь как раз те функции, представимость которых с помощью тригонометрических рядов не была выяснена Дирихле, должны играть известную роль.

В конце своего мемуара Дирихле указывает, что он ещё вернётся к рассмотрению этих случаев, но его обещание до настоящего времени осталось невыполненным. Работы Дирксена и Бесселя по поводу тригонометрических рядов также не заполняют оставшегося пробела и уступают работе Дирихле в смысле строгости и общности. Работа Дирксена [1]), опубликованная почти одновременно с работой Дирихле и написанная, очевидно, без знакомства с этой последней, в общем намечает правильный путь, однако, содержит ряд неточностей. Помимо того, что этот автор в одном частном случае [2]) получает ошибочный результат, относящийся к сумме ряда, он основывается (в одном вспомогательном рассуждении) на разложении в ряд, возможном лишь при некоторых дополнительных предположениях [3]), так что его доказательство оказывается пригодным только для функций, первая производная которых всюду конечна. Бессель [4]) ставит своей целью упростить доказательство Дирихле. Но указываемые им изменения в доказательстве не ведут к существенному упрощению результатов, а—самое большее—вводят в изложение понятия, являющиеся в большей степени употребительными, тогда как строгость и общность терпят при этом заметный ущерб.

Итак, вопрос о представимости функции тригонометрическим рядом решён до настоящего времени при двух предположениях: функция допускает всюду интеграцию и не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов. Если отказаться от второго предположения, то с помощью теорем Дирихле об интегралах решить вопрос не удаётся; если отказаться от первого, то становится невозможным уже определение коэффициентов по формулам Фурье. В следующем ниже изложении избегнуты какие-либо предположения о природе функции, и этим обусловливается путь самого исследования: столь прямым, каков путь Дирихле, этот путь, по существу дела, быть не может.

---

1) Журнал Крелля, т. IV, стр. 170.

2) Там же, формула 22.

3) Там же, раздел 3.

4) Schumacher, Astronomische Nachrichten, № 374 (т. 16, стр. 229).

О ПОНЯТИИ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА И УСЛОВИЯХ, ПРИ КОТОРЫХ ОН ИМЕЕТ СМЫСЛ

4

Неотчётливость, которая свойственна в ряде основных моментов учению об определённом интегрировании, вынуждает нас к предварительным разъяснениям по поводу понятия определённого интеграла и условий, при которых оно имеет смысл.

Итак, вот первый вопрос: что нужно понимать под знаком $\int_a^b f(x)\,dx$? [3].

Отвечая на этот вопрос, выберем между a и b ряд числовых значений $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, следующих одно за другим в порядке возрастания, и обозначим для краткости $x_1 - a$ через δ_1, $x_2 - x_1$ через $\delta_2, \ldots, b - x_n$ через δ_n, а через ε будем обозначать положительные правильные дроби. В таком случае числовое значение суммы

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

будет зависеть от выбора промежутков δ и величин ε. Если эта сумма обладает тем свойством, что, как бы ни были выбираемы δ и ε, она стремится к определённому пределу A, когда все δ становятся бесконечно малыми, то этот предел и обозначается через $\int_a^b f(x)\,dx$.

Если же рассматриваемая сумма не обладает этим свойством, то выражение $\int_a^b f(x)\,dx$ не имеет никакого смысла. Не раз делались, однако, попытки приписывать этому выражению определённое числовое значение и в этом случае, причём о д н о из этих обобщений понятия определённого интеграла было принято всеми математиками. Именно, допустим, что при приближении аргумента к некоторому отдельному значению c в промежутке (a, b) функция $f(x)$ становится бесконечно большой; тогда сумма S, очевидно, может принимать любое значение, какой бы порядок малости ни приписывался всем δ; она не имеет, таким образом, никакого предела, и выражение $\int_a^b f(x)\,dx$, согласно предыдущему, лишено смысла. Но если, несмотря на это, выражение

$$\int_a^{c-\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x)\,dx$$

стремится к определённому пределу, когда α_1 и α_2 становятся бесконечно малыми, то именно этот предел понимают под обозначением $\int_a^b f(x)\,dx$.

Иные, сделанные Коши расширения понятия определённого интеграла, пригодные в тех случаях, когда основное определение теряет смысл, могут быть с успехом использованы в некоторых исследованиях; но они не являются общепринятыми, и не без оснований, так как в них содержится большой произвол.

5

Теперь мы переходим ко второму вопросу об условиях, при которых определённый интеграл имеет смысл, и постараемся выяснить: в каких случаях функция допускает интеграцию, а в каких не допускает?

Остановимся сначала на понятии интеграла в более узком смысле, именно, будем предполагать, что сумма S имеет определённый предел, когда все δ становятся бесконечно малыми. Обозначим через D_1 наибольшее колебание функции между a и x_1, т. е. разность между наибольшим и наименьшим из значений функции в этом промежутке; точно так же обозначим через D_2 наибольшее колебание между x_1 и x_2, ..., через D_n — наибольшее колебание между x_{n-1} и b. Тогда сумма

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

должна становиться бесконечно малой одновременно с величинами δ. Обозначим, далее, через Δ наибольшее значение, которое эта сумма может принимать, если все δ меньше, чем d; таким образом, Δ есть функция от d, которая убывает вместе с d и становится бесконечно малой вместе с d. Пусть сумма длин промежутков, в которых колебания больше, чем σ, равна s; тогда сумма соответствующих членов в сумме $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$, очевидно, $\geqslant \sigma s$. Поэтому

$$\sigma s \leqslant \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n \leqslant \Delta$$

и, следовательно,

$$s \leqslant \frac{\Delta}{\sigma}.$$

Но при заданном σ величина $\frac{\Delta}{\sigma}$ при надлежащем выборе d может быть сделана сколь угодно малой; то же справедливо, значит, и относительно s, и мы приходим к следующему результату:

Для того чтобы сумма S сходилась к пределу, когда все δ становятся бесконечно малыми, кроме конечности функции $f(x)$, ещё требуется, чтобы сумма всех тех промежутков, в которых колебания $> \sigma$, каково бы ни было σ, при надлежащем выборе d могла быть сделана как угодно малой.

Справедлива и обратная теорема:

Если функция $f(x)$ конечна и при неограниченном уменьшении всех величин δ общая сумма s тех промежутков, в которых колебания функции $f(x)$ больше, чем данная величина σ, непременно становится бесконечно малой, то сумма S стремится к пределу, когда все δ становятся бесконечно малыми.

В самом деле, сумма членов, соответствующих промежуткам, в которых колебания $> \sigma$, оказывается меньше, чем s, умноженное на наибольшее колебание функции в промежутке между a и b, которое, по предыдущему, конечно; сумма остальных членов $< \sigma(b-a)$. Очевидно теперь, что можно, во-первых, выбрать σ как угодно малым и после этого выбрать длины промежутков таким образом, чтобы s было как угодно мало; тогда сумма $\delta_1 D_1 + \ldots + \delta_n D_n$ станет как угодно малой и, следовательно, возможные значения суммы S будут заключены в сколь угодно тесных пределах.

Мы установили, таким образом, условия, которые необходимы и достаточны для того, чтобы сумма S при неограниченном убывании величин δ стремилась к определённому пределу, т. е. чтобы можно было говорить об интеграле (в более узком смысле) между a и b от функции $f(x)$ [4].

Обращаясь к интегралу, понимаемому (как это было разъяснено выше) в более широком смысле, мы видим, что для возможности интеграции попрежнему необходимым является второе из полученных условий; что касается условия, согласно которому функция должна быть конечной, то вместо него мы выставляем требование, чтобы функция становилась бесконечной только при приближении аргумента к отдельным числовым значениям [5] и чтобы существовал определённый предел интеграла, когда пределы интегрирования неограниченно приближаются к этим значениям.

6

Мы выяснили условия для того, чтобы было возможно составить определённый интеграл в общем случае, т. е. не делая специальных предположений о природе интегрируемой функции, и теперь применим результаты нашего исследования к частным случаям, и даже проведём исследование несколько дальше; сделаем это прежде всего для функций, которые имеют бесконечное число разрывов между двумя как угодно близкими значениями аргумента.

Такие функции ещё никем не были изучаемы, и потому нам будет удобно исходить из определённого примера. Обозначим для краткости через (x) разность между x и ближайшим к нему целым числом, или же, если x лежит как раз в середине промежутка между двумя последовательными целыми числами, то среднее арифметическое из чисел $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, т. е. нуль; пусть, далее, n обозначает произвольное целое число, p — нечётное число. Тогда, как легко понять, ряд

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \ldots = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn}$$

будет сходящимся при всяком значении x; сумма его приближается к определённому пределу, когда аргумент приближается к значению x, постоянно убывая или постоянно возрастая. Именно, в случае, если $x = \frac{p}{2n}$ (причём p и n взаимно простые), то

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2nn}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) - \frac{\pi\pi}{16nn},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2nn}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) + \frac{\pi\pi}{16nn},$$

во всех же остальных случаях

$$f(x+0) = f(x), \quad f(x-0) = f(x).$$

Итак, функция $f(x)$ имеет разрывы при всех тех рациональных значениях x, которые, будучи представлены в виде несократимой дроби, имеют чётный знаменатель; следовательно, число разрывов между как угодно близкими пределами неограниченно велико; однако число скачков, превышающих наперёд заданную величину, всегда конечно. Поэтому такая функция допускает интеграцию в любом промежутке. Действительно, обратим внимание прежде всего на то, что наша функция конечна, и затем отметим, что при любом значении x существуют пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$, причём число скачков, превышающих заданную величину σ, всегда конечно. Поэтому, применяя полученный выше результат, мы можем выбрать d настолько малым, чтобы во всех промежутках, не содержащих указанных скачков, колебания были меньше σ, а общая сумма промежутков, содержащих эти скачки, была как угодно малой.

Следует заметить, что функции, которые не имеют бесконечного числа максимумов и минимумов (к ним не принадлежит только что рассмотренная функция $f(x)$), во всяком промежутке, в котором они не становятся бесконечными, обладают названными двумя свойствами и потому во всяком таком промежутке они допускают интеграцию. Это легко доказать и непосредственно.

Переходя теперь к случаю, когда рассматриваемая функция становится бесконечно большой при отдельном значении аргумента, допустим, что это значение будет $x = 0$, так что, когда x, убывая, пробегает положительные значения, то $f(x)$ растёт неограниченно.

Тогда легко убедиться, что при уменьшении x от некоторого значения a функция $xf(x)$ не может постоянно оставаться больше постоянной величины c, ибо в этом случае было бы

$$\int_x^a f(x)\,dx > c\int_x^a \frac{dx}{x},$$

причём правая часть равна $c\left(\log\frac{1}{x} - \log\frac{1}{a}\right)$ и при уменьшении x растёт неограниченно. Поэтому $xf(x)$, если только эта функция не имеет в окрестности $x = 0$ бесконечного числа максимумов и минимумов, необходимо должна становиться бесконечно малой вместе с x, для того чтобы $f(x)$ допускала интеграцию. Если, с другой стороны, функция

$$f(x)\,x^{\alpha} = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{d\,(x^{1-\alpha})},$$

где $\alpha < 1$, становится бесконечно малой вместе с x, то ясно, что интеграл сходится к определённому пределу при неограниченном уменьшении нижнего предела интегрирования.

Точно так же мы устанавливаем, что в случае сходимости интеграла следующие функции:

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\frac{1}{x}},$$

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log\log\log\frac{1}{x}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x}\ldots\log^{n-1}\frac{1}{x}\log^{n}\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-d\log^{1+n}\frac{1}{x}}$$

при уменьшении x, начиная от некоторого конечного значения, не должны оставаться больше постоянной величины, и, следовательно, если только не имеют бесконечного числа максимумов и минимумов, должны становиться бесконечно малыми вместе с x; напротив, интеграл $\int f(x)\,dx$ сходится при неограниченном уменьшении нижнего предела интегрирования, если только функции

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x}\ldots\log^{n-1}\frac{1}{x}\left(\log^{n}\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{-d\left(\log^{n}\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}},$$

где $\alpha > 1$, становятся бесконечно малыми вместе с x [6].

Если же функция $f(x)$ имеет бесконечное число максимумов и минимумов, то трудно утверждать что-нибудь о порядке её обращения в бесконечность. Действительно, если допустим, что заранее задано только абсолютное значение функции (от которого только и зависит порядок обращения в бесконечность), то всегда, надлежащим образом определяя знак функции, можно добиться того, чтобы интеграл $\int f(x)\,dx$ сходился при неограниченном уменьшении нижнего предела интегрирования. Примером такого рода функции, обращающейся притом в бесконечность бесконечно высокого порядка $\left(\text{считая порядок } \frac{1}{x} \text{ за единицу}\right)$, может служить

$$\frac{d\left(x\cos e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx} = \cos e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}\sin e^{\frac{1}{x}}.$$

Мы сказали здесь достаточно по поводу вопроса, относящегося в сущности к другой области; переходим теперь к поставленной нами задаче, именно, к общему исследованию представимости функции тригонометрическим рядом.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА БЕЗ ОСОБЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРИРОДЫ ФУНКЦИИ

7

Предшествующие работы, посвящённые рассматриваемому вопросу, имели целью обосновать разложение функции в ряд Фурье для случаев, встречающихся в природе, поэтому доказательство могло быть начинаемо для совершенно произвольных функций и в дальнейшем на поведение функции могли быть налагаемы те или иные требуемые самим доказательством искусственные ограничения при условии, чтобы эти ограничения не стояли в противоречии с поставленной задачей. Мы же имеем целью установить лишь те условия, которые действительно необходимо наложить на поведение функции для того, чтобы она могла быть представлена тригонометрическим рядом; поэтому нам нужно сначала найти необходимые условия представимости и потом из них выбрать те, которые являются и достаточными. Итак, предшествующие авторы доказывали: если функция обладает такими-то и такими-то свойствами, то она представима рядом Фурье. Мы же ставим перед собою обратный вопрос: если функция представима тригонометрическим рядом, то что можно сказать о её поведении, об изменении её значений при непрерывном изменении аргумента?

Поэтому ряд

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + \\ + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots$$

или, полагая для краткости

$$\frac{1}{2} b_0 = A_0, \quad a_1 \sin x + b_1 \cos x = A_1, \quad a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \ldots,$$

ряд

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

мы станем рассматривать как данный. Мы будем обозначать написанное выше выражение через Ω и значение его через $f(x)$, так что эта последняя функция предполагается существующей лишь для тех значений x, при которых ряд сходится.

Для сходимости ряда необходимо, чтобы его члены стремились к нулю. Если коэффициенты a_n, b_n при возрастании n неограниченно убывают, то члены ряда Ω становятся бесконечно малыми при любом значении x: в противном случае это может иметь место только при некоторых значениях x. Необходимо эти два возможных случая рассматривать отдельно.

8

Мы предполагаем теперь, что члены ряда Ω при любом значении x стремятся к нулю.

При этом предположении ряд, получающийся из Ω в результате двукратной почленной интеграции

$$C+C'x+A_0\frac{xx}{2}-A_1-\frac{A_2}{4}-\frac{A_3}{9}-\ldots=F(x),$$

является сходящимся при любом значении x. Его сумма $F(x)$ зависит от x непрерывно и, следовательно, функция F от переменной x всюду допускает интеграцию.

Чтобы доказать и одно и другое, сходимость ряда и непрерывность его суммы, обозначим сумму членов до $-\frac{A_n}{nn}$ включительно через N, а остаточный член, т. е. ряд

$$-\frac{A_{n+1}}{(n+1)^2}-\frac{A_{n+2}}{(n+2)^2}-\ldots$$

через R и, наконец, наибольшее значение A_m при $m>n$ через ε. Тогда абсолютное знйчение R, очевидно, при любом значении n не превышает

$$\varepsilon\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right)<\frac{\varepsilon}{n}$$

и потому заключено в сколь угодно малых границах, если n достаточно велико; отсюда вытекает сходимость ряда. Далее, функция $F(x)$ непрерывна; это значит, что изменение её может быть сделано как угодно малым, если только достаточно мало изменение x. В самом деле, изменение $F(x)$ складывается из изменения R и изменения N; но можно выбрать n настолько большим, чтобы R, а следовательно, и его изменение при любых значениях x были как угодно малыми, а затем изменение x взять настолько малым, чтобы было как угодно малым изменение N [7].

Нам будет удобнее, чтобы не прерывать нити дальнейших рассуждений, заранее установить некоторые предложения, касающиеся функции $F(x)$.

Теорема 1. Если ряд Ω — сходящийся и величины α и β стремятся к нулю таким образом, что их отношение остаётся конечным, то выражение

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

стремится к сумме ряда Ω.

Действительно, мы получаем

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}=$$

$$=A_0+A_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}+A_2\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\frac{\sin 2\beta}{2\beta}+A_3\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}\frac{\sin 3\beta}{3\beta}+\ldots$$

Рассмотрим сначала простейший случай, когда $\beta=\alpha$; при этом допущении

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2}=A_0+A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+A_2\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)^2+\ldots$$

Положив

$$A_0+A_1+A_2+\ldots=f(x),\qquad A_0+A_1\ldots+A_{n-1}=f(x)+\varepsilon_n,$$

мы видим, что, как бы мало ни было δ, можно указать такое m, что при $n>m$ будет $\varepsilon_n<\delta$. Допуская α настолько малым, что $m\alpha<\pi$, и заменяя A_n через $\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n$, приведём выражение $\sum\limits_{0,\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 A_n$ к виду

$$f(x)+\sum_{1,\infty}\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\};$$

затем разобьём бесконечный ряд на три части, собирая вместе члены с индексами

1) от 1 до m,

2) от $m+1$ до наибольшего целого числа, содержащегося в $\frac{\pi}{\alpha}$ (это число обозначим через s),

3) от $s+1$ до бесконечности.

Первая часть состоит из конечного числа непрерывных слагаемых и потому становится как угодно мало отличающейся от своего предела 0, если α достаточно мало; что касается второй части, то, так как множитель при ε_n положительный, эта часть по абсолютному значению

$$<\delta\left\{\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right\};$$

наконец, в третьей части разложим общий член на слагаемые

$$\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

и

$$\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}=-\varepsilon_n\frac{\sin(2n-1)\alpha\sin\alpha}{(n\alpha)^2},$$

так что этот общий член

$$<\delta\left\{\frac{1}{(n-1)^2\alpha\alpha}-\frac{1}{nn\alpha\alpha}\right\}+\delta\frac{1}{nn\alpha}$$

и, следовательно, сумма членов с индексами от $n = s + 1$ до $n = \infty$

$$< \delta \left\{ \frac{1}{(s\alpha)^2} + \frac{1}{s\alpha} \right\},$$

а последнее выражение при бесконечно малых α переходит в

$$\delta \left\{ \frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{\pi} \right\}.$$

Итак, при уменьшении α сумма ряда

$$\sum \varepsilon_n \left\{ \left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 \right\}$$

стремится к пределу, который не превышает

$$\delta \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi\pi} \right\}$$

и, значит, должен равняться нулю. Поэтому выражение

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha},$$

которое

$$= f(x) + \sum \varepsilon_n \left\{ \left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{(n-1)\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 \right\},$$

при неограниченном убывании α стремится к $f(x)$ [8]. Таким образом, наша теорема доказана в случае $\beta = \alpha$.

Чтобы доказать её в общем случае, положим

$$F(x+\alpha+\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)^2 (f(x) + \delta_1),$$

$$F(x+\alpha-\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha+\beta) = (\alpha-\beta)^2 (f(x) + \delta_2),$$

откуда следует

$$F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta) =$$
$$= 4\alpha\beta f(x) + (\alpha+\beta)^2 \delta_1 - (\alpha-\beta)^2 \delta_2.$$

По доказанному δ_1 и δ_2 бесконечно малы вместе с α и β; в таком случае

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta} \delta_1 - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta} \delta_2$$

также бесконечно мало, если только коэффициенты при δ_1 и δ_2 не растут неограниченно; но этого не может быть, раз $\frac{\beta}{\alpha}$ остаётся конечным. Отсюда следует, что

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

стремится к $f(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.
$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$
бесконечно мало вместе с α.

Чтобы это доказать, разобьём ряд
$$\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$
на три части, из которых первая содержит члены до постоянного индекса m, начиная с которого все A_n становятся меньше ε, вторая — члены, для которых $n\alpha \leqslant$ некоторого постоянного c, третья — остальные члены. Тогда легко видеть, что при неограниченном убывании α сумма членов первой (конечной) группы остаётся конечной, т. е. $<$ некоторой постоянной величины Q; сумма членов второй группы $<\varepsilon\frac{c}{\alpha}$, сумма членов третьей группы
$$<\varepsilon\sum_{c<n\alpha}\frac{1}{nn\alpha\alpha}<\frac{\varepsilon}{\alpha c}.$$

Следовательно, выражение
$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha},\ \text{которое} = 2\alpha\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2,$$
остаётся
$$<2\left(Q\alpha+\varepsilon\left(c+\frac{1}{c}\right)\right),$$
откуда и следует утверждение [9].

Теорема 3. Пусть b и c — произвольные постоянные, причём $b<c$, и $\lambda(x)$ — функция, которая вместе со своей первой производной непрерывна в промежутке от b до c, а на концах его вместе с нею же обращается в нуль; пусть притом её вторая производная не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов. Тогда при бесконечном возрастании μ интеграл
$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$
стремится к нулю.

Подставляя вместо $F(x)$ его выражение в виде ряда, представим также наш интеграл
$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$
в виде ряда, который обозначим через (Φ):
$$\mu\mu\int_b^c\left(C+C'x+A_0\frac{xx}{2}\right)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx-$$
$$-\sum_{1,\infty}\frac{\mu\mu}{nn}\int_b^c A_n\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx.$$

Очевидно, дальше, что $A_n \cos\mu(x-a)$ выражается линейно через $\cos(\mu+n)(x-a)$, $\sin(\mu+n)(x-a)$, $\cos(\mu-n)(x-a)$, $\sin(\mu-n)(x-a)$; обозначая через $B_{\mu+n}$ сумму членов, содержащих две первые из названных величин, через $B_{\mu-n}$ — сумму двух последних, будем иметь

$$\cos\mu(x-a)\,A_n = B_{\mu+n} + B_{\mu-n},$$

$$\frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2} = -(\mu+n)^2 B_{\mu+n}, \quad \frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2} = -(\mu-n)^2 B_{\mu-n},$$

причём, каково бы ни было x, величины $B_{\mu+n}$ и $B_{\mu-n}$ с возрастанием n стремятся к нулю.

Поэтому общий член ряда (Φ)

$$-\frac{\mu\mu}{nn}\int\limits_b^c A_n \cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

равен

$$\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int\limits_b^c \frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}\lambda(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int\limits_b^c \frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}\lambda(x)\,dx$$

или, после двукратного интегрирования по частям, принимая сначала $\lambda(x)$, потом $\lambda'(x)$ за постоянные [10], равен

$$\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int\limits_b^c B_{\mu+n}\lambda''(x)\,dx + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int\limits_b^c B_{\mu-n}\lambda''(x)\,dx,$$

так как $\lambda(x)$ и $\lambda'(x)$, а следовательно, проинтегрированные выражения на концах промежутка равны нулю.

Но легко убедиться, что $\int\limits_b^c B_{\mu\pm n}\lambda''(x)\,dx$ при неограниченном возрастании μ стремится к нулю, каково бы ни было n: действительно, это выражение составляется линейно из интегралов

$$\int\limits_b^c \cos(\mu\pm n)(x-a)\,\lambda''(x)\,dx, \qquad \int\limits_b^c \sin(\mu\pm n)(x-a)\,\lambda''(x)\,dx,$$

а последние стремятся к нулю, когда $\mu\pm n$ неограниченно возрастает; если же этого нет, то коэффициенты при интегралах стремятся к нулю.

Итак, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что при неограниченном возрастании μ, каковы бы ни были положительные величины c, сумма

$$\sum \frac{\mu^2}{(\mu-n)^2 n^2},$$

распространённая на все значения n, удовлетворяющие условиям

$$n < -c', \quad c'' < n < \mu - c''', \quad \mu + c^{\mathrm{IV}} < n,$$

остаётся конечной. В самом деле, не говоря о членах, для которых $-c' < n < c''$, $\mu - c''' < n < \mu + c^{\mathrm{IV}}$, которые, очевидно, бесконечно малы и имеются в конечном числе, сумма ряда (Ф) меньше, чем рассматриваемая сумма, умноженная на наибольшее значение интеграла $\int\limits_b^c B_{\mu \pm n} \lambda''(x)\,dx$, каковое по доказанному стремится к нулю.

Но при допущении, что величины $c > 1$ сумма

$$\sum \frac{\mu^2}{(\mu - n)^2 n^2} = \frac{1}{\mu} \sum \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1 - \frac{n}{\mu}\right)^2 \left(\frac{n}{\mu}\right)^2},$$

взятая в указанных пределах, меньше, чем интеграл

$$\frac{1}{\mu} \int \frac{dx}{(1 - x)^2 x^2},$$

взятый от $-\infty$ до $-\frac{c'-1}{\mu}$, от $\frac{c''-1}{\mu}$ до $1 - \frac{c'''-1}{\mu}$, от $1 + \frac{c^{\mathrm{IV}}-1}{\mu}$ до ∞; действительно, если весь промежуток от $-\infty$ до $+\infty$, начиная от нуля, разобьём на частные промежутки длины $\frac{1}{\mu}$ и заменим всюду функцию под интегралом её наименьшим значением, то получим, принимая во внимание, что в пределах интегрирования функция нигде не имеет максимума, как раз все члены нашего ряда.

Выполняя интегрирование, получаем

$$\frac{1}{\mu} \int \frac{dx}{(1 - x)^2 x^2} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} + 2\log x - 2\log(1 - x)\right) + \mathrm{const}.$$

и, подставляя затем пределы, убеждаемся, что при возрастании μ рассматриваемое выражение остаётся ограниченным.

9

На основании изложенных теорем можно сказать следующее по поводу представимости функции тригонометрическим рядом, члены которого при любом значении переменной стремятся к нулю.

I. Если функция $f(x)$, периодически повторяющаяся через промежуток 2π, представляется тригонометрическим рядом, члены которого при любом значении x стремятся к нулю, то существует такая непрерывная функция $F(x)$, что выражение

$$\frac{F(x + \alpha + \beta) - F(x + \alpha - \beta) - F(x - \alpha + \beta) + F(x - \alpha - \beta)}{4\alpha\beta}$$

стремится к $f(x)$, когда α и β становятся бесконечно малыми, причём, однако, их отношение остаётся конечным.

Далее, интеграл

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

должен стремиться к нулю при неограниченном возрастании μ, если только $\lambda(x)$ и $\lambda'(x)$ на концах промежутка равны нулю и непрерывны в промежутке и $\lambda''(x)$ не имеет в нём бесконечного числа максимумов и минимумов.

II. Обратно, если эти два условия выполнены, то существует такой тригонометрический ряд с коэффициентами, становящимися бесконечно малыми, который всюду, где он сходится, представляет данную функцию.

Для доказательства подберём величины C', A_0 таким образом, чтобы выражение

$$F(x)-C'x-A_0\frac{xx}{2}$$

было функцией, периодически повторяющейся через промежуток 2π [11], и разложим затем её по методу Фурье в тригонометрический ряд

$$C-\frac{A_1}{1}-\frac{A_2}{4}-\frac{A_3}{9}-\ldots,$$

причём положено

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t)-C't-A_0\frac{tt}{2}\right)dt=C,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t)-C't-A_0\frac{tt}{2}\right)\cos n(x-t)\,dt=-\frac{A_n}{nn};$$

тогда, по доказанному [12], величины

$$A_n=-\frac{nn}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t)-C't-A_0\frac{tt}{2}\right)\cos n(x-t)\,dt$$

при увеличении n становятся бесконечно малыми и, следовательно, из теоремы 1 вытекает, что ряд

$$A_0+A_1+A_2+\ldots$$

имеет сумму $f(x)$ всюду, где он сходящийся.

III. Пусть $b<x<c$, и $\rho(t)$ — такая функция, что $\rho(t)$ и $\rho'(t)$ при $t=b$ и $t=c$ обращаются в нуль, а в промежутке от b до c изменяются непрерывно, и что $\rho''(t)$ не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов в этом промежутке; что при $t=x$ имеем $\rho(t)=1$, $\rho'(t)=0$, $\rho''(t)=0$, а $\rho'''(t)$ и $\rho^{\mathrm{IV}}(t)$ конечны и непрерывны; тогда разность между суммой

$$A_0+A_1+\ldots+A_n$$

и интегралом

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{dd\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\rho(t)\,dt$$

при неограниченном увеличении n стремится к нулю. Что касается ряда

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots,$$

то он будет сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будет ли интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

стремиться при этом к некоторому конечному пределу или нет.

Действительно, мы имеем

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\,\frac{tt}{2}\right)\sum_{1,\,n} -nn\cos n\,(x-t)\,dt,$$

или же, так как

$$2\sum_{1,\,n} -nn\cos n\,(x-t) = 2\sum_{1,\,n}\frac{d^2\cos n\,(x-t)}{dt^2} = \frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2},$$

то

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\,\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\,dt.$$

Но согласно теореме 3 предыдущего параграфа интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\,\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\,\lambda(t)\,dt$$

при неограниченном возрастании n становится бесконечно малым, если только $\lambda(t)$ непрерывна вместе со своей первой производной, $\lambda''(t)$ не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов и, кроме того, при $t = x$ имеем $\lambda(t) = 0$, $\lambda'(t) = 0$, $\lambda''(t) = 0$, а $\lambda'''(t)$ и $\lambda^{IV}(t)$ конечны и непрерывны [13].

Если положим, что $\lambda(t)$ вне промежутка b, c равна 1, а в промежутке $= 1 - \rho(t)$ (что, очевидно, возможно), то отсюда последует, что разность между суммой $A_1 + \ldots + A_n$ и интегралом

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c\left(F(t) - C't - A_0\,\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

при возрастании n становится бесконечно малой. С помощью же интегрирования по частям легко убеждаемся, что при возрастании n интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c \left(C't + A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\rho(t)\,dt$$

стремится к A_0. Таким образом, теорема доказана.

10

В результате предшествующего исследования мы видим, что если коэффициенты ряда Ω становятся бесконечно малыми, то сходимость ряда при определённом числовом значении x зависит только от поведения функции $f(x)$ в непосредственной близости этого значения.

Становятся ли коэффициенты ряда бесконечно малыми, это можно, однако, усмотреть иной раз не из их выражения через определённые интегралы, а несколько иным способом. Мы особо отметим здесь **один** случай, когда такое заключение следует непосредственно из природы функции, а именно, когда функция $f(x)$ остаётся всюду конечной и допускает интеграцию.

В этом случае, если разложим весь промежуток от $-\pi$ до π на частные промежутки длины

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \ldots$$

и обозначим через D_1 наибольшее колебание функции в первом промежутке, через D_2 — во втором и т. д., то сумма

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \ldots$$

должна стремиться к нулю, когда все δ становятся бесконечно малыми.

Коэффициенты ряда, с точностью до числового множителя $\frac{1}{\pi}$, представляются интегралами

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n(x-a)\,dx$$

или же

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin n(x-a)\,dt;$$

разобьём этот последний интеграл на ряд интегралов, взятых по частным промежуткам длины $\frac{2\pi}{n}$, начиная от значения $x=a$: каждый из таких интегралов меньше, чем наибольшее колебание в соответствующем промежутке, умноженное на $\frac{2}{n}$, и, следовательно, их сумма меньше, чем величина, которая, по предыдущему, становится бесконечно малой вместе с $\frac{2\pi}{n}$.

Действительно, эти интегралы имеют вид

$$\int\limits_{a+\frac{s}{n}2\pi}^{a+\frac{s+1}{n}2\pi} f(x)\sin n(x-a)dx.$$

Синус в первой половине промежутка положителен, во второй—отрицателен. Обозначая наибольшее значение $f(x)$ в промежутке интегрирования через M, наименьшее — через m, видим, что интеграл только увеличится, если в первой половине промежутка заменим $f(x)$ через M, во второй — через m; он только уменьшится, если в первой половине заменим $f(x)$ через m, во второй — через M. Но в первом случае получаем $\frac{2}{n}(M-m)$, во втором $\frac{2}{n}(m-M)$. Итак, абсолютное значение рассматриваемого интеграла меньше, чем $\frac{2}{n}(M-m)$, и значит, интеграл

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\ \sin n(x-a)dx$$

меньше, чем

$$\frac{2}{n}(M_1-m_1)+\frac{2}{n}(M_2-m_2)+\frac{2}{n}(M_3-m_3)+\ldots,$$

где M_s и m_s обозначают наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в s-ом промежутке; но эта сумма, раз функция $f(x)$ допускает интеграцию, должна становиться бесконечно малой, когда n неограниченно растёт и, следовательно, $\frac{2\pi}{n}$ стремится к нулю.

Итак, в указанном случае коэффициенты ряда становятся бесконечно малыми.

11

Остаётся рассмотреть случай, когда члены ряда Ω становятся бесконечно малыми для определённого значения x, однако, без того, чтобы это имело место при любом значении x. Этот случай может быть сведён к предыдущему.

Складывая почленно ряды при значениях переменной $x+t$ и $x-t$, получаем ряд

$$2A_0+2A_1\cos t+2A_2\cos 2t+\ldots,$$

а в этом ряде члены становятся бесконечно малыми при произвольном значении t, и потому к нему применимо предыдущее исследование.

Обозначим сумму ряда

$$C+C'x+A_0\frac{xx}{2}+A_0\frac{tt}{2}-A_1\frac{\cos t}{1}-A_2\frac{\cos 2t}{4}-A_3\frac{\cos 3t}{9}-\ldots$$

через $G(t)$, так что $\frac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$ всюду, где сходятся ряды $F(x+t)$ и $F(x-t)$, равняется $G(t)$; тогда получим следующие результаты.

I. Если при значении переменной x члены ряда Ω становятся бесконечно малыми, то интеграл

$$\mu\mu \int_b^c G(t) \cos \mu (t-a) \lambda(t)\, dt,$$

где λ обозначает функцию, обладающую свойствами, указанными в § 9, должен стремиться к нулю при возрастании μ. Но значение этого интеграла составляется из значений интегралов

$$\mu\mu \int_b^c \frac{F(x+t)}{2} \cos \mu (t-a) \lambda(t)\, dt,$$

и

$$\mu\mu \int_b^c \frac{F(x-t)}{2} \cos \mu (t-a) \lambda(t)\, dt,$$

поскольку эти интегралы имеют определённый смысл. Итак, бесконечная малость рассматриваемого интеграла обусловливается поведением функции F в двух точках, расположенных симметрически относительно точки x. Но следует заметить, что должны существовать и такие значения t, что оба сразу слагаемых интеграла не оказываются бесконечно малыми: иначе члены нашего ряда были бы бесконечно малыми при любом значении переменной. Иными словами, слагаемые интегралы должны друг друга взаимно уничтожать таким образом, что их сумма есть величина бесконечно малая при возрастании μ. Отсюда следует, что ряд Ω может сходиться лишь для значений x, относительно которых точки, где интеграл

$$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos \mu (x-a) \lambda(x)\, dx$$

при возрастании μ не становится бесконечно малым, лежат симметрически. Очевидно, только в том случае, если число этих точек бесконечно, тригонометрический ряд с коэффициентами, не стремящимися к нулю, может сходиться при бесконечном числе значений переменной.

Обратно, мы имеем

$$A_n = -nn \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(G(t) - A_0 \frac{tt}{2}\right) \cos nt\, dt$$

и потому A_n становится при возрастании n бесконечно малым, если интеграл

$$\mu\mu \int_b^c G(t) \cos \mu (t-a) \lambda(t)\, dt$$

при возрастании μ всегда становится бесконечно малым.

II. Если члены ряда Ω для значения переменной x становятся бесконечно малыми, то сходимость ряда зависит только от поведения функции $G(t)$ при бесконечно малых значениях t, а именно: разность между суммой

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n$$

и интегралом

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

с увеличением t становится бесконечно малой. Здесь b обозначает сколь угодно малую постоянную, заключённую между 0 и π, $\rho(t)$ — такую функцию, что $\rho(t)$ и $\rho'(t)$ всюду непрерывны и обращаются в нуль при $t = b$, $\rho''(t)$ не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов, и, наконец, при $t = 0$ имеем

$$\rho(t) = 1,\quad \rho'(t) = 0,\quad \rho''(t) = 0,$$

$\rho'''(t)$ и $\rho^{\mathrm{IV}}(t)$ конечны и непрерывны.

12

Условия представимости функции тригонометрическим рядом можно, конечно, ещё несколько сузить и тем самым ещё дальше провести наши исследования, не делая притом особых предположений о природе функции. Так, например, в последней из полученных нами теорем условие $\rho''(t) = 0$ может быть отброшено, если заменим в интеграле

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

$G(t)$ через $G(t) - G(0)$. Но существенного при этом ничего не выигрывается.

Переходя теперь к изучению особых случаев, мы сначала постараемся, ограничиваясь рассмотрением функций, не имеющих бесконечного числа максимумов и минимумов, сделать одно дополнение к работам Дирихле.

Выше было замечено, что функции такого рода могут быть интегрируемы везде, где они не обращаются в бесконечность, а это может случиться только в конечном числе точек. Дирихле установил, что в интегральном представлении для n-го члена ряда и для суммы n первых членов составная часть интеграла, относящаяся к промежуткам, в которых функция не обращается в бесконечность и которые не расположены бесконечно близко к рассматриваемому значению переменной, стремится к нулю при возрастании n, тогда как интеграл

$$\int_x^{x+b} f(t)\,\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{x-t}{2}}\,dt$$

[если $0 < b < \pi$, и функция $f(t)$ в пределах промежутка интегрирования не становится бесконечной] стремится к $\pi f(x+0)$; это доказательство не оставляет желать ничего лучшего, если впрочем отбросить допущение непрерывности функции, являющееся излишним. Поэтому остаётся ещё только выяснить, в каких случаях стремится к нулю составная часть интеграла, соответствующая окрестностям тех точек, где функция становится бесконечной. Подобного рода исследование ещё не проделано, но однажды при каких-то обстоятельствах Дирихле имел случай отметить, что указанный факт действительно имеет место, если функция допускает интеграцию, в чем, однако, нет необходимости.

Мы видели выше, что если члены ряда Ω стремятся к нулю при возрастании n, то функция $F(x)$, по отношению к которой $f(x)$ является второй производной, должна быть конечной и непрерывной и что выражение

$$\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{2\alpha}$$

должно быть бесконечно малым вместе с α. Если допустим, что разность $F'(x+t)-F'(x-t)$ не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов, то она при t, стремящемся к нулю, непременно или имеет конечный предел L, или становится бесконечно большой; тогда, очевидно, выражение

$$\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha (F'(x+t)-F'(x-t))\,dt = \frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{2\alpha}$$

равным образом стремится к L или к ∞; стать же бесконечно малым оно может лишь в том случае, если разность $F'(x+t)-F'(x-t)$ стремится к нулю. Поэтому, если функция $f(x)$ при $x=a$ обращается в бесконечность, всё же функция $f(a+t)+f(a-t)$ должна допускать интеграцию около точки $t=0$. Этого достаточно для того, чтобы интеграл

$$\left(\int\limits_b^{a-\varepsilon} + \int\limits_{a+\varepsilon}^{c}\right) dx\,(f(x)\cos n(x-a))$$

имел предел при уменьшении ε и становился бесконечно малым при увеличении n. Так как, дальше, функция $F(x)$ конечна и непрерывна, то $F'(x)$ должна допускать интеграцию около точки $x=a$, а $(x-a)F'(x)$ — становиться бесконечно малой вместе с $x-a$ (если только эта функция не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов). Отсюда следует, что

$$\frac{d\,(x-a)\,F'(x)}{dx} = (x-a)\,f(x) + F'(x),$$

а также $(x-a)\,f(x)$ допускает интеграцию около $x=a$. Поэтому и интеграл $\int f(x)\sin n(x-a)\,dx$ может быть распространён на окрестность

$x=a$, и для того, чтобы коэффициенты ряда стремились к нулю, необходимо ещё только, чтобы интегралы

$$\int_b^c f(x)\sin n(x-a)\,dx,$$

где $b<a<c$, при возрастании n становились бесконечно малыми. Если положим

$$f(x)(x-a)=\varphi(x),$$

то, предполагая, что эта функция не имеет бесконечного числа максимумов и минимумов, как показал Дирихле, будем иметь при бесконечном возрастании n

$$\int_b^c f(x)\sin n(x-a)\,dx=$$

$$=\int_b^c \frac{\varphi(x)}{x-a}\sin n(x-a)\,dx=\pi\frac{\varphi(a+0)+\varphi(a-0)}{2}.$$

Поэтому функция

$$\varphi(a+t)+\varphi(a-t)=f(a+t)\,t-f(a-t)\,t$$

должна быть бесконечно малой вместе с t, и так как функция $f(a+t)+ +f(a-t)$ допускает интеграцию около точки $t=0$, а следовательно, функция $f(a+t)\,t+f(a-t)\,t$ бесконечно мала вместе с t, то как $f(a+t)\,t$, так и $f(a-t)\,t$ должны становиться бесконечно малыми вместе с t. Итак, если оставить в стороне функции с бесконечно большим числом максимумов и минимумов, то для представимости функции $f(x)$ тригонометрическим рядом с неограниченно убывающими коэффициентами достаточно и необходимо, чтобы в тех точках $x=a$, где она обращается в бесконечность, функции $f(a+t)\,t$ и $f(a-t)\,t$ были бесконечно малыми вместе с t, а функция $f(a+t)+f(a-t)$ допускала интеграцию около точки $t=0$.

Посредством тригонометрического ряда, коэффициенты которого не стремятся к нулю, функция $f(x)$, не имеющая бесконечного числа максимумов и минимумов, может быть представлена также лишь для конечного числа значений переменной, так как интеграл

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$$

может при возрастании μ не быть бесконечно малым только в конечном числе точек. Нет необходимости останавливаться дольше на этом вопросе.

13

Что касается функций, имеющих бесконечное число максимумов и минимумов, то не будет излишним заметить, что такого рода функция $f(x)$ может всюду допускать интеграцию и, однако, не быть представимой рядом Фурье [14]. Это имеет место, например, для функции $f(x)$, заданной в промежутке от 0 до 2π формулой

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}\cos\frac{1}{x}\right),$$

причём $0<\nu<\frac{1}{2}$. В самом деле, составная часть интеграла

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx,$$

относящаяся к окрестности точки $x=\sqrt{\frac{1}{n}}$, при увеличении n, вообще говоря, становится бесконечно большой, так что отношение интеграла к выражению

$$\frac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{n}-na+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}\,n^{\frac{1-2\nu}{4}}$$

стремится к единице: это можно установить, рассуждая так, как сейчас будет указано. Желая несколько обобщить наш пример с тем, чтобы одновременно сделать более отчётливым существо вопроса, мы положим

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)\cos\psi(x),$$

допуская, что $\varphi(x)$ бесконечно мало вместе с x, а $\psi(x)$ — бесконечно велико, причём обе эти функции непрерывны вместе с их производными и не имеют бесконечного числа максимумов и минимумов. В таком случае

$$f(x)=\varphi'(x)\cos\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)\sin\psi(x),$$

и интеграл

$$\int f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

равен сумме четырёх интегралов

$$\frac{1}{2}\int\varphi'(x)\cos(\psi(x)\pm n(x-a))\,dx,$$

$$-\frac{1}{2}\int\varphi(x)\psi'(x)\sin(\psi(x)\pm n(x-a))\,dx.$$

Считая $\psi(x)$ положительной, рассмотрим интеграл

$$-\frac{1}{2}\int\varphi(x)\psi'(x)\sin(\psi(x)+n(x-a))\,dx$$

и сосредоточим внимание на той точке промежутка интегрирования, около которой перемена знака у синуса совершается наиболее медленно. Мы видим, полагая

$$\psi(x)+n(x-a)=y,$$

что это будет иметь место при условии $\frac{dy}{dx}=0$. Пусть $x=\alpha$ есть соответствующее значение переменной, так что

$$\psi'(\alpha)+n=0.$$

Займёмся поведением интеграла

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\,\psi'(x)\sin y\,dx,$$

предполагая, что ε бесконечно мало при возрастании n; введём y в качестве переменной интегрирования [15]. Положив

$$\psi(\alpha)+n(\alpha-a)=\beta,$$

будем иметь для достаточно малого ε:

$$y=\beta+\psi''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}+\ldots,$$

причём $\psi''(\alpha)$ положительно, так как $\psi(x)$ бесконечно велико и положительно при x бесконечно малом положительном. Далее, получаем

$$\frac{dy}{dx}=\psi''(\alpha)(x-\alpha)=\pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)},$$

смотря по тому, будет ли $x-\alpha\gtrless 0$, и потому

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\,\psi'(x)\sin y\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}^{\beta}-\int\limits_{\beta}^{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}\right)\left(\sin y\frac{dy}{\sqrt{y-\beta}}\right)\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}=$$

$$=-\int\limits_{0}^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.$$

Заставим при возрастании n величину ε убывать таким образом, чтобы $\psi''(\alpha)\,\varepsilon\varepsilon$ делалось бесконечно большим. Если только интеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

как известно, равный $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}$, отличен от нуля, то, отбрасывая величины низших порядков, в таком случае получим

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\,\psi'(x)\sin(\psi(x)+n(x-a))\,dx=-\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\pi}\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.$$

Если только величина в правой части не становится бесконечно малой, отношение рассматриваемого интеграла

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

к этой величине при возрастании n стремится к единице, так как остальные составные части интеграла бесконечно малы.

Допустим, что при бесконечно малых x функции $\varphi(x)$ и $\psi'(x)$ — того же порядка, что и некоторые степени x, а именно, $\varphi(x)$ — порядка x^{ν}, а $\psi'(x)$ — порядка $x^{-\mu-1}$, так что $\nu>0$ и $\mu\geqslant 0$. Тогда при возрастании n выражение

$$\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

будет порядка $\alpha^{\nu-\frac{\mu}{2}}$ и, следовательно, не будет бесконечно малым, если $\mu\geqslant 2\nu$. Вообще же, если только $x\psi'(x)$ или, что то же, $\frac{\psi(x)}{\log x}$ при бесконечно малом x будет бесконечно велико, то $\varphi(x)$ можно выбрать таким образом, что при бесконечно малом x само $\varphi(x)$ будет бесконечно мало, а

$$\varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2\psi''(x)}}=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi'(x)}}}=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\frac{1}{x\psi'(x)}}}$$

— бесконечно велико, так что интеграл $\int\limits_x f(x)\,dx$ можно распространить до точки $x=0$, причём интеграл $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ при бесконечно большом x не будет бесконечно малым. Как легко понять, при уменьшении x вследствие быстро совершающихся перемен знака функции $f(x)$ приращения интеграла $\int\limits_x f(x)\,dx$ взаимно уничтожаются, хотя их отношение к приращениям x очень быстро возрастают; но введение множителя $\cos n(x-a)$ в данном случае имеет тот эффект, что указанные приращения складываются.

Этот пример показывает, что функция, повсюду допускающая интеграцию, может иметь ряд Фурье расходящийся, даже с неограниченно возрастающими членами. Но возможно также показать и такой пример, когда ряд Ω, составленный для функции, нигде не допускающей интеграции, сходится в сколь угодно большом числе точек из сколь угодно малого промежутка.

Подобного рода пример даётся, рядом

$$\sum_{1,\infty}\frac{(nx)}{n},$$

где (nx) имеет то же значение, что и в § 6. Этот ряд, сходящийся при любом рациональном значении x, и сумма его может быть представлена в виде тригонометрического ряда

$$\sum_{1,\infty}^{n} \frac{\Sigma^{\theta}-(-1)^{\theta}}{n\pi} \sin 2n\pi x \; [^{16}],$$

где вместо θ нужно подставлять все делители n. Но сумма этого тригонометрического ряда ни в каком, сколь угодно малом, промежутке не является ограниченной, и потому нигде не допускает интеграции.

Другой пример может быть построен, если в рядах

$$\sum_{0,\infty} c_n \cos nnx, \qquad \sum_{1,\infty} c_n \sin nnx$$

мы будем считать $c_0, c_1, c_2, \ldots$ положительными величинами, убывающими, и притом неограниченно, с возрастанием n, тогда как сумма $\sum\limits_{1,n}^{s} c_s$ с возрастанием n будет становиться бесконечно большой. Действительно, если отношение x к 2π рационально и по сокращении выражается дробью со знаменателем m, эти ряды сходятся или расходятся к бесконечности, смотря по тому, равны или не равны нулю суммы

$$\sum_{0,m-1} \cos nnx, \qquad \sum_{0,m-1} \sin nnx.$$

По известной теореме о делении круга [1]), как тот, так и другой случай имеет место для сколь угодно большого числа значений переменной в любом промежутке.

Совершенно такова же может быть сходимость ряда Ω и в том случае, если сумма ряда

$$C' + A_0 x - \sum \frac{1}{nn} \frac{dA_n}{dx},$$

получающегося почленным интегрированием из Ω, не допускает интеграции ни в каком промежутке.

Если, например, расположим сумму

$$\sum_{1,\infty} \frac{1}{n^3} (1-q^n) \log\left(\frac{-\log(1-q^n)}{q^n}\right)$$

(логарифмы здесь выбраны таким образом, что при $q=0$ они обращаются в нуль) по возрастающим степеням q и затем положим $q=e^{xi}$, то мнимая часть разложения образует тригонометрический ряд, который, будучи дважды продифференцирован по x, сходится в сколь угодно большом числе точек любого промежутка, тогда как ряд, полученный после одного дифференцирования, в сколь угодно большом числе точек расходится к бесконечности.

---

[1]) Disquisitiones arithmeticae, p. 636, пункт 356 (Gauss Werke, т. I, стр. 442).

Точно таким же образом, т. е. в сколь угодно большом числе точек из любого как угодно малого промежутка, тригонометрический ряд может сходиться даже в том случае, если коэффициенты его не стремятся к нулю. Простой пример, сюда относящийся, даётся рядом

$$\sum_{1,\infty} \sin(n!\, x\pi),$$

где $n!$, как обычно, обозначает $1\cdot2\cdot3\cdots n$. Этот ряд сходится не только при всяком рациональном значении x, превращаясь в конечную сумму, но и при бесконечном числе иррациональных значений, из которых простейшими являются $\sin 1$, $\cos 1$, $\frac{2}{e}$ и их кратные, нечётные кратные e, $\frac{e-\frac{1}{e}}{4}$ и т. д. [17].

СОДЕРЖАНИЕ

XIII. ОПЫТ ОБОБЩЕНИЯ ДЕЙСТВИЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В настоящей работе делается попытка установить процесс выведения из данной функции одной переменной некоторой новой функции той же переменной, причём соотношение между функциями зависит от некоторого числа таким образом, что в случае, если это число принимает целые положительные или целые отрицательные значения или нуль, искомая функция соответственно совпадает или с производными или с интегралами от данной функции или с ней самой. Мы будем основываться здесь на общеизвестных результатах дифференциального и интегрального исчислений, но при этом не будем предполагать, что те из них, которые относятся к производным и интегралам целых порядков, тем самым справедливы и для дробных порядков. Упомянутые результаты должны служить для обоснования интересующего нас действия, а также помогут найти правила, по которым оно выполняется [1].

Имея в виду эту последнюю цель, рассмотрим ближе ряд производных от данной функции. Ясно, что мы не должны исходить из обыкновенного определения производных, поскольку оно носит рекуррентный характер, и с его помощью нельзя получить иных членов ряда, кроме тех, которым соответствуют целые индексы. Нам следует постараться найти независимое определение производных различных порядков. Такую возможность даёт нам разложение функции, получающейся из первоначальной посредством увеличения переменной на некоторое приращение, по целым положительным степеням этого приращения. В самом деле, известное разложение

$$z_{(x+h)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{1,\ 2\ \ldots\ p}\ \frac{d^p z}{dx^p}\, h^p \tag{1}$$

(где $z_{(x+h)}$ обозначает то, во что превращается $z_{(x)}$ при замене x на $x+h$) справедливо для любого произвольного значения h [2], и потому коэффициенты в нём имеют определённые числовые значения: эти коэффициенты и можно считать производными по определению. Итак, мы выдвигаем следующее определение: производной n-го порядка от функции $z_{(x)}$ называется коэффициент при h^n в разложении $z_{(x+h)}$ по целым положительным степеням h, умноженный на число, не зависящее от x, а именно, на $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Установив подобного рода точку зрения на производные, мы легко придём к рассмотрению некоторой общей операции, содержащей как частный случай дифференцирование и интегрирование. Примыкая ко введённому Лагранжем термину «fonctions dérivées», мы будем называть результат этой операции производной [3] и обозначать самую операцию через ∂_x^ν (следует заметить, что с точки зрения, нами установленной, ни в наименовании, ни в обозначении не должно содержаться намёка на предельный переход, совершаемый над отношением двух бесконечно малых величин).

Таким образом, под выражением «ν-ая производная от $z_{(x)}$ по x» или под обозначением $\partial_x^\nu z$ мы условимся понимать коэффициент при h^ν в разложении $z_{(x+h)}$ по степеням h с показателями, отличающимися на целые числа и уходящими в бесконечность как в одну сторону, так и в другую, умноженный на некоторый, зависящий от n, но не от x множитель. Мы определяем, следовательно, $\partial_x^\nu z$ посредством равенства

$$z_{(x+h)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu. \tag{2}$$

Множители k_ν, естественно, должны быть определены так, чтобы в случае, когда показатели при h — целые числа, ряд (2) переходил в ряд (1), так как только при этом условии введённые нами «обобщённые» производные действительно будут обобщениями производных в обычном смысле. Если бы такое определение не оказалось возможным, то цель — найти операцию, содержащую дифференцирование как частный случай, — не была бы достигнута, и для её осуществления пришлось бы искать другого пути.

Прежде чем обратиться к определению множителей k_ν, мы предпошлём несколько замечаний по поводу рядов упомянутого вида, так как они, очевидно, являются основой, на которой мы строим весь наш опыт теории обобщённых производных.

Было высказано мнение, что при рассмотрении рядов можно вообще получать надёжные результаты лишь в том случае, если входящим величинам даются числовые значения, обеспечивающие сходимость ряда, так что его сумма (по крайней мере приближённо) может быть определена посредством подлинного числового сложения. Однако, если (как мы будем неизменно предполагать в дальнейшем) коэффициенты ряда подчинены определённому закону, любая часть ряда может быть вычислена с требуемой точностью. Этот ряд сам представляет собою, следовательно, во всех своих частях точно ограниченную и потому определённую величину. И если даже механизм числового сложения не позволяет найти эту величину, я всё же не вижу в этом основания для того, чтобы в указанных обстоятельствах не применять математических законов, которым подчиняются величины, имеющие определённые числовые значения, и не считать правильными получаемые при этом результаты [4].

Покажем на примере, что ряд вида (2) действительно может иметь определённую сумму. Для этого, прибегая к процедуре, которая полезна во многих подобных случаях, поставим себе задачей разложить функцию x^{μ} в ряд, расположенный по дробным степеням $(x-b)$. Этим разложением нам придётся в дальнейшем воспользоваться.

Ряд, сумма которого должна равняться x^{μ} и который мы для краткости обозначим через z, пусть имеет вид

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} c_{\alpha}(x-b)^{\alpha}.$$

Раз $z=x^{\mu}$, то

$$\frac{dz}{dx}=\mu x^{\mu-1}$$

и, следовательно,

$$\mu z-x\frac{dz}{dx}=0;$$

поэтому мы должны иметь

$$\sum\left[(\mu-\alpha)c_{\alpha}-b(\alpha+1)c_{\alpha+1}\right](x-b)^{\alpha}=0.$$

Это условие, очевидно, выполняется, если

$$(\mu-\alpha)c_{\alpha}-b(\alpha+1)c_{\alpha+1}=0.$$

Но все выражения, удовлетворяющие этому дифференциальному уравнению, содержатся в различных значениях kx^{μ}. Поэтому ряд z, для которого осуществляется закон

$$(\mu-\alpha)c_{\alpha}-b(\alpha+1)c_{\alpha+1}=0,$$

непременно имеет сумму, равную одному из этих значений. Чтобы найти такое значение, положим

$$\ldots+c_{\alpha-1}(x-b)^{\alpha-1}+c_{\alpha}(x-b)^{\alpha}=p,$$

$$p'=c_{\alpha+1}(x-b)^{\alpha+1}+c_{\alpha+2}(x-b)^{\alpha+2}+\ldots,$$

так что

$$p+p'=z=kx^{\mu};$$

следовательно,

$$\mu p-x\frac{dp}{dx}=(\mu-\alpha)c_{\alpha}(x-b)^{\alpha}=X, \qquad \mu p'-x\frac{dp'}{dx}=-X.$$

Эти дифференциальные уравнения имеют общие интегралы

$$-\int Xx^{-\mu-1}dx+k_1=px^{-\mu}=c_{\alpha}(x-b)^{\alpha}x^{-\mu}+c_{\alpha-1}(x-b)^{\alpha-1}x^{-\mu}\ldots,$$

$$\int Xx^{-\mu-1}dx+k_2=p'x^{-\mu}=c_{\alpha+1}(x-b)^{\alpha+1}x^{-\mu}+c_{\alpha+2}(x-b)^{\alpha+2}x^{-\mu}+\ldots$$

Подставим здесь вместо X его значение и заменим x через $\frac{b}{y}$:

$$px^{-\mu} = c_\alpha(\mu-\alpha)\,b^{\alpha-\mu}\int y^{\mu-\alpha-1}(1-y)^\alpha dy + k_1 =$$
$$= c_\alpha b^{\alpha-\mu}(1-y)^\alpha y^{\mu-\alpha} + c_{\alpha-1}b^{\alpha-1-\mu}(1-y)^{\alpha-1}y^{\mu-\alpha+1} + \ldots,$$
$$p'x^{-\mu} = -c_\alpha(\mu-\alpha)\,b^{\alpha-\mu}\int y^{\mu-\alpha-1}(1-y)^\alpha\,dy + k_2 =$$
$$= c_{\alpha+1}b^{\alpha+1-\mu}(1-y)^{\alpha+1}y^{\mu-\alpha-1} + c_{\alpha+2}b^{\alpha+2-\mu}(1-y)^{\alpha+2}y^{\mu-\alpha-2} + \ldots$$

В случае, если $\mu>\alpha>-1$, выражения в правых частях обращаются соответственно в нуль при $y=0$ и при $y=1$, и им будут в точности равны оба интеграла, взятые первый от 0 до y, второй от 1 до y, при условии, что эти интегралы непрерывны между указанными пределами. Могло бы показаться, что требование непрерывности не удовлетворено, когда некоторые (или все) члены ряда неограниченно возрастают, стремясь к положительной или отрицательной бесконечности. На самом же деле, так как возрастающие члены в данном случае взаимно уничтожаются, отсюда лишь следует, что посредством числового сложения нет возможности найти сумму ряда. Но мы отвергли заключение о том, что в случаях, подобных настоящему, нельзя говорить об определённом числовом значении суммы ряда, и потому будем судить о непрерывности или разрывности сумм рядов $px^{-\mu}$ и $p'x^{-\mu}$, исходя из рассмотрения равных им интегралов [1]). Как известно, данное выражение может иметь разрыв лишь в том случае, если его производная становится бесконечной; но выражение $(1-y)^{\mu-\alpha-1}y^\alpha$, если показатели $\mu-\alpha-1$ и α положительны, является конечным при всех конечных значениях y. Интегралы, следовательно, изменяются непрерывно, и, рассматривая особенности $y=1$ и $y=0$, мы видим, что это имеет место и при условии, что оба показателя больше, чем -1. Итак, в случае, если $\mu>\alpha>-1$ и y конечно [2]), то

$$k = zx^{-\mu} = px^{-\mu} + p'x^{-\mu} =$$
$$= (\mu-\alpha)\,c_\alpha b^{\alpha-\mu}\int_0^1(1-y)^{\mu-\alpha-1}y^\alpha\,dy = c_\alpha b^{\alpha-\mu}\frac{\Pi(\alpha)\,\Pi(\mu-\alpha)}{\Pi(\mu)},$$

где Π обозначает известный определённый интеграл [[5]]. Этот результат получен, как мы заметили, только при условии $\mu>\alpha>-1$, но он распространяется и на все значения μ и α, если (как это принимается всюду

[1]) Если рассмотрим интегралы до подстановки $x=\frac{b}{y}$, то убедимся, что оба они разрывны при $x=0$. Но, изучая их в этой форме, мы легко убеждаемся также, что соответствующие им постоянные при положительных и отрицательных значениях x остаются неизменными, так как значение интегралов меняется непрерывно при переходе от $x=+\infty$ к $x=-\infty$.

[2]) В случае, когда $y=\pm\infty$, т. е. $x=0$, оба интеграла обращаются в бесконечность; следовательно, $k=\infty-\infty$, т. е. произвольно, что, очевидно, вытекает и из непосредственного рассмотрения этого случая.

в дальнейшем) Π с отрицательным аргументом будет определено из Π с положительным аргументом посредством закона $\Pi(n) = \frac{1}{n+1}\Pi(n+1)$. Действительно, согласно закону, которому подчинены коэффициенты ряда, наш результат справедлив для всех значений α, если только один из коэффициентов $\begin{matrix}<\mu\\>-1\end{matrix}$. Таким образом, если μ положительно, мы получаем:

$$kx^{\mu} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} k \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\alpha)\Pi(\mu-\alpha)} b^{\mu-\alpha}(x-b)^{\alpha}$$

или же

$$\frac{x^{\mu}}{\Pi(\mu)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} \frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)} \frac{(x-b)^{\alpha}}{\Pi(\alpha)}.$$

Далее, после n-кратного дифференцирования по x, будем иметь

$$\frac{x^{\mu-n}}{\Pi(\mu-n)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} \frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)} \frac{(x-b)^{\alpha-n}}{\Pi(\alpha-n)},$$

чем доказывается справедливость нашего результата и для случая отрицательного μ.

Итак, без всяких ограничений установлено разложение:

$$\frac{x^{\mu}}{\Pi(\mu)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} \frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)} \frac{(x-b)^{\alpha}}{\Pi(\alpha)} \text{ [6]}. \tag{3}$$

Следует лишь заметить, что разложения для x^{μ} не получается никакого, когда μ—целое отрицательное число, так как в этом случае слева появляется нуль (к этому мы вернёмся ниже). Зато мы видим, что существуют ряды рассматриваемого вида, сумма которых при любом значении x равна нулю (или вообще некоторой постоянной).

Высказавшись против того осуждающего приговора, которому подвергнуты расходящиеся ряды, мы теперь станем следовать по намеченному пути, чтобы обосновать понятие обобщённых производных. Цель, которую мы себе поставили (именно так обобщить понятие производных, чтобы производные в обычном смысле были частным случаем обобщённых производных), достигается, если для целых положительных значений ν мы положим $k_{\nu} = \frac{1}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot\nu}$, а для всех целых отрицательных $k_{\nu}=0$, так как тогда ряд (2) переходит в ряд (1). Но это условие, очевидно, выполняется бесконечным числом различных функций от ν. К тому же нет никаких оснований полагать, что существует лишь одно разложение данной функции по данным степеням x, т. е. что только при одной системе коэффициентов ряд определённого вида получает определённую сумму; напротив, следует предусматривать возможность бесконечно большого числа таких систем. Таким образом, без вреда для поставленной цели мы имеем право выбирать как одну из различных возможных функций k_ν, так и одну из различных возможных систем коэффициентов; и совершенно ясно, что наиболее целесообразно осуществить этот выбор, насколько удастся, с таким расчётом, чтобы обобщённые производные подчинялись тем же законам, что и обыкновенные.

В эту сторону направлены излагаемые далее соображения.

Так как выражение $\sum k_\nu \partial_x^\nu z\, h^\nu$ должно охватывать все разложения $z_{(x+h)}$ интересующего нас вида, то

$$\frac{d\sum k_\nu \partial_x^\nu z\, h^\nu}{dh} = \sum k_\nu \nu \partial_x^\nu z\, h^{\nu-1}$$

охватывает все того же вида разложения $\frac{dz_{(x+z)}}{dh}$ и точно так же

$$\frac{d\sum k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu}{dx} = \sum k_\nu \frac{d\partial_x^\nu z}{dx} h^\nu$$

— все того же вида разложения $\frac{dz_{(x+h)}}{dx}$. Но известно, что $\frac{dz_{(x+h)}}{dh}$ и $\frac{dz_{(x+h)}}{dx}$ тождественны. Поэтому оба выражения охватывают одни и те же ряды. Значит, $k_{\nu+1}(\nu+1)\partial_x^{\nu+1}z$ и $k_\nu \frac{d\partial_x^\nu z}{dx}$ должны иметь одинаковые значения, т. е. быть равными между собою. Если положим, что $k_{\nu+1}(\nu+1) = k_\nu$ (это не противоречит указанному выше основному требованию, так как в силу этого требования то же самое условие выполняется для целых значений ν), то отсюда вытекает, что все производные дробных порядков связаны соотношением

$$\partial_x^{\nu+1}z = \frac{d\partial_x^\nu z}{dx},$$

и потому, вообще, если только n — целое число, справедливо соотношение

$$\partial_x^{\nu+n}z = \frac{d^n\partial_x^\nu z}{dx^n}. \qquad (4)$$

Из закона, принятого для k_ν, следует, что

$$\Pi(\nu)\, k_\nu = \Pi(\nu+1)\, k_{\nu+1},$$

так что функция $\Pi(\nu)\, k_\nu$ (которую мы обозначим через l_ν) при всех значениях ν, отличающихся на целые числа, принимает одно и то же значение. Поэтому, желая выбрать функцию l_ν целесообразнейшим способом, мы не можем ограничиться рассмотрением какой-нибудь одной формы разложения, а должны комбинировать различные формы. Посмотрим, нельзя ли будет так определить l_ν, чтобы был справедлив закон $\partial_x^\nu\partial_x^\mu z = \partial_x^{\nu+\mu}z$.

Для этого дадим переменной x в формуле (2) ещё одно приращение (обозначим его через k); тогда получим

$$z_{(x+h+k)}=\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} l_\mu l_\nu \partial_x^\mu \partial_x^\nu z \frac{k^\mu}{\Pi(\mu)}\frac{h^\nu}{\Pi(y)}, \tag{α}$$

причём последнее выражение охватывает все возможные разложения $z_{(x+h+k)}$ по одним и тем же степеням h и k. С другой стороны, мы имеем [вследствие (3)]

$$z_{(x+h+k)}=\sum_{\mu+\nu=-\infty}^{\mu+\nu=\infty} l_{(\mu+\nu)}\partial_x^{\mu+\nu} z\frac{(h+k)^{\mu+\nu}}{\Pi(\mu+\nu)}=$$

$$=\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} l_{(\mu+\nu)}\partial_x^{\mu+\nu} z\frac{h^\nu k^\mu}{\Pi(\nu)\Pi(\mu)}. \tag{β}$$

Выражение (β) не охватывает всех возможных этой формы разложений $z_{(x+h+k)}$, так как равенство (3) даёт лишь одно разложение $\frac{(h+k)^{\mu+\nu}}{\Pi(\mu+\nu)}$ (хотя не исключено, что возможны и иные разложения). Но все разложения, охватываемые выражением (β), должны охватываться выражением (α). Поэтому, если мы подчиним функцию l закону $l_{(\mu+\nu)}=l_\mu l_\nu$, то все значения $\partial_x^{\mu+\nu}z$ будут также значениями $\partial_x^\mu\partial_x^\nu z$, хотя последнее выражение может иметь и иные значения.

Итак, при введённом ограничении мы получаем формулу

$$\partial_x^\mu\partial_x^\nu z=\partial_x^{\mu+\nu}z. \tag{5}$$

Из равенства $l_{(\mu+\nu)}=l_\mu l_\nu$ следует далее

$$l_{(\mu+\nu+\pi)}=l_{\mu+\nu}\,l_\pi=l_\mu l_\nu l_\pi,$$

и вообще произведение l от нескольких чисел равно l от их суммы. Принимая, что все числа равны, будем иметь $l_{m\nu}=l_\nu^m$, где m—произвольное целое число. Обозначая $\frac{m\nu}{n}$ через π, получим:

$$l_{m\nu}=l_{n\pi}=l_\nu^m=l_\pi^n, \text{ т. е. } l_{\frac{m}{n}\nu}=l_\nu^{\frac{m}{n}}.$$

Для всех рациональных значений μ справедливо, таким образом равенство $l_{\mu\nu}=l_\nu^\mu$, и, следовательно (по известному закону интерполяции), оно справедливо при любом μ. Но так как при целых ν имеем $l_\nu=1$, то, значит, $l_\nu=1^\nu$.

Из предыдущего вытекает, что, если для наших производных должны быть, вообще, выполнены законы (4) и (5) и притом эти производные действительно должны быть обобщением производных в обычном смысле, то выбирать приходится среди тех функций от x, которые удовлетворяют равенству

$$z_{(x+h)}=\sum\frac{1^\nu h^\nu}{\Pi(\nu)}\partial_x^\nu z=\sum\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}\partial_x^\nu z;$$

притом выбор целесообразно сделать с таким расчётом, чтобы по возможности облегчить вычисления: если попробовать произвести несколько разложений функций с аргументом $x+h$ по дробным степеням h, то станет ясно, что эта операция наиболее просто и легко совершается в том случае, если коэффициент при $\frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ является производной от коэффициента при $\frac{h^{\nu}}{\Pi(\nu)}$. Поэтому мы наложим на наши производные ещё дальнейшее следующее ограничение: $\partial_x^{\nu} z$ пусть обозначает коэффициент при $\frac{h^{\nu}}{\Pi(\nu)}$ не во всех возможных разложениях $z_{(x+h)}$, а только в тех, в которых коэффициент при $\frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ есть производная от коэффициента при $\frac{h^{\nu}}{\Pi(\nu)}$ [1]).

Отсюда заключаем, что любое значение $\partial_x^{\nu} z$ может принадлежать лишь одному разложению. Если бы некоторое значение $\partial_x^{\nu} z$, например, p_{ν}, принадлежало двум разложениям, например, a и b, то все следующие члены в обоих разложениях были бы одни и те же; они получались бы из p_{ν} посредством дифференцирований. Обозначим теперь предшествующие члены в разложении a через $p_{\nu-1}$, $p_{\nu-2}$, ..., в разложении b — через $q_{\nu-1}$, $q_{\nu-2}$, ...; так как $p_{\nu-1}$ и $q_{\nu-1}$ оба имеют производную p_{ν}, то они могут отличаться лишь на постоянную, так что

$$q_{\nu-1} = p_{\nu-1} + K_1,$$

и точно так же

$$q_{\nu-2} = p_{\nu-2} + K_1 x + K_2, \quad q_{\nu-3} = p_{\nu-3} + K_1 \frac{x^2}{\Pi(2)} + K_2 x + K_3, \ \ldots,$$

Следовательно, разложение b должно иметь вид

$$a + \sum_{m=\infty}^{m=1} K_m \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{\Pi(n)} \frac{h^{\nu-n-m}}{\Pi(\nu-n-m)} = a + \sum_{m=\infty}^{m=1} K_m \frac{(x+h)^{\nu-m}}{\Pi(\nu-m)}.$$

Но для всех значений $x+h$ должно быть $a=b$; это, как известно, возможно только в том случае, если все константы обращаются в нуль, а это значит, что оба разложения совпадают.

Если p_{ν} есть одно из значений $\partial_x^{\nu} z$, то $p_{\nu} + K \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$ (где n — целое положительное, а K — конечная постоянная) также есть значение $\partial_x^{\nu} z$.

---

[1]) Из закона (4) следует, что если $\sum \partial_x^{\nu} z \frac{h^{\nu}}{\Pi(\nu)}$ есть разложение $z_{(x+h)}$, то $\sum \frac{d\partial_x^{\nu} z}{dx} \frac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ также есть разложение $z_{(x+h)}$, но не следует, что эти разложения тождественны. Из сделанного допущения, между прочим, вытекает (как будет показано ниже), что производные целых отрицательных порядков, которые по предыдущему ещё пока лишены смысла, совпадают с интегралами.

Действительно, легко понять, что

$$\sum\left(p_\nu+K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}\right)\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}=\sum p_\nu\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}+K\frac{(x+h)^{-n}}{\Pi(-n)}=\sum p_\nu\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}=z_{(x+h)},$$

причём соблюдено условие

$$\frac{d\left(p_\nu+K\dfrac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}\right)}{dx}=p_{\nu+1}+K\frac{x^{-\nu-n-1}}{\Pi(-\nu-n-1)}.$$

Совокупность всех значений $\partial_x^\nu z$, получаемых одно из другого посредством прибавления членов вида $K\dfrac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$ мы условимся называть системой значений. Итак, все значения $\partial_x^\nu z$, принадлежащие одной и той же системе, охватываются формулой

$$p_\nu+\sum_{n=\infty}^{n=1}K_n\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}, \tag{6}$$

где K_n—конечные постоянные [7].

Постараемся теперь определить одно значение $\partial_x^\nu z$.

Если $z_{(x)}$ непрерывно [8] между x и k, то справедливо разложение

$$z_{(x)}=z_{(k)}+\left(\frac{dz}{dx}\right)_{(k)}(x-k)+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{(k)}\frac{(x-k)^2}{1\cdot 2}+\ldots$$

Заменим здесь x на $x+h$ и разложим члены ряда с помощью (3) по степеням h; тогда получим:

$$z_{(x+h)}=\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty}\frac{h^\mu}{\Pi(\mu)}\left(z_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu}}{\Pi(-\mu)}+\left(\frac{dz}{dx}\right)_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu+1}}{\Pi(-\mu+1)}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu+2}}{\Pi(-\mu+2)}+\ldots\right),$$

причём в этом разложении множитель при $\dfrac{h^\mu}{\Pi(\mu)}$ есть производная от коэффициента при $\dfrac{h^{\mu-1}}{\Pi(\mu-1)}$ и потому представляет собой одно из значений $\partial_x^\mu z$, которое мы обозначим через p_μ. Дифференцируя по k, будем иметь

$$\frac{dp_\mu}{dk}=-z_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)},$$

откуда

$$p_\mu=\int -z_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)}\,dk.$$

При $k=x$ обращаются в нуль все члены ряда, являющегося множителем при $\dfrac{h^\mu}{\Pi(\mu)}$, и потому интеграл, взятый в пределах от k до x, равен p_μ, если только он непрерывен в промежутке интегрирования; но последнее в самом деле имеет место, так как z непрерывно между x и k, и $-\mu-1>-1$. Итак,

$$\int_x^k -z_{(k)}\frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)}\,dk=\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}\,dt \tag{7}$$

есть одно из значений $\partial_x^\mu z$, если только z непрерывно между x и k и если μ отрицательно. Соответствующее тому же разложению значение $\partial_x^{\mu-n} z$ равно

$$\frac{1}{\Pi(-\mu+n-1)}\int_k^x (x-t)^{-\mu+n-1}z_{(t)}dt.$$

Легко понять, что, давая k различные значения, мы будем получать различные разложения $z_{(x\,|\,h)}$, но соответствующие этим разложениям значения $\partial_x^\mu z$ принадлежат одной и той же системе [9]. Действительно, интегралы

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_{k_1}^x (x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}dt$$

отличаются на выражение

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_{k_1}^k (x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}dt=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^{-\mu-1-n}}{\Pi(-\mu-1-n)}\int_{k_1}^k \frac{(-t)^n}{\Pi(n)}z_{(t)}\,dt,$$

причём, так как z непрерывно между x и k_1 и, следовательно, между k и k_1, то последние интегралы представляют собой конечные и не зависящие от x величины. Таким образом, независимо от выбора k мы всегда приходим к одной и той же системе значений производных. Ограничивая понятие производной именно этой системой значений, мы сводим их вычисление к известным операциям и теперь, основываясь на установленном определении, сможем исследовать свойства производных и вычислить производные для некоторых функций.

Мы получили

$$1.\quad \partial_x^\nu z=\frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\nu-1}z_{(t)}dt+\sum_{n=\infty}^{n=1}K_n\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)},$$

где K_n — конечные произвольные постоянные [1]), ν — отрицательно и z

---

[1]) Все подобного рода произвольные функции мы будем обозначать через φ_ν; следует обратить притом внимание на то, что всякая функция φ_ν есть непременно функция $\varphi_{\nu-n}$ (n — целое положительное).

предполагается непрерывным между x и k; что касается значений ν, которые $\geqslant 0$, то $\partial_x^\nu z$ обозначает то, что получается из $\partial_x^{\nu-m} z$ (где $m \geqslant \nu$) в результате m-кратного дифференцирования по x [1]), причём, разумеется, должно быть выполнено соотношение

$$2.\ z_{(x+h)} = \sum_{n=\infty}^{n=1} \frac{h^{\nu-n}}{\Pi(\nu-n)} \int^{(n)} \partial_x^\nu z dx^n + \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} \partial_x^\nu z + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{h^{\nu+n}}{\Pi(\nu+n)} \frac{d^n \partial_x^\nu z}{\partial x^n} \text{ [2])}.$$

Отсюда следует

$$3.\qquad \partial_x^{-m} z = \int_k^{x\,(m)} z_{(t)} dt^m + \sum_{n=m}^{n=1} K_n \frac{x^{-n+m}}{\Pi(-n+m)},$$

а также

$$4.\qquad \partial_x^0 z = z,$$

$$5.\qquad \partial_x^m z = \frac{d^m z}{dx^m}$$

и ещё далее

$$6.\qquad \partial_x^\mu \partial_x^\nu z = \partial_x^{\nu+\mu} z + \varphi_\mu.$$

Таким образом, всякое значение $\partial_x^{\mu+\nu} z$ есть также значение $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$. Но обратное имеет место лишь в том случае, если μ — целое положительное, или ν — целое отрицательное число. В этом случае оба выражения равнозначащи.

Из определения следует также (обозначая через c постоянную):

$$7.\qquad \partial_x^\nu (p+q) = \partial_x^\nu p + \partial_x q,$$

$$8.\qquad \partial_x^\nu (cp) = c\partial_x^\nu p,$$

$$9.\qquad \partial_{x+c}^\nu z = \partial_x^\nu z,$$

$$10.\qquad \partial_{cx}^\nu z = \partial_x^\nu z c^{-\nu}.$$

Два значения $\partial_x^\nu z$ и $\partial_x^\mu z$, в которых постоянные K, K_1 и т. д. одни и те же, называются соответственными. Все значения производных, взятые из одного разложения $z_{(x+h)}$, являются соответственными одно по отношению к другому.

---

[1]) Определение

$$\partial_x^\nu z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{d^n z_{(x)}}{dx^n}\right)_{(k)} \frac{(x-k)^{n-\nu}}{\Pi(n-\nu)} + \varphi_\nu,$$

равносильное данному выше, подошло бы для всех значений ν; однако, мы предпочли ему иное вследствие его большей гибкости.

[2]) Охватывает ли формула 1 все значения производных, которые могут быть получены из этого соотношения, зависит, очевидно, от того, существуют ли, кроме функций φ_ν, ещё иные, которые, будучи подставлены вместо $\partial_x^\nu z$, обращают в нуль сумму ряда в правой части 2. Без труда можно показать, что среди алгебраических функций, не содержащихся в φ_ν, нет обладающих этим свойством; имеются ли таковые вообще — этого до сих пор мне ещё не удалось установить.

Перейдём теперь к выводу производных от некоторых определённых функций. Очевидно, достаточно найти какое-нибудь одно значение каждой производной, так как все прочие получаются посредством добавления функции φ; притом это значение, если только могут быть найдены какие-нибудь полезные преобразования формулы 1, должно быть задано более простой формулой, чем формула 1: именно, формула эта должна содержать x в явном и в конечном виде; интересующее нас преобразование позволит, следовательно, вывести x из-под знака интеграла.

Рассмотрим сначала функцию x^μ.

Если μ положительно, то x^μ непрерывно при всех значениях x; поэтому интеграл

$$\frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int\limits_0^x (x-t)^{-\nu-1}t^\mu dt$$

непременно даёт значение $\partial_x^\nu(x^\mu)$; но, как легко понять, он равен

$$\frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int\limits_0^1 x^{\mu-\nu}(1-y)^{-\nu-1}y^\mu dy = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}x^{\mu-\nu}.$$

Вследствие (4) m-ая производная последнего выражения равна

$$\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu-m)}x^{\mu-\nu-m} = \partial_x^{\nu+m}(x^\mu),$$

и потому при любом значении ν

$$\partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}x^{\mu-\nu}+\varphi_\nu.$$

Если μ отрицательно, то функция x^μ имеет разрыв в точке $x=0$, во всех же других точках непрерывна; следовательно, в формуле 1 x и k должны всегда иметь один и тот же знак. Интегрируя по частям m раз, мы получим:

$$\frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int\limits_k^x (x-t)^{-\nu-1}t^\mu dt =$$

$$= \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-\nu-1-m)\,\Pi(\mu+m)}\int\limits_k^x (x-t)^{-\nu-1-m}t^{\mu+m}\,dt+\varphi_\nu,$$

если только $-\nu-m>0$ и, таким образом, при условии $-\nu>-\mu$ те интегралы, в которых $\mu<-1$, сводятся к интегралам, в которых показатель при t больше или равен -1. Если он больше -1, то интеграл

$$\int\limits_0^k (x-t)^{-\nu-1-m}t^{\mu+m}dt$$

является функцией φ_ν и, следовательно, выражение

$$\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-\nu-1-m)\,\Pi(\mu+m)}\int_0^x (x-t)^{-\nu-1-m}t^{\mu+m}dt=\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}\,x^{\mu-\nu}$$

есть одно из значений $\partial_x^\nu(x^\mu)$ (это справедливо при $-\nu>-\mu$, но по закону $\partial_k^{\nu+1}z=\frac{a\partial_x^\nu z}{dx}$ обобщается на любое ν).

Если же $\mu+m=-1$, то тогда

$$\int_k^x (x-t)^{-\nu-1-m}t^{\mu+m}dt=$$

$$=\log x\,x^{\mu-\nu}-\log k x^{\mu-\nu}+\int_k^x \frac{(x-t)^{\mu-\nu}-x^{\mu-\nu}}{t}\,dt=$$

$$=\log x\,x^{\mu-\nu}+\int_0^x \frac{(x-t)^{\mu-\nu}-x^{\mu-\nu}}{t}\,dt+\varphi_\nu=$$

$$=\log x\,x^{\mu-\nu}+x^{\mu-\nu}\int_0^1 \frac{y^{\mu-\nu}-1}{1-y}\,dy=$$

$$=\log x\,x^{\mu-\nu}-(\Psi(\mu-\nu)-\Psi(0))x^{\mu-\nu}\ [^{10}].$$

Обобщая также и этот результат с помощью дифференцирования, мы получим следующие значения для $\partial_x^\nu(x^\mu)$:

11. $$\partial_x^\nu(x^\mu)=\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}\,x^{\mu-\nu}$$

(если μ не есть целое отрицательное число),

12. $$\partial_x^\nu\,(x^\mu)=\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-1)}\;\frac{1}{\Pi(\mu-\nu)}\;[\log x\;x^{\mu-\nu}(\Psi(\mu-\nu)-\Psi(0))\,x^{\mu-\nu}]$$

(если μ — целое отрицательное).

Нужно заметить, что из формулы 12 следует формула 11, если только произвести надлежащие преобразования с константами, которые в этом случае обращаются в $\frac{\infty}{\infty}$; то же самое и в случае, когда оба числа $\mu-\nu$ и μ — целые отрицательные. Легко понять, что значения производных, получающиеся из этих формул при различных ν, являются соответственными; по этой причине в формуле 12 мы не включили член, содержащий $x^{\mu-\nu}$, в функцию φ_ν, в противоположность тому случаю, когда μ — целое отрицательное.

Применяя аналогичную процедуру к функции e^x, мы получаем:

$$13.\quad \partial_x^\nu (e^x) = \frac{1}{\Pi(-\nu-1)} \int_{-\infty}^{x} e^t (x-t)^{-\nu-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Pi(-\nu-1)} e^x \int_0^\infty e^{-y} y^{-\nu-1} dy = e^x.$$

Таким же образом выводятся и производные от $\log x$, но только ещё проще, и притом сразу для всех значений ν (с помощью 6 и 12).

$$14.\quad \partial_x^\nu (\log x) = \partial_x^\nu \partial_x^{-1} x^{-1} = \frac{1}{\Pi(-\nu)} (\log x\, x^{-\nu} [\Psi(-\nu) - \Psi(0)]\, x^{-\nu}).$$

Из правил 13 и 14 с помощью 7 и 10 получаются чрезвычайно легко и производные от функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)$.

В заключение отметим ещё, что изложенная теория не менее обоснованно может быть перенесена и на случай, когда рассматриваемые величины — мнимые [11].

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

РАБОТЫ РИМАНА

ПО ГЕОМЕТРИИ, МЕХАНИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

XIV. О ГИПОТЕЗАХ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ

Общеизвестно, что геометрия предполагает заданными заранее как понятие пространства, так и первые основные понятия, которые нужны для выполнения пространственных построений. Она даёт номинальные определения понятий, тогда как существенные свойства определяемых объектов входят в форме аксиом. При этом взаимоотношение между этими предпосылками остаётся невыясненным: не видно, является ли, и в какой степени, связь между ними необходимой; не видно также a priori, возможна ли такая связь.

Начиная от Эвклида и кончая Лежандром (я называю наиболее выдающегося из новейших исследователей основ геометрии), ни математиками, ни философами из числа занимавшихся интересующим нас вопросом, упомянутые неясности не были устранены. Причина этому обстоятельству, как я полагаю, заключается в том, что общая концепция многократно протяжённых величин, к которым относятся пространственные величины, оставалась вовсе не разработанной. В связи с этим я поставил перед собой задачу — исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяжённой величины. Мы придём к заключению, что в многократно протяжённой величине возможны различные мероопределения, и что пространство есть не что иное, как частный случай трижды протяжённой величины. Необходимым следствием отсюда явится то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств протяжённых величин, и что, напротив, те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяжённых величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта. В таком случае возникает задача установить, из каких простейших допущений вытекают метрические свойства пространства, — задача, естественно, не вполне определённая, так как не исключено, что возможно несколько систем простых допущений, из которых каждая достаточна для установления метрических свойств пространства; важнейшая среди них, с точки зрения поставленной нами цели, есть система, положенная в основу геометрии Эвклидом. Допущения, о которых идёт речь, не являются (как и всякие допущения) необходимыми; достоверность их носит эмпирический характер; они — не что иное, как гипотезы. Их правдоподобие (которое, как бы то ни было, очень значительно в пределах наблюдения) надлежит подвергнуть исследованию и затем судить о том, могут ли они быть распространены за пределы наблюдения как в сторону неизмеримо большого, так и в сторону неизмеримо малого.

I. ПОНЯТИЕ n-КРАТНО ПРОТЯЖЁННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Я обращаюсь к первой из указанных мною задач, а именно, к выяснению понятия многократно протяжённой величины; при этом считаю для себя обязательным просить об известном снисхождении, тем более, что в относящихся сюда работах философского содержания, трудность которых заключена скорее в анализе понятий, чем в математических построениях, я не обладаю большой осведомлённостью. Кроме очень кратких указаний, которые г. тайный советник Гаусс дал во втором мемуаре, посвященном биквадратическим вычетам (в Гёттингенских учёных записках), и в своей юбилейной работе, а также некоторых философских исследований Гербарта, я не имел возможности использовать какие-либо литературные источники.

1

Образование понятия величины возможно лишь в том случае, если предпослано некоторое общее понятие, связанное с допущением ряда различных состояний [1]. В зависимости от того, существует ли или не существует непрерывный переход от одного состояния к другому, мы имеем дело с непрерывным или с прерывным многообразием; отдельные состояния называются в первом случае точками, во втором — элементами многообразия. Величины, которые образуют дискретное множество состояний, встречаются столь часто, что по крайней мере в более развитых языках для соответствующих понятий всегда имеются особые наименования (и именно потому при построении учения о дискретных величинах математики могли исходить из допущения однородности данных объектов). Напротив, надобность в образовании понятий, соответствующих случаю непрерывных многообразий, встречается сравнительно редко: из немногочисленных примеров многократно протяжённых многообразий, встречающихся в обыденной жизни, укажем локализованные ощущения и цвета; гораздо чаще приходится прибегать к рассмотрению и исследованию подобного рода понятий в высших разделах математики.

Отдельные части многообразий могут быть выделены с помощью некоторых признаков или же количественных (квантитативных) различий. С количественной точки зрения сравнение осуществляется в случае дискретных многообразий посредством счета, в случае непрерывных — посредством измерения. Измерение заключается в последовательном прикладывании сравниваемых величин; поэтому возможность измерений обусловлена наличием некоторого способа переносить одну величину, принятую за единицу масштаба, по другой величине. Если такой способ не указан, то сравнивать две величины можно лишь в том случае, когда одна из них является частью другой, и тогда речь может итти лишь о «больше» или «меньше», а не о «сколько». Исследования, которые имеют своим предметом величины такого рода, образуют общего характера, независимую от мероопределения, часть учения о величинах: в ней величины не мыслятся существующими независимо от их положения и выраженными через единицу измерения, а должны быть представляемы как области в некотором многообразии. Такого рода исследования стали крайне необходимыми для многих отраслей математики, в частности, в теории многозначных аналитических функций; недостаточное их развитие, несомненно, есть причина того, что знаменитая теорема Абеля, а также результаты, полученные Лагранжем, Пфаффом, Якоби в общей теории дифференциальных уравнений, долгое время не давали своих плодов.

С точки зрения цели, которую мы здесь имеем ввиду, из этой общей части учения о протяжённых величинах (где не делается никаких допущений, которые не содержались бы в самом понятии) достаточно особо выделить два пункта: первый относится к способу введения понятия многократно протяжённой величины, второй касается того, как определение местонахождения в многообразии сводится к установлению ряда количественных (квантитативных) данных, причём выяснено будет и то, какому многообразию приписывается n-кратная протяжённость.

2

Предположим, что некоторому понятию сопоставлено непрерывное множество состояний, причём от одного состояния определённым способом можно переходить ко всякому другому: тогда все эти состояния образуют просто протяжённое или однократно протяжённое многообразие, отличительным признаком которого служит возможность непрерывного смещения на каждом данном этапе лишь в две стороны — вперёд и назад. Предположим дальше, что это многообразие в свою очередь может быть переведено в другое, вполне отличное от первого многообразия — притом также совершенно определённым образом, т. е. так, что каждая точка первого многообразия переходит в определённую точку второго: все состояния, которые могут быть получены при подобного рода операциях, образуют дважды протяжённое многообразие. Так же образуется и трижды протяжённое многообразие: достаточно представить себе, что дважды протяжённое многообразие определённым образом переводится в иное, вполне отличное многообразие. Легко понять, как можно продолжить это построение. Если условимся термину «определённый» противопоставлять в качестве противоположного термина «изменяемый», то можно характеризовать наше построение как составление изменяемости $n+1$ измерений из одной изменяемости n измерений и одной изменяемости одного измерения [2].

3

Теперь я покажу, как, обратно, изменяемость, связанная с некоторой данной областью, может быть разложена на изменяемость одного измерения и изменяемость меньшего числа измерений. Для этой цели представим себе переменную точку на некотором многообразии одного измерения (на этом последнем отсчёт ведётся от определённой начальной точки, и различные результаты измерения сравнимы между собою) и вообразим, что для каждой точки данного многообразия указывается некоторое положение упомянутой переменной точки, с сохранением непрерывности; другими словами, на данном многообразии указывается некоторая непрерывная функция точки и притом такая, которая на некоторой части данного многообразия не может оставаться постоянной [3]. В таком случае всякая система точек, в которых функция сохраняет постоянное значение, образует непрерывное многообразие меньшего числа измерений, чем данное. Эти многообразия при изменении значения функции непрерывно переходят одно в другое; поэтому можно считать, что из одного из них получаются все остальные, причём происходит это, вообще говоря, так, что каждая точка одного переходит в определённую точку другого (случаи исключения, исследование которых существенно, здесь оставляются в стороне). В итоге, определение положения на данном многообразии приводится к определению числового значения просто протяжённой величины и определению положения на многообразии, протяжённость которого меньшей кратности. Легко показать, что это многообразие будет иметь $n-1$ измерений, если данное многообразие их имеет n. Повторяя указанную операцию n раз, мы сводим определение положения на многообразии n-кратной протяжённости к определению числовых значений n просто протяжённых величин, т. е. определение положения на данном многообразии (если только такое определение возможно) — к указанию конечного числа числовых данных. Впрочем, существуют и такие многообразия, для которых определение положения требует указания бесконечного ряда или даже непрерывного множества числовых данных. Примером такого рода могут служить многообразия, образованные функциями в данной области, многообразия, образованные контурами геометрических фигур, и т. п. [4].

II. МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ, ВОЗМОЖНОЕ НА МНОГООБРАЗИИ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ, ЧТО ЛИНИИ ИМЕЮТ ДЛИНЫ, НЕЗАВИСИМЫЕ ОТ ИХ ПОЛОЖЕНИЯ, ТАК ЧТО КАЖДАЯ ЛИНИЯ ИЗМЕРИМА ПОСРЕДСТВОМ КАЖДОЙ

После того, как построено понятие n-кратно протяжённого многообразия и установлено в качестве существенного признака n-мерности, что определение положения на многообразии приводится к определению числовых значений n просто протяжённых величин, мы перейдём теперь ко второму из поставленных выше вопросов, а именно — к исследованию метрических отношений, возможных на таком многообразии, и к выяснению условий, которые являются достаточными для установления этих отношений. Метрические отношения могут быть исследуемы посредством отвлечённых величин и поставлены во взаимную связь с помощью формул; однако, при некоторых предположениях их можно свести к таким отношениям, которые, будучи рассматриваемы каждое в отдельности, допускают определённые геометрические представления и, следовательно, становится возможным результаты вычислений выражать в геометрической форме. Поэтому, хотя (чтобы стоять на твёрдой почве) и нельзя вовсе избежать абстрактного исследования с помощью формул, всё же результаты этого исследования будут здесь представлены, если можно так выразиться, в геометрическом одеянии. Для того и другого прочное основание заложено в знаменитом сочинении о кривых поверхностях г. тайного советника Гаусса [5].

1

Мероопределение подразумевает независимость величин от местоположения. Эта независимость может быть понимаема в различных смыслах: первое допущение, которое естественно принять и которое я здесь подвергну дальнейшему рассмотрению, заключается в том, что длины линии не зависят от их положения, так что каждая линия измерима посредством каждой. Если определение положения приведено к определению величин, т. е. положение точки на данном n-кратно протяжённом многообразии определяется n переменными величинами x_1, x_2, x_3 и т. д. до x_n, то для определения линии нужно задать величины x как функции некоторой одной переменной. Тогда задача заключается в том, чтобы указать математическую формулу для длины линий. В таком случае неизбежно подразумевать, что каждая из величин x может быть выражена через некоторую единицу. Поставленную задачу я буду исследовать только при некоторых ограничениях: во-первых, ограничусь рассмотрением таких линий, для которых отношения величин dx (взаимно соответствующих приращений величин x) изменяются непрерывно. Тогда можно разбить линии на такие элементы, в пределах которых отношения величин dx допустимо считать постоянными, и задача наша сводится к тому, чтобы указать общую формулу для линейного элемента ds, выходящего из любой данной точки; эта формула должна, следовательно, содержать величины x и величины dx. Во-вторых, я допущу, что длина линейного элемента остаётся неизменной, с точностью до величин второго порядка, если все его точки испытывают одно и то же бесконечно малое перемещение; отсюда, в частности, вытекает, что, когда все величины dx увеличиваются в одно и то же число раз, то и линейный элемент ds увеличивается во столько же раз [6]. При сделанных допущениях линейный элемент сможет быть произвольной однородной функцией первой степени от величин dx, которая не изменяется, когда все величины dx меняют знаки, и в которой коэффициенты являются непрерывными функциями величин x.

Чтобы притти к простейшим возможным случаям, я сначала нахожу формулу для $(n-1)$-кратно протяжённых многообразий, отстоящих от начальной точки линейного элемента повсюду на одно и то же расстояние, т. е. ищу непрерывную [7] функцию точки, которая отличает одно из таких многообразий от другого. Такая функция должна будет во все стороны от начальной точки или уменьшаться или увеличиваться; я предположу, что она во все стороны увеличивается и, следовательно, в самой точке имеет минимум. Тогда, если только её первые и вторые производные конечны, дифференциал первого порядка должен обращаться в нуль, а дифференциал второго порядка не может становиться отрицательным; я предположу, что он всегда положительный. Это дифференциальное выражение второго порядка остаётся постоянным, когда ds остаётся постоянным, и возрастает в квадратном отношении, когда величины dx и, следовательно, также и ds, увеличиваются в одно и то же число раз; поэтому оно $=\text{const.}\ ds^2$ и, значит, $ds =$ квадратному корню из всегда положительной целой однородной функции второй степени величин dx, с коэффициентами — непрерывными функциями величин x. В частности, для пространства, если определять положение точки прямоугольными координатами, мы имеем: $ds=\sqrt{\Sigma(dx)^2}$; пространство, следовательно, подпадает под этот простейший случай. Случай, который можно было бы назвать следующим по простоте, соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвёртой степени из дифференциального выражения четвёртой степени. Исследование этого более общего типа многообразий, правда, не потребовало бы введения каких-либо существенно новых принципов, но связано было бы со значительной потерей времени и едва ли позволило бы представить учение о многообразиях в особо своеобразном освещении; притом результаты не смогли бы быть сформулированы геометрически. Поэтому я позволяю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задаётся как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени.

Дифференциальное выражение рассматриваемого типа может быть преобразовано в другое выражение подобного типа, если n зависимых переменных приравнять некоторым функциям от n новых независимых переменных. Но таким образом нет возможности преобразовать всякое дифференциальное выражение во всякое: действительно, наше выражение содержит $n\frac{n+1}{2}$ коэффициентов, являющихся произвольными функциями независимых переменных; при введении же новых переменных мы сможем удовлетворить только n соотношениям, так что лишь n коэффициентов примут данные заранее значения. Поэтому $n\frac{n-1}{2}$ остальных коэффициентов зависят от природы исследуемого многообразия, и для установления отношений между ними требуются еще $n\frac{n-1}{2}$ функций точки на многообразии.

Те многообразия, для которых, как для плоскости и пространства, линейный элемент может быть приведён к виду $\sqrt{\Sigma(dx)^2}$, образуют частный случай изучаемых нами многообразий; они, без сомнения, заслуживают особого наименования и потому я буду многообразия, для которых квадрат линейного элемента приводится к сумме квадратов независимых дифференциалов, называть плоскими.

Для того, чтобы было легче обозреть существенные особенности различных многообразий, представимых в указанной форме, необходимо устранить особенности, возникающие из формы представления, что достигается надлежащим выбором переменных, совершаемым по определённому принципу.

2

Именно, вообразим, что построена система кратчайших линий, выходящих из произвольной начальной точки; тогда положение рассматриваемой переменной точки определится, если будут указаны начальное направление кратчайшей линии, на которой она лежит, и расстояние её от начальной точки, отсчитываемое по этой кратчайшей линии; достаточно, следовательно, задать отношения величин dx^0, т. е. величин dx в начале кратчайшей линии, и длины s этой линии. Но вместо dx мы введём линейные комбинации $d\alpha$, составленные из них таким образом, чтобы в начальной точке квадрат линейного элемента равнялся сумме их квадратов; независимыми переменными тогда будут: величина s и отношения величин $d\alpha$; и, наконец, вместо dx введём такие пропорциональные им величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы сумма их квадратов равнялась s^2. После введения этих переменных для бесконечно малых значений x квадрат линейного элемента примет вид Σdx^2, причём член следующего порядка будет однородным выражением второй степени от $n\frac{n-1}{2}$ величин $(x_1dx_2 - x_2dx_1)$, $(x_1dx_3 - x_3dx_1), \ldots$, т. е. этот член будет уже бесконечно малой величиной четвёртого порядка. Отсюда следует, что мы получим конечную величину, если разделим эту величину на квадрат площади бесконечно малого треугольника, в вершинах которого переменные имеют значения $(0, 0, 0, \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$. Эта величина сохраняет неизменное значение, поскольку величины x и dx содержатся в одних и тех же бинарных линейных формах, или же поскольку обе кратчайшие линии от значений 0 к значениям x и от значений 0 к значениям dx лежат в одном и том же плоском элементе, и зависит, следовательно, только от местонахождения и направления этого элемента. Она, очевидно, равна нулю, если рассматриваемое многообразие плоское, т. е., если квадрат линейного элемента приводится к виду Σdx^2, и может потому служить мерой того, насколько многообразие по данному плоскостному направлению отклоняется от плоского многообразия. Будучи умножена на $-\frac{3}{4}$, она становится равной той величине, которую г. тайный советник Гаусс назвал мерой кривизны поверхности. Уже раньше было отмечено, что для введения мероопределения на n-кратно протяжённом многообразии, представимом в указанной выше форме, необходимо задать $n\frac{n-1}{2}$ функций точки; поэтому, если в каждой точке задаётся мера кривизны, соответствующая каждому из $n\frac{n-1}{2}$ плоскостных направлений, то тем самым определяются и метрические отношения на многообразии. Исключительным представляется лишь тот случай, когда между мерами кривизны имеются тождественные соотношения (что, вообще говоря, не имеет места). Таким образом, на многообразиях, линейный элемент которых представляется как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени, мероопределение может быть введено совершенно независимо от выбора переменных величин.

По совершенно аналогичному пути можно итти к поставленной цели и в том случае, если линейный элемент многообразия задаётся менее простым выражением, например, в виде корня четвёртой степени. В этом случае, вообще говоря, линейный элемент не может быть приведён к виду корня квадратного из суммы квадратов дифференциальных выражений, и в выражении для квадрата линейного элемента отклонение от плоскости было бы бесконечно малой величиной второго порядка, тогда как для ранее рассмотренных многообразий оно четвёртого порядка. Уместно было бы сказать, что последние упомянутые многообразия являются «плоскими в бесконечно малых частях». Но наиболее важное с установленной нами точки зрения свойство этих многообразий, обусловливающее то, почему исключительно они одни здесь исследуются, заключается в том, что метрические отношения в случае двукратной протяжённости допускают геометрическое истолкование посредством поверхностей, а в случае многократной протяжённости — могут быть сведены к рассмотрению метрических отношений на содержащихся в них поверхностях. К последнему замечанию необходимо теперь дать некоторые краткие пояснения.

3

При рассмотрении поверхностей следует различать внутренние метрические отношения, в которые входят лишь длины путей на самой поверхности, и отношения, характеризующие взаимное положение поверхностей и точек, лежащих вне их. От этих последних «внешних» отношений можно отвлечься следующим образом: станем изменять поверхности так, чтобы длины линий, на них лежащих, оставались неизменными т. е. так, чтобы, будучи как угодно изгибаемы, поверхности не подвергались растяжениям или сжатиям, — и все получаемые в результате изгибаний одна из другой поверхности пусть рассматриваются как одинаковые.

Так, например, цилиндрические или конические поверхности существенно не отличны от плоскости, так как могут быть получены из плоскости посредством одного лишь изгибания, причём внутренние метрические отношения остаются неизменными, и все теоремы, касающиеся этих отношений, т. е. вся планиметрия, остаются в силе; напротив, названные поверхности существенно отличны от сферы, которую без растяжений нельзя превратить в плоскость. Согласно предыдущему, в каждой точке внутренние метрические отношения дважды протяжённой величины (если только линейный элемент может быть представлен в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени, что имеет место в случае поверхностей) характеризуются мерой кривизны. Оказывается, что в случае поверхностей этой величине можно дать наглядное истолкование: она равняется произведению двух главных кривизн в рассматриваемой точке; можно также сказать, что произведение её на площадь бесконечно малого треугольника, составленного из кратчайших линий, равняется половине разности между суммой его углов и двумя прямыми углами (в долях радиуса). Первое определение подразумевало бы теорему: произведение главных радиусов кривизны при изгибании поверхности остаётся неизменным; второе — другую теорему: в одной и той же точке поверхности разность между суммой углов бесконечно малого треугольника и двумя прямыми углами пропорциональна площади треугольника. Чтобы дать геометрическое истолкование мере кривизны n-кратно протяжённого многообразия в данной точке относительно данного через неё проходящего плоского элемента, нужно исходить из того, что кратчайшая линия, выходящая из данной начальной точки, определяется полностью, если указано её начальное направление. Отсюда следует, что мы получим совершенно определённую поверхность, если продолжим все кратчайшие линии, выходящие из данной точки и имеющие начальные направления, лежащие в данном плоском элементе. Эта поверхность имеет в данной точке определённую меру кривизны, каковая и есть мера кривизны n-кратно протяжённого многообразия в данной точке относительно данного плоского элемента.

4

Прежде чем мы сделаем применение нашей теории к случаю пространства, необходимо ещё изложить ряд соображений, касающихся общего случая плоских многообразий, т. е. таких многообразий, для которых квадрат линейного элемента представляется в виде суммы квадратов полных дифференциалов.

В случае плоского n-кратно протяжённого многообразия мера кривизны в каждой точке относительно любого направления равна нулю; согласно предшествующему исследованию, для того, чтобы метрические отношения были определены, достаточно знать, что в каждой точке относительно $n\frac{n-1}{2}$ плоскостных направлений (таких, что соответствующие меры кривизны независимы между собою) мера кривизны равна нулю. Многообразия, для которых мера кривизны везде равна нулю, представляют собою частный случай многообразий, для которых мера кривизны всюду постоянна. Многообразия с постоянной мерой кривизны могут быть характеризованы также тем свойством, что фигуры могут в них перемещаться без растяжений и сжатий. В самом деле, очевидно, что фигуры не смогли бы быть как угодно перемещаемы и вращаемы в многообразии, если бы мера кривизны не оставалась неизменной в каждой точке по любому направлению. С другой стороны, метрические отношения на многообразии полностью определяются мерой кривизны; поэтому, если в одной точке по всем направлениям мера кривизны остаётся той же, что и во всякой другой точке, то во всякой точке можно выполнить те же построения, что и в начальной точке, так что на многообразии с постоянной мерой кривизны фигуры способны занимать совершенно произвольные положения. Метрические отношения на таких многообразиях зависят только от числового значения меры кривизны; по поводу аналитического представления я позволю себе заметить, что, если это числовое значение обозначено через α, выражение для линейного элемента может быть приведено к виду

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$$

5

Чтобы дать геометрическую иллюстрацию, рассмотрим поверхности с постоянной мерой кривизны. Легко убедиться, что поверхности, у которых кривизна положительная, всегда разворачиваются на сферу, радиус которой равен единице, делённой на корень квадратный из меры кривизны. Чтобы обозреть всё множество этих поверхностей, придадим одной из них вид сферы, а остальным — вид поверхностей вращения, которые касаются этой сферы по экватору. Поверхности, у которых мера кривизны больше, чем у сферы, будут касаться сферы изнутри и будут иметь такой вид, как внешняя (отвёрнутая от оси) часть поверхности тора: их можно было бы развернуть на зоны сфер меньшего радиуса, но при разворачивании они покрыли бы зоны сфер больше одного раза. Поверхности с мерой кривизны меньшей, чем мера кривизны начальной сферы, получаются, если из сфер большего радиуса вырезать кусок, ограниченный двумя большими полукругами, и соединить линии разреза. Поверхность с мерой кривизны нуль будет цилиндр, касающийся сферы по экватору. Поверхности с отрицательной мерой кривизны будут касаться этого цилиндра извне и иметь такой вид, как внутренняя (повёрнутая к оси) часть поверхности тора.

Если захотим по всем этим поверхностям перемещать куски поверхностей (как тела перемещаются в пространстве), то окажется, что для всех поверхностей такие перемещения возможны без растяжений и сжатий. Поверхности с положительной мерой кривизны можно изогнуть так, что произвольные перемещения кусков поверхностей смогут после этого осуществляться уже без изгибаний: достаточно развернуть их на соответствующие сферы. Для поверхностей с отрицательной мерой кривизны это невозможно. Кроме отмеченной независимости кусков поверхностей от положения, в случае поверхности с мерой кривизны нуль, имеет место ещё особого рода независимость направлений от положения, чего нет для других поверхностей.

III. ПРИМЕНЕНИЕ К ПРОСТРАНСТВУ

1

Установим теперь условия, необходимые и достаточные для определения метрических отношений в пространстве. При этом будем исходить из изложенных выше общих результатов, касающихся мероопределения в n-кратно протяжённой величине, и допустим независимость линий от положения и представимость линейного элемента в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени, т. е. допустим, что пространство «плоско в бесконечно малом».

Во-первых, как ясно из предыдущего, требуемые условия сводятся к тому, чтобы мера кривизны в каждой точке относительно трёх плоскостных направлений равнялась нулю. Поэтому нужно считать, что мероопределение в пространстве задано, если установлено, что сумма углов всякого треугольника равна двум прямым.

Во-вторых, следуя Эвклиду, допустим, что не только линии, но и тела существуют независимо от их положения в пространстве, откуда вытекает, что мера кривизны пространства всюду постоянна. В таком случае сумма углов в любом треугольнике определена, если определена в каком-нибудь одном.

Наконец, в-третьих, можно было бы, вместо того, чтобы допускать независимость длины линий от места и направления, допустить независимость их длины и направления от места. Приняв эту точку зрения, мы приходим к тому, что перемещения или изменения местоположения являются комплексными величинами, выражающимися через три независимые единицы.

2

Излагая предшествующие соображения, мы начали с того, что отделили отношения протяжённости (или отношения взаимного расположения) от метрических отношений, и пришли к заключению, что при одних и тех же отношениях протяжённости мыслимы различные метрические отношения; затем установили системы простых метрических отношений, которыми полностью определяется метрика пространства и необходимым следствием которых являются все теоремы геометрии остаётся ещё выяснить, обеспечиваются ли опытной проверкой эти простые отношения, и, если обеспечиваются, то в какой степени и в каком объеме? Между отношениями протяжённости и метрическими отношениями с этой точки зрения имеется существенное различие: именно, поскольку для отношений протяжённости возможно лишь дискретное множество различных случаев, результаты опытной проверки не могут не быть вполне точными (хотя, с другой стороны, не могут быть вполне достоверными), тогда как для метрических отношений множество возможных случаев непрерывно, и потому результаты опытной проверки — неизбежно неточные, какова бы ни была вероятность того, что они приближённо точны. Это обстоятельство имеет большое значение, когда речь идёт о распространении эмпирического опыта за пределы непосредственно наблюдаемого — в направлении неизмеримо большого или неизмеримо малого: за пределами непосредственно наблюдаемого метрические отношения становятся всё менее точными, чего нельзя сказать об отношениях протяжённости.

При распространении пространственных построений в направлении неизмеримо большого следует различать свойства неограниченности и бесконечности: первое из них есть свойство протяжённости, второе — метрическое свойство. То, что пространство есть неограниченное трижды протяжённое многообразие, является допущением, принимаемым в любой концепции внешнего мира; в полном согласии с этим допущением область внешних восприятий постоянно расширяется, и производятся геометрические построения в поисках тех или иных объектов, и допущение неограниченности ни разу не было опровергнуто. Поэтому неограниченности пространства свойственна гораздо большая эмпирическая достоверность, чем какому бы то ни было другому продукту внешнего восприятия. Но отсюда никоим образом не следует бесконечность пространства: напротив, если допустим независимость тел от места их нахождения, т. е. припишем пространству постоянную меру кривизны, то придётся допустить конечность пространства, как бы мала ни была мера кривизны, лишь бы она была положительной. Если бы мы продолжили кратчайшие линии, начальные направления которых лежат в некотором плоскостном элементе, то получили бы неограниченную поверхность с постоянной положительной мерой кривизны, т. е. такую поверхность, которая в плоском трижды протяжённом многообразии приняла бы вид сферы и, следовательно, является конечной.

3

Для объяснения природы вопросы о неизмеримо большом — вопросы праздные. Иначе обстоит дело с вопросами о неизмеримо малом. От той точности, с которой нам удаётся проследить явления в бесконечно малом, существенно зависит наше знание причинных связей. Успехи в познании механизма внешнего мира, достигнутые на протяжении последних столетий, обусловлены почти исключительно благодаря точности того построения, которое стало возможно в результате открытия анализа бесконечно малых и применения основных простых понятий, которые были введены Архимедом, Галилеем и Ньютоном и которыми пользуется современная физика. В тех же областях естествознания, где еще отсутствуют основные понятия, которые позволили бы произвести аналогичные построения, явления с целью установления причинных связей исследуются в пространственном бесконечно малом, насколько это осуществимо посредством микроскопа. Поэтому вопросы о метрических отношениях пространства в неизмеримо малом не принадлежат к числу праздных.

Если допустим, что тела существуют независимо от места их нахождения, так что мера кривизны везде постоянна, то из астрономических наблюдений следует, что она не может быть отлична от нуля; или, если она отлична от нуля, то по меньшей мере можно сказать, что часть вселенной, доступная телескопам, ничтожна по сравнению со сферой той же кривизны. Если же такого рода независимость тел от места их нахождения не отвечает действительности, то из метрических отношений в большом нельзя заключать о метрических отношениях в бесконечно малом: в таком случае в каждой точке мера кривизны может по трём направлениям иметь какие угодно значения, лишь бы в целом кривизна доступных измерению частей пространства заметно не отличалась от нуля. Еще более сложные соотношения имели бы место, если бы мы отказались от допущения о представимости линейного элемента в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени. Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, — понятия твердого тела и светового луча, — повидимому теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это положение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления.

Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве. Этот вопрос, конечно, также относится к области учения о пространстве и при рассмотрении его следует принять во внимание сделанное выше замечание о том, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное.

Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно её совершенствовать, руководясь фактами, которые ею объяснены быть не могут; такие же исследования, как произведённое в настоящей работе, именно, имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперёд и успехам в познании связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки.

Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступать его не даёт нам повода сегодняшний день.

ОБЗОР

[1] Раздел I является одновременно введением к исследованиям по analysis situs.

[2] Проведённое здесь рассмотрение возможных мероопределений в n-кратно протяжённом многообразии очень неполно, однако для настоящей цели вполне достаточно.

[1]) Параграф 3 раздела III нуждается в дальнейшем уточнении и переработке.

XV. ФРАГМЕНТЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ANALYSIS SITUS

Два одномерника [1] причисляются к одной и той же или к различным группам, смотря по тому, может ли один из них непрерывным преобразованием быть переведён в другой.

Всякие два одномерника, ограниченные одной и той же парой точек, составляют совместно связный неограниченный одномерник; при этом они образуют полную границу двумерника или нет — смотря по тому, принадлежат ли они одной и той же группе или различным.

Внутренний, связный, неограниченный одномерник может, будучи взят один раз, или оказаться или не оказаться достаточным для образования полной границы внутреннего двумерника.

. . . .

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ m внутренних связных неограниченных n-мерников, которые ни в отдельности, ни совместно не образуют полной границы внутреннего $(n+1)$-мерника, и пусть $b_1, b_2, \ldots, b_m$ m таких же n-мерников, из которых каждый совместно с одним или несколькими a образует полную границу внутреннего $(n+1)$-мерника. В таком случае каждый внутренний связный n-мерник, который совместно с a образует полную границу внутреннего $(n+1)$-мерника, образует полную границу внутреннего $(n+1)$-мерника совместно с b, и обратно.

Если неограниченный внутренний n-мерник совместно с a образует полную границу внутреннего $(n+1)$-мерника, то на основании сделанных предположений a могут быть постепенно исключены и заменены b.

n-мерник A называется переводимым в другой n-мерник B, если A и части B совместно образуют полную границу внутреннего $(n+1)$-мерника.

Если внутри непрерывно протяжённого многообразия с помощью m определённых частей n-мерников, которые сами по себе не являются ограничивающими, каждый неограниченный n-мерник становится ограничивающим, то это многообразие имеет связность порядка $m+1$ в n-ой размерности [2].

Непрерывно протяжённое многообразие называется односвязным, если порядок связности в каждой размерности равен единице.

Разрезом ограниченного непрерывно протяжённого многообразия A называется всякое внутри него содержащееся связное многообразие B меньшего числа измерений, если его граница целиком принадлежит границе A.

Порядок связности n-мерника посредством всякого односвязного разреза, составленного из $(n-m)$-мерников, или понижается на единицу в размерности m или повышается на единицу в размерности $m-1$.

Порядок связности в μ-ой размерности может измениться лишь в тех случаях, когда или неограниченные и неограничивающие μ-мерники преобразуются в ограниченные, или ограничивающие в неограничивающие. причём первое происходит, если к границе μ-мерника прибавляются новые части, а второе — если к границе $(\mu+1)$-мерника прибавляются новые части.

ЗАВИСИМОСТЬ ПОРЯДКА СВЯЗНОСТИ ГРАНИЦЫ B НЕПРЕРЫВНО ПРОТЯЖЁННОГО МНОГООБРАЗИЯ A ОТ ПОРЯДКА СВЯЗНОСТИ ЕГО САМОГО

Неограниченные, внутри B не ограничивающие многомерники разделяются на такие, которые внутри A не ограничивают, и такие, которые внутри A ограничивают. Исследуем сначала, как изменяется порядок связности B посредством односвязного разреза в A.

Пусть A будет n-ой, а разрез q m-ой размерности; a — оболочка некоторой точки q $(n-1-m)$-ой размерности, не разрезывающая q; p — граница q.

Порядок связности A в $(n-1-m)$-ой размерности увеличивается на 1, если a внутри A' не ограничивает, в $(n-m)$-ой размерности уменьшается на 1, если a внутри A' ограничивает,

$$A'-A=\begin{pmatrix} m+1 \\ +1 \end{pmatrix}, \text{ если } a \text{ внутри } A' \text{ не ограничивает } (\alpha)$$

$$=\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ если } a \text{ внутри } A' \text{ ограничивает } (\beta)$$

. . . .

	Изменение A	Изменение B
I. a внутри A' не ограничивает . . . a внутри B' не ограничивает . . . значит, p внутри B ограничивает .	$\begin{pmatrix} m+1 \\ +1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m-1 & m \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$
II. a внутри A' ограничивает . . . . . a внутри B' не ограничивает . . . значит, p внутри B ограничивает.	$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m-1 & m \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$
III. a внутри A' ограничивает . . . . . a внутри B' ограничивает . . . . значит, p внутри B не ограничивает.	$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n-m & m-1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

. . . .

Две части многомерника (части пространства) называются смежными, или принадлежащими одному куску, если можно провести кривую от внутренней точки одной из них к внутренней точке другой через внутренность многомерника (пространства).

ПРЕДЛОЖЕНИЯ ИЗ THEORIA SITUS

(1) Многомерник размерности меньше чем $n-1$ не может отделить части n-мерника одну от другой. Связный n-мерник или обладает или не обладает свойством — разделяться на части всяким $(n-1)$-мерным разрезом. Совокупность всех n-мерников, разделяющихся на части всяким $(n-1)$-мерным разрезом, обозначим через a.

Если принадлежащий a n-мерник превращён в другой посредством $(n-2)$-мерного разреза, то этот последний — связный и может принадлежать или не принадлежать a.

Те n-мерники a, которые посредством всякого $(n-2)$-мерного разреза превращаются в не-a, мы обозначим через a_1.

(2) Если многомерник A посредством μ-мерного разреза превращается в A', то всякий разрез A размерности, большей чем $\mu+1$, есть также разрез A', и обратно.

Если один из n-мерников a_1 посредством $(n-3)$-мерного разреза превращается в другой, то этот последний принадлежит a (2) и может или принадлежать или не принадлежать a_1.

Те из a_1, которые посредством всякого $(n-3)$-мерного разреза превращаются в не-a, мы обозначим через a_2.

Продолжая таким же образом, получим, наконец, категорию n-мерников a_{n-2}, охватывающую те из a_{n-3}, которые посредством всякого одномерного (линейного) разреза превращаются в не-a_{n-3}. Эти n-мерники a_{n-2} мы назовём односвязными. Следовательно, n-мерники a_μ являются односвязными, поскольку не принимаются во внимание разрезы $(n-\mu-2)$-ой или меньшей размерности, и мы будем называть их односвязными до $(n-\mu-2)$-ой размерности [1]).

Данный n-мерник, не являющийся односвязным до $(n-1)$-ой размерности, может быть разложен $(n-1)$-мерным разрезом, не распадаясь на части. Полученный n-мерник, если он не является односвязным до $(n-1)$-ой размерности, может быть опять разложен такого же рода разрезом, и эта операция продолжается, покуда не будет получен n-мерник, односвязный до $(n-1)$-ой размерности. Число разрезов, посредством которых осуществляется такое разложение n-мерника, пока не получится n-мерник, односвязный до первой размерности, может быть тем или иным — смотря по выбору разрезов, — но при каком-то типе разложений оно должно быть наименьшим.

---

[1]) В соответствии с дальнейшим естественно n-мерники a_μ называть связными до $(n-\mu-1)$-ой размерности.

XVI. О ПОВЕРХНОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИ ЗАДАННОЙ ГРАНИЦЕ НАИМЕНЬШУЮ ПЛОЩАДЬ

1

Поверхность считается заданной или определённой (в смысле аналитической геометрии), если прямоугольные координаты x, y, z движущейся по ней точки представлены как однозначные функции двух независимых переменных p и q. Если дадим p и q определённые числовые значения, то каждой их комбинации соответствует всегда только одна точка поверхности. Выбирать независимые переменные p и q можно самыми разнообразными способами. В случае односвязной поверхности естественно действовать следующим образом. Можно вообразить, что вдоль всей границы поверхность урезывается на некоторую полоску, ширина которой всюду — бесконечно малая одного и того же порядка. Повторяя эту процедуру много раз, мы будем всё уменьшать данную поверхность, пока она не превратится в точку. Получающиеся одна за другой граничные кривые являются замкнутыми, взаимно не пересекающимися кривыми. Их можно отличать друг от друга, если каждой будем сопоставлять особое значение числа p, которое будет изменяться, увеличиваясь или уменьшаясь, на бесконечно малую величину, смотря по тому, будем ли мы переходить от объемлемой кривой к соседней, объемлющей или наоборот. Функция p имеет в таком случае постоянное наибольшее значение на границе поверхности, а наименьшее значение — в некоторой внутренней точке, именно в той, в которую превращается постепенно уменьшающаяся поверхность. Переход от одной границы к другой, ближайшей, можно представлять себе таким образом, что каждая точка кривой (p) перемещается в некоторую совершенно определённую бесконечно близкую точку кривой $(p+dp)$. В таком случае пути отдельных точек образуют вторую систему кривых, которые, исходя из точки, где p имеет наименьшее значение, звёздообразно расходятся к границе поверхности. На каждой из таких кривых припишем переменной q постоянное значение; на некоторой произвольной начальной кривой пусть значение q будет наименьшим, и затем при переходе от одной кривой второй системы к другой [для определённости предположим, что движение происходит в выбранном направлении по одной из кривых (p)] непрерывно возрастает. При переходе от последней кривой (q) к начальной q меняется скачком на постоянное слагаемое.

Если имеем дело с многосвязной поверхностью, то её можно будет предварительно рядом разрезов превратить в односвязную.

Любая точка нашей поверхности, по предыдущему, есть пересечение определённой кривой системы (p) с определённой кривой системы (q). Нормаль к поверхности, проведённая из точки (p, q), уходит по двум направлениям — положительному и отрицательному. Чтобы их различать, нужно условиться относительно направления положительной нормали в связи с направлениями возрастания переменных p и q. Если не сделано никаких иных предположений, то будем представлять себе три координатные оси расположенными таким образом, что при простейшем способе перевести ось y в ось z посредством вращения её на прямой угол — движение её, если смотреть с положительной полуоси x, совершается справа налево. И мы будем теперь считать, что положительная нормаль к нашей поверхности расположена по отношению к направлениям возрастачия переменных p и q таким же образом, как положительная полуось x — по отношению к положительным полуосям y и z. Та сторона поверхности, на которой находится положительная нормаль, будет называться положительной стороной поверхности.

2

Пусть на всю поверхность распространён интеграл по переменным p, q от некоторого функционального детерминанта, именно

$$\int\int\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}\right)dp\,dq;$$

для сокращения условимся записывать его в виде

$$\int\int(df\,dg).$$

Если примем за независимые переменные f и g, то интеграл перейдёт в $\int\int df\,dg$, причём интеграция по f или g выполняется без затруднений. Но довести вычисление до конца при переменных f и g несколько сложнее, так как неизбежны пространные рассмотрения отдельных возможностей в тех случаях, когда одна и та же комбинация числовых значений (f, g) принимается в различных точках поверхности или же на целой кривой. Сделать это вовсе невозможно, если функции f и g — комплексные.

Поэтому представляется уместным при выполнении интеграции по f или g применить метод Якоби (Журнал Крелля, т. 27, стр. 208), сохраняя за p и q роль независимых переменных. Имея в виду интегрирование относительно f, приведём функциональный детерминант к виду

$$\frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial q}\right)}{\partial p}-\frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial p}\right)}{\partial q},$$

и прежде всего убедимся, что

$$\int\frac{\partial\left(f\frac{\partial g}{\partial p}\right)}{\partial q}\,dq=0,$$

так как интеграция производится по замкнутой кривой. Мы получим, дальше, $f\frac{\partial g}{\partial q}$, именно, с подстановкой значений на границе, так как на нижнем пределе интегрирования $\frac{\partial g}{\partial q}=0$. Итак,

$$\int\int(df\,dg)=\int f\frac{\partial g}{\partial q}\,dq=\int f\,dg,$$

причём простой интеграл справа надо брать по границе поверхности в направлении возрастания q. С другой стороны, при введённых обозначениях мы имеем $(df\,dg)=-(dg\,df)$, и потому

$$\int\int(df\,dg)=-\int\int(dg\,df)=-\int g\,df,$$

причём последний интеграл также следует брать по границе поверхности в направлении возрастания q.

3

Поверхность, точки которой определяются системами кривых (p), (q), мы отобразим теперь следующим образом на сферу единичного радиуса. В точке поверхности (p, q), которой пусть соответствуют прямоугольные координаты (x, y, z), восставим положительную нормаль и затем через центр сферы проведём параллельную ей прямую. Точка пересечения этой прямой со сферой и будет отображением точки (x, y, z). Если точка (x, y, z) станет пробегвть некоторую замкнутую кривую на нашей (искривляющейся непрерывно) поверхности, то её отображение на сфере также опишет замкнутую кривую. Таким же образом отображением некоторой фигуры на поверхности будет служить некоторая фигура на сфере, отображением всей данной поверхности будет вся сфера или некоторая часть её, покрытые один или несколько раз.

Ту точку сферы, которая лежит на положительной полуоси x, мы выберем в качестве полюса, а начальный меридиан пусть проходит через точку, лежащую на положительной полуоси y. Отображение точки (x, y, z) в таком случае определяется полярным расстоянием r и углом φ, который делает её меридиан с начальным меридианом. Что касается знака φ, то он фиксируется тем условием, что точка сферы, лежащая на положительной полуоси z, имеет координаты $r=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=+\frac{\pi}{2}$.

4

По предыдущему, мы получаем дифференциальное уравнение поверхности:

$$\cos r\, dx + \sin r \cos\varphi\, dy + \sin r \sin\varphi\, dz = 0. \tag{1}$$

Принимая y и z за независимые переменные, для r и φ будем иметь уравнения:

$$\cos r = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\sin r\cos\varphi = \frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\mp\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\sin r\sin\varphi = \frac{\frac{\partial x}{\partial z}}{\mp\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}},$$

в которых надо брать совместно или верхние или нижние знаки.

Параллелограмм на положительной стороне поверхности, ограниченной кривыми (p) и $(p+dp)$, (q) и $(q+dq)$, даёт в проекции на плоскость yz плоский элемент, площадь которого равняется абсолютному значению $(dy\ dz)$. Знак этого функционального детерминанта — тот или иной, смотря по тому, делает ли положительная нормаль в точке (p, q) острый или тупой угол с положительной полуосью x. Действительно, в первом случае проекции dp и dq на плоскость yz расположены одна по отношению к другой так, как положительная полуось y к положительной полуоси z, во втором — наоборот. Поэтому в первом случае функциональный детерминант положительный, во втором — отрицательный. Выражение же

$$\frac{1}{\cos r}(dy\ dz)$$

во всех случаях положительно. Оно равняется площади бесконечно малого параллелограмма на поверхности. Чтобы получить, далее, площадь всей поверхности, нужно будет распространить интеграл

$$S=\int\int\frac{1}{\cos r}(dy\ dz)$$

на всю поверхность.

Если мы хотим, чтобы эта площадь обратилась в минимум, следует приравнять нулю первую вариацию интеграла. Мы получаем:

$$\iint \frac{\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}}(dy\,dz)=0,$$

причём надлежит брать верхний или нижний знак перед корнем, смотря по тому, будет ли $(dy\,dz)$ положительным или отрицательным.

Левая часть равна следующему выражению:

$$\iint \frac{\partial}{\partial y}(-\sin r\cos\varphi\,\delta x)\,(dy\,dz)+\iint\frac{\partial}{\partial z}(-\sin r\sin\varphi\,\delta x)(dy\,dz)-$$
$$-\iint\delta x\frac{\partial}{\partial y}(-\sin r\cos\varphi)\,(dy\,dz)-\iint\delta x\frac{\partial}{\partial z}(-\sin r\sin\varphi)\,(dy\,dz).$$

Два первых интеграла приводятся к простым интегралам, которые следует брать по границе поверхности в направлении возрастания q, а именно, принимают вид:

$$\int\delta x\,(-\sin r\cos\varphi\,dz+\sin r\sin\varphi\,dy).$$

Последний интеграл равен нулю, так как на границе $\delta x=0$. Поэтому условие минимума переписывается таким образом:

$$\iint\delta x\left(\frac{\partial(\sin r\cos\varphi)}{\partial y}+\frac{\partial(\sin r\sin\varphi)}{\partial z}\right)(dy\,dz)=0.$$

Оно выполняется, если выражение

$$-\sin r\sin\varphi\,dy+\sin r\cos\varphi\,dz=d\mathfrak{x} \qquad (2)$$

есть полный дифференциал.

5

Координаты r и φ на сфере можно заменить комплексной величиной $\eta=\operatorname{tg}\frac{r}{2}e^{\varphi i}$, геометрический смысл которой легко выяснить. Именно, вообразим касательную плоскость к сфере в полюсе (причём будем считать положительной ту её сторону, которая отвёрнута от сферы), и затем проведём прямую через точку (r,φ) и антиполюс, т. е. точку сферы, расположенную на противоположном конце диаметра, проведённого через полюс: эта прямая пересечётся с касательной плоскостью в точке, которая соответствует комплексной величине 2η. Полюс соответствует значению $\eta=0$, антиполюс — значению $\eta=\infty$. Для тех точек, которые отвечают направлениям положительных полуосей y и z, получается $\eta=+1$ и $\eta=+i$.

Если введём ещё комплексные величины

$$\eta'=\operatorname{tg}\frac{r}{2}e^{-\varphi i},\quad s=y+zi,\quad s'=y-zi,$$

то уравнения (1) и (2) превратятся в следующие:

$$(1+\eta\eta')\,dx+\eta'\,ds+\eta\,ds'=0, \tag{1*}$$

$$(1-\eta\eta')\,d\mathfrak{z}\,i-\eta'\,ds+\eta\,ds'=0. \tag{2*}$$

Сложим и вычтем эти равенства. Притом положим

$$x+\mathfrak{z}i=2X, \quad x-\mathfrak{z}i=2X'$$

так что, обратно, $x=X+X'$. Тогда, в качестве аналитического выражения нашей проблемы, получим пару уравнений

$$ds-\eta\,dX+\frac{1}{\eta'}\,dX'=0, \tag{3}$$

$$ds'+\frac{1}{\eta}dX-\eta'\,dX'=0. \tag{4}$$

Станем рассматривать X и X' как независимые переменные и напишем условия того, что ds и ds' являются полными дифференциалами. Тогда окажется, что

$$\frac{\partial\eta}{\partial X'}=0, \quad \frac{\partial\eta'}{\partial X}=0,$$

т. е. η зависит только от X, η' — только от X', и потому, обратно, X есть функция η, а X' — функция η'.

Таким образом, проблема наша сводится к тому, чтобы определить η как функцию комплексной переменной X (или, обратно, X как функцию комплексной переменной η) так, чтобы вместе с тем были удовлетворены граничные условия. Если будем знать η как функцию X, отсюда тотчас же получится и η' посредством замены в выражении для η всех величин на сопряжённые. Затем придётся ещё проинтегрировать уравнения (3) и (4), чтобы получить формулы для s и s'. Исключая из этих последних соотношений $\mathfrak{z}$, будем иметь уравнение, связывающее x, y, z — уравнение искомой минимальной поверхности.

6

Если уравнения (3) и (4) проинтегрированы, то можно без труда вычислить и площадь минимальной поверхности, согласно формуле

$$S=\int\int\frac{1}{\cos r}(dy\,dz)=\int\int\frac{1+\eta\eta'}{1-\eta\eta'}(dy\,dz).$$

Функциональный детерминант $(dy\,dz)$ преобразовывается следующим образом:

$$\begin{aligned}(dy\,dz)&=\left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s'}-\frac{\partial y}{\partial s'}\frac{\partial z}{\partial s}\right)(ds\,ds')\\&=\frac{i}{2}(ds\,ds')\\&=\frac{i}{2}\left(\eta\eta'-\frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{dx}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta'}(d\eta\,d\eta').\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$2iS = \int\int\left(2+\eta\eta'+\frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta'}(d\eta\, d\eta')$$
$$= \int\int\left(2\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta'}+\frac{\partial s}{\partial\eta}\frac{\partial s'}{\partial\eta'}+\frac{\partial s}{\partial\eta'}\frac{\partial s'}{\partial\eta}\right)(d\eta\, d\eta')$$
$$= 2\int\int\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta'}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta'}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta'}\right)(d\eta\, d\eta').$$

С целью дальнейшего преобразования этого выражения можно составить y из Y и Y' и z из Z и Z' так же точно, как x составлено из X и X', и тогда будем иметь соотношения:

$$X = \int\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta,\quad X' = \int\frac{\partial x}{\partial\eta'}d\eta',$$
$$Y = \int\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta,\quad Y' = \int\frac{\partial y}{\partial\eta'}d\eta',$$
$$Z = \int\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta,\quad Z' = \int\frac{\partial z}{\partial\eta'}d\eta',$$
$$x = X+X',\qquad \mathfrak{x}i = X-X',$$
$$y = Y+Y',\qquad \mathfrak{y}i = Y-Y',$$
$$z = Z+Z',\qquad \mathfrak{z}i = Z-Z'\,[^1].$$

В таком случае получим окончательно:

$$S = -i\int\int[(dX\, dX')+(dY\, dY')+(dZ\, dZ')]$$
$$= \frac{1}{2}\int\int\left[(dx\ d\mathfrak{x})+(dy\ d\mathfrak{y})+(dz\ d\mathfrak{z})\right]. \qquad (5)$$

7

Минимальная поверхность и её отображения на сферу и на три плоскости (соответственно точкам η, X, Y, Z) взаимно подобны в бесконечно малых частях. Это устанавливается сразу, если составить квадраты линейных элементов для этих поверхностей: именно, они равны

на сфере	$\sin^2 r\, d\log\eta\, d\log\eta'$
на плоскости η	$d\eta\, d\eta'$
на плоскости X	$\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta'}d\eta\, d\eta'$
на плоскости Y	$\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta'}d\eta\, d\eta'$
на плоскости Z	$\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta\, d\eta'$,

и на самой минимальной поверхности

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (dX+dX')^2+(dY+dY')^2+(dZ+dZ')^2$$
$$= 2(dX\, dX'+dY\, dY'+dZ\, dZ')$$
$$= 2\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\eta'}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta'}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta'}\right)d\eta\, d\eta'.$$

Согласно уравнениям (3) и (4), если станем в них рассматривать η и η' как независимые переменные, получается:

$$\eta\frac{dX}{d\eta}=\frac{\partial s}{\partial\eta}=-\eta^2\frac{\partial s'}{\partial\eta},\qquad \eta'\frac{dX'}{d\eta'}=\frac{\partial s'}{\partial\eta'}=-\eta'^2\frac{\partial s}{\partial\eta'},$$

и потому

$$dX^2+dY^2+dZ^2=0,\quad dX'^2+dY'^2+dZ'^2=0.$$

Отношение любых двух из выписанных выше квадратов линейных элементов является независимым от $d\eta$ и $d\eta'$, т. е. от направления элемента, и в этом обстоятельстве как раз и заключается подобие в бесконечно малых частях. Так как линейное увеличение в некоторой точке — одно и то же по всем направлениям, то ясно, что площадное увеличение равняется квадрату линейного. Но квадрат линейного элемента на минимальной поверхности равен удвоенной сумме квадратов соответствующих линейных элементов на плоскостях X, Y и Z. Поэтому площадной элемент на минимальной поверхности равен половине [2] суммы соответствующих площадных элементов на этих плоскостях. То же справедливо относительно площади всей поверхности и площадей её отображений на плоскости X, Y, Z.

8

Из теоремы о подобии в бесконечно малом можно вывести ещё одно важное следствие. Введём новую комплексную переменную η_1 таким образом, чтобы полюс на сфере перешёл в произвольно выбранную точку ($\eta=\alpha$), и выберем произвольно также начальный меридиан. Пусть η_1 в новой координатной системе имеет то же значение, что η — в старой. Отобразим бесконечно малый треугольник на сфере как на плоскость η, так и на плоскость η_1. Эти два отображения будут тогда подобными в бесконечно малом. В случае прямого подобия отсюда следует непосредственно, что $\frac{d\eta_1}{d\eta}$ независимо от направления смещения η, т. е. что η_1 есть функция комплексной переменной η. Случай же обратного (симметрического) подобия сводится к предыдущему, если вместо η_1 возьмём сопряжённую комплексную величину. Чтобы найти аналитическое выражение для η_1 как функции η, достаточно заметить, что $\eta_1=0$ в той точке сферы, для которой $\eta=\alpha$, и $\eta_1=\infty$ в диаметрально противоположной точке, т. е. в точке $\eta=-\frac{1}{\alpha'}$. Отсюда следует, что $\eta_1=c\frac{\eta-\alpha}{1+\alpha'\eta}$. Перейдём к определению постоянной c. Если обозначим через β значение η_1 при $\eta=0$, то значение η_1 при $\eta=\infty$ будет $-\frac{1}{\beta'}$. Итак, $\beta=-c\alpha$ и $-\frac{1}{\beta'}=\frac{c}{\alpha'}$, т. е. $\beta=-\frac{\alpha}{c'}$. Поэтому $cc'=1$, и значит, $c=e^{\theta i}$, где θ — действительное. Величины α и θ произвольны: α зависит от положения нового полюса, θ — от положения нового начального меридиана.

Пусть в новой системе x_1, s_1, s_1' обозначают то же, что x, s, s' — в старой. Тогда получаются формулы преобразований:

$$\eta_1 = \frac{\eta - \alpha}{1 + \alpha'\eta} e^{\theta i},$$

$$\begin{aligned} (1+\alpha\alpha')\, x_1 &= (1-\alpha\alpha')\, x + \alpha' s + \alpha s', \\ (1+\alpha\alpha')\, s_1 e^{-\theta i} &= -2\alpha x + s - \alpha^2 s', \\ (1+\alpha\alpha')\, s_1' e^{\theta i} &= -2\alpha' x - \alpha'^2 s + s'. \end{aligned} \tag{6}$$

9

Вычисление, производимое с помощью формул (6), даёт результат:

$$\left(\frac{d\eta_1}{d\eta}\right)^2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta} \frac{\partial x}{\partial \eta},$$

или

$$(d \log \eta_1)^2 \frac{\partial x_1}{\partial \log \eta_1} = (d \log \eta)^2 \frac{\partial x}{\partial \log \eta}.$$

Отсюда ясно, что удобно ввести новую комплексную величину u, определяемую равенством

$$u = \int \sqrt{i \frac{\partial x}{\partial \log \eta}}\, d \log \eta; \tag{7}$$

эта величина не зависит от расположения координатной системы x, y, z. Если найдено будет выражение u через η, то отсюда получится:

$$x = -i \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 d \log \eta + i \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'}\right)^2 d \log \eta'. \tag{8}$$

При этом x есть расстояние той точки минимальной поверхности, которая соответствует значению η, от плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к направлению $\eta = 0$. Если в формулу (8) подставим $\frac{\eta - \alpha}{1 + \alpha'\eta} e^{\theta i}$ вместо η, то получим расстояние той же точки минимальной поверхности от плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к направлению $\eta = \alpha$. В частности, при $\alpha = 1$ и $\alpha = i$ получим:

$$y = -\frac{i}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) d \log \eta + \\ + \frac{i}{2} \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'}\right)^2 \left(\eta' - \frac{1}{\eta'}\right) d \log \eta'. \tag{9}$$

$$z = \frac{1}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) d \log \eta - \\ - \frac{1}{2} \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'}\right)^2 \left(\eta' + \frac{1}{\eta'}\right) d \log \eta'. \tag{10}$$

10

Величину u надлежит определить как функцию η, т. е. как функцию, однозначную на той поверхности, которая получается при отображении (сохраняющем подобие в бесконечно малом) нашей минимальной поверхности на плоскость η и которую нужно представлять себе разостланной на этой плоскости. В первую очередь следует рассмотреть разрывы и ветвления, возникающие при отображении. При исследовании же разрывов и ветвлений следует делать различие между точками, лежащими внутри поверхности, и точками, расположенными на её границе.

Предположим, что речь идёт о внутренней точке минимальной поверхности: поместим в неё начало координатной системы (x, y, z) и выберем в качестве положительной полуоси x положительную нормаль, так что плоскость yz совпадёт с касательной плоскостью. Тогда в разложении x будут отсутствовать свободный член и члены первой степени относительно y и z. Выбирая надлежащим образом направления осей y и z, можно также добиться исчезновения члена, содержащего произведение yz. При этих предположениях дифференциальное уравнение в частных производных минимальной поверхности приведётся — для бесконечно малых значений y и z — к виду $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=0$. Таким образом, мера кривизны поверхности будет отрицательной, а главные радиусы кривизны — равны по абсолютному значению и направлены в противоположные стороны. Касательная плоскость разделит поверхность на четыре квадранта (если только радиусы кривизны не равны бесконечности): эти квадранты расположены поочерёдно выше и ниже касательной плоскости. Если же разложение x начинается с членов порядка $n\,(>2)$, то радиусы кривизны обращаются в бесконечность, и тогда касательная плоскость делит поверхность на $2n$ секторов, которые поочерёдно лежат выше и ниже касательной плоскости, причём каждый из них делится пополам линией кривизны [3].

Если станем рассматривать X как функцию комплексной переменной Y, то получится в случае четырёх секторов

$$\log X = 2\log Y + \text{funct. cont.}, \quad [4]$$

а в случае $2n$ секторов:

$$\log X = n\log Y + \text{f.c.}$$

И так как, вследствие равенств (8) и (9), $\frac{dX}{dY}=-\frac{2\eta}{1-\eta\eta}$, то разложение η в первом случае начинается с первой, во втором — с $(n-1)$-ой степени Y. Следовательно, обратно, если станем Y рассматривать как функцию η, то разложение пойдёт в первом случае по целым степеням η, во втором — по целым степеням $\eta^{\frac{1}{n-1}}$. Другими словами, отображение на плоскость η в соответствующей точке не имеет ветвления или имеет ветвление $(n-2)$-ой кратности, смотря по тому, имеет ли место первый или второй случай.

Что касается u, то из соотношения $\frac{du}{d\log Y}=\frac{du}{d\log\eta}\,\frac{d\log\eta}{d\log Y}$ с помощью равенства (9) мы получим:

$$\left(\frac{du}{d\log Y}\right)^2=-2i\frac{dY}{d\eta}\,\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\left(\frac{d\eta}{dY}\right)^2\frac{Y^2}{\eta^2}\,.$$

Следовательно, в точке, где отображение на плоскость η имеет ветвление $(n-2)$-ой кратности, будем иметь:

$$\log\frac{du}{d\log Y}=\frac{n}{2}\log Y+\text{f.c.},$$

т. е.

$$\log\frac{du}{dY}=\left(\frac{n}{2}-1\right)\log Y+\text{f.c.}$$

11

Дальнейшее исследование мы ограничим сначала случаем, когда граница поверхности состоит из отрезков прямых. При этом предположении окажется возможным установить, как именно граница поверхности отобразится на плоскость η. Нормали, восставленные к поверхности в различных точках отрезка прямой, входящего в состав границы, лежат во взаимно параллельных плоскостях, и потому каждый такой отрезок отображается на сферу в виде дуги большого круга.

Рассмотрим теперь точку, принадлежащую внутренности одного из граничных отрезков. Поместим в ней начало координат, а положительную полуось x направим по нормали. Весь граничный отрезок упадёт в плоскость yz. Поэтому на всём отрезке действительная часть X равна нулю. Значит, если, вращаясь около начала координат по внутренности минимальной поверхности, мы перейдём от точки граничного отрезка, непосредственно предшествующей рассматриваемой, к точке, непосредственно за ней следующей, то аргумент X при этом изменится на $n\pi$, на число, кратное π. Аргумент Y в то же время изменится на π. Таким образом, мы получим, как раньше,

$$\log X=n\log Y+\text{f.c.}$$

$$\log\eta=(n-1)\log Y+\text{f.c.}$$

$$\log\frac{du}{dY}=\left(\frac{n}{2}-1\right)\log Y+\text{f.c.}$$

Рассматриваемой граничной точке соответствует в отображении на плоскость η точка ветвления кратности $n-2$. В этом отображении предшествующая и последующая граничные дуги больших кругов делают между собою угол $(n-1)\pi$.

12

При переходе от одного граничного отрезка к следующему возможны два различных случая: или отрезки имеют общую вершину на конечном расстоянии, или же оба отрезка уходят в бесконечность.

Обращаясь сначала к первому случаю, обозначим через $\alpha\pi$ угол между двумя граничными отрезками, считая его по внутренности минимальной поверхности. Пусть начало координат помещено в рассматриваемую точку, и положительное направление оси x совмещено с положительной нормалью. Тогда на обоих граничных отрезках действительная часть X равна нулю. При переходе от первого отрезка ко второму аргумент X меняется на $m\pi$ (кратное π), а аргумент Y — на $\alpha\pi$. Поэтому

$$\frac{\alpha}{m}\log X = \log Y + \text{f.c.}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{m}\right)\log X = \log \eta + \text{f.c.}$$

$$\log\frac{du}{dY} = \left(\frac{m}{2\alpha} - 1\right)\log Y + \text{f. c.}$$

Если же поверхность между двумя последовательными граничными отрезками простирается в бесконечность, то совместим ось x с кратчайшим общим перпендикуляром к прямым, на которых лежат отрезки, выбирая в качестве положительного направления положительное направление нормали к поверхности в бесконечности. Пусть A — длина кратчайшего перпендикуляра, $\alpha\pi$ — угол, заполняемый проекцией поверхности на плоскость yz. В таком случае действительные части X и $i\log\eta$ конечны и непрерывны в бесконечности, и на граничных отрезках принимают постоянные значения. Отсюда получается (для $y=\infty$, $z=\infty$):

$$X = -\frac{Ai}{2\alpha\pi}\log\eta + \text{f.c.},$$

$$u = \sqrt{\frac{A}{2\alpha\pi}}\log\eta + \text{f.c.},$$

$$Y = -\frac{Ai}{4\alpha\pi}\frac{1}{\eta} + \text{f.c.} \quad [5].$$

Если совместим ось x_1 одной координатной системы с прямой, на которой лежит один из граничных отрезков, ось x_2 — с другой такой прямой и т. д., то на первой прямой будет чисто мнимой величина $\log\eta_1$, на второй — величина $\log\eta_2$ и т. д., так как нормаль стоит перпендикулярно к соответствующей оси x_1, оси x_2 и т. д. Поэтому $i\dfrac{\partial x_1}{\partial\log\eta_1}$ будет действительным на первом граничном отрезке, $i\dfrac{\partial x_2}{\partial\log\eta_2}$ — на втором и т. д. Но так как при любой координатной системе (x, y, z) всегда

$$\sqrt{i\frac{\partial x}{\partial \log \eta}}\,d\log\eta = \sqrt{i\frac{\partial x_1}{\partial \log \eta_1}}\,d\log\eta_1 = \\ = \sqrt{i\frac{\partial x_2}{\partial \log \eta_2}}\,d\log\eta_2 = \ldots,$$

то оказывается, что на каждом граничном отрезке выражение

$$du = \sqrt{i\frac{\partial x}{\partial \log \eta}}\,d\log\eta$$

должно иметь или действительные или чисто мнимые значения.

13

Минимальная поверхность определяется тем, что одна из величин u, η, X, Y, Z будет выражена через другую. Во многих случаях удаётся этого достигнуть. Особенно интересны те случаи, когда $\frac{du}{d\log\eta}$ есть алгебраическая функция величины η. Необходимым и достаточным условием этого является, чтобы сферическое отображение поверхности и его симметрические и конгруэнтные продолжения образовывали замкнутую поверхность, покрывающую всю сферу один или несколько раз.

Вообще говоря, найти явное выражение одной из величин u, η, X, Y, Z через другие представляется более или менее затруднительным. Но вместо этого можно каждую из этих величин представить как функцию новой, целесообразно выбранной переменной. Мы введём такую независимую переменную t, что отображение поверхности на плоскость t покроет один раз некоторую полуплоскость, и именно — ту, для которой мнимая часть t положительна. В самом деле, всегда возможно на нашей поверхности определить t как функцию u (или любой из переменных η, X, Y, Z) таким образом, чтобы её мнимая часть на границе равнялась нулю и чтобы в некоторой произвольной точке границы $(u = b)$ она обращалась в бесконечность первого порядка:

$$t = \frac{\text{const.}}{u - b} + \text{f. c.} \qquad (u = b).$$

Аргумент множителя при $\frac{1}{u-b}$ определяется из условия, что мнимая часть t равна нулю на границе, а внутри поверхности — положительна. Поэтому в выражении для t остаётся неопределённым только модуль этого множителя и постоянное слагаемое.

Пусть $t = a_1, a_2, \ldots$ будут точки ветвления, расположенные внутри отображения на плоскость η; $t = b_1, b_2, \ldots$ — точки ветвления на границе отображения, не являющиеся вершинами; $t=c_1, c_2, \ldots$ — вершины на конечном расстоянии, $t=e_1, e_2, \ldots$ — бесконечно удалённые вершины. Для простоты мы допустим, что все значения a, b, c, e находятся в конечной части плоскости t.

Тогда

$$\text{для } t=a \quad \log\frac{du}{dt}=\left(\frac{n}{2}-1\right)\log(t-a)+\text{f.c.},$$

$$\text{для } t=b \quad \log\frac{du}{dt}=\left(\frac{n}{2}-1\right)\log(t-b)+\text{f.c.},$$

$$\text{для } t=c \quad \log\frac{du}{dt}=\left(\frac{m}{2}-1\right)\log(t-c)+\text{f.c.},$$

$$\text{для } t=e \qquad u=\sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}\log(t-e)+\text{f.c.}$$

Можно ограничиться изучением случая, когда $n=3$, $m=1$, соответствующего простым точкам ветвления, так как общий случай легко получить из этого частного, заставляя совпадать вместе несколько простых точек ветвления.

Чтобы построить формулу для $\frac{du}{dt}$, заметим, что вдоль границы dt действительное, а du — или действительное или чисто мнимое. Поэтому при t действительном $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ действительное. Эту функцию $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ можно непрерывно продолжать через линию действительных значений t, если установить, что сопряжённым значениям t и t' независимой переменной отвечают сопряжённые же значения функции. Тогда $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ будет определённой однозначной функцией во всей плоскости t.

Обозначим через a_1', a_2', ... значения, сопряжённые со значениями a_1, a_2, ..., а произведение $(t-a_1)(t-a_2)\ldots$ — через $\Pi(t-a)$. В таком случае

$$u=\text{const.}+\int\sqrt{\frac{\Pi(t-a)\,\Pi(t-a')\,\Pi(t-b)}{\Pi(t-c)}}\,\frac{\text{const.}\,dt}{\Pi(t-e)}. \tag{11}$$

Постоянные a, b, c и т. д. должны быть подобраны таким образом, чтобы при $t=e$ было

$$u=\sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}\log(t-e)+\text{f.c.}$$

Для того чтобы u было конечным и непрерывным при всех значениях t, кроме a, b, c, e, на число этих упомянутых значений должно быть наложено некоторое условие. Именно, разность между числом вершин и числом точек ветвления на границе поверхности должна быть на 4 больше, чем удвоенная разность между числом внутренних точек ветвления и числом точек ветвления в бесконечно удалённых вершинах.

Если положим для краткости

$$\Pi(t-a)\,\Pi(t-a')\,\Pi(t-b)=\varphi(t),$$

$$\Pi(t-c)\,\Pi(t-c')^2=\chi(t),$$

т. е.

$$\frac{du}{dt}=\mathrm{const}\cdot\sqrt{\frac{\varphi(t)}{\chi(t)}},$$

то целая функция $\varphi(t)$ должна быть степени $\nu-4$, где ν есть степень $\chi(t)$. При этом ν обозначает сумму числа вершин на конечном расстоянии и удвоенного числа вершин в бесконечности.

14

Теперь мы должны выразить η через t. Непосредственно это удаётся сделать лишь в простейших случаях. В общем же случае можно наметить такой путь. Пусть v— некоторая функция переменной t, о которой дальше будет сказано подробнее и которую предположим известной. В соотношениях (8), (9), (10) мы видим величину $\frac{du}{d\log\eta}$, которую можно также записать в виде $\frac{du}{dv}\frac{dv}{d\log\eta}$. Второй множитель в последнем выражении есть произведение двух множителей

$$k_1=\sqrt{\frac{dv}{d\eta}}\quad\text{и}\quad k_2=\eta\sqrt{\frac{dv}{d\eta}},\tag{12}$$

которые удовлетворяют дифференциальному уравнению первого перядка

$$k_1\frac{dk_2}{dv}-k_2\frac{dk_1}{dv}=1,\tag{13}$$

а также и дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{1}{k_1}\frac{d^2k_1}{dv^2}=\frac{1}{k_2}\frac{d^2k_2}{dv^2}.\tag{14}$$

Если удастся выразить через t левую или правую часть последнего равенства, то можно будет построить однородное дифференциальное уравнение второго порядка, частными интегралами которого будут k_1 и k_2. Пусть k — общий интеграл этого уравнения. Заменим $\frac{d^2k}{dv^2}$ равным ему выражением

$$\frac{\frac{dv}{dt}\frac{d^2k}{dt^2}-\frac{dk}{dt}\frac{d^2v}{dt^2}}{\left(\frac{dv}{dt}\right)^3}.$$

и получим для k дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt}\frac{d^2k}{dt^2}-\frac{d^2v}{dt^2}\frac{dk}{dt}-\left(\frac{dv}{dt}\right)^3\left\{\frac{1}{k_1}\frac{d^2k_1}{dv^2}\right\}k=0.\tag{15}$$

Пусть найдены два независимых частных интеграла уравнения (15) K_1 и K_2, отношение которых $K_2 : K_1 = H$ даёт отображение положительной полуплоскости t на сферу, с границами — дугами больших кругов. Такое же отображение даёт тогда и всякое выражение вида

$$\eta = e^{\theta i} \frac{H - \alpha}{1 + \alpha' H}, \tag{16}$$

где θ — действительное, и α, α' — взаимно сопряжённые комплексные величины.

Функцию v нужно подобрать таким образом, чтобы в конечной части плоскости, кроме точек a, a', b, c, e, не было разрывов функции $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dv^2}$.

Положим:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)\chi(t)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}; \tag{17}$$

тогда функция $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dv^2}$ будет иметь разрывы в конечной части плоскости только в точках a, a', b, c, и именно — разрывы первого порядка. Действительно, при $t = c$ мы получим:

$$v - v_c = \frac{2\sqrt{t - c}}{\sqrt{f'(c)}} \quad .$$

$$\eta - \eta_c = \text{const} \cdot (t - c)^{\gamma}.$$

Следовательно,

$$k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}} = \text{const.}\,(v - v_c)^{\frac{1}{2} - \gamma},$$

и потому:

$$\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4} \frac{\left(\gamma\gamma - \frac{1}{4}\right) f'(c)}{t - c}.$$

Аналогичные результаты получатся для значений $t = a$, a', b; придётся лишь заменить c соответственно через a, a', b, а γ — через 2.

Такого же характера соображения показывают, что в точках $t = e$ функция $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dv^2}$ не перестаёт быть непрерывной.

При $t = \infty$ получается:

$$\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dv^2} = \left(-\frac{\nu}{2} + 2\right)\left(\frac{\nu}{2} - 1\right) t^{2\nu - 6}.$$

Поэтому выражение для $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dv^2}$ будет следующее:

$$\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{\left(\gamma\gamma - \frac{1}{4}\right) f'(g)}{(t - g)} + F(t).$$

Здесь сумма распространяется на точки $g = a,\ a',\ b,\ c$, и для точек a, a', b нужно поставить 2 вместо γ. Что касается $F(t)$, то это — целая функция степени $2\nu - 6$, в которой два старших коэффициента определяются таким образом. Приведём dv к виду

$$dv = \frac{t^{-\nu+4}\dfrac{dt}{tt}}{\sqrt{f(t)\,t^{-2\nu+4}}} = t^{-\nu+4}dv_1$$

или, короче, $= \alpha dv_1$.

В таком случае дифференцирование даёт:

$$\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = a^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \alpha^{-2}\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

или

$$\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = t^{-2\nu+8}\,\frac{1}{k}\,\frac{d^2k}{dv^2} - \alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2},$$

или, наконец,

$$\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= t^{-2\nu+8}\sum\frac{1}{4}\,\frac{\left(\gamma\gamma - \frac{1}{4}\right)f'(g)}{t-g} + t^{-2\nu+8}F(t) - \alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}.$$

Функция в левой части конечна при $t = \infty$. Следовательно, справа в разложении $t^{-2\nu+8}F(t)$ и $\alpha^{\frac{3}{2}}\dfrac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}$ коэффициенты при t^2 и коэффициенты при t должны быть соответственно равными. Как показывает простое вычисление, $\alpha^{\frac{3}{2}}\dfrac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2}$ разлагается следующим образом:

$$\alpha^{\frac{3}{2}}\frac{d^2(\alpha^{\frac{1}{2}})}{dv^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\nu}{2}+2\right)t^{-\nu+5}\,\frac{d\left(t^{-\nu+2}f(t)\right).}{dt}$$

Значит, у функции $F(t)$ остаётся еще $2\nu - 7$ неопределённых коэффициентов. Но важно заметить, что они должны быть действительными. В самом деле, мы установили в § 12, что du — действительное или чисто мнимое на всех граничных отрезках минимальной поверхности и, следовательно, также на граничных дугах отображения. Вследствие (17) то же справедливо и относительно dv. Заметив это, мы сможем доказать, что при действительных значениях t функция $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ непременно имеет также действительные значения.

Чтобы провести доказательство, рассмотрим отображение на сферу единичного радиуса и возьмём некоторую часть границы, т. е. дугу некоторого большого круга. В полюсе этого большого круга проведём касательную плоскость и назовём её плоскостью η_1. Тогда можно подобрать постоянные α_1, α_1', θ_1, таким образом, что

$$\eta_1 = e^{\theta_1 i}\,\frac{H-\alpha_1}{1+\alpha_1'H},$$

и получим две функции $k_1' = \sqrt{\frac{dv}{d\eta_1}}$ и $k_2' = \eta_1\sqrt{\frac{dv}{d\eta_1}}$, частные интегралы дифференциального уравнения (15). Следовательно, мы будем иметь:

$$\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2} = \frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}.$$

Рассматриваемая часть границы отображается на плоскость η_1 посредством уравнения

$$\eta_1 = e^{\varphi_1 i},$$

и если подставим это значение η_1 в выражение для k_1', то увидим, что на нашей части границы $\frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}$ оказывается действительным. Значит, то же справедливо относительно $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$, и так как наше рассуждение можно повторить для каждой части границы, то $\frac{1}{k}\frac{d^2k}{dv^2}$ имеет действительные значения на всей границе.

Обратим теперь внимание на то, что при действительных или чисто мнимых значениях dv функция $\frac{1}{k_1'}\frac{d^2k_1'}{dv^2}$ также и в том случае имеет действительные значения, если мы положим вообще

$$\eta_1 = \rho_1 e^{\varphi_1 i}$$

и предположим, что модуль ρ_1 — постоянный. Поэтому, чтобы ось действительных значений t в самом деле отображалась на сферу единичного радиуса в виде дуги большого круга, для каждой части границы ρ_1 должно быть равно единице. Таким образом, мы получаем столько условий, сколько имеется отдельных частей границы.

В предыдущем исследовании (как уже и в предыдущем параграфе) мы предполагали, что все значения a, b, c, e — конечные. В противном случае нужно было бы сделать небольшие изменения в рассуждениях.

Примечание. Наша задача сформулирована исчерпывающим образом. В отдельных случаях существенно только действительно составить дифференциальное уравнение (15) и проинтегрировать его. Не излишним будет заметить, что число произвольных действительных постоянных, входящих в решение задачи, в точности равно числу условий, которые должны быть выполнены по существу задачи, принимая во внимание всё то, что в ней является данным. Обозначим число точек a, b, c, e соответственно через A, B, C, E и заметим, что $2A+B+4=$ $=C+2E=\nu$. В дифференциальном уравнении (15) содержится $2A+B+$ $+4C+5E-10$ произвольных постоянных, именно: углы γ, число которых равно C; $2\nu-7$ постоянных, входящих в функцию $F(t)$; действительные величины b, c, e, из которых трём можно дать произвольные значения (подвергая t линейному преобразованию с действительными коэффициентами); действительные и мнимые части величин a. К этим постоянным при интегрировании прибавляется ещё 10, а именно, это будут, если положим $\eta=\dfrac{\alpha k_1+\beta k_2}{\gamma k_1+\delta k_2}$, три комплексных отношения $\alpha:\beta:\gamma:\delta$, что составляет 6 действительных постоянных; затем (действительный или чисто мнимый) множитель при du; и, наконец, по одному действительному постоянному слагаемому в выражениях для x, y, z. Но эти постоянные должны быть подчинены ещё некоторым условиям, если мы хотим, чтобы наши формулы, действительно, давали минимальную поверхность. Из этих дополнительных условий $2A+B$ соответствуют точкам a, a', b и заключаются в том, что в окрестности этих точек разложения решений дифференциального уравнения (15) не будут содержать логарифмических членов, и ещё $C+E$ условий говорят о том, что отрезки действительной оси t, заключённые между отдельными точками c, e, отображаются на сферу в виде $C+E$ дуг больших кругов. Итак, число остающихся произвольными постоянных в нашем решении равно $3C+4E$.

Данные же задачи таковы: это — координаты вершин и углы, определяющие направления граничных прямых, уходящих в бесконечность. Число этих данных, таким образом, равно $3C+4E$, т. е. в точности совпадает с числом свободных постоянных [6].

ПРИМЕРЫ

15

Пусть граница состоит из двух прямых линий, не лежащих в одной плоскости. Обозначим через A кратчайшее расстояние между ними, а через $\alpha\pi$ — угол, который заполняет проекция поверхности на плоскость, перпендикулярную к линии кратчайшего расстояния.

Возьмём линию кратчайшего расстояния за ось x. Тогда на каждой из граничных прямых x имеет постоянное значение, и точно так же φ. На бесконечности положительная нормаль в одном секторе направлена как положительная полуось x, в другом — как отрицательная. Граница при отображении на сферу превращается в пару больших кругов, проходящих через полюсы $\eta = 0$ и $\eta = \infty$ и образующих между собою угол $\alpha\pi$.

Принимая всё это во внимание, мы получаем:

$$X = -\frac{iA}{2\alpha\pi}\log\eta,$$

$$s = -\frac{iA}{2\alpha\pi}\left(\eta - \frac{1}{\eta'}\right),$$

$$s' = -\frac{iA}{2\alpha\pi}\left(\frac{1}{\eta} - \eta'\right),$$

и следовательно,

$$x = -i\frac{A}{2\alpha\pi}\log\left(\frac{\eta}{\eta'}\right) =$$

$$= -i\frac{A}{2\alpha\pi}\log\left(-\frac{s}{s'}\right). \qquad (a)$$

В последнем соотношении мы узнаём уравнение винтовой поверхности.

16

Пусть граница состоит из трёх прямых, причём две из них пересекаются, а третья параллельна их плоскости.

Поместим начало координат в точке пересечения двух первых прямых и в качестве положительной полуоси x возьмём отрицательную нормаль. При отображении на сферу точка пересечения двух первых прямых перейдёт в точку $\eta = \infty$, сами эти прямые — в большие полукруги, идущие от $\eta = \infty$ к $\eta = 0$; угол между полукругами пусть будет $\alpha\pi$. Третья прямая отображается в дугу большого круга, которая выходит из точки $\eta = 0$, и, дойдя до некоторой точки, возвращается обратно в точку $\eta = 0$. С первыми дугами больших кругов эта дуга пусть делает углы — $\beta\pi$ и $\gamma\pi$, причём β и γ положительны, и $\beta + \gamma = \alpha$. Переходя к рассмотрению отображения на полуплоскость t, допустим, что точке $\eta = \infty$ соответствует точка $t = \infty$, что бесконечному сектору между первой и третьей прямой соответствует точка $t = b$, а бесконечному сектору между второй и третьей прямой — точка $t = c$; что, наконец, точке возврата нормалей на третьей прямой соответствует точка $t = a$. При этом a, b, c действительны, и $> a > b$. В таком случае $\eta = (t - b)^{\beta}\,(t - c)^{\gamma}$. Значение a зависит от значений b и c. Именно, мы получаем:

$$\frac{d\log\eta}{dt} = \frac{\beta\,(t - c) + \gamma\,(t - b)}{(t - b)\,(t - c)},$$

и последнее выражение в точке возврата должно равняться нулю, откуда ясно, что $a = \dfrac{c\beta + b\gamma}{\beta + \gamma}$. Дальше, согласно изложенному в §§ 12 и 13, мы имеем:

$$du = \sqrt{\frac{A(c-b)(\beta+\gamma)}{2\pi}}\,\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}\,dt}{(t-b)(t-c)}$$

или, допуская, что $c - b = \dfrac{2\pi}{A}$,

$$du = \sqrt{\beta+\gamma}\,\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}\,dt}{(t-b)(t-c)},$$

$$\frac{du}{d\log\eta} = \frac{1}{\sqrt{(\beta+\gamma)(t-a)}},$$

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta = \frac{dt}{(t-b)(t-c)}.$$

Следовательно,

$$x = -i\int\frac{dt}{(t-b)(t-c)} + i\int\frac{dt'}{(t'-b)(t'-c)},$$

$$\begin{aligned} y = &-\frac{i}{2}\int\frac{(t-b)^{\beta}(t-c)^{\gamma}-(t-b)^{-\beta}(t-c)^{-\gamma}}{(t-b)(t-c)}\,dt + \\ &+\frac{i}{2}\int\frac{(t'-b)^{\beta}(t'-c)^{\gamma}-(t'-c)^{-\beta}(t'-c)^{-\gamma}}{(t'-b)(t'-c)}\,dt', \end{aligned} \qquad (b)$$

$$\begin{aligned} z = &-\frac{1}{2}\int\frac{(t-b)^{\beta}(t-c)^{\gamma}+(t-b)^{-\beta}(t-c)^{-\gamma}}{(t-b)(t-c)}\,dt - \\ &-\frac{1}{2}\int\frac{(t'-b)^{\beta}(t'-c)^{\gamma}+(t'-b)^{-\beta}(t'-c)^{-\gamma}}{(t'-b)(t'-c)}\,dt'. \end{aligned}$$

17

Пусть граница состоит из трёх попарно скрещивающихся прямых, и A, B, C — кратчайшие расстояния между ними. Между каждыми двумя прямыми поверхность пусть уходит в бесконечность. Обозначим через $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ углы между направлениями, по которым уходят в бесконечность граничные линии первого, второго и третьего из бесконечных секторов. Предположим что трём бесконечным секторам минимальной поверхности отвечают значения $t = 0, \infty, 1$. Тогда получается:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{t(1-t)}.$$

Функция $\varphi(t)$ — целая, второй степени. Коэффициенты её определяются из того условия, что должно быть

при $t = 0$ $\quad \dfrac{du}{d\log t} = \sqrt{\dfrac{A\alpha}{2\pi}}$, при $t=\infty$ $\quad \dfrac{du}{d\log t}=\sqrt{\dfrac{B\beta}{2\pi}}$,

при $t=1$ $\quad \dfrac{du}{d\log(1-t)}=\sqrt{\dfrac{C\gamma}{2\pi}}$.

Отсюда следует, что

$$\varphi(t)=\frac{A\alpha}{2\pi}(1-t)+\frac{C\gamma}{2\pi}t-\frac{B\beta}{2\pi}t(1-t).$$

Смотря по тому, будут ли корни уравнения $\varphi(t)=0$ мнимыми или действительными, отображение на сферу будет иметь две внутренних точки ветвления или две точки возврата нормалей на границе.

Функции $k_1=\sqrt{\dfrac{dv}{d\eta}}$ и $k_2=\eta\sqrt{\dfrac{dv}{d\eta}}$ могут иметь разрывы только в точках, соответствующих трём секторам, если положим $\dfrac{dv}{d\eta}=\varphi(t)$. Именно, разрывы k_1 таковы, что

при $t=0$ $\quad$ функция $t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}k_1$,

при $t=\infty$ $\quad$ функция $t^{-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2}}k_1$,

при $t=1$ $\quad$ функция $(1-t)^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}}k_1$

— являются однозначными и отличными от 0 и ∞. Функции k_1 и k_2 суть частные интегралы однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, которое получается, если построим $\dfrac{1}{k}\dfrac{d^2k}{dv^2}$ как функцию t (из рассмотрения её особенностей) и затем введём вместо v независимую переменную t. Если частный интеграл k_1 найден, то k_2 получается из дифференциального уравнения первого порядка

$$k_1\frac{dk_2}{dt}-k_2\frac{dk_1}{dt}=\varphi(t)\,. \tag{c}$$

Общий интеграл нашего однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка мы обозначим через

$$k=Q\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2} & \\ & & & t\\ \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2} & \end{matrix}\right\}. \tag{d}$$

Эта функция удовлетворяет почти всем условиям, которые выставлены в мемуаре, посвящённом Гауссову ряду $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ в качестве определения P-функции [1]). От P-функции она отличается лишь тем, что сумма показателей у неё равна -1, а не $+1$, как у P.

[1]) «Новые результаты из теории функций, представимых Гауссовым рядом $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$.» См. стр. 160 настоящего собрания сочинений.

Функцию Q можно выразить через функцию P и её первую производную. Прежде всего получаем:

$$k = t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\ Q\left\{\begin{matrix} 0 & \dfrac{-\alpha-\beta-\gamma-1}{2} & 0 & \\ & & & t \\ \alpha & \dfrac{-\alpha+\beta-\gamma-1}{2} & \gamma & \end{matrix}\right\}.$$

Если положим, дальше,

$$\sigma = P\left\{\begin{matrix} 0 & \dfrac{-\alpha-\beta-\gamma+1}{2} & 0 & \\ & & & t \\ \alpha & \dfrac{-\alpha+\beta-\gamma+1}{2} & \gamma & \end{matrix}\right\},$$

то можно подобрать постоянные a, b, c таким образом, что

$$k = t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}\left((a+bt)\sigma + ct(1-t)\frac{d\sigma}{dt}\right). \qquad (e)$$

Действительно, достаточно подставить это выражение в дифференциальное уравнение (c) и принять во внимание дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет σ, чтобы притти к заключению:

$$\varphi(t) = t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\gamma}\left(\sigma_1\frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2\frac{d\sigma_1}{dt}\right)F(t),$$

$$F(t) = a(a+c\alpha)(1-t) + (a+b)(a+b-c\gamma)t -$$
$$- t(1-t)\left(b - \frac{\alpha+\beta+\gamma-1}{2}c\right)\left(b - \frac{\alpha-\beta+\gamma-1}{2}c\right).$$

Из свойств функции σ следует, что

$$t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\gamma}\left(\sigma_1\frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2\frac{d\sigma_1}{dt}\right) = 1,$$

и потому должно быть $F(t) = \varphi(t)$. Отсюда получаются три равенства, из которых можно определить a, b, c. Они принимают очень простой вид, если положим

$$a + \frac{\alpha}{2}c = p, \quad b - \frac{\alpha+\gamma-1}{2}c = q, \quad a + b - \frac{\gamma}{2}c = -r.$$

Тогда эти равенства запишутся так:

$$pp - \alpha\alpha(p+q+r)^2 = \frac{A\alpha}{2\pi},$$

$$qq - \beta\beta(p+q+r)^2 = \frac{B\beta}{2\pi},$$

$$rr - \gamma\gamma(p+q+r)^2 = \frac{C\gamma}{2\pi}.$$

С помощью функции

$$\lambda = P\begin{Bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2} & \\ & & & t \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2} & \end{Bmatrix},$$

ветви которой λ_1 и λ_2 удовлетворяют дифференциальному соотношению

$$\lambda_1\frac{d\lambda_2}{d\log t} - \lambda_2\frac{d\lambda_1}{d\log t} = 1,$$

можно выразить k ещё проще, именно, посредством формулы

$$k = t^{\frac{1}{2}}\left((p+qt)\lambda + ct(1-t)\frac{d\lambda}{dt}\right). \qquad (f)$$

Не было бы трудно представить отдельные ветви функции k в виде определённых интегралов. Как это сделать, разъяснено в § 7 Мемуара о функции P.

В частном случае, когда три граничных прямых параллельны координатным осям, имеем: $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\lambda = P\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ & & & t \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \end{pmatrix} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}} P\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \\ & & & t \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}.$$

Ветвь λ_1 этой функции задаётся формулой

$$\left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{const.},$$

откуда вытекает:

$$k_1 = \sqrt{2}\, t^{\frac{1}{4}}(t-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}}\left\{p + qt - \frac{c}{4} - \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\},$$

$$k_2 = -\sqrt{2}\, t^{\frac{1}{4}}(t-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}} - (t-1)^{\frac{1}{2}}}\left\{p + qt - \frac{c}{4} + \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\}.$$

Через эти две последние функции dX, dY, dZ выражаются следующим образом:

$$dX = -ik_1k_2\frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

$$dY = -\frac{i}{2}\left(k_2^2 - k_1^2\right)\frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

$$dZ = -\frac{1}{2}\left(k_2^2 + k_1^2\right)\frac{dt}{t^2(1-t)^2}.$$

Наконец,

$$iX=(p+q-r)^2\sqrt{\frac{t}{t-1}}+(-p+q+r)^2\sqrt{\frac{t-1}{t}}+$$

$$+\frac{1}{2}(p+3q+r)(p-q+r)\log\frac{t^{\frac{1}{2}}+(t-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}-(t-1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$iY=-(p-q+r)^2t^{\frac{1}{2}}-(-p+q+r)^2t^{-\frac{1}{2}}- \qquad (g)$$

$$-\frac{1}{2}(p+q+3r)(p+q-r)\log\frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{1-t^{\frac{1}{2}}},$$

$$iZ=(p-q+r)^2(1-t)^{\frac{1}{2}}+(p+q-r)^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}(3p+q+r)(-p+q+r)\log\frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}.$$

Если p, q, r — действительные, то удвоенные коэффициенты при i в правых частях трёх последних равенств дают координаты точки на поверхности.

18

Пусть граница состоят из четырёх отрезков прямых, которые получаются, если из шести рёбер произвольно взятого тетраэдра выбросить какие-нибудь два, не имеющих общих вершин.

При отображении на сферу получается сферический четырёхугольник с углами, которые обозначим $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$. Дальше следует:

$$du=\frac{Cdt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}}=\frac{Cdt}{\sqrt{\Delta(t)}},$$

причём действительные значения $t=a$, b, c, d соответствуют точкам, в которые переходят при отображении вершины четырёхугольника.

Применяя метод определения η, изложенный в § 14, мы, в частности, должны положить $\varphi(t)=1$, $\chi(t)=\Delta(t)$; следовательно, $v=\frac{u}{C}$ и

$$k_1=\sqrt{\frac{dv}{d\eta}},\quad k_2=\eta\sqrt{\frac{dv}{d\eta}}.$$

Функции k_1 и k_2 удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$k_1\frac{dk_2}{dv}-k_2\frac{dk_1}{dv}=1$$

и являются частными интегралами дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{4}{k}\,\frac{d^2k}{dv^2}=\frac{\left(\alpha\alpha-\frac{1}{4}\right)\Delta'(a)}{t-a}+\frac{\left(\beta\beta-\frac{1}{4}\right)\Delta'(b)}{t-b}+\frac{\left(\gamma\gamma-\frac{1}{4}\right)\Delta'(c)}{t-c}+\frac{\left(\delta\delta-\frac{1}{4}\right)\Delta'(d)}{t-d}+h.$$

Функция $F(t)$ (§ 14) в данном случае — второй степени, но коэффициенты при t^2 и t равны нулю, так что h — постоянная. В последнем уравнении введём в качестве независимой переменной t и тогда получим:

$$\frac{4}{k}\left(\Delta(t)\frac{d^2k}{dt^2}+\frac{1}{2}\Delta'(t)\frac{dk}{dt}\right)=\frac{\left(\alpha\alpha-\frac{1}{4}\right)\Delta'(a)}{t-a}+\frac{\left(\beta\beta-\frac{1}{4}\right)\Delta'(b)}{t-b}+\frac{\left(\gamma\gamma-\frac{1}{4}\right)\Delta'(c)}{t-c}+\frac{\left(\delta\delta-\frac{1}{4}\right)\Delta'(d)}{t-d}+h. \qquad (h)$$

Если выразим x, y, z через t, то в формулы войдут ещё 16 действительных постоянных, а именно, 4 постоянных a, b, c, d, из которых (как раньше) три могут быть выбраны вполне произвольно, затем 4 постоянных α, β, γ, δ, постоянная h, 6 действительных постоянных в выражении для η, постоянный множитель при du и по одному произвольному слагаемому в выражениях для x, y, z. Для определения этих 16 постоянных имеется 16 условий, а именно, 4 равенства, говорящие о том, что четыре граничные прямые на плоскости η при отображении переходят в дуги больших кругов, и ещё 12 равенств, указывающих значения, которые x, y, z принимают в четырёх вершинах.

В частном случае правильного тетраэдра получается сферическое отображение в виде правильного четырёхугольника, у которого все углы равны $\frac{2}{3}\pi$. Диагонали его взаимно делятся пополам и пересекаются под прямым углом. Точки сферы, диаметрально противоположные вершинам, являются вершинами конгруэнтного четырёхугольника. Между этими двумя четырёхугольниками расположены ещё четыре четырёхугольника, также конгруэнтные первым двум и имеющие по две общих вершины с каждым из них. Эти шесть четырёхугольников полностью покрывают один раз поверхность сферы. Отсюда следует, что $\frac{du}{d\log\eta}$ есть алгебраическая функция переменной η.

Рассматриваемую минимальную поверхность можно непрерывно продолжить за пределы её первоначальной границы — именно, поворачивая её около каждого из граничных отрезков, как оси вращения на 180°. Первоначальная «грань» поверхности и каждая из «граней», являющихся её продолжением, имеют вдоль разделяющего их «ребра» общую нормаль. Повторяя построение около каждого вновь возникающего граничного отрезка, мы можем продолжать поверхность неограниченно. Но какую бы «грань» поверхности мы ни взяли, она при отображении переходит в один из шести сферических четырёхугольников. При этом отображения двух «граней» имеют общую границу или же противолежат друг другу, смотря по тому, будут ли сами «грани» иметь общую границу или будут соединены между собою некоторой промежуточной «гранью». Во втором случае посредством «параллельного перемещения» две грани могут быть приведены в состояние совпадения. Поэтому $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ должно не меняться при замене η на $-\frac{1}{\eta}$.

Поместим полюс ($\eta=0$) в центр одного из четырёхугольников, а начальный меридиан направим через центр одной из его сторон; тогда в вершинах этого четырёхугольника η будет иметь значения

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}e^{\pm\frac{\pi i}{4}},\quad \operatorname{tg}\frac{c}{2}e^{\pm\frac{3\pi i}{4}},$$

причём

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Точки, для которых соответствующие значения η отличаются только знаком, имеют одну и ту же координату x. Поэтому величина $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ не должна меняться при замене η на $-\eta$. Отсюда получается:

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2=\frac{C_1}{\sqrt{\eta^4+\eta^{-4}+14}}.$$

Константа C_1 должна быть действительной, чтобы du^2 на границе имело действительные значения.

К этому же результату можно притти следующим образом. Подстановка

$$\left\{\frac{\eta^2+\eta^{-2}-2\sqrt{3}\,i}{\eta^2+\eta^{-2}+2\sqrt{3}\,i}\right\}^3=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2$$

даёт на плоскости t отображение, ограниченное замкнутой кривой с непрерывно меняющейся кривизной. Как показывает вычисление, $d\log t$ — чисто мнимое на границе. Следовательно, граница при отображении на плоскость t даёт круг с центром $t=0$. Радиус этого круга $=1$. Вершины $\eta=\pm\operatorname{tg}\frac{c}{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ переходят в точки $t=\pm 1$; вершины $\eta=\pm\operatorname{tg}\frac{c}{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$ — в точки $t=\pm i$. При вращении около одной из вершин через внутренность минимальной поверхности от одного до другого граничного отрезка аргумент dt меняется на π. Поэтому можно положить здесь, как и в § 13,

$$\frac{du}{dt}=\frac{C_2}{\sqrt{(t^2-1)(t^2+1)}},$$

причём C_2^2 должно быть чисто мнимым, чтобы du^2 на границе было действительным. Можно установить, что $C_1=3\sqrt{3}\,C_2^2\,i$.

Последняя формула согласуется с прежде полученной для $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$. С целью дальнейших упрощений положим

$$\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2=\omega^3,\qquad \eta^2+\eta^{-2}=2\lambda$$

и заметим, что

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta=\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{d\lambda}{d\log\eta}\,d\lambda.$$

Тогда очень простое вычисление приводит к результату:

$$X=-i\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 d\log\eta=C\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\rho\omega)(1-\rho^2\omega)}},$$

$$Y=-\frac{i}{2}\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)d\log\eta=C\rho^2\int\frac{d\omega}{\sqrt{(\omega(1-\omega)(1-\rho^2\omega)}},\qquad (i)$$

$$Z=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)d\log\eta=C\rho\int\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\rho^2\omega)}},$$

где $\rho=-\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ обозначает корень третьей степени из единицы. Действительная константа $C=\frac{1}{8}C_1$ определяется в зависимости от заданной длины ребра тетраэдра.

19

В заключение мы рассмотрим задачу о минимальной поверхности для случая, когда граница состоит из двух произвольных кругов, расположенных в параллельных плоскостях. Здесь невозможно предусмотреть направление нормалей на границе, и потому невозможно решить задачу методом сферического отображения. Мы найдём решение иным путём: именно, допустим, что все сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскостям данных граничных кругов, являются кругами. И окажется, что, исходя из этого допущения, мы получим поверхность, для которой будет удовлетворено условие минимальности.

Проведём ось x перпендикулярно к плоскостям граничных кругов. Пусть уравнение кругового сечения параллельной плоскостью будет

$$F=y^2+z^2+2\alpha y+2\beta z+\lambda=0,\qquad (k)$$

где α, β, γ — функции одной переменной x, которые нужно определить. Положим для сокращения

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=\frac{1}{n},$$

так что будем иметь:

$$\cos r=n\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \sin r\cos\varphi=n\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \sin r\sin\varphi=n\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Условие минимума можно написать в виде

$$\frac{\partial\left(n\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(n\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(n\frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\partial z}=0,$$

или же, по выполнении дифференцирования,

$$4\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(F+\alpha^2+\beta^2-\gamma)+4\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}-4\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(F+\alpha^2+\beta^2-\gamma)+$$
$$+4\cdot 2(F+\alpha^2+\beta^2-\gamma)=0.$$

Если положим $\alpha^2+\beta^2-\gamma=-q$ и заметим, что $F=0$, то последнее равенство перейдёт в следующее:

$$q\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+2q=0. \tag{l}$$

Первое интегрирование даёт:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x}+2\int\frac{dx}{q}+\text{const.}=0,$$

причём константа интегрирования не зависит от x. Считая, с другой стороны, $\int\frac{dx}{q}$ независимым от y и z, мы видим, что константа должна быть линейной функцией от y и z, ибо этим свойством обладает $\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x}$. Поэтому

$$\frac{1}{q}\frac{\partial F}{\partial x}+2\int\frac{dx}{q}+2ay+2bz+\text{const.}=0.$$

Сравнивая этот результат с результатом непосредственного дифференцирования F по x, а именно,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2y\frac{d\alpha}{dx}+2z\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\gamma}{dx},$$

мы получаем:

$$\frac{d\alpha}{dx}=-aq, \quad \frac{d\beta}{dx}=-bq,$$

и дальше:

$$\alpha=-am+d, \quad \beta=-bm+e,$$

где положено $m = \int q\,dx$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2aqy - 2bqz + \frac{d\gamma}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2ay\frac{dq}{dx} - 2bz\frac{dq}{dx} + \frac{d^2\gamma}{dx^2}.$$

Подставим эти значения в уравнение (l) и выполним простые преобразования:

$$q\frac{d^2\gamma}{dx^2} - \frac{dq}{dx}\frac{d\gamma}{dx} + 2q = 0.$$

Последнее уравнение допускает дальнейшее упрощение, если принять во внимание, что

$$\gamma = q + \alpha^2 + \beta^2 = q + f(m) = \frac{dm}{dx} + f(m),$$

$$f(m) = (a^2 + b^2)\,m^2 - 2\,(ad + be)\,m + d^2 + e^2.$$

Вычислив из последних уравнений $\frac{d\gamma}{dx}$ и $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$, приведём дифференциальное уравнение, выражающее условие минимума, к виду

$$q\frac{d^2 q}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + 2q + 2\,(a^2 + b^2)\,q^3 = 0. \qquad (m)$$

Чтобы выполнить интегрирование, положим $\frac{dq}{dx} = p$ и примем q за независимую переменную. Оказывается, что p^2, как функция q, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2}q\frac{d(p^2)}{dq} - p^2 + 2q + 2\,(a^2 + b^2)\,q^3 = 0,$$

или же

$$\frac{q^2 d(p^2) - p^2 d(q^2)}{q^4} = -\left(\frac{4}{q^2} + 4\,(a^2 + b^2)\right)dq.$$

Интегрирование даёт результат:

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{4}{q} - 4\,(a^2 + b^2)\,q + 8c. \qquad (n)$$

Подставив снова $\frac{dq}{dx}$ вместо p, мы получим:

$$dx = \frac{dq}{2\sqrt{q + 2cq^2 - (a^2 + b^2)\,q^3}},$$

$$dm = \frac{q\,dq}{2\sqrt{q + 2cq^2 - (a^2 + b^2)\,q^3}}.$$

Отсюда получается:

$$
\begin{aligned}
x &= \int \frac{dq}{2\sqrt{q + 2cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}}, \\
m &= \int \frac{q\, dq}{2\sqrt{q + 2cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}}, \\
y &= am - d + \sqrt{-q} \cos \psi, \\
z &= bm - e + \sqrt{-q} \sin \psi.
\end{aligned} \tag{o}
$$

Таким образом, x, y и z представлены как функции двух действительных переменных q и ψ. Здесь существенно входят эллиптические интегралы с верхней границей q. Если бы мы воспользовались выше изложенным общим методом, то x, y, z были бы получены в виде сумм двух сопряжённых функций от двух сопряжённых комплексных переменных. Отсюда легко возникает догадка, что такого рода комплексные выражения с помощью теоремы сложения эллиптических функций могут быть соединены в одну интегральную формулу с переменной q.

И в самом деле, легко проверить, что это так и есть. Из соотношений, дающих величины r и φ, т. е. определяющих направление нормали, получается:

$$
\frac{\eta}{\eta'} = e^{2\varphi i} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} i}{\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial F}{\partial z} i} = \frac{y + zi + \alpha + \beta i}{y - zi + \alpha - \beta i} = e^{2\varphi i}.
$$

Если сопоставить это с равенством, определяющим q, т. е.

$$
(y + zi + \alpha + \beta i)(y - zi + \alpha - \beta i) = -q,
$$

то будем иметь

$$
(y + zi) + (\alpha + \beta i) = (-q)^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} \eta'^{-\frac{1}{2}},
$$

$$
(y - zi) + (\alpha - \beta i) = (-q)^{-\frac{1}{2}} \eta^{-\frac{1}{2}} \eta'^{\frac{1}{2}}.
$$

Далее,

$$
\operatorname{cotg} r = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{-q}} \{ p - 2aq(y + \alpha) - 2bq(z + \beta) \},
$$

или

$$
\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}} - \sqrt{\eta\eta'} = \frac{\cos\dfrac{r^2}{2} - \sin\dfrac{r^2}{2}}{\sin\dfrac{r}{2}\cos\dfrac{r}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-q}} \{ p - 2aq(y + \alpha) - 2bq(z + \beta) \}.
$$

Вместо $y + \alpha$ и $z + \beta$ введём в правой части их выражения через η и η', и тогда последнее соотношение примет вид:

$$
\frac{p}{q} = (-q)^{\frac{1}{2}} \left[(a + bi) \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} + (a - bi) \left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}} \right] + (-q)^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\eta\eta'} - \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}} \right)
$$

Возведём обе части в квадрат, подставим вместо $\frac{p^2}{q^2}$ его выражение согласно формуле (n) и сделаем надлежащие преобразования:

$$(-q)\left[(a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+\frac{1}{(-q)}\left[\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right]^2=$$

$$=8c-2(a+bi)\left(\eta'-\frac{1}{\eta}\right)-2(a-bi)\left(\eta-\frac{1}{\eta'}\right). \qquad (p)$$

Полученное соотношение, связывающее между собою q, η, η', станем рассматривать как интеграл дифференциального уравнения с переменными η и η' и с постоянной интегрирования q. Тогда само дифференциальное уравнение немедленно получается в результате дифференцирования:

$$0=\frac{d\eta}{\eta}\left[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)-\sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]+$$

$$+\frac{d\eta'}{\eta'}\left[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)+\sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}-(a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

С помощью первоначального уравнения (p) можно иначе представить множители при $\frac{d\eta}{\eta}$ и $\frac{d\eta'}{\eta'}$. Именно, левую часть (p) можно двумя разными способами дополнить до точного квадрата, добавляя со знаком плюс или минус недостающее удвоенное произведение; таким образом, получится:

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)+\sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}}-(a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)=$$

$$=\pm 2\sqrt{2c+(a+bi)\frac{1}{\eta}-(a-bi)\eta},$$

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'}+\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)-\sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}}-(a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)=$$

$$=\pm 2\sqrt{2c+(a-bi)\frac{1}{\eta'}-(a+bi)\eta'}.$$

После извлечения корня с одинаковыми знаками дифференциальное уравнение принимает вид:

$$0=\frac{d\eta}{2\eta\sqrt{2c+(a+bi)\frac{1}{\eta}-(a-bi)\eta}}+$$

$$+\frac{d\eta'}{2\eta'\sqrt{2c+(a-bi)\frac{1}{\eta'}-(a+bi)\eta'}}. \qquad (q)$$

Интеграл уравнения в алгебраической форме даётся соотношением (p), или же, если угодно, двумя соотношениями:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-q}}(1+\eta\eta') &= \sqrt{\eta'\,[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\,\eta^2]}\,+\\
&\quad+\sqrt{\eta\,[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\,\eta'^2]},\\
\sqrt{-q}\,((a+bi)\,\eta'-(a-bi)\,\eta) &= \sqrt{\eta'[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\eta^2]}\,-\\
&\quad-\sqrt{\eta[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\eta'^2]}.
\end{aligned}\right\} \qquad (r)
$$

В трансцендентной же форме интеграл имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\text{const.} = \int \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta\,[(a+bi)+2c\eta-(a-bi)\,\eta^2]}}\,+&\\
+\int \frac{d\eta'}{2\sqrt{\eta'\,[(a-bi)+2c\eta'-(a+bi)\,\eta'^2]}}&,
\end{aligned} \qquad (s)
$$

и постоянная интегрирования здесь даётся формулой

$$
\text{const.} = \int \frac{dq}{2\sqrt{q\,[1+2cq-(a^2+b^2)\,q^2]}},
$$

как легко следует из уравнения (r), если в нём дадим η или η' постоянные значения, именно, приравняем их нулю. Полученное соотношение как раз и даёт теорему сложения эллиптических интегралов первого рода.

XVII. ПРИМЕРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДИ ПРИ ЗАДАННОЙ ГРАНИЦЕ

1

Поставим себе задачей найти такую поверхность наименьшей площади, граница которой была бы образована из трёх прямых, пересекающихся в двух точках, так что поверхность на своей границе имеет два угла и один сектор, уходящий в бесконечность.

Углы, которые образуют между собою прямые линии, пусть будут $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$. На сферу искомая поверхность отображается в виде сферического треугольника с углами $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, причём $\alpha+\beta+\gamma>1$.

Обозначим через a, b, c те точки в плоскости комплексного переменного t, которые соответствуют обоим углам и уходящему в бесконечность сектору. («О поверхности, имеющей наименьшую площадь при заданной границе», § 13, стр. 309). Тогда получается:

$$u=\int\frac{\text{const.}\,dt}{(t-c)\sqrt{(t-a)(t-b)}},$$

или же

$$u=\text{const.}\log\frac{\sqrt{\frac{t-a}{c-a}}-\sqrt{\frac{t-b}{c-b}}}{\sqrt{\frac{t-a}{c-a}}+\sqrt{\frac{t-b}{c-b}}}.$$

Если допустим (на что имеем право) $a=0$, $b=\infty$, $c=1$, то отсюда следует

$$du=\text{const.}\frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}};\qquad u=\text{const.}\log\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}},$$

причём последняя константа равна $\sqrt{\frac{\gamma C}{2\pi}}$, где C — кратчайшее расстояние между двумя взаимно не пересекающимися прямыми.

Положим теперь согласно § 14 названного мемуара (стр. 321)

$$k_1 = \sqrt{\frac{du}{d\eta}}, \qquad k_2 = \eta \sqrt{\frac{du}{d\eta}};$$

эти функции конечны и однозначны во всех точках плоскости t, кроме $t = 0$, ∞, 1, и, если произведём исследование их поведения в окрестности упомянутых особенных точек по методу, изложенному на стр. 322, то убедимся, что k_1 и k_2 являются двумя ветвями функции

$$P \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2} & -\frac{\gamma}{2} & \\ & & & t \\ \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} & +\frac{\gamma}{2} & \end{matrix} \right\},$$

а η — не что иное, как отношение этих ветвей.

2

Предположим теперь, что искомая поверхность наименьшей площади ограничивается двумя лежащими в параллельных плоскостях простыми замкнутыми прямолинейными полигонами без входящих углов. В этом случае поверхность будет двусвязной, и только посредством разреза превращается в односвязную.

Отображение минимальной поверхности на сферу будет ограничено **двумя системами дуг больших кругов**, причём плоскости кругов перпендикулярны к плоскостям полигонов, так что все большие круги пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы. Каждая из этих точек отвечает сразу всем вершинам одного из полигонов. На каждой стороне полигона находится поворотная точка нормали, отображаемая на конец соответствующей дуги большого круга. Таким образом, отображение всей минимальной поверхности заполняет один раз всю поверхность сферы.

Спроектируем теперь сферу на плоскость, касательную к ней в одной из точек пересечения дуг больших кругов. Тогда минимальная поверхность отобразится на поверхность H, полностью покрывающую плоскость комплексной переменной η и ограниченную, во-первых, системой прямолинейных отрезков, звездообразно расходящихся из начала координат (пусть их конечные точки будут $C_1, C_2, \ldots, C_n$), и, во-вторых, другой системой прямолинейных отрезков, выходящих из бесконечности и обладающих тем свойством, что их продолжения встречаются в начале координат (пусть их начальные точки будут $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m$): как легко понять, через n и m мы обозначили число углов в каждом из двух заданных полигонов.

Полученную двусвязную поверхность H мы теперь отобразим на поверхность T_1, дважды покрывающую верхнюю полуплоскость в плоскости комплексной переменной t, так что две граничные кривые поверхности H будут отображены на действительную ось t. Чтобы поверхность T_1 была двусвязной, она должна иметь две точки ветвления. Прибавим ещё к поверхности T_1 её зеркальное отражение относительно действительной оси, и тогда получим поверхность T, дважды покрывающую всю плоскость t и имеющую четыре попарно сопряжённых точки ветвления. Посредством введения вместо t новой переменной t', которая связана с t уравнением второй степени (относительно обеих переменных), можно добиться того, что точкам ветвления будут соответствовать значения $t' = \pm i, \pm \frac{i}{k}$, причём k — действительное и < 1, и что, кроме того, заданному действительному значению t будет соответствовать заданное действительное значение t' на одном из листов поверхности.

Мы должны теперь определить t как функцию комплексной переменной η таким образом, чтобы в каждой точке поверхности H она имела определённое значение, меняющееся непрерывно при движении по поверхности, была бы действительной на обеих граничных кривых H, и притом в некоторой одной точке каждой из этих граничных кривых становилась бесконечной первого порядка. Продолжим эту функцию через граничные кривые с сохранением непрерывности, придавая ей сопряжённые значения в точках, симметрично расположенных относительно граничных отрезков. Тогда легко понять, что функция $\frac{d\log\eta}{dt}$ при взаимно-сопряжённых значениях t принимает сама взаимно-сопряжённые значения. Поэтому на всей поверхности T она однозначна и, за исключением отдельных точек, непрерывна; следовательно, должна быть рациональной функцией от t и величины

$$\Delta(t) = \sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}\,.$$

Обозначим действительные значения t, отвечающие точкам $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_1', C_2', \ldots, C_m'$, через $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_1', c_2', \ldots, c_m'$, а действительные (равным образом) значения t, отвечающие совпадающим с началом координат и соответственно с бесконечно удалённой точкой вершинам углов на поверхности H, — через $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_1', b_2', \ldots, b_m'$. В таком случае функция $\frac{d\log\eta}{dt}$ будет бесконечно малой первого порядка в точках $t = c_1, c_2, \ldots, c_n, c_1', c_2', \ldots, c_m'$ и бесконечно большой первого порядка в точках $t = b_1, b_2, \ldots, b_n, b_1', b_2', \ldots, b_m'$, а также в точках ветвления $t = \pm i, \pm \frac{i}{k}$.

Итак, можно положить:

$$\frac{d\log\eta}{dt} = \frac{\varphi(t, \Delta(t))}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}},$$

где φ — рациональная функция от t и $\Delta(t)$, становящаяся бесконечно малой в точках c, c' и бесконечно большой в точках b, b': очевидно, этими условиями она определяется с точностью до постоянного множителя. Нужно, однако, заметить, что для существования такой функции φ необходимо выполнение одного равенства, связывающего между собой точки c, c', b, b', так что одна из этих точек определяется всеми остальными («Теория Абелевых функций», § 8, стр. 112). С другой стороны, на основании сделанного выше замечания одна из точек c, c', b, b' может быть выбрана произвольно. Постоянное слагаемое при $\log \eta$ определяется тем, что указывается соответствующее одной из точек c значение η, например, η_0, откуда следует:

$$\log \eta - \log \eta_0 = \int\limits_c^t \frac{\varphi(t, \Delta(t))}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} dt.$$

После того, как указаны c и η_0, остаётся еще $2n+2m$ неопределённых постоянных в этом выражении, а именно, $2n+2m-2$ из числа значений c, c', b, b', модуль k и действительный множитель при φ.

Для определения этих постоянных мы имеем, прежде всего, два условия, говорящие о том, что действительная часть интеграла

$$\int \frac{\varphi(t, \Delta(t))}{\sqrt{(1+t^2, (1+k^2t^2)}} dt,$$

взятого по замкнутой кривой, охватывающей точки ветвления i, $\frac{i}{k}$, равна нулю, а мнимая — равна $2\pi i$. Для остальных $2n+m-2$ постоянных получается столько же условий, говорящих, что точкам c, c' соответствуют заданные точки C, C' в плоскости η.

Теперь представим себе, что ось x проведена перпендикулярно к плоскостям обоих граничных полигонов, и исследуем отображение минимальной поверхности на плоскость комплексной переменной X, предварительно разрезав поверхность по некоторой кривой, соединяющей два полигона (после чего поверхность станет односвязной). Действительная часть X постоянна на каждом из граничных полигонов, равно как и на любом плоском сечении, параллельном их плоскостям. Мнимая же часть монотонно возрастает при обходе такого сечения, но таким образом, что приращение мнимой части после обхода есть постоянная величина. Отсюда ясно, что отображение нашей поверхности на плоскость X будет иметь вид разостланного на плоскости X (без самопокрытия) параллелограмма, у которого две стороны, соответствующие граничным полигонам, параллельны мнимой оси; что же касается двух других сторон, соответствующих краям разреза, то они могут быть и криволинейными, но обладают тем свойством, что параллельное перемещение по направлению мнимой оси позволяет совместить одну сторону с другой.

Мы приходим дальше к неизбежному заключению о том, что этот параллелограмм можно так отобразить на верхнюю половину T_1 поверхности T, что стороны, параллельные мнимой оси, переходят в граничные кривые T_1, а две других стороны — в края разреза на T_1. Такого рода отображение даётся функцией

$$X = iC\int \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}} + C',$$

где константа C — действительная, а C' может быть выбрано произвольно, после того, как выбрано положение начала координат на оси x. Если h есть расстояние между параллельными плоскостями граничных полигонов, то мы получаем:

$$h = 4C\int\limits_0^i \frac{idt}{\sqrt{(1+t^2)\ (1+k^2t^2)}},$$

откуда можно определить C.

Тем самым решается интересующая нас задача (остаётся лишь определение констант), так как, по формулам на стр. 305

$$Y = \frac{1}{2}\int dX\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right), \qquad Z = -\frac{i}{2}\int dX\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right),$$

и координаты x, y, z точки на минимальной поверхности представлены как функции двух независимых переменных.

Для констант, входящих в η, получаются ещё два условия: именно, если интегралы, через которые выражены Y и Z, будут взяты по замкнутой кривой, охватывающей начало в плоскости η, то их действительные части должны будут равняться нулю.

Если станем считать данными расстояние h и направления всех прямых, на которых лежат граничные отрезки поверхности, то, не считая постоянных слагаемых в X, Y, Z, наши выражения окажутся зависящими от $n+m-2$ неопределённых констант, в качестве каковых можно взять расстояния точек C, C' от начала в плоскости η, которые впрочем, по предыдущему, должны быть связаны двумя соотношениями. Ровно столько же постоянных нужно для определения граничных полигонов в их взаимном расположении. Действительно, закрепив две граничных прямых для фиксации начала координат, мы можем каждую из $n+m-2$ остальных подвергать ещё параллельному перемещению в плоскостях полигонов.

Наши результаты упрощаются, если мы сделаем некоторые частные предположения относительно граничных полигонов. В дальнейшем остановимся на случае, когда оба полигона — правильные и служат основаниями прямой усечённой пирамиды.

Поворотные точки нормали в этом случае оказываются как раз посредине граничных отрезков и расположены попарно в одних и тех же плоскостях, проходящих через ось пирамиды.

Направим ось y перпендикулярно к одному из граничных отрезков: тогда в плоскости η одна точка C и одна точка C' будут находиться на действительной оси; пусть η_0 и η_0' — их расстояния от начала. Все точки C, соответственно C', расположены на двух концентрических кругах и представляют собою вершины правильных многоугольников; при этом всякая пара взаимно соответствующих точек C и C' лежит на одном и том же радиусе-векторе.

Так как на границе поверхности T одна точка может быть выбрана произвольно, то можно допустить, что точка C, лежащая на действительной оси, при отображении переходит в точку $t=0$ на одном из листов поверхности T. Тогда из соображений симметрии следует, что отрезок действительной оси между точками C и C' в плоскости η переходит на поверхности T в линию, которая, начинаясь в точке $t=0$, по первому листу поверхности идёт над мнимой осью до точки ветвления $t=i$ и затем по второму листу опять над мнимой осью возвращается в точку $t=0$. Отсюда следует, что при чисто мнимых значениях t функция $\varphi(t, \Delta(t))$ сама принимает чисто мнимые значения, и точке C' соответствует точка $t=0$ на втором листе T.

Посредством подстановки $\eta\eta' = \eta_0\eta_0'$ поверхность H отображается, далее, на конгруэнтную ей поверхность H' таким образом, что точки C переходят в точки C' и обратно (впрочем, в обратном порядке). Отсюда вытекает, что двум точкам η и $\eta' = \frac{\eta_0\eta_0'}{\eta}$ на поверхности H соответствуют на поверхности T две точки, лежащие одна над другой на разных листах. И так как $d\log\eta + d\log\eta' = 0$, то функция $\varphi(t, \Delta(t))$ в точках поверхности T, лежащих одна над другой, имеет одно и то же значение, и, значит, выражается через t рационально, именно, имеет вид $t\psi(t^2)$, где ψ — рациональная функция.

Это побуждает нас отобразить поверхность T на поверхность S с помощью подстановки

$$\frac{1+t^2}{1+k^2t^2} = s^2;$$

верхняя половина поверхности T перейдёт в один лист плоскости s, разрезанный вдоль действительной оси от точки $s=1$ до точки $s=\frac{1}{k}$ и от точки $s=-1$ до $s=-\frac{1}{k}$. Края обоих разрезов соответствуют граничным кривым поверхности H. Для X получается в таком случае выражение

$$X = \frac{h}{4K}\int\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

причём

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

и η оказывается алгебраической функцией от s.

Если граничные полигоны — квадраты, то

$$\eta = c\sqrt{\frac{(1-ms)(1-m's)}{(1+ms)(1+m's)}};$$

вершинам одного из квадратов соответствуют точки $s=\frac{1}{m}$, $s=\frac{1}{m'}$ на обоих краях разреза, поворотным точкам нормали — точки $s=1$, $s=\frac{1}{k}$ и ещё (на обоих краях разреза) точка $s=\frac{1}{n}$, которая определяется из уравнения $\frac{d\log\eta}{ds}=0$; притом

$$1>m>n>m'>k\,^{1)}.$$

Если граничные полигоны — равносторонние треугольники, то тогда

$$\eta = c\left(\frac{1-ms}{1+ms}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1-ks}{1+ks}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Посмотрим, как в этом случае обстоит дело с определением постоянных. Положив $s=\pm 1$, получим:

$$\eta_0 = c\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\frac{1}{3}}; \qquad \eta_0' = c\left(\frac{1+m}{1-m}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{3}},$$

и значит,

$$c=\sqrt{\eta_0\eta_0'}, \qquad \sqrt{\frac{\eta_0}{\eta_0'}}=\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В частности, если треугольники конгруэнтные, то

$$\eta_0\eta_0'=1, \qquad c=1.$$

Вершинам одного из треугольников соответствуют точки $s=\frac{1}{m}$ на обоих краях разреза и точка $\frac{1}{k}$, так что должно быть $k<m<1$. Одна поворотная точка нормали получается при $s=1$, две другие соответствуют точке $s=\frac{1}{n}$ на обоих краях разреза, так что

$$k<n<m.$$

1) Изложенные результаты обобщаются и на многие случаи, когда граничные полигоны — не правильные. Так, например, приведённая формула для η остаётся в силе в случае, когда граничные полигоны — прямоугольники, центры которых лежат на одном перпендикуляре к их плоскостям, при условии, что модуль $\eta\eta'$ в поворотных точках нормали имеет одно и то же значение. Это имеет место, например, в том случае, когда оба прямоугольника конгруэнтны.

Из равенства $\frac{d \log \eta}{ds} = 0$ можно определить значение n:

$$n^2 = \frac{km(m+2k)}{2m+k},$$

откуда видно, что всякой паре чисел k, m, удовлетворяющих условию

$$0 < k < m < 1,$$

сопоставляется значение n, заключённое между k и m.

Но можно получить и второе соотношение, связывающее m, n, k: оно вытекает из того обстоятельства, что при $s = \frac{1}{n}$ должно быть $\eta^3 = \eta_0^3$, и имеет вид:

$$\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2 \frac{1-k}{1+k} = \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^2 \frac{n-k}{n+k}.$$

Если из двух уравнений исключить n, то получается следующее соотношение между k и m:

$$k\left(\frac{1+m^2+2mk}{k(1+m^2)+2m}\right)^2 = m\left(\frac{2k+m}{k+2m}\right)^3,$$

посредством которого можно определить значение k по значению m.

При $k=0$ левая часть равенства обращается в нуль, правая — в $\frac{m}{8}$; при $k=m$ разность между левой и правой частью равна

$$\frac{(1-m^2)^3}{m(3+m^2)^2},$$

т. е. положительна при $m<1$. Поэтому каждому значению m, меньшему единицы, соответствует нечётное число значений k таких, что $k<m$. Так как, однако, легко видеть, что функция

$$\log k \frac{(1+m^2+2mk)^2 (k+2m)^3}{(k(1+m^2)+2m)^2 (2k+m)^3}$$

между $k=0$ и $k=m$ имеет только один максимум, то отсюда ясно, что при любом значении m (<1) рассматриваемое уравнение имеет один и только один корень. В предельных случаях $m=0$ и $m=1$ получается

$$k = n = m.$$

Сделав надлежащие допущения, касающиеся аддитивных констант, мы получим следующие формулы для функций X, Y, Z:

$$X=\frac{h}{4K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

$$Y=\frac{h}{8K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right),$$

$$Z=-\frac{ih}{8K}\int_1^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right).$$

Остаются константы m и $\sqrt{\eta_0\eta_0'}$, определить которые можно по заданным длинам сторон треугольников. Обозначая эти последние через a и b, будем иметь:

$$a=\frac{ih}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)$$

$$b=\frac{ih}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\frac{\eta}{\eta_0\eta_0'}+\frac{\eta_0\eta_0'}{\eta}\right).$$

В частном случае $a=b$ получаем: $\eta_0\eta_0'=1$, и для определения константы m остаётся одно трансцендентное уравнение

$$\frac{a}{h}=\frac{i}{2K}\int_1^{\frac{1}{m}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right).$$

Если в выражении справа заставить m меняться от 0 до 1, то оно сохраняет постоянно положительный знак, но на обоих концах этого промежутка обращается в бесконечность. При некотором промежуточном значении это выражение должно, следовательно, иметь минимум. Отсюда можно заключить, что выражение $\frac{a}{h}$ имеет нижнюю границу, за пределами которой задача не имеет решения; если же $\frac{a}{h}$ больше этой границы, то для m получается два значения, и тогда задача имеет два решения. Следует полагать, что только наименьшему из двух значений m отвечает действительно минимум площади.

XVIII. О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОГО ОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПСОИДА

В области исследований, посвящённых движению жидкого однородного эллипсоида, частицы которого притягиваются по закону тяготения, Дирихле в своей последней работе, изданной Дедекиндом [1], поразительным образом открыл новый путь. Для математика особенно привлекательно следовать по пути, начало которому положено этим прекрасным открытием, совершенно независимо от вопроса о форме небесных тел, который послужил поводом для этих исследований. Сам Дирихле провёл до конца решение рассмотренной им задачи только в самых простейших случаях. При дальнейшем проведении исследования целесообразно дифференциальным уравнениям движения жидкой массы придать форму, независимую от выбранного начального момента времени: это можно, например, сделать, устанавливая законы, согласно которым изменяется величина главных осей эллипсоида и движение жидкой массы относительно этих осей. Рассматривая вопрос с этой точки зрения, мы будем считать известным мемуар Дирихле, но во избежание возможных недоразумений обязаны предупредить, что сохранить употребляемые в нём обозначения не оказалось возможным.

1

Обозначим через a, b, c полуоси эллипсоида в момент времени t, через x, y, z координаты частицы жидкой массы в тот же момент; начальные значения этих величин будем отмечать индексом 0; предположим, что в начальный момент главные оси эллипсоида совпадают с осями координат.

Как известно, в исследовании Дирихле исходный пункт заключается в том, что дифференциальным уравнениям движения частиц жидкости можно удовлетворить, заменяя координаты x, y, z линейными комбинациями их начальных значений с коэффициентами, зависящими только от времени. Эти выражения мы будем писать в следующем виде:

$$\left.\begin{gathered} x = l\,\frac{x_0}{a_0} + m\,\frac{y_0}{b_0} + n\,\frac{z_0}{c_0} \qquad y = l'\,\frac{x_0}{a_0} + m'\,\frac{y_0}{b_0} + n'\,\frac{z_0}{c_0} \\ z = l''\,\frac{x_0}{a_0} + m''\,\frac{y_0}{b_0} + n''\,\frac{z_0}{c_0} \end{gathered}\right\} \qquad (1)$$

Далее, обозначим через ξ, η, ζ координаты точки (x, y, z) по отношению к подвижной системе, оси которой в каждый момент совпадают с главными осями эллипсоида; как известно, ξ, η, ζ являются линейными функциями x, y, z:

$$\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad \eta = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \quad \zeta = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \tag{2}$$

причём коэффициенты — косинусы углов, которые оси одной системы образуют с осями другой: $\alpha = \cos \xi x$, $\beta = \cos \xi y$ и т. д.; между коэффициентами имеется шесть соотношений, которые легко получаются из того условия, что при подстановке должно быть справедливо равенство

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Так как на поверхности находятся всегда одни и те же частицы жидкости, то должно быть:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2};$$

поэтому, если положим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= \alpha_{,} \frac{x_0}{a_0} + \beta_{,} \frac{y_0}{b_0} + \gamma_{,} \frac{z_0}{c_0} \\ \frac{\eta}{b} &= \alpha_{,}' \frac{x_0}{a_0} + \gamma_{,}' \frac{y_0}{b_0} + \gamma_{,}' \frac{z_0}{c_0} \\ \frac{\zeta}{c} &= \alpha_{,}'' \frac{x_0}{a_0} + \beta_{,}'' \frac{y_0}{b_0} + \gamma_{,}'' \frac{z_0}{c_0}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

т. е. обозначим через $\alpha_{,}$, $\beta_{,}, \ldots, \gamma_{,}''$ коэффициенты в выражениях $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ через $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$, получаемых посредством подстановки значений (1) в уравнения (2), то эти величины $\alpha_{,}$, $\beta_{,}, \ldots, \gamma_{,}''$ являются также коэффициентами ортогональной трансформации и могут быть рассматриваемы, как косинусы углов, которые оси подвижной системы координат ξ, η, ζ образуют с осями неподвижной системы координат. Если выразим величины x, y, z с помощью равенств (2) и (3) через $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$, то получим:

$$\begin{aligned} l &= a\alpha\alpha_{,} + b\alpha'\alpha_{,}' + c\alpha''\alpha_{,}'' \\ m &= a\alpha\beta_{,} + b\alpha'\beta_{,}' + c\alpha''\beta_{,}'' \\ n &= a\alpha\gamma_{,} + b\alpha'\gamma_{,}' + c\alpha''\gamma_{,}'' \\[4pt] l' &= a\beta\alpha_{,} + b\beta'\alpha_{,}' + c\beta''\alpha_{,}'' \\ m' &= a\beta\beta_{,} + b\beta'\beta_{,}' + c\beta''\beta_{,}'' \\ n' &= a\beta\gamma_{,} + b\beta'\gamma_{,}' + c\beta''\gamma_{,}'' \\[4pt] l'' &= a\gamma\alpha_{,} + b\gamma'\alpha_{,}' + c\gamma''\alpha_{,}'' \\ m'' &= a\gamma\beta_{,} + b\gamma'\beta_{,}' + c\gamma''\beta_{,}'' \\ n'' &= a\gamma\gamma_{,} + b\gamma'\gamma_{,}' + c\gamma''\gamma_{,}''. \end{aligned} \tag{4}$$

Поэтому можно положения частиц жидкости, или, если угодно, значения величин $l, m, \ldots n''$ в момент времени t, считать зависящими от величин a, b, c и положения двух подвижных координатных систем; вместе с тем заметим, что при взаимной перестановке этих двух систем в системе величин l, m, n горизонтали переставятся с вертикалями, так что l, m', n'' останутся неизменными, тогда как m переместится с l', n с l'', n' с m''. Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы вывести дифференциальные уравнения изменения главных осей и движения обеих этих координатных систем на основе указанных в мемуаре Дирихле (§ 1,1) уравнений движения частиц жидкости [2].

2

Очевидно, в этих уравнениях можно, вместо производных по начальным значениям величин x, y, z (которые обозначены там через a, b, c), ввести производные по величинам ξ, η, ζ: в самом деле, получающиеся при этом уравнения являются линейными комбинациями исходных, и обратно. Мы получим, таким образом, заменяя $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \ldots \frac{\partial z}{\partial \zeta}$ их значениями:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi}\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma' &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha'' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta'' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma'' &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial P}{\partial \zeta},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где V — потенциал, P — давление в точке x, y, z в момент времени t и ε — константа, обозначающая притяжение между двумя единичными массами на единичном расстоянии.

Представим величины, стоящие слева от знаков равенства, в виде линейных функций от величин ξ, η, ζ; для этого нужна некоторая предварительная подготовка.

Дифференцирование равенств (2) нам даёт:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{d\alpha}{dt}x + \frac{d\beta}{dt}y + \frac{d\gamma}{dt}z + \xi'\\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{d\alpha'}{dt}x + \frac{d\beta'}{dt}y + \frac{d\gamma'}{dt}z + \eta'\\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{d\alpha''}{dt}x + \frac{d\beta''}{dt}y + \frac{d\gamma''}{dt}z + \zeta',
\end{aligned}
$$

где положено для сокращения

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t}\alpha+\frac{\partial y}{\partial t}\beta+\frac{\partial z}{\partial t}\gamma&=\xi'\\ \frac{\partial x}{\partial t}\alpha'+\frac{\partial y}{\partial t}\beta'+\frac{\partial z}{\partial t}\gamma'&=\eta'\\ \frac{\partial x}{\partial t}\alpha''+\frac{\partial y}{\partial t}\beta''+\frac{\partial z}{\partial t}\gamma''&=\zeta'.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Выразим в полученных уравнениях x, y, z снова через ξ, η, ζ:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha+\frac{d\beta}{dt}\beta+\frac{d\gamma}{dt}\gamma\right)\xi+\left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha'+\frac{d\beta}{dt}\beta'+\frac{d\gamma}{dt}\gamma'\right)\eta+$$
$$+\left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha''+\frac{d\beta}{dt}\beta''+\frac{d\gamma}{dt}\gamma''\right)\zeta+\xi'$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha+\frac{d\beta'}{dt}\beta+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma\right)\xi+\left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha'+\frac{d\beta'}{dt}\beta'+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma'\right)\eta+$$
$$+\left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha''+\frac{d\beta'}{dt}\beta''+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma''\right)\zeta+\eta'$$
$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha+\frac{d\beta''}{dt}\beta+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma\right)\xi+\left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha'+\frac{d\beta''}{dt}\beta'+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma'\right)\eta+$$
$$+\left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha''+\frac{d\beta''}{dt}\beta''+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma''\right)\zeta+\zeta'.$$

Но дифференцирование известных равенств $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0$ и т. д. даёт:

$$\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt}=0,\quad \alpha'\frac{d\alpha'}{dt}+\beta'\frac{d\beta'}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma'}{dt}=0,$$
$$\alpha''\frac{d\alpha''}{dt}+\beta''\frac{d\beta''}{dt}+\gamma''\frac{d\gamma''}{dt}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha'}{dt}\alpha''+\frac{d\beta'}{dt}\beta''+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma''&=-\left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha'+\frac{d\beta''}{dt}\beta'+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma'\right)\\ \frac{d\alpha''}{dt}\alpha+\frac{d\beta''}{dt}\beta+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma&=-\left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha''+\frac{d\beta}{dt}\beta''+\frac{d\gamma}{dt}\gamma''\right)\\ \frac{d\alpha}{dt}\alpha'+\frac{d\beta}{dt}\beta'+\frac{d\gamma}{dt}\gamma'&=-\left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha+\frac{d\beta'}{dt}\beta+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma\right);\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

таким образом, обозначая последние три величины через p, q, r, получим

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=\frac{\partial\xi}{\partial t}-r\eta+q\zeta\\ \eta'&=r\xi+\frac{\partial\eta}{\partial t}-p\zeta\\ \zeta'&=-q\xi+p\eta+\frac{\partial\zeta}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Совершенно так же из равенств (2) следует:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma &= \frac{\partial \xi'}{\partial t} - r\eta' + q\zeta', \\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma' &= r\xi' + \frac{\partial \eta'}{\partial t} - p\zeta', \\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha'' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta'' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma'' &= -q\xi' + p\eta' + \frac{\partial \zeta'}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Дальше, обознаная через $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ величины, которые так же составляются из функций $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, ..., $\gamma_{,}''$, как величины p, q, r — из функций α, β, ..., γ'', мы получаем из равенств (3) § 1:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\frac{\xi}{a}\right)}{\partial t} &= r_{,}\frac{\eta}{b} - q_{,}\frac{\zeta}{c}, \\
\frac{\partial\left(\frac{\eta}{b}\right)}{\partial t} &= p_{,}\frac{\zeta}{c} - r_{,}\frac{\xi}{a}, \\
\frac{\partial\left(\frac{\zeta}{c}\right)}{\partial t} &= q_{,}\frac{\xi}{a} - p_{,}\frac{\eta}{b}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подстановка значений $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ из (6) в (4) приводит к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
\xi' &= \frac{da}{dt}\,\frac{\xi}{a} + (ar_{,} - br)\frac{\eta}{b} + (cq - aq_{,})\frac{\zeta}{c}, \\
\eta' &= (ar - br_{,})\,\frac{\xi}{a} + \frac{db}{dt}\,\frac{\eta}{b} + (bp_{,} - cp)\,\frac{\zeta}{c}, \\
\zeta' &= (cq_{,} - aq)\frac{\xi}{a} + (bp - cp_{,})\frac{\eta}{b} + \frac{dc}{dt}\,\frac{\zeta}{c}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Что касается геометрического смысла этих величин, то, как легко понять, ξ', η', ζ' представляют собою компоненты скорости точки x, y, z жидкой массы параллельно осям ξ, η, ζ; $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ — таким же образом разложенные относительные скорости в системе координат ξ, η, ζ; далее, в уравнениях (1) величины в левых частях — ускорения, а в правых частях — компоненты сил, вызывающих ускорения, параллельно этим осям; наконец, p, q, r — мгновенные вращения координатной системы ξ, η, ζ около её осей, а $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ имеют такое же значение в системе $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$.

3

Если значения величин ξ', η', ζ' из равенств (7) подставим в равенства (5) и затем с помощью соотношений (6) производные от $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ снова выразим через величины ξ, η, ζ, то величины в левых частях уравнений (1) будут линейно выражены через ξ, η, ζ. Величина V в правой части имеет вид

$$H - A\xi^2 - B\eta^2 - C\zeta^2,$$

где H, A, B, C известным образом составлены из величин a, b, c. Уравнениям удастся удовлетворить при условии, что на поверхности давление имеет постоянное значение Q, полагая

$$P = Q + \sigma\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right)$$

и определяя десять функций времени a, b, c; p, q, r; $p_{,}$, $q_{,}$, $r_{,}$ и σ таким образом, чтобы девять коэффициентов при величинах ξ, η, ζ в обеих частях были равны, и чтобы было выполнено условие несжимаемости жидкости $abc = a_0 b_0 c_0$. Сравнивая коэффициенты при $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$ в первом уравнении и коэффициенты при $\frac{\xi}{a}$ — во втором, будем иметь:

$$\frac{d^2a}{dt^2} + 2brr_{,} + 2cqq_{,} - a(r^2 + r_{,}^2 + q^2 + q_{,}^2) = 2\frac{\sigma}{a} - 2\varepsilon aA.$$

$$a\frac{dr}{dt} - b\frac{dr_{,}}{dt} + 2\frac{da}{dt}r - 2\frac{db}{dt}r_{,} + apq + bp_{,}q_{,} - 2cpq_{,} = 0.$$

$$a\frac{dr_{,}}{dt} - b\frac{dr}{dt} + 2\frac{da}{dt}r_{,} - 2\frac{db}{dt}r + ap_{,}q_{,} + bpq - 2cp_{,}q = 0.$$

Из этих уравнений получаются шесть остальных с помощью циклической перестановки осей, или даже каких-угодно перестановок: нужно лишь следить, чтобы при взаимной перестановке двух осей не только переставлялись величины, находящиеся с ними в соответствии, но также меняли знак шесть величин p, q, . . . , $r_{,}$.

Уравнениям можно придать форму, более удобную для дальнейшего исследования, если вместо величин p, $p_{,}$; q, $q_{,}$; r, $r_{,}$ ввести в качестве неизвестных функций их полусуммы и полуразности:

$$u = \frac{p + p_{,}}{2}, \quad v = \frac{q + q_{,}}{2}, \quad w = \frac{r + r_{,}}{2}$$

$$u' = \frac{p - p_{,}}{2}, \quad v' = \frac{q - q_{,}}{2}, \quad w' = \frac{r - r_{,}}{2}.$$

Тогда система уравнений, которым должны удовлетворять десять неизвестных функций времени, будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
(a-c)v^2 + (a+c)v'^2 + (a-b)w^2 + (a+b)w'^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2} &= \varepsilon aA - \frac{\sigma}{a},\\
(b-a)w^2 + (b+a)w'^2 + (b-c)u^2 + (b+c)u'^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2b}{dt^2} &= \varepsilon bB - \frac{\sigma}{b},\\
(c-b)u^2 + (c+b)u'^2 + (c-a)v^2 + (c+a)v'^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2} &= \varepsilon cC - \frac{\sigma}{c}.
\end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&(b-c)\,\frac{du}{dt}+2\,\frac{d(b-c)}{dt}\,u+(b+c-2a)\,vw+(b+c+2a)\,v'w'=0,\\
&(b+c)\,\frac{du'}{dt}+2\,\frac{d(b+c)}{dt}\,u'+(b-c+2a)\,vw'+(b-c-2a)\,v'w=0,\\
&(c-a)\,\frac{dv}{dt}+2\,\frac{d(c-a)}{dt}\,v+(c+a-2b)\,wu+(c+a+2b)\,w'u'=0,\\
&(c+a)\,\frac{dv'}{dt}+2\,\frac{d(c+a)}{dt}\,v'+(c-a+2b)\,wu'+(c-a-2b)\,w'u=0,\\
&(a-b)\,\frac{dw}{dt}+2\,\frac{d(a-b)}{dt}\,w+(a+b-2c)\,uv+(a+b+2c)\,u'v'=0,\\
&(a-b)\,\frac{dw'}{dt}+2\,\frac{d(a-b)}{dt}\,w'+(a-b+2c)\,uv'+(a-b-2c)\,u'v=0,\\
&\qquad\qquad\qquad abc=a_0b_0c_0.
\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)
$$

Значения A, B, C **получаются** из известного выражения для V:

$$
V=H-A\xi^2-B\eta^2-C\zeta^2=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\left(1-\frac{\xi^2}{a^2+s}-\frac{\eta^2}{b^2+s}-\frac{\zeta^2}{c^2+s}\right),
$$

где

$$
\Delta=\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}.
$$

После интеграции всех этих уравнений для определения функций α, β, ..., γ'' нужно ещё найти общий интеграл θ, θ', θ'' системы уравнений

$$
\frac{d\theta}{dt}=r\theta'-q\theta'',\qquad \frac{d\theta'}{dt}=-r\theta+p\theta'',\qquad \frac{d\theta''}{dt}=q\theta-p\theta'\qquad(\beta)
$$

и тогда, как ясно из соотношений (3) § 2, α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' будут частными интегралами, принимающими при $t=0$ значения 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. Для определения функций α_1, β_1, ..., γ_1'' придётся то же самое проделать с системой

$$
\frac{d\theta_{,}}{dt}=r_{,}\theta_{,}'-q_{,}\theta_{,}'',\qquad \frac{d\theta_{,}'}{dt}=-r_{,}\theta_{,}+p_{,}\theta_{,}'',\qquad \frac{d\theta_{,}''}{dt}=q_{,}\theta_{,}-p_{,}\theta_{,}'.\quad(\gamma)
$$

4

Посмотрим теперь, как могут быть полезны при интеграции уравнений (α), (β), (γ) те общие принципы гидродинамики, из которых Дирихле удалось вывести семь интегралов первого порядка системы дифференциальных уравнений для функций l, m, ..., n'' [§ 1, (a)] [3]. Вытекающие из них соотношения легко устанавливаются с помощью полученных выше выражений для ξ', η', ζ'.

Теорема о сохранении площадей даёт:

$$
\left.\begin{aligned}
(b-c)^2u+(b+c)^2u'&=g=\alpha\,g^0+\beta\,h^0+\gamma\,k^0,\\
(c-a)^2v+(c+a)^2v'&=h=\alpha' k^0+\beta' h^0+\gamma' k^0,\\
(a-b)^2w+(a+b)^2w'&=k=\alpha'' g^0+\beta'' h^0+\gamma'' k^0,
\end{aligned}\right\}\qquad(1)
$$

где константы g^0, h^0, k^0, обозначающие начальные значения g, h, k, соответствуют константам $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ в мемуаре Дирихле; эта теорема позволяет заключить, что $\theta=g$, $\theta'=h$, $\theta''=k$ есть решение дифференциальной системы (β), что легко следует из шести последних уравнений (α).

Из Гельмгольцева принципа сохранения вращения получаются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} (b-c)^2u-(b+c)^2u' &= g_{,}=\alpha_{,}g_1^{\,0}+\beta_{,}h_{,}^{\,0}+\gamma_{,}k_{,}^{\,0} \\ (c-a)^2v-(c+a)^2v' &= h_{,}=\alpha_{,}'g_1^{\,0}+\beta_{,}'h_{,}^{\,0}+\gamma_{,}'k_{,}^{\,0} \\ (a-b)^2w-(a+b)^2w' &= k_{,}=\alpha_{,}''g_1^{\,0}+\beta_{,}''h_{,}^{\,0}+\gamma_{,}''k_{,}^{\,0} \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

в которых константы $g_{,}^{\,0}$, $h_{,}^{\,0}$, $k_{,}^{\,0}$ соответствуют константам $BC\mathfrak{A}$, $CA\mathfrak{B}$, $AB\mathfrak{C}$ названного мемуара.

Наконец, теорема о сохранении живой силы даёт один интеграл нашей системы (α):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right)+ \\ &+(b-c)^2u^2+(c-a)^2v^2+(a-b)\,w^2+ \\ &+(b+c)^2u'^2+(c+a)^2\,v'^2+(a+b)^2w'^2 \end{aligned}\right\}=2\varepsilon H+\text{const.} \tag{I}$$

Из равенств (1) и (2) получатся ещё два интеграла системы:

$$g^2+h^2+k^2=\text{const.}=\omega^2. \tag{II}$$

$$g_{,}^{\,2}+h_{,}^{\,2}+k_{,}^{\,2}=\text{const.}=\omega_{,}^{\,2}. \tag{III}$$

Заметим, далее, что система уравнений (β) допускает интегралы

$$\theta^2+\theta'^2+\theta''^2=\text{const.} \tag{IV}$$

$$\theta g+\theta' h+\theta'' k=\text{const.} \tag{V}$$

и, таким образом, её интеграция, вообще, сводится к одной квадратуре. Однако, для построения общего интеграла этой системы, поскольку она линейная и однородная, нужно ещё только найти два частных интеграла, отличных от g, h, k; для этой цели выберем постоянные в уравнениях (IV — V) так, чтобы вычисление упростилось. Дадим постоянным значения нуль; тогда получим

$$\theta' h+\theta'' k=-g\theta, \tag{3}$$

и затем, возводя это равенство в квадрат и прибавляя равенство

$$-\theta'^2-\theta''^2=\theta^2,$$

умноженное на h^2+k^2, будем иметь:

$$-(\theta' k-\theta'' h)^2=\omega^2\theta^2,$$

и следовательно,

$$\theta' k-\theta'' h=\omega i\theta. \tag{4}$$

Решение двух линейных уравнений (3) и (4) даёт:

$$\theta' = \frac{-gh + k\omega i}{h^2 + k^2}\theta, \tag{5}$$

$$\theta'' = \frac{-gk - h\omega i}{h^2 + k^2}\theta. \tag{6}$$

Подставляя найденные выражения в первое из уравнений (β), получим

$$\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{-g\frac{dg}{dt}}{h^2 + k^2} + \frac{rk + qh}{h^2 + k^2}\omega i,$$

$$\log\theta = \frac{1}{2}\log(h^2 + k^2) + \omega i\int\frac{qh + rk}{h^2 + k^2}dt + \text{const}. \tag{7}$$

Равенства (5), (6) и (7) представляют частный интеграл системы уравнений (β); для получения ещё одного частного интеграла достаточно всюду заменить $\sqrt{-1}$ через $-\sqrt{-1}$. Затем с помощью найденных трёх интегралов легко построить выражения для функций α, β, ..., γ''.

Геометрический смысл всякого действительного интеграла системы (β) заключается в том, что после умножения на общий множитель, он даёт косинусы углов, которые в момент времени t оси ξ, η, ζ образуют с некоторой прямой. Эта прямая для первого из трёх найденных интегралов является нормалью к неизменной плоскости всей движущейся массы, а для действительных и мнимых частей двух других интегралов соответствующие прямые перпендикулярны между собою и лежат в упомянутой плоскости. Итак, косинусы углов между осями и нормалью к этой плоскости суть $\frac{g}{\omega}$, $\frac{h}{\omega}$, $\frac{k}{\omega}$; таким образом, положение осей относительно нормали выясняется после решения системы (α) без дальнейшей интеграции, и для окончательного определения их положения достаточно одной квадратуры, например, $\omega\int\limits_0^t\frac{qh - rk}{h^2 + k^2}dt$, с помощью которой устанавливается угол вращения около нормали плоскости, проходящей через нормаль и ось ξ.

Аналогичное справедливо также и относительно системы уравнений (γ). Мы получаем из двух интегралов

$$\theta_i^2 + \theta_i'^2 + \theta_i''^2 = \text{const}. \tag{VI}$$

$$\theta_i g_i + \theta_i' h_i + \theta_i'' k_i = \text{const}. \tag{VII}$$

её общее решение и, следовательно, значения величин α_i, β_i, ..., γ_i'' в момент t, причём для всего этого нужна одна квадратура. В итоге из данных выше [§ 1, (1) и (4)] выражений для величин x, y, z и функций l, m, ..., n'' выводится положение любой частицы жидкости в произвольный момент времени.

5

Отдадим себе теперь отчёт в том, что выигрывается для задачи интеграции в результате сведения системы дифференциальных уравнений для величин l, m, ..., n'' (система (a) § 1 у Дирихле) к нашей дифференциальной системе. Система (a) — шестнадцатого порядка, причём известно семь её интегралов первого порядка, так что порядок системы понижается до девяти. Система (α) — всего лишь десятого порядка, притом известно три её интеграла первого порядка. Благодаря произведенному нами преобразованию дифференциальной системы, порядок получающейся в итоге системы понижается на две единицы, зато приходится выполнить две лишние квадратуры. Таким образом, наше преобразование равноценно нахождению двух интегралов первого порядка.

Необходимо, между прочим, заметить, что преимущества, возникающие из указанного только что обстоятельства, касаются лишь интеграции дифференциальной системы и действительного вычисления движения. Для общего исследования этого движения эта форма системы, напротив, менее приспособлена — не только потому, что вывод её менее прост, а также ещё и потому, что требует особого рассмотрения случай равенства двух осей. Именно, в случае равенства двух осей положение их не вполне определяется формой движущейся массы; оно зависит от состояния движения в данный момент и остаётся произвольным лишь в том случае, если равенство осей сохраняется на протяжении некоторого промежутка времени. Рассмотрение последнего случая, правда, никогда не представляет затруднения и не связано с существенным изменением рассуждений; однако, в некоторых специальных случаях здесь приходится прибегать к особым приёмам, и общие исследования, например, общее доказательство возможности движения, вследствие необходимости различения ряда случаев, стали бы весьма растянутыми.

Прежде чем перейти к рассмотрению частных случаев, когда дифференциальная система (α) допускает интеграцию, целесообразно заметить, что, как это ясно из самой формы уравнений, во всяком решении системы допустимы такие изменения знаков при функциях u, v, ..., w', при которых не изменяется знак произведений uvw, $uv'w'$, $u'vw'$, $u'v'w$. Поэтому можно, во-первых, одновременно изменить знак у функций u', v', w', и тогда величины α, β, ..., γ'' переставляются с величинами $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, ..., $\gamma_{,}''$, так что в системе величин l, m, ..., n'' горизонтали заменяются вертикалями. Во-вторых, можно изменить знаки у величин, входящих в какие-либо две пары, из числа следующих: u, u'; v, v'; w, w'; такое изменение сводится к изменению направления одной из координатных осей, причём рассматриваемое движение переходит в движение симметричное. В этом замечании — сущность открытого Дедекиндом закона взаимности.

6

Займёмся теперь случаем, когда величины одной из пар u, u'; v, v'; w, w' постоянно равны нулю, например, $u = u' = 0$. Геометрически это означает, что главная ось всегда находится в неизменной плоскости движущейся массы, а мгновенная ось вращения перпендикулярна к этой оси.

Из шести последних дифференциальных уравнений системы (α) следует тогда, что величины

$$(c-a)^2v,\quad (c+a)^2v',\quad (a-b)^2w,\quad (a+b)^2w' \tag{μ}$$

постоянны, и должны иметь место соотношения

$$\left.\begin{aligned}(b+c-2a)vw+(b+c+2a)v'w'&=0\\ (b-c+2a)vw'+(b-c-2a)v'w&=0.\end{aligned}\right\} \tag{ν}$$

При дальнейшем исследовании нужно будет различать, обращается ли в нуль ещё какая-либо вторая пара величин. Здесь же уместно ещё одно замечание общего характера: вследствие (μ) величины h, k, $h_{\prime}$, $k_{\prime}$ постоянны, и значит, таковы же углы между главными осями и неизменной плоскостью движущейся массы; кроме того, из уравнений (β) и (γ) следуют пропорции

$$g : h : k = p : q : r$$
$$g_{\prime} : h_{\prime} : k_{\prime} = p_{\prime} : q_{\prime} : r_{\prime},$$

в зависимости от чего интегрирование этих уравнений упрощается.

Первый случай. Только одна из пар u, u'; v, v'; w, w' обращается в нуль.

Если не обращаются в нуль одновременно ни величины v и v', ни величины w и w', то из (μ) и (ν) следует:

$$\begin{aligned}\frac{v'^2}{v^2}&=\frac{(2a-b-c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a-b+c)}=\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^4\text{const.}\\ \frac{w'^2}{w^2}&=\frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4\text{const.},\end{aligned} \tag{1}$$

откуда, с помощью соотношения

$$abc=\text{const.},$$

заключаем, что величины a, b, c, а потому также и v, v', w, w' — постоянны.

Положив далее

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{(2a+b+c)(2a-b+c)}&=\frac{v'^2}{(2a-b-c)(2a+b-c)}=S,\\ \frac{w^2}{(2a+b+c)(2a+b-c)}&=\frac{w'^2}{(2a-b-c)(2a-b+c)}=T,\end{aligned} \tag{2}$$

мы из трёх первых уравнений системы (α) получим:

$$(4a^2-b^2-3c^2)S+(4a^2-3b^2-c^2)T=\frac{\varepsilon A}{2}-\frac{\sigma}{2a^2} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}(b^2-c^2)T&=\frac{\varepsilon B}{2}-\frac{\sigma}{2b^2}\\ (c^2-b^2)S&=\frac{\varepsilon C}{2}-\frac{\sigma}{2c^2}\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Чтобы отсюда получить значения S, T и σ, составим сначала из (4) равенства

$$b^2T+c^2S=\frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty\frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)(c^2+s)},$$

$$T+S=\frac{\sigma}{2b^2c^2}-\frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Delta(b^2+s)(c^2+s)},$$

и подставим то, что получилось, в уравнение (3)

$$(4a^2-b^2-c^2)(T+S)-2(b^2T+c^2S)=\frac{\varepsilon A}{2}-\frac{\sigma}{2a^2},$$

после чего будем иметь:

$$\frac{D\sigma}{2a^2b^2c^2}=\frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\left(\frac{2s+4a^2-b^2-c^2}{(b^2+s)(c^2+s)}+\frac{1}{a^2+s}\right), \tag{5}$$

причём для сокращения положено

$$4a^4-a^2(b^2+c^2)+b^2c^2=D. \tag{6}$$

Подставляя значение σ в уравнения (4), получим:

$$\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}DS=\frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty\frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)}\left(\frac{4a^2-c^2+b^2}{c^2+s}-\frac{b^2}{a^2+s}\right), \tag{7}$$

$$\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}DT=\frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty\frac{s\,ds}{\Delta(c^2+s)}\left(\frac{4a^2-b^2+c^2}{b^2+s}-\frac{c^2}{a^2+s}\right). \tag{8}$$

Нужно теперь ещё выяснить, каким условиям должны быть подчинены a, b, c, чтобы из соотношений (7) и (8) и уравнений (2) получились действительные значения для v, v', w, w'.

Чтобы $\left(\frac{v'}{v}\right)^2$ и $\left(\frac{w'}{w}\right)^2$ не были отрицательны, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$(4a^2-(b+c)^2)(4a^2-(b-c)^2)\geqslant 0.$$

Поэтому a^2 должно быть или $\geqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ или $\leqslant\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$.

Если $a \geqslant \frac{b+c}{2}$, то обе величины S и T должны быть $\geqslant 0$, чтобы уравнения (2) давали действительные значения для v, v', w, w'. Легко убедиться, что, если $a \geqslant \frac{b+c}{2}$, то D и оба интеграла в правой части равенств (7) и (8) — положительные. Для этого достаточно D представить в виде

$$a^2(4a^2-(b+c)^2)+bc(2a^2+bc),$$

а интеграл из формулы (7) — в виде

$$\frac{\varepsilon\pi}{2a^2b^2c^2}\int\limits_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3}((4a^2-c^2)s+a^2(4a^2+b^2-c^2)-b^2c^2),$$

и затем обратить внимание, что из $a \geqslant \frac{b+c}{2}$ следуют неравенства: $4a^2-(b+c)^2 \geqslant 0$, $4a^2-c^2>0$ и далее

$$4a^2+b^2-c^2 \geqslant (b+c)^2+b^2-c^2=2b(b+c),$$

так что

$$a^2(4a^2+b^2-c^2) \geqslant 2b(b+c)a^2 \geqslant \frac{1}{2}b(b+c)^3>b^2c^2.$$

Из этих неравенств вытекает, что как D, так и рассматриваемый интеграл являются суммами положительных слагаемых; то же справедливо и относительно интеграла в правой части (8), который получается из предыдущего посредством перестановки b и c. Если a пробегает все значения от $\frac{b+c}{2}$ до ∞, то, при условии $b>c$, T остаётся всегда положительным, а S — лишь покуда $a<b$. Итак, интересующие нас условия в этом случае имеют вид

$$\frac{b+c}{2} \leqslant a \leqslant b, \tag{I}$$

где через b обозначена наибольшая из полуосей b и c.

При рассмотрении второго случая, когда $a^2 \leqslant \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$, мы также допустим, что b есть наибольшая из двух полуосей b и c; тогда $a \leqslant \frac{b-c}{2}$. Чтобы v, v', w, w' были действительными, нужно, чтобы было $S \leqslant 0$, $T \geqslant 0$. Так как из неравенств

$$b^2 \geqslant (2a+c)^2>4a^2+c^2$$

вытекает, что интеграл в правой части (8) в рассматриваемом случае отрицателен, то условие $T \geqslant 0$ будет выполнено лишь в том случае, если $D(c^2-a^2) \geqslant 0$, так что или $c^2<\frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2}$ или $\geqslant a^2$. Этот случай, таким образом, распадается на два подслучая, которые, однако, не являются «смежными» — в том смысле, что, поскольку $\frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2} < a^2$, от одного подслучая к другому не имеется непрерывного перехода. Так как интеграл в формуле (7), если $c^2 \leqslant a^2$, вследствие неравенств $c^2+s \leqslant a^2+s$, $4a^2-c^2+b^2 > b^2$, может быть только положительным, то в первом подслучае интересующие нас условия сводятся к неравенству $a \leqslant \frac{b-c}{2}$, или

$$c \leqslant b-2a \quad \text{и} \quad c^2 < \frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2}, \tag{II}$$

а во втором к неравенствам

$$a \leqslant \frac{b-c}{2} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(b^2+c)}\left(\frac{4a^2-c^2+b^2}{c^2+s}-\frac{b^2}{a^2+s}\right) \leqslant 0. \tag{III}$$

Легко понять, что, когда a пробегает значения от 0 до c, интеграл в последнем неравенстве остаётся отрицательным, покуда $a \leqslant \frac{c}{2}$, но при $a=c$ он уже имеет положительное значение. Точное определение границы значений a, для которых выполняется это неравенство, связано, очевидно, с решением трансцендентного уравнения.

Что касается знака σ, от которого, как известно, зависит, возможно ли движение при отсутствии внешнего давления, то мы заметим, что найденному значению этой величины можно дать форму

$$\frac{\varepsilon\pi}{D}\int\limits_0^\infty \frac{3s^2+6a^2s+D}{\Delta^3}\,ds;$$

поэтому в случаях I и III, когда $D>0$, σ непременно положительно, а в случае, когда $D<0$, то же справедливо по меньшей мере для значений D, по абсолютному значению не превосходящих некоторой границы.

7

Второй случай. Две пары u, u'; v, v'; w, w' обращаются одновременно в нуль.

Нам нужно теперь рассмотреть ещё случай, когда на протяжении некоторого промежутка времени обращаются в нуль две пары величин u, u'; v, v'; w, w', так что вращение происходит лишь около одной из главных осей.

Пусть обращаются в нуль величины u и u', v и v'; тогда условия (μ) и (ν) принимают вид:

$$(a-b)^2 w = \text{const.} = \tau, \quad (a+b)^2 w' = \text{const.} = \tau',$$

а три первых уравнения системы (α) нам дают:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{(a-b)^3}+\frac{\tau'^2}{(a+b)^3}-\frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2}&=\varepsilon aA-\frac{\sigma}{a},\\ \frac{\tau^2}{(b-a)^3}+\frac{\tau'^2}{(b+a)^3}-\frac{1}{2}\frac{d^2b}{dt^2}&=\varepsilon bB-\frac{\sigma}{b},\\ -\frac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2}&=\varepsilon cC-\frac{\sigma}{c}. \end{aligned} \tag{1}$$

Совместно с уравнением $abc=a_0b_0c_0$ уравнения (1) позволяют вычислить a, b, c и σ как функции времени. Принцип сохранения живой силы даёт интеграл первого порядка

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right)+\frac{\tau^2}{(a-b)^2}+\frac{\tau'^2}{(a+b)^2}=2\varepsilon H+\text{const.},\tag{2}$$

и отсюда немедленно следует, что, если τ не равно нулю, то главные полуоси a и b никогда не могут сделаться равными.

Кроме случая $a=b$, рассмотренного уже Маклореном и Дирихле, определение движения в замкнутой форме возможно ещё в том случае, если a, b, c постоянны. В этом случае исключение σ из уравнений (1) нам даёт:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tau'^2}{(b+a)^3}+\frac{\tau^2}{(b-a)^3}&=\frac{\varepsilon\pi}{b}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\frac{(b^2-c^2)s}{(b^2+s)(c^2+s)}=K,\\ \frac{\tau'^2}{(b+a)^3}-\frac{\tau^2}{(b-a)^3}&=\frac{\varepsilon\pi}{a}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\frac{(a^2-c^2)s}{(a^2+s)(c^2+s)}=L \end{aligned}\right\}\tag{3}$$

(K и L — значения интегралов в правой части).

Последним соотношениям можно придать вид:

$$u'^2=\frac{\tau'^2}{(b+a)^4}=\frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\left(\frac{s+ab}{(a^2+s)(b^2+s)}-\frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right),\tag{4}$$

$$u^2=\frac{\tau^2}{(b-a)^4}=\frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\left(\frac{s-ab}{(a^2+s)(b^2+s)}+\frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right).\tag{5}$$

Если допустим, подобно тому, как это делали раньше, что b обозначает наибольшую из осей a и b, то два последних уравнения в том и только в том случае дают для τ^2 и τ'^2 положительные значения, если K положительно и по абсолютному значению больше, чем L; и ясно, что первое из этих условий выполняется при $c<b$. Что касается второго, то оно выполняется, если c принимает значение a и, следовательно, $L=0$, а значит, поскольку K и L зависят от c непрерывно — выполняется и в некотором конечном промежутке, окружающем это значение. Однако, этот промежуток не простирается до значений b и 0: в самом

деле, при $c=b$ делается отрицательным τ'^2, а при бесконечно малых значениях c делается отрицательным τ^2, так как в этом случае

$$\frac{K}{c}=\varepsilon\pi\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{b^2}{a^2}s\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{L}{c}=\varepsilon\pi\int\limits_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{a^2}{b^2}s\right)^{\frac{1}{2}}},$$

и следовательно, $L>K$. Если b неограниченно возрастает, тогда как a и c остаются конечными, то L лишь в том случае будет меньше, чем K, если одновременно a^2-c^2 неограниченно убывает; две границы для c в этом случае будут бесконечно мало отличаться от a. Если, напротив, b будет бесконечно мало отличаться от своей нижней границы a, то верхняя граница c, где $\tau'^2=0$, будет приближаться к a, а нижняя граница — к значению, при котором обращается в нуль интеграл в формуле (5). Для определения этого значения, полагая $\frac{c}{a}=\sin\psi$, получим уравнение

$$(-5+2\cos 2\psi+\cos 4\psi)(\pi-2\psi)+10\sin 2\psi+2\sin 4\psi=0;$$

это последнее имеет корень между $\psi=0$ и $\psi=\frac{\pi}{2}$, которому соответствует

$$\frac{c}{a}=0{,}303327\ldots.$$

При $b=a$, как легко понять, c может иметь любое значение между 0 и b, так как тогда из-за множителя $b-a$ величина τ^2 обращается в нуль. Здесь получается случай, исследованный Маклореном, тогда как при $w^2=w'^2$ мы имеем два случая, открытых Якоби и Дедекиндом.

При $b=a$ только что рассмотренный случай совпадает со случаем (I) предыдущего параграфа, а при условии

$$\frac{w^2}{(b+c+2a)(b-c+2a)}=\frac{w'^2}{(b+c-2a)(b-c-2a)}$$

— со случаем (III). Таким образом, из четырёх в настоящее время известных случаев, в которых жидкий эллипсоид при движении может не изменять своей формы, эти три случая связаны между собою непрерывно, тогда как случай (II) стоит изолированно.

8

Исследование того, существуют ли, кроме рассмотренных четырёх, ещё иные случаи, когда оси при движении остаются постоянными, ведёт к довольно длинным вычислениям, которые мы укажем лишь вкратце, так как результат их оказывается отрицательным.

Из допущения, что a, b, c — постоянные, можно легко вывести заключение, что σ постоянно: для этого достаточно сложить, умножив предварительно на a, b, c, три первых из дифференциальных уравнений (α), и затем воспользоваться уравнением (I) § 4, т. е. интегралом живой силы.

Продифференцировав эти самые три уравнения, мы получаем, после подстановки значений $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv'}{dt}$, ..., $\frac{dw'}{dt}$, взятых из шести последних дифференциальных уравнений (α), следующие три соотношения, из которых каждое есть следствие остальных:

$$\left.\begin{aligned}(b-c)\,u\,(vw-v'w')+(b+c)\,u'\,(v'w-vw')=0,\\(c-a)\,v\,(wu-w'u')+(c+a)\,v'\,(w'u-wu')=0,\\(a-b)\,w\,(uv-u'v')+(a+b)\,w'\,(u'v-uv')=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

I. Если ни одна из шести величин u, u', ..., w' не обращается в нуль, то из предыдущих соотношений вытекают три следующих равенства между величинами, значения которых мы обозначим через $2a'$, $2b'$, $2c'$:

$$(a-c)\frac{v}{v'}+(a+c)\frac{v'}{v}=(a-b)\frac{w}{w'}+(a+b)\frac{w'}{w}=2a',$$

$$(b-a)\frac{w}{w'}+(b+a)\frac{w'}{w}=(b-c)\frac{u}{u'}+(b+c)\frac{u'}{u}=2b',$$

$$(c-b)\frac{u}{u'}+(c+b)\frac{u'}{u}=(c-a)\frac{v}{v'}+(c+a)\frac{v'}{v}=2c'.$$

Тогда получается $a'^2-b'^2=a^2-b^2$, $b'^2-c'^2=b^2-c^2$, так что мы можем положить:

$$aa-a'a'=bb-b'b'=cc-c'c'=\theta,$$

и из трёх первых уравнений дифференциальной системы (α) следует:

$$2\pi a'=\text{const.},\quad 2\chi b'=\text{const.},\quad 2\rho c'=\text{const.},$$

где величины $vv'+ww'$, $ww'+uu'$, $uu'+vv'$ для сокращения обозначены через π, χ, ρ. Из этих равенств и равенства

$$(a^2-b^2)(a^2-c^2)\pi+(b^2-a^2)(b^2-c^2)\chi+(c^2-a^2)(c^2-b^2)\rho=$$
$$=\frac{1}{4}(\omega^2-\omega_{,}^2),$$

которое легко вывести из интегралов II и III, следует, если не выполнено равенство $a=b=c$, что θ и, следовательно, u, u', ..., w' должны быть постоянными. Но тогда обнаруживается без труда, что шесть последних дифференциальных уравнений (α) не могут быть выполнены, и этим доказана, в предположении, что все оси не равны между собою, невозможность допущения, что все величины u, u', ..., w' отличны от нуля.

Предполагая, что $a = b = c$, мы пришли бы к случаю покоящейся сферы; тогда оказалось бы, что u', v', w' все $= 0$, а u, v, w остались бы совершенно произвольными: это связано с тем, что в любой момент направление осей могло бы быть выбираемо, как угодно.

II. Остаётся только принять, что одна из величин u, u', ..., w' равна нулю: мы сейчас покажем, что отсюда следует ранее рассмотренное допущение, что обращается в нуль одна из пар u, u'; v, v'; w, w'.

1. Если равна нулю одна из величин u', v', w', например, $u' = 0$, то с помощью равенств (1) приходим к заключению

$$(b - c)\, uvw = 0, \quad (b - c)\, uv'w' = 0,$$

откуда следует одно из трёх допущений: во-первых, ранее рассмотренное, во-вторых, $b = c$, в-третьих, $v = 0$ и $w' = 0$, или $v' = 0$ и $w = 0$ (что не представляет существенного различия).

Если $b = c$, то u остаётся совершенно произвольным, так что можно принять, что оно $= 0$, и тогда наступает ранее рассмотренный случай.

Если $v = 0$ и $w' = 0$, то из дифференциальных уравнений (α) следует:

$$(b - c - 2a)\, uv'w = 0, \quad (c + a - 2b)\, uv'w = 0, \quad (a - b + 2c)\, uv'w = 0.$$

Складывая первое из этих равенств с третьим, получим:

$$-(a + b)\, uv'w = 0;$$

значит, кроме величин u', v, w', должна обращаться в нуль ещё одна из величин u, v', w, и мы снова пришли к рассмотренному случаю.

2. Наконец, если обращается в нуль одна из величин u, v, w, например, $u = 0$, то из равенств (1) вытекает

$$u'v'w' = 0, \quad u'vw' = 0,$$

и это приводит или к ранее рассмотренному допущению, или к допущению $u = v' = w' = 0$, которое существенно не отлично от только что разобранного $u' = v = w' = 0$, или, наконец, к допущению $u = v = w = 0$. Но, сделав это последнее предположение, мы из уравнений (α) получаем $v'w' = w'u' = u'v' = 0$, и тогда ясно, что ещё две из величин u', v', w' равны нулю, что опять-таки приводит к рассмотренному случаю.

Мы видим, таким образом, что с постоянством формы неизбежно связано постоянство движения: другими словами, всякий раз, как жидкая масса длительно образует одно и то же тело, относительное движение всех частиц этого тела остаётся неизменным. Абсолютное движение в пространстве можно в этом случае представлять себе составленным из двух более простых движений: во-первых, внутреннего движения жидкой массы, при котором каждая частица описывает подобные эллипсы, расположенные в параллельных плоскостях, перпендикулярных к одному из главных осевых сечений, и, во-вторых, равномерного вращения всей системы в целом около оси, лежащей в этом осевом сечении. Если предположим, как мы делали раньше, что это сечение перпендикулярно к оси a, то косинусы углов между осью вращения и главными осями равны 0, $\frac{h}{\omega}$, $\frac{k}{\omega}$, а период оборота $\frac{2\pi}{\sqrt{q^2+r^2}}$. Далее, числа 0, $b\frac{h}{\omega_{\prime}}$, $c\frac{k}{\omega_{\prime}}$ представляют собою отнесённые к главным осям координаты конца мгновенной оси вращения, и во внутреннем движении эллиптические пути частиц жидкости параллельны проведённой к эллипсоиду в этой точке касательной плоскости, так что центры этих эллиптических путей лежат на самой оси вращения. Частицы движутся по своим путям таким образом, что радиусы-векторы, проведённые в центр, в равные времена описывают равные площади и делают полный обход за время $\frac{2\pi}{\sqrt{q_{\prime}^2+r_{\prime}^2}}$.

9

Вернёмся теперь к рассмотрению движения жидкой массы в том случае, когда u, u', v, v' постоянно равны нулю, так что происходит вращение лишь около одной главной оси. Заметим прежде всего, что уравнениям (1) § 7, устанавливающим в этом случае закон изменения главных осей, можно дать иное, более наглядное механическое истолкование. Именно, их можно толковать, как уравнения движения материальной точки (a, b, c) с массой 1, которая вынуждена оставаться на поверхности $abc = \text{const.}$ и подвержена воздействию силы, для которой потенциальная функция равна величине

$$\frac{\tau^2}{(a-b)^2}+\frac{\tau'^2}{(a+b)^2}-2\varepsilon H,$$

взятой с обратным знаком.

Если обозначим эту величину через G, то уравнениям движения в обоих толкованиях можно придать форму

$$\frac{d^2a}{dt^2}\,\delta a+\frac{d^2b}{dt^2}\,\delta b+\frac{d^2c}{dt^2}\,\delta c+\delta G=0 \tag{1}$$

для всех бесконечно малых значений δa, δb, δc, которые удовлетворяют условию $abc = \text{const.}$, и теорема о живой силе даёт соотношение

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right)+G=\text{const.},$$

которое можно истолковать в том смысле, что часть энергии движения жидкой массы, не зависящая от изменения формы образуемого ею эллипсоида, равна G.

Для того чтобы a, b, c были постоянными, и следовательно, форма и состояние движения жидкого эллипсоида оставались неизменными, если $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ обращаются в нуль, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы обращалась в нуль вариация первого порядка функции G переменных величин a, b, c, связанных между собою условием $abc = \text{const.}$; это приводит к уравнениям (3) или (4) и (5) § 7. Но постоянство движения, однако, не будет устойчивым, если функция при этом не достигает минимума: тогда можно указать бесконечно малые изменения состояния движения жидкой массы, которые будут иметь своим последствием полное изменение движения.

Непосредственное исследование вариации второго порядка функции G в случае, когда вариация первого порядка обращается в нуль, было бы очень запутанным делом; но вопрос о том, достигает ли функция в этом случае минимума, можно решить и следующим способом.

Прежде всего можно легко убедиться в том, что всегда, каковы бы ни были значения τ^2, τ'^2 и a, b, c, функция G должна непременно достигать минимума при некоторой системе значений независимых переменных. Это, очевидно, следует из трёх обстоятельств: во-первых, в предельном случае, когда оси бесконечно малы или бесконечно велики, функция стремится к пределу, который не отрицателен; во-вторых, можно указать значения a, b, c, при которых функция G отрицательна; в-третьих, G никогда не принимает бесконечно больших отрицательных значений. Эти три свойства функции G следуют из известных свойств функции H. Функция H принимает своё наибольшее значение в случае, когда жидкая масса принимает форму сферы, — именно, значение $2\pi\rho^2$, где ρ — радиус сферы, т. е. $\sqrt[3]{abc}$; далее, H становится бесконечно малой, когда одна из осей бесконечно велика, и, следовательно, по крайней мере, ещё одна из осей бесконечно мала, однако, таким образом, что, если, например, b неограниченно растёт, то Hb не становится бесконечно малым, и потому в функции G (если только одновременно a не растёт неограниченно) отрицательная часть в конце концов непременно перевешивает положительную.

Если τ^2 не равно нулю, то уже среди значений a, b, c, удовлетворяющих условию $b > a$, должна быть некоторая такая система, при которой функция достигает минимума: действительно, в этом случае три условия, из которых следует существование минимума, выполнены для указанной области, так как G также не отрицательно и в предельном случае $a = b$.

Дальше, можно поставить вопрос о числе решений тех уравнений (3) § 7, которые обусловливают обращение в нуль первой вариации. Это исследование не представляет труда: достаточно рассмотреть получающиеся из этих уравнений выражения для τ^2 и τ'^2 также при комплексных значениях переменных a, b, c. Однако, в настоящей работе мы не можем привести это исследование полностью и ограничимся тем, что сообщим его результаты, которыми в дальнейшем придётся воспользоваться.

Если τ^2 отлично от нуля, то уравнения (3) по обе стороны от $b=a$ допускают лишь одно решение; первая вариация обращается в нуль, таким образом, как по одну, так и по другую сторону этого уравнения только при одной системе значений переменных, и потому функция G должна здесь достигать минимума, который мы обозначим через G^*.

Если τ^2 равно нулю, то первая вариация обращается в нуль непременно при $b=a$ и при таком значении c, которое в случае $\tau'^2=0$ равняется a, а затем при возрастании τ'^2 постоянно убывает. Для этой системы значений вторую вариацию легко представить в виде комбинации из $(\delta a+\delta b)^2$ и $(\delta a-\delta b)^2$, и коэффициент при $(\delta a+\delta b)^2$ обязательно положительный, так как известно из предшествующих исследований, что именно здесь функция достигает наименьшего из всех значений, которые она принимает при $b=a$.

Что касается коэффициента при $(\delta a-\delta b)^2$, то он равен

$$\frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(\frac{s-ab}{(a^2+s)(b^2+s)}+\frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right),$$

и значит, положителен, если $\frac{c}{a}>0{,}303327\ldots$ и, следовательно,

$$\tau'^2<\varepsilon\pi\rho^4\cdot 8{,}64004\ldots;$$

и отрицателен, если $\frac{c}{a}$ превосходит указанное значение.

Итак, при рассматриваемой системе значений функция G лишь в первом случае имеет минимум (G^*), и исследование уравнений (3) показывает, что тогда первая вариация обращается в нуль только для этой системы значений; во втором же случае получается седловина: функция тогда непременно ещё при двух системах значений должна иметь минимум (G^*), и из исследования уравнений (3) вытекает, что первая вариация обращается в нуль ещё только при двух системах значений, которые переходят одна в другую при перестановке a и b.

Мы видим из нашего исследования, что в случае вращения сплюснутого эллипсоида вращения около его малой оси — случае, известном уже Маклорену, — постоянство движения перестаёт быть устойчивым, как только отношение малой оси к двум другим становится меньше, чем 0,303327...; при малейшем различии в длине двух других осей жидкая масса в этом случае совершенно изменила бы свою форму и состояние движения, и возникли бы беспрестанные колебания около того состояния, которое соответствует минимуму функции G. Это состояние заключается в равномерном вращении трёхосного эллипсоида около его наименьшей оси в соединении с одинаково направленным внутренним движением частиц по подобным друг другу и перпендикулярным к оси вращения эллипсам. При этом период обхода частицей всего эллипса совпадает с периодом вращения, так что каждая частица уже после одного полуоборота эллипсоида оказывается в исходном положении.

10

Если энергия системы

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{db}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)_0^2\right)+G_0=\Omega,$$

которая, очевидно, не может быть меньше G^*, отрицательна, то форма эллипсоида может колебаться лишь в пределах конечной области, определяемой неравенством $G\leqslant\Omega$.

Не представит труда исследовать эти колебания в том случае, если $\Omega-G^*$ может считаться бесконечно малым.

Если вообразим, что в функции G вместо c подставлено его значение, взятое из уравнения $abc=a_0b_0c_0$, то соотношение (1) предыдущего параграфа даёт нам:

$$\frac{d^2a}{dt^2}-\frac{c}{a}\frac{d^2c}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial a}=0,\qquad \frac{d^2b}{dt^2}-\frac{c}{b}\frac{d^2c}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial b}=0.$$

Значения a, b, c лишь бесконечно мало отличаются от тех значений, которые соответствуют минимуму G, и, если мы обозначим через δa, δb, δc отклонения в момент времени t и станем пренебрегать членами высших порядков, то получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{b}+\frac{\delta c}{c}&=0,\\ \frac{d^2\delta a}{dt^2}-\frac{c}{a}\frac{d^2\delta c}{dt^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial a^2}\delta a+\frac{\partial^2 G}{\partial a\,\partial b}\delta b&=0,\\ \frac{d^2\delta b}{dt^2}-\frac{c}{a}\frac{d^2\delta c}{dt^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial b^2}\delta b+\frac{\partial^2 G}{\partial a\,\partial b}\delta a&=0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

которые, как известно, будут удовлетворены, если положим $\frac{d^2\delta a}{dt^2}=-\mu\mu\delta a$, $\frac{d^2\delta b}{dt^2}=-\mu\mu\,\delta b$, и следовательно, $\frac{d^2\delta c}{dt^2}=-\mu\mu\,\delta c$, и затем подберём константу $\mu\mu$ таким образом, чтобы одно из соотношений (1) было следствием остальных. Последнее условие, налагаемое на $\mu\mu$, совпадает с условием, чтобы выражение второй степени относительно δa, δb

$$2\delta^2G-\mu\mu\,(\delta a^2+\delta b^2+\delta c^2)$$

было точным квадратом некоторого выражения, линейного относительно тех же величин; так как $\delta^2 G$ и $\delta^2 a+\delta^2 b+\delta c^2$ существенно положительны, то указанному требованию всегда удовлетворяют два действительных значения $\mu\mu$, которые совпадают между собою в том случае, если δ^2G и $\delta a^2+\delta b^2+\delta c^2$ отличаются только постоянным множителем. Эти два значения $\mu\mu$ дают два решения системы дифференциальных уравнений (1), причём δa, δb, δc оказываются периодическими функциями времени, а именно, пропорциональными выражениям вида $\sin(\mu t + \text{const.})$; из них составляется общее решение.

Каждое решение, будучи взято в отдельности, соответствует бесконечно малому колебанию формы и состояния движения. Отсюда, разумеется, можно сделать только то заключение, что имеется два типа колебаний, которые тем ближе к периодическим, чем они меньше по своим размерам; но существование конечных периодических колебаний может быть установлено следующим образом.

Если Ω отрицательно, то a непременно принимает одно и то же значение больше одного раза; если примем за начальный один из моментов, когда a принимает такое значение, то движение будет вполне определено начальными значениями $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ и b; значения, которые принимают эти величины в тот момент, когда a снова принимает начальное значение, являются, следовательно, функциями этих начальных значений. Обозначим эти функции совместно через χ. Движение будет периодическим, если значения χ будут равняться начальным значениям. Но вследствие равенства $abc = \text{const.}$ и теоремы живых сил, когда b и $\frac{da}{dt}$ принимают снова свои начальные значения, c, $\frac{db}{dt}$ и $\frac{dc}{dt}$ также примут свои начальные значения. Таким образом, нужно, чтобы было выполнено лишь два условия, и, составляя производные от функций χ для случая бесконечно малых колебаний, можно показать, что рассматриваемые уравнения друг другу не противоречат и допускают действительное решение в конечной области.

Для интересующего нас случая периодических колебаний величины a, b, c, как функции времени, могут быть представлены в виде рядов Фурье, все коэффициенты которых (за исключением случая, разобранного Дирихле) вычисляются лишь приближённо. Вычисление можно осуществить, например, распространяя на члены высших порядков разложения, с которыми мы имели дело в случае бесконечно малых колебаний.

Нам казалось не излишним подвергнуть по крайней мере поверхностному рассмотрению эти движения, которые в смысле простоты непосредственно следуют за движениями, при которых форма и состояние движения остаются неизменными. Теперь мы перейдём к обобщению исследования, проведённого в предыдущем параграфе для случая, когда вращение совершается лишь около одной оси, — на общий случай движений, удовлетворяющих допущениям Дирихле.

11

С этой целью мы прежде всего приведём уравнения (α) к более легко обозримому виду: для этого вместо величин u, v, ..., w' введём величины g, h, ..., k, и при этом обобщим определение G, понимая теперь под этим обозначением выражение

$$\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{g+g_{,}}{b-c}\right)^2+\left(\frac{h+h_{,}}{c-a}\right)^2+\left(\frac{k+k_{,}}{a-b}\right)^2+\\ +\left(\frac{g-g_{,}}{b+c}\right)^2+\left(\frac{h-h_{,}}{c+a}\right)^2+\left(\frac{k-k_{,}}{a+b}\right)^2\end{array}\right\}-$$

$$-2\,\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{a_0b_0c_0ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},$$

которое представляет, как и раньше, часть энергии, не зависящую от изменения формы жидкой массы.

В таком случае будем иметь:

$$p=\frac{\partial G}{\partial g},\quad q=\frac{\partial G}{\partial h},\quad r=\frac{\partial G}{\partial k},$$

$$p_{,}=\frac{\partial G}{\partial g_{,}},\quad q_{,}=\frac{\partial G}{\partial h_{,}},\quad r_{,}=\frac{\partial G}{\partial k_{,}},$$

так что последние шесть уравнений (α) могут быть переписаны в форме

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{dg}{dt}=h\frac{\partial G}{\partial k}-k\frac{\partial G}{\partial h}, & \frac{dg_{,}}{dt}=h_{,}\frac{\partial G}{\partial k_{,}}-k_{,}\frac{\partial G}{\partial h_{,}},\\ \frac{dh}{dt}=k\frac{\partial G}{\partial g}-q\frac{\partial G}{\partial k}, & \frac{dh_{,}}{dt}=k_{,}\frac{\partial G}{\partial g_{,}}-q_{,}\frac{\partial G}{\partial k_{,}},\\ \frac{dk}{dt}=g\frac{\partial G}{\partial h}-h\frac{\partial G}{\partial g}, & \frac{dk_{,}}{dt}=q_{,}\frac{\partial G}{\partial h_{,}}-h_{,}\frac{\partial G}{\partial g_{,}},\end{array}\right\}\qquad(1)$$

тогда, как три первых принимают вид

$$\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial a}-2\,\frac{\sigma}{a}=0,\quad \frac{d^2b}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial b}-2\,\frac{\sigma}{b}=0,\quad \frac{d^2c}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial c}-2\,\frac{\sigma}{c}=0.\quad(2)$$

Заметим вместе с тем, что из интеграла II в случае, если $\omega=0$, получается сразу три интеграла $g=0$, $h=0$, $k=0$, т. е. величины g, h, k остаются постоянно равными нулю, если они равны нулю в начальный момент. Разумеется, то же справедливо и по поводу величин $g_{,}$, $h_{,}$, $k_{,}$.

Из дифференциальных уравнений (1) и (2) легко видно, что обращение в нуль первой вариации функции G девяти переменных a, b, $\ldots$, $k_{,}$, связанных тремя условиями

$$abc=\text{const.},\quad g^2+h^2+k^2=\omega^2,\quad g_{,}^2+h_{,}^2+k_{,}^2=\omega_{,}^2,$$

необходимо и достаточно для того, чтобы

$$\frac{d^2a}{dt^2},\ \frac{d^2b}{dt^2},\ \frac{d^2c}{dt^2},\ \frac{dg}{dt},\ \ldots,\frac{dk_{,}}{dt}$$

обратились в нуль, и, следовательно, форма и состояние движения эллипсоида оставались неизменными, раз только $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ равны нулю. Все случаи, когда это возможно, мы выше разобрали полностью. Здесь также получается очень просто, что функция G по крайней мере для одной системы значений независимых переменных достигает минимума, так как в предельном случае, когда оси бесконечно велики или бесконечно малы, она стремится к конечному пределу, который не отрицателен, и как мы уже видели при каких-то значениях переменных сама становится отрицательной, причём никогда не становится отрицательной и бесконечно большой. Для того состояния движения, которое соответствует минимуму, из теоремы о сохранении живой силы вытекает, что всякое бесконечно малое отклонение от него, удовлетворяющее предположениям Дирихле, вызывает лишь бесконечно малые колебания, тогда как во всяком другом случае постоянство формы и состояния движения неустойчивы. Определение соответствующего минимуму G состояния движения существенно не только ради определения возможных устойчивых форм движущихся жидких и притом тяжёлых масс, но и должно служить основой при интегрировании наших уравнений посредством бесконечных рядов; поэтому мы займёмся теперь вопросом о том, в каких случаях при обращении в нуль первой вариации функция G имеет минимум. Из каждого ранее рассмотренного случая, когда эллипсоид сохраняет свою форму, получается путём перестановок между осями и изменения знаков величин $g, h, \ldots, k_{,}$ большое число систем значений величин $a, b, \ldots, k_{,}$, при которых обеспечивается обращение в нуль первой вариации функции G; здесь будет уместно их сопоставить и объединить, так как функция G во всех случаях — одна и та же, и исследование удобно вести для всех случаев параллельно.

Предварительно заметим, что значительные упрощения наступают, если ω или $\omega_{,}$ обращается в нуль, так как тогда g, h, k или $g_{,}$, $h_{,}$, $k_{,}$ вовсе выпадают из функции G. В предшествующем исследовании постоянных состояний движения мы повстречались с двумя существенно различными случаями, когда одна из этих величин равна нулю. В случае, рассмотренном в § 6, это может осуществиться лишь при условии

$$\frac{w'^2}{w^2} = \frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4,$$

т. е. при условии, что выражение

$$b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - 3a^4, \tag{3}$$

которое мы обозначим через E, равно нулю; и обратно, при этом условии ω или $\omega_{,}$ равно нулю. Но равенство $E = 0$, будучи рассматриваемо как уравнение относительно a, имеет только один положительный корень, заключённый между $\frac{b+c}{2}$ и b, и потому может быть выполнено лишь в случае (1). Другой случай, когда ω или $\omega_{,}$ равно нулю, встретился в § 7 и соответствует предположению $\tau^2 = \tau'^2$.

Убедимся теперь, что в случаях I, II и III функция G не может достигать минимума, и именно потому, что, оставляя a, b, c неизменными, можно всегда так изменить g, h, ..., $k_{,}$, что значение функции уменьшится. Так как g и $g_{,}$ равны нулю, а h, $h_{,}$, k, $k_{,}$, за исключением случая $E = 0$, нулю не равны, то между вариациями этих величин имеют место соотношения

$$\delta g^2 + 2h\,\delta h + 2k\,\delta k = 0, \qquad \delta g_{,}^2 + 2h_{,}\delta h_{,} + 2k_{,}\,\delta k_{,} = 0,$$

и вариация g становится равной

$$\frac{1}{4}\left(\left(\frac{\delta g + \delta g_{,}}{b - c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g_{,}}{b + c}\right)^2\right) + \frac{\partial G}{\partial h}\delta h + \frac{\partial G}{\partial k}\delta k + \frac{\partial G}{\partial h_{,}}\delta h_{,} + \frac{\partial G}{\partial k_{,}}\delta k_{,},$$

так что, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial G}{\partial h} : \frac{\partial G}{\partial k} = h : k, \qquad \frac{\partial G}{\partial h_{,}} : \frac{\partial G}{\partial k_{,}} = h_{,} : k_{,},$$

будем иметь:

$$\delta G = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\delta g + \delta g_{,}}{b - c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g_{,}}{b + c}\right)^2\right) - \frac{1}{2h}\frac{\partial G}{\partial h}\delta g^2 - \frac{1}{2h_{,}}\frac{\partial G}{\partial h_{,}}\delta g_{,}^2. \tag{4}$$

Если составим детерминант этого выражения второго порядка относительно δg и $\delta g_{,}$ и подставим в него получающиеся из § 6 (1) значения

$$\begin{aligned} \frac{2h}{q} &= b^2 + c^2 - 2a^2 \pm \sqrt{(4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)}, \\ \frac{2h_{,}}{q_{,}} &= b^2 + c^2 - 2a^2 \mp \sqrt{(4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)}, \end{aligned} \tag{5}$$

откуда следует $\dfrac{hh_{,}}{qq_{,}} = E$, то этот детерминант окажется равным

$$\frac{3\,(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{4E\,(b^2 - c^2)^2}.$$

Он положителен в случае (I), если $E < 0$, и в случае (III); отрицателен в случае (I), если $E > 0$, и в случае (II). Итак, в двух первых случаях выражение (4) может принимать как положительные, так и отрицательные значения, а в двух остальных только или положительные или отрицательные. Но при $\delta g_{,} = -\delta g$ оно принимает значение

$$\delta g^2\left(\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2E}\right),$$

которое при предположениях, сделанных в этих случаях, всегда отрицательно, так как может быть переписано в форме

$$-\frac{(b^2 + c^2 - 2a^2)(b^2 + 4bc + c^2 + 2a^2) + (4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)}{4\,(b+c)^2\,E}\,\delta g^2,$$

причём $b^2 + c^2 - 2a^2$ всегда положительно, если только $E \geqslant 0$.

Если одна из величин ω или $\omega_{,}$ равна нулю, например, $\omega_{,}=0$, то $\delta g_{,}$, $\delta h_{,}$, $\delta k_{,}$ связаны условием

$$\delta g_{,}^{2}+\delta h_{,}^{2}+\delta k_{,}^{2}=0;$$

следовательно, выражение для вариации G принимает вид:

$$\delta G=\frac{1}{2}\left(\frac{b^{2}+c^{2}}{(b^{2}-c^{2})^{2}}-\frac{q}{h}\right)\delta g^{2},$$

и тогда, если принять во внимание, что $\frac{2h_{,}}{q_{,}}=0$, из (5) получается:

$$\frac{h}{q}=b^{2}+c^{2}-2a^{2}.$$

Подстановка этого значения даёт:

$$\delta G=-\frac{(b^{2}+c^{2})(4a^{2}-(b+c)^{2})+(b-c)^{2}(b^{2}+4bc+c^{2})}{4(b^{2}-c^{2})(b^{2}+c^{2}-2a^{2})}\,\delta g^{2},$$

и это выражение, очевидно, отрицательное, так как $b^{2}+c^{2}-2a^{2}$ и $4a^{2}-(b+c)^{2}$ теперь положительны.

Итак, во всех рассмотренных случаях функция G не достигает наименьшего значения, и нам остаётся ещё разобрать с этой точки зрения случай, рассмотренный в § 7, причём можно вовсе оставить в стороне тот особенный случай, когда $b=a$ и $\tau'^{2}>\varepsilon\pi\rho^{4}\cdot 8{,}64004\ldots$ Если одна из величин ω^{2} или $\omega_{,}^{2}$ равна нулю, то при любом данном значении другой величины этот случай даёт лишь одно постоянное состояние движения, для которого $\tau^{2}=\tau'^{2}$, и функция G должна для него достигать минимума. Но при каких-либо отличных от нуля значениях ω^{2} и $\omega_{,}^{2}$, этот случай даёт два постоянных движения жидкой массы, которые при перестановке τ^{2} и τ'^{2} переходят один в другой; в самом деле, чтобы определить τ^{2} и τ'^{2} по ω^{2} и $\omega_{,}^{2}$, можно положить

$$\tau=\frac{\omega+\omega_{,}}{2},\quad \tau'=\frac{\omega-\omega_{,}}{2}$$

и при этом как угодно выбрать знаки ω и $\omega_{,}$.

Но можно легко показать, что в одном случае, когда знаки ω и $\omega_{,}$ одинаковые, так что τ^{2} имеет большее значение, минимума функции G нет. Условия, связывающие вариации g, h, ..., $k_{,}$, теперь имеют вид

$$\delta g^{2}+\delta h^{2}+2k\delta k=0,$$
$$\delta g_{,}^{2}+\delta h_{,}^{2}+2k_{,}\delta k_{,}=0,$$

и поэтому вариация G равна

$$\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\delta g+\delta g_{,}}{b-c}\right)^2+\left(\frac{\delta h+\delta h_{,}}{c-a}\right)^2+\\+\left(\frac{\delta g-\delta g_{,}}{b+c}\right)^2+\left(\frac{\delta h-\delta h_{,}}{c+a}\right)^2\end{array}\right\}-$$

$$-\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1+\frac{\omega_{,}}{\omega}}{(a-b)^2}+\frac{1-\frac{\omega_{,}}{\omega}}{(a+b^2)}\right)(\delta g^2+\delta h^2)+\\+\left(\frac{1+\frac{\omega}{\omega_{,}}}{(a-b)^2}+\frac{1-\frac{\omega}{\omega_{,}}}{(a+b)^2}\right)(\delta g_{,}^2+\delta h_{,}^2)\end{array}\right\}.$$

Она имеет отрицательное значение, если знаки ω и $\omega_{,}$ одинаковые и положено $\delta h=\delta h_{,}=0$, $\delta g_{,}=-\delta g$; действительно, тогда получается:

$$\delta G=\left\{\frac{1}{(b+c)^2}-\frac{1}{(b+a)^2}+\left(\frac{1}{(b+a)^2}-\frac{1}{(b-a)^2}\right)\frac{(\omega+\omega_{,})^2}{4\omega\omega_{,}}\right\}\delta g^2,$$

и здесь $\frac{1}{(b+a)^2}<\frac{1}{(b-a)^2}$ и также $\frac{1}{(b+c)^2}<\frac{1}{(b+a)^2}$, так как при $c\leqslant a$ согласно § 7 (3) $\frac{\tau'^2}{(b+a)^3}\geqslant\frac{\tau^2}{(b-a)^3}$, значит, $\tau'^2>\tau^2$, и точно так же при $c>a$ τ^2 должно быть больше, чем τ'^2.

Итак, в этом случае функция не имеет минимума, и следовательно, должна иметь минимум в единственном остающемся случае.

Таковой, действительно, имеет место для движения, рассмотренного в § 7, если $\tau^2\leqslant\tau'^2$ (кроме выше отмеченного исключительного случая), и — тогда как во всех других случаях постоянство формы и состояния движения жидкой массы является неустойчивым — в этом случае всякое бесконечно малое изменение в форме и состоянии движения вызовет лишь бесконечно малые колебания. Разумеется, отсюда не вытекает, что состояние жидкой массы в этом случае устойчиво. Так как исследование вопроса об устойчивости приводит к линейным дифференциальным уравнениям, то оно может быть проведено известными методами. Но в настоящей работе мы оставим в стороне этот вопрос, поскольку мы ставили своей задачей лишь дальнейшее развитие той прекрасной мысли, которой Дирихле увенчал свою научную деятельность.

XIX. О ПОТЕНЦИАЛЕ ТОРА

Для того чтобы определить воздействие некоторого тела, частицы которого вызывают притяжение или отталкивание обратно-пропорционально квадрату расстояния, на какую-угодно точку, находящуюся вне самого тела, нужно, как известно, указать функцию V прямоугольных координат x, y, z, которая носит наименование потенциала, или потенциальной функции, действующих масс, и обладает тем свойством, что частные производные $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ равны — или же равны и противоположны по знаку — компонентам силы ускорения в точке x, y, z, смотря по тому, притягивает или отталкивает единичная масса такую же массу, находящуюся на конечном расстоянии. Для определения этой функции, которая должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

достаточно, чтобы в каждой точке поверхности тела было задано ещё одно условие: по большей части задача представляется в таком виде, что дано бывает не распределение масс в теле, а некоторые условия, которым подчиняется их воздействие на поверхности тела, например, функция V на поверхности тела должна обращаться в наперёд заданную функцию, т. е. в каждой точке поверхности задаются параллельные ей компоненты, или же в каждой точке поверхности задаются компоненты по некоторому данному направлению. Метод, посредством которого решаются подобного рода задачи, заключается, как известно, в том, что из частных решений уравнения (1)

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

составляется общее выражение

$$a_1Q_1+a_2Q_2+\ldots+a_nQ_n+\ldots=R,$$

содержащее произвольные постоянные a_1, a_2, ..., a_n, ... и также удовлетворяющее уравнению (1), и затем эти постоянные подбираются таким образом, чтобы были выполнены граничные условия. Выражения R

сходятся, вообще говоря, только при некоторых значениях координат x, y, z, так что для определённого выражения R всё бесконечное пространство разделяется некоторой поверхностью s на две части, в одной из которых выражение — сходящееся, а в другой (за исключением отдельных точек и линий) — расходящееся. Так, например, выражение

$$\sum a_n e^{z\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}} \cos\alpha_n x \cos\beta_n y$$

перестаёт сходиться, начиная с некоторой плоскости, перпендикулярной к оси z [1]. Если введём вместо x, y, z полярные координаты и разложим V по степеням радиуса-вектора, причём коэффициенты при n-ых степенях, как известно, оказываются сферическими функциями n-го порядка, умноженными на постоянные множители, то получается ряд, который перестаёт сходиться, начиная с некоторой сферы с центром в начале координат. Стоит обратить внимание на то обстоятельство, что определённой форме разложения R соответствует определённая система поверхностей сходимости (в первом примере — система параллельных плоскостей, во втором — система концентрических сфер), тогда как от значений коэффициентов зависит, начиная с какой именно поверхности прекращается сходимость.

Очевидно, выражение R должно быть сходящимся во всей той области, в которой должна быть определена функция V, так как только при выполнении этого требования R можно подставлять в граничные условия с целью определения постоянных. Но, с другой стороны, можно легко убедиться, что выражение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (1), только там может представлять произвольную функцию, где оно перестаёт сходиться [2]. Следовательно, форма выражения R должна быть подбираема так, чтобы поверхность тела была одной из связанных с R поверхностей сходимости [3].

В дальнейшем рассматриваемая задача будет решена для случая поверхности вращения с круглым осевым сечением, что, быть может, окажется не лишним для различных физических приложений.

1

Пусть ось z совмещается с осью тора, начало координат — с его центром; тогда уравнение поверхности имеет вид

$$(\sqrt{x^2+y^2}\pm a)^2+z^2=c^2.$$

Постараемся ввести вместо x, y, z такие переменные, чтобы одна из них на поверхности тора имела постоянное значение, и чтобы вместе с тем уравнение (1) после соответствующего преобразования принимало по возможности простую форму.

Если введём в плоскости (x, y) полярные координаты, полагая

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

то дифференциальное уравнение (1) преобразуется следующим образом

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial V}{r\,dr} + \frac{\partial^2 V}{rr\,\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{I}$$

уравнение границы станет независимым от φ и будет иметь вид

$$(r \pm a)^2 + z^2 = c^2,$$

т е. в плоскости (r, z) граница будет представляться в виде двух кругов с радиусом c и центрами $(-a,0)$ и $(a,0)$.

Вместо переменных r и z, я введу теперь две новые переменные ρ и ψ, полагая $r + zi$ равным некоторой функции комплексного переменного $\rho e^{\psi i}$:

$$r + zi = f(\rho e^{\psi i}),$$

причём постараюсь подобрать эту функцию таким образом, чтобы модуль величины $\rho e^{\psi i}$, рассматриваемой как функция $r + zi$, на обоих предельных кругах принимал постоянное значение, а вне кругов величина $\rho e^{\psi i}$ была конечной и непрерывной функцией $r + zi$.

Эти требования будут выполнены, если мы положим [4]

$$r + zi = \frac{\beta + \gamma\rho e^{\psi i}}{1 + \rho e^{\psi i}},$$

где

$$\beta = -\gamma = \sqrt{aa - cc}.$$

Действительно, тогда будем иметь:

$$a + r + zi = \frac{(a+\beta) + (a+\gamma)\rho e^{\psi i}}{1 + \rho e^{\psi i}}$$

$$(a + r + zi)(a + r - zi) = \frac{\dfrac{a+\beta}{(a+\gamma)\rho} + e^{\psi i}}{1 + \rho e^{\psi i}}\;\frac{\dfrac{a+\beta}{(a+\gamma)\rho} + e^{-\psi i}}{1 + \rho e^{-\psi i}}\,(a+\gamma)^2\rho^2.$$

Эта величина не будет зависеть от ψ, если

$$\frac{a+\beta}{(a+\gamma)\rho} = \rho,$$

и тогда она будет равна

$$(a+\gamma)^2\rho^2 = (a+\beta)(a+\gamma).$$

Точно так же величина

$$(-a + r + zi)(-a + r - zi)$$

не зависит от ψ и равна $(-a+\beta)(-a+\gamma)$, если

$$\rho\rho = \frac{-a+\beta}{-a+\gamma}.$$

Таким образом, значениям

$$\rho\rho = \frac{a+\beta}{a+\gamma}, \qquad \rho\rho = \frac{-a+\beta}{-a+\gamma}$$

соответствуют два круга с центрами $(-a,0)$, $(a,0)$ и радиусами

$$\sqrt{(a+\beta)(a+\gamma)}, \quad \sqrt{(-a+\beta)(-a+\gamma)}.$$

Так как оба радиуса должны равняться c, то мы получаем:

$$(a+\beta)(a+\gamma)-(-a+\beta)(-a+\gamma)=2a(\beta+\gamma)=0,$$

так что

$$\gamma=-\beta, \quad aa-\beta\beta=cc, \quad \text{т. е. } \beta=\sqrt{aa-cc}.$$

2

Преобразование уравнения (1) может быть облегчено, если положим $V=r^{\mu}U$, что даёт:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial V}{r\partial r}=r^{\mu}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+2\mu r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r}+\mu(\mu-1)r^{\mu-2}U+r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r}+\mu r^{\mu-2}U=$$

$$=r^{\mu}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+(2\mu+1)r^{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial r}+\mu\mu r^{\mu-2}U,$$

и затем подберём μ так, чтобы второй член пропал, т. е. положим $\mu=-\frac{1}{2}$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$rr\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{4}U=0.$$

Обозначим для краткости $r+zi$ через y, $\rho e^{\varphi i}$ — через η, а величины, сопряжённые с y и η — через y' и η'. Тогда получим:

$$r=\frac{y+y'}{2}, \qquad zi=\frac{y-y'}{2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{\partial U}{\partial z}i\right), \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial y'}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

откуда следует

$$rr\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)=(y+y')^2\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial y'};$$

далее

$$y=\beta\frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad y'=\beta\frac{1-\eta'}{1+\eta'}, \quad y+y'=2\beta\frac{1-\eta\eta'}{(1+\eta)(1+\eta')},$$

$$y=\beta\left(-1+\frac{2}{1+\eta}\right), \quad dy=-2\beta\frac{d\eta}{(1+\eta)^2}, \quad dy'=-2\beta\frac{d\eta'}{(1+\eta')^2},$$

$$(y+y')^2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial y'}=(1-\eta\eta')^2\frac{\partial^2 U}{\partial\eta\partial\eta'}=\frac{(1-\eta\eta')^2}{\eta\eta'}\ \frac{\partial^2 U}{\partial\log\eta\,\partial\log\eta'},$$

или же (так как $\eta\eta' = \rho^2$, $\log\eta = \log\rho + \psi i$, $\log\eta' = \log\rho - \psi i$)

$$= \frac{(1-\rho^2)^2}{\rho^2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \log\rho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right).$$

Итак, наше уравнение принимает после преобразования вид:

$$\left(\frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\log\rho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{4}U = 0.$$

3

Теперь не представит труда разложить U в ряд, расположенный по частным интегралам этого уравнения и сходящийся или расходящийся одновременно для всех значений φ и ψ. Станем искать частные интегралы в виде функций

$$\frac{\cos}{\sin} m\psi \frac{\cos}{\sin} n\varphi,$$

умноженных на некоторую функцию P от ρ. Оказывается, что P должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{2}\right)^2\left(\frac{d^2 P}{d\log\rho^2} - mmP\right) - \left(nn - \frac{1}{4}\right)P = 0. \tag{II}$$

Затем определение произвольных постоянных производится по методу Фурье.

Полагая

$$\frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{2} = t,$$

будем иметь

$$\frac{dP}{d\log\rho} = \frac{dP}{dt}\,\frac{\rho + \frac{1}{\rho}}{2},$$

$$\frac{d^2P}{d\log\rho^2} = \left(\frac{\rho + \frac{1}{\rho}}{2}\right)^2 \frac{d^2P}{dt^2} + \frac{\rho - \frac{1}{\rho}}{2}\,\frac{dP}{dt} = (tt+1)\frac{d^2P}{dt^2} + t\,\frac{dP}{dt},$$

так что дифференциальное уравнение (II) переходит в следующее

$$tt\,(tt+1)\,\frac{d^2P}{dt^2} + t^3\frac{dP}{dt} - \left(mmtt + nn - \frac{1}{4}\right)P = 0.$$

Это последнее уравнение содержит члены только двух различных порядков относительно t и, значит, может быть проинтегрировано с помощью известного со времен Эйлера гипергеометрического ряда. Решение можно представить разнообразными способами посредством других гипергеометрических рядов, именно таких, у которых четвёртым элементом является одна из следующих величин:

$$1[5] - \left(\frac{\rho + \frac{1}{\rho}}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{\rho + \frac{1}{\rho}}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1-\rho\rho}{1+\rho\rho}\right)^2; \quad \rho\rho, \quad 1-\rho\rho, \quad 1-\frac{1}{\rho\rho};$$

$$\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2, \quad -\frac{(1-\rho)^2}{4\rho}, \quad \frac{(1+\rho)^2}{4\rho},$$

или величин, им обратных; по каждой из названных восемнадцати величин имеется четыре различных разложения, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, из которых, впрочем, каждые два дают один и тот же частный интеграл. Вообще говоря, целесообразно разлагать по наименьшей из этих величин. Если станем разлагать по величине, обращающейся в нуль при $\rho = 1$, то оказывается, что один из получающихся частных интегралов обращается при $\rho = 1$ в бесконечность. Но так как V должно быть конечным, то в выражении для P коэффициент при этом интеграле придётся положить равным нулю, так что P будет только постоянным множителем отличаться от того интеграла, который конечен при $\rho = 1$. Из числа различных возможных представлений P я ограничусь здесь указанием лишь одного, которое обозначу через $P^{n,m}$, а именно:

$$P^{n,m} = (1-\rho\rho)^{n+\frac{1}{2}} \rho^{\pm m} F\left(n+m+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2},\ 2n+1,\ 1-\rho\rho\right).$$

Так как в различных функциях $P^{n,m}$ первые три элемента гипергеометрического ряда различаются лишь на целые числа, то все $P^{n,m}$ выражаются линейно через два из них, $P^{0,0}$ и $P^{0,1}$ (Comm. Gott. rec., Vol. II [6]); эти последние представляют собою не что иное, как эллиптические интегралы первого и второго рода [1]) и, пожалуй, удобнее всего вычисляются методом арифметико-геометрического среднего, т. е. посредством повторения трансформаций второго порядка.

[1]) Все функции $P^{n,m}$ выражаются через полные эллиптические интегралы в более широком смысле.

XX. ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ ПИСЬМА, НАПИСАННОГО НА ИТАЛЬЯНСКОМ ЯЗЫКЕ 21 ЯНВАРЯ 1864 г. ПРОФЕССОРУ ЭНРИКО БЕТТИ

. . . .

Чтобы найти притяжение произвольного однородного прямого эллиптического цилиндра, рассмотрим, вводя прямоугольные координаты x, y, z, бесконечный цилиндр, определяемый неравенством

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>0$$

и наполненный массой постоянной плотности $+1$ при $z<0$ и -1 при $z>0$. Затем обозначим, как принято, потенциал в точке x, y, z через V и положим

$$\frac{\partial V}{\partial x}=X, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z}=Z;$$

при $z=0$ будем иметь $V=0$, $X=0$, $Y=0$.

Величина Z равна потенциалу эллипса $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>0$ плотности 2 и находится по методу Дирихле: если обозначим через σ наибольший корень уравнения

$$1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{s}=F=0$$

и положим

$$D=\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)s},$$

то будем иметь:

$$Z=4\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\sqrt{F}\,ds}{D}.$$

Величины X и Y могут быть определены из соотношений

$$\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}$$

в связи с условиями $X=0$, $Y=0$ при $z=0$.

С этой целью заменим интеграл $4\int\limits_{\sigma}^{\infty}$ интегралом $2\int\limits_{\infty}^{\infty}$, взятым по контуру в плоскости s, охватывающему значение σ, но не охватывающему никаких других точек ветвления или точек разрыва функции, стоящей под интегралом. Обозначим корни $F=0$ в порядке их возрастания через σ, σ', σ'': они все — действительные и удовлетворяют неравенствам

$$\sigma>0>\sigma'>-b^2>\sigma''>-a^2.$$

Положив

$$F=t-\frac{z^2}{s},$$

мы будем иметь:

$$Z=2\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{ts-z^2}}{D\sqrt{s}}\,ds,$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}=\int\limits_{\infty}^{\infty}\frac{s\,\frac{\partial t}{\partial x}\,(ts-z^2)^{-\frac{1}{2}}}{D\sqrt{s}}\,ds.$$

Принимая во внимание, что

$$\int\limits_{0}^{z}(ts-z^2)^{-\frac{1}{2}}dz=\int\limits_{0}^{\frac{z}{\sqrt{ts}}}(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}d\xi=\int\limits_{0}^{\frac{z}{\sqrt{ts}}}\left(\frac{1}{\xi^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}d\log\xi,$$

и, с другой стороны,

$$\frac{s\,\frac{\partial t}{\partial x}ds}{D\sqrt{s}}=-2abx(a^2+s)^{-\frac{3}{2}}(b^2+s)^{-\frac{1}{2}}ds=\frac{4abx}{b^2-a^2}d\sqrt{\frac{b^2+s}{a^2+s}},$$

получим, после интегрирования по частям:

$$X=\frac{2abxz}{b^2-a^2}\int\limits_{\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{b^2+s}{a^2+s}}(ts-z^2)^{-\frac{1}{2}}d\log ts.$$

Если путь интегрирования выберем так же, как в выражении для Z, то значение интеграла будет удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x};$$

но так как функция, стоящая под интегралом, имеет разрыв также при $t=0$, то значение интеграла может и отличаться на функцию переменных x и y. Отсюда вытекает следующий выбор пути интегрирования.

В соотношении $\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial x}$ функция под интегралом непрерывна при $s=0$; следовательно, внутри контура интегрирования, кроме $s=\sigma$, может заключаться или не заключаться $s=0$, но больше не заключается ни одно из выше указанных значений. Контур интегрирования в выражении для X нужно выбрать так, чтобы при $z=0$ было $X=0$; для этого, охватывая $s=\sigma$, он должен также охватывать наибольший корень уравнения $ts=0$ $\left(\text{каковой равен наибольшему корню уравнения } t=0, \text{ если } 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<0, \text{ и равен нулю, если } 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>0\right)$, и не должен охватывать других корней этого уравнения. Поэтому при $z=0$ корни $F=0$ совпадают с корнями $ts=0$, и если путь интегрирования пройдёт между двумя точками разрыва, которые совпадают при $z=0$, то он должен будет при $z=0$ пройти через точку их совпадения: таким образом, интеграл в выражении для X обратится в бесконечность, и значение X, несмотря на множитель z, будет конечным.

. . . .

XXI. О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Хотя дифференциальные уравнения движения газов получены уже давно, однако их интеграция выполнена почти только для одного единственного случая, когда изменения давления могут считаться бесконечно малыми по сравнению с самим давлением; до последнего времени при исследовании этого вопроса довольствовались тем, что принимали во внимание только первые степени соответствующих отношений. Лишь недавно Гельмгольц стал рассматривать также вторые степени этих отношений, в результате чего ему, между прочим, удалось установить объективное возникновение комбинационных тонов. Оказывается, однако, что в случае, когда начальные движения повсюду совершаются в одном и том же направлении, и в каждой плоскости, перпендикулярной к этому направлению, скорость и давление постоянны, — точные дифференциальные уравнения интегрируются до конца; и если доныне для объяснения экспериментально установленных явлений существующая теория вполне достаточна, то не исключено всё же, что при больших успехах, достигнутых в последнее время Гельмгольцем также и в экспериментальном исследовании вопросов акустики, результаты более точных вычислений в не особенно отдалённом будущем, возможно, соприкоснутся с результатами экспериментов; этим может быть оправдано их опубликование, независимо от теоретического интереса, который представляет само по себе изучение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Давление и плотность нужно было бы считать связанными посредством закона Бойля, если бы вызываемые изменениями давления температурные различия выравнивались так быстро, что температуру газа можно было бы рассматривать как постоянную. Но надлежит, по всей вероятности, совершенно пренебрегать тепловым обменом, и потому следует исходить из закона, связывающего между собою давление и плотность в предположении, что газ не принимает и не отдаёт тепла.

Согласно закону Бойля и Гэй-Люссака имеет место соотношение

$$\log p + \log v = \log T + \text{const.},$$

где v — объём весовой единицы газа, p — давление, T — температура, отсчитываемая от — 273° С.

Станем рассматривать T как функцию p и v и обозначим теплоёмкость при постоянном давлении через c, а при постоянном объёме через c', причём то и другое относится к весовой единице: тогда эта весовая единица при увеличении p на dp и v на dv принимает количество тепла, равное

$$c\frac{dT}{dv}dv + c'\frac{dT}{dp}dp;$$

так как

$$\frac{\partial \log T}{\partial \log v} = \frac{\partial \log T}{\partial \log p} = 1,$$

то этому в ыражнию можно придать также вид

$$T\,(c\,d\log v + c'd\log p).$$

Поэтому, если теплообмен отсутствует, то

$$d\log p = -\frac{c}{c'}\,d\log v,$$

и, следовательно, допуская вместе с Пуассоном, что отношение $\frac{c}{c'} = k$ не зависит от температуры и давления, мы приходим к соотношению

$$\log p = -\,k\log v + \text{const}.$$

Согласно новейшим опытам Реньо, Джоуля и В. Томсона, указанные соотношения выполняются, вероятно, очень точно при всех мыслимых давлениях и температурах для кислорода, азота, водорода и их соединений.

Реньо установил для этих газов очень точное выполнение закона Бойля и Гэй-Люссака и независимость теплоёмкости c от температуры и давления.

Для атмосферного воздуха Реньо нашёл такие значения:

между	— 30°С	и	+ 10°С	$c = 0{,}2377$
»	+ 10°С	и	+ 100°С	$c = 0{,}2379$
»	+ 100°С	и	+ 215°С	$c = 0{,}2376$

Точно так же для давлений от 1 до 10 атмосфер не оказалось заметной разницы в значениях c.

Далее, опыты Реньо и Джоуля показывают, что для этих газов очень точно выполняется принятая Клаузиусом гипотеза Майера о том, что газ, расширяющийся при постоянной температуре, принимает столько тепла, сколько нужно для выполнения совершаемой им внешней работы. Если объём газа изменяется на dv в то время, как температура остаётся постоянной, то тогда $d\log p = -\,d\log v$, принятое количество тепла равно $T(c-c')\,d\log v$, выполненная работа равна $p\,dv$. Поэтому, если обозначим через A механический эквивалент тепла, названная гипотеза даёт соотношение

$$AT(c-c')\,d\log v = p\,dv,$$

или

$$c-c' = \frac{pv}{AT},$$

также при любых давлениях и температурах.

Отсюда следует, что $k=\frac{c}{c'}$ не зависит от давления и температуры и, если принять $c=0{,}237733$, A (по Джоулю) $=424{,}55$ килограммометров, и $\left(\text{при температуре } 0^\circ\text{C, т. е. } T=\frac{100^\circ\text{C}}{0{,}3665}\right)$ pv (по Реньо) $=7990^m{,}267$, то оказывается, что $k=1{,}4101$. Скорость звука в сухом воздухе при температуре 0°C равна

$$\sqrt{7990^m{,}267\cdot 9^m{,}8088\,k}$$

в секунду, что при указанном значении k даёт $332^m{,}440$. С другой стороны, наиболее тщательно проведённые эксперименты Молля и Ван-Беека дают соответственно цифры $332^m{,}528$ и $331^m{,}867$, или в соединении $332^m{,}271$. У Мартэна и А. Бравэ по их собственным подсчётам получилось $332^m{,}37$.

1

Нам нет необходимости сразу делать определённое предположение относительно зависимости между давлением и плотностью; мы допустим, что при плотности ρ давление равно $\varphi(\rho)$ и покуда оставим функцию φ неопределённой.

Введём прямоугольные координаты x, y, z, причём ось x пусть совпадает с направлением движения; обозначим через ρ плотность, через p давление, через u скорость в точке x в момент времени t; наконец, через ω — плоскостной элемент с координатой x.

Объём прямого цилиндра с основанием ω и высотой dx равен $\omega\,dx$, содержащаяся в нём масса $=\omega\rho\,dx$. Изменение этой массы на протяжении элемента времени dt, т. е. величина $\omega\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\,dx$, равняется массе, входящей за это время в цилиндр, т. е. $-\omega\frac{\partial\rho u}{\partial x}dx\,dt$. Ускорение равно $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}$, а сила, действующая в положительном направлении оси x, равна $-\frac{\partial p}{\partial x}\omega\,dx=-\varphi'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}\omega\,dx$, где $\varphi'(\rho)$ есть производная от $\varphi(\rho)$. Отсюда для ρ и u получаются два дифференциальных уравнения:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial\rho u}{\partial x}\quad\text{и}\quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\varphi'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

или же

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\varphi'(\rho)\frac{\partial \log \rho}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \log \rho}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x}\ [1].$$

Умножим второе уравнение на $\pm\sqrt{\varphi'(\rho)}$ и прибавим к первому. Полагая для краткости

$$\int\sqrt{\varphi'(\rho)}\,d\log\rho=f(\rho), \tag{1}$$

$$f(\rho)+u=2r,\quad f(\rho)-u=2s, \tag{2}$$

придадим полученным уравнениям более простой вид:

$$\frac{\partial r}{\partial t}=-\left(u+\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial s}{\partial t}=-\left(u-\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)\frac{\partial s}{\partial x}, \tag{3}$$

причём нужно считать u и ρ функциями от r и s, определяемыми из уравнений (2). Отсюда следует дальше:

$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}\left(dx-\left(u+\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)dt\right). \tag{4}$$

$$ds=\frac{\partial s}{\partial x}\left(dx-\left(u-\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)dt\right). \tag{5}$$

Можно считать (поскольку такое допущение всегда оправдывается в действительности), что $\varphi'(\rho)$ есть положительная величина. В таком случае последние уравнения свидетельствуют о том, что r остаётся постоянным, когда x изменяется в зависимости от t таким образом, что $dx=\left(u+\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)dt$, а s остаётся постоянным, когда x изменяется таким образом, что $dx=\left(u-\sqrt{\varphi'(\rho)}\right)dt$.

Определённое значение r, или $f(\rho)+u$, передвигается поэтому в сторону возрастающих x со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho)}+u$, определённое значение s, или $f(\rho)-u$, передвигается в сторону убывающих со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho)}-u$.

Таким образом, определённое значение r будет последовательно встречаться с различными «впереди находящимися» значениями s, и скорость его продвижения в каждый момент будет зависеть от значения s, с которым оно встречается.

2

С помощью анализа можно ответить на вопрос, где и когда значение $r=r'$ встретится с некоторым предшествующим ему значением $s=s'$, т. е. представить x и t как функции r и s. В самом деле, если введём r и s в уравнениях (3) § 1 в качестве независимых переменных, то эти уравнения превращаются в линейные относительно x и t, и их можно интегрировать хорошо известными методами. Впрочем, чтобы привести уравнения (3) к линейным, наиболее целесообразно переписать уравнения (4) и (5) в следующем виде:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}\left\{ d\left(x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right) t\right) + \left[dr\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + ds\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1\right)\right] t \right\} \qquad (1)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x}\left\{ d\left(x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right) t\right) - \left[ds\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + dr\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1\right)\right] t \right\}. \qquad (2)$$

Принимая затем s и r за независимые переменные, мы получим для x и t следующие линейные уравнения:

$$\frac{\partial\left(x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right) t\right)}{\partial s} = -t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1\right)$$

$$\frac{\partial\left(x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right) t\right)}{\partial r} = t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1\right).$$

Вследствие этих уравнений выражение

$$\left(x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right) t\right) dr - \left(x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right) t\right) ds \qquad (3)$$

есть полный дифференциал, а соответствующий интеграл, который мы назовём w, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial s} = -t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1\right) = m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right),$$

где $m = \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\rho)}}\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} - 1\right)$, так что m есть функция только от $r + s$. Положим $f(\rho) = r + s = \sigma$; тогда $\sqrt{\varphi'(\rho)} = \frac{d\sigma}{d \log \rho}$, и значит, $m = -\frac{1}{2}\frac{d \log \frac{d\rho}{d\sigma}}{d\sigma}$.

При допущении Пуассона $\varphi(\rho) = a\rho^k$ получается:

$$f(\rho) = \frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\rho^{\frac{k-1}{2}} + \text{const.},$$

и дальше, придавая произвольной постоянной значение нуль

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + u = \frac{k+1}{2} r + \frac{k-3}{2} s, \qquad \sqrt{\varphi'(\rho)} - u = \frac{k-3}{2} r + \frac{k+1}{2} s,$$

$$m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{\sigma} = \frac{k-3}{2(k-1)(r+s)}.$$

В предположении закона Бойля $\varphi(\rho) = aa\rho$, и тогда

$$f(\rho) = a \log \rho$$

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + u = r - s + a, \quad \sqrt{\varphi'(\rho)} - u = s - r + a$$

$$m = -\frac{1}{2a}.$$

Эти формулы можно получить из предыдущих, уменьшая $f(\rho)$ на постоянную $\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}$, значит, r и s — на постоянную $\frac{a\sqrt{k}}{k-1}$, и затем полагая $k = 1$.

Введение независимых переменных r и s возможно, заметим, только в том случае, если функциональный детерминант этих функций по x и t, который $= 2\sqrt{\varphi'(\rho)}\, \frac{\partial r}{\partial x}\, \frac{\partial s}{\partial x}$, не обращается в нуль, т. е., если ни $\frac{\partial r}{\partial x}$ ни $\frac{\partial s}{\partial r}$ не равны нулю

Если $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$, то из (1) следует $dr = 0$, а из (2) следует, что $x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t$ есть функция лишь s. Следовательно, и в этом также случае выражение (3) есть полный дифференциал, а w есть функция одной переменной s.

Точно так же, если $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$, то s не зависит от t, а $x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\rho)}\right)t$ и w — функции одной переменной r.

Если, наконец, $\frac{\partial r}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial x}$ оба $= 0$, то на основании дифференциальных уравнений r, s и w являются постоянными.

3

Для решения нашей задачи необходимо прежде всего определить функцию w переменных r и s, таким образом, чтобы она удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0 \qquad (1)$$

и начальным условиям. Такая функция определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое, очевидно, может быть взято произвольно.

Где и когда определённое значение r встречается с определённым значением s, мы можем установить из уравнения

$$(x-(u+\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t)\,dr-(x-(u-\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t)\,ds=dw, \tag{2}$$

и, наконец, u и ρ определяются как функции x и t с помощью уравнений

$$f(\rho)+u=2r, \quad f(\rho)-u=2s. \tag{3}$$

Действительно, если только dr и ds на некотором отрезке не обращаются тождественно в нуль (так что r и s сводились бы к постоянным), из (2) следуют равенства

$$x-(u+\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t=\frac{\partial w}{\partial r} \tag{4}$$

$$x-(u-\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t=-\frac{\partial w}{\partial s}, \tag{5}$$

и тогда посредством (3), (4) и (5) можно выразить u и ρ через x и t.

Если же r в начальный момент на некотором конечном отрезке имеет постоянное значение r', то в дальнейшем этот отрезок сдвигается в сторону возрастающих значений x. Внутри области, где $r=r'$, нельзя из уравнения (2) получить значение $x-(u+\sqrt{\varphi'(\rho)})\,t$, так как $dr=0$; и, действительно, вопрос о том, когда и где это значение r' встречается с определённым значением s, в этом случае не допускает определённого ответа. Равенство (4) тогда выполняется только на границе этой области и указывает, между какими значениями x в данный момент заключено постоянное значение $r=r'$, или же на протяжении какого промежутка времени в данной точке r принимает это значение. В указанных пределах u и ρ определяются как функции x и t из уравнений (3) и (5). Подобным же образом определяются эти функции в случае, если s на некотором конечном отрезке имеет постоянное значение s', тогда как r меняется; так же и в случае, когда r и s оба сводятся к постоянным. В последнем случае они принимают в пределах, которые могут быть определены из (4) и (5), постоянные значения: какие именно — можно определить из (3).

4

Прежде чем мы предпримем интеграцию уравнения (1) предыдущего параграфа, нам кажется уместным высказать кое-какие соображения, которые не предполагают выполнения этой интеграции. По поводу функции $\varphi(\rho)$ нам нужно сделать только одно допущение, именно, что её производная при возрастании ρ не убывает, что всегда имеет место в действительности. Мы заметим теперь же (и этим не раз воспользуемся в следующем параграфе), что при этом допущении выражение

$$\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}=\int\limits_0^1 \varphi'(\alpha\rho_1+(1-\alpha)\rho_2)\,d\alpha$$

при изменениях только одной из величин ρ_1, ρ_2 или остаётся неизменным или изменяется в том же направлении, что и эта величина, откуда сейчас же следует, что оно заключено между $\varphi'(\rho_1)$ и $\varphi'(\rho_2)$.

Рассмотрим сначала случай, когда в начальный момент нарушение равновесия имеет место в конечной области, определяемой неравенствами $a < x < b$, так что вне её u и ρ, а значит также x и s постоянны: значения этих величин при $x < a$ будем отмечать индексом 1, а при $x > b$ — индексом 2. Область, в которой r переменно, согласно § 1 постепенно сдвигается вперёд, и притом её задняя граница движется со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho_1)} + u_1$; в то же время передняя граница области, в которой s переменно, движется назад со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho_2)} - u_2$. По истечении времени

$$\frac{b-a}{\sqrt{\varphi'(\rho_1)} + \sqrt{\varphi'(\rho_2)} + u_1 - u_2}$$

обе эти области разминутся, и между ними образуется пространство, в котором $s = s_2$ и $r = r_1$, и, значит, частицы газа вернутся снова к состоянию равновесия. Итак, из места, в котором нарушено равновесие, распространяются две волны во взаимно противоположных направлениях. В той волне, которая идёт вперёд, $s = s_2$; поэтому с определённым значением плотности ρ непременно связана скорость $u = f(\rho) - 2s_2$ и оба эти значения движутся вперёд с постоянной скоростью

$$\sqrt{\varphi'(\rho)} + u = \sqrt{\varphi'(\rho)} + f(\rho) - 2s_2.$$

В той же волне, которая идёт назад, с плотностью ρ связана скорость $-f(\rho) + 2r_1$, и оба эти значения движутся назад со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho)} + f(\rho) - 2r_1$. Бо́льшим плотностям соответствуют бо́льшие скорости распространения, так как и $\sqrt{\varphi'(\rho)}$ и $f(\rho)$ возрастают вместе с ρ.

Представим себе ρ в виде ординаты кривой, у которой переменная абсцисса будет x; тогда каждая точка этой кривой движется параллельно оси абсцисс с постоянной скоростью, притом тем бо́льшею, чем больше её ордината. Нетрудно понять, что при таких обстоятельствах точки с бо́льшими ординатами в конце концов должны перегнать предшествующие точки с меньшими ординатами, и тогда одному значению x будет соответствовать более одного значения ρ. Но так как этого в действительности быть не может, то должно быть некоторое обстоятельство, препятствующее наступлению указанного явления. В самом деле, при выводе дифференциальных уравнений было сделано допущение, что u и ρ являются непрерывными функциями x и имеют непрерывные производные: это допущение, однако, нарушается, как только в какой-нибудь точке кривая плотности становится перпендикулярной к оси абсцисс, и с этого момента на кривой устанавливается разрыв, так что бо́льшие значения ρ непосредственно следуют за меньшими: этот случай будет разобран в следующем параграфе.

Волны сгущения, т. е. те части волны, в которых плотность при распространении убывает, сдвигаясь, становятся всё короче и в конце концов переходят в «ударные» волны; напротив, длина волн разрежения растёт пропорционально времени [2].

Можно показать, по крайней мере при допущении закона Пуассона (или Бойля), что, кроме некоторых особых случаев, ударные волны образуются не только тогда, когда начальное нарушение равновесия распространено на конечную область. Скорость, с которой двигается вперёд значение r, при этом допущении равна

$$\frac{k+1}{2}r+\frac{k-3}{2}s;$$

бо́льшие значения в среднем двигаются с большей скоростью, и большее значение r' рано или поздно догонит меньшее значение r'', если только встречающееся с r'' значение s в среднем не меньше на

$$(r'-r'')\frac{1+k}{3-k},$$

чем в тот же момент встречающееся с r'. В этом же последнем случае при x, равном $+\infty$, s стало бы равно $-\infty$, так что скорость u стала бы равна $+\infty$ (или при допущении закона Бойля, вместо того, плотность стала бы бесконечно малой). Итак, за исключением специальных случаев, всегда положение будет таково, что из двух значений r, различающихся на конечную величину, большее будет непосредственно следовать за меньшим; следовательно, благодаря обращению в бесконечность производной $\frac{\partial r}{\partial x}$ дифференциальные уравнения теряют смысл и образуются бегущие вперёд ударные волны. Точно так же почти всегда, если $\frac{\partial s}{\partial x}$ обратится в бесконечность, появятся такие же волны, бегущие назад.

Для определения моментов и точек, в которых $\frac{\partial r}{\partial x}$ или $\frac{\partial s}{\partial x}$ обращаются в бесконечность, и возникают внезапные сгущения, мы из уравнений (1) и (2) § 2 получаем, вводя функцию w, следующие соотношения:

$$\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho}+1\right)t\right)=1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\rho)}}{d\log\rho}+1\right)t\right)=1.$$

5

Принимая во внимание, что внезапные сгущения возникают почти всегда, даже в том случае, если плотность и скорость в начальный момент изменяются повсюду непрерывно без разрывов, мы постараемся теперь установить законы распространения ударных волн.

Допустим, что в момент t в точке $x=\xi$ имеется внезапный скачок u и ρ, и будем отмечать значения этих величин и величин, от них зависящих, индексом 1 при $x=\xi-0$ и индексом 2 при $x=\xi+0$; скорости движения газа относительно точки разрыва, равные $u_1-\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $u_2-\frac{\partial\xi}{\partial t}$, обозначим через v_1, v_2. Масса, проходящая в положительном направлении через элемент ω в плоскости $x=\xi$ за промежуток времени dt, тогда $=v_1\rho_1\omega dt=v_2\rho_2\omega dt$; действующая на эту массу сила равна $(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))\,\omega dt$, а обусловленное ею приращение скорости есть v_2-v_1; поэтому получается:

$$(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))\,\omega dt=(v_2-v_1)\,v_1\rho_1\omega dt \quad \text{и} \quad v_1\rho_1=v_2\rho_2,$$

откуда следует

$$v_1=\mp\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}}\,,$$

так что

$$\frac{d\xi}{dt}=u_1\pm\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}}=u_2\pm\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}}\,. \quad (1)$$

В точке, где находится ударная волна, разность $\rho_2-\rho_1$ должна иметь тот же знак, что v_1 и v_2; знак этот — отрицательный или положительный, смотря по тому, двигается ли волна вперёд или назад. В первом случае надлежит брать верхние знаки в предыдущих формулах, и тогда ρ_1 больше чем ρ_2; принимая во внимание допущение, сделанное в начале предыдущего параграфа по поводу функции $\varphi(\rho)$, мы будем иметь:

$$u_1+\sqrt{\varphi'(\rho_1)}>\frac{d\xi}{dt}>u_2+\sqrt{\varphi'(\rho_2)}, \quad (2)$$

так что наша точка разрыва движется вперёд медленнее, чем следующие за нею, и быстрее, чем предшествующие ей значения r; r_1 и r_2 в каждый момент определяются дифференциальными уравнениями, не теряющими смысла по обе стороны от точки разрыва. То же самое справедливо, поскольку значения s движутся назад со скоростью $\sqrt{\varphi'(\rho)}-u$, также относительно s_2, а следовательно, и ρ_2 и u_2, но не для s_1. Значения s_1 и $\frac{d\xi}{dt}$ определяются однозначно из r_1, ρ_2 и u_2 посредством соотношений (1). В самом деле, уравнению

$$2(r_1-r_2)=f(\rho_1)-f(\rho_2)+\sqrt{\frac{(\rho_1-\rho_2)(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2}} \quad (3)$$

удовлетворяет только одно значение ρ_1, так как $f(\rho_1)$ и оба множителя

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}-\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}}\,,$$

на которые разлагается последний член, постоянно возрастают (впрочем, второй может оставаться и постоянным), когда ρ_1 растёт от ρ_2 до бесконечности, и следовательно, правая часть (3) принимает каждое положительное значение только один раз. Если же ρ_1 определено, то из уравнений (1) получаются вполне определённые значения u_1 и $\frac{d\xi}{dt}$.

Аналогичные соображения справедливы и по поводу волны сгущения, идущей назад.

6

Мы установили, что значение u и ρ по обе стороны движущейся ударной волны связаны всегда соотношением

$$(u_1-u_2)^2=\frac{(\rho_1-\rho_2)(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2}\ [3].$$

Возникает вопрос: что же получается, если в данный момент в данной точке имеются совершенно произвольные разрывы? Оказывается, что тогда, смотря по значениям u_1, ρ_1, u_2, ρ_2, или расходятся в обе стороны две разных ударных волны, или же идёт вперёд только один, или идёт назад только одна, или не будет вовсе разрывов, так что дифференциальное уравнение нигде не будет терять смысла.

Обозначим значения u и ρ позади или между разрывами в первый момент их распространения через u' и ρ'; тогда в первом случае $\rho'>\rho_1$ и $>\rho_2$, и тогда

$$\left.\begin{aligned} u_1-u' &= \sqrt{\frac{(\rho'-\rho_1)(\varphi(\rho')-\varphi(\rho_1))}{\rho'\rho_1}},\\ u'-u_2 &= \sqrt{\frac{(\rho'-\rho_2)(\varphi(\rho')-\varphi(\rho_2))}{\rho'\rho_2}}; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$u_1-u_2=\sqrt{\frac{(\rho'-\rho_1)(\varphi(\rho')-\varphi(\rho_1))}{\rho'\rho_1}}+\sqrt{\frac{(\rho'-\rho_2)(\varphi(\rho')-\varphi(\rho_2))}{\rho'\rho_2}}. \qquad (2)$$

Так как оба слагаемых в правой части (2) возрастают вместе с ρ', то u_1-u_2 должно быть положительным, и притом

$$(u_1-u_2)^2>\frac{(\rho_1-\rho_2)(\varphi(\rho_1)-\varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2};$$

и, обратно, если эти условия выполнены, то всегда имеется одна и только одна пара чисел u' и ρ', удовлетворяющая уравнениям (1).

Чтобы наступил последний случай, и движение совершалось бы согласно дифференциальному уравнению, необходимы и достаточны условия $r_1\leqslant r_2$ и $s_1\geqslant s_2$, так что u_1-u_2 отрицательно и $(u_1-u_2)^2\geqslant(f(\rho_1)-f(\rho_2))^2$. Значения r_1 и r_2, s_1 и s_2 в этом случае разделяются (так как идущее впереди движется с большей скоростью), и разрыв исчезает.

Если не выполнены ни те ни другие условия, то начальным условиям удовлетворяет один разрыв, именно, идущий вперёд или назад — смотря по тому, будет ли ρ_1 больше или меньше чем ρ_2.

В самом деле, если $\rho_1 > \rho_2$, то выражение

$$2(r_1 - r_2) \text{ или } f(\rho_1) - f(\rho_2) + u_1 - u_2$$

положительно, так как $(u_1 - u_2)^2 < (f(\rho_1) - f(\rho_2))^2$, и следовательно, это выражение

$$\leqslant f(\rho_1) - f(\rho_2) + \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2}},$$

так как

$$(u_1 - u_2)^2 \leqslant \frac{(\rho_1 - \rho_2)(\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2))}{\rho_1\rho_2};$$

поэтому для плотности ρ' позади разрыва можно найти значение, удовлетворяющее условию (2) предыдущего параграфа, и это значение $\leqslant \rho_1$. Следовательно, так как $s' = f(\rho') - r_1$, $s_1 = f(\rho_1) - r_1$, то $s' \leqslant s_1$, так что движение позади разрыва может совершаться согласно дифференциальному уравнению.

Другой случай, когда $\rho_1 < \rho_2$, исследуется подобным же образом.

7

Чтобы иллюстрировать предыдущее изложение простым примером, в котором движение может быть определено с помощью указанных выше приёмов, допустим, что давление и плотность связаны законом Бойля, и в начальный момент имеют разрыв в точке $x = 0$, а по ту и другую сторону от этой точки — постоянны.

По предыдущему, надлежит различать четыре случая.

I. Если $u_1 - u_2 > 0$, так что две массы газа (в их относительном движении) идут одна другой навстречу, и притом $\left(\frac{u_1 - u_2}{a}\right)^2 > \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1\rho_2}$, то образуются две ударные волны, бегущие в противоположных направлениях. Обозначая $\sqrt[4]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ через α и вводя положительный корень θ уравнения

$$\frac{u_1 - u_2}{a\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)} = \theta - \frac{1}{\theta},$$

мы убеждаемся, на основании § 6 (1), что плотность между разрывами даётся равенством $\rho' = \theta\theta\sqrt{\rho_1\rho_2}$, и вследствие § 5 (1) получаем скорость разрыва, бегущего вперёд,

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\alpha\theta = u' + \frac{a}{\alpha\theta},$$

и бегущего назад

$$\frac{d\xi}{dt} = u_1 - a\,\frac{\theta}{\alpha} = u' - a\,\frac{\alpha}{\theta};$$

по истечении времени t, если x удовлетворяет неравенству

$$\left(u_1 - a\,\frac{\theta}{\alpha}\right)t < x < (u_2 + a\alpha\theta)\,t,$$

то значения скорости и плотности будут u' и ρ', для меньших значений x будут u_1 и ρ_1, для бо́льших u_2 и ρ_2.

II. Если $u_1 - u_2 < 0$, так что две массы газа расходятся в разные стороны, и вместе с тем

$$\left(\frac{u_1 - u_2}{a}\right)^2 \geqslant \left(\log\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2,$$

то в обе стороны от разделяющей их точки удаляются две постепенно суживающиеся волны разрежения. На основании § 4 между ними $r = r_1$, $s = s_2$, $u = r_1 - s_2$. В волне, идущей вперёд, $s = s_2$, и $x - (u + a)\,t$ есть функция r, значение которой определяется из начальных условий при $t = 0$, $x = 0$, и оказывается равным нулю; в волне, идущей назад, $r = r_1$ и $x - (u - a)\,t = 0$. Таким образом, если x удовлетворяет неравенству

$$(r_1 - s_2 + a)\,t < x < (u_2 + a)\,t,$$

первое уравнение для определения u и ρ есть $u = -a + \frac{x}{t}$; для меньших x оно будет $r = r_1$, для бо́льших $r = r_2$. Другое уравнение при выполнении неравенства

$$(u_1 - a)\,t < x < (r_1 - s_2 - a)\,t$$

будет $u = a + \frac{x}{t}$; для меньших x и для бо́льших x будет соответственно $s = s_1$ и $s = s_2$.

III. Если не имеет места ни тот ни другой случай, и притом $\rho_1 > \rho_2$, то возникает бегущая назад волна разрежения и бегущий вперёд разрыв сгущения. Вводя корень θ уравнения

$$\frac{2\,(r_1 - r_2)}{a} = 2\,\log\theta + \theta - \frac{1}{\theta},$$

находим для разрыва, согласно § 5 (3), $\rho' = \theta\theta\rho_2$ и, согласно § 5 (1),

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\theta = u' + \frac{a}{\theta}.$$

По истечении времени t перед разрывом, т. е. при $x > (u_2 + a\theta)\,t$, будет $u = u_2$, $\rho = \rho_2$, а позади него $r = r_1$ и, кроме того, при

$$(u_1 - a)t < x < (u' - a)t$$

будет $u = a + \frac{x}{t}$, для меньших x $u = u_1$, для бо́льших $u = u'$.

IV. Если два первых случая не имеют места, и $\rho_1 < \rho_2$, то всё протекает, как в случае III, но меняется направление.

8 [4]

Чтобы наша задача была полностью разрешена, нужно (§ 3) подобрать функцию w, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0 \tag{1}$$

и начальным условиям.

Исключая заранее случаи возможных разрывов, мы можем сказать, что согласно § 1 место и время, т. е. значения x и t, при которых r и s принимают некоторые значения r' и s', определяются полностью, если задаются начальные значения r и s на отрезке между значением r' величины r и значением s' величины s, и если дифференциальные уравнения (3) § 1 выполнены всюду в области (S), которая при любом значении t охватывает все значения x, заключённые между теми двумя значениями, для которых $r = r'$ и $s = s'$. Таким образом, и значение w при $r = r'$, $s = s'$ вполне определено, если везде в области (S) удовлетворено уравнение (1) и для начальных значений r и s заданы значения $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$, а следовательно, с точностью до аддитивной константы, также и значения w, причём константа — произвольная. Действительно, эти условия равносильны предыдущим. Из § 3 также следует, что производная $\frac{\partial w}{\partial r}$ по обе стороны от значения $r = r''$ (предполагая, что такое значение достигается в конечном промежутке) принимает различные значения, однако, изменяется всюду непрерывно при изменении s; и точно так же $\frac{\partial w}{\partial s}$ относительно r; сама же функция w всюду непрерывна как относительно r, так и относительно s.

После этих вступительных замечаний мы можем перейти к решению нашей задачи, т. е. к определению значения w для заданных значений $r = r'$, $s = s'$.

Для большей наглядности будем считать, что x и t — абсцисса и ордината точки на плоскости; на этой же плоскости вообразим кривые, на которых r и s постоянны. Первые из этих кривых будем обозначать через (r), вторые через (s); условимся на этих кривых отсчитывать положительные направления в сторону возрастающих t. Область (S) представится в виде части плоскости, которая ограничена кривой (r'), кривой (s') и заключённым между ними отрезком оси абсцисс. Речь идёт о том, чтобы определить значение w в точке пересечения двух первых кривых по значениям, заданным на отрезке оси абсцисс. Мы ещё несколько обобщим задачу и допустим, что область (S), вместо отрезка оси абсцисс, ограничена некоторой кривой (c), пересекающей каждую из кривых (r) и (s) не более одного раза, и что для всех пар значений r и s, отвечающих точкам кривой (c), указаны соответствующие значения $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$. Как выяснится сейчас из решения задачи, значения $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$ должны быть подчинены единственному ограничению — изменяться непрерывно при движении по кривой (c), — тогда как, если бы кривая (c) пересекала кривые (r) и (s) больше одного раза, эти значения не могли бы быть взяты вполне произвольными.

Чтобы определить функции, которые удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению в частных производных и линейным граничным условиям, можно прибегнуть к приёму, сходному с приёмом, употребительным при решении системы линейных уравнений, когда данные уравнения складывают, умножив предварительно на неопределённые множители, и затем подбирают множители так, чтобы выпали все неизвестные, кроме одной.

Представим себе, что область (S) разбита кривыми (r) и (s) на бесконечно малые параллелограммы; пусть δr и δs — приращения, которые приобретают величины r и s, когда происходит движение по сторонам параллелограмма в положительном направлении. Обозначим через v произвольную функцию переменных r и s, которая всюду непрерывна и имеет непрерывные производные. На основании равенства (1) имеем:

$$0=\int v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s}-m\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right)\delta r\delta s, \tag{2}$$

причём интеграл распространён на всю область (S). Расположим правую часть равенства по неизвестным, т. е. в данном случае преобразуем интеграл посредством интегрирования по частям таким образом, чтобы, кроме известных величин, входила только искомая функция, а не её производные. При этом наш интеграл сначала переходит в сумму интеграла, взятого по (S),

$$\int w\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial mv}{\partial r}+\frac{\partial mv}{\partial s}\right)\delta r\delta s$$

и простого интеграла, который должен быть распространён только по границе области (S), так как $\frac{\partial w}{\partial r}$ непрерывно зависит от s, $\frac{\partial w}{\partial s}$ — от r, а w — от обеих этих переменных. Условимся приращения r и s на граничных кривых обозначать через dr и ds, причём будем предполагать, что направление движения так расположено относительно внутренней нормали, как положительное направление кривой (r) относительно положительного направления кривой (s). Тогда упомянутый простой интеграл по границе равен

$$-\int\left(v\left(\frac{\partial w}{\partial s}-mw\right)ds+w\left(\frac{\partial v}{\partial r}+mv\right)\partial r\right).$$

Интеграл по всей границе (S) равен сумме интегралов по кривым (c), (s'), (r'), образующим эту границу, т. е., если обозначим точки пересечения через (c, r'), (c, s'), (r', s'), он равен

$$\int\limits_{c,\,r'}^{c,\,s'}+\int\limits_{c,\,s'}^{r',\,s'}+\int\limits_{s',\,r'}^{c,\,r'}.$$

Из этих трёх интегралов первый, кроме функции v, содержит лишь известные величины, второй, так как для него $ds=0$, — только неизвестную функцию w, а не её производные; третий после интегрирования по частям принимает вид

$$(vw)_{r',\,s'}-(vw)_{c,r'}+\int\limits_{s',r'}^{c\,r'}w\left(\frac{\partial v}{\partial s}+mv\right)ds,$$

так что сюда входит тоже только сама неизвестная функция w.

Теперь ясно, что из уравнения (2) можно получить значение функции w в точке (r', s'), выраженное через заданные величины, если подчиним произвольную функцию v следующим ограничениям:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \text{всюду в } (S) \text{ должно быть}\\
&\qquad\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial mv}{\partial r}+\frac{\partial mv}{\partial s}=0.\\
&2)\ \text{при } r=r':\qquad \frac{\partial v}{\partial s}+mv=0.\\
&3)\ \text{при } s=s':\qquad \frac{\partial v}{\partial r}+mv=0.\\
&4)\ \text{при } r=r',\ s=s':\ v=1.
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

В таком случае будем иметь:

$$w_{r',\,s'}=(vw)_{c,\,r'}+\int\limits_{c\,,\,r'}^{c,\,s'}\left(v\left(\frac{\partial w}{\partial s}-mw\right)ds+w\left(\frac{\partial v}{\partial r}+mv\right)dr\right).\tag{4}$$

9

Изложенный выше метод нахождения интеграла линейного дифференциального уравнения с линейными граничными условиями сведён, таким образом, к решению подобной же, но гораздо более простой задачи нахождения функции v: вычисление этой функции совершается проще всего посредством применения метода Фурье к частному случаю поставленной общей задачи. Мы ограничимся тем, что лишь вкратце укажем это вычисление, и справедливость полученного результата докажем иным путём [5].

Введём в уравнение (1) предыдущего параграфа, вместо переменных r и s, переменные $\sigma = r + s$ и $u = r - s$, а в качестве кривой (c) возьмём кривую, на которой σ имеет постоянное значение. Тогда задачу можно решить по правилам Фурье и, пользуясь формулой (4) и положив $r' + s' = \sigma'$, $r' - s' = u'$, тогда получим:

$$v = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \cos\mu(u - u') \frac{d\rho}{d\sigma} (\psi_1(\sigma')\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma')\psi_1(\sigma))\, d\mu,$$

где $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ — два таких, частных интеграла уравнения $\psi'' - 2m\psi' + \mu\mu\psi = 0$, что

$$\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1' = \frac{d\sigma}{d\rho}.$$

Допуская закон Пуассона, будем иметь $m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{\sigma}$; тогда ψ_1 и ψ_2 выражаются через определённые интегралы, так что v получается в виде тройного интеграла, и после редукции получаем:

$$v = \left(\frac{r' + s'}{r + s}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}} F\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k-1},\ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + s)(r' + s')}\right).$$

Правильность решения легко проверить, убеждаясь, что полученное выражение, действительно, удовлетворяет требованиям (3) предыдущего параграфа.

Если положим $v = e^{-\int\limits_{\sigma'}^{\sigma} m\,d\sigma} y$, то для y получим требование:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r\, \partial s} + \left(\frac{dm}{d\sigma} - mm\right) y = 0,$$

и должно быть $y = 1$, как при $r = r'$, так и при $s = s'$. В случае закона Пуассона этим требованиям можно удовлетворить, полагая, что y есть функция от $z = -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + s)(r' + s')}$. В самом деле, тогда будем иметь, обозначив $\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}$ через λ:

$$m = \frac{\lambda}{\sigma}, \quad \frac{dm}{d\sigma} - mm = -\frac{\lambda + \lambda^2}{\sigma^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s\, \partial r} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d^2 y}{d \log z^2}\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{dy}{d \log z}\right).$$

Следовательно, $v=\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\lambda} y$, и y есть решение дифференциального уравнения

$$(1-z)\frac{d^2z}{d\log z^2}-z\frac{dy}{d\log z}+(\lambda+\lambda^2)zy=0,$$

т. е. согласно введённым мною в мемуаре о Гауссовом ряде обозначениям, — функция вида

$$P\begin{pmatrix}0 & -\lambda & 0 & \\ 0 & 1+\lambda & 0 & z\end{pmatrix},$$

притом такая, которая при $z=0$ обращается в единицу.

На основании принципов преобразований, изложенных в упомянутой моей работе, y можно выразить не только через функции $P(0,\ 2\lambda+1,\ 0)$, но также и через функции $P\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \lambda+\frac{1}{2}\right)$, $P\left(0,\ \lambda+\frac{1}{2},\ \lambda+\frac{1}{2}\right)$; таким образом, для y получается множество представлений с помощью гипергеометрических рядов и определённых интегралов. Мы отметим лишь следующие из них, которые являются достаточными во всех случаях:

$$y=F\ (1+\lambda,\ -\lambda,\ 1,\ z)=(1-z)^{\lambda}F\left(-\lambda,\ -\lambda,\ 1,\ \frac{z}{z-1}\right)=$$
$$=(1-z)^{-1-\lambda}F\left(1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1,\ \frac{z}{z-1}\right).$$

Чтобы из этих результатов, полученных при допущении закона Пуассона, получить соответствующие результаты для случая закона Бойля, достаточно, как было указано в § 2, величины r, s, r', s' уменьшить на $\frac{a\sqrt{k}}{k-1}$ и затем заставить k стремиться к единице; при этом получим:

$$m=-\frac{1}{2a},\quad v=e^{\frac{1}{2a}(r-r'+s-s')}\sum_{0}^{\infty}\frac{(r-r')^n(s-s')^n}{n!\,n!\,(2a)^{2n}}.$$

10

Если выражение для v, найденное в предыдущем параграфе, подставить в равенство (4) § 8, то значение функции w в точке $r=r'$, $s=s'$ будет выражено через значения w, $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$ на кривой (c). Но так как в нашей задаче предполагаются непосредственно заданными на этой кривой лишь значения $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial w}{\partial s}$, а w должно быть получено с помощью квадратуры, то целесообразно преобразовать выражение для $w_{r',s'}$ таким образом, чтобы под знаком интеграла фигурировали лишь производные от w.

Обозначим интегралы выражений $-mv\,ds+\left(\frac{\partial v}{\partial r}+mv\right)dr$ и $\left(\frac{\partial v}{\partial s}+mv\right)ds-mv\,dr$ (каковые вследствие уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial\, mv}{\partial r}+\frac{\partial\, mv}{\partial s}=0$$

являются полными дифференциалами) через P и Σ, а интеграл от выражения $P\,dr+\Sigma\,ds$ (каковое вследствие $\frac{\partial P}{\partial s}=-mv=\frac{\partial \Sigma}{\partial r}$ также есть полный дифференциал) — через ω.

Если в этих интегралах определим аддитивные константы таким образом, чтобы ω, $\frac{\partial\omega}{\partial r}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial s}$ обращались в нуль при $r=r'$, $s=s'$, то окажется, что ω удовлетворяет уравнениям $\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial s}+1=v$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial s}=-mv$, и притом будет равно нулю как при $r=r'$, так и при $s=s'$, и — заметим кстати — однозначно определяется этими граничными условиями и уравнением

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial s}+m\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial s}+1\right)=0.$$

Вводя в выражение для $w_{r',\,s'}$ вместо v функцию ω, преобразуем его посредством интегрирования по частям к виду

$$w_{r',\,s'}=w_{c,\,r'}+\int\limits_{c,\,r'}^{c,\,s'}\left(\left(\frac{\partial\omega}{\partial s}+1\right)\frac{\partial r}{\partial s}\,ds-\frac{\partial\omega}{\partial r}\,\frac{\partial w}{\partial r}\,dr\right). \qquad (1)$$

Чтобы определить движение газа по его начальному состоянию, возьмём в качестве кривой (c) кривую, на которой $t=0$; на этой кривой $\frac{\partial w}{\partial r}=x$, $\frac{\partial w}{\partial s}=-x$, и ещё одно интегрирование по частям приводит к формуле:

$$w_{r',\,s'}=w_{c,\,r'}+\int\limits_{c,\,r'}^{c,\,s'}(\omega\,dx-x\,ds),$$

следовательно, согласно § 3, (4) и (5),

$$\left.\begin{aligned}(x-(\sqrt{\varphi'(\rho)}+u)\,t)_{r',\,s'}&=x_{r'}+\int\limits_{x_{r'}}^{x}\frac{\partial\omega}{\partial r'}\,dx\\(x+(\sqrt{\varphi'(\rho)}-u)\,t)_{r',\,s'}&=x_{s'}-\int\limits_{x_{r'}}^{x_{s'}}\frac{\partial\omega}{\partial s'}\,dx.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Эти уравнения (2) лишь постольку, однако, выражают движение газа, поскольку величины

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1\right) t \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\rho)}}{d \log \rho} + 1\right) t$$

не обращаются в нуль. Но если одна из этих величин обращается в нуль, то возникает ударная волна, и тогда уравнение (1) останется в силе лишь внутри областей, лежащих по одну и ту же сторону разрыва. Изложенные здесь принципы, по крайней мере в общем случае, недостаточны, чтобы при наступлении указанных обстоятельств определить движение по начальным условиям; сделать это оказывается возможным с помощью соотношения (1) и тех уравнений, которые были получены для разрыва в § 5, если только будет указано местонахождение этого разрыва в момент времени t, т. е. ξ будет задано как функция t. Однако, на этом мы закончим наше изложение, оставляя также в стороне рассмотрение случая, когда воздушная среда ограничена твёрдой стенкой, так как здесь не возникает особых вычислительных трудностей, а сравнение с опытом в настоящее время едва ли возможно.

XXII. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ЭЛЛИПСОИДЕ

Проблема распространения тепла в однородном изотропном теле связывается, согласно теории Фурье, с интегрированием дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{1}$$

где a^2 есть положительная постоянная (отношение теплопроводности к произведению плотности и теплоёмкости). Требуется найти функцию u, которая внутри данного тела удовлетворяла бы уравнению (1), при $t = 0$ обращалась бы в заданную функцию координат (начальное тепловое состояние) и на поверхности тела подчинялась бы ещё некоторому условию, например, обращалась бы в заданную функцию.

Если речь идёт о теле, ограниченном эллипсоидом с полуосями $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, то можно ввести эллиптические координаты и обозначить через λ, μ, ν три корня кубического уравнения

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} - 1 \equiv f(\lambda) = 0, \tag{2}$$

допуская при этом, что

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha,$$

так что на поверхности эллипсоида $\lambda = 0$.

Преобразование уравнения (1) легче всего выполнить по методу Якоби. Дифференцирование (2) нам даёт:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x}{\alpha - \lambda} + f'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \\ \frac{2y}{\beta - \lambda} + f'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0 \\ \frac{2z}{\gamma - \lambda} + f'(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$f'(\lambda) = \frac{x^2}{(\alpha - \lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda)^2} = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{\theta(\lambda)}, \tag{4}$$

причём для сокращения положено

$$(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)=\theta(\lambda). \tag{5}$$

Далее, из (3) и (4) следует:

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{f'(\lambda)}. \tag{6}$$

Затем получается в новых координатах следующее выражение для элемента объёма:

$$d\tau=\frac{1}{8}\sqrt{f'(\lambda)f'(\mu)f'(\nu)}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu;$$

отсюда вытекает преобразование интеграла, распространённого на произвольную пространственную область:

$$\iiint\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)^2\frac{1}{f'(\lambda)}+\left(\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)^2\frac{1}{f'(\mu)}+\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2\frac{1}{f'(\nu)}\right)\frac{1}{2}\sqrt{f'(\lambda)f'(\mu)f'(\nu)}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

Если от обеих частей возьмём первую вариацию, то получим интересующее нас преобразование:

$$\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\frac{1}{4}\sqrt{f'(\lambda)f'(\mu)f'(\nu)}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}\sqrt{\frac{f'(\mu)f'(\nu)}{f'(\lambda)}}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial\mu}\sqrt{\frac{f'(\nu)f'(\lambda)}{f'(\mu)}}\frac{\partial u}{\partial\mu}+\frac{\partial}{\partial\nu}\sqrt{\frac{f'(\lambda)f'(\mu)}{f'(\nu)}}\frac{\partial u}{\partial\nu}.$$

Вводя обозначения (4) и (5), приведём дифференциальное уравнение (1) к виду

$$-(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=4a^2\left\{(\mu-\nu)\sqrt{\theta(\lambda)}\frac{\partial\sqrt{\theta(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial\lambda}}{\partial\lambda}+(\nu-\lambda)\sqrt{\theta(\mu)}\frac{\partial\sqrt{\theta(\mu)}\frac{\partial u}{\partial\mu}}{\partial\mu}+\right.$$

$$\left.+(\lambda-\mu)\sqrt{\theta(\nu)}\frac{\partial\sqrt{\theta(\nu)}\frac{\partial u}{\partial\nu}}{\partial\nu}.\right\} \tag{7}$$

Чтобы найти частные интегралы этого уравнения, положим

$$u=e^{-4a^2g^2t}u_\lambda u_\mu u_\nu, \tag{8}$$

где g — произвольная постоянная, и u_λ зависит только от λ, u_μ — только от μ, u_ν — только от ν. Тогда, вводя обозначение

$$U_\lambda = \frac{\sqrt{\theta(\lambda)}}{u_\lambda} \frac{d\sqrt{\theta(\lambda)}\frac{du_\lambda}{d\lambda}}{d\lambda} \tag{9}$$

(так что U_λ есть функция только одной переменной λ) и аналогичные обозначения U_μ и U_ν, мы получим:

$$g^2(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu) = (\mu-\nu)U_\lambda + (\nu-\lambda)U_\mu + (\lambda-\mu)U_\nu. \tag{10}$$

Двукратное дифференцирование по λ даёт:

$$-2g^2 = \frac{d^2U_\lambda}{d\lambda^2},$$

откуда следует

$$U_\lambda = -g^2\lambda^2 - h\lambda - k,$$

и точно так же

$$U_\mu = -g^2\mu^2 - h\mu - k,$$
$$U_\nu = -g^2\nu^2 - h\nu - k,$$

где произвольные постоянные h и k должны быть одними и теми же во всех трёх формулах, чтобы выполнялось равенство (10).

Таким образом, обращаясь к формуле (9), мы видим, что u_λ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\sqrt{\theta(\lambda)} \frac{d\sqrt{\theta(\lambda)}\frac{du}{d\lambda}}{d\lambda} + (g^2\lambda^2 + h\lambda + k)u = 0,$$

или, в рациональном виде,

$$\theta(\lambda)\frac{d^2u}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\theta'(\lambda)\frac{du}{d\lambda} + (g^2\lambda^2 + h\lambda + k)u = 0; \tag{11}$$

такие же уравнения получаются и для u_μ, u_ν — с заменой λ на μ или ν.

XXIII. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОЧИНЕНИЕ, В КОТОРОМ СОДЕРЖИТСЯ ПОПЫТКА ДАТЬ ОТВЕТ НА ВОПРОС, ПРЕДЛОЖЕННЫЙ ЗНАМЕНИТЕЙШЕЙ ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМИЕЙ:

«Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes» [1]**.**

Et his principiis via sternitur ad majora [2].

1

Вопрос, поставленный Знаменитейшей Академией, мы будем исследовать следующим образом: сначала дадим решение более общего вопроса

— каковы должны быть свойства тела, определяющие движение и распределение тепла, чтобы можно было указать систему кривых, постоянно остающихся изотермами,

затем

— из общего решения этой проблемы отберём те случаи, в которых эти свойства повсюду остаются одинаковыми, т. е. тело — однородное.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

2

Обращаясь к изучению первого вопроса, рассмотрим движение тепла в каком угодно теле. Как известно, если обозначим через u температуру

[1] Определить, каково должно быть тепловое состояние произвольного твёрдого тела, чтобы система изотермических кривых, заданная в определённый момент времени, оставалась системой изотермических кривых в любой момент времени, т. е. чтобы температура точки выражалась в виде функции времени и ещё двух других вспомогательных переменных.

[2] Исходя из этих принципов, путь простирается и к большему.

в момент времени t в точке (x_1, x_2, x_3), то общее уравнение, которому подчинена функция u, имеет вид

$$\frac{\partial\left(a_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{1,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{1,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(a_{2,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{2,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{2,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_2}+$$

$$+\frac{\partial\left(a_{3,1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{3,2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{3,3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_3}=h\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad \text{(I)}$$

В этом уравнении величины a обозначают коэффициенты проводимости h — коэффициент теплоёмкости, отнесённый к единице объёма, т. е. произведение теплоёмкости на плотность; все они могут быть рассматриваемы как произвольные функции тех же переменных x_1, x_2, x_3. Мы ограничим наше исследование случаем, когда проводимость в двух противоположных направлениях — одинаковая, т. е. между величинами a существуют соотношения

$$a_{i,i'}=a_{i',i}.$$

Кроме того, так как тепло неизбежно переходит из более тёплого места в более холодное, то квадратическая форма

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,1} & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

должна быть положительной.

3

В уравнении (1), вместо прямоугольных координат x_1, x_2, x_3, мы введём произвольные три новых независимых переменных s_1, s_2, s_3.

Это преобразование уравнения (1) может быть выполнено очень легко по той причине, что названное уравнение представляет собою условие, необходимое и достаточное для того, чтобы (если обозначим через δu произвольную бесконечно малую вариацию величины u) интеграл

$$\delta\int\int\int\sum_{i,i'}a_{i,i'}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_{i'}}dx_1dx_2dx_3+\int\int\int 2h\frac{\partial u}{\partial t}\delta u\,dx_1dx_2dx_3, \qquad (A)$$

распространённый по всему телу, зависел только от значения вариации δu на поверхности тела. После введения новых переменных выражение (A) превращается в следующее:

$$\delta\int\int\int\sum b_{i,i'}\frac{\partial u}{\partial s_i}\frac{\partial u}{\partial s_{i'}}ds_1ds_2ds_3+\int\int\int 2k\frac{\partial u}{\partial t}\delta u ds_1ds_2ds_3, \qquad (B)$$

причём для краткости положено:

$$\frac{\sum\limits_{i,i'} a_{i,i'} \frac{\partial s_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial s_\nu}{\partial x_{i'}}}{\sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{\partial s_3}{\partial x_3}} = b_{\mu,\nu}, \qquad \frac{h}{\sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{\partial s_3}{\partial x_3}} = k.$$

Пусть определители квадратических форм

$$(1) \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,1} & a_{1,2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (2) \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,2} & b_{3,3} \\ b_{2,3} & b_{3,1} & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

будут A и B, а сопряжённые формы обозначены соответственно

$$(3) \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,3} \\ \alpha_{2,3} & \alpha_{3,1} & \alpha_{1,2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (4) \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{2,2} & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3} & \beta_{3,1} & \beta_{1,2} \end{pmatrix}:$$

тогда

$$A = B \sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{\partial s_3}{\partial x_3},$$

и притом

$$\beta_{\mu,\nu} = \sum_{i,i'} \alpha_{i,i'} \frac{\partial x_i}{\partial s_\mu} \frac{\partial x_{i'}}{\partial s_\nu},$$

и потому

$$\sum_{i,i'} a_{i,i'} dx_i dx_{i'} = \sum_{i,i'} \beta_{i,i'} ds_i ds_{i'}$$

и

$$\frac{h}{A} = \frac{k}{B}.$$

Отсюда легко заключить, что преобразование уравнения (1) приводится к преобразованию выражения $\sum\limits_{i,i'} \alpha_{i,i'} dx_i dx_{i'}$.

Таким образом, мы можем наметить следующее решение нашей общей проблемы. Сначала выясним, каковы должны быть функции $b_{i,i'}$ переменных s_1, s_2, s_3, чтобы величина u могла не зависеть от одной из этих переменных. Решив этот вопрос, мы сможем построить выражение $\sum \beta_{i,i'} ds_i ds_{i'}$. Затем, чтобы узнать, при данных значениях величин $a_{i,i'}$ и h, может ли, и в каких именно случаях, величина u быть выражена как функция времени и только двух переменных, — нужно будет установить, может ли выражение $\sum \beta_{i',i} ds_i ds_{i'}$ быть преобразовано в заданную форму: а этот вопрос, как увидим ниже, решается почти тем же методом, каким Гаусс воспользовался в своей теории кривых поверхностей.

4

Итак, мы спрашиваем прежде всего, каковы должны быть функции $b_{i,i'}$ и k переменных s_1, s_2, s_3, чтобы u могло не зависеть от одной из этих переменных. Для большей простоты обозначим s_1, s_2, s_3 через α, β, γ и форму (2) — через $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$. Если u не зависит от γ, то дифференциальное уравнение имеет вид:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + 2c'\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + b\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + e\frac{\partial u}{\partial\alpha} + f\frac{\partial u}{\partial\beta} - k\frac{\partial u}{\partial t} = F = 0, \tag{II}$$

причём положено

$$\frac{\partial a}{\partial\alpha} + \frac{\partial c'}{\partial\beta} + \frac{\partial b'}{\partial\gamma} = e, \quad \frac{\partial b}{\partial\beta} + \frac{\partial c'}{\partial\alpha} + \frac{\partial a'}{\partial\gamma} = f.$$

Придавая γ различные значения, мы получим из уравнения (II), связывающего шесть производных величины u, различные уравнения, коэффициенты которых не будут содержать γ. Пусть среди этих уравнений независимыми являются следующие:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_m = 0,$$

так что каждое иное уравнение есть следствие этих. Уравнение $F = 0$ вытекает из этих m уравнений, каково бы ни было значение γ, откуда ясно, что F должно иметь вид

$$c_1F_1 + c_2F_2 + \ldots + c_mF_m,$$

причём от γ зависят только величины c.

Рассмотрим теперь несколько внимательнее отдельные случаи, когда $m = 1, 2, 3, 4$, и вместе с тем постараемся написать в возможно более простом виде те не зависящие от γ уравнения, из которых составляется уравнение $F = 0$.

Первый случай: $m = 1$.

Если $m = 1$, то в уравнении (II) отношения коэффициентов не зависят от γ. Вводя вместо γ новую переменную $\int k d\gamma$, всегда можно добиться того, чтобы k было равно 1, и тогда все коэффициенты окажутся не зависящими от γ. Затем, вводя вместо α, β некоторые новые переменные, можно обратить в нуль коэффициенты a и b. Для этого достаточно выражение $b\,d\alpha^2 + 2c'\,d\alpha\,d\beta + a\,d\beta^2$ (которое не может быть квадратом линейной дифференциальной формы, раз форма (2) — положительная) привести к виду $m\,d\alpha'\,d\beta'$ и тогда взять величины α', β' за независимые переменные.

После этого дифференциальное уравнение (II) в рассматриваемом случае примет вид

$$2c'\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + e\frac{\partial u}{\partial\alpha} + f\frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

причём в форме (2) будем иметь $a = b = 0$, a' и b' будут линейными функциями γ, а c' не будет зависеть от γ. В таком случае совершенно ясно, что температура будет всегда оставаться независимой от γ, если начальная температура есть произвольная функция одних только переменных α и β.

Второй случай: $m = 2$.

Если уравнение (II) составляется из двух уравнений, не зависящих от γ, то с помощью одного уравнения можно исключить $\frac{\partial u}{\partial t}$ из другого. Вновь полученное уравнение запишем вкратце в виде

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

и другое — в виде

$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2}$$

обозначая через Λ и Δ характеристические выражения, содержащие операции ∂_α и ∂_β.

Легко понять, что посредством замены независимых переменных первое из написанных уравнений может быть преобразовано таким образом, что Δ примет вид

$$\partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta,$$

или

$$\partial^2_\alpha + e\partial_\alpha + f\partial_\beta,$$

или

$$\partial_\alpha,$$

причём не исключено, что $e = 0$, $f = 0$.

Так как

$$0 = \partial_t \Delta u = \Delta \partial_t u = \Delta \Lambda u,$$

то из уравнений (1) и (2) следует

$$\Delta \Lambda u = 0. \tag{3}$$

Здесь возможны два случая: или (α) уравнение (3) вытекает из (1), т. е.

$$\Delta \Lambda = \theta \Delta,$$

где θ — новое характеристическое выражение, или (β) уравнение (3) не вытекает из (1) и представляет собою новое уравнение, независимое от Δu.

Желая исследовать случай (α) по крайней мере для одной из форм Δ, допустим, что

$$\Delta = \partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta.$$

Тогда $\Delta \Lambda u$ с помощью уравнения $\Delta u = 0$ может быть приведено к выражению, которое будет содержать производные лишь по одной из независимых переменных и должно будет иметь все коэффициенты, равные нулю. Предполагая, что член $\partial_\alpha\partial_\beta$ уничтожен с помощью уравнения $\Delta u = 0$, положим

$$\Lambda = a\partial_\alpha^2 + b\partial_\beta^2 + c\partial_\alpha + d\partial_\beta,$$

и построим выражение

$$\Delta\Lambda - \Lambda\Delta.$$

Так как в этом выражении коэффициенты при ∂_α^3, ∂_β^3 должны обратиться в нуль, то мы получаем $\frac{\partial a}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial b}{\partial \alpha} = 0$, откуда ясно, что, исключая особые случаи $a = 0$, $b = 0$, посредством надлежащей замены независимых переменных можно притти к результату $a = 1$, $b = 1$. В таком случае мы получаем, приравнивая нулю коэффициенты при ∂_α^2, ∂_β^2 в выражении $\Delta\Lambda$,

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = 2\frac{\partial e}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial d}{\partial \alpha} = 2\frac{\partial f}{\partial \beta},$$

и тогда можно положить:

$$\Delta = \partial_\alpha\partial_\beta + \frac{\partial m}{\partial \beta}\partial_\alpha + \frac{\partial n}{\partial x}\partial_\beta,$$

$$\Lambda = \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 + 2\frac{\partial m}{\partial \alpha}\partial_\alpha + 2\frac{\partial n}{\partial \beta}\partial_\beta,$$

обозначив через m, n некоторые функции переменных α, β, которые должны удовлетворять двум дифференциальным уравнениям, чтобы в выражении $\Delta\Lambda$ исчезли коэффициенты при ∂_α, ∂_β.

Совершенно таким же образом в остальных особых случаях удаётся найти простейшие формы Δ и Λ, при которых удовлетворяется условие

$$\Delta\Lambda = \theta\Delta.$$

Но мы не будем здесь задерживаться на этом несколько более пространном исследовании.

Легко понять, что в рассматриваемом случае температура всегда будет оставаться независимой от γ, раз только начальная температура есть некоторая функция величин α, β, удовлетворяющая уравнению $\Delta u = 0$; в самом деле, из уравнений

$$\Delta u = 0$$

$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

следует $0 = \theta\Delta u = \Delta\Lambda u = \Delta\partial_t u = \frac{\partial \Delta u}{\partial t}$, и значит, уравнение $\Delta u = 0$ продолжает иметь место в любой момент, если имеет место в начальный момент, и функция u подчиняется уравнению $\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$. Тогда движение тепла удовлетворяет и уравнению $F = 0$.

5

Остаётся рассмотреть второй особый случай (β), когда уравнение $\Delta\Delta u = 0$ не следует из $\Delta u = 0$. С целью охватить одновременно и следующие случаи $m = 3$, $m = 4$, сделаем общее предположение о том, что, кроме уравнения $\Delta u = 0$, имеется ещё некоторое линейное дифференциальное уравнение $\theta u = 0$, не содержащее $\frac{\partial u}{\partial t}$ и не вытекающее из $\Delta u = 0$.

Если Δ имеет вид $\partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$, то с помощью уравнения $\Delta u = 0$ выражение θ может быть освобождено от производных по обеим переменным.

Здесь нужно различать два случая.

Если из выражения θ сразу выпадают все производные по одной из переменных, например, β, то получается дифференциальное уравнение, содержащее производные только по α, имеющее вид

$$\sum_\nu \alpha_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu} = 0; \tag{1}$$

в противном же случае всегда можно получить дифференциальное уравнение вида

$$\sum_\nu \alpha_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0, \tag{2}$$

т. е. содержащее только производные по переменной t.

Действительно, в этом случае выражения Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ..., в которых производные от u по t равны, с помощью уравнений $\Delta u = 0$, $\theta u = 0$ всегда могут быть преобразованы таким образом, что будут содержать только производные по одной из переменных, и притом не более высокого порядка, чем в выражении θu. Так как число их — конечное, то посредством исключений получим уравнение вида (2). Коэффициенты a_ν в обоих уравнениях зависят от α, β.

Нужно заметить, что одно из написанных выше уравнений будет непременно выполняться — даже если Δ не имеет вида $\partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\beta + f\partial_\beta$. Тот случай когда $\Delta = \partial_\alpha^2 + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$ приводится к предыдущим, так как с помощью уравнения $\Delta u = 0$ или из θu или из Δu можно исключить все производные по β, после чего легко получается уравнение вида (1) или (2). Если $f = 0$, или если $\Delta = \partial_\alpha$, придём также к первому из упомянутых случаев.

Второй из упомянутых случаев мы рассмотрим теперь внимательнее. Как известно, общее решение уравнения

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0$$

составляется из членов вида $f(t)e^{\lambda t}$, где $f(t)$ — целая функция от t, и λ не зависит от t, причём легко понять, что каждый из такого рода членов должен удовлетворять уравнению (1). Мы покажем, что λ не может зависеть от x_1, x_2, x_3.

Пусть kt^n — старший член функции $f(t)$. Рассмотрим два случая.

1°. Если λ — действительное, или же вида $\mu+\nu i$, где μ, ν — функции от одной переменной α (зависящей от x_1, x_2, x_3), то, подставив $u=f(t)\,e^{\lambda t}$ в левую часть уравнения (1), убедимся, что коэффициент при $t^{n+2}e^{\lambda t}$ будет

$$=k\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)^2\sum_{i,i} a_{i,i'}\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\,\frac{\partial\alpha}{\partial x_{i'}}.$$

Так как форма

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,1} & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

положительная, то это выражение может обратиться в нуль только при условии

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}=\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}=\frac{\partial\alpha}{\partial x_3}=0,$$

т. е. при $\alpha=\text{const}$.

2°. Если $\lambda=\mu+\nu i$, причём μ, ν — функции независимых переменных x_1, x_2, x_3, то можно взять за новые независимые переменные величины $\mu+\nu i$ и $\mu-\nu i$, и тогда наряду с членом $f(t)\,e^{\alpha t}$ выражение u будет содержать также и комплексный сопряжённый член $\varphi(t)\,e^{\beta t}$. Если

$$\Delta u=a\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+c\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+e\frac{\partial u}{\partial\alpha}+f\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

то, подставляя в уравнение $\Delta u=0$ значение $u=f(t)\,e^{\alpha t}$ и приравнивая нулю коэффициент при $t^{n+2}e^{\alpha t}$, получаем $a=0$, и точно так же, подставляя $u=\varphi(t)\,e^{\beta t}$, получаем $c=0$. Тогда с помощью уравнения $\Delta u=0$ можно преобразовать уравнение $\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t}$ таким образом, что оно будет содержать производные только по одной из переменных. Подставляя затем

$$u=f(t)\,e^{\alpha t},\qquad u=\varphi(t)\,e^{\beta t},$$

мы увидим, что коэффициенты при производной наивысшего порядка будут равняться нулю, так что все производные выпадут из левой части уравнения $\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t}$, что, однако, невозможно, так как по предположению u не сводится к постоянной.

Итак, во втором из упомянутых выше случаев функция u составляется из конечного числа членов вида $f(t)\,e^{\lambda t}$, где λ — постоянное и $f(t)$ — зависит только от t.

В первом же из упомянутых случаев, когда приходится иметь дело с уравнением вида

$$\sum a_\nu\frac{\partial^\nu u}{\partial\alpha^\nu}=0, \tag{1}$$

функция u представится в виде

$$u=\sum_{\nu} q_\nu p_\nu,$$

где p_1, p_2, ... будут частные решения уравнения (1), а q_1, q_2, ... — произвольные постоянные, т. е. функции переменных β и t. Когда подставим это значение u в уравнение

$$\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t},$$

то получится уравнение вида

$$\sum PQ=0,$$

где величины Q — производные от q, т. е. функции одних только β и t, а величины P — функции одних только α и β. Из такого уравнения (как мы видели раньше) получаются μ линейных соотношений между функциями Q и $n-\mu$ соотношений между функциями P, причём коэффициенты в них зависят только от β: здесь n — обозначает число членов в рассматриваемом уравнении, а μ — одно из чисел 0, 1, 2, ... n. Отсюда получатся независящие от α выражения для производных $\frac{\partial q}{\partial t}$ через производные от q по β.

Рассмотрим несколько возникающих здесь различных случаев.

Если $m=2$ и Δ имеет вид $\partial_\alpha\partial_\beta+e\partial_\alpha+f\partial_\beta$, то уравнение $\Delta\Lambda u=0$, будучи освобождено от производных по β, примет вид

$$\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3}+r\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+s\frac{\partial u}{\partial\alpha}=0,$$

откуда получим

$$u=ap+bq+c,$$

где a, b, c зависят только от β и t, p и q — только от α и β. Вместо α в качестве независимой переменной введём q, и тогда будем иметь:

$$u=ap+b\alpha+c,$$

где p зависит только от α и β. Подставляя это выражение в уравнения

$$\Delta u=0, \quad \Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t},$$

легко получаем вид коэффициентов.

Остаётся случай, когда уже одно из уравнений, на которые распадается $F=0$, имеет вид (1), т. е.

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+s\frac{\partial u}{\partial\alpha}=0.$$

Тогда $u=ap+b$, где a и b зависят только от β и t, а p — только от α и β. Вводя вместо α переменную p, получим:

$$u=a\alpha+b, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}=0.$$

Итак, мы установили, что в случае, если $m=2$, т. е. если уравнение $F=0$ разбивается на два уравнения

$$\Delta u=0, \quad \Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t},$$

— или должно быть $\Delta\Lambda=\theta\Delta$, или же функция u составляется из конечного числа членов вида $f(t)e^{\lambda t}$, где λ — постоянные, а $f(t)$ — целая функция от t, или же имеет вид

$$\varphi(\beta,t)\chi(\alpha,\beta)+\alpha\varphi_1(\beta,t)+\varphi_2(\beta,t);$$

в случае же, если $m=3$, то функция u составляется из конечного числа членов вида $f(t)e^{\lambda t}$ или же имеет вид

$$\varphi(\beta,t)\alpha+\varphi_1(\beta,t).$$

Наконец, не представляет труда исчерпывающее исследование случая $m=4$.

В самом деле, пусть, кроме уравнения $\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t}$, имеются ещё три уравнения, связывающие между собою величины

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial u}{\partial\beta};$$

отсюда получится уравнение вида

$$r\frac{\partial u}{\partial\alpha}+s\frac{\partial u}{\partial\beta}=0.$$

Независимые переменные можно затем выбрать такие, чтобы u было функцией лишь одной из них, откуда видно, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2},$$

а также Λu, $\Lambda^2 u$, $\Lambda^3 u$, можно выразить через $\frac{\partial u}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial\beta}$. Но тогда получится уравнение вида

$$a\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

и u, очевидно, будет иметь вид

$$pe^{\lambda t}+qe^{\mu t}+r \quad \text{или же} \quad (p+qt)e^{\lambda t}+r,$$

причём, как ясно из предыдущего, λ и μ будут постоянными.

Приняв p за независимую переменную α и подставив последние выражения в уравнение $\Lambda u=\frac{\partial u}{\partial t}$, мы убедимся в невозможности того, чтобы q было функцией одной лишь переменной α, если λ и μ не равны между собою. В таком случае p и q могут быть взяты за независимые переменные. Затем из уравнения $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ получаем $r = \text{const}$.

Итак, в рассматриваемом случае u есть функция переменных t и ещё только одной, или же u имеет вид

$$\alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} + \text{const.} \quad \text{или} \quad (\alpha + \beta t)\, e^{\lambda t} + \text{const.},$$

причём не исключается и значение $\mu = 0$.

После того как найдены все формы, которые может иметь функция u, очень легко построить уравнения $F_\nu = 0$; но ради краткости мы не будем выписывать эти уравнения. Отсюда — в каждом отдельном случае — становится известной квадратическая форма

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}, & b_{2,2}, & b_{3,3} \\ b_{2,3}, & b_{3,1}, & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

и сопряжённая с ней форма

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1}, & \beta_{2,2}, & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3}, & \beta_{3,1}, & \beta_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Наконец, если в выражениях $\sum \beta_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ вместо переменных s_1, s_2, s_3 подставить какие угодно функции x_1, x_2, x_3, то, очевидно, получатся все случаи, когда u может являться функцией времени и двух других переменных. Таким образом получается полное решение первого из занимающих нас вопросов.

Нам остаётся выяснить, когда выражение $\sum \beta_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ может быть преобразовано в наперёд заданную форму $\sum \alpha_{i,i'} dx_i dx_{i'}$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

О преобразовании выражения $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ в заданную форму $\sum\limits_{i,i'} a_{i,i'} dx_i dx_{i'}$.

Так как в рассматриваемой задаче Знаменитейшая Академия предлагает ограничиться случаем, когда тело — однородное, и коэффициенты проводимости в нём — постоянные, то мы установим прежде всего условия, которые обеспечивают возможность преобразовать выражение $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ посредством замены переменных s переменными x к форме $\sum\limits_{i,i'} a_{i,i'} dx_i dx_{i'}$, где коэффициенты $a_{i,i'}$ — постоянные. После этого дадим краткие указания, касающиеся преобразования к формам с переменными коэффициентами.

Если — как мы предполагаем — выражение $\sum\limits_{i,i} a_{i,i'} dx_i dx_{i'}$ есть положительная форма переменных dx, то, как известно, она всегда приводится к виду $\sum\limits_i dx_i^2$. Поэтому, раз $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'} ds_i ds_{i'}$ приводится к виду $\sum\limits_{i,i'} a_{i,i'}\, dx_i\, dx_{i'}$, то приводится также и к виду $\sum\limits_i dr_i^2$, и обратно. Поэтому нам предстоит выяснить, когда рассматриваемое выражение приводится к виду $\sum\limits_i dx_i^2$.

Обозначим детерминант $\sum \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n}$ через B и его частные детерминанты через $\beta_{i,i'}$, так что $\sum\limits_i \beta_{i,i'}\, b_{i,i'} = B$ и $\sum\limits_i \beta_{i,i'}\, b_{i,i''} = 0$ при $i' \lesseqgtr i''$.

Раз равенство $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'}\, ds_i\, ds_i' = \sum\limits_i dx^2_i$ справедливо при каких угодно значениях dx, то, подставляя $d + \delta$ вместо d, мы получим также $\sum\limits_{i,i'} b_{i,i'} ds_i \delta s_{i'} = \sum dx_i \delta x$ при каких угодно значениях dx и δr.

Отсюда, принимая во внимание, что ds_i выражаются через dr_i, а δx_i — через δs_i, следует:

$$\frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu} = \sum_i b_{\nu,i} \frac{\partial s_i}{\partial x_{\nu'}} \tag{1}$$

и

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_{\nu'}} = \sum_\nu \frac{\beta_{\nu,i}}{B} \frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu}\,. \tag{2}$$

Отсюда, с помощью равенств

$$\sum_\nu \frac{\partial s_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_i} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_\nu \frac{\partial s_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_{i'}} = 0 \text{ при } i \lesseqgtr i',$$

выводим дальше, что

$$\sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial s_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_{i'}} = b_{i,i'}, \tag{3}$$

$$\sum_\nu \frac{\partial s_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial s_{i'}}{\partial x_\nu} = \frac{\beta_{i,i'}}{B}, \tag{4}$$

причём дифференцирование формулы (3) даёт:

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_i \partial s_{i''}} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_{i'}} + \sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'} \partial s_{i''}} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_i} = \frac{\partial b_{i,i}}{\partial s_{i''}}\,.$$

Из подобного же рода выражений для величин

$$\frac{\partial b_{i,i'}}{\partial s_{i''}}, \quad \frac{\partial b_{i,i''}}{\partial s_{i'}}, \quad \frac{\partial b_{i',i''}}{\partial s_i}$$

следует соотношение:

$$2 \sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'} \partial s_{i''}} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_i} = \frac{\partial b_{i,i'}}{\partial s_{i''}} + \frac{\partial b_{i,i''}}{\partial s_{i'}} - \frac{\partial b_{i',i''}}{\partial s_i}\,; \tag{5}$$

обозначая последнее выражение через $p_{i,i',i''}$, получим также:

$$2\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'}\partial s_{i''}} = \sum_i \frac{\partial s_i}{\partial x_\nu} p_{i,i',i''}. \tag{6}$$

Дальнейшее дифференцирование величин $p_{i,i',i''}$ нам даёт:

$$\frac{\partial p_{i,i',i''}}{\partial s_{i'''}} - \frac{\partial p_{i,i',i'''}}{\partial s_{i''}} = 2\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'}\partial s_{i''}}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_i \partial s_{i'''}} - 2\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{i'}\partial s_{i'''}}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_i\partial s_{i''}},$$

и отсюда следует, после подстановки значений, взятых из формул (6) и (4):

$$\frac{\partial^2 b_{i,i''}}{\partial s_{i'}\partial s_{i'''}} + \frac{\partial^2 b_{i',i'''}}{\partial s_i \partial s_{i''}} - \frac{\partial^2 b_{i,i'''}}{\partial s_{i'}\partial s_{i''}} - \frac{\partial^2 b_{i',i''}}{\partial s_i\partial s_{i'''}} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu,\nu'}(p_{\nu,i',i'''}\,p_{\nu',i,i''} - p_{\nu,i,i'''}\,p_{\nu',i',i''})\,\frac{\beta_{\nu,\nu'}}{B} = 0. \tag{I}$$

Таким уравнениям, как мы видим, должны удовлетворять функции b, раз $\sum_{i,i'} b_{i,i'}\,ds_i\,ds_{i'}$ приводится к виду $\sum_i dx_i^2$. Обозначим левую часть уравнения (2) через

$$(ii',\ i''i''').$$

Чтобы лучше понять значение уравнений (I), построим выражение

$$\delta\delta\sum b_{i,i'}ds_i ds_{i'} - 2d\delta\sum b_{i,i'}ds_i\delta s_{i'} + dd\sum b_{i,i'}\delta s_i\delta s_{i'},$$

причём вариации второго порядка d^2, $d\delta$, δ^2 определим таким образом, чтобы были справедливы равенства

$$\begin{gathered}\delta'\sum b_{i,i'}ds_i ds_{i'} - \delta\sum b_{i,i'}ds_i\delta' s_{i'} - d\sum b_{i,i'}\delta s_i \delta' s_{i'} = 0\\ \delta'\sum b_{i,i'}\,ds_i ds_{i'} - 2d\sum b_{i,i'}ds_i\delta' s_{i'} = 0\\ \delta'\sum b_{i,i'}\,\delta s_i\delta s_{i'} - 2\delta\sum b_{i,i'}\,\delta s_i\delta' s_{i'} = 0,\end{gathered}$$

где δ' обозначает произвольную вариацию. В таком случае построенное выражение будет

$$= \sum (ii', i''i''')\,(ds_i\delta s_{i'} - ds_{i'}\delta s_i)\,(ds_{i''}\delta s_{i'''} - ds_{i'''}\delta s_{i''}). \tag{II}$$

Из такого рода записи рассматриваемого выражения очевидно, что при замене переменных оно превращается в выражение, составляемое из новой формы по тому же самому закону. Но если коэффициенты b — постоянные, то все коэффициенты в выражении (II) обращаются в нуль. Поэтому, если только форма $\sum b_{i,i'}ds_i ds_{i'}$ приводится к такой же форме с постоянными коэффициентами, то выражение (II) непременно тождественно равно нулю.

Но ясно также, что если выражение (II) не обращается в нуль, то следующее выражение

$$-\frac{1}{2}\frac{\sum (ii', i''i''')(ds_i\delta s_{i'} - ds_{i'}\delta s_i)(ds_{i''}\delta s_{i'''} - ds_{i'''}\delta s_{i''})}{\sum b_{i,i'}ds_ids_{i'} \sum b_{i,i'}\delta s_i\delta s_{i'} - (\sum b_{i,i'}ds_i\delta s_{i'})^2} \tag{III}$$

при замене переменных не изменяется; не изменяется также и в том случае, если вместо вариаций ds_i, δs_i подставить их произвольные линейные комбинации $\alpha ds_i + \beta\delta s_i$, $\gamma ds_i + \delta\delta s_i$. Но наибольшее и наименьшее значение выражения (III), рассматриваемого как функция величин ds_i, δs_i не будут зависеть ни от формы выражения $\sum b_{i,i'}ds_ids_{i'}$, ни от значений вариаций ds_i, δs_i, и таким образом, по этим значениям можно будет узнавать, могут ли два такого рода выражения быть преобразованы одно в другое.

Высказанные соображения допускают геометрические представления, причём, хотя это представление связано с не совсем обычными понятиями, однако, возможно, что сказать о них здесь не будет неуместно.

Выражение $\sqrt{\sum b_{i,i'}ds_ids_{i'}}$ можно рассматривать как линейный элемент в общем n-кратно протяжённом пространстве, лежащем за пределами нашей интуиции. Если в этом пространстве из точки $(s_1, s_2, \ldots s_n)$ провести всевозможные кратчайшие линии, начальные направления которых характеризуются отношениями $\alpha ds_1 + \beta\delta s_1 : \alpha ds_2 + \beta\delta s_2 : \ldots : \alpha ds_n + \beta\delta s_n$ (причём α и β — произвольные величины), то эти линии образуют некоторую поверхность, которую можно представить себе расположенной в обычном пространстве нашей интуиции. В таком случае выражение (III) будет являться мерой кривизны упомянутой поверхности в точке $(s_1, s_2, \ldots s_n)$.

Переходя теперь к случаю $n = 3$, заметим, что выражение (II) есть квадратическая форма переменных

$$ds_2\delta s_3 - ds_3\delta s_2, \quad ds_3\delta s_1 - ds_1\delta s_3, \quad ds_1\delta s_2 - ds_2\delta s_1,$$

так что в этом случае мы получаем шесть уравнений, которым должны удовлетворять функции b, чтобы выражение $\sum b_{i,i'}ds_ids_{i'}$ приводилось к форме с постоянными коэффициентами. Нетрудно, пользуясь введенными здесь понятиями, доказать, что эти шесть уравнений являются вместе с тем и достаточным условием возможности такого рода приведения. Заметим, впрочем, что среди них лишь три являются независимыми.

Возвращаясь теперь к вопросу, предложенному Знаменитейшей Академией, мы должны были бы в упомянутые шесть уравнений подставить все те возможные виды функций b, которые были выше установлены, и тогда были бы найдены все случаи, когда температура u в однородных телах является функцией времени и ещё только двух переменных.

Но недостаток времени не позволил нам изложить здесь эти вычисления. Поэтому мы ограничимся тем, что, указав методы, которыми пришлось воспользоваться, перечислим отдельные решения поставленного вопроса.

Ради краткости рассмотрим только простейший случай, когда изменения температуры подчиняются закону

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = aa \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

(к этому случаю, как известно, легко приводятся остальные).

Случай $m = 1$ может иметь место только при условии, что изотермические линии — параллельные прямые, круги или винтовые линии, так что в надлежащим образом выбранных прямоугольных координатах можно положить $\alpha = r$, $\beta = z + \varphi$ const.

Случай $m = 2$ имеет место, если $u = f(\alpha) + \varphi(\beta)$.

Случай $m = 3$ имеет место, если $u = \alpha e^{\lambda t} + f(\beta)$, где λ — действительная постоянная.

Наконец, случай $m = 4$, как мы установили выше, может наступить лишь тогда, когда $u = \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} +$ const. или $u = (\alpha + \beta t)\, e^{\lambda t} +$ const., или $u = f(\alpha)$.

Установив полностью все возможные виды функции u, следует ещё заметить, что, если температура u не задаётся формулой вида $\alpha e^{\lambda t}$, то она только тогда является функцией времени и одной переменной, когда изотермическими поверхностями являются или параллельные плоскости, или цилиндры с общей осью, или концентрические сферы. Если же u имеет вид $\alpha e^{\lambda t}$, то из дифференциального уравнения (1) следует, что

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_3^2} = \lambda aa\alpha,$$

и отсюда возникает возможность еще четвёртого случая, причём функции α и β определяются без затруднений: следует только не упустить из виду, что в этом случае $\alpha e^{\lambda t}$ и $\beta e^{\mu t}$ могут быть комплексными сопряжёнными величинами.

XXIV. РАВНОВЕСИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА НА КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ФИГУР, ОГРАНИЧЕННЫХ КРУГАМИ

Задача о нахождении распределения статического электричества или же температуры в стационарном состоянии на бесконечных цилиндрических проводниках с параллельными образующими — в предположении, что в первом случае распределяющие силы а во втором — температуры на поверхности постоянны вдоль прямых линий, параллельных образующим, — полностью сводится к решению следующей математической задачи.

На плоской, связной, однолистной, ограниченной какими угодно кривыми поверхности S так определить функцию u прямоугольных координат x, y, чтобы внутри поверхности выполнялось уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

и чтобы на границах функция u принимала заранее заданные значения.

Желая решить эту задачу, мы займёмся сначала более простой.

Построим функцию $\zeta=\xi+\eta i$ комплексного переменного $z=x+yi$, которая принимает действительные значения на всех граничных кривых поверхности S и в некоторой точке каждой граничной кривой будет обращаться в бесконечность первого порядка, во всех же остальных точках поверхности будет конечной и непрерывной. Относительно такой функции легко показать, что на каждой граничной кривой она принимает любое действительное значение один и только один раз, и что внутри поверхности S она принимает любое комплексное значение с положительной мнимой частью n раз, причём n есть число граничных кривых (предполагается, что при обходе каждой граничной кривой ζ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$). Эта функция осуществляет конформное отображение поверхности S на поверхность T, n раз разостланную на верхней половине плоскости ζ; каждый лист поверхности T имеет своей границей действительную ось. Так как поверхности S и T должны быть одного и того же порядка связности, именно, порядка n, то внутри T имеется $2n-2$ простых точки ветвления (см. «Теорию Абелевых функций», § 7), и мы приходим к следующей задаче:

Найти функцию комплексного переменного ζ, которая имела бы такое же ветвление, как и поверхность T, и которой действительная часть u внутри T была бы непрерывна и на n граничных прямых принимала бы заданные значения.

Если известна функция $\omega = h + ig$ переменного ζ с тем же ветвлением, что и поверхность T, и имеющая в произвольной точке ε внутри T логарифмическую особенность, причём мнимая часть ig непрерывна всюду на T кроме точки ε, а на границе T обращается в нуль, то по теореме Грина («Основы общей теории функций комплексного переменного», § 10, стр. 63) будем иметь:

$$u_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi}\int u\frac{\partial g}{\partial \eta}\,d\xi,$$

где интеграция совершается по n граничным прямым поверхности T.

Функцию g можно определить следующим образом. Продолжим поверхность T на всю плоскость ζ так, чтобы часть её, лежащая на нижней полуплоскости ζ (где ζ имеет отрицательную мнимую часть), была зеркальным отображением части, лежащей на верхней полуплоскости. Тогда получается поверхность, разостланная n раз по всей плоскости ζ и имеющая $4n-4$ простых точки ветвления; поэтому она связана с классом алгебраических функций, для которого $p = n-1$ («Теория Абелевых функций», §§ 7 и 12, стр. 111 и 117).

Функция ig есть мнимая часть интеграла третьего рода, особенности которого находятся в точке ε и в сопряжённой точке ε', и модули периодичности которого все действительные. Такая функция определяется с точностью до аддитивной постоянной, и наша задача будет решена, если удастся определить ζ как функцию z.

Эту последнюю задачу мы рассмотрим дальше, допуская, что граница S состоит из n кругов. При этом одинаково возможны два случая: или все круги лежат один вне другого, так что поверхность S простирается до бесконечности, или же один из кругов охватывает все остальные — тогда поверхность S конечная. Посредством инверсии один случай легко переводится в другой.

Если функция ζ переменной z определена на поверхности S, её можно непрерывно продолжить за границу S: достаточно каждой точке поверхности сопоставить точку, с нею гармонически сопряжённую относительно любого граничного круга, и в ней приписать функции ζ значение, сопряжённое со значением в исходной точке. Таким способом область S, в которой определена функция ζ, расширяется, граница расширенной области снова состоит из кругов, с которыми можно поступать так же, как с данными кругами; операцию можно продолжать до бесконечности, причём область, в которой определена функция ζ, заполняет всё большую часть плоскости.

В дальнейшем для обозначения того, что две величины a, a' являются взаимно сопряжёнными, мы воспользуемся символом

$$a \neq a'.$$

Такого рода соотношения можно попарно складывать, перемножать и делить; можно даже извлекать квадратный корень — при условии, что при разъяснении его смысла не будет сделано ошибки.

Итак, если значениям z, z' соответствуют значения ζ, ζ', причём $z \neq z'$, $\zeta \neq \zeta'$, и если r обозначает радиус одного из данных кругов, а p — его центр, то мы можем написать:

$$\frac{z-p}{r} \neq \frac{r}{z'-p},$$

откуда получается

$$z \neq \frac{az'+b}{cz'+\partial},$$

где a, b, c, ∂ — постоянные числа. Отсюда следует:

$$\frac{dz}{d\zeta} \neq \frac{a\partial - bc}{(cz'+\partial)^2}\frac{dz'}{d\zeta'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} \neq \frac{1}{\sqrt{a\partial - bc}} \frac{cz'+\partial}{\sqrt{\frac{dz'}{d\zeta'}}}, \qquad \frac{z}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} \neq \frac{1}{\sqrt{a\partial - bc}} \frac{az'+b}{\sqrt{\frac{dz'}{\partial\zeta'}}}.$$

Если положим

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} = y, \qquad \frac{z}{\sqrt{\frac{dz}{d\zeta}}} = y_1,$$

и обозначим значения, которые y, y_1 принимают в точке ζ', через y', y_1', то будем иметь, далее:

$$y \neq \frac{cy'_1 + \partial y'}{\sqrt{a\partial - bc}}, \qquad y_1 \neq \frac{ay_1' + by'}{\sqrt{a\partial - bc}}, \tag{1}$$

откуда следует:

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} \neq \frac{c\frac{d^2y_1'}{d\zeta'^2} + \partial\frac{d^2y'}{d\zeta'^2}}{\sqrt{a\partial - bc}}, \qquad \frac{d^2y_1}{d\zeta^2} \neq \frac{a\frac{d^2y'_1}{d\zeta'^2} + b\frac{d^2y'}{d\zeta'^2}}{\sqrt{a\partial - bc}}. \tag{2}$$

Дифференцирование соотношения

$$z = \frac{y_1}{y} \tag{3}$$

даёт:

$$y\frac{dy_1}{d\zeta} - y_1\frac{dy}{d\zeta} = 1$$

$$y\frac{d^2y_1}{d\zeta^2} - y_1\frac{d^2y}{d\zeta^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{d\zeta^2}=\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{d\zeta^2} \tag{4}$$

и точно так же

$$\frac{1}{y'}\frac{d^2y'}{d\zeta'^2}=\frac{1}{y_1'}\frac{d^2y_1'}{d\zeta'^2}. \tag{5}$$

Отсюда, с помощью (1) и (2), вытекает:

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{d\zeta^2}=\frac{1}{y'}\frac{d^2y_1}{d\zeta^2}\neq\frac{1}{y'}\frac{d^2y'}{d\zeta'^2}=\frac{1}{y_1'}\frac{d^2y_1'}{d\zeta_1'^2}. \tag{6}$$

Поэтому, если положим

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2}=sy, \tag{7}$$

то окажется, что s — такая функция ζ, которая при взаимно сопряжённых значениях ζ' сама принимает взаимно сопряжённые значения, и которая, следовательно, не изменяется, когда точка ζ, двигаясь по поверхности и её симметрическому продолжению, возвращается в исходное положение. Другими словами, s есть алгебраическая функция ζ, имеющая то же ветвление, что и поверхность T; y и y_1 являются частными интегралами линейного дифференциального уравнения (7), а z есть их отношение. Обратно, если возьмём произвольную алгебраическую функцию s на поверхности T, подчинённую условию в сопряжённых точках принимать сопряжённые значения (так что её значения будут действительными при действительных значениях ζ), и затем составим отношение $z=\frac{y'}{y}$ двух частных интегралов уравнения (7), то полученная функция z даст отображение поверхности T на область, ограниченную кругами. Входящие при этом неопределённые константы нужно подобрать таким образом, чтобы это отображение внутри области не имело особенностей (т. е. покрывало плоскость z лишь одним листом), и чтобы граничные круги занимали заданные положения.

XXV. К ТЕОРИИ ЦВЕТНЫХ КОЛЕЦ НОБИЛИ

Цветные кольца Нобили представляют собою ценное средство для экспериментального изучения законов разветвления токов в проводнике, подвергающемся разложению посредством электролиза. Возникают эти кольца следующим образом. Пластинку из платины, золочёного серебра или нейзильбера заливают концентрированным раствором окиси свинца в едком кали и затем через кончик тонкой впаянной в стеклянную трубку платиновой проволоки впускают в жидкостный слой ток из сильной гальванической батареи, предоставляя ему выходить через пластинку. Анион, по Беецу, представляющий собою перекись свинца, откладывается тогда на металлической пластинке нежным прозрачным слоем, имеющим различную толщину в зависимости от расстояния до точки входа тока, так что на пластинке, по удалении жидкости, ясно видны Ньютоновы цветные кольца. По этим кольцам удаётся определить сравнительную толщину слоя на различных расстояниях и отсюда, с помощью закона Фарадея (согласно которому количество разложенного вещества всюду должно быть пропорционально количеству протекшего электричества), можно судить о распределении тока при выходе из жидкости.

Первая попытка подвергнуть распределение тока математической обработке и сравнить полученные результаты с результатами наблюдений — была сделана Э. Беккерелем. Он предполагает, что протяжение жидкостного слоя бесконечно велико по сравнению с его толщиной, что ток входит в жидкость через одну точку её поверхности, и что он распространяется в жидкости, следуя законам Ома. По его мнению, при этих допущениях можно без заметной ошибки считать кривые тока прямыми линиями, и отсюда он выводит закон, согласно которому толщина отложенного слоя должна быть обратно пропорциональна расстоянию от точки входа тока; вместе с тем, как он полагает, этот закон подтверждается и экспериментально.

Г. Дюбуа-Реймон, напротив, в своем докладе физическому обществу в Берлине показал, что при допущении прямых линий тока толщина слоя вещества, отложенного на их концах, скорее обратно пропорциональна кубу их длины, и побудил этим г. Беепа к серии опытов, которые, повидимому, имеют решающий характер: они описаны в 71-ом томе Анналов Поггендорфа, стр. 71, и заслуживают полного доверия.

Между тем, точный счёт приводит к тому заключению, что предположение относительно прямизны линий тока мало оправдано и даёт совершенно ошибочный результат. Правда, линии тока — по крайней мере те из них, концы которых достаточно удалены, — в своей средней части на значительном протяжении имеют малую кривизну; кроме того, каждая из этих линий заключена между двумя очень близкими параллельными прямыми и имеет не более одной точки перегиба. Но отсюда никак не следует делать тот вывод, что без заметной ошибки всю кривую можно заменить прямой линией, соединяющей её начало и конец.

Сначала я, основываясь на точном счёте, сделаю выводы, вытекающие из допущений г.г. Э. Беккереля и Дюбуа-Реймона, а затем позволю себе вернуться к опытам г. Беетца.

Допустим, что ток входит в слой жидкости, ограниченный двумя горизонтальными плоскостями, через единственную точку поверхности; обозначим через r горизонтальную координату произвольной точки слоя, отсчитываемую от точки входа тока, через z — высоту этой произвольной точки над уровнем нижней плоскости, через u — превышение напряжения в этой точке над напряжением на верхней стороне нижней плоскости [1]. Затем, пусть S будет сила всего потока, w — удельное сопротивление жидкости, и пусть в точке входа z равно α, на поверхности z равно β. Нужно определить u как функцию r и z: в таком случае в точке (r,o) сила тока которой, по закону Фарадея, должна быть пропорциональна толщине отложенного там слоя, равна значению в этой точке величины $\frac{1}{w}\,\frac{\partial u}{\partial z}$.

Если мы, кроме того, примем, что протяжение слоя жидкости бесконечно велико по сравнению с его толщиной, то условия, из которых следует определить u, будут таковы:

(1) при $-\infty < r < \infty$, $0 < z < \beta$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

(2) при $-\infty < r < \infty$, $z = 0$, $\qquad u = 0;$

(3) при $-\infty < r < \infty$, $z = \beta$, $\qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$

(4) при $r = \pm\infty$, $0 < z < \beta$, $\qquad u$ конечно;

(5) при $r = 0$, $z = \alpha$

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{wS}{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{rr + (z-\alpha)^2}} \\ \text{или} &= \frac{wS}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{rr + (z-\alpha)^2}} \end{aligned}\right\} + \text{непрерывная функция } r \text{ и } z,$$

смотря по тому, находится ли точка входа внутри или на поверхности слоя.

Этим условиям удовлетворяет функция

$$u=\frac{Sw}{4\pi}\sum_{-\infty,\,\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{rr+(z+2m\beta-\alpha)^2}}-\frac{1}{\sqrt{rr+(z+2m\beta+\alpha)^2}}\right),$$

или же, если положим для упрощения $S=\frac{4\pi}{w}$,

$$u=\sum_{-\infty,\,\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{rr+(z+2m\beta-\alpha)^2}}-\frac{1}{\sqrt{rr+(z+2m\beta+\alpha)^2}}\right).$$

Положим $u=a_1\sin\frac{\pi z}{2\beta}+a_2\sin 2\frac{\pi z}{2\beta}+a_3\sin 3\frac{\pi z}{2\beta}+\ldots$; тогда при чётных n коэффициенты a_n равны нулю, а при нечётных получаем формулу:

$$\beta a_n=\int\limits_0^{2\beta}\sin n\frac{\pi t}{2\beta}\sum_{-\infty,\,\infty}(-1)^m\left(\frac{dt}{\sqrt{rr+(t+2m\beta-\alpha)^2}}-\frac{dt}{\sqrt{rr+(t+2m\beta+\alpha)^2}}\right)$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sin n\frac{\pi}{2\beta}(t+\alpha)-\sin n\frac{\pi}{2\beta}(t-\alpha)\,\frac{dt}{\sqrt{rr+tt}}\right)$$

$$=2\sin n\frac{\pi\alpha}{2\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos n\frac{\pi t}{2\beta}\frac{dt}{\sqrt{rr+tt}}=2\sin n\frac{\pi\alpha}{2\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{n\frac{\pi}{2\beta}ti}\,dt}{\sqrt{rr+tt}}.$$

В последнем интеграле можно, вместо $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ написать $2\int\limits_{ri}^{\infty i}$. Вводя, вместо t, переменную tri, будем иметь:

$$a_n=\frac{4\sin n\frac{\pi}{2\beta}\alpha}{\beta}\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt}\,dt}{\sqrt{tt-1}},$$

так что

$$u=\sum\sin n\frac{\pi}{2\beta}z\;\;\frac{4\sin n\frac{\pi}{2\beta}\alpha}{\beta}\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt}\,dt}{\sqrt{tt-1}},$$

где сумма распространяется на все положительные нечётные значения n.

Если же мы допустим, что жидкость ограничена поверхностью $r=c$, причём допустим, примера ради, что ограничена непроводником, то при $r=c$ должно быть $\frac{\partial u}{\partial r}=0$, и поэтому к выше полученному значению u, которое теперь обозначим через u', придётся ещё прибавить функцию u'', удовлетворяющую следующим условиям:

(1) при $-c<r<c,\quad 0<z<\beta$

$$\frac{\partial^2u''}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u''}{\partial r}+\frac{\partial^2u''}{\partial z^2}=0;$$

(2) при $-c < r < c$, $z = 0$ $u'' = 0$;

(3) при $-c < r < c$, $z = \beta$ $\frac{\partial u''}{\partial z} = 0$;

(4) при $r = \pm c$; $0 < z < \beta$ $\frac{\partial u''}{\partial r} = -\frac{\partial u'}{\partial r}$;

— и притом везде непрерывную.

Из условий (1) — (3) вытекает, что функцию u'' также можно представить в виде ряда:

$$b_1 \sin \frac{\pi}{2\beta} z + b_3 \sin 3 \frac{\pi}{2\beta} z + b_5 \sin 5 \frac{\pi}{2\beta} z + \ldots,$$

и из условия (1) следует, что b_n удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 b_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{db_n}{dr} - \frac{nn\pi\pi}{4\beta\beta} b_n = 0 \text{ [2]}.$$

Мы уже знаем одно частное решение этого уравнения, а именно

$$\int_1^\infty \frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt} dt}{\sqrt{tt-1}} dt;$$

другое частное решение получится, если взять тот же интеграл в пределах от -1 до 1; следовательно, общее решение имеет вид

$$b_n = c_n \int_1^\infty \frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt} dt}{\sqrt{tt-1}} + \gamma_n \int_{-1}^1 \frac{e^{-n\frac{\pi}{2\beta}rt} dt}{\sqrt{1-tt}},$$

где c_n и γ_n — постоянные, или же (обозначая

$$\int_1^\infty \frac{e^{-2qt} dt}{\sqrt{tt-1}} \text{ через } f(q), \quad \int_{-1}^1 \frac{e^{-2qt} dt}{\sqrt{1-tt}} \text{ через } \varphi(q))$$

имеет вид:

$$b_n = c_n f\left(n\frac{\pi}{4\beta} r\right) + \gamma_n \varphi\left(n\frac{\pi}{4\beta} r\right).$$

Разложение по возрастающим степеням q даёт:

$$f(q) = \sum_{0,\,\infty} \frac{q^{2m}}{m!m!}\left(\Psi(m) - \log q\right)$$

$$\varphi(q) = \pi \sum_{0,\,\infty} \frac{q^{2m}}{m!m!} \text{ [3]};$$

таким образом $f(q)$ при $q = 0$ бесконечно, и, значит, для того, чтобы u'' при $r = 0$ оставалось непрерывным, придётся положить $c_n = 0$. Тогда γ_n определится из условия (4):

$$\gamma_n = -\frac{4 \sin n \frac{\pi}{2\beta}\alpha}{\beta} \frac{f'\left(n\frac{\pi}{4\beta}c\right)}{\varphi'\left(n\frac{\pi}{4\beta}c\right)}.$$

Поэтому, окончательно:

$$u=\sum n\sin n\frac{\pi}{2\beta}z\,\frac{4\sin n\frac{\pi}{2\beta}\alpha}{\beta}\left\{f\left(n\frac{\pi}{4\beta}r\right)-\varphi\left(n\frac{\pi}{4\beta}r\right)\frac{f'\left(n\frac{\pi}{4\beta}c\right)}{\varphi'\left(n\frac{\pi}{4\beta}c\right)}\right\},$$

где сумма распространена на все нечётные положительные значения n.

Для вычисления $f(q)$ и $\varphi(q)$ при больших значениях q могут быть использованы полусходящиеся ряды [4]

$$f(q)=e^{-2q}\sqrt{\frac{\pi}{4q}}\sum_{m<4q+1}(-1)^m\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!\,(16q)^m},$$

$$\psi(q)=e^{2q}\sqrt{\frac{\pi}{4q}}\sum_{m<4q+1}\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!\,(16q)^m},$$

которые, впрочем, дают значение функций лишь приближённо, с погрешностью, не превышающей порядка дробной доли величины e^{-4q}; если же такая точность не достаточна, то лучше всего воспользоваться разложениями по возрастающим степеням q.

При достаточно больших значениях $\frac{r}{\beta}$ мы получаем, таким образом, пренебрегая величинами порядка $e^{-3\frac{\pi}{2p}r}$,

$$u=\sin\frac{\pi z}{2\beta}\,\frac{4\sin\frac{\pi\alpha}{2\beta}}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{r}}\left\{e^{-\frac{\pi r}{2\beta}}\sum\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!}\left(-\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m-\right.$$

$$-\sum\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!}\left(\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m e^{\frac{\pi}{2}(r-2c)}\times$$

$$\left.\times\frac{\sum\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2(2m+1)}{m!(2m-1)}\left(-\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}{\sum\frac{(1\cdot3\ldots2m-1)^2(2m+1)}{m!\,(2m-1)}\left(\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}\right\},$$

а толщина полученного слоя должна быть пропорциональна $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$, т. е. пропорциональна

$$\frac{e^{-\frac{\pi r}{2\beta}}}{\sqrt{r}}\sum\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!}\left(-\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m-$$

$$-\frac{e^{\frac{\pi}{2\beta}(r-2c)}}{\sqrt{r}}\sum\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2}{m!}\left(\frac{\beta}{4\pi r}\right)^m\times$$

$$\times\frac{\sum\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2(2m+1)}{m!\,(2m-1)}\left(-\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}{\sum\frac{(1\cdot3\ldots\overline{2m-1})^2(2m+1)}{m!\,(2m-1)}\left(\frac{\beta}{4\pi c}\right)^m}.$$

В основном результат сохраняется и в том случае, если, вместо единственной точки входа, будет в качестве катода взята произвольная поверхность вращения: в самом деле, для значений r, заключённых между c и тем значением, при котором останутся в силе условия (1)—(3), u должно разлагаться в ряд вида

$$u = \sum K_n \sin n \frac{\pi z}{2\beta} \left\{ f\left(n \frac{\pi r}{2\beta}\right) - \varphi\left(n \frac{\pi r}{4\beta}\right) \frac{f'\left(n \frac{\pi c}{4\beta}\right)}{\varphi'\left(n \frac{\pi c}{4\beta}\right)} \right\}$$

(следует оговорить лишь исключительный случай, когда $K_1 = 0$).

Г. Э. Беккерелем и г. Дюбуа-Реймоном было сделано допущение о том, что катод есть точка поверхности, так что $\alpha = \beta$; в этом случае, как показывает приведённое вычисление, при больших значениях $\frac{r}{\alpha}$ толщина отложенного слоя не оказывается обратно пропорциональной ни расстоянию от точки входа (как полагал г. Беккерель), ни его кубу (как полагал г. Дюбуа-Реймон): она убывает скорее как степень с показателем $\frac{r}{\alpha}$, а именно, таким образом, что $\frac{\alpha \log \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0}{r}$ стремится к конечному пределу $-\frac{\pi}{2}$. С другой стороны, закон г. Дюбуа-Реймона справедлив при больших значениях $\frac{r}{\alpha}$ не только приближённо, но даже вполне точно, если принять $\beta = \infty$, так как в этом случае

$$u = \sum_{-\infty,\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + 2m\beta + \alpha)^2}} \right)$$

сводится к разности

$$\frac{1}{\sqrt{rr + (z - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{rr + (z + \alpha)^2}},$$

и следовательно, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$ — к выражению

$$\frac{2\alpha}{\sqrt{rr + \alpha\alpha}^{\,3}}.$$

Но то допущение, из которого этот результат был выведен, именно, будто бы линии тока можно считать прямыми, никоим образом не оправдывается. Уравнение линий тока имеет вид

$$\int \left(r \frac{\partial u}{\partial z} dr - r \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = v = \text{const.},$$

где константа, будучи умножена на $\frac{2\pi}{w}$, равна части тока, проходящей внутри поверхности вращения $v = \text{const.}$ (интеграл же следует брать таким образом, чтобы он обращался в нуль при $r = 0$). В нашем случае уравнение линий тока имеет вид

$$v = 2 - \frac{z + \alpha}{\sqrt{rr + (z + \alpha)^2}} \pm \frac{z - \alpha}{\sqrt{rr + (z - \alpha)^2}} = \text{const.},$$

и легко понять, что при больших значениях константы заметно отклоняются от прямых. Так как г. Дюбуа-Реймон, делая допущение о том, что точка входа лежит на поверхности, в дальнейших своих заключениях на него существенно не опирается, то естественно высказать догадку, что в опытах г. Беeца, дающих приближение к кубическому закону, которое трудно оспаривать, требование г. Дюбуа-Реймона о том, чтобы поверхность жидкости проходила через точку входа, не было принято во внимание, и что г. Беец употребил большее количество жидкости (что по каким-нибудь причинам могло быть более целесообразным), так что в ряде для $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$.

$$\sum_{0,\infty} (-1)^m \left(\frac{2m\beta + \alpha}{\sqrt{rr + (2m\beta + \alpha)^2}^3} - \frac{2m\beta - \alpha}{\sqrt{rr + (2m\beta - \alpha)^2}^3}\right)$$

следующие члены или, быть может, их сумма, оказались весьма малыми по сравнению с первым членом. В таком случае прекрасные опыты г. Беeца, действительно, можно было бы рассматривать как подтверждение того, что распределение тока совершается по выше указанному закону. Если же эта догадка ошибочна, то из опытов г. Беeца нужно было бы заключить, что при вычислении распределения тока остались неучтёнными ещё какие-то обстоятельства: какие именно — по этому поводу должны были бы дать указания новые экспериментальные исследования [5].

XXVI. О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА В МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛАХ ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО ПОСЛЕДНИЕ РАССМАТРИВАЮТСЯ НЕ КАК СОВЕРШЕННЫЕ ПРОВОДНИКИ ИЛИ НЕПРОВОДНИКИ, А ПРЕДПОЛАГАЮТСЯ ОКАЗЫВАЮЩИМИ КОНЕЧНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СОДЕРЖАЩЕМУСЯ В НИХ ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ

Посредством остроумных приспособлений для наблюдения статического электричества, о которых упоминал во вчерашнем заседании этой секции г. профессор Кольрауш, ему удалось исследовать образование остаточного заряда в лейденской банке и других аппаратах, служащих для накопления электричества. В основном явление сводится к следующему:

Если лейденскую банку, простоявшую заряженной более или менее долгое время, разрядить, и в течение некоторого времени оставить изолированной, то немного спустя наблюдается снова заметное заряжение. Это ведёт к допущению, что при первом разряде подверглась соединению лишь часть разъединённого электричества, а другая часть осталась в банке. Первую часть называют свободным зарядом, а вторую — остаточным зарядом. Высокая точность измерений, произведенных г. профессором Кольраушем над падением свободного заряда и восстановлением остаточного, побудила меня испытать на его опытах гипотетический, покоящийся на иных основаниях закон, который восполняет пробел, имеющийся в существующих ныне теориях электричества.

Как известно, математические исследования, имеющие предметом статическое электричество, относятся к его распределению на совершенных и вполне изолированных проводниках; таким образом, материальные тела считаются или абсолютными проводниками или абсолютными непроводниками. Отсюда вытекает как следствие, что в состоянии равновесия всё электричество собирается на поверхностях проводников и изоляторов. Но нужно признать, что такого рода подразделение материальных тел есть чистая фикция. В природе нет ни таких тел, внутрь которых электричество не могло бы проникать, ни таких, чтобы всё содержащееся в них электричество могло собраться на одной математической поверхности. Напротив, приходится допустить, что материальные тела с конечной силой оказывают противодействие поступлению в них или пребыванию в них электричества, а именно допущение, следствия которого оказываются в согласии с наблюдениями, заключается в том, что тела оказывают противодействие пребыванию в них электричества («электрическому бытию»), а не поступлению в них электричества («электрическому становлению»). Закон этого противодействия формулируется различными способами — смотря по тому, какая гипотеза о природе электричества положена в основу теории — дуалистическая или унитарная. С точки зрения дуалистической гипотезы, которая рассматривает статическое электричество как превышение положительного электричества над отрицательным, приходится представлять себе, что в каждой точке материального тела некоторая причина с интенсивностью, пропорциональной плотности этого превышения, стремится уменьшить плотность электричества того же знака (именно, того, в пользу которого имеется превышение) и увеличить плотность электричества противоположного знака. С точки зрения унитарной гипотезы, которая рассматривает статическое электричество как превышение содержащегося в теле электричества над нормальным его содержанием, нужно искать в каждой точке тела причину, стремящуюся с интенсивностью, пропорциональной плотности этого превышения, уменьшить плотность превышения — или, в случае отрицательного превышения, увеличить её. Кроме этой, механического характера, причины, если нет налицо каких-либо термических или магнитных или вольтаиндукторных воздействий, и если рассматриваемые материальные тела не находятся в состоянии относительного движения, нужно ещё принять во внимание электродвижущую силу, действующую согласно закону Кулона. Что касается зависимости между причиной движения и самим движением — между электродвижущей силой и силой тока, то при указанных выше ограничениях эту зависимость можно считать прямой пропорциональностью.

Переходя теперь к вопросу о том, как облечь эти законы в математическую форму, мы условимся обозначать через (x, y, z) прямоугольные координаты, через ρ — плотность электричества в точке (x, y, z) в момент времени t и через u — делённый на 4π потенциал всего электричества в смысле Гауссова определения, т. е. интеграл от всех электрических масс, разделённых каждая на расстояние от рассматриваемой точки. В таком случае составляющие по осям электродвижущей силы, следующей закону Кулона, пропорциональны величинам

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z},$$

а составляющие силы, возникающие от воздействия материального тела, пропорциональны величинам

$$-\frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

В итоге составляющие электродвижущей силы можно считать равными

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta^2\frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta^2\frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta^2\frac{\partial \rho}{\partial z},$$

где β^2 зависит лишь от природы материального тела. Этим составляющим должны быть пропорциональны составляющие силы тока, так что они должны равняться $\alpha\xi$, $\alpha\eta$, $\alpha\zeta$, где ξ, η, ζ — составляющие силы тока, а α зависит лишь от природы тела.

Если принять во внимание кинематическое соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0,$$

которое получается при вычислении двумя различными способами количества электричества, поступающего в элемент объёма $dx\,dy\,dz$ на протяжении элемента времени dt, и уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\rho,$$

вытекающее из самого понятия потенциала, то мы получим (умножая предпоследнее соотношение на α и подставляя вместо ξ, η, ζ их значения) уравнение

$$\alpha\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho-\beta^2\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right)=0.$$

Отсюда следует для u уравнение в частных производных первого порядка относительно t и четвёртого — относительно пространственных координат: для того чтобы u было полностью определено в рассматриваемом теле, начиная с некоторого момента времени, кроме этого уравнения, ещё нужно задать в каждой его точке одно условие, относящееся к начальному моменту, и затем ещё два условия, относящиеся к каждой точке его поверхности и любому последующему моменту.

Сравним следствия из этих законов в некоторых частных случаях с результатами наблюдений.

В случае равновесия (в системе изолированных проводников) мы получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\beta^2\frac{\partial \rho}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\beta^2\frac{\partial \rho}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}+\beta^2\frac{\partial \rho}{\partial z}=0,$$

или же

$$u+\beta^2\rho=\text{const.},$$

или, так как

$$-\rho=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

то

$$u-\beta^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{dy^2}+\frac{\partial^2 u}{dz^2}\right)=\text{const.}$$

В случае стационарного, установившегося состояния распределения токов (в замыкающих дугах постоянных цепей) мы будем иметь:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

или

$$\rho - \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Если длина β очень мала по сравнению с размерами данного тела, то в первом случае u — const., а во втором ρ убывают очень скоро при удалении от поверхности и внутри тела очень малы; точнее говоря, эти величины убывают, примерно, как $e^{-\frac{p}{\beta}}$, где p — расстояние от поверхности; так обстоит, например, дело в случае металлических проводников. Если положим $\beta = 0$, то получатся известные формулы для совершенных проводников.

Применяя изложенные законы к возникновению остаточного заряда в лейденской банке, я должен был принять — так как отсутствовали указания о размерах аппарата — что размеры аппарата по сравнению с расстоянием между обкладками бесконечно велики. Я не буду утомлять многоуважаемых присутствующих приведением вычислений, а только сообщу их результаты.

Из измерений г. профессора Кольрауша оказалось, что свободный заряд, рассматриваемый как функция времени, представляется примерно в виде параболы; однако, параметр параболы, в наилучшей степени отвечающий кривой заряда, медленно убывает, так что, если начальный заряд обозначим через L_0, а заряд в момент t — через L_t, то $\frac{L_t - L_0}{\sqrt{t}}$ будет величиной, постепенно убывающей с возрастанием t.

Тот же результат получился и в результате вычислений, причём было допущено, как это вполне естественно, что α и β^2 в случае стекла очень велики и могут считаться бесконечно большими; но их отношение конечно. Более точного сравнения результатов вычисления с результатами опытов я не производил, именно, по той причине, что мне не были известны данные, касающиеся размеров аппарата, и вообще отсутствовали какие бы то ни было возможности внести поправки, вызываемые отклонениями в вычислениях от опытных данных. В особенности нужна была бы поправка, относящаяся к электрическим постоянным стекла. Как бы то ни было, я считаю сформулированный мною закон распределения статического электричества вполне установленным на основании измерений г. профессора Кольрауша.

Я хотел бы ещё сказать кратко о применении этого закона к другому вопросу.

Как известно, распространение гальванических токов в металлических проводниках и возникающее на его основе их стационарное распределение при постоянной или медленно изменяющейся электродвижущей силе обусловлено присутствием статического электричества.

Процесс распространения токов, вследствие его необычайно малой продолжительности и привходящих термических и магнитных воздействий, доступен экспериментальному исследованию только в форме своих результатов: единственные экспериментальные наблюдения, которые были произведены в этой области, это — измерения скорости тока в телеграфных проводах и наблюдения, связанные с законами выравнивания тока, указанными Омом. Однако, более или менее тщательный анализ законов Ома приводит к сделанным здесь допущениям, и именно этим путем я был, в частности, к ним приведён.

Ом определяет распределение токов в стационарном состоянии следующими двумя условиями:

1) Чтобы получить электродвижущие силы, пропорциональные имеющимся в действительности силам тока, нужно к внешним электродвижущим силам прибавить силы, которые являются производными напряжения, рассматриваемого как функция тока.

2) При стационарном течении в каждую часть материального проводника входит столько же электричества, столько из него выходит.

Ом полагал, что напряжение, т. е. та функция точки, производные которой дают внутренние электродвижущие силы, связана со статическим электричеством таким образом, что она пропорциональна его плотности; это допущение, в самом деле, объясняет оба закона Ома. Но почти одновременно г. профессор Вебер[1]) и Кирхгоф[2]) обратили внимание на то, что при допущении Ома электричество было бы в состоянии равновесия, если бы оно наполняло материальное тело с равномерной плотностью, тогда как опыт показывает, что при равновесии электричество располагается на поверхности.

Напряжение должно быть такой функцией, которая при равновесии сводится к постоянной во всём проводнике, и, таким образом, скорее следует принять его равным потенциалу статического электричества, и тогда внутренние электродвижущие силы окажутся совпадающими с силами, следующими закону Кулона.

Такая точка зрения на статическое электричество была принята большею частью исследователей. При этом, однако, оставалось невыясненным, как связать её со вторым условием стационарного течения, на основании которого во всякой части материального тела количество электричества остаётся постоянным.

При допущении дуалистической гипотезы должно оставаться постоянным как количество положительного электричества, так и количество отрицательного; то, что не образуется заметного избытка одного электричества, как будто бы можно объяснить с помощью притяжения противо-

---

1) Abhandlungen d. Kaiserl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1852, 1, стр. 293.

2) Poggendorff's Annalen, T. 79, стр. 506.

положных электричеств по закону Кулона, и тогда приходится ещё допустить некоторую причину того, что нейтральное электричество во всякой части тела остаётся постоянным, т. е. допустить, что материал оказывает на него давление. Такого рода гипотезу я уже несколько лет назад пытался, будучи к тому побуждаем г. профессором Вебером, подвергнуть математической обработке, однако, не получил удовлетворительного результата.

При допущении унитарной гипотезы необходимо найти только одну причину, которая стремилась бы сохранить постоянным содержащееся в материальном теле количество электричества. Прямым путём мы приходим к уже знакомому нам допущению, что всякое материальное тело стремится обладать электричеством определённой плотности и противится как большему, так и меньшему наполнению. Закон этого сопротивления можно принять в такой форме, в какой он получается из опыта для стекла.

Итак, все эти соображения ведут к тому, чтобы признать, что первоначальное Франклиново понимание электрических явлений должно быть положено в основу при более глубоком проникновении во взаимоотношения, существующие между электрическими явлениями, и подвергнуть его дальнейшим усовершенствованиям в зависимости от указаний и намёков, предоставляемых опытом.

Надеюсь, что искушённые исследователи, перед которыми я имел честь изложить мои мысли, признают их достойными более тщательной проверки.

XXVII. НОВАЯ ТЕОРИЯ ОСТАТОЧНОГО ЗАРЯДА В АППАРАТАХ, СЛУЖАЩИХ ДЛЯ НАКОПЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Профессору Кольраушу удалось установить метод точных измерений при исследовании остаточного заряда в аппаратах, служащих для накопления электричества, и затем построить согласную с результатами наблюдений теорию этого явления, которая опубликована в Анналах Поггендорфа[1]). Принимая во внимание точность этих измерений, следовало бы, как мне кажется, подвергнуть опытной проверке гипотетический закон движения электричества, покоящийся на совсем других основаниях; в той форме, которая ему придана для этой цели, он применим к движению электричества во всех материальных телах, однако, с тем ограничением, что рассматриваемые материальные тела находятся в состоянии неподвижности одно относительно другого и притом отсутствуют заметные термические и магнитные (или вольта-индукторные) воздействия и влияния. Для неограниченной применимости закон нуждается ещё в переработке и дополнениях, чем я предполагаю заняться в другом месте.

В последующей статье, являющейся выдержкой из моего письма к профессору Кольраушу, новая теория электрического остаточного заряда изложена не независимо, а в связи с его теорией; я стремился дать обоснование именно его теории, а не самим явлениям непосредственно. Поэтому все понятия, которыми пользуется в своей работе профессор Кольрауш, как-то: электрический момент изолирующей стенки, напряжение, общий заряд, свободный заряд, остаточный заряд, выражены через понятия, которые положены в основу настоящего изложения; во многих других отношениях установлена связь с идеями и представлениями, развитыми в этой работе.

[1]) Том 91, стр. 56.

2

ЗАКОН, ЛЕЖАЩИЙ В ОСНОВЕ СЛЕДУЮЩИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Пусть t обозначает время, x, y, z — прямоугольные координаты, ρ — плотность статического электричества в момент времени t в точке (x, y, z) и u — разделённый на 4π (Гауссов) потенциал всех действующих электрических масс в точке (x, y, z) в момент t, т. е. величину

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho'\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

где $\rho'\,dx'\,dy'\,dz'$ обозначает количество электричества, содержащееся в элементе $dx'\,dy'\,dz'$ в момент t. В таком случае должно быть:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\rho.$$

Мы будем здесь исходить из следующих законов движения электричества внутри однородных материальных тел (в предположении выше упомянутых ограничений):

I. Электродвижущая сила в точке (x, y, z) в момент t складывается из двух составных частей: первая, предусматриваемая законом Кулона, имеет составляющие, пропорциональные величинам

$$-\frac{\partial u}{\partial x},\ -\frac{\partial u}{\partial y},\ -\frac{\partial u}{\partial z},$$

а составляющие второй пропорциональны величинам

$$-\frac{\partial \rho}{\partial x},\ -\frac{\partial \rho}{\partial y},\ -\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Таким образом, составляющие электродвижущей силы можно считать равными величинам

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\beta\frac{\partial \rho}{\partial x},\quad -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\beta\frac{\partial \rho}{\partial y},\quad -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta\beta\frac{\partial \rho}{\partial z},$$

причём $\beta\beta$ зависит только от природы материального тела.

II. Сила тока пропорциональна электродвижущей силе, так что, обозначая её составляющие через ξ, η, ζ, будем иметь

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\beta\frac{\partial \rho}{\partial x}=\alpha\xi,\quad -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\beta\frac{\partial \rho}{\partial y}=\alpha\eta,\quad -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta\beta\frac{\partial \rho}{\partial z}=\alpha\zeta,$$

где α — постоянная, зависящая только от природы тела.

С помощью кинематического уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \xi}{dx}+\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial z}=0$$

мы получаем поэтому следующие уравнения для u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\rho.$$

и

$$\alpha\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho-\beta\beta\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right)=0\text{ *)},$$

или же, принимая длину β и время α за единицы,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho-\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right)=0.$$

Отсюда вытекает для u уравнение в частных производных, которое относительно t — первого, а относительно пространственных координат — четвёртого порядка: для того чтобы определить u во всём теле, начиная с некоторого начального момента, кроме этого уравнения, нужно ещё задать одно условие в каждой точке тела в начальный момент и для последующего времени в каждой точке поверхности тела ещё два условия.

3

РАЗЪЯСНЕНИЕ ЭТОГО ЗАКОНА

В предыдущем параграфе закон движения электричества сформулирован с помощью понятий, которые в настоящее время являются употребительными в теории электричества. Но можно эту формулировку, однако, подвергнуть некоторой переработке, в результате которой, как нам представляется, картина подлинной связи явлений станет более верной и полной.

Вместо того чтобы допускать существование причины, которая в точке (x, y, z) воздействует на положительное электричество с силой,

*) Уравнения равновесия (в наэлектризованном изолированном проводнике), очевидно, будут:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}-\beta\beta\frac{\partial\rho}{\partial x}=0,\quad -\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\beta\frac{\partial\rho}{\partial y}=0,\quad -\frac{\partial u}{\partial z}-\beta\beta\frac{\partial\rho}{\partial z}=0,$$

или

$$u-\beta\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\text{const.},$$

а уравнение стационарного течения или динамического равновесия в замыкающих дугах постоянных цепей:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$$

или

$$\rho-\beta\beta\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right)=0.$$

Если длина β очень мала по сравнению с размерами тела, то, при удалении от поверхности u — const. в первом случае, ρ — во втором убывают очень быстро, а внутри тела ничтожно малы: именно, если радиус кривизны поверхности очень мал по сравнению с β, то названные величины изменяются примерно как $e^{-\frac{p}{\beta}}$, где p — расстояние от поверхности. Следует считать, что этот случай имеет место для металлических проводников.

составляющие которой по трём осям равны

$$-\beta\beta\frac{\partial\rho}{\partial x}, \quad -\beta\beta\frac{\partial\rho}{\partial y}, \quad -\beta\beta\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

(в случае отрицательного электричества меняются знаки), можно допустить существование причины, которая в точке (x, y, z) с интенсивностью $\beta\beta\rho$ стремится положительное электричество уменьшить, а отрицательное увеличить, и причину эту следует искать в некоем противодействии, которое материальное тело оказывает пребыванию в нём электричества или, если угодно, состоянию наэлектризованности.

Точно так же электродвижущую силу с составляющими

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z}$$

можно заменить в точке (x, y, z) некоторой причиной, которая с интенсивностью u стремится уменьшить плотность электричества равного знака и увеличить плотность электричества противоположного знака.

Но в таком случае, чтобы дать реальное истолкование величине ρ, нет необходимости допускать существование двух различных электричеств и рассматривать $\rho\,dx\,dy\,dz$ как избыток положительного электричества по отношению к отрицательному в элементе объёма $dx\,dy\,dz$, а можно вернуться по сути дела к Франклинову пониманию явлений электричества. С этой целью проще всего принять такое допущение:

Материя, являющаяся носителем электричества, наполняет пространство непрерывно и с равномерно распределённой электрической ёмкостью, которая обратно пропорциональна его сопротивлению и от которой плотность действительно содержащегося электричества отличается лишь на неуловимо малую долю. При избытке или недостатке электричества (положительном или отрицательном электричестве) материя переходит в состояние положительной или отрицательной наэлектризованности, посредством которой она стремится уменьшить или увеличить плотность содержащегося в ней электричества, и именно с давлением, которое равно плотности ρ электричества, умноженной на коэффициент, зависящий от природы материи (антиэлектрическая сила). Со своей стороны, при дальнейшем поступлении электричества наступает особое его состояние, «напряжение», посредством которого оно стремится уменьшить свою плотность (или в случае отрицательного напряжения — её увеличить), причём характеризующая его величина u в каждый момент зависит от всех масс электричества согласно формуле

$$u = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho'\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}},$$

или согласно закону

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\rho,$$

и при условии, что на бесконечно большом расстоянии от электрических масс u становится бесконечно малым. Электричество движется по отношению к материи со скоростью, которая в каждый момент равняется обусловленной этой причиной электродвижущей силе.

Впрочем, нужно сказать, что эти законы движения электричества, в сочетании с законами тепла и магнетизма, должны быть ещё пересмотрены и видоизменены, так что все эти явления приобретут новое объяснение.

4

ПРОБЛЕМА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОСТАТОЧНОГО ЗАРЯДА. ВЫРАЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН ЧЕРЕЗ ПОТЕНЦИАЛ

Обращаясь теперь к исследованию возникновения остаточного заряда, я поставлю своей очередной задачей выразить определяемые величины через потенциал, или же, что упростит вычисления, через пропорциональную ему величину u. Для удобства тех физиков, которым менее привычно абстрактное математическое мышление, я ввёл потенциал как меру напряжения причины, стремящейся уменьшить плотность электричества в точке (x, y, z), и обозначил его в этой точке через u, так что составляющие вызываемой им электродвижущей силы равны

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z}.$$

В качестве единицы напряжения в таком случае надлежит взять напряжение, возникающее внутри сферы единичного радиуса под влиянием электричества, распределённого по поверхности с плотностью 1, или же в качестве единицы электродвижущей силы — силу, вызываемую массой 4π на расстоянии единицы. Далее, для упрощения вычислений за единицу времени было принято α, за единицу длины β; если установим, как здесь разъяснено, зависимость единицы электродвижущей силы от единицы электрической массы, то α и $\beta\beta$ будут мерами для сопротивления $\left(=\frac{\text{электродвижущая сила}}{\text{сила тока}}\right)$ и антиэлектрической силы $\left(=\frac{\text{давление материи}}{\text{плотность электричества}}\right)$ материального носителя электричества.

Цели обсуждения того, насколько обоснованы изложенные выше представления, может служить решение задачи: исследовать изменения электричества внутри однородной стены постоянной толщины, при условии, что две её поверхности, обложенные слоями совершенных проводников, принимают одинаковые количества противоположных электричеств и не обладают никакой электродвижущей силой (между ними нет контактных взаимодействий) и, наконец, что размеры этих поверхностей бесконечно велики по сравнению с толщиной стены (другими словами, влияние края стены и кривизны может быть пренебрегаемо).

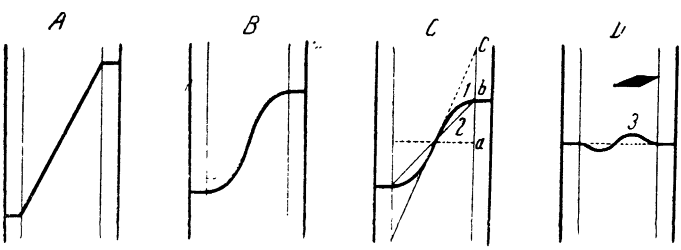
Пусть начало координат помещено посредине стенки, а ось x — перпендикулярно её поверхностям; если обозначим половину толщины стенки через a, сама стенка будет задана неравенством $a > x > -a$. Тогда u будет функцией одной переменной x, и мы получим:

$$\rho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

следовательно,

$$\int_{x'}^{x''} \rho dx = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x''}.$$

Таким образом, выражаясь геометрически, на единицу площади между двумя значениями x будет приходиться количество электричества, равное разности между тангенсами углов наклона кривой напряжения, т. е. кривой, ордината которой при абсциссе x равна u. Эта кривая превращается в прямую, если нет вовсе статического электричества; она выпукла вверх (т. е. в сторону бóльших ординат), если имеется непрерывно распределённое положительное электричество, и вниз — если имеется непрерывно распределённое отрицательное; и имеет изломы (угловые точки) там, где скопляются конечные массы электричества.



Напряжение, вызванное зарядом или уничтоженное разрядом, всегда представляется в виде кривой вида A, т. е., если оно на обкладках равняется u_a, u_{-a} и, следовательно, посредине —

$$\frac{u_a + u_{-a}}{2} = u_0,$$

то внутри

$$= u_0 + \frac{x}{a}(u_a - u_0).$$

При проникновении электричества внутрь стены кривая напряжения принимает вид B. Общее количество разъединённых электричеств на единицу площади равняется тангенсу наклона кривой посредине

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0,$$

а электрический момент дается формулой:

$$\int_{-a}^{+a} \rho x\,dx = u_a - u_{-a} - a\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_a + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-a}\right) = u_a - u_{-a},$$

т. е. равен разности напряжений на поверхностях.

Посредством разряда напряжение в обкладках уничтожается. Уничтоженное напряжение в обкладках $= u_a$, u_{-a}, а внутри

$$= u_0 + \frac{x}{a}(u_a - u_0),$$

свободный заряд на единицу площади

$$= \frac{1}{a}(u_a - u_0),$$

остающееся напряжение внутри

$$= u - u_0 - \frac{x}{a}(u_a - u_0),$$

и скрытое сопротивление на единицу площади

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{1}{a}(u_a - u_0),$$

количество электричества, полученное при разряде поверхностью $(x = a)$,

$$= -\frac{1}{a}(u_a - u_0).$$

5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТЕЙШЕМ СЛУЧАЕ, КОГДА ПОВЕРХНОСТИ НЕ ПОЛУЧАЮТ ИЗВНЕ И НЕ ВЫПУСКАЮТ ВОВНЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

После общего обзора и разъяснения геометрического смысла участвующих величин я перехожу к их вычислению на основе указанного закона. Рассмотрим сначала случай, когда в начальный момент внутри нет свободного электричества, и на поверхности в этот момент поступает единица массы электричества на единицу площади, а позднее электричество не поступает и не уходит через поверхности.

Условия, из которых определяется u, таковы:

при $t > 0$, $a > x > -a$ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho - \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$,

при $t = 0$, $a > x > -a$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$,

при $t > 0$, $x = \pm a$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0$.

Последние условия означают, что на поверхностях и количество электричества, и приток электричества, и, наконец, электродвижущая сила равны нулю.

Этим условиям удовлетворяют два выражения, из которых одно пригодно в случае малых значений t, другое — в случае больших.

Положим для сокращения

$$\int\limits_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda\lambda}\,d\lambda = \varphi(\lambda),$$

и

$$\int\limits_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2}e^{-\lambda\lambda} - \lambda\varphi(\lambda) = \psi(\lambda);$$

тогда нашим требованиям удовлетворяет, во-первых,

$$u - u_0 = $$
$$= e^{-t}\left[x + \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\sum_{1,\infty}^{n}(-1)^n\left(\psi\left(\frac{a(2n-1)-x}{2\sqrt{t}}\right) - \psi\left(\frac{a(2n-1)+x}{2\sqrt{t}}\right)\right)\right],$$

и, во-вторых,

$$u - u_0 = e^{-t}\sum \frac{(-1)^{n-1}2a}{\pi\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi\pi}{aa}t} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x\pi}{a}.$$

Отсюда по следующим формулам определяются: распределение электричества [1] —

$$\rho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\sum(-1)^{n-1}\left(e^{-\frac{(a(2n-1)-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(a(2n-1)+x)^2}{4t}}\right) =$$

$$= \frac{2e^{-t}}{a}\sum(-1)^{n-1} e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi\pi}{aa}t}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{x\pi}{a},$$

общий заряд —

$$Q_t = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = e^{-t}\left(1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum(-1)^n\varphi\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)a}{\sqrt{t}}\right)\right) =$$

$$= e^{-t}\sum\frac{(-1)^{n-1}2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi\pi}{aa}t},$$

---

[1]) См. Якоби, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, §§ 61, 63.

свободный заряд —

$$L_t^* = \frac{u_a - u_{-a}}{2a} = e^{-t}\left\{1 - \frac{2\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi}}\left(1 + 4\sum(-1)^n \psi\left(\frac{an}{\sqrt{t}}\right)\right)\right\} =$$

$$= e^{-t}\sum \frac{2}{\pi\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi\pi}{aa} t},$$

остаточный заряд —

$$r_t^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{u_a - u_{-a}}{2a} =$$

$$= \frac{2\sqrt{t}e^{-t}}{a\sqrt{\pi}}\left\{1 + 4\sum(-1)^n\left(\psi\left(\frac{an}{\sqrt{t}}\right) + \frac{a}{2\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)a}{\sqrt{t}}\right)\right)\right\} =$$

$$= e^{-t}\sum \frac{2}{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}\left((-1)^{n-1} - \frac{1}{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}\right) e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi\pi}{aa} t}.$$

6

ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ К ЭТОМУ ПРОСТЕЙШЕМУ СЛУЧАЮ

Чтобы к рассматриваемому частному случаю свести общий случай, когда электричество поступает или уходит через поверхности, обозначим через $\chi(t)$ выражение для разности напряжений $u - u_0$ в момент t для этого простейшего случая; при отрицательных значениях t будем считать, что $\chi(t) = 0$.

Если нужно определить напряжение, возникающее, когда поверхностям $x = \pm a$ в момент 0 сообщается количество электричества $\pm\mu$, затем в момент t' — количество $\pm\mu'$, в момент t'' — количество $\pm\mu''$, . . ., то мы получим

$$u - u_0 = \mu\chi(t) + \mu'\chi(t - t') + \mu''\chi(t - t'') + \ldots;$$

в самом деле, это выражение удовлетворяет всем требованиям, которые даются для его определения.

Если же имеет место непрерывный поток электричества, то тогда

$$u - u_0 = \int_0^t \chi(t - \tau)\frac{d\mu}{d\tau}\,d\tau,$$

где $\pm\frac{d\mu}{d\tau}$ обозначает количество электричества, проходящее через поверхности $x = \pm a$ внутрь стены и отнесённое к промежутку времени $d\tau$.

Оба выражения можно охватить общей формулой

$$u - u_0 = \int_0^t \chi(t - \tau)\,d\mu,$$

где через $\pm d\mu$ обозначено количество электричества, проходящее за время $d\tau$ через поверхности $x = \pm a$ внутрь стены, причём это количество может или быть конечным или быть пропорциональным $d\tau$, смотря по тому, имеет ли место внезапный заряд или разряд или же непрерывное поступление или уход электричества.

Из последнего выражения для напряжения следуют формулы:

$$Q_t = \int_0^t Q^*_{t-\tau}\, d\mu, \quad L_t = \int_0^t L^*_{t-\tau}\, d\mu, \quad r_t = \int_0^t r^*_{t-\tau}\, d\mu.$$

В этих формулах время выражено в долях α, длины — в долях β; чтобы ввести обычные единицы измерений, достаточно a и x заменить через $\frac{a}{\beta}$ и $\frac{x}{\beta}$; t и τ — через $\frac{t}{\alpha}$ и $\frac{\tau}{\alpha}$.

7

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ С НАБЛЮДЕНИЯМИ

Чтобы сравнить полученные формулы с тем действительным процессом образования остаточного заряда, над которым профессор Кольрауш с громадной точностью произвёл наблюдения, опубликованные им затем в Анналах Поггендорфа, удобнее всего исходить из того обстоятельства, что кривая заряда напоминает параболу с постоянно уменьшающимся параметром, т. е., что величина $\frac{L_0 - L_\tau}{\sqrt{t}}$ медленно убывает.

На основании выведенной формулы для L_t при очень малых значениях t $L_0 - L_t$ пропорционально $\sqrt{t}$, а именно,

$$\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}} = L_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\beta\beta}{aa\alpha}}.$$

Произведённые измерения показывают, что эта пропорциональность с некоторым приближением сохраняется и дальше.

Поэтому время $\frac{aa}{\beta\beta}\alpha$ более или менее точно можно определить из наблюдений, и тогда, действительно, выражение

$$\frac{L_0^* - e^{\frac{t}{a}} L_t^*}{\sqrt{t}} = L_0^* \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\beta\beta}{aa\alpha}} \left(1 - 4\psi\left(\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) + \right.$$

$$\left. + 4\psi\left(2\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) - 4\psi\left(3\sqrt{\frac{aa\alpha}{\beta\beta t}}\right) + \ldots\right)$$

оказывается функцией t, медленно убывающей при возрастании t. Тем не менее $\frac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}}$ при возрастании t стало бы увеличиваться, если бы дать $\frac{1}{\alpha}$ большее значение. Это повидимому и имеет место в самом деле, если допустить значительные потери через воздух, по крайней мере положив здесь в основу закон Кулона.

Итак, при первой обработке наблюдений уместно принять бесконечно большим время α (а значит, и сопротивление стекла в случае электродвижущей силы, следующей закону Кулона), пренебречь потерей через воздух и ограничиться установлением того, насколько удастся подобрать отвечающее наблюдениям значение $\frac{aa}{\beta\beta}\,\alpha$.

Убедившись, что предпосылки вычислений приближённо оправдываются, производить более точное сравнение результатов вычислений с наблюдениями было бы напрасным трудом, если бы не удалось, исходя из опыта, установить, в чём заключается источник обнаружившихся отклонений, и затем внести необходимые поправки в предпосылки вычислений. Так как я не имею возможности произвести экспериментальные исследования в рассматриваемой области, то я был вынужден временно воздержаться от дальнейшего развития моих идей.

8

СВЯЗЬ ЭТОЙ ПРОБЛЕМЫ С ЭЛЕКТРОМЕТРИЕЙ И ТЕОРИЕЙ РОДСТВЕННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Величина $\frac{\beta\beta}{aa\alpha}$ $\left(\text{в случае лейденской банки равная примерно } \frac{1}{2000}\right)$ даёт отношение $\frac{\text{антиэлектрическая сила}}{\text{сопротивление}}$ для стекла в абсолютной мере, причём в качестве единицы длины взята толщина банки, в качестве единицы времени — секунда. При вычислении её безразлично, какая связь установлена между единицей электрической массы и единицей электродвижущей силы; но константы α и $\beta\beta$ дали бы сопротивление и антиэлектрическую силу в системе измерения, отличной от Веберовой, где единица электродвижущей силы устанавливается на основе взаимодействий масс согласно закону Ампера.

Для сравнения разобранного здесь случая с явлениями, происходящими в хороших проводниках, может служить рассмотрение стационарного течения электричества при сохранении постоянной разности напряжений на поверхностях (или постоянном поступлении электричества). Здесь получается:

плотность внутри:

$$\rho = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x - e^{-x},$$

напряжение:

$$u = u_0 - e^x + e^{-x} + x\,(e^a + e^{-a}),$$

разность напряжений на поверхностях:

$$u_a - u_{-a} = 2\,(a\,(e^a + e^{-a}) - (e^a - e^{-a})),$$

общий заряд:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = e^a + e^{-a} - 2,$$

остаточный заряд:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - \frac{u_a - u_{-a}}{2a} = \frac{e^a - e^{-a}}{a} - 2,$$

количество электричества, протекающее в единицу времени:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = -\,(e^a + e^{-a}).$$

В данном случае, как и выше, за единицу времени принято α, за единицу длины β, за единицу напряжения — напряжение внутри сферы радиуса 1 с электричеством, распределённым на поверхности с плотностью 1.

В особенности существенным мне представляется проверка гипотетического закона и, если будет возможно, определение констант α и β для случая газов. Исходным пунктом для этого исследования могли бы служить наблюдения Риса[1]) (и Кольрауша[2]), показывающие, что в замкнутом пространстве потеря электричества через воздух не следует закону Кулона, и была бы желательна постановка опытов, имеющих целью измерение потерь электричества внутри замкнутого резервуара более или менее правильной формы.

---

[1]) Poggendorff's Annalen, T. 71, стр. 359.

[2]) Poggendorff's Annalen, T. 72, стр. 374.

XXVIII. ПО ПОВОДУ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Королевскому Обществу я позволю себе сообщить одно замечание, которое приводит в тесную связь теорию электричества и магнетизма с теорией света и лучистой теплоты. Я установил, что электродинамические действия гальванических токов могут быть объяснены, если исходить из допущения, что действие электрической массы на другие совершается не мгновенно, а распространяется по направлению к ним с постоянной скоростью (в пределах возможных ошибок наблюдений равной скорости света). При этом допущении дифференциальное уравнение распространения электрической силы — то же самое, что и уравнение распространения света и лучистой теплоты.

Пусть S и S' — два проводника, которые не находятся в состоянии относительного движения и через которые проходят постоянные гальванические токи; ε — масса электрической частицы в проводнике S, в момент времени t находящейся в точке (x, y, z); ε' — масса электрической частицы в проводнике S', в момент времени t находящаяся в точке (x', y', z'). По поводу движения электрических частиц (которое предполагается в каждом элементарном объёме проводника взаимно противоположно направленным для положительных и отрицательных частиц) я сделаю следующее предположение: в любой момент положительные и отрицательные частицы распределены таким образом, что, какова бы ни была функция $f(x, y, z)$ с непрерывными частными производными, суммы

$$\sum \varepsilon f(x, y, z), \quad \sum \varepsilon' f(x', y', z'),$$

распространённые на все частицы, могут быть пренебрегаемы по отношению к таким же суммам, распространённым только на положительные или только на отрицательные частицы.

Это допущение может быть выполнено разнообразными способами. Предположим, например, что проводники имеют кристаллическое строение, так что одно и то же относительное распределение электричества повторяется периодически через определённые расстояния, бесконечно малые по отношению к размерам проводников; тогда, если обозначим через β длину такого рода периода, то рассматриваемые суммы будут бесконечно малыми порядка $c\beta^n$ в случае, если функция f и её производные непрерывны до порядка $n-1$ и бесконечно малыми порядка $e^{-\frac{c}{\beta}}$, если они непрерывны все [1].

СОГЛАСНЫЙ С ОПЫТОМ ЗАКОН ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Пусть через u, v, w обозначены в точке (x, y, z) в момент времени t компоненты по трём осям удельной силы тока в механической мере, через u', v', w' — то же в точке (x', y', z'); пусть, затем, r — расстояние между этими точками, а c — константа, значение которой определили Кольрауш и Вебер. Тогда, как показывают наблюдения, потенциал силы, с которой S воздействует на S', равен

$$-\frac{2}{cc}\int\int\frac{uu'+vv'+ww'}{r}\,dS\,dS.$$

Если, вместо удельной силы тока, ввести произведения скоростей на удельные плотности и после этого, вместо произведений на объёмные элементы, — содержащиеся в них массы, то это выражение примет вид

$$\sum\sum\frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}\,\frac{1}{r}\,\frac{dd'(r^2)}{dt\,dt}$$

причём то изменение r^2 за время dt, которое проистекает от движения ε, обозначено через d, а то, которое проистекает от движения ε', — через d'.

Отнимая отсюда выражение

$$\frac{d\sum\sum\frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}\,\frac{1}{r}\,\frac{d'(r^2)}{dt}}{dt},$$

которое можно считать равным нулю, как это видно из суммирования по ε, мы получим новое выражение

$$-\sum\sum\frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}\,\frac{d'(r^2)}{dt},$$

а это последнее, после прибавления выражения

$$\frac{d'\sum\sum\frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}\,rr\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}}{dt},$$

которое можно считать равным нулю, как это видно из суммирования по ε', принимает вид

$$\sum\sum\varepsilon\varepsilon'\,\frac{rr}{cc}\,\frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt\,dt}.$$

ВЫВОД ЭТОГО ЗАКОНА ИЗ НОВОЙ ТЕОРИИ

Согласно предположению, которое до настоящего времени всегда принималось при изучении электростатического действия, потенциальная функция U как угодно распределённых электрических масс определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{dy^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-4\pi\rho=0$$

[ρ — плотность в точке $(x,\ y,\ z)$] и условием, что U непрерывна и на бесконечном расстоянии от действующих масс постоянна. Частный интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0,$$

который непрерывен всюду, кроме точки (x',y',z'), имеет вид

$$\frac{f(t)}{r},$$

и эта функция есть потенциальная функция точки (x',y',z'), если в момент времени t здесь находится масса $-f(t)$.

Я сделаю, однако, иное допущение, а именно, буду считать, что потенциальная функция U определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\alpha\alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+\alpha\alpha\, 4\pi\rho=0,$$

так что потенциальная функция массы $-f(t)$, помещённой в точке $(x',\ y',\ z')$, в момент времени τ будет

$$=\frac{f\left(t-\dfrac{r}{\alpha}\right)}{r}.$$

Если обозначим через $x_t,\ y_t,\ z_t$ координаты массы ε в момент t, а через $x_{t'}',\ y_{t'}',\ z_{t'}'$ — координаты массы ε' в момент t', и положим для краткости

$$\left((x_t-x'_{t'})^2+(y_t-y'_{t'})^2+(z_t-z'_{t'})^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r(t,\ t')}=F(t,\ t'),$$

то потенциал воздействия ε на ε' в момент t будет

$$=-\varepsilon\varepsilon' F\left(t-\frac{r}{\alpha},\ t\right).$$

Потенциал воздействия всех масс ε проводника S на все массы ε' проводника S' за время от 0 до t поэтому будет равен

$$P=-\int\limits_0^t\sum\sum\varepsilon\varepsilon' F\left(\tau-\frac{r}{\alpha},\ \tau\right)d\tau,$$

где суммы распространены на все массы обоих проводников.

Так как в каждом элементарном объёме проводника движение положительных и отрицательных частиц электричества взаимно противоположно, то после дифференцирования по t функция $F(t, t')$ приобретает свойство менять знак вместе с ε, и точно так же после дифференцирования по t' приобретает свойство менять знак вместе с ε'. Поэтому, при наших предположениях относительно распределения электричества, распространённая на все электрические массы сумма $\sum\sum \varepsilon\varepsilon' F_{n'}^{(n)}(\tau, \tau)$, где верхний значок обозначает дифференцирование по t, нижний — по t', только в том случае не будет бесконечно малой по отношению к сумме такого же вида, распространённой на массы лишь одного знака, если n и n' — оба нечётные.

Допустим теперь, что за время распространения силы от одного проводника к другому электрические массы совершают лишь очень маленький путь, и рассмотрим действие на протяжении промежутка времени, по сравнению с которым время распространения бесконечно мало. В таком случае в выражении P можно, прежде всего, заменить

$$F\left(\tau - \frac{r}{\alpha}, \tau\right)$$

через

$$F\left(\tau - \frac{r}{\alpha}, \tau\right) - F(\tau, \tau) = -\int_0^{\frac{r}{\alpha}} F'(\tau - \sigma, \tau)\, d\sigma,$$

так как суммой $\sum\sum \varepsilon\varepsilon' F(\tau, \tau)$ можно пренебречь; тогда получается:

$$P = \int_0^t d\tau \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} F'(\tau - \sigma, \tau)\, d\sigma,$$

или, после перемены порядка интегрирования и замены τ на $\tau + \sigma$,

$$P = \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma \int_{-\sigma}^{t-\sigma} d\tau\, F'(\tau, \tau + \sigma).$$

Если во внутреннем интеграле пределы поставим от 0 до t, то в результате на верхней границе прибавится выражение

$$H(t) = \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma \int_{-\sigma}^{0} d\tau\, F'(t + \tau, t + \tau + \sigma),$$

а на нижней — вычтется такое же выражение, но при значении $t = \sigma$. Поэтому

$$P = \int_0^t d\tau \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma\, F'(\tau, \tau + \sigma) - H(t) + H(0).$$

В этом выражении можно заменить $F'(\tau, \tau+\sigma)$ через $F'(\tau, \tau+\sigma) - F'(\tau, \tau)$, так как суммой

$$\sum\sum \varepsilon\varepsilon' \frac{r}{\alpha} F'(\tau, \tau)$$

можно пренебречь. Тогда в качестве множителя при $\varepsilon\varepsilon'$ будет стоять выражение, меняющее свой знак как вместе с ε, так и вместе с ε', так что при суммировании члены взаимно не уничтожаются, а бесконечно малыми долями отдельных членов можно пренебречь. Таким образом, заменяя

$$F'(\tau, \tau+\sigma) - F'(\tau, \tau) \text{ через } \sigma \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau}$$

и выполняя интегрирование по σ, мы получаем, с отбрасыванием бесконечно малой доли:

$$P = \int_0^t \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \frac{rr}{2\alpha\alpha} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau}\, d\tau - H(t) + H(0).$$

Легко видеть, что величинами $H(t)$ и $H(0)$ также можно пренебречь; в самом деле,

$$F'(t+\tau, t+\tau+\sigma) = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dt^2}\tau + \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt\, dt}(\tau+\sigma) + \ldots,$$

следовательно,

$$H(t) = \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \left(\frac{rr}{2\alpha\alpha} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} - \frac{r^3}{6\alpha^3} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dt^2} + \frac{r^3}{6\alpha^3} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt\, dt} + \ldots \right).$$

Здесь только первый член множителя при $\varepsilon\varepsilon'$ того же порядка, что и первый член в выражении для P, но и он, при суммировании по ε', даёт величину, которой можно пренебречь.

Итак, значение P, которое следует из нашей теории, совпадает с полученным из опыта, а именно,

$$P = \int_0^t \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \frac{rr}{cc} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau}\, d\tau,$$

если только положим $\alpha\alpha = \frac{1}{2} cc$.

По определению Вебера и Кольрауша оказывается, что

$$c = 439\,450 \cdot 10^6 \, \frac{\text{миллиметр}}{\text{секунда}},$$

откуда следует, что

$$\alpha = 41\,949 \, \frac{\text{географическая миля}}{\text{секунда}},$$

тогда как для скорости света из наблюдений Буша и Брадлея над аберрацией было получено число 41 994, а из прямых наблюдений Физо — число 41 882.

XXIX. О МЕХАНИЗМЕ УХА

1. ПО ПОВОДУ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ФИЗИОЛОГИИ БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ ТОНКИХ ОРГАНОВ ВОСПРИЯТИЯ

Помимо общих законов природы, физиология какого-либо органа восприятия покоится на двух особых основаниях: первое, психо-физическое, заключается в установлении результатов воспринимающей деятельности органа посредством наблюдений или опытов; второе, анатомическое, заключается в исследовании строения самого органа.

Поэтому при изучении органа и его функций имеются два пути. Или можно исходить из строения органа, устанавливая затем законы взаимодействия его составных частей и стараясь предусмотреть последствия внешних воздействий, или же можно исходить из наблюдений над восприятиями, доставляемыми органом, и стараться найти для них объяснение.

Стоя на первом пути, делают заключения от данных причин к последующим действиям; стоя на втором, — делают заключения от данных действий к их причинам.

Вместе с Ньютоном и Гербартом первый путь можно назвать синтетическим, второй — аналитическим.

Синтетический путь

Первый путь ближе всего анатому. Занимаясь изучением отдельных составных частей органа, он видит себя вынужденным по поводу каждой отдельной части ставить вопрос о том, какое воздействие она оказывает на деятельность органа в целом. В физиологии органов восприятия по этому пути можно было бы итти вперёд с таким же успехом, как и в физиологии органов движения, если бы только физические свойства отдельных частей были хорошо известны. Но вследствие микроскопичности изучаемых объектов установление этих свойств из наблюдений не вполне надёжно и во всяком случае оставляет желать чрезвычайно многого в смысле точности.

Отсюда возникает необходимость во всякого рода добавлениях, для которых основой являются аналогии или же телеология; здесь неизбежен величайший произвол, и по этой причине синтетический метод в физиологии органов восприятия редко ведёт к правильным результатам и уж во всяком случае не приводит к результатам, которые можно было бы назвать твёрдо установленными.

Аналитический путь

Тот, кто идёт по этому пути, старается найти объяснение наблюдаемым результатам восприятия.

Работа распадается на три части.

1. Разыскание гипотезы, которая *достаточна* для объяснения восприятий.

2. Исследование того, насколько она *необходима* для такого объяснения.

3. Сравнение с опытом, имеющее целью утвердить или исправить гипотезу.

I. Надлежит подвергнуть инструмент восприятия всестороннему изучению, рассматривая сами восприятия как цель, а устройство воспринимающего органа как средство, подчинённое этой цели. Но под целью не нужно понимать что-либо, основанное на догадках, а только то, что даётся опытом, и какие бы то ни было конечные цели (если не говорить о происхождении органа) могут быть оставлены без внимания.

Факту восприятий мы ищем объяснения в строении органа. В поисках этого объяснения мы прежде всего анализируем назначение органа; здесь возникает ряд связанных вспомогательных проблем, и только убедившись в том, что *нельзя* обойтись без их разрешения, мы станем размышлять о том, *как* их разрешить в соответствии со строением органа.

II. После того как установлена некоторая теория, служащая для объяснения деятельности органа, не следует упустить из виду, что нужна и проверка того, насколько она является *необходимой* для такого объяснения. Следует тщательно различать, какие допущения безусловно необходимы или необходимы как следствие несомнительно установленных законов природы, и какие могут быть заменены иными допущениями, и вовсе устранять то, что придумано без необходимости. Только таким образом при попытках найти объяснение фактам восприятия возможно избежать вредных последствий использования аналогий; к тому же таким образом существенно облегчается и проверка гипотезы посредством опыта (ибо поставлены вопросы, требующие ответа).

III. Для проверки гипотезы посредством опыта могут быть использованы отчасти те вытекающие из неё следствия, которые относятся к явлениям восприятия; отчасти же — те физические свойства составных частей воспринимающего органа, которые должны были быть допущены при построении гипотезы. Что касается явлений восприятия, то вполне точное сравнение с результатами наблюдения здесь крайне затруднительно и потому при проверке теории большею частью приходится ограничиваться вопросом, нет ли каких-либо опытных фактов, которые бы стояли в противоречии с построенной теорией? Напротив, что касается физических свойств составных частей органа, то относящиеся к ним следствия могут иной раз быть хорошо проверены, что ведёт и к успехам в познании законов природы; примером может служить теория, построенная Эйлером для объяснения явления ахроматичности глаза.

Для двух методов исследования, которые мы противопоставили один другому, наименования «синтетический» и «аналитический» пригодны, впрочем, лишь условно. Строго говоря, невозможно ни чисто синтетическое, ни чисто аналитическое исследование. Всякий синтез опирается на результаты предшествующего анализа, и всякий анализ нуждается для своего утверждения или исправления посредством опыта в последующем синтезе. При первом методе исследования общие законы движения представляют собою не что иное как принятый результат ранее произведённого анализа.

Первый, преимущественно синтетический метод потому не должен применяться в теории более тонких органов восприятия, что предпосылки для возможности его применения выполнены лишь в незначительной степени, а добавления на основе аналогии и телеологии здесь остаются совершенно произвольными.

С другой стороны, второй, по преимуществу аналитический метод, правда, также не может обойтись без аналогий и телеологии, но в пользовании ими избегается произвол, так как

1) к телеологическим заключениям приходится прибегать только отвечая на вопрос, какими средствами могли быть осуществлены фактически имевшие место восприятия, и, напротив, не возникает вопроса о пользе отдельных составных частей исследуемого органа;

2) хотя от применения аналогий («творения гипотез») вполне и не следует отказываться (как этого хотел бы Ньютон), но надлежит отдавать предпочтение тому, что неизбежно должно быть допущено при объяснении деятельности органа, а те соображения, которые возникают на основе аналогии, но не являются необходимыми, — отбрасывать.

Действуя в согласии с этими принципами, мы должны прежде всего установить, каковы восприятия интересующего нас здесь органа слуха. Нужно выяснить посредством опыта и наблюдения настолько точно, насколько это возможно, в какой степени верными, точными и острыми являются осуществляемые ухом восприятия звука как с точки зрения состава звука, так и с точки зрения силы и направления.

Все факты, сюда относящиеся, я предполагаю известными. В книге Гельмгольца «Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik» («Учение о слуховых восприятиях как физиологическая основа музыкальной теории») собраны полученные в самое последнее время и преимущественно самим Гельмгольцем результаты, относящиеся к такой чрезвычайно трудной — в смысле установления фактической стороны дела — области, какой является восприятие звука.

Я был вынужден много раз высказываться против тех следствий, которые Гельмгольц выводит из опытов и наблюдений, и потому в тем большей степени считаю себя обязанным здесь засвидетельствовать, как высоко я расцениваю изложенные в его работах достижения в занимающей нас области. Но я должен отметить, что его достижения, по моему мнению, заключаются не столько в созданных им теориях, касающихся механизма уха, сколько в улучшении опытной основы для такого рода теорий.

Точно так же мне придётся считать здесь известным строение уха и я буду просить снисходительного читателя в случае надобности обратиться к помощи руководства по анатомии, снабжённого иллюстрациями. Изложение общих результатов новейших исследований по строению улитки и уха можно найти в недавно появившемся третьем выпуске второго тома руководства по анатомии человека Генле.

В настоящей работе я ставлю своей задачей найти объяснение известным психо-физическим фактам с помощью известных анатомических фактов.

Составные части уха, которые интересуют нас с точки зрения поставленной задачи, это — барабанная полость и лабиринт, состоящий из передней полости, слуховых ходов и улитки. Порядок исследования будет такой: сначала мы будем стараться из строения этих частей сделать заключения о том, как каждая из них участвует в процессе восприятия звука, а затем для каждой составной части в отдельности будем исходить из задачи, ею выполняемой, и станем искать условия, выполнение которых является необходимым для удовлетворительного разрешения этой задачи.

2. БАРАБАННАЯ ПОЛОСТЬ

Давно известно, что действие аппарата, находящегося в барабанной полости, заключается в том, чтобы давление воздуха передавать с надлежащим усилением жидкости, находящейся в лабиринте.

Согласно изложенным выше принципам мы должны теперь, исходя из наблюдаемой на опыте деятельности органа, вывести условия, которые должны быть необходимо выполнены при такого рода передаче. Эти условия выводятся преимущественно из тонкости, обнаруживаемой ухом при восприятии звука, и из чрезвычайной остроты восприятия, которая иногда встречается у дикарей и жителей пустыни, если их ухо не повреждено. Мы имеем при этом в виду состав звука, т. е. те его свойства, которые не зависят от силы и направления: упомянутым аппаратом эти свойства передаются жидкости в лабиринте без всякого искажения, и *в каждый момент изменение давления воздуха при передаче увеличивается в постоянном отношении.*

Не представит сомнений, что именно в этом заключается назначение этого аппарата, если только мы не преминем по наблюдениям над восприятием звука установить, в какой степени эти наблюдения дают нам право, т. е. вынуждают нас, притти к выводу, что это назначение действительно выполняется.

Это мы сейчас же установим, но сначала укажем математическое выражение для того свойства изменения давления, от которого зависит звук. Кривая, которая изображает скорость изменения давления как функцию времени, вполне определяет звуковую волну (с точностью до направления), следовательно, определяет и силу и состав звука. Если вместо самой скорости взять её логарифм, или, если угодно, логарифм её квадрата, то получится кривая, вид которой не зависит от силы и направления звука, кривая, которая полностью определяет состав звука, и которую можно было бы назвать «звуковой кривой».

Если бы наш аппарат выполнял своё назначение вполне безупречно, то звуковая кривая жидкости в лабиринте и звуковая кривая воздушной среды оказывались бы вполне совпадающими. И вот тонкость слуха при звуковых восприятиях даёт право заключить, что при передаче звуковая кривая изменяется чрезвычайно мало, так что отношение между изменениями давления, взятыми в один и тот же момент для воздушной среды и жидкости в лабиринте, *покуда длится звук, остаётся почти неизменным.*

Возможность медленных изменений этого отношения вполне совместима с опытом и даже вероятна. В самом деле, наличие таких изменений имело бы последствием лишь неустойчивость в оценке слухом силы звука, допущение чего опытом отнюдь не исключается. Но если бы звуковая кривая изменялась заметным образом, то едва ли была бы мыслима, по моему мнению, такая тонкость слуха, какая обнаруживается, например, при восприятии ничтожных нюансов в произношении. Непосредственная оценка тонкостей звуковых восприятий и, в частности, оценка различий в звуковой кривой, соответствующих различиям в самом звучании, конечно, остаётся всегда очень субъективной.

Различие же в звучании служит нам также для того, чтобы оценить отдалённость источника звука. Механическую причину этого различия, изменение звуковой кривой при распространении звука в воздушной среде, можно легко установить в результате вычисления.

Поэтому мы можем далее не развивать этого хода мыслей и только потребуем от передаточного аппарата, чтобы он не допускал грубых искажений звучания, хотя мы полагаем, что точность его гораздо значительнее, чем обычно принимается.

I. Аппарат барабанной полости (в неповреждённом состоянии) есть механический аппарат такой чувствительности, которая всё, что мы знаем о чувствительности механических аппаратов, превосходит в необычайной мере.

В самом деле, отнюдь не является невероятным, что им точно передаются движения столь малые, что они не могли бы быть восприняты с помощью микроскопа.

Конечно, трудно оценить непосредственно механическую энергию наиболее слабых звуков, которые ещё способен воспринимать наш слух; но зная закон, согласно которому сила звука убывает при распространении звука в воздушной среде, можно показать, что доступны восприятию и такие звуки, механическая энергия которых в миллионы раз меньше, чем энергия звуков средней силы.

За неимением других достойных веры наблюдений я сошлюсь на сообщение Никольсона, согласно которому по ночам окрики часовых в Портсмуте отчётливо слышны в Райде на острове Уайт, т. е. на расстоянии 4—5 английских миль. Если принять во внимание постановку опытов, к которой должен был прибегнуть Колладон, изучая распространение звука в воде, то не придётся сомневаться, что о заметном усилении звука вследствие распространения его в воде не может быть и речи и что в данном случае действительно механическая энергия звука убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, а вероятно, и ещё быстрее. Так как расстояние в 4—5 миль примерно в 2000 раз больше, чем расстояние в 8—10 футов, то механическая энергия звуковой волны, падающей на барабанную перепонку, в рассматриваемом примере в четыре миллиона раз меньше, чем это было бы на расстоянии 8—10 футов от часового, а движения — меньше в 2000 раз. Правда, нужно согласиться, что при оценке силы звуковых ощущений не приходится говорить об отношениях 1 к тысяче миллионов или даже 1 к тысяче. Но согласно новейшим сравнительным наблюдениям над психологической оценкой и физической, или механической мерой силы звука, отмеченное обстоятельство не даёт повода для возражений против полученного нами результата. Повидимому, соотношение оценок здесь, примерно, такое же, какое существует между нашей оценкой световой силы или величины звёзд и механической энергией посылаемого ими света. Как известно, при установлении шкалы величин звёзд было установлено, что механическая энергия света убывает в геометрической прогрессии в то время, как величина звезды убывает в арифметической.

Если бы точно так же мы разделили звуки, начиная от звуков обычно воспринимаемой силы до ещё слышных, по «величинам» от первой до восьмой, то механическая энергия звуков второй величины была, скажем, в десять, третьей величины — в сто, ... восьмой величины — в десять миллионов раз меньше, чем для звуков первой величины; размеры движений были бы при этом для звуков третьей, пятой, седьмой величины в десять, сто, тысячу раз меньше, чем для звуков первой величины.

Говоря о звуковой волне, проникающей в ухо, я преднамеренно сделал остановку перед барабанной перепонкой, так как существует мнение, что более сильные звуки подвергаются заглушению (посредством натяжения барабанной перепонки?). Я должен, однако, признаться, что это мнение мне представляется совершенно произвольной гипотезой. Конечно, не исключено, что, когда резкий звук угрожает разрушить мембраны лабиринта, начинают действовать какие-то защитительные приспособления, но в свойствах слуховых впечатлений я не вижу ничего такого, что напоминало бы изменяемость освещения зрительного поля в случае глаза, и уж решительно не понимаю, чем могла бы быть полезной постоянно меняющаяся рефлексивная деятельность сухожилия стременной мышцы (M. tensor tympani) точному восприятию музыкального произведения. По моему мнению, нет ни малейшего основания в случае звука на расстоянии 10 футов допускать иное отношение размеров движений перед барабанной перепонкой и движений стременной пластинки, чем на расстоянии 20 000 футов; но даже если примем, что натяжение барабанной перепонки способно изменяться очень значительно, наши заключения остаются теми же самыми. Если движения стременной пластинки на расстоянии 10 футов от часового, по всей вероятности, различимы простым глазом, то равным образом при увеличении в 2000 раз будут различимы и движения на расстоянии 20 000 футов.

II. Раз барабанный аппарат верно передает столь малые движения, как мы в этом убеждаемся из опытных данных, то твёрдые тела, из которых он состоит, в тех местах, где они взаимно воздействуют, должны прилегать чрезвычайно плотно одно к другому, действительно, одно тело не может передать другому своё движение, если отстоит от него на расстояние большее, чем величина движения.

Далее, лишь небольшая часть механической энергии звука, теряясь на постороннюю работу, как, например, растяжение капсул и мембран, не доходит до лабиринта.

Такого рода потеря избегается вследствие исключительно малой ширины свободного края мембраны окна передней полости. Если бы этот край был шире, то колебания стременной пластинки почти вовсе уничтожались бы колебаниями этого края и оказывали бы самое ничтожное воздействие на мембраны и окно улитки.

Действие этого края мембраны на стременную пластинку вследствие малой ширины края при различных положениях пластинки, покуда длится звук, будет очень различное. Поэтому, раз звук не искажается вследствие этого обстоятельства, приходится допустить, что упругость мембраны очень мала и что пластинка не ею, а чем-то другим приводится в положение равновесия.

III. Так как части барабанного аппарата, чтобы была обеспечена наблюдаемая острота слуха, должны постоянно прилегать одна к другой с микроскопической точностью, то, повидимому, неизбежны какие-то корректирующие приспособления, направленные против растяжений и сжатий тел при изменении температуры. Внутри барабанной полости температурные вариации, возможно, очень незначительны, но в их существовании сомневаться не приходится. При условии, что температура внешней среды достаточно долгое время остаётся неизменной, распределение температуры в человеческом теле подчиняется, примерно, такому закону: отклонение температуры в некоторой точке тела от температуры мозга пропорционально отклонению внешней температуры от температуры мозга. Этот закон получается из закона Ньютона и из допущения, что теплопроводность и теплоёмкость в пределах рассматриваемых температур постоянны, — допущение, которое в самом деле выполняется с достаточной точностью. На основании этого закона, зная отклонение температуры барабанной полости от температуры мозга, можно делать заключения о температурных вариациях. Хотя разность температур барабанной полости и мозга не удаётся определить, однако, из многих косвенных соображений, из рассмотрения сообщений с внешней средой через внешний слуховой ход и Tuba и расположения кровеносных сосудов вокруг барабанной полости, можно судить о том, что, действительно, разность температур заметно велика.

Напротив, пирамидка имеет температуру, вероятно, очень мало отличающуюся от температуры мозга, так как он содержит Can. caroticus; отсюда приходится заключить, что внутренняя обкладка барабанной полости является очень плохим проводником тепла и излучителем.

Что касается других костей, находящихся по соседству с барабанной полостью, то о них, конечно, нельзя утверждать, что они имеют такую же высокую температуру, как мозг или пирамидка. Однако, они содержат значительные источники тепла — кровеносные сосуды, большие артерии и вены и, так же как и пирамидка, защищены от излучения внутри полости слизистой оболочкой и надкостным покровом. Поэтому мы имеем право принять, что их температура значительно выше, чем температура полости.

Если теперь внешняя температура падает, то в соответствии с указанным законом отклонение от температуры мозга всюду в теле увеличивается в одном и том же отношении; вследствие этого полость охладится заметно, а окружающие кости — лишь очень незначительно, и потому слуховые косточки заметно сожмутся, тогда как стенки полости останутся почти без изменений.

Больше того, что при понижении внешней температуры слуховые косточки охладятся и сожмутся гораздо сильнее, чем стенки барабанной полости; едва ли возможно что-либо утверждать относительно влияния температуры на аппарат этой полости при нашем полном незнании термических свойств его составных частей.

IV. Теперь я имею в виду выяснить, какие изменения должны происходить во взаимном расположении слуховых косточек при понижении внешней температуры для того, чтобы все составные части аппарата, которые должны находиться в соприкосновении, при этом продолжали тесно примыкать одна к другой. Частью системы слуховых косточек, наиболее прочно связанной со стенкой барабанной полости, является сочленение, соединяющее с этой стенкой наковальню. При охлаждении все расстояния в твёрдых телах уменьшаются, поэтому уменьшается и расстояние этого сочленения от сочленения между наковальней и стременем. Частью молоточка, наиболее неподвижной, по меньшей мере в направлении, параллельном кольцу барабанной перепонки, является, вероятно, верхний конец рукоятки. Но так как при охлаждении расстояние сочленения между наковальней и стенкой полости от точки верхней рукоятки молоточка, наиболее неподвижно укреплённой в барабанной перепонке, остаётся почти неизменным, а расстояние обеих этих точек от сочленения между наковальней и молоточком уменьшается, то в последнем сочленении угол между прямыми, направленными к этим точкам, должен несколько раскрыться.

При описанных изменениях в положении слуховых косточек молоточек повернётся немного в направлении «вперёд — к середине — назад» и одновременно очень немного в направлении «вперёд — вверх — назад» (чтобы настичь пуговку наковальни на её высоте). Длинное продолжение молоточка при этом двигалось бы по щели вверх и к середине, если бы по отношению к рукоятке и головке молоточка оно сохраняло одно и то же положение. Но под влиянием охлаждения оно искривляется сильнее и приближается к рукоятке молоточка, так что во время изменения температуры, вероятно, лишь немного и постепенно высовывается из щели.

V. Мы только что установили условия, которым должно удовлетворять расположение слуховых косточек для того, чтобы они постоянно находились в тесном соприкосновении и ни на крае пластинки передней области, ни в барабанной перепонке не вызывали заметно неравномерных натяжений. Спросим себя теперь о тех с р е д с т в а х, с помощью которых слуховым косточкам постоянно придаётся и обеспечивается правильное положение. (Это осуществляется по большей части противоположно направленными силами, которые в нормальном положении взаимно уравновешиваются, а при выходе из нормального положения стремятся вернуть косточки в него обратно.)

Такие средства, очевидно, надо было бы искать в двух мускулах, регулирующих положение косточек, в капсулях, лигаментах, складках слизистой оболочки и двух пластинках, с которыми сращены косточки. При разыскании причин, оказывающих определённое воздействие на косточки, мы находим, однако, несколько возможных путей, в особенности, если сосредоточим внимание на слизистой оболочке. Чтобы выбрать из ряда возможностей ту, которая оказывается наиболее вероятной, необходимо в первую очередь, проводя анатомическое исследование на свежих препаратах, составить некоторое представление об упругости и натяжении связок, оболочек и т. п. Это для меня невозможно. Но можно также не терять надежды, что, тщательно развивая цепь следствий из различных гипотез, нам удастся в случае ложных гипотез наткнуться на несообразности и тогда исключить эти гипотезы.

В настоящем исследовании целесообразно делать различие между прислушивающимся (т. е. приспособленным к точному слышанию) ухом и ухом в обычном состоянии, а в некоторых случаях также — между ухом новорождённого и ухом взрослого. Мы различаем прислушивающееся ухо и ухо в обычном состоянии, когда стременная пластинка под воздействием M. tensor tympani осуществляет некоторый нажим на жидкость лабиринта, так что давление этой жидкости становится несколько выше, чем давление воздуха в барабанной полости; при этом твёрдые составные части аппарата, которые должны соприкасаться, несколько прижимаются одна к другой. Те же, кому представляется маловероятным такое длительное напряжение аппарата (за исключением самой барабанной перепонки), могут считать, что при температурных изменениях слуховые косточки под воздействием связок и постепенного изменения контракции мускулов меняют своё положение, не прижимаясь одна к другой, так как мы установили, что только таким образом может быть обеспечено взаимное примыкание всех частей аппарата.

В таком случае наши результаты всё же не теряют силы по отношению к прислушивающемуся, преднамеренно приспособленному к точному слышанию уху; впрочем, не исключено также, что ухо (в состоянии бодрствования?) постоянно, хотя и в меньшей степени, является адаптированным.

Аппарат слуховых косточек состоит из тельца, расчленяющегося на две части (молоточек и наковальня) и способного вращаться около оси, и из сочленённого с предыдущим пестикообразного тельца (стремени), осуществляющего нажим на жидкость окна передней полости. Один конец оси вращения, коротенькое продолжение наковальни, посредством сочленения, связанного с наковальней, прикреплён к задней стенке барабанной полости, а другой конец — длинное продолжение молоточка, — будучи окружён лишь мягкими телами, внедряется в щель между передним верхним краем кольца барабанной перепонки и скалистым телом и ложится в борозду этого кольца (так по крайней мере устроено ухо новорождённого).

Определение расположения слуховых косточек относительно барабанной полости очень облегчается методом Генле, который представляет себе самую полость повёрнутой таким образом, что ось вращения лежит горизонтально сзади наперёд, а окно передней полости стоит вертикально.

Если под влиянием давления воздуха головка молоточка и сросшаяся с ним барабанная перепонка увлекаются вниз, то основание стремени прижимается к пластинке (овального) окна передней полости, давление в жидкости лабиринта повышается и таким образом пластинка (круглого) окна улитки выпирает наружу.

Для того чтобы аппарат мог передавать жидкости лабиринта малейшие изменения давления воздуха, прежде всего необходимо, чтобы *давление* *стремени действовало на жидкость лабиринта всегда совершенно равномерно.* Для этого

1) нужно, чтобы основание стремени давило всегда на одну и ту же поверхность и направление движения было бы неизменным;

2) не должно быть никаких скреплений между стременем и стенкой окна передней полости — по крайней мере таких, которые оказывали бы заметное влияние на положение и движение стремени;

3) давление стремени на пластинку окна никогда не должно прерываться.

Небольшое размышление приводит к заключению, что при нарушении одного из этих условий изменения давления воздуха или вовсе не передавались бы жидкости лабиринта или передавались бы по совершенно изменённому закону.

Для того чтобы условие 3 было обеспечено, необходимо, чтобы с помощью M. tensor tympani, который тянет внутрь головку молоточка, давление на пластинку окна передней области постоянно поддерживалось на уровне, значительно превышающем наиболее высокий уровень давления во время слушания. По всей вероятности, у окна улитки или передней полости ощущается влияние этого давления в форме напряжения или искривления (растяжение, изменение формы) пластинки, и посредством M. tensor tympani устанавливается давление, наиболее благоприятное для точного слушания.

Давление зависит только от положения головки молоточка, и, чтобы осуществить требуемое положение головки, напряжение мускула должно быть как раз такое, чтобы оно уравновешивало при этом действие натяжения барабанной перепонки. Велико или мало натяжение перепонки — является мало существенным; но только оно должно, как мы сейчас покажем, быть настолько сильным, чтобы лишь небольшая часть механической энергии волн, падающих на ухо, терялась в воздушной среде внутри полости.

Когда пластинка, натянутая в свободной воздушной среде, встречает звуковую волну, то возникает её колебание и вместе с тем образуются звуковые волны — обратная и идущая вперёд далее (преломлённая). Как распределяется механическая энергия между этими тремя действиями, это зависит от натяжения пластинки. Если натяжение очень невелико, то первые два действия очень незначительны и волна идёт вперёд почти в неизменённом виде. Если же пластинка натянута так сильно, что её колебания очень малы по сравнению с колебаниями частиц воздуха в падающей на неё волне, то она может передать воздушной среде, находящейся позади неё, лишь очень слабые колебания, так что давление позади мембраны изменяется чрезвычайно мало, и почти всё изменение давления на передней стороне пластинки уходит на натяжение самой пластинки. Кроме того, образуется ещё обратная волна, если только дело происходит в с в о б о д н о й воздушной среде.

Таким образом, положение чечевички относительно окна передней полости не может оставаться неизменным; но посредством вращения наковальни около её точки прикрепления достигается то, что чечевичка двигается только параллельно продольной оси окна, а для того чтобы стременная пластинка оставалась на своём месте, необходимо, чтобы стремя могло вращаться только в этом направлении около центра поверхности сочленения с наковальней. Так как для этого направления имеется особое приспособление (M. stapedius), обеспечивающее возможность вращения стремени около пуговки наковальни, а для направления перпендикулярного такого приспособления нет, то можно догадаться, что последнее приспособление именно потому является излишним, что пуговка постоянно удерживается на одной и той же высоте.

VI. Натяжение сухожилия M. tensor tympani уравновешивается отчасти тем, что рукоятка молоточка укреплена в барабанной перепонке, а сама перепонка — в Sulcus tympanicus. Но скрепление между рукояткой и перепонкой простирается (согласно Трёльчу и Герлаху) лишь немного выше, чем место внедрения сухожилия, и сам конец сухожилия находится выше, чем концы Sulcus tympanicus.

Ясно, что сама по себе связь барабанной перепонки с Sulcus tympanicus недостаточна, чтобы противостоять натяжению M. tensor tympani. Для равновесия молоточка необходимо нечто большее, именно, чтобы на часть, расположенную выше места внедрения, действовал момент вращения, по величине равный моменту, действующему на ниже расположенную рукоятку, но направленный в противоположную сторону. Эту необходимую для восстановления равновесия силу надо искать:

1) или в связи, существующей между барабанной перепонкой и поверхностными слоями кожи внешнего слухового хода,

2) или в воздействии заднего кармана барабанной полости,

3) или, может быть, в совместном действии закрепления головки молоточка в стенке барабанной полости посредством, с одной стороны, наковальни и с другой, — Lig. Superius Arnoldi. Эти закрепления образуют угол, направленный к острому концу короткого продолжения и, в состоянии напряжения, прижимают этот конец к барабанной перепонке.

XXX. ФРАГМЕНТЫ ФИЛОСОФСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Nec mea dona tibi studio disperta fideli
Intellecta prius quam sint, contempta relinquas
Lucretius [1]).

ИЗ ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ПОЗНАНИЯ

Опыт учения об основных понятиях математики и физики как основе для объяснения природы

Своей задачей **наука о природе** имеет — охватить и логически истолковать природу посредством точных **понятий**.

Роль понятий, посредством которых осуществляется логическое истолкование природы, заключается не только в том, чтобы в каждый момент дополнять восприятия, но и в том, чтобы предусматривать заранее необходимость или — если система понятий ещё не окончательно построена — вероятность будущих восприятий; таким образом, можно установить, что является «возможным» (также — что является «необходимым», или чему противоположное невозможно), и степень возможности («вероятности») каждого события, которое признано возможным, может быть вычислена математически, если только введённые понятия достаточно точны.

Если действительно наступает то, что согласно этим понятиям является необходимым или вероятным, то сами понятия этим контролируются и на таком контроле посредством опыта основывается доверие, которое мы им оказываем. Если же случается нечто такое, что согласно понятиям не должно быть ожидаемо, т. е. является невозможным или невероятным, то возникает задача: так дополнить, или, если нужно, видо-

---

1) **Лукреций**. «О природе вещей», книга I, строки 52—53. Строки 50—53, в переводе Ф. А. Петровского, таковы:

Ты же теперь напряги свой слух и свой ум прозорливый,
Освободи от забот, достоверному внемля ученью,
Дабы дары, приносимые мной с беспристрастным усердьем,
Прежде чем их оценить, с презрением прочь не отринул.

изменить понятия, чтобы в дополненной или улучшенной системе понятий воспринятое нами перестало быть невозможным или невероятным. Дополнение или улучшение системы понятий есть «объяснение» неожидавшегося восприятия. Такого рода процесс делает наше понимание природы постепенно всё более полным и правильным, но вместе с тем ведёт нас всё глубже за поверхностную видимость явлений.

История «объясняющих» наук о природе (насколько мы можем её проследить) показывает, что таким именно и был действительный путь развития наших знаний. Системы понятий, лежащие в их основе в настоящее время, возникли в результате постепенного преобразования прежних систем, и причину, в силу которой были совершаемы переходы к новым системам, всегда можно найти в некотором противоречии или некоторой невероятности, которые обнаруживались при прежних способах объяснения явлений.

Таков процесс образования новых понятий, насколько он является доступным нашему наблюдению.

Но Гербарт доказал, что и все те из числа понятий, служащих для объяснения мира, возникновения которых мы не можем проследить ни в истории, ни в нашем собственном развитии (так как они внедряются незаметно, вместе с усвоением речи), — если только они представляют собою нечто большее, чем выражение связи между простыми ощущениями — могут быть выведены из того же источника, и потому нет необходимости выводить их (как категории у Канта) из особых свойств человеческой души, независимых от всякого опыта.

Такое доказательство их происхождения из непосредственных восприятий важно для нас потому, что *только оно выясняет их значение удовлетворительным с точки зрения науки способом.*

Как только образовано понятие вещей, «существующих для себя» при размышлениях по поводу изменения, которое противоречит понятию «существования для себя», возникает задача, насколько возможно сохранить и оправдать это уже введённое понятие. Отсюда возникает одновременно понятие непрерывного изменения и понятие причинной связи.

Пусть наблюдается переход некоторой вещи из одного состояния в другое, причём не обнаруживается никакого скачка, т. е. внезапного изменения. Дополняя восприятие, можно или принять, что переход совершается посредством очень большого, но конечного числа скачков, недоступных по своей малости нашему восприятию, или же допустить, что рассматриваемая вещь переходит из одного состояния в другое через все промежуточные ступени. Наиболее сильное основание для последнего допущения заключается в стремлении насколько возможно сохранить понятие «существования для себя». Конечно, невозможно себе представить в действительности переход через все промежуточные ступени, но подобного рода затруднения, как уже было замечено, встречаются в сущности и для всех других логических понятий.

Вместе с тем, в согласии с ранее введённым и оправдываемым посредством опыта понятием «существования для себя», мы заключаем, что вещь осталась бы тем, чем она была, если бы не прибавилось нечто новое. Отсюда возникает потребность искать причину всякого изменения.

I. В каком случае наше понимание мира мы считаем истинным?

«В том случае, если совокупность наших представлений соответствует совокупности вещей».

Элементы нашего представления о мире существенно отличны от соответствующих элементов представляемой реальности. Они — нечто в нас; элементы реального — нечто вне нас. Но связи между элементами в представлении и элементами в реальном должны быть одинаковы, если представление истинно. Истинность представления не зависит от степени тонкости представления, — не зависит от того, соответствуют элементы представления бо́льшим или меньшим частям реального. Но связи должны отвечать друг другу: не может быть в представлении непосредственного взаимодействия двух элементов, если в действительности имеется лишь опосредствованное взаимодействие. В этом случае представление считается ложным и нуждается в исправлении; напротив, если элемент представления заменяется группой мелких элементов, причём его свойства следуют отчасти из более простых свойств мелких элементов, отчасти же — из их отношений, и таким образом частично становятся доступными нашему пониманию, то наше проникновение в связь вещей от этого становится глубже, но при этом нет необходимости прежнее понимание рассматривать как ложное.

II. Каким образом устанавливается связь вещей?

«Из связи явлений».

Представление о вещах, доступных чувственному восприятию, в определённых пространственно-временных соотношениях есть то, что является результатом сосредоточенного размышления о природе или даётся в качестве такового. С другой стороны, качественные признаки вещей, как цвет, звук, тон, запах, вкус, теплота или холод, есть нечто заимствованное только из наших ощущений, вне нас не существующее.

Итак, то, из чего должна быть познаваема связь вещей, есть количественные, пространственно-временные соотношения между вещами, доступными чувственному восприятию, а также соотношения интенсивности в признаках и их качественные различия.

Из размышлений над наблюдаемой связью этих соотношений и должно возникнуть познание связи вещей.

Причинная связь

I. То, к осуществлению чего стремится нечто действующее (ein Agens), должно содержаться в самом понятии действующего; его действие (Action) не может зависеть ни от чего другого, кроме его собственной сущности.

II. Это требование удовлетворено, если действующее стремится сохранить или восстановить само себя.

III. Но такого рода действие невозможно мыслить, если действующее есть вещь, нечто сущее, а возможно лишь, если оно есть состояние или отношение. Если налицо имеется стремление что-то сохранить или восстановить, то должны быть возможны отклонения, и притом различных степеней, от того, что сохраняется или восстанавливается; и это последнее, если упомянутому стремлению противостоят иные стремления, может быть сохранено или восстановлено в большей или меньшей степени. Но степеней бытия нет никаких, степенные различия мыслимы лишь в состояниях или отношениях. Следовательно, если нечто действующее стремится само себя сохранить или восстановить, оно должно быть состоянием или отношением.

IV. Указанного рода действие некоторого состояния, разумеется, может быть направлено только на такие вещи, которые способны находиться в том же состоянии. Но на какие вещи оно направлено и существует ли оно вообще, об этом нельзя судить, исходя из самого понятия действующего [1]).

Очень правильно замечает Кант, что, анализируя понятие вещи, нельзя заключить, что она существует. или что она есть причина

---

[1]) Эти предложения справедливы лишь в том предположении, что действие приписывается некоторой простой реальной основе.

Если две вещи a и b вступают в связь по некоторой внешней причине, то или из самой их связи (связанности) или же из изменения её степени может проистекать некоторое следствие c. Проще всего допустить, что c есть следствие их связанности.

Нет необходимости развивать дальше эти соображения. Их принцип заключается в применении предложения: «то, к осуществлению чего стремится действующее, должно содержаться в самом понятии действующего», но применять его нужно не к объектам, обладающим целым рядом характеристик (как это делали Лейбниц и Спиноза), а к возможно более простым реальным основаниям. И actio и effectus переводятся одним и тем же словом «действие» (Wirkung). Так как гораздо чаще это слово употребляется во втором значении, то легко возникает неотчётливость, когда его употребляют вместо actio, как, например, при обычных переводах «actio aequalis est reactioni», «principium actionis minimae». Кант старается облегчить положение тем, что рядом со словами «действие», «взаимодействие» ставит в скобках латинское «actio», «actio mutua». Пожалуй, можно было бы сказать: «сила равна противосиле», «принцип наименьшего применения силы». Но так как нет простого перевода для слова «agere», обозначающего стремление, направленное на что-то другое, то пусть будет мне позволено пользоваться иностранным словом.

чего-нибудь другого, и что, таким образом, понятия бытия и причинной связи — не аналитические и могут быть почерпнуты только *из опыта*. Но когда он дальше приходит к необходимости принять, что понятие причинной связи предшествует всякому опыту и обусловливается свойствами познающего субъекта, сводя, таким образом, причинность просто к правилу временной последовательности, в силу которого всякому явлению, рассматриваемому как причина, может быть сопоставлено *всякое другое*, рассматриваемое как следствие, — то это уже означает вместе с водой выплескивать из корыта и ребёнка. (Конечно, надлежит устанавливать причинные связи, исходя из опыта; но мы не вправе отказаться от обязанности исправлять и дополнять наше понимание наблюдаемых явлений последующим размышлением.)

Слово «гипотеза» имеет теперь несколько иной смысл, чем у Ньютона. Теперь называют гипотезой всё, что мы прибавляем к наблюдениям после их обдумывания.

Ньютон был далёк от нелепой мысли, будто бы объяснение явлений может быть получено путём абстракции.

Ньютон: Et haec de deo; de quo utique ex phaenomenis disserere ad philosophiam experimentalem pertinet. Rationem vero harum gravitatis proprietatum ex phaenomenis nondum potui deducere, et hypotheses non fingo. Onicquid enim ex phaenomenis non deducitur, hypothesis vocanda est [1]).

Arago, Oeuvres complètes, т. 3, 505: une fois, une seule fois, Laplace s'élança dans la région des conjectures. Sa conception ne fut alors rien moins qu'une cosmogonie [2]).

Лаплас отвечает на вопрос Наполеона, почему в его Méc. céleste не упоминается имя бога: Sire, je n'avais pas besoïn de cette hypothèse [3]).

Различие, которое Ньютон делает между законами движения (или аксиомами) и гипотезами, не кажется мне основательным. Закон инерции есть гипотеза: если бы материальная точка была одна во всём мире и двигалась бы в пространстве с некоторой определённой скоростью, то эту скорость она сохраняла бы постоянно.

---

[1]) О боге я скажу следующее: о чём и как судить на основании опыта, это относится к экспериментальной философии. Но я ещё не смог объяснить этих свойств тяготения на основании опыта, а гипотез я не создаю. Ибо всё, что не выводится из опыта, должно быть названо гипотезой.

[2]) Один раз — только один раз — Лаплас пустился в область предположений. И то, что возникло в результате его размышлений, было не менее, чем космогонией (Араго).

[3]) Государь, в этой гипотезе я не нуждался.

НАТУРФИЛОСОФИЯ

1. Молекулярная механика

Свободное движение системы материальных точек m_1, m_2, ... с прямоугольными координатами x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, ..., при воздействии сил, параллельных трём осям, X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, ..., совершается согласно уравнениям

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i. \tag{1}$$

Этот закон можно выразить следующим образом: ускорения определяются из условия обращения в minimum выражения

$$\sum m_i \left(\left(\frac{d^2x_i}{dt^2} - \frac{X_i}{m_i} \right)^2 + \left(\frac{d^2y_i}{dt^2} - \frac{Y_i}{m_i} \right)^2 + \left(\frac{d^2z_i}{dt^2} - \frac{Z_i}{m} \right)^2 \right);$$

действительно, эта функция ускорений принимает своё наименьшее значение 0, если ускорения заданы по формулам (1), т. е. все величины $\frac{d^2x_i}{dt^2} - \frac{X_i}{m_i}$, ... равны нулю, и только в этом случае она принимает наименьшее значение; в самом деле, если бы одна из этих величин, например $\frac{d^2x_i}{dt^2} - \frac{X_i}{m_i}$, оказалась отличной от нуля, то $\frac{d^2x_i}{dt^2}$ можно было бы изменять непрерывно таким образом, что абсолютное значение этой величины и, следовательно, её квадрат — уменьшался. И функция тогда становилась бы меньше, при условии, что остальные ускорения оставались бы неизменными.

Эта функция ускорений отличается от выражения

$$\sum m_i \left(\left(\frac{d^2x_i}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y_i}{dt^2} \right) + \left(\frac{d^2z_i}{dt^2} \right)^2 \right) - $$
$$- 2 \sum \left(X_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + Y_i \frac{d^2y_i}{dt^2} + Z_i \frac{d^2z_i}{dt^2} \right)$$

только константой, т. е. величиной, не зависящей от ускорений.

Пусть силы обусловливаются притяжениями и отталкиваниями точек и являются функциями их расстояний; именно, пусть i-я и i'-я точки, находясь на расстоянии r, отталкиваются с силой $f_{i,i'}(r)$ или притягиваются с силой $-f_{i,i'}(r)$. Тогда, как известно, компоненты сил являются частными производными от функции координат всех точек

$$P = \sum_{i,i'} F_{i,i'}(r_{i,i'}),$$

где $F_{i,i'}(r)$ обозначает функцию, производная которой равна $f_{i,i'}(r)$, и где i,i' пробегают всевозможные пары значений.

Подставим эти значения компонент

$$X_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial \rho}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial \rho}{\partial z_i}$$

в указанную выше функцию ускорений и умножим на $\frac{dt^2}{4}$ (отчего положение максимумов и минимумов не изменится); тогда получится выражение, которое только на величину, не зависящую от ускорений, отличается от выражения

$$\frac{1}{4}\sum\left(\left(d\,\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(d\,\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(d\,\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right)-P_{(t+dt)}.$$

Предполагая, что положение и скорости точек в момент времени t заданы, положение их в момент $t+dt$ определяется из условия, чтобы это выражение было возможно меньше. Итак, имеется некое стремление к тому, чтобы это выражение было минимальным.

Полученный закон может быть выведен из тех воздействий, которые должны обращать в минимум отдельные члены этого выражения, если допустим, что *противостоящие друг другу стремления выравниваются таким образом, чтобы сумма величин, которые отдельные воздействия стремятся сделать возможно меньшими, обратилась в минимум.*

Предположим, что массы точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ относятся как целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$, так что $m_i = k_i \mu$; тогда мы увидим, что выражение, которое должно быть обращено в минимум, состоит из величин

$$\frac{\mu}{4}\left(\left(d\,\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(d\,\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(d\,\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right)$$

(для всех частиц μ) и величины $-P_{t+dt}$. Следуя Гауссу, станем рассматривать величину

$$\left(d\,\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(d\,\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(d\,\frac{dz_i}{dt}\right)^2$$

как меру отклонения движения массы μ в момент $t+dt$ от движения её в момент t; в таком случае разложение общего воздействия по каждой отдельной массе даёт воздействие, которое должно сделать возможно меньшим отклонение её движения в момент $t+dt$ от движения в момент t, т. е. стремление сохранить её движение, и, кроме того, воздействие, которое должно сохранить возможно малое значение величины $-P$.

Это последнее воздействие разлагается на стремления сохранить возможно малые значения отдельных членов суммы $\sum\limits_{i,i'} F_{i,i'}(r_{i,i'})$, т. е. на притяжения и отталкивания между всякими двумя точками, что привело бы нас к обыкновенному выводу законов движения из закона инерции и притяжений и отталкиваний; но оказывается, как будет разъяснено в дальнейшей статье о тяготении, что для всех известных явлений природы упомянутое воздействие может быть выведено и из взаимодействия двух соседних элементов пространства.

2. Новые математические принципы натурфилософии

Хотя заглавие этой статьи едва ли вызовет у большинства читателей благоприятное к ней расположение, мне всё же показалось, что оно наилучшим образом выражает содержащуюся в ней идею. Здесь поставлена задача проникнуть в сущность явлений природы глубже, чем то было сделано Галилеем и Ньютоном в области астрономии и физики. Правда, для астрономии приведённые ниже соображения не принесут непосредственно практической пользы, но, как я надеюсь, это обстоятельство не лишит следующие строки интереса в глазах их читателей...

Основание для общих законов движения весомого вещества в том виде, в каком они сформулированы Ньютоном во введении в его Principia, следует искать во внутреннем состоянии весомых частиц. Постараемся, исходя из нашего собственного внутреннего опыта, по аналогии судить об этом состоянии. В наше сознание постоянно вступают некоторые «массы представлений» и очень скоро из него снова исчезают. Наблюдая постоянную деятельность нашей души, мы видим, что в основе каждого её акта лежит нечто «остающееся», таковым проявляющее себя по особым причинам (усилие памяти), но не оказывающее длительного влияния на наши восприятия. Таким образом, постоянно (при каждом психическом акте) «остающееся» входит в нашу душу, но не оказывает длительного влияния на мир восприятий. Итак, в основе всякого акта нашей души лежит «остающееся», вступающее в нашу душу при этом акте, но в тот же момент окончательно исчезающее из мира явлений.

Исходя отсюда, я делаю такую гипотезу: пространство наполнено некоей материей, непрерывно устремляющейся в весомые атомы и там исчезающей из осязаемого мира.

Говоря короче, в весомых атомах материя из осязаемого мира постоянно переходит в неосязаемый. Причину исчезновения материи следует видеть в непосредственно предшествующем возникновении в атомах некоторой неосязаемой субстанции, так что весомые тела являются как бы местом соприкосновения осязаемого и неосязаемого миров [1]).

На основе этой гипотезы мы сейчас объясним явление всемирного тяготения. Сила тяготения, как известно, определена в каждой точке пространства, если для этой части пространства задана потенциальная функ-

---

[1]) В каждый весомый атом вступает в каждый момент определённое количество материи, пропорциональное силе тяготения, и там исчезает.

Из психологии, стоящей на почве учения Гербарта, следует, что субстанциальность присуща не душе, а каждому возникающему в нас отдельному представлению.

ция всех весомых масс, т. е. такая функция P, что сумма весомых масс, заключённых внутри замкнутой поверхности S, равна $\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial P}{\partial p}\, dS$.

Допустим, что материя, наполняющая пространство, есть однородная несжимаемая жидкость без инерции и что в каждый весомый атом в равные промежутки времени втекают равные и пропорциональные массе атома количества материи; тогда, очевидно, давление, испытываемое атомом [пропорционально скорости движения материи в точке местонахождения атома].

Таким образом, действие всемирного тяготения на весомый атом зависит от давления материи, наполняющей пространство, в непосредственной окрестности атома.

Из нашей гипотезы неизбежно вытекает, что материя, наполняющая пространство, должна распространять колебания, которые мы воспринимаем как свет и теплоту.

Рассмотрим просто-поляризованный луч и обозначим через x расстояние некоторой его точки от постоянного начального положения, через y — элонгацию точки в момент времени t; так как при всех обстоятельствах скорость распространения колебаний в пространстве, свободном от частиц весомой материи, почти постоянна (равна α), то равенство

$$y = f(x+\alpha t) + \varphi(x-\alpha t)$$

должно быть выполнено по меньшей мере с очень большой точностью.

Допуская, что оно выполняется совершенно точно, мы получим

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\alpha \int^{t} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, d\tau;$$

очевидно, не противоречит опытным данным и равенство

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\alpha \int^{t} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, \varphi(t-\tau)\, d\tau,$$

если $\varphi(t-\tau)$ и не при всех положительных значениях $t-\tau$ равно единице (с увеличением $t-\tau$ стремится к нулю), лишь бы на достаточно большом промежутке времени мало отличалось от единицы.

Определим положение некоторой точки нашей материи в момент t посредством прямоугольной координатной системы, и пусть x, y, z — координаты переменной точки O. Подобным же образом, пусть x', y', z' — координаты точки O' также в прямоугольной системе. Тогда x', y', z' — функции x, y, z, и $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$ есть однородное выражение второй степени относительно dx, dy, dz. Согласно известной теореме можно (и притом единственным образом) найти три линейных выражения

$$\begin{aligned}
\alpha_1\, dx + \beta_1\, dy + \gamma_1\, dz &= ds_1,\\
\alpha_2\, dx + \beta_2\, dy + \gamma_2\, dz &= ds_2,\\
\alpha_3\, dx + \beta_3\, dy + \gamma_3\, dz &= ds_3,
\end{aligned}$$

таких, что

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = G_1^2\, ds_1^2 + G_2^2\, ds_2^2 + G_3^2\, ds_3^2,$$

тогда как

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2.$$

Величины $G_1 - 1$, $G_2 - 1$, $G_3 - 1$ называются главными расширениями частицы в O при переходе от первой формы ко второй; я обозначу их через λ_1, λ_2, λ_3.

Я допускаю, дальше, что различие между предшествующей формой частицы и её формой в рассматриваемый момент времени порождает силу, стремящуюся изменить форму частицы таким образом, что влияние предшествующей формы (caeteris paribus) тем меньше, чем раньше до момента t она имела место, а влиянием формы в достаточно удалённые моменты можно вовсе пренебречь. Тогда силы, которые стремятся уменьшить λ_1, λ_2, λ_3, могут быть рассматриваемы как линейные функции λ_1, λ_2, λ_3; именно, вследствие однородности эфира сила, стремящаяся уменьшить λ_1, есть функция λ_1, λ_2, λ_3, не меняющаяся при перестановке λ_2 и λ_3, а остальные силы получаются из неё посредством перестановки λ_2 и λ_1, λ_3 и λ_1, и потому общий момент этих сил равен

$$\delta\lambda\,(a\lambda_1 + b\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_2\,(b\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_3\,(b\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3)$$

или же, при изменённых значениях констант,

$$\delta\lambda_1\,(a\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_1) + \delta\lambda_2\,(a\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_2) +$$

$$+ \delta\lambda_3\,(a\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_3) = \frac{1}{2}\,\delta\,(a\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + b\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)).$$

С другой стороны, момент сил, стремящихся изменить форму бесконечно малой частицы в O, можно рассматривать как результирующий из сил, которые стремятся изменить длину линейных элементов, заканчивающихся в O. Так мы получаем следующий закон: если dV есть объём бесконечно малой частицы в O в момент t, а dV' — объём той же частицы в момент t', то сила, стремящаяся удлинить ds, возникающая вследствие различия двух состояний, представляется формулой

$$a\,\frac{dV - dV'}{dV} + b\,\frac{ds - ds'}{ds}.$$

Первая часть этого выражения происходит от силы, с которой частица сопротивляется изменению объёма без изменения формы; вторая — от силы, с которой линейный элемент сопротивляется изменению длины.

Нет никаких оснований предполагать, что действия обеих причин изменяются во времени по одному и тому же закону; поэтому, собирая вместе воздействия всех предшествующих моменту t форм частицы на изменение линейного элемента ds, мы получаем значение $\frac{\delta\, ds}{dt}$, равное

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t-t')\,\delta t' + \int_{-\infty}^{t} \frac{ds' - ds}{ds} \varphi(t-t')\,\delta t'.$$

Каковы же должны быть функции ψ и φ, чтобы тяготение, свет и лучистая теплота могли передаваться пространственной материей?...

Действия весомой материи на весомую материю сводятся

1) к силам притяжения и отталкивания, обратно пропорциональным квадратам расстояний,

2) к свету и лучистой теплоте.

Оба класса явлений могут быть объяснены, если допустим, что всё бесконечное пространство наполнено однородной материей, каждая частица которой воздействует только на своё окружение.

Математический закон, лежащий в основе этих явлений, можно себе представлять разложенным

1) на сопротивление, оказываемое частицей изменению объёма,

2) на сопротивление, оказываемое физическим линейным элементом изменению длины.

На первом основывается тяготение и электростатическое притяжение и отталкивание, на втором — распространение света и теплоты, а также электродинамическое или магнетическое притяжение и отталкивание.

3. Тяготение и свет

Данное Ньютоном объяснение движения падающих тел и небесных тел заключается в принятии следующих допущений:

1) Существуют бесконечное пространство, обладающее свойствами, указываемыми в геометрии, и весомые тела, изменяющие своё положение в нём не иначе, как непрерывно.

2) В любой момент всякая весомая точка имеет нечто, определённое по величине и направлению и обусловливающее её движение (материя в состоянии определённого движения). Мерой движения является скорость [1]).

---

[1]) Если бы материальное тело было в пространстве одно, оно или не изменяло бы своего положения в нём или же двигалось в пространстве по прямой линии с постоянной скоростью.

Этот закон движения не может быть обоснован принципом достаточного основания. То, что тело продолжает своё движение, должно иметь причину, которую следует искать во внутреннем состоянии материи.

Объясняемые посредством этих допущений явления ещё не ведут к допущению различных масс весомых тел.

3. В любой момент во всякой точке пространства существует нечто определённое по величине и направлению (сила ускорения), что сообщает находящейся там весомой точке — какова бы она ни была — определённое движение, складывающееся геометрически с движением, которым она уже обладает.

4. В каждой весомой точке существует нечто определённое по величине (абсолютная сила тяготения), что порождает во всякой точке пространства силу ускорения, обратно пропорциональную квадрату расстояния от этой весомой точки и пропорциональную присущей этой точке абсолютной силе тяготения; эта сила ускорения складывается геометрически со всеми другими силами ускорения, приложенными к этой точке [1]).

Существующую согласно 3 в каждой точке пространства определённую по величине и направлению силу ускорения я пытаюсь объяснить движением некоей субстанции, наполняющей всё бесконечное пространство, а именно, допускаю, что направление её движения совпадает с направлением силы ускорения, а скорость её пропорциональна величине силы ускорения. Эту субстанцию можно представлять себе как физическое пространство, точки которого движутся в геометрическом пространстве.

На основании этого допущения все воздействия весомых тел на весомые тела передаются в пустом пространстве посредством названной субстанции. Таким образом, формы движения, лежащие в существе света и теплоты, посылаемых небесными телами, суть не что иное, как формы движения этой субстанции. Но названные явления, именно тяготение и распространение света сквозь пустое пространство, — единственные, которые должны были бы быть объяснены только движением этой субстанции.

Я допущу дальше, что действительное движение субстанции в пустом пространстве составляется из движения, которое должно быть допущено для объяснения явления тяготения, и из движения, которое должно быть допущено для объяснения явления света.

Дальнейшее развитие следствий, вытекающих из этой гипотезы, распадается на две части, поскольку требуется исследовать

1) законы движения субстанции, позволяющие дать объяснение явлений,

2) причины, объясняющие само возникновение этого движения.

---

[1]) Одна и та же весомая точка в двух различных местах претерпела бы изменения движения, которые по направлению совпали бы с силами, а по величине были бы пропорциональны силам.

Отношение силы к изменению движения поэтому всегда одно и то же для определённой весомой точки. Но для различных весомых точек оно различно. Оно называется массой точки.

Первая задача — математическая, вторая — метафизическая. По поводу последней я сразу же замечу, что движение субстанции не следует пытаться объяснять притяжением и отталкиванием её частиц. Такого характера объяснения широко применяются в физике не вследствие их очевидности (особой разумности) и — кроме электричества и тяготения — не вследствие их особой лёгкости, а вследствие того обстоятельства, что закон всемирного тяготения Ньютона — вопреки ожиданиям его творца — так долго не допускал более глубокого объяснения [1]).

ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЙ СУБСТАНЦИИ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩИЕ СОГЛАСНО ПРИНЯТОЙ ГИПОТЕЗЕ ЯВЛЕНИЯ ТЯГОТЕНИЯ И СВЕТА

Пусть прямолинейные координаты некоторой точки пространства обозначены через x_1, x_2, x_3, соответствующие в момент времени t компоненты скорости движения, обусловливающего явления тяготения, — через u_1, u_2, u_3, а компоненты скорости движения, обусловливающего явления света, — через w_1, w_2, w_3; наконец, компоненты скорости истинного движения — через v_1, v_2, v_3, так что $v = u + w$. Как обнаружится из самих законов движения, если субстанция в определённый момент оказывается всюду одинаково плотной, то эта плотность сохраняется и в любой момент; поэтому в дальнейшем плотность принимается равной единице.

1. Движение, обусловливающее явления тяготения

Сила тяготения в каждой точке определяется потенциальной функцией V, частные производные которой $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}$ являются компонентами силы, и эта функция V определяется следующими условиями (с точностью до постоянного слагаемого):

1. $dx_1\, dx_2\, dx_3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)$ вне притягивающих тел $= 0$, а для некоторого элемента весомого тела имеет неизменное значение, а именно равно произведению -4π на абсолютную величину силы притяжения, которую ему следует приписать согласно теории притяжения и которую мы обозначим через dm.

2. Если все притягивающие тела заключены в конечной части пространства, то на бесконечно большом расстоянии r от некоторой точки величины $r\frac{\partial V}{\partial x_1}$, $r\frac{\partial V}{\partial x_2}$, $r\frac{\partial V}{\partial x_3}$ бесконечны малы.

---

[1]) Ньютон говорит: «Мысль о том, чтобы способность возбуждать тяготение могла быть неотъемлемым, внутренне-присущим свойством материи, и чтобы одно тело могло воздействовать на другое через пустоту на расстоянии, без участия чего-то такого, что переносило бы действие и силу от одного к другому, — представляется мне столь нелепой, что нет, как я полагаю, человека, способного мыслить философски, кому она пришла бы в голову». См. третье письмо к Bentley.

Согласно нашему предположению $\frac{\partial V}{\partial x}=u$, и потому

$$dV=u_1\,dx_1+u_2\,dx_2+u_3\,dx_3.$$

Таким образом, мы получаем

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0. \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3=-4\pi\,dm, \tag{2}$$

$$ru_1=0,\quad ru_2=0,\quad ru_3=0 \text{ при } r=\infty. \tag{3}$$

Обратно, величины u, удовлетворяющие этим условиям, являются компонентами силы тяготения. В самом деле, условия (1) свидетельствуют о возможности найти функцию U такую, что $dU=u_1\,dx_1+u_2\,dx_2+u_3\,dx_3$, откуда следует $\frac{\partial U}{\partial x}=u$, а остальные дают тогда $U=V+\text{const.}$[1]).

[1]) Итак, функция U может быть определена с помощью общих законов движения из опытных данных (при наблюдении относительного движения), но только с точностью до линейной функции координат, так как мы наблюдаем лишь относительное движение.

Определение этой функции основано на следующей математической теореме: функция точки V определяется в конечной части пространства (с точностью до постоянного слагаемого), если она не может быть разрывной вдоль некоторой поверхности и если для всякого объёмного элемента задано $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3$ и, кроме того, на границе рассматриваемой части пространства задаётся или сама функция V или её производная при перемещении внутрь по перпендикуляру к поверхности. При этом следует заметить:

1. Обозначая упомянутую производную для элемента границы ds через $\frac{\partial V}{\partial p}$, мы должны в последнем случае иметь

$$\int\sum\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx_1\,dx_2\,dx_3=-\int\frac{\partial V}{\partial p}\,ds,$$

причём интеграл слева берётся по выделенному объёму, а интеграл справа — по его границе; помимо того, в обоих случаях все данные могут быть совершенно произвольными, и потому они необходимы.

2. Если в некотором элементе объёма $\sum\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ обращается в бесконечность, то надлежит произведение заменить через интеграл $-\int\frac{\partial V}{\partial p}\,ds$, взятый по границе этого элемента.

3. Если $\sum\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ имеет отличное от нуля значение только в некоторой конечной части пространства, то условие на границе может быть заменено требованием, чтобы на бесконечно большом расстоянии R от некоторой точки величины $R\frac{\partial^2 V}{\partial x}$ были бесконечно малыми.

2. Движение, обусловливающее явления света

Движение, которое нужно допустить в пустом пространстве для объяснения явления света, может быть рассматриваемо (на основании одной теоремы), как составленное из плоских волн, т. е. таких движений, для которых вдоль каждой плоскости из некоторой системы параллельных плоскостей (волновых плоскостей) форма движения — одна и та же. Для каждой плоской волны движение совершается (как можно судить на основании опыта) параллельно плоскости волны, причём сама волна распространяется при любой форме движения (т. е. какого бы рода ни был свет) с постоянной скоростью c перпендикулярно к плоскости волны.

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — прямоугольные координаты точки пространства, причём первая перпендикулярна, остальные — параллельны плоскости волны, и ω_1, ω_2, ω_3 — параллельные им компоненты скорости в рассматриваемой точке в данный момент времени t; тогда

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi_2}=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial\xi_3}=0.$$

Согласно опыту, во-первых, $\omega_1=0$; во-вторых, движение составляется из двух движений, распространяющихся со скоростью c: одного — направленного в положительную сторону, другого — направленного в отрицательную сторону от плоскости волны. Обозначая через ω' компоненты скорости первого движения, через ω'' — компоненты скорости второго, мы видим, что ω' не меняются при увеличении t на dt и ξ_1 на cdt, а ω'' — при увеличении t на dt и ξ_1 на $-cdt$, и притом $\omega=\omega'+\omega''$. Отсюда следует:

$$\left(\frac{\partial\omega'}{\partial t}+c\,\frac{\partial\omega'}{\partial\xi_1}\right)dt=0,$$

$$\left(\frac{\partial\omega''}{\partial t}-c\,\frac{\partial\omega''}{\partial\xi_1}\right)dt=0,$$

$$\frac{\partial^2\omega'}{\partial t^2}=-c\,\frac{\partial^2\omega'}{\partial\xi_1\,\partial t}=cc\,\frac{\partial^2\omega'}{\partial\xi_1^2},$$

$$\frac{\partial^2\omega''}{\partial t^2}=c\,\frac{\partial^2\omega''}{\partial\xi_1\,\partial t}=cc\,\frac{\partial^2\omega''}{\partial\xi_1^2},$$

так что

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=cc\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_1^2}.$$

Из этих равенств вытекают следующие симметрические:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\omega_2}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\omega_3}{\partial\xi_3}=0,$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=cc\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_3^2}\right),$$

которые при переходе к первоначальной системе координат сохраняют свой вид, а именно:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+\frac{\partial w_2}{\partial x_2}+\frac{\partial w_3}{\partial x_3}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=cc\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}\right). \tag{2}$$

Эти уравнения выполняются для всякой плоской волны, проходящей через точку (x_1, x_2, x_3) в момент t и, следовательно, для всякого движения, составленного из подобных волн.

3. Движение, обусловливающее оба рода явлений

Из полученных уравнений для u и w вытекают следующие уравнения для v, т. е. законы движения субстанции в пустом пространстве:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0, \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\partial_t^2-cc\left(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2\right)\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)=0\\
&\left(\partial_t^2-cc\left(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2\right)\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)=0\\
&\left(\partial_t^2-cc\left(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2\right)\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)=0
\end{aligned}\right\}, \tag{II}$$

как нетрудно установить, выполняя все операции.

Эти уравнения показывают, что движение любой точки субстанции зависит только от движений в соседних точках и в непосредственно предшествующие моменты времени, так что причина движения полностью содержится в движениях окрестности.

Уравнение (I) доказывает ранее высказанное утверждение, что плотность субстанции остаётся неизменной; в самом деле, выражение

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt,$$

которое вследствие этого уравнения $=0$, представляет количество субстанции, вливающейся за время dt в элемент объёма $dx_1\,dx_2\,dx_3$, и потому содержащееся в этом элементе количество субстанции остаётся неизменным.

Условия (II) означают, что

$$\left(\partial_t^2-cc\left(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2\right)\right)\left(v_1\,dx_1+v_2\,dx_2+v_3\,dx_3\right)$$

есть полный дифференциал dW. Мы получаем:

$$\left(\partial_t^2-cc\left(\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2\right)\right)\left(w_1\,dx_1+w_2\,dx_2+w_3\,dx_3\right)=0$$

и, следовательно,

$$dW = \left(\partial_t^2 - cc\left(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2\right)\right)(u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3) =$$

$$= \left(\partial_t^2 - cc\left(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2\right)\right) dV,$$

или, так как $\left(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2\right) dV = 0$, то $= d\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}$...

4. Общая формула для законов движения субстанции и действия силы тяготения на движение весомых тел

Закон этих движений можно охватить требованием, чтобы вариация интеграла

$$\frac{1}{2}\int\left[\sum\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial t}\right)^2 - cc\left[\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\eta_3}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\eta_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}\right)^2\right]\right] dx_1 dx_2 dx_3 dt +$$

$$+ \int V\left(\sum\frac{\partial^2\eta_i}{\partial x_i \partial t}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + 4\pi\, dm\right) dt + 2\pi\int dm \sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 dt$$

(при надлежащих условиях на границе) обращалась в нуль.

Здесь первые два интеграла берутся по всему геометрическому пространству, а последние — по всем весомым телам; и нужно определить координаты каждого весомого элемента как функции времени, а η_1, η_2, η_3, V — как функции x_1, x_2, x_3, t, таким образом, чтобы всякая вариация их, удовлетворяющая условиям на границе, вызывала только вариацию интеграла второго порядка малости.

Тогда величины $\dfrac{\partial\eta}{\partial t}$ $(= v)$ будут компонентами скорости движения субстанции, а V будет равно потенциалу в момент t для точки (x_1, x_2, x_3).

ПРИМЕЧАНИЯ

ЧАСТЬ I

1. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(*Werke, I*)

Докторская диссертация (Inauguraldissertation) Римана «Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse» является одним из важнейших его сочинений: она намечает основное направление всей его дальнейшей работы. Вместе с тем в ней содержится целая программа научных исследований в области аналитических функций, указывающая один из путей развития этой теории на протяжении столетия, вплоть до нашего времени. В своей диссертации Риман дал солидное обоснование самому понятию аналитической функции (в этом он разделяет славу с Коши) и вместе с тем создал новое «геометрическое» направление в теории функций комплексного переменного.

Диссертация Римана была напечатана в Гёттингене в 1851 г. в год её защиты; второе издание её последовало там же в 1867 г. Что аналитическая функция порождает конформное отображение плоскости на плоскость, было замечено ещё Гауссом (см. цитату на стр. 52). Дифференциальные уравнения $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ носят ныне название уравнений Коши-Римана; они впервые встречаются у Даламбера (D'Alembert, «Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides», 1752); ими не раз пользовался Коши, но не поднимал их значения на принципиальную высоту и не выяснял их геометрического смысла. В какой степени и в какое время Риману стали известны работы Коши, сказать трудно, и прямых на то указаний в его собственных работах не имеется.

Едва ли у Римана была возможность беседовать с Гауссом о функциях комплексного переменного до поездки в Берлин в 1847 г.; по всей вероятности, не было также далеко идущих разговоров с Дирихле и Якоби; напротив, как передаёт Дедекинд, «более близок Риману был Эйзенштейн, у которого он слушал теорию эллиптических функций... Они вместе обсуждали вопрос о введении комплексных величин в теорию функций, но остались совершенно различных мнений о принципах, на основе которых оно должно было бы быть сделано: Эйзенштейн оставался сторонником формального исчисления, тогда как Риман связывал определение функции комплексного переменного с дифференциальным уравнением в частных производных. Вероятно, именно летом 1847 г. им были основательно продуманы эти идеи, в значительной степени определившие его дальнейший жизненный путь»...

[1] к стр. 49.

При определении понятия «непрерывная функция» Риман пользуется здесь понятием «непрерывного изменения» переменной. Этого последнего понятия он, однако, не определяет: вероятно, ему представляется неудобным объяснить, что такое «непрерывное изменение зависимой переменной», не объясняя, что такое «непрерывное изменение независимой переменной».

В примечании к немецкому изданию сочинений Римана Вебер указывает, что в бумагах Римана имеется следующее разъяснение, относящееся к этому месту:

«Говоря, что величина w изменяется непрерывно вместе с z между границами $z=a$ и $z=b$, мы подразумеваем: в этом промежутке каждому бесконечно малому изменению z соответствует бесконечно малое изменение w, или, точнее, ко всякой заданной величине ε можно всегда указать величину α такую, что внутри промежутка значений z, меньшего чем α, два значения w различаются меньше, чем на ε. Отсюда следует, что непрерывность функции влечёт за собой, даже если это не оговорено особо, её постоянную конечность».

Таким образом, в качестве определения непрерывности функции в промежутке Риман принимает то, что мы теперь называем «равномерной непрерывностью функции в промежутке».

[2] к стр. 49.

В столь широком объёме это предложение в эпоху Римана доказано ещё не было. Представимость непрерывных функций, обладающих свойством ограниченной изменяемости, посредством тригонометрических рядов была установлена Дирихле в 1829 г.; что касается общего случая, то лишь в 1885 г. Вейерштрасс доказал возможность разложения любой непрерывной функции в ряд рациональных полиномов (K. Weierstrass, «Ueber die empirische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente», Werke, т. III).

[3] к стр. 50.

Что всякая функция комплексного переменного, имеющая производную, не зависящую от направления, может быть представлена в виде формулы — разложена в степенной ряд, доказано было Коши в 1831 г. Этот результат опубликован в Туринском журнале, что связано с вынужденным пребыванием Коши в Италии; во французской же печати он появился лишь значительно позднее, и Риману, возможно, в эпоху написания диссертации известен не был (см. конец § 20 диссертации).

[4] к стр. 50.

Таким образом, под «функцией комплексной переменной» Риман понимает то, что мы теперь называем «аналитической функцией» комплексного переменного. Если же Риман в дальнейшем говорит о «непрерывной функции комплексного переменного», заданной в некоторой области, то, принимая во внимание теоремы § 10, прибавление этого эпитета означает, что речь идёт о функции регулярной, т. е. лишённой особенностей, в этой области. Правильное понимание этих терминов весьма существенно при чтении настоящей работы.

С другой стороны, следует обратить внимание на то, что формулировка Римана не носит локального характера: как известно, независимость предела

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

от направления в одной лишь точке z не означает регулярности функции w в этой точке.

[5] к стр. 52.

Этим исключаются из рассмотрения как «точки ветвления», о которых речь будет дальше, так и такие точки z, в которых функция w, не переставая быть регулярной, имеет производную, равную нулю: в этих точках отображение не будет ни конформным, ни взаимно однозначным.

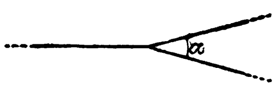
[6] к стр. 52.

Цитируемая Риманом работа Гаусса содержится в 4-м томе его собрания сочинений, стр. 189.

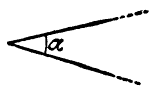
[7] к стр. 53.

Там, где речь идёт о вопросах топологического порядка, изложение Римана по существу нередко принимает наивно-интуитивный характер; вместе с тем оно всё же чрезвычайно точно, немногословно и выразительно. В данном случае, стараясь вызвать у читателя надлежащие геометрические представления, Риман называет некоторые свойства, которыми не должны обладать рассматриваемые им поверхности.

Читатель, не знакомый с римановыми поверхностями, легко поймёт, что «расщепление» и «складка» получатся, например, в том случае, если разрез поверхности по направлению, перпендикулярному к упоминаемой Риманом кривой, будет иметь вид



или



(вообразите только, что угол α сводится к нулю!).

[8] к стр. 53.

Как предполагает Вебер, вместо «слева направо» должно было бы стоять «справа налево». Впрочем, если рассматривать точку ветвления как бесконечно малую замкнутую граничную кривую, то, при обычном требовании оставлять при движении по границе внутренность поверхности слева, следовало бы вращаться вокруг точки ветвления именно слева направо.

[9] к стр. 54.

Простейший пример: пусть поверхность T_1 составлена из трёх листов 1, 2 и 3 и имеет две точки ветвления, причём при обходе каждой такой точки листы чередуются в порядке 1, 2, 3; поверхность T_2 составлена из трёх подобных же листов и имеет те же точки ветвления, но чередование листов при обходе одной точки будет 1, 2, 3, а при обходе другой 1, 3, 2. Поверхности T_1 и T_2 различны, так как при обходе по контуру, охватывающему обе точки ветвления, номера листов в случае поверхности T_1 меняются, а в случае поверхности T_2 остаются неизменными.

Определением числа римановых поверхностей, имеющих одни и те же точки ветвления, занимался A. Hurvitz (Mathematische Annalen, 39, 1891 и 55, 1901).

[10] к стр. 56.

В этом доказательстве Риман как будто бы вовсе игнорирует возможность того, чтобы две кривые пересеклись в бесконечном множестве точек, не сливаясь одна с другой.

[11] к стр. 58.

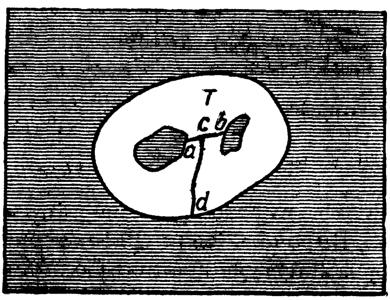
В § 7 Риман выводит формулу Грина (Гаусса) в форме, независимой от выбора ориентировки границы поверхности T, а условие, касающееся ориентировки, вводит лишь в § 8. Чтобы текст § 7 не противоречил тексту § 8 и вместе с тем сохранялось требование — при движении по границе в положительном направлении оставлять внутренность поверхности слева, нужно представить себе, что ось X направлена вверх, направление же оси Y — безразлично.

[12] к стр. 58.

Риман в условии доказываемой теоремы требует, чтобы функции X и Y были непрерывны, однако, не упоминает о существовании и непрерывности частных производных первого порядка, стоящих под двойным интегралом.

[13] к стр. 63.

С целью разъяснения этого места Вебер приводит пример трёхсвязной



поверхности T с разрезами ab и cd. Достаточно указать скачки на участках cd и bc, чтобы был определён и скачок на участке ab.

к стр. 64.

Для получения этого равенства достаточно положить $u' = 1$ в равенстве

$$\int \left(u \frac{\partial u'}{\partial p} - u' \frac{\partial u}{\partial p} \right) ds = 0.$$

[15] к стр. 65.

По поводу предпосылок, при которых Риман устанавливает неограниченную дифференцируемость гармонической функции, нужно заметить, что пункт 1) требует по существу, чтобы возможные нарушения уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ не препятствовали существованию равенства

$$\int\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=0,$$

где двойной интеграл распространён на произвольную область рассматриваемой поверхности T, а пункт 2) можно было бы уточнить, например, в том смысле, что множество точек разрывов u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y^2}$ не имеет точек сгущения внутри T.

[16] к стр. 66.

В свете теории множеств это рассуждение не представляется вполне убедительным.

[17] к стр. 68.

Доказательство того, что из условий $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, выполненных тождественно в некоторой области («части плоскости»), следует, что $w=u+iv$ есть регулярная функция комплексного переменного $z=x+iy$, у Римана не приведено, так как это утверждение представляется ему геометрически очевидным (см. § 4). Однако, более тщательный анализ показывает, что при формальном доказательстве этого утверждения приходится пользоваться непрерывностью частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. С другой стороны, нельзя согласиться с тем, что непрерывность производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ доказана Риманом в § 12: в самом деле, уже при доказательстве формулы Грина (§ 7) следовало бы постулировать непрерывность функций $\frac{\partial X}{\partial x}$ и $\frac{\partial Y}{\partial y}$, «кроме отдельных точек или кривых», для того, чтобы их можно было интегрировать; затем подстановка в эту формулу функций

$$X=u\,\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\,\frac{\partial u}{\partial x},\qquad Y=u\,\frac{\partial u'}{\partial y}-u'\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

(§ 10) предполагает уже непрерывность производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; так как в § 12 теорема § 10 применяется в функции

$$\int_{O_0}^{O}\left(u\,\frac{\partial x}{\partial s}-v\,\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds,$$

от которой частные производные второго порядка по x и по y равны $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$, то, следовательно, в § 12 непрерывность $\frac{\partial u}{\partial x}$ должна была бы быть постулирована. Указанный здесь пробел (имеющийся также и у Коши) впоследствии был восполнен Гурса (E. Goursat, Acta Mathematica, 1884; см. также его Cours d'analyse, т. 2).

[18] к стр. 74.

«Связная замкнутая в себе область» — ein zusammenhängendes in sich abgeschlossenes Gebiet. Выражаясь современными терминами, можно было бы сказать, что речь идёт об области в некотором функциональном пространстве. Что касается операции перехода к пределу, то мы склонны думать, что Риман имеет в виду равномерную сходимость. Разгадать, какой точный смысл вложен в эпитет «in sich abgeschlossen», трудно: не исключено, что здесь содержится идея компактности.

[19] к стр. 76.

Пользуясь употребительной в наше время терминологией, можно сказать, что целью, которую Риман ставит себе в § 17, является установить, что «минимализирующая» последовательность функций λ (т. е. такая последовательность, для которой рассматриваемый интеграл стремится к своей нижней границе) имеет пределом непрерывную функцию. Доказывая это от противного, Риман делает ряд допущений: например, что имеется некоторая «кривая разрывов» предельной функции и что «на некоторой части этой кривой кривизна меняется непрерывно». Поскольку этими предположениями не исчерпываются мыслимые случаи, § 17 имеет лишь исторический интерес.

В своём комментарии к немецкому изданию сочинений Римана Вебер приводит выдержки из заметок Римана, где рассмотрены и другие, относящиеся сюда, частные допущения.

[20] к стр. 79.

Изложение современного состояния вопроса о граничных условиях проблемы Дирихле можно найти в статьях Зоммерфельда и Лихтенштейна в немецкой энциклопедии (Enz. d. Math. Wiss.: II A 7 c., A. Sommerfeld, «Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen», 1900; II C 12, L. Lichtenstein, «Neuere Entwicklung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus», 1924)

[21] к стр. 80.

По поводу возможных расширений граничных условий проблемы Дирихле см. D. Hilbert, «Grundzüge der Theorie der linearen Integralgleichungen», гл. X; также Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения (граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике). ОГИЗ, 1946.

[22] к стр. 82.

Интересно обратить внимание на принципиальное противопоставление, сделанное здесь Риманом, между «величинами» и «числами»: здесь Риман исключает из рассмотрения такого рода функциональные зависимости (получившие уже тогда хождение благодаря Дирихле), для которых значение зависимого переменного определяется той или иной формулой или правилом, в зависимости от принадлежности значения независимого переменного тому или иному, характеризующемуся арифметическими свойствами, числовому множеству.

[23] к стр. 83.

Современное состояние знаменитой теоремы Римана о конформном отображении односвязных областей достаточно обстоятельно освещено в книге К. Каратеодори, Конформное отображение (русский перевод вышел в 1934 г.).

[24] к стр. 86.

Функции комплексного переменного на произвольных поверхностях в пространстве впервые рассматривал Бельтрами (в 1867 г.), который обобщил на этот случай и уравнения Коши-Римана. См. интересные замечания по поводу истории этого вопроса у Ф. Клейна (Gesamm. Mathem. Abhandlungen, Bd. 3, S. 479).

II. ТЕОРИЯ АБЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

(*Werke, VI*)

Мемуар Римана «Theorie der Abelschen Funktionen», напечатанный в 1857 г. в 54-м томе Journal für die reine und angewandte Mathematik, содержит результаты исследований, произведённых в период времени с 1851 по 1856 г. и изложенных в курсе лекций в Гёттингенском университете на протяжении двух семестров 1855—1856 гг. Более подробно о времени написания отдельных частей этой работы говорит сам автор в конце её вводной части (стр. 100 настоящего издания).

Эта работа, посвящённая алгебраическим функциям и их интегралам, является зрелым плодом творчества Римана. В ней, на основе принципа Дирихле, доказывается существование функций, обладающих наперёд заданными особенностями на произвольной замкнутой римановой поверхности конечного рода, и затем строятся их аналитические выражения в виде интегралов от алгебраических функций. Кроме того, в ней даётся решение якобиевой проблемы инверсии для случая абелевых интегралов какого угодно рода p. Более подробно о содержании этой работы сказано во вводной статье о работах Римана, стр. 18—21.

[1] к стр. 88.

Напомним даты: разложимость функции в степенной ряд Тэйлора в окрестности точки a, где функция регулярна, доказана Коши ещё в 1831 г., но соответствующая публикация в Comptes Rendus появилась лишь в 1837 г.; теорема Лорана о разложении по целым положительным и отрицательным степеням $x-a$ около изолированной особенной точки a, где функция однозначна, опубликована там же в 1843 г. В своей докторской диссертации (1851 г.) Риман не пользуется ни одним из упомянутых разложений.

[2] к стр. 91.

«Связанные числовыми соотношениями» — durch einander messbar; «пространственные соотношения взаимного расположения и связности» — Orts- und Gebietsverhältnisse.

[3] к стр. 92.

Современного читателя следует предупредить о том, что частично приведённые доказательства следующих предложений этого раздела не основываются на теоретико-множественной концепции пространства, а апеллируют непосредственно к геометрической интуиции.

[4] к стр. 92.

Приводимые здесь Риманом формулировки подверглись критике со стороны Alberto Tonelli (Atti Lincei, (2) 2, 1875), который внёс в них некоторые ограничения и уточнения.

[5] к стр. 93.

Мы пользуемся термином «разрез» для перевода риманова термина «Querschnitt», значение которого здесь разъяснено. Позднейшими авторами, наряду с Querschnitt'ами, широко применяются Rückkehrschnitt'ы. Последний термин обозначает, что разрезывание производится от внутренней точки поверхности до этой же самой точки через внутренние, так что ни одна граничная точка не задевается. Риман не употребляет термина Rückkehrschnitt: вместо него мы встречаем в § 19 «in sich zurücklaufender Querschnitt».

[6] к стр. 96.

Как известно, идея нахождения минимума суммы квадратов лежит в основе «метода наименьших квадратов» (сочинение Гаусса «Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae» опубликовано в 1821 г.).

[7] к стр. 100.

В «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» Ф. Клейна (стр. 325 русского издания) мы читаем: «когда Вейерштрасс представил Берлинской академии в 1857 г. свою первую обработку теории абелевых функций, то в журнале Крелля (т. 54) появилась статья Римана на эту же тему, содержащая так много совершенно новых и непредвиденных соображений, что Вейерштрасс взял обратно свою работу и так её и не опубликовал впоследствии».

[8] к стр. 101.

Здесь отсутствует упоминание о «сфере Римана», служащей для наглядного представления бесконечно удалённой точки и использованной Риманом в его лекциях. См. «О функциях, порождаемых некоторыми линейными дифференциальными уравнениями», стр. 202, 203.

[9] к стр. 102.

Числу p, которое в дальнейшем играет роль первостепенной важности, Риман не даёт особого наименования. Термин Geschlecht («род» или «ранг») был введён позднее Клебшем (Crelle, 64, 1865).

[10] к стр. 102.

Для проведения первого разреза на замкнутой (т. е. не имеющей граничных кривых) поверхности приходится предварительно её «пунктировать», т. е. выбросить одну её точку, и тем создать границу.

[11] к стр. 106.

Если несколько точек римановой поверхности T совпадают с некоторой точкой ζ плоскости z, то точка ζ должна быть взята соответствующее число раз. Тогда вводимые в дальнейшем множители $z - \zeta$ погасят все полюсы на конечном расстоянии и прибавят ровно столько же полюсов в бесконечно удалённой точке, так что все полюсы будут сосредоточены в бесконечно удалённой точке и число их будет равно числу точек z, т. е. m.

[12] к стр. 108.

Возможность разложения алгебраической функции в ряд, расположенный по дробным степеням $z - \beta$, где β — точка ветвления, была установлена Пюизё в 1850 г. (Journal des Mathém. pures et appl.).

[13] к стр. 108.

Здесь a_0 (как и в § 5) есть тот самый многочлен, который обращается в нуль во всех конечных точках плоскости z, где s имеет полюсы: допустим, что его степень ν в точности равна m. В формуле

$$F'(s) = a_0 s \cdot n s^{n-1} + a_1 (n-1) s^{n-2} + \ldots$$

выделенный множитель $a_0 s$ не имеет полюсов в конечной части плоскости, так что для погашения всех полюсов на конечном расстоянии достаточно функцию $F'(s_1) \ldots F'(s_n)$ умножить на a_0^{n-2}.

Подсчёт степени полинома $a_0^{n-2} \prod\limits_i F'(s_i)$ производится следующим образом: порядок бесконечности каждого множителя $F'(s_i)$ в бесконечно удалённой точке равен m, так как каждая ветвь s_i в этой точке имеет конечное значение, и потому порядок $\prod\limits_i F'(s_i)$ равен mn; прибавляя сюда $m(n-2)$ — степень полинома a_0^{n-2}, получаем: $m(n-2) + mn = 2m(n-1)$. В случае, если степень ν полинома a_0 меньше чем m, нужно небольшое изменение предыдущего рассуждения.

[14] к стр. 110.

Простейший пример описанного здесь явления даётся уравнением $s^2 - z^2 - \lambda = 0$, где λ — переменный параметр. При $\lambda \neq 0$ имеется две простые точки ветвления двулистной римановой поверхности, именно, $s = \pm\sqrt{\lambda}$, $s = 0$. При $\lambda = 0$ получаются две не связанные между собой ветви $s = z$ и $s = -z$.

[15] к стр. 111.

Идея «топологического» доказательства соотношения $w - 2n = 2(p-1)$, связывающего число n листов римановой поверхности и число w её простых точек ветвления с родом p, заключается в следующем. Проведём на сфере Римана две «параллели» и соединим их отрезками «меридианов» таким образом, чтобы в каждой из полученных областей в зоне между «параллелями» было по одной точке ветвления, а вне этой зоны не было ни одной точки ветвления. Затем прорежем n листов по всем названным кривым. Всего будет произведено таким образом $nw + 1$ разрезов: в счёт идут nw разрезов по «меридианам» и разрез только на одном листе по одной из «параллелей», проведённый через выброшенную при «пунктировании» точку на этом листе. В итоге поверхность разобьётся на $2n+w(n-1)$ односвязных кусков: в самом деле, каждая из двух областей вне «параллелей» даёт по n односвязных кусков, а каждая из w областей между «параллелями» даёт по $n-1$ односвязных кусков (один из них будет двулистный). Согласно § 6 диссертации Римана (стр. 54), разность между числом произведённых разрезов и числом полученных после разрезывания односвязных частей поверхности есть инвариант поверхности. Так как, с другой стороны, по определению рода p (§ 3 настоящей работы) для превращения замкнутой многосвязной поверхности в односвязную нужно $2p$ разрезов, то отсюда следует равенство

$$(nw+1)-[2n+w(n-1)]=2p-1,$$

так что

$$w-2n=2(p-1)$$

(см. C. Neumann, Vorlesungen über die Riemannsche Theorie der Abelschen Integrale, 1884 или H. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen, 1896).

Едва ли это доказательство могло быть неизвестно Риману; вернее, он избегает его в настоящей работе по той причине, что в ней он не устанавливает отмеченного инвариантного свойства поверхностей.

[16] к стр. 125.

Риманово доказательство сходимости θ-ряда при выполнении указанного здесь условия приводится в этой книге на стр. 151 («О сходимости бесконечных θ-рядов p-ой кратности»).

[17] к стр. 125.

Если θ — однозначная и регулярная при всех конечных значениях v функция переменной $V=e^{2v}$, то это значит, что она есть вместе с тем однозначная и регулярная функция переменной V при всех конечных значениях V, кроме, может быть, значения $V=0$; но тогда она разлагается в ряд Лорана, сходящийся во всей плоскости V:

$$\theta=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_m V^m=\sum_{-\infty}^{+\infty} A_m' e^{2vm}.$$

Обобщение на случай p переменных не представляет затруднений.

[18] к стр. 131.

К этому месту примыкает работа Римана «Об обращении в нуль θ-функций».

[19] к стр. 138.

Вебер приводит относящийся сюда отрывок, найденный в бумагах Римана:

«О виде алгебраической функции f можно сделать ещё несколько замечаний. Если n — общий наименьший знаменатель величин h_ν, g_ν, то n-ая степень функции f есть однозначная функция как пары (s, z), так и всех пар (σ, ζ) и, следовательно, сама функция f есть корень n-ой степени из рациональной функции. Эта рациональная функция переменной пары (s, z) должна определяться из того условия, что в p парах

(σ, ζ) она бесконечно велика порядка n и те np точек, в которых она бесконечно мала, разбиваются на p групп, составленных каждая из n совпадающих точек.

Если l — некоторая функция пары (s, z), приобретающая на разрезах те же множители, что и f, и если в точках (σ_μ, ζ_μ) она принимает значения λ_μ, то выражение $f \cdot l^{-1}\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_p$ представляет собой рациональную функцию ρ от пары (s, z) и всех пар (σ, ζ); поэтому

$$f = \frac{\rho l}{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_p}».$$

III. ОБ ОБРАЩЕНИИ В НУЛЬ θ-ФУНКЦИЙ

(*Werke, XI*)

Работа Римана «Ueber das Verschwinden der Thetafunktionen» напечатана в 65-м томе Journal für reine und angewandte Mathematik (1865 г.); содержание её заключается, как указывает сам автор, в восполнении пробела, имеющегося в мемуарах об абелевых функциях. Это — последняя работа Римана, опубликованная при его жизни.

[1] к стр. 139.

Journal für reine und angewandte Mathematik, 1857=работа II в настоящем издании, стр. 88.

IV. О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ θ-РЯДОВ p-ОЙ КРАТНОСТИ

(*Werke, XXX*)

Этот отрывок взят из записи лекций Римана 1861—1862 гг., произведённой его слушателем G. Roch'ом, и содержит доказательство сходимости тех θ-рядов, которые Риман вводит во второй части мемуара об абелевых функциях; воспроизведён в немецких изданиях сочинений Римана.

Следует отметить встречающуюся здесь и представляющую самостоятельный интерес формулировку интегрального критерия сходимости рядов с положительными членами (и любой кратности), а также «проблему решётки» (Gitterpunktproblem), с которой Риман связывает разбираемый им вопрос.

V. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ТОМ, ЧТО ОДНОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ n ПЕРЕМЕННЫХ НЕ МОЖЕТ ИМЕТЬ БОЛЕЕ $2n$ ПЕРИОДОВ

(*Werke, XV*)

Воспроизводимый текст является выдержкой из письма к Вейерштрассу, датированного «26 октября 1859 г.». Поводом для письма послужила, очевидно, предшествующая беседа с Вейерштрассом, имевшая место во время пребывания Римана в Берлине в сентябре того же года, вскоре после избрания его членом-корреспондентом Берлинской академии наук. Письмо напечатано Вейерштрассом в Journal fur reine und angewandte Mathematik, т. 71, после смерти Римана.

Как известно, Якоби принадлежит утверждение о том, что функция одной переменной, однозначная во всей плоскости, не может иметь более двух периодов (не сводясь к постоянной). Проблема инверсии абелевых интегралов в якобиевой постановке для случая произвольного рода p приводит к рассмотрению однозначных функций p переменных, обладающих $2p$ периодами. Отсюда понятен смысл того обобщения якобиевой теоремы, которое послужило предметом беседы двух математиков, сделавших первостепенной важности открытия в области абелевых интегралов и впервые завязавших личное знакомство.

Для правильного понимания приводимого здесь отрывка заметим, что, если говорится, что функция f переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет $2n$ периодов, то это нужно понимать в том смысле, что существуют постоянные числа a_μ^ν ($\mu = 1, 2, \ldots, 2n$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$), для которых выполняются тождества

$$f(x_1 + a_\mu^1,\ x_2 + a_\mu^2, \ldots, x_n + a_\mu^n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Числа a_μ^ν называются **модулями периодичности**; каждая система модулей вида

$$a_\mu^1,\ a_\mu^2, \ldots, a^n \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n)$$

образует **период**. Конгруэнция по $2n$ системам модулей

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x_1', x_2', \ldots, x_n')$$

обозначает существование n равенств вида

$$x_\nu = x_\nu' + \sum_{\mu=1}^{2n} m_\mu a_\mu^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

где m_μ — целые числа (см. «Теория абелевых функций», § 15).

VI. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ГАУССОВЫМ РЯДОМ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$

(*Werke, IV*)

Мемуар «Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen» был закончен Риманом в 1856 г. и опубликован в 7-ом томе Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Сам автор в автореферате, напечатанном в Göttinger Nachrichten, следующим образом характеризует его содержание:

«Этот мемуар посвящён классу функций, находящих применение при решении многих задач математической физики. В более или менее трудных проблемах ряды, в которые разлагаются эти функции, оказывают те же услуги, что и столь часто применяемые теперь в более лёгких проблемах ряды, расположенные по косинусам и синусам кратных величин независимой переменной. К этим функциям не раз обращался Эйлер, интересуясь ими с теоретической стороны; но именно указанные приложения, в особенности астрономические, побудили Гаусса произвести по поводу них исследования, которые он частично опубликовал в мемуаре 1812 г., посвящённом ряду, который он обозначает через $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

В этом ряде отношение $(n+1)$-го члена к предыдущему равно $\frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} x$, а начальный член равен единице. Ставшее теперь распространённым наименование «гипергеометрический ряд» было первоначально предложено И. Ф. Пфаффом для рядов более общего вида, у которых отношение общего члена к предыдущему есть произвольная рациональная функция индекса n. Напротив, Эйлер, следуя Валлису, понимал под именем гипергеометрического ряд, в котором названное отношение есть целая рациональная функция первой степени индекса n.

Неопубликованная часть исследований Гаусса в этой области, оказавшаяся найденной в его наследии, была перекрыта между тем работами Куммера, напечатанными в 1835 г. в 15-ом томе журнала Крелля. Эти работы касаются преобразования гипергеометрических рядов в ряды того же типа, в которых вместо переменной x стоит некоторая алгебраическая функция x.

Один частный случай подобного преобразования был найден уже Эйлером и рассмотрен как в его трактате по интегральному исчислению, так и во многих других работах (в простейшем виде — в Nova Acta Acad. Petropol., т. 12, стр. 58); оно же было установлено позднее различными способами у Пфаффа (Disquis. anal. Helmstadii, 1797), Гудермана (журнал Крелля, т. 7, стр. 306) и Якоби. Куммеру удалось настолько усовершенствовать метод Эйлера, что им были получены все возможные трансформации; однако, действительное их проведение оказалось столь громоздким, что от выполнения трансформаций третьей степени он отказался и полностью провёл лишь трансформации первой и второй степени и из них составляемые.

В настоящей работе к упомянутым трансцендентным функциям применяются методы, принцип которых высказан автором в его диссертации (§ 20), причём все ранее найденные результаты получаются почти без всяких вычислений. Некоторые иные исследования, выполненные на основе тех же методов, автор рассчитывает представить в недалёком будущем».

[1] к стр. 159.

Основное содержание работы, которая должна была служить продолжением настоящего мемуара, вероятно, заключается в незаконченном и опубликованном лишь через десять лет после смерти Римана отрывке «Две теоремы общего характера и т. д.», воспроизводимом в этом томе ниже; такое предположение тем более обосновано, что датировка этого отрывка позволяет судить о том, что по времени его написания он непосредственно примыкает к мемуару о гауссовом ряде. Впрочем, если сопоставить начало и середину абзаца: «В настоящей работе я изучаю гауссову трансцендентную функцию...» и «в ныне публикуемой части настоящей работы...», а также принять во внимание, что Риманом был собран богатый, не вошедший в опубликованный мемуар материал именно по гипергеометрической функции (как об этом позволяют судить другие печатаемые в этом томе отрывки), то можно также придти к заключению, что Риманом была задумана, но не отредактирована ещё одна работа, относящаяся к классическому случаю трёх критических точек.

[2] к стр. 160.

«Однозначная или монодромная» — einändrig oder monodrom. Возникающее здесь терминологическое затруднение заключается в том, что под функцией, однозначной в некоторой области, обычно понимают такую, которая в этой области имеет лишь одну «ветвь», тогда как в данном случае идёт речь об однозначности каждой «ветви» в окрестности рассматриваемой точки.

[3] к стр. 161.

Если разность показателей, например, α и α', есть целое число, то в общем интеграле соответствующего дифференциального уравнения появляется член, содержащий $\lg(x-a)$. Ограничение, которое здесь вводит Риман, не свидетельствует о том, что свойства общего интеграла в указанном случае ему не были известны. См. по этому поводу воспроизведённый в этом томе отрывок, озаглавленный «Об интегралах линейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности точки ветвления» (IX), стр. 194.

[4] к стр. 167.

Последний абзац позволяет не сомневаться, что трудности «проблемы монодромии» в случае произвольного числа (>3) критических точек — именно, необходимость доказательства существования — отнюдь не были скрыты от Римана.

[5] к стр. 170.

В печатаемых в этом томе отрывках лекций Римана по гипергеометрическому ряду (стр. 204—207) вскрывается геометрический смысл некоторых из указанных в § 5 трансформаций.

VII. ДВЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА, КАСАЮЩИЕСЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(*Werke, XXI*)

Содержащийся здесь материал есть, вероятно, набросок той работы, о которой Риман упоминает в конце автореферата, посвящённого мемуару о гипергеометрическом ряде. Рукопись помечена датой «20 февраля 1857 г.» и, как сообщает Вёбер в подстрочном примечании к немецкому изданию, до заголовка «Определение формы дифференциального уравнения» имеет окончательно отредактированный вид. Начиная же с этого места, имеются лишь отрывочные записи, намечающие дальнейший ход мыслей; текст этой части работы дополнен Вебером, причём во втором немецком издании в эти дополнения внесены поправки, указанные Д. Гильбертом.

В своих «Лекциях по истории математики в XIX столетии» Ф. Клейн отмечает то всеобщее изумление, которое было вызвано публикацией этой работы в 1876 г., через десять лет после смерти Римана, в первом издании его сочинений. На протяжении этого промежутка времени Л. Фуксом, учеником Вейерштрасса, была создана теория, охватывающая гипергеометрические функции как частный случай и отправляющаяся от дифференциального уравнения, тогда как Риман, в согласии со своим общим принципом, характеризует исследуемые функции их поведением около особенных точек и приходит к дифференциальному уравнению, т. е. к аналитической формуле, уже в итоге исследования. «Этот фрагмент показал, — говорит Клейн, — что Риман, который, как казалось, остановился на случае уравнения второго порядка с тремя особенными точками, пытался исследовать и более сложные случаи. И здесь Риман остаётся верным себе и не ищет спасения в формулах».

[1] к стр. 178.

В упоминаемом уравнении читатель легко узнаёт характеристическое уравнение матрицы (A); что касается матрицы (α), то она составляется из ненулевых решений однородной системы с матрицами $\{A - \lambda_i E\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где E обозначает единичную матрицу.

[2] к стр. 178.

Здесь должно быть отмечено то же, что и в примечании [3] к мемуару «Новые результаты теории функций, представимых гауссовым рядом $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$».

[3] к стр. 180.

Как видно, Риман предполагает, что ни одна из точек $a, b, \ldots, g$ не совпадает с бесконечно удалённой.

[4] к стр. 182.

К трём следующим абзацам, как сообщает Вебер, относится пометка Римана на полях рукописи: «Это неверно».

[5] к стр. 183.

По этому поводу Клейн говорит: «Риман высказывается так беззаботно, как будто существование функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ само собою разумеется и речь идёт лишь об обосновании их свойств... Нет ни малейших указаний на те исходные соображения, посредством которых Риман предполагал разрешить эту проблему».

Доказательство существования функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ составляет так называемую «проблему Римана». Формулировка её, по Клейну, такова: «Доказать, что для получения класса функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих линейному дифференциальному уравнению, достаточно присоединить к элементарным условиям, характеризующим поведение функций в особенных точках, группу монодромии, поскольку эта последняя ещё остаётся неопределённой».

VIII. О РАЗЛОЖЕНИИ ОТНОШЕНИЯ ДВУХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В БЕСКОНЕЧНУЮ НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ

(*Werke, XXIII*)

Заметка «Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita» относится к октябрю 1863 г., т. е. ко времени второго пребывания Римана в Италии. В подлиннике итальянский текст прерывается, и дальше следуют только формулы. Обработка этого материала была произведена H. A. Schwarz'ем, который добавил к формулам Римана необходимые разъяснения (они взяты в квадратные скобки).

Разложение в непрерывные дроби отношения двух гипергеометрических функций в случае, если разности трёх первых аргументов являются целыми числами, рассматривал ещё Гаусс в своём мемуаре 1812 г. Он называет гипергеометрическую функцию functio contigua (по отношению к данной), если она получается из данной посредством изменения на единицу одного из трёх первых аргументов.

Представляет интерес намеченный Риманом метод вычисления асимптотического (при $n \to \infty$) значения интеграла

$$\int_0^1 s^{a+n} (1-s)^{b+n} (1-xs)^{c-n}\, ds\ ;$$

идея этого метода принадлежит Лапласу («Théorie analytique des probabilités»), но нужно заметить, что в данном случае положение осложнено тем, что интегрирование производится (при x мнимом) по комплексной области.

Прилагаемые чертежи (стр. 191), на которых пунктирами указаны пути интегрирования, воспроизводят собственноручно сделанные наброски Римана.

IX. ОБ ИНТЕГРАЛАХ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ

(*Nachträge, II*)

Этот отрывок взят из записи лекций Римана его слушателем Э. Шерингом (впоследствии издатель сочинений Гаусса) и датируется 1857 годом; он свидетельствует о том, что Риману был известен вид общего интеграла линейного уравнения в случае совпадения корней характеристического уравнения, связанного с особенной точкой.

X. ИЗ ЛЕКЦИЙ ПО ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ РЯДУ

(*Nachträge, III*)

Здесь воспроизводятся в редакции W. Wirtinger'а отдельные места из сохранившейся тетради с записью лекций Римана по гипергеометрическому ряду, читанных в 1858—1859 гг. Лекции были стенографированы его слушателем W. v. Bezold'ом. Выбраны те отрывки, в которых высказываются мысли, не содержащиеся в работах, вошедших в основной том немецкого издания собрания сочинений Римана.

В конце мемуара «Новые результаты из теории функций, представимых гауссовым рядом $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$» Риман, исходя из общих свойств гипергеометрической функции, получает её представление в виде определённого интеграла вида

$$\int s^a (1-s)^b (1-xs)^c\, ds,$$

причём интегрирование производится по некоторой кривой, связывающей между собой две точки из числа четырёх: $0,\ 1,\ \frac{1}{x},\ \infty$. В приводимом отрывке «Об определении P-функции определёнными интегралами» Риман следует иному пути: из рассмотрения интеграла заключает о том, что ему присущи все свойства гипергеометрической функции, взятые в упомянутом мемуаре в качестве определения.

Ряд следующих отрывков под общим заглавием «О функциях, порождаемых некоторыми линейными дифференциальными уравнениями» посвящён изучению трансцендентных фукнций, получаемых при обращении отношения двух частных интегралов линейного однородного уравнения второго порядка, что приводит к автоморфным функциям. Установив, какому линейному неоднородному уравнению удовлетворяет тот же гипергеометрический интеграл, рассматриваемый теперь как функция x при переменном верхнем пределе s, Риман останавливается на частном случае эллиптического интеграла $\left(a = b = c = -\frac{1}{2}\right)$ с тем, чтобы исследовать более внимательно связь между отношением двух полных эллиптических интегралов и параметром $x = k^2$: это приводит его к знаменитой (известной уже Гауссу) модулярной функции.

[1] к стр. 200.

Это утверждение могло бы показаться странным, если не принять во внимание, что, судя по тетради Bezold'а, в одной из своих предшествующих лекций Риман излагал содержание своей работы «Две теоремы общего характера, касающиеся линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами». Там он явно формулирует допущение о том, что число особенных точек конечно, и в каждой из них любая функция системы «не обращается в бесконечность бесконечно большого порядка».

[2] к стр. 202.

Конечно, из многозначности некоторой функции в некоторой области не следует, вообще говоря, существование в этой области точки ветвления. В данном случае это, однако, так — вследствие установленного соответствия границ.

[3] к стр. 203.

В приводимом здесь описании сферы Римана допущены небольшие несообразности: нужно думать, что не радиус, а диаметр сферы равен единице; кроме того, двум точкам сферы, лежащим на концах одного диаметра, соответствуют значения c и $-\frac{1}{c'}$, а не c и $\frac{1}{c'}$.

[4] к стр. 207.

Стоящее в квадратных скобках добавлено Wirtinger'ом.

[5] к стр. 215.

Программа исследований в области автоморфных функций, намеченная Риманом в его лекциях, отрывки которых здесь воспроизведены, была выполнена позднее и независимо от него. В этой связи в первую очередь должны быть названы имена Шварца (H. A. Schwarz) и Клейна (F. Klein). Первый из них, ученик Вейерштрасса, после 1875 г. читал лекции в Гёттингене и испытал воздействие идей Римана; второй называет себя учеником Плюккера и Клебша и «экстерном в отношении римановой школы» («Лекции о развитии математики в XIX столетии», ОНТИ, М. — Л. 1937, стр. 309), однако, может сам считаться фактическим главой школы и является автором многочисленных работ в указанном Риманом направлении. Помимо их работ, названных в ином месте (стр. 24), отметим в числе других литературных источников курс Schlesinger'a, «Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen» (1895, 1897—1898) и русский перевод более новой книги Л. Р. Форда, «Автоморфные функции» (ОНТИ, М. — Л., 1936).

XI. О ЧИСЛЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВЫШАЮЩИХ ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

(*Werke, VII*)

Прославленный мемуар «Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse» был направлен Риманом Берлинской академии наук в октябре 1859 г., вскоре после избрания его членом-корреспондентом академии и последовавшей затем его поездкой в Берлин; напечатан в Monatsberichte der Berliner Akademie в том же 1859 г.

[1] к стр. 216.

Отметим, между прочим, что в наследии Гаусса имеется асимптотическая формула

$$\frac{x}{\lg^x} \frac{(\lg\lg x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

для числа целых чисел, меньших чем x и содержащих k простых множителей. При произвольном целом k она была впервые доказана E. Landau (Bull. Sc. Math., 28, 1900).

[2] к стр. 216.

Существенно новым у Римана является то, что он изучает функцию $\zeta(s)$ при всех комплексных значениях s. Обозначение $\zeta(s)$ также принадлежит ему.

[3] к стр. 216.

Едва ли необходимо разъяснять смысл гауссова обозначения $\Pi(s)$:

$$\Pi(s) = \Gamma(s+1).$$

При s целом положительном $\Pi(s) = s!$ Знак Γ введён Лежандром.

[4] к стр. 217.

Следует принять во внимание разложение

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + B_1 \frac{x}{2!} - B_2 \frac{x^3}{4!} + B_3 \frac{x^5}{6!} - B_4 \frac{x^7}{8!} + \ldots,$$

где коэффициенты B_1, B_2, $B_3, \ldots$ (числа Бернулли) отличны от нуля. Отсюда вытекает, что интеграл, стоящий в правой части рассматриваемого равенства и представляющий собой целую функцию s, обращается в нуль при $s = 2, 3, 4, \ldots$ и при $s = -2, -4, -6, \ldots$; однако, он не равен нулю при $s = 1$.

[5] к стр. 217.

Как отмечает E. Landau (Bibl. Math. (3) 7, 1906), эквивалент полученного Риманом функционального уравнения

$$\zeta(1-s) = 2\,(2\pi)^{-s} \cos\frac{\pi s}{2} \Gamma(s)\,\zeta(s)$$

имеется уже у Эйлера в мемуаре «Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques», написанном в 1749 г. и воспроизведённом в 1768 г. в публикации Берлинской академии «Histoire de l'académie des sciences et belles lettres».

H. Hamburger показал (Math. Zeitschrift, 10, 11, 13; Math. Ann., 85), что функция $\zeta(s)$ однозначно определяется этим функциональным уравнением при дополнительных условиях: 1) она мероморфна во всей плоскости и имеет конечное число полюсов; 2) она конечного типа, т. е. при $|s| \to \infty$ логарифм её модуля растёт медленнее некоторой степени $|s|$; 3) при $\Re s > 1$ она разлагается в абсолютно сходящийся ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$.

[6] к стр. 218.

Из последней формулы видно, что целая функция $\xi(t)$ — чётная. Так как соотношение $\xi(-t) = \xi(t)$ равносильно функциональному уравнению функции $\zeta(s)$, то здесь содержится новый вывод этого функционального уравнения.

[7] к стр. 219.

Вычисление, указанное Риманом, удалось воспроизвести H. v. Mangoldt'y (Math. Ann., 60, 1905). Если обозначим остаточный член формулы через $R(t)$, то, как доказал Mangoldt, отношение $\frac{R(t)}{\lg t}$ конечно; с другой стороны. H. Cramer (Math. Zeitschrift, 4, 1919) установил, что

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(t)\, dt = \frac{7}{8}.$$

[8] к стр. 219.

В том, что все нули $\xi(t)$ — действительные, или что все «не тривиальные» (т. е. отличные от -2, -4, -6, ...) нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$, заключается знаменитая «гипотеза Римана». Она не доказана до настоящего времени, несмотря на чрезвычайные затраченные для того усилия. В 1914 г. (Comptes Rendus, 158) G. H. Hardy установил, что на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$ имеется бесконечное множество нулей $\zeta(s)$. R. Backlund исследовал «критическую полосу» $0 < \Re s < 1$ от $T = 0$ до $T = 200$ и нашёл в ней 79 нулей $\zeta(s)$ (формула Римана $\frac{T}{2\pi} \lg \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ при $T = 200$ даёт 78,317...) и все они оказались лежащими на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$.

[9] к стр. 219.

В мемуаре, напечатанном в 1893 г. в Journal de Mathém. (4), 9, J. Hadamard установил справедливость формулы

$$\xi(t) = \xi(0) \prod \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

исходя из оценки коэффициентов тэйлорова разложения функции $\xi(t)$ и основываясь на предложениях, положенных им в основу теории целых функций.

[10] к стр. 221.

Вебер отмечает у Римана неточность редакции: в правых частях двух равенств после интегрирования получается соответственно

$$\pi y^{-a}\left(h(y)+h\left(\frac{1}{y}\right)\right) \text{ и } \pi y^{-a}\left(h(y)-h\left(\frac{1}{y}\right)\right),$$

а не $\pi y^{-a}h(y)$ в каждом из них.

[11] к стр. 222.

При x действительном и большем, чем 1, функция $Li(x)$ (интеграл-логарифм) определяется равенством

$$Li(x)=\int\limits_0^x \frac{dx}{\log x} \pm \pi i,$$

причём следует брать верхний или нижний знак, смотря по тому, проходит ли путь интегрирования по области, где аргумент комплексного переменного положителен, или по области, где он отрицателен.

Вебер отмечает, что последний член в формуле Римана для $\log\xi(0)$ должен быть заменён через $\lg\frac{1}{2}$, и высказывает предположение, что здесь имеется опечатка: буква ξ поставлена вместо ζ.

[12] к стр. 224.

Вебер указывает, что, «несмотря на ряд позднейших исследований (Scheibner, Pilz, Stieltjes), неясности этой работы полностью не устранены» и цитирует отрывок из письма, сохранившегося в бумагах Римана и адресованного Вейерштрассу.

«Доказательства мною не вполне закончены, и я хотел бы по этому поводу... ещё заметить, что два приведённых мною предложения а именно, 1) что между 0 и T имеется приблизительно $\frac{T}{2\pi}\lg\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$ действительных корней уравнения $\xi(\alpha)=0$ и 2) что сумма ряда

$$\sum^{\alpha}\left(L_i\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)-Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)$$

(члены которого расположены в порядке возрастания α) равна пределу, к которому стремится интеграл

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\log\frac{\xi\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)i\right)}{\xi(0)}\right]x^s\,ds$$

при неограниченном возрастании b, следуют из нового разложения функции ξ, которое мне ещё не удалось упростить настолько, чтобы я мог его опубликовать».

Не так давно появилась статья C. L. Siegel'я, «Ueber Riemann's Nachlass zur analytischen Zahlentheorie» (Quellen u. Studien zur Geschichte der Math., Astr. u. Phys, Bd. 2, 1932), из которой уместно привести следующую выдержку:

«В письме к Вейерштрассу, относящемся к 1859 г., Риман упоминает о новом разложении функции $\zeta(s)$, которое он ещё недостаточно упростил, чтобы привести его в работе, посвящённой распределению простых чисел. После того как Вебер в 1876 г. опубликовал это место из письма Римана в своём издании его сочинений, было основание предполагать, что внимательное рассмотрение римановских рукописей, хранящихся в библиотеке Гёттингенского университета, позволит обнаружить важные и пока неизвестные формулы из области аналитической теории чисел.

И действительно, уже несколько десятков лет назад библиотекарь Distel разыскал в бумагах Римана упомянутое представление функции $\zeta(s)$. Оно представляет собой полусходящееся разложение, по которому можно судить о поведении $\zeta(s)$ на критической прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ и во всякой полосе $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ при неограниченном возрастании s. Главный член этого разложения независимо от Римана был открыт Hardy и Littlewood'ом в 1920 г. как частный случай их «approximate functional equation»; в качестве доказательства они применили тот же приём, что и Риман, а именно, приближённое вычисление интеграла по методу «седловых точек». Но у Римана мы находим и процедуру получения дальнейших членов полусходящегося ряда, для чего привлечены интересные свойства интеграла

$$\Phi(\tau, u) = \int \frac{e^{\pi i \tau x^2 + 2\pi i u x}}{e^{2\pi i x} - 1}\, dx,$$

которые когда-то послужили Кронеккеру (и в новейшее время Mordell'у) для чрезвычайно изящного вывода формулы взаимности гауссовых сумм.

В 1926 г. при повторном просмотре заметок Римана Bessel-Hagen'ом было обнаружено ещё одно до тех пор неизвестное представление ζ-функции с помощью некоторого определённого интеграла; это представление было получено Риманом также при рассмотрении свойств $\Phi(\tau, u)$.

Две названные формулы для ζ-функции следует рассматривать как важнейший результат теоретико-числовых исследований Римана, если не считать опубликованного им мемуара. Каких-либо эскизов доказательства так называемой «римановой гипотезы» или хотя бы доказательства существования на критической прямой бесконечного числа нулей ζ-функции в записях Римана не обнаружено. К утверждению о том, что в интервале $0 < t < T$ имеется $\sim \frac{T}{2\pi} \lg \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ действительных нулей $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$, Риман пришёл, очевидно, эвристически при рассмотрении полусходящегося ряда; но и в настоящее время не ясно, как это утверждение можно было бы доказать или опровергнуть. С помощью того же полусходящегося ряда Риман вычислил также приближённо несколько действительных нулей $\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$.

В записях Римана, касающихся теории ζ-функции, не удаётся найти отрывков, которые были бы достаточно обработаны. Кое-где на одном и том же листе имеются формулы, не связанные между собой, очень часто выписана только одна часть равенств, совершенно отсутствуют даже в наиболее важных случаях оценки остаточных членов и рассмотрения, касающиеся сходимости. Этим и обусловливается необходимость той достаточно вольной обработки римановских фрагментов, которая следует ниже.

Не в той степени, как во времена Клейна, распространена в наше время легенда о том, будто бы результатам своей математической работы Риман обязан «замечательным общим руководящим идеям», а не формальному аналитическому аппарату. О том, как высоко стояла аналитическая техника Римана, лучше чего бы то ни было свидетельствует совершённый им вывод полусходящегося ряда для ζ-функции, равно как и последующие его преобразования.

Отсылая читателя, желающего познакомиться с попыткой Siegel'я восстановить ход расссуждений Римана, к подлиннику цитированной статьи, приведём здесь лишь упоминаемые полусходящееся разложение и интегральное представление $\zeta(s)$.

Первое из них имеет вид:

$$\zeta(s)=\sum_{l=1}^{m} l^{-s}+\frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\sum_{l=1} l^{s-1}+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma(s)}\, t^{\frac{s-1}{2}}\, e^{\frac{\pi i s}{2}-\frac{ti}{2}-\frac{\pi i}{8}}\, S,$$

где положено

$$s=\sigma+it,\quad S=\sum_{0\leqslant 2r\leqslant k\leqslant n-1}\frac{2^{-k}i^{r-k}k!}{r!\,(k-2r)!}\,a_k F^{(k-2r)}(\delta)+O\left(\left(\frac{3n}{t}\right)^{\frac{n}{6}}\right),$$

причём

$$n\leqslant 2\cdot 10^{-8}t,\quad m=\left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right],$$

$$\delta=\sqrt{t}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2\pi},\quad F(u)=\frac{\cos\left(u^2+\frac{3\pi}{8}\right)}{\cos\left(\sqrt{2\pi}\,u\right)},$$

и a_n определяются из разложения

$$w(z)=e^{(s-1)\lg\left(1+\frac{z}{\tau}\right)-i\tau z+\frac{i}{2}z^2}=\sum_{0}^{\infty}a_n z^n\quad\left(\tau=+\sqrt{t}\right),$$

т. е. из рекуррентной формулы

$$(n+1)\,\tau a_{n+1}=-(n+1-\sigma)\,a_n+ia_{n-2},\qquad a_{-2}=0,\qquad a_{-1}=0.$$

Что касается интегрального представления $\zeta(s)$, то оно таково:

$$\left.\begin{aligned}&\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\equiv\\&\equiv\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\end{aligned}\right\}=$$

$$=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\int\limits_{0\swarrow 1}\frac{x^{-s}e^{\pi i x^2}}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\,dx+\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\int\limits_{0\searrow 1}\frac{x^{s-1}e^{-\pi i x^2}}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\,dx,$$

причём интегрирование производится по прямым

$$\Re s - \Im s = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \Re s + \Im s = \frac{1}{2}$$

в направлениях, указанных стрелками.

XII. О ВОЗМОЖНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

(*Werke, XII*)

Работа «Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe» была представлена Риманом в декабре 1853 г. философскому факультету Гёттингенского университета в качестве Habilitationsschrift; она не была напечатана при жизни Римана и, вероятно, стала известной лишь после опубликования её в 1867 г. в Трудах Гёттингенского общества наук (Abhandl. d. Königl. Gessellsch. der Wiss., Bd. 13). Публикуя эту работу, Р. Дедекинд присоединяет к ней примечание, указывающее на её высокую ценность, однако, звучащее не вполне уверенно: «Хотя автор, повидимому, не имел в виду опубликования своей работы, нужно, однако, думать, что настоящее её издание, с сохранением текста в совершенно неизменённом виде, оправдывается в достаточной степени как значительным интересом самого предмета, так и содержащейся в ней трактовкой важнейших принципов анализа».

Работа Римана, как и несколько более поздний мемуар Р. Липшица (Journ. f. Mathem., Bd 63, 1864), непосредственно примыкает к знаменитому мемуару Лежёна-Дирихле, напечатанному в 1829 г. в 4-м томе этого же журнала. Летом 1852 г. Риман имел возможность пользоваться личными советами и указаниями выдающегося математика, которого в большей степени, чем кого-либо другого, мог назвать своим учителем. О помощи, полученной от Дирихле, он сам говорит в начале своей работы.

Уже в нашем столетии, после работ А. Лебега, интерес к теории тригонометрических рядов возрос в высокой степени. В частности, сочинение Римана было переведено на русский язык С. Н. Бернштейном и издано вместе с работами Дирихле и Липшица под наименованием «Разложение функций в тригонометрические ряды» (Харьковская математическая библиотека, серия В. № 2, 1914 г.).

[1] к стр. 231.

Едва ли было бы уместно подвергать здесь критическому рассмотрению вопрос о том, кем впервые было высказано утверждение, что «произвольно заданная функция может быть представлена тригонометрическим рядом»; отметим только, что излагаемое здесь освещение истории вопроса и суждения о приоритете принадлежат скорее Дирихле, чем Риману.

[2] к стр. 232.

Нужно думать, что Риман имеет в виду применение своей теоремы о конформном отображении (см. § 21 диссертации).

[3] к стр. 236.

В дальнейшем указывается ставшее классическим определение определённого интеграла в конечном промежутке. Что функция $f(x)$ считается ограниченной, ясно из контекста; несколько дальше Риман говорит о её «конечности», разумеется, имея в виду свойство, которое теперь называют «ограниченностью».

[4] к стр. 238.

В примечании к немецким изданиям указывается, что в бумагах Римана был найден набросок более тщательного доказательства предельного отношения $\lim\limits_{d\to 0}\Delta = 0$. При этом Риман пользуется приёмом, в наше время широко известным, т. е. суперпозицией двух систем промежутков.

[5] к стр. 238.

Термин «отдельное числовое значение» здесь, вероятно, нужно понимать в том смысле, в каком теперь говорят «изолированная точка».

[6] к стр. 240.

Критерии сходимости, о которых здесь идёт речь, применительно к рядам были высказаны ранее Римана Бертраном; однако, возможно, что Риман устанавливает их здесь независимо.

[7] к стр. 242.

В «словесной» форме и притом на частном примере, но безукоризненно чётко здесь доказаны две теоремы: 1) ряд функций сходится равномерно в данном промежутке, если он мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами; 2) сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть функция непрерывная.

[8] к стр. 244.

Предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha^2},$$

называемый «обобщённой римановой второй производной» функции $F(x)$, может существовать и в том случае, если вторая производная (и даже первая) в обычном смысле не существует. Таким образом, доказанная здесь теорема даёт метод суммирования тригонометрических рядов.

[9] к стр. 245.

В условии теоремы 2 не предполагается, что данный тригонометрический ряд — сходящийся.

[10] к стр. 246.

Намёк на школьный приём: в формуле

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'dx$$

член uv пишется так, как если бы v под интегралом слева «было постоянным».

[11] к стр. 248.

Обобщённая риманова вторая производная от разности $F(x+2\pi)-F(x)$ тождественно равна нулю, так как имеет период 2π; поэтому сама эта разность есть линейная функция x. Отсюда легко следует возможность подбора C' и A_0.

[12] к стр. 248.

Здесь $\lambda(x)\equiv 1$ и требование обращения $\lambda(x)$ в нуль на концах промежутка не выполнено. Тем не менее, вследствие периодичности функции $F(x)-C'x-A_0\frac{x^2}{2}$, как легко убедиться, заключение теоремы 3 остаётся справедливым.

[13] к стр. 249.

В примечании к этому месту Вебер высказывает предположение, что здесь пропущено требование периодичности $\lambda(x)$.

[14] к стр. 256.

Напомним читателю, что даже непрерывность функции $f(x)$ не обеспечивает её представимости рядом Фурье. Первый пример непрерывной функции, не разлагающейся в ряд Фурье, был указан Дюбуа-Реймоном в 1876 г. (Math. Annalen, 10, 1876).

[15] к стр. 257.

Применяемый здесь метод вычисления асимптотического значения интеграла ведёт начало от Лапласа. Дарбу (Journ. de Mathém. (3) 4, 1878), при изложении этого метода говорит о «функциях больших чисел».

[16] к стр. 259.

Вместо невнятного начертания

$$\sum{}^{\theta}-(-1)^{\theta}$$

здесь, вероятно, должно было бы стоять:]

$$-\sum_{\theta}(-1)^{\theta} \quad \text{или} \quad \sum_{\theta}(-1)^{\theta+1}.$$

Например, при $n=12$

$$-\sum_{\theta}(-1)^{\theta}=-(-1)-(-1)^2-(-1)^3-(-1)^4-(-1)^6-(-1)^{12}=-2.$$

Приведённый Риманом тригонометрический ряд получается в результате почленного суммирования рядов Фурье, составленных для функций $\frac{(nx)}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, что не избавляет, конечно, от необходимости строгого доказательства сформулированного утверждения.

[17] к стр. 260.

Как отмечает Вебер, Genocchi (Intorno ad alcune serie, Torino, 1875), опроверг сходимость этого ряда при $x=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

XIII. ОПЫТ ОБОБЩЕНИЯ ДЕЙСТВИЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

(*Werke*, *XIX*)

Публикуя работу Римана «Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation», Вебер сопровождает её следующим примечанием.

«Это сочинение датировано в рукописи 14-м января 1847 г. и, значит, относится к студенческим годам Римана. Без сомнения, Риман не имел в виду его опубликования; к тому же рассуждения покоятся здесь на основах, которые он сам в позднейшие годы не признавал приемлемыми. Тем не менее работа Римана характерна для пути его развития, и результаты её достаточно примечательны, чтобы оправдать включение её в настоящее собрание сочинений. Другим оправданием может служить интерес, проявленный к этой работе Кэли (см. Math. Annalen, 16, «Note on Riemann's paper Versuch ...»).

Вопросом об обобщении понятия ν-ой производной функции одной переменной на случай произвольного (не целого) значения ν издавна занимались на формальной основе многие выдающиеся математики, в том числе Лейбниц, Иоганн Бернулли, Эйлер, Лагранж и Фурье. Непосредственным предшественником Римана в этой области был Лиувилль, который в ряде работ, опубликованных между 1832 и 1836 гг. (см. Journal de Crelle, Bd. 11, 12, 13), исследует проблему более глубоко; он определяет производную ν-го порядка посредством формулы

$$(-1)^{\nu} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\nu}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k)\Gamma(\nu-k+2)} f(x+(k-1)h)$$

и посредством интеграла

$$\frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} f(x+t) \frac{dt}{t^{1+\nu}} \quad (\nu \leqslant -1).$$

Нельзя сказать с уверенностью, были ли известны 20-летнему Риману ранее совершённые попытки разрешить поставленную им задачу. Если идея не возникла у него независимо, то возможно, что он был приведён к ней при чтении Лагранжа или «Théorie de la chaleur» Фурье (так как в своей работе он, вероятно, процитировал бы Лиувилля, если бы его результаты были ему знакомы). Во всяком случае Риман идёт собственной дорогой: о его «Опыте» Вебер отозвался бы более точно, если бы сказал, что это — произведение гениального самоучки. Риман исходит в своей работе из достаточно произвольных и мало обоснованных предпосылок и в то же время обнаруживает высокую степень независимости мысли (например, в суждениях о сходимости рядов, где выступает отнюдь не в роли новатора) и исключительную сосредоточенность и настойчивость в развитии идеи, которой увлечён. Притом работа Римана по самому характеру темы несколько беспредметна, так как не указывается к чему и как могли бы быть приложены эти «производные произвольного порядка».

Было бы весьма интересно знать, имел ли Риман случай познакомить Гаусса с этим сочинением и не его ли имел в виду, как читателя, когда тщательно редактировал свою работу? Риман в то время, несомненно, уже сознавал своё исключительное математическое дарование; ему нужно было по разным причинам, и поскорее, пробивать себе дорогу; притом в сторону математики, а не теологии, к чему побуждал его отец. Здесь же в Гёттингене, не считая Штерна, астронома Гольдшмидта и физика Листинга, пребывал овеянный неувядающей славой недоступный 70-летний princeps mathematicorum. Неизвестно, попала ли в руки Гауссу первая работа Римана в год её написания, и если попала, то насколько внимательно была им просмотрена; но нетрудно представить себе, что при знакомстве с нею у Гаусса могли возникнуть и досада, и раздражение... Нужно найти какие-то причины внезапного отъезда Римана в Берлин, в особенности — той предубеждённости, которая обнаруживается в отношении Гаусса к Риману на протяжении следующих лет и которую Риману, может быть, удалось окончательно рассеять лишь речью, посвящённой основаниям геометрии.

[1] к стр. 262.

Можно догадываться, что кто-нибудь ставил на вид Риману наличие порочного круга в его построениях.

[2] к стр. 262.

Это утверждение следует сопоставить с высказываемыми далее в этой статье общими суждениями Римана о рядах и пользовании ими.

[3] к стр. 263.

Производную в обычном смысле Риман называет «Differentialquotient», а производную в рассматриваемом им обобщённом смысле — «Ableitung» («fonction dérivée»). В переводе не оказалось возможным сохранить подобного рода различие терминов.

[4] к стр. 264.

Мы постарались возможно точнее перевести этот абзац, позволяющий судить о том, каковы были теоретические предпосылки заблуждения Римана. «Числовое сложение» — Ziffernaddition (!); «величины, имеющие определённое числовое значение» — Zahlengrössen. «Было высказано мнение и т. д.» — это мнение, как известно, высказывалось Гауссом.

[5] к стр. 265.

$$\Pi(t) = \Gamma(t+1) \text{ (обозначение Гаусса).}$$

[6] к стр. 266.

Как видно из предыдущего изложения, вывод этой формулы, которую запишем, полагая для определённости $b = 1$ и заменяя $x - 1$ через x, в виде

$$\frac{(x+1)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \frac{x^\alpha}{\Gamma(\mu-\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+1)}$$

(причём α пробегает значения вида $n+\theta$, где θ — правильная дробь, а n пробегает все целые числа от $-\infty$ до $+\infty$), основывается, в частности, на убеждении в том, что: 1) всякий степенной ряд, коэффициенты которого «подчинены определённому закону», независимо от его сходимости в современном смысле, «имеет определённое числовое значение», т. е. имеет сумму, равную некоторой функции независимой переменной; 2) степенной ряд, получающийся при почленном дифференцировании данного степенного ряда, имеет сумму, равную производной от суммы данного ряда.

[7] к стр. 270.

В заметке «Note on Riemann's paper Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation» (Math. Ann., 16) Кэли высказывается недоумевающе: «Развивая свою теорию дробного дифференцирования, Риман оставляет в стороне вопрос, который в подобного рода теории всегда казался мне чрезвычайно трудным: каков смысл дополнительной функции, содержащей бесконечное множество произвольных постоянных? Другими словами, в какой же степени произвольной является дополнительная функция, встречающаяся в этой теории?»

[8] к стр. 270.

Разумеется, Риман пользуется здесь термином «непрерывность» не в том смысле, в каком его теперь обычно употребляют. Интересно, что он всё же считает необходимым ввести некоторое ограничение для возможности разложения функции в степенной ряд.

[9] к стр. 271.

Введённое Риманом определение обобщённой производной $\partial_x^\mu z$ страдает тем недостатком, что является зависящим от произвольно выбираемого параметра k. Риман старается насколько возможно парировать относящиеся сюда возражения.

[10] к стр. 274.

$$\Psi(s) = \frac{\Pi'(s)}{\Pi(s)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\lg \frac{1}{y}} - \frac{y^s}{1-y} \right) dy \text{ (обозначение Гаусса).}$$

[11] к стр. 275.

В заключение заметим по поводу «незаконных» операций с рядами, которыми преисполнено это сочинение Римана, что 1) как показывает его работа о тригонометрических рядах, к 1854 г. (и, возможно, значительно раньше) его воззрения на природу рядов и применение их в анализе резко изменились и приблизились к ныне принятым; 2) здесь используются степенные ряды, расположенные по дробным степеням переменного, различающимся на целые числа; подобного рода ряды встречаются в его более поздних теориях алгебраических и гипергеометрических функций, и потому занятия этими рядами являются некоторым этапом его творческого пути, этапом, заслуживающим известного внимания.

ЧАСТЬ II

XIV. О ГИПОТЕЗАХ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

(*Werke, XIII*)

Сочинение «Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen» представляет собою диссертационную (пробную) лекцию, прочитанную Риманом 10 июня 1854 г. перед философским факультетом Гёттингенского университета, в присутствии Гаусса, к которому она преимущественно обращена. В биографии Бернгарда Римана мы отметили некоторые обстоятельства этого события, а также указали на причины, обусловившие своеобразное оформление самой работы (в ней почти отсутствует математическая символика). Произнесённая Риманом речь содержала краткие результаты его исследований, посвящённых тому, что он назвал «многократно протяжённым многообразием» (mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit); что касается формального аппарата, то Риман лишь отчасти развил его в работе 1861 г., представленной на соискание премии Парижской академии. Настоящий мемуар впервые был опубликован уже после смерти Римана в 1868 г. (Gött. Abhandlungen, т. 13), затем, конечно, вошёл в B. Riemann's Werke (1876); в 1919 году был переиздан H. Weyl'ем, который присоединил к оригинальному тексту приведённый ниже обстоятельный комментарий, излагающий концепцию Римана в современной форме и устанавливающий связь с новейшими физико-геометрическими теориями и, в частности, с общей теорией относительности. На русском языке перевод «Ueber die Hypothesen» появляется не впервые: эта работа вошла в 1893 г. в сборник по основаниям геометрии, изданный Казанским Физико-математическим обществом в связи со столетним юбилеем Лобачевского (перевод Д. М. Синцова).

[1] к стр. 280.

«Состояние» — Bestimmungsweise. Под многообразием Риман понимает не только геометрические протяжённости (это явствует, например, из конца абзаца, где Риман говорит об ощущениях и цветах). Поэтому позволительно воспользоваться, за неимением лучшего, общепонятным, хотя и не вполне геометрическим термином «состояние» для обозначения элемента многообразия, соответствующего совокупности некоторых определённых числовых значений параметров (координат). В случае геометрической протяжённости «состояние» — то же, что «точка».

[2] к стр. 281.

«Изменяемость» — Veränderlichkeit. Этот термин Риман употребляет как синоним Mannigfaltigkeit, с целью облегчения правильного понимания.

[3] к стр. 282.

Нужно напомнить, что у Римана «точка» не есть часть «кривой» или «поверхности», «кривая» не есть часть «поверхности» и т. д. Вообще, под «частью» многообразия подразумевается принадлежащее ему многообразие того же измерения.

[4] к стр. 282.

Можно сказать, что Риман здесь имеет в виду «функциональные многообразия»: неудобно сказать «функциональные пространства», так как «пространство» у Римана имеет более узкий смысл, чем в наше время. (См. «План исследования».)

[5] к стр. 283.

«Disquisitiones generales circa superficies curvas», 1827 г. (Werke, т. 4).

[6] к стр. 283.

Эту мысль удаётся расшифровать, если сделать допущение, что Риман молчаливо предполагает, что «длина» линейного элемента, т. е. расстояние ρ_{AB} между его конечными точками A и B, удовлетворяет требованию

$$\rho_{AB} = \rho_{AC} + \rho_{CB}.$$

Обозначим через $F(x, dx)$ расстояние между точками x и $x + dx$; тогда, согласно сделанному явно предположению, с точностью до величин высших порядков, будем иметь:

$$F(x + \delta x, dx) = F(x, dx).$$

Отсюда следует при n целом

$$F(x, n\,dx) = \sum_{m=1}^{n} F(x + \overline{m-1}\,dx, dx) = nF(x, dx),$$

и дальше, по непрерывности, получается для всех положительных λ:

$$F(x, \lambda\,dx) = \lambda F(x, dx).$$

Точно так же, дальше, из требования

$$\rho_{AB} = \rho_{BA}$$

вытекает:

$$F(x, -dx) = F(x - dx, dx) = F(x, dx).$$

[7] к стр. 284.

«Непрерывность» Риман здесь понимает в смысле Эйлера и, как можно судить из дальнейшего изложения, представляет рассматриваемую им функцию разложенной в степенной ряд. Об этом же свидетельствует упоминание (см. несколько выше) о коэффициентах.

Комментарий Г. Вейля

1. (К части I.) В последнее время были сделаны попытки на основе точно формулированных аксиом установить, какие свойства нужно, вообще говоря, приписать непрерывному многообразию, чтобы это понятие могло служить надёжным фундаментом для дальнейших математических построений. См. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913, гл. 1, § 4; Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1914, главы VII

и VIII [1]); концепция, согласно которой совершается неограниченное подразделение и континуум не мыслится атомистическим — как система отдельных дискретных элементов, имеется у Brouwer'а, Math. Ann., т.71, 1912, стр. 97, и у Вейля, «Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik», Math. Ztschr., т. 10, стр. 77. Многообразие n измерений проще всего характеризуется требованием существования взаимно-однозначного и непрерывного отображения многообразия (или если не всего, то по крайней мере каждой его достаточно малой части) на систему числовых значений n координат x_i, являющихся внутри многообразия непрерывными функциями точки. Только после того, как в многообразии введена подобного рода координатная система, возникает возможность дать числовые характеристики величинам, связанным с многообразием. Произвольность выбора координатной системы обусловливается некоей «теорией инвариантов», причём здесь имеется в виду инвариантность относительно произвольных взаимно-однозначных и непрерывных отображений. Прежде всего приходится доказать, что само число измерений n является инвариантным,—иначе понятие числа измерений повисает в воздухе. Это доказательство было проведено Brouwer'ом (Math. Ann., т. 70, 1911, стр. 161—165, см. также т. 72, 1912, стр. 55—56). Для дальнейших исследований Римана нужно, конечно, предположить, что в силу внутренних свойств многообразия связь между двумя любыми возможными координатными системами выражается функциями, которые не только сами непрерывны, но и имеют непрерывные производные и ведут ко взаимно-однозначным линейным соотношениям между дифференциалами координат в различных системах; в противном случае нельзя было бы вообще говорить о линейных элементах. При таких условиях инвариантность числа измерений становится очевидной; функциональные детерминанты координатных трансформаций отличны от нуля.

Аналогичное имеющемуся у Римана рекуррентное определение числа измерений, более наглядное, чем «арифметическое» определение, основанное на счёте координат, было предложено А. Пуанкаре (Révue de métaphysique et de morale, 1912, стр. 486—487); связь между этим (надлежащим образом уточнённым) «естественным» понятием числа измерений и соответствующим арифметическим понятием была исследована Brouwer'ом (Journ. f. d. reine u. ang. Math., т. 142, стр. 146—152).

2. (К части II, абзац 1.) Допущение, что ds^2 есть квадратическая дифференциальная форма, очевидно, сводится к тому, что в бесконечно малом должна быть справедлива теорема Пифагора. Это допущение — не только простейшее из возможных, но, кроме того, из всех других выделяется совершенно особенным образом. Если, следуя Риману, предположим, что линейные элементы измеримы, то мероопределение, устанавливаемое в каждой точке P нашего многообразия, заключается в том, что каждому линейному элементу (с компонентами dx_i) приписывается длина

$$ds = f_P\,(dx_1, dx_2, \ldots dx_n). \tag{1}$$

Тогда приходится принять, что f_P есть однородная функция первой степени — в том смысле, что при умножении аргументов dx_i на общий множитель пропорциональности ρ функция f_P умножается на $|\rho|$. Далее, будет естественно принять, что различные точки многообразия не различаются одна от другой в отношении установленных в них мероопреде-

[1]) Имеется русский перевод: Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937, главы VI и VII.

лений; аналитически это означает, что функции f_P, соответствующие различным точкам P, получаются все из одной, скажем f, посредством линейной трансформации переменных. Это осуществляется, если во всякой точке f_P^2 есть положительная квадратическая форма:

$$f = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}; \tag{2}$$

но это, вообще говоря, не осуществляется, если f_P есть корень 4-ой степени из формы 4-ой степени с коэффициентами-функциями точки. Поэтому проблему пространства, возможно, лучше сформулировать следующим образом. Все функции, получающиеся из одной, например f, посредством линейных трансформаций, объединим в один класс (f). Каждому такому классу (f), составленному из однородных функций первой степени, соответствует особая геометрия: в метрическом пространстве типа (f) функция f_P, которая согласно (1) в каждой точке P пространства определяет длину линейного элемента, принадлежит классу (f). Такое утверждение справедливо, каков бы ни был выбор координат x_i. Среди различных пространственных типов тот, который соответствует формуле Пифагора-Римана (2), занимает особое место. Возникает вопрос: каковы внутренние причины этого обстоятельства?

Удовлетворительный ответ впервые был дан в исследованиях Гельмгольца и Ли (Helmholtz, «Ueber die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen», Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1868, стр. 193—221; Lie, «Ueber die Grundlagen der Geometrie», Verh. d. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, т. 42, 1890, стр. 284—321). Пусть n-мерное многообразие обладает свойством подвижности в бесконечно малом; другими словами, предположим, что бесконечно малое тело, содержащее точку 0, может свободно вращаться около 0, и именно так, что имеющиеся в нём метрические отношения остаются неизменными с точностью до величин высших порядков, и, кроме того, посредством вращения линейному элементу в точке 0 может быть придано любое направление, каждому плоскостному элементу, содержащему рассматриваемый линейный элемент, может быть придано любое положение (с условием содержать тот же линейный элемент) и т. д. — вплоть до элементов $n-1$ измерений; но если такого рода система инцидентных элементов от одного до $n-1$ измерений фиксирована, то тело уже не может двигаться. Тогда вращения образуют некоторую группу однородных линейных трансформаций, совершаемых над дифференциалами dx_i. И вот оказывается, что эта группа непременно состоит из всех линейных трансформаций, которые оставляют инвариантной некоторую положительную квадратическую форму ds^2. Таким образом, требование подвижности в бесконечно малом имеет следствием то, что 1) линейные элементы в точке 0 сравнимы между собою, и 2) для их длины ds осуществляется теорема Пифагора.

Совсем иное решение проблемы пространства, учитывающее новую ситуацию, созданную теорией относительности, было дано Вейлем. См. в этой связи его доклад «Das Raumproblem», воспроизведённый в Jahresbericht d. Dtsch. Math.-Vereinigung, 1923, и далее, Math. Ztschr., т. 12, 1922, стр. 114, а также изданные J. Springer'ом лекции «Mathematische Analyse des Raumproblems».

Геометрические исследования в пространствах с произвольным [в смысле формулы (1)] мероопределением в каждой точке были в последнее время проведены P. Finsler'ом («Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen», Gött. 1918).

3. (К части II, абзац 2.) Пусть линейный элемент определяется соотношением [1])

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k \qquad (g_{ki} = g_{ik}). \tag{3}$$

Классические методы вариационного исчисления позволяют получить условие того, что некоторая линия $x_i = x_i(s)$, соединяющая данные точки A, B нашего многообразия, по сравнению с другими, также соединяющими эти точки, и притом достаточно близкими к рассматриваемой, является кратчайшей или по меньшей мере обладающей свойством стационарности (имеется в виду обращение в нуль первой вариации). Это условие выражается уравнениями

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx_j}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}. \tag{4}$$

Здесь мы допускаем, что в качестве параметра s взята длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой определённой точки, или же величина, ей пропорциональная; таким образом на кривой [как, впрочем, следует из (4)] мы имеем:

$$g_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = \text{const}. \tag{5}$$

Левая часть уравнения (4) равна

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} + g_{ij}\frac{d^2x_j}{ds^2}.$$

Перенесём первый член вправо и введём для сокращения так называемые «индексы Кристоффеля», т. е. величины

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right) = \Gamma_{i,\alpha\beta},$$

и также величины $\Gamma^i_{\alpha\beta}$, связанные с ними однозначно соотношениями

$$\Gamma_{i,\alpha\beta} = g_{ij}\Gamma^j_{\alpha\beta}.$$

Тогда получаются следующие уравнения «геодезической линии»:

$$\frac{d^2x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0. \tag{6}$$

Употребляемые Риманом «центральные координаты» в произвольной точке O (он их обозначает через $x_1, x_2, \ldots, x_n$) теперь могут быть введены следующим образом. Пусть z_i — какие угодно координаты, обращающиеся в нуль в точке O. Так как посредством линейной трансформации любая положительная квадратичная форма переводится в «единичную» форму с коэффициентами

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k), \end{cases}$$

[1]) Подразумевается суммирование по парам индексов, в данном случае, например, по индексам i и k; это условие освобождает от необходимости многократно выписывать знаки сумм.

то можно заранее предположить, что в точке O коэффициенты g_{ik} линейного элемента (3) принимают значение δ_{ik}, так что в этой точке $ds^2 = \sum dz_i^2$. Удовлетворяющая уравнениям (6) геодезическая линия с началом в точке O (пусть $z=0$ при $s=0$) однозначно определяется начальными значениями производных

$$\left(\frac{dz_i}{ds}\right)_0 = \xi^i;$$

пусть её параметрическое представление имеет вид

$$z_i = \psi_i(s;\ \xi^1,\ \xi^2,\ \ldots,\ \xi^n).$$

Легко установить, что функции ψ_i зависят только от произведений $s\xi^1$, $s\xi^2$, ..., $s\xi^n$:

$$z_i = \varphi_i(s\xi^1,\ s\xi^2,\ \ldots,\ s\xi^n).$$

Центральные координаты x_i возникают из первоначальных координат z_i посредством трансформации

$$z_i = \varphi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Эти центральные координаты обладают тем отличительным свойством, что при их использовании линейные функции переменной s

$$x_i = \xi^i s, \tag{7}$$

каковы бы ни были постоянные ξ^i, удовлетворяют уравнениям (5) и (6). Для них мы имеем также в точке O: $ds^2 = \sum dx_i^2$. Поэтому, подчиняя в дальнейшем постоянные ξ^i условию $\sum (\xi^i)^2 = 1$, мы убедимся, что при подстановке (7) выражение $g_{ik}\xi^i\xi^k$ становится независимым от s, а именно, равным 1 (как даёт подстановка $s=0$); и кроме того,

$$\Gamma_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0. \tag{8}$$

Таким образом получаются тождества относительно величин x

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = 0; \tag{8'}$$

$$g_{ik}x_i x_k = x_i^2; \tag{9}$$

из них мы теперь выведем некоторые следствия.

Равенству (8′) можно придать вид

$$\Gamma_{i,\,\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\right)x_\alpha x_\beta = 0. \tag{10}$$

Так как

$$\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x_\alpha}\cdot x_\beta = \frac{\partial x_i'}{\partial x_\alpha} - g_{i\alpha},$$

где положено

$$x_i' = g_{ij}x_j.$$

то левая часть (10) равна

$$\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} x_\alpha - x'_i\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} x_\alpha - x'_i\right) = \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} x_\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} x_\alpha + x'_i\right) =$$

$$= \frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} x_\alpha - \frac{1}{2}\, \frac{\partial (x'_\alpha x_\alpha)}{\partial x_i}.$$

Но вследствие (9) $x'_\alpha x_\alpha = x_\alpha^2$, и так мы получаем:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_\alpha} x_\alpha - x_i = \frac{\partial (x'_i - x_i)}{\partial x_\alpha} x_\alpha = 0.$$

В предположении, что выполнена подстановка (7), отсюда следует:

$$\frac{d (x'_i - x_i)}{ds} = 0,$$

и так как разность $x'_i - x_i$ обращается в нуль при $s = 0$, то мы приходим к простому заключению, что должно иметь место тождество

$$x'_i = g_{i\alpha} x_\alpha = x_i. \tag{11}$$

Далее, дифференцирование по x_k даёт:

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_k} x_\alpha = \delta_{ik} - g_{ik}. \tag{12}$$

Следовательно, левая часть симметрична относительно i и k:

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_k} \cdot x_\alpha = \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x_i} \cdot x_\alpha. \tag{13}$$

Умножая соотношение (12) на x_k или x_i и суммируя по k или i, получим, использовав ещё раз (11):

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_\beta} x_\alpha x_\beta = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} x_\alpha x_\beta = 0. \tag{14'}$$

Таким образом, исходное равенство (10) распадается на две составные части.

Рассмотрим теперь степенное разложение коэффициента g_{ik} около точки O:

$$g_{ik} = \delta_{ik} + c_{ik,\alpha} x_\alpha + c_{ik,\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \ldots$$

Здесь $c_{ik,\alpha}$ есть значение первой производной $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha}$, а $2c_{ik,\alpha\beta}$ — значение второй производной $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ в точке O. Риман утверждает, прежде всего, что члены первых степеней обращаются в нуль. Это следует из соотношения (14′): если положим в нём $x_i = \xi^i s$ и уничтожим множитель s^2, то получим тождество относительно s

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\xi^\alpha\xi^\beta = 0.$$

Отсюда при $s = 0$ вытекает требуемый результат, т. е. обращение в нуль производных $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$ в точке O, так как ξ — произвольные числа. Дифференцируя предыдущее тождество по s и полагая $s = 0$, получаем дальнейшее соотношение

$$c_{\beta\gamma,\alpha i} + c_{\gamma\alpha,\beta i} + c_{\alpha\beta,\gamma i} = 0.$$

Таким же образом, оперируя с (14), мы придём к соотношению

$$c_{i\alpha,\beta\gamma} + c_{i\beta,\gamma\alpha} + c_{i\gamma,\alpha\beta} = 0. \tag{15}$$

Переставляя здесь индексы i и γ и вычитая полученное соотношение из предшествующего, будем иметь, наконец, соотношение симметрии

$$c_{ik,\alpha\beta} = c_{\alpha\beta,ik}. \tag{16}$$

В степенном разложении ds^2 совокупность членов 0-го порядка имеет вид

$$[0] = \sum dx_i^2;$$

члены 1-го порядка отсутствуют; члены 2-го порядка образуют форму

$$[2] = c_{ik,\alpha\beta}x_\alpha x_\beta\, dx_i\, dx_k. \tag{17}$$

Риман утверждает, далее, что [2] представляет собою квадратическую форму величин $x_i\, dx_k - x_k dx_i$. Условимся ради единообразия обозначать бесконечно малые величины x_i через δx_i; тогда упомянутые величины

$$\delta x_i\, dx_k - \delta x_k\, dx_i = \Delta x_{ik} \tag{18}$$

являются не чем иным, как «компонентами» плоского (параллелограммообразного) элемента, построенного в точке O на линейных элементах с компонентами δx_i и dx_i. Квадратическую форму переменных Δx_{ik} можно записать одним и только одним способом в виде

$$\Delta\sigma^2 = \frac{1}{4} R_{\alpha\beta,\gamma\delta}\Delta x_{\alpha\beta}\Delta x_{\gamma\delta}, \tag{19}$$

причём коэффициенты R подчинены дополнительным условиям

$$\left\{\begin{array}{c} R_{\beta\alpha,\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta,\gamma\delta}, \quad R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta,\delta\gamma}; \quad R_{\gamma\delta,\alpha\beta} = R_{\alpha\beta,\gamma\delta}; \\ R_{i\alpha,\beta\gamma} + R_{i\beta,\gamma\alpha} + R_{i\gamma,\alpha\beta} = 0. \end{array}\right. \tag{20}$$

Чтобы привести [2] к этому виду, нам нужны соотношения (15) и (16); в самом деле, на основании этих соотношений можно заменить $c_{ik,\alpha\beta}$ через

$$\left.\begin{array}{r} \frac{2}{3}\, c_{ik,\alpha\beta} \\ + \frac{1}{3}\, c_{ik,\alpha\beta} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}\,(c_{ik,\alpha\beta} + c_{\alpha\beta,ik}) \\ - \frac{1}{3}\,(c_{i\alpha,\beta k} + c_{i\beta,k\alpha}). \end{array}\right.$$

Подставляя в (17) это выражение для коэффициента $c_{ik,\alpha\beta}$, можно ещё в третьем члене $c_{i\alpha,k\beta}$ переставить индексы i и k. Итак, если мы построим по формуле (19) форму $\Delta\sigma^2$ с коэффициентами

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = c_{\alpha\gamma,\beta\delta} + c_{\beta\delta,\alpha\gamma} - c_{\alpha\delta,\beta\gamma} - c_{\beta\gamma,\alpha\delta}, \tag{21}$$

которые удовлетворяют условиям (20), то получим:

$$[2] = -\frac{1}{3}\Delta\sigma^2.$$

В последнее время возникло очень естественное и наглядное геометрическое представление римановой кривизны, которое связывается с бесконечно малым параллельным перемещением векторов в римановом многообразии. Бесконечно малое вращение, которому подвергается векторное тело в точке O при параллельном перемещении вокруг плоского элемента (если условимся обозначать через $\Delta\mathfrak{x} = (\Delta\xi^i)$ возникающее при этом приращение вектора $\mathfrak{x}$ с компонентами ξ^i), выражается формулой

$$\Delta\xi^i = -\Delta r^i_k \cdot \xi^k;$$

приращения Δr^i_k независимы от вектора $\mathfrak{x}$, но зависят линейно от компонент Δx_{ik} обходимого плоского элемента:

$$\Delta r^i_k = \frac{1}{2} R^i_{k,\alpha\beta}\, \Delta x_{\alpha\beta}.$$

Исходя из этих соображений, мы приходим к соотношениям:

$$R^\alpha_{\beta,\gamma\delta} = \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x_\delta}\right) + (\Gamma^\alpha_{\rho\gamma}\Gamma^\rho_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\rho\delta}\Gamma^\rho_{\beta\gamma}). \tag{22}$$

Отсюда следует, что форма $\Delta\sigma^2$ с коэффициентами

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} R^\rho_{\beta,\gamma\delta} \tag{22'}$$

является инвариантной. Так как её коэффициенты R при использовании центральных координат (причём первые производные величин g_{ik} обращаются в нуль в рассматриваемой точке O) принимают вид (21), то сама эта форма тождественна с римановой формой кривизны. Квадрат площади бесконечно малого параллелограмма, построенного на линейных элементах δ и d (Риман говорит не о параллелограмме, а о треугольнике), также представляется в виде квадратической формы переменных (18): именно — каковы бы ни были координаты — мы получаем формулу

$$\Delta f^2 = \frac{1}{4}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\,\Delta x_{\alpha\beta}\Delta x_{\gamma\delta}.$$

Отношение $\frac{\Delta\sigma^2}{\Delta f^2}$, зависящее только от отношений величин Δx_{ik}, и есть то число, которое, по Риману, следует называть кривизной многообразия по направлению плоского элемента с компонентами Δx_{ik}.

В аналитической форме теория римановой кривизны впервые была развита Кристоффелем и Липшицом (см. ряд мемуаров в Journal f. d. reine u. ang. Math., тт. 70, 71, 72, 82). Сам Риман воспроизвёл соответствующие вычисления в одной работе, которая была им представлена Парижской академии, но не заслужила премии и потому не была опубликована; она увидела свет в собрании сочинений Римана благодаря усилиям Дедекинда и Вебера, причём к ней был присоединён выдающийся комментарий. Теорию инвариантов в метризованном многообразии, в частности, разрабатывали Риччи и Леви-Чивита (см. Méthodes de calcul différentiel absolu, Math. Ann., т. 54, 1901, стр. 125—201). В последнее время, под влиянием теории относительности Эйнштейна, исследования в этом направлении были возобновлены; они привели к фундаментальному понятию бесконечно малого параллельного перемещения. По этому поводу см. Levi-Cività «Nozione di parallelismo in una varietà qualunque...», Rend. d. Circ. Mat. Palermo, т. 42, 1917; Hessenberg, «Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie», Math. Ann., т. 78, 1917; Weyl, «Raum, Zeit, Materie», 5-е издание, 1913, стр. 88 и далее; J. A. Schouten «Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie», Verhandl. K. Akad. Wet. Amsterdam, XII, № 6, 1919.

4. (К части II, абзац 3.) Условимся называть римановым многообразием такое метризованное многообразие, в котором мероопределение задано положительной квадратической дифференциальной формой ds^2. Связь с обыкновенной теорией поверхностей, созданной Гауссом, заключается в том, что всякая поверхность в трёхмерном эвклидовом пространстве есть в указанном смысле (двумерное) риманово многообразие. Это обусловливается тем обстоятельством, что само эвклидово пространство является римановым многообразием; вообще, метрика, установленная на n-мерном римановом многообразии, переносится на все содержащиеся в нём m-мерные многообразия ($m = 1, 2, \ldots, n-1$), вследствие чего они также становятся римановыми многообразиями. Обозначим через x_i координаты n-мерного «пространства», а точки m-мерной «поверхности» будем характеризовать m координатами u_k. Поверхность представляется тогда в параметрическом виде

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots, u_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

причём устанавливается, с какой точкой пространства x совпадает каждая точка поверхности u. Если из получающихся отсюда дифференциалов мы составим основную метрическую форму пространства ds^2, то получим положительную квадратическую форму (относительно du_k), являющуюся основной метрической формой («линейным элементом») поверхности. Но у Эвклида пространство a priori берётся гораздо более специального типа, чем всевозможные содержащиеся в нём поверхности, именно, оно считается, если можно так выразиться, «плоским», тогда как понятию риманова многообразия свойственна как раз та степень общности, которая нужна, чтобы уничтожить отмеченное несоответствие.

В основе гауссовой теории поверхностей

$$x = x(u_1, u_2), \quad y = y(u_1, u_2), \quad z = z(u_1, u_2)$$

в трёхмерном эвклидовом пространстве с декартовыми координатами xyz лежат следующие дифференциальные квадратические формы:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,\,k=1}^{2} g_{ik}\, du_i\, du_k, \tag{23}$$

$$-(dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ) = \sum_{i,\,k=1}^{2} G_{ik}\, du_i\, du_k.$$

Здесь X, Y, Z обозначают направляющие косинусы нормали. Если из некоторой фиксированной точки пространства провести прямые, параллельные нормалям во всех точках некоторого бесконечно малого элемента поверхности do, то эти прямые заполнят некоторый телесный угол $d\omega$. В пределе, когда do стягивается в точку, отношение $\frac{d\omega}{do}$ превращается в гауссову кривизну в этой точке. Аналитически кривизна представляется в виде отношения дискриминантов двух основных квадратических форм:

$$K = \frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \tag{23'}$$

Как указывается во всяком учебнике по теории поверхностей (см., например, W. Blaschke «Vorlesungen über Differentialgeometrie», I, 1921, стр. 59 и 96)[1]), гауссова кривизна зависит только от геометрии на поверхности, а не от расположения поверхности в пространстве; точнее: K есть как раз та величина, которую, по Риману, следует назвать кривизной двумерного многообразия с метрикой, определённой линейным элементом (23), и которую можно вычислить по формуле (23′).

Наглядная интерпретация римановой кривизны двумерного многообразия посредством геодезического треугольника получается наилучшим образом как частный случай той интерпретации, которая связывается с бесконечно малым параллельным перемещением векторов. Подвергнем «компас» направлений, выходящих из некоторой точки P двумерного многообразия, параллельному перемещению вдоль замкнутой кривой $\mathfrak{C}$, расположенной на многообразии и проходящей через P; тогда, после полного обхода кривой, компас не вернётся в прежнее положение, а испытает поворот на некоторый угол; этот последний, как явствует непосредственно из ранее упомянутого натурального определения кривизны, будет равен интегралу от кривизны, распространённому на область, ограниченную кривой $\mathfrak{C}$. Если возьмём в качестве $\mathfrak{C}$ геодезический треугольник и примем во внимание, что геодезическая линия может быть характеризована свойством неизменяемости направления, то получим приведённую в тексте принадлежащую Гауссу интерпретацию.

Докажем, наконец, что двумерная геодезическая поверхность, которая образуется из всех геодезических линий, выходящих из точки O и расположенных в некотором плоскостном направлении Δ, имеет в точке O кривизну, равную кривизне пространства в направлении Δ. Проще всего это сделать следующим образом. Пусть x_i — центральные координаты пространства, отнесённые к точке O; можно допустить, что рассматриваемая геодезическая поверхность характеризуется тем, что в её точках обращаются в нуль все координаты, кроме x_1 и x_2. Так как в точке O обращаются в нуль производные величин g_{ik}, а следовательно и величины $\Gamma^i_{\sigma\rho}$, сами же g_{ik} принимают специальные значения δ_{ik}, то, как видно из формулы (22), кривизна пространства $R_{12,12}$ в рассматриваемой точке зависит только от вторых производных коэффициентов g_{11}, g_{12}, g_{22}, остальные же g_{ik} в её выражение не входят.

5. (К части II, абзац 4.) Говорят, что многообразие имеет центр в точке O, если оно с помощью некоторых координат x_i, обращающихся

---

[1]) Стр. 104 русского перевода В. Бляшке, Дифференциальная геометрия (ОНТИ-НКТП, 1935).

в нуль, может быть отображено на некоторое декартово пространство с мероопределением

$$ds_0^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

таким образом, что линейный масштаб отображения, т. е. отношение $\frac{ds}{ds_0}$ длины линейного элемента многообразия к длине соответствующего элемента декартова пространства, будет постоянным 1) для всех радиально-расположенных линейных элементов ds_0 в пространстве отображения, находящихся на одном и том же расстоянии r от начала ($r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$), и 2) для всех тангенциально (т. е. перпендикулярно к радиусам) расположенных элементов ds_0. Аналитически это означает, что ds^2 есть линейная комбинация ортогонально инвариантных дифференциальных форм

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 \text{ и } (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + \ldots + x_n\, dx_n)^2,$$

так что

$$ds^2 = \lambda^2 \sum_i dx_i^2 + l\, \Big(\sum_i x_i\, dx_i\Big)^2; \tag{24}$$

коэффициенты λ и l зависят только от r. Тангенциальный масштаб отображения есть λ, а радиальный h определяется из равенства $h^2 = \lambda^2 + lr^2$. Посредством надлежащего выбора координат можно добиться, чтобы было $\lambda = 1$:

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 + l\, \Big(\sum_i x_i\, dx_i\Big)^2.$$

Величины x_i суть «модифицированные» центральные координаты в точке O: это нужно понимать в том смысле, что каждый луч

$$x_i = \xi^i r$$

(где ξ^i — произвольные константы с суммой квадратов 1, r — переменный параметр) является геодезической линией; но r не есть длина этого луча, а длина луча s связана с r соотношением

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + lr^2 = h^2. \tag{24'}$$

На n-мерной сфере радиуса a в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве с декартовыми координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$, мы имеем:

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = a^2,$$

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2. \tag{25}$$

Если воспользуемся на сфере координатами $x_1, \ldots, x_n$ то, так как на ней

$$x_0\, dx_0 = -(x_1\, dx_1 + \ldots + x_n\, dx_n),$$

$$dx_0^2 = \frac{(x_1\, dx_1 + \ldots + x_n\, dx_n)^2}{a^2 - r^2},$$

для ds^2 получаем формулу вида (24), причём

$$l = \frac{1}{a^2 - r^2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha r^2} \qquad \left(\alpha = \frac{1}{a^2}\right).$$

Отсюда ясно, что многообразия, которых линейные элементы приводятся к виду (24), где l обозначает функцию $\frac{\alpha}{1-\alpha r^2}$, обладают постоянной кривизной, независимой ни от точки, ни от направления плоскостного элемента; это утверждение, конечно, одинаково справедливо как для положительных, так и для отрицательных значений α. Кроме того, вычисление, которое сейчас будет произведено, покажет, что значение кривизны равно как раз α.

Заметим, что Риман пользуется не приведённой выше нормальной формой для ds^2, которая соответствует ортогональной проекции сферы на «экватор» $x_0 = 0$, а той формой, которая возникает при стереографическом проектировании. Мы получим вторую из первой, если введём замену координат

$$x_i = \frac{\overset{*}{x}_i}{1+\frac{\alpha}{4}r^{*2}} \qquad \left(r^{*2} = \sum_i (\overset{*}{x}_i)^2;\quad i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

С целью доказать обратное предложение [1]), введём на произвольном многообразии в точке O «модифицированные» центральные координаты x_i, причём l может быть какой угодно функцией r. Эти координаты получаются из построенных выше центральных координат «в собственном смысле» (см. примечание 3), если переменную s — натуральную длину дуг на выходящих из O геодезических линиях — заменим связанной с нею соотношением (24′) переменной r. Точно таким же образом, как ранее были получены формулы (8), (13), (11) для случая центральных координат «в собственном смысле» (при $l=0$), мы получим теперь:

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\xi^\beta = \frac{h'}{h}\,\xi^i. \tag{26}$$

(Здесь штрих обозначает дифференцирование по r; нужно считать, что $x_i = \xi^i r$, причём ξ^i — произвольные постоянные с суммой квадратов, равной 1):

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x_k}\,\xi^\alpha = \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x_i}\,\xi^\alpha, \tag{27}$$

$$\xi_i, \text{ т. е. } g_{i\alpha}\,\xi^\alpha = h^2\,\xi^i. \tag{28}$$

Возникает вопрос: при каких условиях O есть центр нашего многообразия? Или, точнее: при каких условиях имеют место соотношения

$$g_{ik} = \delta_{ik} + l x_i x_k? \tag{29}$$

Для этого необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\frac{d}{dr}(g_{ik} - l x_i x_k) = 0,$$

или, иначе,

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha}\,\xi^\alpha = \frac{d}{dr}(lr^2)\,\xi^i\xi^k; \tag{30}$$

---

[1]) См. по этому поводу Lipschitz, Journ. f. d. reine und ang. Math., т. 72; F. Schur, Math. Ann., т. 27, стр. 537—567; H. Weyl, Nachr. d. Gesellsch. Göttingen, 1921, стр. 109.

в самом деле, если разность $g_{ik} - l x_i x_r$ не зависит от r, то она должна равняться её значению при $r=0$, т. е. δ_{ik}. Вследствие (27) и (28) следующие равенства эквивалентны условию (30):

$$\Gamma_{i,k\alpha}\xi^\alpha = hh' \cdot \xi^i\xi^k,$$

и точно так же

$$\Gamma^i_{k\alpha}\xi^\alpha = \frac{h'}{h}\xi^i\xi^k.$$

Итак, если положим

$$\varphi^i_k = \Gamma^i_{k\alpha}\xi^\alpha - \frac{h'}{h}\xi^i\xi^k, \tag{31}$$

то обращение в нуль величин φ^i_k есть искомое условие существования равенств (29).

Чтобы поставить проблему в связь с кривизной, продифференцируем ещё раз по r; получается:

$$\frac{d\varphi^i_k}{dr} = \frac{\partial\Gamma^i_{k\alpha}}{\partial x_\beta}\xi^\alpha\xi^\beta - (\lg h)''\xi^i\xi^k. \tag{32}$$

Первый член справа, как видно из формулы (22), входит в состав выражения

$$R^i_{\alpha k\beta}\xi^\alpha\xi^\beta. \tag{33}$$

Чтобы вычислить (33), нужно построить одно за другим выражения

$$\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha k}}{\partial x_\beta}\xi^\alpha\xi^\beta, \qquad \frac{\partial\Gamma^i_{\sigma\beta}}{\partial x_k}\xi^\sigma\xi^\beta$$

и

$$(\Gamma^i_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\alpha k} - \Gamma^i_{\rho k}\Gamma^\rho_{\alpha\beta})\xi^\alpha\xi^\beta. \tag{34}$$

Первое из этих выражений, согласно (32), равно

$$\frac{d\varphi^i_k}{dr} + (\lg h)''\xi^i\xi^k.$$

Чтобы получить второе, продифференцируем равенство (26)

$$\Gamma^i_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = \frac{rh'}{h}x_i$$

по переменной x_k:

$$\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x_k}x_\alpha x_\beta + 2\Gamma^i_{\alpha k}x_\alpha = \frac{x_i x_k}{r}\frac{h'}{h} + x_i x_k(\lg h)'' + \frac{rh'}{h}\delta_{ik}.$$

Выражая затем $\Gamma^i_{\alpha k}\xi^\alpha$ с помощью (31) через φ^i_k, будем иметь:

$$\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x_k}\xi^\alpha\xi^\beta = \xi^i\xi^k(\lg h)'' + \frac{h'}{rh}(\delta_{ik} - \xi^i\xi^k) - \frac{2}{r}\varphi^i_k,$$

$$\left(\frac{\partial\Gamma^i_{\alpha k}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x_k}\right)\xi^\alpha\xi^\beta = \left(\frac{d\varphi^i_k}{dr} + \frac{2}{r}\varphi^i_k\right) + \frac{h'}{rh}(\xi^i\xi^k - \delta_{ik}).$$

Наконец, третье из выражений (34) мы можем подвергнуть следующим преобразованиям:

$$(\Gamma^i_{\rho\beta}\xi^\beta)(\Gamma^\rho_{\alpha k}\xi^\alpha)-\Gamma^i_{k\rho}(\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta)=\Gamma^i_{\rho\beta}\xi^\beta\left(\varphi^\rho_k+\frac{h'}{h}\xi^\rho\xi^k\right)-\Gamma^i_{k\rho}\frac{h'}{h}\xi^\rho=$$

$$=\Gamma^i_{\rho\beta}\xi^\beta\varphi^\rho_k+\frac{h'}{h}\xi^k(\Gamma^i_{\rho\beta}\xi^\rho\xi^\beta)-\frac{h'}{h}\left(\varphi^i_k+\frac{h'}{h}\xi^i\xi^k\right)=\Gamma^i_{\beta\rho}\xi^\beta\varphi^\rho_k-\frac{h'}{h}\varphi^i_k.$$

Окончательно получим результат:

$$-R^i_{\alpha k\beta}\xi^\alpha\xi^\beta=\frac{h}{r^2}\left[\frac{d\psi^i_k}{dr}+\Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\psi^\beta_k\right]+\frac{h'}{rh}(\xi^i\xi^k-\delta_{ik}), \tag{35}$$

где введено обозначение

$$\frac{r^2\varphi^i_k}{h}=\psi^i_k.$$

С другой стороны,

$$(\delta_{ik}g_{\alpha\beta}-\delta_{i\beta}g_{\alpha k})\xi^\alpha\xi^\beta=\delta_{ik}h^2-\xi^i\xi_k=h^2(\delta_{ik}-\xi^i\xi^k). \tag{36}$$

Если O есть центр (т. е. $\psi^i_k=0$), то отсюда следует: кривизна многообразия в произвольной точке P и в произвольном плоскостном направлении, содержащем геодезический луч OP, зависит только от r, и именно равна

$$\frac{h'}{rh}:h^2=-\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h^2}\right). \tag{37}$$

[В частности, кривизна в точке O не зависит от плоскостного направления и равна $l(0)$.]

Указанное условие является также достаточным для того, чтобы O было центром; в самом деле, вследствие (35) и (36) оно эквивалентно равенству

$$\frac{d\psi^i_k}{dr}+\Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\psi^\beta_k=0, \tag{38}$$

а из этого равенства следует $\psi^i_k=0$. Действительно: если C, Γ — постоянные, удовлетворяющие, например, при $0\leqslant r\leqslant 1$ неравенствам

$$|\Gamma^i_{\alpha\beta}|\leqslant\frac{\Gamma}{n^2},\quad |\psi^i_k|\leqslant C, \tag{39}$$

то можно заключить, что при любом неотрицательном m

$$|\psi^i_k|\leqslant C\frac{(\Gamma r)^m}{m!}. \tag{40}$$

Доказательство основывается на полной индукции. Вследствие (39) утверждение (40) оправдывается при $m=0$; переход от m к $m+1$ совершается посредством оценки:

$$|\psi^i_k|=\left|\int_0^r\Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\psi^\beta_k\,dr\right|\leqslant\frac{C\Gamma^{m+1}}{m!}\int_0^r r^m\,dr=C\frac{(\Gamma r)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Увеличивая в неравенстве (40) m безгранично, получаем: $\psi^i_k = 0$.

Применим полученный результат к частному случаю многообразия постоянной кривизны α. Положим:

$$l = \frac{\alpha}{1 - \alpha r^2}, \quad h^2 = 1 + lr^2 = \frac{1}{1 - \alpha r^2};$$

тогда выражение (37) принимает постоянное значение α. Введём, далее, в некоторой произвольной точке O многообразия связанные с выбранной функцией l «модифицированные» центральные координаты; в таком случае будут выполнены соотношения (38); из них следует $\psi^i_k = 0$ и, наконец,

$$g_{ik} - lx_i x_k = \delta_{ik}.$$

Наша цель достигнута: мы доказали, что линейный элемент многообразия постоянной кривизны α в избранных координатах непременно имеет вид

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 + \frac{\alpha}{1 - \alpha r^2} (\sum_i x_i \, dx_i)^2.$$

Так как при этом в качестве центра O может быть взята какая угодно точка многообразия, и нормальная форма линейного элемента к тому же не изменяется при линейной ортогональной трансформации координат x_i, то оказывается, что многообразие постоянной кривизны обладает той подвижностью в себе самом, о которой утверждает Риман. Оно является, кроме того, однородным в том смысле, что не только все точки его, так сказать, равноправны, но и все плоские направления, инцидентные данной точке, также равноправны. Обратно, многообразие, обладающее этими свойствами однородности, очевидно, должно иметь постоянную кривизну. Оставляя в стороне слишком известный эвклидов случай $\alpha = 0$, допустим, что $\alpha = \pm 1$. Введём в первом случае ($\alpha = +1$) отношения уже ранее [см. формулу (25)] использованных координат

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_n$$

в качестве однородных координат многообразия; тогда, не прибегая к нормированию, как в формуле (25), можно будет записать линейный элемент в виде

$$ds^2 = \frac{\Omega(x, x)\,\Omega(dx, dx) - \Omega^2(x, dx)}{\Omega^2(x, x)}, \tag{41}$$

где $\Omega(x, y)$ обозначает симметрическую билинейную форму $x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ и, значит, соответствующая квадратическая форма будет $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$, положительная, с индексом инерции 0. Действительно, ds^2 зависит только от отношений координат x в двух бесконечно близких точках. Мы видим теперь, что движения многообразия в самом себе определяются очень просто, именно, как те линейные трансформации однородных координат, которые оставляют инвариантным квадратическое равенство $\Omega(x, x) = 0$. То же самое можно сказать и о многообразиях кривизны -1, но только в формуле (41) нужно будет ds^2 заменить через $-ds^2$ и под $\Omega(x, x)$ понимать квадратическую форму $x_0^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)$, с индексом инерции n. Придётся при этом ограничиваться лишь теми значениями координат, для которых $\Omega > 0$. Возможно также понимать под Ω любую невырождающуюся квадратическую форму с индексом инерции 0 или n, так как таковая линейной трансформацией преобразуется в нормальную форму одного из двух основных типов: возможны лишь значения индекса 0 или n, ибо форма ds^2 должна быть дефинитной. Геодезические линии (прямые) представляются линейными зависимостями между нашими однородными координатами. Мы встречаемся, таким образом, с n-мерным пространством проективной геометрии, в котором установлено мероопределение посредством «конического сечения» $\Omega(x, x) = 0$ (метрика Кэли). По этому поводу см. Cayley «Sixth Memoire upon Quantics», Phil. Trans., т. 149 (1859); F. Klein «Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie», Math. Ann., т. 4 (1871), также другие мемуары Клейна в Math. Ann., т. 6 и т. 37. Случаи $\alpha = +1$ и $\alpha = -1$ различаются у Клейна под наименованием «эллиптической» и «гиперболической» геометрий, тогда как эвклидова геометрия оказывается промежуточным типом, или типом вырождения. Гиперболическая геометрия идентична «неэвклидовой геометрии», систематически построенной Лобачевским и Болиаи (около 1830 г.).

Что касается эллиптической геометрии, то — в достаточно малой области — она, как мы видели, не отличается от сферической геометрии, осуществляющейся на n-мерной сфере в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве. В целом же «эллиптическое пространство» обладает иными топологическими свойствами, чем сфера; оно получается из сферы, если идентифицировать пары диаметрально противолежащих точек, или, другими словами, если в качестве элементов вместо точек на сфере ввести прямые, проходящие через центр сферы. О топологических свойствах пространств с различными метриками см., в частности, Klein, Math. Ann., т. 37 (1890), стр. 544; Killing, Math. Ann., т. 39 (1891), стр. 257, и «Einführung in die Grundlagn der Geometrie», 1893; также Koebe, Ann. di Matem., (3), 21, стр. 57 и Weyl, Math. Ann., т. 77, стр. 349.

6. (К части III, абзац 3.) Полное понимание заключительных замечаний Римана о внутреннем существе метрики пространства стало возможным лишь после создания Эйнштейном общей теории относительности. Оставляя в стороне первую из упоминаемых возможностей («то реальное, что создаёт идею пространства, образует дискретное многообразие»), — хотя, быть может, именно в этом направлении следует искать решения проблемы пространства, — Риман отказывается принять концепцию, до него разделявшуюся всеми математиками и физиками — будто бы метрика пространства независима от протекающих в нём физических процессов и будто реальное вступает в это метрическое пространство, как наниматель в готовую квартиру; больше того, он утверждает, что пространство само по себе есть аморфное трёхмерное множество (в том смысле, как это разъясняет часть I его работы), и только наполняющее его материальное содержание организует его путём установления метрики. Таким образом, возникает нечто вроде «метрического поля», принципиально неотличного от электромагнитного поля. — Так как пространство, понимаемое как форма представлений, однородно, то раньше казалось необходимым сделать вывод (и это, в самом деле, неизбежно, если стоять на старой точке зрения), что пространство есть риманово многообразие весьма специального типа, именно, многообразие постоянной кривизны. Действительно, в работах Гельмгольца и Ли (см. примечание 2) было установлено, что лишь в таком пространстве тело без изменения внутренних метрических отношений может перемещаться свободно, как это вытекает из «равноправия» всех точек и направлений. Но указанный вывод перестаёт быть обязательным, если допустить, что метрика стоит в зависимости от распределения материи в пространстве. Представляя, что тело

при движении «уносит» с собою возбуждаемое им метрическое поле, мы восстанавливаем возможность перемещения тела без нарушения внутренней метрики в произвольном римановом многообразии. Точно таким же образом некоторая масса, под влиянием ею самою созданного силового поля, принявшая определённое положение равновесия, должна была бы деформироваться, если бы возможно было произвести перемещение массы, сохраняя неизменным силовое поле; в действительности же масса при перемещении сохраняет прежнее положение равновесия, так как «уносит» с собой возбуждаемое ею силовое поле.

В физическом мире к трём пространственным координатам прибавляется четвёртая — временная, и так называемая специальная теория относительности Эйнштейна-Минковского приводила к представлению, будто четырёхмерное пространственно-временное многообразие является эвклидовым, — впрочем, эвклидовым с той поправкой, что квадратическая форма ds^2, лежащая в основе его метрики, не является положительно дефинитной, а имеет индекс инерции 1. В общей же теории относительности совершился переход от Эвклида к Риману: мир, согласно этой теории, есть четырёхмерный континуум, в котором установлено метрическое поле, зависящее от расположения и движения материальных масс и представимое квадратической формой ds^2 с индексом инерции 1. Это метрическое поле, в частности, порождает явления тяготения. В качестве литературного источника автор комментария может указать свою книгу «Raum, Zeit, Materie» (5-е издание, Берлин, 1923).

XV. ФРАГМЕНТЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ANALYSIS SITUS

(*Werke*, *XXIX*)

Наброски Римана по analysis situs (топологии) воспроизведены в Riemann's Werke, очевидно, текстуально, с оговоркой Вебера о том, что несколько строчек, содержащих формулы, остались нерасшифрованными.

В оглавлении (составленном Риманом) к его диссертационной лекции «Ueber die Hypothesen и т. д.» имеется примечание, свидетельствующее о том, что в то время, т. е. около 1854 г., им была задумана работа по топологии n-мерных многообразий: нужно думать, что в «фрагментах» содержится часть относящегося сюда материала. Повидимому, в дальнейшем Риман отказался от своего намерения. Его идеи были, уже после его смерти, изложены и опубликованы в связной форме E. Betti («Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni» Ann. di Matem., сер. 2, т. 4, 1871 г.).

Хотя Бетти в своей работе ссылается лишь на «Теорию абелевых функций» (где Риманом рассмотрены только двумерные многообразия, т. е. поверхности), но сравнение его работы с «фрагментами» Римана показывает, что едва ли эта работа могла возникнуть независимо от Римана. Такое мнение высказывают, например, Dehn и Heegard (Enz. d. Math. Wiss., III AB 3, стр. 182). Личное знакомство Римана и Бетти состоялось осенью 1858 г. в Гёттингене и затем укрепилось в эпоху пребывания Римана в Италии и стало, по свидетельству Дедекинда, искренней дружбой.

[1] к стр. 294.

«Одномерник» — Einstreck, «двумерник» — Zweistreck, и т. д.

[2] к стр. 294.

«Многообразие имеет связность порядка $m+1$ в n-ой размерности» = die Mannigfaltigkeit hat einen $(m+1)$-fachen Zusammenhang n-ter Dimension.

XVI. О ПОВЕРХНОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИ ЗАДАННОЙ ГРАНИЦЕ НАИМЕНЬШУЮ ПЛОЩАДЬ

(*Werke, XVII*)

В Riemann's Werke к работе «Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung» присоединено следующее примечание Гаттендорфа:

«В основе настоящего сочинения лежит рукопись Римана, возникновение которой, по словам автора, относится к 1860—1861 гг. Эта рукопись, содержащая лишь формулы, да и то в сжатом виде, и вовсе не содержащая текста, была передана мне Риманом в апреле 1866 г. для обработки. Из неё и получился мемуар, который был представлен мною 6 января 1867 г. в Гёттингенское научное общество и который опубликован в 13-м томе «Abhandlungen». В тщательной переработке этот мемуар печатается здесь вторично. K. Hattendorff».

Таким образом, весь текст этой работы принадлежит Гаттендорфу; написанное им и воспроизведённое в Gött. Abhandlungen историческое введение не вошло в дальнейшем в Riemann's Werke.

Исследования Римана по минимальным поверхностям и проблеме Плато разобраны подробно G. Darboux в его «Leçons sur la théorie des surfaces», т. I, гл. 4: см. также M. Niewenglowski (Ann. Ec. Norm., серия 2, т. 9, 1880 г.). Следующие примечания 1, 3 и 5 принадлежат Веберу (см. Riemann's Werke), который ссылается на указания H. A. Schwarz'a.

[1] к стр. 303.

Следует обратить внимание на то, что согласно (3) и (4) выражения

$$2\frac{dy}{d\eta}=\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)\frac{dX}{d\eta},\qquad 2i\frac{dz}{d\eta}=\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)\frac{dX}{d\eta}$$

являются функциями одного η, так что Y и Z также могут быть рассматриваемы как функции одного η. Тогда Y' и Z'—сопряжённые функции η'.

[2] к стр. 304.

У Римана-Гаттендорфа ошибочно стоит в этом месте «удвоенной сумме» вместо «половине суммы». См. H. A. Schwarz, Werke, т. I, стр. 177, 178.

[3] к стр. 306.

При бесконечно малых значениях η (следовательно, и r) получается из соотношений (1) и (2)

$$\frac{dx}{dy}=-\sin r\cos\varphi,\qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dy}=-\sin r\sin\varphi,$$

$$\frac{dx}{dz}=-\sin r\sin\varphi,\qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dz}=\sin r\cos\varphi,$$

и потому

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{d\mathfrak{x}}{dz},\quad \frac{dx}{dz}=\frac{d\mathfrak{x}}{dy},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}+\frac{d^2x}{dz^2}=0.$$

Отсюда следует, что $2X=x+i\mathfrak{x}$ есть функция переменной $y-iz$; и значит, $2Y$ — также функция переменной $y-iz$. Но так как y есть действительная часть $2Y$, то для бесконечно малых значений η получается (с добавлением к Y надлежаще подобранной чисто-мнимой константы):

$$2Y=y-iz.$$

Если добавим к X чисто-мнимую константу таким образом, чтобы X обращалось в нуль вместе с η, то будем иметь соотношения, которые используются в дальнейшем.

[4] к стр. 306.

Здесь и дальше «functio continua» — в эйлеровском смысле. Имеется в виду «регулярная аналитическая функция».

[5] к стр. 308.

Если угол α равен нулю, так что две граничные прямые параллельны, то эти формулы должны быть заменены следующими:

$$Y=-\frac{iA}{r\pi}\lg\eta+\text{f. c.},$$

$$\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2=-\frac{A}{\pi\eta}+\text{f. c.},$$

$$X=-\frac{iA}{\pi}\eta+\text{f. c.}$$

[6] к стр. 315.

Как указывает Вебер, заключения § 14 становятся понятными в свете результатов заметки Римана «Равновесие электричества на круговых цилиндрах и т. д.» (стр. 414 настоящего издания). В самом деле, здесь при определении η как функции t приходится осуществлять конформное отображение области, ограниченной кругами, в плоскости η на многолистную положительную полуплоскость t. См. Riemann's Werke, 1892, стр. 335—337.

XVII. ПРИМЕРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ НАИМЕНЬШЕЙ ПЛОЩАДИ ПРИ ЗАДАННОЙ ГРАНИЦЕ

(*Werke, XXVII*)

Первый из приводимых здесь результатов получен самим Риманом полностью. Что касается второго, то у Римана имеется лишь указание на возможность решения задачи: обработка принадлежит Веберу. См. также H. A. Schwarz «Bestimmung einer speziellen Minimalfläche» (Berlin, 1871 ≡ Werke, т. 1).

XVIII. О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОГО ОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПСОИДА

(*Werke*, X)

Мемуар «Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides» опубликован в 9-м томе Abbandlungen der Kön. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen в 1861 году. Таким образом, он принадлежит к наиболее блестящему периоду учёной деятельности Римана, ознаменованному широким признанием его заслуг.

Ради ознакомления с проблемой, изучаемой Риманом, читатель может обратиться к книге **Basset'a** «Hydrodynamics», гл. 15.

[1] к стр. 339.

Работа **Дирихле** «Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik» (Gött. Abh., 1860, ≡ Journ. f. d. reine u. ang. Math., т. 58, ≡ Werke, т. 2, 1861 г.) после смерти автора отредактирована и издана со значительными дополнениями Р. Дедекиндом.

[2] к стр. 341.

Дирихле исходит из общих уравнений движения однородной (плотности 1) жидкости в форме Лагранжа

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial a}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial b}+\frac{\partial p}{\partial b}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial c}+\frac{\partial p}{\partial c}=0$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}=1,$$

где x, y, z — координаты движущейся частицы в момент времени t, a, b, c — её координаты в начальный момент, X, Y, Z — компоненты воздействующей на неё силы, p — давление. Предполагая, что имеется потенциальная функция V:

$$X=\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y=\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z=\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}$$

(ε — постоянная тяготения), Дирихле придаёт первым трём уравнениям движения следующий вид:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a}-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial a}=0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b}-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial b}+\frac{\partial p}{\partial b}=0, \qquad (*)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c}-\varepsilon\frac{\partial V}{\partial c}+\frac{\partial p}{\partial c}=0.$$

Это и есть те уравнения, на которые ссылается Риман.

[3] к стр. 345.

Дирихле ограничивается разысканием таких функций x, y, z, которые удовлетворяют уравнениям (*), являясь вместе с тем линейными и однородными функциями начальных значений координат a, b, c:

$$
\begin{aligned}
x &= la + mb + nc\\
y &= l'a + m'b + n'c\\
z &= l''a + m''b + n''c.
\end{aligned}
$$

Здесь l, m, ..., n'' — функции времени t, связанные соотношением

$$
\begin{vmatrix} l & m & n\\ l' & m' & n'\\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} = 1. \qquad (**)
$$

Допуская, что движущаяся масса жидкости имеет эллипсоидальную форму, и обозначая полуоси эллипсоида через A, B, C, Дирихле полагает, далее:

$$
\begin{aligned}
V &= H - La^2 - Mb^2 - Nc^2 - 2L'bc - 2M'ca - 2N'ab\\
p &= P + \sigma\left(1 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - \frac{c^2}{C^2}\right),
\end{aligned}
$$

где P — константа (давление на поверхности), а σ — некоторая функция времени. В результате подстановки значений x, y, z, V и p в уравнения (*) должны возникать тождества относительно a, b, c: отсюда получается система из девяти дифференциальных уравнений второго порядка, которая у Дирихле обозначена через (a):

$$
\begin{aligned}
l\frac{d^2l}{dt^2} + l'\frac{d^2l'}{dt^2} + l''\frac{d^2l''}{dt^2} &= -2L\varepsilon + \frac{2\sigma}{A^2}\\
m\frac{d^2m}{dt^2} + m'\frac{d^2m'}{dt^2} + m''\frac{d^2m''}{dt^2} &= -2M\varepsilon + \frac{2\sigma}{B^2}\\
n\frac{d^2n}{dt^2} + n'\frac{d^2n'}{dt^2} + n''\frac{d^2n''}{dt^2} &= -2N\varepsilon + \frac{2\sigma}{C^2}\\
m\frac{d^2n}{dt^2} + m'\frac{d^2n'}{dt^2} + m''\frac{d^2n''}{dt^2} &= -2L'\varepsilon\\
n\frac{d^2m}{dt^2} + n'\frac{d^2m'}{dt^2} + n''\frac{d^2m''}{dt^2} &= -2L'\varepsilon\\
n\frac{d^2l}{dt^2} + n'\frac{d^2l'}{dt^2} + n''\frac{d^2l''}{dt^2} &= -2M'\varepsilon\\
l\frac{d^2n}{dt^2} + l'\frac{d^2n'}{dt^2} + l''\frac{d^2n''}{dt^2} &= -2M'\varepsilon\\
l\frac{d^2m}{dt^2} + l'\frac{d^2m'}{dt^2} + l''\frac{d^2m''}{dt^2} &= -2N'\varepsilon\\
m\frac{d^2l}{dt^2} + m'\frac{d^2l'}{dt^2} + m''\frac{d^2l''}{dt^2} &= -2N'\varepsilon.
\end{aligned}
\qquad (a)
$$

Так как сюда ещё нужно добавить конечное уравнение (**), то всего имеется десять уравнений с десятью неизвестными l, m, ..., n'', σ, причём порядок системы нужно считать равным $18-2=16$.

Дирихле указывает семь интегралов этой системы, а именно: 1) попарное вычитание шести последних уравнений даёт три интеграла

$$\left(m\frac{dn}{dt}-n\frac{dm}{dt}\right)+\left(m'\frac{dn'}{dt}-n'\frac{dm'}{dt}\right)+\left(m''\frac{dn''}{dt}-n''\frac{dm''}{dt}\right)=\mathfrak{A}$$

$$\left(n\frac{dl}{dt}-l\frac{dn}{dt}\right)+\left(n'\frac{dl'}{dt}-l'\frac{dn'}{dt}\right)+\left(n''\frac{dl''}{dt}-l''\frac{dn''}{dt}\right)=\mathfrak{B}$$

$$\left(l\frac{dm}{dt}-m\frac{dl}{dt}\right)+\left(l'\frac{dm'}{dt}-m'\frac{dl'}{dt}\right)+\left(l''\frac{dm''}{dt}-m''\frac{dl''}{dt}\right)=\mathfrak{C},$$

2) из принципа площадей вытекают ещё три интеграла

$$A^2\left(l'\frac{dl''}{dt}-l''\frac{dl'}{dt}\right)+B^2\left(m'\frac{dm''}{dt}-m''\frac{dm'}{dt}\right)+C^2\left(n'\frac{dn''}{dt}-n''\frac{dn'}{ds}\right)=\mathfrak{K}$$

$$A^2\left(l''\frac{dl}{dt}-l\frac{dl''}{dt}\right)+B^2\left(m''\frac{dm}{dt}-m\frac{dm''}{dt}\right)+C^2\left(n''\frac{dn}{dt}-n\frac{dn''}{dt}\right)=\mathfrak{L}$$

$$A^2\left(l\frac{dl'}{dt}-l'\frac{dl}{dt}\right)+B^2\left(m\frac{dm'}{dt}-m'\frac{dm}{dt}\right)+C^2\left(n\frac{dn'}{dt}-n'\frac{dn}{dt}\right)=\mathfrak{M},$$

3) наконец, имеется интеграл живых сил

$$A^2\left(\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl''}{dt}\right)^2\right)+B^2\left(\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm''}{dt}\right)^2\right)+$$
$$+C^2\left(\left(\frac{dn}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2\right)=\text{const.}+\int Vd\tau,$$

где интеграл справа распространяется на весь объём эллипсоида.

XIX. О ПОТЕНЦИАЛЕ ТОРА

(*Werke, XXIV*)

Ни в первом, ни во втором издании Riemann's Werke нет указаний, касающихся назначения и времени возникновения этой заметки; позволительно, однако, высказать предположение, что потенциал тора мог понадобиться Риману при исследовании движения тора в жидкости. Аналогичная задача в случае сферы была рассмотрена Дирихле в 1852 г. и затем обобщена Клебшем на случай эллипсоида. Риман имел в виду исследовать случай тора в лекциях 1860—1861 г. (См. примечание Hattendorff'a на стр. 315 «Partielle Differentialgleichungen der Physik», 1869 г.).

[1] к стр. 368.

Другими словами, ряд типа Дирихле

$$\sum A_n e^{z\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}$$

имеет областью сходимости некоторое полупространство $z < z_0$.

[2] к стр. 368.

Под «произвольной» функцией Риман понимает функцию, которая не обязана быть аналитической. Внутри области сходимости рассматриваемого ряда функция удовлетворяет уравнению Лапласа, и потому «произвольной» может быть только на границе.

[3] к стр. 368.

Всё это предисловие содержит индуктивные соображения, намечающие постановку «проблемы Дирихле» (и других, ей близких), а также её решение посредством «метода Фурье» — для случая произвольной пространственной области.

[4] к стр. 369.

Чтобы удовлетворить поставленному требованию, достаточно связать две переменные дробной линейной зависимостью: один из коэффициентов Риман фиксирует заранее, и тогда подбор двух других становится задачей, решаемой однозначно.

[5] к стр. 372.

Эта единица в Riemann's Werke отсутствует.

[6] к стр. 372.

См. Gauss Werke, т. III, стр. 131 (примечание Вебера).

XX. ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ ПИСЬМА, НАПИСАННОГО НА ИТАЛЬЯНСКОМ ЯЗЫКЕ 21 ЯНВАРЯ 1864 Г. ПРОФЕССОРУ ЭНРИКО БЕТТИ

(*Werke, XVI*)

Приводимый здесь отрывок напечатан в Annali di Matematica, сер. 1, т. 7 (1866 г.), непосредственно после смерти Римана, очевидно, взамен некролога, со следующим кратким примечанием:

«Наука скорбно оплакивает кончину выдающегося немецкого математика, совершившуюся 20 июля текущего 1866-го года в Италии».

XXI. О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

(*Werke, XVI*)

Мемуар Римана «Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite» был напечатан в 1860 г. в 8-м томе Гёттингенских Abhandlungen. В Göttinger Nachrichten (1859 г., № 19) имеется следующий автореферат:

«Настоящая работа не ставит себе целью способствовать экспериментальным исследованиям; автор просит рассматривать её только как вклад в теорию нелинейных уравнений в частных производных. В теории линейных уравнений в частных производных наиболее плодотворные методы были выработаны не в процессе рассмотрения отвлечённо поставленной задачи, а скорее при изучении специальных физических проблем; точно так же и теория уравнений нелинейных может, как я полагаю, достигнуть наибольших успехов, если внимание наше со всею тщательностью, с учётом всех побочных условий, направится к специальным проблемам физического содержания. И в самом деле, решение совершенно специальной задачи, являющейся предметом настоящего сочинения, требует новых методов и понятий и приводит к результатам, которые, вероятно, будут играть известную роль и в задачах более общих.

Окончательное решение рассматриваемой нами задачи должно было бы внести полную ясность в вопросы, которые послужили предметом обсуждения со стороны английских математиков Чэллиса, Эйри и Стокса (см. Phil. Mag., тт. 33, 34, 35, в частности т. 33, стр. 349), а также вызвали спор в Венском научном обществе между Petzval'ем, Doppler'ом и Ettinghausen'ом, подошедшими к вопросу с несколько иной точки зрения (Sitzungsberichte Ges. d. Wiss., 1852).

Единственный эмпирический закон, который, помимо общих законов движения, пришлось постулировать в настоящем исследовании, это — закон, связывающий давление и плотность газа при условии, что газ не принимает и не отдаёт тепла. Уже Пуассон сделал допущение, что давление пропорционально k-ой степени плотности ρ, где k — отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме; благодаря экспериментам Реньо над теплоёмкостью газов и с помощью одного принципа механической теории тепла это допущение в настоящее время может быть хорошо обосновано. Мне казалось полезным предпослать во введении это обоснование закона Пуассона, поскольку оно ещё, повидимому, мало известно. При этом значение k оказывается равным 1,4101, тогда как согласно опытам Martins и Bravais (Ann. de chim. et de phys., серия 3, т. XIII) скорость звука при 0° C и при сухом воздухе равна $\frac{332{,}37^m}{1''}$, откуда для k следует значение 1,4095.

Хотя сравнение полученных нами результатов с экспериментальными представляет большие трудности и в настоящее время едва ли может быть осуществлено, тем не менее я позволю себе сообщить здесь, насколько возможно кратко, эти результаты.

В нашей работе рассматриваются лишь такие движения воздуха или газа, которые как вначале, так и в дальнейшем являются одинаково направленными, так что скорости и плотности остаются постоянными во всякой плоскости, перпендикулярной к направлению движения. В том случае, если в начальный момент нарушение равновесия ограничивается некоторым конечным отрезком, и при обычном допущении, что изменения давления бесконечно малы по сравнению с самим давлением, как известно, получается тот результат, что из места, где нарушено равновесие, распространяются в противоположных направлениях две волны, причём в каждой из них скорость есть определённая функция давления и именно равна (при сделанном предположении — постоянному) числу $\sqrt{\varphi'(\rho)}$, где $\varphi(\rho)$ обозначает давление при плотности ρ, а $\varphi'(\rho)$ — производную функцию $\varphi(\rho)$. Оказывается, что нечто подобное происходит и в рассматриваемом нами случае, когда изменения давления не являются бесконечно малыми. Точно так же, по прошествии конечного промежутка времени, место, где нарушено равновесие, расплывается двумя волнами по взаимно противоположным направлениям. При этом скорость, измеряемая по направлению распространения волны, есть определённая функция от плотности, именно $\int \sqrt{\varphi'(\rho)}\, d \lg \rho$ (постоянная интегрирования в двух волнах может быть различная); в каждой волне, таким образом, данной плотности всегда соответствует одна и та же скорость и, кроме того, с увеличением плотности увеличивается (алгебраически) и скорость. Оба значения распространяются с постоянной скоростью. Скорость распространения относительно газа равна $\sqrt{\varphi'(\rho)}$, а относительно неподвижного пространства она больше на скорость газа, измеряемую в направлении распространения. При соответствующем реальной действительности предположении, что $\varphi'(\rho)$ с возрастанием ρ не убывает — отсюда следует, что при большей плотности и скорость больше, так что волны разрежения (т. е. те части волны, в которых плотность растёт в направлении распространения(увеличиваются пропорционально времени по своей протяжённости, тогда как волны сгущения аналогичным образом уменьшаются — и наконец должны перейти в «ударные» волны (разрывы). Мы не приводим здесь, вследствие их громоздкости, формул, посредством которых выражаются законы, относящиеся к разделению двух волн и их дальнейшему распространению; не касаемся также и случая, когда равновесие нарушается сразу во всём пространстве.

Для акустики это исследование даёт тот результат, что, если только изменения давления не могут быть пренебрегаемы, то при распространении звуковой волны должна изменяться форма волны, а следовательно, и характер звука. Несмотря на большие успехи, достигнутые в анализе звука в последнее время, в частности, Гельмгольцем, опытная проверка этого результата представляется очень затруднительной; действительно, при малых расстояниях изменение звука не может быть сколько-нибудь заметным, а при больших — слишком трудно устранить разнообразные причины, которые видоизменяют характер звука. О применении к метеорологии также не приходится думать, так как изучаемые нами движения частиц воздуха распространяются со скоростью звука, тогда как атмосферные потоки, по всей видимости, обладают гораздо меньшей скоростью».

[1] к стр. 379.

Два уравнения, выведенные Риманом, получаются из общих эйлеровых уравнений гидродинамики

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ &\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ &\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w),$$

если в них положить $v=w=0$, $p=\varphi(\rho)$ и считать u и ρ не зависящими от y и z. Действительно, при этих допущениях мы имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\varphi'(\rho)}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}, \\ -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}=u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

что равносильно уравнениям Римана.

Случай, когда «изменения давления бесконечно малы по сравнению с самим давлением», включается сюда следующим образом. Пусть ρ_0 и $p_0=\varphi(\rho_0)$ — значения плотности и давления, которые могут изменяться лишь весьма незначительно; тогда приближённо $\varphi(\rho)$ можно заменить линейной функцией:

$$\varphi(\rho)=p_0+\varphi'(\rho_0)(\rho-\rho_0).$$

Если, кроме того, будем считать бесконечно малыми величину u и частные производные от u и ρ, то, отбрасывая члены высших порядков, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\varphi'(\rho_0)}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}, \\ -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}=\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

откуда следует, что u и $\lg\rho$ удовлетворяют обыкновенному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad \left(a=\sqrt{\varphi'(\rho_0)}\right).$$

[2] к стр. 384.

«Волны сгущения» = Verdichtungswellen, «волны разрежения» = Verdünnungswellen, «ударная волна» (разрыв) = Verdichungsstoss (Stosswelle = onde de choc = bore).

[3] к стр. 386.

Это — так называемое «условие совместности» (Hugoniot).

[4] к стр. 389.

В § 8 применительно к частному примеру уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s}-m\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}\right)=0$$

изложен «метод интегрирования Римана», получивший в дальнейшем широкое развитие (см., например, Goursat, «Cours d'analyse», т. 3, гл. 26, или Darboux, «Théorie des surfaces», т. 2).

[5] к стр. 392.

По поводу следующего пассажа в немецком издании «Riemanns Werke» имеется обширное разъяснительное примечание Вебера, которое здесь не воспроизводится.

XXII. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ЭЛЛИПСОИДЕ

(*Werke, XXV*)

К этой заметке, впервые воспроизведённой в «Riemann's Werke», Вебер присоединяет следующее замечание:

«В основе настоящего исследования лежит листок из Риманова наследия, помеченный весной 1856 г. Дифференциальное уравнение (11), к которому сводится проблема, превращается в так называемое уравнение Ламэ, если в нём положим $g = 0$. Мы имеем здесь пример уравнения, для которого особенная точка $\lambda = \infty$ не является правильной в том смысле, в каком этот термин понимается в последнее время».

Допущение $g = 0$ соответствует статическому случаю, когда температура u предполагается не зависящей от времени t, и абзац (8) заменяется более простым $u = u_\lambda u_\mu u_z$. Работы Ламэ, в которых уравнение Лапласа преобразовывается к эллиптическим координатам, были напечатаны в «Journal de Mathématiques», т. 2 (1837) и т. 4 (1839). Его же «Leçons sur les coordonnées curvilignes» вышли в свет в 1858 г. Читатель найдёт дальнейшие подробности, относящиеся к уравнению Ламэ, в «Курсе современного анализа» Уиттекера и Ватсона (ГТТИ, 1934), т. 1, гл. 10 и т. 2, гл. 23. См. также Курант-Гильберт, «Методы математической физики», т. 1, гл. V, §§ 9, 3.

Понятие «правильной» особенной точки линейного дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами было введено Л. Фуксом (Journ. f. Math., т. 66, 1866 г.).

Интересно отметить, что распространение тепла в эллипсоиде было предложено в качестве темы премиальной работы Парижской академией в 1852, 1855 и 1857 гг. (см. ниже).

XXIII. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОЧИНЕНИЕ, В КОТОРОМ СОДЕРЖИТСЯ ПОПЫТКА ДАТЬ ОТВЕТ НА ВОПРОС, ПРЕДЛОЖЕННЫЙ ЗНАМЕНИТЕЙШЕЙ ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМИЕЙ и т. д.

(*Werke, XXII*)

Текст объяснения Академии был таков (см. Comptes Rendus Ac. Sc., Paris, 1858 г., т. 46, стр. 303):

«Большая премия по математике (Grand prix de Mathématiques), назначенная в 1855 г., отложенная до 1857 г. и продолженная до 1861 г. (Комиссия в составе Лиувилля, Ламэ, Шаля, Пуэнсо, докладчик Бертран).

В качестве темы на большую премию по математике 1857 г. Академия предложила следующий вопрос, который был уже предлагаем дважды, причём премия не была присуждена:

«Найти интеграл известного уравнения движения тепла в случае однородного эллипсоида с постоянной излучаемостью на поверхности, если известно, что, будучи предварительно нагрет произвольным способом, эллипсоид в дальнейшем подвергается охлаждению в среде данной температуры».

На этот раз также премия не может быть присуждена, так как на конкурс не поступило ни одного мемуара. Комиссия полагает, что предложенный вопрос должен быть снят и заменён следующим:

«Определить, каково должно быть тепловое состояние произвольного твёрдого тела, чтобы система изотермических кривых, заданная в определённый момент времени, оставалась системой изотермических кривых в любой момент времени, т. е. чтобы температура точки выражалась в виде функции времени и ещё двух других вспомогательных переменных».

Премия будет заключаться в золотой медали стоимостью в три тысячи франков.

Мемуары надлежит направлять, без оплаты марками, в секретариат Академии, не позднее 1 июля 1861 г.: этот срок обязателен. Фамилии авторов должны содержаться в запечатанных конвертах, которые будут вскрыты лишь в случае премирования».

Кроме этой, Парижская академия объявила в 1858 г. ещё пять таких же «больших премий» из различных областей математики.

Трудно сомневаться в том, что предложенная Академией тема была для Римана особенно привлекательна тем, что он в данном случае видел возможность конкретного применения развитой им метрики многомерных многообразий, хотя и счёл нужным вместе с тем отметить в эпиграфе, что «исходя из этих принципов, путь простирается к большему».

Риман, вероятно, не успел (как он сам указывает — см. стр. 413 настоящего издания) провести все вычисления, необходимые для исчерпывающего разрешения поставленной задачи, и в июне 1861 г. отправил свой мемуар на конкурс в не совсем законченном виде. Указывая на чрезвычайную сжатость изложения этой работы и на то, что в её значительной части результаты сообщаются без проведения доказательств, Г. Вебер[1]) в этих обстоятельствах видит причину отклонения мемуара Римана Парижской академией; вместе с тем он констатирует, что продолжить работу в дальнейшем Риману помешало состояние его здоровья.

Рукопись Римана была позднее прислана Академией обратно по просьбе редакторов Собрания сочинений Римана. В этом собрании Вебер присоединяет к интересующему нас мемуару обширный комментарий, в котором 1) восстанавливает формальный аппарат римановой теории многообразий, 2) отчасти восполняет пробелы в последней части мемуара. Мы воздерживаемся от воспроизведения этого комментария по той причине, что формальный аппарат теории многообразий достаточно освещён, притом под современным углом зрения, в приведённом в настоящем издании комментарии Вейля к «Ueber die Hypothesen» (стр. 521); что же касается второго из отмеченных пунктов, то интересующийся им читатель не затруднится обратиться к немецкому изданию «Riemann's Werke».

XXIV. РАВНОВЕСИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА НА КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ФИГУР, ОГРАНИЧЕННЫХ КРУГАМИ

(*Werke, XXVI*)

Заметка, которую Вебер в первом издании «Riemann's Werke» озаглавил «Gleichgewicht der Elektrizität auf Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen» и к которой во втором издании добавил подзаголовок «Konforme Abbildung von durch Kreise begrenzten Figuren», скомпанована издателем из нескольких авторских набросков, содержащих

[1]) См. предисловие к «Riemann's Werke».

преимущественно формулы; о датировке этих набросков не даётся никаких сведений.

Здесь Риман приходит к одному из основных предложений теории автоморфных функций: именно, он устанавливает, что функция $z(\zeta)$, которая является обратной по отношению к автоморфной функции $\zeta(z)$, может быть представлена как отношение двух частных интегралов линейного дифференциального уравнения с алгебраическими коэффициентами. Более подробные сведения, относящиеся к этому вопросу, можно найти в книге Р. Форда «Автоморфные функции» (ОНТИ, 1936), гл. IV, § 44 и гл. XI.

XXV. К ТЕОРИИ ЦВЕТНЫХ КОЛЕЦ НОБИЛИ

(*Werke, III*)

Статья «Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe» напечатана в Annalen der Physik und Chemie, т. 95, 1855 г.: она была прислана Риманом взамен взятой им обратно рукописи «Neue Theorie des Rückstandes in elektrischen Bindungsapparaten» (см. ниже изложение соответствующих обстоятельств). По поводу колец Нобили Риман тогда же писал своей сестре: «Предмет этот важен потому, что производимые опыты дают возможность очень точных измерений и, следовательно, могут быть использованы для проверки справедливости законов движения электричества»

[1] к стр. 419.

Допускается, что напряжение (потенциал) постоянно на ограничивающей пластинке: при $z=0$, далее Риман полагает $u=0$. Другими словами, линии тока ортогональны пластинке.

[2] к стр. 421.

Уравнение

$$\frac{d^2y}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dy}{dr}-\frac{n^2\pi^2}{4\beta^2}y=0$$

посредством замены

$$i\frac{n\pi}{2\beta}r=x$$

приводится к уравнению Бесселя порядка 0:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

[3] к стр. 421.

Здесь введены обозначения Гаусса:

$$\Pi(x)=\Gamma(x+1),\quad \Psi(x)=\frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)};$$

при x целом положительном ($x=n$)

$$\Psi(n)=-C+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

(C — Эйлерова постоянная).

[4] к стр. 422.

Полусходимость этих рядов (члены которых не стремятся к нулю при $m \to \infty$) нужно понимать лишь в том смысле, что при неограниченном возрастании q выражения, стоящие справа, имеют пределами выражения, стоящие слева. Чтобы доказать справедливость высказываемого здесь Риманом утверждения, Вебер («Riemann's Werke», 1892, стр. 64—66) ссылается на некоторые результаты, полученные в теории бесселевых функций, именно на работу Hankel'я (Math. Ann., т. 2) и свою собственную (Math. Ann., т. 37).

[5] к стр. 424.

Некоторые сведения о позднейших экспериментах с кольцами Нобили содержатся в примечании Вебера на стр. 62 «Riemann's Werke», 1892.

XXVI. О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА и т. д.

(*Werke, II*)

«Ueber die Gesetze der Verteilung von Spannungselektrizität in ponderablen Körpern etc.» — заглавие доклада, сделанного Риманом в сентябре 1854 г. на Съезде естествоиспытателей и врачей в Гёттингене.

Следующий отрывок из письма Римана к его отцу знакомит нас с некоторыми подробностями его доклада:

«Очередь до меня дошла в четверг, и так как на заседании нашей секции не было объявлено другого доклада, то накануне вечером я должен был свою тему подготовить и развить в несколько большей степени, чтобы как-нибудь заполнить положенное для заседания время. Вначале я имел намерение лишь вкратце изложить мой закон, а теперь я обратился также к рассмотрению различных явлений и показал согласие закона с опытными данными. Правда, в этой последней части речь моя была менее свободной (weniger fliessend), но я всё же думаю, что впечатление целого от того не проиграло; говорил я около $\frac{5}{4}$ часа. Тот факт, что я говорил в публичном собрании, кроме того, был полезен для моих лекций[1]); я, между прочим, убедился, как велика получается разница в изложении в зависимости от того, были ли все мысли подготовлены заранее и начисто, или же подготовка была закончена непосредственно перед самым изложением».

XXVII. НОВАЯ ТЕОРИЯ ОСТАТОЧНОГО ЗАРЯДА В АППАРАТАХ, СЛУЖАЩИХ ДЛЯ НАКОПЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

(*Werke, XX*)

Рукопись «Neue Theorie des Rückstandes in elektrischen Bindungsapparaten» датируется 1854 г.; она содержит подробное изложение результатов, резюмированных Риманом в его докладе на Съезде естествоиспытателей и врачей и была полностью подготовлена для печати. В письме к брату от 26 июня Риман говорит:

---

1) Риман как раз должен был впервые начать чтение курса уравнений математической физики.

«Кольрауш недавно произвёл и опубликовал ряд очень точных измерений, связанных с одним ещё не исследованным явлением (остаточным зарядом в лейденской банке), а из моих общих исследований по связи между электричеством, светом и магнетизмом вытекает объяснение этого явления. Я говорил по этому вопросу с Кольраушем, и это послужило поводом для того, чтобы я для него разработал и ему послал теорию остаточного заряда. Кольрауш был очень приветлив, побудил меня направить мою работу для напечатания в Берлин — Поггендорфу, издателю Annalen der Physik und Chemie»...

Так как встреча Римана с Кольраушем имела место во время пасхальных каникул и так как в том же письме Риман упоминает, что летом будет ждать корректур, то нужно думать, что к моменту написания цитированного письма рукопись уже была отправлена по назначению. Доклад Римана состоялся 21 сентября; после того Риман ещё раз виделся с Кольраушем в Гёттингене и затем вёл с ним переписку по поводу представленной рукописи, но, как свидетельствует Дедекинд, всё дело закончилось тем, что «Риман решился воздержаться от опубликования своей работы, вероятно, по той причине, что он не был согласен произвести в ней те изменения, которые ему советовали сделать». Заметим, наконец, что в подлиннике рукописи «Neue Theorie des Rückstandes» (напечатанной впервые в Riemann's Werke, 1876) перечёркнут весь параграф 3 («Plausible Auffassung dieses Gesetzes»). См. примечание Вебера на стр. 371 Riemann's Werke, 1892.

XXVIII. ПО ПОВОДУ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(*Werke, XIV*)

В Собрании сочинений Римана мы находим следующее примечание Вебера:

«Эта статья была представлена Риманом 10 февраля 1858 г. Гёттингенскому Научному обществу (на рукописи имеется соответствующая пометка секретаря общества), но позднее была взята обратно. Будучи опубликована уже после смерти Римана в Annalen der Physik und Chemie, т. CXXXI, она подверглась критике со стороны Клаузиуса (там же, т. CXXXV), который в основном сделал такое возражение:

В силу сделанных предположений сумма

$$P = -\int^{t} \sum\sum \varepsilon\varepsilon' F\left(\tau - \frac{r}{\alpha}, \tau\right) d\tau$$

должна иметь бесконечно малое значение. Если же позднее получаемое для неё значение не оказывается бесконечно малым, то причину этому следует видеть в некоторой оперативной ошибке. Именно, Клаузиус усматривает ошибку в незаконной перестановке пределов интегрирования.

Это возражение (говорит дальше Вебер) кажется мне обоснованным, и вместе с Клаузиусом я полагаю, что отмеченная несообразность не укрылась от Римана, и потому он взял работу обратно.

Хотя существенная часть римановой дедукции таким образом отпадает, я всё же решился включить статью в собрание сочинений, так как не могу взять на себя суждение о том, не содержится ли здесь зародыш дальнейших плодотворных идей в этой чрезвычайно интересной области».

С другой стороны, R. Reiff и A. Sommerfeld в статье, помещённой в Enzyklopädie d. Math. Wiss. (V, 12), подробно излагают содержание работы Римана и, указывая на критику Клаузиуса, вместе с тем особо отмечают то обстоятельство, что потенциал Римана согласуется с потенциалом Неймана, если положить $\alpha^2 = \frac{1}{2}c^2$, где c — константа Вебера-Кольрауша, т. е. если принять α равным скорости света. «Интерес римановой теории, — заключают эти авторы, — зависит, во-первых, от последнего обстоятельства, позволяющего видеть в Римане предшественника Максвелла, и, во-вторых, от того, что современная теория электронов в некотором смысле снова приводит к римановой форме элементарного потенциала».

[1] к стр. 444.

К этим не вполне очевидным соображениям можно присоединить следующую формальную иллюстрацию. Ограничиваясь линейным случаем, допустим, что частицы расположены в точках $\nu\beta$ $(-\infty < \nu < +\infty)$, причём масса равна $+1$ или -1, смотря по тому, будет ли ν чётным или нечётным. С помощью трансформации

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=0}^{n} A_{\mu,\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=0}^{n} A_{\mu,\nu+\mu}$$

получим, предполагая непрерывность (и абсолютную интегрируемость в бесконечных пределах) функции $f^{(n)}(x)$:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu} f(\nu\beta) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\nu} C_n^{\mu} f(\nu\beta) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\nu+\mu} C_n^{\mu} f(\overline{\nu+\mu}\,\beta) = \\ &= \frac{\beta^n}{2^n} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu} f^{(n)}(\xi_\nu) \quad (\nu\beta < \xi_\nu < \overline{\nu+n}\,\beta),\end{aligned}$$

$$\left| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu} f(\nu\beta) \right| < \frac{\beta^n}{2^n} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |f^{(n)}(\xi_\nu)| < \beta^n \cdot \mathrm{const}.$$

XXIX. О МЕХАНИЗМЕ УХА

(*Werke, XVIII*)

Фрагмент последней работы Римана «Mechanik des Ohres» был напечатан в Zeitschrift für rationelle Medicin, (3), т. 29, со следующим редакционным примечанием: «Выдающийся математик, которого ранняя смерть отняла у нашей школы и нашей науки, в последние месяцы своей жизни занимался — под влиянием учения Гельмгольца о звуковых ощущениях — теорией органа слуха. Те его заметки, которые относятся к этой области и теперь здесь публикуются, представляют наверное лишь небольшую и менее существенную часть задуманного сочинения; и всё же воспроизведение этих отрывков, без сомнения, может быть оправдано именем их автора и ценностью его суждений, а также и тем обстоятельством, что приводимый материал является образцом методической обработки предмета. Первый раздел и бо̀льшая часть второго переписаны автором набело; остальное скомпановано из записей на отдельных листах — таков обычный вид первоначальных набросков Римана. Замечание, которое касается теории Гельмгольца, мало понятно при отсутствии дальнейших разъяснений; однако, судя по некоторым устным высказываниям Римана, можно предполагать, что различие воззрений должно было бы обнаружиться при исследовании передачи звуковых колебаний органам улитки, и что Риман имел в виду математическое решение некоторой возникающей здесь гидравлической проблемы. Schering. Henle».

Прибавим, что Риман интересовался не только ухом, но и глазом: об этом свидетельствует найденный в его бумагах собственноручный чертёж слепого пятна (см. «Nachträge», стр. 113).

XXX. ФРАГМЕНТЫ ФИЛОСОФСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

(*Werke, Anhang*)

В «Riemann's Werke» Вебер предпосылает «Фрагментам» введение, существенную часть которого мы здесь воспроизведём.

Философские размышления, результаты которых здесь излагаются, занимали Римана, как можно судить по оставленному им наследию, на протяжении большой части его жизни. Время возникновения отдельных отрывков едва ли может быть установлено вполне точно. Сохранившиеся наброски отнюдь не приведены автором к виду связного, готового для печати изложения, хотя некоторые места указывают, что Риман кое-когда и предусматривал таковое; при отсутствии детализации всё же они достаточны, чтобы в общих чертах характеризовать позицию Римана по отношению к вопросам психологического и натурфилософского порядка и установить направление его исследований. Какое значение сам Риман придавал своим философским работам, ясно из следующей заметки:

«Работы, которые меня теперь преимущественно занимают, таковы:

1. Подобно тому как это уже сделано с большим успехом в отношении алгебраических функций, показательных или круговых, эллиптических и абелевых функций, ввести мнимость в теорию также и других трансцендентных функций; для этого уже выполнена в моей диссертации самая необходимая подготовительная работа (см. § 20 этой диссертации).

2. В связи с этим находятся новые методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных, которые я уже применил с успехом ко многим вопросам из области физики.

3. Главная моя работа относится к новому пониманию известных законов природы — я имею в виду их формулировку с помощью других основных понятий, — причём стало возможным использование экспериментальных данных, касающихся взаимоотношения между теплотой, светом, магнетизмом и электричеством, для исследования их взаимной связи. К этому меня побудило, главным образом, изучение сочинений Ньютона, Эйлера и — с другой стороны — Гербарта. Что касается последнего, то к самым ранним исследованиям Гербарта, результаты которых изложены в его диссертациях (защищённых 22 и 23 октября 1802 г.), я смог примкнуть почти безоговорочно, но от дальнейшего хода его философских размышлений должен был отклониться в одном существенном пункте, чем и обусловливается моё особое отношение к его натурфилософской системе и тем утверждениям из области психологии, которые связаны с этой системой».

Дальше в другом месте мы находим более точные указания по поводу этого пункта:

«Автор является гербартианцем, поскольку речь идёт о психологии и теории познания (методологии и эйдолологии), но он по большей части не может примкнуть к его натурфилософии и к связанным с нею метафизическим дисциплинам (онтологии и синекологии)»...

В дальнейшем по поводу фрагментов «Тяготение и свет» и «Новые математические принципы натурфилософии», объединённых под общим заглавием «Натурфилософия», Вебер отмечает, что в письме от 28 декабря 1853 г. Риман высказывает намерение опубликовать исследование, к которому должен был бы относиться первый из упомянутых фрагментов. Что касается второго, то на подлиннике его имеется дата «1 марта 1853 г.» — таким образом можно думать, что он более раннего происхождения.